

VÉLETLENSZERŰ JELENSÉGEK  
NEMLINEÁRIS RENDSZEREK BEN

# A KÁOSZ

SZERKESZTETTE  
SZÉPFALUSY PÉTER – TÉL TAMÁS

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST



Véletlenszerű jelenségek  
nemlineáris rendszerekben

## A KÁOSZ

Szerkesztette  
SZÉPFALUSY PÉTER  
és TÉL TAMÁS

A nemlineáris jelenségek korunk több tudományában alapvető szerepet játszanak. Egyik látványos megnyilvánulásuk abban áll, hogy bizonyos körülmények között szabálytalan, kaotikus mozgásformák alakulnak ki, amelyek leírására statisztikus módszereket kell használnunk. A problémakör egyik érdekessége, hogy olyan témákat is érint, pl. turbulencia, amelyek kutatása már a múlt században megkezdődött, és lényegét tekintve mindmáig megoldhatatlan volt. Azt, hogy a káosz vizsgálata éppen napjainkban került az érdeklődés középpontjába, az tette lehetővé, hogy az utóbbi két évtizedben több tudományterületen, így pl. a matematikán és a statisztikus fizikán belül, számos jelentős felismerés minőségileg új helyzetet teremtett. A kaotikus viselkedés vizsgálatára nem mindig elegendők az ismert matematikai eszközök. A számítógépek viszont kiválóan alkalmazhatók



AKADÉMIAI KIADÓ  
BUDAPEST











Véletlenszerű jelenségek  
nemlineáris rendszerekben

## A KÁOSZ

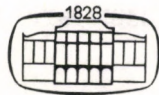




Véletlenszerű jelenségek  
nemlineáris rendszerekben

# A KÁOSZ

Szerkesztette  
SZÉPFALUSY PÉTER  
TÉL TAMÁS



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1982

A kötet a Magyar Tudományos Akadémia  
Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának  
Statisztikus Fizikai Albizottsága rendezésében  
1982. január 11–16. között tartott  
téli iskola kibővített anyagát tartalmazza

© Akadémiai Kiadó, Budapest 1982

ISBN 963 05 3208 5

Printed in Hungary  
Akadémiai Nyomda, Budapest



## E L Ő S Z Ó

A nemlineáris jelenségek korunk több tudományában alapvető szerepet játszanak és elmondható, hogy megértésük terén front-áttörésszerű fejlődés következett be az utóbbi időben. Egyik látványos megnyilvánulásuk abban áll, hogy viszonylag egyszerű nemlineáris rendszerekben is rendkívül bonyolult, szabálytalan mozgásformák alakulhatnak ki, melyek determinisztikus egyenletek sztohasztikusan viselkedő megoldásaiként értelmezhetők. Az ilyen, ún. kaotikus mozgás - melynek leírására statisztikus módszereket kell használnunk - az alap- és alkalmazott tudományok igen különböző szakterületein is az érdeklődés homlokterébe került.

A problémakör egyik érdekessége, hogy olyan témákat is új megvilágításba helyezett, melyek kutatása már a múlt században megkezdődött, mint pl. az égi mechanikában olyan fontos háromtest probléma, a turbulencia és kialakulásának kérdése, valamint az irreverzibilitásnak és a statisztikus fizika megalapozásának problémái. Azt, hogy a káosz kiterjedt vizsgálata éppen napjainkban indulhatott meg, a fenti témákban felgyülemlett hatalmas ismeretanyagon kívül az tette lehetővé, hogy az utóbbi két évtizedben több tudományterületen számos jelentős felismerés született. Említésre kívánkozik a differenciálegyenletek kvalitatív tulajdonságainak vizsgálata terén a különös attraktor felfedezése. A természettudományokon belül pedig jelentős tényező volt a struktúrák (a fázisátalakulásoknak, ill. az egyensúlytól távoli fizikai, kémiai és biológiai rendszerekben létrejövő disszipatív struktúrák) kialakulásának megértésében bekövetkezett fejlődés. A jelenség elvi alapjainak a tisztázása vezetett el a káosz kialakulására vonatkozó univerzális törvények felfedezéséhez. A kaotikus rendszerek vizsgálatának előtérbe kerülését jól mutatja az ezzel foglalkozó közlemények számának robbanásszerű megnövekedése.

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályához tartozó Statisztikus Fizikai Albizottság

1982. január 11. és 16. között iskolát rendezett Budapesten a káosz témaköréből. A könyv az ott elhangzott előadások (néhol átdolgozott és kibővített) anyagát tartalmazza az iskolán követett sorrendben. A kötet tizenöt cikkből s egy nagyobb terjedelmű tanulmányból áll. Az utóbbi az iskola bevezető előadásain elhangzott témaköröket fedi le, összeállításában és felépítésében az volt a cél, hogy lehetőleg minél szélesebb érdeklődési körű olvasóközönség számára nyújtson egységes bevezetést.

Abból a meggyőződésből kiindulva, hogy a Téli Iskola anyagának kiadása akkor válhat leginkább a hazai kutatások és oktatás hasznára, ha a lehető legcsekélyebb késéssel követi az Iskolát, a camera ready kiadási formát választottuk. Köszönet illeti mindazokat, akik a könyv gyors megjelentetése érdekében közreműködtek. A szerzőket, akik sokrétű elfoglaltságuk közepette soronkívül időt szakítottak cikkeik megírására, az Akadémiai Kiadó munkatársait, akik a könyv elkészítésének minden fázisában áldozatkészen biztosították a gyors átfutási időt. Köszönettel tartozunk Pákh Albertnének a gyors és gondos gépelési munkáért.

Szépfalusy Péter

Tél Tamás



## TARTALOM

ELŐSZÓ	5
Gnädig Péter, Györgyi Géza, Szépfalusy Péter, Tél Tamás	
BEVEZETÉS A KÁOSZ KIALAKULÁSÁNAK ÉS TULAJDONSÁGAINAK ELMÉLETÉBE	9
Bifurkációk, káosz egyszerű mechanikai rendszerekben	13
Káosz elektronikus áramkörökben	41
A különös attraktor természetrajza	58
Kaotikus állapothoz vezető bifurkációk	71
A káosz tulajdonságai	137
Függelék	216
 Tél Tamás	
KÁOSZ KÉMIAI REAKCIÓKBAN	271
 Gálfi László	
INTERMITTENCIA: A KÁOSZ KIFEJLŐDÉSÉNEK EGY ÚTJA	299
 Bergou János	
KÁOSZ OPTIKAI RENDSZEREKBEN	311
 Érdi Bálint	
SZTOCHASZTIKUS VISELKEDÉS AZ ÉGI MECHANIKÁBAN	329
 Krámli András	
BEVEZETÉS A KOLMOGOROV-ARNOLD-MOSER-ELMÉLETBE	349
 Tóth Bálint	
A TURBULENCIA RUELLE-TAKENS-ELMÉLETE	373



Rácz Zoltán	
KÁOSZ EGYENSÚLYI RENDSZEREKBEK	389
Párizs Gyula	
AZ HÉNON-HEILES-MODELL ÉS SZEREPE A PLAZMAFIZIKÁBAN	401
Gesztli Tamás	
AZ ERGODELMÉLET SZEREPE A STATISZTIKUS FIZIKA MEGALAPOZÁSÁBAN	423
Szász Domokos	
ERGODELMÉLET ÉS KÁOSZ	437
Vetier András	
A SZINAJ-BILIÁRD ERGODICITÁSA	479
Forgács Gábor	
KÁOSZ KVANTUMMECHANIKAI RENDSZEREKBEK	503
Györgyi Géza	
KÁOSZ KÜLSŐ ZAJ JELENLÉTÉBEK	523
Király Péter	
KÁOSZ-JELENSEGEK GEOFIZIKAI ÉS ASZTROFIZIKAI RENDSZEREKBEK	543
Perjés Zoltán	
KAOTIKUS VISELKEDES AZ UNIVERZUM FEJLŐDÉSÉBEK	567
A KÖTET SZERZŐI	607

BEVEZETÉS A KÁOSZ KIALAKULÁSÁNAK ÉS TULAJDONSÁGAINAK  
ELMÉLETÉBE

Gnädig Péter, Györgyi Géza,  
Szépfalusy Péter, Tél Tamás

1. Előzetes megjegyzések	11
<b>BIFURKÁCIÓK, KÁOSZ EGYSZERŰ MECHANIKAI RENDSZEREKBE</b>	
2. Mozgásokról és mozgásegyenletekről általában	13
3. Az inga. (Stabil, instabil és elliptikus fixpontok és a szeparátrix)	17
4. Az anharmonikus oszcillátor. Bifurkációk	22
5. Határciklus. A Duffing-oszcillátor	27
6. Periodikusan "lökdőstt" harmonikus oszcillátor	35
<b>KÁOSZ ELEKTRONIKUS ÁRAMKÖRÖKBEN</b>	
7. A Van der Pol-oszcillátor	41
8. Alagút-diódás oszcillátor	46
9. Poincaré-leképezés meghatározása	50
10. A stacionárius valószínűség-eloszlás	54
<b>A KÜLÖNÖS ATTRAKTOR TERMÉSZETRAJZA</b>	
11. Kvázi-kétdimenziós különös attraktorok	58
12. A különös attraktorok néhány típusa a visszatáplálás módja szerint	61
13. Kapcsoló változót nem tartalmazó rendszerek	65
14. Az alaptípusoknak megfelelő Poincaré-leképezések	67
<b>KAOTIKUS ÁLLAPOTHOZ VEZETŐ BIFURKÁCIÓK</b>	
15. Az egydimenziós leképezés és fixpontjai	71
16. Stabilitás, lineáris tranziensek	73
17. Bifurkációk végtelen sorozata	76
18. Skálatulajdonságok	86
19. Renormálási transzformáció az egydimenziós leképezésen	91
20. Síkbeli leképezések	95
21. A káosz differenciálegyenlettel leírható rendszerekben - számítógépes és laboratóriumi kísérletek	108
22. A Lorenz-modell bevezetése	
23. Bifurkációk a Lorenz-modellben - lokális stabilitás-vizsgálat	115
24. Globális stabilitásvizsgálat. "Preturbulencia". A standard Lorenz-attraktor	121
25. A káosz kialakulásának egyéb útja	133



## A KÁOSZ TULAJDONSÁGAI

26.	Ergodikus trajektóriák az egydimenziós leképezéseknél, a valószínűségi eloszlás	137
27.	A Ljapunov-exponens és a káosz	141
28.	A kaotikus trajektória: információnyelő és információforrás	146
29.	Kaotikus sávok. A sávok kettéválásának végtelen sorozata	151
30.	Periodikus és különös attraktorok váltakozása	156
31.	Skálatulajdonságok az egydimenziós leképezés kaotikus tartományában	159
32.	Kaotikus viselkedés síkbeli leképezésekben	168
33.	Kaotikus viselkedés differenciálegyenletekkel leírható rendszerekben - számítógépes és laboratóriumi kísérletek	181
34.	Integrálható és nem integrálható Hamilton-rendszerek	186
35.	A Kolmogorov-Arnold-Moser tétel és az Arnold-diffúzió	192
36.	Hamilton-rendszerek leképezései és a káosz	203

## FÜGGELÉK

F.1	Differenciálegyenletek megoldása a szinguláris pontok közelében	216
F.2	Poincaré-leképezések	
F.3	Kétdimenziós kvadratikus leképezések	233
F.4	Az egydimenziós leképezések Feigenbaum-szekvenciáinak univerzális elmélete	237
F.5	Hausdorff-dimenzió, Cantor-halmaz	252
F.6	Hatás- és szögváltozók a klasszikus mechanikában	
F.7	Káosz retardált rendszerekben	261

## IRODALOM

266



## 1. ELŐZETES MEGJEGYZÉSEK

Nemlineáris rendszerek bizonyos körülmények között szabálytalan, kaotikus viselkedést mutatnak. A kaotikus mozgás alapvető sajátossága, amelyből egy sor egyéb tulajdonsága is következik, a kezdőfeltételekre mutatott érzékenység. Ez abban áll, hogy olyan mozgások, melyek jellemzői egy pillanatban igen kevésbé különböztek, általában nagyon rövid idő alatt teljesen eltérőekké válnak. Pontosabban fogalmazva, a közeli trajektóriák exponenciálisan, vagyis minden hatványfüggvénynél gyorsabban növekvő ütemben, távolodnak egymástól. Párosítva ezt azazal, hogy itt természetesen véges tartományra korlátozódó mozgásról van szó, nyilvánvalóan léteznie kell egy visszatérítési mechanizmusnak, és így nem meglepő, hogy rendkívül bonyolult módon keveredő trajektóriák alakulnak ki, melyek bármilyen véges pontosságú mérés számára véletlenszerű tulajdonságokat mutatnak. Érthető tehát, hogy a kaotikus állapot leírására statistikus módszereket kell használnunk. A káosz tulajdonságai jól tükröződnek abban, hogy a mozgáshoz  folytonos Fourier-spektrum tartozik, mely gyakran alapja kaotikus állapot kísérleti kimutatásának. Hangsúlyoznunk kell, hogy káoszról akkor beszélünk, ha a mozgás sztochasztikus tulajdonságai nem külső zaj következtében jönnek létre. Erre utal az, hogy káosz jelenléte esetén szokás determinisztikus zajról beszélni. A kaotikus viselkedés alapjainak feltárásában fontos szerepet játszott az a tény, hogy az kis szabadsági fokú nemlineáris rendszerekben is kialakulhat.

E bevezető tanulmány célja az, hogy megismertesse az Olvasót a kaotikus viselkedés leírására kialakult legfontosabb elméleti módszerekkel, s egyben, ahol csak lehet, utaljon a kísérleti eredményekre is. A tanulmány megértéséhez nem szükséges az alsóéves műszaki- és tudományegyetemi ismeretanyagon túlmenő tájékozottság.

Az anyagot úgy állítottuk össze, hogy először egyszerű fizikai - mechanikai és elektromos - rendszereket tárgyalunk, s ezek segítségével alakítunk ki szemléletes képet a káosz természetéről és megjelenésének tipikus lehetőségeiről mind a



disszipatív, mind pedig a Hamilton-rendszerekben. A kaotikus viselkedés eredetét keresve jutunk el annak a felismeréséig, hogy az sok esetben valamely intervallum önmagára történő leképezésének sajátosságaira vezethető vissza. Az egydimenziós leképezések tulajdonságainak vizsgálata képezi azután a tanulmány egyik központi részét. Az Olvasó kényelmét kívánja szolgálni, hogy azokat az előismereteket, amelyekre gyakran támaszkodunk, a Függelékekben összegyűjtöttük. Itt helyeztünk el továbbá olyan technikai jellegű részeket is, amelyek ismertetése másutt megtörte volna a gondolatmenetet. Megjegyezzük, hogy az alkalmazásokat tekintve a bevezető tanulmány viszonylag kevés területet érint; ennek oka kézenfekvően az, hogy a könyv többi cikke közül számos éppen egyes alkalmazási területeket dolgoz fel.

Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy első olvasásra bizonyos fejezetek (pl. a 10., 19., 28., F.3, F.4) elhagyhatók. Azok számára viszont, akiket a probléma absztraktabb megközelítése érdekel, ajánljuk, hogy az egy- és kétdimenziós leképezések (15-20., 26-32. fejezet), valamint a Hamilton-rendszerek (34-36. fejezet) tanulmányozásával kezdjék az olvasást, s ezután térjenek rá a többi - a differenciálegyenletek és a leképezések közötti összefüggést tárgyaló - fejezetre. Kísérleti eredmények ismertetésére a 21., 25. és 33. fejezetben kerül sor.

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy a témakör olyan sokrétűvé vált, hogy nem lehetséges egyszerű konklúzióval zárni a tárgyalást, hiszen szinte minden megemlített kutatási irányban manapság igen intenzív munka folyik. A tájékozódás megkönnyítése érdekében ezért meglehetősen részletes irodalmat adunk meg.

## 2. MOZGÁSOKRÓL ÉS MOZGÁSEGYENLETEKRŐL ÁLTALÁBAN

Ebben a fejezetben egyszerű mechanikai rendszereket vizsgálunk, melyek alkalmasak arra, hogy a káosz kialakulásával kapcsolatos legfontosabb fogalmakat és jelenségeket, illetve a kaotikus mozgás jellemzésére alkalmas mennyiségeket rajtuk tanulmányozzuk és jól megértsük. A bemutatott példákat igyekeztünk a legegyszerűbbek és a legismertebbek közül összeválogatni.

Olyan rendszereket fogunk vizsgálni, melyek néhány szabadsági fokkal jellemezhetők, és időbeli fejlődésüket egyszerű típusú differenciálegyenletek írják le. Bár a mozgásegyenletük általában semmilyen szingularitást nem mutat, s ezért a rendszer mozgását rövid időtartamokra egyszerű sima függvényekkel írhatjuk le, hosszú idő múlva bizonyos körülmények között teljesen kiszámíthatatlan, rendszertelen, kaotikus viselkedést tapasztalunk. Meg fogjuk mutatni, hogy kaotikus viselkedés már egészen kevés szabadsági foknál fellép, s hogy a rendezetlen mozgás nem néhány nagyon speciális rendszer sajátja, hanem nemlineáris, egynél több szabadsági fokú mechanikai rendszereknél tipikus.

A mechanikai rendszerek tárgyalásánál meg szoktak különböztetni konzervatív és disszipatív rendszereket. Ezek között bizonyos hasonlóság, de lényeges különbségek is felfedezhetők. A káosz szempontjából nézve is találunk közös és eltérő vonásokat a konzervatív és a disszipatív rendszerek között, ezeket igyekeztünk hangsúlyozni, s az analógiák kiemelésével és a különbségek megjelölésével egy egységes képet próbáltunk kialakítani a mechanikai rendszerek hosszútávú mozgásformáiról.

Egy véges sok szabadsági fokú mechanikai rendszert (sőt általánosabban: minden olyan rendszert, amelynek nincsen hosszútávú "memóriája", vagyis a mozgása csak a pillanatnyi állapottól függ) közöséges differenciálegyenlettel, vagy diffe-



rencialegyenlet-rendszerrel írhatunk le. Az egyenletekben általában magasabb időderiváltak is előfordulnak (a mechanikában például tipikus a második derivált), de a sebességeknek (vagy szükség esetén a még magasabb deriváltaknak) új változóként történő bevezetésével a mozgásegyenlet

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2.1)$$

alakra hozható. Ebben

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

egy  $n$ -dimenziós vektor,  $\vec{f}(\vec{x})$  pedig  $n$  számú adott - és "símának" feltételezett - függvény.

Amennyiben (2.1) jobboldalán expliciten fellépne az idő is, úgy az  $x_{n+1} \equiv \alpha t$  új változóval a

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_k, t) \quad (k, i = 1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszer

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{x_{n+1}}{\alpha}), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \alpha \equiv f_{n+1}$$

alakra hozható, vagyis (2.1)-nek megfelelő ún. autonóm egyenletrendszerré alakítható ( $\alpha$  egy tetszőleges időskála-paraméter).

A (2.1) egyenletrendszer a több szabadsági fokú rendszer mozgását egyetlen pontnak egy  $n$ -dimenziós térben, az állapot-térben történő mozgására vezeti vissza. (A mechanikai rendszerek tárgyalásánál az állapotteret gyakran fázistérnek nevezik; mi is használni fogjuk mindkét elnevezést.) Bevezetve a  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$  jelölést, (2.1) az állapottér minden pontjához egy

$$\vec{v} = \vec{f}(\vec{x})$$

sebességvektort rendel, vagyis az állapottérben - a háromdi-

menziós térben történő folyadékáramláshoz hasonlóan - egy áramlási teret definiál.\*

A mechanikai rendszerek között kitüntetetten fontos szerepet játszanak az ún. konzervatív rendszerek. Ezek mozgásegyenlete egy (az időtől független)  $H$  Hamilton-függvényből származtatható [1]:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

és

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

ahol  $q_i \equiv x_i$  és  $p_i \equiv x_{N+i}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) a kanonikusan konjugált változópárok,  $H(p_i, q_i)$  pedig egy adott  $n=2N$  változós függvényt jelöl.

Konzervatív rendszereknél a  $\vec{v}(\vec{x})$  sebességmező divergencia-mentes, hiszen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0, \end{aligned}$$

a fázistérbeli áramlás tehát egy összenyomhatatlan folyadék mozgásával analóg. Ennek az a következménye, hogy a fázistér valamely kiszemelt, és az áramlással együtt mozgó tartományának a térfogata időben állandó marad. Ez Liouville tétele.

Nem konzervatív - ún. disszipatív - rendszerek mozgásegyenletének  $\vec{v}(\vec{x})$  áramlási tere nem forrásmentes, hanem általában

$$\operatorname{div} \vec{v} < 0.$$

Ilyenkor a Liouville-tétel sem érvényes, hanem a fázistérbeli térfogatelemek nagysága a mozgás során csökken.

\* Az "áramlási tér" elnevezés helyett - főleg a matematikai irodalomban - használatos még a "folyam" kifejezés is.



Vannak olyan rendszerek, melyek mozgásegyenlete egy, az időtől expliciten is függő  $H(p_i, q_k, t)$   $2N+1$  változós függvényből származtatható, a (2.2) és (2.3) kanonikus egyenletek segítségével. Ezek az ún. Hamilton-féle rendszerek, melyekben ugyan az

$$E = H(p, q, t)$$

energia nem mozgásállandó, mint a konzervatív rendszereknél, hiszen

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0,$$

viszont a Liouville-tétel továbbra is érvényes:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{i=1}^{2N+1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) + \frac{\partial v_{2N+1}}{\partial x_{2N+1}} = 0.$$

Mivel a sebességmező  $2N+1$ -edik komponense állandó, a Liouville-tétel nemcsak a  $(2N+1)$ -dimenziós állapot térben érvényes, hanem minden egyes időpillanatban fennáll, hogy a  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{2N})$  "redukált sebességmező" forrásmentes. Hamilton-féle rendszer például egy periodikusan változó külső erővel gerjesztett lineáris harmonikus oszcillátor, melynek mozgását a

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 - \varepsilon q \cos \omega t$$

Hamilton-függvényből kapható egyenletek írják le.

A konzervatív és a disszipatív rendszerek különbsége aszerint válik lényegessé, vagy lényegtelenné, hogy milyen időskálán nézzük a mozgás lefolyását. A disszipáció nagyságára a fázistérbeli tartományok térfogatának csökkenési üteme, azaz a reciprok idő dimenziójú  $|\operatorname{div} \vec{v}| \sim 1/T$  mennyiség nagyságrendje a jellemző. Amennyiben  $t \ll T$  időkre vizsgáljuk a rendszert, úgy a disszipációról megfeledkezhetünk,  $t \gg T$  időtartamokra viszont a disszipáció lényeges szerepet játszik, s ezért semmiképpen sem hanyagolhatjuk el. Bár valamilyen kis mértékben minden mechanikai rendszer disszipatív (tehát  $T$  véges) és az esetleges kaotikus mozgás tanulmányozásához a  $t \rightarrow \infty$ -beli vi-



selkedést kell megvizsgálnunk, mégis bizonyos esetekben jó közelítés lehet a rendszert konzervatívnak tekinteni, a disszipációt elhanyagolni. Ha ugyanis a konzervatívnak tekintett rendszer karakterisztikus változási ideje (például a rendszer egyes részeinek keringési ideje, vagy rezgési periódusa)  $\tau$  lenne, s  $\tau \ll T$ , akkor a  $\tau \ll t \ll T$  közbenső (elég hosszú, de nem nagyon hosszú) időtartamokra a disszipáció nyilván elhanyagolható, s mivel nagyon sok periódusnyi mozgásra van idő, a mozgás effektív kaotikussá válására is van lehetőség. Ez a helyzet például a Naprendszerénél, ahol  $\tau \sim 1$  év, a bolygóközi anyag és az árapály-erők fékezéséből származó csillapítás  $T$ -je pedig több millió év, így a százezer éves nagyságrendű időskálán a rendszer konzervatívnak tekinthető, s mint látni fogjuk, kaotikus mozgás is kialakulhat.

### 3. AZ INGA. (STABIL, INSTABIL ÉS ELLIPTIKUS FIXPONTOK ÉS A SZEPARÁTRIX)

Tekintsük egy egyszerű 1 szabadsági fokú rendszer, a matematikai inga mozgását! Koordinátáinak választva az inga kitérésének  $q$  szögét (3.1 ábra), s a kis kitérésekhez tartozó rezgés  $\sqrt{g/l}$  körfrekvenciáját  $\omega_0$ -al jelölve a mozgásegyenlet

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0 \quad (3.1)$$

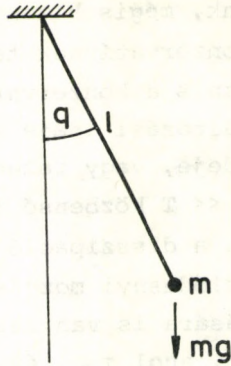
alakú. Ez az egyenlet a

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos q) \omega_0^2 \quad (3.2)$$

Hamilton-függvényből származtatható. A rendszer konzervatív, az  $E = H(p, q)$  mennyiség mozgásállandó.

Az  $\vec{x} = (x_1, x_2) = (q, p)$  változókra vonatkozó elsőrendű egyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 \sin x_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$



3.1 ábra. A matematikai inga

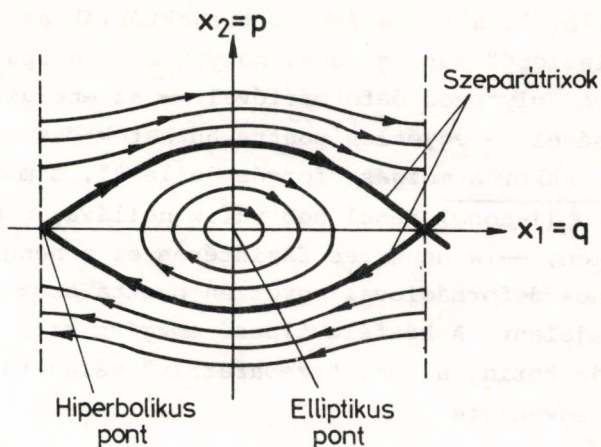
A mozgás a fázistérben az  $E$ -állandó görbék mentén történik (3.2 ábra). Mivel a  $q$  változó valamely értéke és a  $2\pi$ -vel nagyobb értéke a rendszernek ugyanazt az állapotát jelképezi, a fázisteret a  $q$  változójában  $2\pi$  szerint periodikussá kell tennünk; ezt úgy érhetjük el, hogy a fázisteret mintegy "feltekerjük" egy egységsugarú henger palástjára, s a 3.2 ábrán szaggatott vonallal jelölt egyenesek mentén "összevarrjuk".

A (3.3) mozgásegyenleteknek, mint elsőrendű autonóm egyenletrendszernek két szinguláris pontja van, a fázistérben két helyen válik a  $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$  sebesség nullává: az  $x_1 = x_2 = 0$  pontban (ez az inga alsó egyensúlyi helyzete), illetve az  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 0$  pontban (ami a felső holtponton nyugvó ingának felel meg).

Az  $x_1 = x_2 = 0$  pont körül linearizálva a fázistérbeli "áramlást" a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = D \vec{x}$$





3.2 ábra. Az inga fázistere

mozgásegyenlet adódik. Mivel  $D$  sajátértékei  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$  tisztán képzetes számok, a vizsgált pont a mozgásegyenletnek elliptikus fixpontja, vagy röviden elliptikus pontja (ld. F.1 függelék).

Az  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 0$  pont kis környezetében a mozgásegyenlet az az  $y_1 \equiv x_1 - \pi$  és  $y_2 \equiv x_2$  új változókban lineáris tagokig számolva

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

alaku, amely mátrixának sajátértékei  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Mivel az egyik sajátérték pozitív, a másik pedig negatív, a vizsgált pont hiperbolikus fixpont, más néven nyeregpont. A felső holt-pont az ingának instabil egyensúlyi helyzete, onnan tetszőlegesen kis mértékben kimozdítva a rendszert, az inga kitérése és sebessége egyre gyorsuló ütemben, kezdetben  $\exp(\omega_0 t)$  időfüggéssel, növekedni kezd.

Az inga mozgása — vagyis a fázistérbeli trajektóriák menete — az  $E$  mozgásállandó értékétől függően két (topológiailag különböző) osztályba sorolható. Amennyiben  $E < 2\omega_0^2$ , úgy a moz-

gás "lengő jellegű", a fázistérbeli trajektóriák az origó körüli "ellipszisszerű" zárt görbék, melyek a hengerpalástra tekint fázistéren folytonos deformációval — az energia fokozatos csökkentésével — egyetlen ponttá húzhatók össze. Ha viszont  $E > 2\omega_0^2$ , akkor a mozgás "forgás jellegű", s mivel  $p(q, E) = \sqrt{2E - 2\omega_0^2(1 - \cos q)}$  sehol sem válik nullává,  $q$  monoton nő, vagy csökken, — a hengeres fázistéren ez a hengert körülölelő, folytonos deformációval egyetlen ponttá össze nem húzható görbéket jelent. A kétféle típusú mozgást az  $E = 2\omega_0^2$ -nek megfelelő trajektória, az ún. "szeparátrix" választja el egymástól. Ennek egyenlete

$$p_{sx}(q) = \pm 2\omega_0 \cos \frac{q}{2}. \quad (3.4)$$

A szeparátrixnak két ága van, mindkettő a rendszer hiperbolikus fixpontjából indul ki és ugyanoda fut be. (Ez általában nem szükségszerű; egy hiperbolikus pontból kiinduló szeparátrix egy másik hiperbolikus pontba is befuthat, illetve a végtelenbe is távozhat. Az ingánál azonban — mivel csak egyetlen egy nyeregpontja van, továbbá a fázistérbeli trajektóriák az energia megmaradása miatt korlátosak — erre az általánosabb esetre nem nyílik lehetőség.) A hiperbolikus pont kis környezetében a szeparátrix ki-, és befutó ága éppen a linearizált egyenletekből megkapható sajátvektorok irányában helyezkednek el.

Az eddig elmondottak a csillapítás nélküli matematikai ingára, vagyis egy konzervatív rendszerre vonatkoztak. Ha azonban valamilyen — például a közegellenállásból származó — csillapítást is figyelembe akarunk venni, úgy a (3.1) egyenletet ki kell egészítenünk egy sebességfüggő taggal. Válasszuk például a legegyszerűbb esetet, a sebességgel arányos fékezőerőt, ekkor a mozgásegyenlet

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0, \quad (\alpha > 0) \quad (3.5)$$

ami az  $x_1 = q$  és  $x_2 = \dot{q}$  változókkal a



$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (3.6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\omega_0^2 \sin x_1 - \alpha x_2$$

elsőrendű egyenletrendszerre alakítható.

A szinguláris pontokat meghatározó  $x_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 - \alpha x_2 = 0$  egyenleteknek most is két megoldása van. Az  $x_1 = x_2 = 0$  pont kis környezetében a mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -\omega_0^2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = D \vec{x}$$

alakú. A D mátrix sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \omega_0^2},$$

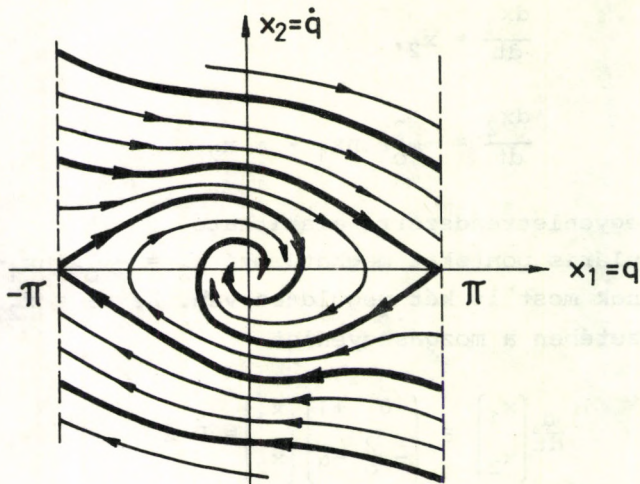
melyek valós része akármekkora pozitív  $\alpha$ -nál kisebb, mint nulla. Az origó tehát mindenképpen vonzó fixpont, pontosabban nem túl erős csillapításnál ( $\alpha < 2\omega_0$  esetén) fókusz (ld. az F.1 függelék F1.3 ábráját), erős ( $\alpha > 2\omega_0$ ) csillapításnál pedig csomópont (F1.1 ábra). Hasonlóan adódik, hogy az  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 0$  pont, a másik szinguláris pont közelében linearizált

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

mozgásegyenlet mátrixának sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega_0^2}.$$

Ezek valós számok, s az egyikük pozitív, a másik pedig negatív, így a  $q = \pi$ ,  $\dot{q} = 0$  pont a rendszer instabil egyensúlyi helyzetének megfelelő hiperbolikus fixpont, másnéven nyeregpont. A fázistérbeli trajektóriák a 3.3 ábrán vázolt görbék. A hiperbolikus pontból kiinduló szeparátrix-ágak most nem térnek vissza a nyeregpontra (mint a csillapítás nélküli ingánál), hanem kettő közülük (a két kifutó ág) a vonzó fixpontra



3.3 ábra. A csillapított inga fázisdiagramja

(a fókuszba) szalad bele, a másik két ág pedig a végtelenbe nyúlik.

#### 4. AZ ANHARMONIKUS OSZCILLÁTOR. BIFURKÁCIÓK

Egy rendszer szinguláris pontjainak jellege a rendszert jellemző paraméterek lassú változására megváltozhatnak; például a korábban stabil egyensúlyi helyzetek instabillá válhatnak, s új stabil egyensúlyi helyzetek jelenhetnek meg, és viszont.

Tekintsük például a

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + kq + q^3 = 0$$

differenciálegyenlettel leírt megoldást! Ez a  $V(q) = k \frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4}$  potenciálú előtérben mozgó és a sebességével arányos fékezőerőt érző tömegpont, a csillapított anharmonikus oszcillátor esete. Az  $\vec{x} = (q, \dot{q})$  változóiban a mozgásegyenlet



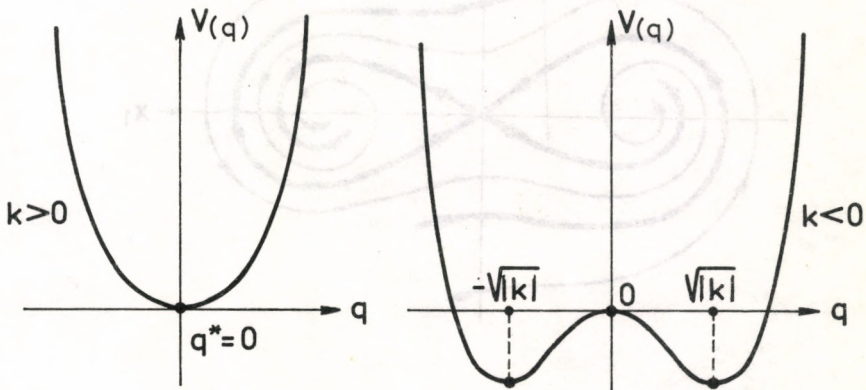
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha x_2 - x_1(k+x_1^2) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

melynek fixpontjait az

$$x_2 = 0,$$

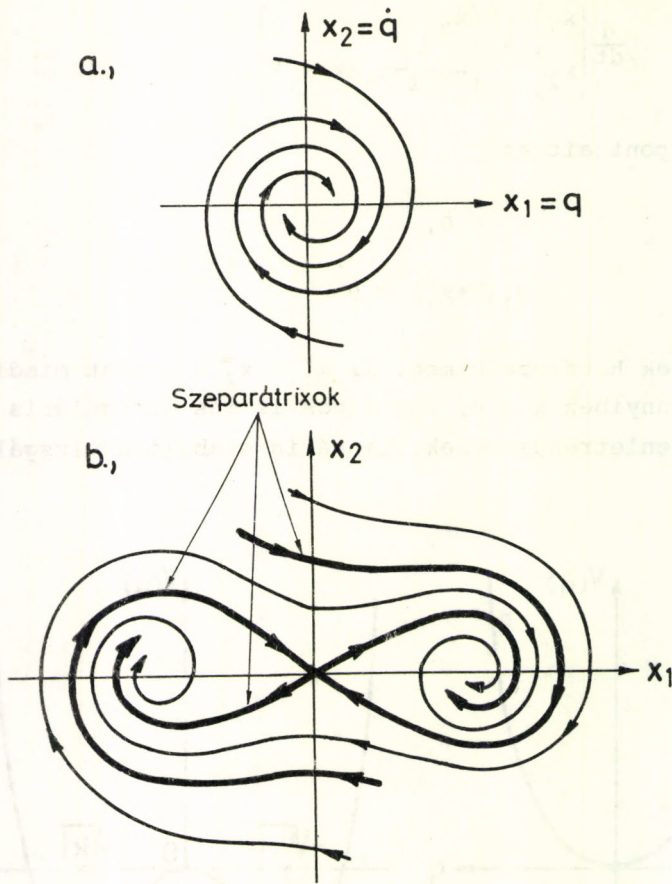
$$x_1(k+x_1^2) = 0$$

összefüggések határozzák meg. Az  $x_1^* = x_2^* = 0$  pont mindig fixpont, s amennyiben  $k > 0$ , úgy nincs is más szinguláris pontja a (4.1) egyenletrendszernek. Lineáris stabilitásvizsgálattal



4.1 ábra. Anharmonikus oszcillátor potenciálja pozitív, illetve negatív kvadratikus tag esetén

megállapíthatjuk, de a 4.1 ábra alapján ránézésre is eldönthetjük, hogy ez egy stabil (vonzó) fixpont, amely a fázistérbeli áramlási képen (4.2a ábra) az  $\alpha$  csillapítási paraméter nagyságától függően vagy csomópontként, vagy fókuszként jelentkezik.



4.2 ábra. Csillapított anharmonikus oszcillátor fázisdiagramja  $k > 0$  (a) és  $k < 0$  (b) esetben

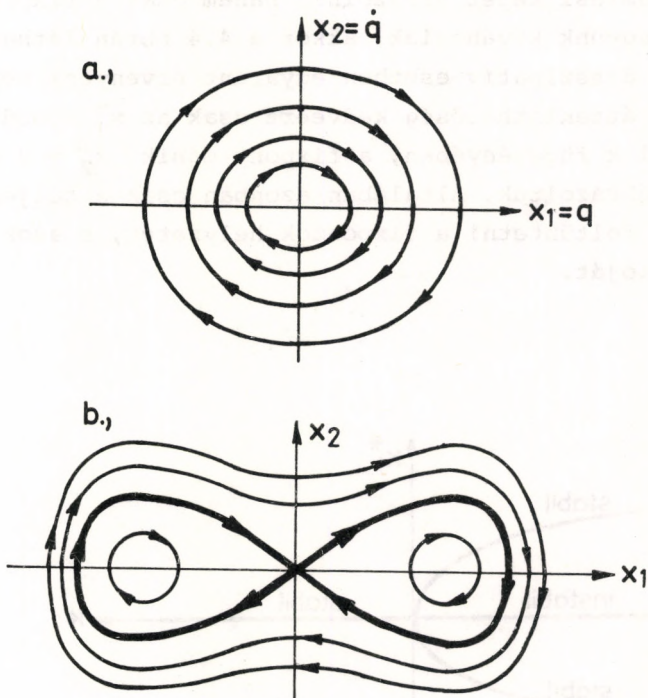
Ha viszont  $k < 0$ , úgy három fixpont létezik, melyek közül  $x_1^* = x_2^* = 0$  instabil, az  $x_1^* = \pm\sqrt{-k}$ ,  $x_2^* = 0$  pedig stabil. A fázisdiagramot a 4.2b ábrán tüntettük fel. Az origó most nyeregpont, melyből kifutó szeparátrix-ágak a stabil fixpontokba (mindkettő máshová) tartanak, a befutó szeparátrix-



ágak pedig a "végtelenből" indulnak.

Amennyiben a  $k$  paramétert egy pozitív értékről indulva lassan csökkentjük, az eredetileg stabil fixpont (az origó) felhagy két,  $k$  csökkentésével egyre távolodó attraktorra, s ezek között egy instabil fixpont, egy nyeregpont marad vissza. Ez a bifurkáció jelenségének [2] egy speciális esete.

Ugyanilyen jellegű bifurkáció a konzervatív rendszerekben is fellép. Legyen a (4.1) egyenletrendszerben szereplő  $\alpha$  paraméter értéke nulla (elhanyagolhatóan kicsi), akkor a csillapítás nélküli anharmonikus oszcillátort kapjuk, melynek fázisdiagramját a 4.3 ábrán látjuk. A trajektóriák egyenletét az energia állandóságának feltételéből explicit alakban is könny-



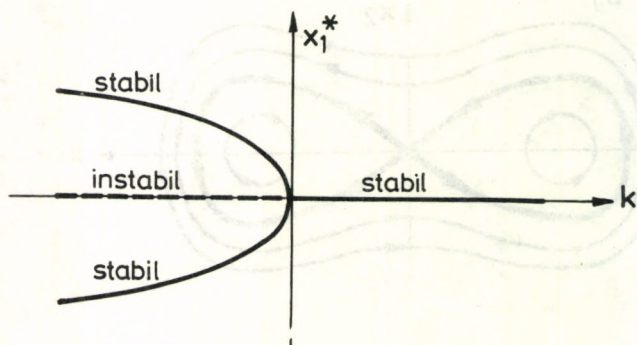
4.3 ábra. Csillapítás nélküli anharmonikus oszcillátor fázisrajztrajektóriái  $k > 0$  (a) és  $k < 0$  (b) esetben

nyen felírhatjuk:

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{k}{2}q^2 + \frac{1}{4}q^4 = E.$$

Ha a  $k$  paraméter értékét a pozitív tartományból indulva fokozatosan csökkentjük, úgy az origóbeli elliptikus fixpont felhasad két (egyre távolodó) elliptikus pontra, s közöttük egy hiperbolikus pont marad vissza. Ez utóbbiból kiinduló szeparatrix-ágak — mivel az energia állandósága miatt a végtelenbe nem nyúlhatnak, s a stabil fixpontokba sem futhatnak be azok elliptikus jellege miatt — szükségképpen visszatérnek a nyeregpontra.

Ha nem akarjuk az egész fázisteret, az ottani viszonylag bonyolult áramlási képet ábrázolni, hanem csak a fixpontok helyzetére vagyunk kíváncsiak, akkor a 4.4 ábrán látható (konzervatív és disszipatív esetben egyaránt érvényes) képet kapjuk. Ezen az áttekinthetőség kedvéért csak az  $x_1^*$  koordinátát tüntettük fel  $k$  függvényében, a fixpont másik,  $x_2^* = 0$  koordinátáját nem ábráztuk. Általában azonban csak a teljes fázis térben lehet feltüntetni a fixpontok helyzetét, s azok esetleges bifurkációját.



4.4 ábra. Bifurkáció az anharmonikus oszcillátor példájában



## 5. HATÁRCIKLUS. A DUFFING-OSZCILLÁTOR

Az eddig vizsgált egyszerű esetekben a disszipatív rendszer elegendően hosszú idő múlva biztosan valamelyik stabil egyensúlyi helyzetébe, a fázistér valamelyik vonzó fixpontjába kerül. Ez azonban nem szükségszerű, elképzelhető az is, hogy valamilyen stabil periodikus mozgás, úgynevezett határciklus alakul ki; természetesen ehhez az energiadisszipációt pótlandó külső gerjesztésre van szükség.

A legegyszerűbb ilyen viselkedést mutató rendszer egy olyan tömegpont, melyet periodikus külső erővel gerjesztünk, s amelyre emellett a sebességével arányos nagyságú fékezőerő hat. Az egydimenziós mozgás mozgásegyenlete

$$\ddot{q}(t) + \alpha \dot{q}(t) = A \cos \omega t, \quad (5.1)$$

melyet az  $x_1 = \dot{q}(t)$  és  $x_2 = \omega t$  új változók bevezetésével az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + A \cos x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega \end{aligned} \quad (5.2)$$

autonóm elsőrendű egyenletrendszerre alakíthatunk. Az (5.2) egyenletrendszernek nincsenek fixpontjai, van azonban határciklusa, hiszen az egzakt megoldás

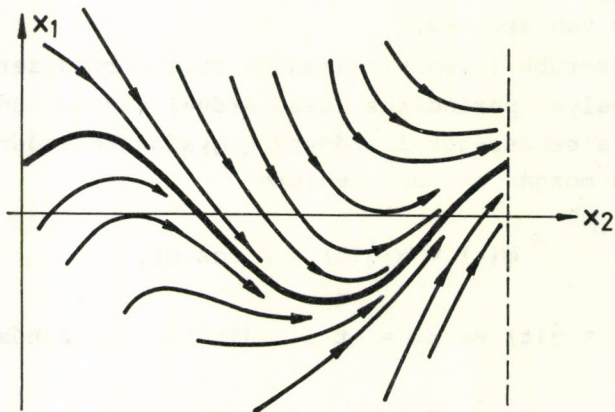
$$x_1(t) = \frac{A}{\alpha^2 + \omega^2} \left[ \alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right] + \left[ x_1(0) - \frac{A \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right] e^{-\alpha t}, \quad (5.3)$$

s ez  $\alpha > 0$  miatt elég hosszú idő után az

$$\hat{x}_1(t) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\omega t + \phi_0), \quad (\text{tg } \phi_0 = \frac{\omega}{\alpha})$$

periodikus mozgásba megy át. Annak érdekében, hogy a határciklus ne csak az  $x_1$  változóban, hanem a teljes  $(x_1, x_2)$  állapot-téren periodikus legyen, szokásos eljárás, hogy az  $x_2$  változót csak a  $0 \leq x_2 < 2\pi$  intervallumon azonosítjuk  $\omega t$ -vel, s az  $(x_1, x_2 = 2\pi)$  koordinátájú pontokat az  $(x_1, x_2 = 0)$  pontokkal

azonosítjuk. Ez hasonló ahhoz, mint amit a 3. fejezetben az inga tárgyalásánál bemutatunk: a fázisteret a szögváltozó periodicitása miatt nem egy síkkal, hanem egy henger palástjával azonosítottuk. Az  $(x_1, x_2)$  fázistérben a trajektóriák az 5.1 ábrán látható görbék.



5.1 ábra. Határciklus kialakulása

A határciklus fogalmilag nem különbözik lényegesen a fixponttól, alkalmas koordinátatranszformációval (együttmozgó koordinátarendszer bevezetésével) egy határciklusba torkolló mozgás ugyanis mindig "leállítható". (A fenti példában  $x_1(t)$  helyett bevezetve az  $\bar{x}_1(t) \equiv x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  új változót, elég hosszú idő után  $\bar{x}_1(t) \equiv 0$  teljesül.)

A határciklus stabilitása lineáris közelítésben a fixpontokéhoz hasonlóan vizsgálható. Az (5.1) egyenlettel leírt rendszer határciklusa — lényegében az egyenlet linearitása miatt — akármekkora  $A$  (de pozitív  $\alpha$ ) mellett stabil, negatív  $\alpha$  mellett pedig instabil. Mint látni fogjuk, bonyolultabb (nemlineáris) rendszereknél előfordulhat, hogy egy paraméter lassú változtatása mellett az eredetileg stabil határciklus



instabillá válik, s új — esetleg az eredetitől eltérő periódusidejű — stabil határciklus jelenik meg, vagyis fellép a bifurkáció jelensége.

A határciklusra vezető mozgások tanulmányozásánál is nagyon hasznos módszer a Poincaré-leképezés (F.2 függelék). Amennyiben a külső gerjesztés periodikus (a periódusideje  $T = 2\pi/\omega$ ), úgy megtehetjük, hogy az időt leszámítva  $N$  komponensű

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) = \vec{x}(t)$$

állapotvektort csupán a  $T$  periódusidő egész számú többszöröseinél nézzük meg, így az  $N$ -dimenziós térben egy

$$\vec{x}_1 = \vec{x}(T),$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}(2T),$$

.

.

.

$$\vec{x}_n = \vec{x}(nT)$$

pontsorozatot kapunk. (Figyeljünk a jelölésekre:  $x_i$  az  $\vec{x}$  vektor  $i$ -edik komponensét,  $\vec{x}_n$  pedig az  $n$ -edik iteráció eredményvektorát jelöli!) Mivel a

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

mozgásegyenlet jobboldalán álló függvény periodikus,  $\vec{x}_n$  egyértelműen meghatározza  $\vec{x}_{n+1}$ -t, vagyis az

$$\vec{x}_{n+1} = P(\vec{x}_n)$$

leképezés függvényalakja nem függ  $n$ -től (vagy ami ezzel ekvivalens: nem függ az időtől).

Amennyiben a mozgásegyenletnek egy  $T$  periódusidejű határciklusa van, úgy a Poincaré-leképezésnek valamilyen  $\vec{x}^*$  pontban fixpontja van,

$$P(\vec{x}^*) = \vec{x}^*,$$

ha pedig a határciklus  $2T$  periódusidejű, úgy a leképezésnek egy kettős periódusú ciklusa, vagyis  $P^2$ -nek fixpontja lesz:

$$P[P(\vec{x}^*)] = \vec{x}^*,$$

és így tovább.

Az (5.2) egyenletrendszer Poincaré-leképezését (a megoldás explicit alakjának ismeretében) zárt alakban is megadhatjuk.

Mivel az  $u_n = x_1(nT)$  jelöléssel

$$u_n = u^* + \lambda \mu^n,$$

ahol

$$u^* = \frac{A}{\omega^2 + \alpha^2} (\alpha \cos \omega T + \omega \sin \omega T), \quad \lambda = x_1(0) - \frac{A \alpha}{\omega^2 + \alpha^2},$$

$$\mu = e^{-\alpha T},$$

a Poincaré-leképezés

$$u_{n+1} = P(u_n) = (1-\mu)u^* + \mu u_n.$$

A fixpont nyilván  $u^*$ , hiszen teljesül, hogy  $P(u^*) = u^*$ . A fixpont stabilitása, vagyis magának a határciklusnak a stabilitása  $u^*$  körüli linearizálással dönthető el. Az  $y \equiv u - u^*$  kis mennyiségre vonatkozó leképezés

$$y_{n+1} = R(y_n) \approx R(0) + \left. \frac{dR}{dy} \right|_{y=0} y_n,$$

s mivel a jelen esetben  $dR/dy = \mu < 1$ , a határciklus stabil. (Általában a stabilitást a

$$\left. \frac{d\vec{R}(\vec{y})}{d\vec{y}} \right|_{\vec{y}=0}$$

derivált tenzor sajátértékeinek nagysága dönti el (F.2 függelék C része).



Vizsgáljuk meg most egy nemlineáris gerjesztett oszcillátor mozgását! Az egyszerűség kedvéért válasszuk a 4. fejezetben tárgyalt egydimenziós oszcillátornak a  $k=0$  paraméterértékhez tartozó speciális esetét,  $1/T = 1$  frekvenciájú szinuszos külső gerjesztéssel! Ez az ún. Duffing-oszcillátornak [3-6] egy speciális esete, a mozgásegyenlete

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + q^3 = A \sin(2\pi t). \quad (5.4)$$

(Meggjegyezzük, hogy az általános  $m\ddot{q} + \alpha \dot{q} + kq + \lambda q^3 = A \sin(\omega t)$  Duffing-egyenlet 3, az (5.4) egyenletnek megfelelő nulla sajátfrekvenciájú speciális eset pedig 2 lényeges paramétert tartalmaz, a többi a  $q$  koordináta és az idő alkalmasan választott átskálázásával kitranszformálható.)

Elegendően nagy  $\alpha$  értéknél, vagyis elegendően nagy csillapításnál az (5.4) egyenlet által leírt rendszernek stabil határciklusa van, melyet az  $(x_1, x_2) \equiv (q, \dot{q})$  síkon egy zárt görbével szemléltethetünk (5.2 ábra). A mozgás az  $x_1, x_2$  és  $x_3 \equiv 2\pi t$  koordinátákkal megadott háromdimenziós állapot térben egy egyértékű  $\dot{\vec{x}}/dt = \vec{f}(\vec{x})$  sebességmezővel írható le; ebben az állapot térben a trajektóriák nem metszhetik át önmagukat, vagy egymást. Az 5.2 ábrán látható hurkok azért jelentek meg, mert a háromdimenziós trajektóriának egy kétdimenziós vetületét ábrázoltuk.

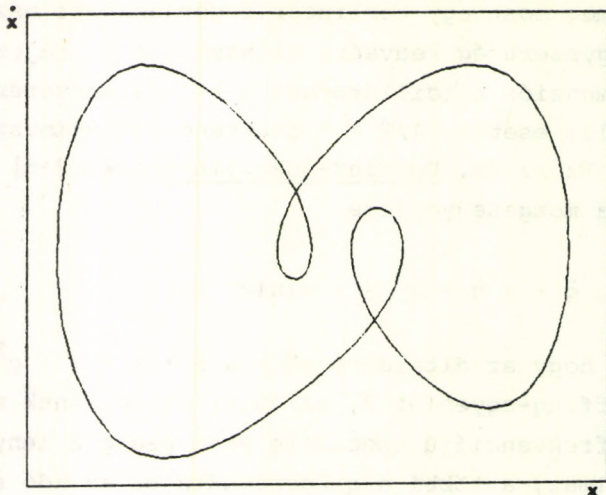
Ha elkészítjük a Duffing-oszcillátornak egy olyan Poincaré-leképezését, amely az  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  kétdimenziós vektor értékét a  $t_n = n$  egész értékeknél adja meg, mindegyiket az előző függvényében:

$$\vec{x}_{n+1} = P(\vec{x}_n),$$

úgy a stabil határciklus egy stabil  $F = (x_1^*, x_2^*)$  fixpontként jelentkezik:

$$P(F) = F.$$

Az  $\alpha$  paraméter értékét csökkentve valamely  $\alpha = \lambda_1$  alatt a  $T = 1$  periódusidejű határciklus instabillá válik, viszont meg-



5.2 ábra. Elegendően nagy csillapítás esetén a Duffing-oszcillátor aszimptotikus viselkedését egy stabil határciklus jellemzi. Ilyenkor az  $\vec{x}(t=n) \xrightarrow{P} \vec{x}(t=n+1)$  Poincaré-leképezésnek az F pontban stabil fixpontja van

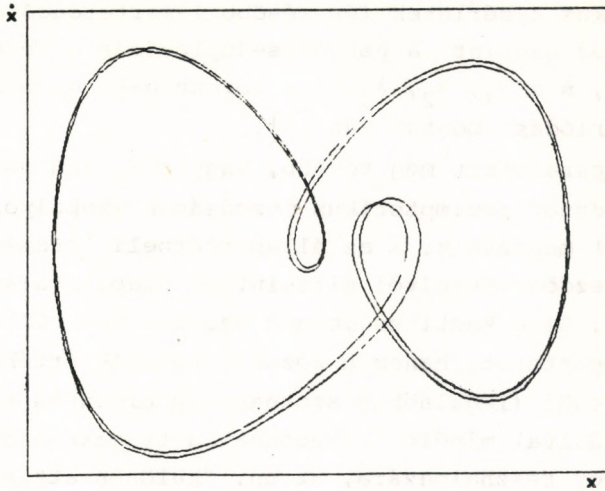
jelenik egy  $T = 2$  periódusú stabil határciklus (5.3 ábra). A Poincaré-leképezésen ez a folyamat úgy jelentkezik, hogy az F fixpont "felhasad" az  $F_1$  és  $F_2$  pontokból álló kettős periódusú ciklusra, vagyis

$$P(F_1) = F_2; \quad P(F_2) = F_1.$$

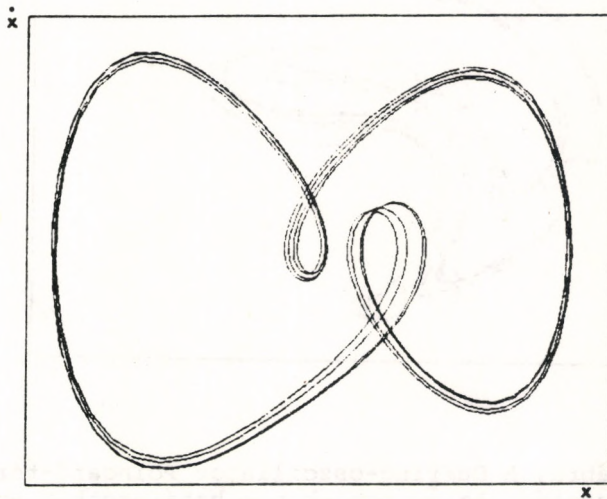
Tovább csökkentve a csillapítást  $\alpha = \lambda_2$ -nél ez a határciklus is instabillá válik, s kialakul egy  $T = 4$  periódusidejű stabil mozgás (5.4 ábra), majd  $\alpha = \lambda_3$ -nál  $T = 8$ , és így tovább:

$$T = 2^n, \quad \text{ha} \quad \lambda_{n+1} < \alpha < \lambda_n.$$





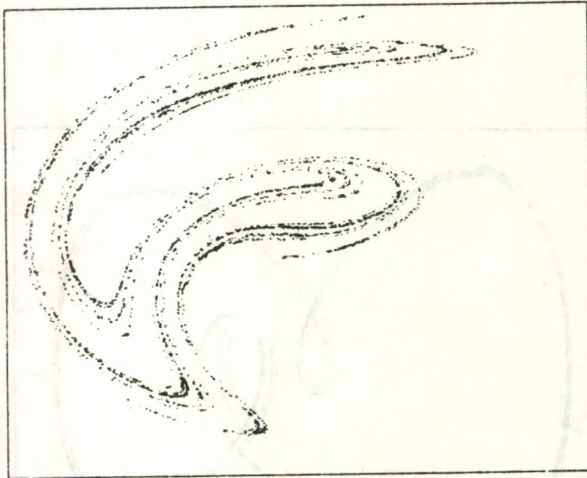
5.3 ábra. Kétszeres periódusidejű stabil határciklus a Duffing-oszcillátor állapotterében  $\lambda_2 < \alpha < \lambda_1$  csillapítás esetén. A Poincaré-leképezésnek ekkor egy kettes periódusu ciklusa van ( $F_1 \xrightarrow{P} F_2 \xrightarrow{P} F_1 \xrightarrow{P} F_2 \rightarrow \dots$ )



5.4 ábra.  $T=4$  periódusidejű aszimptotikus mozgás,

A numerikus kísérletek (és később ismerttetendő elméleti megfontolások) szerint a periódus-duplázódás a végtelenségig folytatódik, s a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  sorozatnak egy bizonyos  $\lambda_\infty$  értéknél torlódási pontja van [5].

Ha az  $\alpha$  paramétert még tovább, vagyis  $\lambda_\infty$  alá csökkentjük, akkor a rendszer aszimptotikus mozgásának szabályossága (periodicitása) megszűnik, s az állapottérbeli "áramlás" (néhány kivételes kezdőfeltételtől eltekintve) szabálytalanná, kaotikussá válik. Ez a kaotikus mozgás azonban nem tölti be a teljes állapotteret, hanem a kezdőfeltételek értékétől teljesen függetlenül (legalábbis azoknak egy bizonyos tartományán belülről indulva) mindig ráhúzódnak a trajektóriák az állapottérnek egy részhalmazára, az ún. "különös attraktorra". Erről a furcsa képződményről, melynek a Poincaré-leképezését az 5.5 ábrán láthatjuk, még sok szó esik a későbbiekben. Itt



5.5 ábra. A Duffing-oszcillátor Poincaré-térképe  $\alpha < \lambda_\infty$  esetén. Az  $\dot{x}_n$  pontok  $n \rightarrow \infty$  határesetben egy "különös attraktoron" helyezkednek el, melyen (néhány kivételes kezdőfeltételtől eltekintve) teljesen szabálytalanul ugrálnak



most csak annyit jegyzünk meg, hogy a különös attraktornak az egyik legjellegzetesebb vonása az, hogy a mozgás rajta nagyon érzékenyen függ a kezdeti feltételektől; azok nagyon kicsiny megváltoztatására viszonylag rövid idő múlva a trajektóriák véges értékkel eltérnek az eredetiektől, vagyis a mozgásnak a kezdeti feltételekből történő pontos előrejelzése gyakorlatilag teljesen lehetetlen.

## 6. PERIODIKUSAN "LÖKDÖSÖTT" HARMONIKUS OSZCILLÁTOR

Írjuk le egy  $\omega/2\pi$  frekvenciájú harmonikus oszcillátor mozgását, ha azt szabályos — mondjuk  $\Delta t = 1$  — időközönként egy-egy nagyon rövid ideig ható erőlöket éri. (Az erőlöket időtartamáról feltesszük, hogy sokkal rövidebb, mint a harmonikus rezgés periódusideje.) Az erőlöket nagysága függjön a rezgőmozgást végző test pillanatnyi kitérésétől valamilyen  $F(x)$  függvénynek megfelelően, amely függvény általában nemlineáris. A csillapítás elhanyagolásával a mozgásegyenlet

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) + F(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n). \quad (6.1)$$

Ez az egyenlet két erőlöket között harmonikus rezgőmozgást ír le, így egzaktul kiintegrálható:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + y_0 \sin \omega t, \\ y(t) &= y_0 \cos \omega t - x_0 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (6.2)$$

ahol  $y(t) = \dot{x}(t)/\omega$ . Ha ismerjük  $x$  és  $y$  értékét közvetlenül a  $t=n$  pillanatbeli erőlöket után (jelöljük ezeket  $x_n$ -nel és  $y_n$ -nel), akkor az  $(n+1)$ -edik előtti értékeket (6.2)-ből kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} x(t=n+1-\varepsilon) &= x_n C + y_n S, \\ y(t=n+1-\varepsilon) &= -x_n S + y_n C, \end{aligned}$$

közvetlenül az erőlkés utáni adatokat pedig a (6.1) mozgásegyenletből:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n C + y_n S, \\ y_{n+1} &= -x_n S + y_n C + \frac{F(x_{n+1})}{\omega}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

ahol bevezettük a  $\cos \omega = C$  és  $\sin \omega = S$  rövidítéseket. A (6.3) rekurziós összefüggések tulajdonképpen egy Poincaré-leképezést definiálnak, hiszen egyértelműen megszabják, hogy a  $t=n$  pillanatbeli  $(x, y)$  értékekből hogyan számíthatjuk ki a  $\Delta t = 1$  idővel későbbi  $(x, y)$  fázistér-koordinátákat [7].

A (6.3) leképezés területtartó:

$$J \equiv \frac{\partial (x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial (x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} C & S \\ -S + C \frac{F'}{\omega} & C + S \frac{F'}{\omega} \end{vmatrix} = C^2 + S^2 = 1,$$

összhangban azzal, hogy (6.1) egy Hamilton-féle rendszer mozgásegyenlete.

A (6.3) rekurziós összefüggések lehetőséget adnak arra, hogy valamilyen  $(x_0, y_0)$  pontból elindulva és sokszor (számítógéppel akár többszázézerszer) iterálva nagyon nagyszámú  $(x_n, y_n)$  pontot kapjunk, s ezeknek a pontoknak a Poincaré-térképen való elhelyezkedéséből a rendszer hosszútávú viselkedésére, mozgásának aszimptotikus megjósolhatóságára, vagy megjósolhatatlanságára következtethessünk. Numerikus tapasztalatok és később részletezendő elméleti megfontolások egyaránt arra utalnak, hogy a kialakuló mozgás (jellegét és bizonyos kvantitatív mérőszámait tekintve) lényegében elég tág határok között független az  $F(x)$  függvény konkrét alakjától és a benne szereplő paraméterek értékétől. Emiatt választhatjuk például  $F(x)$ -t a legegyszerűbb nemlineáris függvénynek,  $F(x) = \omega x^2$ -nek. (Egy konstans és egy lineáris tag  $F$ -ből kitranszformálható, a kvadratikus rész együtthatója a lépték nyújtásával tetszés szerint beállítható.) Ekkor az

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= C x_n + S y_n, \\ y_{n+1} &= -S x_n + C y_n + x_{n+1}^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$



alakot kapjuk, amely nem annyira speciális leképezés, mint azt első ránézésre gondolnánk, hanem (ld. F.3 függelék) a legáltalánosabb területtartó, kvadratikus, elliptikus fixponttal rendelkező leképezés [8-9].

Amennyiben a gerjesztő erőre jellemző  $F(x)$  függvény  $x$ -szel arányos tagot is tartalmazott, úgy az  $x = y = 0$  pont esetleg elliptikusból hiperbolikus fixponttá alakul át, s (6.4) helyett az (F3.9) paraméterezés, vagy a legáltalánosabb alak (F3.7) használható. Hogy ez a leképezés (az Hénon-féle konzervatív leképezés) mennyire általános, mennyire nem kötődik az oszcillátorhoz, azt jól mutatja, hogy a szabályos időközönként (nemlineárisan) lökdösött, de egyébként szabadon mozgó részecske leírásából is megkapható [10-11]. Ha  $x_n$  jelöli a részecske helyzetét,  $y_n$  pedig a sebességét, akkor két erőlökés között (egységnyinek választott ideig) a részecske szabadon mozog:

$$x_{n+1} = x_n + y_n, \quad (6.5)$$

a sebessége pedig valamilyen  $f$  függvénynek megfelelő módon hirtelen megváltozik:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_{n+1}). \quad (6.6)$$

A fenti két összefüggés, amennyiben  $f$ -et hatványsorba fejtjük és csak a kettőnél nem magasabb kitevőjű tagokat tartjuk meg, ugyancsak egy területtartó, kvadratikus leképezést definiál, melyet (ld. F.3 függelék) az Hénon-féle (F3.8) normálalakra hozhatunk. Amennyiben a mozgást egy (lineárisnak feltételezett) disszipatív erő fékezi, úgy (6.6) helyett

$$y_{n+1} = by_n + f(x_{n+1}), \quad |b| < 1$$

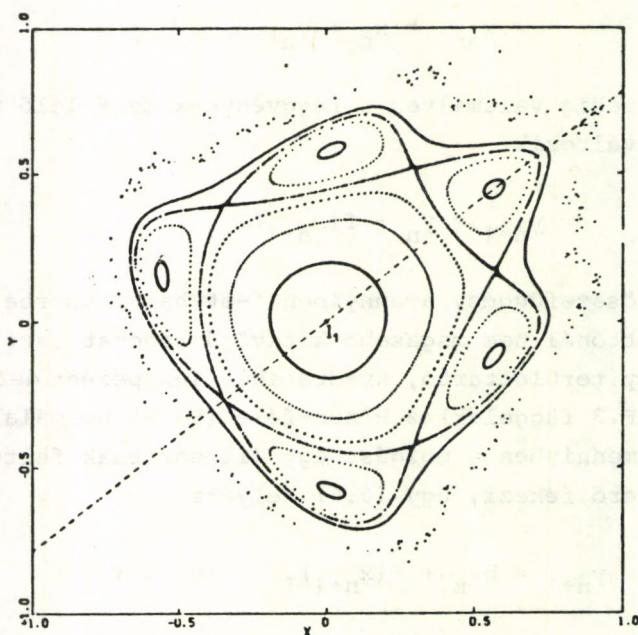
írja le a mozgást, amely (legfeljebb kvadratikus  $f$  esetén) ugyancsak az Hénon-féle normálalakra, az

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2,$$

$$y_{n+1} = by_n$$

formára hozható. Az  $a$  és  $b$  paraméterek bizonyos tartományában itt is megfigyelhető a periódus-kettőződés jelensége, ugyanúgy, mint ahogy azt az 5. fejezetben ismertetett Duffing-oszcillátor Poincaré-metszetén láttuk, s egy különös attraktor is kialakul, hasonlóan, mint a Duffing-oszcillátornál.

A különböző jellegű fizikai rendszerek hasonló viselkedése azonban nemcsak a disszipatív esetben, hanem konzervatív rendszereknél is megfigyelhető. A csillapítás nélküli gerjesztett anharmonikus oszcillátornak, vagyis a Duffing-oszcillátor konzervatív határesetének a Poincaré-leképezése lokálisan ugyanolyan jellegű, mint a periodikusan lökdösött oszcillátoré, vagy a lökdösött szabad részecskéé. Ezeket egyaránt az Hénon-féle konzervatív leképezés írja le, amely - elliptikus fixpont létezése esetén - (6.4)-nek megfelelően parametrizálható. Nézzünk meg egy ilyen leképezést egy kicsit részletesebben!

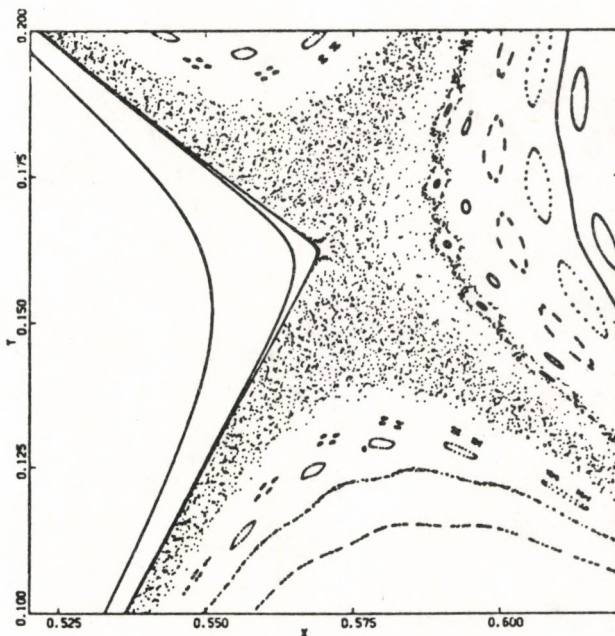


6.1 ábra. Egy területtartó kvadratikus leképezés néhány ezer iterációjának eredménye

A 6.1 ábrán feltüntettük a (6.4) iterációs képletekből adódó néhány ezer pont elhelyezkedését az  $(x,y)$  síkon  $\omega = 76.11^\circ$ -os paraméterértékeknél [12]. Mivel az origó közelében a kvad-



ratikus tag hatása kicsi, a leképezés jó közelítéssel egy  $\omega$  szögű síkbeli forgatásnak felel meg; ennek megfelelően az origó körül invariáns (önmagukra leképeződő) ponthalmazokat, koncentrikus köröket várunk. Ezek a körök valóban megfigyelhetők a 6.1 ábrán. (Mindegyik "kör" más-más kezdőfeltételnek felel meg.) Az origótól távolodva az invariáns görbék egyre jobban eltorzulnak, s egy bizonyos távolságban 5 nagy sziget alakul ki. Ezek azért jöhetnek létre, mert az  $\omega$  szög közel van a "rezonáns"  $72^\circ$ -hoz. A kvadratikus tag az átlagos forgatási szöget az eredeti  $\omega$ -ról mintegy eltolja  $360^\circ/5 = 72^\circ$ -ra, emiatt minden ötödik leképezés ugyanoda, vagy közel ugyanoda viszi vissza az  $(x_n, y_n)$  koordinátájú pontot, ahonnan elindultunk. Az öt stabil (elliptikus) fixpont között hiperbolikus pontokat találunk, ezek instabil fixpontjai az ötször egymás után elvégzett leképezésnek. Ha egy ilyen hiperbolikus pont környezetét nagyobb nagyításban tanulmányozzuk, akkor a 6.2 ábrán látható képet kapunk. Jól megfigyelhető, hogy a nyeregpont környezeté-



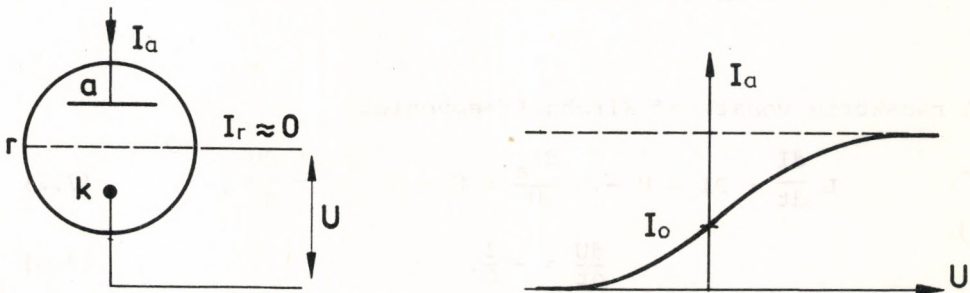
6.2 ábra. Az előző ábrán látható Poincaré-leképezés egyik hiperbolikus pontjának környéke — kinagyítva

ben a pontok nem rendeződnek görbék mentén, hanem diffúzan szétszórtan, kaotikusan helyezkednek el. A kaotikus tartomány pontjait a leképezés során — a kezdőfeltételtől lényegében függetlenül — mindig bejárja a rendszer, még hozzá teljesen összevissza, előre ki nem számítható módon. Emellett — mint azt a 6.2 ábrán megfigyelhetjük — a kaotikus tartomány mellett elliptikus pontok finom láncolata is megtalálható, melyek között újabb instabil hiperbolikus fixpontok találhatók. Ezek környezetét még jobban kinagyítva ismét a 6.2 ábrához hasonló képet kapunk. A tapasztalat szerint tehát a kaotikus és a viszonylag szabályos mozgásnak megfelelő tartományok egyaránt jelen vannak egy konzervatív rendszer állapotterében, s egy egymásba ágyazott, önmagát finomabb és finomabb skálán újra és újra megismétlő bonyolult struktúrát alkotnak. Ennek a struktúrának a tanulmányozása, kvalitatív és kvantitatív tulajdonságainak megértése, illetve a disszipatív rendszerekkel való kapcsolata további vizsgálatok tárgyát képezi.



7. A VAN DER POL-OSZCILLÁTOR

Kaotikus viselkedés megfigyelhető egyszerű nemlineáris áramkörökben is. (Az ellenállásokon fejlődő hő miatt minden áramkör disszipatív rendszer.) A nemlineáris elemek széles választéka áll rendelkezésünkre: elektroncsövek és félvezetőeszközök - igen változatos karakterisztikákkal. Az alábbiakban olyan áramköröket vizsgálunk, melyekben olyan - az egyszerűség kedvéért triódának nevezett - hárompólus szerepel, amelynek bemenő árama elhanyagolhatóan kicsi ( $I_r \approx 0$ ), kimenő áram - bemenő feszültség karakterisztikája pedig, adott kimenő feszültség mellett, a 7.1 ábrán látható  $I_a = g(U)$  függvény. (A valódi triódák viselkedése ennél bonyolultabb; fenti tulajdonságú hárompólus azonban ténylegesen készíthető.)



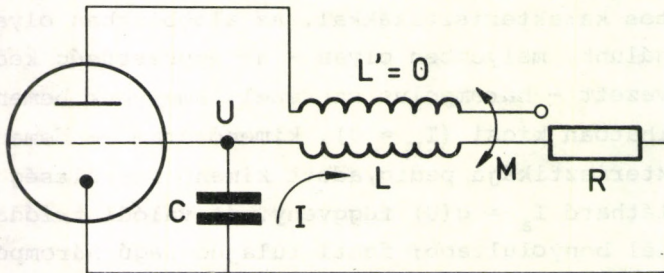
7.1 ábra. Trióda és karakterisztikája

Mivel a karakterisztika az  $(I_o, U=0)$  pont körül páratlan függvény, kis rácsfeszültségek esetén a vezető nemlineáris tag köbös, tehát írhatjuk, hogy

$$I_a = g(U) = I + SU - \frac{1}{3} GU^3, \quad (7.1)$$

ahol  $S$  és  $G$  pozitív állandók.

Vizsgáljunk először egy triódás oszcillátort, amelyet úgy kaphatunk, hogy a rácskörbe  $R, L, C$  elemeket iktatunk be, s az indukciós tekercs  $M$  kölcsönös indukcióval kapcsolódik az anódkörben lévő tekercshez. Ilyen módon visszacsatolást hozunk létre az anódáram és a rácsfeszültség között.



7.2 ábra. Triódás Van der Pol-oszcillátor

A rácskörre vonatkozó Kirchhoff-egyenlet

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U - M \frac{dI_a}{dt} = U - M \frac{dg(U)}{dU} \frac{dU}{dt}, \quad (7.2)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{I}{C}. \quad (7.3)$$

Amennyiben a rácsfeszültség nem túl nagy, használhatjuk a karakterisztika (7.1) közelítő képletét, s  $U$ -ra a következő másodrendű egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{dU}{dt} \frac{(RC - MS + MGU^2)}{LC} + \frac{U}{LC} = 0, \quad (7.4)$$

ami a



$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad x = U \sqrt{\frac{MG}{MS-RC}}, \quad \mu = \frac{MS-RC}{\sqrt{LC}} \quad (7.5)$$

dimenziótlán változók bevezetése után az

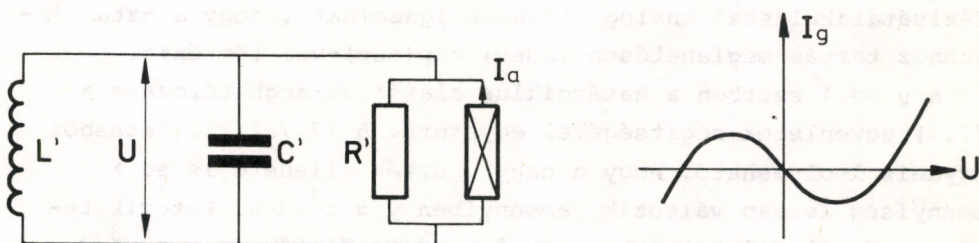
$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (7.6)$$

egyenletbe megy át, ahol a pont a  $\tau$  szerinti deriválást jelöli. (7.6) az ún. Van der Pol - egyenlet [13], amely az egyik legegyszerűbb egyenlet, melynek megoldása stacionárius állapotról határciklusba történő bifurkációt mutat. A Van der Pol-egyenlet ekvivalens a következő két elsőrendű egyenlettel:

$$\dot{x} = \mu[y - (x^3/3-x)], \quad (7.7a)$$

$$\dot{y} = -(1/\mu)x. \quad (7.7b)$$

Megjegyezzük, hogy Van der Pol-oszcillátor létrehozható más kapcsolással is. Ha például a 7.3 ábrán látható áramkörben, melynek aktív eleme a negatív ellenállás, a karakterisztika az  $I_g = -\alpha U + \gamma U^3$  függvénnyel helyettesíthető az origó körül, az U-ra kapott egyenlet ismét a (7.6) alakra hozható.



7.3 ábra. Negatív ellenállással működő Van der Pol-oszcillátor és az ellenállás karakterisztikája

Vizsgáljuk meg, a Van der Pol-oszcillátor nyugalmi állapota mi-  
kor stabilis egyensúlyi helyzet. A (7.6) egyenlet  $x=0, \dot{x}=0$  ál-  
lapota körüli kis kitérésekre ( $x \ll 1$ ) vonatkozó linearizált  
változata

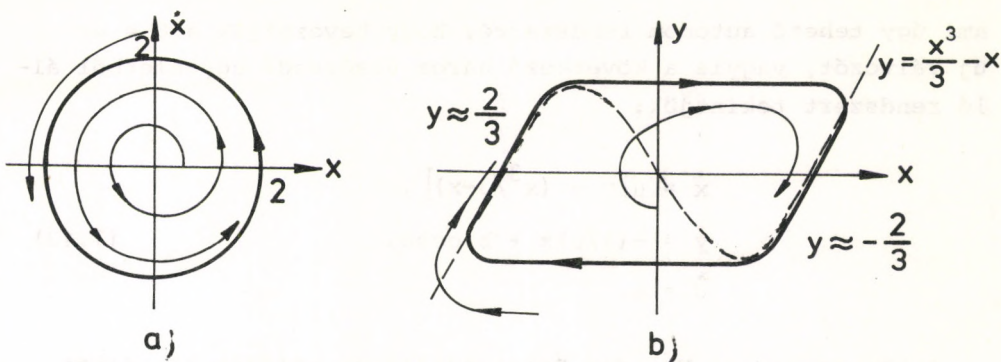
$$\ddot{x} = \mu \dot{x} - x, \quad (7.8)$$

ami azonos a  $(-\mu)$  közegellenállási együtthatójú csillapított  
harmonikus oszcillátor mozgásegyenletével. Ebből következik,  
hogy  $\mu < 0$  esetén az  $x=0, \dot{x}=0$  állapot stabil,  $\mu \geq 0$  mellett vi-  
szont nem az. A  $\mu = 0$  érték azt jelenti, hogy a (7.6) oszcil-  
látor csillapítás mentes.

Amennyiben a  $\mu$  paraméter pozitív értéket vesz fel, a (7.6)  
egyenletnek létezik stabil határciklus-megoldása. A határcik-  
lus könnyen meghatározható a  $\mu \ll 1$ , ill. a  $\mu \gg 1$  határesetek-  
ben. Kis  $\mu$  érték mellett a (7.6) egyenlet aszimptotikus megol-  
dását az  $x(\tau) = A \cos \tau$  alakban kereshetjük. Behelyettesítés  
után az  $(1 - A^2 \cos^2 \tau)A \sin \tau = 0$  egyenletet kapjuk, amiből a  
 $\sin^3 \tau = (3/4) \sin \tau + (1/4) \sin 3\tau$  azonosság fölhasználásával, a  
felharmonikus elhanyagolása után, az  $A=2$  értéket kapjuk. A ha-  
tárciklus az  $(\dot{x}, x)$  síkon tehát egy  $A=2$  sugarú kör, amin föl-  
lépnek a  $\sin 3\tau$  tagból adódó modulációk, ezek együtthatója azon-  
ban  $\mu$ -vel arányos, tehát igen kicsi. A határciklus a  $\mu=0$  érték-  
nél ugrásszerűen jelenik meg, az átmenet tehát az elsőrendű  
fázisátalakulással analóg. Könnyen igazolható, hogy a határcik-  
lushoz tartás meglehetősen lassú:  $\exp(-\mu t)$ -vel történik.

A  $\mu \gg 1$  esetben a határciklus alakjának meghatározása a  
(7.7) egyenletek segítségével egyszerű. A (7.7a) kifejezésből  
ugyanis leolvasható, hogy a nagy  $\mu$  érték ellenére is az  $x$   
mennyiség lassan változik, amennyiben  $y \approx x^3/3 - x$ . Létezik te-  
hát az  $(x, y)$  állapot térben egy "lassú felület", az  $y = x^3/3 - x$   
harmadfokú parabola, melynek szélső ágain mind  $x$ , mind  $y$  las-  
san változik. A parabola lokális szélsőértékei közötti szaka-  
szára eső pontok azonban nem elégíthetik ki a (7.7b) egyenle-  
tet, ezért az  $y = \pm 2/3$  értékeknél a rendszer letér a lassú fe-  
lületről, s  $x$  ugrásszerűen gyors változásával kerül át az  
egyik stabil ágról a másikra. A határciklus alakját a 7.4 áb-  
ra mutatja.





7.4 ábra. A Van der Pol-oszcillátor határciklusra  
 a)  $\mu \ll -1$ , b)  $\mu \gg 1$

Az eddig tárgyalt (szabad) Van der Pol-oszcillátorban kaotikus viselkedést nem tapasztalunk, ennek ugyanis - mint látni fogjuk - az a szükséges feltétele, hogy legalább három autonóm nemlineáris elsőrendű differenciálegyenlet írja le a rendszert. A kényszerített Van der Pol-oszcillátorra ez a feltétel már teljesül. Tegyük fel ugyanis, hogy  $\omega/\sqrt{LC}$  frekvenciájú külső feszültséggel gerjesztjük a rendszert (a rácskörön keresztül), ahol  $\omega$  dimenziótlán paraméter. Ekkor a (7.6) egyenlet jobb oldalán megjelenik egy  $\cos\omega\tau$ -val arányos tag, a mozgásegyenlet tehát mindig a következő alakban írható fel:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = b\mu\cos\omega\tau, \quad (7.9)$$

ahol  $b$  a gerjesztő feszültséggel arányos paraméter. A (7.9)-el ekvivalens két elsőrendű egyenlet:

$$\dot{x} = \mu [y - (x^3/3 - x)], \quad (7.10)$$

$$\dot{y} = -(1/\mu)x + b\cos\omega\tau, \quad (7.11)$$

ami úgy tehető autonom rendszerré, hogy bevezetjük a  $\theta = \omega\tau$  új változót, vagyis a következő három elsőrendű egyenletből álló rendszert tekintjük:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu [y - (x^3/3 - x)], \\ \dot{y} &= -(1/\mu)x + b \cos\theta, \\ \dot{\theta} &= \omega.\end{aligned}\tag{7.12}$$

A kényszerített Van der Pol-oszcillátor példája történeti érdekességű, ugyanis ez volt az első olyan disszipatív rendszer, melyről (még 1945-ben) sikerült kimutatni, hogy kaotikus megoldásai is vannak [14], s ez később lényeges hatást gyakorolt a dinamikai rendszerek elméletének fejlődésére [15-17].

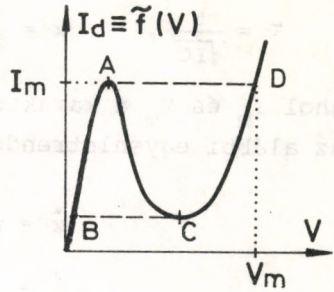
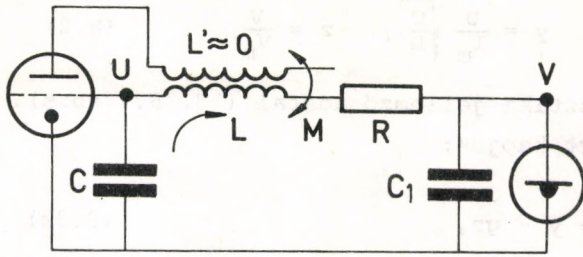
Cartwright és Littlewood azt találták, hogy  $\mu \gg 1$  esetén bizonyos  $b$  és  $\mu$  értékekre a rendszer viselkedése kaotikus, vagyis az áramkör ilyenkor zajossá válik. A (7.12) egyenletrendszerből leolvasható, hogy az  $y = x^3/3 - x$  egyenletű felületen a gerjesztett esetben is lassú mozgás történik, ha  $\mu$  nagy.  $b$  változtatásával eljuthatunk olyan tartományba, ahol a mozgás igen érzékenyvé válik, vagyis a közeli pályák erősen szétszóródnak. Ha ez bekövetkezik, a mozgás kaotikus, s nem mutat semmilyen periodicitást.

Érdekességgként megjegyezzük, hogy a (7.12)-höz hasonló típusú egyenletrendszerrel modellezhető a szív szabálytalan működése [18], az ún. aritmia, mely akkor áll elő, ha az egymás utáni szívverések nem azonos időközönként követik egymást.

## 8. ALAGÚT-DIÓDÁS OSZCILLÁTOR

A Van der Pol-oszcillátor nemcsak úgy tehető kaotikussá, hogy külső feszültséggel gerjesztjük, hanem úgy is, hogy még egy nemlineáris elemet beiktatunk a rácskörbe [19]. Legyen ez az elem egy alagút-dióda, melyet sorbakapcsolunk az R ellenállással. A kapcsolási rajzot és a dióda karakterisztikáját a 8.1 ábra mutatja.  $C_1$  az alagút-dióda kapacitását jelöli, mely rendszerint kis érték, vagyis  $C_1 \ll C$ . A későbbiekben alapvető





8.1 ábra. Alagút-diódás áramkör és a dióda karakterisztikája

szerepet fog játszani az alagút dióda azon tulajdonsága, miszerint a karakterisztika AC szakasza instabil, vagyis növekvő  $V$  értékekre az A pont elérésekor  $A \rightarrow D$ , csökkenő értékekre pedig a C pont elérésekor  $C \rightarrow B$  átmenet történik.

A fenti kapcsolás paramétereit megválaszthatók úgy, hogy a trióda a lineáris tartományban működjön, vagyis (7.1)-ben az  $U^3$ -bel arányos tag elhanyagolható legyen. (Ez azt is jelenti, hogy a három elsőrendű autonóm egyenletből elég, ha egy tartalmaz nemlineáris tagot, káosz már akkor is kialakulhat, ld. (7.12) és (8.1) egyenlet). A rácskörre vonatkozó Kirchhoff-törvény ekkor a következő alakban írható [19]:

$$\begin{aligned}
 L \frac{dI}{dt} &= \frac{MS-RC}{C} I + U - V, \\
 \frac{dU}{dt} &= -\frac{I}{C}, \\
 C_1 \frac{dV}{dt} &= I - \tilde{f}(V).
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Dimenziótlan változókként most a következő mennyiségeket vezetjük be

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad x = \frac{I}{I_m}, \quad y = \frac{U}{I_m} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad z = \frac{V}{V_m}, \quad (8.2)$$

ahol  $I_m$  és  $V_m$  a karakterisztika jellemző adatai (ld. 8.1 ábra). Az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\dot{x} = \mu x + y - gz, \quad (8.3a)$$

$$\dot{y} = -x, \quad (8.3b)$$

$$\varepsilon \dot{z} = x - f(z), \quad (8.3c)$$

ahol a pont a  $\tau$  szerinti deriválást jelöli,  $\mu$  a (7.5) egyenletben definiált paraméter, továbbá

$$g = \frac{V_m}{I_m} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \varepsilon = \frac{C_1}{C} g, \quad f(z) = \frac{1}{I_m} \tilde{f}(V_m z). \quad (8.4)$$

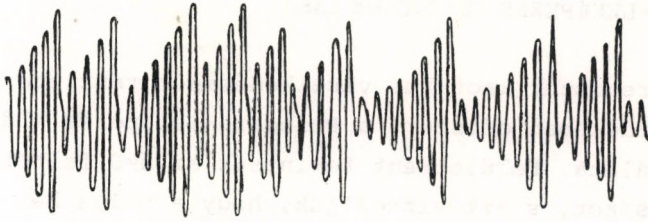
Legyen az MS-RC kombináció, tehát  $\mu$  is pozitív, ilyenkor - hasonlóan a Van der Pol-oszcillátorhoz - a rendszer nyugalmi állapota instabil. Ugyanakkor feltesszük, hogy (MS-RC)/(LC) nem túl nagy, vagyis az áramerősség eleinte viszonylag lassan növekszik. Másrészt mivel  $C_1$  kicsi volt,  $\varepsilon$  is kis érték. A 8.1 ábrán leírt áramkört tehát a

$$0 < \mu \ll 1, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (8.5)$$

paraméter-tartományban kívánjuk tanulmányozni. A 8.2 ábra a rácsfeszültség időbeli változását mutatja olyan paraméter értékek mellett, melyek a (8.5) feltételnek eleget tesznek [19].

A jelenség kvalitatív leírása könnyen megadható. Először is vegyük észre, hogy amennyiben  $z$  (vagy  $V$ ) változása nem túl gyors, az  $\varepsilon$  paraméter kicsisége miatt jó közelítéssel fennáll az  $x = f(z)$  összefüggés, amint az (8.3c)-ből következik. Az állapot térben tehát létezik egy lassú felület, s a rendszer mindig ezen tartózkodik, hacsak az áramkör éppen át nem kapcsol, vagyis nem  $A \rightarrow D$  vagy  $C \rightarrow B$  átmenet történik (ld. 8.1 ábra). A lassú felület tehát nem tartalmazza az  $\tilde{f}(V)$  függvénynek azt a részét, mely az AC szakasznak felel meg. A  $V$  ill. a





8.2 ábra. A rácsfeszültség időfüggése

z mennyiséget ezért szokás kapcsoló változónak nevezni. Ha az  $I$  áram ( $x$ ) és az  $U$  feszültség ( $y$ ) kicsi, akkor csak a karakterisztika AB (lassú) ágán lehetünk, s ezért  $V$  (ill.  $z$ ) is kicsi. Mivel az áramerősség deriváltja ekkor saját magával arányos,  $I$  elkezd növekedni, eközben növekszik  $U$  abszolút értéke is, de  $V$  még mindig elhanyagolható, hiszen a karakterisztika meredeken kezdődik. Ez arra vezet, hogy az áramerősség exponenciálisan növekvő amplitúdójú sinus-rezgést végez. Amikor azonban  $I$  eléri az  $I_m$  értéket (vagyis  $x=1$ ), az alagút-dióda feszültsége átugrik a CD ágra (ennek a folyamatnak a relaxációs ideje arányos  $C_1$ -gyel), majd viszonylag gyorsan eljut a C pontig, ahol még egy átváltás történik. Végülis tehát  $I$  és  $V$  ismét lecsökken, s az egész folyamat kezdődik előlről. Ha viszont  $I$ ,  $U$  és  $V$  értéke nem ugyanakkora, mint az előző növekedési periódus elején, akkor nem biztos, hogy az új periódusban ugyanannyi maximum fordul elő, mint az előzőben, s így kialakulhat a maximumok számának kaotikus váltakozása, amint az a 8.2 ábrán látható.

## 9. POINCARÉ-LEKÉPEZÉS MEGHATÁROZÁSA

A (8.3) rendszer kaotikus viselkedésének részletesebb tanulmányozása érdekében célszerű a Poincaré-leképezés (ld. F.2 függelék) vizsgálata. Felületként tekintsük az  $x=0$  feltétellel meghatározott síkot, s azt vizsgáljuk, hogy a pálya két egymást követő, adott irányú metszéspontja (e felülettel) milyen viszonyban áll egymással. Tegyük fel először, hogy a lassú felület AB ágán vagyunk, amiből az következik, hogy a  $z$  változó elhanyagolhatóan kicsi. A (8.3) egyenletrendszer a  $z \approx 0$  esetben egyenértékű az

$$\ddot{x} = \mu \dot{x} - x \quad (9.1)$$

negatív csillapítású harmonikus oszcillátor egyenletével. Ennek megoldása ( $x(0)=0$ -ra, a  $\mu \ll 1$  esetben)

$$x(t) = A e^{\mu t/2} \sin t, \quad (9.2)$$

amiből

$$y(t) = - \int x(t) dt = A e^{\mu t/2} [\cos t - (\mu/2) \sin t] \approx A e^{\mu t/2} \cos t. \quad (9.3)$$

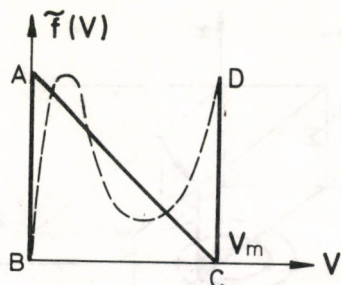
Mivel  $z \approx 0$ , a Poincaré-felület közelítőleg az  $xy$  síkban fekvő  $x=0$  egyenes.  $x$  akkor tűnik el, ha  $t = 2\pi n$ , ezért az  $n$ -edik metszéspont helye a félegyenesen  $y_n = A \exp(\pi n \mu)$ , vagyis a keresztet leképezés

$$y_n = e^{\pi \mu} y_{n-1}. \quad (9.4)$$

Érdeemes megjegyezni, hogy ugyanezt az eredményt kapnánk akkor is, ha  $y(t)$  vagy  $x(t)$  egymást követő maximumait hasonlítanánk össze.

A lassú felület CD ágán nem tudjuk egzaktul megadni a Poincaré-leképezést. Egy további egyszerűsítő feltevéssel azonban ez is lehetővé válik, s egyben igen szemléletes képet alakíthatunk ki az átkapcsolások közötti folyamatról. Helyet-





9.1 ábra. Az alagút-dióda idealizált karakterisztikája. (A szaggatott vonal az eredeti karakterisztikát ábrázolja.)

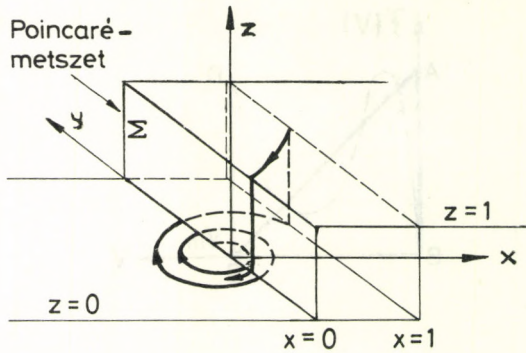
tesítsük a dióda karakterisztikáját egyenes szakaszokból álló görbével, amint az a 9.1 ábrán látható. Az  $\epsilon \ll 1$  határesetben a  $z$  kapcsoló változó most csak két értéket vehet föl, a 0-t vagy a +1-et. Ennek megfelelően a rendszer állapot-felülete az  $x, y, z$  térben két, kissé egymás alá nyúló félsík: a ( $z=0, x \leq 1$ ), ill. a ( $z=1, x \geq 0$ ) félsík, hiszen az átkapcsolások az  $x=1$ , ill. az  $x=0$  értéknél történnek.

A  $z=0$  félsíkon történő mozgást már ismerjük. Amint a pálya metszi az  $x=1$  egyenest, a rendszer átugrik a  $z=1$  félsíkra. A mozgásegyenlet itt (ld. (8.3))

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + y - g, \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{9.5}$$

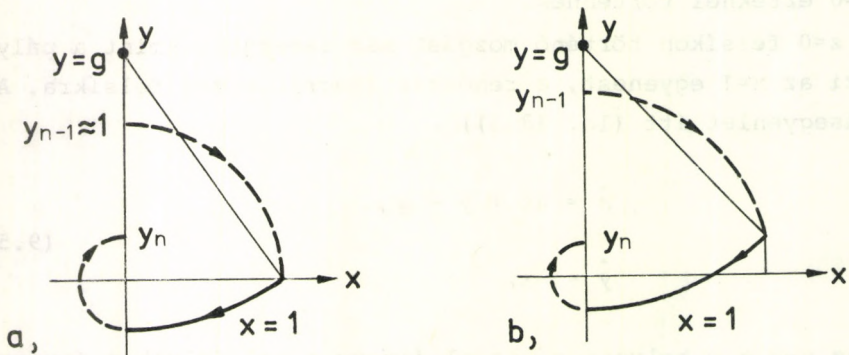
ami az  $y-g \rightarrow y$  helyettesítéssel átmegy a  $z=0$  félsíkon érvényes egyenletrendszerbe. A megoldás tehát (a  $\mu \ll 1$  esetben):

$$\begin{aligned} x(t) &= B e^{\mu t/2} \sin(t + \phi), \\ y(t) - g &= B e^{\mu t/2} \cos(t + \phi). \end{aligned} \tag{9.6}$$



9.2 ábra. A (8.3) rendszer állapot-felülete ( $\varepsilon \ll 1$ ) idealizált karakterisztikájú alagút-dióda esetén

Ennek ismeretében a Poincaré-leképezés még hátralévő szakasza egzaktul megadható. Mivel azonban a két félsík közötti átmenetek alatt  $y$  értéke jelentősen változik (ld. 9.3 ábra), kvalitatíven



9.3 ábra. Az átkapcsolási folyamat a  $z$  tengely irányából nézve a)  $y_{n-1} \approx 1$ , b)  $y_{n-1} > 1$



helyes képet kapunk akkor is, ha a  $\mu$ -tól való függést elhanyagoljuk az átváltási pont körül. Ebben a közelítésben a mozgás az alsó félsíkon az  $x=0, y=0$ , a felső félsíkon az  $x=0, y=g$  középpontú kör mentén történik. A legalsó olyan  $y_{n-1}$  érték, melyre átkapcsolás történhet az  $y_{n-1} = 1$ . Ez az  $x=1, y=0$  pontban kerül föl a felső félsíkra, majd a  $\sqrt{1+g^2}$  sugarú kör mentén éri el az  $x=0$  egyenest, s ezért  $y_n$  értéke jó közelítéssel  $\sqrt{1+g^2}-g$  lesz (ld. 9.3a ábra). Ha  $y_{n-1}$  1-nél valamivel kisebb, akkor még éppen nem éri el a pálya az  $x=1$  egyenest, a következő ciklusban az átkapcsolás azonban már biztosan megtörténik. A legnagyobb szóba jöhető  $y_{n-1}$  érték tehát  $e^{4\pi}$  nagyságrendű (bekapcsolási jelenségeket nem vizsgálunk). Ha tehát 1-nél valamivel nagyobb  $y_{n-1}$  értékkel indulunk, akkor a pálya az  $x=1, y'=\sqrt{y_{n-1}^2-1}$  pontban kerül a felső félsíkra. A fentiekből következik, hogy  $y'$  kis szám lesz. Ezután a  $\sqrt{1+(g-y')^2}$  sugarú körívén történő mozgás következik, majd a második átváltás az  $x=0, y = -\sqrt{1+(g-y')^2}+g$  pontban történik meg (ld. 9.3b ábra). A keresett  $y_n$  érték:  $|y|$ . Ez  $y'$  kicsinységének kihasználása után az

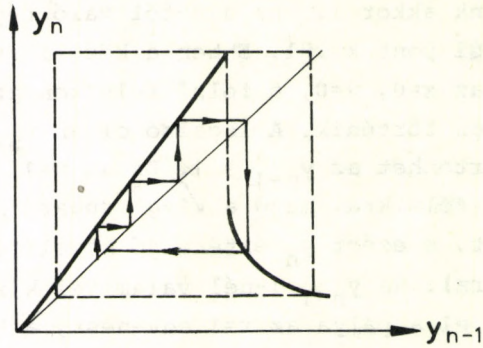
$$y_n = \sqrt{1+g^2} - g - \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} \sqrt{y_{n-1}^2 - 1} \quad (9.7)$$

alakba írható. A Poincaré-leképezésben tehát az  $y_{n-1} = 1$  helyen ugrás történik (ez mindig csökkenés, ugyanis  $\sqrt{1+g^2}-g < 1$ ), utána pedig négyzetgyök függvény szerint folytatódik a csökkenés. Minél nagyobb tehát  $y_{n-1}$ , annál kisebb  $y_n$  ebben a tartományban.

Azt várjuk, hogy a Poincaré-leképezés akkor is ilyen típusú, amikor a fenti közelítések (pl. idealizált karakterisztika) már nem állnak fenn. A teljes leképezési görbét a 9.4 ábra mutatja.

Könnyen látható, hogy a szaggatott vonallal fölrajzolt tartományból a rekurziók nem visznek ki; jóval a bekapcsolás után van tehát  $y_n$ -nek egy minimális és egy maximális értéke. Az ábrán azt is feltüntettük, hogy tetszőlegesen fölvelt kezdeti érték esetén a rekurziók általában nem térnek vissza önmagukba.

A kaotikus mozgás során a közeli pontokból induló pályák exponenciálisan távolodnak. Jól mutatja ezt a Poincaré-leképezés lineáris szakasza, hiszen meredeksége nagyobb 1-nél. Lé-



9.4 ábra. A (8.3) egyenlet kvalitatíven helyes Poincaré-leképezése az  $\varepsilon \ll 1$  határesetben

nyeges közeledés a feszültségesés során sem fordul elő, így az átlagos viselkedésre a pályák divergálása jellemző. Ez a belső instabilitás a káosz eredete. A közeli pályák széttartását később a Ljapunov-exponenssel fogjuk pontosan jellemezni (ld. 16. fejezet).

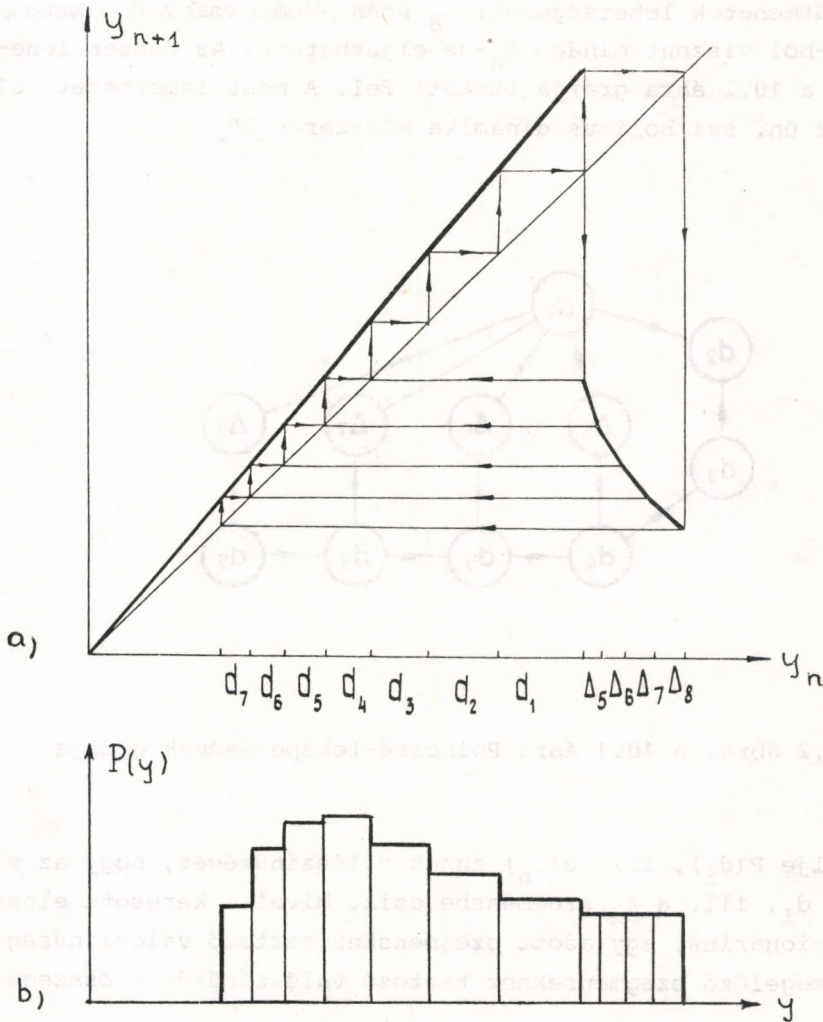
## 10. A STACIONÁRIUS VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁS

A kaotikus viselkedés kizárólag statisztikus eszközökkel írható le. Példánkban megkérdezhetjük azt, milyen valószínűséggel tartalmaz egy impulzus  $n$  maximumot (a 8.2 ábrán  $n$  4 és 8 közé eső érték lehet), vagy azt, hogy a véletlenszerűen kiszemelt maximum milyen valószínűséggel lesz egy adott érték. Mivel csak a jóval a bekapcsolás után kialakuló állapotot vizsgáljuk, a keresett valószínűség nem fog függni az időtől.

Az egy impulzuson belüli maximumok száma megegyezik a Poincaré-leképezésen két átkapcsolás közötti iterációs lépések számával. Így érthető, hogy a Poincaré-leképezés ismerete elegendő az ( $y$ -beli) valószínűség-eloszlás meghatározásához. Ez azonban rendszerint nem tehető meg analitikusan. Az alábbiakban bemutatunk egy egyszerű közelítő eljárást.



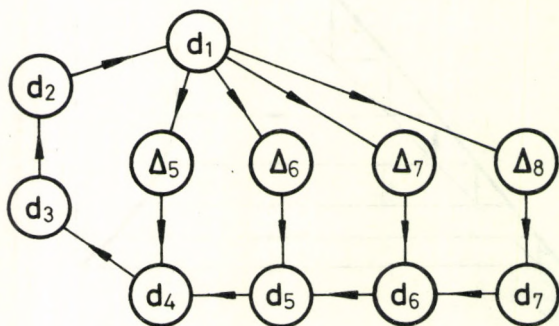
A számolás rövidebbé tétele érdekében tegyük föl, hogy a vizsgált jel impulzusai legalább 5, legfeljebb 8 maximumot tartalmaznak ( $5 \leq n \leq 8$ ). Osszuk be a rendelkezésre álló  $y$ -tartományt szegmensekre úgy, ahogy a 10.1a ábrán látható, s a nemlineáris részt egy-egy szegmensen belül közelítsük egyenes szá-



10.1 ábra. Idealizált Poincaré-leképezés (a) és a stationárius valószínűség-eloszlás (b)

kaszokkal. A szegmenseket úgy vettük föl, hogy annak az iterációnak, ami a  $d_i$  szegmensből indul,  $i$  számú lépése van az átkapcsolásig, a  $\Delta_n$  szegmensből induló iteráció pedig  $n$  lépés után jut el az átkapcsoláshoz (az ilyen impulzus tehát  $n$  maximummal rendelkezik).

A továbbiakban a szegmenseket tekintjük egységeknek. A 10.2 ábráról leolvasható, hogy az egyes szegmensek között csak bizonyos átmenetek lehetségesek:  $\Delta_8$  után például csak a  $d_7$  következhet,  $d_1$ -ből viszont minden  $\Delta_n$ -be eljuthatunk. Az összes lehetőséget a 10.2 ábra gráfja tünteti fel. A most ismertetett eljárás az ún. szimbolikus dinamika módszere [20].



10.2 ábra. A 10.1 ábra Poincaré-leképezésének gráfja

Jelölje  $P(d_i)$ , ill.  $P(\Delta_n)$  annak valószínűségét, hogy az  $y$  érték a  $d_i$ , ill. a  $\Delta_n$  szegmensbe esik. Mivel a keresett eloszlás stacionárius, egy adott szegmenshez tartozó valószínűség az azt megelőző szegmensekhez tartozó valószínűségek összege:



$$P(d_i) = P(d_{i+1}), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$P(d_i) = P(d_{i+1}) + P(\Delta_{i+1}), \quad i = 4, 5, 6,$$

(10.1)

$$P(d_7) = P(\Delta_8),$$

$$P(\Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8) = P(d_1).$$

Mivel  $d_1$ -ből a  $\Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8$  tartomány bármely pontjába egyforma valószínűséggel juthatunk,  $P(\Delta_n)$ -nek a  $\Delta_n$  szegmens  $l_{\Delta_n}$  hosszával kell arányosnak lennie:

$$P(\Delta_n) = \frac{l_{\Delta_n}}{\sum_{n'=5}^{\infty} l_{\Delta_{n'}}}. \quad (10.2)$$

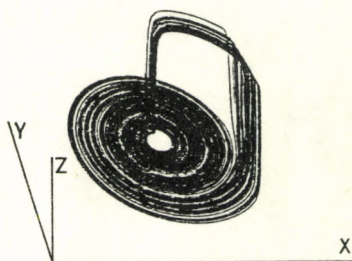
A (10.2) összefüggés adja meg annak valószínűségét, hogy egy impulzus  $n$  számú maximumot tartalmazzon ( $l_{\Delta_n}$  a Poincaré-leképezés grafikonjából könnyen leolvasható). A (10.1), (10.2) egyenletek megoldásából meghatározható a  $P(y)$  valószínűség-sűrűség is, melynek numerikus értékét a 10.1b ábra mutatja [19].

A most vizsgálthoz hasonló kaotikus viselkedésű áramkört kapunk, ha az alagút-diódát a 7.3 ábrán látható kapcsolásban az  $L'$  indukcióval sorosan kötjük be [21]. Ismertek további példák is [22], de az elektronikában előforduló oszcillátorok nagy részét még nem tanulmányozták a kaotikus viselkedés szempontjából.

### 11. KVÁZI-KÉTDIMENZIÓS KÜLÖNÖS ATTRAKTOROK

Disszipatív rendszerekben egy kiszemelt állapotterbeli térfogat az idő múlásával csökken. Ebből következik, hogy  $t \rightarrow \infty$ -re,  $d$ -dimenziós állapotterben a térfogat olyan tartományhoz (attraktorhoz) tart, melynek dimenziója kisebb, mint  $d$ . A kaotikus viselkedést mutató disszipatív rendszerek attraktorai, az ún. különös attraktorok is a végesben helyezkednek el, korlátos kiterjedésűek és vonzók, több tulajdonságukban azonban alapvetően eltérnek az egyszerű attraktoroktól (fixpont, határciklus, tórusz). Ezek közül az egyik legfontosabb az ún. hiperbolicitási tulajdonság, ami azt jelenti, hogy két, közeli ponton átmenő pálya általában nagyon gyorsan eltávolodik egymástól.

Arra a kérdésre, hogyan néz ki a különös attraktor csak a rendszer konkrét ismeretében válaszolhatunk, rendszerint a numerikus megoldás aszimptotikus viselkedése alapján. A továbbiakban olyan rendszerekkel foglalkozunk, melyek állapottere háromdimenziós, vagyis amiket három elsőrendű, autonóm differenciálegyenlet ír le.



11.1 ábra. A (11.1) egyenlet különös attraktora. A tengelyeken:  $x: -4, \dots, 4$ ;  $y: -3, \dots, 4$ ;  $z: -1, \dots, 1$



A 11.1 ábra az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0,15 y, \\ 0,03 \dot{z} &= (1-z^2)(x-1+z) - 0,03 z\end{aligned}\tag{11.1}$$

egyenlet különös attraktorát mutatja az  $x, y, z$  derékszögű koordinátarendszerben [23]. Első látásra szembeütő, hogy az attraktor olyan, mintha vékony papírszalagból lenne hajtogatva. A következőkben arra keressük a választ, hogy mikor lesz a különös attraktor közelítőleg kétdimenziós.

Vizsgáljuk az alábbi egyenletrendszert!

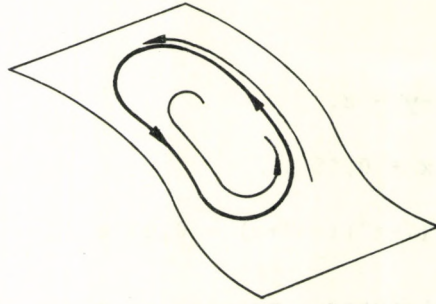
$$\dot{x} = f_1(x, y, z),\tag{11.2a}$$

$$\dot{y} = f_2(x, y, z),\tag{11.2b}$$

$$\varepsilon \dot{z} = f_3(x, y, z),\tag{11.2c}$$

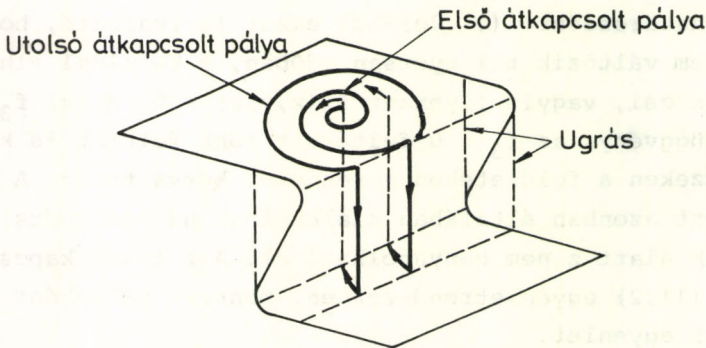
ahol  $x, y, z$  dimenziótlan változók, az  $f_1, f_2, f_3$  függvények egy-  
ségeyi nagyságrendű, vagy ennél kisebb együtthatókat tartalmaz-  
nak csak, s  $f_3$  mindenképpen nemlineáris kifejezés. Tekintsük  
az  $\varepsilon \ll 1$  határesetet! (11.2c)-ből ekkor leolvasható, hogy  
amikor  $z$  nem változik túl gyorsan időben, a baloldal elhanya-  
golhatóan kicsi, vagyis ilyenkor  $f_3(x, y, z) = 0$ . Mivel  $f_3$  nem  
lineáris függvény, az  $f_3 \equiv 0$  feltételt több felület is kielé-  
gítheti. Ezekon a felületeken a rendszer kétváltozós. A felü-  
letek között azonban általában kialakulnak nagyon gyors átme-  
netek; ezek alatt  $z$  nem hanyagolható el. A  $z$  tehát kapcsoló  
változó a (11.2) egyenletrendszerben. Konkrét példaként szol-  
gál a (8.3) egyenlet.

Annak érzékeltetésére, hogy ilyen átkapcsolás hogyan áll-  
hat elő, s milyen következményekkel járhat, képzeljük el, hogy  
olyan rendszert vizsgálunk, mely a 11.2 ábrán felrajzolt síma  
felületen mozog, s ezen a felületen határciklussal rendelke-  
zik [24].



11.2 ábra. Határciklus három dimenzióban

A paraméterek változtatásakor előfordulhat, hogy a felület "begyűrődik", s azon a részen, ahol három felületdarab kerül egymás fölé, a középső darabon történő mozgás nem lenne kompatibilis az egyenletekkel. A rendszer tehát csak a felső vagy az alsó felületen tartózkodhat huzamosabb ideig, a két felület között pedig ugrásszerű átmenetekkel közlekedik (ld. 11.3 ábra). A (11.2) egyenlet ilyen rendszereket ír le.



11.3 ábra. Mozgás a "begyűrődött" felületen



A 11.3 ábráról leolvasható, hogy a "begyűrődött" felületen a határciklus már nem feltétlenül attraktor, ugyanis az átkapcsolt pályák nem alkotnak zárt görbét a felső felületre törté-  
dő visszaugrás után. Az utolsó átkapcsolt pálya által bejárt tartomány azonban attraktor, méghozzá kétdimenziós. A 11.1 ábrán bemutatott különös attraktor ugyanilyen alakzat.

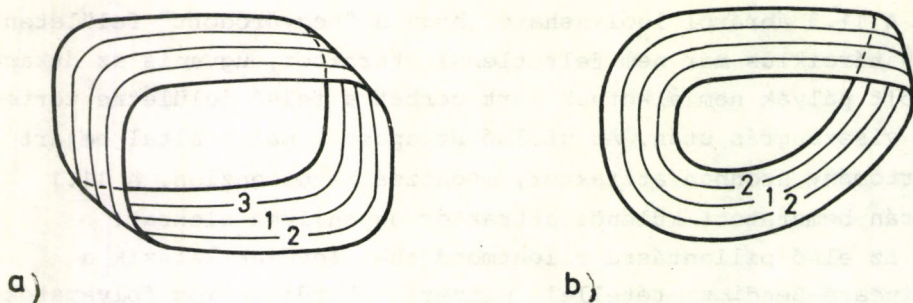
Ez első pillantásra ellentmondásban levőnek látszik a Poincaré-Bendixson-tétellel, miszerint kétdimenziós folyamatokra határciklusnál bonyolultabb attraktor nem létezhet. Vegyük észre azonban, hogy az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határértékben nem valódi folyamatokról van szó, hanem olyan áramlásról, melyben pályák egymásba futhatnak, amittől kezdve azonban már azonos trajektóriaként folytatják útjukat. Az ilyen áramlást nevezik semi-flow-nak, azt a felületet pedig, amin a különös attraktor kialakul, el-  
ágazó felületnek, branched manifold-nak [25,26]. A valóságos rendszereket leíró egyenletekben  $\varepsilon$  mindig kis, véges szám. Így az attraktor kétfőnél magasabb dimenziójú képződmény, s ezért lehetőség van arra, hogy a pályák "kikerülhessék" egymást. Kis  $\varepsilon$  érték esetén szokás kvázi-kétdimenziós különös attraktorról beszélni.

Megjegyezzük, hogy a kapcsoló változó nem szükséges feltétele a kaotikus állapot kialakulásának. Jelenléte a különös attraktor kvázi-kétdimenziós mivoltát biztosítja.

## 12. A KÜLÖNÖS ATTRAKTOROK NÉHÁNY TÍPUSA A VISSZATÁPLÁLÁS MÓDJA SZERINT

A különös attraktorokat egyszerű módon osztályozhatjuk, ha általános topológiai megfontolásokból indulunk ki. Vizsgáljuk meg, milyen tulajdonságú vonal-hálózatot kapunk, ha egy végtelen vékony szalagra párhuzamosan, vagy széttartóan vonalakat rajzolunk, majd a szalag végét valamilyen helyzetben összeragasztjuk az elejével [23].

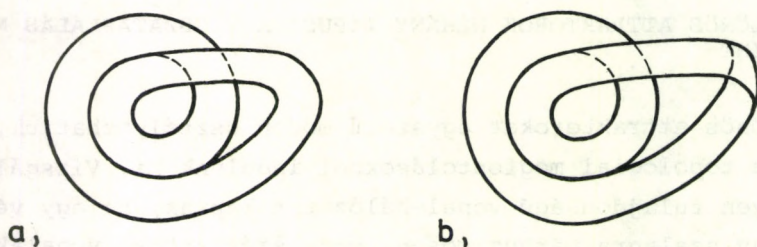
Rajzoljunk először párhuzamos vonalakat a szalagra, s ragasszuk a két véget úgy össze, hogy egyszerű gyűrűt kapjunk (12.1a ábra). Azt látjuk, hogy minden vonal önmagában záródik. Ha a vonalakat trajektóriáknak képzeljük, mindegyik határcik-



12.1 ábra. Párhuzamos vonalak a) egyszerű szalagon, b) Möbius-szalagon

lusnak felel meg. Amennyiben Möbius-szalaggá ragasztjuk össze a papirdarabot, nyolcas alakú zárt vonalakat hozunk létre, csak egyetlen vonal (a szalag közepén levő) alkot egyszerű hurkot (ld. 12.1b ábra). A nyolcas alakú vonalak fele akkora frekvenciájú határciklusnak felelnek meg, mint a középső (vagy mint az a) esetbeliek). Ilyenkor tehát perióduskettőződés történik.

Vizsgáljuk most a 12.2 ábrán látható két esetben megfelelő szalag alakot!



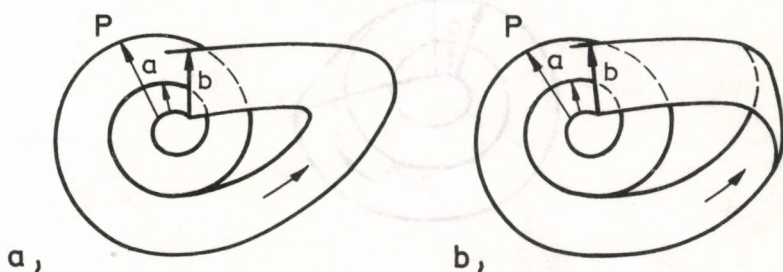
12.2 ábra. a) tekercselt szalag, b) tekercselt Möbius-szalag



Az irányítható felület (a) ábra) esetén most is minden vonal záródik és mindegyik azonos típusú görbét alkot, a nem irányítható felület (b) ábra) esetén viszont olyan zárt görbék alakulnak ki, melyek kb. kétszer olyan hosszúak, mint a szalag közepén lévő (vagy, mint az a) elrendezésbeliek). Lényeges különbség a tekercselt és nem tekercselt szalagok között, hogy most a külső vonalak is bekerülnek a tartomány belsejébe.

Rajzoljunk ezután széttartó vonalakat a szalagra! Az egyszerű gyűrű és a Möbius-gyűrű esetén azt találjuk, hogy a középső vonalon kívül a többi nem záródik, s ezeken a görbéken egyre távolabb kerülünk a középvonaltól. Ez utóbbi tehát instabil határciklusnak felel meg.

Ha a 12.2 ábra elrendezését módosítjuk széttartó vonalak esetére, - célszerű, ha egyre szélesedő szalaggal dolgozunk -, alapvetően új jelenség lép fel: átfedés alakul ki.



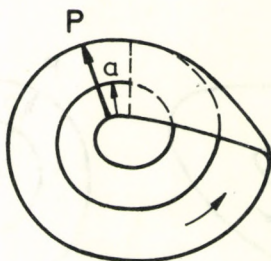
12.3 ábra. A 12.2 ábrának megfelelő elrendezések széttartó vonalak esetén: a) invertált spirális attraktor, b) spirális attraktor

A  $b$  hosszúságú szakaszt metsző visszatáplált vonalak két különböző szalagdarabon oszlanak meg: zárt görbe csak kivételesen jön létre. Azt mondhatjuk tehát, hogy nemcsak egy instabil pályát találunk, hanem végtelen sokat: a közeli pontokból induló pályák gyorsan eltávolodnak egymástól. Ugyanakkor egyik belső vonal sem lép át a tartomány peremén, sőt bizonyos külső

vonalak is bejuthatnak a felületre, amit könnyen beláthatunk, ha gondolatban kiszélesítjük a szalagot.

Az így kapott objektumok rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal, melyekkel a különös attraktoroknak rendelkezniük kell: véges kiterjedésűek, vonzó tulajdonságúak, végtelen sok instabil pálya található rajtuk (hiperbolicitás). Ilyen topológiájú különös attraktorok valóban léteznek. A 12.3b ábrának megfelelő attraktort nevezük spirális attraktornak (a 11.1 ábra attraktora is spirális), a 12.3a ábrának megfelelőt pedig invertált spirális attraktornak (példaként ld. 13.1 ábra).

Lényeges különös attraktor típus a spirális attraktor azon speciális esete, amikor a visszahajtott szalag szélessége megegyezik a visszahajtás helyén az attraktor teljes szélességével. Ez az ún. Rössler-típusú attraktor:



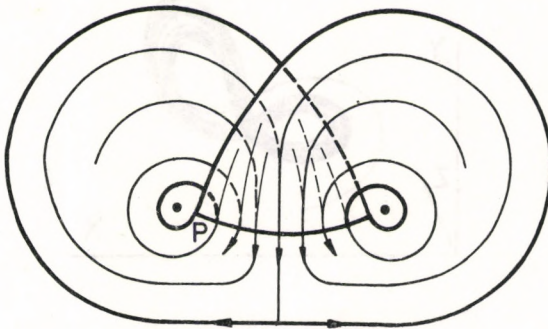
12.4 ábra. Rössler-típusú attraktor

A különös attraktor korlátossága megkívánja azt, hogy egy véges tartományból kilépő vonalak oda vissza is kerüljenek. Ezt nevezük visszatáplálásnak. A fenti osztályozás a visszatáplálás módja szerint történt. Elképzelhető más típusú visszatáplálás is [27], azonban az eddig tárgyaltak a leggyakrabban előforduló elemi lehetőségek.

Két vagy több elemi attraktorból konstruálhatók összetett attraktorok is [27]. Ezek közül csak egyet említünk, ami azonban alapvető jelentőségű, az ún. Lorenz-típusú attraktort. Ez



két, ellentétes irányban forgó, invertált spirális attraktor összeillesztéséből adódik:



12.5 ábra. Lorenz-típusú attraktor

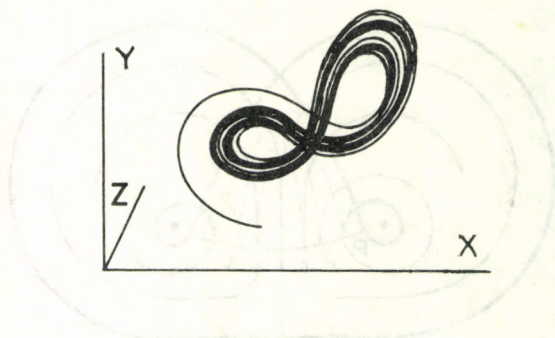
A különös attraktoroknak a visszacsatolás módja szerinti osztályozása (és papirszalagokkal történő modellezése) O.E. Röessler nevéhez fűződik [25-27].

### 13. KAPCSOLÓ VÁLTOZÓT NEM TARTALMAZÓ RENDSZEREK

Abban az esetben, ha a rendszer fázistérfoogatának időegység-re eső változása elegendően nagy, a különös attraktor Hausdorff-dimenziója (F.5 függelék) akkor is lehet kettőhöz közeli érték, ha a rendszerben nincsen kapcsoló változó [28]. Az attraktorok fent bevezetett típusai tehát ilyen rendszerekben is előfordulnak. Arra, hogy ilyenkor hogyan fogalmazható meg pontosan az attraktor és a papirmodellek közötti kapcsolat, később még visszatérünk (24. fejezet). Az

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x - xy - z, \\
 \dot{y} &= x^2 - 0,1y, \\
 \dot{z} &= 0,08x - 0,38z + 0,0015
 \end{aligned}
 \tag{13.1}$$

egyenletrendszerben például invertált spirális attraktor alakul ki [27].



13.1 ábra. A (13.1) rendszer különös attraktora (invertált spirális). A tengelyeken:  $x: -1,6 \dots 1,6$ ;  $y: 0, \dots 1,6$ ;  $z: -0,08, \dots 0,08$

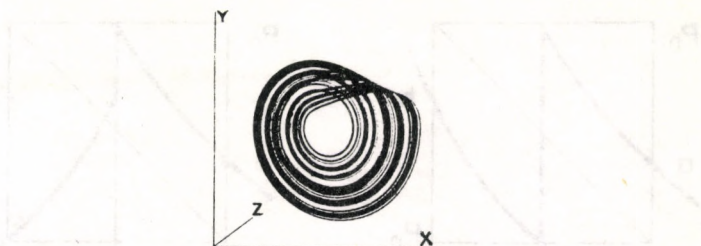
A Rössler-modell [29] a legegyszerűbb háromváltozós egyenletrendszer, melyben kaotikus viselkedés tapasztalható. A háromból két egyenlet lineáris, a harmadikban is csak egy másodrendű tag van. Az egyenlet általános alakja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Az  $a=b=0,2$  érték mellett kaotikus viselkedés  $c > 4,20$  esetén alakul ki, az attraktor ilyenkor Rössler-típusú. Részletesebben ld. 33. fejezet.

A Lorenz-típusú attraktor legjobb példája az ún. Lorenz-modell, melynek kimerítő ismertetésére a 22-24. fejezetben kerül sor.



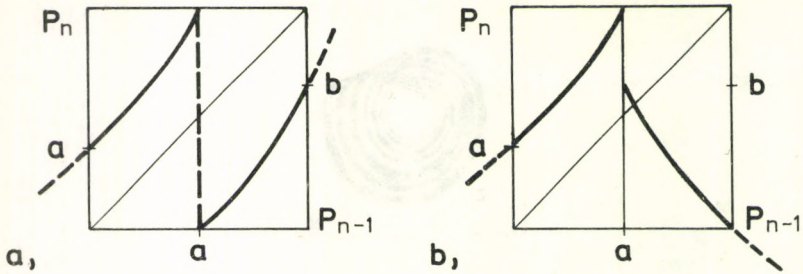


13.2 ábra. A Rössler-attraktor. A (13.2) egyenletben  $a=b=0,2$ ,  $c=5,7$ . A tengelyeken:  $x,y: -14,\dots,14$ ;  $z: 0,\dots,28$

#### 14. AZ ALAPTÍPUSOKNAK MEGFELELŐ POINCARÉ-LEKÉPEZÉSEK

A papírmódellek ismeretében könnyen meghatározható, milyen alakú Poincaré-leképezés jellemzi a különös attraktorok egyes típusait [23,24,27]. Kétdimenziós attraktorok esetén a Poincaré-felület eggyel alacsonyabb dimenziós, tehát vonal. Ezt a vonalat a visszatáplálási hurok beérkezése utáni tartományban célszerű fölvenni, konkrét megválasztása azonban tetszőleges. A 12.3-12.5 ábrákon nyílazott vonal-darabbal jelöltük a Poincaré-metszetet, melyen  $P$  értéke a vonal mentén mért távolságot jelöli a kezdőpontból kiindulva.

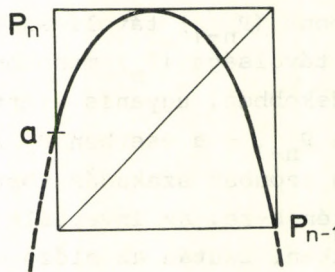
A spirális, ill. az invertált spirális attraktorok esetén (ld. 12.3 ábra) az origóból indulva az  $a$  távolságra lévő pontba jutunk. A kezdőpont ( $P_{n-1}$ ) távolításakor egy ideig a visszatérés utáni pont távolsága ( $P_n$ ) monoton növekszik - a  $45^\circ$ -os egyenesnél meredekebben, ugyanis széttartó vonalakat rajzoltunk a papírra. A  $P_{n-1} \rightarrow a$  esetben  $P_n$  a maximális értékhez tart, az  $a$  helyen azonban szakadás történik;  $P_n$  értéke a spirális attraktor esetén  $b$ -re, az invertált spirális attraktor esetén nullára csökken. Ezután az előző esetben monoton csökkenés, az utóbbiban monoton növekedés következik. A teljes Poincaré-leképezéseket a 14.1 ábra mutatja. A szaggatott hosszabbítások arra utalnak, hogy a környezetből is kerülhetnek pályák az attraktorra.



14.1 ábra. a) Az invertált spirális attraktor Poincaré-leképezése. b) A spirális attraktor Poincaré-leképezése

A 9. fejezet 4. ábráján feltüntetett Poincaré-leképezés (bekeretezett része) ugyanolyan típusú, mint a 14.1b ábrán levő. Ennek így is kell lennie, ugyanis a fent bevezetett osztályozás szerint a 9.2 ábrán bemutatott attraktor spirális attraktor.

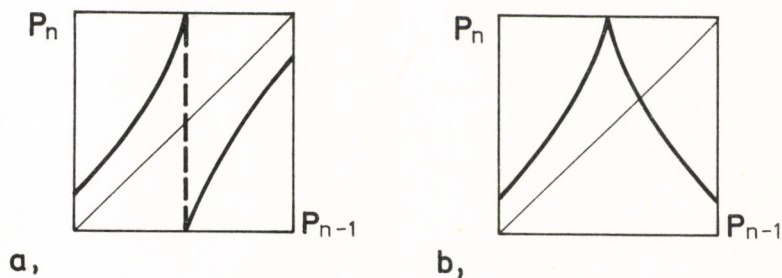
A Rössler-típusú attraktorhoz (ld. 12.4 ábra) tartozó Poincaré-leképezés felrajzolásakor figyelembe kell vennünk egyrészt azt, hogy a  $P_{n-1} = a$  helyen most nem következik be ugrás, másrészt azt, hogy a visszahajtás miatt viszonylag sok pontból juthatunk a maximum hely közelébe: a leképezés tehát simán változó függvény.



14.2 ábra. A Rössler-típusú attraktorhoz tartozó Poincaré-leképezés



A Lorenz-típusú attraktor Poincaré-leképezése szintén könnyen leolvasható a 12.5 ábrán megadott papírmoddellről. Az origóban véges értékről indul, monoton növekszik, a felezőpontban a maximumról a nullára ugrik, majd onnét ismét monoton növekszik (14.3a ábra). Az egész grafikon középpontos szimmetriát mutat, hiszen az attraktort alkotó két invertált spirális attraktor egyenértékű.



14.3 ábra. A Lorenz-típusú attraktorhoz tartozó Poincaré-leképezés két különböző reprezentációban

Lorenz-típusú attraktor esetén a Poincaré-leképezést szokás úgy is definiálni, hogy  $P$  értékét a Poincaré-metszetet jelentő vonal-darab azon végpontjától mérjük, melyhez közelebb esett az előző metszéspont. A grafikon jobb oldala ekkor a bal oldal tengelyes tükörképe lesz (14.3b ábra).

A különös attraktorok és a megfelelő Poincaré-leképezések közötti kapcsolat a későbbiekben lényeges szerepet játszik majd. Látni fogjuk, hogy sok esetben elegendőnek bizonyul az egydimenziós Poincaré-leképezések vizsgálata.

A kaotikus viselkedés kialakulásának két alapvetően különböző típusa tartozik az olyan egydimenziós Poincaré-leképezésekhez, melyek síma maximummal rendelkeznek, ill. azokhoz, melyekben éles csúcs vagy ugrás lép fel, s utána meredeken csökken a grafikon. Az első esetben perióduskettőző bifurkációk végtelen sorozata, ún. Feigenbaum-szekvencia előzi meg a káosz kialakulását. Ez történik a Duffing-oszcillátorban, a kényszer-

rített Van der Pol-oszcillátorban, a Rössler-modellben és sok más rendszerben. A második esetre viszont az jellemző, hogy néhány bifurkáció után jelenik meg a kaotikus állapot, mint például a Lorenz-modellben vagy a 9. fejezetben vizsgált alagút-diódás oszcillátorban. Előfordulhat, hogy az élesnek induló csúcs lekerekítéssel végződik. Elméletileg az ilyen rendszerben is fellép Feigenbaum-szekvencia, azonban minél kisebb a lekerekítés intervalluma, annál kevésbé mutatható ki a perióduskettőzések sorozata fizikai vagy számítógépes kísérletekben.





15. AZ EGYDIMENZIÓS LEKÉPEZÉS ÉS FIXPONTJAI

Az egydimenziós leképezést az

$$x_{t+1} = f(r, x_t) \quad , \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (15.1)$$

egyenlet definiálja. Az  $x_0$  kezdeti értékből kiindulva, rögzített  $r$  paraméter mellett kísérvük figyelemmel a valós  $x_t$  "időbeli" viselkedését. Mint látni fogjuk,  $r$  különböző értékei esetén minőségileg különböző  $x_0, x_1, x_2, \dots$  trajektóriákat kaphatunk. Az  $r$  változót kontrollparaméternek nevezzük. Az  $f(r, x)$  függvényt válasszuk úgy, hogy az  $x$  változóban ne legyen lineáris. Ekkor a lépések számának növekedésével az  $x_t$  egyre bonyolultabb alakú nem lineáris függvénye lesz az  $x_0$  kezdeti értéknek. Célunk, hogy az ilyen leképezésekben megfigyelhető komplex viselkedést leírjuk.

Az  $x_t$  változását korlátok közé szorítjuk, ha  $f(r, x)$  egy meghatározott intervallumot önmagára vagy önmagába képez le. Például az

$$f_L(r, x) \equiv r x (1-x) \quad , \quad (15.2)$$

elterjedt nevén a logisztikus leképezés függvénye, a  $0 < r < 4$  paraméter értékek esetén a  $[0, 1]$  intervallum pontjait ugyanebbe az intervallumba transzformálja.

Az egydimenziós leképezés a legegyszerűbb olyan modell, amely igen bonyolult dinamikai viselkedést mutat. Vizsgálatát az elmúlt években erősen motiválta az, hogy szoros kapcsolatban áll a Poincaré-leképezésen keresztül nem lineáris differenciálegyenlet rendszerekkel, továbbá közvetlenül modellez populációdinamikai problémákat, és az egydimenziós leképezésekkel természetesen numerikus iterációk konvergenciatulajdonságai is tanulmányozhatóak. Metropolis, Stein és Stein munká-

ja [30], amelyben rámutattak a bifurkációs szekvenciák létezésére, fontos mérföldkövet jelentett. Az akkori eredményekről May írt összefoglalót [31], amelyben számos irodalmi utalás is segíti a tájékozódást. A bifurkációk sorozatára vonatkozó első numerikus eredmények Grossmann és Thomae [32], valamint Couillet és Tresser [33] nevéhez fűződnek. A bifurkációs szekvenciák univerzális tulajdonságainak felfedezése, numerikus és intuitív elméleti igazolása Feigenbaum munkásságának köszönhető [34-36]. Az egydimenziós leképezések elméletének legújabb eredményeit Collet és Eckmann foglalta össze könyvében [37], amelyben bőszeges irodalomjegyzék áll az érdeklődő Olvasó rendelkezésére.

Térjünk rá a leképezés tulajdonságainak vizsgálatára. Vezessük be az

$$f^{(t)}(r, x) \equiv f(r, f(r, \dots f(r, x) \dots)) \quad (15.3)$$

jelölést, ahol  $t$  azt a számot jelenti, ahányszor az  $f(r, x)$  leképezést szukszcesszíven alkalmaztuk. Ezzel a jelöléssel a (15.1) egyenletet az

$$x_t = f^{(t)}(r, x_0)$$

alakba írhatjuk.

Ha az

$$x = f(r, x)$$

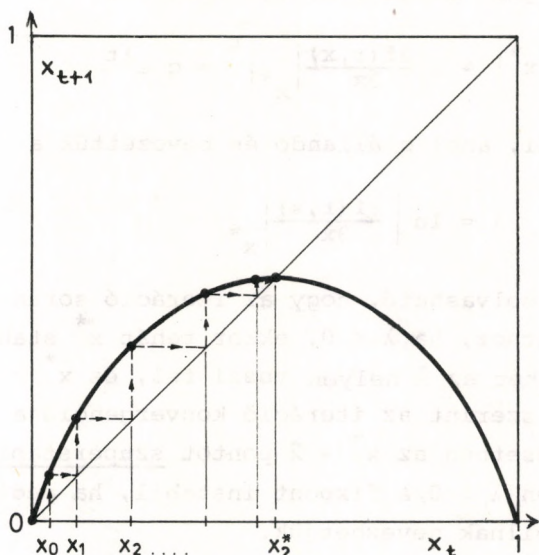
egyenletnek létezik  $x^*$  megoldása, akkor az  $x^*$  számot a transzformáció fixpontjának nevezzük. A logisztikus leképezés fixpontjait elemi úton számíthatjuk ki

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{r-1}{r}. \quad (15.4)$$

Kézenfekvő a gondolat, hogy a fixpontokat a (15.1) egyenlettel definiált iteráció segítségével keressük meg. Például a (15.2) logisztikus leképezés esetében az  $r = 2$  paraméter mellett, tetszőleges  $x_0 \in (0, 1]$  intervallumbeli kezdeti értékből kiindulva az iteráció az  $x^* = 1/2$  fixponthoz konvergál. Ha azonban az



$x_0 = 0$  pontból indulunk, akkor minden  $x_t = x_1^* = 0$ . A 15.1 ábrán szemléltetjük az iteráció első néhány lépését  $x_0 \neq 0$  kezdeti feltétel mellett. Az  $x_{t+1} = x_t$  egyenes segítségével vetítjük vissza a vízszintes tengelyre az  $x_{t+1} = f_L(2, x_t) \equiv 2x_t(1-x_t)$  értéket, majd azt újból transzformáljuk a logisztikus függvénnyel, s az eljárást többször megismételjük. Az egyenes és a leképezés függvényének metszéspontjai az iteráció fixpontjait jelölik ki.



15.1 ábra. A nem-triviális fixponthoz konvergáló iterációs sorozat

## 16. STABILITÁS, LINEÁRIS TRANZIENSEK

A logisztikus leképezés fixpontjainak stabilitási tulajdonságait a következőképpen foglalhatjuk össze. Az  $x_1^* = 0$  fixpontot az  $x_0 \neq x_1^*$  kezdeti értékből indulva nem érhetjük el, ezért  $x_1^*$  instabil. Az  $x_2^*$  fixpont viszont stabil, s a  $(0, 1]$  intervallum pedig  $x_2^*$  vonzási tartománya. A stabil fixpont a

fenti dinamikai rendszer attraktora, az instabil fixpont pedig a repellor.

Tegyük fel, hogy az  $f(r, x)$  leképezés deriválható az  $x^*$  fixpontjában. Válasszuk az  $x_0$  kezdeti értéket elég közel a fixponthoz, és fejtsük sorba a (15.1) egyenletet  $x^*$  körül. Átrendezés után az

$$\frac{|x_{t+1} - x^*|}{|x_t - x^*|} \approx \left| \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} \right|_{x^*} \quad (16.1)$$

közelítő összefüggést kapjuk. Az egyenletet az

$$|x_t - x^*| \approx c \left| \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} \right|_{x^*}^t = c e^{\lambda t} \quad (16.2)$$

függvényt kielégíti, ahol  $c$  állandó és bevezettük a

$$\lambda = \ln \left| \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} \right|_{x^*} \quad (16.3)$$

jelölést. Innen leolvasható, hogy az iteráció során akkor közeledünk a fixponthoz, ha  $\lambda < 0$ , ekkor tehát  $x^*$  stabil. Ha az  $f(r, x)$  szélsőértékét az  $\hat{x}$  helyen veszi fel, és  $x^* = \hat{x}$ , akkor  $\lambda = -\infty$  és (16.1) szerint az iteráció konvergenciája igen gyorsá válik. Ilyen esetben az  $x^* = \hat{x}$  pontot szuperstabilnak nevezzük. Amennyiben  $\lambda > 0$ , a fixpont instabil, ha pedig  $\lambda = 0$ , marginálisan stabilnak nevezhetjük.

A (16.1) egyenlet a transzformáció linearizált alakja. A lineáris stabilitási analízis nem alkalmas arra, hogy segítségével meghatározzuk a stabil fixpontok vonzási tartományának teljes kiterjedését.

Tegyük föl, hogy  $f(r, x)$  differenciálható. Ekkor az  $x^*$  fixponthoz konvergáló trajektóriák mentén definiált

$$\bar{\lambda} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \ln \left| \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} \right|_{x_t} \quad (16.4)$$

ún. Ljapunov-szám vagy más elnevezéssel Ljapunov-exponens megegyezik a (16.3) kifejezéssel. Az  $x_0, x_1, \dots$  sorozat tagjai közül ugyanis csak véges számú esik az  $x^*$  körüli linearitási tartományon kívül, a teljes trajektória mentén való átlagolás



során ezért a döntő járuléka a fixpont környezetéből származik.

A Ljapunov-szám függhet az  $x_0$  kezdeti értéktől,  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(x_0)$ .  
Bevezetjük ezért a

$$\bar{\lambda}_{\text{átl.}} = \frac{1}{I} \int \bar{\lambda}(x_0) dx_0 \quad (16.5)$$

átlagos Ljapunov-számot, ahol az integrálás arra az  $I$  hosszúságú intervallumra történik, amelyen az  $f(r, x)$  transzformációt definiáltuk. Abban az esetben például, ha egy  $x_1^*$  instabil és egy  $x_2^*$  stabil fixpontot találunk, az átlagos Ljapunov-szám megegyezik az  $x_2^*$  stabil fixponthoz konvergáló bármely trajektória mentén számított Ljapunov-számmal. A Ljapunov-szám egy stabil fixpont vagy valamilyen más attraktor vonzási tartományán belül állandó. Mint később látni fogjuk, az egydimenziós leképezések széles osztálya rendelkezik egyetlen attraktorral. Ezek vonzási tartománya zérus mértékű számhalmaztól, például néhány izolált instabil fix-ponttól eltekintve maga az  $I$  intervallum. A Ljapunov-szám tehát majdnem minden  $x_0$  kezdeti érték esetén megegyezik a (16.5) képletben definiált átlagos értékkel. A továbbiakban ezért a Ljapunov-számot az átlagától csak akkor különböztetjük meg, ha annak gondolatmenetünk szempontjából jelentősége lesz.

A Ljapunov-szám (16.4) definíciójából a deriválás láncszabályának alkalmazásával kapjuk a

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_N} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{N-1}} \dots \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \right| = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\partial f^{(N)}}{\partial x} \Big|_{x_0} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\partial x_N(x_0)}{\partial x_0} \right| \end{aligned} \quad (16.6)$$

kifejezést, ahol felhasználtuk a (15.3) jelölést. A fenti alakból jól látszik, hogy a Ljapunov-szám jellemzi a trajektória kezdeti feltételre való érzékenységét. Stabil fixpont vonzási tartományába eső bármely  $x_0$  kezdeti érték esetén a trajektória a fixponthoz konvergál. A kezdeti értékre való érzéketlenséget fejezi ki, hogy ekkor a  $\bar{\lambda}$  Ljapunov-szám negatív. Pozitív  $\bar{\lambda}$  mellett azonban, azaz amikor például instabil fixpontban tartózkodunk, a fixpontból való kis kimozdulás esetén a trajektó-

ria eltávolodik a ponttól.

A (16.6) kifejezést közelítőleg a

$$\bar{\lambda} \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{x_N(x_0 + \varepsilon) - x_N(x_0)}{\varepsilon} \right|,$$

vagy a szemléletesebb

$$\left| x_N(x_0 + \varepsilon) - x_N(x_0) \right| \approx |\varepsilon| e^{N\bar{\lambda}} \quad (16.7)$$

alakba írhatjuk, ahol  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A Ljapunov-exponens tehát előjelétől függően az egymáshoz közel indított trajektóriák távoldásának vagy közeledésének gyorsaságát jellemzi.

Vizsgáljuk meg a (15.2) logisztikus leképezés (15.4) fixpontjaihoz rendelhető Ljapunov-számokat. Az origóban maradó trajektória esetén a (16.4) definíció alapján számított - nem átlagos - Ljapunov-szám  $\bar{\lambda} = \ln |\partial f_L / \partial x|_{x_1^*} = \ln |r|$ . Ha  $r > 1$ , akkor  $\bar{\lambda} > 0$ , a fixpont tehát instabil, mint azt a 15.1 ábra iterációs sémája is mutatja. Az  $x_2^* = (r-1)/r$  fixponthoz konvergáló sorozatok mentén a Ljapunov-szám értéke  $\bar{\lambda} = \ln |\partial f_L / \partial x|_{x_2^*} = \ln |2-r|$ . A fixpont az  $1 < r < 3$  paraméterek mellett stabil. Amikor  $r \rightarrow 3$ , akkor  $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ , s a fixponthoz való konvergálás ezért a (16.6) kifejezés szerint a fixpont környezetében lelassul. Az  $r = 3 \equiv r_1$  pontban pedig a marginálisan stabillá vált fixponthoz közel az iteráció pontjainak a fixponttól mért távolsága első rendben nem változik.

## 17. BIFURKÁCIÓK VÉGTELEN SOROZATA

Ha az  $f(r, x)$  függvény fixpontja a kontrollparaméter  $r_1$  értéke esetén veszti el stabilitását, akkor az  $r \geq r_1$  paraméterek melletti időfejlődés leírásához célszerű az

$$x_{t+2} = f^{(2)}(r, x_t) \quad (17.1)$$

egyenletet vizsgálni. A (15.1) leképezés fixpontjai egyben a fenti egyenlet fixpontjai is. Az utóbbiban azonban további fixpontokat is találhatunk.



Tekintsük például a logisztikus leképezést,

$$x_{t+2} = f_L^{(2)}(r, x_t) \equiv r^2 \left[ 1 - (r+1)x_t + 2rx_t^2 - rx_t^3 \right]. \quad (17.2)$$

Az  $x = f_L^{(2)}(r, x)$  fixpont-egyenletnek négy megoldása van

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, & x_2^* &= \frac{r-1}{r}, \\ x_{3,4}^* &= \frac{1}{2r} \left[ r+1 \mp \sqrt{(r+1)(r-3)} \right]. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Míg azonban  $x_1^*$  és  $x_2^*$  az  $x = f_L(r, x)$  egyenletnek is gyökei, addig  $x_3^* = f_L(r, x_4^*)$  és  $x_4^* = f_L(r, x_3^*)$ . Mivel  $x_3^*$  és  $x_4^*$  a  $[0, 1]$  intervallumba esik a  $3 \lesssim r$  paraméter értékek mellett, azért ekkor az  $x_3^*, x_4^*, x_3^*, x_4^*, x_3^* \dots$  sorozat, a  $p = 2$  periódusú határciklus megvalósulhat. A határciklus stabilitását a Ljapunov-szám (16.6) kifejezésével jellemezhetjük

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial f_L}{\partial x} \right|_{x_3^*} \left| \frac{\partial f_L}{\partial x} \right|_{x_4^*} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial f_L^{(2)}}{\partial x} \right|_{x_3^*} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial f_L^{(2)}}{\partial x} \right|_{x_4^*} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| r^2 - 2r - 4 \right|. \end{aligned} \quad (17.4)$$

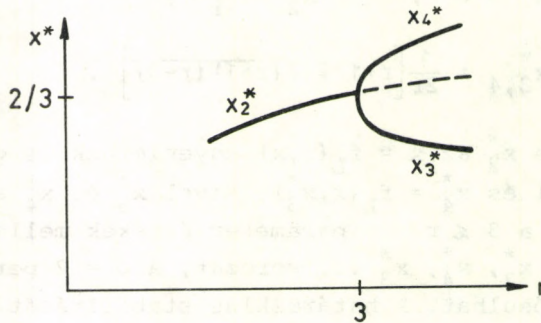
A második sorból leolvashatjuk, hogy az  $x_{t+2} = f_L^{(2)}(r, x_t)$  iteráció  $x_3^*$  és  $x_4^*$  fixpontjai azonos stabilitásúak. A kettes periódusú határciklus stabil, ha  $\bar{\lambda} < 0$ . Elemi számítással kapjuk, hogy ez a feltétel az

$$r_1 \equiv 3 < r < 1 + \sqrt{6} \equiv r_2 \quad (17.5)$$

tartományban teljesül. A határciklus ekkor a leképezés attraktora.

A kontrollparaméter  $r_1$  értéke mellett az  $x_2^*$  fixpont elveszti a stabilitását. Ha  $r \geq r_1$ , az  $f_L^{(2)}(r, x) = x$  egyenletnek további két valós megoldása adódik,  $x_3^*$  és  $x_4^* = f_L(r, x_3^*)$ , amelyek

$r = r_1$  mellett egybeesnek az  $x_2^*$  fixponttal. Az  $r - r_1$  értéket növelve a stabil határciklus pontjai távolodnak egymástól. A fixpont fent leírt kettéválása, azaz stabil kettő periódusú határciklus megjelenése egy példa a bifurkációra. A 17.1 ábrán a bifurkáció jelenségét szemléltetjük.

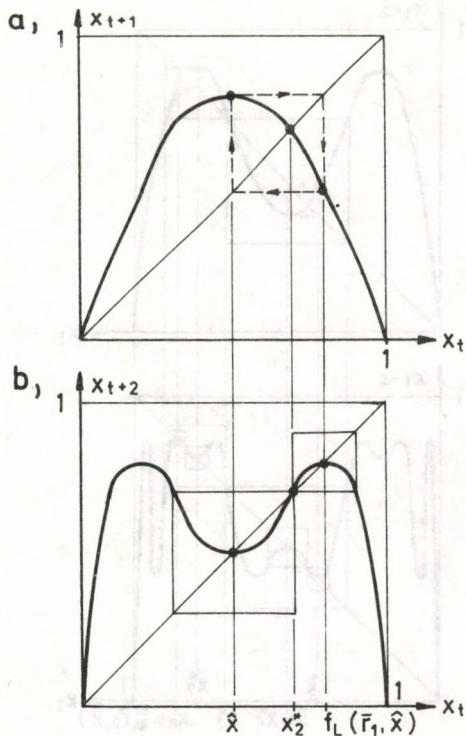


17.1 ábra. A logisztikus egyenlet stabil fixpontjának bifurkációja

A 17.2 ábrán az  $f_L$  és az  $f_L^{(2)}$  függvényeket ábrázoljuk az  $\bar{r}_1 = 1 + \sqrt{5}$  érték mellett. A (17.4) kifejezésből leolvashatjuk, hogy  $r = \bar{r}_1$  esetén  $\bar{\lambda} = -\infty$ , a kettő periódusú határciklus tehát szuperstabil, a határciklusban az  $\hat{x} = 1/2$  maximumhely részt vesz.

Alaki hasonlatosságot fedezhetünk fel a 15.1 ábrán látható  $f_L$  függvény és a 17.2b ábrán felrajzolt  $f_L^{(2)}$  leképezésnek a fixpontok körüli négyzeteken belül mutatott viselkedése között. Ha az ábrázolt  $f_L$  függvény  $r$  kontrollparaméterét növeljük, az  $x_{t+1} = x_t$  egyenes egyre meredekebb helyen metszi a görbét. Elég nagy  $r$  mellett pedig megjelenik a  $p = 2$  periódusú határciklus. Növeljük most az  $f_L^{(2)}$  függvényben a kontrollparamétert. A függvény minimuma ekkor lejjebb, maximuma feljebb kerül, majd (17.5) szerint az  $r_2 = 1 + \sqrt{6}$  paraméterrel a fixpontok elvesztik stabilitásukat. Itt újabb bifurkációt találunk. A kialakuló határciklus pontjai növekvő sorrendbe állítva  $x_5^*, x_6^*, x_7^*, x_8^*$ , ahol  $x_5^* = f_L^{(2)}(r, x_6^*)$ ,  $x_6^* = f_L^{(2)}(r, x_5^*)$ ,

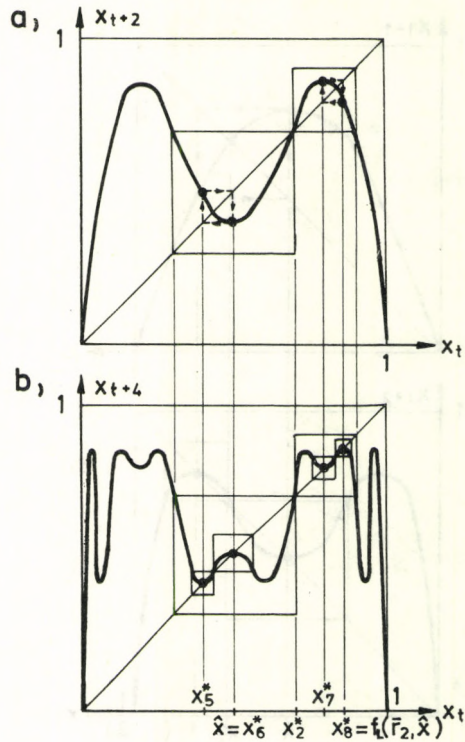




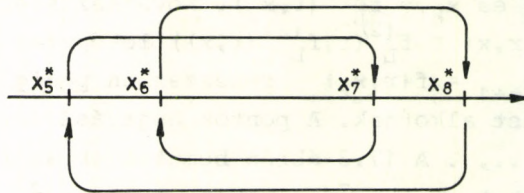
17.2 ábra. a) Az  $f_L$  leképezés szuperstabil  $p=2$  periódusú határciklusa. b) A ciklus pontjai egyben  $f_L^{(2)}$  szuperstabil fixpontjai

$x_7^* = f_L^{(2)}(r, x_8^*)$  és  $x_8^* = f_L^{(2)}(r, x_7^*)$ . Következésképp a felsorolt pontok az  $f_L^{(4)}(r, x) \equiv f_L^{(2)}(r, f_L^{(2)}(r, x))$  leképezés fixpontjai, s az eredeti,  $x_{t+1} = f(r, x_t)$  rendszerben pedig  $p = 4$  periódusú határciklust alkotnak. A pontok bejárási sorrendje  $x_5^*, x_7^*, x_6^*, x_8^*, x_5^* \dots$ . A 17.3 ábrán bemutatjuk az  $f_L^{(2)}$  és az  $f_L^{(4)}$  leképezéseket az  $r = \bar{r}_2$  pontban, ahol az  $\hat{x} = 1/2$  szélsőérték helyét vesz a határciklusokban.

A 17.4 ábrán azt illusztráljuk, az iteráció során milyen sorrendben követik egymást a határciklus pontjai. A sorrend jellegzetessége, hogy egymásra következő pontok az előző, kettő periódusú határciklus különböző pontjaiból származtak bifurkáció útján. A trajektória tehát az előző határciklusra jellemző periódusidővel oszcillál a kettő, egyenként két pont-



17.3 ábra. a) Az  $f_L^{(2)}$  leképezés  $p=2$  periódusú szuperstabil határciklusai. b) A ciklus pontjai  $f_L^{(4)}$  fixpontjai



17.4 ábra. A  $p=4$  határciklus pontjainak szekvenciája

ből álló csoport között

A 15.1 ábrán látható  $f_L$  függvény menete és a 17.3b ábrán felrajzolt  $f_L^{(4)}$  leképezésnek a stabil fixpontjai körüli visel-



kedése között alaki hasonlatosságot fedezhetünk fel. A hasonlóság fontos eleme, hogy az  $f_L^{(4)}$  függvény stabil fixpontjaiban a görbe meredeksége azonos. Ezt a differenciálás láncszabályának alkalmazásával láthatjuk be

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_L^{(4)}}{\partial x} \Big|_{x_5^*} &= \frac{\partial f_L}{\partial x} \Big|_{x_8^*} \frac{\partial f_L}{\partial x} \Big|_{x_6^*} \frac{\partial f_L}{\partial x} \Big|_{x_7^*} \frac{\partial f_L}{\partial x} \Big|_{x_5^*} = \frac{\partial f^{(4)}}{\partial x} \Big|_{x_6^*} = \frac{\partial f^{(4)}}{\partial x} \Big|_{x_7^*} = \\ &= \frac{\partial f^{(4)}}{\partial x} \Big|_{x_8^*} . \end{aligned}$$

A kontrollparamétert a 15.1 illetve a 17.3b ábrán növelve egyaránt azt tapasztaljuk, hogy a fixpontok a görbék egyre meredekebb szakaszaira kerülnek, majd elvesztik stabilitásukat, s  $p=2$  periódusú határciklusok alakulnak ki. Az  $f_L^{(4)}$  leképezés stabil fixpontjainak kettéválása emlékeztet az  $f_L$  leképezésben megfigyelhető első bifurkációra, azonban más a két jelenség hosszskálája. Az  $f_L^{(4)}$  függvényénél megjelenő  $p=2$  periódusú határciklusokat az  $f_L^{(8)}(r, x) \equiv f_L^{(4)}(r, f_L^{(4)}(r, x))$  függvény fixpontjai alkotják. E pontok az eredeti  $x_{t+1} = f_L(r, x_t)$  rendszer  $p=8$  periódusú ciklusában vesznek részt.

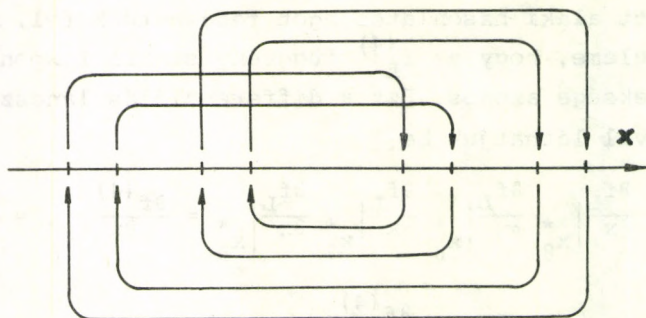
Az új határciklus pontjai a négyes periódus pontjaiból az

$$\begin{array}{cccc} x_5^* \rightarrow x_9^* & , & x_6^* \rightarrow x_{11}^* & , & x_7^* \rightarrow x_{13}^* & , & x_8^* \rightarrow x_{15}^* \\ x_5^* \rightarrow x_{10}^* & , & x_6^* \rightarrow x_{12}^* & , & x_7^* \rightarrow x_{14}^* & , & x_8^* \rightarrow x_{16}^* \end{array}$$

módon jelentek meg, ahol  $x_9^* < x_{10}^* < \dots < x_{16}^*$ . A leképezést megvizsgálva azt találjuk, hogy az iteráció során a pontok a 17.5 ábrán látható sorrendben követik egymást.

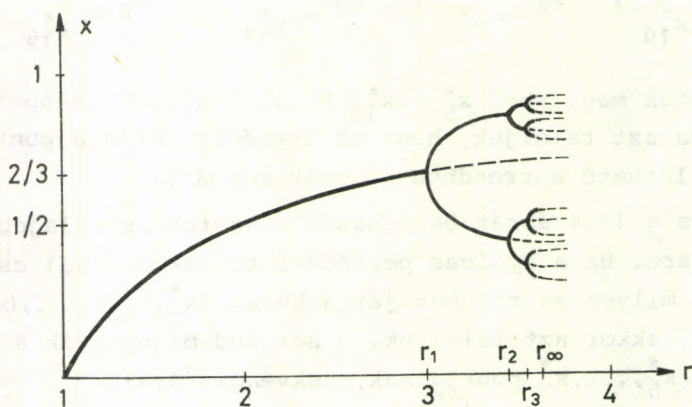
A 17.5 és a 17.4 ábrát összehasonlítva fontos tulajdonságot vehetünk észre. Ha a nyolcas periódusú trajektóriánál csak azt vizsgáljuk, milyen sorrendben járja be az  $(x_9^*, x_{10}^*), \dots, (x_{15}^*, x_{16}^*)$  pontpárokat, akkor azt találjuk, a sorrend megegyezik a négyes határciklus  $x_5^*, \dots, x_8^*$  pontjainak szekvenciájával.

Anélkül, hogy az  $x = f_L^{(2^n)}(r, x)$  fixpont-egyenletek gyökeit és azok stabilitását algebrai úton meg kellene határoznunk, pusztán az  $f_L, f_L^{(2)}, f_L^{(4)}$  ... leképezések kvalitatív menetének és néhány tulajdonságának alapján messzemenő következtetéseket



17.5 ábra. A  $p=8$  határciklus pontjainak bejárási sorrendje. Az  $x$  tengelyen jelölt pontok  $x_9^*, \dots, x_{16}^*$

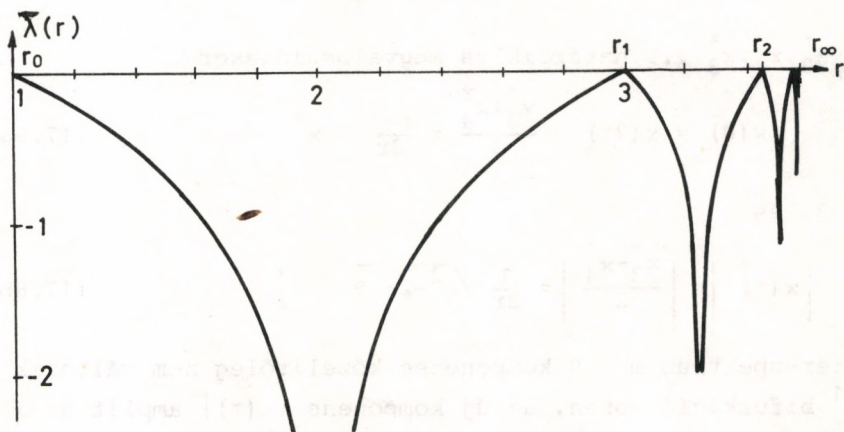
vonhatunk le. A kontrollparaméter növelésével egyre nagyobb,  $p=2^k$  periódusú határciklus válik a rendszer egyetlen attraktórává. A  $2^k$  ciklus pontjai az  $r = r_k$  pontban a  $2^{k-1}$  határciklus pontjainak bifurkálása útján keletkeznek. A  $2^j$  ciklusok,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , az  $r > r_k$  tartományban instabilak, a repellort ők alkotják. A 17.6 ábrán bemutatjuk a logisztikus leképezés stabil és instabil határciklusait alkotó pontokat a kontrollparaméter függvényében. A bifurkációs diagramot egy számítógépes vizsgálat alapján rajzoltuk fel [38].



17.6 ábra. A logisztikus leképezés stabil (—) és instabil (---) határciklusainak pontjai a kontrollparaméter függvényében



A diagramon is jeleztük, hogy a  $2^{k-1} \rightarrow 2^k$  bifurkációk  $r_k$  pontjainak sorozata konvergens. A sorozat határértékét numerikusan meghatározták:  $r_k \rightarrow r_\infty = 3,569945672\dots$ . A 17.7 ábrán felrajzoltuk a Ljapunov-szám függését a kontrollparamétertől [38].



17.7 ábra. A Ljapunov-szám függése a kontrollparamétertől. Az  $r_k$  pontokban a határciklus szuperstabil,  $\lambda(\bar{r}_k) = -\infty$

A trajektóriák oszcilláló viselkedését leírhatjuk Fourier-spektrumukkal. Vezessük be az

$$x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t e^{-i\omega t} \quad (17.6)$$

transzformációt. Ha az  $x_1 \dots x_p$  határciklus a leképezés attraktora, akkor a  $T = Np$  és a  $t \rightarrow t + pj$  behelyettesítéssel kapjuk:

$$x(\omega) = \left[ \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p x_t e^{-i\omega t} \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N e^{-i\omega pj} =$$

$$= \left[ \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p x_t e^{-i\omega t} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ ha } \omega \neq \frac{2\pi k}{p}, k = 0, 1 \dots p \\ 1, \text{ ha } \omega = \frac{2\pi k}{p} \end{array} \right\}. \quad (17.7)$$

A trajektória Fourier-komponensei tehát csak az  $\omega_n(k) \equiv 2\pi k/p(n)$ ,  $p(n) \equiv 2^n$ , frekvenciákon nem tűnnek el, a periódus kettőződés során pedig újabb alharmonikus komponensek jelennek meg. A stabil  $x_2^*$  fixpont esetében például

$$x(\omega = 0) = x(2\pi) = x_2^* = \frac{r-1}{r},$$

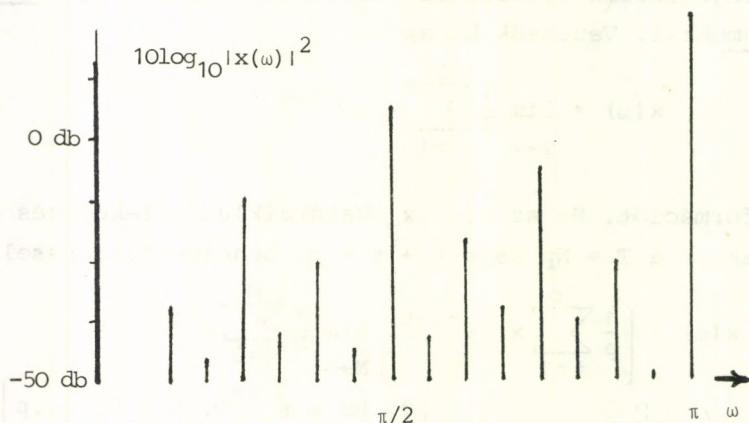
míg az  $x_3^*, x_4^*, x_3^* \dots$  határciklus megvalósulásakor

$$x(0) = x(2\pi) = \frac{x_3^* + x_4^*}{2} = \frac{r+1}{2r} \approx x_2^*, \quad (17.8a)$$

ha  $r \geq 3$ , és

$$\left| x(\pi) \right| = \left| \frac{x_3^* - x_4^*}{2} \right| = \frac{1}{2r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} < x_2^*. \quad (17.8b)$$

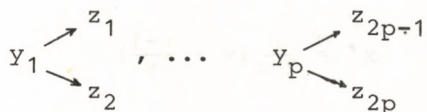
A Fourier-spektrum  $\omega = 0$  komponense közelítőleg nem változik a  $2^0 \rightarrow 2^1$  bifurkáció során, az új komponens  $|x(\pi)|$  amplitúdója azonban lényegesen kisebb. Az utóbbi közvetlenül a bifurkáció után a kontrollparaméter függvényében igen gyorsan nő, majd közel állandó értékű marad az  $\bar{r}_1$  szuperstabilitási pont elérése után. További bifurkációk egyre kisebb amplitúdójú alharmonikusok megjelenéséhez vezetnek. A 17.8 ábrán vázlatosan felrajzoltuk a  $p(6) = 2^6$  periódusú határciklus Fourier-spektrumát.



17.8 ábra. A  $p=2^6$  periódusú ciklus Fourier-spektruma a kontrollparaméter  $r \lesssim r_7$  értéke mellett



A határciklusok pontjainak bejárási sorrendjére utal az, hogy a  $2^k$  határciklus minden frekvenciája előfordul a  $2^{k+1}$  ciklus spektrumában. A  $p=2^k$  határciklus  $y_1, \dots, y_p$  pontjaiból a bifurkáció során az



pontok keletkeznek. Miként azt a 17.4 és a 17.5 ábrán is szemléltettük, a  $2^k$  ciklusban az  $y_1 \dots y_p$  pontok ugyanolyan időbeli sorrendben követik egymást, mint amilyen sorrendben az iteráció a  $(z_1, z_2), \dots, (z_{2p-1}, z_{2p})$  pontpárokat érinti a  $2^{k+1}$  határciklusban - a teljes  $2^{k+1}$  periódus megtétele alatt kétszer. (A trajektória akkor érint egy pontpárt, ha a két pont egyike a trajektóriában részt vesz.) Egy határciklus jellegzetes periódusidőit ezért a belőle bifurkációk során keletkező határciklusok jellegzetes periódusidőit között is megtaláljuk.

Egy egyszerű nemlineáris dinamikai rendszerben, a logisztikus leképezésnél a kontrollparaméter változtatásával az attraktor pontjai megkettőződésének végtelen sorozatát figyelhetjük meg. Hasonló viselkedést tapasztalhatunk olyan más függvényeknél is, amelyek kvalitatív menete emlékeztet a logisztikus leképezés alakjára.

A logisztikus leképezést koordináta-transzformáció köti össze például az irodalomban gyakran vizsgált

$$f_1(a, y) \equiv 1 - ay^2 \quad (17.9a)$$

és

$$f_2(b, z) \equiv b - z^2 \quad (17.9b)$$

leképezésekkel. A logisztikus leképezés  $f_L(r, x)$  függvényének változóit az alábbi módon fejezhetjük ki,

$$r = 1 \pm \sqrt{1+4a} \quad , \quad x = \frac{a}{r}y + \frac{1}{2} \quad ,$$

és

$$r = 1 \pm \sqrt{1+4b} \quad , \quad x = \frac{1}{r}z + \frac{1}{2} \quad .$$

Innen azt is leolvashatjuk, hogy ha fennáll

$$x_{t+1} = rx_t(1-x_t),$$

akkor az

$$r' = 2-r, \quad x' = \frac{r}{2-r}\left(x - \frac{r-1}{r}\right)$$

transzformált változóknban szintén az

$$x'_{t+1} = r'x'_t(1 - x'_t)$$

logisztikus leképezést kapjuk. Az eredeti rendszerben az  $r$  kontrollparaméternél lezajló jelenségek figyelhetők meg tehát a transzformált rendszerben, ha a kontrollparamétert az eredeti koordinátarendszerben definiált logisztikus leképezésben a  $2-r$  értékre állítjuk be [39].

A szimmetrikus, egy maximummal rendelkező  $f(r,x) = r F(x)$  függvények közül, ahol  $F(x)$  a  $[0,1]$  intervallumot önmagára képezeti le, számosra alkalmazhatóak a 17.2-3 ábrák kapcsán leírt szemléletes megfontolások [5,34,35,40]. Ilyen például az  $f = r \sin \pi x$  függvény. Azt mondhatjuk, a perióduskettőzések végtelen sorozata, vagy más elnevezéssel a Feigenbaum-szekvenciák, az egydimenziós leképezések széles csoportjánál megfigyelhetők.

## 18. SKÁLATULAJDONSÁGOK

Az  $\hat{x} = 1/2$  szélsőérték hely környezetében a 15.1, 17.2b és 17.3b ábrák három egymáshoz hasonló alakú leképezést mutatnak be. A bifurkációs diagram 17.6 ábrájának, valamint a 17.7 ábrának, amelyre a Ljapunov-számot rajzoltuk fel, az a szembe-tűnő tulajdonsága, hogy a különböző  $(r_k, r_{k+1})$  intervallumokban a görbék viselkedése hasonló, csupán a hosszskáláik térnek el. A 17.8 ábrán felrajzolt frekvenciaspektrum egy bifurkáció után alharmonikus csúcsokkal bővül olymódon, hogy az új spektrum a  $[0, \pi]$  tartományban emlékeztet a régi spektrum  $[0, 2\pi]$  intervallumbeli szerkezetére. A periódus kettőzések végtelen



sorozatot jellemző mennyiségek - más és más hosszskálán - önmagukat ismétlik. Bár az  $r_\infty$  torlódási ponti közelében a 17.6, 17.7 és 17.8 ábrákon látható függvények egyre gyorsabban változnak s igen bonyolultakká válnak, a hasonlóságból származó skálaösszefüggések segítségével leírhatjuk őket. Az alábbiakban ismertetjük a legfontosabb, számítógéppel nyert numerikus eredményeket.

A végtelen periódus kettőződést mutató és egyetlen kvadratikusan maximummal rendelkező leképezéseknél létezik a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = \delta = 4,6692016\dots \quad (18.1)$$

határérték [32-34]. Ha az  $r_k$  bifurkációs pontok helyébe a szuperstabilitás  $\bar{r}_k$  értékeit helyettesítjük, a határérték négyzetes maximumot mutató leképezéseknél továbbra is a  $\delta$  szám. A szokásos szóhasználatnál élve, a  $\delta$  állandó a fenti leképezések osztályára nézve univerzális. A fenti limesszel ekvivalens az

$$r_\infty - r_k \propto \delta^{-k} \quad (18.2)$$

aszimptotikus arányosság. Ennek alapján elemi átalakításokkal megkaphatjuk a periódusidőnek a kontrollparamétertől való függetlenségét

$$p = 2^k \propto (r_\infty - r_k)^{-\tau}, \quad (18.3)$$

ahol  $\tau = \ln 2 / \ln \delta = 0,4498\dots$  [41]. A periódusidő szinguláris - kritikus - hatványfüggését a  $\delta$  univerzális szám meghatározza. Ezért a  $\delta$  számot kritikus exponensnek is nevezik.

A 17.3a és a 17.4a ábrákon az  $\hat{x}$  szélsőérték hely körüli leképezések közötti hasonlóság jellemezhető az

$$\frac{f(\bar{r}_1, \hat{x}) - \hat{x}}{\hat{x} - f^{(2)}(\bar{r}_2, \hat{x})} \equiv \alpha_1 \quad (18.4)$$

hányadossal, amely a 17.3a és a 17.4a ábrákon látható,  $\hat{x}$  körüli négyzetek oldalainak aránya. Számítógépes vizsgálatok szerint létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(2^{n-1})(\bar{r}_n, \hat{x}) - \hat{x}}{f(2^n)(\bar{r}_{n+1}, \hat{x}) - \hat{x}} \right| \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha = 2,502907875... \quad (18.5)$$

határérték, s a kvadratikus maximummal rendelkező függvények osztályán univerzális [34]. Az  $\alpha$  szám a 17.6 ábrán látható, az  $\hat{x}$  maximumhelyet is tartalmazó villák ágai távolságának exponenciális csökkenését jellemzi, ha a villákat a szuperstabil pontokban hasonlítjuk össze. Következésképp a határciklusnak a legnagyobb értékű pontját, az  $f(\bar{r}_n, \hat{x})$  pontot tartalmazó villa  $\alpha^2$ -tel skálázódik minden négyzetes maximummal rendelkező  $f$  függvény esetén. A  $\delta$  és az  $\alpha$  számok tehát a 17.6 ábrán látható bifurkációs diagram vízszintes illetve függőleges tengelyeinek jellemző skálafaktorai.

A Ljapunov exponens is mutat skálaviselkedést. Legyenek az  $[r_k, r_{k+1}]$  intervallumban stabil határciklus pontjai  $y_1(r)$ ,  $y_2(r)$ , ...  $y_{2^k}(r)$ , amelyek egyben az  $f^{(2^k)}$  leképezés azonos stabilitású fixpontjai. A (16.4) definíció szerint a Ljapunov-exponens

$$\bar{\lambda}(r) = \frac{1}{2^k} \sum_{t=1}^{2^k} \ln \left| \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} \right|_{y_t} = \frac{1}{2^k} \ln \left| \frac{\partial f^{(2^k)}(r, x)}{\partial x} \right|_{y_1}. \quad (18.6)$$

A különböző  $[r_k, r_{k+1}]$  intervallumbeli  $\check{r}_k$  pontokat megfelelő stabilitású pontoknak nevezzük, ha a  $\partial f^{(2^k)}(\check{r}_k, x) / \partial x$  derivált a különböző  $2^k$  periódusú stabil határciklusok pontjaiban megegyezik. Ilyen  $\check{r}_k$  sorozaton tartva az  $r_\infty$  torlódási ponthoz a Ljapunov-szám

$$\bar{\lambda}(\check{r}_k) = \bar{\lambda}_0 / 2^k \quad (18.7)$$

exponenciális csökkenését figyelhetjük meg.

Az  $\bar{r}_k$  szuperstabilitási pontban  $\partial f^{(2^k)} / \partial x \Big|_{y_1} = 0$ . A derivált  $\bar{r}_k$  körüli sorfejtésre ezért lineáris taggal kezdődik, s a Ljapunov-szám (18.6) szerint logaritmikusan divergál a szuperstabilitási helyen. A nem divergens járulékokat a  $g(r)$  függvényben összefoglaljuk, s így az  $[r_k, r_{k+1}]$  intervallumban



érvényes

$$\bar{\lambda}(r) = \frac{1}{2^k} \ln|r - \bar{r}_k| + g(r) \quad (18.8)$$

kifejezéshez jutunk.

A  $\bar{\lambda}(r)$  függvényt közelítjük, ha feltesszük, a nem szinguláris járulékokat az  $[r_k, r_{k+1})$  intervallumban a  $g(r) \equiv g_k$  állandóval becsülhetjük. Az  $r_k$  bifurkációs pontban

$$\bar{\lambda}(r_k) = \frac{1}{2^k} \ln(\bar{r}_k - r_k) + g_k = 0.$$

Felhasználva, hogy aszimptotikusan  $r_k \approx r_\infty - a\delta^{-k}$  és  $\bar{r}_k \approx r_\infty - \bar{a}\delta^{-k}$ , a

$$g_k \approx -\frac{1}{2^k} \ln \delta^{-k} - \frac{1}{2^k} \ln(a - \bar{a}) \approx \frac{1}{2^k} \ln \delta^k$$

közelítést kapjuk. Innen a (18.8) kifejezést felhasználva meghatározhatjuk a  $2^k$  periódusú határciklus Ljapunov-exponensének közelítő alakját,

$$\bar{\lambda}(r) = \frac{1}{2^k} \ln|r - \bar{r}_k| \delta^k. \quad (18.9)$$

Az olyan  $\tilde{r}_k$  pontok megfelelő stabilitásúak tehát, amelyekre

$$\tilde{r}_k - \bar{r}_k = C \delta^{-k}.$$

Mivel az  $\bar{r}_k$  és az  $r_k$  sorozatok konvergenciáját egyaránt a  $\delta$  szám jellemzi, azért a megfelelő stabilitású pontok az  $[r_k, r_{k+1}]$  intervallumokat azonos arányban osztják. A megfelelő stabilitású pontok sorozata is eleget tesz az

$$r_\infty - \tilde{r}_k \propto \delta^{-k} \quad (18.10)$$

aszimptotikusarányosságnak, amelyet (18.7)-be helyettesítve nyerjük

$$\bar{\lambda}(\tilde{r}_k) \propto (r_\infty - \tilde{r}_k)^\tau, \quad (18.11)$$

ahol  $\tau = \ln 2 / \ln \delta$ .

Megjegyezzük, hogy a Ljapunov-exponens skálaviselkedését az  $[r_k, r_{k+1}]$  intervallumban egzakt módon a

$$\bar{\lambda}(r) = \frac{1}{2^k} \ln \phi \left[ (r - \bar{r}_k) \delta^k \right] \quad (18.12)$$

kifejezés írja le, ha  $k \rightarrow \infty$ , ahol  $\phi$  univerzális függvény a négyzetes maximummal rendelkező függvények osztályán,  $\phi(0) = 0$  és  $\phi$  differenciálható.

Mind a fenti, mind a (18.9) közelítő formula alapján megállapíthatjuk, hogy a Ljapunov-szám  $[r_k, r_{k+1}]$  intervallumbeli átlagát szintén a  $\tau = \ln 2 / \ln \delta$  exponens jellemzi [38]

$$\frac{1}{r_{k+1} - r_k} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \bar{\lambda}(r) dr \propto (r_\infty - r_k)^\tau. \quad (18.13)$$

A trajektória Fourier-spektrumában is felfedezhetünk skálaviselkedést. A  $2^k \rightarrow 2^{k+1}$  bifurkáció során az  $\omega_k(j) = 2\pi j / 2^k = \omega_{k+1}(2j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2^k$ , frekvenciájú komponensek a nagy  $k$  határesetben változatlanok maradnak. Az újonnan megjelenő  $\omega_{k+1}(2j+1)$ ,  $j = 0, 2, \dots, 2^k - 1$ , páratlan frekvenciájú Fourier-komponensek viszont az előző határciklus páratlan frekvenciájú összetevőihöz képest megváltoznak. A spektrum közepén ( $\omega \approx \pi$ ) az

$$\frac{|x(\omega_k(2j+1))|}{|x(\omega_{k+1}(4j+3))|} \approx \frac{|x(\omega_k(2j+1))|}{|x(\omega_{k+1}(4j+1))|} \approx \mu = 0,1525\dots \quad (18.14)$$

faktorral csökkennek, ahol a  $j$  index  $2^{k-2}$  körüli nagy egész szám, és amennyiben a  $2^k$  és a  $2^{k+1}$  periódusokat megfelelő stabilitású pontokban hasonlítjuk össze. A fenti összefüggés egy, a  $2^{k-1} \rightarrow 2^k$  átmenetkor megjelenő csúcsot hasonlít össze a  $2^k \rightarrow 2^{k+1}$  bifurkáció során a csúcs két oldalán újonnan fellépő két Fourier-komponenssel. A spektrum skálaviselkedését jellemző  $\mu$  szám független a  $\delta$  és az  $\alpha$  állandóktól, s az egyetlen négyzetes maximummal rendelkező függvények osztályán univerzális [42,36]. (Megjegyezzük, hogy az alacsony  $k$  index melletti becslések nem jók. A kettes periódus Fourier-amplitúdóinak (17.8) képletéből számított első közelítés az



egzakt  $\mu$  több mint kétszeresét adja). A frekvenciaspektrum univerzális tulajdonságait részletesen az F.4 függelékben írjuk le.

## 19. RENORMALÁSI TRANSZFORMÁCIÓ AZ EGYDIMENZIÓS LEKÉPEZÉSEN

Az  $r_\infty$  torlódási pont közelében a leképezést jellemző megnyilvánulások igen bonyolultakká válnak. E komplex viselkedés leírásához a probléma új elméleti megközelítésére van szükség. A hasonlóság jelentőségének felismerése és egyes skálatulajdonságok numerikus igazolása vezetett el a renormalási transzformáció gondolatához. Segítségével az univerzalitás is igazolást nyert. Az elmélet legfontosabb eredményeit az F.4 függelékben fogalmazzuk meg. Az alábbiakban bemutatunk egy közelítő renormalási eljárást, és becslést adunk a  $\delta$  és az  $\alpha$  állandókra.

Először idézzünk fel egy, az F.4 függelékben is leírt elméleti állítást. Tekintsük a 17.2a ábrán felrajzolt  $f(\bar{r}_1, x) - \hat{x} \equiv f(\bar{r}_1, \hat{x} + y) - \hat{x} \equiv \bar{h}_0(y)$  függvényt, amely az  $I_1 = [0, f(\bar{r}_1, \hat{x}) - \hat{x}]$  intervallumot önmagára képezi le. Nagyítsuk most ki a 17.3a ábrán az  $\hat{x}$  minimumhely környezetét a (18.4) kifejezésben definiált  $\alpha_1$  skálafaktorral. Az így kapott

$$-\alpha_1 \left[ f^{(2)}(\bar{r}_2, \hat{x} - y/\alpha_1) - \hat{x} \right] \equiv \bar{h}_1(y)$$

függvény  $\bar{h}_0(y)$ -hoz hasonlóan az  $I_1$  szakaszt önmagára képezi. A  $k > 1$  indexű  $f^{(2^k)}$  függvények  $\hat{x}$  körüli alakját a (18.5) képletben definiált skálafaktorokkal kinagyítva a

$$(-1)^k \alpha_1 \dots \alpha_k \left[ f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+1}, \hat{x} + y/(-1)^k \alpha_1 \dots \alpha_k) - \hat{x} \right] \equiv \bar{h}_k(y) \quad (19.1a)$$

függvényeket kapjuk. Az  $\alpha_0 = f(\bar{r}_1, \hat{x}) - \hat{x}$  jelölést használva az

$$\alpha_0^{-1} \bar{h}_k(y \alpha_0) \equiv h_k(y) \quad (19.1b)$$

transzformációval a  $[0, 1]$  intervallumot önmagára egy-egyértelmű módon leképező  $h_k(y)$  függvényekhez jutunk. Az eljárás során

a leképezést az  $\hat{x}$  maximumhely egyre kisebb környezetében nagyítjuk ki, s az  $y=0$  ponttól távoli viselkedését figyelmen kívül hagyjuk, miközben a kontrollparaméter  $\bar{r}_k$  értékein megközelítjük az  $r_\infty$  határértéket. Azt állítjuk, hogy az egy kvadrátikus maximummal rendelkező  $f(r, x)$  leképezésekből indulva létezik a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(y) = g_1(y) \quad (19.2)$$

határérték-függvény, amely az  $f(r, x)$  konkrét alakjától független, vagyis univerzális, és  $g_1(y) = g_1(-y)$  [34].

Nagy  $k$  index mellett  $h_k(y) \approx h_{k+1}(y)$  és  $\alpha_k \approx \alpha_{k+1} \approx \alpha$ , ezért közelítőleg fennáll, hogy

$$-\alpha \left[ f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+1}, \hat{x} - y/\alpha) - \hat{x} \right] \approx f^{(2^{k-1})}(\bar{r}_k, \hat{x} + y) - \hat{x} \quad (19.3)$$

A függvény kétszeri alkalmazása és az  $\alpha$  számmal való nyújtása a renormálási transzformáció, amit itt  $\hat{x}$  körül végeztünk el. A fenti összefüggés azt fejezi ki, hogy a renormálási transzformációt az  $f^{(2^{k-1})}(\bar{r}_{k+1}, x)$  függvényen elvégezve közelítőleg az  $f^{(2^{k-1})}(\bar{r}_k, x)$  függvényt kapjuk. A transzformáció alkalmazása során tehát a kontrollparaméter távolodik az  $r_\infty$  torlódási ponttól. Látjuk továbbá, hogy a renormálási transzformáció (19.3) összefüggése szerint  $\bar{r}_k$  meghatározza az  $\bar{r}_{k+1}$  és  $\alpha$  számokat. A tapasztalat szerint a  $h_k$  függvények gyorsan konvergálnak, ezért a fenti közelítéstől kis  $k$  index esetén is jó becslést remélhetünk.

Példaképpen elvégezzük a renormálási transzformációt  $k=1$  mellett a logisztikus leképezésen. Eljárásunk általánosabb lesz az eddig leírtaknál. A kontrollparamétert az  $\bar{r}_k$  szuperstabilitási pontból elmozdítva a határciklus egyik pontja eltolódik az  $\hat{x}$  maximumhelytől. A (19.3) összehasonlítás jobb oldalán megengedjük az  $r$  paraméter  $[r_0, r_1] = [1, 3]$  intervallumbeli változását. Az  $\hat{x}$  maximumhely helyett a határciklus eltolódott pontjához viszonyítjuk az  $y$  elmozdulást. A jobb oldalon minden  $r$  érték meghatároz a baloldalon egy  $r'$  számot, amely az  $[r_1, r_2] = [3, 1+\sqrt{6}]$  szakaszon mozog (ld. a (17.5) egyenlőtlenséget). Az  $r = r(r')$  összefüggés alapján megadjuk



a  $\delta$  kritikus exponens közelítő értékét, és a (19.3) összehasonlítás segítségével az  $\alpha$  állandót is megbecsüljük.

A (19.3) összehasonlítás polinomok összehasonlítása. A lineáris tagok egyenlővé tétele azt eredményezi, hogy az  $r$  és  $r'$  pontok egyben megfelelő stabilitású pontok. Ha  $k=1$ , akkor a baloldalon negyedfokú, a jobboldalon másodfokú polinom áll. A baloldalon a kettőnél magasabb rendű, azaz  $O(y^3/\alpha^3)$  tagok elhanyagolására az ad jogcímet, hogy  $\alpha^{-1} < 1$ . A jobboldalon (15.4) szerint az  $x_2^* = (r-1)/r$  fixpont körüli  $y$  elmozdulást kell tekintenünk, míg a baloldalon a (17.3) kifejezés alapján az  $x_3^* = (r'+1 - \sqrt{(r'+1)(r'-3)})/(2r')$  pont körüli  $y/\alpha$  kitérésekben fejtünk sorba kvadratikussá rendig. A (19.3) összehasonlításhoz megfelelő

$$-\alpha \left[ f_L^{(2)}(r', x_3^* - y/\alpha) - x_3^* \right] = f_L(r, x_2^* + y) \quad (19.4)$$

egyenlőséget az  $f_L(r, x) = rx(1-x)$  függvényalak felhasználásával az  $y/\alpha$  változóban négyzetes rendig írjuk fel

$$\begin{aligned} (-r'^2 + 2r' + 4)y - y^2(-r'^3 + 2r'^2 + 3r' + 3r'\sqrt{(r'+1)(r'-3)})/\alpha = \\ = (2-r)y - ry^2. \end{aligned}$$

Innen leolvasható, hogy

$$r = r'^2 - 2r' - 2 \equiv r(r'), \quad (19.5)$$

és

$$\alpha = \frac{-r'^3 + 2r'^2 + 3r'(1 + \sqrt{(r'+1)(r'-3)})}{r} = \frac{r'}{r}(3\sqrt{r-1} + 1 - r). \quad (19.6)$$

Az  $[r_1, r_2]$  intervallumon belül a Ljapunov-számot a (17.4) kifejezés határozza meg. Látható, hogy

$$\bar{\lambda}(r') = \bar{\lambda}(r)/2,$$

az  $r(r')$  leképezés tehát valóban a megfelelő stabilitású pontokat köti össze. Így például  $r(r_2) = r_1$ ,  $r(\bar{r}_1) = \bar{r}_0$  és  $r(r_1) = r_0$ .

Következő közelítésünk abban áll, hogy feltesszük, az  $[r_{k+1}, r_k]$  és az  $[r_k, r_{k-1}]$  intervallumok megfelelő stabilitású pontjai közötti leképezés alakja megegyezik a (19.5)-beli függvényel. Például az intervallumok határait egymásba transzformálja:

$$r(r_{k+1}) = r_k \quad (19.7)$$

A bifurkációk torlódási pontja egyben a renormálási transzformáció fixpontja is,

$$r(r_\infty) = r_\infty \approx \frac{3 + \sqrt{17}}{2} = 3,5615\dots, \quad (19.8)$$

amelyet a számítógép segítségével kapott  $r_\infty = 3,5699\dots$  értékkel összehasonlítva jó egyezést találunk. A (18.2) összefüggés alapján helyettesítsük be a (19.7) képletbe az

$$r_k = r_\infty - A \delta^{-k}$$

aszimptotikus kifejezést. A (19.5) függvényalak felhasználásával kapjuk a

$$\delta \approx 2r_\infty - 2 = 1 + \sqrt{17} = 5,12\dots$$

számot. Közelítésünk eltérése a  $\delta = 4,669\dots$  egzakt értéktől ~10 %. (Ha a renormálási transzformáció következő lépését is elvégezzük, azaz a nagyított  $f_L^{(4)}$  függvényt hasonlítjuk össze az  $f^{(2)}$  leképezéssel, akkor a  $\delta$  állandó becslését a  $\delta \approx 2 + \sqrt{2} = 4,83\dots$  értékre javíthatjuk [39,43]. Pontosabb közelítést a Derrida-Gervois-Pomeau-féle renormálási eljárás [44] alkalmazásával harmadrendben a közelmúltban kaptak:  $\delta \approx 4,675\dots$  [45].) Az  $\alpha$  skálafaktor közelítő értékét kapjuk, ha a (19.6) kifejezésbe az  $r' = r_2 = 1 + \sqrt{6}$  és az  $r = r_1 = 3$  számokat helyettesítjük. Ekkor

$$\alpha \approx 2,578\dots$$

adódik, amely a számítógéppel kapott  $\alpha = 2,50290\dots$  értéket



jól közelíti. Megjegyezzük, ha nem az  $\hat{x}$  maximumhely közelében levő  $x_3^*$  pont körül fejtünk sorba, hanem a távolabbi  $x_4^*$  pont körül, akkor az  $\alpha^2$  skálafaktort kell használnunk a renormálási eljárás során. A számítást elvégezve az  $\alpha^2 \approx 7,17\dots$  nyújtási tényezőt kapjuk, amelyből az  $\alpha$  számra  $\sim 5\%$ -os hibával adódik becslés. A közelítést tehát jónak tekinthetjük.

A renormálási transzformáció hasznosnak bizonyult az egyébként csak számítógéppel meghatározható univerzális állandók becslésére. Az eljárás alapja az a feltételezés volt, hogy az  $r_1, \dots, r_k, \dots$ , az  $(r_2 - r_1)/(r_3 - r_2), \dots, (r_{k+1} - r_k)/(r_{k+2} - r_k), \dots$  és az  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$  sorozatok határértéke létezik, továbbá a (19.1) kifejezéssel definiált, a leképezés maximuma körüli nagyítás-sal előállított függvények sorozata konvergens, s a négyzetes maximummal rendelkező függvények osztályán a határértékek univerzálisak. Tény azonban, hogy az egydimenziós leképezések általános elmélete kevés egzaktul bizonyított tételre [46], támaszkodhat - elsősorban intuitív állításokat ismerünk. Az intuitív elmélet "tételeit" az F.4 függelékben fogalmazzuk meg.

## 20. SÍKBELI LEKÉPEZÉSEK

Az előző fejezetekben megismert egydimenziós leképezések után a legegyszerűbb leképezések a sík pontjainak

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i), \quad (20.1)$$

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i)$$

alakú transzformációi. Ilyen transzformációhoz például úgy juthatunk el, ha egy három szabadsági fokú (háromdimenziós állapotterű) rendszernek, vagy pedig egy két szabadsági fokú konzervatív rendszernek a Poincaré-leképezését tekintjük. Egy autonom differenciálegyenletrendszer konkrét alakjából kiindulva azonban nagyon nehéz (a triviális esetektől eltekintve szinte lehetetlen) a (20.1)-ben szereplő  $f(x, y)$  és  $g(x, y)$  függvények explicit megkonstruálása, így a leképezések vizs-

gálatára elsősorban numerikusan nyílt csak lehetőség.

Amikor egy rendszer hosszútávú mozgásának jellegzetességeire vagyunk kíváncsiak, akkor megtehetjük, hogy a probléma differenciálegyenletének (vagy ennek egy Poincaré-leképezésének) numerikus tanulmányozása helyett választunk egy "modell-leképezést", amely lehetőleg nagyon egyszerű, így nagyon sok iteráción keresztül gyorsan és pontosan számítható, s amely modell-leképezésről reméljük, hogy a belőle levonható következtetések egy része az eredeti problémára nézve is érvényben marad.

Egy lineáris leképezés, amely lineáris rendszerek Poincaré-leképezéseként adódik s általánosan  $\vec{x}_{i+1} = M \vec{x}_i$  alakba írható, nyilván nem vezethet káoszra, hiszen akárhányadik iteráció eredményét zárt alakban fel tudjuk írni:

$$\vec{x}_n = M^n \vec{x}_0,$$

s az M mátrixot diagonalizálva leolvashatjuk az  $n \rightarrow \infty$ -beli viselkedést is.

Kaotikus "mozgást" tehát csak nemlineáris leképezésektől várhatunk. A legegyszerűbb nemlineáris leképezés nyilván az, amelyben f és g kvadratikus függvénye az x és y változóknak. M. Hénon ilyen típusú leképezéseket vizsgált, méghozzá azzal az önkényes megszorítással, hogy legyen a

$$J = \frac{\partial (x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial (x_i, y_i)} \quad (20.2)$$

Jacobi-determináns a helytől független állandó [47-48]. Mint azt az F.3 függelékben megmutatjuk, valamennyi kvadratikus, konstans Jacobi-determinánsú síkbeli leképezés alkalmas lineáris transzformációval

$$x_{i+1} = 1 + y_i - a x_i^2, \quad (20.3)$$

$$y_{i+1} = b x_i$$

alakra hozható. Ez az Hénon-féle leképezés standard alakja.



Amennyiben  $|J| = |b| < 1$ , úgy a leképezése során a területek időben exponenciálisan csökkennek, ez a disszipatív rendszerekre jellemző, - ezért ilyenkor disszipatív leképezésről beszélünk.  $|b| = 1$  esetben viszont a leképezés területtartó, ez a konzervatív rendszerekre jellemző (F.2 függelék), ezért (20.3)-nak a  $|b| = 1$  határesetét konzervatív Hénon-leképezésnek nevezzük.\*

Az Hénon-féle leképezés az  $a$  és  $b$  értékeitől függően több-féleképpen viselkedhet az  $i \rightarrow \infty$  határesetben. Bizonyos paramétertartományokban például fixpontokkal rendelkezik, melyek koordinátáit az

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) \equiv T(x_i, y_i) = (x_i, y_i) \quad (20.4)$$

egyenletekből határozhatjuk meg. (A leképezésre bevezettük az

$$(x_i, y_i) \xrightarrow{T} (x_{i+1}, y_{i+1}) \equiv T(x_i, y_i)$$

jelölést.) A fixpontok koordinátáira (20.3)-ból és (20.4)-ből

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{2a} [ -(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a} ] , \\ y^* &= b x^* \end{aligned} \quad (20.5)$$

adódik, amely akkor határoz meg valós pontokat, ha

$$a > - \frac{(1-b)^2}{4} = a_0 .$$

A fixpontok stabilitását az F.2 függelékben leírt módszerrel vizsgálhatjuk meg. Bevezetve az  $x' = x - x^*$  és  $y' = y - y^*$  új változókat és a leképezést ezekben linearizálva

\* Nemcsak a konzervatív - hanem általánosan a Hamilton-féle rendszerek is divergenciamentes áramlással írhatók le s a Poincaré-leképezésük területtartó. Emiatt az egységnyi Jacobi-determinánsú leképezések helyesebb lenne Hamilton-féle leképezésnek nevezni. Az egyszerűség kedvéért mi maradunk a "konzervatív leképezés" elnevezésnél, de nem feledkezünk meg arról, hogy ezek a leképezések nem feltétlenül konzervatív rendszerekre vonatkoznak.

$$\begin{pmatrix} x'_{i+1} \\ y'_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ax^* & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \quad (20.6)$$

adódik. A fenti mátrix sajátértékei, vagyis a

$$\lambda^2 + 2ax^* \lambda - b = 0 \quad (20.7)$$

egyenlet gyökei döntik el a stabilitás kérdését: ha mindkét sajátértékre fennáll, hogy  $|\lambda| < 1$ , úgy a vizsgált fixpont stabil, ellenkező esetben pedig instabil. Közvetlen számolással adódik, hogy az egyik, (20.5)-ben a negatív előjelnek megfelelő fixpont mindig instabil, a másik azonban az

$$a_0 < a < a_1 = \frac{3(1-b)^2}{4} \quad (20.8)$$

paramétertartományban stabil. Bizonyos  $(x_0, y_0)$  kezdőfeltételek esetén elég sok iteráció bevisz a stabil fixpontba (pontosabban: annak tetszés szerint kicsiny környezetébe), más - a fixpont vonzási körzetén kívül eső - kezdőpontból indulva viszont az iterációk egyre távolabbra és távolabbra képeznek le, a pontosorozat "elfut a végtelenbe".

Ha a-t  $a_1$  fölé növeljük, az eredetileg stabil fixpont instabillá válik, viszont kialakul egy kettes periódusú határ-ciklus. Ez a bifurkáció közvetlen analógja az előző fejezetekben tanulmányozott egydimenziós leképezések periódus-kettőződésének. A ciklus pontjainak koordinátáit az

$$(x_1, y_1) \xrightarrow{T} (x_2, y_2) \xrightarrow{T} (x_1, y_1)$$

egyenletekből határozhatjuk meg:

$$x_{1,2} = \frac{(1-b) \pm \sqrt{4a-3(1-b)^2}}{2a},$$

$$y_{1,2} = b x_{2,1}.$$

A ciklus stabilitása ismét lineáris analízissel dönthető el:



amennyiben a  $T^{(2)}(\ ) \equiv T(T(\ ))$  leképezés linearizált alakjának, vagyis az

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} -2ax_1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2ax_2 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixnak mindkét sajátértéke egynél kisebb abszolút értékű, úgy a kettős ciklus stabil, ellenkező esetben instabil. Mivel a stabilitás, vagy instabilitás egységesen jellemző a ciklus valamennyi pontjára, az a paramétert növelve valamely  $a_2$  érték-nél négyes határciklus,  $a_3$ -nál nyolcas, és így tovább,  $a_p$ -nél  $n = 2^p$ -es határciklus alakul ki. Az  $n$ -es ciklus pontjait az

$$(x_1, y_1) \xrightarrow{T} (x_2, y_2) \xrightarrow{T} \dots \xrightarrow{T} (x_n, y_n) \xrightarrow{T} (x_1, y_1)$$

egyenletek határozzák meg, a stabilitásukat pedig a

$$M^{(n)} \equiv \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} -2ax_i & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (20.9)$$

mátrix sajátértékei szabják meg.

Az  $a_1, a_2, a_3, \dots$  bifurkációs pontok valamely  $a_\infty$  torlódási ponthoz tartanak, méghozzá a konvergencia aszimptotikusan egy mértani sorozatnak megfelelően történik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_\infty - a_n}{a_\infty - a_{n+1}} = \delta, \quad (20.10)$$

azaz  $a_n \sim a_\infty - \text{állandó} \cdot \delta^{-n}$ . Ennél azonban még sokkal több is igaz! Be lehet bizonyítani, hogy (20.10) nemcsak a kétdimenziós disszipatív Hénon-leképezésre, hanem általában minden nemlineáris ponttranszformációra fennáll, s hogy  $\delta$  az egynél kisebb Jacobi-determinánsú leképezésekre univerzálisan az egydimenziós eset tárgyalásánál megismert Feigenbaum-féle  $\delta = 4,6692016\dots$  értékkel egyezik meg [49, 37]. Ennek szemléletes magyarázata a következő. A (20.9) mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\lambda_n^2 + N_n(a, b) \lambda_n + (-b)^n = 0, \quad (20.11)$$

ahol az  $N_n(a,b)$  együtthatók rendre számolhatók:

$$N_1 = b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a} ,$$

$$N_2 = 4a + 6b - 4b^2 - 4 , \text{ stb.}$$

Mivel a sajátértékek szorzata  $(-b)^n$ , s ez a szám  $|b| < 1$  esetén  $n \rightarrow \infty$ -re nullához tart, az egyik sajátérték ebben a limeszben biztosan nullához tart. Ez annyit jelent, hogy van a síkon egy olyan irány, amely mentén - az iterációt elég sokszor ismételve - a pontsorozat gyorsan összehúzódik, effektíve egy 1-dimenziós sokaságot alkot, s ezáltal a "mozgás" lényegében 1-változósra redukálódik.

Egészen más a helyzet a konzervatív Hénon-leképezésnél, vagyis  $|b| = 1$  esetben. Az a paramétert változtatva itt is megfigyelhetünk kaszkád-bifurkációkat (az eredetileg elliptikus pontok hiperbolikussá válnak, s megjelenik két-két új, egymástól fokozatosan eltávolodó elliptikus pont), de a bifurkációs pontok sűrűsödésére jellemző

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = \delta_{\text{konzervatív}} \quad (20.12)$$

paraméter, melynek számértéke numerikusan 8,7210972...-nek adódott [50], határozottan eltér a disszipatív rendszerek  $\delta$ -jától. Igaz viszont, hogy a konzervatív rendszerekben általában lejátszódó perióduskettőzések mindegyikére univerzálisan jellemző a  $\delta_{\text{konz.}}$  állandó; a konzervatív rendszerek tehát ugyancsak egy univerzalitási osztályt alkotnak, de ez az osztály különbözik a disszipatív rendszerekétől [51-56].

Az egydimenziós leképezéseknél láttuk, hogy a perióduskettőződés jelensége egy közelítő renormálási eljárással is leírható és néhány jellemző mennyiség kvantitatívan is meghatározható. Ennek az eljárásnak a síkbeli leképezéseknél is megvan a megfelelője. Az alap gondolat itt is az, hogy az  $a$  és  $b$  paraméterértékekkel jellemzett  $T_{(a,b)}$  leképezéssel megpróbáljuk kapcsolatba hozni a kétszeri iterálást megvalósító  $T^{(2)}$  leképezést, de az utóbbit nem az eredeti, hanem valamely módosított  $a'$  és  $b'$  paraméterértékeknél vesszük fel:



$$T_{(a,b)} \leftrightarrow T_{(a',b')}^{(2)} .$$

Ez a megfeleltetés azonban csak közelítőleg lehet érvényes, hiszen  $T^{(2)}$  alakilag másként néz ki, mint  $T$  (például kvadrati- kus  $T$  esetén  $T^{(2)}$  negyedrendű tagokat is tartalmaz). Egy le- hetséges kapcsolatot a kétféle leképezés - és ezáltal az  $(a,b)$  illetve  $(a',b')$  paraméterértékek - között az adhat, ha  $T_{(a,b)}^{(n)}$ - nek az  $n$ -es periódusú ciklus közelében érvényes linearizált alakjáról megköveteljük, hogy - egy hasonlósági transzformáció erejéig - egyezzen meg  $T_{(a',b')}^{(2n)}$ -nek a  $2n$ -es ciklus pontjai kö- rül linearizált alakjával [54-55]. Innen a transzformációs matr- ixok invariánsait (a spúrokat és a determinánsokat) összeha- sonlítva

$$N_n(a,b) = N_{2n}(a',b'), \quad (20.13)$$

$$(-b)^n = (-b')^{2n} \quad (20.14)$$

adódik, ahol  $N$ -ek a (20.11)-ben szereplő állandók. A közelítő renormálási transzformáció fixpontját az  $a' = a (=a^*)$  és a  $b' = b (=b^*)$  összefüggések határozzák meg. (Felhívjuk a figyel- met arra, hogy  $a^*$ , ami a renormált transzformáció torlódási pontja, nem egyezik meg a rögzített  $b$ -hez tartozó  $a_\infty$  torlódási ponttal.)

A (20.14) egyenlet szerint  $b^*$  vagy 0, vagy -1 kell legyen. Az előbbi a disszipatív rendszereknek felel meg, míg  $b^* = -1$  (vagyis a Jacobi determináns +1) a konzervatív-, vagy általá- nosabban a Hamilton-féle rendszerekre jellemző.

Mivel a disszipatív leképezések sokszor iterálva effektíve egydimenzióssá válnak, s az egydimenziós esettel már részlete- sebben foglalkoztunk, tekintsük most a  $b = -1$ -nek megfelelő konzervatív leképezést! Az első négy  $N_n$  függvényt könnyen fel- írhatjuk zárt alakban is:

$$N_1(a) = 2(\sqrt{1+a} - 1) ,$$

$$N_2(a) = 4a - 14 ,$$

$$N_3(a) = 8a(1 + \sqrt{a-1}) - 10 - 6\sqrt{a-1},$$

$$N_4(a) = 16a^2 - 32a\sqrt{a} - 2,$$

de elvileg továbbiak kiszámításának sincs akadálya. Alkalmazzuk (20.13)-at  $n=1$ -re, ekkor

$$a = 4a'^2 - 24a' + 35$$

adódik. Az  $a = a' = a_\infty$  torlódási pontra  $(25 + \sqrt{65})/8$ , a  $\delta$  állandóra pedig (20.12)-vel való összehasonlításból

$$\delta_{\text{konzervatív}} \approx \left. \frac{da}{da'} \right|_{a_\infty} = 1 + \sqrt{65} = 9,06$$

adódik. Az egzakt  $\delta$ -tól való eltérés mindössze 4 %! Még jobb eredményt kapunk, ha  $N_2$ -t és  $N_4$ -t hasonlítjuk össze, ekkor  $\delta = 8,68$  adódik. Az egydimenziós leképezésre készült harmadrendű renormalizációs számítás is [44].

Mi történik, ha az  $a$  paraméter értékét még tovább,  $a_\infty$  fölé növeljük? Ekkor - ismét csak a kezdőfeltételtől függően - vagy a végtelenbe tartanak az iterált leképezés pontjai, vagy pedig egy véges tartományon belül maradnak. Válasszuk az Hénon-leképezés paramétereit mondjuk a [47]-ben is vizsgált  $b = 0,3$  és  $a = 1,4$  értékeknek! Ekkora  $b$ -nél  $a_\infty \approx 1,06$ , tehát a torlódási pont felett vagyunk már. Közvetlen számolással ellenőrizhetjük, hogy például az

$$A = (-1,33, 0,42),$$

$$B = (1,32, 0,13),$$

$$C = (1,25, -0,14),$$

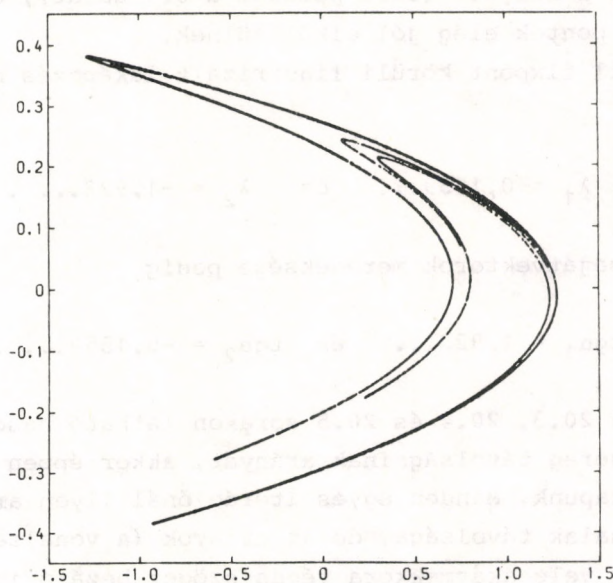
$$D = (-1,06, -0,50)$$

pontok által meghatározott négyszög képe teljes egészében a négyszög belsejében fekszik, s a területe az eredeti terület  $b$ -edrésze. A további iterációk is egyre csökkentik a területet,



s végül az iterációk eredményeként adódó pontok egy nullmértékű halmazhoz kell tartssanak. Ez a halmaz, az attraktor, azonban most nem véges sok pontból áll, mint a  $< a_\infty$ -nél, hanem annál bonyolultabb struktúrájú különös attraktor.

Induljunk ki például az  $x_0 = y_0 = 0$  kezdőpontból és iteráljuk 10000-szer a (20.3) összefüggéseket! Az így kapott pontsorozatot ábrázolva a 20.1 ábrán látható képződményhez jutunk.



20.1 ábra. Az Hénon-modell különös attraktora. Az ábra az  $x_0=y_0=0$  kezdőpontból kiindulva 10000 iteráció eredményének felrajzolásával készült,  $a=1,4$  és  $b=0,3$  paraméterek mellett

A kezdeti tranzienz szakasz néhány pontját leszámítva valamilyeni pont látszólag vonalszerű alakzaton - az Hénon-modell különös attraktorán - helyezkedik el. Más kezdőfeltételből, például a (20.5) összefüggésekből meghatározható instabil fixpontok egyikéből ( $x_0 = 0,63135448\dots$  és  $y_0 = 0,18940634\dots$ ) indulva ugyanazt a furcsa "patkószerű" alakzatot kapjuk (20.2 ábra). Ha az attraktor szerkezetét jobban szemügyre akarjuk

venni, ki kell nagyítanunk valamelyik részletét. A 20.2 ábrán látható kis négyzetet kinagyítva - és az iterációk számát  $10^5$ -re növelve - a 20.3 ábrán látható vonalas szerkezetű pontthalmazt kapjuk. Ezt ismét kinagyítva (20.4 és 20.5 ábrák) újra és újra ugyanolyan struktúrát kapunk, vagyis az Hénon-moddal különös attraktora - legalábbis az instabil fixpont környezetében - egyre finomabb és finomabb skálán végtelen sokszor megismétli önmagát. Érdekes, hogy maga az instabil fixpont egyáltalán nem látszik a 20.1-20.5 ábrákon. Konzervatív leképezéseknél nem ez a helyzet (lásd például a 6.1 ábrát), ott a hiperbolikus pontok elég jól elkülönülnek.

Az instabil fixpont körüli linearizált leképezés mátrixának sajátértékei

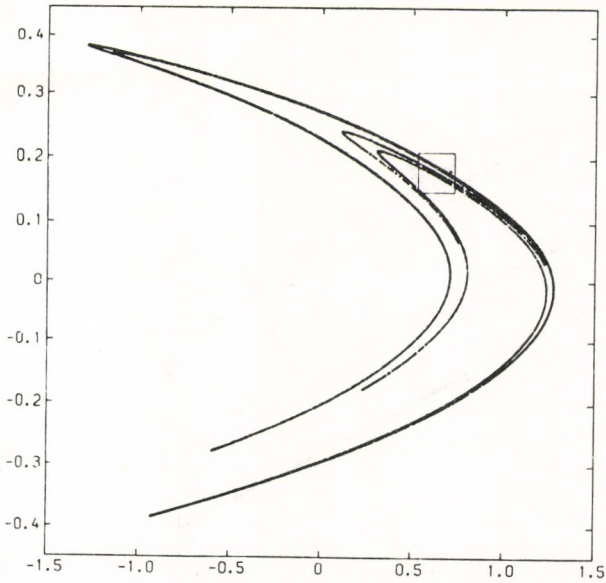
$$\lambda_1 = 0,1559\dots \quad \text{és} \quad \lambda_2 = -1,923\dots, \quad (20.15)$$

a megfelelő sajátvektorok meredeksége pedig

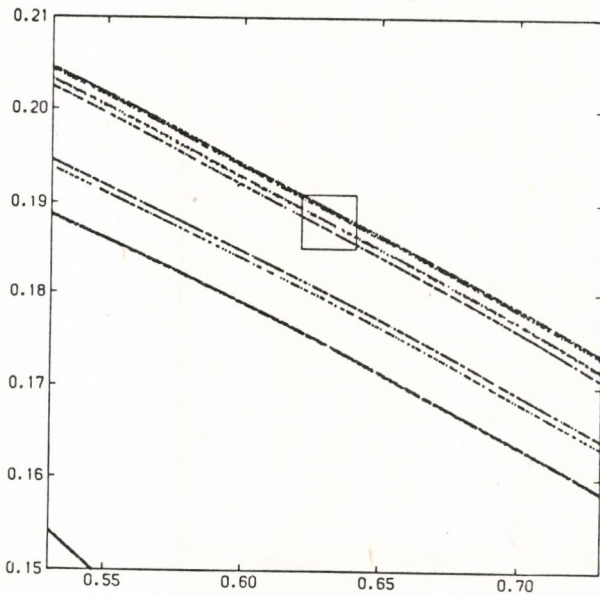
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 1,923\dots \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -0,1559\dots. \quad (20.16)$$

Ha lemérjük a 20.3, 20.4 és 20.5 ábrákon látható hasonló struktúrájú vonalsereg távolságainak arányát, akkor éppen  $\lambda_1 \approx 0,16$ -t kapunk. Minden egyes iterációnál ilyen arányban csökken a vonalak távolsága, de az arányok (a vonalsereg merőleges, vagy vele akármekkora véges szöget bezáró irányban) változatlanok maradnak. Ez magyarázza a kinagyítások eredményeképpen adódó ábrák hasonlóságát. Miközben a vonalsereg transzverzális irányban egyre közelebb kerül egymáshoz, a vonalak egyes pontjai  $|\lambda_2| > 1$  miatt egyre távolabb kerülnek a fixponttól. Ez a távolodó mozgás a  $\lambda_2$ -höz tartozó sajátvektor irányában történik, de mivel ez éppen az egyenessereg iránya, ezért az ábrákon nem érzékelhető. Az instabil fixponthoz tehát az egyik irányból közelednek, a másik irányban távolodnak az iterált pontok. A fixponttól elegendően eltávolodva elromlik a lineáris közelítés, s mindkét mozgás irányt válthat; nyilván valahol a mozgás visszafordul s a pont bizonyos lépésszám után ismét a fixpont közelébe kerül, amikor is az egész folyamat kezdődik előlről. Az Hénon-féle különös attraktor szerkezete

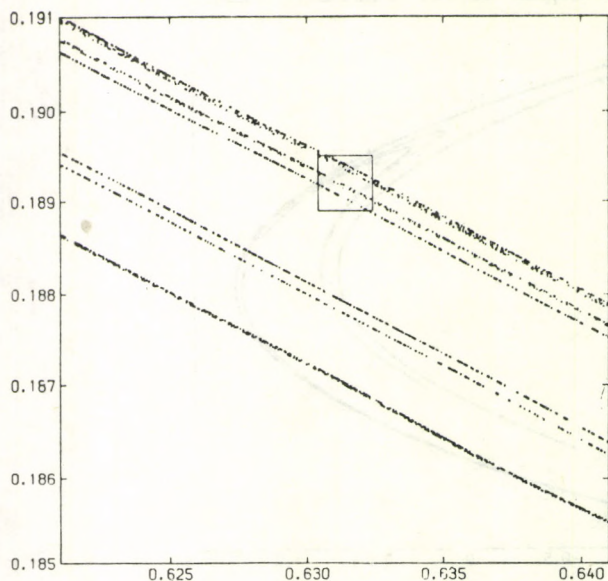




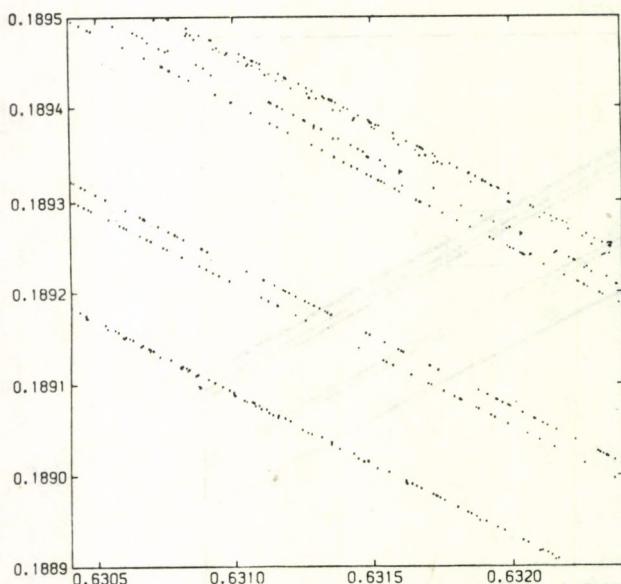
20.2 ábra. Ugyanaz, mint az előző ábra, csak az  $x_0=0,6313\dots$ ,  $y_0=0,1894\dots$  kezdőpontból, a leképezés egyik instabil fixpontjából indulva



20.3 ábra. A 20.2 ábrán látható kis négyzet kinagyítása. Az iterációk száma  $10^5$ , az előző ábráénak 10-szerese.



20.4 ábra. A 20.3 ábrán látható kis négyzet kinagyítása. Az iterációs pontok száma  $10^6$



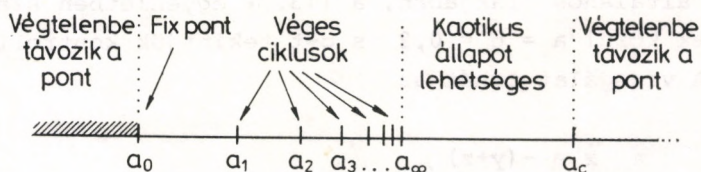
20.5 ábra. Az előző ábrán látható kis négyzet kinagyítása. Az iterációs pontok száma  $5 \cdot 10^6$



tehát - legalábbis a fixpont közelében - egy egydimenziós sokaságnak (egyenesnek) és egy Cantor-halmaznak (F.5 függelék) a direkt szorzata.

Ha az a paramétert még tovább növeljük, egy bizonyos  $a_c$  értéknél ( $b = 0,3$ -nál ez kb.  $1,5$ ) eltűnik a különös attraktor és akármilyen kezdőfeltétellel indítjuk is az iterációsorozatot, a pontok a végtelenbe távoznak. Ugyanez a helyzet a  $a_0$ -ra is, amikor az Hénon-leképezésnek nincs fixpontja. (Ez a végtelenbe tartás azonban csak az Hénon-modell sajátja és nem univerzális tulajdonsága a nemlineáris síkbeli leképezéseknek. Ha a (20.1)-ben szereplő  $f$  és  $g$  függvények olyanok, hogy az origótól távoli pontokat "visszatérítik" az origó felé, akkor nyilván csak korlátos tartományban történhet a mozgás.)

Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben a célunk a perióduskettőző bifurkációk és az Hénon-leképezés standard különös attraktorának bemutatása volt. Ez az a különös attraktor, melyet Hénon fedezett fel, s amely azóta is legtöbbször vizsgált objektuma ennek a leképezésnek. A leképezésben azonban egyéb különös attraktorok is fellelhetők, sőt egyéb (például páratlan periódusú) határciklusok is jelen lehetnek bizonyos paraméterérték-tartományokban. Így például  $a_c$  fölött később újra megjelennek attraktorok.



20.6 ábra. Az Hénon-féle disszipatív leképezés aszimptotikus mozgásformái az a paraméter különböző értékeinél

Befejezésként a 20.6 ábrán áttekinthetjük az Hénon-féle leképezés aszimptotikus (nagyon sokszori iterációból adódó) viselkedését az a paraméter különböző értékeire, miközben  $b$  egy egyenlő kisebb abszolút értékű állandó.

## 21. A KÁOSZ DIFFERENCIÁLEGYENLETTEL LEÍRHATÓ RENDSZEREKBEŒ — SZÁMÍTÓGÉPES ÉS LABORATÓRIUMI KÍSÉRLETEK

Az egy-, és kétdimenziós leképezések tanulmányozása után differenciálegyenletekkel leírható rendszereket vizsgálunk. A differenciálegyenletek megoldásaiban megmutatkozó bifurkációs-sorozatnak természetesen összhangban kell lennie a megfelelő leképezésekben talált viselkedéssel.

Ebben a fejezetben olyan rendszerekkel foglalkozunk, melyekben a káosz kialakulásának Feigenbaum-féle útja valósul meg. A Duffing-oszcillátorról már korábbról, az 5. fejezetből tudjuk, hogy benne perióduskettöző bifurkációk követik egymást a kontrollparaméter változtatásakor. Ugyanez történik a kényszerített Van der Pol-oszcillátor [57] és a parametrikusan gerjesztett inga esetében [58,59] is. A fentieknel is egyszerűbb, s ezért numerikus kísérletekre még alkalmasabb rendszer a Rössler-modell [29]. A kialakuló különös attraktor Rössler-típusú, melyről szemléletes megfontolások alapján megállapítottuk, hogy a hozzá tartozó egydimenziós leképezés síma maximummal rendelkezik (14. fejezet). Ezért már konkrét számolás nélkül is nyilvánvaló, hogy a káosz bifurkációk végtelen sorozata után alakul ki.

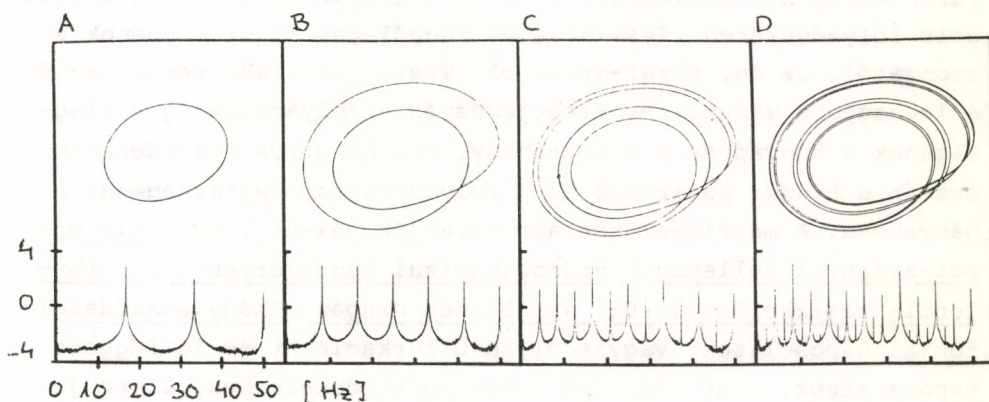
A konkrét eredményeket J. Crutchfield és szerzötársai számítógépes eljárása [57] alapján arra az esetre adjuk meg, amikor a modell általános alakjában, a (13.2) egyenletben szereplő mennyiségek közül  $a = b = 0,2$ , s  $c$ -t tekintjük kontrollparaméternek. A vizsgálat tehát az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y+z) , \\ \dot{y} &= x + 0,2y , \\ \dot{z} &= 0,2 + xz - cz\end{aligned}\tag{21.1}$$

egyenletrendszerre vonatkozott. A kontrollparaméter 2,6 értéke körül stabil határciklust találtak, melynek periódusideje  $T \approx 0,06$  sec volt.  $c = 3,6$  esetén egy másik, körülbelül  $2T$  periódusú határciklus volt stabil.  $c = 4,1$ -nél már  $4T$ ,  $c = 4,18$ -nál pedig  $8T$  periódusú határciklus alakult ki. A torlódási



pontot, mely 4,2 körül van, erről az oldalról már jobban nem közelítették meg. A fázisgörbék tanulmányozásával párhuzamosan vizsgálták az egyes változók Fourier-spektrumát is. A  $T$  periódusú határciklusnak megfelelő megoldásban éles csúcs jelent meg az  $f \approx 16$  Hz értéknél, felharmonikusával együtt. A  $2T$  periódusú megoldás kialakulásakor fellépett az  $f/2$  alharmonikus is, valamint ennek felharmonikusai. A további bifurkációk után rendre megjelentek az  $f/4$  ill.  $f/8$  frekvenciák (és felharmonikusaik). Mindez jó példa arra, hogy az egydimenziós leképezés vizsgálatakor talált viselkedés (17. fejezet) hogyan mutatkozik meg az egyenletrendszerek megoldásában.



21.1 ábra. A (21.1) egyenletrendszer fázisgörbéinek vetülete az  $x$ - $y$  síkon a tranziensek kihalása után. Alattuk a  $z(t)$  Fourier-komponenseinek amplitúdója a frekvencia függvényében. Az egyes esetekben a rendparaméter értéke: A: 2,6; B: 3,5; C: 4; D: 4,18

Nem törekedhetünk teljességre azon rendszerek felsorolásában, melyek numerikus megoldása perióduskettőző bifurkáció-sorozatot mutat, csupán a Navier-Stokes-egyenletek öt módust megtartó redukált alakjára vonatkozó számításokat [60], valamint a plazmafizika köréből vett példákat [61] említjük meg. Az előbbiben a  $\delta$  exponensre kapott számérték jól egyezett az egydimenziós leképezésben fellépő értékkel.



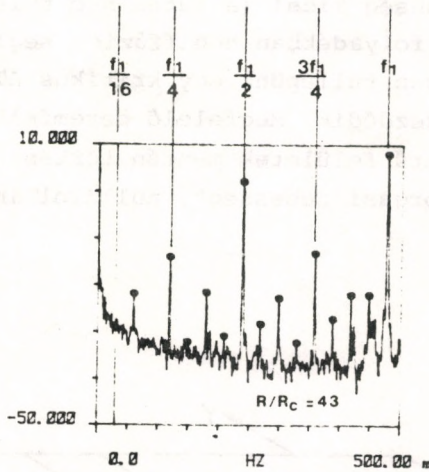
Természetes módon merül fel a kérdés, mi a helyzet a laboratóriumi méréseket illetően. Általánosan az mondható, hogy hábár perióduskettőző folyamatokat észleltek, ezek a mérési pontatlanság miatt csak néhány bifurkációig voltak követhetők, így az univerzális elmélettel való kvantitatív összehasonlításra általában nincs kellő alap, sem a  $\delta$  exponens, sem a  $\mu$  paraméter esetében (a definíciókat ld. (18.1), (18.14)-ben).

A hidrodinamikai rendszerekre vonatkozó mérések a turbulencia kialakulásával kapcsolatosak. A két legjobban kontrollálható jelenség az alulról melegített folyadékrétegben fellépő Bénard-instabilitás és a koncentrikus, forgó hengerek között megjelenő Couette-áramlás [62,63]. A kísérletek szerint a turbulencia kialakulásának folyamata nagymértékben függ a vizsgált folyadékréteg vízszintes és függőleges kiterjedésének viszonyától, az ún. méret-aránytól. Téglatest alakú réteg esetén a legnagyobb vízszintes kiterjedés és a folyadékréteg vastagságának a hányadosa a méret-arány, míg hengeres folyadékréteg esetén a henger sugarának és a folyadékréteg vastagságának a hányadosa. A megfigyelések azt mutatják [64-66], hogy kis méret-aránnyal jellemzett hidrodinamikai rendszerekben a turbulencia kialakulása körüli viselkedés csupán néhány szabadsági fokkal kapcsolatos, vagyis olyan bifurkációkat és időfüggést tapasztalunk, mint egyszerű dinamikai rendszerekben. Ilyen jelenségek a kváziperiodikus viselkedés, szinkronizáció és a perióduskettőző bifurkáció-sorozat megjelenése.

Az alulról melegített, kis méret-aránnyal jellemzett, folyadékrétegben kis ( $0.4 < P < 1$ ) és közepes ( $2.5 < P < 5$ ) Prandtl-számok esetén (a Prandtl-szám definícióját ld. (22.2)-ben) a fűtés mértékét növelve megfigyeltek perióduskettőző bifurkáció-sorozatot a kaotikus állapot kialakulása előtt. A jelenséget He-ban [67] és vízben [68,69] mérték, mindegyik esetben néhányszor tíz milliméter volt a doboz maximális mérete. A kísérletek szerint a perióduskettőzés jól látható mind a lokális sebesség, mind a lokális hőmérséklet-gradiens Fourier-spektrumában, ahol egymást követve jelennek meg csúcsok az alapfrekvencia felénél, negyedénél stb. A mért adatokból a  $\delta$  exponens és a  $\mu$  paraméter is meghatározható. Bár a numerikus



eredmények összehasonlítását fenntartással kell fogadnunk, azt mondhatjuk, hogy mindegyik összhangban van a kvadratikussal rendelkező egydimenziós leképezések elméletében talált értékekkel (18. fejezet).



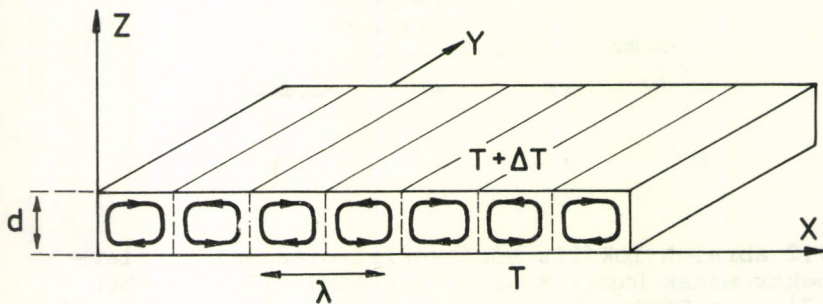
21.2 ábra. A lokális hőmérséklet-gradiens Fourier-spektrumának logaritmusát a frekvencia függvényében [67].  $R$  a Rayleigh-szám (ld. (22.1)),  $R_c$  a konvekció megindulásához tartozó értéke

Végül megemlítünk egy oszcillátorra vonatkozó mérést, melyben a kaotikus viselkedés fellépése előtt szintén periódusketőző bifurkációkat figyeltek meg, s a bifurkáció-sorozatot viszonylag magas rendekig tudták követni [70].

A káosz kialakulásának a Feigenbaum-féltől eltérő útjai is ismeretesek. Ezek egyikére tipikus példaként szolgál az ún. Lorenz-modell, melynek ismertetésére a következő fejezetekben kerül sor. További lehetőségekről a 25. fejezetben lesz szó.

## 22. A LORENZ-MODELL BEVEZETÉSE

E.N. Lorenz a később róla elnevezett egyenleteket vizsgálva ismerte fel hidrodinamikai rendszerekben az első különös attraktort [71]. Konkrétan a Bénard-instabilitásból indult ki, melynek során alulról fűtött vékony folyadékrétegben megindul a konvekciós áramlás [62]. Amíg az edény alja és teteje közötti  $\Delta T$  hőmérséklet-különbség kicsi (a fűtés nem túlságosan erős), az energiaáramlás a folyadékban hődiffúzió segítségével valósul meg, amint azonban túllépünk egy kritikus  $\Delta T_c$  értéket, makroszkópikus mozgás kezdődik. Megfelelő peremfeltételek esetén az áramlás hengerszerű felületek mentén történik (22.1 ábra), s ekkor a "körben forgási sebesség", nulláról indulva, monoton nő  $\Delta T$ -vel.



22.1 ábra. Hengeres áramlás a Bénard-instabilitásban ( $\Delta T \geq \Delta T_c$ )

A Bénard-instabilitás leírásakor,  $x$  és  $y$  irányban végtelen kiterjedésű réteget feltételezve, a dimenzióatlanított hidrodinamikai egyenletekben két paraméter lép föl, a

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa} \quad (22.1)$$



Prandtl-szám, ahol  $\nu$  a kinematikai viszkozitás,  $\kappa$  hővezetési együttható, valamint az

$$R = \frac{\alpha g d^3}{\nu \kappa} \Delta T \quad (22.2)$$

Rayleigh-szám. Itt  $\alpha$  a hőtágulási együttható,  $g$  a gravitációs gyorsulás,  $d$  pedig a réteg vastagsága. A mozgásegyenletek lineáris stabilitás-analízise azt mutatja, hogy kis  $R$ -ekre az áramlás-mentes állapotnak megfelelő megoldás stabil, valamely  $R_c$  kritikus értéknél azonban instabillá válik egy  $k_c$  hullámszámú perturbációval szemben. Ennek következtében  $R_c$ -nél a  $\lambda = 2\pi/k_c$  hullámhosszú,  $x$  irányban periodikus áramlás lesz stabil.  $\lambda/2$  tehát a szomszédos hengerek távolsága (ld. 22.1 ábra).

Lorenz a rendszer nagyszámú módusa közül hármatot tartott meg. E három módus  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  amplitúdója a  $\delta T(x, z)$  és  $\psi(x, z)$  függvényekkel kapcsolatos, ahol  $\delta T$  a stacionárius esethez viszonyított hőmérséklet-eloszlás,  $\psi$  pedig az ún. áramlási függvény, melynek parciális deriváltjai adják az egyes sebesség-komponenseket:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

$\delta T$ ,  $\psi$  és az amplitúdók közötti összefüggés a következő [71]:

$$\psi(x, z, t) = \sqrt{2} \frac{\pi^2 + (k_c d)^2}{(k_c d)^2} X(t) \sin(k_c x) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right),$$

$$\delta T(x, z, t) = \frac{R_c}{\pi} \left[ \sqrt{2} Y(t) \cos(k_c x) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{d}\right) \right].$$

Az áramlásmentes esetben  $X=Y=Z=0$ , míg stacionárius hengeres áramlás esetén mindegyik amplitúdó állandó. A hidrodinamikai egyenletekből következik, hogy az amplitúdók mozgásegyenlete:

$$\begin{array}{l} \dot{X} = \\ \dot{Y} = \\ \dot{Z} = \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -\sigma X \\ \hline -Y \\ \hline -bZ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline +\sigma Y \\ \hline +rX \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline -XZ \\ \hline +XY \end{array}, \quad (22.3)$$

I.      II.      III.

ahol  $r \equiv R/R_c$ ,  $b = 4\pi^2/(\pi^2 + (k_c d)^2)$ .

A (22.3) egyenletrendszer a Lorenz-modell. Benne az  $r(>0)$  mennyiséget szokás kontrollparaméternek tekinteni, a további paraméterek standard értékei:  $\sigma = 10$  ill.  $b = 8/3$  (szabad felületek esetén ugyanis  $k_c = 1/(\sqrt{2}d)$ ). Az I. oszlopban álló tagok a módusok csillapítását írják le, a II. oszlopbeliek parametrikus gerjesztést adnak, míg a III. oszlop a nemlineáris csatolásokat tartalmazza.

A Lorenz-egyenletekben  $r$  növelésekor a hengeres áramlásnak megfelelő tartományból rögtön kaotikus viselkedésű megoldással rendelkező tartományba jutunk. A modell nem adja vissza hűen a Bénard-instabilitásban tapasztalt jelenségeket. A továbbiakban a modellt úgy tekintjük, mint a kaotikus mozgásra vezető nemlineáris differenciálegyenletek egy prototípusát, melynek tulajdonságait igen részletesen vizsgálták [72-97]. (A Lorenz-modellről egyébként kiderült, hogy egyéb fizikai problémák leírására is használható [73,74,98].)

A modell néhány fontos tulajdonsága a következő:

a) Az egyenletek invariánsak  $X$  és  $Y$  tükrözésére, vagyis az

$$X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow Z$$

transzformációra. (A Bénard-instabilitásban ez annak felel meg, hogy a hengerek forgásirányának megváltoztatására invariánsak a mozgásegyenletek.)

b) Az állapottér időegységre eső relatív térfogatváltozása (az együttmozgó rendszerben)

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + b + 1). \quad (22.4)$$

A folyam tehát az állapottér térfogatát egyenletes ütemben húzza össze, amely  $r$ -től független és a standard értékekre meglehetősen nagy:  $-13.66$ . Ez azt jelenti, egységnyi térfogat időegység alatt  $\exp(-13.66) \approx 10^{-6}$ -szorosára zsugorodik.

c) Valamennyi megoldás korlátos, amint  $t \rightarrow \infty$ . Vizsgáljuk ugyanis az  $u = X^2 + Y^2 + (Z-r-\sigma)^2$  gömböt az állapottérben.

A (22.3) egyenletekből következik, hogy



$$\dot{u} = -2\sigma X^2 - 2Y^2 - 2b(Z-r-\sigma)^2 + 2b(r^2+\sigma^2).$$

Található tehát olyan  $C_1, C_2$  pozitív konstans, hogy  $\dot{u} \leq -C_1 u + C_2$ , amiből az következik, hogy  $t \rightarrow \infty$ -re minden megoldási görbe bekerül a  $\sqrt{C_2/C_1}$  sugarú gömbbe [21]. A folyam egyenletesen összehúzó tulajdonságából ekkor következik, hogy minden megoldás tart egy halmazhoz mely zárt és zérus térfogatú.

d) Abban az esetben, amikor a módusok csillapítását leíró disszipatív tagokat, vagyis az I. oszlopot elhagyjuk a (22.3) egyenletből a rendszer integrálhatóvá válik. Könnyen ellenőrizhető ugyanis, hogy a c) pontban definiált  $u$  mennyiség ilyenkor időben nem változik, sőt a  $v = Y^2 + (Z-r)^2$  kombináció is mozgásállandó. Az állapottérbeli pont tehát egy gömb és egy henger metszésvonalán fut, a mozgás egy szabadsági fokú, tehát integrálható. A disszipatív tagok bekapcsolása után már sem  $u$ , sem  $v$  nem megmaradó mennyiség, s ez annyiban mutatkozik meg, hogy mind a gömb, mind a henger időben változtatja sugarát [73]. Ez a szemléletes kép jól érzékelteti, hogy a metszésvonalon történő mozgás milyen bonyolult lehet. Megjegyzésre érdemes, hogy - szemben a disszipáció nélküli Lorenz-modell tulajdonságaival - egyszerű mechanikai rendszerek kapcsán olyan esetekkel találkoztunk, melyekben a disszipáció nélküli határesetben is jelen volt káosz.

### 23. BIFURKÁCIÓK A LORENZ-MODELLBEN - LOKÁLIS STABILITÁS-VIZSGÁLAT

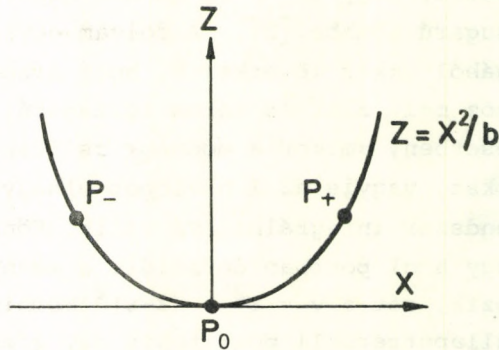
A (22.3) egyenletekből közvetlenül leolvasható, hogy stationárius megoldásai az állapottérben a következő pontok:

$$P_0: X = Y = Z = 0, \quad r > 1, \quad (23.1)$$

$$P_{\pm}: X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad Z = r-1, \quad r \geq 1. \quad (23.2)$$

A  $P_{\pm}$  pontok tehát a  $Z$ - $X$  síkon egy parabolán mozognak  $r(>1)$  változtatásakor. (A Bénard-instabilitásban  $P$  az áramlás-mentes

megoldásnak,  $P_+$  és  $P_-$  pedig ellenkező irányban forgó stacionárius hengeres áramlásoknak felel meg.)



23.1 ábra. Stacionárius megoldások a Z-X síkon ( $r > 1$ )

A triviális megoldás ( $P_0$ ) körül linearizálva az egyenleteket a

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

mátrix jelenik meg a jobboldalon. Ennek sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -(1+\sigma) \pm \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4\sigma(r-1)} \right], \quad (23.3)$$

$$\lambda_3 = -b. \quad (23.4)$$

$r < 1$  esetén mindhárom mennyiség negatív, a triviális megoldás tehát stabil.  $r = 1$ -re viszont  $\lambda_1$  nullává válik,  $r > 1$  mellett pedig pozitív lesz: a triviális megoldás elveszti stabilitását, s a  $P_{\pm}$  pontok lesznek a stabil megoldások.

Annak érdekében, hogy ezt a váltást nemlineáris analízissel is végigkövessük, határozzuk meg először a normál-módusokat! Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy  $r-1 \ll 1$  esetén az



$$A_1 = X + c_1 Y, \quad c_1 = \sigma \left(1 + \frac{\sigma}{1+\sigma} (1-r)\right) \quad (23.5)$$

módus tartozik a

$$\lambda_1 = -\frac{\sigma}{1+\sigma} (1-r) \quad (23.6)$$

sajátértékhez, és az

$$A_2 = X + c_2 Y, \quad c_2 = -\left(1 + \frac{1-r}{1+\sigma}\right) \quad (23.7)$$

módus a

$$\lambda_2 = -(1+\sigma) + \frac{\sigma}{1+\sigma} (1-r) \quad (23.8)$$

sajátértékhez. A harmadik módusként Z maga szerepel b relaxációs idővel. Az instabilitási pont közelében tehát  $A_1$  lassú változó, a többiek az ő mozgását követik, de ez saját időskálájukon alig vehető észre. A (22.3) egyenletekben  $A_2$  és Z időderiváltja ezért nullának tekinthető. A  $\dot{Z} = 0$  egyenletből  $Z = XY/b$  adódik. Ezt behelyettesítve a másik kettőbe és áttérve az  $A_1, A_2$  változókra, két egyenletet kapunk  $\dot{A}_1$ -ra (miután  $\dot{A}_2$ -ot elhanyagoltuk)

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= (r-1)A_1 + (1+\sigma)A_2 - \frac{1}{b} \frac{(\sigma A_2 + A_1)^2 (A_1 - A_2)}{(1+\sigma)^2} = \\ &= -\sigma(\sigma+1)A_2. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Itt fölhasználtuk, hogy vezető rendű számolásban  $(r-1)$  mindenütt elhanyagolható, ahol konstans mellett áll (így tehát  $c_1 \approx \sigma$ ,  $c_2 \approx -1$ ). A két egyenlőség összevetéséből világos, hogy  $A_2 \ll A_1$ , hiszen  $(r-1)A_1$  olyan nagyságrendű, mint  $A_2$ . A nemlineáris tagban ezért  $A_2$  elhagyható, s azt kapjuk, hogy

$$A_2 = \frac{1-r}{(1+\sigma)^2} A_1 + \frac{1}{b} \frac{1}{(1+\sigma)^4} A_1^3. \quad (23.10)$$

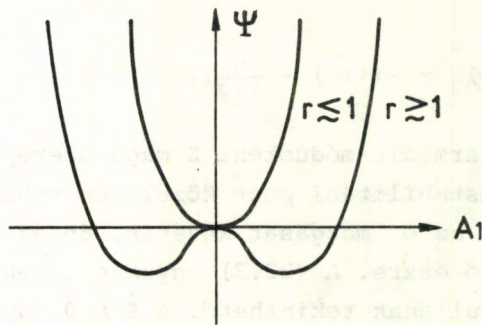
Ezt a második egyenletbe behelyettesítve közvetlenül adódik a lassú módus mozgásegyenlete, amit mi most az

$$\dot{A}_1 = - \frac{d\Psi(A_1)}{dA_1} \quad (23.11)$$

alakban írunk, ahol a  $\Psi$  "pontecial"

$$\Psi = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{1+\sigma} (1-r) A_1^2 + \frac{\sigma}{4b(1+\sigma)^3} A_1^4 . \quad (23.12)$$

A követett eljárás az ún. adiabatikus eliminálás [99].



23.2 ábra. A  $\Psi(A_1)$  függvény

A stacionárius értékeket  $\Psi$  minimuma adja:

$$r \leq 1 \text{-re} \quad , \quad A_1 = 0 \quad , \quad (23.13)$$

$$r \geq 1 \text{-re} \quad , \quad A_1 = \pm (1+\sigma) \sqrt{b(r-1)} \quad , \quad (23.14)$$

összhangban a  $P_0, P_{\pm}$  megoldásokkal (ld. (23.1), (23.2)).

Az  $r=1$  pontban fellépő instabilitás tehát analóg egy másodrendű fázisátalakulással (a hengeres áramlás forgási sebessége nulláról indulva növekszik).

A következő kérdés, meddig marad stabil a nemtriviális stacionárius megoldás az  $r > 1$  tartományban  $P_{\pm}$  pontok körül linearizált egyenletek jobb oldalán a

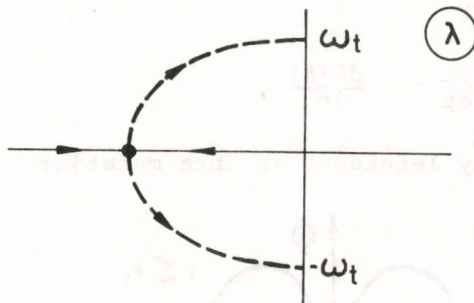


$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

mátrix lép föl. Ennek sajátértékei a

$$\lambda^3 + \lambda^2(1+\sigma+b) + \lambda b(r+\sigma) + 2b\sigma(r-1) = 0 \quad (23.15)$$

egyenlet gyökei. 1-hez közeli  $r$  értékek esetén három valós, negatív megoldást találunk (az  $r \rightarrow 1$  határesetben a  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -(1+\sigma)$ ,  $\lambda_3 = -b$  gyököket kapjuk, összhangban a (23.6), (23.8) és (23.4) kifejezések  $r=1$  helyen vett értékeivel).  $r$  növelésekor eljutunk egy olyan  $r_0$  értékig, ahol két gyök (legyenek ezek  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ ) egybe esik. Ettől kezdve  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  komplex-szé válik, egymás konjugáltjai lesznek, de valós részük még mindig negatív egészen egy  $r=r_t$  küszöb-érték eléréséig.  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  vándorlását mutatja a 23.3 ábra. Az a gyök, mely valós marad, sohasem válhat nullává, hiszen (23.15)-nek  $r > 1$ -re nincsen zérus megoldása.



23.3 ábra. A  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  gyökök vándorlása a komplex síkon az  $1 < r < r_t$  tartományban

A (23.15) egyenletből könnyen meghatározható az  $r_t$  érték.

Ebben a pontban ugyanis  $\lambda_{1,2}$  tisztán képzetes, tehát írhatjuk, hogy  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_t$ , ahol  $\omega_t$  valós frekvencia. Ezt behelyettesítve a valós és képzetes részekre adódó egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\omega_t^2 = b(r_t + \sigma) = \frac{2b\sigma(r_t - 1)}{1 + \sigma + b},$$

amiből

$$r_t = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}, \quad (23.16)$$

$$\omega_t = \sqrt{\frac{2b\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}}. \quad (23.17)$$

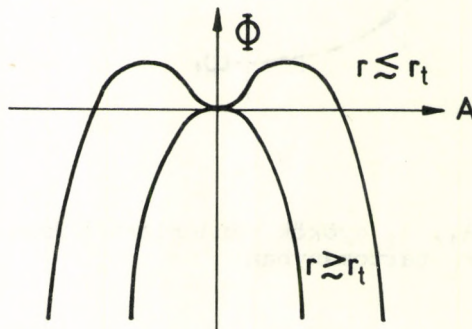
A megoldás csak akkor konzisztens, ha  $\sigma > b - 1$ , amit a továbbiakban fölteszünk. (A standard értékekkel teljesül az egyenlőtlenség, s  $r_t = 24.74$ ,  $\omega_t = 9.62$ .)

Az  $r=r_t$ -nél fellépő instabilitás más típusú, mint az  $r=1$ -nél történő. Most ugyanis (kemény módusú instabilitás) a lassan relaxáló módus  $\omega_t$  frekvenciával oszcillál. Ez arra utal, hogy a rendszerben létezik határciklus-megoldás.

A lassan relaxáló,  $\omega_t$  frekvenciájú módus A valós amplitúdójára hasonló módon alkalmazható az adiabatikus eliminálási eljárás, mint a (23.11) egyenlet levezetésekor. Eredményként az adódik [72,76], hogy

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{d\Phi(A)}{dt},$$

ahol a  $\Phi(A)$  függvény lefutását az ábra mutatja:



23.4 ábra. A  $\Phi(A)$  függvény



A-nak tehát létezik egy nem-zérus stacionárius értéke  $r < r_t$ -re, ez azonban instabil. Az  $r \leq r_t$  tartományban tehát létezik egy instabil határciklus a rendszerben, aminek amplitúdója  $r=r_t$ -nél eltűnik. Itt tehát megfordított (szubkritikus) Hopf-bifurkáció [100] játszódik le.

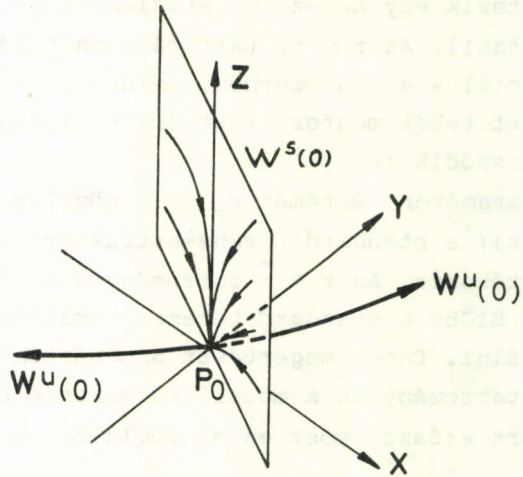
A kontrollparaméter értékét  $r_t$  fölé növelve különös attraktor alakul ki: a standard Lorenz-attraktor, ami stabil az  $r < \hat{r} \approx 145$  értékekre. Az  $r > \hat{r}$  tartományra a 33. fejezetben térünk vissza. Előbb a standard Lorenz-attraktor szerkezetét kívánjuk vizsgálni. Ennek megértését nagymértékben megkönnyíti az  $1 < r < r_t$  tartományban a modell részletesebb (globális) feltárása, ezért először most ezzel foglalkozunk.

#### 24. GLOBÁLIS STABILITÁSVIZSGÁLAT. "PRETURBULENCIA". A STANDARD LORENZ-ATTRAKTOR

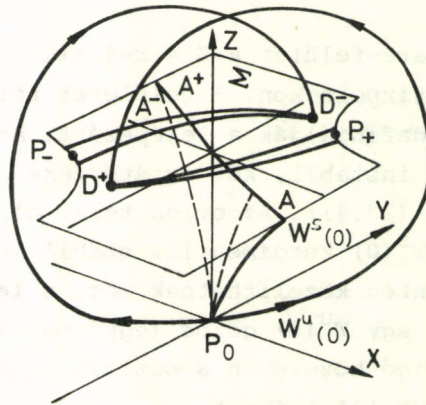
A különös attraktor kialakulásának jobb megértése érdekében célszerű áttérni egy kétdimenziós Poincaré-leképezés vizsgálatára, amiről később megmutatjuk, hogyan redukálható egydimenziósra.

Legyen a  $\Sigma$  Poincaré-felület a  $Z = r-1$  sík, mely (23.2) szerint átmegy a  $P_{\pm}$  fixpontokon. E felületet felülről metsző pályák döféspontjai definiálják a leképezést. Az  $r > 1$  tartományban a  $P_0$  fixpont instabil, két sajátértéke azonban végig negatív (ld. (23.3), (23.4)). Az origó tehát olyan nyeregpont, melyet a pályák egy  $W^s(0)$  kétdimenziós stabil invariáns sokaság (szeparátrix) mentén közelíthetnek meg, a legerősebb taszítás irányát pedig egy  $W^u(0)$  görbe (egydimenziós szeparátrix) jelöli ki, ami az origó közelében a pozitív sajátértékhez tartozó sajátirányban fut (24.1 ábra).

A kétdimenziós invariáns sokaság és a  $\Sigma$  felület A metszészonalának a Poincaré-leképezésben is szétválasztó szerepe van. A vonal közeléből induló pályák ugyanis közel kerülnek az origóhoz, további sorsuk azonban attól függ, hogy A melyik oldaláról indultak. Az  $A^+$  pont (ld. 24.2 ábra) például a  $W^u$  jobboldali ága és  $\Sigma$  metszéspontjának,  $D^+$ -nak közelébe kerül, míg  $A^-$  a szimmetrikusan elhelyezkedő  $D^-$  közelébe.



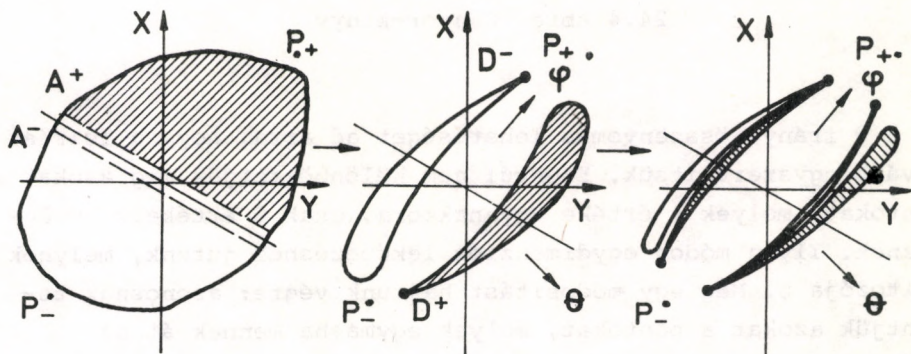
24.1 ábra. Az origó környezete  $r > 1$  esetén



24.2 ábra. A Lorenz-rendszer Poincaré-metszete

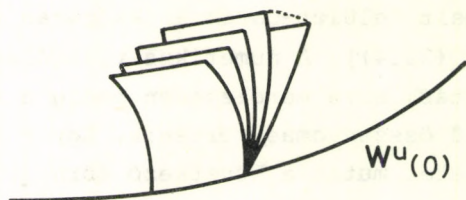


Valamely kiszemelt felület-darab a leképezés után erősen összenyomódik (ld. (22.4)). A numerikus vizsgálat szerint bizonyos irányban nyújtás, erre merőlegesen pedig a nyújtásnál jóval nagyobb mértékű összenyomás történik. Egy  $r > r_t$  értéknél tapasztalt helyzetet mutat a következő ábra [101]:



24.3 ábra. Terület-csökkenés a Poincaré-leképezésben ( $r=28$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ). A jobb áttekinthetőség kedvéért a  $\theta$  irányú zsugorítás az ábrán gyengébb, mint a valóságban

Az eredeti terület-darab két szárny formájú alakzattá deformálódik az első leképezés után. A második lépésben a szárnyak fölhasadnak, s végtelen sok ismétlés után végtelen sok szárny alakul ki. Ugyanakkor egyik sem lehet véges vastagságú, hiszen az attraktor a  $\Sigma$  síkon nem lehet kétdimenziós, mert ez ellentmondásban lenne az állapottér egyenletes összehúzódásával (ld. 22. fejezet). A szárnyak  $\theta$ -irányú metszete Cantor-halmazt alkot. Található végtelen sok szárny, melyeknek egy pontja közös. A háromdimenziós térben ez azt jelenti, hogy végtelen sok felület érintkezik egy görbe vonal, a  $W^u(0)$  instabil szeparátrix mentén. Erre szokták azt mondani, hogy Cantor-könyv alakul ki [26].

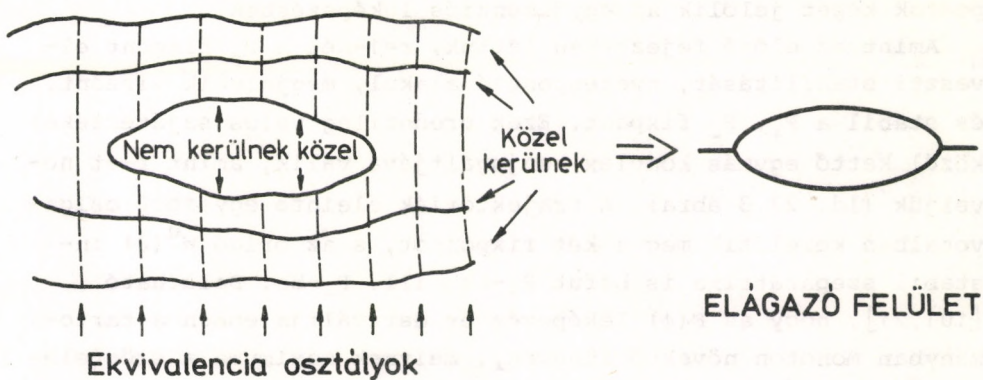


24.4 ábra. Cantor-könyv

A  $\Theta$  irányú összenyomás lehetőséget ad arra, hogy a leírást tovább egyszerűsítsük. Ezentúl nem különböztetjük meg azokat a pontokat, melyek  $\phi$  értéke ugyanakkora, csak  $\Theta$  értékeik különböznek. Ilyen módon egydimenziós leképezéshez jutunk, melynek változója  $\phi$ . Még egy módosítást hajtunk végre: azonosnak tekintjük azokat a pontokat, melyek egymásba mennek át az  $X, Y \rightarrow -X, -Y$  transzformációra. Más szavakkal: a  $P_+$  ill.  $P_-$  pontoktól mért  $\phi$  távolságot mindig attól a  $P$ -től számítjuk, amelyik oldalon a trajektória, a kérdéses (felülről történő) döféspont előtt, alulról metszette a  $\Sigma$  síkot. A  $\phi$  paraméterezésben tehát a  $D^+$ ,  $D^-$  és  $P_+$ ,  $P_-$  pontok nem különböztethetők meg.

Mielőtt az így kapott egydimenziós leképezés vizsgálatára áttérnénk, általánosan is megfogalmazzuk, hogyan definiálható az attraktorra jellemző kétdimenziós sokaságon való mozgás a háromdimenziós állapottérben. Tekintsük az attraktor egy környezetét! Tekintsünk azonosnak minden olyan pontot e környezetben belül, melyek az idő múlásával tetszőlegesen közeliékké válnak. Ennek következtében különös attraktor esetén az attraktor bizonyos leveleit is azonosnak kell tekintenünk ("becsukjuk a Cantor-könyvet"). Az eredményül kapott képződményt nevezük a különös attraktor elágazó felületének, branched manifold-jának [26]. Az ezen a felületen történő áramlás annyiban különbözik a valóditól, hogy itt az áramlási vonalak összefutása megengedett (szokásos elnevezése: semi-flow).





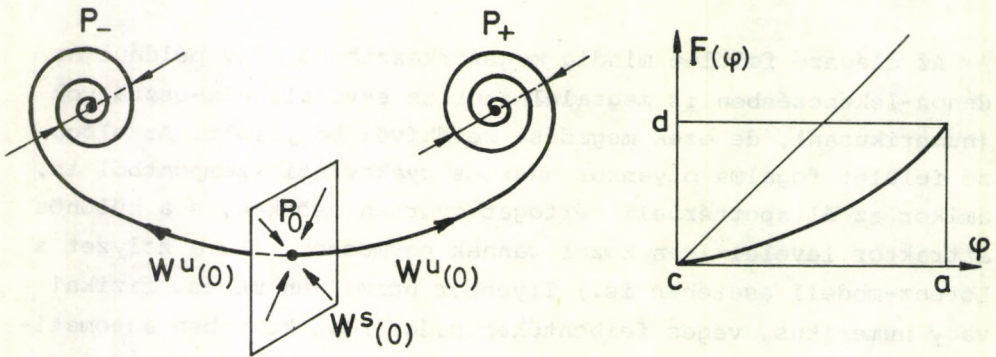
24.5 ábra. Az elágazó felület konstruálása

Az elágazó felület mindig megszerkeszthető. Így például az Hénon-leképezésben is megtalálhatók az ekvivalencia-osztályok (numerikusan), de ezek megadása rendkívül bonyolult. Az elágazó felület fogalma olyankor hasznos gyakorlati szempontból is, amikor az állapottérbeli térfogat gyorsan csökken, s a különös attraktor levelei igen közel vannak egymáshoz. (Ez a helyzet a Lorenz-modell esetében is.) Ilyenkor bármilyen mérés, fizikai vagy numerikus, véges felbontóképessége következtében automatikusan létrehozza az azonosítást: a megfigyelő csak az elágazó felületet látja. Ezekben az esetekben modellezhetők jól a különös attraktorok papirhajtogatással (ld. 12. fejezet).

Visszatérve a Lorenz-modell konkrét esetére, egyhez közeli  $r$  értékektől kezdve végigkövetjük, mi történik az imént definiált  $F(\phi)$  egydimenziós leképezéssel [101,21] ill. az állapottérbeli áramlással [77] a kontrollparaméter növelésekor. Mostantól kezdve csak a  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  standard értéket használjuk. Az  $a$ ,  $c$  és  $d$  jelű pontok rendre az  $A$  vonal ill. a  $P_{\pm}$ ,  $D^{\pm}$

pontok képét jelölik az egydimenziós leképezésben.

Amint az előző fejezetben láttuk,  $r=1$ -nél a  $P_0$  fixpont elveszti stabilitását, nyeregponttá alakul, megjelenik viszont, és stabil a  $P_+$ ,  $P_-$  fixpont. Ezek eredetileg valós sajátértékei közül kettő egymás komplex konjugáltjává válik, amint  $r$ -et növeljük (ld. 23.3 ábra). A trajektóriák eleinte egyszerű csigavonalban közelítik meg a két fixpontot, s az origó  $W^u(0)$  instabil szeparátrixa is befut  $P_+$ -ba ill.  $P_-$ -ba. Belátható [101,21], hogy az  $F(\phi)$  leképezés és deriváltja ebben a tartományban monoton növekvő függvény, melynek maximuma a szögfelező alatt helyezkedik el ( $F(a) \equiv d < a$ ). Az  $r=10$  értéknél talált helyzetet szemlélteti a 24.6 ábra.

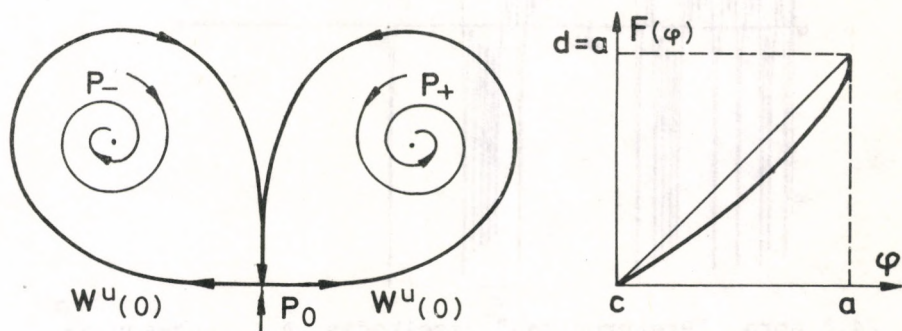


24.6 ábra. Az állapottérbeli áramlás és az egydimenziós leképezés az  $r=10$  kontrollparaméter értéknél

$r$  növelésekor a  $W^u(0)$  szeparátrixa által alkotott csigák egyre jobban megduzzadnak, s az  $r_1 = 13,926$  értéknél bekövetkezik az a helyzet, hogy érintik a kétdimenziós stabil invariáns sokaságot, az instabil szeparátrixa tehát visszakanyar-

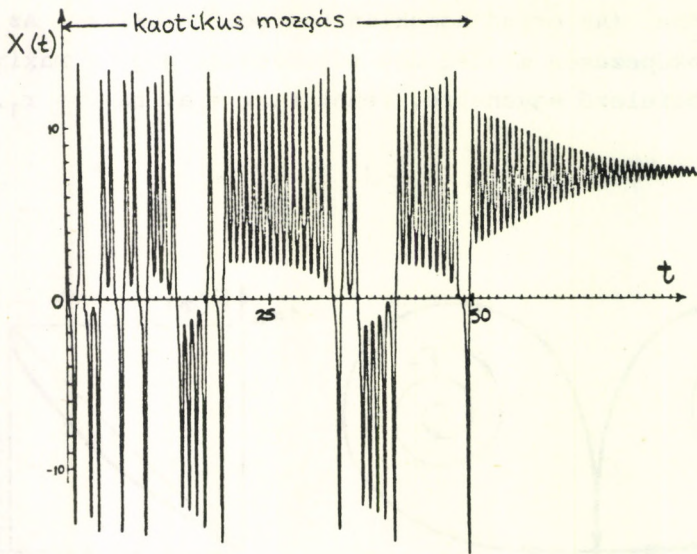


dik az origóba. (Az origó homoklinikus ponttá válik.) Az egydimenziós leképezésen mindez úgy tükröződik, hogy a maximum ráesik a szögfelező egyenesre, tehát  $F(a) = a$ , ha  $r = r_1$ .



24.7 ábra. Az állapottérbeli áramlás és az egydimenziós leképezés az  $r=r_1=13,926$  kontrollparaméter értékénél

Az  $r_1$  érték fölött egy instabil határciklus keletkezik, mely  $r \geq r_1$  esetén közel fut az origó instabil szeparátrixához.  $W^u(0)$  a  $g$  instabil határciklust megkerüli, s befut az ellenkező oldali fixpont vonzási tartományába. A  $g$  külső környezetéből induló pályák jó része csak azután kerül valamelyik fixpont vonzási tartományába, hogy előtte számos hurkot ír le mindkét oldalon, s eközben mozgása véletlenszerű. Ezért ezt az állapotot "preturbulens"-nek nevezik [83,84], noha a fixpontok még majdnem minden trajektóriát vonzanak. A Lorenz-egyenletek megoldásában ez úgy mutatkozik meg, hogy először kaotikus oszcillációk lépnek fel, majd a rendszer hirtelen csillapított rezgésekbe kezd, melyek a fixpont-értékre húzódnak rá. A kontrollparaméter értékének növelésekor a kaotikus oszcillációk átlagos száma nő [84] ( $r=22$ -re például 60, míg  $r=23$ -ra 300).

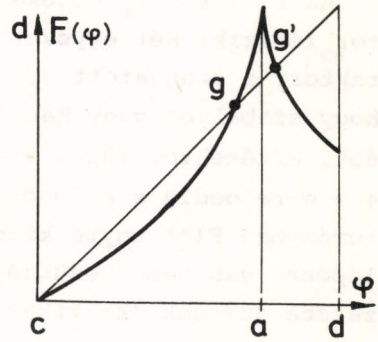
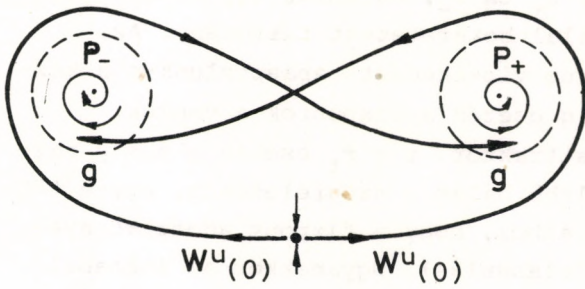


24.8 ábra. "Preturbulens" viselkedés. A Lorenz-egyenlet  $X(t)$  megoldása  $r=22$  esetén

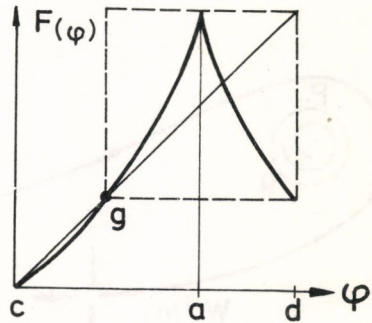
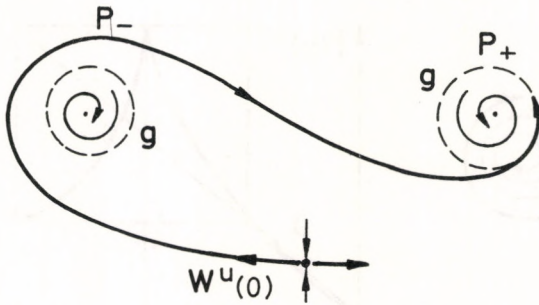
A Poincaré-leképezésen, mindezzel összhangban, megjelenik egy csúcs az a helyen, mely a szögfelelő fölé esik:  $F(a) \equiv d > a$ . Ezután  $F(\phi)$  monoton csökken az  $F(d)$  értékig, s  $g > F(d)$ , hiszen  $W^u(0)$  rögtön befut a fixpont vonzási tartományába. A leképezésről is leolvasható, hogy a  $g$ -nél nagyobb értékekről induló rekurziók nagy része még sokáig ebben a tartományban marad, de előbb-utóbb rákerül arra az ágra, ahol  $F(\phi) < g$ , s onnét már a  $\phi = 0$  ponthoz tart. Az ábráról látszik, hogy  $g$  mellett a  $g'$  instabil ciklus is megjelenik, a különös attraktor kialakulásának megértése szempontjából azonban elegendő, ha  $g$ -t követjük nyomon (24.9 ábra).

Újabb lényeges változás történik az  $r_2 = 24,06$  értéknél. Itt válik egyenlővé  $F(d)$   $g$ -vel, vagyis itt következik be az, hogy az origó instabil szeparátrixa rácsavarodik a  $g$  instabil ciklusra. A fixpontok ennek következtében csak  $g$  belsejéből indulva érhetők el. A  $g$  külső környezetéből induló pályák nem jutnak el egyszerű attraktorokhoz. A mozgás itt sztochasztikus. A Poincaré-leképezésen a szaggatott vonallal bekeretezett tartomány ( $g < \phi < d$ ) felel meg a sztochasztikus mozgásnak (24.10 ábra).



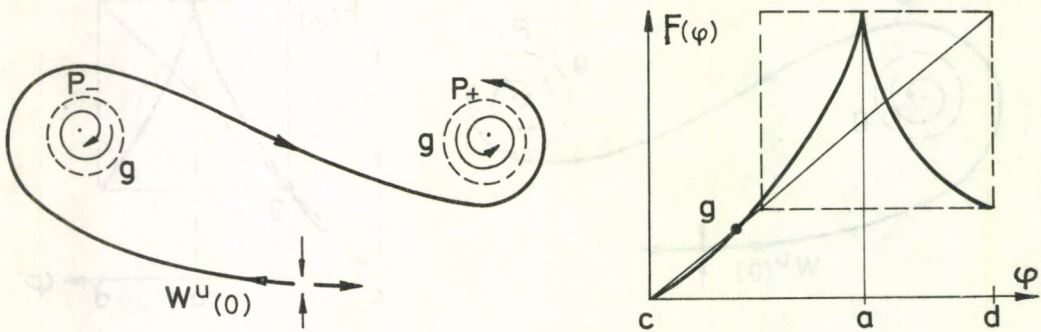


24.9 ábra. Az állapotterbeli áramlás és az egydimenziós leképezés az  $r=15$  kontrollparaméter értéknél



24.10 ábra. Az állapotterbeli áramlás (az áttekinthetőség kedvéért csak az egyik felét rajzoltuk) és az egydimenziós leképezés az  $r=r_2=24,06$  kontrollparaméter értéknél

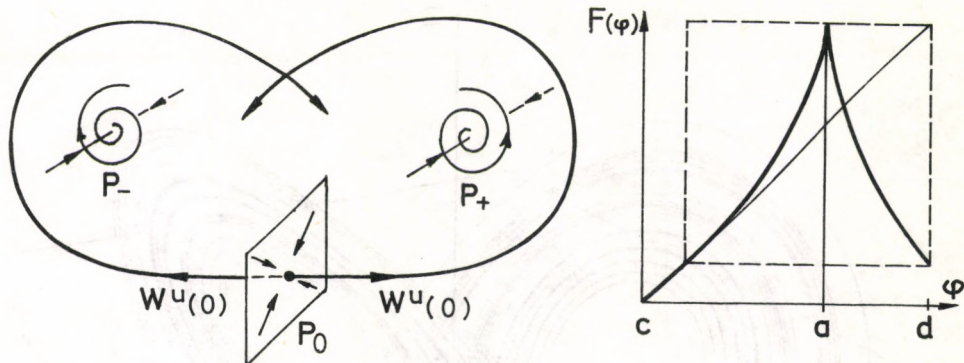
Az  $r_2 < r < r_t$  értékekre a Lorenz-rendszerben három attraktor létezik: két egyszerű,  $P_+$  és  $P_-$ , valamint egy különös attraktor, a szaggatott vonallal bekeretezett tartomány. Az, hogy szabályos vagy kaotikus viselkedést tapasztalunk-e a kezdeti értékektől függ:  $\phi < g$  esetén a fixpontok a vonzók,  $\phi > g$ -re pedig a különös attraktor.  $r \rightarrow r_t$  esetén a  $\phi < g$  tartományban  $F(\phi)$  egyre közelebb halad a szögfelezőhöz, egyre több lépésre van tehát szükség ahhoz, hogy a fixpont adott környezetébe jussunk (kritikus lelassulás). Ugyanakkor az instabil határciklus amplitúdója és a fixpont vonzási tartománya egyre kisebb (közeledünk az inverz Hopf-bifurkációhoz). Mindez összhangban van az előző fejezetben végrehajtott analízissel, ami azonban nem tette lehetővé annak megválaszolását, mi történik a fixpontok vonzási tartományán kívül. A mostani eljárást tehát joggal nevezhetjük globális stabilitásvizsgálatnak.



24.11 ábra. Az állapottermbeli áramlás (az áttekinthetőség kedvéért csak az egyik felét rajzoltuk) és az egydimenziós leképezés az  $r=24,3$  kontrollparaméter értéknél

$r = r_t = 24,74$ -nál az instabil ciklus ( $g$ ) ráhúzódik a megfelelő fixpontokra, amelyek ilyen módon instabillá válnak.





24.12 ábra. Az állapottérbeli áramlás és az egydimenziós leképezés az  $r=28$  kontrollparaméter értéknél

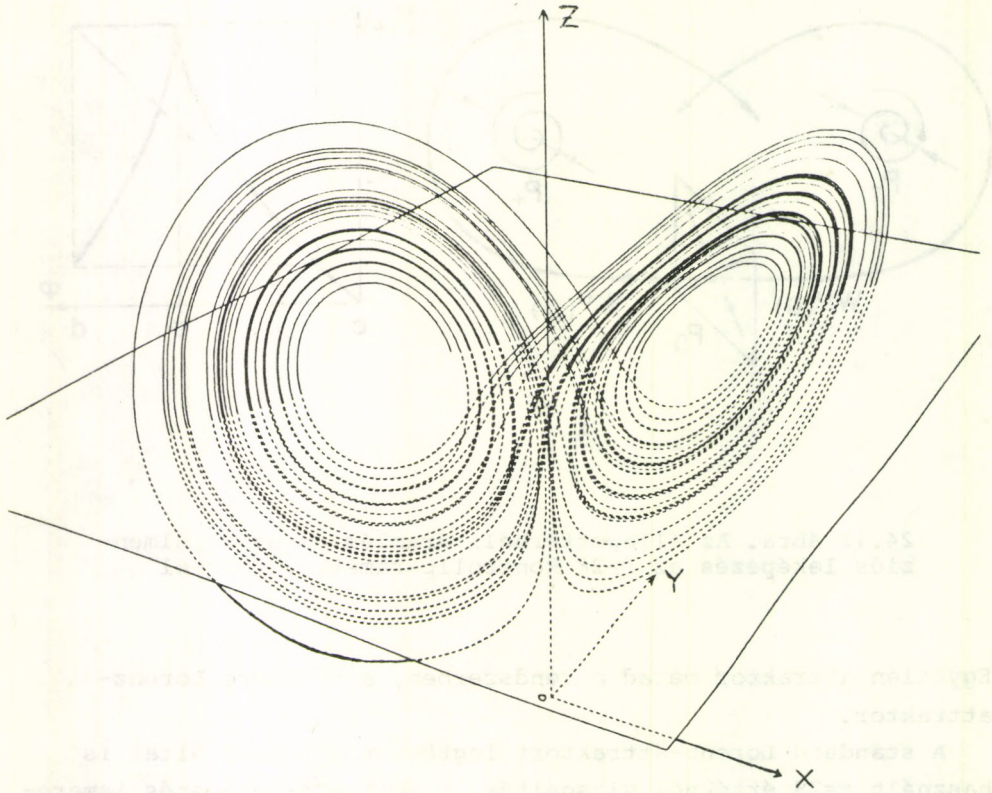
Egyetlen attraktor marad a rendszerben, a standard Lorenz-attraktor.

A standard Lorenz-attraktort legtöbbször a Lorenz által is használt  $r=28$  értéknél vizsgálták. A Poincaré-leképezés ismeretében könnyen meghatározható a Ljapunov-exponens [28], amelyre

$$\bar{\lambda} = 0.98$$

adódott. A háromdimenziós állapottérben kialakuló attraktor Hausdorff-dimenziója kettőnél nagyobb, de ahhoz nagyon közeli érték [95], ami érthetővé teszi, hogy a számítógépes szimulációkban az attraktor kétdimenziósnak tűnik.

A 24.13 ábra a Lorenz-egyenlet numerikus megoldásával kapott görbét [78] mutatja, az  $r=28$  értéknél, az első ötven körülfordulás után, amikor tehát a görbék már közel kerültek az attraktorhoz.



24.13 ábra. A Lorenz-attraktor az  $r=28$  értéknél

A Lorenz-attraktor belső szerkezete rendkívül bonyolult. A Cantor-könyv lapjai, mint láttuk, az instabil szeparátrixra fűződnek fel, s a Cantor-levelek egymásba hatolásával alakul ki igen összetett struktúra. Belátható, hogy egyetlen branched manifold-hoz megszámlálhatatlanul végtelen sok különböző topológiai szerkezetű elrendezés tartozik [26,97]. A numerikus módszerek véges felbontóképessége miatt az adott  $r$  értékhez tartozó pontos topológiai struktúra azonban nem határozható meg. A számítógépes eljárással kapott ábrák négy számjegy pontossággal számolva is még a branched manifold-ot mutatják.



A káosz megjelenésének perióduskettőző bifurkáció-sorozattal járó, ill. a Lorenz-modellben megvalósuló útja után, melyeket részletesen tárgyaltunk, röviden megemlítünk további lehetőségeket.

Ruelle és Takens ill. Newhouse, Ruelle és Takens [102,103] nevéhez fűződik annak megmutatása, hogy különös attraktor kialakulhat néhány (tipikusan kettő vagy három) Hopf-bifurkáció után [104,105,61]. Ilyenkor a kontrollparaméter változtatásakor először határciklus jelenik meg, majd a rendszer biperiodikus mozgást mutató állapotba kerül, s az erre jellemző frekvenciák inkommenzurábilisak. A Fourier-spektrumban mindez úgy tükröződik, hogy egymás után jelenik meg egy, két, esetleg három diszkrét csúcs olyan frekvenciáknál, melyek viszonya nem racionális szám (természetesen a nemlineáris csatolás miatt csúcsok alakulnak ki az alapfrekvenciák felharmonikusainál, összegeinél, különbségeinél stb. is), majd a különös attraktor megjelenésekor a spektrum folytonossá válik.

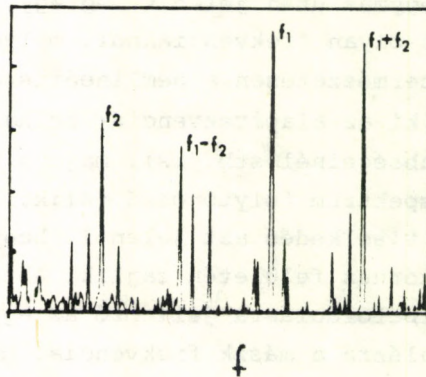
A biperiodikus viselkedés azt jelenti, hogy az állapotteremben a mozgás egy tórusz felületén zajlik. A tórusz tengely mentén történő körbefordulásra jellemző az egyik, a felületen történő körbefordulásra a másik frekvencia. Háromdimenziós térben a tórusz térfogata nem zérus mértékű, ezért ilyen attraktor - mindenütt negatív divergenciájú áramlások esetén - csak háromnál magasabb dimenziójú állapotterrel jellemzett disszipatív rendszerben jöhet létre. Ilyenkor a káosz kialakulásának Ruelle-Takens-Newhouse-féle útja tehát csak háromnál több autonóm differenciálegyenlettel leírt rendszerben fordulhat elő.

A numerikus vizsgálatok szerint ez az út valósulhat meg a Navier-Stokes-egyenletek tizennégy módust [106], ill. hét módust [107] megtartó redukált változatában. Érdemes megemlíteni, hogy ismeretes olyan kétdimenziós leképezés is [108], mely a biperiodikus mozgással megelőzött kaotikus viselkedés modelljének tekinthető.

A laboratóriumi méréseket illetően elsősorban a turbulencia kialakulásával kapcsolatos vizsgálatokra kell utalnunk. A kis

méret-aránnyal jellemzett hidrodinamikai rendszerekben a kísérletek tanúsága szerint a Ruelle-Takens-Newhouse-féle út is megvalósul a 21. fejezetben tárgyalt perióduskettőző kaszkádon kívül.

Az egyik csoportba tartoznak azok a mérések, amelyekben két inkompenzurábilis frekvencia megjelenése után alakul ki a turbulencia. Tipikus példája ennek a koncentrikus hengerek között meginduló Couette-áramlás. A külső hengerek szögsebességének növelésekor a lokális sebesség időben periodikussá, majd biperiodikussá, végül kaotikussá válik [109-111].



25.1 ábra. A lokális sebesség Fourier-együtthatóinak frekvencia-függése a Couette-áramlás biperiodikus mozgást mutató tartományában [110]

Másik csoportot alkotnak azok a mérések, melyekben a turbulens viselkedés azután jön létre, hogy három inkompenzurábilis frekvencia már megjelent a spektrumban. Ezt tapasztalják a Bénard-instabilitásra vonatkozó kísérletek egy részében [64,112-114].

További érdekes megfigyelés az, hogy két eredetileg inkompenzurábilis frekvencia a nemlineáris kölcsönhatás következtében a kontrollparaméter változtatásával kompenzurábilissá válhat (ez a jelenség a szinkronizáció vagy phase locking), s a



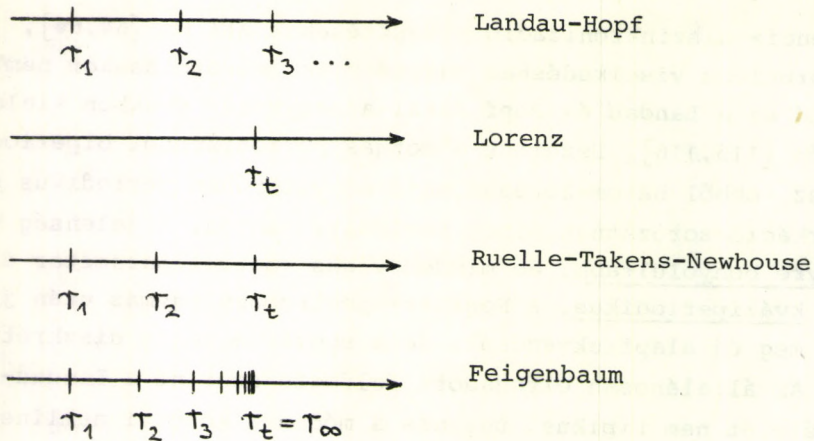
turbulencia a szinkronizáció elvesztésekor áll be [64,66].

A turbulens viselkedéshez vezető utak felsorolásakor nem hagyható ki a Landau és Hopf által a negyvenes években kialakított kép [115,116]. Eszerint a mozgás periodikusból biperiodikus lesz, ebből háromszorosan, majd négyszeresen periodikus stb.; a bifurkáció-sorozatnak nincs torlódási pontja. A jelenség tehát egyre bonyolultabb, de minden véges kontrollparaméter értéknél kváziperiodikus. A Fourier-spektrumban egymás után jelennek meg új alapfrekvenciák, de a spektrum végig diszkrét marad. Az általánosan elfogadott felfogás szerint a Landau-Hopf-féle út nem tipikus, ugyanis a módusok közötti nemlineáris csatolások miatt vagy kiválasztódik valamelyik módus (evolúciós folyamat), vagy kölcsönös szinkronizálás ill. kölcsönös sztochasztizálás lép fel, véges számú bifurkáció után. Említésre kívánkozik, hogy az utóbbi időben felmerült az a lehetőség is, hogy a Landau-Hopf-féle út bizonyos körülmények között mégis megvalósulhat. Úgy tűnik, a tóruszok stabilitását egy Kolmogorov-Arnold-Moser-típusú feltétel szabályozza hasonlóan, mint konzervatív rendszerekben (ld. 35. fejezet és [117]). A kérdés egyelőre nem tekinthető lezártnak [118,119].

Összefoglalásként megadjuk a káosz kialakulásához vezető különböző utakra jellemző bifurkációs sémát, melyen a Hopf-bifurkációkhoz tartozó kontrollparaméter értékeket tüntettük föl. A tárgyalási sorrenddel ellentétben most a felismerés időrendjének sorrendjében következnek az egyes lehetőségek (25.2 ábra).

A kaotikus viselkedés megjelenésével kapcsolatban meg kell említeni az intermittencia jelenségét is, melyről a kötet más helyein részletesen lesz szó.

A teljesség kedvéért az eddigieket kiegészítjük azzal, hogy a kísérletek tanúsága szerint a nagy méret-aránnyal jellemzett hidrodinamikai rendszerekben a turbulencia kialakulása egészen más típusú, mint az eddig tárgyalt esetek. Bonyolult helytől függő viselkedésformák lépnek föl [120,66], s feltehetően a zaj is lényeges szerepet játszik. Elméleti szempontból viszonylag tiszta kép alakult ki az ún. fázis-káoszról [121].



25.2 ábra. A káosz kialakulásához vezető bifurkációs-sorozatok.  $r$ : kontrollparaméter,  $r > r_t$ : kaotikus viselkedés

Végül megjegyezzük, hogy a közvetlenül a kialakulás után fellépő ún. gyenge turbulencia alapvetően különbözik a teljesen kifejezett turbulenciától. Ez utóbbi vizsgálata kívül esik a könyv keretein.

A kaotikus megoldásokat mutató egyenletek számbavétele nem lenne teljes, ha nem utalnánk a retardált rendszerekre, melyekben az időkéseletetés a kontrollparaméter szerepét játszhatja. Ebbe a problémakörbe rövid betekintést az F.7 függelék nyújt.



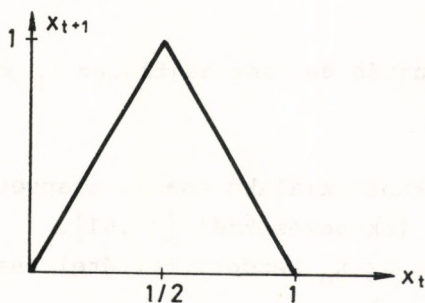
## A KÁOSZ TULAJDONSÁGAI

### 26. ERGODIKUS TRAJEKTÓRIÁK AZ EGYDIMENZIÓS LEKÉPEZÉSEKNÉL, A VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZLÁS

A káosz kialakulásához hasonlóan a káosz tulajdonságainak tanulmányozását is az egydimenziós leképezés vizsgálatával kezdjük. A 15-19. fejezetekben az

$$x_{t+1} = f(r, x_t)$$

iterációt vizsgáltuk. Általában találunk olyan  $r_\infty$  kontrollparaméter értéket, amelynél kisebb  $r$  paramétereknél a rendszer attraktora  $r$ -től függő periódusidejű határciklus. A periódusidő az  $r \rightarrow r_\infty$  határátmenet során végtelenhez tart, az  $r_\infty$  pontban az iteráció aperiodikus. Mint később látni fogjuk, az  $r_\infty$  torlódási ponton túli tartományban egyaránt találunk olyan kontrollparaméter értékeket, amelyek mellett periodikus, s olyanokat is, amelyeknél aperiodikus trajektóriákat figyelhetünk meg. A 29-31. fejezeteket e tartomány tanulmányozásának szenteljük. Először aperiodikus iterációkat vizsgálunk.



26.1 ábra. Az  $x_{t+1} = f_H(x_t)$  leképezés

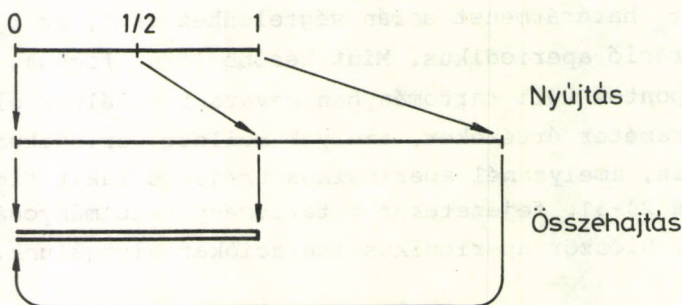
Az alábbiakban néhány példán olyan tulajdonságokat mutatunk be, amelyek az egydimenziós leképezések széles osztályára jel-

lemzőek. Anélkül, hogy arra minden esetben külön kitérnénk, a  $[0,1]$  intervallumot önmagába vagy önmagára leképező függvényeket vizsgálunk. Tekintsük például az

$$f_H(x) \equiv 1 - 2|x - 1/2| \quad (26.1)$$

függvényt, amelyet a 26.1 ábrán rajzoltunk fel.

A  $H$  indexet a későbbiek során minden olyan mennyiség megkülönböztető jeleként használjuk, amely az  $f_H(x)$  háromszög leképezésre vonatkozik. Az ábrán látható függvény jellegzetes vonása, hogy a  $[0, 1/2]$  és az  $[1/2, 1]$  intervallumokat leképezésükor kétszeresükre nyújtja. Az iteráció azonban korlátos, mert a két szakasz megnyújtott képe egybeesik. Ezt összehajtatásnak nevezzük. A 26.2 ábrán illusztráljuk a nyújtást és az összehajtatást.



26.2 ábra. Nyújtás és összehajtatás az  $f_H(x)$  leképezésben

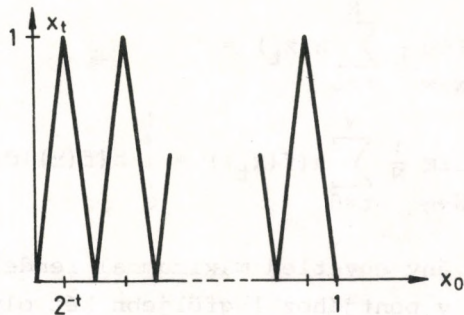
E két tulajdonság a káosz kialakulásának alapvető feltétele, nemcsak egydimenziós leképezéseknél [37,61].

Az  $f_H(x)$  leképezés az  $x_0$  kezdeti feltétel esetén az

$$x_t = f_H^{(t)}(x_0), \quad t = 0, 1, \dots$$

sorozatot generálja. Az  $x_t$  iteráltat a 26.3 ábrán rajzoltuk fel a kezdeti érték függvényében.





26.3 ábra. Az  $f_H^{(t)}(x_0)$  leképezés

A  $t \rightarrow \infty$  határesetben az  $f_H^{(t)}(x_0)$  sorozat konvergens illetve véges számú torlódási pont között oszcillál, ha  $x_0$  racionális, máskülönben a sorozat aperiodikus. Mivel az irracionális számok mértéke a  $[0,1]$  intervallum hosszával megegyezik, ezért azt mondjuk, az  $f_H^{(t)}(x_0)$  trajektória majdnem minden kezdeti feltétel esetén aperiodikus.

A fenti leképezés jellegzetes tulajdonsága az ergodicitás. Ergodikusnak tekintjük az  $x_{t+1} = f(x_t)$  iterációt, ha majdnem minden kezdeti feltételből kiindulva a  $h(x_t)$  integrálható függvény trajektória menti átlaga előáll a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N h(x_t) = \int_0^1 h(x) P(x) dx \equiv \int_0^1 h(x) d\mu(x) \quad (26.2)$$

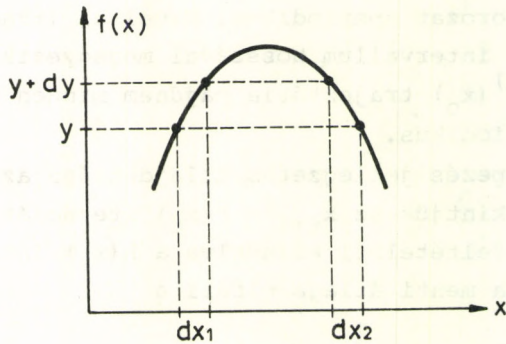
alakban. A monoton növekvő  $\mu(x)$  invariáns mértéket és a  $d\mu(x)/dx = P(x)$  valószínűségegsűrűséget, amelyekről feltételezzük, hogy "jó tulajdonságokkal" rendelkező függvények, az  $f(x)$  leképezés konkrét alakja határozza meg. (Egy, az  $f_H(x)$  háromszög leképezéssel ekvivalens ergodik iteráció\* tulajdonságairól részletesen Szász Domokos cikkében olvashatunk [20].) Az invariáns mértéknek az  $(x, x+dx)$  intervallumhoz tartozó  $d\mu(x)$  növekménye azt méri, mekkora valószínűséggel esnek az  $x_t$  trajektória pontjai az  $(x, x+dx)$  szakaszra, ha nagy számú iterációt végzünk. A mérték invariáns, azaz majdnem minden  $x_0$  kezdeti feltétel mellett fennáll:

\* A diadikus leképezésről van szó, ami izomorf az ún. Bernoulli-eltolással.

$$\int_0^1 h(x) d\mu(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N h(x_t) =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N h(f(x_t)) = \int_0^1 h(f(x)) d\mu(x) . \quad (26.3)$$

Ha az  $f(x)$  függvény egyetlen maximummal rendelkezik, akkor a képtartománybeli  $y$  pontjához legföljebb két olyan pont tartozik,  $x=x_1$  és  $x=x_2$ , amelyekre  $y=f(x)$ . A 26.4 ábrán jelölt  $dx_1$  és  $dx_2$  infinitezimális intervallumokhoz tartozó  $d\mu(x_1)$  és  $d\mu(x_2)$  valószínűségek összege megegyezik a  $dy$  szakaszon fölött  $d\mu(y)$  valószínűséggel.



26.4 ábra. Valószínűségek összehasonlítása

A mérték invarianciáját ezért a

$$d\mu(y) = d\mu(x_1) + d\mu(x_2) \quad (26.4)$$

egyenlet fejezi ki, amelyet átalakíthatunk a  $P(x)$  valószínűségsűrűségekre vonatkozó

$$P(y) = P(x_1)/|f'(x_1)| + P(x_2)/|f'(x_2)| \quad (26.5)$$

függvényegyenletté [28]. (Ha az  $y$  képponthoz egyetlen  $x$  tárgy-



pont tartozik, a jobboldalon csupán egyetlen tag szerepel. Több szélsőértékkel rendelkező leképezéseknél pedig a (26.5) egyenlet a tárgyponatok számának megfelelően módosul.) Az  $f_H(x)$  háromszög leképezésnél például  $|f'_H(x)| = 2$ . Az  $f_H(x)$  függvény az  $x=1/2$  pontra szimmetrikus, ezért a valószínűsége sűrűség is az. A  $(0,1/2)$  intervallum pontjaira következésképp fennáll (26.5) szerint

$$P_H(2x) = P_H(x) . \quad (26.6)$$

Az egyenletet a  $P_H(x) \equiv 1$  függvény kielégíti, s így teljesül a (26.2) összefüggésből leolvasható  $\int_0^1 P(x) dx = 1$  normálási feltétel is. Az ergodikus trajektóriák pontjai tehát azonos valószínűséggel esnek a  $(0,1)$  intervallum bármely  $dx$  hosszú intervallumába. Megjegyezzük, hogy a (26.5) függvényegyenletet formálisan kielégíti például a  $\tilde{P}_H(x) = \delta(x)$  Dirac-féle delta függvény is. Ez összhangban van azzal, hogy  $x=0$  a leképezés fixpontja. Az ergodikus trajektóriákat leíró  $P(x)$  valószínűsége sűrűség tehát a (26.5) egyenletnek csupán az egyik megoldása. Csak a stabilitási viszonyok konkrét vizsgálata során dönthetjük el azt, melyik megoldás lép fel a (26.2) egyenlőségben.

## 27. A LJAPUNOV-EXPONENS ÉS A KÁOSZ

Az  $f_H(x)$  háromszög leképezés trajektóriái az  $x_0$  kezdeti feltételre igen érzékenyek. A 26.3 ábráról leolvasható, hogy ha az  $x_0$  helytől kis  $\varepsilon$  távolságra indulnak, akkor az iteráció  $t$ -edik pontja

$$|df_H(t)/dx|_\varepsilon = \varepsilon 2^t = \varepsilon e^{t \ln 2} \quad (27.1)$$

eltolódást szenved. A kezdeti feltételre való érzékenységet a 16. fejezetben leírtak szerint a Ljapunov-exponenssel jellemezhetjük. Az  $f(x)$  leképezés által generált ergodikus trajektóriák mentén a Ljapunov-exponens a

$$\bar{\lambda} = \int_0^1 P(x) \ln |f'(x)| dx \quad (27.2)$$

integrállal állíthatjuk elő. Itt felhasználtuk a (16.4) definíciót és a (26.2) egyenlőséget. Azt mondhatjuk,  $\bar{\lambda}$  a 26.2 ábrán illusztrált nyújtás átlagos mérőszáma. (Megjegyezzük, ha majdnem minden trajektóriát  $\bar{\lambda}$  jellemzi, akkor a kezdeti feltételre történő (16.5) szerinti átlagolással többnyire ugyanazt a számot kapjuk,  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{\text{átl}}$ .) Új kifejezésünk formálisan kiterjeszthető az  $y_1, \dots, y_p, y_1$  periodikus trajektóriákra is - amelyeket nem tekintünk ergodikusnak -, ha bevezetjük a  $P(x) = [\delta(x-y_1) + \dots + \delta(x-y_0)]/p$  nem sima valószínűségi sűrűség függvényt. Az  $f_H(x)$  háromszög leképezés esetén a Ljapunov-exponens egyszerűen meghatározható

$$\bar{\lambda} = \ln 2 \equiv \bar{\lambda}_H, \quad (27.3)$$

ahol felhasználtuk, hogy  $P_H(x) \equiv 1$  és  $f'_H(x) \equiv 2$ . A háromszög leképezés által generált, egymáshoz közel indított trajektóriák (27.1) szerint exponenciálisan távolodnak, s a távolodást valóban a  $\bar{\lambda}_H$  Ljapunov-exponens jellemzi.

A stabil fixpontokhoz vagy periodikus attraktorokhoz tartó trajektóriákhoz negatív Ljapunov-exponens tartozik. Az iteráció ekkor aszimptotikusan érzéketlen a kezdeti feltételre. Minőségileg más a helyzet azonban akkor, ha a Ljapunov-exponens pozitív. Közel indított trajektóriák exponenciálisan eltávolodnak egymástól. Ha a kiindulási értéket csupán bizonyos pontossággal ismerjük, akkor a trajektória menetét néhány iteráció után általában nem tudjuk megjósolni, legföljebb annyit mondhatunk, az iteráció pontjai mely tartományokra korlátozódnak. Például a háromszög leképezés majdnem minden kezdeti feltételből indulva olyan trajektóriákat generál, amelyeket a - véges pontossággal mérni képes - megfigyelő néhány iteráció után véletlenszerűnek, kaotikusnak fog tartani a (0,1) intervallumban.

Általában akkor beszélünk ergodikus leképezéseknél káoszról, ha a (27.2) kifejezéssel definiált Ljapunov-exponens pozitív. A kaotikus mozgás egyik legfontosabb jellemzője a kezdeti feltételre mutatott érzékenység.

Tekintsük az  $x_{t+1} = f(x_t)$  ergodikus iterációt. Jelöljük  $T$ -vel azoknak a pontoknak halmazát, amelyekből indulva a trajek-



tóriákat a  $P(x)$  valószínűsége-sűrűség jellemzi. Jelöljük  $H$ -val azon  $x$  pontok együttesét, amelyeken a valószínűsége-sűrűség különbözik nullától,  $H = \{x | P(x) \neq 0\}$ . Egyesítsük a  $H$  halmazt mindazon pontokkal, amelyek szükségesek annak zárt halmazzá tételéhez. Amennyiben a Ljapunov-exponens pozitív, akkor az így kapott halmazt,  $H$  lezártját, a káosz különös attraktorának tekintjük, amelynek a  $T$  halmaz lezártja a vonzási tartománya. A különös attraktor a periodikus mozgások attraktorának szerepét veszi át aperiodikus trajektóriák esetén. Ezúttal azonban az iterációról csak azt mondhatjuk meg, elég sok lépés után mely tartományra korlátozódik. Ezen a tartományon, a különös attraktoron, a trajektória pontjai gyakorlati szempontból véletlenszerűen követik egymást. Kézenfekvő ezért, hogy a különös attraktort bejáró trajektóriákat kaotikusoknak nevezzük. A háromszög leképezés például majdnem minden kezdeti feltételből kiindulva kaotikus trajektóriákat generál, amelyek különös attraktora a  $[0,1]$  intervallum.

A kezdeti feltételre mutatott erős érzékenység és az iteráció korlátossága arra utal, hogy a trajektóriák bonyolult módon összekeverednek. A keverés tulajdonságának matematikai megfogalmazása Szász Domokos cikkében található [20], a fogalomról pedig szemléletes képet Geszti Tamás írásának alapján alkothat az Olvasó [122].

Káoszt sok egydimenziós leképezésnél megfigyeltek. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy egy káoszhoz vezető leképezésből milyen módon állíthatunk elő végtelenül sok olyan függvényt, amelyek szintén kaotikus trajektóriákat generálnak. Ezt konkrét példával is illusztráljuk.

Legyen az  $x_{t+1} = f(x_t)$  iteráció ergodikus és vezessen káoszhoz a  $[0,1]$  intervallumban. Bevezetve az

$$y_t = u(x_t) \quad (27.4)$$

új változót, ahol  $u$  invertálható, szakaszonként differenciálható monoton függvény és  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 1$ , akkor az

$$y_{t+1} = u(f(u^{-1}(y_t))) \equiv g(y_t) \quad (27.5)$$

ún. konjugált leképezéshez jutunk [32]. Az új változó bevezetése nem változtatja meg az  $x_t$  trajektória egy pontjának megtalálási valószínűségét az  $(x, x+dx)$  intervallumban, ezért

$$P_f(x) dx \equiv d\mu(x) = d\mu(u^{-1}(y)) \equiv P_g(y) dy . \quad (27.6)$$

Innen a

$$P_g(y) = P_f(u^{-1}(y)) du^{-1}(y)/dy \quad (27.7)$$

valószínűsége sűrűség adódik, amely a (27.5) ergodikus iterációt jellemzi. A leképezésekben a Ljapunov-exponens megegyezik, ugyanis a (27.4-6) és a (26.3) összefüggések felhasználásával kapjuk

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_g &\equiv \int_0^1 \left[ \ln |g'(y)| \right] P_g(y) dy = \\ &= \int_0^1 \left[ \ln |u'(f(u^{-1}(y)))| + \ln |f'(u^{-1}(y))| + \ln |du^{-1}/dy| \right] P_g(y) dy = \\ &= \int_0^1 \left[ \ln |f'(x)| \right] P_f(x) dx \equiv \bar{\lambda}_f > 0 , \end{aligned} \quad (27.8)$$

következésképp a  $g(x)$  leképezés is káoszhoz vezet.

Például az  $f_H(x)$  háromszög leképezéshez az

$$y_t = u(x_t) \equiv \sin^2 \frac{x_t \pi}{2} \quad (27.9)$$

változócsereével éppen az

$$y_{t+1} = f_L(r=4, y_t) \equiv 4y_t(1-y_t) , \quad (27.10)$$

logisztikus leképezést rendelhetjük hozzá. Az  $r=4$  paraméter mellett ezért a logisztikus függvény is káoszhoz vezet. A logisztikus leképezéshez rendelt  $\bar{\lambda}_L(r=4)$  Ljapunov-szám megegye-



zik a háromszög leképezéshez tartozó  $\bar{\lambda}_H$  számmal, ezért (27.3) felhasználásával  $\bar{\lambda}_L(4) = \ln 2$  adódik. A háromszög leképezés  $P_H(x) \equiv 1$  valószínűségeloszlását és az  $u(x) = \sin^2 x\pi/2$  függvényt a (27.7) transzformációs képletbe helyettesítve a logisztikus trajektóriák

$$P_L(r=4, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}} \quad (27.11)$$

valószínűségrűsűségét kapjuk. Megjegyezzük, hogy a  $P_L(4, y)$  eloszlásfüggvény az  $y_1=0$  és az  $y_2=1$  helyeken szinguláris.

A (26.5) egyenlet szerint az  $\hat{x}$  maximumhelyén deriválható  $f(x)$  leképezések esetén az  $\hat{y} \equiv f(\hat{x})$  maximumon a valószínűségrűsűség szinguláris,  $P(y \rightarrow \hat{y}) \rightarrow \infty$ , feltéve hogy  $P(\hat{x}) > 0$ . Az egyenletből leolvashatjuk, hogy a maximumhely további  $f^{(t)}(\hat{x})$  iteráltjain a valószínűségrűsűség általában szintén szinguláris. A logisztikus leképezés esetén a maximum  $\hat{y} = f_L(4, \hat{x}) = 1$  és annak összes további iteráltja  $f_L^{(t)}(4, \hat{y}) = 0$ ,  $t=1, 2, \dots$ . Ezzel összhangban a valószínűségrűsűség az  $x=0$  és  $x=1$  pontokban divergál.

Az alábbiakban további példákat mutatunk káoszhoz vezető leképezésekre. Káoszt figyelhetünk meg az

$$f_A(b, x) \equiv \begin{cases} x/b & , \text{ ha } 0 \leq x \leq b, \\ (1-x)/(1-b) & , \text{ ha } b \leq x \leq 1 \end{cases}$$

aszimmetrikus háromszög leképezésben [28, 32]. Az általa generált trajektóriákat a  $P_A(x) \equiv 1$  valószínűségrűsűség és a

$$\bar{\lambda} = -(b \ln b + (1-b) \ln(1-b))$$

Ljapunov-szám jellemzi.

Az

$$f_B(c, x) \equiv \begin{cases} (1-2c+x)/(1-c) & , \text{ ha } 0 \leq x \leq c, \\ (1-x)/(1-c) & , \text{ ha } c \leq x \leq 1 \end{cases}$$

leképezés  $P_B(x)$  valószínűségrűsűsége végtelen sok helyen nem folytonos függvény [28]. A Ljapunov-számot azonban egyszerűen kiszámíthatjuk:

$$\bar{\lambda} = \int_0^1 P_B(x) \ln 1/(1-c) dx = -\ln(1-c) .$$

Az  $f_A(b,x)$  és  $f_B(c,x)$  leképezésekhez konjugált, káoszhoz vezető függvények újabb széles osztályokat képeznek.

## 28. A KAOTIKUS TRAJEKTÓRIA: INFORMÁCIÓNYELŐ ÉS INFORMÁCIÓFORRÁS

Az információ fogalma mérési eredményhez kötődik. Ha például az  $x_{t+1} = f(x_t)$  iteráció az  $x^*$  fixponthoz konvergál, általában nagy pontossággal határozhatjuk meg elég sok lépés után a sorozat tagjait akkor is, ha a kiindulási pontról csak annyit tudunk, hogy a fixpont vonzási tartományába esik. Kaotikus trajektória esetén azonban bármilyen kis  $\epsilon$  hibával ismerjük is az iteráció kezdőpontját, ennek alapján a trajektória  $t$ -edik,  $t \gg 1$ , pontját átlagosan csupán  $\epsilon e^{\bar{\lambda}t} \gg \epsilon$  hibával határozhatjuk meg, ahol  $\bar{\lambda} > 0$  a Ljapunov-exponens. A trajektória pontjainak helyét újabb mérés nélkül csak egyre nagyobb hibával jósolhatjuk meg, az iteráció pontjaira nézve tehát minden lépésben információt veszítünk. Más szemszögből nézve azt mondhatjuk, hogy egy konvergens trajektóriát figyelemmel kísérve egyre kevesebb "meglepetés" éri a megfigyelőt, míg egy kaotikus iteráció eredményeit megmérve mindig újabb információhoz jut. A kaotikus rendszereket ezért információgenerátoroknak is tekinthetjük. Az információ változása szoros kapcsolatban áll a trajektóriák kezdeti feltételre való érzékenységevel. A Ljapunov-exponens ezért az információváltozást is jellemzi. A háromszög és a hozzá konjugált leképezések példáján bemutatjuk az információváltozás és a Ljapunov-exponens közötti kvantitatív kapcsolatot.

Ha egy mérés  $x_i$  eredményének valószínűsége  $P(x_i)$ , akkor a mérés elvégzésekor Shannon definíciója [123] szerint

$$H = - \sum_i P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad (28.1)$$

információt nyerünk, bit egységekben.



Ha például a  $[0,1]$  intervallumot felosztjuk  $M$  számú,  $1/M$  hosszú szakaszra, s az  $x_0$  pont  $1/M$  valószínűséggel található az egyes intervallumokban, akkor annak megmérése, hogy  $x_0$  melyik kis intervallumban van

$$H_0 = -\log_2 1/M \quad (28.2)$$

információt szolgáltat. Egy, az  $f(x)$  leképezéssel végrehajtott iteráció után az  $x_1 = f(x_0)$  pontról az előző mérés alapján azt tudjuk megmondani, hogy az  $|f'(x_0)|/M$  hosszú intervallumok közül melyikbe esik, ha  $M \gg 1$ . Ezért egy iterációs lépés során az információ megváltozása

$$H_1 - H_0 \equiv -\log_2 |f'(x_0)|/M + \log_2 1/M = -\log_2 |f'(x_0)| \text{ bit} .$$

Az információváltozást egy újabb  $1/M$  pontosságú méréssel kompenzálhatjuk. A  $t$ -edik iterációs lépésben, ahol  $t \ll M$ , az információ

$$H_t - H_{t-1} \equiv -\log_2 |f'(x_{t-1})| \text{ bit} \quad (28.3)$$

értékkel változik, ahol  $x_{t-1} = f^{(t-1)}(x_0)$ . A trajektória mentén bevezetjük a

$$\Lambda = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \log_2 |f'(x_t)| = -\bar{\lambda} / \ln 2 \quad (28.4)$$

átlagos lépésenkénti információváltozást, amely arányos a Ljapunov-exponenssel (lásd a (16.4) definíciót). Kaotikus trajektóriák esetén  $\Lambda < 0$ , az iteráció pontjaira vontkozó információnk tehát csökken. Minden iterációs lépés utáni újabb méréssel ezt az információt nyerjük vissza, a káoszban ilyen értelemben átlagosan  $|\Lambda|$  információ keletkezik lépésenként.

Az  $f_H(x)$  leképezés esetén például a Ljapunov-exponens (27.3) értékének felhasználásával kapjuk

$$\Lambda_H = -1 \text{ bit} .$$

Valóban, ha csupán annyit tudunk  $x_t$ -ről, hogy a  $(0, 1/2)$  és az  $(1/2, 1)$  intervallumok közül melyikbe esik, azaz  $x_t$  bináris tört kifejezésének egy számjegyét ismerjük, akkor az  $x_{t+1} = f_H(x_t)$  lépésben ez az információ elveszik. Az  $f_H(x)$  leképezés ugyanis mindkét intervallumot a  $(0, 1)$  szakaszra vetíti.

Az információveszteség mértéke megegyezik a konjugált  $g(x)$  és  $f(x)$  leképezéseknél, vagyis abban az esetben, ha  $g(x) = u(f(u^{-1}(x)))$ . Ez abból következik, hogy (27.8) szerint a konjugált leképezésekhez tartozó Ljapunov-exponensek megegyeznek.

A (28.1) formula analógiája folytonos  $x$  változó és  $P(x)$  valószínűségi sűrűség esetén

$$H = \int_0^1 P(x) \log_2 P(x) dx . \quad (28.5)$$

Jelentése azonban itt módosul. Ha a tudomásunk szerint egyenletes eloszlású,  $\bar{P}(x) \equiv 1$  "egyensúlyi" valószínűségi sűrűségű  $x$  változók valószínűségi sűrűségét egy konkrét mérés elvégzése után  $P(x)$ -nek találjuk, akkor a méréshez a fenti  $H$  információt rendeljük. Definíciónk összhangban van a (28.1) kifejezéssel. Ha ugyanis  $x$  értékét  $1/M$  pontossággal meghatározzuk, vagyis tudjuk, hogy a mérés után

$$P(x) = \begin{cases} M, & \text{ha } x \in (x_0 - 1/(2M), x_0 + 1/(2M)), \\ 0 & \text{másutt,} \end{cases}$$

akkor (28.5) szerint

$$H = \log_2 M \text{ bit.}$$

A kapott érték megegyezik a (28.2) információval. Ezt elvártuk, hiszen hasonló mérési eredményeket tárgyaltunk.

A (28.5) definícióval bevezetett információ lépésenkénti megváltozását a Ljapunov-exponenssel jellemezhetjük [28], az információ változása azonban a valószínűségeloszlás lépésenkénti megváltozásából származik. Ha egy ergodikusan leképezéshez a  $\bar{P}(x) \equiv 1$  aszimptotikus eloszlás tartozik\*, akkor az egyes iterációs lépések után mért valószínűségi sűrűség függvények soro-

\* A 26. fejezetben az aszimptotikus valószínűségi sűrűséget  $P(x)$ -szel jelöltük.



zata  $\bar{P}(x)$ -hez tart. A Ljapunov-exponens tehát a valószínűség-sűrűségeknek az "egyensúlyi"  $\bar{P}(x)$  eloszláshoz történő relaxációját jellemzi.

Az  $f_H(x)$  háromszög leképezéshez tartozó aszimptotikus valószínűségeloszlás  $\bar{P}(x) = P_H(x) \equiv 1$ , ezért a kezdeti értékek  $P_0(x)$  eloszlásához a

$$H_0 \equiv \int_0^1 P_0(x) \ln P_0(x) dx$$

információt rendelhetjük. Jelölje  $x_t = f_H^{(t)}(x_0)$  valószínűségi sűrűségét  $P_t(x)$ , a  $t$ -edik iterációs lépéshez tartozó információt pedig

$$H_t \equiv \int_0^1 P_t(x) \ln P_t(x) dx .$$

Nagy számú lépés után  $P_t(x) \rightarrow P_H(x)$ , ezért  $H_t \rightarrow 0$ . Az információváltozás egy lépés alatt átlagosan

$$\Lambda_H = -\bar{\lambda}_H / \ln 2 = -1 \text{ bit.}$$

Azt mondhatjuk ezért, hogy a  $P_0(x)$  kezdeti eloszlásban tárolt (28.5) információ a háromszög leképezés esetén átlagosan

$$n = -H_0 / \Lambda_H \equiv (H_0 \ln 2) / \bar{\lambda}_H \quad (28.6)$$

lépés alatt elveszik [28].

Az  $f_H(x)$  háromszög függvényhez konjugált  $g(y) \equiv u(f_H(u^{-1}(y)))$  leképezések esetén a (28.5) integrálban elvégezzük az  $x = u^{-1}(y)$  transzformációt, s felhasználjuk, hogy (27.7) alapján

$$\bar{P}_g(y) = P_H(x) du^{-1}(y) / dy \equiv du^{-1}(y) / dy .$$

így a  $P(y)$  eloszlás információtartalma

$$H = \int_0^1 P(y) \log_2(P(y) / \bar{P}_g(y)) dy . \quad (28.7)$$

A lépésenkénti információváltozás a háromszög leképezés

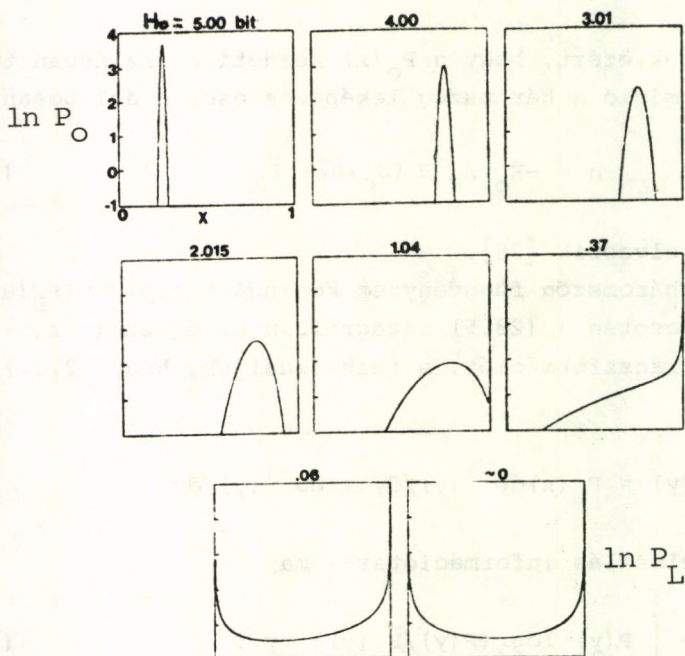
$\bar{\lambda}_H = \ln 2$  Ljapunov-exponensével arányos.

Általában a káoszhoz vezető leképezések esetén azt mondhatjuk, a kezdeti  $P_0$  eloszlás

$$n = H_0 (\ln 2) / \bar{\lambda} \quad (28.8)$$

lépés után lényegesen nem tér el az egyensúlyi  $\bar{P}$  valószínűségi sűrűségtől [28]. Megjegyezzük, hogy a Ljapunov-exponens a relaxáció aszimptotikus szakaszát nem írja le. Ekkor az egymáshoz közeli pontokból indított trajektóriák is annyira eltávolodnak egymástól, hogy az első deriváltakat tartalmazó, lineárisan közelítő (28.4) formula érvényét veszíti. Közelítésünk jól használható, ha a kiindulási eloszlás információtartalma nagy.

Illusztrációképpen [28] nyomán felrajzoljuk a 28.1 ábrán a logisztikus leképezés hatását a  $P_0(x)$  kezdeti eloszlásra, s feltüntetjük az egyes  $P_t(x)$  eloszlásokhoz tartozó  $H_t$  informá-



28.1 ábra. A  $P_0(x)$  éles Gauss-eloszlás relaxációja a logisztikus leképezés  $P_L(x) \equiv 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$  aszimptotikus valószínűségi sűrűségéhez



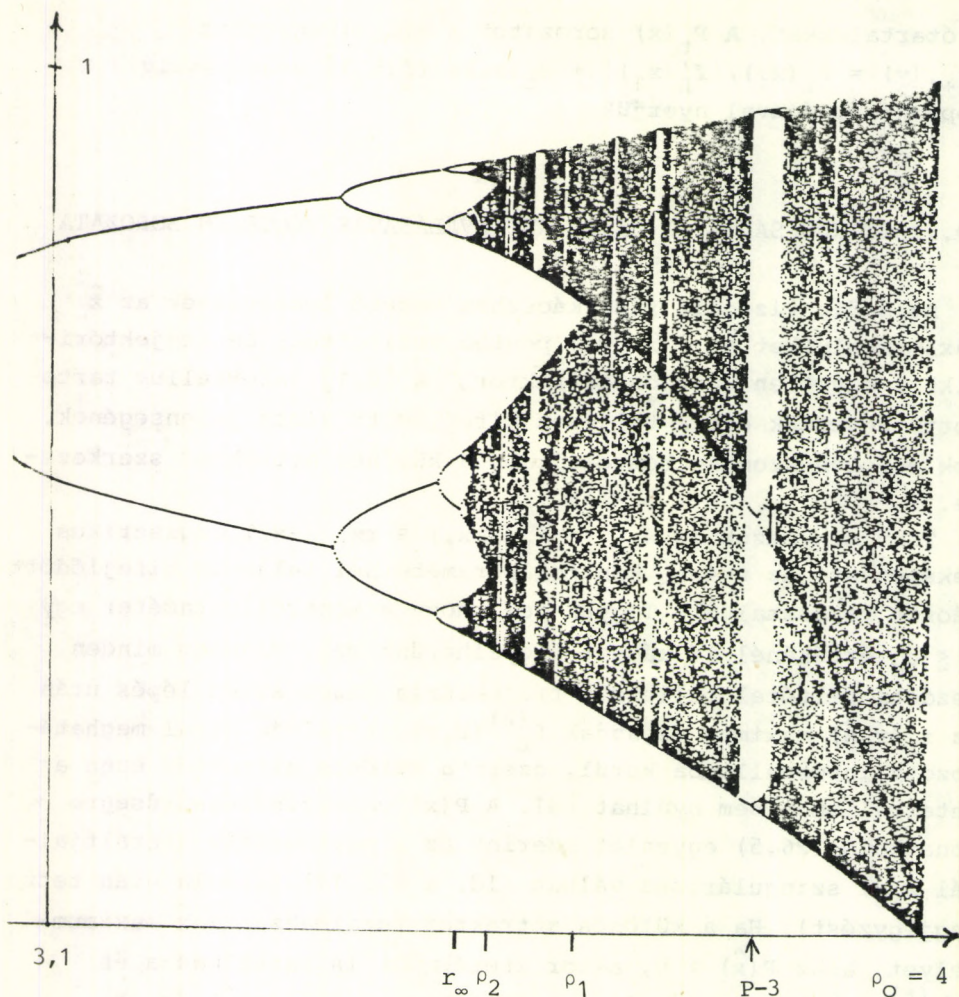
ciótartalmakat. A  $P_t(x)$  sorozatot a (26.5) egyenlet  $P_{t+1}(y) = P_t(x_1)/|f'_L(x_1)| + P_t(x_2)/|f'_L(x_2)|$  szukcessziv approximációjával nyerjük.

## 29. KAOTIKUS SÁVOK. A SÁVOK KETTÉVÁLÁSÁNAK VÉGTELEN SOROZATA

Az eddig vizsgált  $f(x)$  káoszhoz vezető leképezések az  $\hat{x}$  maximumhelyüket az  $f(\hat{x}) = 1$  pontba vetítették, és trajektóriáikhoz egyetlen különös attraktor, a  $[0,1]$  intervallum tartozott. Nevezzük ezt a teljesen kifejlődött káosz jelenségének. Sok esetben azonban bonyolultabb a különös attraktor szerkezete.

Tanulmányozzuk az  $x_{t+1} = f_L(r, x_t) \equiv rx_t(1-x_t)$  logisztikus leképezést! Az  $r=4 \equiv \rho_0$  kontrollparaméternél teljesen kifejlődött káoszt tapasztalunk. Tegyük fel, hogy a kontrollparaméter egy  $r \leq \rho_0$  értékénél is káoszt figyelhetünk meg. Majdnem minden kezdeti feltétel mellett a trajektória véges számú lépés után az  $f_L(r, \hat{x})$  maximum és annak  $f_L^{(2)}(r, \hat{x})$  iteráltja által meghatározott intervallumba kerül, ezért a különös attraktor ezen az intervallumon nem nyúlhat túl. A  $P(x)$  valószínűségi sűrűsége vonatkozó (26.5) egyenlet szerint az  $x$  maximumhely iteráltjainál  $P(x)$  szingulárisává válhat (ld. a (27.11) formula után tett megjegyzést). Ha a különös attraktor tartalmazza az  $\hat{x}$  maximumhelyet, azaz  $P(\hat{x}) > 0$ , akkor iteráltjait is tartalmazza és  $P(f_L^{(t)}(r, \hat{x})) = \infty$ ,  $t=1, 2, \dots$ . Ilyenkor az  $f_L^{(2)}(r, \hat{x})$  és az  $f_L(r, \hat{x})$  pontok a különös attraktor részei és azt alulról ill. felülről határolják. A 29.1 ábrán [38] nyomán bemutatunk olyan trajektóriákat, amelyeket numerikusan generáltak a logisztikus leképezéssel. Rögzített kontrollparaméter mellett nagy számú iterációs lépést végeztek. A trajektória egyetlen pontja alig látható jelet hagyott, ezért az attraktor vagy a különös attraktor eléréséig bejárt tranziensek nem láthatóak. Az  $[r_\infty, 4]$  intervallumban is megfigyelhetünk periodikus attraktorokat - ezekről később lesz szó. Találunk kaotikus tartományokat is, amelyekben a valószínűségi sűrűség szingularitásait környezetükben sötétebb vonalak jelzik. A "legeyző" felső illetve alsó





29.1 ábra. A logisztikus leképezés attraktorai és különböző attraktorai a  $3,1 \leq r \leq 4$  kontrollparaméter tartományban

határát az  $f_L(r, \hat{x}) = r/4$  illetve az  $f_L^{(2)}(r, \hat{x}) = r^2(1-r/4)/4$  görbék írják le. A szinguláris valószínűségi sűrűség  $f^{(t)}(r, \hat{x})$ ,  $t=3,4,\dots$ , görbéi az  $x=0$ ,  $r=4$  pontból indulnak ki. Megfigyelhetjük őket, ha az ábrát jobb alsó sarka felől, éles szögben nézzük.

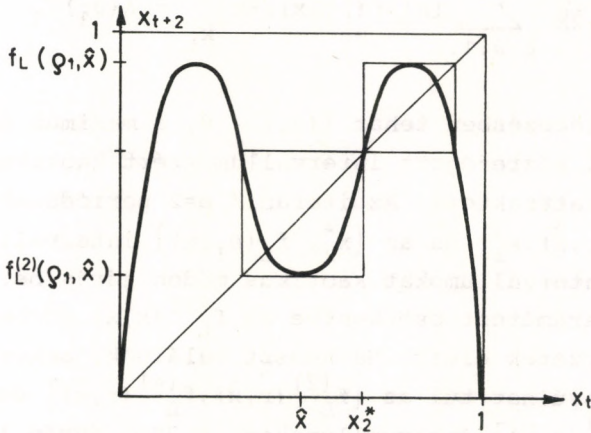
A kontrollparamétert csökkentve az  $r = \rho_1$  értéknél két sáv keletkezik. A jelenségről szemléletes képet alkothatunk [32] és [124] szerint, ha a logisztikus leképezés függvényének má-



sodik iteráltját ábrázoljuk a kontrollparaméter azon  $\rho_1$  értékénél, amelynél

$$f_L^{(2)}(\rho_1, f_L^{(2)}(\rho_1, \hat{x})) = f_L^{(2)}(\rho_1, f_L(\rho_1, \hat{x})) = x_2^* . \quad (29.1)$$

Hasonlóan definiálhatunk  $\rho_0$  és  $\rho_1$  számokat más leképezések esetén is.



29.2 ábra. A logisztikus leképezés  $f_L^{(2)}(\rho_1, x)$  második iteráltja

A négyzetekbeli leképezések kvalitatív hasonlóságot mutatnak a teljesen kifejlődött káoszhoz vezető  $f_L(\rho_0, x)$  leképezéssel. Az  $\hat{x}$  pontot tartalmazó négyzetben a leképezés szimmetrikus, s két intervallumot kétszeresükre nyújt, majd összehatja őket. Nagyítsuk ki a négyzet éleit egységnyi hosszúra, így a  $[0, 1]$  intervallum önmagára való leképezéséhez jutunk. Ha a leképezést a logisztikus függvénnyel közelítjük, akkor a 27. fejezetben elmondottak szerint a minden második iteráltból álló trajektória Ljapunov-exponensének

$$\bar{\lambda} = \ln 2 (= \bar{\lambda}_H) \quad (29.2)$$

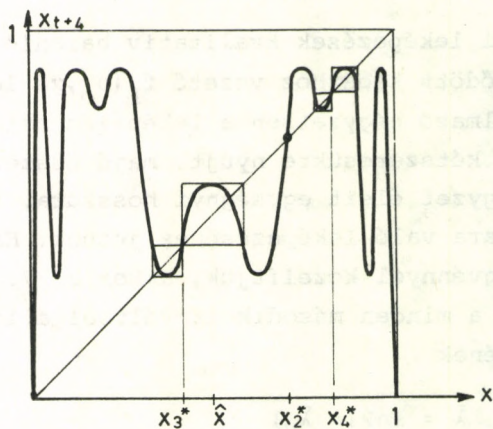
adódik, amennyiben az  $\hat{x}$  körüli intervallumban vizsgáljuk a trajektóriát. A továbbiakban ezzel az - igen jó - közelítéssel élünk a Ljapunov-exponens számításánál. Belátható továbbá, hogy az  $f_L^{(2)}$  leképezést a különböző négyzetekben vizsgálva ugyanazt a

Ljapunov-exponenst kapjuk meg. A teljes trajektória  $\bar{\lambda}(\rho_1)$  Ljapunov-exponense ennek alapján kiszámítható

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\lambda}_H &\equiv \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0,2,\dots}^{2N} \ln \left| \partial f^{(2)}(\rho_1, x) / \partial x \right|_{x_t} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{t=0,1,\dots}^{2N} \ln \left| \partial f(\rho_1, x) / \partial x \right|_{x_t} \equiv \bar{\lambda}(\rho_1) . \end{aligned} \quad (29.3)$$

Az  $f_L(\rho_1, x)$  leképezésben tehát  $\bar{\lambda}(\rho_1) > 0$ , a maximum és első iteráltja által közrefogott intervallum ezért kaotikus trajektóriák különös attraktora. Az iteráció  $p=2$  periódussal oszcillál az  $[f_L^{(2)}(\rho_1, \hat{x}), x_2^*]$  és az  $[x_2^*, f_L(\rho_1, \hat{x})]$  intervallumok között, míg az intervallumokat kaotikus módon járja be.

A kontrollparamétert csökkentve az  $f_L^{(2)}(r, x)$  görbe nem érinti többé a négyzetek éleit. Ha káoszt találunk, akkor a különös attraktor nem nyúlhat túl az  $[f_L^{(2)}(r, \hat{x}), f_L^{(4)}(r, \hat{x})]$  és az  $[f_L^{(3)}(r, \hat{x}), f_L^{(4)}(r, \hat{x})]$  intervallumokon. A 29.1 ábrán láthatjuk, hogy a két sávot e négy görbe határolja. Elérve az  $r=\rho_2$  értéket két-két újabb sáv jelenik meg. A 29.3 ábrán ezt szemléltetjük.



29.3 ábra. Az  $f_L^{(4)}(r, x)$  leképezés a négy sáv keletkezésének  $r=\rho_2$  pontjában



A  $\rho_2$  paraméter értékét például az  $f_L^{(5)}(\rho_2, \hat{x}) = x_4^*$  egyenletből határozhatjuk meg, ahol  $x_4^*$  az instabil  $p=2$  periódusú határciklus két pontja közül a nagyobb. A Ljapunov-exponenst az  $r=\rho_1$  pontban alkalmazotthoz hasonló gondolatmenet alapján számíthatjuk ki:

$$\bar{\lambda}(\rho_2) = \frac{1}{2^2} \ln 2 > 0 .$$

A  $\rho_2$  paraméternél tehát szintén a káosz jelenségével találkozunk. Az  $f_L(\rho_2, x)$  iteráció  $p=2^2$  periódussal oszcillál a 29.3 ábrán felrajzolt négyzetek között, ugyanabba a négyzetbe visszatérve pedig a teljesen kifejlődött káoszra jellemző valószínűségeloszlás szerint választja ki a trajektória pontjait.

A kontrollparamétert tovább csökkentve olyan  $\rho_k$  értékeket érintünk, amelyeknél az  $f_L^{(2^k)}(\rho_k, x)$  leképezésben lokálisan  $2^k$  számú teljesen kifejlődött káoszt figyelhetünk meg. A  $\rho_k$  pontban a  $2^{k-1}$  számú sáv mindegyike kettéválik. A Ljapunov-exponens értéke a  $\rho_k$  kontrollparaméter mellett

$$\bar{\lambda}(\rho_k) = \frac{\ln 2}{2^k} . \quad (29.4)$$

A  $2^k$  számú sáv határait a  $[\rho_{k+1}, \rho_k]$  intervallumban az  $f_L^{(t)}(r, \hat{x})$ ,  $t=1, 2, \dots, 2^{k+1}$  görbék jelölik ki. A sávok között az iteráció  $p=2^k$  periódussal oszcillál. Felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy az  $r < r_\infty$  tartományban a  $p=2^k$  periódusú stabil határciklusok vizsgálatakor a fentihez hasonló konstrukciót követünk (ld. a 17.2-3 ábrákat). Ennek alapján könnyen belátható, hogy a  $2^k$  számú sávot a  $[\rho_k, \rho_{k-1}]$  intervallumban ugyanolyan sorrendben járja be a trajektória, mint amilyen sorrendben a  $2^k$  periódusú stabil határciklus pontjai követik egymást, ha a kontrollparaméter az  $[r_k, r_{k+1}]$  intervallumba esik.

Numerikus számítások [32] és elméleti megfontolások [125] szerint a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = r_\infty$$

határérték megegyezik az  $r_k$  bifurkációs pontok határértékével. A végtelen periódusú határciklus tehát a periodikus mozgás és

a káosz közötti átmeneti állapot.

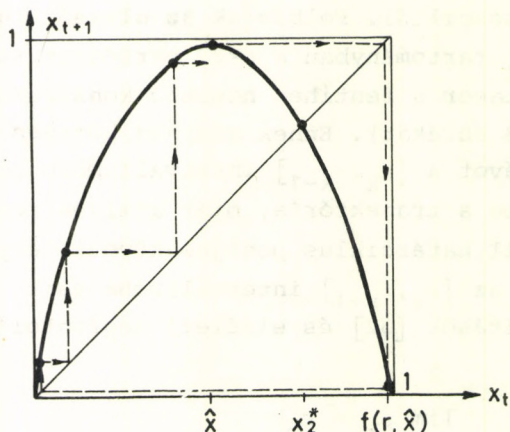
A logisztikus leképezésen kívül sok más egydimenziós rendszer mutat a fentihez hasonló viselkedést. Többek között ilyenek a logisztikushoz konjugált leképezések, mint például a  $g(r, y_t) \equiv r^2 y_t (1 + y_t - 2\sqrt{y_t})$  aszimmetrikus leképezés, ahol  $\sqrt{y_t} = x_t$  a logisztikus leképezés változója.

### 30. PERIODIKUS ÉS KÜLÖNÖS ATTRAKTOROK VÁLTAKOZÁSA

Vezessen a

$$x_{t+1} = rF(x_t) \equiv f(r, x_t)$$

leképezés az  $r=1 \equiv \rho_0$  kontrollparaméter mellett teljesen kifejldött káoszhoz, és legyen  $F(x)$  szimmetrikus az  $\hat{x}=1/2$  pontra nézve, ahol egyetlen maximumát felveszi. Legyen továbbá  $F(x)$  differenciálható, és a deriváltja monoton csökkenjen. Ha  $r = \rho_0$ , akkor a maximum képe  $f^{(t)}(\rho_0, \hat{x}) = 0$ ,  $t=2, 3, \dots$ . Ha viszont  $r \leq \rho_0$ , akkor az  $f^{(t)}(\rho_0, \hat{x})$  sorozat lassan növekvő számokkal kezdődik. Ezt szemléltetjük a 30.1 ábrán. Ha  $\rho_0 - r > 0$  elég ki-

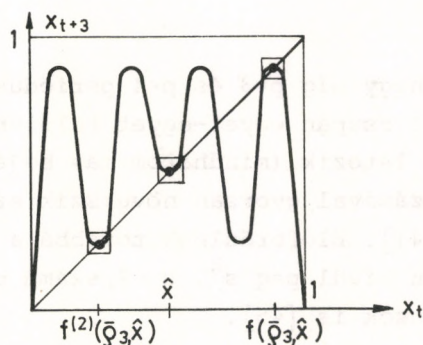


30.1 ábra. A maximum első néhány iteráltja az  $r \leq \rho_0$  kontrollparaméter esetén



csi, akkor az  $x_t$  trajektória  $x_t < \hat{x}$  "lépcsős" szakasza tetszőlegesen sok  $x_t$  pontból állhat. A kontrollparamétert folytonosan csökkentve a lépcső fokai felfelé tolódnak, s számuk az  $r = \bar{\rho}_q$  helyeken való áthaladáskor eggyel csökken, ahol  $f^{(q)}(\bar{\rho}_q, \hat{x}) = \hat{x}$ ,  $q = \dots, 5, 4, 3$ . Mielőtt a kontrollparaméter a  $\rho_1$  értékig csökkenne, ahol (29.1) szerint  $f^{(3)}(\rho_1, \hat{x}) = x_2^* > \hat{x}$  és a lépcsőfokok száma zérus, a  $\dots, \bar{\rho}_q, \bar{\rho}_{q-1}, \dots, \bar{\rho}_3$  pontokban megfigyelhetünk  $\dots, p=q, p=q-1, \dots, p=3$  periódusú határciklusokat. E ciklusokat a  $\bar{\lambda} = -\infty$  Ljapunov-exponens jellemzi, hiszen az  $\hat{x}$  maximumhely a ciklusok mindegyikében részt vesz.

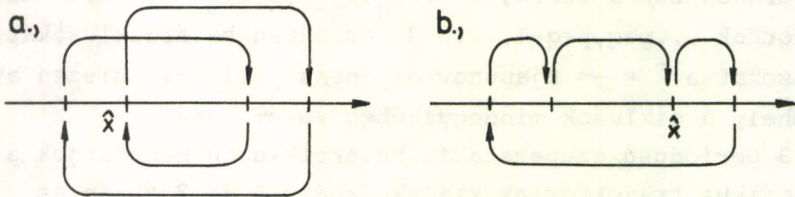
A  $p=3$  periódusú szuperstabil határcikluson bemutatjuk a fenti periodikus trajektóriák kialakulását. A 30.2 ábrán az  $f^{(3)}(\bar{\rho}_3, x)$  leképezés kvalitatív menetét rajzoltuk fel.



30.2 ábra. Az  $f^{(3)}(\bar{\rho}_3, x)$  leképezés és fixpontjai

Az  $r$  növekedése esetén az egyes négyzeteken - amelyek mérete eközben változik - általában megfigyelhetjük a periódus-kettőzések végtelen sorozatát, majd a lokálisan teljesen kifejlődött káosz elérése előtt a káosz "sávszerkezetét", s a sávon belül természetesen újabb stabil periodikus attraktorokat. A hármas határciklust és az azt követő Feigenbaum-szekvenciákat a 29.1 ábrán a P-3 jelnél láthatjuk.

Megjegyezzük, hogy az itt leírt határciklusok nagyság szerint rendezett pontjainak bejárási sorrendje különbözik az  $r_\infty$  alatti határciklusok pontjainak sorrendjétől [30]. Példaképpen összehasonlítjuk az  $r_\infty$  alatti és az afölötti  $p=4$  periódusok pontjainak szekvenciáit.



30.3 ábra. A négyes határciklus pontjainak bejárási sorrendje az a)  $r=r_2$ ; b)  $r=\rho_3$  esetekben

Megemlítjük, hogy míg  $p=3$  és  $p=4$  periódusú stabil határciklust az  $r_\infty$  fölött csupán egyet-egyed találunk, addig három  $p=5$  periódusú ciklus létezik (mindhárom más bejárási sorrenddel), s a periódusok számával gyorsan növekszik az előforduló határciklusok száma [41]. Előfordulnak továbbá a  $p=q2^k$  periódusú stabil ciklusokon kívül  $p=q s^k$ ,  $s > 2$ , számú pontot tartalmazó stabil határciklusok is [45].

Ha az  $[r_\infty, \rho_0]$  tartományban az attraktorok és különös attraktorok 29.1 ábráját kinagyítjuk, az egyes sávokon belül újabb és újabb olyan kontrollparaméter-tartományok válnak láthatóvá, amelyek mellett a trajektóriák határciklushoz tartanak. Felmerül a kérdés, a leképezésre milyen kontrollparaméter-tartományban jellemző a káosz. Bebizonyítható az a tétel, mely szerint az olyan kontrollparaméterek nullánál nagyobb mértékű halmazt képeznek, amelyeknél káoszt figyelhetünk meg, lásd pl. [37].

Kaotikus tartományt érhetünk el az  $r \lesssim \bar{\rho}_q$  paraméter csökkentésével. A káoszba való átmenetnek ez az útja az intermittencia. Az intermittencia jelenségének részletes leírását az Olvasó Gálfi László cikkében találja meg [126].



Az  $r_\infty$  fölötti kontrollparaméter értékeknél a  $[0,1]$  intervallumban végtelen sok, különböző periódusú instabil határciklus, azaz repellor található. Jelenlétük a stabil határciklusokhoz tartó tranzienzseket befolyásolja. A 30.2 ábrán az instabil fixpontok kijelölik azon négyzetek sarkait, amely négyzeteket elérve az iteráció a stabil fixpontok egyikéhez konvergál, és pedig az  $r_\infty$  alatt szokásos módon. Majdnem minden  $x_0$  kezdeti érték esetén a trajektória eléri valamelyik négyzetet. Jelölje az elérési időt  $n(x_0)$ . Az instabil határciklusok jelenléte miatt az  $n(x_0)$  függvény végtelen sok pont környezetében rendelkezik szingularitással és vesz fel véges értéket is.

Ezzel kapcsolatos tételt eddig csak az

$$f_T(x) = \begin{cases} ax & , \text{ ha } 0 \leq x \leq b/a, \\ b & , \text{ ha } b/a \leq x \leq 1-b/c, \\ (1-x)c & , \text{ ha } 1-b/c \leq x \end{cases}$$

trapéz leképezés esetére igazoltak [127]. Jelölje az elérési idők eloszlását  $P_e(n)$ , ha a maximum és a képe által meghatározott  $I \equiv [f_T(b), b]$  intervallumban  $x_0$  eloszlása egyenletes. Az  $I$  intervallumot ekkor tetszőlegesen finoman feloszthatjuk oly módon, hogy ha a kicsiny szakaszok bármelyikében tekintjük  $x_0$  eloszlását egyenletesnek, akkor az elérési idők valószínűségét továbbra is  $P_e(n)$  jellemzi. A végtelen sok repellor hatása tehát abban áll, hogy tetszőlegesen közeli kezdeti értékekből indulva az elérési idők tetszőlegesen nagy mértékben eltérhetnek.

### 31. SKÁLATULAJDONSÁGOK AZ EGYDIMENZIÓS LEKÉPEZÉS KAOTIKUS TARTOMÁNYÁBAN

A kaotikus sávok tanulmányozásakor azt tapasztaltuk, hogy a teljesen kifejlődött káosz a  $\rho_k$  paraméterek sorozatán haladva egyre kisebb hosszskálán, lokálisan újból megfigyelhető. A leképezés maximuma központi szerepet játszik, ezért arra számítottunk, az  $r_\infty$  fölött is találunk univerzális tulajdonságokat.

Mint azt a 29. fejezet végén említettük, a sávok kettéválását jel-

lemző  $\rho_k$  kontrollparaméterek sorozata ugyanahhoz az  $r_\infty$  értékhez tart, amely a bifurkációk  $r_k$  paramétereinek is a határértéke

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = r_\infty \quad (31.1)$$

A végtelen periódusú határciklust jellemző  $r_\infty$  kritikus pont ezért a káosz tartományába való átmenet küszöbértéke. A  $\rho_k$  számok konvergenciáját aszimptotikusan a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_{k-1} - \rho_k}{\rho_k - \rho_{k+1}} = \delta, \quad (31.2)$$

állandó jellemzi, amely megegyezik az  $r < r_\infty$  tartományban az  $r_k$  bifurkációs pontok sorozatát jellemző  $\delta$  számmal [32]. Az  $\rho_k$  sorozat ezért eleget tesz a

$$\rho_k - r_\infty \approx \delta^{-k} \quad (31.3)$$

aszimptotikus arányosságnak.

További vizsgálat azt mutatja, hogy az  $f_L^{(2^k)}(\rho_k, \hat{x})$  leképezésben az  $\hat{x}$  körül teljesen kifejlődött káosz különös attraktorának hossza - a 29.2 ábrán a közepén levő négyzet éle például az  $f_L^2(\rho_2, \hat{x})$  leképezésben megfigyelhető lokális káosz különös attraktorát jelöli ki - exponenciálisan tart zérushoz a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ f_L^{(2^k)}(\rho_k, \hat{x}) - \hat{x} \right] / \left[ \hat{x} - f_L^{(2^{k+1})}(\rho_{k+1}, \hat{x}) \right] = \alpha \quad (31.4)$$

állandó negatív hatványai szerint [128]. Eszerint nem csupán a bifurkációs villák, amelyek skálaviselkedését a 18. fejezetben tárgyaltuk, hanem a kaotikus sávok karakterisztikus skálafaktora is az  $\alpha$  szám. Megjegyezzük, az  $\hat{x}$  hely  $f_L(\rho_k, \hat{x})$  képe körüli lokális káosz hosszskálájának csökkenését az  $\alpha^2$  szám határozza meg, hiszen az  $f_L$  logisztikus leképezés maximuma négyzetes.

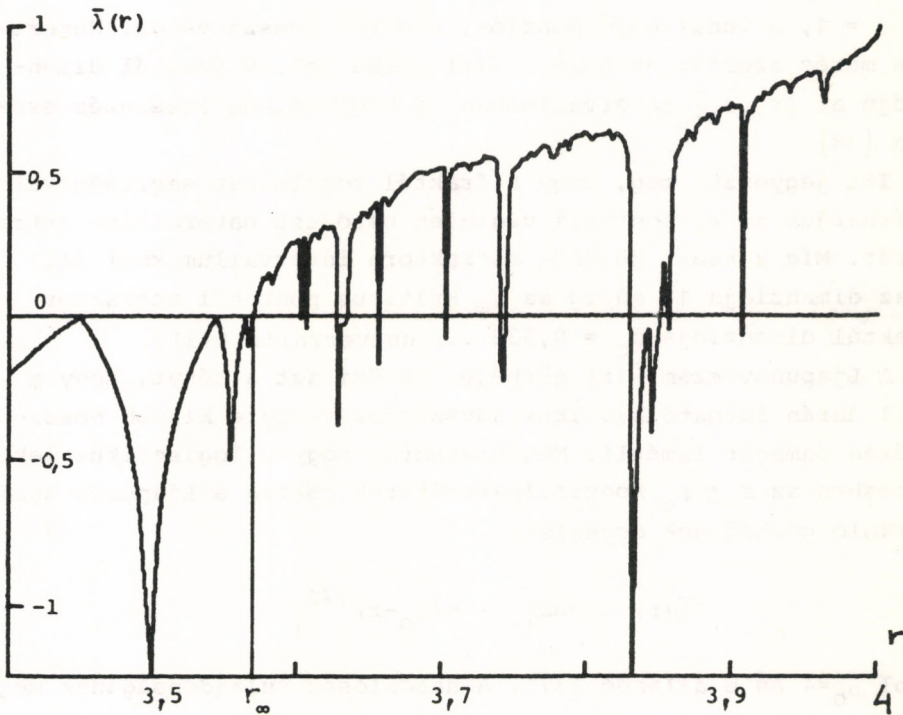
Numerikus vizsgálatok szerint a fenti skálatulajdonságok a kvadratis maximummal rendelkező leképezések osztályán ugyanazokkal a  $\delta$  és  $\alpha$  állandókkal teljesülnek. Az univerzalitás tulajdonságával tehát a káosz tartományában is találkozunk.



A Ljapunov-szám is mutat skálaviselkedést. A sávok kettéválásának  $\rho_k$  pontjában (29.4) szerint  $\bar{\lambda}(\rho_k) = (\ln 2)/2^k$ , ahonnan (31.3) felhasználásával

$$\bar{\lambda}(\rho_k) \propto (\rho_k - r_\infty)^\tau \quad (31.5)$$

adódik [129]. A  $\tau = \ln 2 / \ln \delta$  kritikus exponens megegyezik a Ljapunov-szám  $r_\infty$  alatti (18.11) hatványfüggését jellemző kitevővel. A Ljapunov-számnak a kontrollparamétertől való függését numerikus úton meghatározták, ld. például [38].



31.1 ábra. A Ljapunov-exponens a kontrollparaméter függvényében a logisztikus leképezés esetén

A 31.1 ábra rajza csupán közelítő. A káosz  $r \rightarrow r_\infty$  tartományán belül végtelenül sok olyan intervallumot találunk, amelyekben a trajektóriák stabil határciklushoz tartanak. A periodikus mozgáshoz viszont negatív Ljapunov-szám tartozik, az  $\hat{x}$  maximumhelyet tartalmazó - szuperstabil - határciklusokban pedig  $\bar{\lambda} = -\infty$ . A  $\bar{\lambda}(r)$  görbe tehát végtelenül hosszú. Ha azonban az  $[r_\infty, \rho_0]$  intervallumot  $\Delta r$  hosszú szakaszokra daraboljuk, s minden szakaszhoz a  $\bar{\lambda}(r)$  Ljapunov-számnak a szakaszon fölötti átlagát rendeljük, az így kapott görbe hossza véges lesz. Az ilyen tulajdonságú görbét fraktálnak nevezzük [130]. A  $\bar{\lambda}(r)$  vonal  $\beta$  fraktál dimenziója az az exponens, amely a görbe  $L$  hosszának divergenciáját jellemzi, ha a  $\Delta r$  felbontást finomítjuk

$$L \propto \Delta r^{-(\beta-1)} .$$

Ha  $\beta = 1$ , a vonal egydimenziós, a görbe hossza véges. Numerikus mérés szerint azonban a  $\bar{\lambda}(r)$  görbe  $\beta=1,69$  fraktál dimenziójú az  $[r_\infty, \rho_0]$  intervallumban a logisztikus leképezés esetén [38].

Itt jegyezzük meg, hogy a fraktál fogalmának segítségével leírhatjuk az  $r_\infty$  pontbeli végtelen periódusú határciklus attraktorát. Míg a káosz különös attraktora intervallumokból áll, azaz dimenziója 1, addig az  $r_\infty$  kritikus pontbeli attraktor fraktál dimenziója  $d_c = 0,538\dots$ , univerzális [131].

A Ljapunov-szám  $\bar{\lambda}(r)$  görbéje tükrözi azt a tényt, hogy a 29.1 ábrán látható kaotikus sávszerkezet egyre kisebb hosszskálán önmagát ismétli. Megmutatható, hogy a logisztikus leképezésben az  $r \lesssim \rho_0$  kontrollparaméterek esetén a Ljapunov-szám burkoló görbéjének egyenlete

$$\bar{\lambda}(r) = (\ln 2) \left[ 1 - b(\rho_0 - r)^{1/2} \right] ,$$

ahol  $\rho_0=4$  és  $b$  állandó [37]. A hasonlóság tulajdonságának megnyilvánulása az, hogy a sávok kettéválásának  $\rho_k$  pontja közelében, ha  $r \lesssim \rho_k$ , a Ljapunov-számot a

$$\bar{\lambda}(r) = \bar{\lambda}_0 (\rho_k - r_\infty)^{-1} (1 - b(\rho_k - r)^{1/2})$$



függvénnyel írhatjuk le [38]. Itt felhasználtuk a (31.5) hatványfüggést.

Ha a Ljapunov-exponenst a különböző  $q=3,5,6\dots$  számokkal jellemzhető  $q \cdot 2^k$  periódusú határciklusok és az őket közvetlenül követő káosz tartományában vizsgáljuk, akkor további hasonlóságokat fedezhetünk fel [38].

A Ljapunov-exponens mellett más, vele rokon mennyiségekkel is jellemezhetjük az iterációkat. Ilyen a topológikus entrópia, ami a megkülönböztethető pályák számának exponenciális növekedését méri az iteráció során. Rögzítsük az  $\varepsilon > 0$  számot. Két pályát akkor tekintünk az  $n$ -edik lépésben megkülönböztethetőnek, ha az iteráció megkezdése óta legalább egyszer eltávolodott egymástól a két trajektória  $\varepsilon$ -nál nagyobb távolságra. A megkülönböztethető pályák  $N(n, \varepsilon)$  maximális száma általában növekszik, ha az iterációs lépések száma nő. A topológikus entrópiát a

$$h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 N(\varepsilon, n)$$

határértékkel definiáljuk. Igen szemléletes a topológikus entrópia és a leképezés instabil határciklusainak száma közötti

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \left[ f^{(n)}(x) \text{ fixpontjainak száma} \right]$$

összefüggés. A kaotikus állapotok között megfigyelhető stabil határciklusok tartományában is végtelenül sok instabil ciklus van jelen. Általában azt várjuk, hogy itt a topológikus entrópia zérusnál nagyobb. (Ez egyes speciális leképezéseknél bebizonyítható, lásd pl. [127].) Míg ilyenkor a Ljapunov-exponens negatív, azaz az aszimptotikus viselkedést a periodikus attraktorral jellemezhetjük, a trajektória teljes menetét végig követve általában azt találjuk, hogy a megkülönböztethető pályák száma exponenciálisan nő. Ez a tény szoros összefüggésben áll a tranziensek irreguláris viselkedésével, amelyet a 30. fejezetben tárgyaltunk.

Megemlítjük, hogy a Ljapunov-exponens a káosz tartományában általában megegyezik az ún. Kolmogorov-entrópiával. A to-

pológikus és Kolmogorov-entrópia szigorú matematikai definícióját Szász Domokos cikkében [20] találja meg az olvasó.

A kaotikus trajektóriák Fourier-spektrumának skálatulajdonosságait fogjuk az alábbiakban megvizsgálni. A 29. fejezetben megállapítottuk, hogy a  $\rho_k$  kontrollparaméter értékeknél az  $x_{t+1} = f_L(\rho_k, x_t)$  iteráció a különös attraktoron  $2^k$  periódusidő alatt bejárja az összes lokálisan kaotikus tartományt, és pedíg meghatározott sorrendben. Az azonban véletlenszerű, hogy a lokálisan kaotikus tartományok melyik pontját választja ki a trajektória. Ezek alapján azt várjuk, hogy a Fourier-spektrum tartalmazzon periodicitást tükröző csúcsokat és arra ráépülve egy, a frekvenciától folytonos módon függő zajt is. A káoszra jellemző zaj a dinamikai rendszer belső zaja, nem pedig sok külső szabadsági fok együttes hatásának tulajdonítható, mint például a termikus zaj. A belső zajt az iteráció meghatározza, ezért szokták determinisztikus zajnak is nevezni. A determinisztikus zajnak valamilyen módon tükröznie kell a kaotikus sávok önmagukat egyre kisebb hosszskálán ismétlő szerkezetét.

Tekintsük a káosz tartományában a

$$C_\tau \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{\infty} x_t x_{t+\tau} = \int_0^1 x f^{(\tau)}(x) P(x) dx \quad (31.6)$$

autokorrelációs függvényt, ahol az  $x_{t+1} = f(x_t)$  leképezés  $P(x)$  valószínűségeloszlással jellemezhető trajektóriákat generál a  $[0, 1]$  szakaszon. Az autokorreláció bevezetése azért célszerű, mert a felhasználásával a spektrumot is felírhatjuk a valószínűségi mérték szerinti integrálként. Definiáljuk a trajektória Fourier-transzformáltját ezúttal az

$$x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^N x_t e^{-i\omega t} \quad (31.7)$$

kifejezéssel! Belátható, hogy a Fourier-amplitúdók előállnak az

$$|x(\omega)|^2 = C_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} C_\tau \cos \tau \omega \quad (31.8)$$

alakban. Vezessük be az  $|x(\omega)|^2 \equiv C(\omega)$  jelölést, és nevezzük



ezután ezt a függvényt frekvencia spektrumnak!

A teljesen kifejlődött káosz jelenségét mutató  $f_H(x)$  háromszög leképezéshez, amelyet (26.1) definiál, az egyszerűen kiszámítható

$$C_{\tau}^H = \int_0^1 x f_H^{(\tau)}(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f_H^{(\tau)}(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f_H^{(\tau)}(x) dx = \begin{cases} 1/3, & \text{ha } \tau = 0 \\ 1/4, & \text{ha } \tau = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (31.9)$$

autokorrelációs függvény tartozik [32]. Felhasználtuk, hogy az  $f_H^{(\tau)}(x)$  függvény az  $x=1/2$  pontra szimmetrikus, ha  $\tau \geq 1$ , és azt, hogy a második egyenlőség utáni első integrál ekkor eltűnik. Innen a frekvencia spektrum azonnal adódik

$$C(\omega) = 1/3 + 1/2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \cos \omega \tau = 1/12 + \pi \left[ \delta(\omega) + \delta(\omega - 2\pi) \right] / 2,$$

ha azt engedjük meg, hogy  $\omega$  a  $[0, 2\pi]$  intervallumban változzon. Látható, hogy a spektrumban a determinisztikus zaj konstans vonal alakjában jelenik meg, a zaj tehát "fehér".

A háromszög leképezéshez konjugált rendszerekben a zajspektrum általában nem független a frekvenciától, de továbbra is lassan változó, sima függvény. Hasonló a zaj spektruma más leképezéseknél is.

A sávok kettéválásának  $\rho_k$  paramétere mellett az  $f(\rho_k, x_t) = x_{t+1}$  trajektóriát érdemes az  $n$ -edik periódusban az

$$x_t = y_i + z(n, i)$$

alakban írni, ahol  $t = n2^k + i$ ,  $i=0, 1, \dots, 2^k - 1$  és az  $y_i$  pontok a kaotikus sávok közepét jelölik ki, a  $z(n, i)$  változó pedig az egyes sávokon belüli véletlenszerű mozgást írja le. A tranziensztől eltekintettünk. A számítás menete nélkül közöljük, hogy az  $y_i$  pontokon történő periodikus mozgásra a spektrum  $\omega = 2\pi k / 2^k$  frekvenciáinál szinguláris csúcsok utalnak, míg a kaotikus viselkedést egy, a frekvenciában folytonos függvény jellemzi. A zajspektrum amplitúdóját megbecsülhetjük, ha meggondoljuk, a  $z(n, i)$  változó szórása az egyes lokális kaotikus

tartományok szélességével arányos. A determinisztikus zaj szórása ezért közelítőleg arányos azon szakaszok hosszainak átlagával, amelyeket az  $f^{(2^k)}(\rho_k, x)$  függvény önmagukra képez le, s amelyekben lokálisan teljesen kifejlődött káoszt találunk. A 29.2 ábrán például a keresett átlag a négyzetek élhosszainak átlaga. Azt tudjuk, hogy az  $\hat{x}$  maximumhelyet is tartalmazó "kaotikus négyzet" oldala a  $\rho_k \rightarrow r_\infty$  határátmenet során az  $\alpha$  számmal skálázódik, míg az  $f(\rho_k, \hat{x})$  pontot tartalmazó négyzet élhossza az  $\alpha^2$  kitevővel tart zérushoz. A zajspektrumot a  $\rho_k$  pontban durván a  $\sigma^2(k)$  frekvencia-független szórásnégyzettel közelítve, s föltéve, a négyzetek fele  $\alpha$ -val, másik fele  $\alpha^2$ -tel skálázódik, a

$$\frac{\sigma(k)}{\sigma(k+1)} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) = \beta = 3,58\dots$$

aszimptotikus kifejezést kapjuk, ahonnan a zajspektrum

$$N(k) \equiv \sigma^2(k) \propto \beta^{2k}.$$

Felhasználva, hogy  $\rho_k - r_\infty \propto \delta^{-k}$ , az

$$N(\rho_k) \propto (\rho_k - r_\infty)^{2 \ln \beta / \ln \delta}$$

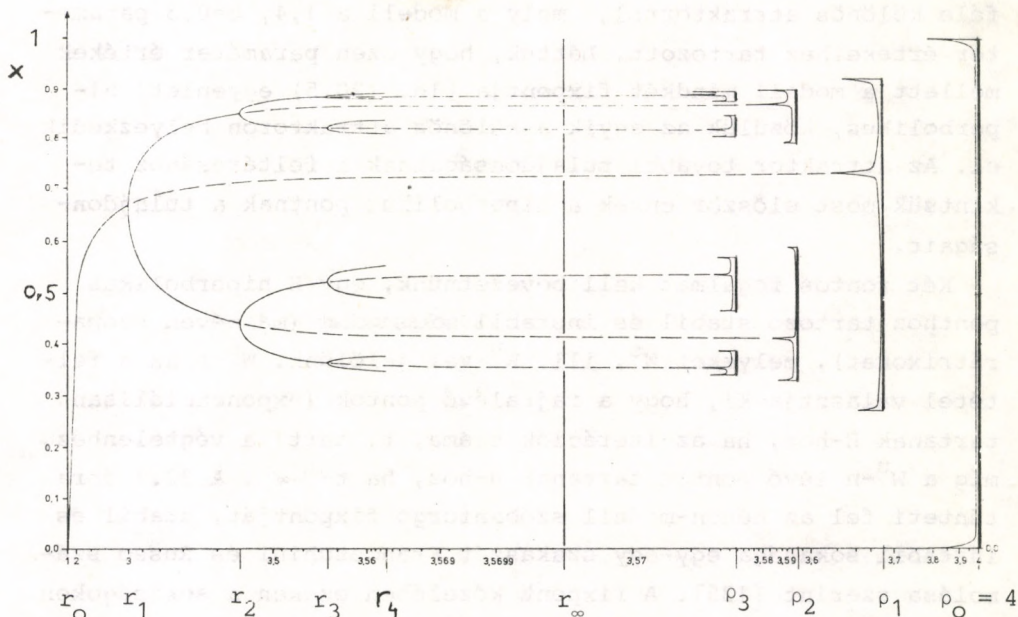
hatványfüggvényt kapjuk [132]. Numerikus vizsgálatok szerint  $\beta = 3,237\dots$  [133], becslésünk hibája tehát  $\sim 10\%$ . Pontosabb számítás a  $\beta = \alpha^2 \sqrt{2} / (\alpha^2 + 1)^{1/2} = 3,28$  exponenst adja [134].

A mozgás kváziperiodikus jellegére utaló csúcsok száma a  $\rho_k \rightarrow r_\infty$  határátmenet során megnő, a spektrum alharmonikusokkal bővül. Az aszimptotikus viselkedés megegyezik a határciklusok spektrumainak  $r_\infty$  közelében mutatott viselkedésével, amelyet a 18. fejezetben és az F.4 függelékben írtunk le. A zajos spektrum kvalitatív módon megegyezik más kaotikus rendszerek spektrumával (33.1 ábra).

A káosz tartományában a renormálási transzformáció és az univerzalitás elmélete eddig még olyan intuitív módon sincs megalapozva, mint a Feigenbaum-szekvenciák elmélete. Ennek ellenére azt hisszük, a skálatulajdonságokat jellemző exponensek az azonos rendű maximummal rendelkező leképezések osztályán univerzálisak. Ezt a numerikus számítások is alátámasztják.



Az egydimenziós leképezések tulajdonságait a 15-19. és a 26-31. fejezetekben tekintettük át. Összefoglalásul a 31.2 ábrán a Feigenbaum-szekvenciákat és tükörképüket, a sávok kettéválásának végtelen sorozatát szemléltetjük [32].



31.2 ábra. Az  $f_L(r, x) = rx(1-x)$  logisztikus leképezés attraktora az  $r_0 \leq r \leq r_4$  paraméterek mellett és a különös attraktor a  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  pontokban. A vízszintes tengely beosztása nem lineáris, az  $r' = \sqrt[5]{\text{th}(r-r_\infty)}$  mennyiséget mérjük fel rá.

Feltűntettünk néhány bifurkációt, és ábrázoltuk az alacsony periódusú instabil határciklusokat is. Az instabil határciklusok pontjai a 29.1 ábrán bemutatott sávok kettéválásának helyeit jelölik ki. Felrajzoltuk a  $\rho_k$  paramétereknél a különös attraktorhoz tartozó valószínűségi sűrűséget. A valószínűség az  $\hat{x}=1/2$  maximumhely iteráltjainál szinguláris. Jól látható, hogy a valószínűségi sűrűség - egyre kisebb hosszskálán - a szingularitásai határolta intervallumokon kvalitatív hasonlóságot mutat a  $\rho_0 = 4$  paraméter melletti valószínűségi sűrűséggel.

A huszadik fejezetben már több szempontból elemeztük a két-dimenziós leképezések egyik legfontosabb képviselőjét, az Hénon-modellt [(20.3) egyenlet]. Szó volt a standard Hénon-féle különös attraktorról, mely a modell  $a=1,4$ ,  $b=0,3$  paraméter értékeihez tartozott. Láttuk, hogy ezen paraméter értékek mellett a modell mindkét fixpontja [ld. (20.5) egyenlet] hiperbolikus, közülük az egyik a különös attraktoron helyezkedik el. Az attraktor további tulajdonságainak a feltárásához tekintsük most először ennek a hiperbolikus pontnak a tulajdonságait.

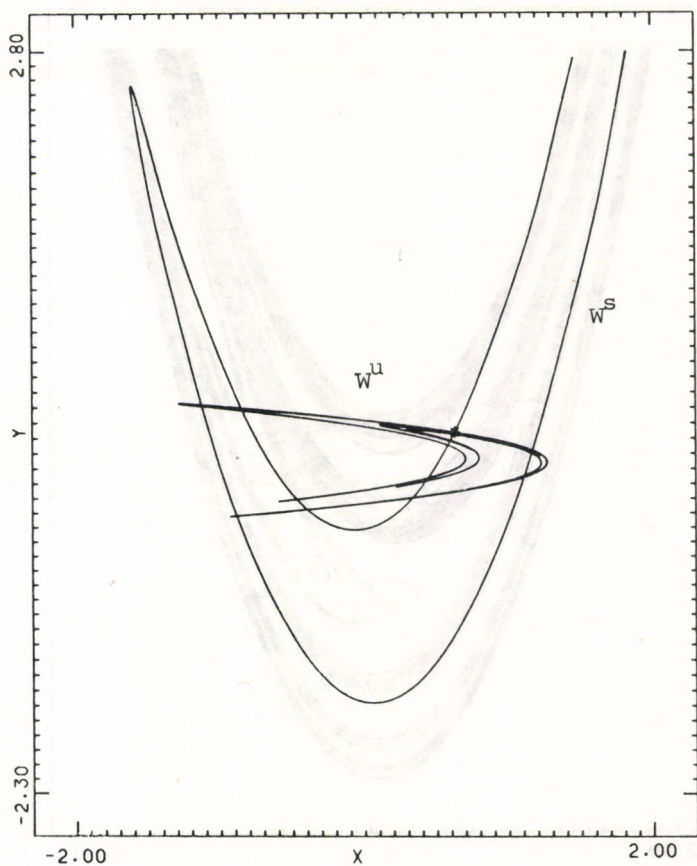
Két fontos fogalmat kell bevezetnünk, egy  $H$  hiperbolikus ponthoz tartozó stabil és instabil sokaságokat (másnéven szeparátrixokat), melyeket  $W^S$ , ill.  $W^U$ -val jelölünk.  $W^S$ -t az a feltevés választja ki, hogy a rajtalévő pontok (exponenciálisan) tartanak  $H$ -hoz, ha az iterációk száma,  $t$ , tart a végtelenhez, míg a  $W^U$ -n lévő pontok tartanak  $H$ -hoz, ha  $t \rightarrow -\infty$ . A 32.1 ábra tünteti fel az Hénon-modell szóbanforgó fixpontját, stabil és instabil sokasága egy-egy szakaszát Franceschini és Russo számolása szerint [135]. A fixpont közelében ezeken a sokaságokon a pontok mozgásának az ütemét a fixpont körüli linearizált leképezés, (20.15) alatt adott, sajátértékei adják meg; a befutás, illetve kifutás irányát pedig a megfelelő sajátvektorok (ld. (20.16)). Az iterációt tovább folytatva az instabil sokaságok menetét a 32.2 ábrán láthatjuk [135].

Szembeszökő az instabil sokaság hasonlósága a 20.1 ábrán látható különös attraktorhoz. Valóban, a különös attraktor a  $W^U$  halmaz lezártjával esik egybe. Hasonló következtetésre jutott Holmes [3] a Duffing-oszcillátor esetében, mellyel korábban (5. fejezet) részletesen foglalkoztunk. A kétdimenziós leképezés nemlineáris tagja itt harmadrendű.

A hiperbolikus fixpont stabil és instabil sokaságainak metszéspontjai vagy határesetben érintési pontjai az ún. homoklinikus pontok.\* Egy homoklinikus pont az iteráció során nyilván csak egy másik homoklinikus pontba képződhet le, hiszen a két

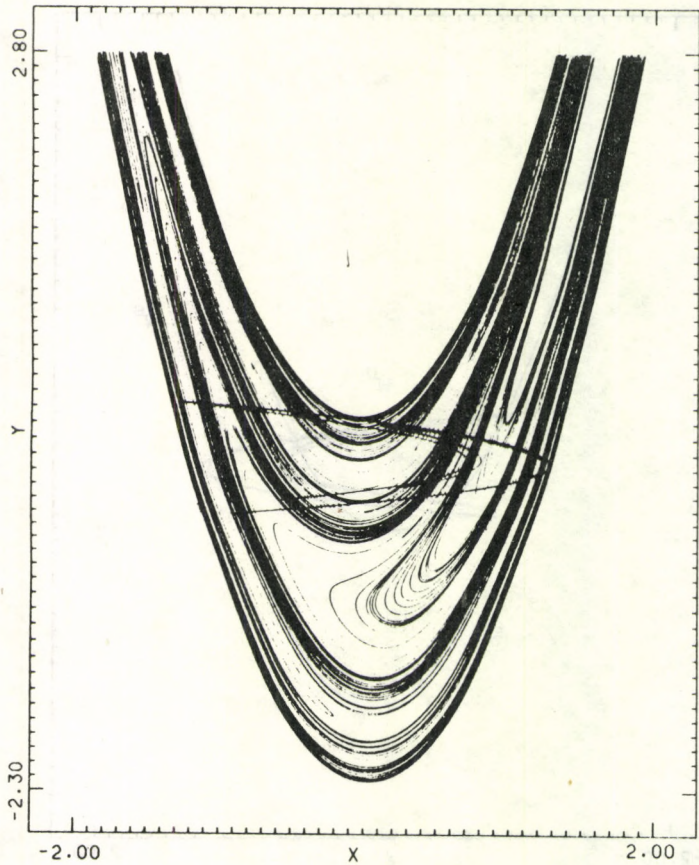
\* Transzverzális homoklinikus pontról beszélünk, ha ténylegesen metszésről van szó.





32.1 ábra. Az Hénon-modell fixpontjának invariáns sokaságai - vázlatos kép az  $a=1,4$ ,  $b=0,3$  paraméter értékeknél

invariáns sokaság közös pontja. Homoklinikus pontok sorozata homoklinikus pályát képez, mely kétszeresen aszimptotikus a  $H$  fixponthoz, azaz  $t \rightarrow \pm\infty$  esetén egyaránt ahhoz tart. A homokli-



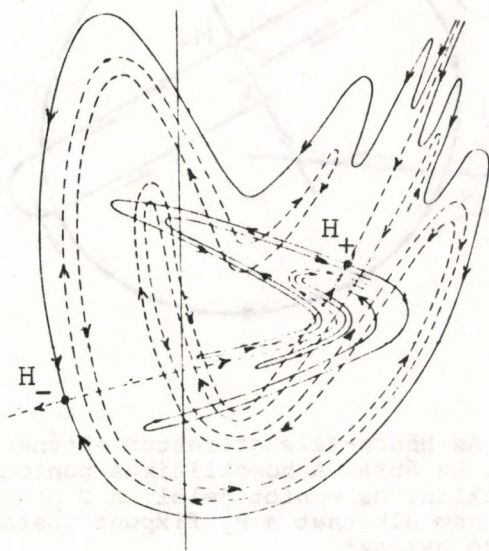
32.2 ábra. Az Hénon-modell fixpontjának invariáns sokaságai - részletes kép az  $a=1,4$ ,  $b=0,3$  paraméter értékeknél

nikus pontok létezése fontos szerepet játszik abban, hogy a  $W^u$  instabil sokaság attraktorrá válhat, hiszen visszatáplálási mechanizmust biztosít azon pontok számára, melyek a  $H$  kö-



zelében,  $W^u$  irányában exponenciális gyorsasággal eltávolodnak. A homoklinikus pontok további szerepére még visszatérünk.

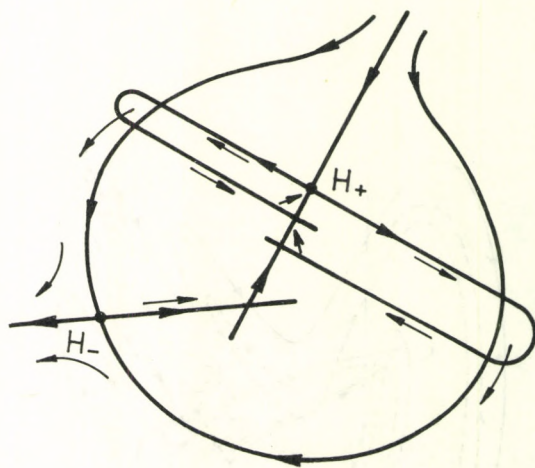
Most kövessük az attraktor sorsát Simo nyomán [136], ha az a paramétert változtatjuk miközben a b paramétert, vagyis a terület összehúzódság ütemét jellemző Jacobi-determináns értékét, rögzítetten tartjuk (a határozottság kedvéért legyen továbbra is  $b=0,3$ ). A 20. fejezetben már említettük, hogy a-t növelve  $a_c = 1,4269212$ -nél [136] a különös attraktor eltűnik és egyéb újabb attraktor sem alakul ki a rendszerben. Ennek megértéséhez először tekintsük a 32.3 ábrát, mely az előbbi két ábrához hasonlóan szintén az  $a=1,4$  értékhez tartozik, mutatja



32.3 ábra. Az Hénon-modell fixpontjainak invariáns sokaságai - kvalitatív kép

viszont a másik instabil hiperbolikus fixpont invariáns sokaságait is. (Itt az index a fixpontok megkülönböztetésénél a

(20.5) kifejezésben szereplő négyzetgyök előjelére utal.) Az ábrán folytonos vonal ábrázolja  $H_+$  instabil és  $H_-$  stabil sokaságát, a másik két invariáns sokaságot pedig szaggatott vonalak jelzik [136]. Az attraktor vonzási tartományát a  $H_-$  fixpont stabil sokasága által körülölelt tartomány képezi. Az ezen tartományon kívül indított pontok az iteráció során eljutnak a végtelenbe. Az a paramétert növelve növekszik az attraktor mérete és a  $a > a_c$  esetén előáll a 32.4 ábrán feltüntetett helyzet, amikor is a  $H_+$  instabil sokasága úgynevezett heteroklinikus pontokban metszi  $H_-$  stabil sokaságát. Nyilvánvaló, hogy



32.4 ábra. Az Hénon-féle attraktor eltűnésének mechanizmusa. Az ábrán A homoklinikus pontot, míg B és C heteroklinikus pontot jelöl. A C pont jelenléte miatt nem alkothat a  $H_+$  fixpont instabil sokasága vonzó halmazt

ekkor  $H_+$  invariáns sokasága nem alkothat attraktort, hiszen a közelében mozgó pontok előbb-utóbb túljutnak  $H_-$  stabil sokasága által határolt tartományon.

Vizsgáljuk most meg, mi történik, ha  $a$ -t csökkentjük az  $a_c$  értékről és tartunk  $a_\infty$ -hez, vagyis a 20. fejezetben megismert periódus-kettőző bifurkációk torlódási pontjához ( $a_\infty = 1,058048$ ,

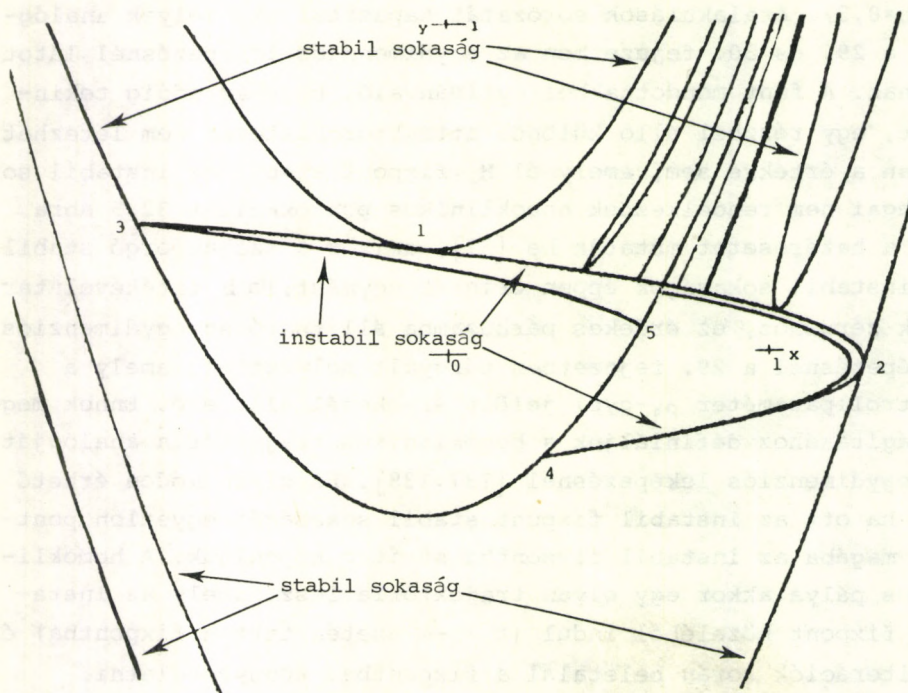


ha  $b=0,3$ ). Átalakulások sorozatát tapasztaljuk, melyek analógjai a 29. és 30. fejezetben az egydimenziós leképezésnél láthatóknak. A fent mondottakból nyilvánvaló, hogy az eddig tekintett, egy részből álló különös attraktor biztosan nem létezhet olyan a értékre sem, amelynél  $H_+$  fixpont stabil és instabil sokaságai nem rendelkeznek homoklinikus pontokkal. A 32.5 ábra azt a határesetet mutatja be [37], amikor a szóbanforgó stabil és instabil sokaságok éppen érintik egymást. Ha  $b$  értékével tartunk zérushoz, ez érdekes párhuzamba állítható az egydimenziós leképezésnél a 29. fejezetben tárgyalt helyzettel, amely a kontrollparaméter  $\rho_1$ -gyel jelölt értékénél állt elő. Ennek megvilágításához definiáljuk a homoklinikus trajektória analógiát az egydimenziós leképezésnél [137,138]. Ez olyan módon érhető el, ha ott az instabil fixpont stabil sokaságát egyetlen pontba, magába az instabil fixpontba sűrítve képzeljük. A homoklinikus pálya akkor egy olyan trajektória lesz, amely az instabil fixpont közeléből indul ( $t \rightarrow -\infty$  esetén tart a fixpontba) és az iterációk során beletalál a fixpontba. Könnyű belátni, hogy ilyen pálya csak akkor létezhet, ha a kontrollparaméter értéke az

$$f^{(3)}(a,0) = x^*, \quad (32.1)$$

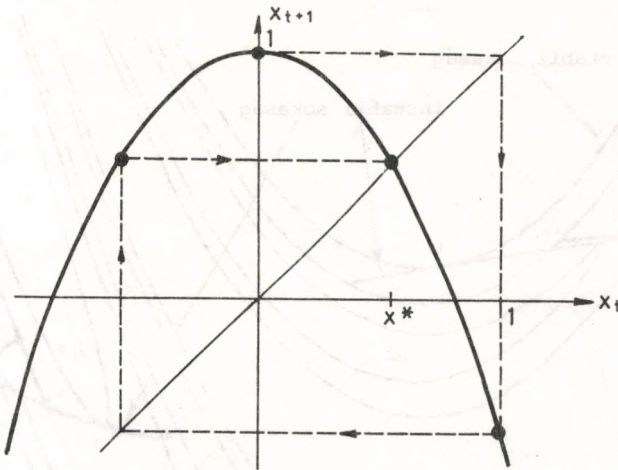
$$f(a,x) \equiv 1-ax^2$$

feltétellel megadott értéknél nagyobb ( $x^*$  jelöli a fixpontot). Vegyük észre, hogy ez a feltétel azonos a (29.1) összefüggéssel (hiszen most  $\hat{x} = 0$ ), mely az egy sáv-két sáv bifurkációs pontot jellemezte. Jelentését a mostani szempontból világosan szemlélteti a 32.6 ábra. Marotto kimutatta [137,138], hogy az egydimenziós leképezésnél ( $b=0$ ) ilyen tulajdonságú pálya létezése biztosítja azt, hogy a megfelelő instabil fixponthoz tartozó homoklinikus pálya létezik a kétdimenziós leképezésben, elegendően kis  $b$  érték esetén. Visszatérve az Hénon-modellre azt várjuk, és számítógépes eredmények is azt mutatják [136], hogy a értékét a 32.6 ábrához tartozó érték alá csökkentve két részből álló különös attraktort találhatunk a bizonyos ér-



32.5 ábra. Az Hénon-modell  $H_+$  fixpontjának stabil és instabil sokaságai az  $a = 1,15357$ ,  $b = 0,3$  paraméter értékeknél. Az 1,2,3,4,5 jelű pontok homoklinikus pontok. Az ábra feltűnteti a koordináta-rendszer kezdőpontját és a koordináta tengelyek egy-egy pontját

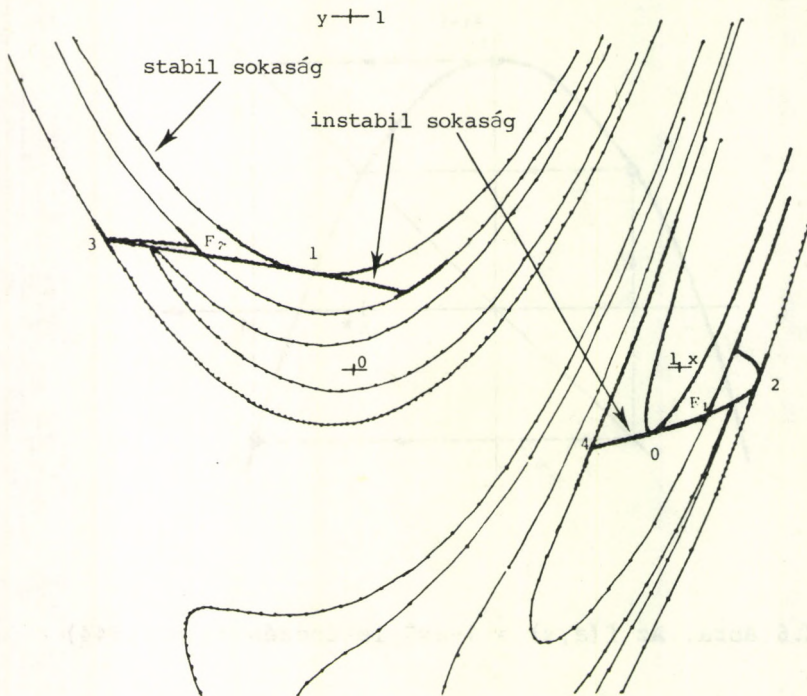




32.6 ábra. Az  $f(a, x) = 1 - ax^2$  leképezés ( $a = 1,544$ )

tékei mellett. Ekkor az eddigi instabil  $H_+$  fixpont szerepét az instabil kettes periódusú pálya pontjai veszik át. A különös attraktort ezen pontok instabil sokaságainak lezárása alkotja. Vonzó halmazzt megint csak akkor várhatunk, ha ezen instabil pontok sokaságai transzverzális homoklinikus pontokkal rendelkeznek. Csökkentve a értékét, elérkezünk a 32.7 ábrán feltüntetett helyzethez [37], amikor a kettes periódusú instabil pálya stabil és instabil sokaságai éppen csak érintik egymást és ezzel megszűnik két részből álló különös attraktor kialakulásának lehetősége.

Eddigi gondolatmenetünket könnyen kiterjeszthetjük és azt várjuk, hogy a különös attraktor az egydimenziós leképezésnél látott kettőződési folyamatot mutatja, ha  $a_\infty$  felé közeledünk. Érdekes megemlíteni, hogy ellenkező irányban haladva mi az a mechanizmus, amely egy adott felépítésű attraktor létezését már



32.7 ábra. Az Hénon-modell kettes periódusú trajektóriájának ( $F_1$  és  $F_2$  pontok) invariáns sokaságai az  $a = 1,085$ ,  $b = 0,3$  paraméter értékeknél. A 0,1,2,3,4 jelű pontok homoklinikus pontok. Az ábra feltünteti a koordinátarendszer kezdőpontját és a koordináta tengelyek egy-egy pontját



nem teszi lehetővé, ha a kontrollparaméter bizonyos értéket meghalad. Pl. a értékét növelve és elérve a 32.6 ábrán fel-  
tüntetett helyzethez, mi szünteti meg a kettes periódusú pálya  
instabil sokaságai vonzó jellegét. Be lehet látni, hogy ennél  
nagyobb a értékeknél ezek az instabil sokaságok heteroklinikus  
pontokkal rendelkeznek a  $H_+$  hiperbolikus pont stabil sokaságá-  
val. Ilyen heteroklinikus pontok létezése hasonló módon okozza  
a két részből álló attraktor eltűnését, mint azt korábban lát-  
tuk a  $c$  felett az egy részből álló attraktorra.

A vonzó periodikus trajektóriák és a különös attraktorok  
váltakozásának részleteiről azonban sokkal kevesebb információ  
áll rendelkezésre, mint az egydimenziós esetben. Alapvető kü-  
lönbség, hogy több különböző attraktor lehet jelen ugyanazon a  
érték mellett különböző vonzási tartományokkal. Jó betekintést  
nyújt erre vontkozólag a Ljapunov-exponens viselkedése az a pa-  
raméter függvényében. A Ljapunov-exponens az Hénon-leképezésre  
a (16.6) összefüggéssel definiált mennyiség kézenfekvő általá-  
nosítása két dimenzióra [79,139,136,140]. Célszerű két Ljapu-  
nov-exponenst bevezetni az alábbi definícióval:

$$\bar{\lambda}_i(x_0, y_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \Lambda_i^{(N)}(x_0, y_0) \right|, \quad i=1,2 \quad (32.2)$$

ahol  $\Lambda_i^{(N)}$ -k jelölik a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X_N(x_0, y_0)}{\partial x_0} & \frac{\partial X_N(x_0, y_0)}{\partial y_0} \\ \frac{\partial Y_N(x_0, y_0)}{\partial x_0} & \frac{\partial Y_N(x_0, y_0)}{\partial y_0} \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

Könnyű belátni, hogy az Hénon-modellre

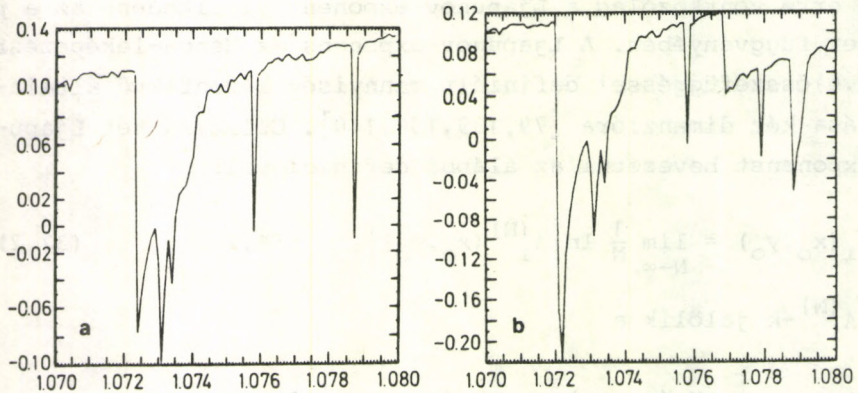
$$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = \ln b. \quad (32.3)$$

Legyen definíciószerűen  $\bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2$ .

Ha a  $\bar{\lambda}_1$  Ljapunov-exponens nagyobb, mint zérus, fennáll a  
kezdőértékre való érzékenység, ami a káosz egyik ismérve. A

(32.3) összefüggésből következik, hogy  $\bar{\lambda}_2$ -nek negatívnak kell lennie. A nyújtásnak és összenyomásnak ezt a kombinációját nevezzük hiperbolicitásnak.

A Ljapunov-exponens viselkedését több szerző is vizsgálta az Hénon-modell esetében [139,136,140]. A 32.8a és b ábrán Curry eredményét [140] mutatjuk be. Az a paraméter az



32.8 ábra. Ljapunov-exponens különböző kezdeti értékekre számolva

$1,07 \leq a \leq 1,08$  intervallumban változik,  $b=0,3$ . A két ábra különböző  $(x_0, y_0)$  kezdőértékekkel számolt Ljapunov-exponenst mutat. Az a) ábrán  $(x_0, y_0) = (0,0)$ , míg a b) ábrán a kezdőpont mindig az előző a értéknél végzett számolás utolsó pontja (az a értéke 0,0001 lépésenként változott). Az  $a = 1,07$  kontrollparaméter értéknél a két görbénél a kezdeti értékek megegyeztek. Az ábrák világosan mutatják a már említett tulajdonságot, hogy egy adott a értéknél több attraktor is előfordul, amelyekhez különböző Ljapunov-exponensek tartoznak. Az Hénon-



modellben a különböző attraktorok előfordulási sorrendje is nagyon eltérhet az egydimenziós leképezésnél látottaktól, ha csak  $b$  értéke nem nagyon kicsi, vagyis nem vagyunk aszimptotikusan közel az egydimenziós esethez. Szembeszökő példa erre, hogy a hármas periódusú attraktor Feit vizsgálatai szerint [139] az  $a = 2,6575$  kontrollparaméter értéknél jelenik meg, mely nagyobb, mint  $a_c$ , ahol az egy részből álló különös attraktor eltűnik.

Térjünk vissza végül az Hénon-modellben megvalósuló különös attraktor természetére. Elfogadtuk a modellben különös attraktoroknak azokat, amelyeket az eddigi pontossággal végzett számítógépes kísérletek azoknak mutatnak. Praktikus szempontból ez kielégítő feltétel lehet, de természetesen felmerül a kérdés, hogy lehet-e ennél többet is tudni. Az egydimenziós leképezéseknél hangsúlyoztuk (ld. 27. fejezet), hogy az ergodicitás az attraktoron a kaotikus viselkedés egyik szükséges feltétele és láttuk, hogy a (29.1), vagy az azzal ekivalens (32.1) összefüggés teljesülése esetén például ez fennáll. Az Hénon-leképezésnél a 32.5 ábrán feltüntetett helyzetben várhatnánk analógia alapján hasonló viselkedést, de nem ismeretes, hogy ez valóban így van-e. Másrészt viszont bizonyított [141], hogy a kontrollparaméter ezen értéke közelében az Hénon-leképezésnek végtelen sok vonzási tartománnyal kell rendelkeznie, azaz különböző kezdeti feltételekből a pontok végtelen sok különböző periodikus pályához fognak tartani. Nem sokkal kedvezőbb a helyzet, ha az Hénon-modell attraktorát az eredetileg vizsgált paraméterértékeknél nézzük ( $a = 1,4$ ;  $b = 0,3$ ). Szigorú értelemben különös attraktorként az csak akkor lenne elfogadható, ha eleget tenne az "Axiom A" attraktor követelményeinek [16,142] (ilyen a szolenoid leképezés [142,20] különös attraktora). A standard Hénon-attraktorról viszont biztosan lehet tudni, hogy nem "Axiom A" attraktor (ld. Ruelle cikkét [79], és az abban levő hivatkozásokat). Ez a követelmény azonban feltehetően nemcsak az Hénon-attraktornál, hanem a gyakorlatilag előforduló esetek túlnyomó többségénél sem teljesül és az attraktorok számos osztályát kell megkülönböztetni az egyszerű attraktorok és a különös Axiom A attraktor között. Sajnos egyelőre nem lehet tudni, hogy az Hénon-modell különösnek



látszó attraktorai ezen a skálán hol helyezkednek el.

Éppen ezért tanulmányozták [137,138,143,135] azt a sokkal szerényebb kérdést, hogy valamilyen kaotikus mozgás bizonyíthatóan létrejön-e a modellben. Ebből a szempontból döntő a transzverzális homoklinikus pontok létezése. A homoklinikus pontoknak a múlt században Poincaré által történt felfedezése óta világos volt, hogy a kvázi-véletlen mozgások kialakulásában meghatározó szerepük van. Elég itt Smale [16] megfordítható és differenciálható leképezésekre (diffeomorfizmusokra) vonatkozó tételére utalnunk, melynek mondanivalója a következőképpen foglalható össze: Jelölje  $T$  a szóbanforgó leképezést és  $T^{(M)}$  a  $T$ -nek  $M$ -szeres alkalmazásával kapott leképezést! Smale tétele kimondja, hogy ha  $T$  rendelkezik egy transzverzális homoklinikus pályával, akkor létezik egy Cantor-halmaz, amelyben  $T^{(M)}$  (valamilyen pozitív egész  $M$ -értékre) topologikusan ekvivalens az eltolási leképezéssel (shift-automorfizmus). A minket érdeklő kétdimenziós esetben az eltolás két szimbólum kétszeresen végtelen sorozatán történik és általánosítása annak a Bernoulli-eltolásnak, amely előfordult a 26. fejezetben a háromszög leképezés kapcsán (ld. még [20]). Mindaz, ami elhangzott a Bernoulli-eltolásnak megfelelő egydimenziós leképezés által generált mozgás véletlenszerűségéről, átvihető a kétdimenziós esetre.

A tétel jelentését megvilágítja, ha idézzük nem-invertálható leképezésekre vonatkozó, Marotttól származó változatát [137,138], melynél gondolhatunk az általunk is részletesen vizsgált egydimenziós leképezésre. Ez kimondja, hogy ha létezik a 32.6 ábra kapcsán diszkutált, a homoklinikus pályával analóg pálya, akkor a leképezés kaotikus a Li és Yorke [144] által megfogalmazott értelemben: létezik végtelen sok különböző periódusú periodikus pálya, a leképezés a kezdőfeltételekre érzékeny függést mutat a kezdőpont párok meg nem számítható halmazára.

Egydimenziós leképezésnél ez a helyzet megvalósul, pl.  $\rho_1$  és  $\rho_0$  közé eső kontrollparaméter értékekre, amikor az instabil fixpont rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. A 30. fejezetben láttuk, hogy ebben a tartományban egyszerű periodikus attraktor is kialakulhat és ilyenkor nullmértékű azon kezdő értékek



halmaza, ahonnan a leképezés kaotikus mozgást generál. A jelenlevő káoszra emlékeztet azonban a periodikus attraktorhoz való közeledés módja (ld. 30. fejezet) és az, hogy a topologikus entrópia nem zérus.

Visszatérve a kétdimenziós leképezés problémájára, megemlítjük, hogy transzverzális homoklinikus pálya létezését Marotto [137,138] bizonyította arra az esetre, ha közel vagyunk az egydimenziós leképezéshez ( $b$  kicsi), míg Franceschini és Russo [135] az  $a = 1,4$ ,  $b = 0,3$  paraméter értékekre, melyekre vonatkoztak Hénon eredeti vizsgálatai.

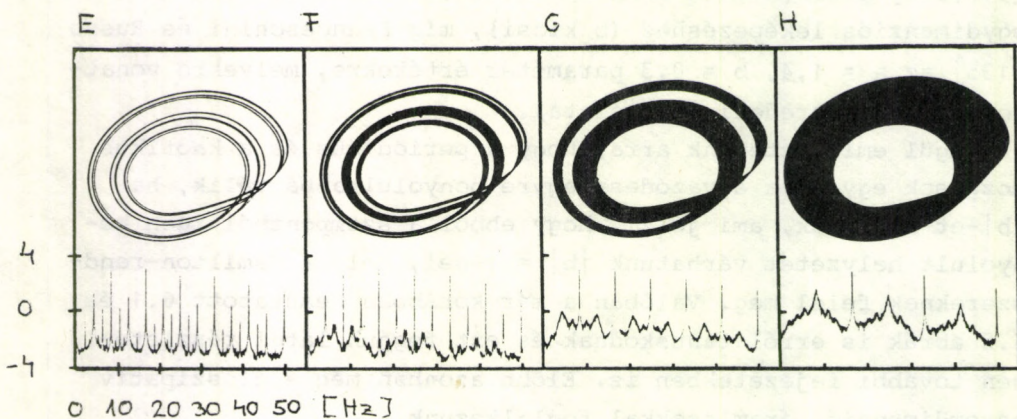
Végül emlékeztetünk arra, hogy a periodikus és a kaotikus mozgások egymásba ágyazódása egyre bonyolultabbá válik, ha  $|b|$ -et növeljük, ami jelzi, hogy ebből a szempontból igen bonyolult helyzetet várhatunk  $|b| = 1$ -nél, mely a Hamilton-rendszereknek felel meg. Valóban a már korábban bemutatott 6.1 és 6.2 ábrák is erről tanuskodnak és ezt fogjuk látni részletesen további fejezetekben is. Előbb azonban még a disszipatív háromdimenziós áramlásokkal foglalkozunk.

### 33. KAOTIKUS VISELKEDÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKKEL LEÍRHATÓ RENDSZEREKBEŰ-SZÁMÍTÓGÉPES ÉS LABORATÓRIUMI KÍSÉRLETEK

Az a tény, hogy az egy-, és kétdimenziós leképezésekben talált viselkedéshez hasonló viselkedés figyelhető meg bizonyos differenciálegyenletek megoldásában, érvényben marad a káosz kialakulása utáni tartományban is.

A síma maximummal rendelkező egydimenziós leképezések vizsgálatakor azt tapasztaltuk, hogy a kontrollparamétert a torló-dási pont fölött tovább növelve a kaotikus sávok páronkénti egyesülése következik be, vagyis a megelőző perióduskettőző bifurkáció-sorozatnak mintegy a tükörképe játszódik le, csak mindez most a különös attraktor szerkezetében bekövetkező változásokra utal. A Rössler-modell viszonylag egyszerű példáján jól tanulmányozható, hogy miként mutatkozik ez meg az állapot-térbeli görbék képen. A 21. fejezetben már volt szó arról, milyen úton jutunk el a káosz kialakulásához a modellben, most a  $c > c_{\infty} \approx 4,20$  tartományban vizsgáljuk a (21.1) egyenlet

megoldásának viselkedését [57]. A numerikus eljárás tanúsága szerint a  $c_\infty$  közelében a pályák egy vékony szalag belsejében futnak,  $c = 4,21$  esetén például a szalag térbeli elhelyezkedése erősen emlékeztet a  $c = 4,18$ -nál fellépő 8T periódusú pálya alakjára (ld. 33.1 ábra). Később a közeli szalag-darabok páron-



33.1 ábra. A (21.1) egyenletrendszer fázisgörbéinek vetülete az  $x$ - $y$  síkon a tranziensek kihalása után a  $c > c_\infty$  tartományban (a 21.1 ábra folytatása). Alattuk  $z(t)$  Fourier-komponenseinek amplitúdója a frekvencia függvényében. Az egyes esetekben a rendparaméter értéke: E: 4,21; f: 4,23; G: 4,30; H: 4,60

ként egyesülnek, s egy négy hurokból álló attraktor jön létre. Ez a helyzet  $c = 4,23$ -nál. A  $c = 4,30$  érték elérésére már következik egy újabb összeolvadás, két hurkot ír csak le az attraktor, s végül  $c = 4,6$ -re már egyetlen, széles, szalagszerű képződmény alakul ki.

Érdeemes megfigyelni, mi történik eközben a Fourier-spektrummal.  $c_\infty$  közelében a szalag még nagyon vékony, ezért a spektrum alig különbözik a megfelelő periodikus mozgástól, noha itt már kaotikus viselkedés tapasztalható, hiszen a Ljapu-



nov-exponens pozitív (egyelőre azonban még kis szám). A  $c=4,21$  értéknél például az átlagos körbefutási idő még jó közelítéssel  $8T$ , ezért a spektrumban az  $f/8$ ,  $f/4$ ,  $f/2$  és  $f$  frekvenciáknál, és felharmonikusainál éles csúcsok találhatóak. Az egész spektrum nagyon hasonlít a 21.1D ábrán látottra, mindössze a csúcsok közötti tartományok tűnnek kicsik zajosabbnak. Az összeolvadás után az átlagos körbefutási idő  $4T$  körüli érték lesz, ezért eltűnik az  $f/8$  alapprofrekvencia. A két hurkot tartalmazó attraktor kialakulásakor az  $f/4$  csúcs is megszűnik, s mivel a szalag egyre szélesebb, a közbenső tartományok egyre zajosabbá válnak. A legszabálytalanabb spektrum a "teljesen kitöltött" attraktorhoz tartozik. Említésre méltó, hogy a Rössler-modellben - s ez nem tipikus - megmarad az  $f$  alapprofrekvenciához tartozó csúcs. Ez az attraktor egyszerű topológiai szerkezetével kapcsolatos: minden trajektória körbejárja a középen lévő viszonylag nagy méretű lyukat. Összetettebb attraktorok esetén ez a tulajdonság nem marad meg.

A Rössler-modellben sikerült meghatározni a Ljapunov-exponenseket is [95]. A  $c = 5,7$  kontrollparaméter érték mellett például  $\bar{\lambda}_1 = 0,075$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 = -5,372$ .

Másik példaként tekintsük - a korábban már tanulmányozott - Lorenz-modellt, most azonban induljunk a kontrollparaméter nagy értékeitől. A nagy  $r$ -ekre érvényes viselkedés leírása érdekében más alakba írjuk a (22.3) egyenleteket. Vegyük észre, hogy az  $Y$  mennyiséget formálisan kiejthetjük a rendszerből, ha  $X$ -re másodrendű egyenletet írunk föl, s  $Z$  helyett a  $Z-X^2/(2\sigma)$  változót használjuk [80-82]: az

$$\begin{aligned} \ddot{X} + (\sigma + 1)\dot{X} &= \sigma(r - 1)X - \sigma XZ, \\ \sigma\dot{Z} - \dot{X}X &= -\sigma bZ + \sigma X^2 \end{aligned} \quad (33.1)$$

rendszer egyenértékű (22.3)-mal. Még szemléletesebb alakhoz jutunk [145,21], ha az

$$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\sigma}} X, \quad q = \frac{\varepsilon^2}{\sigma} (\sigma Z - X^2/2), \quad \tau = \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} t, \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{r-1} \quad (33.2)$$

összefüggéseknek megfelelően új változókat vezetünk be. Ekkor (33.1)-ből az

$$\ddot{x} + \epsilon h \dot{x} + x^3 + (q-1)x = 0, \quad (33.3a)$$

$$\dot{q} = -\epsilon \alpha q + \epsilon \beta x^2 \quad (33.3b)$$

egyenleteket kapjuk, ahol

$$h = \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma}}, \quad \alpha = \frac{b}{\sqrt{\sigma}}, \quad \beta = \frac{2\sigma-b}{\sqrt{\sigma}} \quad (33.4)$$

és a pont a  $\tau$  változó szerinti deriváltat jelöli. A (33.3) egyenletrendszernek egyszerű mechanikai jelentése van: olyan súrlódásos anharmonikus oszcillátort ír le, melynek sajátfrekvenciája nem állandó, változása mértékét saját pillanatnyi értéke és a kitérés pillanatnyi értéke határozza meg a (33.3b) egyenlet szerint.

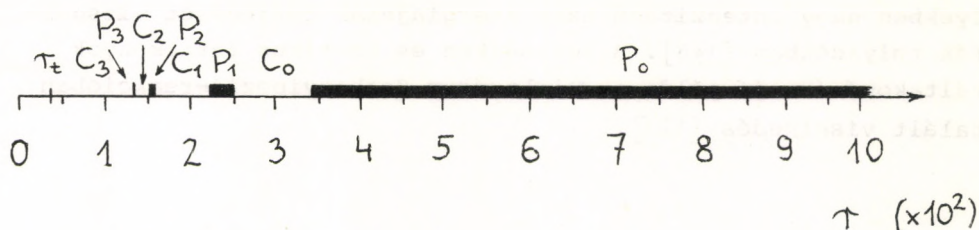
Ennek ismeretében könnyen vizsgálható az  $r \rightarrow \infty$  határátmenet, ami az új jelölések szerint  $\epsilon \rightarrow 0$ -nak felel meg. Ekkor ugyanis  $q$ =állandó, s (33.3a) olyan csillapításmentes mozgásnak felel meg, melyet az egységnyi tömegű pont a

$$V(x) = \frac{q-1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \quad (33.5)$$

egydimenziós potenciálban végez. Mivel ez szigorúan periodikus mozgás, eredményünk azt jelenti, hogy  $r \rightarrow \infty$  esetén a Lorenz-modellben határciklus-megoldás alakul ki.

Arra vonatkozóan, hogy mi történik  $r$  csökkentésekor, számítógépes módszerekre vagyunk utalva. Ezek azt mutatják, hogy például az  $b = 1$ ,  $\sigma = 5$  értékekre [85] perióduskettőző bifurkációk sorozata után áll be kaotikus viselkedés. A kontrollparaméter további csökkentésekor - az egydimenziós leképezések esetén tapasztaltakhoz hasonlóan - periodikus és kaotikus tartományok váltogatják egymást. A  $b = 16$ ,  $\sigma = 4$  esetben például - adott numerikus pontosság mellett - három periodikus ablakot sikerült megfigyelni az inverz Hopf-bifurkációs pont ( $r_t$ ) eléréséig [80,81].





33.2 ábra. Periodikus (P) és kaotikus (C) tartományok a Lorenz-modellben ( $b = 16$ ,  $\sigma = 4$ )

Periodikus sávok megfigyelhetők a Lorenz-modell szokásos értékeinél ( $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ ) is. Egy viszonylag nagy  $r$  értékekhez tartozó található a  $292,06 < r < 295,45$  tartományban [89]. Az alsó határhoz közeledve,  $293,27$ -től, perióduskettőző bifurkációk sorozatával alakul ki a káosz. A  $\delta$  exponensre kapott érték jól egyezik a Feigenbaum-félével [89]. Egy másik alaposan tanulmányozott periodikus ablak a  $145$  és  $166,07$  között lévő [90], mely alulról a standard Lorenz-attraktor tartományával érintkezik. Az  $r = 148,4$  értéktől csökkentve a rendparamétert itt is perióduskettőző bifurkáció-sorozat lép föl.  $166,07$  fölött a kaotikus viselkedés úgy jelenik meg, hogy a periodikus megoldást eleinte csak ritkán és rövid időre szakítják meg kaotikus szakaszok, majd a kontrollparaméter növelésekor egyre inkább a kaotikus jelleg válik egyeduralgolóvá. Ez a jelenség az intermittencia [126].

Említésre kívánkozik, hogy intenzíven vizsgálták a Lorenz-modell statisztikus tulajdonságait [86,87,92], s tanulmányozták a külső zaj hatását is [94].

Ami a laboratóriumi kísérleteket illeti, elsősorban a fordított bifurkációs kaszkád (alharmonikus eltűnése a Fourier-spektrumból) ill. a periodikus és kaotikus tartományok változásának megfigyelése várható. Az előbbit sikerült kimutatni kis méret-aránnyal jellemzett hidrodinamikai rendszerben felépő Bénard-áramlásban [65], és akusztikai kísérletekben, me-

lyekben nagy intenzitású hang energiájának terjedését vizsgálták folyadékokban [146]. A periodikus és kaotikus tartományok váltakozására jó példa a Bjelouszov-Zsabotyinszj-reakcióban talált viselkedés [121].

#### 34. INTEGRÁLHATÓ ÉS NEM INTEGRÁLHATÓ HAMILTON-RENDSZEREK

Az előző fejezetekben már több alkalommal foglalkoztunk Hamilton-féle rendszerekkel, illetve ezek speciális esetével, a konzervatív rendszerekkel, s tárgyaltuk a területtartó leképezéseket is, azokat a leképezéseket, melyek Hamilton-rendszerek fázissterének Poincaré-metszeteként foghatók fel. A 6. fejezetben az Hénon-féle leképezés kapcsán láttuk, hogy a Poincaré-térképen szabályos görbék és kaotikusan eloszló pontok bonyolultan egymásba-ágyazott rétegződése fedezhető fel (6.1 és 6.2 ábrák), s ezt azt sejteti, hogy a Hamilton-féle rendszerek fázisrajektóriái bizonyos esetekben nemtriviális strukturával rendelkezhetnek. Másrészt a mechanika tankönyvekben szereplő egyszerű példák (a rezgőmozgás, az inga, vagy a Kepler-probléma) analitikusan integrálható mozgásra, a fázis térben egyszerű zárt görbékre utalnak. Vajon melyik mozgásforma a tipikus, s mitől függ az, hogy egy Hamilton-féle rendszer hosszú távon hogyan viselkedik? Tetszőleges-, vagy csak bizonyos kezdőfeltételek esetén alakulhat ki a kaotikus mozgás? Mit állíthatunk a konzervatív rendszerek (mint például a Naprendszer) hosszú idejű stabilitásáról? Ilyen és hasonló jellegű kérdésekre keressük a választ az itt következő három fejezetben.

Egy  $N$  szabadsági fokú konzervatív rendszer fázistere (állapottere)  $2N$ -dimenziós. Ebben a  $2N$ -dimenziós térben a mozgást a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{és} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (34.1)$$

kanonikus egyenletek írják le, ahol  $H(\vec{p}, \vec{q})$  a rendszer Hamilton-függvénye. A mozgás során a fázis térbeli trajektóriák - akármennyi ideig várunk is - nem járják be a teljes fázis teret, nem jutnak el akármelyik pontjának tetszőleges kicsiny kör-



nyezetébe. Az  $\vec{x} = (q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N)$  vektor komponensei között ugyanis a különböző mozgásállandók létezése miatt megszorításokat írhatunk fel. Ha a  $q_i$  és  $p_i$ -k segítségével felírható egyértékű mozgásállandók száma  $M$ , vagyis fennállnak az alábbi összefüggések:

$$F_1(q_i, p_i) = 0,$$

$$F_2(q_i, p_i) = 0,$$

·

·

$$F_M(q_i, p_i) = 0,$$

akkor a tényleges mozgás a fázistérnek egy  $2N-M$  dimenziós alterén, hiperfelületén történik.

Minden konzervatív rendszernek biztosan létezik legalább egy mozgásállandó, nevezetesen a rendszer energiája:

$$F_1 \equiv H(\vec{p}, \vec{q}) - E = 0,$$

de sok esetben még több más olyan egyértékű függvénye is felírható az általános koordinátáknak és impulzusoknak, amelyek a (34.1) egyenletek következtében akármilyen kezdőfeltétel esetén időben állandóak. Szeparálható rendszereknél például mindig található olyan  $I_1, I_2, \dots, I_N$  "hatásváltozók", amelyekkel a Hamilton-függvény

$$H(\vec{I}, \vec{\phi}) = H(I_1, I_2, \dots, I_N) \quad (34.2)$$

alakba írható (F.6 függelék). Mivel az  $I$ -khez kanonikusan konjugált  $\phi_i$  "szögváltozók" nem szerepelnek a Hamilton-függvényben (tehát ezek ciklikus koordináták), valamennyi  $I_i$  mozgásállandó. Az olyan mechanikai rendszereket, melyek Hamilton-függvénye kanonikus transzformációval (34.2) alakra hozható, integrálható rendszereknek nevezzük, azokat pedig, melyek fázispontja egy  $N$ -nél magasabb dimenziójú hiperfelületen mozog, nem integrálhatónak hívjuk.

Az  $N = 1$  szabadsági fokú konzervatív rendszerek mind in-

tegrálhatók, hiszen ezeknél  $2N-1 = N$ . Ez annyit jelent, hogy valamennyi egydimenziós konzervatív mozgás lényegében egyenértékű egymással, hiszen alkalmas kanonikus transzformációval  $H(p,q)$  átalakítható  $H(I,\phi) = H_0(I)$  alakra, s az új koordináta mozgásegyenlete expliciten megoldható:

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0, \quad \omega = \frac{dH_0}{dI}. \quad (34.3)$$

A fenti megoldás segítségével adott kezdőfeltételekből kiindulva tetszőlegesen hosszú időre előre meg tudjuk határozni a rendszer állapotát. Az "előrejelzés" - véges pontosságú kezdeti feltételek esetén - természetesen nem lehet tökéletesen pontos, de az idő múltával a hiba nem exponenciálisan, hanem legfeljebb lineárisan növekedhet, vagyis a Ljapunov-exponens nulla - következésképpen a mozgás nem kaotikus. A káosz kialakulásához tehát konzervatív rendszereknél egynél több szabadsági fokra, vagyis kettőnél több dimenziós állapotterem van szükség. (Ez az állítás disszipatív rendszerekre is érvényes, ugyanis a Poincaré-Bendixson-tétel szerint kétdimenziós állapotterben a legbonyolultabb attraktor a határciklus, kaotikus mozgás nem alakulhat ki.)

A hatás- és szögváltozókra való áttérést a legegyszerűbb (periodikus mozgást végző) rendszeren, az egydimenziós harmonikus oszcillátor példáján mutatjuk be. A

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$$

Hamilton-függvénnyel jellemzett rendszer impulzusa adott E energia esetén

$$p(q,E) = \sqrt{2mE - m^2 \omega_0^2 q^2},$$

amely segítségével a hatás

$$I(E) = \frac{1}{2} \int p dq = \frac{E}{\omega_0},$$

a Hamilton-függvény pedig



$$H(I, \phi) = \omega_0 I . \quad (34.4)$$

Az eredeti  $q$  és az új  $\phi$  koordináta között a kapcsolatot az

$$S(q, I) = \int^q p(q, I) dq = \int^q \sqrt{2m\omega_0 I - m^2 \omega_0^2 q^2} dq \quad (34.5)$$

generátorfüggvény teremt meg:

$$\phi = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I} .$$

A (34.5) integrált lekönnyebben a  $q = \frac{2I}{m\omega_0} \sin\alpha$  helyettesítéssel határozhatjuk meg:

$$S(q(\alpha), I) = I\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) ,$$

s innen

$$\phi = \frac{\partial S(\alpha, I)}{\partial I} + \frac{\partial S(\alpha, I)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha(q, I)}{\partial I} = \alpha .$$

A keresett kanonikus transzformáció tehát

$$q = \frac{2I}{m\omega_0} \sin\phi ,$$

$$p = \sqrt{2mI\omega_0} \cos\phi ,$$

a mozgásegyenletek megoldása pedig

$$\phi = \omega_0 t + \text{állandó} ,$$

$$I = \frac{E}{\omega_0} = \text{állandó} .$$

Hasonló módon hozhatók  $H = H_0(I)$  alakra a bonyolultabb, nemlineáris egydimenziós rendszerek Hamilton-függvényei is. A harmonikus oszcillátortól ezek annyiban különböznek, hogy a  $H_0 \equiv E(I)$  függvény általában nem lineáris, s emiatt az  $\omega = \partial E / \partial I$  frekvencia függ a rendszer energiájától, vagyis a rezgés amplitúdójától. A rendszer nemlinearitását jellemez-

hetjük például az

$$\alpha = \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{dI} \quad (34.6)$$

dimenziótlan paraméterrel [147], amely harmonikus oszcillátora nyilvánvalóan nulla. A nemlineáris rendszerek rezgési anharmonikusak, ezt a tulajdonságot kvalitatívan a

$$\beta = \frac{\text{felharmonikusok amplitúdója}}{\text{alapharmonikus amplitúdója}} \quad (34.7)$$

dimenziótlan számmal jellemezhetjük. A nemlinearitás és az anharmonicitás a nemlineáris rendszereknek két független mérőszáma. Az erősen anharmonikus rendszerek szükségképpen erősen nemlineárisak kell legyenek, fordítva azonban nem igaz! A 3. fejezetben tárgyalt matematikai ingára például nagyon nagy energia esetén  $H_0(I) \approx I^2$  jellemző, a nemlinearitása tehát ( $\omega \approx \text{állandó} \cdot I$  miatt)  $\alpha \approx 1$ . Ugyanakkor a rendszer anharmonicitása nagyon kicsiny, hiszen a mozgása ebben a határesetben csaknem teljesen egyenletes forgómozgás.

A több szabadsági fokú csatolt, de lineáris rendszerek ugyancsak mindig integrálhatóak, hiszen a mozgásegyenletük - alkalmas lineáris transzformációval - a normálkoordinátákra vonatkozó független egydimenziós mozgásegyenletek rendszerévé alakítható. A hatás- és szögváltozók nyelvén az ilyen rendszereket a

$$H_0(\vec{I}) = \vec{\omega}_0 \cdot \vec{I}$$

Hamilton-függvény jellemzi, ahol  $\vec{\omega}_0$  és  $\vec{I}$  N-dimenziós vektorok. A mozgásegyenlet megoldása

$$\vec{\phi}(t) = \vec{\omega}_0 t + \vec{\phi}_0,$$

$$\vec{I}(t) = \vec{I}_0,$$

amely a fázistérben egy N-dimenziós tórusz felületén végbemehető, mindegyik  $\phi_i$  irányban egyenletes szögsebességű mozgásnak felel meg. Hacsak nem elfajult a rendszer (vagyis semelyik két



sajátfrekvencia nem áll racionális arányban egymással), úgy a fázisrajektória bejárja a teljes tóruszt, annak bármely pontját - elegendően hosszú idő alatt - tetszőlegesen megközelíti. Magát a tóruszt ilyenkor invariáns tórusznak nevezzük, mert a tórusz pontjai az  $\vec{x}(t_0) \rightarrow \vec{x}(t_1)$  fázistérbeli leképezésnek invariáns sokaságát alkotják.

A szeparálható rendszerek mozgása - alkalmas kanonikus transzformációval - egy invariáns tóruszon történő egyenletes mozgásra vezethető vissza. Az ilyen rendszerek mindegyike független harmonikus oszcillátorok halmazával, s így egymással is egyenértékű. A mozgásegyenletük explicit megoldható s a viselkedésük a kezdeti feltételek ismeretében tetszőlegesen hosszú időre előre megjósolható. A kezdeti feltételek pontatlan ismeretéből származó hiba nagyon hosszú idő alatt sem növekszik nagyon nagyra (az idővel legfeljebb lineárisan, s nem exponenciálisan arányos a hiba), emiatt a rendszer mozgása nem válik kaotikussá, hanem - mint a nevük is utal rá - integrálható.

Abban az esetben, amikor egy szeparálható - és emiatt integrálható - rendszer rezgési frekvenciái között fennáll az  $\vec{n} \cdot \vec{\omega} = 0$  "rezonanciafeltétel" ( $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$  egész számokból álló vektor), a rendszer elfajult, mozgása a fázistérnek egy N-nél kisebb dimenziójú alterében történik. Ilyenkor a rendszernek nemcsak az  $I_1, I_2, \dots, I_N$  mennyiségek mozgásállandói, hanem emellett még egy (vagy több) további egyértékű mozgásállandó is felírható, amely általában a rendszernek valamilyen "rejtett szimmetriájával" hozható kapcsolatba. Példa erre a Kepler-probléma, vagyis egy tömegpontnak a  $V(r) = -\alpha/r$  centrális potenciál terében történő mozgása. Az impulzusmomentum megmaradása miatt a mozgás síkmozgás. A  $\phi$  és  $r$  polárkoordinátákhoz tartozó hatásváltozók adott E energia és J impulzusmomentum esetén

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = J, \\ I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left( \sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{J^2}{r^2}} \right) dr = -J + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}},$$

ahonnan a hatásváltozókkal kifejezett energia

$$E(I_r, I_\phi) = - \frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\phi)^2} .$$

Mivel ez a mennyiség csak az  $I_r + I_\phi$  összegtől függ, a mozgás el-fajult, hiszen

$$\omega_r = \frac{\partial E}{\partial I_r} = \frac{\partial E}{\partial I_\phi} = \omega_\phi .$$

Az  $I_r$  és  $I_\phi$  mennyiségeken kívül tehát található még egy - tőlük független - mozgásállandó (pl. a  $\sin(\phi_r - \phi_\phi)$  mennyiség, ahol  $\phi_r$  és  $\phi_\phi$  az  $I_r$ -hez, illetve  $I_\phi$ -hez kanonikusan konjugált szögváltozók), s emiatt a  $2N = 4$  dimenziós fázistérben a trajektória egy  $2N-3 = 1$  dimenziós sokaságon fekszik, vagyis egy valódi egydimenziós zárt görbét alkot.

### 35. A KOLMOGOROV-ARNOLD-MOSER-TÉTEL ÉS AZ ARNOLD-DIFFÚZIÓ

Az előző fejezetben leírtak szerint ahhoz, hogy egy konzervatív rendszer kaotikus viselkedést mutasson, vagyis hogy ne legyen integrálható, az szükséges, hogy a rendszer egynél több szabadsági fokú, valamint nemlineáris legyen. E két feltétel közül bármelyik hiányában a rendszer integrálható s a mozgása gyakorlatilag hosszú távra is előre megjósolható lenne.

A legegyszerűbb olyan rendszer, amely kaotikus viselkedést mutathat, egy 1 szabadsági fokú mechanikai rendszer, melyet valamilyen adott, az időtől expliciten függő külső erővel meg-perturbálunk. (Erre láttunk már konkrét példákat a korábbiak-ban; lásd például Duffing-oszcillátort, illetve a periodikusan lökdösött harmonikus oszcillátort az 5. és a 6. fejezetekben.) A perturbálatlan mozgás Hamilton-függvényéről tegyük fel, hogy már áttranszformáltuk hatás- és szögváltozókra, azaz  $H = H_0(I)$  alakra, a perturbációt pedig a hatáson kívül a szögváltozótól és az időtől is függő  $\epsilon V(I, \phi, t)$  taggal vesszük figyelembe ( $\epsilon$  egy kicsiny paraméter):

$$H(I, \phi, t) = H_0(I) + \epsilon V(I, \phi, t) . \quad (35.1)$$



A "külső potenciál" a valóságban egy olyan részrendszert, másik szabadsági fokot modellez, amelyhez nagyon nagy "tehetetlenség" tartozik, s emiatt a rá való visszahatás elhanyagolható. Egy ilyen, "nagy tömegű" részrendszer impulzusa nem-, vagy csak a saját koordinátájától függő módon változik, emiatt a  $2N = 4$  dimenziós fázistér gyakorlatilag 3 dimenziósra redukálódik, összhangban azzal, hogy a (35.1) által leírt mozgásegyenletek 3 darab autonóm elsőrendű egyenletté alakíthatók. (Ez az oka annak, hogy az adott külső erővel perturbált egydimenziós rendszereket szokták másfél szabadsági fokúnak is nevezni.)

A (35.1)-ben szereplő potenciál időfüggéséről tételezzük fel, hogy periodikus, valamekkora  $T$  periódusidővel. A perturbáció frekvenciaspektruma ilyenkor  $n\Omega$  alakú, ahol  $\Omega = 2\pi/T$ . (A levonható következtetések lényegében változatlanok maradnak, ha egy kicsit általánosabban feltételelesen periódikus perturbációkat engedünk meg, tetszőleges diszkrét  $\Omega_n$  frekvenciaspektrummal.) A folytonos spektrumú, de időben véges ideig tartó, tehát impulzusszerű perturbációk kis  $\epsilon$  esetén csak kicsit változtatják meg a rendszer jellemzőit, ezért számunkra nem túl érdekesek. A stacionárius, folytonos spektrumú perturbáció, például kis erőlkések véletlenszerű sorozata okozhat kaotikus viselkedést, ez azonban nem meglepő, hiszen a "véletlenszerű" elemet kívülről vittük be a rendszerbe [148]. Minket a továbbiakban elsősorban az érdekel, hogy kialakulhat-e kaotikus, "zajos" mozgás egy olyan egyszerű rendszerben, amely a jól meghatározott saját belső törvényei szerint mozog, vagy legfeljebb csak szabályos periodikus külső gerjesztésnek van kitéve.

Egy integrálható rendszer kis perturbációjánál a legtermészetesebb gondolat az, hogy megpróbálunk a zavar kicsinységére jellemző  $\epsilon$  paraméter szerinti sorfejtést, perturbációs számítást alkalmazni. Alkalmasság kanonikus transzformációval az eredeti  $(I, \phi) \equiv (I_1, \phi_1)$  kanonikus változó párról áttérhetünk olyan új  $(I_2, \phi_2)$  változókra, melyekkel felírt Hamilton-függvény már csak  $\epsilon^2$  rendben tér el egy integrálható rendszerétől, majd egy  $(I_3, \phi_3)$ -ra, amelyben már csak harmadrendűen kicsi a perturbáció, és így tovább a végtelenségig.



A nehézséget az okozza, hogy az

$$(I_1, \phi_1) \rightarrow (I_2, \phi_2) \rightarrow \dots \rightarrow (I_n, \phi_n) \rightarrow \dots (\bar{I}, \bar{\phi}) \quad (35.2)$$

ún. Birkhoff-sorozat, amely formálisan egy integrálható rendszer Hamilton-függvényére vezet, általában divergens [149,150,117]. Mit jelent az, hogy általában? Ha találomra felírunk egy legalább két szabadsági fokú rendszerre egy analitikus Hamilton-függvényt, akkor szinte biztos, hogy az egy nem integrálható rendszert fog jellemezni. Ezt a megdöbbentő eredményt H. Poincarénak a háromtest-problémára vonatkozó korai eredményeire támaszkodva C.L. Siegel kapta meg [149,151-153]. Egy  $N = 2$  szabadsági fokú analitikus rendszert például a

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sum_{j,k,m,n=2}^{\infty} c_{jkmn} q_1^j p_2^k p_1^m p_2^n \quad (35.3)$$

konvergens Taylor-sorral lehet jellemezni, ahol a  $c_{jkmn}$  számok egy végtelen dimenziós  $\vec{c}$  vektor komponenseiként foghatók fel. Siegel tétele szerint a nem integrálható Hamilton-féle rendszerek a  $\vec{c}$ -térben mindenütt sűrűn helyezkednek el, vagyis - a "környezetet" megfelelően definiálva - bármely  $\vec{c}$  vektor tetszőlegesen kis környezetében található olyan  $\vec{c}'$  vektor, mellyel képzett (35.3) hatványsor konvergens ugyan, de az általa előállított  $H'$  Hamilton-függvény végtelen Birkhoff-sorozata divergens. Ugyanez az integrálható rendszerekre nem igaz; ezek Hamilton-függvénye az analitikus Hamilton-függvények terében nem alkot mindenütt sűrű halmazt.

A (35.2) Birkhoff-sorozatnak a konvergenciáját az ún. "kis nevezők problémája" akadályozza. Ezt egy egyszerű és közismert példán, a parametrikus rezonancián mutatjuk be. Tekintsünk egy olyan ingát, amely sajátfrekvenciáját valamely rögzített érték körül periodikusan változtatjuk. (Ezt valósítja meg a hintán ülő és azt hajtani akaró kisgyerek, amikor a súlypontját periodikusan fel-le mozgatja.) A rendszer Hamilton-függvénye

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos q) (1 + \varepsilon \cos \Omega t) ,$$



melyet kis kitérések esetén  $q$  szerint sorba fejthetünk:

$$H \approx \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}(1 + \varepsilon \cos \Omega t) - \frac{q^4}{24} . \quad (35.4)$$

Áttérve a harmonikus oszcillátor hatás- és szögváltozóira

$$H(I, \phi, t) = I + \varepsilon I \cos^2 \phi \cos \Omega t - \frac{I^2}{6} \cos^4 \phi$$

adódik, melyet - elhanyagolva a gyorsan oszcilláló tagokat, s csak a bizonyos rezonancia-értéknél lassan változó  $\cos(2\phi - \Omega t)$ -vel arányos kifejezést tartva meg -, így is felírhatunk:

$$H(I, \phi, t) \approx I + \frac{\varepsilon I}{4} \cos(2\phi - \Omega t) - \frac{I^2}{16} .$$

Próbáljuk meg a fenti Hamilton-függvényből egy kanonikus transzformációval "kiölni" az  $\varepsilon$ -nal arányos, s a rendszer integrálhatóságát elrontó tagot. Az  $(I, \phi) \rightarrow (I_2, \phi_2)$  kanonikus transzformáció generátorfüggvényét

$$F(I_2, \phi, t) = I_2 \phi + \varepsilon \Phi(I_2) \cos(2\phi - \Omega t)$$

alakban keresve

$$I = \frac{\partial F}{\partial \phi} = I_2 + 2 \varepsilon \Phi \cos(2\phi - \Omega t) ,$$

$$\phi_2 = \frac{\partial F}{\partial I_2} = \phi + (\varepsilon\text{-nal arányos tagok}) ,$$

$$H_2(I_2, \phi_2) = H + \frac{\partial F}{\partial t} = I_2 + \varepsilon \left[ \frac{I_2}{4} + 2\Phi - \Omega \Phi - \frac{I_2 \Phi}{4} \right] \cos(2\phi - \Omega t) +$$

+ (magasabb rendű tagok)

adódik. Az  $\varepsilon$ -nal arányos kifejezés eltűnésének feltétele

$$\Phi = \frac{I_2/4}{\Omega - 2(1 - I_2/8)} .$$

Látjuk, hogy a kanonikus transzformáció nem alkalmazható, ha teljesül a parametrikus rezonancia  $\Omega \approx 2$  feltétele, ilyenkor ugyanis a transzformációban szereplő  $\phi$  függvény nevezője ki-

csivé válik, s  $\varepsilon \cdot \Phi$  nem  $\varepsilon$ -rendű, hanem annál sokkal nagyobb is lehet.

Megjegyezzük, hogy amennyiben  $\Omega \approx 2$ , a rendszer energiája növekedni kezd, de nem korlátlanul, mint ahogy egy rezonáns csillapítás nélküli harmonikus oszcillátor tenné, hanem csak  $\varepsilon$ -nal arányos mértékben. Ennek a rendszer nemlinearitása az oka: az amplitúdó növekedtével ugyanis a lengés frekvenciája fokozatosan elhangolódik, s rögzített  $\Omega$  esetén egyszer csak elromlik a rezonancia-feltétel. Ez a nemlineáris stabilizáció mechanizmusa. (A hintázó gyerek amplitúdónövekedésének nem ez, hanem az egyre fokozódó közegellenállás szab gátat. A nemlineáris stabilizációs mechanizmusa ebben az esetben azért nem működik, mert a gyerekek nem egy előre elhatározott, hanem mindig a hinta pillanatnyi lengési szaporaságához igazodó  $\Omega$  frekvenciával hajtják magukat.)

A Siegel-tétel értelmében az integrálható rendszerek nagyon csekély - mondhatni elhanyagolható - hányadát alkotják a konzervatív rendszereknek, s ami a lényegesebb probléma: egy integrálható rendszer általában tetszőlegesen kicsiny perturbáció hatására nem integrálhatóvá válik, vagyis az integrálhatóság, mint tulajdonság, a külső perturbációkkal szemben instabil.

Az integrálható rendszerek fázisterében invariáns tóruszok találhatóak, a mozgás tetszőleges kezdőfeltétel esetén valamelyik  $N$ -dimenziós tóruszon megy végbe. A külső perturbációk hatására az invariáns tóruszok egy része eltűnik, s a mozgás a fázistérnek egy  $N$ -nél nagyobb dimenziójú alterébe terjed ki. Vannak azonban a perturbálatlan rendszernek olyan tóruszai, melyek túlélnek a perturbációt (amennyiben ez nem túl erős), - ezt állítja a Kolmogorov, Arnold és Moser munkáiból kialakult KAM-elmélet [154-157, 149, 117].

A parametrikusan gerjesztett ingánál elmondottakhoz hasonlóan be lehet látni, hogy ha egy  $H_0(I)$  Hamilton-függvénnyel leírt integrálható rendszert a

$$H(\vec{I}, \vec{\phi}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{I}, \vec{\phi}) \quad (35.5)$$



módon megperturbálunk, s megpróbáljuk meghatározni azt az  $S(\vec{I}', \vec{\phi})$  generátorfüggvényt, amely  $H$ -t  $H'(\vec{I}')$  alakra transzformálná, akkor naív perturbációszámítással

$$S(\vec{I}', \vec{\phi}) = \vec{I}' \cdot \vec{\phi} + i\varepsilon \sum_{\vec{m} \neq 0} \frac{H_{1\vec{m}}(\vec{I}')}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{I}')} e^{i\vec{m}\vec{\phi}} + \dots \quad (35.6)$$

adódik, ahol

$$\vec{\omega}_0(\vec{I}) = \frac{\partial H_0}{\partial \vec{I}}$$

a perturbálatlan rendszer frekvenciáit,  $H_{1\vec{m}}$  pedig  $H_1$  Fourier-együtthatóit jelöli:

$$H_1(\vec{I}, \vec{\phi}) = \sum_{\vec{m}} H_{1\vec{m}} e^{i\vec{m}\vec{\phi}}.$$

A (35.6) hatványsorral biztosan baj van akkor, amikor az  $\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0 = 0$  rezonanciafeltétel teljesül, vagyis amikor az  $\omega_{0i}$  frekvenciák racionális arányban állnak egymással, - ekkor ugyanis a nevezőbe nulla kerül. Ennél azonban még rosszabb a helyzet: még ha nem is áll fenn a rezonanciafeltétel, tehát  $\omega_{0i}$ -k aránya irracionális, a (35.6)-ban szereplő összegben elegendően nagy  $\vec{m}$ -ekig elmenve  $\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0$  tetszőlegesen kicsivé válhat, s ez kétséges teszi, hogy (35.6) valamilyen  $\vec{I}'$  és  $\vec{\phi}$  értékeknél egyáltalán konvergálhat-e!

Kolmogorov, Arnold és Moser híres tétele, a "KAM-tétel" szerint a formális (35.6) hatványsor konvergál minden olyan esetben, amikor a frekvenciák aránya nemcsak hogy nem racionális, hanem "elegendően irracionális", azaz csak nehezen közelíthető meg racionális számokkal [158]. Ez pontosabban (az egyszerűség kedvéért  $N = 2$  szabadsági fokra megfogalmazva) annyit jelent, hogy létezik egy olyan - a perturbáció erősségtől függő, s  $\varepsilon \rightarrow 0$  limeszben nullához tartó -  $K(\varepsilon)$  szám, mellyel bármely egész  $r$  és  $s$ -re

$$\left| \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{s^{2,5}}. \quad (35.7)$$

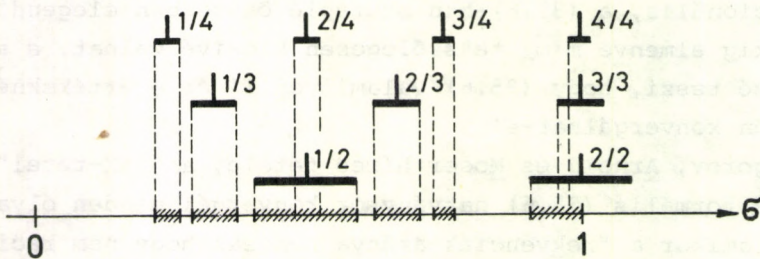
Szemléletesen a fenti feltétel annyit jelent, hogy az  $\omega_{01}/\omega_{02}$

irracionális szám tetszőleges pontossággal közelíthető racionális számokkal, de ha azt akarjuk, hogy ez a közelítés nagyon pontos legyen, akkor nagyon nagy nevezőjű racionális számot kell választanunk.

Vajon az invariáns tóruszoknak hányad része éli túl a perturbációt? Becsüljük meg a  $(0,1)$  intervallumba eső azon  $\sigma = \omega_{01}/\omega_{02}$  számok halmazának mértékét, melyek nem teljesítik (35.7)-t, vagyis amelyekhez tartozó invariáns tóruszokat eltünteti a perturbáció. Az  $s$  nevezőjű törtektől (ezek száma  $s$ ) legfeljebb  $K/s^{2,5}$  távol levő pontok mértéke biztosan kisebb, mint  $2sK/s^{2,5}$  (35.1 ábra), ezeket összegezve

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2s \frac{K}{s^{2,5}} = 2K \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{1,5}} \approx K(\epsilon) ,$$

adódik, amely mennyiség  $\epsilon \rightarrow 0$  esetben nullához tart. Az eleghőn gyenge perturbációt tehát csaknem valamennyi invariáns



35.1 ábra. A  $0 < \sigma < 1$  intervallumból elhagyva a racionális és a "nem eléggé irracionális" számokat (a vonalkázott szakaszokat), a megmaradó rész mértéke pozitív

tórusz "túléli", de ezek az úgynevezett KAM-tóruszok nem al-

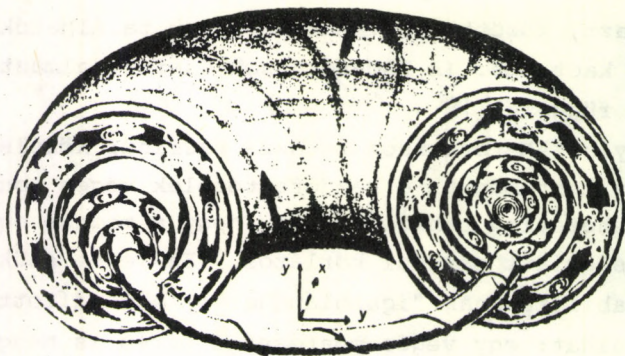


kotnak sűrű halmazt, közöttük elválasztó sávok találhatóak, melyekben a mozgás kaotikus. (A KAM-tóruszok Cantor-halmazt képeznek; lásd F.5 függelék.)

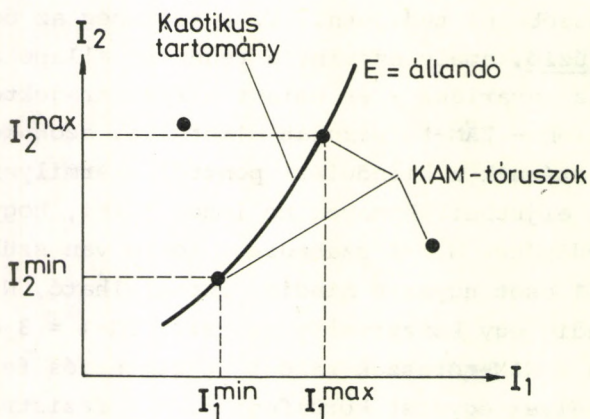
Mivel akármelyik KAM-tóruszhoz tetszés szerinti közelségben találunk kaotikus tartományt, a kezdőfeltételek véges pontosságú mérésével lehetetlen bebizonyítani, hogy a mozgás egy tóruszon történik s emiatt például korlátos. (Ez lenne szükséges a Naprendszer stabilitásának "igazolásához"!)

A fordított eset azonban megvalósulhat: egy véges pontosságú mérés is meggyőzhet bennünket arról, hogy a KAM-tóruszoktól távol, egy széles kaotikus sáv belsejében tartózkodik a rendszer; ekkor a mozgása hosszú távra biztosan megjósolhatatlan, kaotikus.

A perturbáció hatására az eredetileg integrálható rendszer invariáns tóruszai közül nagyon sok eltűnik, s csak az egymástól véges távolságra fekvő KAM-tóruszok maradnak meg. Két KAM-tórusz közti tartományban a fázisrajektória nem  $N$ , hanem annál magasabb (konzervatív rendszernek pl.  $2N-1$ ) dimenziós hiperfelületen fekszik, s emiatt a fázispont elég hosszú idő alatt - az integrálható rendszerektől eltérően - a fázistérnek akármilyen messzi részébe el tud jutni. Ez a jelenség az úgynevezett Arnold-diffúzió, amely szerint a rendszer állapotát jellemző fázispont az invariáns - és emiatt a fázisrajektóriák számára átmetszhetetlen - KAM-tóruszokat elkerülve, azok között bujkálva a fázistérnek a kiindulási ponttól akármilyen távol fekvő részébe is eljuthat. Könnyen be lehet látni, hogy az Arnold-diffúzió működéséhez  $N > 2$  szabadsági fokra van szükség [158, 12]. Az  $N=1$  eset ugyanis mindig integrálható,  $N=2$  szabadsági foknál pedig egy konzervatív rendszer  $2N-1 = 3$  dimenziós fázissterében a KAM-tóruszok valódi kétdimenziós felületek (35.2 ábra), melyek egymást körül fogják, s a fázisrajektória nem tud közülük "kiszabadulni". Ha a fázissteret a perturbálatlan rendszer hatás- és szögváltozóival parametrizáljuk (35.3 ábra), akkor minden egyes tórusz az  $(I_1, I_2)$  síkon egy-egy pontnak felel meg. (A  $[0, 2\pi]$  intervallumban változó  $\phi_1$  és  $\phi_2$  szögeket az ábrázolhatóság kedvéért nem tüntettük fel.) Az integrálható rendszerek fázisrajektóriája az  $(I_1, I_2)$  síkon egy mozdulatlan pont lenne, a perturbáció hatására integrálha-



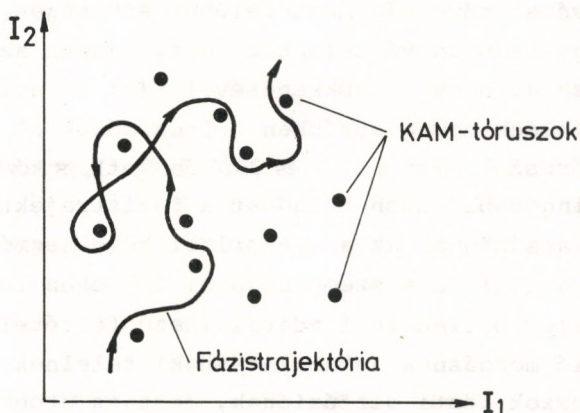
35.2 ábra. Egy két szabadsági fokú konzervatív rendszer (redukált) fázistere 3 dimenziós, ebben a KAM-felületek valódi kétdimenziós tóruszok. A tóruszok közötti kaotikus tartományból a felületek átmetszése nélkül nem lehet "kiszabadulni", ezért az Arnold-diffúzió ebben az esetben nem működik



35.3 ábra. Két szabadsági fokú konzervatív rendszer hatásváltozói csak az  $I_i^{\min} < I_i < I_i^{\max}$  ( $i=1,2$ ) korlátozott intervallumokon belül változhatnak



tatlanná váló mozgás azonban változó  $I_1$ -nek és  $I_2$ -nek felel meg. Mivel azonban a rendszer konzervatív, az energia állandósága megszorítást teremt  $I_1$  és  $I_2$  között, a mozgás csakis az  $E(I_1, I_2) = \text{állandó}$  görbe mentén történhet. Ezen a görbén fekvő KAM-tóruszok azonban megakadályozzák  $I_1$  és  $I_2$  korlátlan változását, s így az Arnold-diffúzió jelensége nem lép fel.  $N \geq 3$  szabadsági foknál a fenti megszorítás nyilván elesik, ugyanis ilyenkor pl.  $I_1$  és  $I_2$  szabadon változhat (az energia állandósága az  $N$  számú hatásváltozóból csak egyet szorít meg), s az  $(I_1, I_2)$  síkon "bolyongó" fázispontnak a KAM-tóruszoknak megfelelő pontok nem állhatják útját (35.4 ábra).



35.4 ábra. Három, vagy több szabadsági fokú konzervatív rendszer fázisterében a KAM-tóruszok között akármilyen messzire eljuthat a rendszer fázistrajektóriája, a hatásváltozók megváltozása elég hosszú idő alatt tetszőlegesen nagy lehet. Ez az Arnold-diffúzió jelensége

Az Arnold-diffúzió, amely feltehetően minden  $N > 2$  szabadsági fokú konzervatív (illetve  $n \geq 5$  dimenziós állapotterű autonóm) rendszernél fellép, nagyon lassú folyamat. N.N. Nyeharosev becslése szerint a diffúziós állandó egy integrálható rendszer  $\epsilon$  erősségű perturbációjával létrejött nemintegrálható rendszerben

$$D \approx e^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \quad (35.8)$$

nagyságrendű [160-161]. Figyelemre méltó, hogy (35.8) szerint  $D$  nem analitikus függvénye  $\epsilon$ -nak az  $\epsilon = 0$  pontban, az integrálható rendszerből kiindulva tehát  $\epsilon$  szerinti perturbációszámítással nem kaphatjuk meg az Arnold-diffúzió jellemzőit!

A perturbáció erősségét,  $\epsilon$ -t csökkentve a diffúzió sebessége minden hatványnál gyorsabban nullához tart, vagyis a fázistérben egy véges távolság megtételéhez szükséges idő minden hatványnál gyorsabban végtelenhez tart. (Ennek az a szemléletes magyarázata, hogy  $\epsilon$  csökkenésével  $K(\epsilon)$  is nullához tart, ennek megfelelően egyre sűrűbben helyezkednek el a fázistérben a KAM-tóruszok (lásd a 35.1 és 35.4 ábrákat), s közöttük csak egyre "kacsaringósabb" úton haladhat a fázisrajektória.) Ennek a hihetetlen lassúságnak az a gyakorlati következménye, hogy a Naprendszer stabilitása szempontjából teljesen lényegtelen, hogy a rendszer pillanatnyi adatai (kezdőfeltételek) egy KAM-tóruszon való mozgásnak (stabilitásnak) felelnek-e meg, vagy pedig a tóruszok közti diffúzióknak, mert ez utóbbi karakterisztikus ideje nemcsak a disszipáció időállandójánál, de még az "Univerzum életkoránál" is sok nagyságrenddel nagyobb. Nem hanyagolható viszont el az Arnold-diffúzió a tárológyűrűben keringő töltött részecskék (protonok, elektronok, pozitronok, ...), illetve a fúziós reaktor kísérleteknél a plazma mozgásának stabilitásvizsgálatánál. Úgy tűnik, hogy az Arnold-diffúzió univerzálisan fellépő jelenség [162], s ha csak nem alkalmazunk valamilyen, az instabillá váló rendszer állapotától függő negatív visszacsatolást, az említett berendezések tervezésénél figyelembe kell venni egy áthághatatlan stabilitási korlát létezését.



Egy bonyolult rendszer viselkedésének tanulmányozásánál - mint azt már többször láttuk - nagyon hasznos az állapotter-  
beli folytonos mozgás helyett annak egy diszkrét leképezését,  
Poincaré-térképét vizsgálunk. Ezt tesszük most a konzervatív-,  
illetve a Hamilton-féle rendszerekkel is.

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy két szabadsági fokú  
konzervatív rendszert! Ennek fázistere 4, az adott energiájú  
hiperfelülete 3, a Poincaré-térképe pedig 2 dimenziós (lásd az  
F.2 és F.6 függelékeket). Amennyiben a rendszer integrálható,  
úgy a fázistérben a mozgás - hatás- és szögváltozókat használ-  
va - mindig tóruszokon történik. A Poincaré-térképen a tóruszok  
metszetei körökként, vagy általánosabban: zárt görbéként je-  
lennek meg.

Egy lehetséges metszet:  $\phi_2$  értékét lerögzítjük pl. nullá-  
nak (lásd F6.2 ábra), s így a síkon  $I_1$  és  $\phi_1$  különböző érté-  
keinek megfelelően pontokat kapunk. A tórusz egyenlete:

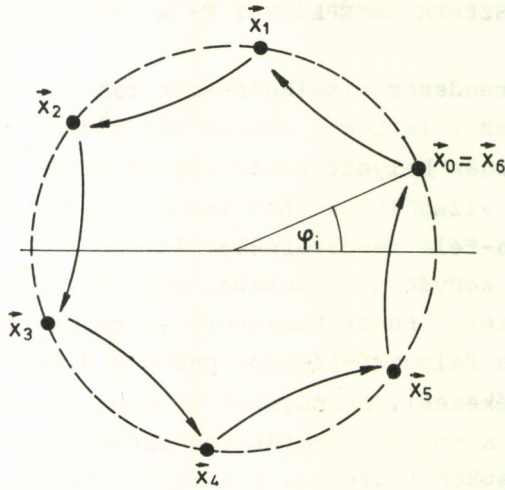
$I = \text{állandó}$ , a leképezés pedig

$$I_{n+1} = I_n, \quad (36.1)$$

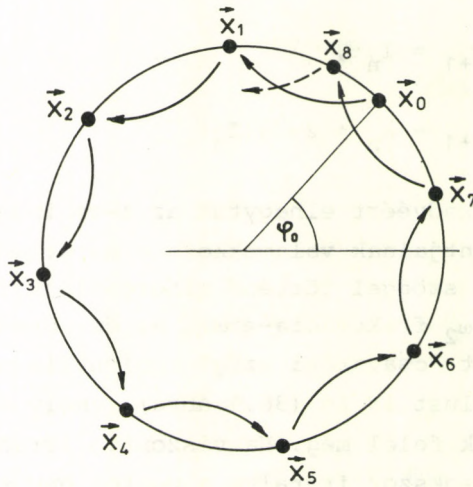
$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi \sigma(I_n).$$

(Az áttekinthetőség kedvéért elhagytuk az 1-es indexeket.) Ez  
a leképezés a sík pontjainak valamekkora - az origótól mért  
távolságától függő - szöggel történő elforgatását írja le.  
Amennyiben a  $\sigma = \omega_1/\omega_2$  frekvencia-arány, az ún. csavarási szám,  
a  $2\pi$  egységekben mért "csavarási szög" racionális szám, úgy  
(36.1) egy véges ciklust ír le (36.1 ábra), amely a fázistér-  
ben egy zárt pályának felel meg. Ha viszont  $\sigma$  irracionális,  
úgy (36.1)-t nagyon sokszor iterálva a pontok egy teljes kört,  
a leképezés invariáns sokaságát járják be (36.2 ábra), ami a  
fázistérben az invariáns tóruszon való feltételese periodi-  
kus (kváziperiodikus) mozgást tükrözi.

Mi történik, ha az eredetileg integrálható rendszert egy  
kicsit megperturbáljuk? Ilyenkor a (36.1) leképezés, melyet  
"csavar-leképezésnek" is szoktak nevezni, egy kicsit módosul:



36.1 ábra. Racionális csavarási szám, például  $\sigma=1/6$  esetén a leképezés egy véges ciklus; ez a fázistérben az elfajult, zárt görbe mentén történő mozgásnak felel meg



36.2 ábra. Irracionális csavarási szám esetén a leképezés invariáns sokaságai körök



$$I_{n+1} = I_n + f(I_n, \phi_n) , \quad (36.2)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi\sigma(I_n) + g(I_n, \phi_n) .$$

Az  $f$  és  $g$  függvények kis  $I$ -kre  $I$ -nél gyorsabban tartanak nullához, ezért az origó közelében kis perturbációt jelentenek csupán.

A KAM-tételt ezek után a leképezések nyelvén a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

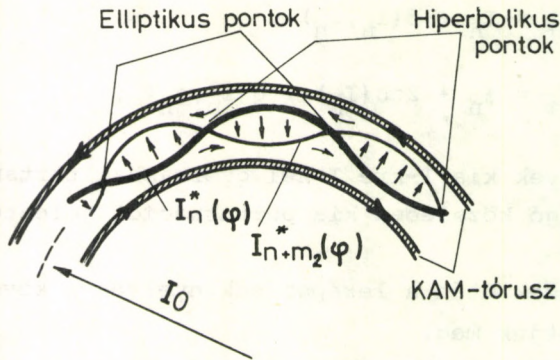
Az integrálható rendszer Poincaré-leképezésének invariáns görbéi, a koncentrikus körök közül az origó közelében továbbra is invariáns görbék - KAM-tóruszok - maradnak mindazok, melyek csavarási száma eléggé irracionális, azaz

$$\left| \sigma - \frac{r}{s} \right| > \frac{K}{s^{2,5}} \quad (\text{minden egész } r \text{ és } s\text{-re}). \quad (36.3)$$

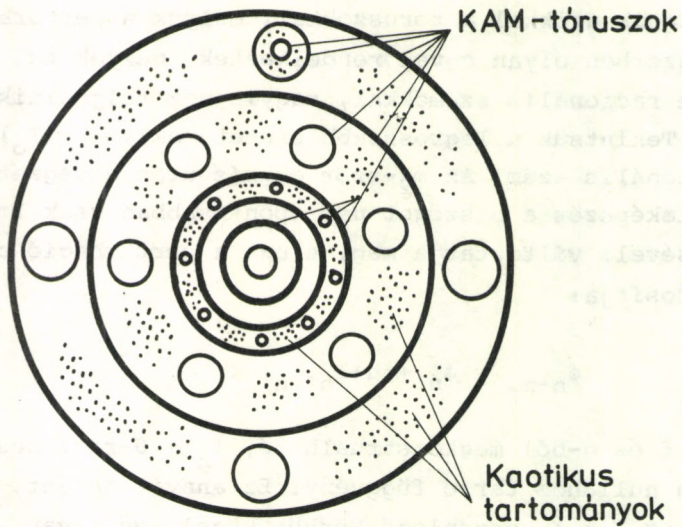
Mi történik azokkal a tóruszokkal, melyek a perturbáció nélküli rendszerben olyan  $\sigma$ -val rendelkeztek, melyek túl jól közelíthetők racionális számokkal, vagyis nem teljesítik (36.3)-t? Tekintsük a legrosszabb esetet, amikor  $\sigma(I_0) = m_1/m_2$  alakú racionális szám! Az  $m_2$ -ször egymás után elvégzett perturbálatlan leképezés a  $\phi$  szöget nem (pontosabban csak  $2\pi$  egész többszörösével) változtatja meg, s ezt a perturbáció csak egy kicsit módosítja:

$$\phi_{n+m_2} = \phi_n + h(I_0, \phi_n) , \quad (36.4)$$

ahol  $h$  az  $f$  és  $g$ -ből megkonstruálható,  $I_n \rightarrow 0$ -ra lineárisnál gyorsabban nullához tartó függvény. Ez annyit jelent, hogy találhatunk az  $I = I_0$  egyenletű körhöz közel egy olyan  $I = I^*(\phi)$  görbét, melynek pontjai nem csavarodnak, hanem csak radiálisan mozdulnak el (36.3 ábra). Ennek a görbének a képe az  $m_2$ -ször iterált transzformáció után egy olyan  $I_{n+m_2}^*(\phi)$  görbe kell legyen, amely biztosan metszi valahol  $I_n^*(\phi)$ -t, hiszen ellenkező esetben az általuk körülzárt terület nem lehetne egyforma nagy, ami pedig a konzervatív (és a Hamilton-féle) rendszerek Poincaré-leképezésének egyik sajátja (F.2 függelék). A met-



36.3 ábra. A racionális csavarodási számmal jellemzett tórusz a perturbáció hatására elliptikus- és hiperbolikus fixpontok láncolatára hasad szét (Poincaré-Birkhoff-tétel)



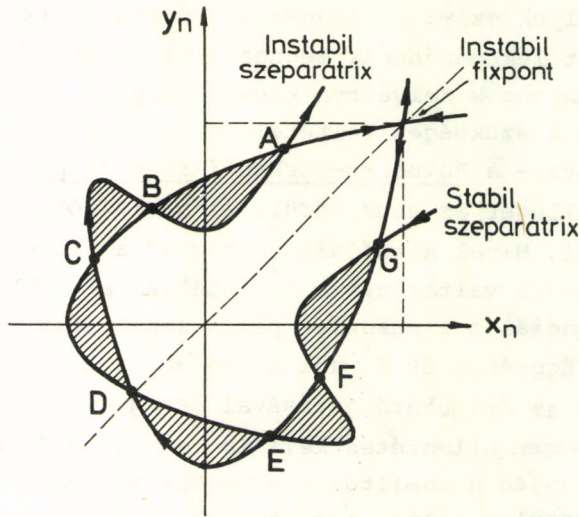
36.4 ábra. Egy elliptikus fixpont környezetében kaotikus tartományok és elliptikus fixpontokat körülvevő KAM-tóruszok egyaránt megtalálhatók. Ez utóbbiak bármelyikét kinagyítva ugyanolyan jellegű képet kapunk, mint amit ez az ábra mutat



széspontok - melyek száma nyilvánvalóan páros - fixpontjai az  $m_2$ -szőr ismételt leképezésnek, méghozzá elliptikus-, illetve hiperbolikus fixpontok felváltva követik egymást. Ezt állítja - természetesen a szükséges feltételeket matematikailag precízen megfogalmazva - a Poincaré-Birkhoff-féle fixpont-tétel. (A fixpontok jellegét az azok körüli lineáris közelítésből lehet meghatározni. Mivel a radiális "mozgás" a fixpont-láncok mentén végighaladva váltakozik a "kifelé" és a "befelé" irányok között, a tangenciális elmozdulás pedig I-nek folytonos, differenciálható függvénye és  $I_0$ -nál nulla volt, ha egy kicsit beljebb mondjuk az óramutató járásával megegyező irányú, akkor  $I_0$ -tól kijjebb éppen ellentétes kell legyen (36.3 ábra).)

A fentiek alapján a Hamilton-rendszerek Poincaré-térképéről - és ezen keresztül a teljes fázisteréről - a következő kvalitatív képet alakíthatjuk ki. Egy elliptikus fixpont kis környezetében (vagy ami ezzel egyenértékű: egy integrálható rendszer invariáns sokaságait egy kicsit megperturbálva) invariáns görbéket, KAM-tóruszokat találunk azokon a helyeken, ahol a leképezés "csavarodási száma" nem közelíthető elegendően gyorsan racionális számokkal. (Ezek az invariáns sokaságok természetesen csak a fázistérben tóruszok, a Poincaré-térképen egyszerű zárt görbék.) A nagyjából koncentrikus körökhöz hasonló "tóruszok" között véges szélességű sávok találhatóak, amely sávokban valamely racionális csavarodási számhoz tartozó,  $\varepsilon$  emiatt a perturbációt túl nem élő tórusznak a "törmelékei", elliptikus és hiperbolikus pontoknak a láncolata figyelhető meg (36.4 ábra).

A hiperbolikus pontok környezetében a leképezés nagyon "vad", a pontok rendezetlen sorozatban, látszólag minden szabályszerűség nélkül, kaotikusan követik egymást. Ennek a viselkedésnek a magyarázata - mint arra a 32. fejezetben a diszzipatív rendszerek tárgyalásánál már utaltunk - a fixpont stabil és instabil sokaságának (a leképezés szeparátrixának) metszéspontjaiban, a homoklinikus pontok létezésében lelhető meg. A 36.5 ábrán a konzervatív Hénon-leképezés egyik hiperbolikus pontjának stabil- és instabil szeparátrixát rajzoltuk fel vázlatosan. (Egy ilyen ábra numerikusan úgy kapható meg,

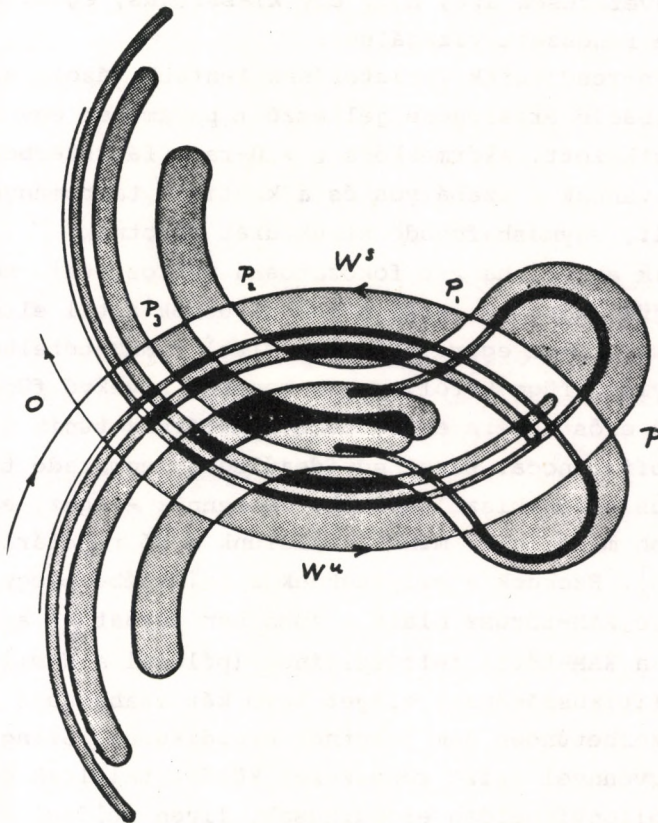


36.5 ábra. A konzervatív Hénon-modell invariáns sajáttságai (szeparátrixai) az A,B,C,... homoklinikus pontokban metszik egymást

hogyan felvesszünk az instabil fixpont két sajátvektora mentén, de a fixponthoz nagyon közel jó sok, mondjuk 10000 pontot és megnézzük, hogy a leképezést sokszor ismételve hová képződnek le. A stabil invariáns sokaság görbéje az iteráció "visszafelé járatásával" rajzolódik ki.) Amennyiben a két szeparátrix valahol véges szögben metszi egymást - márpedig sok leképezésnél úgy tűnik, hogy ez a helyzet, s a konzervatív Hénon-leképezésre analitikus bizonyítás is rendelkezésre áll [7], - akkor végtelen sok más pontban is metszeniük kell még egymást. A metszéspont (a homoklinikus pont) ugyanis az invariáns sokaság definíciója alapján csakis újabb metszéspontba képződhet le, s ez nem lehet a fixpont, hiszen oda egy külső pontból véges sok leképezéssel nem juthatunk el! A homoklinikus pontok tehát végtelen sokan vannak, s a távolságuk - ha egyszer a fixpont közelébe kerülnek, oda, ahol már alkalmazható a leképezés linearizált alakja - exponenciálisan csökken. Másrészt a



leképezés Jacobi-determinánsa 1, emiatt a két homoklinikus pont között a szeparátrixok által közrefogott (a 36.5 ábrán vonalkázással jelölt) terület ugyanakkora kell maradjon. Ez csak úgy fér össze a homoklinikus pontok sűrűsödésével, ha az önmagukat át nem metszhető szeparátrixok rettentő sűrűn és kanyargósan behálózzák az instabil fixpont környékét (36.6 ábra). Emiatt a leképezés hihetetlenül érzékeny a kezdőfeltételek pontos értékére, s az egymáshoz közeli pontok képe gyorsan (exponenciális ütemben eltávolodik egymástól, vagyis a leképezés (s a fázistérben a mozgás) egy viszonylag rövid időn túlmenően teljesen megjósolhatatlan, - tehát a mozgás kaotikus.



36.6 ábra. A  $W^s$  stabil és  $W^u$  instabil sokaság görbéi nagyon sűrűn behálózzák az instabil fixpont környékét [159]

A Birkhoff-lánc elliptikus fixpontjainak mindegyikére alkalmazhatjuk a fentebb elmondottakat, tehát ezek kis környezetében ugyancsak találunk koncentrikus KAM-tóruszokat, azok között újabb fixpont-láncot, melyek közül minden második elliptikus, és így tovább. A finomabb szerkezet természetesen csak nagyobb felbontás mellett válik láthatóvá. Ha viszont a felbontóképesség növelésére van lehetőség és ki tudjuk nagyítani a 36.4 ábra akármelyik elliptikus fixpontjának kis környezetét, akkor - jellegét tekintve - ténylegesen ugyanezt az ábrát kapjuk vissza, annak valamelyik KAM-tóruszát kinagyítva a "képződmény" ismét megismétli önmagát, és így tovább a végtelenségig, vagy legalábbis addig, amíg valami (például a kvantumos effektusok, vagy az eddig elhanyagolt disszipáció) el nem rontja a feltevéseinket, nevezetesen azt, hogy egy klasszikus, egzaktul Hamilton-féle rendszert vizsgálunk.

A Hamilton-rendszerek fázissterének fentebb vázolt szerkezete a perturbáció erősségére jellemző  $\epsilon$  paraméter egy adott értékére vonatkozott. Akármekkora  $\epsilon > 0$ -ra a fázis térben egyszerre jelen vannak a szabályos és a kaotikus tartományok, s ezek bonyolult, egymásbafonódó struktúrát alkotnak.

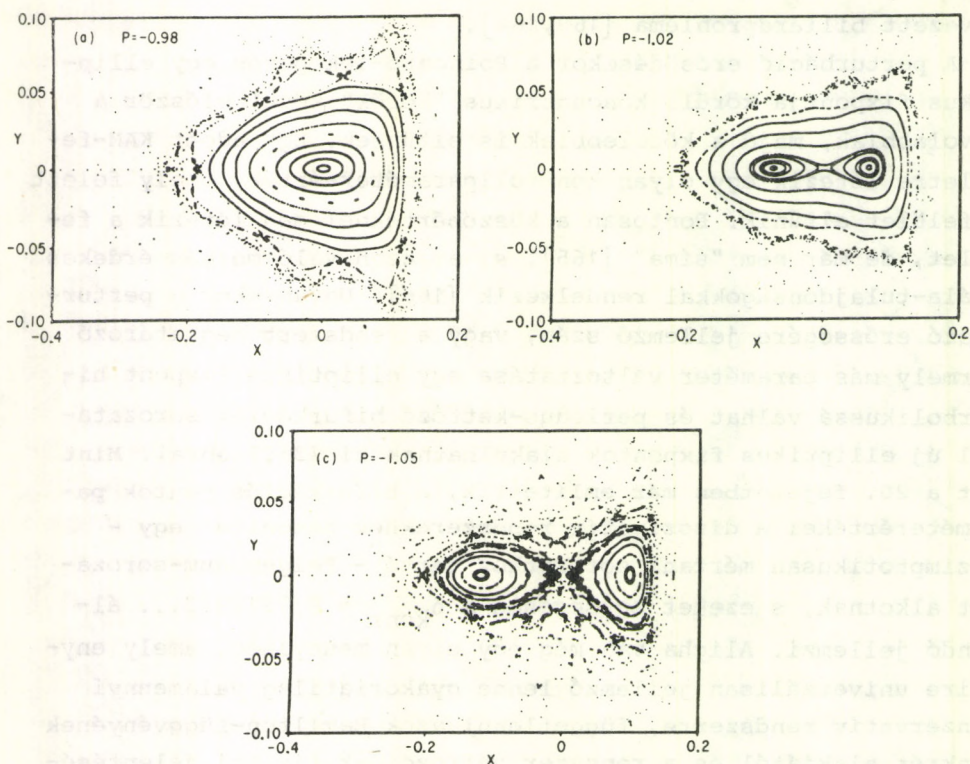
Mi történik akkor, ha  $\epsilon$ -t fokozatosan változtatni, mondjuk növelni kezdjük. Kicsiny  $\epsilon$ -nál a KAM-tóruszok által elfoglalt reguláris rész aránya egyre csökken. Mivel a KAM-tételben szereplő  $K$  mennyiség függ  $\epsilon$ -tól, annak monoton növekvő függvénye, a perturbáció erősödésére egyre több KAM-tórusz tűnik el, alakul át Birkhoff-lánccá. Ezzel egyidejűleg a megmaradó tóruszok közti kaotikus sávok kiszélesednek, de bennük - igaz, egyre kisebb és kisebb méretben - mindig találunk apró reguláris "szigeteket" [163]. Ezeknek a szigeteknek a belsejébe - egy, a szigetet határoló KAM-tórusz miatt - soha nem juthat el a fázispont, amiatt a KAM-tétel feltételeinek (például a Hamilton-függvény analitikusságának) eleget tevő két szabadsági fokú rendszerek szembe tűnően nem lehetnek ergodikusak. Szinguláris Hamilton-függvénnyel leírt rendszerek között találtak olyanokat, melyek bizonyíthatóan ergodikusak. Ilyen például bizonyos esetekben a síknak egy zárt görbe által körülhatárolt részén a falakról rugalmasan visszapattanó tömegpont mozgása, az úgy-



nevezett biliárdprobléma [160,164].

A perturbáció erősödésekor a Poincaré-leképezés egy elliptikus fixpontja körüli koncentrikus "körök" közül először a távolabbiak, majd a közelebbiek is eltűnnek. Egy adott KAM-felületre létezik egy olyan kontrollparaméter-érték, amely felett a felület eltűnik. Pontosan a küszöbértéknél még létezik a felület, de már nem "síma" [165], s az azon való mozgás érdekes skála-tulajdonságokkal rendelkezik [166]. Ugyanakkor a perturbáció erősségére jellemző szám, vagy a rendszert meghatározó bármely más paraméter változtatása egy elliptikus fixpont hiperbolikussá válhat és periódus-kettőző bifurkációk sorozatával új elliptikus fixpontok alakulhatnak ki (36.7 ábra). Mint azt a 20. fejezetben már említettük, a bifurkációs pontok paraméterértékei a disszipatív rendszerekhez hasonlóan egy - aszimptotikusan mértani sorozathoz tartó - Feigenbaum-sorozatot alkotnak, s ezeket egységesen a  $\delta_{\text{konz}} = 8,7210972\dots$  állandó jellemzi. Aligha van még egy olyan mennyiség, amely ennyire univerzálisan jellemző lenne gyakorlatilag valamennyi konzervatív rendszerre, függetlenül azok Hamilton-függvényének konkrét alakjától és a rendszer változóinak fizikai jelentésétől. A kontrollparaméter értékét a Feigenbaum-sorozat torlódási pontján túl növelve a Poincaré-térkép egyik részén eltűnnek ugyan az elliptikus fixpontok, de máshol ettől még megmaradhatnak. Ezek akármelyike a paraméterek alkalmas változtatásával egy másik Feigenbaum-sorozaton keresztül ugyancsak szétdarabolható  $2,4,8,16,\dots\infty$  elliptikus fixponttá, de a KAM-tóruszoktól a teljes fázistérben sohasem szabadulhatunk meg. Azt viszont elérhetjük, hogy a legnagyobb méretű tóruszokat "szétdaraboljuk", s ezáltal a korábban csak nagyon finom skálán észrevehető kaotikus tartományokat (mikroszkopikus káosz) a teljes fázistérrel összemérhető nagyságúra növeljük (makroszkopikus káosz).

A legkülönbözőbb fizikai rendszerek (pl. egy "magneses palackba" zárt plazma, vagy egy, a felső holtpont közeléből indított és periodikusan gyengén perturbált inga) mozgása jellemezhető az



36.7 ábra. Periódus-kettőző bifurkáció egy konzervatív rendszerénél [163]

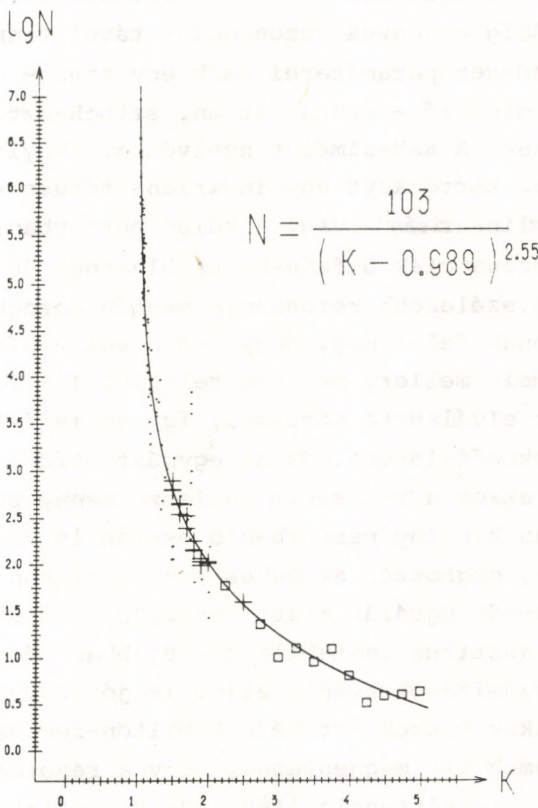
$$x_{n+1} = x_n + K \sin y_n, \tag{36.5}$$

$$y_{n+1} = y_n + x_{n+1}$$

területtartó síkbeli leképezéssel, amelyet standard-leképezésnek is szoktak nevezni. A standard-leképezés mindkét változóját  $2\pi$  szerint periodikusnak tekintjük, így biztosan korlátos a mozgás a  $(2\pi)^2$ , tehát véges nagyságú tartományon. A standard leképezést sokat és sokféle szempontból vizsgálták numerikusan is. Meghatározták például, hogy az  $x_0 = y_0 = 0$  pontból, amely a leképezésnek  $K > 0$ -ra instabil fixpontja, átlagosan



hány leképezés után jut el a rendszer a tartomány túlsó felébe, az  $x = \pi$  pontok közelébe. Ha  $N$ -nel jelöljük ezt a lépésszámot, akkor az  $N(K)$  függvényre a 36.8 ábrán látható alakot kapjuk [147]. Szembetűnő, hogy a leképezés nemlinearitására jellemző  $K$  paramétert nagy értékek felől csökkentve  $K \approx 1$ -nél  $N(K)$  nagyon élesen növekszik és végtelenhez tart,  $K < 1$ -re pe-



36.8 ábra. A standard-leképezés során egy instabil fixpont közeléből az állapottér túlsó felébe való eljutáshoz szükséges lépésszám a kontrollparaméter függvényében

dig a leképezés soha nem visz ki az instabil fixponton átmenő szeparátrix-ágak szűk környezetéből, az ún. sztochasztikus rétegből.

A kétféle mozgásformának, a mikroszkopikus és a makroszkopikus káosznak az éles, fázisátalakulásra emlékeztető szétválásához Chirikov nyomán a következő szemléletes képet fűzhetjük. A kaotikus tartományban való mozgás egy rezonanciának fogható fel. A rezonanciák - annak ellenére, hogy a rendszerben nincsen disszipáció - véges sebességűek és véges amplitúdójuak; ennek a korábban már említett nemlineáris stabilizáció a magyarázata. Amíg az egyes rezonanciák távol vannak egymástól, addig a rendszer paraméterei csak egy szűk - a rezonancia szélességének megfelelő - sávon, az ún. sztochasztikus rétegen belül változhatnak. A KAM-elmélet nyelvén ez annyit jelent, hogy két kaotikus tartományt egy invariáns tórusz választ el egymástól. A nemlinearitást, vagy a külső perturbációk erősségét növelve a rezonanciák átfedésbe kerülhetnek és a rendszer most már a közös, szélesebb rezonancia mentén mozoghat. A KAM-elméletben az annak felel meg, hogy  $\varepsilon$ -t növelve  $K(\varepsilon)$  olyan naggyá válik, amely mellett már nem teljesül (35.7) a két kaotikus tartományt elválasztó tóruszra, így az is felbomlik, szétesik egy Birkhoff-láncre. Ha az egymást átfedő rezonanciák száma végtelen, akkor a rendszert jellemző mennyiségek még infinitezimálisan kicsiny perturbáció esetén is véges nagyságot változhatnak, méghozzá az egyes rezonanciákon történő szabálytalan ide-oda ugrálás miatt lényegében véletlenszerűen. Ez az ún. sztochasztikus instabilitás. Újabban végzett renormálási csoport számítások kvantitatíve is jó eredményre vezettek a stochasztikus küszöb értékére Hamilton-rendszerekben [167-168]. (Érdemes itt megjegyezni, hogy a renormálási csoport módszer az intermittencia [169-170] vizsgálatára is kiterjeszthető volt területtartó leképezéseknél [171].)

Mivel a matematikai egzisztencia-tétel jellegű KAM-elmélet magában még semmit nem mond arról, hogy egy konkrét nem integrálható rendszer fázisterében a mozgás milyen mértékben sztochasztikus, illetve szabályos, hogy hol helyezkednek el a KAM-tóruszok és a fázistér fogat hányadrészét töltik ki és hogy mennyiben gátolják a rendszer mozgását; a fizikusok szá-



mára elsőrendűen fontos a sztochasztikus rétegek vastagságának és a sztochasztikus küszöb értékének kiszámítása, vagy megbecslése, a fázisrajektóriák széttartására jellemző Ljapunov-exponens meghatározása, s általában a nem integrálható rendszerek fázisterének minél részletesebb feltérképezése. Érthető, hogy a legújabb kutatások elsősorban ezeken a területeken folynak.

## FÜGGELÉK

### F.1 DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA A SZINGULÁRIS PONTOK KÖZELÉBEN

Az  $n$ -változós elsőrendű autonóm

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

differenciálegyenlet  $\vec{x}_0$  pontját szingulárisnak nevezzük, ha  $\vec{f}(\vec{x}_0) = 0$ . Az ilyen pontokban a  $d\vec{x}/dt$  deriváltvektor iránya nem egyértelmű, ezért  $\vec{x}_0$ -on nem feltétlenül egy trajektória (megoldásgörbe) halad keresztül, hanem esetleg végtelen sok, vagy egyetlen egy sem.

A szinguláris pont - melyet az  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{x}_0$  transzformációval az origóba tolhatunk - kis környezetében  $\vec{f}(\vec{x})$  általában egy lineáris függvénnyel közelíthető:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(0) + \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=0} \vec{x} + \dots \approx D \vec{x},$$

ahol a  $D$  derivált-tenzor elemei

$$D_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{\vec{x}=0}.$$

Ebben a közelítésben a mozgásegyenlet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = D \vec{x}(t),$$

amely (a véletlen elfajulásnak tekinthető többszörös sajátértékek esetét leszámítva) hasonlósági transzformációval diagonalizálva  $D$ -t, mindig független egyenletekre bontható szét. Képezzünk ugyanis  $D$  bal és jobb oldali sajátvektoraiból egy  $C$  és  $C^{-1}$  mátrixot, ezekkel  $D$  a

$$CDC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \dots \lambda_n \end{pmatrix}$$



diagonális alakra hozható, ahol  $\lambda_i$ -k D-nek (általában komplex) sajátértékei. Ekkor viszont az  $\vec{y} = C \vec{x}$  új vektorváltozóra át-  
térve - vagyis az eredeti  $x_i$  koordinátákkal megadott térben al-  
kalmas ferdeszögű bázist választva - a

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i y_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszer adódik, melynek megoldása

$$y_i(t) = y_i(0) e^{\lambda_i t}.$$

Amennyiben valamennyi  $\lambda_i$  valós része negatív, úgy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = 0,$$

ilyenkor az  $\vec{x} = 0$  pontot vonzó fixpontnak nevezzük. Ha vala-  
mennyi  $\lambda$ -ra  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , úgy az  $\vec{x} = 0$  pont taszító fixpont. Ha  
pozitív és negatív valós részű sajátértékek egyaránt előfordul-  
nak, úgy a fixpont bizonyos irányokból vonzónak, más irányok-  
ból pedig taszítónak mutatkozik; ez az úgynevezett hiperbolikus  
pont esete.

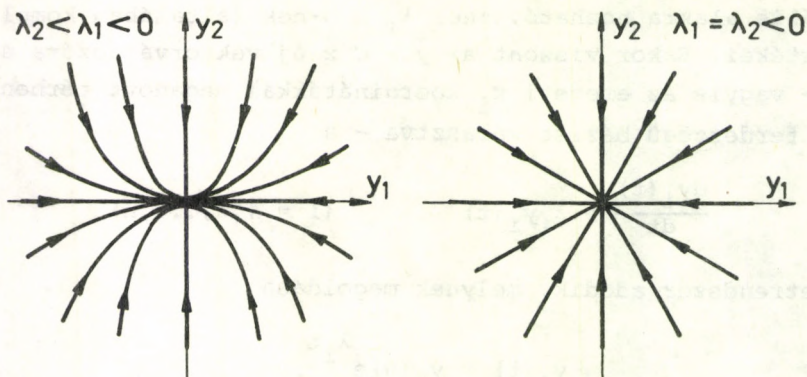
Vizsgáljuk meg kicsit részletesebben a kétkomponensű (tehát  
a síkbeli)  $\vec{x}$  vektor esetét! (Többdimenziós mozgások szingulá-  
ris pontjainak osztályozása hasonlóan végezhető el.)

a.) Ha D mindkét sajátértéke valós és negatív, akkor

$$y_1(t) = y_1(0) e^{\lambda_1 t},$$

$$y_2(t) = y_2(0) e^{\lambda_2 t},$$

vagyis a pályagörbék egyenlete:  $y_2 = \text{állandó} \cdot (y_1)^a$ ;  
 $a = \lambda_2 / \lambda_1 > 0$ . Az origón végtelen sok megoldásgörbe, nevezé-  
tesen a-adfokú parabola halad át, melyek  $\lambda_1 = \lambda_2$  esetben egye-  
nesekbe mennek át (F1.1 ábra) A nyilak az időbeli haladási  
irányra utalnak. Az origót - melyet ebben az esetben csomópont-  
nak nevezünk - az állapottér bármely pontjából indulva csak  
végtelen hosszú idő alatt érhetjük el.



F1.1 ábra. Vonzó csomópont különböző, illetve egyenlő sajátértékek esetén

A pozitív valós sajátértékek esetében a mozgás a fentiek időtükrözöttje lesz, ilyenkor a szinguláris pontot taszító csomópontnak hívjuk.

b.) Ha a sajátértékek valósak, de ellenkező előjelűek, úgy a megoldások

$$y_1 = \text{állandó} \cdot e^{-|\lambda_1|t},$$

$$y_2 = \text{állandó} \cdot e^{+|\lambda_2|t},$$

vagyis a pályagörbék egyenlete

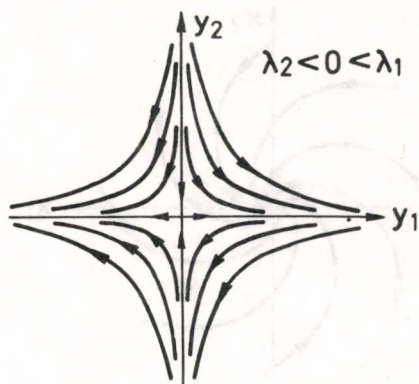
$$y_1 y_2^a = \text{állandó}, \quad a = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| > 0.$$

Ezek, az F1.2 ábrán látható görbék az  $a=1$  esetben hiperbolák. Az origón - melyet most nyeregpontnak, vagy hiperbolikus pontnak nevezünk - két megoldásgörbe halad át.

c.) Amennyiben a (valós) D mátrixnak komplex gyökei vannak, úgy ezek csakis komplex konjugált párban jelenhetnek meg:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega.$$





F1.2 ábra. Nyeregpont, másnéven hiperbolikus pont

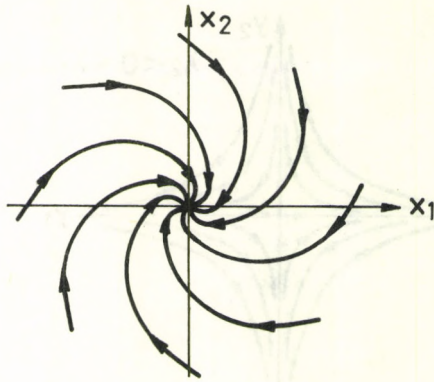
A megoldást az eredeti koordinátákkal

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} A_1 \cos(\omega t - \phi_1),$$

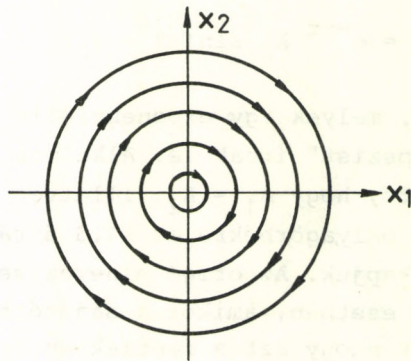
$$x_2(t) = e^{-\gamma t} A_2 \sin(\omega t - \phi_2)$$

alakban írhatjuk fel, melyek egy exponenciális ütemben csökkenő féltengelyű "ellipszist" írnak le. Alkalmos elforgatással és nyújtással elérhető, hogy  $A_1 = A_2$ , illetve  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  teljesüljön, ekkor a pályagörbékre az F1.3 ábrán látható logaritmikus spirálokat kapjuk. Az origó elnevezése ebben az esetben fókuss. Abban az esetben, amikor a sajátértékek valós része nem negatív, mint ahogy azt a fentiekben feltételeztük, hanem pozitív, akkor a mozgás nem a fókuszbába befelé, hanem fordítva, onnan kifelé történik.

d.) Az előző eset speciális része az, amikor  $\gamma = 0$ , vagyis a sajátértékek tisztán képzetes számok. A pályagörbék ilyenkor ellipszisek, melyek lineáris transzformációval körökké alakíthatók (F1.4 ábra). Az origón - melyet ekkor centrumnak, vagy elliptikus fixpontnak hívnak - egyetlen megoldásgörbe sem halad át.



F1.3 ábra. Komplex konjugált sajátértékek esetén a szinguláris pont fókusz



F1.4 ábra. Elliptikus fixpont, másnéven centrum

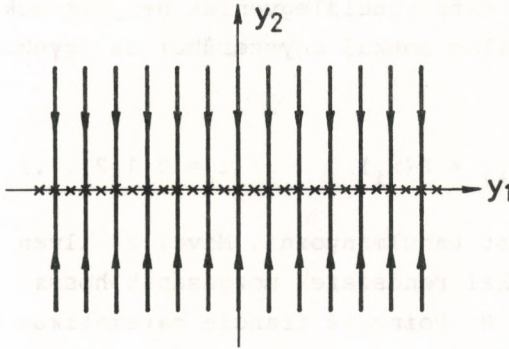
e.) Ha  $D$  valamelyik sajátértéke nulla, a másik pedig negatív, akkor a megoldások:



$$y_1(t) = y_1(0) = \text{állandó},$$

$$y_2(t) = y_2(0) e^{-|\lambda|t},$$

a megoldásgörbék pedig egyenesek (F1.5 ábra). Ebben az esetben az origó nem egy izolált szinguláris pont, hanem az  $y_2 = 0$  egyenletű egyenes valamennyi pontja fixpont. Ilyenkor



F1.5 ábra. Parabolikus fixpont ( $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ )

tulajdonképpen "fix-vonalról" kellene beszéljünk, ez azonban strukturálisan nem stabil alakzat, hiszen csak a paraméterek nagyon speciális értékénél létezik. A differenciálegyenlet valamelyik paramétere tetszőlegesen kicsit megváltoztatva elromlik a  $\det D = 0$  feltétel, a fix-vonal eltűnik, s az origó (melyet ebben az elfajult esetben parabolikus pontnak neveznek)  $\det D$  előjelétől függően nyeregponttá, vagy csomóponttá alakul át.

## F.2 POINCARÉ-LEKÉPEZÉSEK

### A. Diszkrét leképezések

Egy  $n$ -komponensű  $\vec{x}(t)$  vektorfüggvényre vonatkozó

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (\text{F2.1})$$

elsőrendű autonóm differenciálegyenlet helyett sokszor célszerűbb (és technikailag sokkal egyszerűbb) az egyenletből származtatható

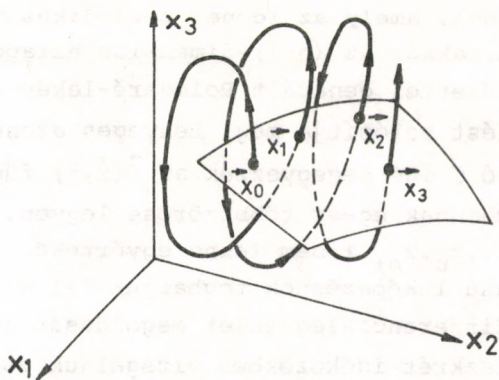
$$\vec{x}_{i+1} = P(\vec{x}_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{F2.2})$$

diszkrét leképezést tanulmányozni. Mivel az ilyen típusú leképezéseket mechanikai rendszerek mozgásának hosszú idejű stabilitásvizsgálatára H. Poincaré francia matematikus alkalmazta először, ezeket szokás Poincaré-leképezéseknek is nevezni.

Egyik lehetőség a Poincaré-leképezésre az, ha az  $n$ -dimenziós állapot térben kijelölünk egy  $(n-1)$ -dimenziós hiperfelületet, melyet a trajektóriák rendre átmetszenek. Az egymás utáni metszéspontokat  $\vec{x}_i$ -vel jelölve (ezek tulajdonképpen csak  $(n-1)$ -dimenziós vektorok, hiszen egy koordinátájuk kifejezhető a többivel) mindegyikük helyzete - mivel az (F2.1) egyenlet elsőrendű - egyértelműen meghatározza a rákövetkezőt, tehát  $\vec{x}_0$ -ból  $\vec{x}_1 = P(\vec{x}_0)$ , abból  $\vec{x}_2 = P(\vec{x}_1)$ , stb. számítható. A leképezés  $P$  függvényalakja - mivel az (F2.1)-ben szereplő  $\vec{f}(\vec{x})$  nem függ az időtől és folytonos - ugyancsak egy folytonos és a pontsorozat indexétől független függvény.

A legnagyobb gyakorlati jelentősége a háromdimenziós állapot térben képezhető kétdimenziós Poincaré-leképezésnek van. Erre az esetre vezet a háromváltozós disszipatív rendszerek, illetve a két szabadsági fokú konzervatív rendszerek vizsgálata. Ez utóbbinál ugyan a fázistér 4-dimenziós, de mivel a rendszer teljes energiája mozgásállandó, a tényleges mozgás a 3-dimenziós  $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = E$  "energia-hiperfelületen" történik. Megállapodás szerint a Poincaré-leképezés megkonstruálásánál a kijelölt felületnek csak azokat a pontjait szokták fi-





F2.1 ábra. Egy háromdimenziós állapottérben történő mozgás Poincaré-leképezése

gyelembe venni, melyekben az állapottérbeli trajektória ugyanabból az irányból metszi át a felületet (F2.1 ábra).

Egy másik lehetőség Poincaré-leképezésre olyan rendszereknél adódik, melyeket egy nem-autonóm

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (F2.3)$$

egyenletrendszer ír le, melyben azonban  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  a  $t$  időváltozó-  
nak periodikus függvénye:  $\vec{f}(\vec{x}, t+T) \equiv \vec{f}(\vec{x}, t)$ . Ekkor valamely  
 $t=t_0$  pillanatbeli  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  egyértelműen meghatározza  
 $\vec{x}(t_0+T) = \vec{x}_1$ -et, az pedig  $\vec{x}(t_0+2T) = \vec{x}_2$ -t, és így tovább. Az

$$\vec{x}(t_0+i \cdot T) \equiv \vec{x}_i = P(\vec{x}_{i-1}) \quad (F2.4)$$

hozzárendelés egy Poincaré-leképezés,  $x_{i+1}$  csak  $x_i$ -től függ,  
az időtől, illetve az ennek megfelelő  $i$  indextől -  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  pe-  
riodicitása miatt - expliciten nem. Ez a leképezés látszólag  
más jellegű, mint a fentebb tárgyalt (felület-átmetszéssel adó-  
dó) eset, de valójában nem különbözik lényegesen attól. Ha  
ugyanis az  $n$ -komponensű  $\vec{x}$  vektort kiegészítjük egy olyan

$n+1$ -edik komponenssel, amely az időnek periodikus függvénye, pl.  $x_{n+1} = \sin \frac{2\pi}{T}t$ , akkor az  $(n+1)$ -dimenziós állapottérben az  $x_{n+1} = \text{állandó}$  felülettel generált Poincaré-leképezés éppen az (F2.4) hozzárendelést valósítja meg. Lényeges azonban, hogy az (F2.4)-ben szereplő  $T$  idő megegyezzen az  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  függvény periódusidejével, vagy annak egész többszöröse legyen, ellenkező esetben  $\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  nem lenne egyértékű függvény.

Ugyanilyen típusú leképezésnek foghatjuk fel azt is, amikor egy (F2.1) alakú differenciálegyenlet megoldását az  $\vec{x}_i = \vec{x}(t_0 + i \cdot \Delta t)$  diszkrét időközökben vizsgáljuk csupán, s  $\vec{x}_i$ -ből számoljuk ki  $\vec{x}_{i+1}$  értékét. Ez az egyenlet ugyanis speciális esete (F2.3)-nak, nevezetesen az a speciális esete, amikor  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  egyáltalán nem függ  $t$ -től. Természetesen egy ilyen  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  akármekkora  $\Delta t$  időtartamra nézve "periodikus", tehát (F2.4) akármekkora  $T = \Delta t$  időtartamra nézve egy egyértékű, folytonos leképezést definiál.

Fontos fogalom a leképezések elméletében az invariáns sokaság fogalma. Ezek olyan  $H$  ponthalmazok, melyek a leképezés során önmagukba mennek át, vagyis minden  $\vec{x} \in H$ -ra fennáll, hogy  $P(\vec{x}) \in H$ . Invariáns sokaság lehet pl. egy  $N$  pontból álló pontsorozat, ilyenkor véges ( $N$  periódusú) ciklusról beszélünk. Jellemezője:

$$P(\vec{x}_1) = \vec{x}_2,$$

$$P(\vec{x}_2) = \vec{x}_3,$$

.

.

.

$$P(\vec{x}_{N-1}) = \vec{x}_N,$$

$$P(\vec{x}_N) = \vec{x}_1;$$

ilyenkor  $H = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\}$ . Az invariáns sokaság azonban nemcsak egy véges pontsorozat, hanem pl. egy görbe is lehet. A síkbeli  $\vec{x} = (x, y)$  pontokra felírt



$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha,$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha$$

leképezés egy  $\alpha$  szögű forgás-transzformációnak felel meg, s ennek irracionális  $2\pi/\alpha$  esetén nincsenek véges ciklusai, az  $x^2 + y^2 = \text{állandó}$  egyenletű körök viszont invariáns sokaságot alkotnak.

## B. Konzervatív rendszerek leképezései

A leképezések lényeges jellemzője a területcsökkenés mértékét meghatározó

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{x}_{i+1}}{\partial \vec{x}_i} \end{bmatrix}$$

Jacobi-determináns. Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a konzervatív rendszerek Poincaré-leképezése területtartó, vagy alkalmas koordinátákat (alkalmas invariáns mértéket) használva területtartóvá tehető.

Amennyiben egy időfüggetlen  $H(p, q)$  Hamilton-függvényből származtatjuk az  $\vec{x} = (q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N)$  vektor komponenseinek

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{és} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

mozgásegyenleteit, úgy az állapottérbeli trajektóriák infinitzimális  $dt$  időkülönbségű pontjainak kapcsolatát megadó

$$\vec{x}(t_0 + dt) = \vec{x}_1 = P(\vec{x}_0) = P[\vec{x}(t_0)]$$

transzformáció Jacobi-determinánása

$$J = \begin{vmatrix} E + \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{p} \partial \vec{q}} dt, & -\frac{\partial^2 H}{\partial \vec{q} \partial \vec{q}} dt \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{p} \partial \vec{p}} dt, & E - \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{q} \partial \vec{p}} dt \end{vmatrix} = 1 + \text{Sp} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{p} \partial \vec{q}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{q} \partial \vec{p}} \right) dt \equiv 1,$$

s ebből integrálással véges  $\Delta t$  időkülönbségű leképezésre is  $J=1$  adódik. Ugyanez érvényes akkor is, amikor  $H$  expliciten függ az időtől, de annak  $T$  periódusú függvénye; az  $\vec{x}(t_0)$  és  $\vec{x}(t_0+T)$  pontokat összekötő Poincaré-leképezés Jacobi-determinánsa ebben az esetben is 1.

A fázistérbeli trajektóriáknak egy adott felülettel történő elmetszésével adódó Poincaré-leképezés vizsgálata kicsit bonyolultabb, mint a rögzített időkülönbséghez tartozó leképezéseké. Az általános eset helyett tekintsük egy két szabadsági fokú konzervatív rendszer négydimenziós fázissterében a háromdimenziós energia-hiperfelületen mozgó trajektóriákat!

Először megmutatjuk, hogy egy - a fázistérbeli áramlással együttmozgó - kétdimenziós felületre vett

$$I = \iint dq_1 dp_1 + \iint dq_2 dp_2 \quad (F2.5)$$

integrál a mozgás során időben állandó marad. Nyilván elegendő ezt egy infinitezimális felületdarabkára és infinitezimális időtartamra belátni, ebből a véges eset integrálással adódik.

Jelöljük a két szabadsági fokú rendszer általános koordinátáit  $x$ -szel és  $y$ -nal, a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok pedig legyenek  $p$  és  $q$ ! A  $\xi = (x, y, p, q)$  fázistérbeli pontból két különböző irányban

$$\Delta \xi = (\Delta x, \Delta y, \Delta p, \Delta q)$$

és

$$\Delta \vec{\xi}' = (\Delta x', \Delta y', \Delta p', \Delta q')$$

infinitezimális vektorokkal elmozdulva egy olyan kétdimenziós  $F$  felületdarabkát (pontosabban annak csúcsait) járhatjuk végig, melyet a  $\Delta \vec{\xi}$  és  $\Delta \vec{\xi}'$  vektorok "feszítenek ki". Erre a felületre képezve az (F2.5) integrálokat

$$I = (\Delta x \Delta p' - \Delta x' \Delta p) + (\Delta y \Delta q' - \Delta y' \Delta q) \quad (F2.6)$$



adódik. Tekintve, hogy a fázistérbeli áramlást a Hamilton-egyenleteken keresztül a

$$\vec{v}(\xi) = (v_x, v_y, v_p, v_q) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q}, -\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y} \right)$$

négydimenziós sebességmező írja le, valamely  $\xi$  pont  $\Delta t$  idő alatt a  $\xi + \vec{v}(\xi) \Delta t$  helyre, a  $\xi + \Delta \xi$  koordinátájú pont pedig a

$$\xi + \Delta \xi + \vec{v}(\xi + \Delta \xi) \Delta t \approx \xi + \Delta \xi + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi} \Delta \xi \Delta t$$

helyre kerül, így az elmozdulásvektor  $\Delta t$  idő alatt a

$$\Delta \xi^* = \Delta \xi + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi} \Delta \xi \Delta t$$

$\Delta \xi'$  pedig a

$$\Delta \xi'^* = \Delta \xi' + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi} \Delta \xi' \Delta t$$

vektorba megy át. Ezekkel képezve az (F2.5) integrált az

$$I^* = (\Delta x^* \Delta p'^* - \Delta x'^* \Delta p^*) + (\Delta y^* \Delta q'^* - \Delta y'^* \Delta q^*) \quad (\text{F2.7})$$

kifejezés adódik, annak első tagjára pedig ( $\Delta t$ -ben elsőrendig számolva)

$$\begin{aligned} \Delta x^* \Delta p'^* &= \left( \Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \Delta \xi \Delta t \right) \left( \Delta p' + \frac{\partial v_p}{\partial \xi} \Delta \xi \Delta t \right) = \\ &= \Delta x \Delta p' + \Delta t \left[ \Delta x \Delta p' \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial p} \right) + \left\{ \Delta x \Delta x' \frac{\partial v_p}{\partial x} + \Delta p \Delta p' \frac{\partial v_x}{\partial p} \right\} \right] + \\ &+ \Delta t \left[ \Delta x \Delta y' \frac{\partial v_p}{\partial y} + \Delta x \Delta q' \frac{\partial v_p}{\partial q} + \Delta p' \Delta y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \Delta p' \Delta q \frac{\partial v_x}{\partial q} \right]. \end{aligned}$$

A kerek zárójelben álló kifejezés a mozgásegyenletek szerint azonosan nulla, a kapcsos zárójelben álló két tag invariáns a  $\Delta \xi \leftrightarrow \Delta \xi'$  transzformációra, ezért  $\Delta x'^* \Delta p^*$  megfelelő részeivel éppen kiejtik egymást, s így az  $\iint dx dp$  integrálra a

$$\begin{aligned} \Delta x^* \Delta p'^* - \Delta x'^* \Delta p^* &= \Delta x \Delta p' - \Delta x' \Delta p + \\ + \Delta t \left[ (\Delta x \Delta y' - \Delta y \Delta x') \frac{\partial v_p}{\partial y} + (\Delta x \Delta q' - \Delta x' \Delta q) \frac{\partial v_p}{\partial q} + \right. & \quad (F2.8) \\ \left. + (\Delta y \Delta p' - \Delta y' \Delta p) \frac{\partial v_x}{\partial y} + (\Delta q \Delta p' - \Delta q' \Delta p) \frac{\partial v_x}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

eredmény adódik. Hasonlóan számítható ki az  $\iint dy dq$  integrál is, melynek eredménye a fentiekből  $(x,p) \leftrightarrow (y,q)$  helyettesítéssel is megkapható:

$$\begin{aligned} \Delta y^* \Delta q'^* - \Delta y'^* \Delta q^* &= \Delta y \Delta q' - \Delta y' \Delta q + \\ + \Delta t \left[ (\Delta y \Delta x' - \Delta x \Delta y') \frac{\partial v_q}{\partial x} + (\Delta y \Delta p' - \Delta y' \Delta p) \frac{\partial v_q}{\partial p} + \right. & \quad (F2.9) \\ \left. + (\Delta x \Delta q' - \Delta x' \Delta q) \frac{\partial v_y}{\partial x} + (\Delta p \Delta q' - \Delta q \Delta p') \frac{\partial v_y}{\partial p} \right]. \end{aligned}$$

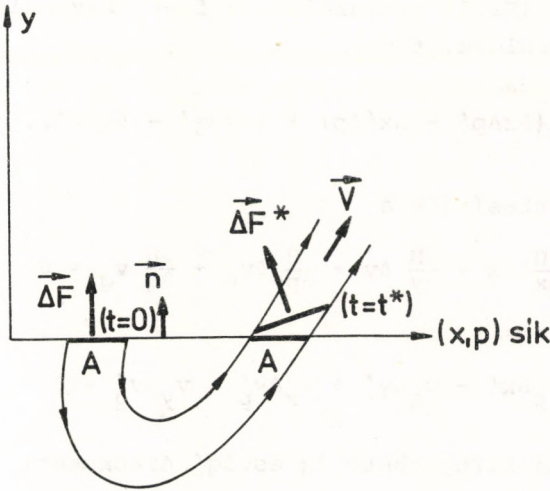
(F2.8) és (F2.9) egyenletek összegéből a szögletes zárójelben álló tagok kiejtik egymást, s marad, hogy  $I = I^*$ , vagyis a

$$\iint (dx dp + dy dq)$$

integrál a mozgás során állandó marad.

A fenti eredmény birtokában már könnyen bebizonyíthatjuk, hogy a háromdimenziós energia-hiperfelületen mozgó állapotvektorok trajektóriáinak pl. az  $y=0$  síkkal vett metszéspontjaira érvényes Poincaré-leképezés területtartó. Mérjük fel egy háromdimenziós derékszögű koordináta rendszer tengelyeire az  $x, p, y$  koordinátákat; a  $\vec{\xi}$  vektor negyedik komponensét,  $q$ -t nem ábrázoljuk, hanem szükség esetén a  $H(x, y, p, q) = E$  egyenlőségből kiszámíthatjuk. Vegyünk fel az  $y=0$  síkban egy  $\Delta F$  nagyságú felületdarabkát (mondjuk téglalapot), s nézzük meg, hogy ennek a felületdarabkának a pontjain átmenő fázistér-trajektóriák mekkora  $A$  területet sűrűsnek, amikor legközelebb ismét (ugyanarról az oldalról) átmetszik az  $y=0$  felületet. Az eredetileg ( $t=0$ -kor) a felület  $\vec{n}$  normálisával párhuzamos  $\Delta \vec{F}$  vektor a visszatérés  $t=t^*$  időpontjában már nem lesz  $\vec{n}$  irányú, hanem "kibillen", s egy  $\Delta \vec{F}^*$  vektorral jellemezhető,  $\vec{v}$  sebes-





F2.2 ábra. Egy konzervatív rendszer Poincaré-leképezése területtartó, vagy alkalmas mérték választásával területtartóvá tehető

séggel mozgó felületelemmé alakul (F2.2 ábra). A különböző időpillanatokban végigsúrolt felület  $\Delta\vec{F}^*$ -gal és  $\vec{v}$ -vel a

$$A \vec{n} \cdot \vec{v} = \Delta\vec{F}^* \cdot \vec{v} ,$$

azaz az

$$A = \Delta F_y^* + \Delta F_x \frac{v_x}{v_y} + \Delta F_p \frac{v_p}{v_y}$$

alakban fejezhető ki, s ez a  $\Delta\vec{F}^*$  felületelemet kifesztítő

$\Delta\vec{\xi} = (\Delta x, \Delta p, \Delta y)$  és  $\Delta\vec{\xi}' = (\Delta x', \Delta y', \Delta p')$  vektorok komponenseivel

$$A = (\Delta x \Delta p' - \Delta x' \Delta p) + \frac{v_x}{v_y} (\Delta p \Delta y' - \Delta y \Delta p') + \frac{v_p}{v_y} (\Delta y \Delta x' - \Delta x \Delta y') \quad (F2.10)$$

alakban is felírható. Másrészt viszont a  $\Delta\vec{\xi}$  és  $\Delta\vec{\xi}'$  vektorok által kifesztített felületelemre és annak  $t=0$  pillanatbeli meg-

felelőjére vett (F2.5) integrálok (a fent bizonyított tétel értelmében) egyenlőek, tehát

$$|\Delta \vec{F}| = (\Delta x \Delta p' - \Delta x' \Delta p) + (\Delta y \Delta q' - \Delta q \Delta y').$$

Ha ebbe behelyettesítjük a

$$\Delta H = \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial H}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial H}{\partial p} \Delta v_p + \frac{\partial H}{\partial q} v_q = 0$$

és a

$$-v_p \Delta x' - v_q \Delta y' + v_x \Delta v_p' + v_y \Delta v_q' = 0$$

összefüggésekből kifejezhető  $\Delta q$  és  $\Delta q'$  értékeket,

$$|\Delta F| = (\Delta x \Delta p' - \Delta p \Delta x') + \frac{v_x}{v_y} (\Delta p \Delta y' - \Delta p' \Delta y) + \frac{v_p}{v_y} (\Delta y \Delta x' - \Delta x \Delta y')$$

vagyis

$$|\Delta \vec{F}| = A,$$

azaz a Poincaré-leképezés területtartó.

A levezetés során tulajdonképpen csak azt használtuk ki, hogy a metsző felület mentén  $y = \text{állandó}$ , nem pedig azt, hogy  $y = 0$ , ezért a trajektória-seregnek bármely  $y = y_0$  felülettel vett metszete állandó területű. Egy tetszőleges  $F$  felülettel képzett Poincaré-leképezés általában nem lesz területtartó, viszont igaz az, hogy az  $(x, y, p)$  koordináta rendszerben mérhető  $\Delta F$  súrolt felületdarabkákra

$$\iint_{\Delta F} \rho(x, p) dF = \iint_{\Delta F^*} \rho(x, p) dF. \quad (\text{F2.11})$$

Létezik tehát invariáns mérték, melynek konkrét alakja a felület  $\vec{n}$  normálvektorával és a fázistérbeli áramlás  $\vec{v}$  sebességével  $\rho = \vec{n} \cdot \vec{v} / v_y$  módon fejezhető ki. Lényeges, hogy az invariáns mérték a fázistérbeli koordinátáknak nem szinguláris függvénye. A disszipatív rendszereknél is található ugyanis olyan  $\rho$  függvény, mellyel (F2.11) formálisan teljesül, pl. az



$$x_{i+1} = x_i,$$

$$p_{i+1} = p_i/2$$

leképezésnél

$$\iint \frac{1}{p_i} dp_i dx_i = \iint \frac{1}{p_{i+1}} dp_{i+1} dx_{i+1},$$

de ilyen esetekben a  $\rho(x,p)$  függvény bizonyos tartományokban (az idézett példában a  $p=0$  egyenes mentén) szinguláris.

### C. Leképezések fixpontjainak stabilitás-vizsgálata

Az  $\vec{x}_{i+1} = P(\vec{x}_i)$  leképezés fixpontjának azon  $\vec{x}^*$  pontot nevezük, melyre fennáll, hogy

$$P(\vec{x}^*) = \vec{x}^*. \quad (\text{F2.12})$$

A fixpont kis környezetében a differenciálhatónak feltételezett  $P$  függvény sorbafejthető, s így

$$\vec{x}_{i+1} - \vec{x}^* = M (\vec{x} - \vec{x}^*) \quad (\text{F2.13})$$

írható, ahol  $M$  a leképezés derivált-tenzora a fixpontban. A koordinátarendszer kezdőpontját a fixpontba tolva az

$$\vec{x}_{i+1} = M \vec{x}_i \quad (\text{F2.14})$$

egyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$\vec{x}_k = M^k \vec{x}_0. \quad (\text{F2.15})$$

Az  $\vec{x}_k$  pontsorozat  $k \rightarrow \infty$ -beli viselkedését az  $M$  mátrix sajátértékei határozzák meg. Alkalmass ferdeszögű koordináta rendszerben ugyanis a  $2 \times 2$ -es  $M$  mátrix

$$M \rightarrow \text{CMC}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

alakra transzformálható, s ekkor az az  $\vec{x} = (x, y)$  (transzformált) vektor komponenseire

$$x_k = \mu_1^k x_0,$$

$$y_k = \mu_2^k y_0$$

adódik. Amennyiben  $\mu_1 < 1$  és  $\mu_2 < 1$  (vagy komplex sajátértékek esetén  $|\mu_1| < 1$  és  $|\mu_2| < 1$ ), úgy  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , az origó tehát vonzó fixpont. Ha a sajátértékek mindegyike egynél nagyobb abszolút értékű, akkor a fixpont instabil, taszító. Akkor is instabil a leképezés fixpontja, ha az egyik sajátérték egynél nagyobb, a másik pedig egynél kisebb valós szám; ilyenkor hiperbolikus fixpontról beszélünk. Ebben az esetben van egy olyan irány, amely felől vonzó, egy másik felől pedig taszító a fixpont, általában pedig a mozgás (a leképezések sorozata) az  $x = C/x^u$  egyenletű invariáns görbék mentén történik ( $u = -\ln\mu_1/\ln\mu_2 =$  = állandó  $> 0$ ). A vonzó és a taszító fixpontok között határesetet képez az, amikor  $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ , vagyis  $\mu_1 = e^{i\alpha}$  és  $\mu_2 = e^{-i\alpha}$ . (Valós mátrix sajátértékei mindig komplex konjugált párokban kell előforduljanak. Ugyanezen okból  $|\mu_1| > 1$  és  $|\mu_2| < 1$  csak valós  $\mu$ -k mellett teljesülhet.) Ilyenkor a leképezés alkalmas koordináta transzformáció után egy  $\alpha$  szögű forgatással írható le, az invariáns görbék koncentrikus körök, vagy  $x$  és  $y$  irányban különböző léptéket használva: ellipszisek. Emiatt az ilyen fixpontot elliptikus pontnak is szokták nevezni.

A leképezések lineáris stabilitás-vizsgálata szoros kapcsolatba hozható az F.1 függelékben tárgyalt

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = D \vec{x}(t)$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszerek stabilitás-analizisével. Ez utóbbi megoldása ugyanis

$$\vec{x}(t) = e^{D t} \vec{x}(t=0),$$



ami annyit jelent, hogy az  $\vec{x}_i = \vec{x}(t=i \Delta t)$  pontok közti (F2.14) típusú Poincaré-leképezés mátrixa

$$M = e^{D \Delta t}.$$

A  $D$  mátrix  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  sajátértékei  $M$  sajátértékeivel az

$$e^{\lambda_1 \Delta t} = \mu_1, \quad e^{\lambda_2 \Delta t} = \mu_2$$

kapcsolatban állnak. A stabilitás feltétele az, hogy  $\text{Re } \lambda_i < 0$ , vagyis  $|\mu_i| < 1$  teljesüljön. Konzervatív rendszerekre  $\text{Sp } D = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , ennek a leképezéseknél  $\det M = \mu_1 \cdot \mu_2 = \exp(\text{Sp}(D \Delta t)) = 1$  felel meg. Egy konzervatív rendszer Poincaré-leképezésének csak hiperbolikus, vagy elliptikus fix-pontja lehet.

A különböző sajátértékekhez tartozó leképezések invariáns sokaságai az F.1 függelékben felrajzolt görbék.

### F.3 KÉTDIMENZIÓS KVADRATIKUS LEKÉPEZÉSEK

Megmutatjuk, hogy minden olyan kétdimenziós kvadratikus leképezés, melynek Jacobi-determinánsa állandó, két lényeges paramétertől függ csak, s mindig

$$x_{i+1} = y_i + 1 - a x_i^2,$$

$$y_{i+1} = b x_i$$

alakra hozható. A legáltalánosabb kétdimenziós kvadratikus leképezés, amely általában az

$$x_{i+1} = a x_i + b y_i + c x_i^2 + d x_i y_i + e y_i^2 + f, \tag{F3.1}$$

$$y_{i+1} = a' x_i + b' y_i + c' x_i^2 + d' x_i y_i + e' y_i^2 + f'$$

alakba írható, 12 paramétert tartalmaz. Ezek száma azonban  $x$  és  $y$  alkalmasan választott lineáris transzformációjával,

vagyis az  $(x, y)$  síkon alkalmas ferdeszögű koordinátarendszer bevezetésével lényegesen csökkenthető. Másrészt az (F3.1) leképezés Jacobi-determinánisa

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} a + 2cx_i + dy_i & b + d x_i + 2ey_i \\ a' + 2c'x_i + d'y_i & b' + d'x_i + 2e'y_i \end{vmatrix} = \\
 &= 2x_i^2(cd' - c'd) + 2y_i^2(de' - d'e) + 4x_i y_i (c e' - c'e) + \\
 &+ x_i (2cb' + ad' - 2c'b - a'd) + y_i (2ae' + d \cdot b' - 2a'e - d'b) + \\
 &+ ab' - a'b,
 \end{aligned} \tag{F3.2}$$

s ennek a kifejezésnek az állandóságából egy sor megszorítás adódik a leképezés paramétereire. A tisztán kvadratikus tagok eltűnéséből például

$$\frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} (= \lambda) \tag{F3.3}$$

következik. Az  $(x, y)$  síkbeli koordináta rendszer alkalmas elforgatásával a  $c x^2 + d x y + e y^2$  kvadratikus alak diagonalizálható, vagyis  $d$  nullává tehető. Ekkor viszont (F3.3) miatt  $d'$  is nulla kell legyen, s  $c' = \lambda c$ ,  $e' = \lambda e$  alakba írható. Ezekkel a jelölésekkel (F3.2) jobboldalán az elsőrendű tagok akkor tűnnek el, ha

$$\begin{aligned}
 c(\lambda b - b') &= 0, \\
 e(\lambda a - a') &= 0.
 \end{aligned} \tag{F3.4}$$

Amennyiben sem  $c$ , sem pedig  $e$  nem lenne nulla, úgy  $b' = \lambda b$  és  $a' = \lambda a$ , vagyis (F3.3)-mal összevetve  $y_{i+1} = \lambda x_{i+1} +$  állandó következne. Ilyenkor a leképezés az  $(x, y)$  síknak egy egyenesén, tehát két dimenzió helyett csak egy dimenzióban történne, s emiatt számunkra pillanatnyilag érdektelen volna. Ha  $c=e=0$ , úgy az (F3.1) leképezés lineáris. Ez az eset számunkra ugyan-csak érdektelen, ezért feltehetjük, hogy  $c$  és  $e$  valamelyike,



mondjuk e nullával egyenlő. (A  $c=0$  eset az  $x$  és  $y$  koordináták felcserélésével visszavezethető erre.) Ekkor  $b' = \lambda b$  adódik, tehát a leképezés

$$x_{i+1} = ax_i + by_i + cx_i^2 + f, \quad (\text{F3.5})$$

$$y_{i+1} = a'x_i + \lambda by_i + \lambda cx_i^2 + f'$$

alaku. Vezessük be ezután az  $x$  és  $y$  koordináták helyett az  $\tilde{x} \equiv x$  és  $\tilde{y} \equiv y - \lambda x$  új (ferdeszögű koordináta rendszernek megfelelő) változókat, ekkor (F3.5) így írható fel:

$$\tilde{x}_{i+1} = a\tilde{x}_i + b(\tilde{y}_i + \lambda\tilde{x}_i) + c\tilde{x}_i^2 + f, \quad (\text{F3.6})$$

$$\tilde{y}_{i+1} = (a' - \lambda a)x_i + (f' - \lambda f).$$

Mivel  $c \neq 0$ , az  $\tilde{x}$  változó alkalmas eltolásával (F3.6) első egyenletéből az  $\tilde{x}_i$ -vel arányos tag kitranszformálható, a második egyenlet jobb oldaláról pedig (az  $y$  változó nullpontjának megfelelő eltolásával) a konstans tag tüntethető el. Így tehát (a megkülönböztető kigyo-jelet elhagyva) a következő alakot kapjuk:

$$x_{i+1} = \alpha x_i^2 + \beta y_i + \gamma,$$

$$y_{i+1} = \delta x_i.$$

Az  $x \rightarrow \gamma x$  és  $y \rightarrow \frac{\gamma}{\beta} y$  skála transzformációval (a koordinátatengelyek egységeinek alkalmas megválasztásával)  $\beta$  és  $\gamma$  1-gyé tehető, s így végül az

$$x_{i+1} = 1 + y_i - ax_i^2, \quad (\text{F3.7})$$

$$y_{i+1} = b x_i$$

alakot kapjuk. (Ebben  $a$  és  $b$  természetesen más paraméterek, mint az (F3.1)-ben szereplő mennyiségek!) Ez az Hénon-féle diszzipatív ( $J = -b$  Jacobi-determinánsú) leképezés normálalakja.

Megjegyezzük, hogy a leképezés megfordítva ugyanilyen jellegű marad:

$$x_i = b^{-1} y_{i+1},$$

$$y_i = x_{i+1} - 1 + a b^{-2} y_{i+1}^2,$$

vagyis (F3.7) a síknak önmagára való egy-egy értelmű leképezését adja.

A  $b = -1$  esetben (területtartó leképezés) az (F3.7) leképezés csak egyetlen paramétert tartalmaz:

$$x_{i+1} = 1 + y_i - a x_i^2,$$

$$y_{i+1} = -x_i;$$
(F3.8)

ez a Hénon-féle konzervatív leképezés. Amennyiben  $a > -1$ , úgy a fenti leképezésnek van két invariáns pontja, vagyis amelyekre  $x_{i+1} = x_i$  és  $y_{i+1} = y_i$  teljesül. Ezek valamelyikébe eltolva a koordináta rendszer kezdőpontját (F3.8) lineáris transzformációval hiperbolikus fixpont esetén az

$$x_{i+1} = x_i \operatorname{ch} \alpha + (y_i - x_i^2) \operatorname{sh} \alpha,$$

$$y_{i+1} = x_i \operatorname{sh} \alpha + (y_i - x_i^2) \operatorname{ch} \alpha$$
(F3.9)

alakra, elliptikus fixpontnál pedig az

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - (y_i - x_i^2) \sin \alpha,$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + (y_i - x_i^2) \cos \alpha$$
(F3.10)

alakra hozható. Ez utóbbi nagyon szemléletes, hiszen az origó közelében a lineáris rész egy  $\alpha$  szögű forgás transzformációt ír le, s ezt a transzformációt a kvadratikusan az origótól távolodva egyre jobban és jobban eltorzítja.

A nulla Jacobi-determinánsu (egydimenziósra redukálódó)  $b = 0$  esetben az  $x_{i+1} = 1 - a x_i^2$  egyenlethez jutunk.



#### F.4 AZ EGYDIMENZIÓS LEKÉPEZÉSEK FEIGENBAUM-SZEKVENCIÁINAK UNIVERZÁLIS ELMÉLETE

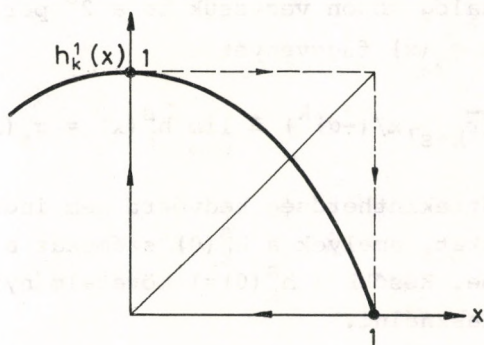
Az alábbiakban ismertetjük az egydimenziós leképezések intuitív elméletének legfontosabb állításait. Elsősorban Feigenbaum munkáira támaszkodunk [34-36].

##### Univerzális függvények

Tekintsük ezúttal az olyan  $f(r, x) = rF(x)$  függvényeket, amelyek egyetlen,  $z$ -ed rendű differenciálható maximumukat az  $\hat{x} = 0$  helyen veszik fel, azaz  $|x| \ll 1$  esetén  $f(x) \approx f(0) - b|x|^z$ , ahol  $z > 1$ . Vezessük be az  $\alpha_0 \equiv 1/f(\bar{r}_1, 0)$  és az  $\alpha_k = -f^{(2^{k-1})}(\bar{r}_k, 0)/f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+1}, 0)$  számokat! Az  $f^{(2^{k-1})}(\bar{r}_k, x)$  leképezés  $2^{k-1}$  számú, az  $f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+1}, x)$  pedig kétszer ennyi szuperstabil,  $p=2$  periódusú határciklussal rendelkezik. A

$$h_k^1(x) \equiv (-1)^k \alpha_k \dots \alpha_0 f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+1}, x) / (-1)^k \alpha_k \dots \alpha_0 \quad (F4.1)$$

leképezésben  $2^k$  számú  $p=2$  periódusú határciklus jön létre, amelyek egyikét az  $\hat{x} = 0$  és a  $h_k^1(0) = 1$  pontok alkotják. Az F4.1 ábrán bemutatjuk a  $h_k^1(x)$  függvényeknek az origó körüli kvalitatív menetét.



F4.1 ábra. A  $h_k^1(x)$  leképezés  $\hat{x}=0$  pontot tartalmazó,  $p=2$  periódusú határciklusa

Az elmélet egyik alapvető állítása, hogy létezik a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha \quad (\text{F4.2})$$

határérték, amely csak az  $f(r, x)$  maximumának  $z$  rendjétől függ. Ha  $z=2$ , akkor  $\alpha = 2,502907875\dots$ . Létezik továbbá a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k^1(x) = g_1(x) \quad (\text{F4.3})$$

határérték-függvény, amely az azonos  $z$  kitevőhöz tartozó függvények osztályán univerzális. A  $g_1(x)$  függvény szimmetrikus,  $g_1(x) = g_1(-x)$ . Az, hogy az univerzalitási osztályokat  $z$  indexeli, kézenfekvő, ha meggondoljuk, hogy a  $h_k(x)$  függvényekhez az  $\hat{x}$  maximumhely környékének kinagyításával jutottunk. Azt mondhatjuk, a  $g_1(x)$  leképezés a szuperstabil,  $p=2$  periódusú határciklus univerzális függvénye. Az  $r_\infty$ -hez közeli kontrollparaméterek mellett a 17.6 ábrán a bifurkációs diagram  $\hat{x}$  maximumhely körüli szerkezetét a  $g_1(x)$  függvény, azaz közvetve a  $z$  index határozza meg.

A

$$g_0(x) = -\alpha g_1(g_1(x/\alpha)) \quad (\text{F4.4})$$

leképezés, amelynek az  $x=0$  és az  $x = -\alpha$  pontok szuperstabil fixpontjai, szintén univerzális.

A fentiekkel analóg módon vezessük be a  $2^S$  periódusú határciklus univerzális  $g_S(x)$  függvényét a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-\alpha)^k f(2^k)(\bar{r}_{k+S}, x/(-\alpha)^k) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^S(x) = g_S(x) \quad (\text{F4.5})$$

definícióval. Az áttekinthetőség kedvéért nem indexeltük külön a nyújtási faktorokat, amelyek a  $h_k^S(0)$  számokat a kívánt értékekre állítják be. Később a  $h_k^S(0)=1$  követelménytől eltérő normálást fogunk használni.

Ha létezik a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{r}_k = r_\infty$$



határérték, akkor a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-\alpha)^k f(2^k) (r_{\infty}, x / (-\alpha)^k) = g(x) \quad (\text{F4.6})$$

szimmetrikus univerzális határérték-függvény létezése is kézenfekvő. Az (F4.5) definícióból látszik, hogy ekkor várhatóan

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g_s(x) = g(x) \quad (\text{F4.7})$$

A  $g(x)$  leképezés a végtelen periódusú határciklus univerzális függvénye.

Az (F4.5) definíció alapján

$$g_s(x) = -\alpha g_{s+1}(g_{s+1}(x/\alpha)) \quad , \quad (\text{F4.8})$$

míg a  $g_s(x)$  sorozat határértékére fennáll

$$g(x) = -\alpha g(g(x/\alpha)) \quad . \quad (\text{F4.9})$$

#### A renormálási transzformáció

Az  $f$  függvényen végrehajtott renormálási transzformációnak nevezzük az

$$R(f) \equiv -\alpha f(f(x/-\alpha))$$

operációt. Látható, a  $z$  indexű univerzalitási osztályban a  $g(x)$  függvény a renormálási transzformáció fixpont függvénye

$$g = R(g) \quad ,$$

és ha a renormálást nem a  $g(x)$  függvényen hajtjuk végre, akkor távolodunk tőle,

$$g_s = R(g_{s+1}) \quad .$$

Az (F4.9) fixpont egyenlet adott  $z$  esetén egyértelműen meghatározza az  $\alpha$  tényezőt és a  $g(x)$  függvényt. A  $z=2$  esetben péld-

dául az  $\alpha$  számon kívül numerikusan meghatározták  $g(x)$  Taylor-sora vezető tagjainak együtthatóit is.

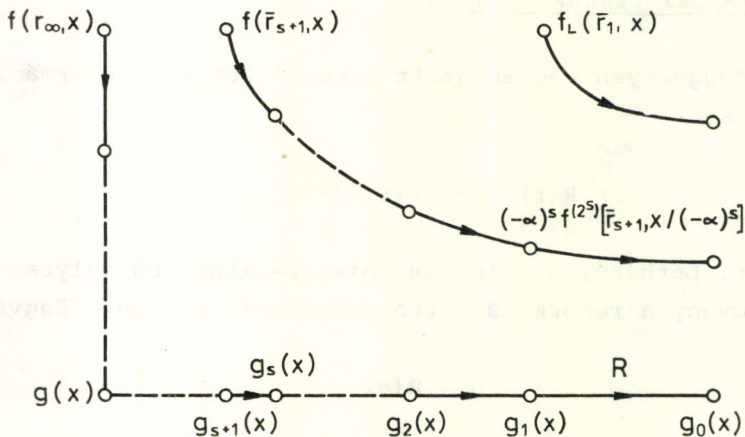
Vizsgáljuk rögzített  $z$  mellett a függvénytér geometriáját! Az (F4.6) összefüggés szerint ekkor minden  $f(r_\infty, x)$ -re

$$R^k(f(r_\infty, x)) \equiv R(R(\dots R(f(r_\infty, x)) \dots)) \rightarrow g(x) .$$

Nevezzük kritikus felületnek az  $f(r_\infty, x)$  függvények összességét. A kritikus felület egy függvényét transzformálva  $g(x)$ -hez tartó sorozatot kapunk. Ha viszont az  $f(\bar{r}_N, x)$  függvényt transzformáljuk, akkor a sorozat egyes tagjai egyre jobban megközelítik az alacsony  $s \ll N$  indexű  $g_s(x)$  függvényeket

$$R^{N-s}(f) \equiv (-\alpha)^{N-s} f(2^{N-s}; \bar{r}_N, x / (-\alpha)^{N-s}) \approx g_s(x) ,$$

a  $g(x)$  fixpont függvénytől azonban távolodnak. A függvénytér szerkezetét az F4.2 ábra szemlélteti. A függőleges tengely a



F4.2 ábra. A függvénytér és az  $R$  renormálási transzformáció. Az ábra jobb felső sarkában bejelöltük a 19. fejezetben az  $f=f_L$  logisztikus leképezésen végrehajtott transzformációt



kritikus felületet jelképezi, a vízszintes egyenes pedig a leggyorsabb távolodás irányát mutatja.

Tekintsük a  $g(x)$  fixpont függvény közvetlen környezetét! Vezessük be a

$$\delta g_s(x) \equiv g_{s+1}(x) - g_s(x) \quad (F4.10)$$

jelölést! Ha az

$$R(g_{s+1}) = g_s$$

egyenletet az  $s \gg 1$  határesetben vizsgáljuk, akkor a

$$\delta g_{s-1}(x) = -\alpha \left[ \delta g_s(g(x/\alpha)) + g'(g(x/\alpha)) \delta g_s(x/\alpha) \right] + O([\delta g_s]^2),$$

a fixpont függvény körül linearizált renormálási transzformációhoz jutunk. Az egyenletet kielégíthetjük a

$$\delta g_s(x) = \Delta^{-s} h(x) \quad (F4.11)$$

függvénnyel, ahol  $\Delta$  állandó és  $h(x)$  eleget tesz a

$$h(x) = -\frac{\alpha}{\Delta} \left[ h(g(x/\alpha)) + g'(g(x/\alpha)) h(x/\alpha) \right] \quad (F4.12)$$

univerzális függvényegyenletnek. Ha (F4.9) alapján  $g(x)$  és  $\alpha$  ismeretes, akkor (F4.12) meghatározza a  $h(x)$  függvényt és a  $\Delta$  számot.

A fixpont függvényhez való konvergencia tehát exponenciálisan gyors

$$g_s(x) = g(x) - \bar{\Delta}^{-s} h(x) / (1 - \bar{\Delta}^{-1}). \quad (F4.13)$$

A  $h(x)$  függvény (F4.12) szerint egy konstans szorzó erejéig határozatlan. A  $g(x)$  fixpont függvény szokásos normálása  $g(0)=0$ , és kívánjuk meg, hogy  $g_0(0)=0$  legyen. Ekkor az összes  $g_s(0)$  számot meghatározott értékre állítottuk be és  $h(x)$  választását is egyértelművé tettük. [Megjegyezzük, hogy (F4.9) alapján  $g(1) = -1/\alpha$ , ezért az  $f(r, x=0)=1$  szerint normált függvények  $r_\infty$  pontját megbecsülhetjük. A  $g(x)$  fixpont függvényt a legjobban

az  $f(r=r_\infty, x)$  függvény közelíti, ahonnan az  $f(r_\infty, 1) \approx -1/\alpha$  egyenletet kapjuk. Az  $f_1 \equiv 1 - ax^2$  függvényre így az  $a_\infty \approx 1,399\dots$  torlódási ponthoz jutunk, míg az egzakt eredmény  $a_\infty = 1,4011\dots$ , becslésünk tehát jó.] A bevezetett normálás miatt a  $g_1(0) = 1$  konvenció is módosul.

Mi a  $\Delta$  szám jelentése? Vezessük be a

$$\delta f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+s}, x) \equiv f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+s+1}, x) - f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+s}, x)$$

jelölést, amelynek alapján

$$\delta g_s = \lim_{k \rightarrow \infty} (-\alpha)^k \delta f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+s}, x) / (-\alpha)^k.$$

Mivel  $\delta g_s \approx \Delta^{-1} \delta g_{s-1}$ , azért közelítőleg

$$(-\alpha)^k \delta f^{(2^k)}(\bar{r}_{k+s}, 0) \approx \Delta^{-1} (-\alpha)^{k+1} \delta f^{(2^{k+1})}(\bar{r}_{k+s}, 0),$$

következésképpen a  $k+s = n$  jelöléssel

$$-\frac{\Delta}{\alpha} \delta f^{(2^k)}(\bar{r}_n, 0) \approx \delta f^{(2^{k+1})}(\bar{r}_n, 0).$$

További közelítéssel a

$$\left(-\frac{\Delta}{\alpha}\right)^n \delta f(\bar{r}_n, 0) \approx \delta f^{(2^n)}(\bar{r}_n, 0)$$

becslést kapjuk. Felhasználjuk, hogy  $f(r, 0) = rF(0) = r$  és így

$$\begin{aligned} (-\alpha)^n \delta f^{(2^n)}(\bar{r}_n, 0) &= (-\alpha)^n f^{(2^n)}(\bar{r}_{n+1}, 0) - (-\alpha)^n f^{(2^n)}(\bar{r}_n, 0) \approx \\ &\approx g_1(0) - g_0(0) = \text{állandó} \end{aligned}$$

közéltéssel a

$$\Delta^n (\bar{r}_{n+1} - \bar{r}_n) \approx \text{állandó} \quad (\text{F4.14})$$

aszimptotikus kifejezést nyerjük. Innen látszik, a fixpont függvényhez való konvergenciát ugyanaz a



$$\Delta \equiv \delta \quad (F4.15)$$

szám jellemzi, mint a  $z$  indexszel jellemzett univerzalitási osztály függvényeinél a szuperstabilitási pontok konvergenciáját.

Az (F4.13) összefüggés definiál egy

$$r'_\infty - \bar{r}'_s \equiv \frac{\delta^{-s}}{1 - \delta^{-1}}, \quad s = 0, 1, \dots$$

sorozatot, amelyet végigkövetve az egyre nagyobb periódusú, szuperstabil határciklushoz vezető  $g_s$  függvényekhez jutunk. Tekintsük az  $s$  indexet folytonosnak. Ekkor a kontrollparaméter folytonosan változhat az  $[\bar{r}'_0, r'_\infty]$  intervallumban, és (F4.13) alapján bevezethetjük a

$$g_r(x) \equiv g(x) - (r'_\infty - r)h(x) \quad (F4.16)$$

univerzális függvényeket. Ha  $r \rightarrow r'_\infty$ , akkor  $g_r(x)$  attraktorának pontjai bifurkációk végtelen sorozatán mennek keresztül. Így módon az F4.2 ábra vízszintes tengelyét folytonosan paramétrezhetjük. A szokásos elnevezést követve azt mondjuk, hogy a  $g_r$  függvények folytonos vonala a linearizált renormálási transzformáció releváns sajátiránya. Releváns, mert a transzformáció során a fixpont függvénytől távolodunk, sajátiránynak pedig azért nevezzük, mert az  $R$  operációt elvégezve a vonalról nem térünk le. Fennáll az

$$R(h) = R(g+h) - R(g) = h\delta \quad (F4.17)$$

egyenlet, ezért  $\delta > 1$  a linearizált transzformáció releváns irányhoz tartozó sajátértéke,  $h(x)$  pedig a  $\delta$ -hoz tartozó sajátfüggvény.

A fentiekkel tehát elméletileg megalapoztuk a 19. fejezetben alkalmazott renormálási transzformációt.

A hasonlóság univerzális függvénye és a spektrum univerzális tulajdonságai

Megállapítottuk, hogy a bifurkációs diagram (17.6 ábra) skálaviselkedését az  $\hat{x}$  maximumhely környezetében az  $\alpha$  szám határozza meg, amely csak az  $f(r, x)$  leképezés maximumának  $z$  rendjétől függ. Ebből következik, hogy a diagram felső határán, az  $f(r, \hat{x})$  hely közelében, a bifurkációs villák ágainak távolsága az  $\alpha^z$  faktoriall skálázódik. Az alábbiakban az attraktor skálajelzőit a maximumhely tetszőleges  $f^{(t)}(r, \hat{x})$  iteráltjának környezetében vizsgáljuk.

Tekintsük az egyes határciklusokat a megfelelő stabilitású kontrollparaméter értékeknél, például az  $\bar{r}_k$  szuperstabilitási pontokban. A  $2^n$  periódus attraktorának pontjai legyenek  $x_0^{(n)} \equiv \hat{x}$ ,  $x_1^{(n)} \equiv f^{(1)}(\bar{r}_n, \hat{x})$ , ... és  $x_{2^n-1}^{(n)} \equiv f^{(2^n-1)}(\bar{r}_n, \hat{x})$ . Az iteráció periodikus  $x_t^{(n)} = x_{t+2^n}^{(n)}$ . A határciklus egy pontja és annak  $2^{n-1}$ -edik iteráltja az előző,  $2^{n-1}$  periódusidejű ciklus ugyanazon pontjából keletkezett bifurkáció útján. Következésképp a

$$d_t^{(n)} \equiv x_t^{(n)} - x_{t+2^{n-1}}^{(n)} \quad (F4.18)$$

szám a maximum  $t$ -edik iteráltját tartalmazó kétágú bifurkációs villa ágainak távolságát méri az  $\bar{r}_n$  pontban. Tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{t/2^{n+1} \rightarrow y} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_t^{(n+1)}}{d_t^{(n)}} = \sigma(y) \quad (F4.19)$$

határérték, azaz az egymásból leágazó kétágú villák szélességeinek aránya aszimptotikusan állandó. A  $d_{t+2^n}^{(n)} = d_t^{(n)}$  és a  $d_{t+2^{n-1}}^{(n)} = -d_t^{(n)}$  összefüggésekből következően a  $\sigma(x)$  hasonlósági függvény a

$$\sigma(y+1) = \sigma(y) \quad (F4.20)$$

és a

$$\sigma\left(y + \frac{1}{2}\right) = -\sigma(y) \quad (F4.21)$$



tulajdonságoknak tesz eleget. A maximumhely és annak első ite-  
ráltja körüli skálafaktorokat ismerjük,

$$\begin{aligned} \sigma(0) = -\sigma(1/2) ) = \sigma(1) = -1/\alpha = \\ = \sigma(y \rightarrow -0) = -\sigma(y \rightarrow 1/2-0) = \sigma(y \rightarrow 1-0) \end{aligned} \quad (\text{F4.22})$$

és

$$\sigma(y \rightarrow +0) = 1/\alpha^Z, \quad (\text{F4.23})$$

a  $\sigma(y)$  függvény tehát az  $y = 0$  és az  $y = 1/2$  pontokban nem  
folytonos.

Számítsuk ki a hasonlósági függvény értékeit az  $y = 2^{-s-1}$ ,  
 $s=0,1,\dots$  pontokban. Az általánosság megszorítása nélkül felte-  
hetjük, hogy  $\hat{x} = 0$ , s ekkor az (F4.18) definícióból azonos át-  
alakítással nyerjük a

$$\begin{aligned} d_{2^{n-s}}^{(n)} = f(2^{n-s}) (\bar{r}_n, 0) - f(2^{n-1}) (\bar{r}_n, f(2^{n-s}) (\bar{r}_n, 0)) = \\ = f(2^{n-s}) (\bar{r}_{(n-s)+s}, 0) - f(2^{n-s}) (\bar{r}_{(n-s)+s}, f(2^{n-1}) (\bar{r}_n, 0)) \end{aligned} \quad (\text{F4.24})$$

összefüggést. Rögzített, tetszőleges  $s$  mellett aszimptotikusan  
teljesül tehát, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_{2^{n-s}}^{(n)}} \left[ (-1/\alpha)^{n-s} g_s(0) - (-1/\alpha)^{n-s} g_s((-1/\alpha)^{n-1} g_1(0)) \right] = 1, \quad (\text{F4.25})$$

ahol felhasználtuk az univerzális  $g_s(x)$  függvények (F4.5) de-  
finícióját. A  $\sigma(x)$  hasonlósági függvény (F4.19) definíciója  
alapján innen a

$$\sigma(2^{-s-1}) = \frac{g_{s+1}(0) - g_{s+1}(\alpha^{-s} g_1(0))}{g_s(0) - g_s(\alpha^{-s+1} g_1(0))} \quad (\text{F4.26})$$

kifejezés adódik. (Kihasználtuk, hogy  $g_s$  szimmetrikus.) A hason-  
lóság függvénye következésképp univerzális. E pontokban azon-

ban  $\sigma(x)$  nem folytonos. A

$$\frac{d^{(n+1)}}{2^{n-s+1}} / \frac{d^{(n)}}{2^{n-s+1}} \rightarrow \sigma(2^{-s-1} + 0)$$

határátmenet során ugyanis a számlálót (F4.24) és (F4.25) alapján a

$$\begin{aligned} \frac{d^{(n)}}{2^{n-s+1}} &\approx f(\bar{r}_n, (-1/\alpha)^{n-s} g_s(0)) - \\ &- f(\bar{r}_n, (-1/\alpha)^{n-s} g_s(\alpha^{1-s} g_1(0))) \approx \\ &\approx -b(1/\alpha)^{z(n-s)} [g_s^z(0) - g_s^z(\alpha^{1-s} g_1(0))] \end{aligned}$$

aszimptotikus alakba írhatjuk, ahol  $f(x) \approx f(0) - b|x|^z$ ,  $|x| \ll 1$ . A nevezőt hasonlóan kifejtve nyerjük

$$\sigma(2^{-s-1} + 0) = \frac{g_{s+1}^z(0) - g_{s+1}^z(\alpha^{-s} g_1(0))}{g_s^z(0) - g_s^z(\alpha^{-s+1} g_1(0))} \neq \sigma(2^{-s-1}) \quad (\text{F4.27})$$

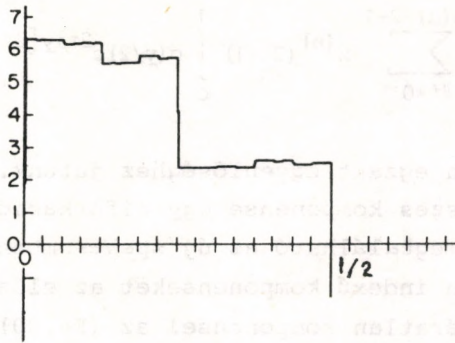
A korábbi vizsgálataink alapján felírt (F4.22) és (F4.23) egyenlőségeket az Olvasó (F4.26) és (F4.27) felhasználásával utólagosan igazolhatja.

Tetszőleges racionális  $y$  argumentum mellett a fentiekhez hasonló eljárással határozhatjuk meg a hasonlóság univerzális függvényének értékét, ha az  $y = 2^{-m_1-1} + 2^{-m_2-1} + \dots + 2^{-m_3-1} = t/2^{n+1}$  kettes számrendszerbeli tört alakot használjuk, és (F4.18)-ban az  $x_t^{(n)} \equiv f^{(t)}(\bar{r}_n, x)$  függvényt a  $t$  egész szám bináris kifejtése alapján bontjuk közvetett függvények láncolatára.

A hasonlósági függvény a racionális helyeken nem folytonos, azaz  $\sigma(y) \neq \sigma(y+0)$ , belátható azonban, hogy az irracionális pontokban viszont folytonos. A hasonlósági függvény  $1/\sigma(y)$  inverzének kvalitatív menetét  $z=2$  esetén az F4.3 ábrán tüntettük fel. A függvény ugrása az  $y=1/2$  és az  $y=1/4$  pontokban a legnagyobb, míg a  $[0, 1/4]$  intervallumban jó közelítéssel  $1/\sigma(y) \approx \alpha^z$ , s az  $[1/4, 1/2]$  szakaszon pedig  $1/\sigma(y) \approx \alpha$ .

Meghatároztuk tehát a bifurkációs diagram aszimptotikus skálaviselkedését az attraktor tetszőleges részén, azaz a 17.6





F4.3 ábra. A kvadratikus maximumú leképezések univerzális hasonlósági függvénye. A függőleges tengelyre  $1/\sigma(y)$ -t mértük fel

ábra függőleges tengelye mentén. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy  $y$  változó nem a függőleges tengely paramétere, hanem azt jelzi, a maximumhelytől hány iterációval jutunk a tengely egy pontjába.

A hasonlósági függvény az iteráció frekvenciaspektrumának aszimptotikus tulajdonságait is jellemzi. A  $p(n) = 2^n$  periódusidejű határciklus Fourier-transzformáltja

$$x^{(n)}(\omega) = \frac{1}{p(n)} \sum_{t=0}^{p(n)-1} x_t^{(n)} e^{-i\omega t}, \quad (F4.28)$$

ahol (17.7) szerint  $\omega = \omega_n(k) \equiv 2\pi k/p(n)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . A  $p(n+1)$  határciklus trajektóriájának Fourier-transzformáltját azonos átalakítással az

$$\begin{aligned} x^{(n+1)}(\omega_{n+1}(k)) &= \\ &= \frac{1}{2p(n)} \sum_{t=0}^{p(n)-1} \left[ x_t^{(n+1)} + (-1)^k x_{t+p(n)}^{(n+1)} \right] e^{-\omega_n(k/2)t} \end{aligned} \quad (F4.29)$$

alakra hozhatjuk. A páros  $k=2\ell$  indexű harmonikusok a nagy  $n$  határesetben a bifurkációk során alig változnak. A bifurkációs

$$x^{(n+1)}(2\ell+1) = \sum_{\ell'=0}^{p(n)/2-1} x^{(n)}(2\ell+1) \int_0^1 \sigma(y/2) e^{2\pi i y [2\ell'+1 - (2\ell'+1)/2]} dy \quad (\text{F4.30})$$

aszimptotikusan egzakt egyenlőséghez jutunk. Míg tehát egy határciklus összes komponense egy bifurkáció után lényegében változatlanul megtalálható az új spektrumban, addig a megjelenő új, páratlan indexű komponenseket az előző határciklus spektrumának páratlan komponensei az (F4.30) univerzális összefüggésen keresztül határozzák meg.

Az összefüggés jobboldalán szereplő integrált átalakíthatjuk

$$\int_0^1 \sigma(y/2) e^{2\pi i y z} dy = \frac{1}{2\pi i z} \sigma(y/2) e^{2\pi i y z} \Big|_0^1 - \frac{1}{4\pi i z} \int_0^1 \sigma'(y/2) e^{2\pi i y z} dy, \quad (\text{F4.31})$$

ahol  $\sigma'(y/2)$  a  $\sigma(y/2)$  függvény formálisan értelmezett deriváltja. A kifejezés segítségével becsléseket tehetünk. Ha ugyanis  $\sigma(y)$ -t szakaszonként állandó függvénnyel közelítjük, akkor

$$\sigma'(y) \approx \sum_j (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \delta(y - y_j)$$

ahol  $\delta(y)$  a Dirac-féle delta függvény és  $\sigma_j \approx \sigma(y)$  az  $(y_j, y_{j+1}]$  intervallumban. Mivel  $z = 2\ell'+1 - (2\ell'+1)/2$ , azért  $e^{2\pi i z} = -1$ . A  $\sigma'(y)$  függvény közelítő kifejezését használva

$$\int_0^1 \sigma(y/2) e^{2\pi i y z} dy \approx -\frac{1}{2\pi i z} \left[ (1/2 - 0) + \sigma(+0) + \sum_j (\sigma_j - \sigma_{j-1}) e^{4\pi i y_j z} \right]$$

adódik. A kapott formulát az (F4.30) képletbe helyettesítve az



villák szélessége ugyanis zérushoz tart,  $x_t^{(n+1)}/x_t^{(n)} \approx \approx x_{t+p(n)}^{(n+1)}/x_t^{(n)} \approx 1$ , s ezért  $x^{(n+1)}(\omega_{n+1}(2\ell)) \approx x^{(n)}(\omega_n(\ell))$ . Egy határciklus páros harmonikusai tehát az előző ciklus teljes spektrumát előállítják. Eredményünk független attól, hogy az egyes határciklusokat milyen kontrollparaméter értékeknél hasonlítjuk össze, feltéve, hogy az  $r_\infty$  torlódási ponthoz közel vagyunk.

Vizsgáljuk a  $k = 2\ell + 1$  páratlan indexű harmonikusokat. Térjünk át az egyszerűbb  $x^{(n)}(k) \equiv x^{(n)}(\omega_n(k))$  jelölésre. Az (F4.29) formula szerint

$$x^{(n+1)}(2\ell+1) = \frac{1}{2p(n)} \sum_{t=0}^{p(n)-1} \left[ x_t^{(n+1)} - x_{t+p(n)}^{(n+1)} \right] e^{-i\pi(2\ell+1)t/p(n)}.$$

A hasonlósági függvény (F4.19) definíciója alapján a nagy  $n$  határesetben

$$x^{(n+1)}(2\ell+1) \approx \frac{1}{2p(n)} \sum_{t=0}^{p(n)-1} \sigma(t/2p(n)) \left[ x_t^{(n)} - x_{t+p(n-1)}^{(n)} \right] e^{-i\pi(2\ell+1)t/p(n)}.$$

Az

$$x_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{p(n)-1} x^{(n)}(k) e^{2\pi i k t / p(n)}$$

inverz Fourier-transzformáció felhasználásával

$$x_t^{(n)} - x_{t+p(n-1)}^{(n)} = 2 \sum_{\ell'=0}^{p(n)/2-1} x^{(n)}(2\ell'+1) e^{2\pi i (2\ell'+1)t/p(n)}$$

adódik, ahonnan az

$$x^{(n+1)}(2\ell+1) \approx \frac{1}{p(n)} \sum_{t=0}^{p(n)-1} \sum_{\ell'=0}^{p(n)/2-1} x^{(n)}(2\ell'+1) \cdot$$

$$\cdot \sigma(t/2p(n)) e^{2\pi i [2\ell'+1 - (2\ell+1)/2] t / p(n)}$$

összefüggést nyerjük. Ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor áttérhetünk az  $y = t/p(n)$  új változó szerinti integrálásra. Ilyenformán az

$$x^{(n+1)}(2\ell+1) \approx -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell'=0}^{p(n)/2-1} x^{(n)}(2\ell'+1) / [2\ell'+1-(2\ell+1)/2] \cdot$$

$$\cdot \left[ \sigma(1/2-0) + \sigma(+0) + \sum_j (\sigma_j - \sigma_{j-1}) e^{4\pi i y_j} [2\ell'+1-(2\ell+1)/2] \right]$$

(F4.32)

közelítő összefüggést nyerjük.

Közelítsük a  $\sigma(y)$  hasonlósági függvényt a

$$\hat{\sigma}(y) = \begin{cases} 1/\alpha, & \text{ha } 0 < y \leq 1/4, \\ 1/\alpha^z, & \text{ha } 1/4 < y \leq 1/2 \end{cases}$$

(F4.33)

lépcsős függvénnyel. Felhasználva, hogy  $e^{\pi i [2\ell'+1-(2\ell+1)/2]} = i(-1)^\ell$ , az

$$x^{(n+1)}(2\ell+1) \approx -\frac{1}{2\pi i} \left[ 1/\alpha + 1/\alpha^z + i(-1)^\ell (1/\alpha - 1/\alpha^z) \right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{\ell'} x^{(n)}(2\ell'+1) / [2\ell'+1-(2\ell+1)/2]$$

becsléshez jutunk. Térjünk át az összegzésről integrálásra az  $\omega \equiv 2\pi(2\ell+1)/p(n+1)$  és  $\omega' \equiv 2\pi(2\ell'+1)/p(n)$  folytonosnak tekintett frekvenciák bevezetésével. Ekkor az amplitúdók között az

$$\left| x^{(n+1)}(\omega) \right| \approx \frac{1}{4} \sqrt{2(1/\alpha^2 + 1/\alpha^{2z})} \left| \frac{P}{\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} x^{(n)}(\omega') \right|$$

összefüggés adódik, ahol  $P_f$  a főérték integrál jele.

Ha  $\omega$  közel van a  $|0, 2\pi|$  intervallum közepéhez, akkor az integrálást a teljes számegyenesre kiterjeszthetjük. A Fourier-transzformáció (F4.28) definíciójából látszik, hogy  $x^{(n)}(\omega)$  analitikusan kifolytatható az alsó komplex félsíkra, ezért  $\omega \approx \pi$  esetén

$$\left| x^{(n+1)}(\omega) \right| \approx \frac{1}{4} \sqrt{2(1/\alpha^2 + 1/\alpha^{2z})} \left| x^{(n)}(\omega) \right| \equiv \mu \left| x^{(n)}(\omega) \right|,$$

ahol  $\mu = 0,15\dots$ . Pontosabb közelítések a  $\mu = 0,1525\dots$  eredményhez vezetnek. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a jobb és



a baloldali  $\omega$  véges  $n$  mellett nem ugyanazt a számot jelenti. Ha a jobboldali  $\omega$  a  $p(n)$  határciklus  $2m+1$  páratlan indexű frekvenciája,  $\omega = 2\pi(2m+1)/p(n)$ , akkor a baloldalon az új határciklus  $\omega$ -hoz legközelebb eső páratlan indexű frekvenciái,  $2\pi(4m+1)/p(n+1)$  és  $2\pi(4m+3)/p(n+1)$  szerepelnek. Eredményünk szerint tehát az egymásból bifurkáció útján keletkező határciklusok spektrumának páratlan indexű komponensei arányát jó közelítéssel az univerzális  $\mu$  skálafaktor határozza meg, feltéve, hogy a vizsgált frekvenciák elegendően közel vannak a  $\pi$  értékhez.

A Fourier-amplitúdókat mérhetjük logaritmikus skálán is. Az egymást követő határciklusok páratlan indexű amplitúdóinak különbsége első közelítésben  $10 \log_{10} \mu = 8,18$  db. Közelítésünk hibájának meghatározása további számításokat igényel. Ezeket mellőzve közöljük, hogy egy számítógéppel végzett ellenőrzés szerint a  $p(4) = 2^4$  határciklus logaritmikus Fourier-amplitúdóinál csupán 0,5 % hibát okozott az, hogy a hasonlóság univerzális függvényét az (F4.33) lépcsős függvénnyel közelítették.

Míg az (F4.30) összefüggés egzakt módon leírja az alharmonikusok keletkezését, addig a belőle leszarmaztatott  $\mu$  univerzális szám csupán speciális,  $\omega \approx \pi$  frekvenciák mellett használható. Az  $\omega \rightarrow 0$  határesetben például más állandó jellemzi a spektrumot. Az  $r_\infty$  pontban az  $n$  indexű alharmonikusok közül a  $2\pi/2^n$  legkisebb páratlan indexű frekvenciához tartozó  $x^{(n)}(1)$  komponens  $10 \log_{10} |x^{(n)}(1)/x^{(n+1)}(1)| \approx 9,35$  db univerzális kitevővel csökken exponenciális módon [132]. Az alharmonikusok amplitúdói négyzetátlagának csökkenését numerikus kísérletek szerint a  $10 \log_{10} |x^{(n)}|^2 / |x^{(n+1)}|^2 \approx 13,2$  db exponens írja le [172]. A fenti állandók alacsony  $n$  indexű alharmonikusok arányát is jó közelítéssel megadják. Megjegyezzük, hogy a  $g(x)$  fixpont függvény alharmonikusainak négyzetátlagára egy egzaktul bizonyított tétel szerint 13,5 és 14 db közötti kitevővel tart zérushoz [174]. A fentiek alapján megállapíthatjuk, a 0,  $\pi$  és  $2\pi$  frekvenciák körül gyorsabban tűnnek el az alharmonikus amplitúdók, mint a köztes tartományokban.

A különös attraktorok térbeli kiterjedésének jellemzésére a dimenzió definíciójának Hausdorff nevéhez fűződő általánosítása [130] alkalmas, mely nem feltétlenül szolgáltat egész értékeket.

Tekintsük a szokásos értelemben vett  $n$ -dimenziós tér ( $n$  egész) valamely adott részhalmazát! Vegyünk  $\varepsilon$  élhosszúságú,  $n$ -dimenziós kockákat, s legyen  $N(\varepsilon)$  a szóban forgó halmaz lefedéséhez minimálisan szükséges ilyen kockák száma! A  $d$  dimenziószám definíciójától elvárjuk, hogy tükrözze azt a szemléletes tulajdonságot, hogy az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határesetben  $N(\varepsilon)$  végtelenhez tart, annál gyorsabban, minél nagyobb a halmaz dimenziószáma. Azt is mondhatjuk, hogy a dimenzió kapcsolatos azzal az információval, ami a halmaz térbeli elhelyezkedésének megadásához szükséges, véges pontosság esetén. A  $d$  Hausdorff-dimenziót vagy más néven fraktál dimenziót ezek után a következő összefüggéssel definiáljuk: az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határértékben

$$N(\varepsilon) \approx K \varepsilon^{-d},$$

ahol  $K$   $\varepsilon$ -től független állandó. Ebből

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (\text{F5.1})$$

Más szavakkal: a Hausdorff-dimenzió a

$$d(\varepsilon) = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (\text{F5.2})$$

számok határértéke, vagyis

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(\varepsilon). \quad (\text{F5.3})$$

A fenti definíció egyszerű esetekben a megszokott eredményt szolgáltatja: A pont például mindig lefedhető egyetlen  $n$ -dimenziós kockával, ezért rávonatkozóan  $d = 0$ . Ha az egységkockában húzódó valamely felületdarabot tekintjük, s a kockát felosztjuk  $(1/\varepsilon)^3$  egyforma részre, akkor kis  $\varepsilon$  esetén kb.  $(1/\varepsilon)^2$



kis kocka fogja a felületdarabot tartalmazni, tehát  $d = 2$  adódik.

Tekintsük az alábbiakban a  $[0,1]$  intervallum bizonyos kimetészelei után visszamaradt halmazokat!

Ha a középső egyharmadot távolítjuk el, választhatjuk  $\varepsilon$ -t először  $1/3$ -nak, ekkor  $N = 2$ , majd  $\varepsilon = 1/(2 \cdot 3)$ -nak, ekkor  $N = 2^2$ . Általában

$$\varepsilon = \frac{1}{2^r 3}, \quad N = 2^{r+1}, \quad r = 1, 2, \dots$$

és

$$d(\varepsilon) = \frac{(r+1) \ln 2}{r \ln 2 + \ln 3}$$

Az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határérték  $r \rightarrow \infty$ -nek felel meg, s így  $d = 1$ -et kapunk. A halmaz mértéke (az intervallumok hossza) természetesen  $N\varepsilon = 2/3$ .

Ha az előbbi két szakasz középső egyharmadát megint eltávolítjuk, a lehetséges  $\varepsilon$  választások, s a megfelelő  $N$  számok

$$\varepsilon = \frac{1}{2^r 9}, \quad N = 4 \cdot 2^r, \quad r = 1, 2, \dots$$

(F5.2) alapján ebből

$$d(\varepsilon) = \frac{(r+2) \ln 2}{r \ln 2 + 2 \ln 3},$$

melynek határértéke ismét  $d = 1$ -et szolgáltat. A mérték most  $N\varepsilon = (2/3)^2$ .

Az eljárást tovább is folytathatjuk, ha a maradék intervallumok középső egyharmadát újra és újra kimetesszük.  $q$  számú ilyen lépés után választhatjuk az

$$\varepsilon = \frac{1}{2^r 3^q}, \quad r = 1, 2, \dots$$

beosztást. Ekkor  $N = 2^r 2^q$ , s

$$d(\varepsilon) = d(q, r) \equiv \frac{(q+r) \ln 2}{q \ln 3 + r \ln 2}. \quad (\text{F5.4})$$

A megszerkesztés módjából nyilvánvaló, hogy a 0 és 1 közötti halmaz ugyanúgy néz ki, mind a 0 és  $1/3$  közötti, háromszoros nagyítás után. A Cantor-halmaz tehát skála-invariáns. Ez az a tulajdonság, amivel a különös attraktorok vizsgálatakor oly gyakran találkozunk.

A Cantor-halmaz különböző általánosításaival jutunk az ún. Cantor-típusú halmazokhoz [20], melyek egyik érdekes példája az, amit a  $[0,1]$  intervallumból úgy kapunk, hogy középről először  $\varepsilon_1$  hosszúságú szakaszt vágunk ki, majd a maradék középből a maradék  $\varepsilon_2$  hosszúságú részét, a következő lépésben a maradék  $\varepsilon_2$  hosszúságú részét stb., ahol az  $\varepsilon_i (<1)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  számok adottak. Könnyen látható, hogy az (F5.1) definícióban  $\varepsilon$  választható, mint

$$\varepsilon = \prod_{i=1}^q \left( \frac{1-\varepsilon_i}{2} \right),$$

s ekkor  $N = 2^q$ . Ez a típus azért érdekes, mert megfelelően felvett  $\varepsilon_i$  értékek mellett a dimenzió lehet 1, annak ellenére, hogy a halmaz még nulla mértékű. Ennek az esetnek a diskussziójára és a Cantor-típusú halmazok további tulajdonságaira nézve [20]-ra utalunk.

Végül megemlítjük, hogy a különös attraktorok Hausdorff-dimenziója kapcsolatos a Ljapunov-exponensekkel, s ez egyszerűen megbecsülhető [173], amennyiben a Jacobi-determináns állandó. Két Ljapunov-számmal jellemzett kaotikus viselkedésű disszipatív rendszerben ( $\bar{\lambda}_1 > 0$ ,  $\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 < 0$ )

$$d \approx 1 - \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2}. \quad (\text{F5.5})$$

Az Hénon-leképezés esetén ( $a = 1,4$ ,  $b = 0,3$ ) például  $d = 1,26$ -ot kapunk, mely jól egyezik a más módon számolt  $d = 1,19$  értékkel [95,136]. Arra az esetre, amikor több Ljapunov-exponens ( $\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 > \dots > \bar{\lambda}_N$ ) tartozik a rendszerhez (F5.5) a következőképpen általánosítható

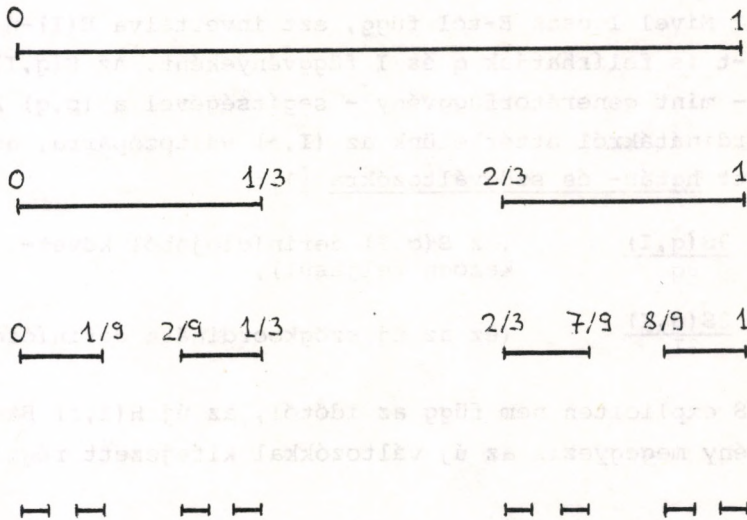
$$d \approx j - \frac{\sum_{i=1}^j \bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_{j+1}}, \quad (\text{F5.6})$$



Vegyük észre, hogy az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határeset két alapvetően különböző módon valósulhat meg, az  $r \rightarrow \infty$ , vagy a  $q \rightarrow \infty$  határátmenetekkel. A  $d(q,r)$  függvényben azonban ez a két limesz nem cserélhető fel. Ha először  $r$  tart végtelenhez és  $q$  rögzített, az azt írja le, hogy véges számú kimetszés után megállunk, s lemérjük a halmaz dimenzióját, amire természetesen  $d = 1$  adódik. Ha viszont először  $q$  tart végtelenhez, az annyit jelent, hogy a középső egyharmad részek végtelenszer ismételt kivágásával egy új típusú halmazt konstruálunk meg, az ún. Cantor-halmazt. Ez már nem intervallumokból áll, de belátható, hogy megszámlálhatatlanul végtelen sok pontot tartalmaz, mértéke azonban nulla, hiszen  $\lim_{q \rightarrow \infty} N_\varepsilon = \lim_{q \rightarrow \infty} (2/3)^q = 0$ . Ebben a határérték-sorrendben (F5.4)-ből a Cantor-halmaz Hausdorff-dimenzióját kapjuk, melyre

$$d = \ln 2 / \ln 3 = 0,630$$

adódik.



F5.1 ábra. A Cantor-halmaz konstruálásának első néhány lépése

ahol  $j$  az a legnagyobb szám, melyre  $\sum_{i=1}^j \bar{\lambda}_i$  még pozitív. Példaként tekintsük a Rössler-modellt, benne az  $a = b = 0,2$ ,  $c = 5,7$  paraméter értékekre  $\bar{\lambda}_1 = 0,075$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 = -5,372$ . A  $j$  index tehát 2, s (F5.6)-ból  $d = 2,014$  adódik [95].

## F.6 HATÁS- ÉS SZÖGVÁLTOZÓK A KLASSZIKUS MECHANIKÁBAN

Tekintsünk egy  $H(p,q)$  Hamilton-függvénnyel jellemzett egy szabadsági fokú konzervatív rendszert, amely korlátos - és így az egyetlen egy szabadsági foka miatt szükségképpen periodikus - mozgást végez. Adott  $E$  energia mellett képezzük egy teljes periódusra az

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(E,q) dq \quad (\text{F6.1})$$

"hatásintegrált", valamint az

$$S(q,E) = \int^q p(E,q) dq$$

függvényt. Mivel  $I$  csak  $E$ -től függ, ezt invertálva  $E(I)$ -n keresztül  $S$ -t is felírhatjuk  $q$  és  $I$  függvényeként. Az  $S(q,I)$  függvény - mint generátorfüggvény - segítségével a  $(p,q)$  kanonikus koordinátákról áttérhetünk az  $(I,\phi)$  változóparra, az úgynevezett hatás- és szögváltozókra [1]:

$$p = \frac{\partial S(q,I)}{\partial q} \quad (\text{ez } S(q,I) \text{ definíciójából következően teljesül}),$$

$$\phi = \frac{\partial S(q,I)}{\partial I} \quad (\text{ez az új szögkoordináta definíciója}).$$

Mint ahogy  $S$  expliciten nem függ az időtől, az új  $H(I,\phi)$  Hamilton-függvény megegyezik az új változókkal kifejezett régi  $H$ -val:

$$H(I,\phi) \equiv H[p(I,\phi), q(I,\phi)],$$

másrészt  $H(I,\phi) = E$  is fennáll, s (F6.1)-n keresztül az  $E$  ener-



gia egyértelműen kifejezhető az  $I$  hatásváltozóval,  $H$  nem függhet  $\phi$ -től, hanem

$$H(I, \phi) \equiv E(I)$$

alakú kell legyen.

Az új változók mozgásegyenlete

$$\dot{I} = - \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 ,$$

tehát  $I$  mozgásállandó, továbbá

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dE(I)}{dI} \equiv \omega(I) = \text{állandó} ,$$

vagyis

$$\phi(t) = \omega(I) \cdot t + \phi_0 .$$

Hangsúlyoznunk kell, hogy  $S(q, I)$  nem egyértékű függvénye a változóinak, hiszen a nagysága minden egyes periódus alatt

$$\Delta S = \oint p dq = 2\pi I$$

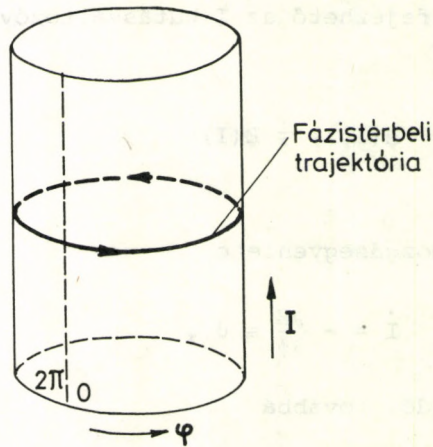
értékkel növekszik. Ezalatt a  $\phi$  szögváltozó megváltozása

$$\Delta \phi = \Delta \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \Delta S = 2\pi .$$

A  $\phi$  szögváltozó többértékűségét úgy kerülhetjük el, hogy az  $(I, \phi)$  változókkal paraméterezett fázisteret nem egy végtelen síknak, hanem egy henger palástjának képzeljük el, melyen a  $\phi = 0$  és a  $\phi = 2\pi$  koordinátájú pontokat azonosnak tekintjük (F6.1 ábra). Az ilyen - hengerpalást - topológiájú fázistérben a mozgás az  $I = \text{állandó}$  egyenletű körök mentén történik,  $I$ -től függő - de időben állandó - szögsebességgel.

Több szabadsági fokú konzervatív rendszereknél bizonyos esetekben a Hamilton-Jacobi egyenlet megoldása

$$S(q_1, q_2, \dots, q_N) = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_N(q_N)$$



F6.1 ábra. Egy szabadsági fokú rendszer hatás- és szögváltozóval jellemzett fázistere

összeg alakjában állítható elő. Az ilyen tulajdonságú - úgynevezett szeparálható - rendszereknél a

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{dS_i(q_i)}{dq_i}$$

kanonikus impulzusok csak egy-egy koordinátától függenek, ezért az egy szabadsági fokú esethez hasonlóan itt is áttérhetünk hatás- és szögváltozókra. Definiáljuk a - valamennyi változójában korlátosnak feltételezett mozgású - rendszer hatásváltozóit az

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i) dq_i$$

integrállal! Az

$$S_i(q_i) = \int^{q_i} p_i dq_i$$



függvények - az egyváltozós esethez hasonlóan - nem egyértékűek, hanem az  $i$ -edik koordináta egy teljes periódusa alatt

$$\Delta S_i = 2\pi I_i$$

értékkél változnak meg.

A  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  és  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  változókról az  $\vec{I} = (I_1, I_2, \dots, I_N)$  hatás-, és a hozzájuk kanonikusan konjugált

$$\vec{\phi} = \frac{\partial S(\vec{q}, \vec{I})}{\partial \vec{I}}$$

szögváltozókra az  $S(\vec{q}, \vec{I})$  generátorfüggvény segítségével térhetünk át. A mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{I}}{dt} &= - \frac{\partial H(\vec{I})}{\partial \vec{\phi}} = 0 && \text{és} \\ \frac{d\vec{\phi}}{dt} &= \frac{\partial H(\vec{I})}{\partial \vec{I}} \equiv \omega(\vec{I}) \end{aligned}$$

alakúak, vagyis

$$\vec{I} = \text{állandó},$$

$$\phi_j = \omega_j t + \text{állandó}.$$

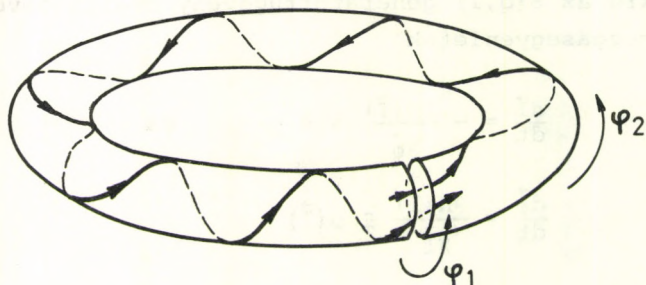
A  $\phi_i$  szögváltozó a  $q_i$  koordináta változásának egy teljes periódusa alatt  $2\pi$ -vel növekszik, tehát nem egyértékű függvénye a  $\vec{p}$  és  $\vec{q}$  kanonikus koordinátáknak. Azok viszont  $\phi_i$ -knek  $2\pi$  szerint periodikus függvényei, s ezért  $\vec{p}$  és  $\vec{q}$  bármely egyérvékű  $F$  függvénye

$$F(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} f_{n_1 n_2 \dots n_N} e^{it(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \dots + n_N \omega_N)}$$

alakban írható fel. Ezek az úgynevezett feltételesen periodikus függvények. A rendszer általában semmilyen véges idő alatt nem tér vissza a fázistérnek ugyanabba a pontjába - emiatt  $F(p, q)$  általában nem periodikus függvénye az időnek, - de elegendően hosszú idő elteltével tetszés szerint megközelíti azt

(erre utal a "feltételes" jelző).

A hatás- és szögváltozókkal paraméterezett fázistérben a mozgás az  $\vec{I} =$  állandó hiperfelületek mentén történik. Ezek a felületek - a  $\phi_i$  változók mindegyikében "összevarrva" a 0 és  $2\pi$  pontokat - N-dimenziós tóruszok, például N = 2 esetben az F6.2 ábrán látható kétdimenziós tórusz. Hacsak nem teljesül az,



F6.2 ábra. Egy szabadsági fokú szeperálható rendszer mozgása a hatás- és szögváltozókkal parametrizált fázistérben. Az  $I_1 =$  állandó és  $I_2 =$  állandó egyenletű felületek tóruszok, melyéken a trajektória elegendően hosszú idő elteltével gyakorlatilag a teljes felületet beburkolja. Ez alól kivételt csupán azok az elfajult esetek képeznek, melyeknél a keringési idők aránya racionális szám, ekkor a fázistrajektória egy zárt görbe

hogyan az

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} \quad \text{és} \quad \omega_k = \frac{\partial E}{\partial I_k}$$

frekvenciák aránya egy racionális szám, a fázistérbeli trajektóriák nem zárt görbék, s a rendszer fázispontja idővel bejárja az egész N-dimenziós hiperfelületet, annak bármely pontjának tetszés szerinti kicsiny környezetébe eljut.



Amennyiben viszont található olyan  $n_i$  és  $n_k$  egész számok, melyekkel fennáll, hogy

$$n_i \omega_i = n_k \omega_k ,$$

úgy a  $\psi = n_i \phi_i - n_k \phi_k$  mennyiség időderiváltja nulla. Másrészt  $\psi$  maga ugyan nem egyértékű függvény, de a bizonytalansága  $2\pi$  egész többszöröse, így trigonometrikus függvényei (pl.  $\sin\psi$ ,  $\cos 2\psi$ , ...) már egyértékűek. Ilyen esetben a  $I_1, I_2, \dots, I_N$  hatásváltozók mellett létezik még egy (többszörös frekvencia-elfajulás esetén még több) egyértékű mozgásállandó, s így a fázispont nem a teljes  $N$ -dimenziós tóruszt, hanem annak csak egy alacsonyabb dimenziós alterét járja be.

## F.7 KÁOSZ RETARDÁLT RENDSZEREKBEN

A szabályozott rendszerek nagy része nem írható le egyszerű differenciálegyenletekkel, ugyanis figyelembe kell venni azt a tényt is, hogy egy külső hatásra adott válasz nem pillanatszerű, hanem átlagosan valamilyen  $\tau$  késleltetési idő múlva alakul csak ki. Az ilyen típusú jelenségek széles köréhez a

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), x_\tau(t)) \quad (F7.1)$$

retardált differenciálegyenlet rendelhető hozzá, ahol  $x$  (dimenziótlan) mennyiség,  $x_\tau$   $\tau$  idővel korábbi értéke:

$$x_\tau(t) \equiv x(t - \tau) , \quad (F7.2)$$

s  $F$  nemlineáris függvény. Az (F7.1) egyenlet egyértelmű megoldásához az szükséges, hogy  $x(t)$ -t egy  $\tau$  hosszúságú intervallumon ismerjük. A rendszer tehát végtelen-dimenziós állapotérrel jellemezhető (ennyiben analóg a parciális differenciálegyenlettel leírható rendszerekkel), s tanulmányozása a káosz szempontjából azért különösen érdekes, mert információt nyújt arra vonatkozóan, hogyan jelenik meg és fejlődik tovább a kaotikus viselkedés nagy szabadsági fokú rendszerekben.

A továbbiakban az

$$\dot{x} = g(x_\tau) - \gamma x \quad (\text{F7.3})$$

egyenletet vizsgáljuk, ami azt fejezi ki, hogy az  $x$  mennyiség utánpótlás hiányában  $\gamma$  relaxációs idővel bomlik le, keletkezési üteme viszont nem állandó, a  $\tau$  idővel korábbi értéktől függ - a  $g(x_\tau)$  függvény szerint megadott módon. Azt kívánjuk földeríteni, milyen hatással van a  $\tau$  késleltetési idő növelése az egyenlet megoldásaira, azaz a  $\tau$ -t kontrollparaméternek tekintjük. Konkrét választásként a

$$g(x_\tau) = \frac{ax_\tau}{1+x_\tau^c} \quad (\text{F7.4})$$

alakot tekintjük. A numerikus számolások eredménye az

$$a = 0,2 \quad , \quad \gamma = 0,1 \quad , \quad c = 10 \quad (\text{F7.5})$$

értékekre vonatkozik majd.

Az (F7.3) egyenlet lineáris stabilitás-vizsgálata a stacionárius megoldás körül általánosan is elvégezhető. Az  $x_0$  stacionárius megoldást a

$$g(x_0) = \gamma x_0$$

összefüggés határozza meg. Az ezen pont környezetében érvényes lineáris egyenlet a

$$\delta x = x - x_0 \quad , \quad \delta x_\tau = x_\tau - x_0$$

jelöléssel

$$(\delta x) = g'(x_0) \delta x_\tau - \gamma \delta x \quad (\text{F7.6})$$

alakú. Keressük a megoldást a  $\delta x \sim e^{\lambda t}$  feltevés alapján, ahol

$$\lambda = r + i\omega$$



és  $r$  ill.  $\omega$  valós számok. (F7.6)-ból

$$\lambda = g'(x_0)e^{-(r+i\omega)\tau} - \gamma$$

adódik, aminek valós és képzetes részéből két egyenletet kapunk:

$$r = g'(x_0)e^{-r\tau} \cos\omega\tau - \gamma,$$

$$\omega = -g'(x_0)e^{-r\tau} \sin\omega\tau.$$

Átrendezés után

$$r = -\gamma - \omega\tau \operatorname{ctg}(\omega\tau),$$

$$\omega = \sqrt{[g'(x_0)]^2 e^{-2r\tau} - (r+\gamma)^2}.$$

A  $\tau \rightarrow 0$  határesetben  $r = g'(x_0) - \gamma$ , amiről fölteszük, hogy negatív, továbbá  $\omega = 0$ . A fenti transzcendens egyenletrendszernek pozitív  $\tau$  értékek mellett végtelen sok megoldása van, de eleendően kicsi  $\tau$  esetén az  $r$  számok mind negatívak.  $x_0$  akkor veszti el stabilitását, amikor a legnagyobb  $r$  megoldás előjelet vált. Az ehhez tartozó  $\tau_c$  kritikus késleltetési idő az

$$\omega \operatorname{ctg}(\omega\tau) = -\gamma$$

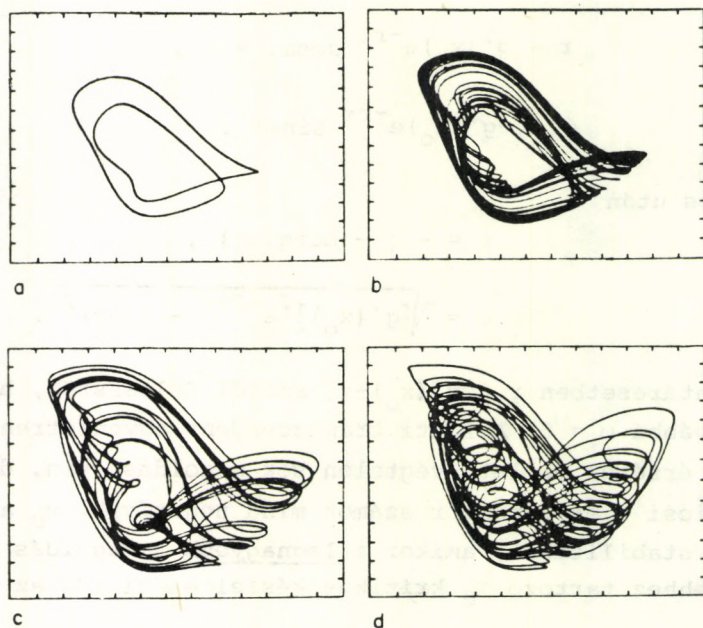
egyenlet legkisebb (nem zérus) megoldása. A  $\tau \geq \tau_c$  tartományban

$$\omega = \sqrt{[g'(x_0)]^2 - \gamma^2}$$

frekvenciájú határciklus alakul ki.

További bifurkációk már csak számítógépes eljárások igénybevételével határozhatók meg.  $g$ -nek (F7.4)-gyel megadott alakja esetén az (F7.5) paraméter értékek mellett a következő viselkedést találták [175]: az  $x_0 = 1$  stacionárius megoldás a  $\tau_c \approx 4,53$  késleltetési idő elérésig stabil. Ezután, a  $4,53 < \tau < 13,3$  tartományban egyszerű határciklus lesz az attraktor, majd  $\tau = 13,3$ -nél a keringési idő megduplázódik. Ezzel perióduskettőző bifurkáció-sorozat indul meg, s tart a  $\tau_\infty = 16,8$  torlódási pont eléréséig. A  $\tau_\infty$  fölötti tartományra

különös attraktor jelenléte jellemző, megszakítva periodikus ablakokkal. Az F7.1 ábra a trajektóriák futását mutatja - a tranziensek kihalása után - az  $x(t)$ ,  $x(t-\tau)$  síkon egy torlódási pont alatti ( $2T$ -periódusú), és három kaotikus viselkedésű esetben.



F7.1 ábra. Az (F7.3)-(F7.5) rendszer megoldásából szerkesztett  $x(t)$ ,  $x(t-\tau)$  grafikon. A késleltetési idő értékei: a)  $\tau = 14,0 < \tau_\infty$ ; b)  $\tau = 17,0 \approx \tau_\infty$ ; c)  $\tau = 23,0 > \tau_\infty$ ; d)  $\tau = 300 \gg \tau_\infty$

Az eltérő  $\tau$  értékekhez tartozó különös attraktorok kvantitatív megkülönböztetésére is lehetőség nyílik a Ljapunov-exponensek spektrumának meghatározásával. Közvetlenül  $\tau_\infty$  fölött még csak egy pozitív Ljapunov-exponens jellemző a rendszerre,  $\tau = 30$ -ra már kettő,  $\tau = 100$ -ra hat,  $\tau = 350$ -re pedig húsz pozitív exponens tartozik az áramláshoz. A pozitív Ljapunov-exponensek számában lineáris növekedési tendencia figyelhető meg - nem szabad azonban megfeleledkezni arról, hogy a Ljapunov-exponensek a  $\tau$  kontrollparaméter függvényében hasonlóan bonyolult változást mutatnak, mint az egydimenziós leképezésekben, hiszen a periodikus attraktorokhoz tartozó  $\tau$  értékek esetén minden Ljapunov-exponens negatív.



Vizsgálható az is, hogyan függ a különös attraktor Hausdorff-dimenziója a késleltetési időtől. A közvetlen számolás [175] megerősíti, hogy az (F5.6) becslés jó közelítéssel érvényes nagy  $\tau$  értékekre is. Nem sokkal  $\tau_{\infty}$  fölött az attraktor dimenziója 2,1, míg  $\tau \approx 200$ -ra 20(!) körüli érték. A növekedés lineáris tendenciát mutat.

A konkrét végtelen-dimenziós rendszerre vonatkozó számítógépes szimulálás tanulsága tehát a következőkben foglalható össze. A káosz kialakulása itt is hasonló módon történik, mint kevés szabadsági fokú rendszerekben: bifurkáció-sorozat után (alacsony dimenziós) különös attraktor jön létre, annak ellenére, hogy lehetséges lenne bonyolult kváziperiodikus mozgásformák kialakulása is; ez alátámasztja Ruelle és Takens állítását, miszerint a különös attraktor megjelenése tipikus. A kontrollparaméter növelésekor a különös attraktor egyre bonyolultabbá válik abban az értelemben, hogy dimenziója egyre magasabb lesz.

Az (F7.1) típusú egyenletek alkalmazása igen széleskörű lehet, az elektronikától kezdve a biológián keresztül egészen gazdasági jelenségek modellezéséig. Konkrét példaként csupán az ún. dinamikai betegségek (ld. [176] és az abban lévő hivatkozások) leírását említjük. Dinamikainak az olyan betegségeket nevezük, melyek a szervezet szabályozó rendszerének dinamikájában létrejövő változás következményei: Előfordulhat, hogy a normális állapotban oszcilláló rendszer leáll vagy szabálytalan módon kezd viselkedni, illetve az is, hogy az egyébként stacionárius rendszer oszcillációkba kezd. A dinamikai betegségek körébe tartoznak például a légzési rendellenességek, a vérképzés és a szív működés bizonyos zavarai, valamint számos idegrendszeri megbetegedés, mint az epilepszia, álmatlanság, skizofrénia stb. Konkrétan, az (F7.3-4) egyenleteket a leukémia egy fajtájában a véralkotórészek koncentrációjának időfüggésében tapasztalt változások leírására vezették be [176].



1. L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1974)
2. G. Ioos, D.D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980)
3. P. Holmes, *Phil. Trans. of the Royal Society*, 292, 419, 1979.
4. Y. Ueda, *J. Stat. Phys.* 20, 181, 1979.
5. M.J. Feigenbaum, *Los Alamos Sci.* 1, 4, 1980.
6. B.A. Huberman, J.P. Crutchfield, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1743, 1979.
7. R.H.G. Helleman, in *Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction*, szerk.: M. Month, J.C. Herrera, *Am. Inst. Phys. Conf. Proc.*, vol. 57, 1979.
8. W. Engel, *Math. Ann.* 136, 319, 1958., 130, 11, 1955.
9. M. Hénon, *Quart. Appl. Math.* 27, 291, 1969.
10. M.V. Berry, N.L. Balázs, M. Tabor, A. Voros, *Annals of Phys.* 122, 26, 1979.
11. H.J. Korsch, M.V. Berry, *Physica* 3D, 627, 1981.
12. M.V. Berry, in *Topics in Nonlinear Dynamics*, szerk.: S. Jorna, *Am. Inst. Phys. Conf. Proc.* vol. 46, 1978.
13. B. Van der Pol, *Proc. Institute of Radio Engineers* 22, 1051, 1934.
14. M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, *J. London Mat. Soc.* 20, 180, 1945.
15. N. Levinson, *Ann. Math.* 50, 127, 1949.
16. S. Smale, *Bull. Am. Math. Soc.* 73, 747, 1967.
17. J. Guckenheimer, *Physica* 1D, 227, 1980.
18. O.E. Rössler, R. Rössler, H.D. Landahl, *Sixth Int'l Biophysics Congress, Kyoto, Japan, Abstract Vol.* p. 296, 1978.
19. A.S. Pikovsky, M.I. Rabinovich, *Physica* 2D, 8, 1981.
20. Szász Domokos, ez a kötet
21. M.I. Rabinovich, *Usp. Fiz. Nauk* 125, 123, 1978. (*Sov. Phys. Usp.* 21, 443, 1978)
22. J.P. Gollub, E.J. Romer, J.E. Socolar, *J. Stat. Phys.* 23, 321, 1980.
23. O.E. Rössler, in: *Structural Stability in Physics*, szerk.: W. Güttinger, H. Eikemeier (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979)
24. O.E. Rössler, *Z. Naturforschung* 31a, 259, 1976.
25. R.F. Williams, *Public. Math. de L'Institute des Hautes Etudes Scientifiques* 43, 169, 1974.
26. R.F. Williams, in *Turbulence Seminar, Lecture Notes in Mathematics* 615 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977)
27. O.E. Rössler, in *Synergetics: A Workshop*, szerk.: H. Haken (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977)
28. R. Shaw, *Z. Naturforschung* 36a, 80, 1980.
29. O.E. Rössler, *Phys. Lett.* 57A, 397, 1976.
30. N. Metropolis, M.L. Stein, P.R. Stein, *J. Comb Theory* 15, 25, 1973.
31. R.B. May, *Nature* 261, 459, 1976.



32. S. Grossmann, S. Thomae, *Z. Naturforsch.* 32a, 1353, 1977.
33. P. Coullet, C. Tresser, *Jour. de Phys. Coll.* C5, 25, 1978.
34. M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19, 25, 1978.
35. M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 21, 669, 1979.
36. M.J. Feigenbaum, *Commun. Math. Phys.* 77, 65, 1980.
37. P. Collet, J.P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems* (Birkhäuser, Basel, Boston, 1980)
38. J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, B.A. Huberman, *megjelenés alatt a Physica D-ben*
39. R.H.G. Helleman, in *Fundamental Problems in Stat. Mech.* 5 (North Holland, Amsterdam-New York, 1980)
40. P. Cvitanović, M. Høgh Jensen, *NORDITA preprint*, Nov. 1981.
41. B. Derrida, *J. de Physique* C5, 49, 1978.
42. M.J. Feigenbaum, *Phys. Lett.* 74A, 375, 1979.
43. R.M. May, G.F. Oster, *Phys. Lett.* 78A, 1, 1980.
44. B. Derrida, A. Gervois, Y. Pomeau, *J. Phys. (Paris) A* 12, 269, 1979.
45. B. Hu, J.M. Mao, *Phys. Rev.* A25, 1196, 1982.
46. M. Campanino, H. Epstein, *Commun. Math. Phys.* 79, 261, 1981.
47. M. Campanino, H. Epstein, D. Ruelle, *Topology* 21, 125, 1982.
48. M. Hénon, *Commun. Math. Phys.* 50, 69, 1976.
49. M. Hénon, Y. Pomeau, in *Lecture Notes in Mathematics* 565 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976)
50. P. Collet, J.P. Eckmann, H. Koch, *J. Stat. Phys.* 25, 1, 1981.
51. G. Benettin, C. Cercignani, L. Galgani, A. Giorgilli, *Lett. Nuovo Cimento* 28, 1, 1980.
52. J.M. Green, R.S. Mac Kay, F. Vivaldi, M.J. Feigenbaum, *Physica* 3D, 468, 1981.
53. P. Collet, J.P. Eckmann, H. Koch, *Physica* 3D, 457, 1981.
54. T.C. Bauntis, *Physica* 3D, 577, 1981.
55. B. Derrida, Y. Pomeau, *Phys. Lett.* 80A, 217, 1980.
56. R.H.G. Helleman, in *Nonequilibrium Problems in Statistical Mechanics, Vol.2.* szerk.: W. Horton, L. Reichl, V. Szebehely (John Wiley, New York, 1981)
57. G. Schmidt, *Phys. Rev.* A22, 2849, 1980.
58. J.P. Crutchfield, D. Farmer, N. Packard, R. Shaw, G. Jones, R.J. Donnelly, *Phys. Lett.* 76A, 1, 1980.
59. J.B. Mc Laughlin, *J. Stat. Phys.* 24, 375, 1981.
60. R.W. Leven, B.P. Koch, *Phys. Lett.* 86A, 71, 1981.
61. V. Franceschini, C. Tebaldi, *J. Stat. Phys.* 21, 707, 1979.
62. E. Ott, *Rev. Mod. Phys.* 53, 655, 1981.
63. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon Press, Oxford, 1961)
64. H.L. Swinney, J.P. Gollub (szerk.) *Chaotic Behaviour and Fluid Dynamics* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
65. J.P. Gollub, S.V. Benson, *J. Fluid, Mech.* 100, 449, 1980.
66. A. Libchaber, J. Maurer, in *Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities*, szerk.: T. Riste (Plenum, New York, 1981)
67. J.P. Gollub, in *Chaotic Behaviour in Deterministic Systems*, szerk.: R. Stora, G. Ioos, R.H.G. Helleman (North Holland, Amsterdam, New York, 1981)
68. A. Libchaber, J. Maurer, *J. de Physique, Colloq.* 41, C3-51, 1980.



68. J.P. Gollub, S.V. Benson, J.F. Steinman, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 357, 22, 1980.
69. M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini, *Phys. Rev. Lett.* 47, 243, 1981.
70. J. Testa, J. Pérez, C. Jeffries, *Phys. Rev. Lett.* 48, 714, 1982.
71. E.N. Lorenz, *J. Atmospheric Sci.* 20, 130, 1963. és 20, 167, 1963.
72. J.B. Mc Laughlin, P.C. Martin, *Phys. Rev.* A12, 186, 1975.
73. H. Haken, *Phys. Lett.* 53A, 77, 1975.
74. R. Graham, *Phys. Lett.* 58A, 440, 1976.
75. M.Lücke, *J. Stat. Phys.* 15, 455, 1976.
76. P.C. Martin, in *Statistical Physics*, szerk.: L. Pál, P. Szépfalusy (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976)
77. J. Marsden, in *Turbulence Seminar, Lecture Notes in Mathematics 615* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977)
78. O.E. Lanford, in *Turbulence Seminar, Lecture Notes in Mathematics 615* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977)
79. D. Ruelle, in *Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics 80* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977)
80. T. Shimizu, N. Morioka, *Phys. Lett.* 66A, 182, 1978.
81. N. Morioka, T. Shimizu, *Phys. Lett.* 66A, 447, 1978.
82. T. Shimizu, N. Morioka, *Phys. Lett.* 69A, 148, 1978.
83. J.L. Kaplan, J.A. Yorke, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 316, 400, 1979.
84. J.A. Yorke, E.D. Yorke, *J. Stat. Phys.* 21, 263, 1979.
85. K.A. Robbins, *Siam. J. App. Math.* 36, 457, 1979.
86. I. Shimida, *Prog. Theor. Phys.* 62, 61, 1979.
87. E. Kobloch, *J. Stat. Phys.* 20, 695, 1979.
88. I. Shimida, T. Nagashima, *Prog. Theor. Phys.* 61, 1605, 1979.
89. V. Franceschini, *J. Stat. Phys.* 22, 396, 1980.
90. P. Manneville, Y. Pomeau, *Physica* 1D, 219, 1980.
91. K. Takeyama, *Prog. Theor. Phys.* 63, 91, 1980.
92. R. Graham, H.J. Scholz, *Phys. Rev.* A22, 1198, 1980.
93. J.G. Sinai, E.S. Vul, *Physica* 2D, 3, 1981.
94. A. Zippelius, M. Lücke, *J. Stat. Phys.* 24, 345, 1981.
95. H. Froehling, J.P. Crutchfield, D. Farmer, N.H. Packard, *Physica* 3D, 605, 1981.
96. J.A. Yorke, E.D. Yorke, in *Chaotic Behaviour and Fluid Dynamics*, szerk.: H.L. Swinney, J.P. Gollub (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
97. R.D. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics, Vol. I., Chap. 31* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
98. J. Guckenheimer, in *Chaotic Behaviour and Fluid Dynamics*, szerk.: H.L. Swinney, J.P. Gollub (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
99. H. Haken, *Synergetics, An Introduction* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978)
100. J.E. Marsden, M. Mc Cracken, *The Hopf Bifurcation and Its Application* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976)
101. O.E. Lanford, nem publikált anyag, 1977.



138. F.R. Marotto, *J. Math. Anal. and Appl.* 72, 716, 1979.
139. S.D. Feit, *Commun. Math. Phys.* 61, 249, 1978.
140. J.H. Curry, *Commun. Math. Phys.* 68, 123, 1979.
141. S. Newhouse, *Publ. Math. IHES* 50, 101, 1980.
142. S. Smale, in *Lecture Notes in Mathematics* 615 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977)
143. C. Tresser, P. Couillet, A. Arneodo, *J. Phys. A* 13, L123, 1980.
144. T.Y. Li, J.A. Yorke, *Amer. Math. Monthly* 82, 985, 1975.
145. V.I. Judovics, *Aszimptotika predelnyih ciklov sistemi Lorenz-a pri bolsih csiszlah Rayleigh-a*, Rosztovi Egyetem, 1977.
146. W. Lauterborn, E. Cramer, *Phys. Lett.* 47, 1445, 1981.
147. B.V. Chirikov, *Physics Reports* 52, No5, 263, 1979.
148. Györgyi Géza, ez a kötet
149. V.I. Arnold, *A klasszikus mechanika matematikai módszerei. Műszaki Könyvkiadó, megjelenés alatt*
150. G.D. Birkhoff, *Collected Works*, A.M.S. Publ. 1960.
151. C.L. Siegel, *Ann. Math.* 42, 806, 1941.
152. C.L. Siegel, *Math. Ann.* 128, 144, 1954.
153. H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vols 1-3. (Gauthier-Villars, 1892; Dover Press, 1957)
154. A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk* 98, 527, 1954.
155. V.I. Arnold, *Uszp. Mat. Nauk* 18, No6, 91, 1963.
156. J. Moser, *Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.-Phys.Kl.*, No.1, 1, 1962.
157. V.I. Arnold, A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin Inc., New York, 1968)
158. Ju. Mozer, *Lekcii o gamiltonovüh szisztymah* (MIR, Moszkva, 1973)
159. Y.M. Treve, in *Topics in Nonlinear Dynamics*, szerk.: S. Jorna, *Am. Inst. Phys. Conf. Proc.* vol. 46, 1978.
160. M.V. Berry, *Eur. J. Phys.* 2, 91, 1981.
161. V.I. Arnold, *Sov. Math. Dokl.* 5, 581, 1964.
162. P.J. Holmes, J.E. Marsden, *J. Math. Phys.* 23, 669, 1982.
163. R.S. Mac Kay, *Phys. Letters* 87A, 321, 1982.
164. Vetier András, ez a kötet
165. J.M. Greene, *J. Math. Phys.* 20, 1183, 1979.
166. L.P. Kadanoff, *Phys. Rev. Letters* 47, 1641, 1981.
167. D.F. Escande, F. Doveil, *J. Stat. Phys.* 26, 257, 1981.
168. D.F. Escande, F. Doveil, *Phys. Letters* 83A, 307, 1981.
169. P. Manneville, Y. Pomeau, *Comm.Math. Phys.* 74, 189, 1980.
170. A.B. Zisook, *Phys. Rev.* A25, 2289, 1982.
171. A.B. Zisook, S.J. Shenker, *Phys. Rev.* A28, 2824, 1982.
172. M. Nauenberg, J. Rudnick, *Phys. Rev.* B24, 493, 1981.
173. J.L. Kaplan, J.A. Yorke, in *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, *Lecture Notes in Mathematics* 730 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979)
174. P. Collet, J. P. Eckmann, L. Thomas, *Commun. Math. Phys.* 81, 261, 1981.
175. J.D. Farmer, *Physica* 4D, 336, 1982.
176. L. Glass, M.C. Mackey, in *Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines*, szerk.: O. Gurel, O.E. Röessler, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* vol. 316, 1979.



102. D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. 20, 167, 1971.
103. S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. 64, 35, 1978.
104. Tóth Bálint, ez a kötet
105. J.P. Eckmann, Rev. Mod. Phys. 53, 643, 1981.
106. J.H. Curry, Commun. Math. Phys. 68, 129, 1979.
107. V. Franceschini, C. Tebaldi, J. Stat. Phys. 25, 397, 1981.
108. J.H. Curry, J.A. Yorke, in The Structure of Attractors in Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics 668 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979)
109. P.R. Fenstermacher, H.L. Swinney, J.P. Gollub, J. Fluid, Mech. 94, 103, 1979.
110. M. Gorman, L.A. Reith, H.L. Swinney, Am. N.Y. Acad. Sci. 357, 10, 1980.
111. R.C. Di Prima, H.L. Swinney, in Chaotic Behaviour and Fluid Dynamics, szerk.: H.L. Swinney, J.P. Gollub (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
112. A. Libchaber, J. Maurer, J. de Physique Lett. 41, 515, 1980.
113. M. Dubois, P. Bergé, Phys. Lett. 76A, 53, 1980.
114. S. Fauve, A. Libchaber, in Chaos and Order in Nature, szerk.: H. Haken (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
115. E. Hopf, Comm. Pure Appl. Math. 1, 303ff, 1948.
116. L.D. Landau, E.M. Lifsic, Hidrodinamika (Tankönyvkiadó, Budapest, 1980)
117. Krámlí András, ez a kötet
118. G.R. Sell, in Chaos and Order in Nature, szerk.: H. Haken (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
119. H. Haken, in Chaos and Order in Nature, szerk.: H. Haken (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
120. G. Ahlers, in Systems Far from Equilibrium, Lecture Notes in Physics 132 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980)
121. Tél Tamás, ez a kötet
122. Geszti Tamás, ez a kötet
123. lásd például Rényi Alfréd: Napló az információelméletéről (Gondolat, Budapest, 1976)
124. J. Guckenheimer, Annals of the New York Academy of Sciences 316, 1980.
125. H. Daido, Phys. Lett. 86A, 259, 1981.
126. Gálfi László, ez a kötet
127. J. Coste, J. of Stat. Phys. 23, 521, 1980.
128. E.N. Lorenz, Annals of the N.Y. Ac. of Sciences 357, 1980.
129. B.A. Huberman, J. Rudnick, Phys. Rev. Lett. 45, 154, 1980.
130. B. Mandelbrot, Fractals: Form, Chance and Dimension (W.H. Freeman, San Francisco, California, 1977)
131. P. Grassberger, J. Stat Phys. 26, 173, 1981.
132. S. Thomae, S. Grossman, Phys. Lett. 83A, 181, 1981.
133. B.A. Huberman, A.B. Zisook, Phys. Rev. Lett. 46, 626, 1981.
134. A. Wolf, J. Swift, Phys. Lett. 83A, 184, 1981.
135. V. Franceschini, L. Russo, J. Stat. Phys. 25, 757, 1981.
136. C. Simo, J. Stat. Phys. 21, 465, 1979.
137. F.R. Marotto, Commun. Math. Phys. 68, 187, 1979.



# KÁOSZ KÉMIAI REAKCIÓKBAN

Tél Tamás

1.	Káosz homogén kémiai rendszerekben	273
1.1	Kísérletek	273
1.2	A kaotikusság vizsgálata	277
1.3	Elméletek	281
2.	Káosz inhomogén kémiai rendszerekben	288
2.1	Bevezetés	288
2.2	Az általánosított Ginzburg-Landau-egyenlet	288
2.3	A fázis-instabilitás	292
2.4	A fázis-káosz	294
	Irodalom	296





## 1. KÁOSZ HOMOGEN KÉMIAI RENDSZEREK BEN

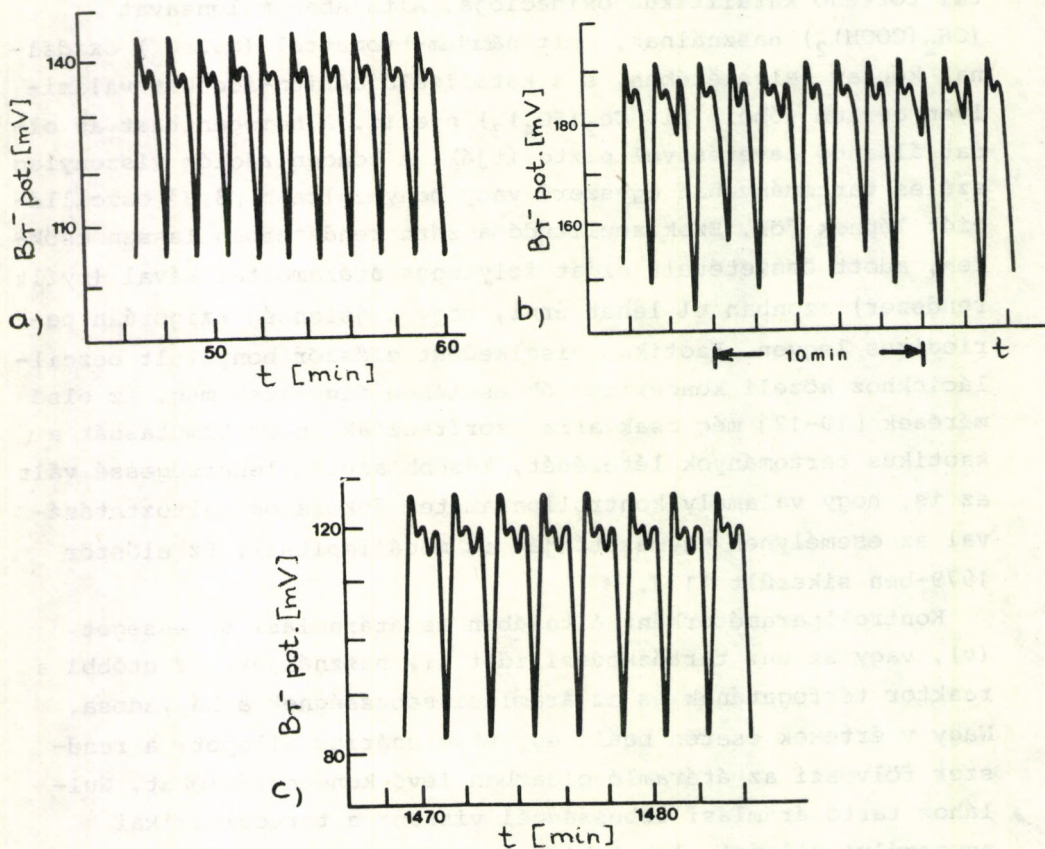
### 1.1 Kísérletek

Az első reakció, melyben kémiai káosz jelenlétét kimutatták, egy enzim-reakció volt [1], az ezt követő kísérletek azonban elsősorban a Bjelouszov-Zsabotyinszkij-reakcióra (BZ-reakcióra) [2,3] vonatkoztak, mely az egyik legjobban ismert periodikus kémiai folyamat [4-7]. A BZ-reakció polikarbonsavak savas bromáttal történő katalitikus oxidációja. Általában malonsavat ( $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ ) használnak, amit nátrium-bromáttal ( $\text{NaBrO}_3$ ) oxidálnak kénsav jelenlétében, s a katalizáló cérium-ionokat valamilyen cérium sóból (pl.  $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ ) nyerik. A homogenitást az oldat állandó keverésével biztosítják. A koncentrációk viszonylag széles tartományában egyszerű vagy bonyolultabb [8,9] oszcillációk lépnek föl. Ezek amplitúdója zárt rendszerben lassan csökken, adott összetételű oldat folytonos átáramoltatásával (nyílt rendszer) azonban el lehet érni, hogy a jelenség szigorúan periodikus legyen. Kaotikus viselkedést először bonyolult oszcillációkhoz közeli koncentrációk esetében figyeltek meg. Az első mérések [10-12] még csak arra szorítkoztak, hogy kimutassák a kaotikus tartományok létezését, később azután lehetségessé vált az is, hogy valamely kontrollparaméter fokozatos változtatásával az eseménynek egymásutánját is megállapítsák. Ez először 1979-ben sikerült [13].

Kontrollparaméterként általában az átáramlási sebességet ( $v$ ), vagy az un. tartózkodási időt ( $\tau$ ) használják. Ez utóbbi a reaktor térfogatának és az áramlási sebességnek a hányadosa. Nagy  $v$  értékek esetén beáll egy stacionárius állapot: a rendszer fölveszi az átáramló oldatban lévő koncentrációkat. Nullához tartó áramlási sebességnél viszont a termodinamikai egyensúlyi állapot alakul ki, a tranziensek kihalása után. Bonyolult időfüggő viselkedés tehát közepes  $v$  értékeknél várható.

A [13] kísérletben az áramlási sebességet 2,9 ml/perc minimális értéktől növelték. Az említett stacionárius állapot 5,5 ml/perc fölött ( $\tau < 4,6$  perc) állt be. A négy csatornán beáramló oldatban a malonsav, nátrium-bromát, kénsav, cérium-ion koncentráció rendre 0,3, 0,14, 0,2 és 0,001 mól/l volt. A hő-

mérsékletet  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on stabilizálták. A mért mennyiség a  $\text{Br}^-$  koncentráció volt, melyet bromid-szelektív elektród potenciáljának mérése alapján határoztak meg. Az áramlási sebesség növelésével különböző, többszűs periodikus oszcillációk alakultak ki. Három tartományban nemperiodikus viselkedést figyeltek meg, mindegyikben a megelőző, s a következő periodikus tartományra jellemző jelalak keveredett, szabálytalan módon (ld. 1.1 ábra).



1.1 ábra. A bromid-szelektív elektród potenciáljának időfüggése a [13] kísérletben: a)  $v=4,06$  ml/perc, periodikus, b)  $v=4,31$  ml/perc, nemperiodikus, c)  $v=4,34$  ml/perc, periodikus



A kísérletben tapasztalt teljes eseménysort az I. táblázat foglalja össze; a megfelelő jelalakok az 1.8 és 1.9 ábra baloldali oszlopában láthatók. A táblázat feltünteti a mért áramlási sebességet (melyet  $\pm 0,01$  ml/perc pontossággal stabilizáltak), valamint azt, hogy hány csúcsú jelek fordulnak elő az adott tartományban, s hogy periodikus (P) vagy nemperiodikus (N) a viselkedés a tranziensek eltűnése után. Az egyes jelalakok 48 órán keresztül is fennmaradnak, nem mennek át spontán egymásba, sőt még külső perturbációkkal (a keverés rövid idejű leállításra, vegyszerek bejuttatása a reaktortérbe) szemben is stabilak. A rendszer ugyanezekben az állapotokon megy keresztül akkor is, ha az áramlási sebességet 5,5 ml/perc értékről csökkentik (hiszterézist nem figyeltek meg). A kísérlet jól reprodukálható.

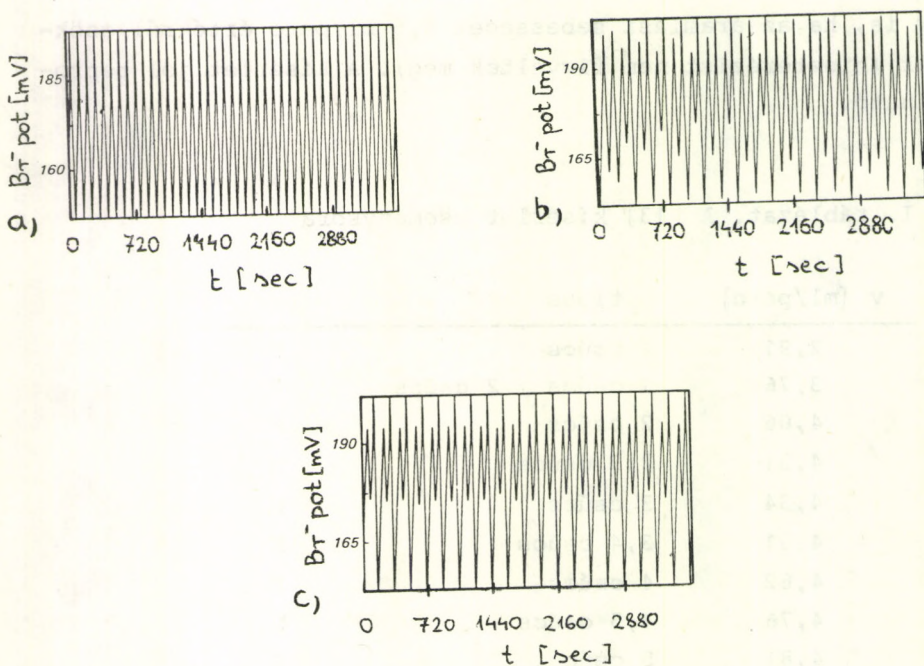
I. táblázat. A [13] kísérlet eseménysora

v [ml/perc]	típus	
2,91	1 csúcs	P
3,76	1 csúcs + 2 csúcs	P
4,06	2 csúcs	P
4,31	2,3 csúcs	N
4,34	3 csúcs	P
4,51	3,4 csúcs	N
4,62	4 csúcs	P
4,76	4,5 csúcs	N
4,81	5 csúcs	P
5,37	sok csúcs	P
5,42	1 csúcs (sok amplitúdó)	P
5,50	stacionárius	

Az áramlási sebesség növelésekor kvalitatíven hasonló viselkedést tapasztaltak más koncentráció-tartományban is [14,15].

Végeztek mérést arra vonatkozóan is, hogy milyen eseménysor alakul ki az áramlási sebesség kis értékeinél. A [16] kísér-

letben a  $\tau$  tartózkodási idő 0,5 óra és 4 óra között változott, lényegében ugyanazon koncentrációk mellett, mint [13]-ban, ahol viszont a tartózkodási idő 0,08 óra és 0,2 között volt. (Egyelőre nincsenek mérések a  $0,2 < \tau < 0,5$  intervallumból.) A [16] kísérlet azt mutatta, hogy periodikus és nemperiodikus tartományok váltogatják egymást  $\tau$  növelésekor. A periodikus tartományban fellépő csúcsok száma egyesével növekszik; a nemperiodikus tartományban kialakuló amplitúdók jelentős ingadozást mutatnak (ld. 1.2 ábra).

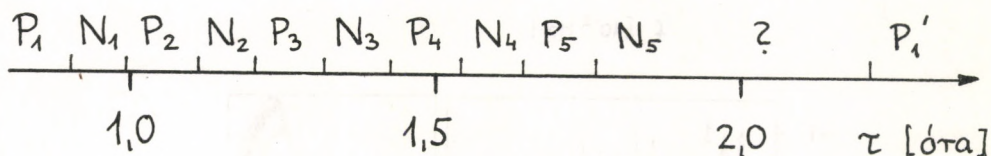


1.2 ábra. A bromid-szelektív elektród potenciáljának időfüggése a [16] kísérletben: a)  $\tau = 0,49$  óra, periodikus, b)  $\tau = 0,90$  óra, nemperiodikus, c)  $\tau = 1,03$  óra, periodikus

A teljes eseménysort az 1.3 ábra szemlélteti.  $P_k$  olyan periodikus tartományt jelöl, melyben  $k$  csúcs (egy nagy amplitúdójú,  $k-1$  kis amplitúdójú) jelenik meg.  $N_k$  a  $P_k$  és  $P_{k+1}$  között lévő



nemperiodikus tartomány.  $P'_1$  (a termodinamikai egyensúly közelében kialakuló) kis amplitúdójú sinus-rezgés tartománya.



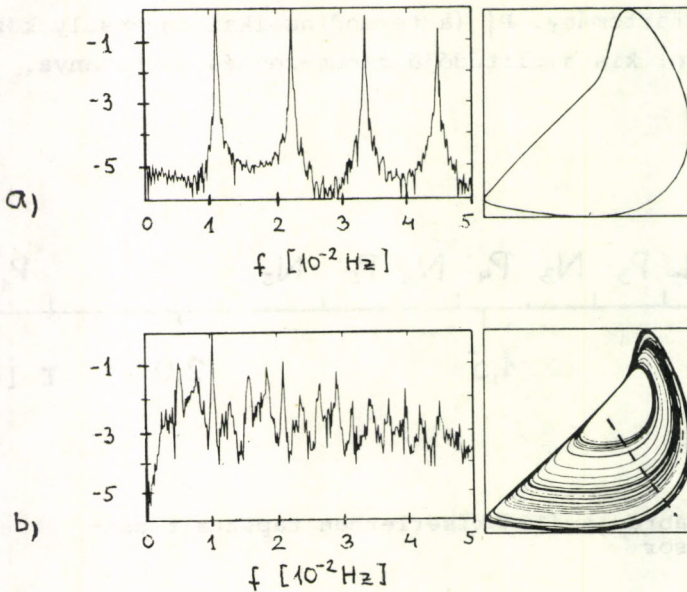
1.3 ábra. A [16] kísérletben tapasztalt eseménysor

## 1.2 A kaotikusság vizsgálata

Lényeges kérdés annak eldöntése, hogy a nemperiodikus tartományokban tapasztalt viselkedés ténylegesen kaotikus-e. Ennek érdekében a mérési eredményeket különböző módszerekkel analizálták.

Az egyik módszer a  $B(t)$  bromid-ion potenciál Fourier-transzformálása. A periodikus tartományokban a periódusidőnek megfelelő frekvenciánál és ennek felharmónikusainál megjelenik egy-egy éles csúcs. A nemperiodikus tartományokban az éles csúcsok eltűnnek, s a spektrum kiszélesedik [16-18] (ld. 1.4 ábra).

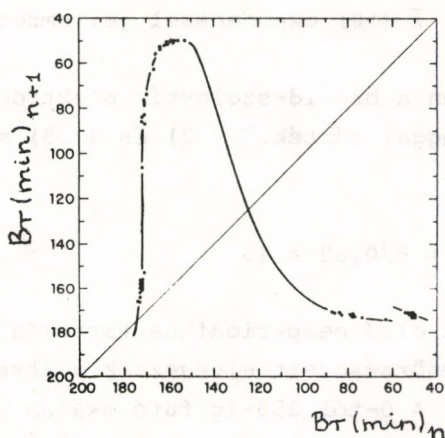
A rendszer dinamikájára jellemző fázisgörbék szerkeszthetők abban az esetben is, ha csak egyetlen mennyiséget (jelen esetben  $B(t)$ -t) mértek [19]: az egyik lehetőség az, hogy az egyes tengelyekre a  $B(t)$ ,  $B(t+T)$ ,  $B(t+2T)$ , ... mennyiségeket rajzoljuk föl, ahol  $T$  tetszőleges időeltolási érték, a másik pedig az, hogy  $B(t)$  mellett a  $\dot{B}(t)$ ,  $\ddot{B}(t)$ , ... idő-deriváltakat ábrázoljuk. (A két módszer kombinálható is.) A kétdimenziós fázisgörbék azt mutatják, hogy a periodikus tartományokban határ-ciklus alakul ki, a nemperiodikus tartományokban viszont jóval bonyolultabb az attraktor [16-18] (ld. 1.4 ábra).



1.4 ábra. A bromid-szelektív elektród potenciáljának teljesítmény-spektruma és a  $B(t)$ ,  $B(t+8,8\text{sec})$  mennyiségek által definiált állapotterbeli görbék a [16] kísérletben: a) a  $P_1$  tartomány ( $\tau = 0,49$  óra), b) az  $N_1$  tartomány ( $\tau = 0,90$  óra).

A háromdimenziós fázisgörbék vizsgálatából kiderült, hogy az attraktor jó közelítéssel felületen helyezkedik el [17,18]. Poincaré-metszete tehát egydimenziós, ezért jogos a rendszerre jellemző egydimenziós Poincaré-leképezéseket vizsgálni. Így például a [13] mérés első nemperiodikus tartományában a bromid-szelektív potenciál minimális értékeinek (ld. 1.1b ábra) rekurziója az 1.5 ábrán megadott függvényt rajzolja ki [17,20]. Hasonló eredmény adódik a [16] kísérlet  $N_1$  tartományában is az 1.4b ábrán feltüntetett fázisgörbe Poincaré-metszetén (szaggatott vonal) megjelenő döféspontok rekurziójaként [18]. Az 1.5 ábrán feltüntetett Poincaré-leképezés a kontrollparaméter változtatásakor első közelítésben csak annyit módosul, hogy önmagával párhuzamosan eltolódik (ha a tartózkodási idő csökken, akkor függőlegesen lefelé) [20].





1.5 ábra. Poincaré-leképezés: A bromid-ion potenciál minimumainak rekurziója a [13] mérés első nemperiódikus tartományában ( $\tau = 6,01$  perc) [17]

A Poincaré-leképezés ismeretében könnyen meghatározható a

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_2 \left| \frac{dy}{dx} \right|_i \quad (1.1)$$

Ljapunov-exponens, ahol  $(dy/dx)_i$  a leképezés iránytangense az  $i$ -edik iterációs értéknél. Az 1.5 ábrán feltüntetett mérési pontokból

$$\bar{\lambda} \approx 0,62 \quad (1.2)$$

adódik [17].  $\bar{\lambda}$  pozitív volta azt jelzi, hogy a szomszédos trajektóriák divergálnak, s a rendszer viselkedése kaotikus.

A kaotikus viselkedés velejárója az, hogy az információ, melyet az adott pontossággal ismert kezdeti érték jelent, véges számú iterációs lépés után elvész. A Ljapunov-exponens nagy pozitív értéke esetén az információvesztés gyors. Általánosan igaz [21], hogy  $I$  információ

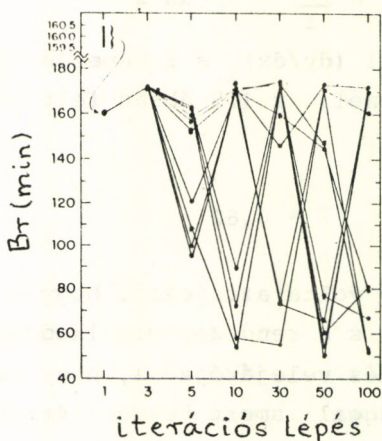
$$N = I/\bar{\lambda} \quad (1.3)$$

lépés után vész el a  $\bar{\lambda}$  ( $>0$ ) exponenssel jellemzett kaotikus állapotban.

A [13] kísérletben a bromid-szelektív elektród potenciálját  $2^{-8}$  relatív pontossággal mérték. (1.2) és (1.3) szerint ez az információ

$$N = 8/0,62 \approx 13 \quad (1.4)$$

lépésben vész el (az első nemperiodikus tartományban). Az eredmény kvalitatív ellenőrzéseként elvégezték a következő numerikus kísérletet [17]: A 0-tól 255-ig futó skálán kezdőfeltételként választottak tíz közeli értéket 159,5 és 160,4 között. A következő iterációs értékeket az 1.5 ábrán feltüntetett függvény segítségével számították ki. A harmadik iterációs lépésig a trajektóriák gyakorlatilag együtt maradnak, az ötödik lépésnél a szétszóródás már nyilvánvaló, s a tizedik iteráció után a teljes rendelkezésre álló tartományt beszórják a pontok (ld. 1.6 ábra).



1.6 ábra. A közeli értékek szétszóródása

Mindezek alapján jogosan mondhatjuk, hogy az 1.1 fejezetben leírt kísérletekben talált nemperiodikus tartományokban



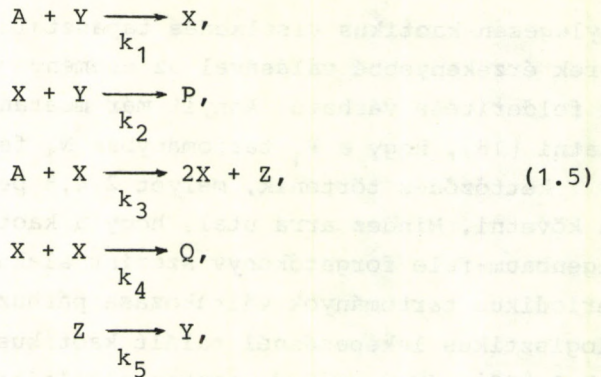
ténylegesen kaotikus viselkedés tapasztalható. A kísérleti mód-szerek érzékenyebbé válásával az eseménysor finom struktúrájának felderítése várható. Annyit már mostanáig is sikerült kimutatni [18], hogy a  $P_1$  tartományban  $N_1$  felé közeledve periódus kettőződés történik, melyet 2,4,8 periódusig tudtak nyomon követni. Mindez arra utal, hogy a kaotikus viselkedés a Feigenbaum-féle forgatókönyv szerint alakul ki. A kaotikus-periodikus tartományok váltakozása párhuzamba állítható [15] a logisztikus leképezésnél talált kaotikus-periodikus átmenetekkel [22]. (Nem szabad azonban elfelejteni, hogy az 1.5 ábrán látható Poincaré-leképezés alapvetően különbözik a logisztikus-tól; az univerzalitás csak a káosz kialakulására érvényes.)

Végezetül megjegyezzük, hogy ugyancsak a Bjelouszov-Zsabotyinszkij-reakcióban, de az itt ismertetett kísérletekben használttól lényegesen eltérő koncentráció-tartományban, találtak intermittenciát is [23,15].

### 1.3 Elméletek

Mielőtt az 1.1 fejezetben ismertetett kísérletekben megfigyelt eseménysor elméleti értelmezésére tett próbálkozásokkal foglalkoznánk, érdemes megemlíteni, hogy a kémiai káosz kutatására irányuló kísérletek megindulásában lényeges szerepe volt annak, hogy O.E. Röessler 1976-ban egy egyszerű három-komponensű reakció-moddellel kimutatta, hogy kémia rendszerben is felléphet kaotikus viselkedés [24].

A BZ-reakcióban talált kísérleti eredmények elméleti magyarázatának megkísérlésekor természetesen tűnik a kinetikai egyenletektől történő indulás. Az analitikai vizsgálat [4] szerint azonban a teljes folyamat több mint húsz reakciót tartalmaz, s mindegyik nyomkövetése meglehetősen reménytelen. Az egyszerűbb leírás érdekében ki kell tehát választani a legfontosabbakat. Öt reakció látszik különösen lényegesnek, melyekben a bromát, bromit, bromid és a  $Ce^{4+}$  ionok vesznek részt. A reakciónak ez az öt-lépéses modellje az ún. Oregonator [5], melynek egyenletei a következők:



ahol az egyes betűk jelentése:  $A = \text{BrO}_3^-$ ,  $X = \text{HBrO}_2$ ,  $Y = \text{Br}^-$ ,  $Z = 2\text{Ce}^{4+}$ . P, Q semleges termékeket jelöl. Mivel a bromát koncentráció még zárt rendszerben történő reakcióban is csak igen lassan változik, A koncentrációját állandónak tekinthetjük. Dimenziótlan egységekben (1.5)-ből a következő nemlineáris kinetikai egyenletet kapjuk [6,7]:

$$\dot{x} = s(y - xy + x - qx^2), \tag{1.6a}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{s}(-y - xy + z), \tag{1.6b}$$

$$\dot{z} = w(x - z), \tag{1.6c}$$

ahol az új változók és a koncentrációk közötti kapcsolat:

$$x = \frac{k_2[X]}{k_1[A]},$$

$$y = \frac{k_2[Y]}{k_3[A]},$$

$$z = \frac{k_2 k_5 [Z]}{k_1 k_3 [A]^2},$$

a paraméterek:

$$s = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}, \quad q = \frac{2k_1 k_4}{k_2 k_3}, \quad w = \frac{k_5}{\sqrt{k_1 k_3} [A]^2} \tag{1.8}$$



és a pont a  $t' = \sqrt{k_1 k_3 [A]^2}$ -t változó szerinti deriválást jelöli. A mérések alapján becsült sebességi-állandó értékekkel  $q \sim 8 \cdot 10^{-6}$ ,  $s \approx 77$ . Mivel  $s$  nagy szám, (1.6)-ból leolvasható, hogy  $x$  kapcsoló változó, ami összhangban van azzal a megfigyeléssel, hogy a  $\text{HBrO}_2$  koncentrációja lényegében csak két értéket vehet föl. Ha a reakció nem zárt térben történik, az (1.6) egyenletek jobboldalán megjelenik egy áramlási tag is, mely leírja, hogy adott anyagmennyiség átlagosan  $\tau$  ideig tartózkodhat a reaktorban. Az (1.6a-c) egyenletekben ezek az áramlási tagok rendre  $(x-x_0)/\tau$ ,  $(y-y_0)/\tau$ ,  $(z-z_0)/\tau$ -val arányosak, ahol  $x_0, y_0, z_0$  az egyes anyagok koncentrációja a beáramló oldatban, az új változókkal kifejezve.

Az Oregonator modell kielégítő leírását adja a BZ-rakció egyszerű oszcillációs jelenségeinek. A kísérletekben talált bonyolultabb periodikus változások viszont csak az (1.5) reakció-rendszer módosított változataival (pl.: [25,26]) értelmezhetők. Egyelőre vitatott kérdés azonban, hogy a számos módosított változat közül melyik tekinthető kémiai szempontból a legrealisabbnak. A helyzetet nehezíti, hogy az egyes reakciók sebességi-állandói csak nagyon pontatlanul ismertek.

Ezek után nem meglepő, hogy az Oregonator modell számítógépes szimulációi során (a sebességi-állandók kémiaileg megengedett tartományában) nem tapasztaltak kaotikus viselkedést. A módosított változatokban azonban sikerült kaotikus fázisok jelenlétét kimutatni [27,28,16]. Közülük a [16]-ban ismertetett próbálkozás tűnik a legbiztosabbnak ugyanis visszaadja a  $P_1, N_1, P_2, N_2, \dots$  eseménysort (ld. 1.3 ábra), noha a számított és a mért értékek között egy tízes faktor eltérés mutatkozik. A vizsgált modellben egyébként egy negyedik anyag koncentrációját is változónak tekintik, s mindegyik reakciót reverzibilisnek tételezik föl (tíz reakcióállandó!).

A fentitől alapvetően különböző megközelítési mód a következő [29]. Tekintsük az



$$\dot{x} = hx + y + 0,1z ,$$

$$\dot{y} = -x, \tag{1.9}$$

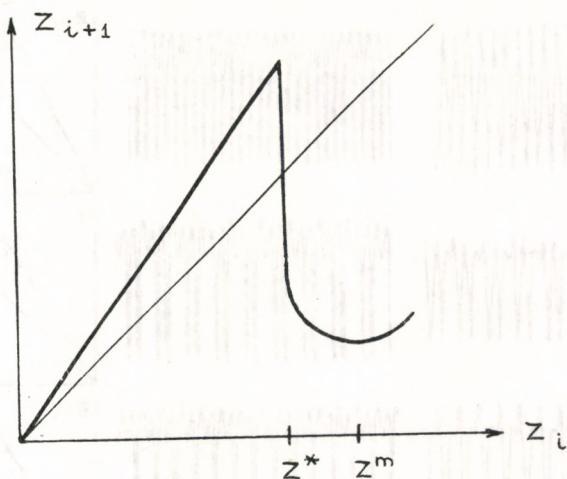
$$\epsilon \dot{z} = f(x,z) = th[100(1 + 4z - 16x)] - 4(z + x + x^3)$$

egyenletrendszer, melyben  $\epsilon \ll 1$ , tehát  $z$  kapcsoló változó. (Ilyen típusú egyenletekkel már találkoztunk [30].) A stacionárius megoldás:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 \approx -1/40$ ,  $z_0 \approx 1/4$ , mely stabil  $h < h_0$ -ra, ahol  $h_0 \approx 0,1$ , és instabil  $h > h_0$ -ra. Az (1.9) egyenlet numerikus megoldásával kapott  $z(t)$  függvény ( $\epsilon = 0,1$  esetén)  $h(>h_0)$  változtatásával hasonló jelalakot ad, mint a [13] kísérletben mért bromid-ion potenciál (ld. 1.8 és 1.9 ábra). Ez kvalitatívan megérthető az (1.9) rendszerhez tartozó Poincaré-leképezés alapján. Mivel kis  $x$ -ekre  $x \approx -(z-z_0)$ , a lineáris rendszer könnyen megoldható, s a  $z_{i+1} \approx z_i \exp[\pi(h-0,1)]$  leképezést kapjuk. Ez mindaddig érvényben marad, amíg el nem érünk egy  $z^*$  értéket, ahol megtörténik az átkapcsolás az  $f(x,z) = 0$  felület másik levelére. A  $z_i = z^*$  pontban a leképezésnek szakadása van. A  $z_i > z^*$  tartományban a leképezés csak numerikus módszerekkel határozható meg [29]: ebből az adódik, hogy a  $z_{i+1}(z_i)$  függvénynek valamely  $z^m > z^*$  helyen minimuma van (ld. 1.7 ábra), ami lényeges új tulajdonság a [30]-ban vizsgált Poincaré-leképezésekhez képest.

Az egy pulzuson belüli csúcsok száma a  $z^*$ -nál kisebb  $z$ -értékű iterációk számánál eggyel nagyobb. Mivel  $h$  csökkentésével az egyenes szakasz meredeksége közeledik a szögfelezőéhez, az egy pulzuson belüli csúcsok száma növekszik.

A  $z^m$  helyen lévő minimum létezésének alapvető következménye, hogy  $z^m$  környékén a trajektóriák kontrahálódnak. Ezért érthető, hogy ha valamely  $z^m$  körüli pont  $n$ -edik iterációja szintén  $z^m$  közelébe kerül, akkor a  $h$  kontrollparaméter viszonylag széles tartományában kialakulhat stabil  $n$  elemű határciklus. Ha a feltétel nem teljesül, kaotikus viselkedés várható.  $h$  csökkentésekor a kaotikus tartományok mindig két periodikus tartomány között jelennek meg.  $h < h_0$ -ra a  $z = 0$  fixponthoz jutunk (ld. 1.8 és 1.9 ábra).

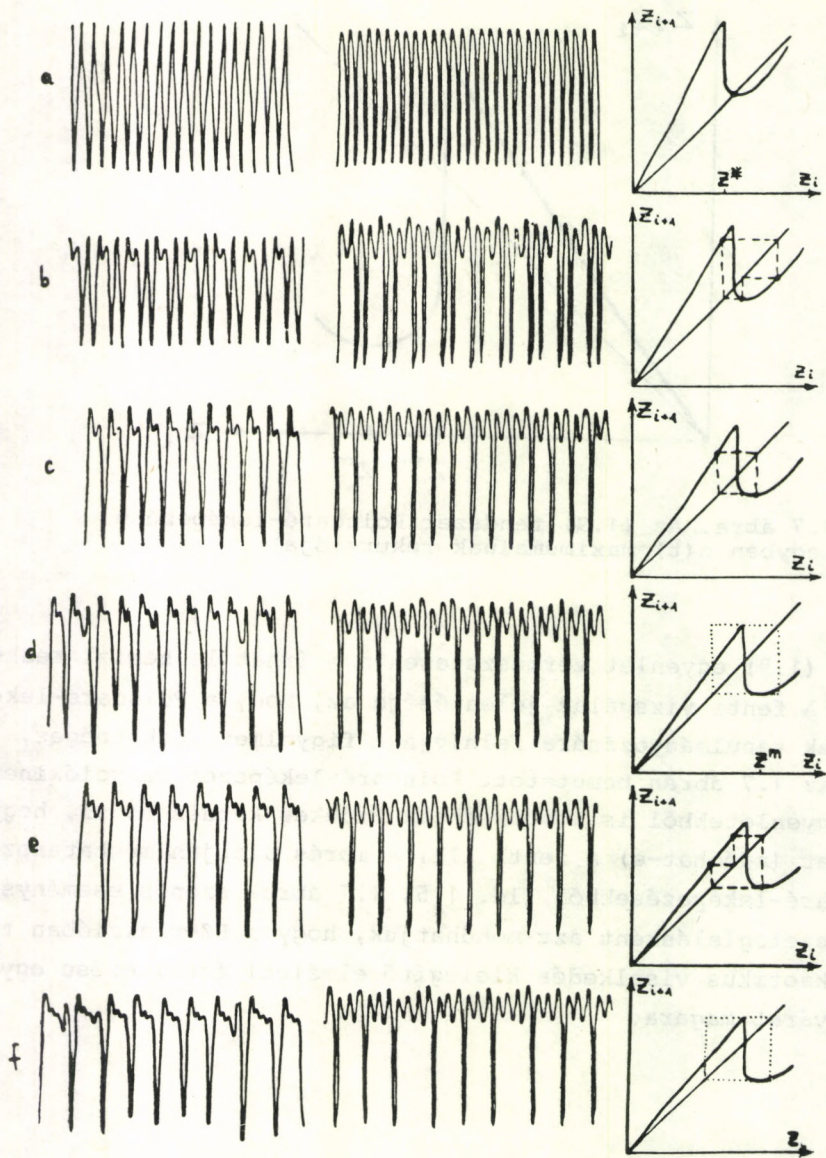




1.7 ábra. Az (1.9) rendszer Poincaré-leképezése (egyben  $z(t)$  maximumainak rekurziója)

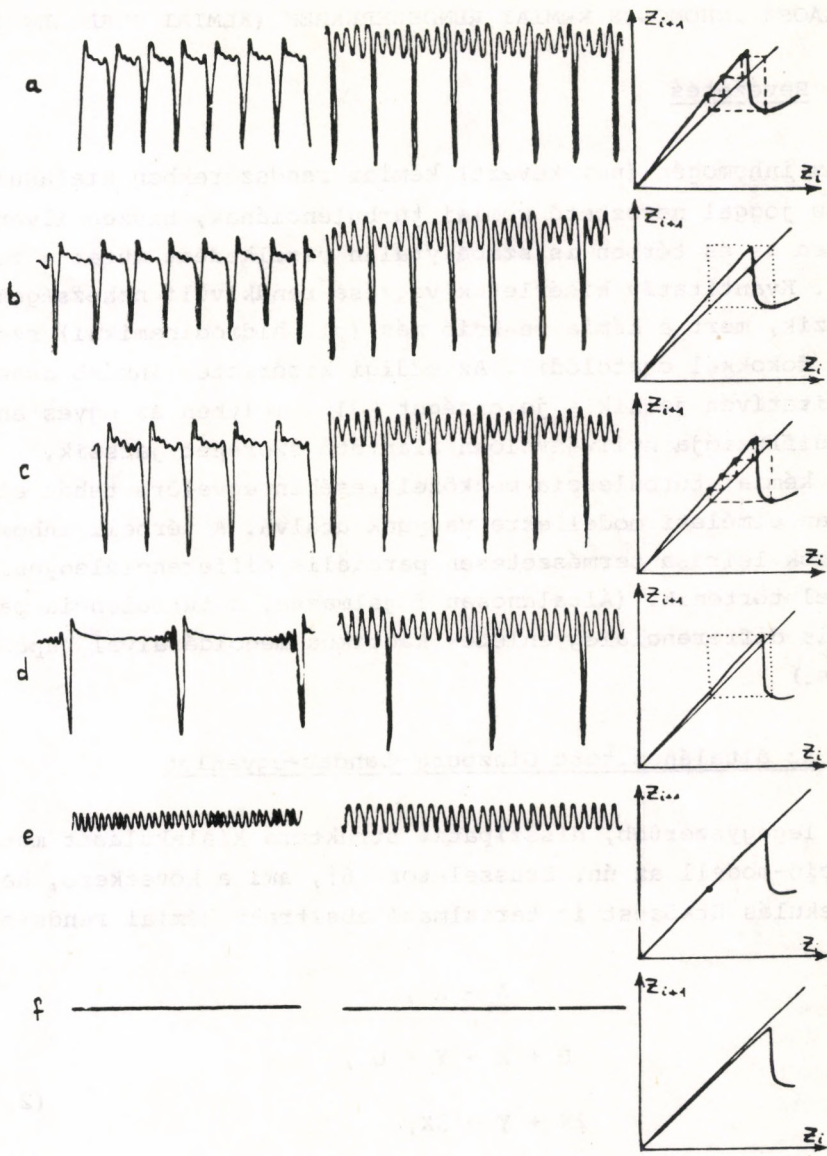
Az (1.9) egyenlet természetesen nem írhat le kémiai reakciót. A fenti vizsgálat jelentősége az, hogy a Poincaré-leképezések tanulmányozására felhívja a figyelmet. Lehetséges, hogy az 1.7 ábrán bemutatott Poincaré-leképezés reakciókinetika egyenletekből is következhet. Érdekes kérdés az is, hogyan adódhat (adódhat-e) a fenti ill. a mérés alapján meghatározott Poincaré-leképezésekből (ld. 1.5, 1.7 ábra) azonos eseménysor.

Összefoglalásként azt mondhatjuk, hogy a BZ-reakcióban talált kaotikus viselkedés kielégítő elméleti értelmezése egyelőre várat magára.



1.8. ábra. A BZ-reakcióban mért  $\text{Br}^-$ -potenciál különböző  $v$  értékekre (baloldali oszlop), az (1.9) rendszer megoldása:  $z(t)$  (középen) különböző  $h$ -k esetén, és a Poincaré-leképezés (jobb oldali oszlop). Különös attraktorok: pontozott négyzet; stabil periodikus pontok: kis körök. a) egy csúcs, periodikus ( $v=2,91$  ml/perc,  $h=0,3$ ); b) egy csúcs+két csúcs, periodikus ( $v=3,76$  ml/perc,  $h=0,25$ ); c) két csúcs, periodikus ( $v=4,06$  ml/perc,  $h=0,2$ ); d) két, három csúcs, nemperiodikus ( $v=4,31$  ml/perc,  $h=0,188$ ); e) három csúcs, periodikus ( $v=4,34$  ml/perc,  $h=0,18$ ); f) három, négy csúcs, nemperiodikus ( $v=4,51$  ml/perc,  $h=0,1652$ )





1.9 ábra. Mint az előző ábrán. a) négy csúcs, periodikus ( $v=4,62$  ml/perc,  $h=0,16$ ); b) négy,öt csúcs, nemperiodikus [ $z(t)$ -ben három csúcs is] ( $v=4,76$  ml/perc,  $h=0,1501$ ); c) öt csúcs, periodikus ( $v=4,81$  ml/perc,  $h=0,148$ ); d) sok csúcs [a mérésben periodikus, a számolásban nemperiodikus] ( $v=5,37$  ml/perc,  $h=0,12$ ); e) kis amplitúdójú rezgés ( $v=5,42$  ml/perc,  $h=0,1004$ ); f) stabil fixpont ( $v=5,5$  ml/perc,  $h=0,08$ )

## 2. KÁOSZ INHOMOGÉN KÉMIAI RENDSZEREKBE (KÉMIAI TURBULENCIA)

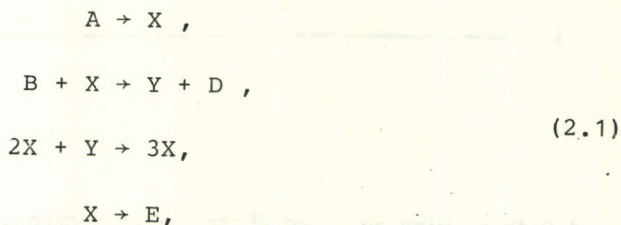
### 2.1 Bevezetés

Az inhomogén (nem kevert) kémiai rendszerekben kialakuló káosz joggal nevezhető kémiai turbulenciának, hiszen ilyenkor időben is és térben is szabálytalan viselkedést mutat a rendszer. Kvantitatív kísérletek végzése rendkívüli nehézségekbe ütközik, mert a kémia reakció más (pl. hidrodinamikai) szabadsági fokokkal csatolódik. Az eddigi kísérletek inkább csak kvalitatíven jelzik a jelenséget [31], melyben az egyes anyagok diffúziója nyilvánvalóan alapvető szerepet játszik.

A kémiai turbulencia megközelítésében egyelőre tehát elsősorban elméleti modellekre vagyunk utalva. A térbeli inhomogenitások leírása természetesen parciális differenciálegyenletekkel történik. (Általánosan fogalmazva, a turbulencia parciális differenciálegyenletek kaotikus megoldásaival kapcsolatos.)

### 2.2 Az általánosított Ginzburg-Landau-egyenlet

A legegyszerűbb, disszipatív struktúra kialakulását mutató reakció-modell az ún. Brusselator [6], ami a következő, három-molekulás ütközést is tartalmazó absztrakt kémiai rendszer:



melyben az A és B anyagok koncentrációját konstansnak szokás tekinteni (nyílt rendszer). A sebességi-állandókat az egyszerűség kedvéért egységnyinek választva, s a diffúziót is figyelembe véve az X és Y anyagok  $x(\vec{r}, t)$  ill.  $y(\vec{r}, t)$  lokális koncentrációra a



$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= a - bx - x - x^2 y + D_x \Delta x, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= bx - x^2 y + D_y \Delta y\end{aligned}\tag{2.2}$$

egyenletrendszert kapjuk, ahol  $\Delta$  a Laplace-operátor,  $D_x$ ,  $D_y$  az X ill. Y diffúziós állandója, a, b pedig az A ill. B anyag (konstans) koncentrációja. Kontrollparaméterként a b mennyiséget változtatjuk.

Amennyiben a  $D_x/D_y$  arány elegendően nagy, a b paraméter csökkentésekor olyan instabilitás lép föl, melynél határciklus alakul ki, s a homogén stacionárius megoldás elveszti stabilitását [6]. A kritikus érték  $b_c = 1+a^2$ . Az instabilitási pont-hoz közel megjelenik egy lassan relaxáló módus. A gyors módusok ennek mozgását követik, így a rendszer viselkedését alapvetően a lassan relaxáló módus viselkedése szabja meg. Ez utóbbi amplitúdóját szokás rendparaméternek nevezni; általában komplex mennyiségként írható. A Brusselatorban a lineáris analízis alapján a  $\phi(\vec{r}, t)$  rendparaméter [32,33]:

$$\phi = \frac{1-ia}{2} x - \frac{ia}{2} y,\tag{2.3}$$

relaxációs frekvenciája

$$\omega = (b-b_c)/2 + ia.\tag{2.4}$$

A gyors módusok az adiabatikus eliminálási módszerrel [34] kiküszöbölhetők, s a rendparaméter mozgására az instabilitási pont közelében az alábbi típusú nemlineáris egyenletet kapjuk [32,33], melyet - mivel a benne szereplő paraméterek komplexek - általánosított Ginzburg-Landau-egyenletnek nevezünk:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u_2 \phi + a \Delta \phi - u_4 |\phi|^2 \phi.\tag{2.5}$$

A Brusselatorban  $u_2$  megegyezik a (2.4)-gyel definiált  $\omega$ -val, továbbá

$$a = \frac{D_x + D_y}{2} - ia \frac{D_x - D_y}{2}, \quad (2.6)$$

$$u_4 = \frac{2+2a^2}{2a^2} + i \frac{4-7a^2+4a^4}{6a^2}. \quad (2.7)$$

A (2.5) egyenlet jelentőségét az adja, hogy általános két-komponensű autokatalitikus reakció-rendszerre (sőt általában a határciklusra vezető instabilitások széles osztályára) [35,36] belátható, hogy a lassan relaxáló módus mozgásegyenlete (2.5), s a kontrollparamétertől való függés csak  $u_2$  valós részében\* lényeges, ami lineárisan tűnik el az instabilitási pontban:

$$u_2^{(1)} = \lambda_c - \lambda. \quad (2.8)$$

Itt  $\lambda$  az alkalmas egységekben mért kontrollparaméter,  $\lambda_c$  pedig kritikus pontbeli értéke. Stabil, homogén megoldás akkor létezhet csak, ha  $a^{(1)}$  és  $u_4^{(1)}$  pozitív. Az alábbiakban a (2.8) paraméterezést használjuk.

A határciklus-megoldás megkeresése érdekében tegyük föl, hogy az aszimptotikus állapotban ( $t \rightarrow \infty$ ) a rendparaméter  $\phi(\vec{r}, t) = \Psi \exp(-i\omega_{1c} t)$  alakú, ahol  $\Psi$  valós mennyiség. (2.5)-be behelyettesítve a

$$\Psi(-i\omega_{1c} + u_2 + u_4 \Psi^2) = 0 \quad (2.9)$$

feltételt kapjuk.  $\lambda > \lambda_c$ -re a, (2.9) valós részéből adódó,

$$\Psi = \pm \sqrt{-\frac{u_2^{(1)}}{u_4^{(1)}}} = \pm \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_c}{u_4^{(1)}}} \quad (2.10)$$

megoldás stabil. A  $\Psi$  amplitúdójú határciklus  $\omega_{1c}$  frekvenciáját (2.9) képzetes része határozza meg. Ebből

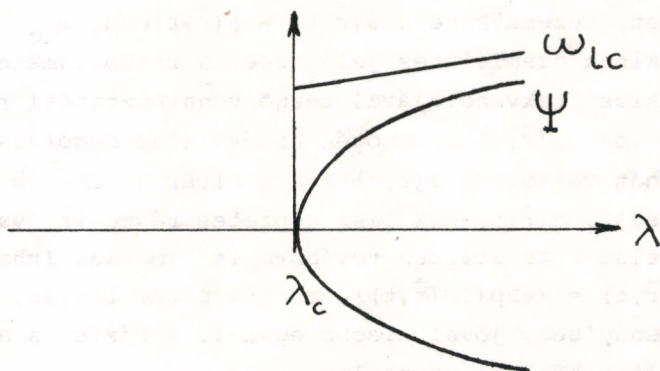
$$\omega_{1c} = u_2^{(2)} + u_4^{(2)} \Psi^2 = u_2^{(2)} + \frac{u_4^{(2)}}{u_4^{(1)}} (\lambda - \lambda_c). \quad (2.11)$$

Az amplitúdó tehát  $\lambda - \lambda_c$  gyökével, a frekvencia pedig első hatványával növekszik. (A valós együtthatójú esetben  $\omega_{1c}$ -re ter-

\* Komplex számokra a következő jelölést használjuk:  $\text{Re } z \equiv z^{(1)}$ ,  
 $\text{Im } z = z^{(2)}$ .



mészetesen, nulla adódik.) A bifurkációs diagramot a 2.1 ábra mutatja.



2.1 ábra. A határciklus amplitúdója és frekvenciája a kontrollparaméter függvényében

A homogén megoldás általánosításaként  $\lambda > \lambda_c$ -re mindig található síkhullám-megoldás is. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez

$$\phi_{\vec{q}}(\vec{r}, t) = \psi_{\vec{q}} e^{-i(\omega_{\vec{q}} t + \vec{q} \cdot \vec{r})}, \quad (2.12)$$

ahol

$$\psi_{\vec{q}} = \pm \sqrt{-\frac{u_2^{(1)} + a^{(1)} q^2}{u_4^{(1)}}}, \quad (2.13)$$

$$\omega_{\vec{q}} = u_2^{(2)} - \frac{u_4^{(2)}}{u_4^{(1)}} u_2^{(1)} + \left( a^{(2)} - \frac{u_4^{(2)}}{u_4^{(1)}} a^{(1)} \right) q^2, \quad (2.14)$$

és  $|\vec{q}| < \sqrt{(\lambda - \lambda_c) / a^{(1)}}$ . A fenti megoldás terjedő kémiai hullámot reprezentál. Hasonló típusú megoldás adódik a szupravezetés Ginzburg-Landau-elméletében, ahol a rendparaméter a Cooper-párok hullámfüggvénye. A kémiai hullám megjelenése itt tehát spontán szimmetriasértés eredménye.

### 2.3 A fázis-instabilitás

Annak érdekében, hogy megvizsgálhassuk a homogén határciklus stabilitását, vezessük be a  $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) \exp(i\omega_{1c} t)$  mennyiséget, aminek szemléletes jelentése: a rendparaméter értéke a határciklus frekvenciájával rezgő vonatkoztatási rendszerben. Amennyiben  $\phi(\vec{r}, t)$  a homogén határciklus-megoldás,  $\psi(\vec{r}, t) = \Psi$ , tehát valós. Ha  $\phi(\vec{r}, t)$  kissé eltér a homogén határciklus-megoldástól,  $\phi(\vec{r}, t)$ -nek lesz képzetes része is, valós része azonban első közelítésben továbbra is  $\Psi$  marad. Írhatjuk tehát, hogy  $\psi(\vec{r}, t) = \Psi \exp(i\theta(\vec{r}, t))$ , ahol a  $\Psi$  tér fázisa, a  $\theta(\vec{r}, t)$  valós mennyiség, jóval kisebb egynél. A fázis és az eredeti rendparaméter közötti kapcsolatot:

$$\phi(\vec{r}, t) = \Psi e^{-i\omega_{1c} t} e^{i\theta(\vec{r}, t)} \quad (2.15)$$

A határciklus akkor stabil, ha tetszőleges kezdeti fázis  $t \rightarrow \infty$ -re egy állandóhoz tart.

(2.5) és (2.15) alapján meghatározható a  $\theta$  fázis mozgásegyenlete. Feltételezve, hogy  $\theta$  időben lassan változik, azt kapjuk [37], hogy

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sigma \Delta \theta - v \Delta^2 \theta + \mu (\nabla \theta)^2, \quad (2.16)$$

ahol  $\nabla$  a nabla operátor,

$$\sigma = a^{(1)} + a^{(2)} u_4^{(2)} / u_4^{(1)}, \quad (2.17)$$

$$v = - \frac{|a|^2}{2u_2^{(1)}} = \frac{|a|^2}{2(\lambda - \lambda_c)}, \quad (2.18)$$

$$\mu = a^{(1)} u_4^{(2)} / u_4^{(1)} - a^{(2)}. \quad (2.19)$$

A (2.16) egyenlet alkalmas a BZ-reakcióban kialakuló kémiai spirálok [38] leírására [39] is, mi azonban most nem a spirál-megoldásokkal foglalkozunk, hanem azt vizsgáljuk, mikor veszt el stabilitását a  $\theta = \text{állandó}$  - vagyis a határciklusnak megfelelő - megoldás, makroszkópikus rendszerben. Ennek érde-



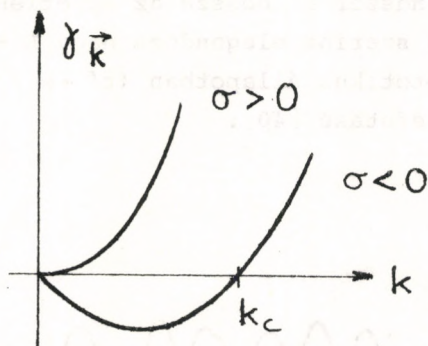
kében áttérünk a  $\theta_{\vec{k}}(t)$  Fourier-komponensekre. (2.16) lineari-  
zált változata ekkor a következő alakba írható:

$$\frac{\partial \theta_{\vec{k}}}{\partial t} = -\gamma_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}}, \quad (2.20)$$

ahol a relaxációs idő

$$\gamma_{\vec{k}} = \sigma k^2 + \nu k^4. \quad (2.21)$$

$\sigma > 0$  esetén minden  $\gamma_{\vec{k}}$  pozitív, ha azonban a  $\sigma$  kombináció ne-  
gatív, a  $k < k_c \equiv \sqrt{-\sigma/\nu}$  hullámszámú Fourier-komponensek időben  
növekedni kezdenek, a  $\theta =$  állandó megoldás tehát nem stabil.



2.2 ábra. A  $\gamma_{\vec{k}}$  relaxációs idő  $k$  függvényében

Másképpen fogalmazva, ha lerögzítjük az eredeti kontrollpa-  
raméter  $\lambda (> \lambda_c)$  értékét, s a (2.16) mennyiséget tekintjük új  
kontrollparaméternek, akkor  $\sigma$  csökkentésével eljutunk a  $\sigma = 0$   
pontig, ami alatt a homogén határciklus megoldás instabillá  
válk. Természetesen merül föl a kérdés, mi történik a  $\sigma < 0$   
tartományban.

## 2.4 A fázis-káosz

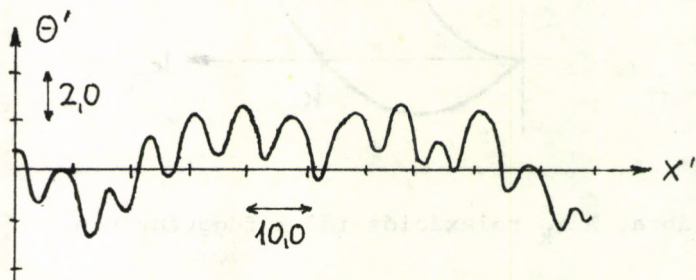
A fázis-instabilitás utáni viselkedés tanulmányozása numerikus módszerekkel lehetséges. Ennek érdekében célszerű a (2.15) egyenletet átírni dimenziótlan mennyiségekre:  $\sigma < 0$ -ra a

$$t' = (\sigma^2/\nu)t, \quad r' = \sqrt{-\sigma/\nu} r, \quad \theta' = -(\mu/\sigma)\theta \quad (2.22)$$

változókkal a

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t'} = -\Delta' \theta' - \Delta'^2 \theta' + (\nabla' \theta')^2 \quad (2.23)$$

paraméter nélküli egyenletet kapjuk. (2.23) egydimenziós változatában tehát a rendszer  $L'$  hossza az egyetlen adat. A számítógépes szimulálás szerint elegendően nagy  $L'$ -re a  $\theta(x', t')$  függvény az aszimptotikus állapotban ( $t' \rightarrow \infty$ ) minden pillanatban szabálytalan lefutású [40]:



2.3 ábra. A (2.23) egyenlet egydimenziós megoldása egy adott pillanatban.  $L' = 820$  (periodikus határfeltételek)

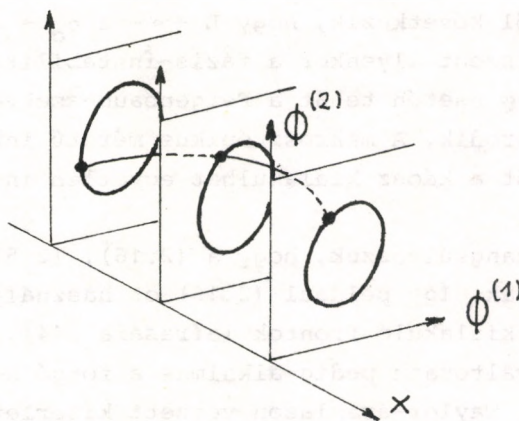
(Hasonló eredmények adódnak a (2.5) egyenlet ill. a Brusselator numerikus megoldásakor is a  $\sigma < 0$  tartományban [41,12].)

A szabálytalan viselkedés kialakulásának megértése érdekében célszerű  $L'$ -t változtatni. Ha a  $\theta'(x', t') = \sum A_n(t) \cos(2\pi n x'/L')$  Fourier-sorból két időfüggő együtthatót kiválasztunk, és eze-



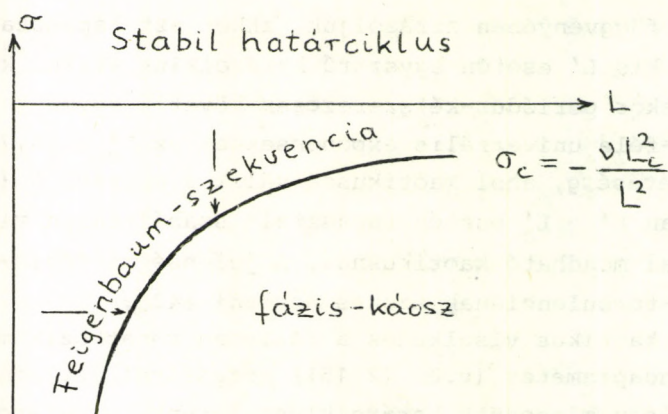
ket egymás függvényében ábrázoljuk, akkor azt tapasztaljuk [43], hogy kis  $L'$  esetén egyszerű határciklus alakul ki, majd  $L'$  növelésekor periódus-kétszerezések követik egymást a Feigenbaum-féle univerzális exponensekkel az  $L'_C \approx 16,7$  torlódási pont eléréséig, ahol kaotikussá válik a mozgás. A (2.22) megoldásában  $L' > L'_C$  esetén tapasztalt szabálytalan viselkedés ezért joggal mondható kaotikusnak. A jelenséget fázis-káosznak vagy fázis-turbulenciának szokás nevezni [42].

Mivel a kaotikus viselkedés a fázisban mutatkozik meg, az eredeti rendaparaméter (v.ö. (2.15)) mozgásáról azt mondhatjuk, hogy lokálisan mindenütt határciklust látunk, a határciklusok közötti szinkronizáció azonban megszűnt: a szomszédos határciklusok közötti fáziskülönbség szabálytalanul változik (ld. 2.4 ábra). Ezt a képet a numerikus vizsgálatok alátámasztják [42].



2.4 ábra. A fázis-káosz

Azt a tényt, hogy a káosz  $L'_C$ -nél következik be, s előtte ( $L'$ -ben) periódus-kétszerezés történik, (2.22) alapján könnyen lefordíthatjuk az eredeti változók nyelvére: a torlódási pont, rögzített  $\sigma$  esetén az  $L_C = \sqrt{-\nu/\sigma} L'_C$  értéknél, vagy - és ez a természetesebb - rögzített  $L$  esetén a  $\sigma_C = -\nu L_C'^2/L^2$  értéknél van. Könnyen látható, hogy mind állandó  $\sigma$ , mind állandó  $L$  esetén Feigenbaum-szekvencia történik. A "fázisdiagram" a  $\sigma$ - $L$  síkon tehát a következő:



2.5 ábra. A fázis-káosz kialakulása  $L$  függvényében

A fentiekből következik, hogy  $L \rightarrow \infty$ -re  $\sigma_c \rightarrow 0$ . A 2.3 fejezet szerint viszont ilyenkor a fázis-instabilitás is  $\sigma = 0$ -nál történik.  $L \rightarrow \infty$  esetén tehát a Feigenbaum-szekvencia tartománya összezsugorodik. A makroszkópikus méretű inhomogén rendszerekben tehát a káosz kialakulhat egyetlen instabilitáson keresztül is.

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy a (2.16), (2.5) egyenletek igen általánosak. Így például (2.16)-ot használják az égés során a lángban kialakuló frontok leírására [44], a (2.5) egyenlet diszkrét változata pedig alkalmas a forgó hengerek között kialakuló, ún. Taylor-áramlásra végzett kísérleti eredmények értelmezésére [45]. A fázis-káosz sem korlátozódik tehát kizárólag kémiai folyamatokra, sokkal inkább inhomogén dinamikai rendszerek általános tulajdonsága.

#### IRODALOM

1. L.F. Olsen, H. Degn, *Nature* 267, 177, 1977.
2. B.P. Bjelouszov, in: *Ref. Radiats. Med.*, 1958 (Medgiz, Moszkva, 1959)
3. A.M. Zsabotyinszkij, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 157, 392 1964.
4. R.J. Field, E. Körös, R.M. Noyes, *J. Am. Chem. Soc.* 94, 8649, 1972.



5. R.J. Field, R.M. Noyes, *J. Chem. Phys.* 60, 1877, 1974.
6. G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-organization in Non-equilibrium Systems* (Wiley, New York, 1977)
7. H. Eyring, D. Henderson (szerk.), *Theoretical Chemistry: Periodicities in Chemistry and Biology* (Academic Press, New York, 1978)
8. M. Marek, E. Svoboda, *Biophys. Chem.* 3, 263, 1975.
9. K.R. Graziani, J.L. Hudson, R.A. Schmitz, *Chem. Eng. J.* 12, 9, 1976.
10. R.A. Schmitz, K.R. Graziani, J.L. Hudson, *J. Chem. Phys.* 71, 3040, 1977.
11. O.E. Rössler, K. Wegmann, *Nature* 271, 89, 1978.
12. K. Wegmann, O.E. Rössler, *Z. Naturforsch.* 33a, 1179, 1978.
13. J.L. Hudson, M. Hart, D. Marinko, *J. Chem. Phys.* 71, 1601, 1979.
14. C. Vidal, J.C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, *C.R. Acad. Sci. Paris, serie C*, 289, 73, 1979; *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 357, 377, 1980.
15. C. Vidal, in: *Chaos and Order in Nature*, szerk.: H. Haken (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
16. J.S. Turner, J.C. Roux, W.D. Mc Cormick, H.L. Swinney, *Phys. Lett.* 85A, 9, 1981.
17. J.L. Hudson, J.C. Mankin, *J. Chem. Phys.* 74, 6171, 1981.
18. J.C. Roux, H.L. Swinney, in: *Nonlinear phenomena in Chemical Dynamics*, szerk.: C. Vidal, A. Pacault (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
19. F. Takens, in *Dynamical Systems and Turbulence: Proceeding of the 1978-1980 Warwick Symposium*, szerk.: D. Rand, L.S. Young (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981)
20. K. Tomita, I. Tsuda, *Prog. Theor. Phys.* 64, 1138, 1980.
21. R. Shaw, *Z. Naturforsch.* 36a, 80, 1981.
22. R.M. May, *Nature* 261, 459, 1976.
23. J.C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal, *Physica* 2D, 395, 1981.,  
Y. Pomeau, J.C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal, *J. Physique Lett.* 42, L271, 1981.
24. O.E. Rössler, *Z. Naturforsch.* 31a, 259, 1976.
25. K. Tomita, A. Ito, T. Ohta, *J. Theor. Biol.* 68, 459, 1977.
26. K. Schowalter, R.M. Noyes, K. Bar-Eli, *J. Chem. Phys.* 68, 2514, 1978.
27. J.J. Tyson, *J. Math. Biol.* 5, 351, 1978.
28. K. Tomita, I. Tsuda, *Phys. Lett.* 71A, 489, 1979.
29. A.S. Pikovsky, *Phys. Lett.* 85A, 13, 1981.
- 30.
31. H. Yamazaki, Y. Oono, K. Hirakawa, *J. Phys. Soc. Japan* 44, 335, 1978., és 46, 721, 1979.
32. Y. Kuramoto, T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.* 52, 1399, 1974., és 54, 60, 1975.
33. H. Mashiyama, A. Ito, T. Ohta, *Prog. Theor. Phys.* 54, 1050, 1975.
34. H. Haken, *Synenergetics, An Introduction* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978)
35. Y. Kuramoto, T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.* 54, 687, 1975.
36. A. Wunderlin, H. Haken, *Z. Phys.* B21, 393, 1975.
37. Y. Kuramoto, T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.* 55, 356, 1976.
38. A.T. Winfree, *Science* 175, 643, 1972.

39. Y. Kuramoto, T. Yamada, Prog. Theor. Phys. 56, 724, 1976.
40. T. Yamada, Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. 56, 681, 1976.
41. Y. Kuramoto, T. Yamada, Prog. Theor. Phys. 56, 679, 1976.
42. Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. 64, 346, 1978.
43. Y. Kuramoto, in: Statphys 14, szerk.: J. Stephenson (North-Holland, Amsterdam, 1981)
44. G.I. Sivashinsky, Acta Astronaut 4, 1177, 1977.
45. V.S. L'vov, A.A. Predtechensky, Physica 2D, 38, 1981.



Gálfi László

1. Bevezetés. Kísérleti eredmények	301
2. Egydimenziós leképezések	305
3. Megjegyzések	309
Irodalom	310

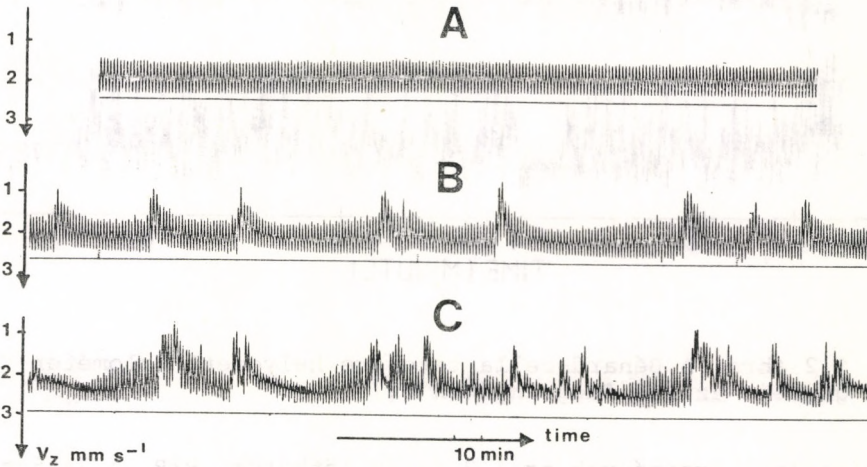




## 1. BEVEZETÉS. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK

Előfordul, hogy disszipatív dinamikai rendszerek stabil periodikus viselkedésből kaotikusba mennek át oly módon, hogy időben egymástól jól szeparált, véletlenszerű "robbanások" jelennek meg a periodikus fázisban. Ismerkedjünk meg néhány ilyen kísérleti eredménnyel!

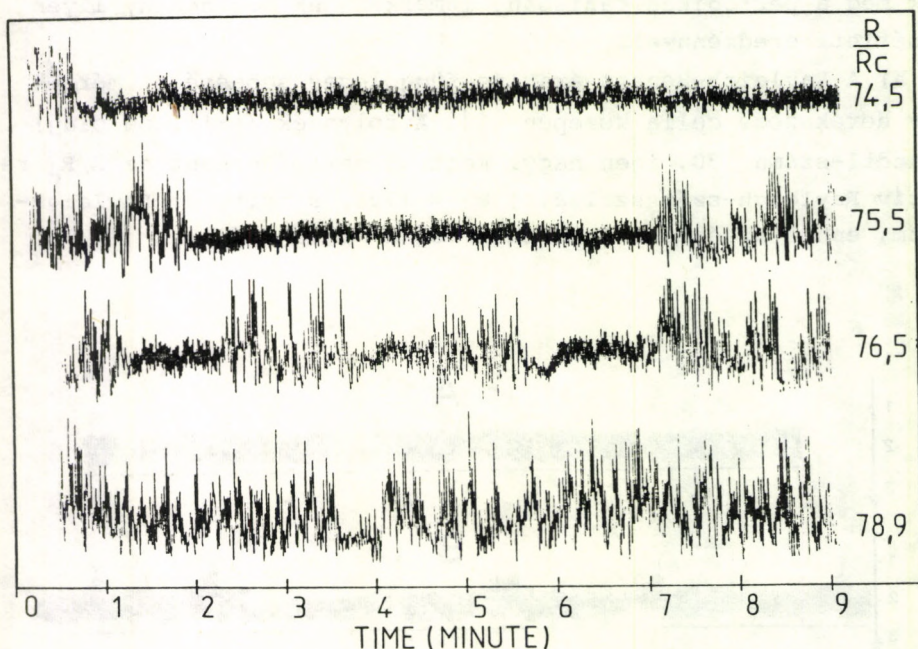
a) A Rayleigh-Bénard-áramlás függőleges sebességét mérték egy derékszögű cella közepén [1]. A folyadék (szilikon olaj) Prandtl-száma 130, igen nagy. Kontrollparaméterként az  $R/R_C$  relatív Rayleigh-szám szolgált;  $R_C = 1700$ , a kritikus Rayleigh-szám, ennél az értéknél jelenik meg a konvekció.



1.1 ábra. A függőleges sebességkomponens időfüggése; A:  $R/R_C = 270$ ; B:  $R/R_C = 300$ ; C:  $R/R_C = 335$  [1]

A kísérleti eredményeket az 1.1 ábra mutatja. Az A görbe ( $R/R_C = 270$ ) periodikus viselkedésre utal, a B görbén ( $R/R_C = 300$ ) látható a kaotikus szakaszok véletlenszerű megjelenése, a C görbén ( $R/R_C = 335$ ) ezek már kitöltik a korábbi periodikus tartományt.

b) Ugyancsak a Rayleigh-Bénard-kísérletben a cella tetejére helyezett bolométerrel a hőmérséklet időbeli változását mérték [2]. A folyadék (folyékony  $^4\text{He}$ ) Prandtl-száma 0,62, igen kicsi, a kontrollparaméter ismét az  $R/R_c$  relatív Rayleigh-szám.

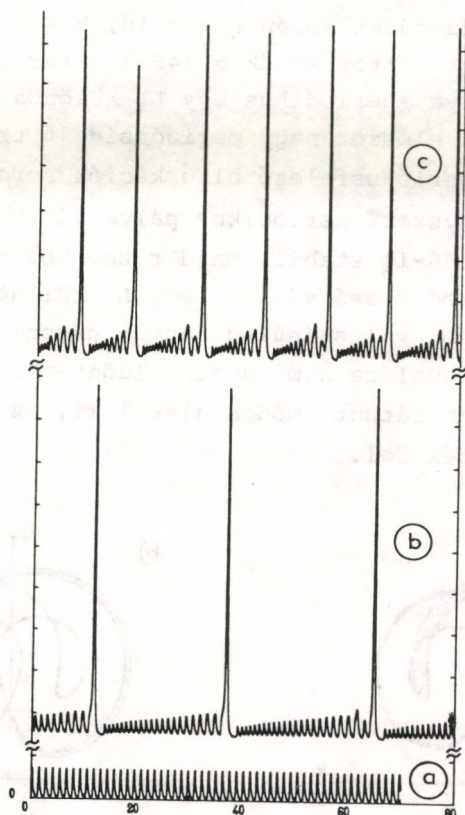


1.2 ábra. A Bénard-cella tetejére helyezett bolométer görbéje az idő függvényében [2]

A kísérleti eredmények az 1.2 ábrán láthatók.  $R/R_c = 74,5$ -nél a görbe lényegében kváziperiodikus, a Fourier-analízis két frekvencia jelenlétét mutatta ki.  $R/R_c = 75,5$ -nél kaotikus szakaszok jelennek meg, ezekben az amplitúdó jóval nagyobb, mint a kváziperiodikus tartományban.  $R/R_c = 76,5$ -nél sűrűsödnek a kaotikus szakaszok, míg  $R/R_c = 78,9$ -nél már a vizsgált teljes tartomány kaotikus.

c) A  $\text{Ce}^{4+}$  ion koncentrációját mérték a Bjelouszov-Zsabotyinszkij-reakcióban [3,4]. Kontrollparaméter az ún. tartózkodási idő, ami fordítottan arányos a reakcióban részt vevő komponensek áramlási sebességével. Az 1.3 ábrán látható, hogy





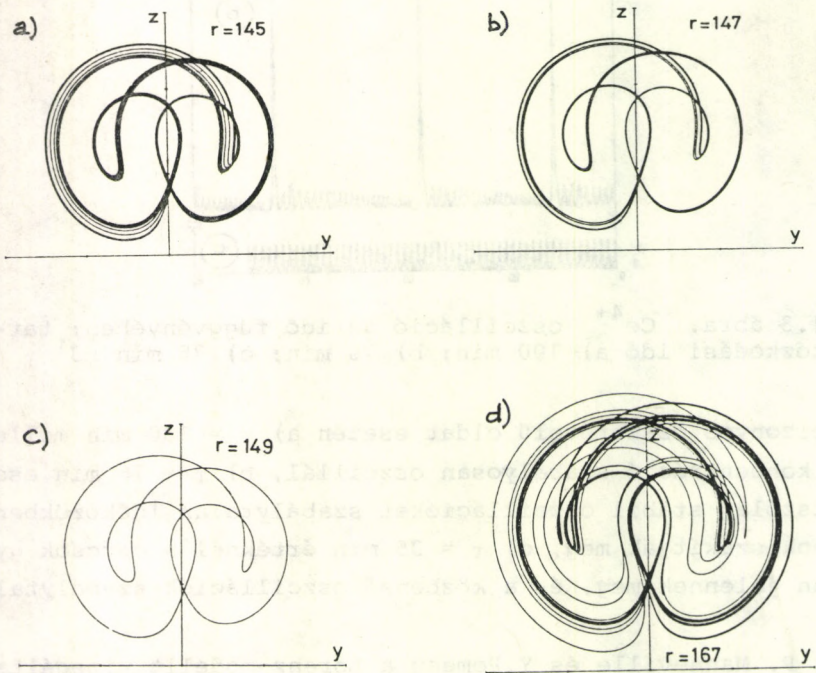
1.3 ábra.  $Ce^{4+}$  oszcilláció az idő függvényében; tartózkodási idő a) 100 min; b) 76 min; c) 35 min [3]

egy bizonyos összetételű oldat esetén a)  $\tau = 100$  min mellett a  $Ce^{4+}$  koncentráció szabályosan oszcillál, b)  $\tau = 76$  min esetén a látszólag stabil oszcillációkat szabálytalan időközökben nagy csúcsok szakítják meg, c)  $\tau = 35$  min értéknél a csúcsok gyakrabban jelennek meg, és a közbenső oszcillációk szabálytalanab-  
bak.

d) P. Manneville és Y. Pomeau a Lorenz-modellt vizsgálta számítógépen [5]. A Lorenz-féle egyenletrendszer:

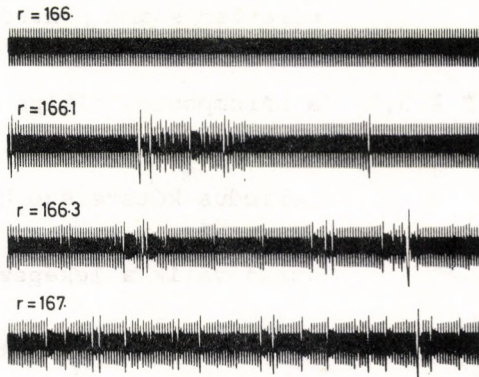
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

A számítógépes vizsgálat során a  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  értékekkel dolgoztak, és  $r$ -et változtatták a 145-170 tartományban.  $r \approx 145$ -nél a pálya aperiodikus egy  $L_1$  különös attraktoron [6]. Növekvő  $r$  mellett először nagy periódusidejű trajektóriák alakulnak ki, majd periódusfelező bifurkációk sorozatával  $r = 149$ -nél viszonylag egyszerű periodikus pálya válik stabilá. Ez a határciklus  $r \approx 166$ -ig stabil, majd  $r$  további növelése esetén a pálya ismét aperiodikussá válik, egy  $L_2$  különös attraktorhoz tart (1.4 ábra).  $L_2$  valószínűleg nagyon hasonlít  $L_1$ -re, hogy azonosak-e, azt egyelőre nem tudjuk eldönteni. Az aperiodikus pálya az 1.5 ábrán látható módon alakul ki, az ábrán a  $z(t)$  függvényt tüntették fel.



1.4 ábra. a) aperiodikus trajektória  $L_1$ -en, b) 4T periodikus trajektória, c) T periodikus határciklus, d) aperiodikus trajektória  $L_2$ -n [5]





1.5 ábra. A Lorenz-modell  $z(t)$  függvényének változása  $r = 166$  és  $r = 167$  között [5]

Az ábrák és a korábban elmondott kísérleti eredmények alapján megfogalmazzuk az intermittencia egy lehetséges, "kísérleti szempontból használható" definícióját.

Intermittensnek nevezzük azt az átmenetet, amikor a kontrollparaméter valamilyen értékénél a periodikus fázisban kaotikus szakaszok jelennek meg, a kontrollparaméter növekedésekor (csökkenésekor) sűrűsödnek, majd teljesen kitöltik a korábbi periodikus fázist.

## 2. EGYDIMENZIÓS LEKÉPEZÉSEK

Az intermittencia jelensége jól szemléltethető egydimenziós leképezésen. Példának az

$$x_{n+1} = Rx_n(1-x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1, \quad 0 \leq R \leq 4$$

logisztikus leképezést választjuk. A  $3 \leq R \leq 4$  tartományban ez a következő jellegzetességeket mutatja [7]:

- |            |  |
|------------|--|
| $R = 3,57$ | a periódus kétszereső bifurkációk torlódási pontja,                    |
| $R > 3,57$ | a kaotikus tartományban szűk ablakok léteznek, amelyeken belül egy-egy |

páratlan számú pontból álló határciklus stabil,

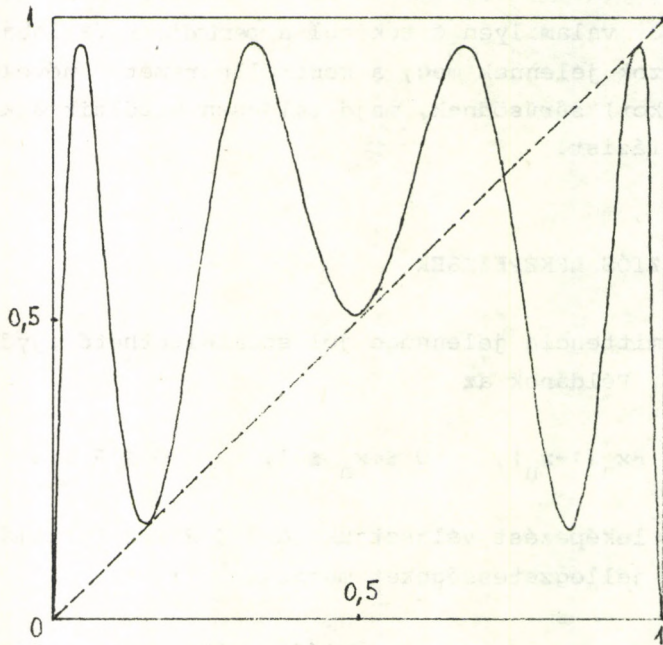
$R = R_C = 1 + \sqrt{8} \approx 3,83$  a hárompontos ciklus megjelenési pontja,

$R > 3,83$  periódus kétszerező bifurkációk kaszkádján keresztül ismét kaotikussá válik a leképezés.

Bennünket most az érdekel, hogyan alakul ki csökkenő (növekvő)  $R$  mellett az  $R_C$  előtti (utáni) kaotikus (stabil határciklust tartalmazó) tartomány. Vizsgáljuk e célból az

$$x_{n+3} = F^{(3)}(x_n) = F(F(F(x_n))), \quad F(x) = Rx(1-x)$$

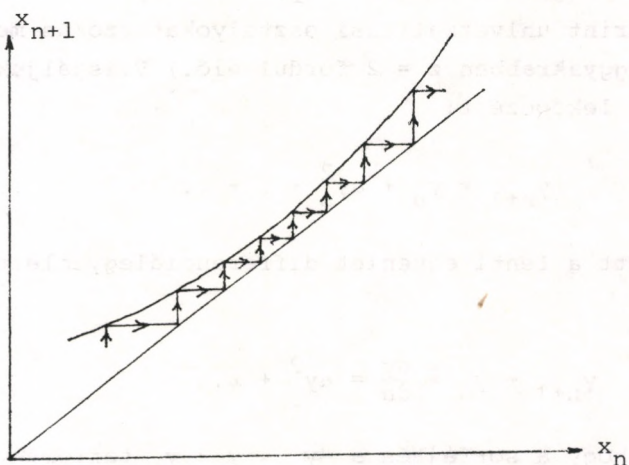
leképezést! A 2.1 ábrán az  $F^{(3)}(x)$  görbe menete látható.



2.1 ábra. Az  $F^{(3)}(x)$  harmadik iterált leképezés  $R=R_C$ -nél ( $F(x) = Rx(1-x)$ )



$R = R_C$ -nél az  $x_C = (0,160; 0,514; 0,956)$  pontokban a görbe érintője éppen az  $f(x) = x$  egyenes, az első szögfelező szögfelezője.  $R > R_C$  esetén a szögfelező hat "új" pontban metszi a görbét, az  $x_{n+3} = F^{(3)}(x_n)$  leképezésnek három stabil, három instabil fix-pontja jelenik meg. A három stabil fix-pont alkotja az  $x_{n+1} = F(x_n)$  leképezés hárompontos ciklusát.  $R < R_C$  esetén az  $F^{(3)}(x)$  görbe és a szögfelező között "csatorna" keletkezik az előbbi három  $x_C$  pont környezetében. Egy-egy stabil és instabil fix-pont "összeütközik", és mindkettő eltűnik. E jelenség neve tangens bifurkáció. A 2.2 ábrán az egyik ilyen csatorna nagyított képe látható. A csatornába rajzolt lépcső az iterá-



2.2 ábra. Iteráció a "csatornán" keresztül,  $x_{n+1} = F^{(3)}(x_n)$

rációs lépéseket mutatja. Konkrét számolás nélkül is megállapítható, hogy a csatornában az iteráció lassú. (Az  $x_{n+1} = F(x_n)$  leképezésnek hárompontos "kváziciklusa" van.) A csatornán kívül az iteráció eredménye kaotikus, majd véletlenszerűen valahol visszatér a három csatorna egyikébe, és újra kezdődik a kváziperiodikus fázis. Érdeemes most visszaemlékezni, hogy a kísérleti görbék pontosan ilyen viselkedést mutattak.

Fejtsük sorba az  $F^{(3)}(x, R)$  függvényt  $x_c, R_c$  körül!

$$F^{(3)}(x, R) \cong x_c + (x - x_c) + a_c (x - x_c)^2 + b_c (R_c - R) + \dots$$

Vezessük be az

$$y = \frac{x - x_c}{b_c}, \quad f(y) = \frac{F^{(3)}(x, R) - x_c}{b_c}, \quad a = a_c b_c, \quad \epsilon = R_c - R$$

új változókat!

$$f(y) = y + ay^2 + \epsilon + (\text{magasabbrendű tagok}) .$$

(A sorfejtés általános esetben  $f(y) = y + ay^z + \epsilon + \dots$  alakú,  $z$  értéke szerint univerzalitási osztályokat szokás megkülönböztetni. Leggyakrabban  $z = 2$  fordul elő.) Vizsgáljuk most az  $y_{n+1} = f(y_n)$  leképezést!

$$y_{n+1} = y_n + ay_n^2 + \epsilon + \dots$$

Nagy  $n$  mellett a fenti egyenlet differenciálegyenletté alakítható:

$$y_{n+1} - y_n \cong \frac{dy}{dn} = ay^2 + \epsilon .$$

Tegyük fel, hogy a sorfejtés a  $-y_0 < y < y_0$  tartományban érvényes, és a csatornában az iteráció valamilyen  $-y_0 < y_{in} < y_0$  értéknél indul! A differenciálegyenlet megoldása,

$$n(y_0) = \frac{1}{(a\epsilon)^{1/2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y_0}{(a\epsilon)^{1/2}} - \operatorname{arctg} \frac{y_{in}}{(a\epsilon)^{1/2}} \right] ,$$

megadja az iterációs lépések számát, azaz a csatornában eltöltött "időt". Kis  $\epsilon$  mellett,  $y_{in} < 0$  esetén  $n \sim \epsilon^{-1/2}$ . (Az általános esetben  $n \sim \epsilon^{-1+1/z}$ .) Az eredmény fizikai interpretálása kézenfekvő: kis  $\epsilon$  mellett, azaz  $R \cong R_c$  esetén sokáig tart a (látszólag) periodikus fázis.

A leképezést szokás a  $\bar{\lambda}$  Ljapunov-exponenssel jellemezni, ennek definíciója a következő:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\bar{\lambda}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [x_n(x_0 + \Delta) - x_n(x_0)],$$

ahol  $x_n$  az  $n$ -edik iteráció eredménye,  $x_0$  és  $x_0 + \Delta$  két közeli kezdőpont.  $\bar{\lambda}$  a kezdeti feltételre való érzékenységet jellemzi.  $\bar{\lambda} > 0$  esetén két közeli kezdőpont az iteráció során exponenciálisan eltávolodik egymástól. A differenciálás láncszabályának segítségével könnyen megállapítható, hogy a csatornán való keresztülhaladásra nézve a Ljapunov-exponens,

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \ln[f'(y_n)f'(y_{n-1}) \dots f'(y_1)f'(y_0)] \sim \epsilon^{1/2}.$$

Az elmondottak alapján intermittensnek nevezzük azt az átmenetet, amikor határciklusból (fix pontból) tangens bifurkáción keresztül aperiodikus trajektória alakul ki. A kváziperiodikus állapotban való tartózkodás ideje  $\sim |R - R_c|^{-1+1/z}$ , ahol  $R_c$  a kontrollparaméter kritikus értéke,  $z$  az univerzalitási osztályra jellemző, kettőnél nem kisebb egész szám.

### 3. MEGJEGYZÉSEK

Befejezésül néhány megjegyzést fűzök az elmondottakhoz.

i) Az intermittencia más leképezéseken is vizsgálható. Pl. az  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $f(x) = 1 - \mu x^2$ ,  $0 < \mu < 2$ ,  $-1 < x < 1$  leképezés  $\mu = 7/4$ -nél hárompontos ciklusból tangens bifurkáción keresztül kaotikusba megy át.

ii) Problémát jelent, hogy (főleg kísérletileg) nehéz megkülönböztetni a valódi káoszt és a nagyon hosszú stabil periódusokat. A frekvencia-spektrum meghatározása nyújthat segítséget ennek megoldásában.

iii) A tangens bifurkáció olyan, hogy nehéz elképzelni, mi a káosz közeledtének jele (lehet, hogy semmi!), mivel az instabil fix pont nem látszik. A tranziensek feltehetően nagyon hosszúak a kritikus pont közelében.

iv) A másodikként említett kísérletben a bolométer görbéjéből számított Ljapunov-exponens  $\sim \epsilon^\alpha$ , ahol  $1 < \alpha < 1,5$ . Ez sem-

milyen univerzalitási osztálynak nem felel meg.

v) Az egydimenziós leképezésektől természetesen hosszú út vezet a kísérletileg megfigyelt jelenségekig. A fizikai (kémiái, biológiai stb.) jelenségeket általában valamilyen három- vagy többváltozós differenciálegyenlet-rendszer írja le. A trajektória Poincaré-leképezéséből lehet egydimenziós leképezést konstruálni. Abban bízhatunk, hogy az intermittencia lényege nem vész el e hosszú úton.

#### IRODALOM

1. P.Bergé, M.Dubois, P.Manneville, Y.Pomeau, J.Physique Lett. 41, L341, 1980.
2. J. Maurer, A. Libchaber, J. Physique Lett. 41, L515, 1980.
3. Y. Pomeau, J.C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal, J. Physique Lett. 42, L271, 1981.
4. Tél Tamás, ez a kötet, 1.1 fejezet
5. P. Manneville, Y. Pomeau, Physica D1, 219, 1980.
6. Bevezetés..., 33.fejezet
7. Bevezetés..., 30.fejezet



# KÁOSZ OPTIKAI RENDSZEREKBEN

Bergou János

1.	Bevezetés	313
2.	A Maxwell-Bloch (MB) egyenletek	315
3.	Lézer külső jellel	321
4.	Káosz az optikai bistabilitásban	323
5.	Összefoglalás	326
	Irodalom	327





## 1. BEVEZETÉS

A legutóbbi években a fizika legkülönbözőbb területein fellépő nemegyensúlyi jelenségek tanulmányozása magára vonta a fizikusok érdeklődését. Ennek több oka is van. Először is, kiderült, hogy az egyensúlyi termodinamikából, illetve statisztikus mechanikából megismert legtöbb fogalom átvihető a nemegyensúlyi rendszerekre is. Így pl. találkozunk olyan jelenségekkel, melyek az első-, másod-, vagy magasabbrendű fázisátalakulásokkal mutatnak szoros analógiát. Az ilyen fázisátalakulásoknál az egyensúlyi esethez hasonlóan fontos szerepet játszanak a kritikus fluktuációk és ugyanígy fellép a kritikus lelassulás jelensége is. A másik - és talán legfontosabb ok - a jelenségek univerzalitása. Azaz, a kritikus pont (fázisátalakulási pont) közelében a legkülönbözőbb rendszerek viselkedése (az ún. kritikus viselkedés) egymáshoz igen nagymértékben hasonlít. Éppen ez az univerzalitás teszi fontossá az ilyen jelenségek tanulmányozását, és ez képezi a különböző tudományterületeken végbemenő nemegyensúlyi (és nemlineáris) jelenségek egységes tárgyalására szolgáló, - szinenergetikának nevezett - új interdiszciplináris tudomány alapját [1].

A lézer, illetve általánosabban a kvantumoptikai jelenségek a termikus egyensúlytól távoli rendszerekben végbemenő fázisátalakulás szerű jelenségek prototípusát jelentik. Egyrészt ismerjük a fény-anyag kölcsönhatás mikroszkópikus modelljét egészen különböző szinteken (kvantumelektrodinamika-fenomenológikus elméletek). Ezek segítségével nyomon tudjuk követni, hogy az egyes atomok egyedi viselkedéséből hogyan épül fel a makroszkópikus méretű anyagot jellemző kooperatív viselkedés. Ehhez mindössze némi statisztikus fizikai ismeret és józan észre támaszkodó néhány további megfontolás szükséges. Mielőtt azonban a jelenségek részletes ismertetésébe belekezdénénk, ejtsünk néhány szót arról, mi is az a kvantumoptika? Optika alatt legszűkebb értelemben a látható fénnel kapcsolatos jelenségeket értjük. Ez azonban csak egy igen szűk színekpartományt érint, hiszen az emberi szem az  $5 \cdot 10^{14}$  Hz körüli elektromágneses sugárzásokra érzékeny. Tágabb értelemben optikán a



mikrohullámoknál rövidebb, de a röntgensugárzásnál hosszabb hullámhosszúságú - tehát a  $10^{11}$ - $10^{18}$  Hz közé eső - elektromágneses sugárzásokkal történő kölcsönhatásokat értjük. Sokáig ki-elégítő volt ebben a tartományban az un. fizikai-optikai megközelítés, amely a fény hullámelméletén alapult és a vele kölcsönhatásba lépő anyagot fenomenológikus állandókkal (törésmutató, dielektromos függvény stb.) jellemezte. Ez a leírás mód mindaddig megfelelt, amíg nem volt viszonylag koherens, monokromatikus fényforrás. A lézerek megjelenése azonban alapvetően megváltoztatta a helyzetet. Lehetővé vált igen keskeny rezonanciajelenségek megfigyelése, létrejött a nemlineáris és koherens optika. Mindezek értelmezése már nem lehetséges a fenomenológikus modell keretein belül és - legalábbis a fényvel kölcsönható anyagra - kvantumelméletet kell alkalmaznunk. A lézer működésével, valamint a belőle kijövő koherens (valamint monokromatikus, nagyintenzitású és egyéb jótulajdonságokkal rendelkező) fényvel történő kölcsönhatásokkal kapcsolatos jelenségeket és ezek vizsgálatát nevezzük kvantumoptikának. Az előző Statisztikus Fizikai Iskolákon ezekről részletesen volt szó [2,3]. Először abból a szempontból tárgyaltuk a kvantumoptikai jelenségeket, hogy a nemegyensúlyi rendszerekben végbemenő fázisátalakulásokra jelentenek jellegzetes példákat. Elsőrendű fázisátalakulásra példaként az un. optikai bistabilitást vizsgáltuk. Másodrendű fázisátalakulásra maga a lézer a legjobb példa, itt a lézerküszöb játssza az átalakulási pont szerepét. Az instabilitás mindkét esetben lágymódus típusú volt. Láttuk a lézermodell kapcsolatát az atmoszféra turbulenciáira kidolgozott un. Lorenz-moddellel és ennek alapján azt várhatjuk, hogy lézerekben is lehetséges magasabbrendű átalakulások fellépése [4]. Foglalkoztunk rezonáns közegen áthaladó koherens impulzus által kiváltott jelenségekkel (önindukált átlátszóság, fotonvisszhang) és tranziens optikai jelenségekkel is (szuperfluoreszcencia). A következő Iskolán a többmódusú lézerek elméletével, elsősorban a móúversengéssel ismerkedtünk meg, és megmutattuk ezen elmélet kapcsolatát az un. evolúciós elmélettel. Ily módon betekintést nyertünk a színenergetikának nevezett, interdiszciplináris tudomány eszköztárába is.



Mindezen jelenségek leírására mikroszkópikus elméletet használtunk, a rezonáns fény-anyag kölcsönhatásra vonatkozó Dicke-modellből indultunk ki. Innen azonban olyan egyenleteket származtattunk (az ún. Maxwell-Bloch-egyenleteket), amelyek fél-fenomenológikus módon sokkal egyszerűbben származtathatók. A mikroszkópikus megalapozás egy diákköri Nyári Iskolán hangzott el magyarul [5], a mi céljaink számára azonban elegendő a Maxwell-Bloch-egyenletek ismerete. Ezért a következő fejezetben áttekintjük ezen kvantumoptikai egyenletek rövid levezetését. A harmadik fejezetben a kívülről injektált optikai jel jelenlétében végbemenő lézerműködést vizsgáljuk meg. Ez volt az első olyan optikai rendszer, amelyben elméletileg kaotikus kimenő jelet jósoltak. A negyedik fejezetben a bistabil optikai rendszerekben kialakuló kaotikus viselkedésről esik szó. Ez volt az első olyan optikai rendszer, amelyben ténylegesen meg is figyeltek kaotikus kimenő jelet. Végül az ötödik fejezetben az eredmények rövid összefoglalása mellett utalunk a mikroszkópikus modellel való kapcsolatra, valamint az egyéb fizikai és nemfizikai rendszerekben fellépő kaotikus viselkedéssel fennálló kapcsolatra.

## 2. A MAXWELL-BLOCH (MB) EGYENLETEK

Az anyagi közegben kialakuló elektromágneses teret a Maxwell-egyenletekkel írjuk le, ezek szokásos alakja a Gauss-féle cgs egységrendszerben:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho_{sz}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nem mágneses dielektrikumban  $\vec{B} = \vec{H}$ ,  $\rho_{sz} = 0$ . Ha a közeg a  $\vec{P}$  polarizációvektor jellemzi, akkor  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ . A veszteségeket (disszipáció stb.) pedig egyszerűen a  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  Ohm-törvénnyel vesszük figyelembe.  $\vec{E}$  kétszeres rotációját véve és felhasználva a rotrot = graddiv  $-\nabla^2$  összefüggést (továbbá feltéve, hogy a transzverzálitás miatt  $\operatorname{div} \vec{P} = 0$ ),  $\vec{E}$ -re az alábbi hullámegyenletet nyerjük:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} . \quad (2.1)$$

Látszatra ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Valójában azonban ez egy nemlineáris egyenlet. A jobb oldali forrás-tagban ugyanis a polarizáció szerepel. Ez pedig a térerősség függvénye. Lineáris közegben azzal arányos (az arányossági tényező a szuszceptibilitás), általában azonban a térerősség magasabb hatványait is tartalmazza, mint azt majd az anyagi egyenleteknél látni fogjuk.

Tegyük fel, hogy a közegben lineárisan polarizált jel (z-komponens) alakul ki, vagy terjed az x-irányban. Ekkor (2.1)-ből elhagyhatjuk a vektorjelölést és csak ezt az egyetlen komponenst tekintjük. A nemlineáris rezgésekre kidolgozott Bogoljubov-Krülov-módszer szerint a megoldást

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (2.2)$$

alakban keressük, ahol  $E_0 = E_0(x, t)$  lassan változó amplitúdó és  $\phi = \phi(x, t)$  lassan változó fázis. A P polarizációról pedig feltesszük, hogy

$$P = C \cos(\omega t - kx + \phi) + S \sin(\omega t - kx + \phi) \quad (2.3)$$

alakban írható. (2.2)-t és (2.3)-at (2.1)-be helyettesítve,  $E_0$  és  $\phi$  második deriváltját, valamint az első deriváltjaik szorzatát tartalmazó tagokat elhagyva és az egyenlet két oldalán a sin-os és cos-os tagok együtthatóit egyenlővé téve, végül a következő egyenleteket kapjuk:

$$c \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{\partial E_0}{\partial t} + \kappa E_0 = -2\pi\omega S , \quad (2.4)$$

$$(\Delta\omega_1 + c \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t}) E_0 = -2\pi\omega C . \quad (2.5)$$

Itt  $\kappa = 2\pi\sigma$ ;  $\Delta\omega_1 = \omega - \Omega$ , ahol  $\Omega = ck$  a passzív rezonátor sajátfrekvenciája, így  $\Delta\omega_1$  az elhangolás. (2.4) a kialakuló nemlineáris rezgések amplitúdóját, (2.5) pedig a fázisát határozza



meg. Fizikai jelentésük jobb megértéséhez tekintsünk két egyszerű példát:

a) Szabad oszcilláció,  $S=C=0$ . Ekkor  $\Delta\omega_1 = 0$ , a  $\phi$  fázis mindenütt állandó. (2.4)-ből pedig  $E_0(t) = E_0(0)\exp(-\kappa t)$ , azaz pl. egy rezonátorba beinjektált jel a tükrökön keresztül "kifolyik",  $T = \kappa^{-1}$  időállandóval.

b) Lineáris közeg, ez egy  $\chi$  komplex szuszceptibilitással jellemezhető. Ekkor

$$P = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re}(\chi E) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re}[(\chi' + i\chi'')E_0 e^{-i(\omega t - kx + \phi)}] =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \chi' E_0 \cos(\omega t - kx + \phi) + \frac{1}{4\pi} \chi'' E_0 \sin(\omega t - kx + \phi) .$$

Innen leolvashatjuk, hogy  $C = (\chi' E_0 / 4\pi)$  és  $S = (\chi'' E_0 / 4\pi)$ . Ezeket (2.4)-be és (2.5)-be helyettesítve (2.5)-ből azonnal adódik, hogy

$$\omega = \frac{\Omega}{1 + \frac{\chi'}{2}} ,$$

azaz a közeg jelenléte módosította az oszcilláció frekvenciáját. (2.4)-ből pedig a

$$c \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{\partial E_0}{\partial t} + (\kappa + \frac{\omega \chi''}{2}) E_0 = 0 \tag{2.6}$$

egyenlet adódik, ami a közegen való áthaladásra vonatkozó Lambert-Beer-törvény (exponenciális gyengülés) differenciális alakja. Már innen látjuk azonban, hogy  $\chi'' < 0$  esetén a közeg erősíthet is.

Fordítsuk figyelmünket ezek után az elektromágneses térrel kölcsönható anyagi közeget leíró egyenletekre. Csak a rezonáns átmenetre gyakorolt hatását vesszük figyelembe az elektromágneses sugárzásnak, azaz kétnívós rendszert vizsgálunk. Az alsó nívó perturbálatlan, időfüggetlen sajátfüggvénye legyen  $u_1$ , a hozzátartozó energia  $E_1 (H_0 u_1 = E_1 u_1)$ , a felsőé  $u_2$ , illetve  $E_2 (H_0 u_2 = E_2 u_2)$ . A teljes Hamilton-operátor  $H = H_0 + H'$  alakú, ahol  $H'$  a (kétnívós) atom és az elektromágneses hullám köl-

csönhatását írja le. A perturbált atom  $\psi$  hullámfüggvényének meghatározásához az

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (2.7)$$

Schrödinger-egyenletet kell megoldanunk. Ennek megoldását teljes általánosságban kereshetjük  $\psi = au_1 + bu_2$  alakban. Feltehetjük továbbá, hogy  $H'$  az atom elektromos dipólusmomentuma és az elektromágneses hullám közötti kölcsönhatást ír le, azaz  $H' = -e\vec{r}\vec{E}(t)$  (itt már kihasználtuk az un. dipólközelítést, amennyiben  $\vec{E}$ -t helytől függetlennek tekintettük). Ha  $u_1$  és  $u_2$  ellentétes paritásúak, akkor  $\vec{\mu}_{11}(=e\vec{r}_{11}) = \vec{\mu}_{22}(=e\vec{r}_{22}) = 0$ . Választhatjuk továbbá  $u_1/u_2$  fázisát úgy, hogy  $\vec{\mu}_{12}$  valós legyen. Ha még az elektromágneses hullám lineárisan polarizált, akkor írható, hogy

$$H'_{12} = H'_{21} = -\mu E(t), \quad (2.8)$$

ahol  $\mu$  a  $\vec{\mu}_{12} = \vec{\mu}_{21}$  vektor vetülete a polarizációs irányra. Felhasználva  $\psi$  fenti alakját, továbbá (2.8)-at (2.7)-ben, az  $u_1$ -re, illetve  $u_2$ -re törtéző vetítéssel megkaphatjuk a és b mozgásegyenletét:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{a} &= E_1 a + H'_{12} b, \\ i\hbar \dot{b} &= E_2 b + H'_{21} a. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Definiáljunk egy fiktív  $\vec{R}(t)$  vektort a következő módon:

$$\begin{aligned} R_1 &= ab^* + a^*b, & R_2 &= i(ab^* - a^*b), \\ R_3 &= aa^* - bb^*. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Világos, hogy ha adott a és b, akkor  $\vec{R}$  is egyértelműen meghatározott,  $\vec{R}$  megadása azonban csak  $|a|$ -t,  $|b|$ -t és a relatív fázisukat rögzíti. Az abszolút fázisokat azonban a (2.9) Schrödinger-egyenlet sem határozza meg egyértelműen. Ezért  $\vec{R}$  megadása fizikai szempontból teljesen ekvivalens (2.9) megol-



dásával. Vezessünk be még egy fiktív  $\vec{\omega}(t)$  vektort:

$$\hbar\omega_1 = (H'_{12} + H'_{21}), \quad \hbar\omega_2 = i(H'_{12} - H'_{21}), \quad (2.11)$$

$$\hbar\omega_3 = E_1 - E_2 = -\hbar\omega_0.$$

Felhasználva ezen definíciókat, (2.9)-et a következő alakba írhatjuk át:

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (2.12)$$

Formailag ez az egyenlet megegyezik a - pl. a mag mágneses rezonancia elméletéből jól ismert - Bloch-egyenlettel. Lineárisan polarizált esetben ((2.8)-at (2.11)-ben felhasználva) látható, hogy  $\omega_2 = 0$ . Továbbá  $\langle \mu \rangle = \int \psi^* e r_1 \psi = \mu R_1$ .  $R_3$  az inverziót adja meg.  $R_2$ -nek nincs ilyen szemléletes jelentése (cirkulárisan polarizált esetben ez már nem igaz), ezért kiküszöböljük az elméletből. Ha (2.12)-t komponensenként kiírjuk, akkor az  $R_1$ -re vonatkozó egyenletet még egyszer deriválva és  $\dot{R}_2$ -t (2.12) második egyenletéből helyettesítve az alábbi egyenletek adódnak:

$$\ddot{R}_1 + \omega_0^2 R_1 = \frac{2\mu\omega_0}{\hbar} ER_3, \quad (2.13)$$

$$\dot{R}_3 = -\frac{2\mu}{\hbar\omega_0} \dot{ER}_1. \quad (2.14)$$

(2.13) egy veszteségnélküli, harmonikus oszcillátort ír le. Természetes általánosítás egy veszteségi tagot bevezetni ebbe az egyenletbe. Ennek forrása pl. a természetes élettartam, atomok egymásközi ütközése stb. lehet. Hasonlóan bevezethetünk (2.14)-be is egy veszteségi tagot, mely az atomoknak a 2-es nívóról az 1-esre történő bomlását írja le. Az így módosított egyenletek alakja a következő:

$$\ddot{R}_1 + \frac{2}{T_2} \dot{R}_1 + \omega_0^2 R_1 = \frac{2\mu\omega_0}{\hbar} ER_3, \quad (2.15)$$

$$\dot{R}_3 + \frac{R_3 - R_3^0}{T_1} = -\frac{2\mu}{\hbar\omega_0} \dot{ER}_1. \quad (2.16)$$

$R_3^0$  az inverzió egyensúlyi értéke. Termikus egyensúlyban jó közelítéssel  $R_3^0 = 1$  (minden atom alapállapotban), lézeralapötban a pumpálással azonban ettől lényegesen különböző is lehet  $R_3^0$  (pl.  $R_3^0 < 0$ , azaz több atom lesz gerjesztett állapotban, mint alapállapotban). A fenti kiegészítések annak felelnek meg, mintha a (2.12) Bloch-egyenlet jobb oldalát a

$$-\left(\frac{1}{T_2}R_1, \frac{1}{T_2}R_2, \frac{1}{T_1}R_3\right)$$

vektorral egészítettük volna ki. Legyen most  $N$  a térfogategységére eső atomok száma. Jelölje  $D$  az inverziósűrűséget ( $D=NR_3$ ) és  $P$  a makroszkópikus polarizációt (dipólusmomentum-sűrűséget,  $P=N\mu R_1$ ). Ezekre átírva (2.15)-öt és (2.16)-ot:

$$\ddot{P} + \frac{2}{T_2}\dot{P} + \omega_0^2 P = \frac{2\mu^2\omega_0}{\hbar}ED, \quad (2.17)$$

$$\dot{D} + \frac{D-D_0}{T_1} = -\frac{2}{\hbar\omega_0}EP. \quad (2.18)$$

$E$ -t válasszuk a (2.2) alakban,  $P$ -t pedig (2.3)-nak megfelelően. Ezeket (2.17)-be és (2.18)-ba helyettesítve, most a lassan változó  $S, C$  és  $D$ -re adódik az alábbi egyenletrendszer (az eljárás ugyanaz, mint amit (2.4) és (2.5) levezetésénél követtünk):

$$\dot{D} + \frac{D-D_0}{T_1} = -\frac{1}{\hbar}E_0S, \quad (2.19)$$

$$\dot{S} = (\Delta\omega_2 + \dot{\phi})C - \frac{1}{T_2}S + \frac{\mu^2}{\hbar}E_0D, \quad (2.20)$$

$$\dot{C} = -(\Delta\omega_2 + \dot{\phi})S - \frac{1}{T_2}C. \quad (2.21)$$

Itt  $\omega_2 = \omega - \omega_0$ . A (2.4), (2.5), (2.19), (2.20) és (2.21) egyenletek zárt egyenletrendszert alkotnak az öt meghatározandó mennyiségre: a tér amplitúdójára és fázisára, a polarizációnak a térrel fázisban levő, illetve  $\pi/2$ -t késő komponensére és az inverzióra. Összefoglalóan Maxwell-Bloch-egyenleteknek nevezzük őket [6] és a továbbiakban ezeket alkalmazzuk a vizsgálandó jelenségek leírására. Először a lézerműködést vizsgáljuk kívülről beinjektált jel esetén.



### 3. LÉZER KÜLSŐ JELLEL

Ahhoz, hogy a külső tér jelenlétét figyelembe tudjuk venni, legegyszerűbben úgy járhatunk el, hogy a (2.4) egyenletet kis-mértékben módosítjuk. Anyag jelenléte nélkül ( $S=0$ ) a rezonátorban kialakuló  $E_0$  amplitúdó, a kezdeti értékétől függetlenül az  $E_k$  értékhez tart, ahol  $E_k$  a kívülről becsatolt tér amplitúdója. Ezt a szituációt a

$$c \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{\partial E_0}{\partial t} + \kappa(E_0 - E_k) = -2\pi\omega S \quad (3.1)$$

egyenlet írja le. Térjünk át az így módosított Maxwell-Bloch-egyenletekben a komplex írásmódra a következő definíciókkal:

$$E = E_0 e^{-i(\phi + \Delta\omega t)}, \quad P = (C + iS) e^{-i(\phi + \Delta\omega t)}, \quad (3.2)$$

és hasonlóan  $E_k$ -ra. Pl. a (2.2)-beli  $P$  polarizáció a (3.2)-beli mennyiség valós része stb. A (3.1), (2.5), (2.19-21) MB-egyenletek ekkor az alábbi egyszerűbb alakot öltik:

$$c \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} = -\kappa(E - E_k) + ig_1 P, \quad g_1 = 2\pi\omega, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma_1 P - ig_2 ED, \quad g_2 = \frac{\mu^2}{\hbar}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{T_2}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma_{II} (D - D_0) - 2ig_3 (PE^* - P^*E), \quad (3.5)$$

$$\gamma_{II} = \frac{1}{T_1}, \quad g_3 = \frac{1}{\hbar}.$$

Ez a három egyenlet jelenti a kiindulást, segítségükkel vizsgáljuk meg az (időfüggő) külső tér hatása alatt lévő lézer-rendszert. Feltesszük, hogy  $\kappa \ll \gamma_1, \gamma_{II}$ , azaz az atomi rendszer relaxációja sokkal gyorsabb, mint a téré (ez jó lézer rezonátorok esetén mindig fennáll). Ekkor - az un. adiabatikus eliminációs eljárással - (3.4) és (3.5) segítségével  $P$ -t és  $D$ -t kiküszöböljük (3.3)-ból úgy, hogy  $P$ -t és  $D$ -t a  $\dot{P} = \dot{D} = 0$  algebrai egyenletből adódó stacionárius megoldásokkal helyettesítjük. Ekkor a következő egyenletet kapjuk a térerősségre:

$$\dot{x} = -i\Omega x + (z-1)x + A(\tau), \quad (3.6)$$

ahol

$$x = 2 \left( \frac{g_2 g_3}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}} \right)^{1/2} E e^{i\Omega t}, \quad A(\tau) = 2 \left( \frac{g_2 g_3}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}} \right)^{1/2} E_k e^{i\Omega t},$$

$$\tau = \kappa t, \quad z = \frac{R}{1+x^2}, \quad R = \frac{g_1 g_2 D_0}{\gamma_{\perp} \kappa}.$$

A levezetésnél feltettük, hogy a kétállapotú atomok átmeneti frekvenciája megegyezik a rezonátor-módus frekvenciájával, a tér amplitúdó térben homogén ( $\partial/\partial x = 0$ ). Ponttal a  $\tau$  szerinti deriválást jelöltük,  $\Omega$  pedig a külső tér frekvenciájának és a rezonátorfrekvenciának a különbsége (az elhangolási paraméter),  $\kappa$  egységekben mérve. A külső tér modulációját  $A(\tau)$  írja le.

(3.6)-ból először is látható, hogy a külső tér nélküli esetben ( $\Omega = A(\tau) = 0$ ; lézer) az egyenletnek két stacionárius megoldása ( $\dot{x} = 0$ ) létezik:  $x_1 = 0$ , ill.  $z = 1$ . Az első megoldás érvényes a lézereküszöb alatt, a második pedig a lézereküszöb felett, amint az egy egyszerű stabilitásanalízisből kiderül. Az eredmény igen szemléletesen tehető, ha  $R$ -et  $D_0/D_k$  alakban írjuk, ahol  $D_k$  a küszöbinverzió.

Ezután vizsgáljuk a külső jel hatását. Legyen először  $A(\tau) = a$  (=állandó). Ekkor (3.6)-nak ismét van egy  $z_s$  stacionárius megoldása, amely a

$$z_s + \frac{a^2 z_s}{(z_s - 1)^2 + \Omega^2} = R \quad (3.7)$$

egyenletet elégíti ki. Ez a megoldás instabillá válik, ha a

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{z_s^2 - R}{R} + \frac{z_s}{R} \left[ (z_s - 1)^2 + \Omega^2 \right] \frac{\delta R}{\delta z_s} = 0 \quad (3.8)$$

egyenlet gyöke pozitív. Ez mindig teljesül, ha  $R$  elég nagy (a túlpumpált lézert egy kis külső jel is megzavarja). Az instabilitás kemény módus típusú és kis  $a$ , valamint rögzített  $\Omega$  esetén  $R = 1 + 2a^2/\Omega^2$  pumpálási értéknél lép fel. Jóllehet a bejövő elektromos tér a amplitúdója időben állandó, a lézer kimenete mégis spontán modulálttá válik. Lényegesen nehezebb a



modulált külső jel hatásának vizsgálata. Tegyük fel, hogy a jel alakja a következő:

$$A(\tau) = a + a' \cos \Omega' t \quad . \quad (3.9)$$

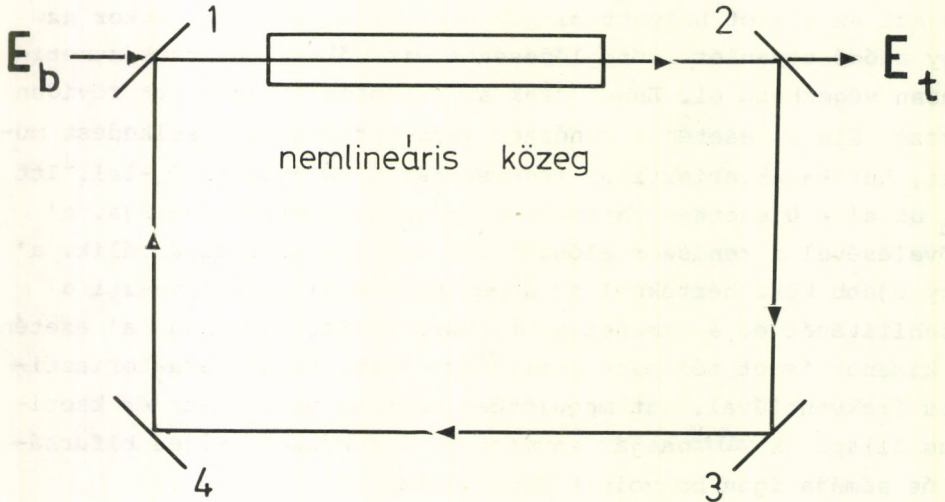
Ha ezt az alakot helyettesítjük a (3.6) egyenletbe, akkor az így adódó egyenlet időfejlődésének vizsgálata már csak numerikusan végezhető el. Ennek csak az eredményét foglaljuk röviden össze. Kis  $a'$  esetén a rendszer kváziperiódikus viselkedést mutat, két karakterisztikus frekvenciával,  $\Omega'$ -vel és  $\Omega_0$ -lal. Itt  $\Omega_0$  az  $a' = 0$  esethez tartozó határciklus körfrekvenciája.  $a'$  növelésével a rendszer először teljesen periódikussá válik.  $a'$  egy újabb küszöbértéknél ez a periódikus állapot elveszti a stabilitását és a kimenet kaotikussá válik. Igen nagy  $a'$  esetén a kimenet ismét teljesen periódikus lesz, az  $\Omega'$  karakterisztikus frekvenciával. Ezt megelőzően azonban periódikus és kaotikus állapotok változtatják egymást és a rendszer teljes bifurkációs sémája igen bonyolult képet mutat [7].

#### 4. KÁOSZ AZ OPTIKAI BISTABILITÁSBAN

Az optikai bistabilitás jelensége röviden a következő [2,5]: Képzeljük el, hogy egy optikai rezonátorba (legegyszerűbben két tükör közé) valamilyen normálállapotú (tehát nem invertált, azaz nem-lézer) közeget helyezünk, amely rezonáns módon abszorbeál egy adott frekvencián és a közeg nemlinearitása is nagy. Ha ezt a rendszert az egyik tükrön keresztül megvilágítjuk, a rezonancia-frekvenciának megfelelő frekvenciájú elektromágneses sugárzással, és a rendszer másik oldalán kilépő fényt - azaz a transzmissziót - vizsgáljuk, akkor a következőt tapasztaljuk. Kis térerősségeknél a rendszer erősen abszorbeál. Növelve a belépő intenzitást, a rendszer egy küszöbértéknél hirtelen kivilágosodik és áteresztővé válik. Ha ebben a kivilágosodott állapotban csökkenteni kezdjük a beeső intenzitást, a rendszer a bejövő intenzitás másik - az előzőnél kisebb - értékénél sötétedik el ismét. A viselkedés nagymértékben hason-

ló a hiszterézist is mutató elsőrendű fázisátalakulásokhoz.

A jelenség megfigyelése és elméleti leírása egyaránt a 3.1 ábrán látható, un. ring-rezonátor elrendezésben valósítható meg legkönnyebben.



3.1 ábra. Ring-rezonátor. 1 és 2 két féligáteresztő tükör, 3 és 4 100 %-ot reflektálnak.  $E_b$  a beeső amplitúdó,  $E_t$  a transzmittált amplitúdó.

A kaotikus viselkedés felléptének lehetősége a következő felismerésen alapul. Általában ezt a rendszert folytonos differenciálegyenletekkel írják le. Ha azonban, a rezonátor  $t_R$  körülfutási ideje nagyobb, mint a közeg  $\gamma_{\perp}^{-1}$  vagy  $\gamma_{\parallel}^{-1}$  relaxációs ideje, akkor differenciaegyenletek írják le a rendszert. Ennek megoldása pedig ott is instabillá válhat, ahol a megfelelő differenciálegyenlet megoldása stabil. Kövessük ezt egy kis számítással nyomon. Tegyük fel, hogy differenciaegyenletünk a következő alakú:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n), \quad (4.1)$$

ahol  $\vec{x}_n$  egy vektor,  $\vec{f}$  egy (általában nemlineáris) vektorfüggvény,  $n$  pedig a lépésindex. A stacionárius állapotokat  $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n$  definiálja, ezen egyenlet megoldásait pedig jelöl.



jük  $\vec{x}^k$ -val. A stabilitásanalízist a következő módon hajtjuk végre. Vezessük be az  $\vec{\epsilon}_n$  kis eltéréseket:  $\vec{x}_n = \vec{x}^k + \vec{\epsilon}_n$  összefüggéssel. Ezután a problémát linearizáljuk a stacionárius érték körüli sorfejtéssel és határozzuk meg az így adódó mátrix  $\Lambda^k$  sajátértékeit. A k-adik állapot stabil, ha minden sajátértékre  $|\Lambda^k| < 1$ . Vizsgáljuk ezután a diszkrét problémához rendelhető folytonos differenciálegyenlet tulajdonságait. Közelítőleg  $\dot{\vec{x}}_{n+1} = \dot{\vec{x}}_n + t_R \dot{\vec{x}}_n$ , ahol  $t_R$  az időkülönbség  $\vec{x}_n$  és  $\vec{x}_{n+1}$  között. Így (4.1)-ből a

$$t_R \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) - \vec{x} \quad (4.2)$$

differenciálegyenletet nyerjük, melynek stacionárius állapotai megegyeznek (4.1)-éivel. A (4.2) stabilitásanalízisével nyerhető  $\lambda^k$ -k kapcsolata  $\Lambda^k$ -kal:

$$\lambda^k = (\Lambda^k - 1)/t_R, \quad (4.3)$$

és  $\vec{x}^k$  akkor stabil, ha  $\text{Re} \lambda^k < 0$ . Innen láthatjuk, hogy ha a differenciálegyenlet instabil, akkor a differenciaegyenlet is instabil. Ha azonban a differenciálegyenlet stabil, a differenciaegyenlet megoldása még mindig lehet instabil.

Ha a MB-egyenletek integrálásánál figyelembe vesszük a véges körülfutási időt, a következő csatolt egyenletrendszert kapjuk:

$$E(t) = A + BE(t - t_R) e^{i[\phi(t) - \phi_0]}, \quad (4.4)$$

$$\tau \dot{\phi}(t) = -\phi(t) + \text{sgn}(n_2) |E(t - t_R)|^2, \quad (4.5)$$

$$\tau = \gamma_{\perp}^{-1} = \gamma_{\parallel}^{-1}.$$

Itt  $E$  a (dimenziótlanított) elektromos térerősség,  $\phi$  a fázistolás a nemlineáris közegben,  $\phi_0$  az elhangolás ( $= \omega - \omega_0$ ),  $n_2$  a nemlineáris törésmutató (másodrendben),  $A = \sqrt{T} E_b$ ,  $B = R$  ( $T =$  transzmisszió,  $R =$  reflexió). Ha  $t_R \ll \tau$ , akkor (4.5) stacionárius megoldását (4.4)-be helyettesíthetjük. Az így

adódó egyenlet stacionárius megoldása csak a paraméterek egy bizonyos tartományában stabil. Ismét csak az egyenlet számítógépes vizsgálata azt mutatja, hogy a rendszer szukcesszív bifurkációkon megy át. Az egyes tartományokban a transzmittált fény spontán modulált lesz, mégpedig  $nt_R$  ( $n \geq 2$ ) periódusidővel, míg végül a kimenet teljesen kaotikussá válik.

Ennek a jelenségnek az ad különös jelentőséget, hogy kísérletileg is megfigyelték [8]. Széles tartományban változtatták a visszacsatolási időt. A  $t_R \lesssim \gamma^{-1}$  tartományban semmilyen  $E_D$  beeső intenzitásnál nem figyeltek meg instabilitást. A  $t_R \ll \gamma^{-1}$  tartományban a beeső intenzitást növelve a rendszer kimenete az intenzitás egy küszöbértékénél kaotikussá vált, igen jó összhangban az elméleti jóslatokkal.

## 5. ÖSSZEFOGLALÁS

A kvantumoptikában ismert, fázisátalakulásszerű jelenségek közül néhányat ismertettünk a jelen cikkben. Leírásukhoz kidolgoztunk egy konzekvens modellt, amely számos jelenség egyetemes tárgyalását teszi lehetővé - ez a Maxwell-Bloch-egyenletrendszer. Segítségével itt két speciális problémát vizsgáltunk: külső jel hatását lézere, illetve az optikai bistabilitást. Azt találtuk, hogy bizonyos paramétertartományban mindkét rendszer kimenete kaotikus lehet. Az MB-egyenletek az itt tárgyaltnál sokkal általánosabban is alkalmazhatók, segítségükkel csaknem a teljes kvantumoptika tárgyalható. Így például a terjedési jelenségek: önindukált átlátszóság, foton visszhang. A lézer és az optikai bistabilitás sokkal általánosabb analízise is elvégezhető segítségükkel. Leolvasható belőlük az un. lézerpotenciál (általánosított szabad-energia) is, és így egy statisztikus fizikai általánosításra is tág teret adnak. Igen érdekes tulajdonságuk, hogy leképezhetők a Lorenz-modellre, így annak egy valódi fizikai realizációját adják. Mindez már átvezet a színenergetika területére, ahol a strukturák kialakulásának és általában az evolúciónak a tanulmányozására a kvantumoptikai rendszereket modell-rendszereknek



tekintik éppen a könnyű kísérleti hozzáférhetőség és a viszonylag legrészletesebben kidolgozott elméleti alapok miatt.

#### IRODALOM

1. H. Haken, Szinenergetika (megjelenés alatt, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982)
2. Bergou János, Előadások a Struktúrák kialakulása fizikai, kémiai és biológiai rendszerekben I, II.(1979.nov.12-16., Szentendre ill. 1981. jan. 12-16. Budapest) Statisztikus Fizikai Iskolákon (nem publikált)
3. H.M. Nussenzveig, Introduction to Quantum Optics (Gordon and Breach, N.Y., 1973 )
4. H. Haken, Phys. Lett. 53A, 77, 1975.  
H. Haken és A. Wunderlin, Phys. Lett. 62A, 133, 1977.
5. Varró Sándor, Kvantumoptika. ELTE Fizikus Diákkör: Bevezetés a fizika térelméleti módszereibe. Jegyzet, 204-236. old. (Budapest, 1981 )
6. O. Svelto, Principles of Lasers, 9. fejezet (Plenum Press, N.Y. and London, 1976 )
7. T. Yamada és R. Graham, Phys. Rev. Lett. 45, 1322, 1980.
8. H.M. Gibbs et al., Phys. Rev. Lett. 46, 474, 1981.





# SZTOCHASZTIKUS VISELKEDÉS AZ ÉGI MECHANIKÁBAN

Érdi Bálint

1. Bevezetés	331
2. A metszéspületi módszer	331
3. A Ljapunov-féle karakterisztikus számok	336
4. Rezonanciák átfedése	340
Irodalom	346





## 1. BEVEZETÉS

Előadásomban néhány égi mechanikai probléma integrálhatóságával, illetve a megoldás sztochasztikus jellegével kapcsolatos eredményekről adok áttekintést.

A vizsgált problémákban a Háromtestprobléma különböző esetei szerepelnek. Célszerű ezeket röviden áttekinteni. Általános háromtestprobléma: három, tömegpontnak tekinthető test mozgását vizsgáljuk, feltéve, hogy ezek tömege azonos nagyságrendű, és rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak. Korlátozott háromtestprobléma: az egyik test elhanyagolhatóan kicsi tömegű a másik kettőhöz képest. A két relatíve nagytömegű test a közös tömegközéppontjuk körül kör- vagy ellipszispályán kering (kör, illetve elliptikus korlátozott háromtestprobléma), meghatározandó a harmadik test mozgása. Megkülönböztethető a térbeli és a síkbeli eset, ez utóbbiban a három test mindig ugyanazon síkban helyezkedik el.

## 2. A METSZÉSFELÜLETI MÓDSZER (A POINCARÉ-LEKÉPEZÉS MÓDSZERE)

Konzervatív dinamikai rendszerek vizsgálatára gyakran alkalmazzák a metszésfelületi módszert (method of surface of section), melynek gondolata Poincaré nevéhez fűződik [1], és amelyet Hénon és Heiles elevenített fel [2].

A módszer lényege, hogy a fázistérben nem a teljes fázis-trajektóriát, hanem annak egy alkalmasan megválasztott metszésfelülettel való metszéspontjait vizsgálják. A módszer alkalmazása legegyszerűbb két szabadsági fokú konzervatív rendszerek esetén. Ekkor a fázistér négydimenziós. Adott energiához tartozó fázis-trajektóriák a fázistér egy háromdimenziós alterére korlátozódnak. Ha a probléma integrálható, tehát az energiaintegrál mellett létezik még egy független első integrál, a fázis-trajektóriák egy kétdimenziós felületen helyezkednek el (pl. kváziperiodikus megoldásnak tóruszfelület felel meg). A metszésfelület is kétdimenziós, pl. egy sík. Egy adott trajektóriának a metszésfelülettel alkotott egymást követő metszéspontjai a metszésfelület önmagára való leképezéseként



foghatók fel. A leképezés fix pontjai periodikus megoldásnak felelnek meg. Ha a probléma integrálható, a kétdimenziós felületen húzódó fázisrajektóriák a metszésfelületet zárt görbe (vagy görbék) mentén metszik, ezek a leképezés invariáns görbéi. A nem integrálható esetben a háromdimenziós al térre korlátozódó fázisrajektóriák a metszésfelületet rendszertelenül elhelyezkedő pontokban metszik. Ennek megfelelően a metszésfelületi módszer alkalmazásakor a szabálytalanul szétszórt metszéspontok létezéséből a probléma nem integrálható voltára, a megoldás kaotikus jellegére lehet következtetni.

Hénon és Heiles [2] egy sztellárdinamikai problémához kapcsolódva azt vizsgálták, hogy egy tengelyszimmetrikus (galaktikus) potenciáltér meridiánsíkjában mozgó részecskére az energiaintegrál mellett létezik-e más integrál is? A metszésfelületi módszer alkalmazásával kimutatták, hogy kis pozitív energiákra a fázistérben léteznek olyan tartományok, ahol invariáns görbék, illetve ezek láncolatai találhatóak (a probléma tehát integrálható), míg nagyobb energiákra a metszésfelületen a metszéspontok rendszertelenül helyezkednek el, a megoldás jellege kaotikus.

A metszésfelületi módszerrel a síkbeli kör korlátozott háromtestproblémát is beható vizsgálatoknak vetették alá [3-5]. Kimutatták, hogy a fázistér itt is különböző tulajdonságú tartományokból áll. Vannak olyan tartományok, ahol a trajektóriák többsége valamilyen integrálfelületen helyezkedik el, míg más tartományokban a pályák kaotikusak, ám ilyen tartományokban is találhatóak stabilitásra utaló, kisméretű invariáns görbékéből álló láncolatok.

Később a térbeli kör korlátozott háromtestproblémára [6] és az általános háromtestproblémára [7] vonatkozóan is végeztek hasonló vizsgálatokat. A metszésfelületi módszer alkalmazása ezekben az esetekben komplikáltabb, hiszen a szabadsági fokok száma nagyobb, mint kettő.

A továbbiakban részletesebben a metszésfelületi módszernek a Kirkwood-féle zónák problémájára [8] való alkalmazásával kapott eredményekre térek ki.

A Kirkwood-féle zónák a kisbolygók középmozgás szerinti eloszlásában az  $n/n_j = 2/1, 7/3, 5/2, 3/1$  rezonanciáknál jelent-



kező minimumhelyek [9] ( $n$  illetve  $n_j$  a kisbolygók illetve a Jupiter középmozgása, azaz pályamenti közepes szögsebessége). A zónák keletkezésének oka a mai napig sem tisztázott. Az utóbbi évtizedben Jefferys ötlete nyomán elterjedt az ütközési hipotézis [10], amely a zónák kialakulását a kisbolygók egymás közötti ütközéseivel magyarázza. Az ütközési hipotézis a pályaelemek, elsősorban a pályaeccentricitás változásaira épít. Mivel rezonáns pályákon (tehát ahol az  $n/n_j$  arány jó közelítéssel kis egész számok hányadosaként fejezhető ki) a Jupiter perturbációi erősebbek, az ilyen pályákon keringő kisbolygók pályaeccentricitása nagyobb értékeket érhet el, mint a szomszédos, nem rezonáns pályákon (ez az elképzelés a megfigyelésekkel is összhangban van). Minél lapultabb a rezonáns pálya, annál több szomszédos pályát metszhet, a rezonáns kisbolygókra tehát megnő az ütközés valószínűsége. Ha ez az ütközés bekövetkezik, utána nagyobb valószínűséggel nem rezonáns pályák alakulnak ki, a rezonáns pályák tehát fokozatosan elnéptelenednek.

Az ütközési hipotézis szempontjából tehát lényeges az excentricitás változásainak vizsgálata. Elsősorban azt kell megvizsgálni, hogy rezonancia esetén kis excentricitású pályákból kialakulhatnak-e nagy excentricitású pályák a perturbációk hatására?

Ilyen vizsgálatokat Giffen [11], valamint Scholl és Froeschlé [12,13] végeztek a metszéspületi módszer alkalmazásával. A vizsgált modell a síkbeli elliptikus korlátozott háromtestprobléma volt, amelyet a Nap-Jupiter-kisbolygó rendszerre alkalmazva feltételezték, hogy egy kisbolygó napkörüli mozgását csak a Jupiter befolyásolja, a Jupiter a Nap körül ellipszispályán kering, s a kisbolygó mindig a Jupiter pályasíkjában van. A mozgásegyenleteket a Schubart-módszer [14] alkalmazásával egy rezonanciaperiódusra (néhányszor tíz év) átlagolták. A rövidperiódusu változásoktól így módon "megszabadított" átlagolt problémára létezik egy

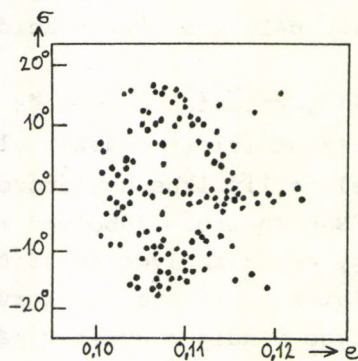
$$\bar{H}(a, e, \sigma, \omega) = h$$

integrál, ahol  $h$  konstans,  $a$  a kisbolygó pályájának fél nagytengelye,  $e$  az excentricitása,  $\sigma$  a rezonanciaváltozó (ez meg-

adja a kisbolygó és a Jupiter együttállásának szögkoordinátáját),  $\omega$  a perihélium argumentuma.

Adott  $h$ -ra az egyik változó, pl.  $\omega$  kifejezhető a másik hárommal, s így a lehetséges megoldások a négydimenziós konfigurációs tér egy háromdimenziós alterére korlátozódnak. Metszésfelületnek pl. az  $a = \text{konst.}$  síkot választva vizsgálhatók a konfigurációs tér trajektóriáinak ezen síkkal való metszéspontjai (melyek az átlagolt mozgásegyenletekből numerikus integrálással meghatározhatók). Ezzel a módszerrel sok esetben sikerült is kimutatni, hogy a kezdeti kis excentricitás megnövekedhet.

A vizsgálatok egyik érdekes eredménye a Giffen-féle ergodikus pálya (2.1 ábra). Ennél a metszésfelületen a metszéspontok rendszertelenül követik egymást, a kisbolygópálya fejlődése tehát kaotikus jellegű. Érdekes azonban, hogy sem az  $a$ , sem az  $e$  értéke nem tér el lényegesen a kezdeti értékektől, a Giffen-féle pálya tehát ebben az értelemben bizonyos stabilitást mutat. Mivel a metszéspontokat csak mintegy 60000 éves periódus-



Kezdőértékek:

- $a_0 = 3,254$
- $e_0 = 0,14$
- $\sigma_0 = 0^\circ$
- $\omega_0 = 0^\circ$
- $h = 2,382939$

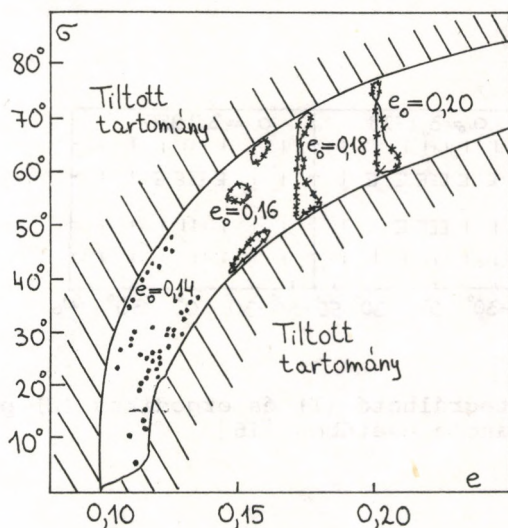
2.1 ábra. A Giffen-féle ergodikus pálya [11] az  $a = a_{\text{max}}$  metszésfelületen

ra számították, felvetődött annak gondolata, hátha hosszabb idő alatt mégis csak jelentkezik valami nagyobb változás az  $e$ -ben. Scholl és Giffen [15] ezért 200000 évre integrálták a



Giffen-féle pályát, de excentricitásnövekedést nem tapasztaltak, a metszéspontok továbbra is a 2.1 ábrán jelzett tartományba estek.

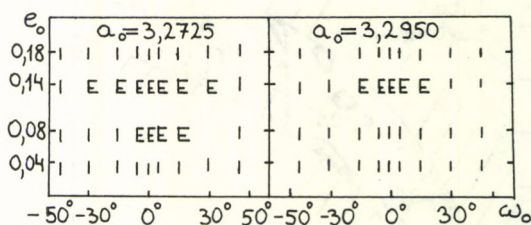
A jelenség magyarázatát Froeschlé és Scholl [16] adta meg. A  $\bar{H}(a, e, \sigma, \omega) = h$  összefüggésből adott  $h$ -ra rögzített a mellett az  $(e, \sigma)$  síkon meghatározták azt a tartományt, ahol megoldás nem lehetséges (2.2 ábra). Így kiderült, hogy az ergodikus zónát részben tiltott tartomány, másfelől pedig invariáns görbék határolják. Az ergodikus pálya tehát nem tud "kifejlődni" ebből a tartományból.



2.2 ábra. A Giffen-féle ergodikus pálya határai [16]

Scholl és Froeschlé azt is vizsgálták, hogy a Kirkwood-zónákban a pályák integrálható vagy ergodikus jellegűek-e? Számításukat a metszéspületi módszerrel, a mozgásegyenletek kb. 10000 évre történő integrálásával végezték. Sok partikuláris pályát követtek nyomon, ezek majd mindegyike integrálhatónak mutatkozott (abban az értelemben, hogy ezekre invariáns görbék adódtak). Az  $5/2$ ,  $7/3$  rezonanciákra egyetlen ergodikus

pályát sem találtak.  $2/1$ -nél  $\omega_0 = 90^\circ$ -ra és  $\omega_0 = 180^\circ$ -ra az összes vizsgált pálya integrálhatónak bizonyult. Csak  $\omega_0 = 0^\circ$ -ra a zóna határán jelentkezik ergodikus viselkedés. A 2.3 ábrán különböző kezdőfeltételekből számított pályák jellege látható. Eszerint a legtöbb pálya integrálható, s ergodikus viselkedés csak ritkán fordul elő, sőt a fél nagytengely növekedésével ez utóbbi meg is szűnik. A  $3/1$ -es rezonanciára hasonló eredmények adódtak, a különbség csak annyi, hogy  $\omega_0 = 90^\circ$ -nál jelentkezik ergodikus viselkedés. (Érdeemes megemlíteni, hogy ezekben a vizsgálatokban az ergodikus kifejezést nem a fogalom szigorú matematikai értelmében használják, hanem csak annak jelzésére, hogy a pályák fejlődése kaotikus jellegű.)



2.3 ábra. Integrálható (I) és ergodikus (E) pályák a  $2/1$ -es rezonancia esetében [16]

### 3. A LJAPUNOV-FÉLE KARAKTERISZTIKUS SZÁMOK

Egy pálya sztochasztikusságának kvantitatív mértéke a Ljapunov-exponensekkel adható meg [17], melyeket az égi mechanikai irodalomban Ljapunov-féle karakterisztikus számoknak (Ljapunov Characteristic Number, rövidítve LCN) szokás nevezni. Ezek azt a tapasztalatot fejezik ki egzakt formában, hogy a fázistér két egymáshoz közeli pontjából kiinduló trajektóriák eltérése az idővel lineárisan növekszik, ha a két kezdőpont integrálható tartományba esik, míg az eltérés exponenciális lesz, ha a kezdőpontok a fázistér egy sztochasztikus tartományában találhatók.

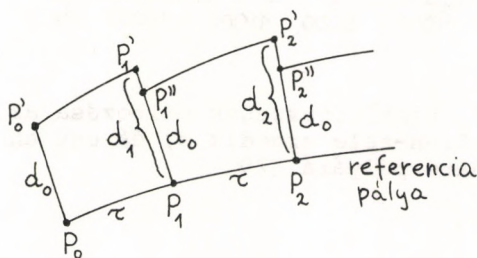


Az LCN-ek elmélete szerint egy  $n$  szabadsági fokú Hamilton-rendszerben minden pályára  $2n$  számú LCN létezik, és ezek  $\pm \bar{\lambda}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) alakúak. Ha a fázistér valamely tartományában  $p$  számú integrál létezik,  $2p$  számú LCN értéke nulla lesz. Az LCN-ek kiszámítására Benettin és Galgini [18] adtak meg egy eljárást. A legnagyobb LCN ettől függetlenül is kiszámítható az alábbi módszerrel [19].

A fázistérben tekintsünk két egymáshoz közeli  $P_0$ , illetve  $P'_0$  pontot (3.1 ábra), ezek távolsága legyen  $d_0$ . Az egyenleteket integrálva  $\tau$  idő elteltével a  $P_1$ , illetve  $P'_1$  pontba jutunk, ezek távolsága  $d_1$ . A  $P_1 P'_1$  szakaszra  $P_1$ -ből mérjük fel a kezdeti  $d_0$  távolságot, ekkor a  $P''_1$  pontot kapjuk. Folytassuk az integrálást a  $P_1, P''_1$  pontokból. Az eljárás ismétlésével adódó  $d_i$  távolságokkal képezzük a

$$\gamma_n(P_0, d_0, \tau) = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_i}{d_0}$$

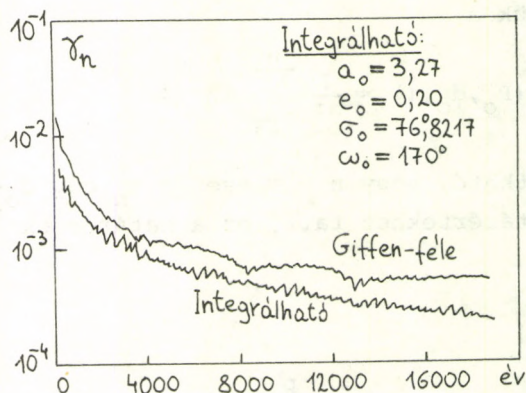
kifejezést. Kimutatható, hogy  $n \rightarrow \infty$  esetén  $\gamma_n$  egy  $d_0$ -tól és  $\tau$ -tól független határértékhez tart, ez a határérték  $\bar{\lambda}_1(P_0)$ , a legnagyobb LCN.



3.1 ábra. A legnagyobb LCN kiszámítása

Froeschlé és Scholl [20] az LCN-ek felhasználásával vizsgálták a Giffen-féle ergodikus pálya sztochasztikusságát. Mivel a Schubart-módszerrel [14] átlagolt síkbeli elliptikus korlátozott háromtestprobléma 2 szabadsági fokú Hamilton-rendszer,

azért az LCN-ek száma 4. Ezek közül azonban kettőnek az értéke 0, mert létezik egy  $\bar{H} = h$  integrál. A megmaradó kettő  $\pm \bar{\lambda}_1$ , ahol  $+\bar{\lambda}_1$  a legnagyobb LCN. A 3.2 ábrán a  $\gamma_n$  részletösszegek láthatók az  $n$  integrációs lépésnek megfelelő időtartam függvényében a Giffen-féle ergodikus pályára, és egy ahhoz közeli, de integrálható pályára. Meglepő, hogy  $\gamma_n$  lefutása kb. 8000 évig mindkét pályára igen hasonló ( $\tau = 9,5$  év), és csak ezután válik szét a két eset. Az integrálható pályára  $\gamma_n$  tovább csökken 0 felé, míg a Giffen-féle pálya esetében  $\gamma_n$  egy kicsi pozitív határértékhez tart. Az igen kicsi LCN érték arra utal, hogy a Giffen-féle pálya csak kevéssé sztochasztikus.



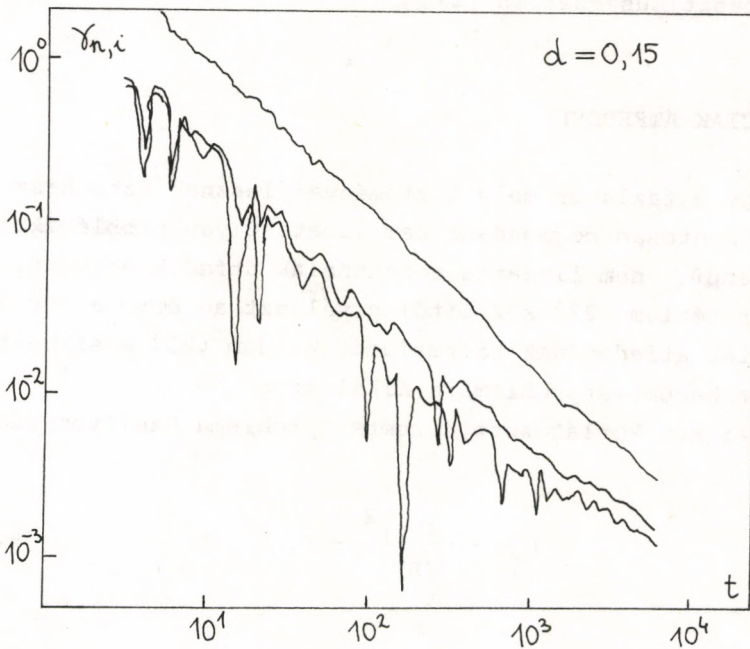
3.2 ábra. A  $\gamma_n$  részletösszegek változása az idő függvényében a Giffen-féle ergodikus, és egy ahhoz közel eső integrálható pályára [20]

Gonczai és Froeschlé [21] a térbeli kör korlátozott háromtestprobléma egy egyparaméteres görbeseregének sztochasztikuságát vizsgálta az LCN-ek alkalmazásával. A két véges (és a vizsgált problémában egyenlő) tömegű test  $M_1$  és  $M_2$ , a harmadik, elhanyagolható tömegű  $M_3$ . A görbesereg paramétere az  $M_2$  és  $M_3$  közti  $d$  távolság. (Távolságegység az  $M_1$ ,  $M_2$  közti távolság, így  $0 < d \leq 0,5$ .) Ha  $d$  kicsi,  $M_3$  messze van  $M_1$ -től, annak hatása nem jelentős, így a mozgás várhatóan integrálható. Ha  $d$  nagy,

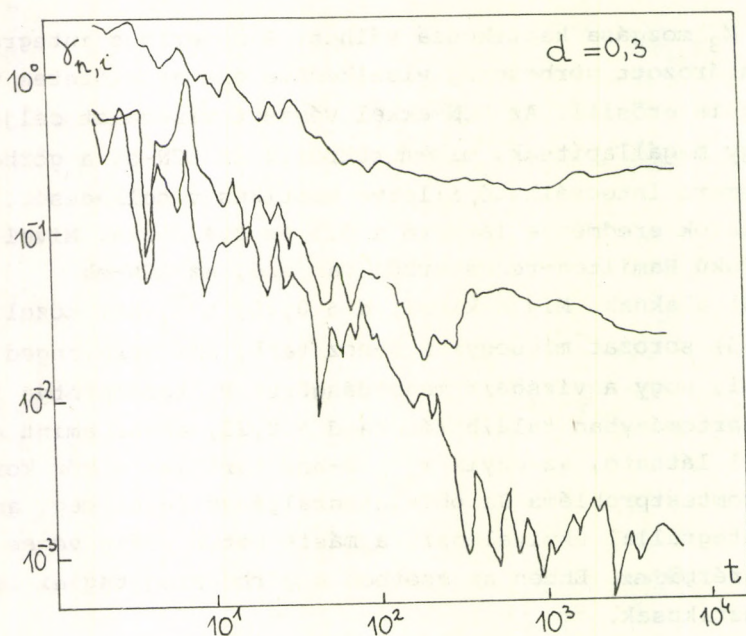


$M_1$  hatására  $M_3$  mozgása kaotikussá válhat. A numerikus integrálással meghatározott görbesereg viselkedése ezt az előzetes várakozást meg is erősíti. Az LCN-ekkel végzett vizsgálat célja az volt, hogy megállapítsák, miként tükrözik az LCN-ek a görbesereg már ismert integrálható, illetve kaotikus viselkedését.

A vizsgálatok eredménye látható a 3.3 és 3.4 ábrán. Mivel 3 szabadsági fokú Hamilton-rendszerről van szó, az LCN-ek  $\pm \bar{\lambda}_i$  ( $i=1,2,3$ ) alakúak. Míg  $d$  kicsi,  $d \leq 0,25$ , a  $\bar{\lambda}_i$ -ket közelítő  $\gamma_{n,i}$  ( $i=1,2,3$ ) sorozat mindegyike 0-hoz tart, ami arra enged következtetni, hogy a vizsgált megoldásgörbe  $P_0$  kezdőpontja integrálható tartományban található. Ha  $d > 0,25$ , akkor amint az a 3.4 ábráról látható, az egyik  $\gamma_{n,i}$  0-hoz tart (ez a kör korlátozott háromtestprobléma Jacobi-integráljának felel meg, ami az energiaintegrállal ekvivalens), a másik kettő pedig véges pozitív határértékhez. Ebben az esetben a görbesereg tagjai tehát sztochasztikusak.



3.3 ábra. A  $\gamma_{n,i}$  ( $i=1,2,3$ ) időbeli változása egy integrálható esetben [21]



3.4 ábra. A  $\gamma_{n,i}$  ( $i=1,2,3$ ) időbeli változása egy sztochasztikus esetben [21]

#### 4. REZONANCIÁK ÁTFEDÉSE

Azt, hogy a fázistér mely tartományai lesznek sztochasztikusak, előre pontosan megmondani nem lehet. Olyan problémákban, ahol zérórendű, nem lineáris rezonanciák átfedik egymást, a Chirikov-kritérium [22] közelítőleg választ ad erre a kérdésre. A rezonanciák átfedésének kritériumát Wisdom [23] a síkbeli kör korlátozott háromtestproblémára alkalmazta.

A síkbeli kör korlátozott háromtestprobléma Hamilton-függvénye

$$H = - \frac{(1-\mu)^2}{2L^2} - R, \quad (4.1)$$

ahol



$$R = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} K_{i,j}(L,G) \cos[i\ell + j(t-g)],$$

t az idő, L, G,  $\ell$ , g a Delaunay-féle változók, a  $K_{i,j}$ -k pedig ismert együtthatók. A pályaelemekkel kifejezve

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(1-\mu)a}, & \ell &= \text{középanomália}, \\ G &= \sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)}, & g &= \text{pericentrum argumentuma} \end{aligned} \quad (4.2)$$

és a a fél nagytengely, e az excentricitás. (A g paraméter megadja a pericentrum irányát a pályasíkban, az  $\ell$  pedig a mozgó testnek a pericentrumtól való közepes szögtávolságát.) Az egy-  
ségek választása olyan, hogy  $1-\mu$  és  $\mu$  a két fő tömeg (pl. a Nap és a Jupiter), ezek egységnyi távolságra vannak, továbbá a gravitációs állandó is 1. Az R perturbációs függvényben a t idő azért szerepel, mivel a két fő tömegpont a közös tömegközéppontjuk körül állandó szögsebességgel körpályán kering.

Az  $\ell$ , g, L, G változókra kanonikus egyenletek érvényesek:

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L}, & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \ell}, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial G}, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial g}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ezek az egyenletek alkalmasak pl. arra, hogy meghatározzuk egy kisbolygónak a Jupiter által perturbált napkörüli mozgását.

Az  $\ell$ -re és g-re vonatkozó egyenletek közelítő megoldása:

$$\ell = \omega_{\ell} t + \text{konst.}, \quad g = \omega_g t + \text{konst.},$$

ahol

$$\begin{aligned} \omega_{\ell} &\equiv \frac{\partial}{\partial L} \left[ -\frac{(1-\mu)^2}{2L^2} - \mu K_{0,0}(L,G) \right], \\ \omega_g &\equiv \frac{\partial}{\partial G} \left[ -\mu K_{0,0}(L,G) \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Behelyettesítve R-be, a cos-ok argumentumában a t idő együtt-  
hatója így  $i\omega_{\ell} + j(1-\omega_g)$  lesz.

Rezonanciáról beszélünk, ha valamely  $s, s' > 0$  relatív prím egész számokra jó közelítéssel teljesül, hogy

$$-s\omega_\ell + (s+s')(1-\omega_g) = 0. \quad (4.5)$$

A rezonancia feltétele  $\mu$  elhanyagolásával és a fél nagytengelyel kifejezve:

$$a_{s,s'} = \left(\frac{s}{s+s'}\right)^{2/3}.$$

Rezonancia esetén a (4.3) egyenletek megoldását kereshetjük úgy, hogy (4.1)-ből kiválasztjuk a konstans és rezonáns tagokat, az így adódó zéró-rendű rezonáns Hamilton-függvénnyel megoldjuk a (4.3) egyenleteket, majd a kapott megoldást perturbáljuk a maradék tagokkal.

A rezonancia vizsgálatára célszerű a Poincaré-féle rezonanciaváltozókat használni:

$$\begin{aligned} \psi &= -s\ell + (s+s')(t-g), & \Psi &= \frac{L-G}{s'}, \\ \phi &= \ell + g - t, & \Phi &= \frac{(s+s')L-sG}{s'}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

ahol  $\psi$  éppen a kritikus argumentum. A  $\psi, \phi, \Psi, \Phi$  változókra kanonikus egyenletek érvényesek, amelyekben a Hamilton-függvény:

$$H' = -\frac{(1-\mu)^2}{2(\Phi-s\Psi)^2} + (s+s')\Psi - \Phi - R$$

és  $R$ -et az új változókkal kell kifejezni.

Az új rezonanciafeltétel:

$$\omega_\psi \equiv \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[ -\frac{(1-\mu)^2}{2(\Phi-s\Psi)^2} + (s+s')\Psi - \mu K_{0,0} \right] = 0. \quad (4.7)$$

A zérórendű rezonáns Hamilton-függvény:

$$H_{s,s'}^{(0)} = -\frac{(1-\mu)^2}{2(\Phi-s\Psi)^2} + (s+s')\Psi - \Phi - \mu \sum_{k=0}^{\infty} K_k \cos k\psi, \quad (4.8)$$

ahol

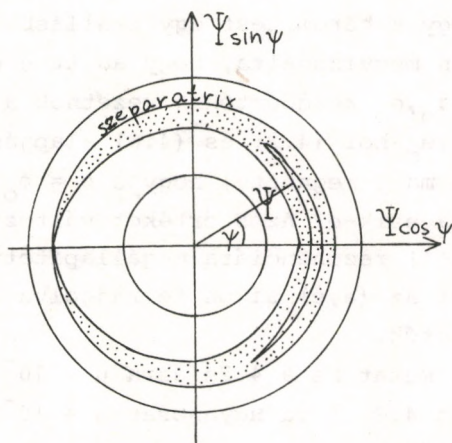
$$K_k \equiv K_{ks, -k(s+s')}.$$



Mivel  $H_{s,s}^{(0)}$ , nem függ explicit az időtől, továbbá  $\phi$  ciklikus, és így  $\phi$  konstans, azért a problémára két integrál létezik, és így az egyenletek integrálhatók. A megoldás jellege azonban az egyenletek tényleges megoldása nélkül is megállapítható a  $H_{s,s}^{(0)}$  függvénynek a  $\phi = \text{konstans}$  síkokkal való metszetei alapján.

Mivel a feladat túl sok paramétert tartalmaz, célszerű egyszerűsítő feltevésekkel élni. Ilyen az, hogy a  $\mu < 1$  és  $e$  kicsi ( $e \leq \text{kb. } 0,15$ ), azaz a két fő tömegpont relatív pályáján belüli kis lapultságú ellipszispályát vizsgálunk. Kimutatható, hogy  $K_k \approx e^{ks'}$ , és mivel a  $\mu < 1$  esetén  $s' \geq 1$ , a legfontosabbak az  $s' = 1$ -re adódó rezonanciák. A következőkben csak ezeket vizsgáljuk.

Adott  $\mu$ -hoz és  $s$ -hez (4.7)-ből meghatározható a pontos rezonanciának megfelelő  $\Psi = \Psi_R$  érték. (4.8) jobb oldali első tagját a  $\Psi = \Psi_R$  helyen Taylor-sorba fejtve, és a másodiknál nagyobb hatványokat elhanyagolva, továbbá a  $K_k(\phi, \Psi)$  együtthatókat a rezonanciatartományban  $K_k(\phi, \Psi_R)$ -el helyettesítve és a  $k > 2$  tagokat elhagyva jó közelítéssel egyszerűen meghatározhatók  $H_{s,1}^{(0)}$ -nak a  $\phi = \text{konst.}$  síkokkal való metszetei. Egy tipikus metszetet a 4.1 ábra mutat be.



4.1 ábra. A  $H_{s,1}^{(0)}$  függvény kontúrvonalai a  $\phi = \text{konst.}$  síkon

A 4.1 ábráról leolvasható a  $\psi$  rezonanciaváltozó két fő viselkedési módja. Ha egy kontúrvonal körbezárja az origót,  $\psi$  cirkulál. Ha egy kontúrvonal nem fogja közre az origót,  $\psi$  oszcillál, vagy másképpen librál. A rezonanciára a libráció a jellemző. A libráló és a cirkuláló tartományt a szeparatrix választja el egymástól.

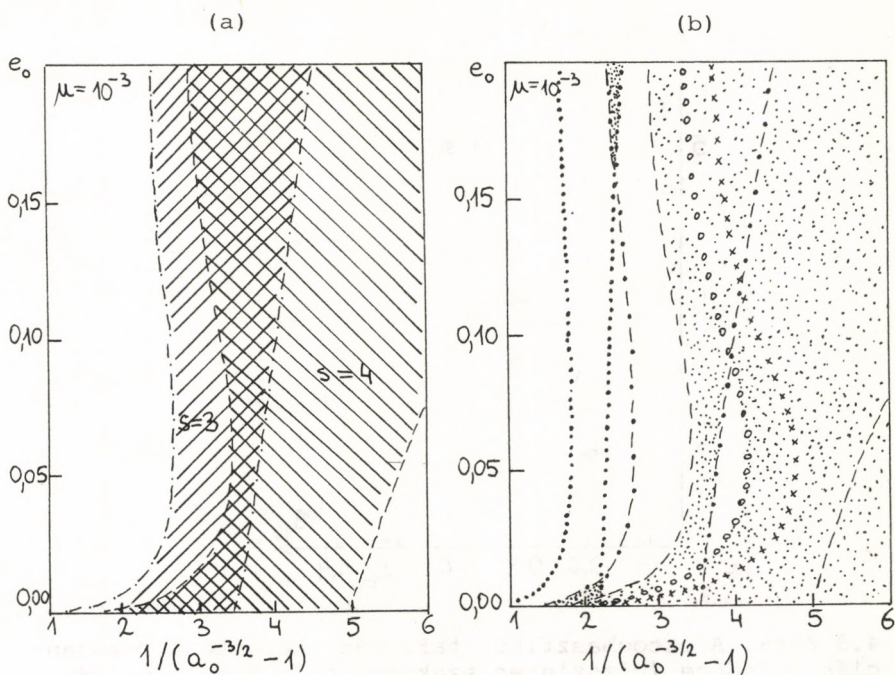
Mivel az  $\omega_\ell$ ,  $\omega_g$  frekvenciák (4.4) szerint az L és G függvényei, a (4.5) rezonanciafeltétel L-től és G-től függően több  $s, s'$  párra teljesülhet. Ennek megfelelően mivel a (4.7) feltétel különböző  $s$ -ekre más  $\Psi_R$ -eket ad, egy adott  $\Phi = \text{konst.}$  síkon több olyan tartomány is létezik, ahol a  $\psi$  változó librál. Különösen nehéz problémát jelent, ha a megoldást olyan tartományban akarjuk vizsgálni, ahol két vagy több rezonancia közel esik egymáshoz, vagy átfedik egymást. Az egyszerre két rezonancia hatása alatt álló mozgás (pl. Trójai kisbolygók) az égi mechanika kiemelkedően nehéz, jelenleg is megoldatlan problémája [24].

Mikor mondjuk azt, hogy két rezonancia közel esik egymáshoz? A rezonanciák átfedésének kritériuma [22] szerint akkor, ha a két szeparatrix metszi egymást. Wisdom [23] a rezonanciák átfedését a következőképpen határozta meg. A  $H_{s,1}^{(0)}$  függvény a  $\mu$ ,  $s$  paramétereiktől, és végső soron az  $a$ ,  $e$ ,  $\ell$ ,  $g$  változóktól függ. Az  $\ell$  és  $g$  kezdőértékét önkényesen nullának választotta (ez annak felel meg, hogy a három test együttállásban, azaz egy egyenesen van). Ezután megvizsgálta, hogy adott  $\mu$  és  $s$  mellett az  $(a, e)$  síkon mely  $a_0, e_0$  kezdőértékek vezetnek a  $\psi$  változó librációjára. Ehhez  $a_0, e_0$ -ból (4.2) és (4.6) alapján kiszámította  $\Phi_0$  és  $\Psi_0$  értékét, majd megnézte, hogy a  $\Phi = \Phi_0$  síkon  $\Psi_0$  a librációs tartományba esik-e? Az  $s$  értékét változtatva így módon minden egyes  $s/(s+1)$  rezonanciára megállapította a rezonancia-tartományt. Ezeket az  $(a, e)$  síkon felrajzolva az átfedések közvetlenül szemlélhetők.

Ilyen átfedést mutat be a 4.2a ábra  $\mu = 10^{-3}$ -ra két rezonancia esetére, míg a 4.2b ábra ugyancsak  $\mu = 10^{-3}$ -ra a teljes átfedési képet mutatja.

Wisdom  $\mu = 10^{-4}$ -re és  $10^{-5}$ -re is meghatározta az átfedéseket, majd az eredményeket ellenőrzésnek vetette alá. Az előzetes várakozás az, hogy a fázistér azon tartományai, ahol rezo-

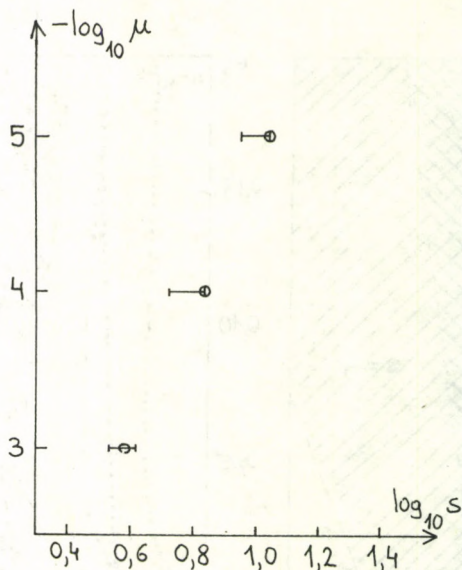




4.2 ábra. (a) Két rezonanciartomány átfedése [23]. Az  $1/(a_0^{-3/2}-1)$  kifejezés  $s$ -sel egyenlő, mikor  $a_0 = a_{s,1}$ . (b) Rezonanciartományok átfedése (sátozott területek) [23]

nanciák átfedik egymást, sztochasztikusak lesznek. Ezért egymáshoz közeli pályák divergenciáját vizsgálta mind az integrálható (nincs átfedés), mind a sztochasztikus (átfedés van) tartományban. Rögzített  $e_0$  mellett (0,05, illetve 0,10) az  $a_0$  értékét változtatva haladt az átfedetlen tartománytól az átfedett felé. A 4.3 ábra mutatja, mennyire helyesen jelzi az átfedési kritérium a sztochasztikusság kezdetét. A vízszintes szakaszok bal oldali végpontja jelzi azt a helyet, ahol rezonanciák átfedése először megjelenik, a jobb oldali pedig azt, ahonnan már csak átfedés van. A körök azt a helyet jelzik, ahol a fázistér szomszédos pontjaiból kiinduló pályák hirtelen exponenciálisan távolodni kezdenek egymástól.

A rezonanciák átfedésének vizsgálata a Kirkwood-féle zónák problémájának tisztázásában is hasznos lehet. Ehhez azonban az itt ismertetett számításokat egy, a valóságnak jobban megfelelő



4.3 ábra. A sztochasztikus tartomány kezdete a rezonanciák átfedése (vízszintes szakasz) és a közeli pályák divergenciája (kör) alapján [23]

modellre, pl. a térbeli elliptikus korlátozott háromtestproblémára kellene kiterjeszteni. Ez a feladat lényegesen nehezebb a síkbeli kör korlátozott háromtestproblémára bemutatott vizsgálatoknál, megoldásától azonban érdekes, új eredmények várhatók.

#### IRODALOM

1. H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Tome 3 (Gauthier Villars, Paris 1899)
2. M. Hénon, C. Heilès, *Astronomical Journal*, 69, 73, 1964.
3. M. Hénon, in: *The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar Systems*, IAU Symposium No 25, p. 157. (Academic Press, London, 1966)
4. G. Bozis, *Astron. J.*, 71, 404, 1966.
5. W.H. Jefferys, *Astron. J.*, 71, 306, 1966.
6. C. Froeschlé, *Astronomy and Astrophysics*, 4, 115, 1970.
7. J. Hadjidemetriou, *Celestial Mechanics*, 12, 255, 1975.
8. D. Kirkwood, *Meteoric Astronomy*, Ch. 13, 1867.
9. Érdi B., in *Csillagászati évkönyv 1982*. (Gondolat, Budapest 1981)



10. W.H. Jefferys, *Astron. J.*, 72, 872, 1967.
11. R. Giffen, *Astron. and Astrophys.*, 23, 387, 1973.
12. H. Scholl, C. Froeschlé, *Astron. and Astrophys.*, 33, 455, 1974.
13. H. Scholl, C. Froeschlé, *Astron. and Astrophys.*, 42, 457, 1975.
14. J. Schubart, *Astron. J.*, 73, 99, 1968.
15. H. Scholl, R. Giffen, in: *The Stability of the Solar System and of Small Stellar Systems*, IAU Symposium No 62, p. 77 (D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland, 1974)
16. C. Froeschlé, H. Scholl, *Astron. and Astrophys.*, 48, 389, 1976.
17. V.I. Oseledets, *Tr. Moszk. Mat. Obscs.*, 19, 179, 1968.
18. G. Benettin, L. Galgani, in: *Proceedings of the Cargese Meeting* (Les Editons de Physique, Orsay, 1979)
19. G. Benettin, L. Galgini, J.M. Strelcyn, *Phys. Rev.* A14, 2338, 1976.
20. C. Froeschlé, H. Scholl, *Astron. and Astrophys.* 93, 62, 1981.
21. R. Gonczi, R. Froeschlé, *Celestial Mechanics*, 25, 271, 1981.
22. B.V. Chirikov, *Phys. Rep.*, 52, 263, 1979.
23. J. Wisdom, *Astron. J.*, 85, 1122, 1980.
24. B. Garfinkel, *Astron. J.*, 82, 368, 1977.





Krámli András

1. A problémakör áttekintése	351
2. A Hamilton-formalizmus. Hamilton-rendszerek stabilitásának általános vizsgálata	352
3. Analitikus rendszerek, a kis nevezők problémája	356
4. Integrálható rendszerek, a Kolmogorov-Arnold-tétel	359
5. A korlátozott 3-test probléma, Arnold tétele	363
6. Egy "osztásmentes" gyökkereső algoritmus	369
Irodalom	372





## 1. A PROBLÉMAKÖR ÁTTEKINTÉSE

Az égi mechanika volt a newtoni fizikának az az ága, amelyik legkorábban gyakorolt jelentős hatást a matematika fejlődésére. A csillagászati adatok igen pontosan mérhetőek, ezért a Naprendszer mozgásával kapcsolatos gyakorlati feladatok /hatékony numerikus eljárás kidolgozása a bolygók helyzetének hosszútávú előrejelzésére/ és elméleti problémák /örökké együttmarad-e a Naprendszer, ha a Napra és a bolygókra külső erő nem hat és közöttük a tömegvonzás az egyetlen kölcsönhatás?/ gazdag matematikai apparátus kidolgozására ösztönözték a matematikusokat. Ezeknek a kutatásoknak az eredménye a Hamilton-formalizmus, a differenciálegyenletek stabilitásának elmélete, az algebrai topológia, ergodelmélet és sok más ma is tovább fejlődő matematikai diszciplína.

Az alapproblémára a Kolmogorov-Arnold-Moser-elmélet (1954-1963) adja meg a választ. A jelen előadás célja ismertetni és példákkal illusztrálni azokat a matematikai nehézségeket, amelyek a Naprendszer stabilitása kérdésének egzakt matematikai megoldása során felléptek, és megmutatni e nehézségek leküzdésének módszereit.

A feladat tömören megfogalmazva a következő: ha a bolygók tömege 0 lenne, akkor a Naprendszer mozgását a Kepler-törvények pontosan leírnák; alkalmasan választott koordinátarendszerben az  $n$  bolygó  $\omega_1, \dots, \omega_n$  frekvenciájú, egymástól független periodikus mozgást végezne. Az ilyen mozgást kváziperiodikus mozgásnak nevezzük; az  $\omega_1, \dots, \omega_n$  frekvenciák a rendszer kezdeti állapotától függenek. Kérdés, hogy a rendszer mozgásának kváziperiodikus jellege megőrződik-e, ha a rendszert kissé megzavarjuk /perturbáljuk/; ilyen perturbáció lehet a bolygók véges tömegének, az ismeretlen kisbolygók hatásának és a relativitáselméletből adódó korrekciónak a figyelembevételével. A válasz "agnosztikus": a kváziperiodikus jelleg megmarad, sőt az  $\omega_1, \dots, \omega_n$  periódusok értéke is változatlan lesz a kezdeti értékeknek egy zárt, sehol sem sűrű /Cantor-típusú/ halmazán. Bár a fázistéren alkalmasan megadott valószínűségi mérték szerint a "megmaradó" kezdeti értékek valószínűsége annál közelebb

van 1-hez, minél kisebb perturbációt engedünk meg, véges pontosságú méréssel nem tudjuk eldönteni, hogy a Naprendszer egy adott időpontbeli állapota "megmaradó" kezdeti érték-e? A bizonyítás pontosabb analizise azonban garantálja egy  $b$  állandó létezését és a Naprendszer

$$e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^b}$$

ideig tartó együttmaradását, ha a perturbáció mértéke  $\varepsilon$ .

Mint látni fogjuk, az alapvető nehézséget az ún. rezonancia lehetősége okozza, azaz a frekvenciák arányának egész számok arányával való jó közelíthetősége. A korlátozott 3-test problémán illusztráljuk azt az esetet, amikor csak véges sok kivételes arányt kell kizárnunk.

Végül felidézzük a Hamilton-típusú rendszerekre érvényes Liouville-tételt:

*A (2.1) differenciálegyenlet trajektóriái a  $2n$ -dimenziós fázistérnek olyan leképezéscsoportját definiálják, amely megőrzi a  $dx dy$  Lebesgue-mértéket.*

## 2. A HAMILTON-FORMALIZMUS. HAMILTON-RENDSZEREK STABILITÁSÁNAK ÁLTALÁNOS VIZSGÁLATA

A matematikusoknak az a törekvése, hogy a newtoni mechanika egyenleteit általános extrémum feladatokból származtassák, vezetett el a Hamilton-féle differenciálegyenletek felírásához, és a velük összefüggő változótranszformációk elméletének kidolgozásához. Egy  $n$  szabadsági foku rendszer mozgását a  $2n$ -dimenziós fázistérben az

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k} \equiv H_{y_k}, \quad y_k = \frac{\partial H}{\partial x_k} \equiv -H_{x_k} \quad (k=1, \dots, n) \quad (2.1)$$

egyenletrendszer írja le, ahol  $x_k$ -k ill.  $y_k$ -k az általánosított hely, ill. impulzus koordináták,  $H(\cdot)$  egy  $2n$ -változós valós függvény /Hamilton-függvény/. Az általunk vizsgált esetekben a (2.1) egyenletet alkalmasan választott koordináta-transz-



formációval áttekinthetőbb alakra hozzuk. Az egyszerűség kedvéért az  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  változókat  $(z_1, \dots, z_{2n})$ -nel, a keresett  $(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_k)$  új változókat pedig  $(\zeta_1, \dots, \zeta_{2n})$ -nel jelöljük. A differenciálkalkulus elemi módszereivel meggyőződhetünk arról, hogy a  $(\zeta_1, \dots, \zeta_{2n})$  változóknál a (2.1) egyenlet akkor és csak akkor lesz Hamilton-típusú  $(\dot{\xi}_k = \hat{H}_{\eta_k}, \dot{\eta}_k = -\hat{H}_{\xi_k})$  ha az  $\mathcal{M} = \left\{ \frac{\partial z_k}{\partial \zeta_j} \right\}$  függvénymátrix szimplektikus, azaz kielégíti a

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \mathcal{M} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

egyenletet (I az  $n \times n$ -es egységmátrix).

Könnyen látható, hogy ha  $z = w(\zeta)$ , akkor  $\hat{H}(\zeta) = H(w(\zeta))$ . Az ilyen koordináta-transzformációkat kanonikus transzformációknak nevezzük; vegyük észre, hogy a kanonikusság feltétele független a Hamilton-függvény alakjától. A kanonikus transzformációk ún. generátorfüggvényekkel is megadhatók, azaz bizonyos regularitási feltételek mellett minden kanonikus transzformációhoz létezik egy olyan  $S(x, \eta)$   $2n$ -változós függvény, hogy  $S_{x_k} = y_k$ ,  $S_{\eta_k} = \xi_k$ . Az  $S(x, \eta)$  generátorfüggvény kielégíti a  $H(x, S_x) = \hat{H}(S_\eta, \eta)$  Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenletet.

Konkrét feladatok megoldásakor a  $\hat{H}(\xi, \eta)$  függvényről felteszik, hogy egyszerűbb alakú, mint az eredeti  $H(x, y)$ , pl. csak az  $\eta$  változóktól függ (1.4. fejezet). A generátorfüggvény létezése a (2.2) feltételből következik; a (2.2) feltétel analóg a Cauchy-Riemann-differenciálegyenletekkel, amelyek biztosítják, hogy a síknak valamely önmagába való leképezése megadható komplex analitikus függvényvel (1.3. fejezet).

Az "Erlangeni Program" szellemében megállapíthatjuk, hogy a klasszikus pontmechanika feladata a kanonikus transzformációk csoportjával szembeni invariánsok vizsgálata.

Térjünk át a (2.1) rendszer stabilitásának kérdésére. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z_j} \right|_{z_j=0} = 0,$$

azaz a  $z(t) \equiv 0$  kielégíti a (2.1) egyenletet. A továbbiakban mindig a  $z(t) \equiv 0$  egyensúlyi helyzet stabilitásáról lesz szó. Ljapunov definíciója szerint a  $z(t) \equiv 0$  megoldást akkor nevezzük stabilisnak ill. aszimptotikusan stabilisnak, ha a  $2n$ -dimenziós fázistérben vannak a  $0$ -nak olyan  $U_\delta$  és  $U'_\delta$  környezetei, hogy  $z(0) \in U_\delta$ -ből következik a  $z(t) \in U'_\delta$  minden  $t > 0$ -ra ill. a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$  reláció. Ljapunov általános tételéből következik, hogy a  $z(t) \equiv 0$  megoldás csak akkor lehet aszimptotikusan stabilis, ha az

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial z_j \partial z_k}$$

mátrix sajátértékeinek valós része negatív. A (2.1) egyenlet speciális alakjából következik, hogy ha  $a$  sajátértéke  $\alpha$ -nak, akkor a  $-a$ ,  $\bar{a}$ ,  $-\bar{a}$  számok is sajátértékei, azaz a (2.1) rendszer nem lehet aszimptotikusan stabilis. Ez a tény nem meglepő, hiszen a Hamilton-rendszerek konzervatívak, és az aszimptotikus stabilitás disszipatív rendszerekben fordul elő. Ljapunov tétele szerint a (2.1) rendszer legfeljebb stabilis lehet, és ennek szükséges feltétele az, hogy a sajátértékek imaginárius számok legyenek. Ez még nem elegendő feltétele a stabilitásnak - tehát esetünkben az egyenlet lineáris közelítése alapján nem tudjuk eldönteni, hogy a  $z(t) \equiv 0$  egyensúlyi helyzet stabilis-e.

Jelölje  $\pm a_1, \dots, \pm a_n$  a  $2n$  sajátértéket. Lineáris algebrai módszerekkel bebizonyítható [1. Moser [2]], hogy létezik olyan lineáris kanonikus transzformáció, hogy a  $H(z)$  Taylor-sorfejtésében a másodfoku tagok

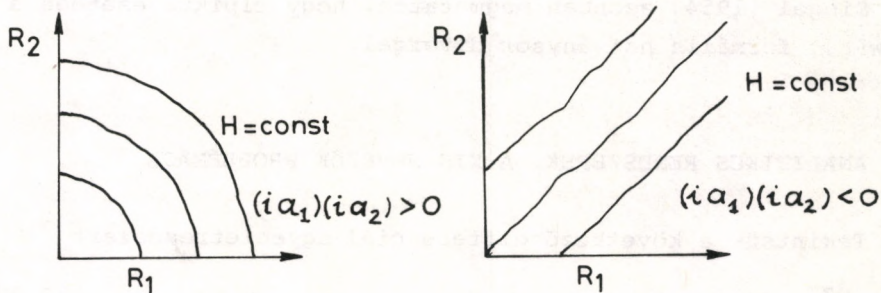
$$\sum_{k=1}^n \frac{ia_k}{2} (x_k^2 + y_k^2) \quad (2.3)$$

alakuak, azaz a linearizált rendszer  $n$  független harmonikus oszcillátor egyenlete. A linearizált rendszer természetesen mindig stabilis. Ha a (2.3) kifejezésben az  $ia_k$  együtthatók



azonos előjelűek, akkor az eredeti rendszer is stabilis, ugyanis a  $H(z)$  függvény nivófelületei a 0 pont elegendően kicsiny környezetében kompakt halmazok, és a  $H(z)$  a (2.1) egyenletrendszer integrálja, azaz  $z(t)$  mindig a  $H(z)$  egy adott nivófelületén marad. Ha az  $ia_k$  együtthatók különböző előjelűek, a stabilitás kérdése nem dönthető el a  $H(z)$  függvény Taylor-sorának másodfoku része alapján. Az  $n=2$  esetet illusztrálja a 2.1 ábra:

$$R_k = x_k^2 + y_k^2, \quad k=1,2$$



2.1 ábra. A Hamilton-függvény nivófelületei

A stabilitás kérdését "elméletileg" megoldaná Birkhoff következő tétele, ha a benne szereplő formális hatványsorok konvergálnának:

Ha  $H(z)$  egy formális, konstans és lineáris tagokat nem tartalmazó, valós hatványsor, melynek másodfoku tagjai (2.3) alakúak, és az  $a_k$ -k racionálisan független imaginárius számok, akkor létezik egy olyan formális valós hatványsorral megadott  $z = w(\zeta)$  kanonikus transzformáció, hogy a  $H(w(\zeta))$  függvény az  $R_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2, \dots, R_n = \xi_n^2 + \eta_n^2$  változók  $P(R_1, \dots, R_n)$  hatványsora. /A bizonyítást lásd Moser, Siegel [3]/.

Jelöljük  $\Gamma_k$ -val a  $\Gamma(\cdot)$   $R_k$  szerinti parciális deriváltját, akkor  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_k} = 2\xi_k \Gamma_k, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_k} = 2\eta_k \Gamma_k,$

azaz a transzformált rendszer

$$\dot{\xi}_k = 2\eta_k \Gamma_k, \quad \dot{\eta}_k = 2\xi_k \Gamma_k \quad (2.4)$$

alaku. Ebből az következik, hogy  $R_k = 0$ , és minthogy  $\Gamma_k$  csak az  $R_1, \dots, R_n$  változók függvénye,  $\frac{d}{dt} \Gamma_k = 0$ , azaz a  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  függvények integrálok. Ezért a (2.4) rendszer integrálható:

$$\xi_k + i\eta_k = e^{-2it\Gamma_k} (\xi_k(0) + i\eta_k(0)), \quad (2.5)$$

ahol a  $2\Gamma_k$  frekvenciák függenek az  $R_j(0)$  ( $j=1, \dots, n$ ) amplitudóktól. A (2.5) formulából leolvasható, hogy a rendszer stabilis.

Siegel (1954) azonban megmutatta, hogy tipikus esetben a  $z=w(\zeta)$  formális hatványsor divergál.

### 3. ANALITIKUS RENDSZEREK, A KIS NEVEZŐK PROBLÉMÁJA

Tekintsük a következő differenciál-egyenletrendszert

$$\frac{dz}{dt} = f(z) = A z + \dots, \quad (3.1)$$

ahol  $z = (z_1, \dots, z_n)$  egy komplex vektor,  $f(z)$  szintén komplex vektor, melynek komponensei holomorfak a  $z = 0$  környezetében, végül  $A$  egy  $n \times n$ -es komplex mátrix - az  $f(z)$  első deriváltjainak mátrixa a  $z = 0$  helyen. Ebben a fejezetben is a  $z(t) = 0$  egyensúlyi helyzet stabilitását vizsgáljuk. Azért választottuk tanulmányunk tárgyául ezt a feladatot, mert itt könnyebben rá tudunk mutatni azokra a nehézségekre, amelyek a Hamilton-típusú rendszereknél fellépnek. Ennek az az oka, hogy a megengedett  $z=u(\zeta)$  koordináta transzformációk csoportja - a lokálisan invertálható holomorf függvények csoportja - egyszerűbb, mint a kanonikus transzformáció csoport.

Ljapunov tételéből most is következik, hogy kétirányu ( $t \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty$ ) stabilitás csak akkor állhat fenn, ha az  $A$  mátrix sajátértékei imaginárius számok. A Carathéodory-Cartan (1932) tétel értelmében:



A  $z(t) = 0$  megoldás akkor és csak akkor stabilis ( $t \rightarrow \pm\infty$ ), ha A sajátértékei imaginárius számok, és létezik olyan

$$z = u(\zeta) = \zeta + \dots \quad (3.2)$$

holomorf leképezés, amely a (3.1) egyenletet

$$\dot{\zeta} = A \zeta \quad (3.3)$$

alakra transzformálja.

A feltétel elegendősége nyilvánvaló: a stabilitás koordináta-transzformációval szemben invariáns tulajdonság. A szükségesség viszont megkérdőjelezhető. Hogyan ellenőrizhető a fenti feltétel?

Kiséréljük meg fölírni a  $z = u(\zeta)$  függvény hatványsorát, keressük  $u(\zeta) = \zeta + \sum_{|j|>2} u_j \zeta^j$  alakban, ahol ( $j = j_1, \dots, j_n$ )

nemnegatív egész vektor és  $\zeta^j = \prod_{k=1}^n \zeta_k^{j_k}$ . Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy  $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ . Ha  $u_\zeta$ -val jelöljük a

$\left\{ \frac{\partial u^k}{\partial \zeta^j} \right\}$  mátrixot ( $j, k = 1, \dots, n$ ), akkor (3.1), (3.2) és (3.3) összefüggésekből  $u_\zeta \cdot A \zeta = f(u(\zeta))$  egyenletet nyerjük. Ebből az egyenletből az  $u_j$  együtthatókra rekurzív formulák vezethetők le:  $((a, j)I - A)u_j$  kifejezhető az  $f$  függvény Taylor-sorának együtthatóival és az  $|l| < |j|$  indexű  $u_l$  együtthatókkal. A rekurzív egyenletek megoldhatóságának formális feltétele, hogy az  $((a, j)I - A)$  mátrixok ne legyenek szingulárisak, azaz minden nemnegatív  $j$  vektorra és  $k=1, \dots, n$ -re teljesüljön az  $(a, j) \neq a_k$  feltétel.

Egy példával illusztráljuk, hogy a fenti feltétel megsértése valóban instabilitáshoz vezet:

Legyen  $n=2$ ;  $p>1$ ,  $q>0$  természetes számok és teljesüljön az

$$a_1 p + a_2 q = a_1 \quad (3.4)$$

feltétel. Ekkor a

$$\dot{z}_1 = (a_1 + z_1^{p-1} z_2^q) z_1, \quad \dot{z}_2 = a_2 z_2 \quad (3.5)$$

egyenletrendszernek vannak olyan megoldásai, amelyek kielégítik

a  $z_1^{p-1} z_2^q = (\text{const} - (p-1)t)^{-1}$  feltételt. /A (3.4) összefüggés és (3.5) egyenlet alapján igazolható, hogy  $z_1^{p-1} z_2^q = - (p-1)z_1^{p-1} z_2^q$  . / Alkalmasan választott konstans esetében a fenti feltétel ellentmond a  $z(t) = 0$  megoldás stabilitásának.

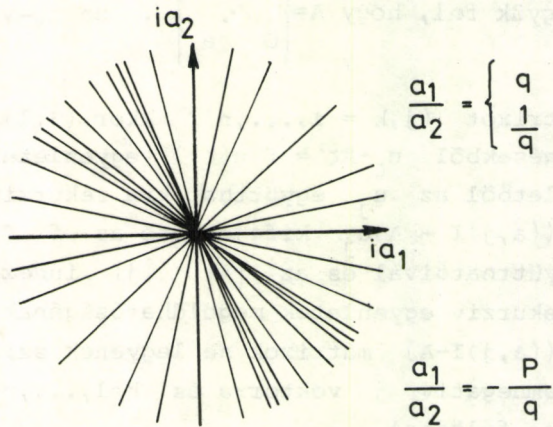
Siegel (1952) bebizonyította a következőt:

Az  $u(\zeta) = \zeta + \dots$  hatványsor konvergenciájának elegendő feltétele, hogy létezzenek olyan pozitív  $c, s$  konstansok, amelyek minden nemnegatív egész  $j$  ( $|j| \geq 2$ ) vektorra kielégítik a

$$|(j, a) - a_k| \geq c|j|^{-\tau} \quad (3.6)$$

egyenlőtlenséget.

Könnyen látható, hogy pl.  $n=2$ -re azok az  $a_1, a_2$  /imaginárius/ "frekvenciák", amelyekre a (3.6) egyenlőtlenség-rendszer valamelyike nem teljesül, olyan nyílt halmazt alkotnak, amely mindenütt sűrű az  $a_1 \cdot a_2 > 0$  ténnyedekben /3.1 ábra/.



3.1 ábra. Frekvenciák, amelyekre a rekurzió nem működik

Ha  $\tau$  elegendően nagy és  $c$  elegendően kicsi, akkor a kivételes pontok halmazának Lebesgue-mértéke /egy tetszőleges korlátos halmazban, pl. az egységkörben/ tetszőlegesen kicsi lehet, ugyanakkor a "jó pontok" halmaza, egy zárt, sehol sem sűrű /Cantor-típusú/ halmaz lesz.

Az analitikus differenciálegyenlet vizsgálatakor arra a meglepő eredményre jutottunk, hogy a stabilitást akkor tudjuk ga-



rantálni, ha bizonyos irracionális számok nem közelíthetők "túl-ságosan jól" kis nevezőjű racionális számokkal. A  $(j,a)-a_k$  típusu mennyiségeket - mivel a rekurzív egyenletek megoldásakor osztóként szerepelnek - nevezik kis nevezőknek. Történetileg Siegel fenti tétele az első példa arra, hogy konvergencia bizonyítható a "kis nevezők jelenlétében".

#### 4. INTEGRÁLHATÓ RENDSZEREK, A KOLMOGOROV-ARNOLD-TÉTEL

A (2.1) Hamilton-típusú egyenletet akkor nevezzük integrálhatóknak, ha létezik olyan  $z = w(\xi, \eta)$  kanonikus transzformáció, hogy  $H(w(\xi, \eta))$  csak  $\eta$ -től függ és  $w(\xi, \eta)$   $2\pi$ -re periodikus a  $\xi_1, \dots, \xi_n$  változóiban.

Igy a transzformált rendszer a

$$\dot{\xi}_k = H_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = 0 \quad (4.1)$$

alakot ölti.

Legyenek  $c_1, \dots, c_n$  tetszőleges konstansok, az

$$\eta_1 = c_1, \dots, \eta_n = c_n \quad (4.2)$$

egyenletek a  $2n$ -dimenziós fázistérben egy  $n$ -dimenziós tóruszt jelölnék ki /a  $\xi_k$  változókat  $\text{mod}(2\pi)$  kell tekinteni/. A (4.1) egyenletnek a (4.2) alakú tóruszok invariáns halmazai. Ha  $\eta_k$  jelöli  $H_{\eta_k}$  értékét a  $c_1, \dots, c_k$  helyen, akkor a (4.1) egyenlet megoldásai a  $\xi_k(t) = \omega_k + \text{mod}(2\pi)$  alakúak az  $n$ -dimenziós invariáns tóruszon; az ilyen megoldásokat kváziperiodikusoknak nevezzük, mert  $n$  független  $\omega_1, \dots, \omega_n$  frekvenciájú periodikus mozgást irnak le.

Egy Hamilton-típusú egyenletrendszer elméletileg egy olyan kanonikus transzformációval hozható integrálható alakra, amelyek  $S(x, \eta)$  generátorfüggvénye kielégíti a

$$H(x, S_x) = \hat{H}(\eta) \quad (4.3)$$

Hamilton-Jacobi-egyenletet / 2. fejezet / valamilyen csak  $\eta$ -től függő  $\hat{H}$  Hamilton-függvényvel.

A  $\xi$  ill.  $\eta$  változókat szokás szög- ill. hatásváltozóknak

is nevezni. A két legismertebb integrálható rendszer /n független harmonikus oszcillátor; idealizált Naprendszer/ esetében a szög- és hatásváltozók könnyen megadhatók, mert ismerjük az egyenletek megoldását.

A szögváltozókat úgy kell megválasztani, hogy a mozgás kvázi-periódikus legyen, a hatásváltozókat pedig úgy, hogy a periódusok a Hamilton-függvény megfelelő parciális deriváltjai legyenek. Mindkét esetben elegendő 1 szabadsági foku rendszer esetén megadni a szög- és hatásváltozókat, mert mindkét n szabadsági foku rendszer n független 1 szabadsági foku rendszerből áll.

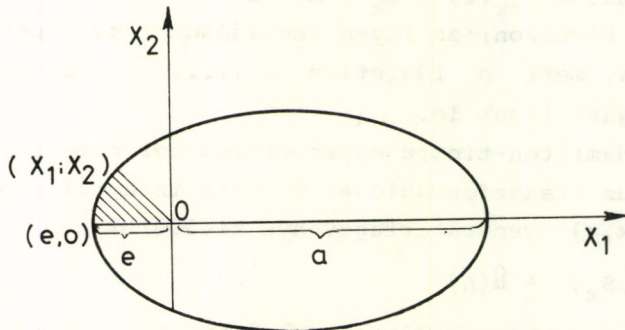
a/ Harmonikus oszcillátor:

$H = \frac{a}{2}(x^2 + y^2)$ , a kívánt kanonikus transzformáció az  $x+iy = \sqrt{2\eta} e^{i\xi}$  összefüggésből vezethető le. Vegyük észre, hogy az  $a$  periódus független  $\eta$ -tól.

b/ Kepler-probléma /Nap és egy elhanyagolhatóan kis tömegű bolygó/:

$$H = y_1^2 + y_2^2 + \frac{\text{const}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} .$$

A Kepler-törvényekből (ill. a megmaradási tételekből) tudjuk, hogy ez a rendszer is gyakorlatilag 1 szabadsági foku, és  $\xi$  szögváltozóként a  $\{(-e,0), (0,0), (x_1, x_2)\}$  "ellipsziscikk" területét kell választani /4.1. ábra/, azzal a normálási feltétellel, hogy a teljes ellipszis területe  $2\pi$  (2. Kepler-törvény).



4.1 ábra. A Kepler-féle terület törvény



Míg  $\eta$  hatásváltozóként  $\sqrt{a}$ -t kell választanunk, ahol  $a$  a fél nagytengely, mert

$$H = \frac{\text{const}}{a} = \frac{\text{const}}{\eta^2}, \quad H_{\zeta} = \text{const } a^{-\frac{3}{2}}.$$

(3. Kepler-törvény). Itt a periódus valóban függ az  $\eta$  értéktől. (A fenti formulákban szereplő konstansok nem egyenlők egymással!)

Ismeretes, hogy a (4.3) egyenlet lokálisan mindig megoldható, azaz lokálisan minden rendszer integrálható. A globális integrálhatóság csak integrálható rendszerek perturbációi esetén vizsgálható: a kérdés az, hogy kis perturbáció esetén milyen feltételek biztosítják egyes invariáns tóruszok megmaradását. Erre a kérdésre ad választ a Kolmogorov-Arnold-tétel:

Legyen a  $H(x, y, \mu)$  egy integrálható rendszer  $H_0(y)$  Hamilton-függvény perturbációinak egy egyparaméteres serege - feltesszük, hogy  $x$ , ill.  $y$  a perturbálatlan rendszer szög-, ill. hatásváltozó, és  $H(x, y, \mu)$  valamennyi  $(2n+1)$  változójában valós, analitikus, az  $x$  változóiban  $2\pi$ -re periodikus függvény:

$$H(x, y, \mu) = H_0(y) + H_1(x, y) + \dots$$

Mint láttuk, adott  $c_1, \dots, c_k$  konstansokra az  $y_1=c_1, \dots, y_n=c_n$  tórusz a perturbálatlan rendszer invariáns halmaza, melyen a mozgás kváziperiodikus

$$\omega_1 = \left. \frac{\partial H(y)}{\partial y_1} \right|_{y_1=c_1, \dots}, \quad \omega_n = \left. \frac{\partial H(y)}{\partial y_n} \right|_{y_n=c_n} \quad \text{frekvenciákkal.}$$

Tegyük fel, hogy a  $c_1, \dots, c_n$  konstansokat úgy választottuk meg, hogy a

$$\left| \sum_{k=1}^n j_k \omega_k \right| > \gamma |j|^{-\tau} \quad (4.4)$$

egyenlőtlenség teljesüljön minden  $j, 0$ -tól különböző egész vektorra és valamilyen pozitív  $\gamma$  és  $\tau$  számokra.

A 3. fejezetben láttuk, hogy a (4.4) egyenlőtlenségnek eleget tevő  $\omega$  vektorok egy Cantor-típusu halmazt alkotnak - és ha az  $\omega_k$  frekvenciák folytonosan függnak az  $y_k$  hatásváltozóktól /pl. az idealizált Naprendszer esetében ez így van/, akkor a (4.4) egyenlőtlenség a hatásváltozók terében is egy Cantor-

tipusu halmazt jelöl ki.

Ha ezen kívül a  $c_1, \dots, c_n$  helyen a

$$\frac{\partial^2 H_0(y)}{\partial y_j \partial y_k} \quad \text{mátrix nem szinguláris, akkor elegendően kicsi}$$

$\mu$ -re létezik egy invariáns tórusz, melynek paraméteres egyenlete

$$\begin{aligned} x &= \theta + u(\theta, \mu), \\ y &= c + v(\theta, \mu), \end{aligned} \quad (4.5)$$

és amelyen a mozgásegyenlet

$$\dot{\theta}_k = \omega_k$$

alaku. A (4.5) egyenletben szereplő  $u(\theta, \mu), v(\theta, \mu)$  függvények  $n+1$  változós valós, analitikus, és a  $\theta_k$  változóiban  $2\pi$ -re periódikus függvények.

A tétel bizonyításának alap gondolatát Kolmogorov 1954-ben ismertette, a részletes bizonyítást Arnold 1963-ban publikálta. Ebben az előadásban e tétel diszkrét analogonja /"twist-lemma"/ bizonyításának alapjául szolgáló gyorsan konvergáló gyökkereső eljárást ismertetjük.

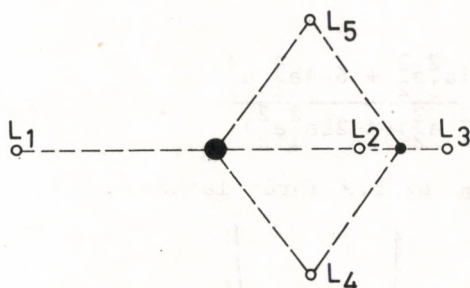
Megjegyezzük még, hogy a (4.4) egyenlőtlenség lényeges megszorítás; Arnold bebizonyította, hogy 3-nál nagyobb szabadsági foku rendszerekben az invariáns tóruszok nem maradnak meg a hatásváltozók minden kezdeti értékére /Arnold-diffúzió/. A hatásváltozók eltávolodása a kezdeti értéktől azonban igen lassu; Nyehorosev /1. Moser, [2] / megmutatta, hogy léteznek olyan  $a > 0$  és  $b > 0$ , csak a  $H_0(y)$ -től függő konstansok, hogy  $|y(0) - y(t)| < \mu^a$ , ha  $t < e^{(\frac{1}{\mu})^b}$ .

Azaz, ha a perturbáció mértéke kicsi, akkor a kezdeti állapottól függetlenül hosszú ideig keveset változik a rendszer.



## 5. A KORLÁTOZOTT 3-TEST PROBLÉMA, ARNOLD TÉTELE

Mint ismeretes, az ugynevezett  $n$ -test problémának  $/n$  tömegpont mozog egymás gravitációs terében/  $n \geq 3$  esetén általában nincs explicit megoldása. Bruns  $/1887/$  bebizonyította, hogy a mozgásegyenleteknek nincs az ismert 10 integráltól független algebrai integrálja. Az előző fejezetben ismertetett Kolmogorov-Arnold-tétel abban az esetben alkalmazható, ha az egyik pont tömege lényegesen nagyobb, mint az összes többié együttvéve. A "globális integrálhatóság", azaz invariáns tóruszok létezése ekkor is csak a kezdeti értékeknek egy Cantor-típusú halmazára garantálható. Ezért nem érdektelen annak a speciális esetnek a vizsgálata, amikor 3 tömegpont közül az egyik tömege gyakorlatilag 0. Ez a korlátozott 3-test probléma. Már Lagrange megmutatta, hogy tetszőleges tömegek esetén a 3-test problémának 5 olyan megoldása van, amely egy alkalmasan választott egyenletesen forgó síkbeli koordinátarendszerben "állni látszik". Ebből 3 megoldás olyan, hogy a 3 tömegpont egy egyenesbe esik, a 4. és 5. megoldásban a 3 tömegpont egy szabályos háromszöget alkot  $/ 5.1$  ábra/.



5.1 ábra. A Lagrange-féle egyensúlyi helyzetek

Az ábrán látható 5 egyensúlyi helyzet ( $L_1$ - $L_5$ ) természetesen a korlátozott 3-test probléma esetében is fennáll. Ismeretes, hogy az  $L_1, L_2$  és  $L_3$  egyensúlyi helyzetek instabilisak. Tegyük fel, hogy a két nem zérus tömeg aránya  $\mu$  és  $0 < \mu(1-\mu) < \frac{1}{27}$ , azaz  $0 < \mu < \mu_1$ . Az  $L_4$  és  $L_5$  egyensúlyi helyzetek környezetében - alkalmasan megválasztott koordináta-

rendszerben a síkbeli /2 szabadsági fokú/ probléma Hamilton-függvénye

$$H = \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{2} R_k + \sum_{j,k=1}^2 \frac{b_{j,k}}{4} R_j R_k + O_5 \quad (5.1)$$

alakra hozható /v.ö. 2.fejezet Birkhoff tétele/, ahol  $R_k = x_k^2 + y_k^2$ , és  $O_5$  jelenti a legalább ötödfokú tagokat. Az  $a_1$  és  $a_2$  frekvenciák az  $a^4 - a^2 + (\frac{27}{4}) \mu(1-\mu) = 0$  egyenlet megoldásai és  $a_1 a_2 < 0$ , tehát a stabilitás kérdése a másodfokú tagok alapján nem dönthető el /2.1 ábra /.

Arnold alábbi tétele viszont alkalmazható:

$$\text{Ha } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{p}{q}, \quad p, q = 1, 2, 3, 4,$$

és

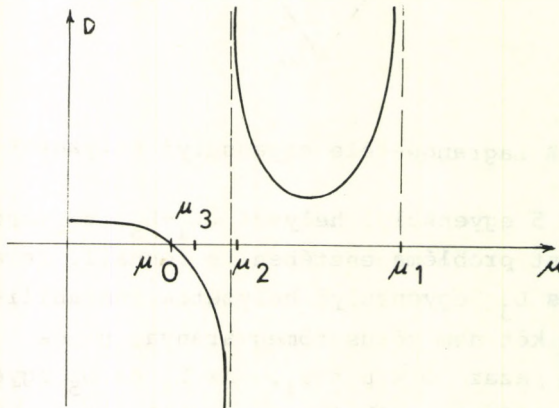
$$D = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & a_1 \\ b_{12} & b_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{akkor az } x = 0, y = 0$$

stabilis egyensúlyi helyzet.

A Deprit házaspár 1966-ban a  $D$  determinánsra a következő összefüggést találta:

$$D = -\frac{1}{8} \frac{36 - 541a_1^2 a_2^2 + 644a_1^4 a_2^4}{(1 - 4a_1^2 a_2^2)(4 - 25a_1^2 a_2^2)}$$

A  $D(\mu)$  függvény alakja az 5.2 ábrán látható.



5.2 ábra. A determináns értéke  $\mu$  függvényében



A  $(0, \mu_1)$  intervallumban a  $D$  determináns csak a  $\mu_0$  érték-nél lesz egyenlő 0-val, a  $\mu_2$  és  $\mu_3$  értéket azért kell kizárni, mert

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{p}{q}, \quad |p|, |q| \leq 4.$$

A tétel bizonyítása a Kolmogorov-Arnold-tétel 2-dimenziós diszkrét analogonján, a Mosertől származó twist-lemmán /1962/ alapszik.

Legyen  $M_0$  az  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  körgyűrű önmagára való olyan leképezése, amelynek a koncentrikus körök invariáns halmazai. Póldr. koordinátákban:

$$\begin{aligned} (R, \theta) &\xrightarrow{M_0} (R_1, \theta_1), \\ R_1 &= R, & 1 \leq R \leq 2, \\ \theta_1 &= \theta + \gamma(R), & 0 < \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy  $\frac{d\gamma(R)}{dR} \neq 0, \quad 1 \leq R \leq 2.$

Legyen az  $M_\epsilon$  az  $M_0$  leképezésének egy, az alábbi formulákkal adott perturbációserege:

$$\begin{aligned} R_1 &= R + \epsilon f(R, \theta, \epsilon), \\ \theta_1 &= \theta + \gamma(R) + \epsilon g(R, \theta, \epsilon). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Az  $f$  és  $g$  függvények  $\theta$ -ban  $2\pi$ -re periódikusak és mindhárom változójukban valós analitikusak. Ha minden  $\epsilon$ -ra az  $M_\epsilon$  leképezés mértéktartó, akkor tetszőleges olyan  $\omega$ -ra

$$(\gamma(1) < \omega < \gamma(2)), \quad \text{amelyre az } \left| \frac{\omega}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq c|q|^{-\tau}$$

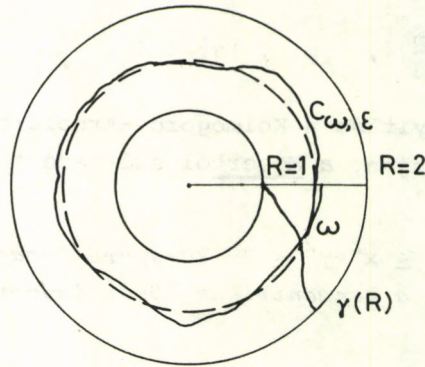
feltételrendszer teljesül - rögzített  $c > 0, \tau > 0$ -ra és minden  $\frac{p}{q}$  racionális számra - és elegendően kicsi  $\epsilon$ -ra, az  $M_\epsilon$  leképezésnek létezik egy  $C_{\omega, \epsilon}$  zárt invariáns görbéje. Ez a görbe az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adható meg:

$$R = F(\varphi, \epsilon), \quad \theta = \varphi + G(\varphi, \epsilon),$$

ahol  $F$  és  $G$  a  $\varphi$ -nek  $2\pi$ -re periódikus függvényei. Az  $M_\epsilon$  megszorítása a  $C_{\omega, \epsilon}$  görbére:

$$\varphi \xrightarrow{M_\epsilon} \varphi + \omega.$$

Ez utóbbi megjegyzésből látszik, hogy  $C_{\omega, \epsilon}$  az  $R = \gamma^{-1}(\omega)$  kör kis perturbációjának tekinthető / 5.3 ábra/.



5.3 ábra. A twist-leképezés

A továbbiakban - feltételezve, hogy a twist-lemma igaz - ismertetjük az Arnold-tétel bizonyításának gondolatmenetét. Az (5.1) Hamilton-függvényben végrehajtva az  $x, y \rightarrow \epsilon^{-1}x, \epsilon^{-1}y$  változó transzformációt, az alábbi  $F$  Hamilton-függvényt kapjuk:

$$F = \epsilon^{-2}H(\epsilon x, \epsilon y) = \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{2} R^k + \epsilon^2 \sum_{j,k=1}^2 \frac{b_{j,k}}{4} R_j R_k + O(\epsilon^3). \quad (5.3)$$

Polárkoordinátákban a mozgásegyenlet a

$$\begin{aligned} \dot{R}_k &= O(\epsilon^3), \\ \dot{\theta}_k &= -a_k + \epsilon^2 \sum_{j=1}^2 b_{kj} R_j + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (5.4)$$

alakban írható fel. A továbbiakban vizsgálatainkat az  $F = c$ ,  $|c| < \frac{|a_1|}{2}$  energiafelületre korlátozzuk. Ezen a felületen

$$R_2 = \Phi(R_1, \theta_1, \theta_2) = -\frac{a_1}{a_2} \left( R_1 - \frac{2c}{a_1} \right) + O(\epsilon^2). \quad (5.5)$$

Tekintsük  $\theta_2$ -t független változónak, akkor az  $R_2, \theta_2$  mennyiségek az  $F = c$  felületen egy nemautonom Hamilton-típusú egyenletnek tesznek eleget; (5.4) és (5.5) összefüggésekből adódik, hogy

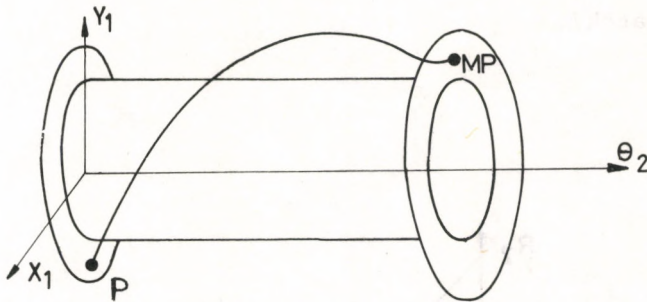


$$\frac{dR_1}{d\theta_2} = \Phi_{\theta_1} \quad , \quad \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = -\Phi_{R_1} \quad . \quad (5.6)$$

Minthogy az (5.6) rendszer megoldásai által létesített leképezés is megőrzi a Lebesgue-mértéket /a Liouville-tétel nemautonom Hamilton-rendszerekre is érvényes/ az

$$R_1(0), \quad \theta_1(0) \xrightarrow{M} R_1(2\pi), \quad \theta_1(2\pi)$$

leképezés is mértéktartó /5.4 ábra/. Megmutatjuk, hogy az  $M_\epsilon$  leképezésére alkalmazható a twist-lemma.



5.4 ábra. A mozgásegyenletekhez rendelt twist-leképezés

Az (5.6) egyenletrendszert  $O(\epsilon^3)$  pontossággal megoldva, az

$$\begin{aligned} R_1(2\pi) &= R(0) + O(\epsilon^3) \quad , \\ \theta_1(2\pi) &= \theta(0) + 2\pi \frac{a_1}{a_2} + \frac{4\pi c \epsilon^2}{a_2^3} (a_2 b_{12} - a_1 b_{22}) - \\ &\quad - \frac{2\pi \epsilon^2}{a_2^3} DR_1 + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

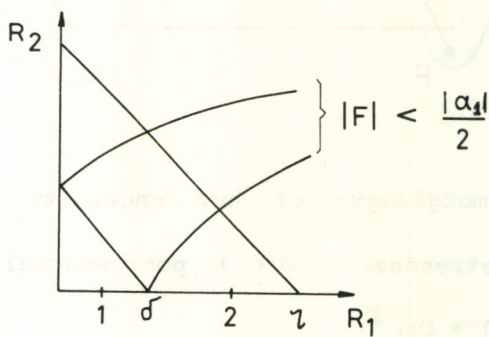
összefüggéseket nyerjük, ahol  $D$  az Arnold-tételben szereplő determináns. A  $D \neq 0$  feltétel biztosítja a twist-lemmában szereplő  $\frac{d\gamma(R)}{dR} \neq 0$  feltétel teljesülését. Ha  $\epsilon$ -t elegendő-

en kicsire választjuk, akkor az  $M_\varepsilon$  leképezésnek az  $1 \leq R_1 \leq 2$  körgyűrűben minden alkalmas  $\omega$ -ra /ami az (5.3) transzformáció miatt az  $\varepsilon^2 \leq x_1^2 + y_1^2 \leq 2\varepsilon^2$  körgyűrűnek felel meg/ van egy  $C_{\omega, \varepsilon}$  invariáns görbéje. Ez azt jelenti, hogy az  $M_\varepsilon$  leképezés a  $C_{\omega, \varepsilon}$  belsejében lévő pontokat a  $C_{\omega, \varepsilon}$  belsejébe viszi át.

Az  $R_1=0$ ,  $R_2=0$  egyensúlyi helyzet stabilitásához azt kell igazolni, hogy az adott  $\eta$ -ra van olyan  $\varepsilon$  és  $\delta$ , hogy minden  $t$ -re  $R_1(t) + R_2(t) < \eta$ , ha  $\varepsilon$  elegendően kicsi és  $R_1(0) + R_2(0) < \delta$ . Legyen  $\varepsilon$  olyan kicsi, hogy az  $R_1 + R_2 < \eta$  tartomány magába foglalja az

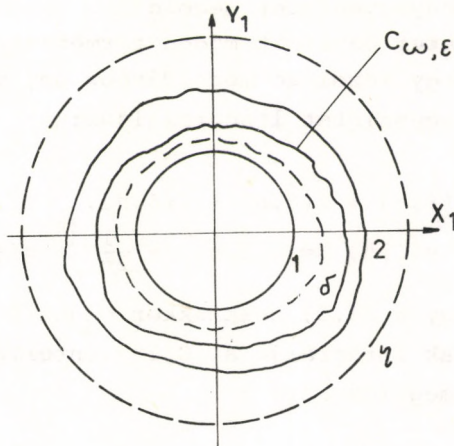
$$|F| < \frac{|\alpha_1|}{2}, \quad 1 \leq R_1 \leq 2 \quad \text{tartományt} \quad /5.5 \text{ ábra, } 5.6 \text{ ábra}; \text{ az}$$

5.6 ábrán a megfelelő tartományok a valójában 2-dimenziós  $R_1$  síkon láthatók/.



5.5 ábra. Az  $1 < R_1 < 2$  tartomány az  $(R_1, R_2)$  térben





5.6 ábra. Az  $1 < R_1 < 2$  tartomány az  $R_1$  síkban

A  $C_{\omega, \epsilon}$  invariáns görbék megakadályozzák, hogy az  $F = \text{const}$  nivófelületen lévő trajektóriának az  $R_1$  síkra való vetülete elhagyja az  $R_1 < 2$  tartományt.

Megjegyzés: A fenti gondolatmenetben lényegesen kihasználtuk, hogy az (5.6) egyenletben a  $\Phi(R, \theta_1, \theta_2)$  Hamilton-függvény a  $\theta_2$  független változó periodikus függvénye - ez a körülmény tette lehetővé a folytonos mozgás diszkrét leképezéssel történő helyettesítését.

## 6. EGY "OSZTÁSMENTES" GYÖKKERESŐ ALGORITMUS

Ebben a fejezetben ismertetjük a twist-lemma bizonyításának alapgondolatát.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az  $M_\epsilon$  leképezésében ((5.2)) szereplő  $\gamma(R) = R$ , az  $\epsilon$  szorzót pedig olvasszuk be az  $f$  és  $g$  függvényekbe. Az ideális az lenne, ha minden  $\omega$ -ra létezne invariáns görbe, azaz létezne olyan

$$\theta = \xi + u(\xi, \eta) \quad , \quad R = \eta + v(\xi, \eta) \quad (6.1)$$

képletekkel adott koordináta-transzformáció, hogy  $M(\xi, \eta) = (\xi + \eta, \eta)$ . Ehhez az szükséges, hogy az

$$\begin{aligned} u(\xi + \eta, \eta) &= u + v + f(\xi + u, \eta + v), \\ v(\xi + \eta, \eta) &= v + g(\xi + u, \eta + v) \end{aligned} \quad (6.2)$$

nemlineáris függvényegyenletet megoldjuk.

A (6.2) egyenletet explicit módon természetesen nem lehet megoldani, ezért egy közelítő megoldáshoz úgy próbálunk eljutni, hogy a (6.2) egyenletet linearizáljuk:

$$\begin{aligned} (i) \quad & u(\xi + \omega, \eta) - u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + v(\xi, \eta), \\ (ii) \quad & v(\xi + \omega, \eta) - v(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi, \eta) d\xi. \end{aligned} \quad (6.3)$$

/Vegyük észre, hogy a (6.3) csak akkor oldható meg, ha (i) és (ii) jobboldalainak integrálja a  $[0, 2\pi]$  intervallumon zérus./  
A (6.3) egyenlet megoldásához a

$$w(x + \omega) - w(x) = h(x) \quad (6.4)$$

tipusu differenciálegyenletet kell megoldanunk /először a második - (ii) - egyenletet oldjuk meg, majd az első - (i)/.

Ha  $h(x)$  Fourier-sora

$$h(x) = \sum_{k \neq 0} h_k e^{ikx},$$

akkor  $w(x)$  Fourier-sora

$$w(x) = \sum \frac{h_k}{e^{ik} - 1} e^{ikx}. \quad (6.5)$$

A twist-lemma feltételei szerint  $h(x)$   $2\pi$ -re periódikus valószínűleg, analitikus függvény, azaz  $h(x)$  analitikusan folytatható az  $\text{Im } z \leq \delta$ , komplex tartományra, ezért a Cauchy-integrálformula miatt a  $h_k$  együtthatók exponenciálisan tartanak 0-hoz:

$|h_k| < \text{const } e^{-\delta k}$ . Ugyancsak a twist-lemma feltételeiből következik, hogy az  $e^{-ik} - 1$  nevezők egyetlen  $k$ -ra sem egyenlők 0-val, sőt  $|e^{-ik\omega} - 1| = 2 \sin \left| \frac{k\omega}{2} \right| \geq 4 \text{const } |k|^{-\tau}$ , tehát a  $w_k$  együtthatók is exponenciálisan tartanak 0-hoz.

Következésképp a  $w(x)$  megoldás-függvény is analitikusan folytatható valamilyen szűkebb  $\text{Im } z \leq \delta' < \delta$  tartományra.

A bizonyítás a továbbiakban azon alapszik, hogy a (6.3) linearizált egyenletrendszer megoldva egy olyan (6.2) alakú koordinátatranszformációhoz jutunk, amely az  $\eta = \omega$  elegendően kicsi  $U_\omega$  környezetében az  $M_\epsilon$  leképezést közelebb viszi az ideális  $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi + \eta, \eta)$  alakhoz.



$$(\xi, \eta) \rightarrow (\xi + \eta + \varphi(\xi, \eta), \eta + \phi(\xi, \eta)),$$

$$|\varphi| + |\phi| < (\delta - \delta')^{-(2\tau+3)} + \sigma(U_\omega) .$$

A  $\sigma(\ )$  függvény explicit módon kifejezhető az  $U_\varepsilon$  környezet méreteivel. E becslés gondos elemzésével igazolható, hogy a fenti linearizációs eljárást szukcessziven alkalmazva az  $\omega$   $U_\omega^{(n)}$  környezetekben olyan koordináta -transzformáció sorozatot kapunk, hogy az  $M_\varepsilon$  leképezés egyre közelebb lesz a kívánt alakhoz - és határértékben egy invariáns görbéhez jutunk./Természetesen  $U_\varepsilon^{(n)}$  környezet az n-edik transzformációval nyert koordinátákban értendő./

A Kolmogorov-Arnold-tétel bizonyításának gondolatmenete hasonló, csak ott egy nemlineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer közelítő megoldásainak sorozatával jutunk el az invariáns tóruszokhoz.

Feltétlenül érdemes megjegyezni, hogy e tételek hosszadalmas és látszólag áttekinthetetlen bizonyítása egy általánosan alkalmazható gyökkereső algoritmuson alapszik, melyet Kolmogorov javasolt 1954-ben.

A konvergencia bizonyítása nélkül ismertetjük az iterációs sémát.

Tegyük fel, hogy  $f(x)$  kétszer differenciálható függvény az  $|x| < r$  intervallumban. Ha  $\sup_{|x| < r} \{r^{-1}|f(x)-x| + r|f''(x)|\}$  elegendően kicsi, akkor az  $f(x)=0$  egyenletnek van megoldása az  $|x| < r$  intervallumban.

Bebizonyítható, hogy az

$$(i) \quad x_{k+1} = x_k - a_k f(x_k) \quad , \quad (6.6)$$

$$(ii) \quad a_{k+1} = a_k + a_k(1 - f'(x_k)a_k) \quad ,$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad a_0 = 1 \quad ,$$

képletekkel adott rekurzív eljárás exponenciális sebességgel konvergál az  $f(x)$  zérushelyéhez. Ez azt jelenti, hogy ha  $f(x) = 0$  ,

$$|x_k - x_\infty| < \text{const} |x_{k-1} - x_\infty|^{\frac{3}{2}} . \quad (6.7)$$

Ismeretes, hogy a Newton-eljárás gyorsabban konvergál - a (6.7) becslés kitevőjében  $\frac{3}{2}$  helyett 2 szerepel -, de minden egyes lépésnél osztani kell az  $f'(x_k)$  deriválttal. A (6.6) eljárás nem tartalmaz osztást /kivéve a 0-ik lépést: az  $f(x)$  függvényt úgy normáltuk, hogy  $f'(0)$  közel legyen 1-hez/. Ez a körülmény különösen a többváltozós esetben lényeges, ahol az osztás helyett mátrixot kell invertálni. A konvergencia sebesség az (ii) iteráció módosításával javítható.

Végül megemlítjük, hogy Visser 1937-ben már alkalmazta a (6.6) iteráció egy speciális esetét, pozitív operátorok négyzetgyökének meghatározására /I. F. Riesz, B. Sz.-Nagy [4]/.

A Visser-eljárás egydimenziós esetben a következő:

Legyen  $0 < b < 1$ . A  $b-x^2 = 0$  egyenlet pozitív megoldását az

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_k^2 + 1 - b) \quad (6.8)$$

iteráció szolgáltatja:  $1 - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \sqrt{b}$ . A kapcsolat a (6.6) iterációval nyilvánvaló. Ha  $a_k = \frac{1}{2}$ , akkor (6.8) (6.6)(i)-ből adódik, az  $a_k = \frac{1}{2}$  választása az  $y_k = 0$ -nak (6.6)(ii)-be helyettesítésével igazolható - ez utóbbi természetesen durva közelítés.

#### IRODALOM\*

1. J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems (Princeton University Press, 1973)
2. Ju. Mozer, Lekcii o gamiltonovüh szisztyemah (MIR, Moszkva, 1973)
3. C. L. Siegel, J. Moser, Lectures on celestial mechanics (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971)
4. F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionnelle (Budapest-Szeged, 1953)

---

\*Csak az előadás szövegének elkészítéséhez ténylegesen felhasznált műveket soroljuk fel, az eredeti dolgozatok irodalmi adatait a fenti monográfiák tartalmazzák. J. Moser [2] könyvének az orosz fordítására hivatkozunk, mert ennek kiegészítése tartalmazza Nyehorosev eredményét az Arnold-diffuzióról.



A TURBULENCIA RUELLE-TAKENS-ELMÉLETE

Tóth Bálint

1. Bevezetés. Az előadás logikai váza	375
2. Hopf-tétel $\mathbb{R}^2$ -ben	376
3. Centrumsokaság-tétel (diffeomorfizmusokra)	380
4. Hopf-tétel Banach-terekben	380
5. Naïmark-bifurkáció	381
6. A bifurkációk hierarchiája	384
7. A Ruelle-Takens-konstrukció	385
8. Problémák	387
Irodalom	387

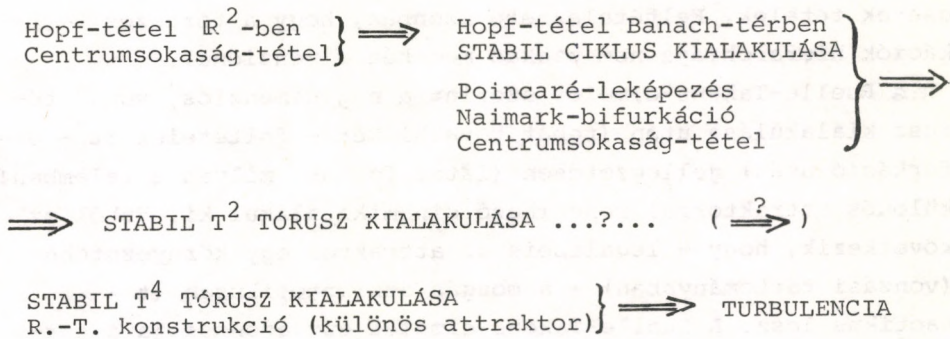




# 1. BEVEZETÉS. AZ ELŐADÁS LOGIKAI VÁZA

Előadásomban a turbulencia Ruelle-Takens-féle matematikai modelljével foglalkozom. Ez a modell a turbulenciát egy "különös attraktorról" rendelkező dinamikával azonosítja, azaz egy olyan dinamikával, amelynek trajektóriái asszimptotikusan egy bonyolult struktúrájú kompakt halmaz felé tartanak (amely nem egy kváziperiodikus trajektória lezárása!). Ez a halmaz a "különös attraktor".

Mivel a modell kifejezetten matematikai, előadásom is tételek kijelentéséből és hozzájuk fűzött megjegyzésekből, magyarázatokból áll. Az előadás logikai struktúráját, a tételek kapcsolatát az alábbi "blokk-diagramm" mutatja be:



Az eredeti ( $\mathbb{R}^2$ -ben megfogalmazott) Hopf-tétel kimondja, hogy ha adott egy kontrollparamétertől függő közönséges differenciálegyenlet-rendszer által meghatározott folyam a síkon, akkor a paraméter változásával bizonyos körülmények között a folyam egy stabil fixpontjáról egy, a paramétertől függő stabil ciklus válik le, a fixpont pedig instabil lesz.

A centrumsokaság-tétel szerint ha adva van egy Banach-térben egy folytonosan deriválható folyam, amelynek 0 fixpontja, akkor - bizonyos feltételek mellett - a fixpont egy környezetében "minden lényeges dolog" egy véges dimenziójú (a mi esetünkben  $d=2$ ) alsokaságban történik. Analóg tétel fogalmazható meg egy diffeomorfizmus által generált - diszkrét idejű - dinamikára is. (Az előadás során a diszkrét idejű tételt fogom megfogalmazni.)

A Poincaré-leképezést a legszigorúbb értelemben - periodikus ciklus környezetében transzverzális metszés útján nyert diszkrét idejű leképezés - használom. Ennek létezését és tulajdonságait tételek írják le. (Lásd pl. [1-3].)

A Naïmark-tétel állítása látszólag analóg a Hopf-tételével, diffeomorfizmus által generált diszkrét idejű dinamikára megfogalmazva. (A diffeomorfizmus stabil fixpontjáról egy invariáns, stabil zárt görbe válik le, a fixpont pedig instabil lesz.) Ezért gyakran "Hopf-tétel diffeomorfizmusokra" néven említik. Azonban - mint látni fogjuk - lényeges különbségek is vannak a két állítás tartalma között.

Látható a fenti vázlatból, hogy a szigorú levezetés egy helyen megszakad. Ennek oka, hogy - legalábbis tudomásom szerint - a kétdimenziós tóruszon túli bifurkációk leírására nincsenek tételek. Feltételezhető azonban, hogy a tóruszos bifurkációk hierarchiája nem szakad meg két dimenzióval.

A Ruelle-Takens-elmélet szerint a négydimenziós, vonzó tórusz kialakulása után (tehát további két - feltételezett - bifurkáció után) jellegzetesen (látni fogjuk, milyen értelemben!) különös attraktorral rendelkező dinamika alakul ki. Ebből az következik, hogy - legalábbis az attraktor egy környezetében (vonzási tartományában) - a mozgás aszimptotikusan ( $t \rightarrow \infty$ ) kaotikus lesz. A Ruelle-Takens-elmélet ezt azonosítja a turbulenciával.

Az elmélet egy újabb változata szerint (Newhouse-Ruelle-Takens [4]) ehhez elegendő egy vonzó háromdimenziós tórusz kialakulása (a Naïmark-bifurkáció utáni további egy bifurkáció).

A továbbiakban a felsorolt tételeknek pontos megfogalmazását és magyarázatát írom le (bizonyítás nélkül).

## 2. HOPF-TÉTEL $\mathbb{R}^2$ -BEN

Tétel. Legyen  $X_\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ahol  $\mu \in (-\delta, \delta)$  egy paramétertől függő  $C^k$  ( $k \geq 4$ ) vektormező-sereg a síkon úgy, hogy

$[\forall \mu \in (-\delta, \delta)]: X_\mu(0) = 0, X: \mathbb{R}^2 \otimes (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3, X(\xi, \mu) = (X_\mu(\xi), 0)$   
 $(\xi = (x, y))$  a paraméter dimenzióval bővített sokaságon értel-

\*  $k$ -szor folytonosan differenciálható



mezett vektormező, amelynek dinamikája\* a  $\mu = \text{const.}$  síkokat invariánsan hagyja, és ezekben a síkokban megegyezik a megfelelő  $X_\mu$  vektormező dinamikájával. Ha  $DX_\mu(0)**$  sajátértékei  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$  úgy, hogy  $[\forall \mu]: \text{Im} \lambda(\mu) \neq 0, \mu < (>) 0 \quad \text{Re} \lambda(\mu) < (>) 0,$   
 $d\text{Re} \lambda(\mu)/d\mu|_{\mu=0} \neq 0,$  akkor

a.) létezik egy olyan  $\hat{\mu}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta, \delta) \mathbb{C}^{k-2}$  függvény, amelyre  $-\{ \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \}: (x, 0, \mu(x)) \in \gamma_x,$  ahol  $\gamma_x$   $X$  dinamikájának periodikus ciklusa:

- $\gamma_x$  periódusa  $\approx 2\pi/|\lambda(0)|$ ;
- $\gamma_x$  amplitúdója ("sugara")  $\sim \sqrt{|\hat{\mu}(x)|}$ ;
- $\hat{\mu}(0) = 0$ ;

b.) létezik  $(0, 0, 0)$ -nak egy olyan  $U$  környezete, amely a fentiekén kívül más periodikus ciklust nem tartalmaz;

c.) ha  $(0, 0) X_0$  dinamikájának attraktora, akkor  $x \neq 0 \rightarrow \hat{\mu}(x) > 0$  és a ciklusok vonzóak (szuperkritikus bifurkáció);

c.) ha  $(0, 0) (-X_0)$  dinamikájának attraktora, akkor  $x \neq 0 \rightarrow \hat{\mu}(x) < 0$  és a ciklusok taszítóak (szubkritikus bifurkáció).

### Megjegyzések

1.) A fázistér kibővítése a paraméter-dimenzióval technikai okokból szükséges, mivel a tétel állítása a paraméterre vonatkozóan is lokális jellegű: az  $\mathbb{R}^2 \times (-\delta, \delta)$  sokaság origójának egy környezetét írja le.

2.) A tétel bizonyítása meglehetősen bonyolult. Lényegesen felhasznált elemek: koordináta-átalakítás, Poincaré-leképezés, implicit függvények tétele.

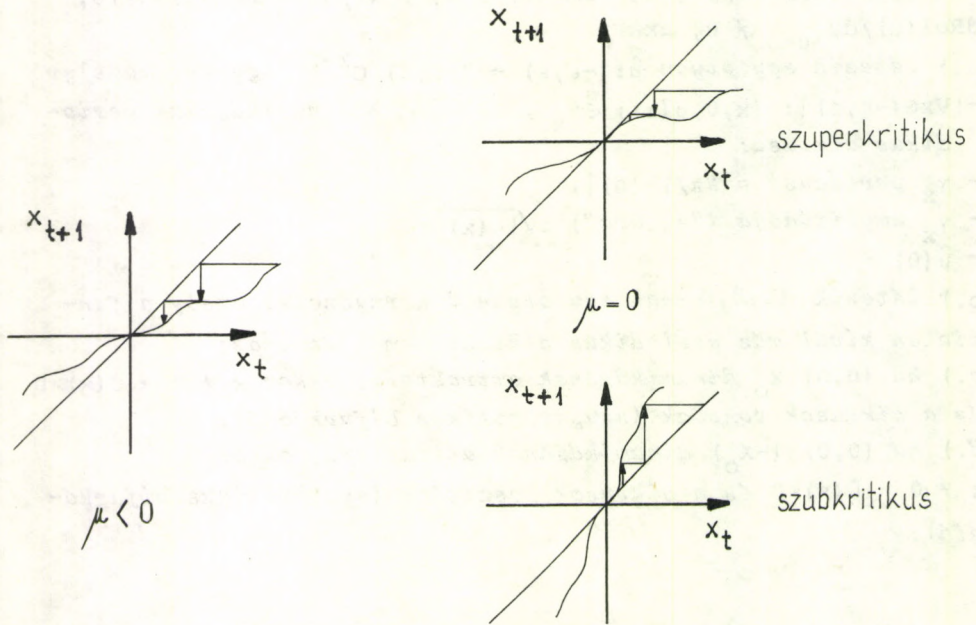
3.) A c.) pontban megfogalmazott feltétel  $X_0$  egyszeri differenciálása útján nem dönthető el, mivel  $\text{Re} \lambda(0) = 0$ . A helyzet analóg a következő egydimenziós iterációs dinamikával:

$x_{t+1} = f_\mu(x_t), [\forall \mu] f'_\mu(0) = 0$ . Ha  $\mu < 0$  akkor  $|f'_\mu(0)| < 1$ . Ha  $\mu = 0$ , akkor  $f'_0(0) = 1, f''_0(0) = 0$  és  $f'''_0(0) < 0$  (szuperkriti-

\* A továbbiakban az  $X$  vektormező dinamikáján a  $dx/dt = X(x)$  differenciálegyenlet által meghatározott dinamikát értjük.

\*\*  $DX(x)$  az  $X$  leképezés  $x$  helyen vett differenciálja (jelen esetben  $X_\mu$  linearizált alakja).

kus), vagy  $f''(0) > 0$  (szubkritikus).



2.1 ábra. Az analóg iterációs leképezés

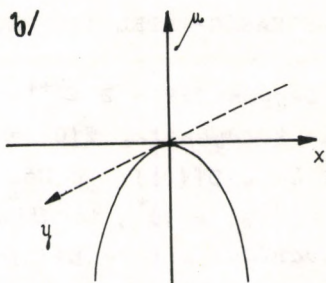
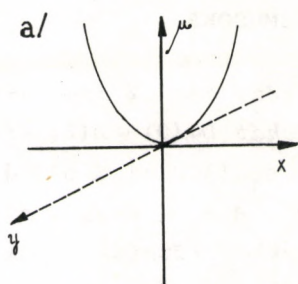
Létezik azonban analitikus módszer a stabilitás-feltételek eldöntésére ([3], 3. fejezet).

4.) A tétel állításának fenomenologikus leírása.

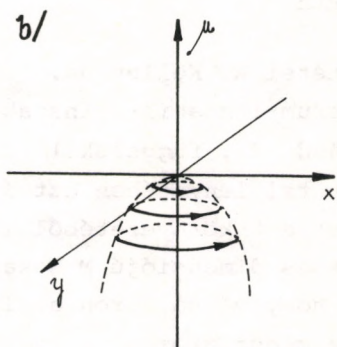
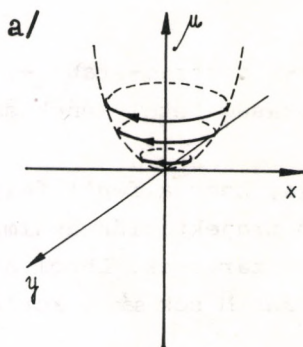
A 2.2 ábra a  $\hat{\mu}(x)$  függvény képét mutatja be. A függvény képe az  $(x, \mu)$  síkban helyezkedik el. Az  $y$  tengely csak a 2.3 ábrával való összevetés kedvéért van feltüntetve.

A 2.3 ábra a paraméter-dimenzióval bővített fázisteret mutatja be. A  $\mu$  tengelyen,  $\mu < 0$  értékeknél vonzó,  $\mu > 0$  értékeknél taszító fixpontok helyezkednek el. Megfigyelhető, hogy a  $\mu$  tengelyen pozitív irányba haladva  $\mu = 0$  értéknél miként válik le (húzódik fel) a vonzó fixpontról (-ra) a vonzó (taszító) periodikus ciklus, és veszti el a fixpont stabilitását.





2.2 ábra. A  $\hat{\mu}(x)$  függvény



2.3 ábra.  $x$  dinamikájának periodikus ciklusai

A 2.4 ábra a valódi fázisteret mutatja be különböző  $\mu$  értékeknél.

A 2.2-2.4 ábrákban a) szuperkritikus, b) szubkritikus bifurkációra vonatkozik.

### 3. CENTRUMSOKASÁG-TÉTEL (DIFFEOMORFIZMUSOKRA)

Tétel. Legyen  $\Psi: V \rightarrow Z$   $C^{k+1}$  leképezés, ahol  $Z$  Banach-tér,  $V \subset Z$   $0$ -nak környezete,  $\Psi(0) = 0$ . (Tehát  $D\Psi(0) \in L(Z)$  lineáris, korlátos.) Ha  $\sigma(D\Psi(0)) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ , ahol  $\sigma_1 \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \rho < 1\}$  és  $\sigma_2 \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}^*$ , továbbá  $\dim Y = d < \infty$ , ahol  $Y$  a  $\sigma_2$ -höz tartozó invariáns altére  $D\Psi(0)$ -nak, akkor létezik  $0$ -nak egy  $U$  környezete ( $0 \in U \subset V$ ), amelyben létezik egy  $0$ -t tartalmazó,  $Y$ -t  $0$ -ban érintő  $d$ -dimenziós,  $C^k$  sokaság ( $M$ ) úgy, hogy

a.)  $(x \in M)$  és  $(\Psi(x) \in U) \Rightarrow \Psi(x) \in M$ .

b.)  $(x \in U)$  és  $([\forall n \in \mathbb{N}]: \Psi^n(x) \in U) \Rightarrow \inf_{y \in M} \|\Psi^n(x) - y\| \rightarrow 0$ .

#### Megjegyzések

1.) A tétel A. Kelley ún. "stabil-, centrum-stabil-, centrum-, centrum-instabil-, instabil sokaság tétel"-ének sajátos esete. (Lásd [2], függelék.)

2.) A tétel lényegében azt állítja, hogy a fenti feltételek mellett a  $0$  környezetéből induló trajektóriák aszimptotikusan a véges dimenziójú  $M$  sokasághoz tartanak. Ebből az következik, hogy végső soron az invariáns  $M$  sokaságra korlátozott dinamika a meghatározó.

3.) A bizonyítás során felhasznált elemek: Banach-terek és korlátos lineáris operátorok általános elmélete, kontrakciók metrikus terekben (fixpont-tétel).

4.) Analóg tétel fogalmazható meg folytonos idejű, Banach-térbeli dinamikákra is.

### 4. HOPF-TÉTEL BANACH-TEREKBEN

Tétel. A tétel a kétdimenzióshoz hasonló jelenséget ír le. Feltételei a következő módon fogalmazandóak át:

$\sigma(DX_\mu(0)) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ , ahol  $\sigma_1 = \{\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}\}$  a már ismert feltételekkel, és  $\sigma_2 \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda < -\varepsilon\}$ . A periodikus ciklusok az  $X_0$

\*  $\sigma(A)$ -val az  $A$  korlátos, lineáris operátor spektrumát jelöljük.



folyamának centrumsokaságán helyezkednek el.

### Megjegyzések

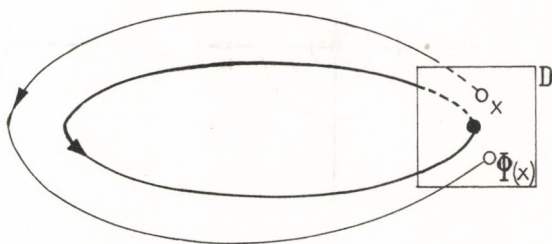
1.) A bizonyítás során  $X_0$  dinamikájának centrumsokaságát egy diffeomorfizmussal képezzük le  $DX_0(0)$ -nak  $\{\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}\}$ -hoz tartozó saját-síkjára, majd ezen a síkon alkalmazzuk az eredeti Hopf-tételt.

2.) Példa: szubkritikus bifurkáció történik a Lorenz-modellben  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r_c = 24,74$  paraméter-értékeknél. A két stabil fixpontra ráhúzódik egy-egy instabil ciklus, és ezáltal a fixpontok instabillá válnak ( $d=3$ ). (Ld. [3].)

3.) Lényeges, hogy a tétel Banach-térbeli dinamikákra is megfogalmazható, mivel így függvényterekbeli folyamatokról állíthatunk valamit.

### 5. NAÏMARK-BIFURKÁCIÓ

Az általános Hopf-tétel értelmében a paraméter kritikus értékénél egy stabil fixpontról leválik egy vonzó ciklus, és ugyanakkor a fixpont instabil lesz.

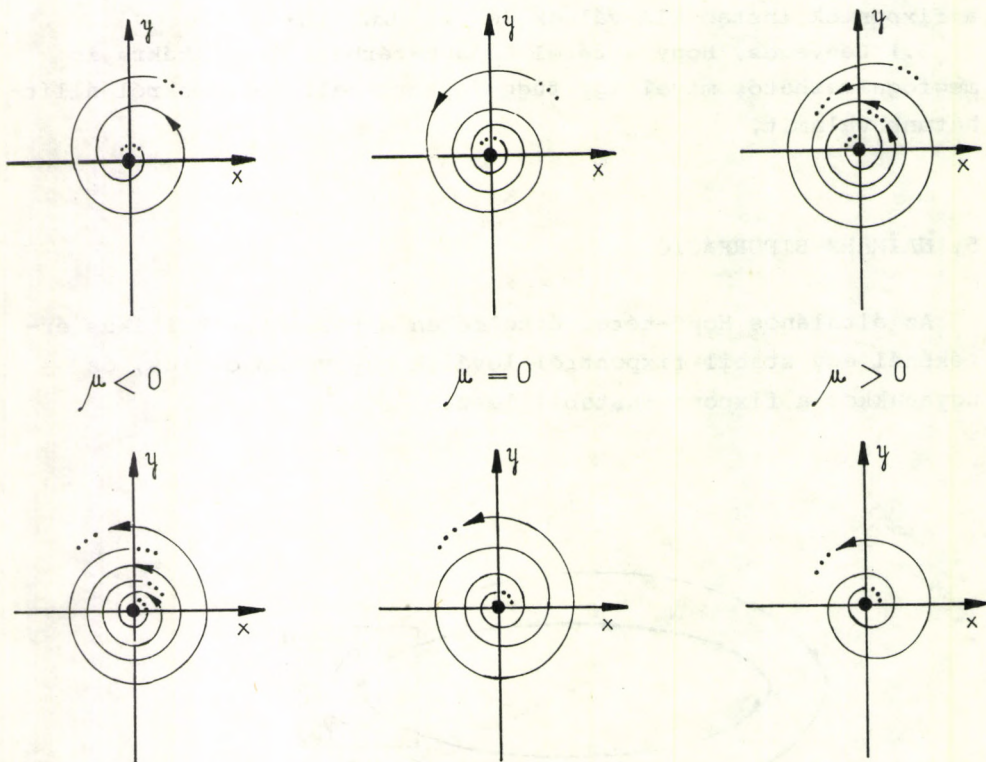


5.1 ábra. A Poincaré-leképezés értelmezéséhez

5.) Egy kiszámítható, de nem triviális példa:

$$\dot{z} = z(i\omega + \mu + \alpha \bar{z}z), \quad \text{ahol } z = y + iy,$$

$$\alpha = \begin{cases} -1 & \text{szuperkritikus,} \\ +1 & \text{szubkritikus.} \end{cases}$$



2.4 ábra. A 2.3 ábra metszetei  $\mu = \text{const.}$  síkokban, azaz az  $X_\mu$  vektormezők dinamikájának fázisképei



A Poincaré-leképezés tételének alapján a kialakult ciklus tetszőleges pontja környezetében a ciklusra transzverzális metszetet felvéve, egy  $\Phi: D \rightarrow D$  "első visszatérési leképezést" értelmezhetünk (5.1 ábra). A tétel szerint ez a leképezés diffeomorfizmus lesz, továbbá diffeomorf a ciklus bármely pontjában hasonló módon értelmezett leképezéssel. A fentiekből következik, hogy az így módon diszkrét idejűvé tett dinamika leírásából lényeges következtetéseket vonhatunk le a folytonos idejű dinamikára vonatkozóan - a ciklus környezetében. (Poincaré-leképezésre vonatkozóan ld. [1-3].) A fenti esetben a  $\gamma$  ciklus és a metsző sokaság  $P$  metszéspontja a  $\Phi$  Poincaré-leképezés stabil fixpontja lesz.

**Tétel (Naïmark, Ruelle-Takens, Sacker):** Legyen  $\Phi_\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  paramétertől függő diffeomorfizmussereg, ahol  $\mu \in (-\delta, \delta)$  a kontrollparaméter. Ha  $[\forall \mu \in (-\delta, \delta)]: \Phi_\mu(0) = 0$  és  $D\Phi_\mu(0)$  sajátértékei  $\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}$ , amelyek kielégítik a következő feltételeket:  $[\forall \mu]: \text{Im} \lambda(\mu) \neq 0, \mu < (>) 0 \quad |\lambda(\mu)| < (>) 1, d|\lambda(\mu)|/d\mu|_{\mu=0} \neq 0, \text{Im}[(\lambda(0))^m] \neq 0$  ha  $m = 1, 2, \dots, 5$ , akkor két eset lehetséges:

a.) amennyiben  $0$   $\Phi_0$ -nak attraktora  $[\exists \varepsilon \in (0, \delta)]:$  úgy, hogy  $[\forall \mu \in (0, \varepsilon)]$ -ra  $\Phi_\mu$ -nek van egy vonzó, invariáns köre  $0$  körül (szuperkritikus bifurkáció);

b.) amennyiben  $0$   $\Phi_0^{-1}$ -nak attraktora,  $[\exists \varepsilon \in (0, \delta)]:$  úgy, hogy  $[\forall \mu \in (-\varepsilon, 0)]$ -ra  $\Phi_\mu$ -nek van egy taszító, invariáns köre  $0$  körül (szubkritikus bifurkáció).

### Megjegyzések

1.) A tétel állítása a Hopf-tétellel - legalábbis látszólag - analóg: egy eredetileg stabil fixpontról egy vonzó, invariáns zárt görbe válik le (illetve a fixpontra egy taszító, invariáns zárt görbe húzódik rá), és ezáltal a fixpont instabil lesz. Lényeges különbség azonban, hogy míg a folytonos idejű esetben a bifurkáció periodikus ciklus kialakulását vonja maga után, itt semmiféle periodicitásról nincs szó. További lényeges különbségek a bizonyítás során derülnek ki.

2.) A bizonyításban felhasznált lényeges elemek: koordináta átalakítások és a  $\Phi_\mu$  diffeomorfizmus ún. kanonikus átalakítása (ehhez szükséges a sajátértékekre vonatkozó utolsó, furcsának tűnő feltétel), a kontrakciók tétele teljes metrikus terekben. (A tétel rokon a Krámlí András előadásában bemutatottakkal.)

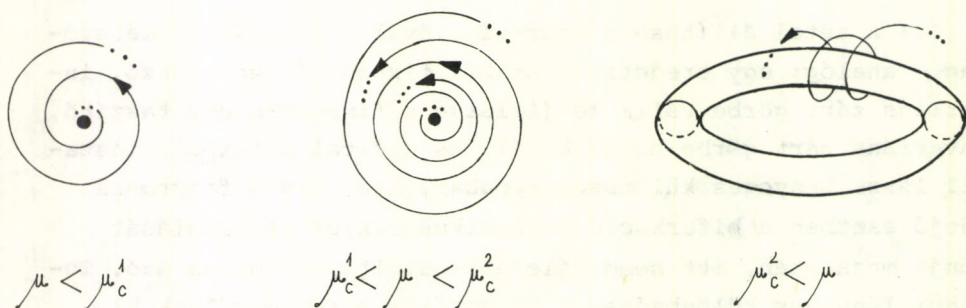
3.) A diszkrét idejű centrumsokaság-tétel alkalmazásával a fenti tétel is általánosítható tetszőleges Banach-terekre.

## 6. A BIFURKÁCIÓK HIERARCHIÁJA

A Hopf-tétel szerint a kontrollparaméter első kritikus értékénél egy stabil fixpontból (0-dimenziós tórusz:  $T^0$ ) egy stabil ciklus (1-dimenziós tórusz:  $T^1$ ) válik le, a fixpont pedig instabil lesz.

A Naïmark- és a Poincaré-leképezés-tételekből következik, hogy a paraméter második kritikus értékénél a stabil periodikus ciklusból egy stabil invariáns kétdimenziós tórusz ( $T^2$ ) válik le, és ezúttal a ciklus is instabil lesz. (Könnyen belátható, hogy a Poincaré-leképezés  $T^k$  invariáns tóruszának az eredeti folytonos idejű folyam azonos stabilitású  $T^{k+1}$  invariáns tórusza felel meg.)

Az egymás utáni bifurkációk tehát az alábbi módon néznek ki:



6.1 ábra. Az első két bifurkáció



Magasabbrendű bifurkációk előállítását feltételezzük, bár erre vonatkozóan nem ismerünk tételeket.

## 7. A RUELLE-TAKENS-KONSTRUKCIÓ

Tétel. Legyen  $X(T^k)$  a  $T^k$  tóruszon értelmezett  $C^{k-1}$  vektormező tere ( $k \geq 4$ ). Ebben a térben megfelelő normát választva  $X$  Banach-tér lesz. Legyen  $\omega \in X$  tetszőleges konstans vektormező.  $\omega$ -nak minden  $X$ -beli  $V$  környezetete tartalmaz egy olyan  $U$  nyílt halmazt, amelyben  $[VX \in U]$ -ra  $X$  dinamikájának különös attraktora van [4-6].

### Megjegyzések

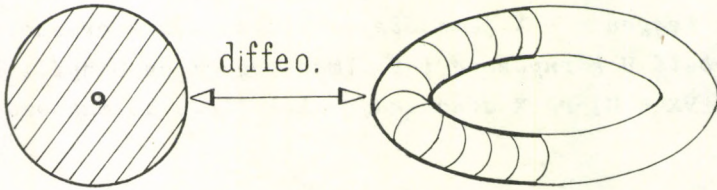
1.) Mivel a tóruszon értelmezett  $\omega = \text{const.}$  vektormező kváziperiodikus dinamikát határoz meg, a tétel lényegében azt állítja, hogy míg a kváziperiodikus dinamikák nem tipikusak (pl. azért, mert instabilak: tetszőlegesen kis perturbáció megszünteti a kváziperiodicitást), bármely környezetükben tipikusan előfordulnak különös attraktorú dinamikák. (Azaz: a fenti értelemben "nagy" a különös attraktorú dinamikák halmaza.) Ez azért fontos, mert a turbulencia Ruelle-Takens-elmélete a Hopf-Landau-Lifsic-elmélet alternatívájaként fogalmazódott meg, amely elmélet szerint a turbulencia tulajdonképpen bonyolult kváziperiodikus dinamika.

2.) A tétel bizonyítása technikailag meglehetősen bonyolult ([6], 9. rész). A lényeges lépések a következők:

- a.) Konstruálható egy különös attraktorú dinamika  $T^k$ -n. Az annak megfelelő vektormezőt jelöljük  $X_0$ -val.
- b.) Bizonyítható, hogy egy jól megválasztott transzformációval  $X_0$  "eltolható"  $\omega$ -nak tetszőleges környezetébe. Tehát  $\omega$ -nak bármely  $V$  környezetében létezik egy  $X$  vektormező, amelynek különös attraktora van.
- c.) Egy stabilitási tételből következik, hogy  $X$ -nek egy  $U'$  környezete is különös attraktorú dinamikákat tartalmaz.  $U = V \cap U'$ .

3.) A fenti a.) pont részletesebben: nevezzük  $k$ -dimenziós tömör tórusznak (vagy  $k$ -dimenziós szolenoidnak) a  $\tilde{T}^k = T^k \otimes (0, 1)$

halmazt. Belátható, hogy ez a sokaság diffeomorf a  $(k+1)$ -dimenziós tórusz egy nyílt szeletével. Pl.  $k=1$ -re ld. a 7.1 ábrát.



7.1 ábra.  $\tilde{T}^1$  diffeomorf leképezése  $T^2$ -be

Következik, hogy a  $\tilde{T}^k$ -n értelmezett tetszőleges diffeomorfizmus kiterjeszthető  $T^{k+1}$ -en.  $\tilde{T}^2$ -n adott a "szolenoid diffeomorfizmusa":

$$\phi: \tilde{T}^2 \rightarrow \tilde{T}^2, \quad \phi(\phi, \theta, \rho) = \left( 2\phi, \arctg \frac{2\sin\phi + \rho\sin\theta}{2\cos\phi + \rho\cos\theta}, \frac{1}{4}(\rho^2 + 4\rho\cos(\phi-\theta) + 4)^{1/2} \right),$$

amelynek különös attraktora van. (Részletek [7]-ben.) Mivel  $\phi$  kiterjeszthető  $T^3$ -on, úgy tekinthetjük, hogy adott  $T^3$ -on egy diffeomorfizmus, amelynek különös attraktora van. Tekintsük a fenti diffeomorfizmust úgy, mint egy, a  $T^4$ -en értelmezett folyam  $t=1$  idejű első visszatérési leképezését (Poincaré-leképezését). ( $T^3$   $T^4$ -nek transzverzális metszete.) Ennek a folyamnak szintén különös attraktora lesz. Az így értelmezett folyamnak megfelelő vektormező legyen az a bizonyos kiválasztott  $X_0$ .



## 8. PROBLÉMÁK

A további problémák három fő csoportba oszthatók:

a.) Mennyiben alkalmazható a fent vázolt elmélet a parciális differenciálegyenletek által meghatározott folyamokra (konkrétan a hidrodinamika egyenleteire)? A fenti tételek ugyanis folytonosan differenciálható vektormezők által meghatározott dinamikákra vonatkoznak. Bizonyos általánosítások megtalálhatóak [3] 5. fejezetében.

b.) Mit tudunk a különös attraktorok kialakulásáról? A Ruelle-Takens-elmélet ugyanis különös attraktorú dinamikák tipikus előfordulását bizonyítja, de kialakulásukról nem szól (ld. 7. fejezet).

c.) Milyen értelemben kaotikusak a különös attraktorú dinamikák? Erre a kérdésre Szász Domokos előadása utalt részletesen. E probléma a statisztikus fizika alapkérdéseire vonatkozóan is jelentős.

## IRODALOM

1. R. Abraham, J.E. Marsden, Foundations of Mechanics (Benjamin, New York, 1978)
2. R. Abraham, J. Robbin, Transversal Mappings and Flows (Benjamin, New York, 1968)
3. J.E. Marsden, M. McCracken, The Hopf Bifurcation and Its Applications (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976)
4. S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. 64, 35, 1978.
5. D. Ruelle, Strange Attractors as a Mathematical Explanation of Turbulence, in Statistical Models of Turbulence, szerk.: M. Rosenblatt, C. Van Atta (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972)
6. D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. 20, 167, 1971.
7. Szász Domokos, ez a kötet, 4.1 fejezet.





# KÁOSZ EGYENSÚLYI RENDSZEREKBEN

Rácz Zoltán

1. Egyensúlyi káosz - az ötlet	391
2. Statisztikus fizika molekuláris-tér közelítésben - ekvivalencia mechanikai rendszerekkel	393
3. Káosz az ANNNI-modellben?	395
Irodalom	400

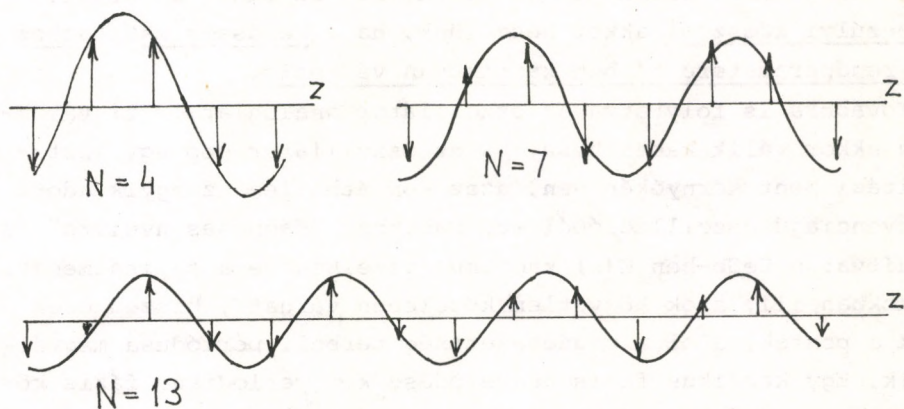




## 1. EGYENSÚLYI KÁOSZ - AZ ÖTLET

Termodinamikai egyensúlyban a makroszkópikus mennyiségek időben nem változnak. Az előző előadásokban ismertetett káosz viszont a rendszerek időfejlődésével, illetve időfejlődésüknek a kezdeti feltételekre való rendkívüli érzékenységgel volt kapcsolatos. Így aztán először nem világos, mit is kell értenünk egyensúlyi rendszerekben fellépő káoszon.

Az "egyensúlyi káosz" gondolata olyan fázisátalakulások vizsgálata során merült fel [1], amelyekben a makroszkópikus rend (pl. mágnesezettség vagy töltéssűrűség) térben modulált. A CeSb ritka-földfém mágnesben például a Néel-hőmérséklet alatt ( $T < T_N$ ) a mágneses momentumok egy kristálytani irányra ( $z$ ) merőleges síkokban ferromágnesesen rendeződnek, a mágnesezettség ( $M$ ) nagysága azonban síkról-síkra változik ( $M = M(z)$ ). A CeSb érdekessége, hogy a mágnesezettség periodikusan változik ( $M(z+\rho) = M(z)$ ), a mágnesezettség periódusa a kristályrács periódusának ( $a$ ) egész számú többszöröse ( $\rho = Na$ ), s a hőmérséklet csökkentésével a mágnesezettség periódusa többször ugrás-szerűen változik (pontosabban:  $N$  rendre a 3, 13, 7, 18, 11, 4 értékeket veszi fel a  $[T_N, 0]$  hőmérséklet-intervallumban).



1.1 ábra. A mágnesezettség  $z$ -függése különböző hőmérsékleteken

Az 1.1 ábrán a mágnesezettség  $z$ -függése látható különböző  $T < T_N$  hőmérsékleteken (természetesen nem kísérleti adatokról van szó, hanem olyan modellszámítások eredményeiről, amelyek jól reprodukálják a kísérletekben megfigyelt periódusokat, azok sorrendjét is beleértve [2]).

Ha az 1.1 ábrán nem ismernénk a változók jelentését, akkor első gondolatunk az lenne, hogy különböző frekvenciával gerjesztett, enyhén nemlineáris oszcillátorok kitéréseit rajzoltuk fel diszkrét időpontokban (folytonos vonalként berajzoltuk a lineáris oszcillátor kitérésének időfüggését is). Ebből az oszcillációból ered az "egyensúlyi káosz" gondolata: Amennyiben  $M(z)$  egy oszcillátor  $x(t)$  kitérésének képzelhető, akkor a CeSb-ben végbemenő fázisátmenet "oszcillátor-nyelven" azt jelenti, hogy az oszcillátort különböző frekvenciájú külső erők gerjesztik, s az erők nagyságától függően az oszcillátor különböző frekvenciájú állapotokba ugrik be. Ilyen mechanikai rendszerben azonban a paraméterek megfelelő megválasztásával elérhető, hogy  $x(t)$  kaotikusan változzék. Ha az  $M(z) \leftrightarrow x(t)$  analógia igaz, akkor ez azt jelentené, hogy a külső paraméterek (hőmérséklet, nyomás, mágneses tér stb.) megfelelő megválasztásával elérhető, hogy  $M$   $z$ -függése kaotikus legyen. Ebben az esetben  $x(t)$  kezdeti feltételekre való érzékenysége  $M(z)$ -nek a határfeltételekre való rendkívüli érzékenységét jelentené. Ez tehát az ötlet, egyensúlyi káoszról akkor beszélünk, ha a rendszer makroszkopikus rendparamétere térben kaotikusan változik.

Továbbra is folytatva az oszcillátor analógiát,  $x(t)$  várhatóan akkor válik kaotikussá, ha az oszcillátor épp egy instabilitási pont környékén van, azaz épp átbillen az egyik adott frekvenciájú oszcillációból egy másikba. "Mágneses nyelvre" lefordítva: a CeSb-ben  $M(z)$  kaotikus viselkedése a fázisátmeneti pontokban, ill. azok közvetlen közelében várható, hiszen ezek azok a pontok, ahol a mágnesezettség térbeli periódusa megváltozik. Egy kaotikus fázis beékelődése két periodikus fázis közé neutronszerelési kísérletekben mérhető lenne, hiszen a periodikus fázisokban jól definiált mágneses Bragg-csúcsok a kaotikus fázisban eltűnnének. Ilyen jellegű kísérleti eredményekről egyenlőre azonban még nem számolhatunk be.



A fentiekben ismertetett egyensúlyi káosz kép leggyengébb pontja az  $M(z) \leftrightarrow x(t)$  megfeleltetés: első ránézésre teljesen formálisnak, látszólagosnak tűnhet. A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy ez a megfeleltetés mélyebb: molekuláris-tér közelítésben a statisztikus fizikai rendszerek tulajdonságai származtathatók külső térben mozgó mechanikai tömegpontok trajektóriáiból. A 3. fejezetben azután konkrét modellen vizsgáljuk meg, hogy a tömegpontok kaotikus trajektóriái vezethetnek-e egyensúlyi káoszra a statisztikus fizikai rendszerben.

## 2. STATISZTIKUS FIZIKA MOLEKULÁRIS-TÉR KÖZELÍTÉSBN - EKVIVALENCIA MECHANIKAI RENDSZEREKKEL

Vizsgáljunk egy termodinamikai rendszert, amelyben a rendeződés a tér egy irányában (mondjuk a  $z$ -tengely irányában) modulált. Ekkor a rendparaméter  $M$  csak a  $z$  koordinátától függ, s félmakroszkopikus szinten az általánosított szabadenergiát ( $F$ ) a következőképpen írhatjuk:

$$F = \int_0^{\infty} dz \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dM}{dz} \right)^2 + U(T, M(z)) \right], \quad (2.1)$$

ahol a gradiens tag biztosítja, hogy magas hőmérsékleten a homogén fázis a legstabilabb, s az  $U$  függvény megfelelő megválasztásával elérhető, hogy alacsony hőmérsékleten különböző hullámhosszal modulált fázisok stabilizálódjanak. Ha például egy  $\lambda$  és egy  $\lambda'$  hullámhosszú moduláció versengését akarjuk leírni, akkor  $U$ -t a következőképpen választhatjuk [3]:

$$U(T, M(z)) = A(T) \cos(\phi(z) - \frac{2\pi}{\lambda}z) + B(T) \cos(\phi(z) - \frac{2\pi}{\lambda'}z) \quad (2.2)$$

ahol  $\phi(z)$ -t az  $M(z) = M_0 \exp(i\phi(z))$  összefüggés definiálja.

A (2.1) képlet mögé természetesen azt kell képzelnünk, hogy a mikroszkopikus rendszer állapotösszegének számítása során az irreleváns szabadsági fokokat már kiintegráltuk, s így kaptuk  $F$ -et, ami már csak a rendparaméter funkcionálja. Elvileg most tovább kellene integrálni  $M(z)$  lehetséges alakjaira is, azonban ezt nagyon egyszerű  $U(T, M(z))$  választásoktól eltekintve nem

tudjuk elvégezni. Ezért szokásos itt a molekuláris-tér közelítés:  $M(z)$  fluktuációit elhanyagoljuk és  $M(z)$  átlagát helyettesítjük legvalószínűbb értékével, tehát azzal az értékkel, amely minimalizálja az általánosított szabadenergiát. Ekkor az  $M(z)$ -t meghatározó egyenlet ( $\delta F/\delta M(z) = 0$ ):

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{\partial U}{\partial M}, \quad (2.3)$$

ami nem más, mint a Newton-egyenlet,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{dV}{dx}, \quad (2.4)$$

ha az

$$M(z) \leftrightarrow x(t); \quad z \leftrightarrow t; \quad -U(M) \leftrightarrow V(x) \quad (2.5)$$

azonosításokat elvégezzük.

Látható, hogy a  $-U$  potenciálban mozgó egységnyi tömegű részecske trajektóriája határozza meg a rendparaméter helyfüggését, tehát az  $M(z) \leftrightarrow x(t)$  megfeleltetés éppen az, amit az egyensúlyi káosz fogalmának 1. fejezetbeli bevezetésekor feltételeztünk.

A megfeleltetés természetesen még most sem teljes, hiszen egyrészt nem tudjuk, hogy  $M(z)$  fluktuációinak elhanyagolása mennyire jogos, másrészt a (2.4) egyenletnek igen sok megoldása van, a megfelelő (2.3) egyenlet megoldásaiból azonban csak az a fizikailag is megvalósuló, amely minimalizálja  $F$ -et. Ha tehát (2.4) megoldásai között kaotikus trajektóriákat találunk, abból még egyáltalán nem következik, hogy a megfelelő  $M(z)$  fizikailag megvalósul. Ha például a (2.2) potenciált választjuk, akkor a mechanikai probléma egy egységnyi tömegű részecske mozgása két szinuszhullám terében:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A \sin\left(x - \frac{2\pi}{\lambda}t\right) + B \sin\left(x - \frac{2\pi}{\lambda'}t\right). \quad (2.6)$$

Az  $A$  és  $B$  paraméterek bizonyos tartományában a (2.6) egyenlet megoldásai között kaotikus trajektóriák is megjelennek [3]. Ebből azonban nem lehet arra következtetni, hogy két modulált fázis versenyéből kaotikus állapotok születnének, mivel eddig még

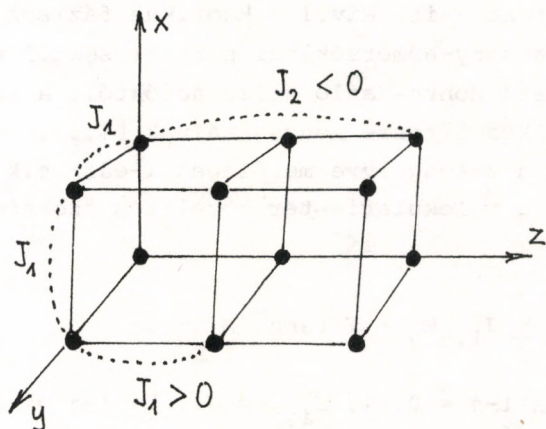


nem vizsgálták meg, hogy ezek az állapotok minimalizálják-e a szabadenergiát.

A következő fejezetben egy olyan modellről lesz szó, amelyre a szabadenergia minimalizálásának problémáját is megkísérelték megoldani.

### 3. KÁOSZ AZ ANNNI-MODELLBEN?

Az egyik legegyszerűbb modell, amely modulált fázisok leírására alkalmas, az ún. "axial next-nearest-neighbour Ising", vagy röviden ANNNI-modell [4]. A 3.1 ábrán egyszerű köbös rácsra értelmezett változatát láthatjuk:



3.1 ábra. Az ANNNI-modell kölcsönhatásai köbös rácsra

A rácspontokban Ising-spinnek ( $\sigma_i = \pm 1$ ) ülnek, a legközelebbi szomszédok ferromágnesesen csatolódnak ( $-J_1 \sigma_i \sigma_j$ ;  $J_1 > 0$ ), a z-tengely irányában fekvő második szomszédok között pedig antiferromágneses a kölcsönhatás ( $J_2 < 0$ ).

Ebben a modellben a modulált fázisok létét a ferro- és anti-ferromágneses csatolások versenyére vezethetjük vissza. Alacsony hőmérsékleten a z-tengelyre merőleges síkokban a spinnek

ferromágnesesen rendeződnek, egy sík mágnesezettségének az irányát és nagyságát azonban a  $J_2/J_1$  hányados határozza meg. Egészen alacsony hőmérsékleten például, ahol az energiaviszonyok a lényegesek, a rendszer homogén ferromágneses fázisban van a  $0 < |J_2|/J_1 < 0,5$  tartományban (a ferromágneses csatolás dominál), még ha  $|J_2|/J_1 > 0,5$ , a síkok mágnesezettségei a  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$  sorrendben követik egymást (az antiferromágneses csatolás dominál). Ez utóbbi esetben a rendparaméter  $M(z)$  periódusa a rácsállandó négyszerese.

Alacsony-hőmérsékleti sorfejtések [5], Monte-Carlo [6] és molekuláris-tér [2] számítások azt mutatják, hogy a  $|J_2|/J_1 > 0,5$  tartományban növelve a hőmérsékletet, a rendszer egy sor fázisátmeneten megy át, amelyek során  $M(z)$  periódusa ugrásszerűen megváltozik. E fázisátmenetek környékén elvileg elképzelhető  $M(z)$  kaotikus változása is. Mivel a kaotikus fázisok detektálása nem várható alacsony-hőmérsékleti sorfejtésektől és véges rendszereken végzett Monte-Carlo szimulációktól, a továbbiakban a molekuláris-tér közelítésre koncentrálnak [1,2].

$M_i$ -vel jelölve a  $z$ -tengelyre merőleges  $i$ -edik sík átlagos mágnesezettségét, a molekuláris-tér közelítés szokásos konzisztenciaegyenletei:

$$-\sum_j J_{i,j} M_j + T \tanh^{-1} M_i = 0, \quad (3.1)$$

ahol  $J_{i,j} = J_1$ , ha  $i-j = 0, \pm 1$ ,  $J_{i,j} = J_2$ , ha  $i-j = \pm 2$ , egyébként pedig  $J_{i,j} = 0$ . Mivel a  $z$ -tengely mentén a mágnesezettség elvileg kaotikusan is változhat, a (3.1) végtelen, nemlineáris egyenletrendszer összes lehetséges megoldásából kellene kiválasztanunk azt, amelyik minimalizálja a szabadenergiát:

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{i-j} M_i M_j + T \sum_i \int_0^{M_i} \tanh^{-1} \sigma d\sigma \quad (3.2)$$

(a konzisztenciaegyenletek természetesen megegyeznek a minimalizálás szükséges feltételeivel  $\partial F / \partial M_i = 0$ ).

A (3.1) egyenletrendszer összes megoldását megtalálni elég reménytelen feladat. Legjobb esetben azt lehet feltételezni, hogy  $M_{i+L} = M_i$ , azaz az  $M(z)$  maximális periódusa  $L$  rácsállandó.



Ekkor (3.1) L egyenletre redukálódik, amit L nem túl nagy ( $L \lesssim 20-30$ ) értékeire számítógép segítségével vizsgálhatunk. Ebben a közelítésben megtalálhatók  $M(z)$  különböző periódusváltásai, azonban vannak olyan paramétertartományok, amelyekben a stabil fázisra adódó periódus L nagyságrendű, ami arra utal, hogy L növelésével újabb és újabb fázisokat detektálhatnánk. Világos, hogy a kaotikus fázis keresésére más közelítést kell alkalmaznunk.

A véges rendszereken végzett Monte-Carlo és molekuláris-tér számolások közös vonása, hogy a fázisátmenetek során csak a mágnesezettség periódusa változik, az amplitudója gyakorlatilag állandó. Ezt a megfigyelést használta fel Bak egy olyan közelítés kidolgozására, amelynek segítségével (3.1) megoldásait  $L \rightarrow \infty$  határesetben is vizsgálhatjuk.

Írjuk a mágnesezettséget

$$M_i = M_0 \cos(\phi_i + \frac{\pi}{2}i) \quad (3.3)$$

alakban. Az  $M_0$  amplitudót valamelyik jól definiált és könnyen számítható (pl.  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ ) fázisban meghatározzuk, s attól kezdve hőmérsékletfüggését adottnak tekintjük. Mivel nagy periódusú fázisok érdekelnek bennünket,  $\phi_i$ -ről feltételezzük, hogy lassan változik ( $\phi_{i+1} - \phi_i \ll 1$ ), s a szabadenergiát sorbafejtjük  $\phi_{i+1} - \phi_i$ -ben. Az eredmény (állandó szorzóktól eltekintve):

$$F \sim \sum_i \left[ \frac{1}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i - \delta)^2 + cV(\phi_i) \right], \quad (3.4)$$

ahol  $\delta = J_1/(4|J_1|)$ ,  $c = T/(2M_0^2J_2)$  és

$$V(\phi_i) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{M_0 \cos \phi_i} \tanh^{-1} \sigma d\sigma + \int_0^{M_0 \sin \phi_i} \tanh^{-1} \sigma d\sigma \right]. \quad (3.5)$$

Áttekinthetőbbé válik ez az eredmény olyan paramétertartományban, ahol  $M_0$  kicsi és  $V$  sorbafejthető  $M_0$ -ban. Ekkor

$$V(\phi_i) \approx \frac{M_0^4}{96} \cos 4\phi_i, \quad (3.6)$$

tehát a szabadenergia második tagja  $\phi_i = \frac{\pi}{4}$  behelyettesítéssel

minimalizálható. Figyelembe véve (3.3)-at, ez azt jelenti, hogy  $V(\phi_i)$  a  $\lambda = 4a$  hullámhosszú modulációt választja ki, ahol  $a$  a rácsállandó (amint azt az előzőekben láttuk, ez a  $T \approx 0$  hőmérsékletű fázis modulációja). A szabadenergia első tagját viszont  $\phi_i = \delta_i$  minimalizálja, ami ismét csak (3.3)-ból egy

$$\lambda' = \frac{4a}{1 + 2\delta/\pi} \quad (3.7)$$

hullámhosszú modulációt jelent a mágnesezettségben.

Látható tehát, hogy a (3.4) szabadenergia a 2. fejezetben felírt fenomenológikus szabadenergiához hasonlóan két különböző hullámhosszú moduláció versenyét írja le. A (2.1) és (2.2) kifejezésekhez képest az a különbség, hogy (3.4)-ben nincs olyan tag, amely a magashőmérsékleti homogén fázist részesítené előnyben. Ez annak a következménye, hogy (3.4) levezetésekor feltételeztük, hogy az alacsony-hőmérsékleti rendezett fázisban fejtünk sorba.

A (3.4)-et minimalizáló  $\phi_i$  konfigurációkat a következő végtelen, nemlineáris differencia-egyenletrendszerből kell meghatároznunk:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = (\phi_{i+1} - \phi_i) - (\phi_i - \phi_{i-1}) + cV'(\phi_i) = 0. \quad (3.8)$$

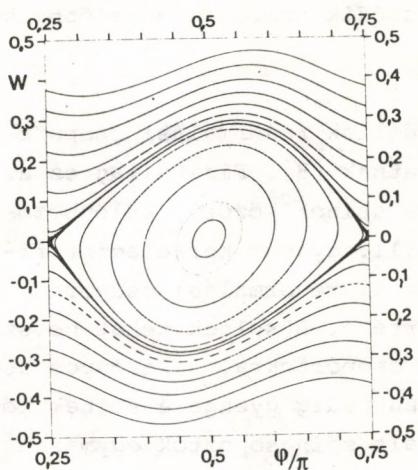
Ezeket az egyenleteket rekurziókként is felírhatjuk, ha bevezetjük a  $w_i = \phi_i - \phi_{i-1}$  "impulzust":

$$w_{i+1} = w_i - cV'(\phi_i), \quad (3.9)$$

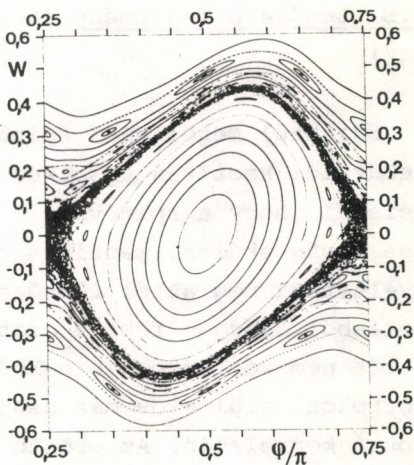
$$\phi_{i+1} = \phi_i + \bar{w}_i.$$

A fenti rekurziók különböző megoldásait számítógép segítségével könnyen meghatározhatjuk (3.2 ábra). Mint várható volt, a megoldások között kaotikus trajektóriákat is találunk. Következő lépésként meg kell vizsgálni, hogy ezek a trajektóriák minimalizálhatják-e a szabadenergiát. Numerikus számolások alapján Bak azt állítja [1], hogy két periodikusan modulált fázis között az átmenet kaotikus fázison keresztül történik.





a.



b.

3.2 ábra. A (3.9) rekurziók megoldásai  $c = 3,68$  (a) és  $c = 8$  (b) paraméter értékek esetén.

Valószínű azonban, hogy ezek a numerikus számolások nem eléggé megbízhatóak, mivel Aubry egy még nem publikált bizonyítására hivatkozva azt állítja [7], hogy egy irányban kaotikusan változó rendparaméter csak akkor minimalizálhatja a szabadenergiát, ha az alapállapot makroszkópicusan degenerált. Mivel az ANNNI modellben az alapállapot kétszeresen degenerált a  $0 < |J_2|/J_1 < 0,5$ , és négyszeresen degenerált a  $|J_2|/J_1 > 0,5$  tartományban; Aubry bizonyítása kizárja a Bak által numerikusan talált kaotikus fázisokat.

A kaotikus fázisok léte tehát nyitott kérdés mind elméleti, mind pedig kísérleti szempontból. A kérdés elég egyszerű és érdekes, úgyhogy a közeljövőben valószínűleg sokan megpróbálják majd megválaszolni.

P.S. Legújabb fejlemény (nem kapcsolódik szorosan az előbbiekhez)

Egzaktul megoldható spinüveg-modellek renormálási csoport rekurziói kaotikus viselkedést mutatnak [8]. Fizikailag ez azt jelenti, hogy a spinüveg fázisban a spinek között, különböző hosszúság-skálán, kaotikusan erős, ill. gyenge korrelációt figyelhetünk meg attól függően, hogy mi a renormálási csoport számolásból adódó effektív csatolás értéke. A spinek tehát beoszthatók nemszomszédos spinekből álló csoportokra, s bizonyos csoportokon belül erős, más csoportokban pedig gyenge a spinek közötti korreláció. Az erősen korrelált spincsoportok egymáshoz viszonyított rendezetlensége, valamint a gyengén korrelált spincsoportokon belüli rendezetlenség adja a spinüveg entrópiáját. A részletesebb tárgyalás megtalálható [8]-ban.

#### IRODALOM

1. P. Bak, Phys. Rev. Lett. 46, 791, 1981.
2. J. von Boehm, P. Bak, Phys. Rev. Lett. 42, 122, 1979.
3. E. Fradkin, B.A. Huberman, Chaotic phases in statistical mechanics, megjelenés alatt
4. R.J. Elliott, Phys. Rev. 124, 346, 1961.
5. M.E. Fisher, W. Selke, Phys. Rev. Lett. 44, 1502, 1980.
6. W. Selke, M.E. Fisher, Z. Phys. B40, 71, 1980.
7. F. Axel, S. Aubry, J. Phys. C14, 5433, 1981.
8. S.R. McKay, A.N. Berker, S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. 48, 767, 1982.



AZ HÉNON-HEILES-MODELL ÉS SZEREPE  
A PLAZMAFIZIKÁBAN

Párizs Gyula

1. Bevezetés	403
2. Az Hénon-Heiles-modell	408
3. Az Hénon-Heiles-modell és a mágneses felületek	417
Irodalom	421





## 1. BEVEZETÉS

A modell ismertetése előtt érdemes rövid kitérőt tenni a fizika olyan területére, ahol az iskolán bemutatott különös folyamatok külön-külön is, egymással keveredve is megvalósulhatnak. A plazmafizikáról van szó.

Ismeretes, hogy a plazmát különböző hullámok, rezgések halmazaként foghatjuk fel. Hullámzik a töltéssűrűség, a belső elektromágneses tér. A hullámok általában csillapodnak. Mint-hogy azonban egymással kölcsönhatásban vannak, parametrikus rezonancia állhat be, s ha valamilyen külső gerjesztés is van jelen, amplitúdójuk növekedésnek indulhat, míg fázisuk szinkronban marad. Az amplitúdónövekedésnek bomlási instabilitás szab korlátot, ez újabb csillapodó hullámok keletkezését jelenti, melyek átveszik a fölös energiát.

Matematikailag igen egyszerűen felírhatjuk a kölcsönhatás dinamikáját, ha két rezonanciában lévő hullámot tekintünk, kölcsönhatásban egy harmadik, bomlási instabilitásból származó hullámmal [1]. A komplex amplitúdók időbeli változására ekkor a következő egyenletrendszer érvényes:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -a_2 a_3 - v_1 a_1 + h a_2^* , \\ \dot{a}_2 &= a_1 a_3^* - v_2 a_2 + h a_1^* , \\ \dot{a}_3 &= a_1 a_2^* - a_3 , \end{aligned} \tag{1.1}$$

ahol  $v_1, v_2$  a csillapodási kitevő,  $h$  arányos a külső gerjesztés amplitúdójával, csillaggal a konjugált komplex mennyiséget jelöljük, a pontok pedig időbeli deriváltat jelentenek. Látjuk, hogy gerjesztés ( $h = 0$ ) nélkül lineáris közelítésben (tehát önmagukban véve) mindhárom hullám csillapodó, a kölcsönhatás a nemlineáris tagokban és a külső gerjesztésben fejeződik ki. Minthogy az egyenletrendszer az

$$a_1 \rightarrow a_1 e^{i\theta}, \quad a_2 \rightarrow a_2 e^{-i\theta}, \quad a_3 \rightarrow a_3 e^{2i\theta}$$

transzformációval szemben invariáns, ami a fázismegválasztás

tetszőlegességét jelenti, az  $a_i$  amplitúdókat valóságoknak tekint-  
hetjük, és  $x = a_1$ ,  $y = a_2$ ,  $z = a_3$  jelöléssel a kiinduló egyen-  
letrendszer a következő alakot ölti:

$$\dot{x} = hy - v_1x - yz, \quad \dot{y} = hx - v_2y + xz, \quad \dot{z} = -z + xy. \quad (1.2)$$

Írjuk most fel az iskolán is szereplő, ismert és népszerű  
Lorenz-rendszert [2]:

$$\dot{X} = rY - X - YZ, \quad \dot{Y} = \sigma X - \sigma Y, \quad \dot{Z} = -bZ + XY. \quad (1.3)$$

Meglepő formális hasonlóságot veszünk észre a két egyenletrend-  
szer között, s így az már nem is lep meg bennünket, hogy az  
(1.2) rendszer viselkedése a  $h$  kontroll-paraméter változása so-  
rán teljesen analóg az (1.3) rendszer viselkedésével. Az  $r_t$ -nak  
megfelelő kritikus pont  $h \approx 4,84$ , ennél nagyobb  $h$  esetén csak  
különös attraktort találunk a rendszerben, s ez  $h \approx 13,4$  érté-  
kig tart. Utána ismét stabilis határciklusok jelennek meg, a  
káosz eltűnik.

A példa egy parányi részt ragadott ki a plazmában zajló fo-  
lyamatokból. Szélesebb áttekintést adnak a plazma viselkedésé-  
ről az úgynevezett transzport modellek, vagy ahogyan a matema-  
tikai vizsgálati módszerekkel együtt nevezzük, a transzport  
kódok. Ezek a plazmában lévő részecskék és energia transzport-  
ját írják le a plazmát összetartó mágnes tér jelenlétében, és  
rendkívül hasznosnak bizonyultak a lassú, evolúciós folyamatok  
tanulmányozására toroidális plazmában. Manapság a transzport  
kód valamilyen verziója gyakorlatilag minden laboratóriumban  
létezik, ahol toroidális berendezést alkalmaznak. A sok közül  
háromra utalunk: [3-5]. Segítenek a mérési eredmények kiértéke-  
lésében, új kísérletek megtervezésében és azok eredményeinek  
megjósolásában, sőt még a kísérleti berendezések újabb generá-  
ciójának megtervezésében is.

Nézzünk most meg közelebbről egy transzport modellt [6]. Ten-  
gelyszimmetria esetén az időtől eltekintve a modell kétdimen-  
ziós. Minthogy azonban a mágneses erővonalak mentén és rájuk  
merőlegesen a részecskék mozgása lényegesen különbözik, hossz-  
irányban szabadon keveredhetnek, az együtt tartást keresztirányban



kell megvalósítani, egy térbeli dimenzióra szorítkozhatunk. Álljon a plazma elektronokból és hidrogén-ionokból, a mágnesfelületek metszetei pedig a meridionális síkban legyenek koncentrikus körök. Ekkor a transzport modell alapja a következő egyenletrendszer lehet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \Gamma_n) &= P, \\ 3/2 \frac{\partial}{\partial t} (n T_e) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho (q_e + 5/2 T_e \Gamma_n) \} - \frac{\Gamma_n}{n} \frac{\partial}{\partial \rho} (n T_e) &= Q_{OF} + Q_e - Q_{ei}, \\ 3/2 \frac{\partial}{\partial t} (n T_i) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho (q_i + 5/2 T_i \Gamma_n) \} - \frac{\Gamma_n}{n} \frac{\partial}{\partial \rho} (n T_i) &= Q_i + Q_{ei}, \\ \frac{\partial B_\theta}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{1}{\sigma \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\theta) \right\} - c \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{j_b}{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Itt a  $\rho$  mágnesfelület rádiusza,  $n(t, \rho)$  a plazmasűrűség,  $T_e(t, \rho)$ ,  $T_i(t, \rho)$  az elektron- és ionhőmérséklet,  $B_\theta(t, \rho)$  a poloidális mágnes-tér. Ez a rendszer rendkívül egyszerűsített, nem szerepel benne például az  $n_0$  semleges háttér, amellyel pedig az  $n$  plazmasűrűség állandó kölcsönhatásban van, hiszen ionizáció és rekombináció állandóan zajlik a plazmában, vagy hiányoznak a szennyező atomok, amelyek jelentősen befolyásolhatják mind a sűrűségeloszlást, mind az energetikai viszonyokat. Az (1.4) egyenletrendszer azonban ilyen egyszerű alakban is nagyon sok érdekes folyamatot hordoz. Nézzük meg közelebbről a rendszert alkotó egyenleteket.

Az első egyenlet a részecskesűrűség viselkedését írja le.  $\Gamma_n$  a részecskefluxus, amely a kifelé irányuló  $\Gamma_D = -D \partial u / \partial \rho$  diffúziós fluxusból és a befelé irányuló  $\Gamma_{dr} = n v_{dr}$  drift-fluxusból áll:

$$\Gamma_n = \Gamma_D + \Gamma_{dr} = -D \frac{\partial u}{\partial \rho} + n v_{dr}. \quad (1.5)$$

$P$  tartalmazza a forrás és nyelő tagokat:

$$P = (\langle \sigma_i u \rangle + \langle \sigma_e u \rangle) N n - \langle \sigma_r u \rangle n^2, \quad (1.6)$$

ahol  $\sigma_i$  az ionokkal való ütközés,  $\sigma_e$  az elektronokkal való üt-

közés ionizációs hatáskeresztmetszete,  $N$  pedig a semleges hát-tér sűrűsége. Azonnal látszik, hogy ha  $N$ -re is felírnánk a megfelelő egyensúlyi egyenletet, amely formailag teljesen analóg az első egyenlettel, már ez a két egyenlet is nemlineárisan csatolt rendszert alkotna, s hasonló módon csatolódná hozzájuk egy harmadik, például valamilyen szennyező ionok koncentrációját leíró egyenlet.

Az (1.4) egyenletrendszer második és harmadik egyenletében  $Q_{OF}$  az ohmikus fűtést jelöli,  $Q_{ei}$  pedig az elektronok és ionok közötti energiacserét, klasszikus meghatározására

$$Q_{ei} = 4\sqrt{2}\pi \frac{e^4 \sqrt{m_e} n^2 (T_e - T_i)}{m_i T_e^{3/2}}, \quad (1.7)$$

ahol  $e$  az elektrontöltés,  $m_e$ ,  $m_i$  az elektron- és iontömeg,  $q_e$  és  $q_i$  az elektronok és ionok energiafluxusa; ionokra például

$$q_i = -\chi_i n \frac{\partial T_i}{\partial \rho}, \quad (1.8)$$

ahol  $\chi_i$  a hővezetési állandó, továbbá

$$Q_e = -\frac{3}{2}(\langle \sigma_i u \rangle + \langle \sigma_e u \rangle) N n T_e, \quad (1.9)$$

$$Q_i = -\frac{3}{2}(\langle \sigma_{ex} u \rangle + \langle \sigma_i u \rangle + \langle \sigma_e u \rangle + \langle \sigma_e u \rangle) N n (T_i - T_N),$$

ahol  $\sigma_{ex}$  az áttöltődési hatáskeresztmetszet,  $T_N$  a semleges gáz hőmérséklete.

Látható, hogy az (1.4) egyenletrendszer első három egyenlete nemlineárisan csatolt rendszert alkot. Ha fölteszük, hogy valami oknál fogva a térbeli változás elhanyagolható bennük, az időbeli változásokat akkor is olyan egyenletrendszer írja le formailag, amelyben elvileg kaotikus viselkedés állhat elő. Ha pedig azt tesszük fel, hogy az időbeli változás már lezajlott, stacionáris állapot állt be - erre egyenesen törekszünk például a fúziós reaktoroknál, formailag akkor is megmarad a nemlineárisan csatolt oszcillátorok rendszere, bár a független változó most az idő helyett a csatolásban explicite szintén nem szereplő  $\rho$  rádiusz. Az Hénon-Heiles -modell tanulmányozásából látni fogjuk, hogy ilyen oszcillátorokból kettő is elég



ahhoz, hogy a rendszer kaotikusan viselkedjék.

A plazma alkotói, a töltött részecskéket tekintve, egyébként is nemlineáris oszcillátorok halmazaként fogható fel. Egyetlen részecske mozgásegyenlete még homogén mágnes térben is (tengelyszimmetria esetében)

$$\ddot{r} + \omega^2 r = \mu^2 / r^3, \quad (1.10)$$

ahol  $\omega = e/(2m)B_0$ ,  $\mu = r_0^2 \dot{\theta}_0$  az azimutális kezdősebesség és rádiusz szorzata, ha pedig az indukció térben változik, az energia a koordináták között drasztikusan átrendeződhet, növekvő indukciónál például, az axiális (vagy erővonalmonti) sebesség nullává vagy negatívvá válhat, s a sebesség azimutális irányban jelentősen megnövekszik. Ebben a szabadsági fokban a mágnes tér csak forgató nyomatékkal hat, a más részecskékkel való kölcsönhatást energetikailag nem befolyásolja. Ilyen nemlineáris oszcillátorok serege hat egymásra a plazmában.

Nem beszéltünk még az (1.4) egyenletrendszer utolsó egyenletéről. Ez is parabolikus parciális differenciálegyenlet, a jobb oldal második tagja csatolja a többihez. Itt  $\sigma$  a plazma vezetőképessége,  $j_b$  pedig a  $j_\phi$  toroidális áram egyik komponense az alábbi összefüggés szerint

$$j_\phi = j_\sigma + j_b = \sigma E_\phi + j_b, \quad (1.11)$$

$j_b$  a plazmasűrűség, valamint a hőmérséklet gradiense miatt keletkezik,  $E_\phi$  a toroidális elektromos tér.

Míg korábban a plazmában zajló folyamatok egy-egy epizódjáról volt szó, most a folyamatokat hordozó szerkezetéről kellene beszélni, hiszen  $B_0$  biztosítja lényegében, hogy ezek a folyamatok véges térfogatban menjenek végbe. Előbb azonban célszerű a Hénon-Heiles-moddal megismerkedni.

Nagyjából [2]-vel egyidőben készült és jelent meg a [7] dolgozat, sorsuk is nagyjából azonos. Évekig nem váltottak ki különösebb érdeklődést, majd felfigyeltek rájuk, s mindmáig élénken foglalkoztatják a tudományos közvéleményt.

Alapvető különbség a két dolgozat között az, hogy míg [2] disszipatív rendszert vizsgál, [7] konzervatív rendszerben ébredő káoszt regisztrál. Szembetűnő különbség a két rendszer tulajdonságaiban az, hogy míg [2]-ben egyetlen paraméter, az  $r$  Rayleigh-szám értéke eldönti, mikor megy át a rendszer reguláris állapotból kaotikusba, addig [7]-ben a helyzet bonyolultabb. Itt az energia nulláról növekedvén egy bizonyos értéknél csak a káosz lehetőségét teremti meg, s a kezdeti feltételek döntenek el, reguláris vagy kaotikus lesz-e a mozgás? Az energia további növekedése csökkenti a reguláris tartományok térfogatát a fázistérben, kellő kinagyítás után azonban ekkor is heterogén szerkezetet figyelhetünk meg. Ismerkedjünk most meg részletesen a [7] dolgozat eredményeivel.

A feladat klasszikus mechanikai mozgás, adott esetben csillagok galaktikai mozgásának tanulmányozása. A probléma a tudományok kezdete óta létezik, ezen az iskolán is szerepelnek bizonyos aspektusai (pl. [8,9]), s hogy a matematikusokat sem hagyja nyugodni, talán elég egyetlen, a maga nemében kitűnő előadásra [10] utalnom. A mozgás hatdimenziós fázistérben zajlik. Teljes leírásához hengeres koordinátákban ismernünk kellene öt

$$I_j(R, \theta, Z, \dot{R}, \dot{\theta}, \dot{Z}) \quad (j=1, \dots, 5) \quad (2.1)$$

mozgásintegrált, vagyis öt darab

$$I_j = C_j \quad (j=1\text{-től } 5\text{-ig}), C_j = \text{const.} \quad (2.2)$$

hiperfelületet, ezek metszete adná a trajektóriát. Létezésük sem bizonyos. Ha léteznek is, lehetnek izolálók vagy nem izolálók, utóbbiaknak hasznát sem vehetjük - ezekkel a kérdésekkel nem fogunk foglalkozni. Annyit tudunk, hogy két integrál



biztosan létezik, a teljes energia és a szimmetriatengelyre vett momentum:

$$I_1 = U_g(R, Z) + \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{Z}^2), \quad (2.3)$$

$$I_2 = R^2\dot{\theta}. \quad (2.4)$$

Itt  $U_g$  a gravitációs potenciál, amelyet (2.4) ismeretében,  $I_2 = C_2$  értéket adva, átírhatunk:

$$U(R, Z) = U_g(R, Z) + C_2^2/(2R^2), \quad (2.5)$$

és a mozgásegyenletet formálisan sík problémára írhatjuk fel,

$$\ddot{R} = -\partial U/\partial R, \quad \ddot{Z} = -\partial U/\partial Z. \quad (2.6)$$

írjunk most  $R$  és  $Z$  helyett  $x$  és  $y$  jelöléseket annak demonstrálására, hogy az  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  fázistér most négy-dimenziós. Három független mozgásintegrálra lenne szükségünk a mozgás teljes meghatározására, és ebből csak a rendszer

$$I_1 = U(x, y) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.7)$$

teljes energiáját ismerjük, minthogy  $U(x, y)$  nem feltétlenül szimmetrikus, s így a szögmomentumra vonatkozó integrál már nem írható fel. Létezik-e második integrál? Ez a potenciálfüggvény alakjától függ.

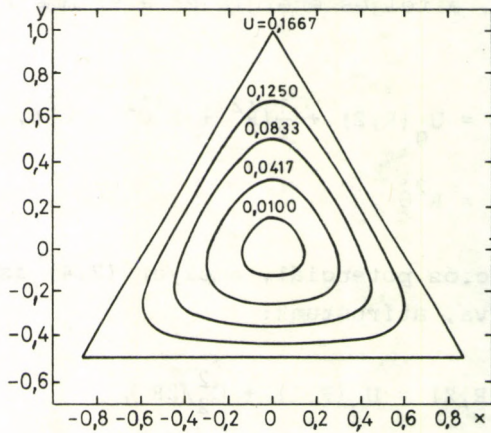
[7]-ben bizonyos meggondolások alapján

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3) \quad (2.8)$$

alakú potenciált választottak. Térképét a 2.1 ábra mutatja. A teljes  $E$  energiát (ez az  $I_1$  első integrál) a (2.7) egyenlet adja. A mozgásegyenletek:

$$\ddot{x} = -\partial U/\partial x = -x - 2xy, \quad (2.9)$$

$$\ddot{y} = -\partial U/\partial y = -y - x^2 + y^2.$$



2.1 ábra. (2.8) ekvipotenciál görbéi

Az egyenletrendszert kvadraturával nem sikerült integrálni. Szerencsére akkor már léteztek nagykapacitású elektronikus számítógépek (CDC 1604 és IBM 7090 gépekkel végezték a számításokat), valamint jó numerikus módszerek (Adams-és Runge-Kutta-módszert alkalmaztak). A hiba akkumulációját követni lehetett, hiszen az E teljes energia változásával jár

$$E = U(x,y) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

alapján, ez a változás örvendetesen kevésnek bizonyult.

Mit várhatunk a (2.9') egyenletrendszer integrálása során? Valamit már pusztán kvalitatív megfontolások alapján is megjósolhatunk. A lineáris tagok egyszerű harmonikus oszcillátorok, a nemlineáris tagokkal csatolódnak egymáshoz. Ez a csatolás azonban nem szimmetrikus. Rendezzük át egy kevésbé a rendszert:

$$\ddot{x} + (1+2y)x = 0,$$

$$\ddot{y} + y = -x^2 + y^2.$$

(2.9)



Azt látjuk, hogy az első oszcillátor továbbra is lineáris: bármilyen függvénye is  $y$  az időnek, parametrikus típusú gerjesztést jelent. A második oszcillátor viszont nemlineáris, és  $x$  nélkül is instabil, időben növekvő megoldást várunk, mivel  $y^2$  formálisan pozitív erőhatást képvisel. Ezt az erőhatást  $x$  növekedése kompenzálhatja, sőt ha gyorsabban növekszik, mint  $y$ , csillapító hatást válthat ki, határt szabhat  $y$  növekedésének. A növekedésnek persze az  $E$  energia is korlátot szab, azonban ez a korlát is, mint (2.8) alapján látjuk, akkor jelentkezik valójában, ha  $x^2 > y^2$ , lévén  $y^3$  előjele negatív.

Tegyük most fel, hogy az oszcillátorok nagyon kis amplitúdóval kezdenek rezegni, annyira, hogy  $x^2$  és  $y^2$  elhanyagolható. Rezonanciáról a második egyenletben nem beszélhetünk, mert mindkét oszcillátor egységnyi frekvenciával kezd rezegni, ezért a jobb oldalon kétszeres frekvencia jelenik meg. Az első egyenletben azonban felléphet parametrikus rezonancia. Legyen ebben a stádiumban  $y = b \cos t$ . Akkor az első egyenlet Mathieu-típusú lesz, s hogy ennek a standard stabilitási térképét használhasuk (2.2 ábra), vezessük be  $T$  új változót  $t = 2T$  szerint. Ekkor

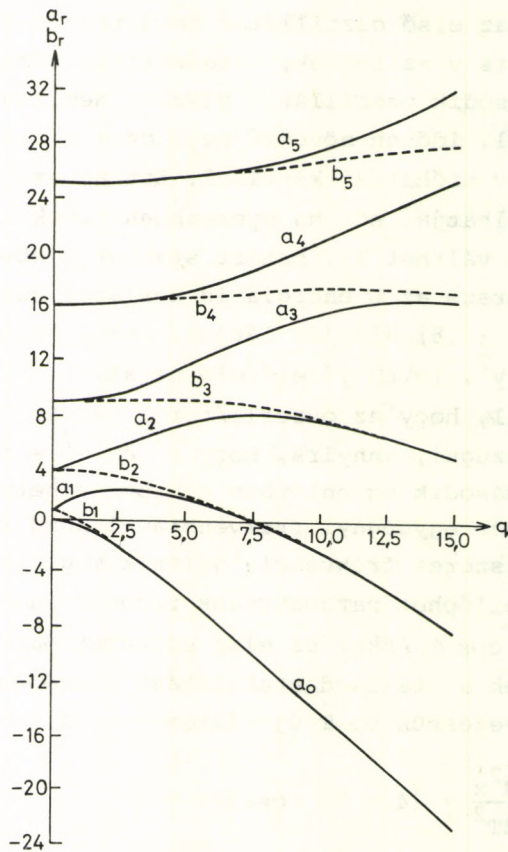
$$\frac{d^2x}{dT^2} + (4 - 8b \cos 2T)x = 0. \quad (2.10)$$

Az ábrán a  $b_1 - a_1$ ,  $b_2 - a_2$ ,  $b_3 - a_3$ , ... görbék közé eső tartományokban a megoldás instabil, az  $a_0 - b_1$ ,  $a_1 - b_2$ ,  $a_2 - b_3$ , ... görbék között viszont stabil. A térkép alapján látjuk, hogy  $a = 4$ ,  $q = 4b$ , és a mozgás nagy  $b$  értékig instabilis tartományban zajlik. Az egyenlet megoldása

$$x = e^{\mu T} \phi(T, \sigma) \quad (2.11)$$

alakban írható, ahol  $\phi$  periodikus függvény (periódusa  $\pi$ ),  $\mu$  és  $\sigma$  pedig valós paraméterek,  $\mu$  pozitív. Értékük a és  $q$  értéke alapján kiszámítható.

Minthogy  $x$  amplitúdója exponenciálisan növekszik, szerepe a második egyenletben gyorsan jelentőssé válik, s növekedését gyorsan a visszajára fordítja. Ámde ekkor  $b$  (és  $q$ ) értéke csökken, vele együtt  $\mu$  értéke is, így előbb-utóbb visszajutunk a kiinduló állapot közelébe és a dolog kezdődik előlről. Közben

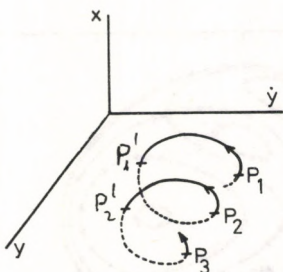


2.2 ábra. A Mathieu-egyenlet stabilitási térképe [16] alapján az  $\ddot{x} + (a - 2q \cos 2T)x = 0$  jelöléssel.  $a_i$  és  $b_i$  a periodikus megoldások stabilitási határai

azonban más is történik. Minthogy az első egyenletben a parametrikus rezonancia is az egyszeres frekvenciát gerjesztette  $t$ -ben, ennek következtében a második egyenletet a kétszeres frekvencia fogja gerjeszteni, amit az  $y$  visz magával az első egyenletből, onnan ismét ennek kétszerese is visszajön és így tovább. Vagyis gyorsan zajlik a frekvenciakettőződéses mechanizmus. Mindegyik frekvenciához más  $\sigma$  fázis tartozik, így beszórják az egész frekvencia-tengelyt.

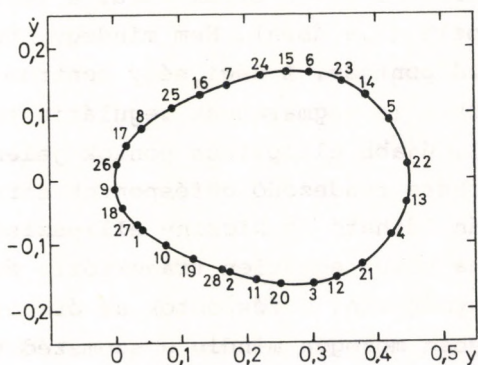


Nézzük most a numerikus kísérleteket. A (2.9) egyenletrendszer fázistere négydimenziós, nem szemléletes. Poincaré-leképezést alkalmaztak az eredmények interpretálására. Ez abban állt, hogy felrajzolták egy trajektóriának az  $x=0$  síkon ejtett dőféspontjaihoz tartozó  $(y, \dot{y})$  értékeket, amikor  $\dot{x} > 0$ , mint azt sematikususan a 2.3 ábra mutatja.



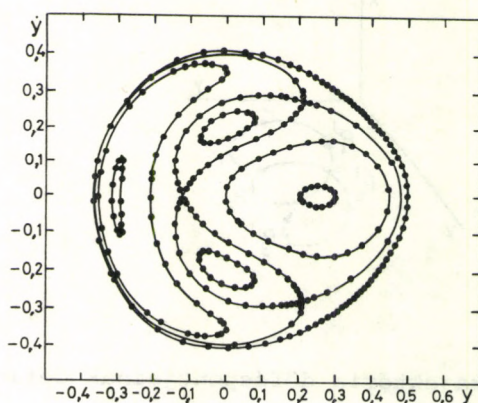
2.3 ábra. A trajektória dőféspontjainak definíciója:  
 $\dot{x} > 0, x = 0$

A dőféspontok egy tipikus sorozatát a 2.4 ábra mutatja  $E = 1/12$  energiaértéknél.



2.4 ábra. Tipikus dőféspont-sorozat

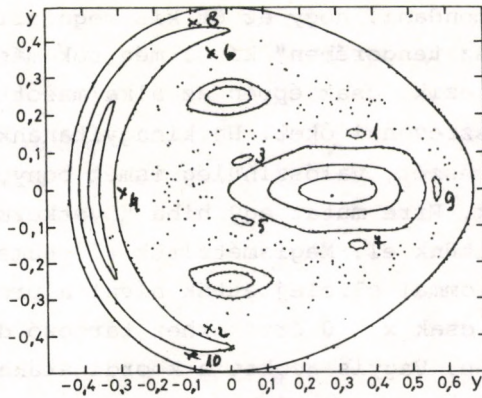
Az  $E$  energia kicsiny értékeinél az  $(y, \dot{y})$  fázissíkon a fázis-térkép teljesen reguláris viselkedést mutat. Mint a 2.5 ábra mutatja, hét különleges pont közül három hiperbolikus, négy pedig centrum, körülöttük önmagukba zárt trajektóriákkal; a trajektóriák lefedik az egész létezési tartományt (természetesen csak a metszeten kirajzolódó zárt görbékre gondolunk, nem a valódi trajektóriákra). Később elmondjuk, hogy két-két átellenes centrum között összefüggés van.



2.5 ábra. Poincaré-térkép  $E = 1/12$  esetén.

Az energia növekedésével  $E=1/8$  érték körül a reguláris kép drasztikusan megváltozik (2.6 ábra). Nem mindegy, hol vesszük fel a trajektória kezdőpontját. A régi négy centrum (elliptikus pont) körül továbbra is megmaradnak reguláris tartományok, de területük leszűkül, újabb elliptikus pontok jelennek meg, körülöttük a zárt görbére rendeződő döféspontok struktúrája bonyolultabb. Az ábrán látható öt kicsiny ellipszist például a nagyobb reguláris zóna közül egyetlen trajektória építi fel olyképpen, hogy az egymásutáni döféspontok az óramutató járásával ellenkező irányban mozogva mindig a szomszédos ellipszissre esnek, az öt ellipszis egyszerre készül el. Ha azonban a reguláris tartományokon kívül bármely pontban veszünk fel kezdőértékeket, a döféspontok teljesen kaotikus módon beszórják

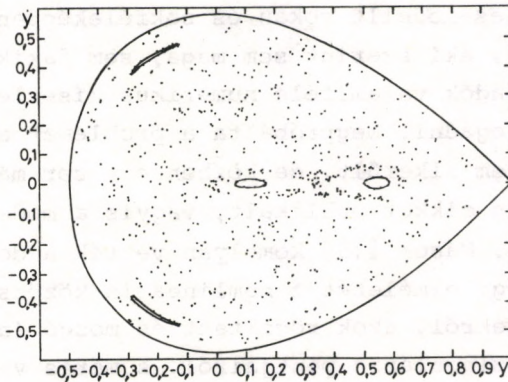




2.6 ábra. Poincaré-térkép  $E = 1/8$  esetén

az egész szabadon maradt tartományt.

Ha tovább növeljük az energiát, a reguláris tartományok területe szűkül, illetve tovább bomlik. A 2.7 ábra már olyan állapotot mutat, amikor a fázissík nagyrészt a kaotikus állapot tölti ki.



2.7 ábra. Poincaré-térkép  $E = 1/6$  esetén

El kell még mondani, hogy az öt kis reguláris zónán, "szigetecskén a kaosz tengerében" kívül még sok más, kisebb felületű sziget is létezik, csak éppen az alkalmazott léptékben nem lehet könnyen észrevenni őket. Ha kinagyítanánk a kaotikus tartomány egy-egy részét, valószínűleg ismét bonyolult struktúrával találkoznanánk. Erre mutat egy hiba következménye is, amelyet a KFKI-ben követtünk el. Megismételtük [7] numerikus kísérletét és egy alkalommal elfelejtettük hívni a programban azt az utasítást, hogy csak  $\dot{x} > 0$  értékekhez tartozó döféspontokat gyűjtsön be a gép. Vagyis azokat a koordinátákat is tárolta, amelyek a  $P'_1, P'_2, \dots$  pontoknak felelnek meg a 2.3 ábrán. Csak amikor a plotter az eredményt kirajzolta, vettük észre, hogy két zárt görbe jelenik meg, egy ellipszis az  $y > 0$  félsíkon, és egy kiflialakú a másik oldalon. Ha fordítva, a kifli alakú tartományban vesszük fel a kezdőpontot  $\dot{x} < 0$  értékkel, visszakapjuk az ellipszist is. Ugyanígy összefügg a 2.6 ábrán látható két reguláris sziget  $y \sim 0$  és  $y > 0$ , valamint  $y < 0$  tartományában. Az öt kicsiny szigetnek is van megfelelője, ezekről [7]-ben nem történik említés. A középpontokat a 2.6 ábrán keresztrel jelöltük, a sorrendet pedig, ahogy a trajektória bejárja a szigeteket, arab számokkal mutattuk meg. Tehát még kinagyítás nélkül is találhatók újabb reguláris zónák.

Az Hénon-Heiles-modellt sokan és sokféleképpen diszkutálták. Van szerző [12], aki szerint sem maga, sem "akiket megkérdezett" nem hajlandók valamiféle numerikus kísérlet eredményeit törvényként elfogadni. Megpróbálta a problémát analitikusan megoldani, ez nem sikerült, de közben egy sor más vonatkozásban igen értékes cikket publikált, vagyis a modell termékenyítőleg hatott rá. Mások [13] komolyan vették a dolgot, elővetették Painlevé régi elméletét a nemlineáris közönséges differenciálegyenletekről, azok rögzített és mozgó (a kezdeti értékektől függő) szinguláris pontjairól, s máris vannak, legalább is a differenciálegyenletek elméletében, érdekes eredményeik. A modellnek azonban vannak prózaian gyakorlati vonatkozásai is, ennek szemléltetésére térjünk vissza a mágnestérhez.



### 3. AZ HÉNON-HEILES-MODELL ÉS A MÁGNESES FELÜLETEK

Az (1.4) egyenletrendszer utolsó egyenlete azt a mágneseret írja le, amelyet külső és a plazmában folyó áramok együttesen hoznak létre. Nagyon tanulságos azonban megvizsgálni a külső áramok által gerjesztett mágneseret, s ennek perturbációjaként tekinteni a belső áramok hatását. Ezt fogjuk most tenni [14] nyomán.

Tekintsük a  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  indukciójú mágneseret. Az erővonalakat a

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

egyenletrendszerből határozhatjuk meg, amelyet így írhatunk:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x(x, y, z)}{B_z(x, y, z)},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_y(x, y, z)}{B_z(x, y, z)}.$$

Ezt az egyenletrendszert olyan dinamikai rendszerként foghatjuk fel, amelyben az idő szerepét a  $z$  koordináta vette át. Tegyük most fel, hogy létezik a rendszernek

$$H = H(x, y, z) \quad (3.2)$$

pontos mozgásintegrálja. Ez az integrál egy

$$z = Z(x, y, H) \quad (3.2')$$

felületsereget határoz meg. Ha egy-egy felületet metszünk a  $z = \text{const.}$  síkkal,

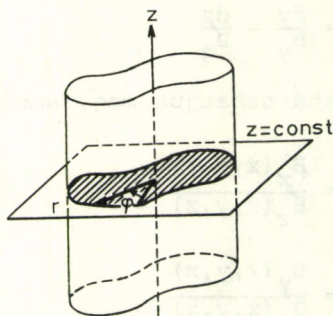
$$y = y(x, H, z = \text{const}) \quad (3.2'')$$

síkgörbét kapunk. Ha ez a görbe bármely  $z$ -re zárt, akkor beszélünk mágneses felületről.

Nézzük most a gyakorlatban az egyik legérdekesebb modellt, a hengeres csavart mágneseret. Ez a tér a

$$\Phi = B_0 z + LbI_n \left(n \frac{r}{L}\right) \sin\left[n\left(\phi - \frac{z}{L}\right)\right], \quad \vec{B} = \nabla\Phi, \quad (3.3)$$

skalár-potenciálból származtatható, ahol  $L$  a csavarmenet lép-téke,  $I_n$  a képzetes argumentumú Bessel-függvény,  $n$  pedig pozi-tív egész szám. A koordináta rendszert a 3.1 ábra mutatja.



3.1 ábra

Ebben a koordinátarendszerben (3.1) konkrét alakja

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z}, \quad r \frac{d\phi}{dz} = \frac{B_\phi}{B_z}, \quad (3.1')$$

$$B_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad B_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}, \quad B_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Ha  $B_0 = L = 1$ , és  $\theta = \phi - z$  szerint új változót vezetünk be, akkor

$$B_r = bnI_n'(nr) \sin n\theta; \quad B_\phi = \frac{bn}{r} I_n(nr) \cos n\theta; \quad (3.4)$$

$$B_z = 1 - bn I_n(nr) \cos n\theta;$$



$$B_z \frac{dr}{dz} = bnI'_n(nr) \sin n\theta, \quad (3.5)$$

$$B_z \frac{d\theta}{dz} = -1 + bn\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)I_n(nr) \cos n\theta,$$

ahol a vessző az argumentum szerinti deriválást jelent,  $B_z$  pedig (3.4) szerint  $(r, \theta)$  függvényként értendő. A (3.5) egyenletrendszer integrálja, mint arról deriválással meggyőződhetünk:

$$H = \frac{1}{2} r^2 - brI'_n(nr) \cos n\theta, \quad (3.6)$$

s ennek konstans értékei határozzák meg az

$$r = r(\theta, H)$$

mágneses felületeket. A (3.6) integrált dinamikai potenciálnak tekinthetjük, sőt mint azonnal látni fogjuk, Hamilton-függvényként is kezelhetjük. Vezessünk be  $z$  helyett új  $t$  ("idő") változót

$$\frac{dz}{dt} = B_z = 1 - bnI_n(nr) \cos n\theta \quad (3.7)$$

szerint, és az új változóban írjuk fel a (3.5) egyenletrendszert. Ha most még a  $\rho = \frac{1}{2} r^2$  új koordinátát is bevezetjük, könnyen beláthatjuk, hogy a (3.6) integrál a következő szép interpretációt teszi lehetővé:

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \rho}, \quad \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad (3.8)$$

ahol a pont  $t$  szerinti deriválást jelent. Formálisan teljesen kanonikus rendszert kapunk, amelyben át lehet térni például a hatás-szög-változókra

$$I = I(H) = \frac{1}{2} r'^2 d\theta, \quad \omega = \omega(I) = \frac{dH(I)}{dI} \quad (3.9)$$

szerint, akkor

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(I), \quad (3.10)$$

ahol

$$\begin{aligned} \vartheta(\theta, I) &= \frac{\partial S(\theta, I)}{\partial I}, \\ S(\theta, I) &= \frac{1}{2} r^2 d\theta, \end{aligned} \quad (3.11)$$

és a [11]-ben ismerttetett teljes matematikai apparátus alkalmazható bonyolultabb kérdések megválaszolására is. Például feltehetjük, hogy a belső áramok perturbálják a skalár-potenciált:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1,$$

s megvizsgálhatjuk ennek hatását a dinamikára, vagy perturbáló kinetikai effektust is bevonunk a vizsgálatba. A (3.6) "dinamikai potenciál" mindenesetre meghatározó jellegű. Nézzük meg ennek a potenciálnak a térképét  $n=3$  esetén. Ha a Bessel-függvény sorának csak az első tagját vesszük, és derékszögű koordinátákra térünk vissza, írhatjuk, mivel  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,

$$r^3 \cos 3\theta = r^3 \cos \theta (1 - 4 \sin^2 \theta) = x(r^2 - 4y^2) = 3x\left(\frac{1}{3}x^2 - y^2\right),$$

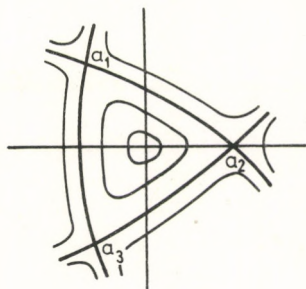
ezért, a dinamikai potenciál, ha  $b_1$  újabb állandó:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + b_1(xy^2 - \frac{1}{3}x^3). \quad (3.12)$$

Láthatjuk, hogy ez a kifejezés a  $b_1$  konstans értéket nem tekintve a (2.8) Hénon-Heiles-potenciálnak felel meg, csak az  $x$  és  $y$  változók cserélődnek fel. A Bessel-sor erős konvergenciája miatt (3.6) korrekt térképe nem sokban tér el a (3.12) közelítéstől, mint a 3.2 ábra szematikusan mutatja. A határoló görbék majdnem egyenesek.

Az Hénon-Heiles-modell tehát azt mutatja, hogy a mágnesfelületek stochasztikus sérülést szenvedhetnek a perturbáció során. Ezt a tényt másfajta, a mostanitól független analitikus számításokkal is meg lehet mutatni [15], a laboratóriumi mérések is igazolják. A zárt mágneses felületek garantálják a térgradiensének létezését és így a plazmát együtt-tartó hatását is. A stochasztikus felbomlás ezt a hatás szüntetheti meg.





3.2 ábra. A (3.6) integrál "ekvipotenciálja"

#### IRODALOM

1. A.Sz. Pikovszkij, M.I.Rabinovics, V.Ju.Trahtengerc, Vozniknovenuje sztohasztnicsnoszti pri raszpadnom agranicsenyii parametricseeszkoj neusztojcsivosztyi, Zszurnal Experimentalnij i Teoricseeszkoj Fiziki 74, 1366, 1978.
2. E.N.Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the Atmospheric Sciences 20, 130, 1963.
3. C. Mercier, Soubbaramayer, V. European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Grenoble, 2, 157, 1972.
4. Yu.N.Dneszkovszkij, D.P.Kosztomarov, Vicsiszlityelnie metodi v fizika plazmi (Moszkva, Mir, 1980)
5. D.F. Düchs, D.E. Post, P.H. Rutherford, Nuclear Fusion, 17, No3, 565, 1977.
6. Ju.N. Dneszkovszkij, D.P. Kosztomarov, Itogi nauka i tehnik, Fizika plazmi, tom 2 (Moszkva VINITI, 1981)
7. M. Hénon, C. Heiles, The applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments, The Astronomical Journal 69, No1, 73, 1964.
8. Krámlí András, ez a kötet
9. Érdi Bálint, ez a kötet
10. A.N. Kolmogorov, Obscsaja teoria dinamicseeszkih szisztem i klasszicseszkoj mehanika, Mezsdunarodnij kongressz matematikov v Amszterdame, Moszkva, 1961, 187. oldal
11. Bevezetés... F.6 függelék
12. P.G.L. Leach, A note on the Hénon-Heiles problem. Journal of Mathematical Physics 21, 1, 38, 1980.
13. T. Bountis, H. Segur, F. Vivaldi, Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property. Physical Review A 25, 3, 1257, 1982.
14. G.M. Zaszlavszkij, Sztatiszticeseszkoj neobratimoszty v nelinejnih szisztemah, Moszkva, Nauka, 1970.
15. J.M. Finn, The Destruction of Magnetic Surfaces in Tokamaks by Current Perturbations, Nuclear Fusion 15, 845, 1975.
16. M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Math. Functions, Dover Publ. New-York, 1972, 724. oldal





AZ ERGODELMÉLET SZEREPE A STATISZTIKUS  
FIZIKA MEGALAPOZÁSÁBAN

Geszti Tamás

1. Előzmények	425
2. A fogalomkör kritikája és bővítése	429
3. A modelltulajdonságok megvalósulása dinamikai rendszerekben	431
4. Kis rendszer, nagy rendszer	433
5. Befejezés: még mindig kérdések	434
Irodalom	435





## 1. ELŐZMÉNYEK

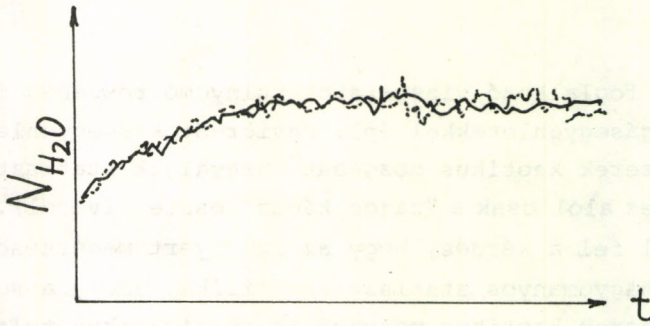
A káosszal foglalkozó vizsgálatok túlnyomó részében determinisztikus mozgásegyenletekkel (pl. Navier-Stokes-egyenlet) jellemzett rendszerek kaotikus mozgását tárgyaljuk statisztikus eszközökkel (ez alól csak a "zajos káosz" esete kivétel). Természetesen merül fel a kérdés, hogy az így nyert megértésből mit kap vissza a hagyományos statisztikus fizika, amely a sokrészezske-rendszerek kaotikus mozgásának statisztikus tulajdonságait inkább posztulálja, mint levezeti.

Az a kérdéscsoport, hogy a statisztikus fizika hagyományos alkalmazásai a mozgás milyen statisztikus sajátságain alapulnak és hogy ezek a sajátságok hogyan vezethetők vissza a klasszikus, ill. kvantummechanikai mozgásegyenletek megoldásaira, egyáltalán nem új. Ezzel foglalkozik a matematika ergodelmélet-nek nevezett ága, amely a 30-as években sok ragyogó eredményt ért el, majd az utóbbi évtizedben újabb virágzásnak indult. Ezt az újabb fejlődést ismerteti Szász Domokos előadása. Meg kell azonban mondani, hogy a modern ergodelméletet eléggé vékony szálak fűzik őspröblematikájához, a statisztikus fizika megalapozásához. Ezeket a szálakat próbálja követni a jelen előadás, fizikusok által írott összefoglaló cikkek [1-6] és eredeti publikációk alapján.

Példaképpen induljunk ki egy edényből, amelybe egy pohár vizet helyeztünk, majd  $t = 0$ -ban lezártuk az edényt. Kövessük egy egyszerű termodinamikai mennyiségnek: a gőzfázisban levő vízmolekulák  $N_{\text{H}_2\text{O}}(t)$  számának időbeli változását (1.1 ábra). A tapasztalat szerint a változás egy sima időfüggésből és a rá szuperponált gyors, szemre kaotikus, de kicsiny amplitúdójú fluktuációkból tevődik össze. Igen fontos körülmény, hogy a kísérletet többször megismételve bár a pontos időbeli lefutás mindig más lesz, de stabilan reprodukálódik mind a sima, nagyamplitúdójú változás, mind a fluktuációk statisztikus jellemzői (négyzetes átlageltérés, frekvencia-spektrum stb.).

A statisztikus fizika hagyományosan azt a feladatot vállalja magára, hogy valamilyen átlagolási eljárással megszabadulva a kísérletről-kísérletre változó, áttekinthetetlen és érdektelen egyedi sajátságoktól, meghatározza a sokkal egyszerűbb és





1.1 ábra. Vízmolekulák száma egy pohár víz fölötti zárt göztérben. Folytonos, ill. pontozott vonal: két mérés eredménye (sematikus ábra)

lényegesebb stabilan reprodukálódó tulajdonságokat, mindenekelőtt a termodinamikai mennyiségek átlagértékeinek sima változásait és egyensúlyi értékét.

Az ergodelmélet Boltzmannnak abból az élesen megfogalmazott észrevételéből nőtt ki, hogy az átlagolásnak két lényegesen különböző módja lehetséges, és a statisztikus módszerrel szembeni alapvető követelmény, hogy a kétféle átlagolás azonos eredményre vezessen. Az átlagolás kétféle módja:

1. Időátlagolás. Egyedi rendszeren elég hosszú időre kiterjesztve a vizsgált mennyiség termodinamikai egyensúlyi értékét szolgáltatja. Nemegyensúlyi változások követésére alkalmatlan. Egyensúlyi átlagok meghatározására elvben egyértelmű. Elméleti fizikai technikává nem fejleszthető, mert kiszámítása a sokrészecske-rendszer mozgásegyenletének teljes megoldását igényli.

2. Sokaságátlagolás. Ez valójában a kísérlet sokszori megismétlésének szemléltetése egyidőben, makroszkópicusan azonos körülmények között indított kísérletek sokaságával. Így tetszőleges nemegyensúlyi helyzet is vizsgálható. A számolás általában óriási mértékben leegyszerűsödik az időátlagoláshoz képest. Alapvető nehézség azonban, hogy nincs egyértelmű logikai út annak meghatározására, hogy makroszkópicusan azonos körülmények között milyen eloszlásban lépnek fel a különböző



mikroszkópikus kezdeti állapotok.

Az alábbiakban klasszikus statisztikára korlátozzuk a vizsgálatot: az  $N$  azonos részecskéből álló rendszer állapotát a  $6N$ -dimenziós fázistér  $x = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  pontjával jellemezzük, a sokaságot pedig ezen pontok  $\rho(x, t)$  normált eloszlásfüggvénye írja le.

Gibbstől származik az adott makroszkópikus körülményeket helyesen reprezentáló sokaság megkeresésének az a stratégiája, hogy először izolált, termikus egyensúlyban levő rendszerek leírását keressük. Valóban, környezetükkel kölcsönható rendszerek tekinthetők nagy izolált rendszer kis részének, nem-egyensúlyi állapotok pedig előállíthatók egyensúlyi állapotok könnyen jellemezhető perturbációival.

Az izolált rendszerhez  $H(x)$  Hamilton-függvényt rendelhetünk; az  $x(t)$  fázispont mozgását a Hamilton-egyenletek rendszere, a  $\rho(x, t)$  eloszlásfüggvény változását pedig a Liouville-egyenlet írja le.

Egyensúlyi állapotban a tapasztalat szerint a megfigyelhető mennyiségeknek nem csak átlagértéke, hanem a sok kísérletben mért értékek átlag körüli eloszlása is független az időtől. Ennek megfelelően az egyensúlyi állapotot időtől független  $\rho(x, t) = \rho(x)$  fázistérbeli eloszlásfüggvénnyel kell reprezentálnunk. Ez csak úgy lehetséges, ha  $\rho$  csak a mozgásállandókon keresztül függ  $x$ -től, oly módon, hogy a benne explicite megjelenő mozgásállandók értékét mint paramétert rögzíti. Mivel azonban a sokaság egy makroszkópikusan azonos kísérletsorozatot reprezentál, csak azon mozgásállandók értékét rögzíthetjük, amelyeket makroszkópikusan kontrollálni tudunk. Ilyen mozgásállandó általában csak egy van: az energia (az összimpulzus és összimpulzus-momentumcsak akkor mozgásállandók, ha a rendszer erőmentes térben lebeg, a többi  $6N-2$  mozgásállandó értéke pedig kísérletről-kísérletre változik). Így az egyensúlyi  $\rho$  csak  $H(x)$ -en keresztül függhet  $x$ -től, mégpedig úgy, hogy  $H(x)$ -et többé-kevésbé élesen egy meghatározott  $E$  értékre korlátozza. Ezeknek a követelményeknek csak a mikrokanonikus sokaság tesz eleget:

$$\rho_{\text{mikr}}(X|E) = \delta(H(x) - E) / W(E) ,$$

ahol  $W(E)$  normálási tényező.

Most kell visszatérnünk Boltzmann eredeti kérdésfeltevéséhez: az ilyen módon meghatározott egyensúlyi sokaságra vett átlagérték megegyezik-e az időátlaggal? Ez nyilván attól függ, hogy milyen a vizsgált rendszer, milyen az átlagolandó mennyiség, sőt még attól is, hogy mennyi időre átlagolunk. Mindenesetre célszerű kiindulásul bevezetni a következő maximalista definíciót: ergodikus rendszer az a dinamikai rendszer, amelynek  $x(t) = T_t x$  időfejlődésére végtelen ideig átlagolva, tetszőleges  $f(x)$  fizikai mennyiségre teljesül:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(T_t x) dt = \int f(x) \rho_{\text{mikr}}(X|E) dx.$$

Ennek a tulajdonságnak: az ergodicitásnak teljesüléséhez nyilván szükséges, hogy az  $x(t)$  fázispont be tudja járni az egész energiafelületet: a mozgást ne gátolja sem az energiafelület esetleges szétesése különálló részekre, sem valamely, az energián kívüli egyértékű ("izoláló") mozgásállandó létezése (v.ö. [7]). Amelyik rendszerre az ergodicitásnak ez a szükséges feltétele teljesül, arra azt mondjuk, hogy mozgása metrikusan tranzitív, más szóval energiafelülete metrikusan felbont-  
hatatlan (azaz minden invariáns része 0 vagy 1 mértékű).

Ergodikus tételnek nevezzük azt az állítást, hogy a metrikus tranzitivitás nemcsak szükséges feltétele az ergodicitásnak, hanem lényegében elégséges is. A "lényegében" majdnem triviális, csak matematikai érdekességű feltételeket jelent; ilyen feltételek különböző rendszereire a 30-as években Birkhoff, Hopf és Neumann bizonyított be ergod-tételeket.

Ezzel azonban - mint kiderült - korántsem kaptak a fizikusok megnyugtató választ arra a kérdésre, hogy reális rendszerekre vagy modellrendszerekre mikor, miért és meddig lehet alkalmazni a statisztikus fizikát.



## 2. A FOGALOMKÖR KRITIKÁJA ÉS BŐVÍTÉSE

Az ergodelmélettel kapcsolatos kezdeti optimizmusra a konkrét rendszereken végzett vizsgálatok többszörösen rációfoltak.

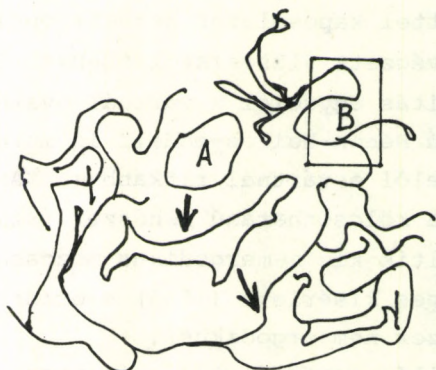
1. Az ergodicitás egyfelől a vártnál gyakoribb (pl. a néhány szabadságfokú Hénon-Heiles-modell is mutathat ergodikus mozgásokat), másfelől a vártnál ritkább (a KAM-tétel szerint minden véges, sima kölcsönhatású rendszer fázissterének véges mértékű részét töltik ki nemergodikus mozgások; Fermi, Pasta és Ulam számítógépes kísérlete (1955) szerint egy anharmonikus oszcillátor-rendszer nem ergodikus).

2. Az ergodicitás egyfelől túl erős megszorítás a statisztikus fizika céljaira (főleg vizsgálni tetszőleges  $f(x)$ -et és végtelen időkre vett átlagot), másfelől túl gyenge (pl. az egydimenziós harmonikus oszcillátor mozgása ergodikus, de az átlagok körüli "fluktuációk" se kicsik, se véletlenszerűek).

A legutoljára említett nehézségekből a kiút már Gibbs munkáiban megtalálható. A dinamikus rendszerek statisztikus viselkedését Gibbs nem az ergodicitás, hanem egy egész más tulajdonság: a keverés felől közelítette meg. A keverés a mozgás azon (posztulált) sajátosságát jelenti, hogy az energiafelületen egy kezdetben kompakt sokaság (2.1 ábra: A) idővel amőbalábakat ereszt, majd ezek vékonyodnak és tovább ágazódnak, végül a sokaság ágai sűrűn betöltik az egész energiafelületet, bár közben a fázispontok mennyisége - összhangban a Liouville-egyenlettel - nem változott. Az egész arra hasonlít, amikor - Gibbs puritán lelkében támadt hasonlat szerint - egy csepp tinta apró szemcséi keveréskor egy pohár víz minden részébe eljutnak, vagy amikor - Arnold és Moser kifinomultabb izlése szerint - egy kupica gin cseppecskéi megjelennek egy pohár vermut minden kortyában. Ha a kezdeti sokaság  $l$  sűrűséggel töltött ki egy olyan  $A$  tartományt, amelynek mértéke az egész energiafelületének  $\xi$  hányada volt, akkor elég hosszú idő után a szétkevert sokaság az energiafelület tetszőleges  $B$  részének éppen  $\xi$  hányadát fogja kitölteni:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_B \rho d\mu = \xi \int_B d\mu ,$$

ahol  $\int d\mu$  az energiafelületi mérték szerinti integrálást jelenti



2.1 ábra. Az A kezdeti sokaság fejlődése során a nyílakkal jelzett alakokat veszi fel, fokozatosan behálózva az energiafelületet. Ezt a B tartományból vett mintákon követhetjük.

A keveredés tulajdonsága sem került el az ergodelmélet korai kutatóinak figyelmét: pl. Hopf bebizonyította, hogy az  $S_E$  energiafelület önmagával vett direkt szorzatának metrikus felbonthatatlanságából következik a keverés tulajdonsága.

Hát a keverésből mi következik? Mindenekelőtt az ergodicitás: könnyű megmutatni, hogy minden keverő rendszer metrikusan tranzitív, tehát ergodikus. Másfelől a keverés az egyensúly beállításának is modellje és adekvát leírása: a jól elkevert sokaságon az átlagértékek időben állandóak, a fluktuációk kicsinyek.

Egy Krülov nevű, fiatalon elhunyt szovjet matematikus ismerte fel, hogy a keverő rendszerek legszembeötlőbb tulajdonsága a fázistérbeli pályák teljes instabilitása: egy kompakt kezdeti sokaságban egymás közvetlen közelében levő pontok a fejlődés során az energiafelület legtávolabbi pontjaiba juthatnak el. Másfelől az ilyen típusú instabilitást tekintjük a kaotikus viselkedés alapvető kritériumának is. A keverés fogalma tehát összekapcsolja a statisztikus fizika megalapozását a káosz vizsgálatával.



Az ergodicitással és keveréssel megkezdett sort a matematikusok az elmúlt években hosszan folytatták:

ergodikus rendszer,  
gyengén keverő rendszer,  
erősen keverő rendszer,  
K-rendszer,  
Bernoulli-rendszer.

Ezek a kifejezések a dinamikus rendszerek sztohasztikus viselkedésének különböző szintű modelljeit fedik, némelyikük jelentését Szász Domokos előadásában [8] lehet megtalálni. A felsorolás sorrendje egyre erősebb tulajdonságok felé halad: mindegyikből következik, hogy a rendszer az összes megelőző kategóriákba is beletartozik. A modellek hierarchiájának építése igen nagy mértékben a matematikusok belügye; fizikus szempontból az ad neki érdekességet, hogy egyes modellrendszerekre (amelyek nem feltétlenül dinamikai rendszerek) az erősebb tulajdonságot könnyebb lehet bebizonyítani, mint a gyengébbet.

Fizikusok számára érdekes és szinte egyáltalán nem vizsgált kérdés, hogy a jelen pont elején az ergodicitás fogalmával szemben emelt aggályok hogyan élednek újjá az erősebb tulajdonságok kapcsán.

### 3. A MODELLTULAJDONSÁGOK MEGVALÓSULÁSA DINAMIKAI RENDSZEREKBE

Diszkrét leképezések körében viszonylag könnyű példát találni a véletlenszerűséget szimuláló tulajdonságok előző pontban említett hierarchiájára. Ennél sokkal nehezebb ilyen tulajdonságokat bizonyítani vagy cáfolni egy Hamilton-függvénnyel jellemzett és ennek megfelelően mozgó dinamikai rendszer esetén. Az analitikus vizsgálatok a matematikai csúcsteljesítmények birodalmába tartoznak. Tág tere nyílik a számítógépes kísérletezésnek, azonban ennek korlátozott pontossága miatt komoly elméleti matematikai feladat annak eldöntése, hogy mit is lehet számítógéppel bizonyítani [9].

Különös hírnévre tett szert Szinaj eredménye, aki a róla elnevezett biliárdmodellről (ld. [10]) bebizonyította, hogy

ergodikus és keverő. Nem kevésbé híresek a Fermi, Pasta és Ulam [11] által kezdeményezett számítógépes vizsgálatok csatolt oszcillátorokból álló rendszereken, amelyekről újra és újra kiderül, hogy nem ergodikusak. A kétféle modell annyira távol esik egymástól, hogy a köztük levő senki földjét számítógépes kísérlettel bejárni és pusztán empirikus utalásokat keresni az ergodikusságot, keverést stb. meghatározó dinamikai sajátosságokra, értelmetlen időpocsékolásnak látszik. Szerencsére az elmélet ad némi utalást arra, hogy hol kell keresnünk:

a) A Szinaj-biliárd potenciálja a helynek "szögletes" függvénye, az oszcillátor-potenciál pedig sima. Mivel a KAM-tétel (ld. [12]) csak elegendően sima potenciálra mondja ki az integrálható pályák sokaságának létét, érdemes megvizsgálni egymáshoz hasonló, de a potenciál "durvaságában" különböző modellek ergodicitási sajátosságait.

b) Az oszcillátor-rendszerek integrálható mozgásai nem csillapodó nemlineáris gerjesztések meghatározott osztályához: a szolitonokhoz kapcsolódnak [13]. Hasznosnak tűnik annak megvizsgálása, hogy egybeesnek-e a szolitonyszerű gerjesztések stabilitásának és a nemergodikus viselkedésnek a feltételei.

c) Alapvető és sokatigérő rendező elvnek látszik a hiperbolicitás. Poincaré-leképezésekben a kaotikus viselkedés határozottan összekapcsolódik a hiperbolikus fixpontok és a hozzájuk tartozó homoklinikus pontok létezésével [4,6].

Az empiria oldaláról egy lényeges körülmény merült fel: az integrálható mozgásra hajlamos modellrendszerek általában egy ergodicitási küszöbenergia fölött kezdenek kaotikus mozgást mutatni. Ez azonban feltehetően hiperbolikus fixpontok megjelenéséhez kapcsolható, így nem jelent lényegesen új szempontot, csak a fixpontok jellegének energiafüggésére irányítja a figyelmet. Megemlítjük, hogy Cercignani és munkatársai [14] az ergodicitási küszöbenergiát a kvantummechanikai zéruspont-energiával hozták analógiába. Bármilyen messze vihető is az analógia, feltehetően csak véletlen hasonlóságról van szó.



#### 4. KIS RENDSZER, NAGY RENDSZER

Bár az előző pontban lett volna helye, fontossága miatt került külön pontba annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy az ergodicitás, keverés stb. tulajdonságok mennyiben kapcsolódnak a nagy rendszer határesetéhez, az un. termodinamikai limeszhez ( $N, V \rightarrow \infty$ ;  $N/V$  véges), és hogy kicsiny, izolált rendszerekre mennyiben alkalmazható a sokaság-átlagolás módszere (nem izolált kis rendszert természetesen kanonikus, ill. nagykanonikus sokasággal lehet jellemezni).

A fenti kérdésfeltevéstől célszerű élesen elválasztani azt a - statisztikus fizikában standardnak számító - problémakört, hogy a sokaságátlagolás módszerének felhasználásával milyen tulajdonságokat lehet bebizonyítani a termodinamikai limeszben. Ilyen, makroszkópikus testekre jellemző közismert tulajdonságok: az extenzív mennyiségek alakfüggetlensége, a fázisátmenetek létezése, a véges transzportegyütthatók létezése stb. A kétféle kérdésfeltevés nem szerencsés összekeveredésének tűnik Lebowitznak az a nem kevés publicitást kapott eredménye, hogy keverő rendszerben a transzportegyütthatók eltűnnek [15]. Valójában ez annak a következménye, hogy a keverés matematikai definíciójának csak véges rendszer tehet eleget, véges rendszerben viszont a transzportegyütthatók azért tűnnek el, mert a Kubo-formulában nem lehet elvégezni a  $\vec{q}$  hullámvektoron a  $\vec{q} \rightarrow 0$  határátmenetet.

Visszatérve a minket érdeklő kérdéshez, az optimista várakozás ezen a téren az, hogy a részecskeszám növelésével összezugorodnak a KAM-tételben említett integrálható pályák, és a fázisteret egyre növekvő mértékben kitölti a kaotikus mozgás. Anharmonikus oszcillátor-rendszerek ennek a várakozásnak nem látszanak eleget tenni, de tudjuk, hogy esetükben ezt a szolitonok kivételes (nek tűnő) stabilitása okozza.

Egy lényegesen eltérő modellrendszert vizsgált számítógéppel Froeschlé és Scheidecker, némi csillagászati alkalmazásuktól is motiválva [16]:  $N$  darab párhuzamos,  $yz$  irányban végtelen kiterjedésű lemez  $x$  irányu mozgását, ha a lemezek között tömegvonzás hat, és a lemezek összeütközve áthaladhatnak



egymáson. A kaotikus viselkedés legfontosabb ismérveként a rendszer fázistérbeli pályáinak stabilitását vizsgálták: véletlenszerűen, egymáshoz igen közel indított pályapárok eltávolodását az idő múlásával. Az eredmény a fentemlített optimista várakozásnak felelt meg:  $N = 3$ -ra a mozgás túlnyomó többségében stabilnak (integrálhatónak) mutatkozott,  $N = 4-5$ -re már csak elvétve fordultak elő integrálható pályák (egymás közelében maradó pályapárok), míg  $N \geq 6$  esetén már csak teljesen instabil, kaotikus mozgást lehetett kimutatni.

Természetesen megmarad a kérdés, hogy hol a határ a gravitáló lepények és az anharmonikus oszcillátorok ellentétes viselkedése között? Lényeges-e az egydimenziós gravitációs erő ugrása 0 távolságnál? Össze lehet-e kapcsolni a megfigyelt viselkedést hiperbolicitással?

## 5. BEFEJEZÉS: MÉG MINDIG KÉRDÉSEK

A gyakorló fizikus persze teljesen helyesen cselekszik, ha az eddig vizsgált kérdések mindegyikében az "optimista várakozások" talaján marad. Erre az álláspontra egyetlen enyhén aggasztó tény vet némi árnyat: az anharmonikus oszcillátorok patológikus viselkedése, mivel ilyen rendszerekkel gyakorlatibb esetekben (pl. dielektrikumok hővezetésének magyarázatánál) is van dolgunk.

Aki azonban hivatásszerűen akar foglalkozni a statisztikus fizika megalapozásával, az számos érdekes nyitott kérdéssel találja magát szembe. Talán a legegyszerűbb reális rendszerek integrálható részrendszereinek kérdése: ilyen pl. a magspinek mozgása enyhén inhomogén mágneses térben, ami a spin-ekho jelenségért felelős, az ekho-jel gyengülése pedig közvetlen megfigyelési lehetősége annak, hogy a kaotikus környezettől eredő zaj hogyan módosítja az önmagukban integrálható szabadságfokok mozgását. Más ekho-jelenségek hasonló módon tárgyalhatók.

Az ergodelmélet kb. 1935-65 közötti csendesebb időszakának fő kutatási iránya volt a makroszkopikus (termodinamikai) mennyiségek explicit megkülönböztetése az elméletben. Ugyan-



ezt érdemes lenne elvégezni az ergodicitásnál erősebb modellek esetében is, hiszen pl. a keverésből következő tetszőleges mennyiség egyensúlyhoz tartása, ami nyilván irreálisan erős megszorítás.

Az ergodelmélet látóköréből rendszeresen kiesnek a termodinamikai limeszben megjelenő mechanizmusok, amelyek pedig pl. az egyensúlyhoz tartásnak alapvetően lényeges oldalát ragadják meg: pl. gázokban az ütközések egymásutánja addig tárgyalható áttekinthetően, amíg a falakról való visszaverődésről elfelejtkezhetünk. Az ütközés-lánc, mint végtelen rendszerben működő keverés-szerű mechanizmus feltárása biztosan nem ütközne nagy nehézségekbe.

Hasonló irányba mutat annak felismerése, hogy a disszipatívitás a makroszkopikus rendszerek meghatározott szabadságfokaira vetített konzervatív folyamatok sajátja. Ha így vesszük, tulajdonképpen a "disszipatív káosz" minden megismert mechanizmus egyben "konzervatív káoszt" is eredményez, csak az elméleti tárgyalás megkívánja a disszipatíván viselkedő szabadságfokok explicit kiválasztását. Ebben az irányban már megindult némi aktivitás [17], de sokkal több a tennivaló, mint az eredmény.

#### IRODALOM

1. A.S. Wightman, *Statistical Mechanics at the Turn of the Decade*, szerk.: E.G.D. Cohen (North-Holland, Amsterdam, 1968)
2. I.E. Farquhar, *Irreversibility in the Many-body Problem*, szerk.: J. Biel, J. Rae (Plenum, New York, 1972)
3. J.L. Lebowitz, O. Penrose, *Physics Today* 26(2), 23, 1973.
4. J. Ford, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics III*, szerk.: E.G.D. Cohen (North-Holland, Amsterdam, 1975)
5. R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1975)
6. A.S. Wightman, *Perspectives in Statistical Physics*, szerk.: H.J. Raveché (North-Holland, Amsterdam, 1981)
7. Bevezetés... F.6 függelék
8. Szász Domokos, ez a kötet, 3.1, 3.3 fejezet
9. Ja.G. Sinai, E.B. Vul, *J. Stat. Phys.* 23, 27, 1980.
10. Vetier András, ez a kötet
11. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Los Alamos Sci. Lab. Report N.La-1940, 1955.
12. Krámlí András, ez a kötet
13. J. Ford, *Lecture Notes in Physics* 28 (Springer Verlag, Berlin, 1974)

14. C. Cercignani, L. Galgani, A. Scotti, Phys. Letters 38A, 403, 1972; Phys. Rev. Letters 28, 1173, 1972.
15. J.L. Lebowitz, Proc. 6th IUPAP Conf. on Statistical Mechanics, szerk.: S.A. Rice, K.F. Freed, J.C. Light (University of Chicago Press, Chicago, 1972)
16. C. Froeschlé, J.-P. Scheidecker, Phys. Rev. A12, 2137, 1975.
17. S. Goldstein, B. Mirsa, M. Courbage, J. Stat. Phys. 25, 111, 1981.



Szász Domokos

1. Bevezetés	439
2. Dinamika - dinamikai rendszer	441
3. Dinamikai rendszerek (klasszikus ergodelmélet)	445
3.1 Birkhoff-Hincsin-ergodtétel	445
3.2 Szimbolikus dinamika	450
3.3 Keverés, Kolmogorov-keverés	455
3.4 A macska automorfizmusa - hiperbolicitás	457
4. Dinamikák (ergodelmélet és káosz)	462
4.1 Egyszerű disszipatív modell: a szolenoid leképezése	462
4.2 Cantor-halmazok	463
4.3 Ergodtétel a szolenoid leképezésére	466
4.4 Attraktorok	468
4.5 Hiperbolikus dinamikák	470
4.6 Entrópia és topológikus entrópia	470
4.7 Bowen-Ruelle ergodtétélei dinamikákra	474
4.8 Kutatási irányok	477
Irodalom	478

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100



Galilei: ... Ősidők óta a véletlen jelenségekben, mint a kockadobás, a madarak röpte, az áldozati állat májának szabálytalan vonalai, az istenek akaratának megnyilvánulását látták, és mindezek szent borzadással töltötték el az embereket. (Rényi: A természet könyvének nyelve.)

## 1. BEVEZETÉS

A statisztikus fizika klasszikusainak (Gibbs, Boltzmann, Maxwell) felfogása szerint a fizikai rendszereknél a szabadsági fokok számának redukciója vezet statisztikus törvényszerűségek megjelenéséhez, sztochasztikus viselkedéshez. Lényegében a 70-es évekig úgy tűnt, ez a kép - kiegészítve a kvantumelmélettel - elegendő a különféle rendszerekben fellépő sztochasztikus viselkedés leírásához. Példának okáért a Brown-mozgás szigorú megalapozásánál - bár ez a kérdés még megoldatlan - mai megértésünk szintjén is ez a helyes hozzáállás.

A fizikai véletlen megalapozásának problémáját Hilbert is a század előtt álló kiemelt feladatnak tekintette 1900-ban tartott híres előadásában, és e tekintetben is jelentős lépés volt Kolmogorov 1933-ban irt - szintén híres - dolgozata a valószínűségszámítás megalapozásáról. A valószínűségszámítás különféle sztochasztikus tulajdonságokat vezetett be és ezeket részletesen tanulmányozta. A valószínűségszámításon belül elsősorban az ergodelméletnek volt célja ezeket a tulajdonságokat (konzervatív) fizikai rendszerekre alkalmazni, és erre igen hatékony módszereket dolgozott ki. A klasszikus ergodelmélet egyik csúcsteljesítménye volt, amikor Szinaj 1970-ben bebizonyította a róla elnevezett biliárd ergodicitását - sőt Kolmogorov-keverő tulajdonságát is. Mint később itt is lesz erről szó, ez volt az első fizikai jellegű modell, amelyről sikerült - mégpedig elég erős - ergodikus tulajdonságokat igazolni, és a használt, igen mély módszer messzemenően általánosítható is. A bizonyítás azon alapszik, hogy a jó ergodikus viselkedést a rendszer hiperbolikus jellege vonja maga után. De Szinaj eredményének nemcsak ennek, a már Krülovnál is meg-

fogalmazódott gondolatnak a technikailag is rendkívül bonyolult érvényrejuttatása a mondanivalója, hanem a következő is - jól-lehet egy ideig ezt még nem vették észre -: a sztochasztikus viselkedést már kisszámú részecske is - a Szinaj-biliárdnál egy, kemény golyóknál kettő is elég - produkálni tudja.

Ugyanerre a meglepő következtetésre jutott a kutatás egy gyökeresen más - a turbulencia jelenségét tanulmányozó - irányzata. Lorenz 1963-ban a hidrodinamika egyenleteinek saját maga által háromváltozósra egyszerűsített alakjánál is sztochasztikus viselkedést tapasztalt. Később egy sor más alacsonydimenziós determinisztikus dinamika is ugyanezt az ún. kaotikus viselkedést mutatta, és az is kiderült, hogy a magyarázat ugyanaz, mint a Szinaj-biliárdnál: a dinamika hiperbolikus jellege. Az utóbbi évtizedben e gondolatkör vonzási tartományába a természet újabb és újabb jelenségei kerültek, az ergodelméleten belül igen jelentős szerephez jutott a nem konzervatív rendszerek tanulmányozása: ilyen rendszerekre is definiáltak különféle sztochasztikus tulajdonságokat, feltételeket kerestek ezek meglétére és konkrét modellekben ellenőrizni próbálták ezeket a feltételeket.

Célunk az alábbiakban a fentiek illusztrálása. A második - szintén bevezető jellegű - fejezetben dinamikákra, dinamikai rendszerekre vonatkozó néhány alapfogalmat definiálunk. A harmadik rész ismerteti a klasszikus ergodelmélet néhány alapgondolatát, míg a negyedik részben a szolenoid leképezésén keresztül megmutatjuk, hogyan szól egy tipikus állítás a nem konzervatív ergodelméletben (nevezetesen a Bowen-Ruelle-tétel), majd az általános esetben is eljutunk az előbbi tétel kimondásához.

Célunk kettős: egyrészt lehetőleg meg is magyarázott állítások vannak azok számára, akik a témával most ismerkednek, másrészt az újabb eredményekből is adunk izelítőt azoknak, akik a témában már járatosak.



## 2. DINAMIKA - DINAMIKAI RENDSZER

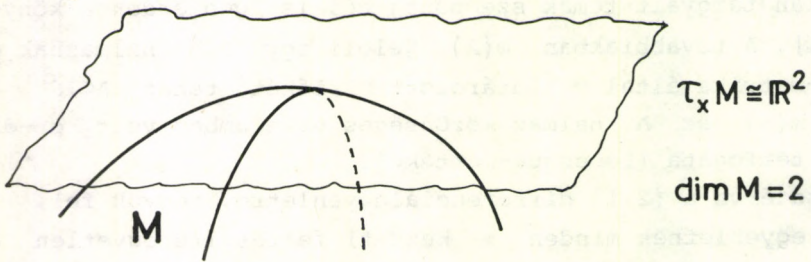
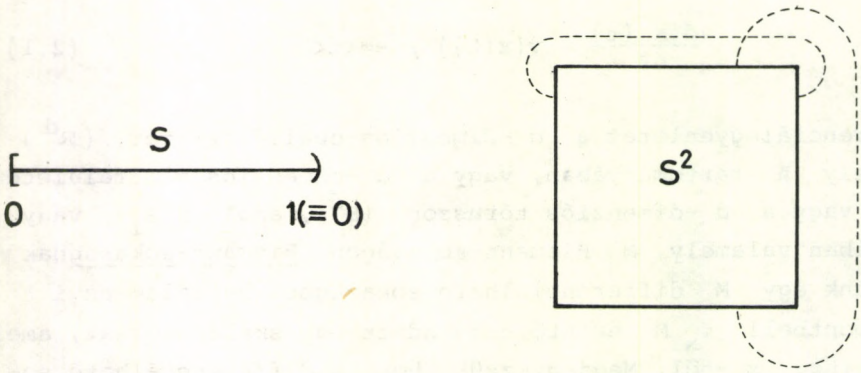
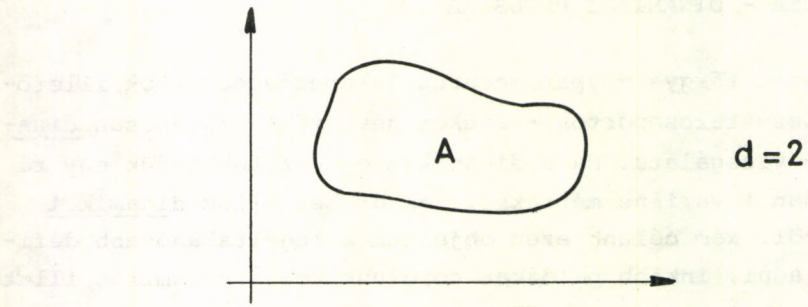
E fejezet tárgya egyparaméteres leképezéscsoportok, illetőleg leképezésfélcsoportok - ezeket nevezzük általánosan dinamikának - vizsgálata. Ha a dinamikát együtt tekintjük egy rá vonatkozóan invariáns mértékkel, akkor beszélünk dinamikai rendszeréről. Nem célunk ezen objektumok legáltalánosabb definícióját adni, inkább példákat sorolunk fel a dinamikák, illetve a dinamikai rendszerek főbb típusaira.

Tekintsük a

$$\frac{d x(t)}{dt} = v(x(t)), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.1)$$

differenciálegyenletet a  $d$ -dimenziós euklideszi tér ( $\mathbb{R}^d$ ) valamely  $A$  tartományában, vagy a  $d$ -dimenziós gömbfelületen ( $S_d$ ), vagy a  $d$ -dimenziós tóruszon ( $S^d$ , ahol  $S=S_1$ ), vagy általában valamely  $M$  Riemann-sokaságon. Riemann-sokaságnak nevezünk egy  $M$  differenciálható sokaságot, ha valamennyi  $x \in M$  pontbeli  $\tau_x M$  érintőterén adott egy skalárszorzat, amely simán függ  $x$ -től. Megjegyezzük, hogy a differenciálható sokaságokra, illetve leképezésekre vonatkozó fogalmak szerepelnek V. I. Arnold, a közeljövőben magyar fordításban is megjelenő, az iskolán tárgyalt témák szempontjából is igen érdekes könyvében [1]. A továbbiakban  $m(A)$  jelöli egy  $ACM$  halmaznak a Riemann-metrika által meghatározott mértékét, tehát  $AC\mathbb{R}^d$  esetén  $m(A)$  az  $A$  halmaz közöséges értelemben vett  $d$ -dimenziós térfogata (Lebesgue-mértéke).

Visszatérve a (2.1) differenciálegyenletre, tegyük fel, hogy az egyenletnek minden  $x$  kezdeti feltételre egyetlen  $x(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) megoldása van (tehát  $x(0)=x$ ). Legyen  $T^t: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  (ill.  $M \rightarrow M$ ) a megoldás által adott leképezéscsoport, más szóval  $T^t x = x(t)$ , ha  $x(0)=x$  ( $-\infty < t < \infty$ ). (A csoporttulajdonság:  $T^{t+s} = T^s T^t$ .) Ez a  $T^t$ ,  $-\infty < t < \infty$  diffeomorfizmus-csoport alappéldája a folytonos paraméterű dinamikáknak, amelyeket általában folyamoknak nevezünk. (Diffeomorfizmusnak nevezük az  $M$  sokaság olyan kölcsönösen egyértelmű differenciálható leképezését, amelynek inverze is differenciálható.)

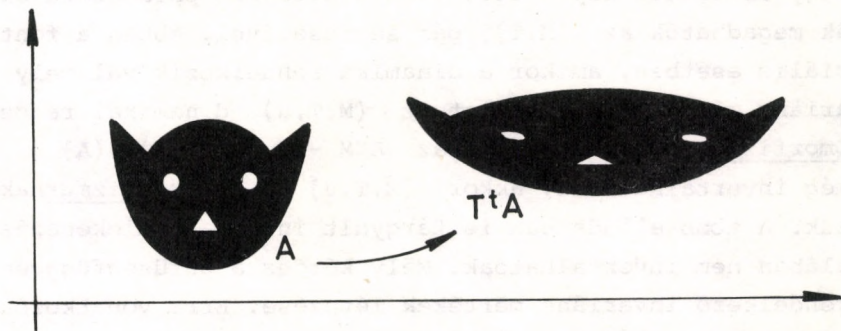


2.1 ábra. Riemann-sokaságok

A fizika, a kémia, a biológia stb. differenciálegyenletei folyamatot definiálnak. [15]-ben olvashatunk a Navier-Stokes-



egyenletről, illetve annak radikálisan egyszerűsített, de még így is különösen viselkedő, alakjáról: a Lorenz-egyenletrendszeréről. A mechanikában részletesen tanulmányoztuk a Hamilton-egyenleteket, amelyekre jól ismert a Liouville-tétel. Ez ki mondja, hogy a Hamilton-egyenletek által definiált folyamat megtartja a térfogati mértéket. A térfogat invarianciáját szemlélteti Arnold ábrája, ahol megismerkedhetünk a macska képének területtartó leképezésével. (A később tárgyalandó "macska automorfizmusánál", amely szintén területtartó, a macska határozottan rosszabbul fog járni, mint itt.)



2.2 ábra. Területtartás

Egy folyamat általában  $(M, T^t)$  -vel jelölünk (dinamika!), míg ha adott egy ránézve invariáns  $\mu$  mérték is, akkor a jelölés  $(M, T^t, \mu)$  (dinamikai rendszer!). Matematikai tárgyalásmódnál szokás a mérhető halmazok  $\sigma$ -algebráját is feltüntetni, ettől mi itt - sőt általában a mérhetőség kérdésétől - eltekintünk. A  $\mu$  mérték invarianciája azt jelenti, hogy  $A \subset M$  -re és minden  $t$ -re  $\mu(T^t A) = \mu(A)$ .

Fontos modellje a klasszikus mechanikának kemény golyók

egyenesvonalú egyenletes mozgása, kölcsönhatásként a golyók rugalmas ütközését véve. E modell megoldásai az ütközési időpontokban nem differenciálhatók, a (2.1)-nek megfelelő egyenlet csak az ütközési időpontoktól eltekintve teljesül, és hátfeltételként jelenik meg a rugalmas ütközés. Viszont a Liouville-tétel itt is igaz, modellünk ismét dinamikai rendszer, nevezetesen folyam.

Folyamok vizsgálatánál gyakran előnyös a paramétertartomány alkalmas diszkretizálása, ami a dimenzió csökkentését is eredményezi. Példaként elég a Poincaré-leképezésre hivatkoznunk. Ha  $T: M \rightarrow M$  tetszőleges leképezés, akkor tekinthetjük az  $(M, T^n: n=0,1,2,\dots)$  leképezéscsoportot, illetve az  $(M, T^n: n=\dots,-1,0,1,\dots)$  leképezéscsoportot aszerint, hogy  $T$  nem invertálható vagy invertálható. ( $T$  invertálható, ha  $T$  egy-egy értelműen képez le.) Ezek a diszkrét paraméterű dinamikák megadhatók az  $(M, T)$  pár segítségével. Abban a fontos speciális esetben, amikor a dinamika rendelkezik valamely  $\mu$  invariáns mértékkel, a tekintett  $(M, T, \mu)$  dinamikai rendszert endomorfizmusnak nevezzük (azaz  $ACM$ -re  $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ ). Ha  $T$  még invertálható is, akkor  $(M, T, \mu)$ -t automorfizmusnak nevezzük. A több előadásban is tárgyalt intervallumleképezések általában nem invertálhatóak. Mély kérdés a sűrűségfüggvénnyel is rendelkező invariáns mértékek létezése. Erre vonatkozóan M. V. Jakobszon [5] ért el újabb jelentős eredményeket.

A diadikus leképezés egyszerű példa endomorfizmusra. Mivel több vonatkozásban is szükségünk lesz rá, ezért itt pontosan bevezetjük. Itt  $M=[0,1)$ ,  $T:[0,1) \rightarrow [0,1)$  a  $Tx \equiv 2x \pmod{1}$  relációval értelmezett (ugyancsak  $T$ -t definiálja a 2.3 ábra grafikonja).  $T$ -nek a hossz mérték, azaz a Lebesgue-mérték, invariáns mértéke  $m(T^{-1}A) = m(A)$ .

Fontos példa az Hénon-leképezés is. Itt  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a következőképpen értelmezett:

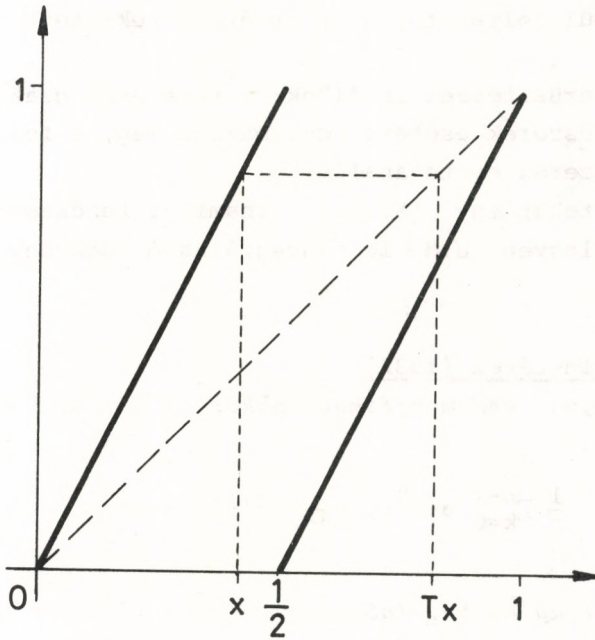
$$T(x,y) = (y+1 - ax^2, bx) ,$$

ahol  $a$  és  $b$  valós paraméterek.  $b \neq 0$ -ra  $T$  invertálható:



$$T^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x-1 + a b^{-2}y^2) .$$

Mivel  $\text{Jac } T \equiv -b$ , azért  $|b|=1$  esetén a területmérték invariáns  $T$ -re,  $T$  automorfizmus.



2.3 ábra. A diadikus leképezés

### 3. DINAMIKAI RENDSZEREK (KLASSZIKUS ERGODELMÉLET)

#### 3.1 Birkhoff-Hincsin-ergodtétel

A Hamilton-egyenletek által adott dinamikára nézve a konstans energiájú nivófelületek invariáns halmazokat adnak, és a dinamikától jó ergodikus viselkedés csak ezekre a nivósokaságokra megszorítva várható. Lényegesen különbözik egymástól

az a két eset, amikor egy ilyen nivósokaság kompakt, illetőleg nem az. Az első esetben a nivósokaságon értelmezett Liouville-mérték véges, a második esetben végtelen. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az érdekesebb első esetre szorítkozunk, jóllehet az ergodelmélet számos eredménye - például az alább következő ergodtétel - végtelen invariáns mérték esetére is fennáll. Ha a mérték véges, akkor viszont az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy értéke a tekintett teljes sokaságra 1.

Másik egyszerűsítéssel is élünk: a tételket csak diszkrét paraméterű rendszerek esetére fogalmazzuk meg, a folytonos paraméterű rendszerek esete analóg.

Tekintsünk tehát egy  $(M, T, \mu)$  dinamikai rendszert  $(\mu(M)=1)$ , és legyen  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  integrálható függvény  $(\int |u| d\mu < \infty)$ .

#### Birkhoff-Hincsin-tétel (1931)

1. Ha  $(M, T, \mu)$  endomorfizmus, akkor  $\mu$  - m.m.  $x \in M$  -re

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(T^k x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u}(x) \quad (3.1)$$

(a baloldali átlag az  $n$ . időátlag).

2. Ha  $(M, T, \mu)$  automorfizmus, akkor  $\mu$  - m.m.  $x \in M$  -re

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(T^k x) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(T^{-k} x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{|k| \leq n} u(T^k x) = \bar{u}(x) . \end{aligned}$$

3. Mindkét esetben

- (i)  $\bar{u}(Tx) = \bar{u}(x)$   $\mu$  - m.m.  $x \in M$  -re (azaz  $\bar{u}$  invariáns függvény).
- (ii)  $\int |\bar{u}| d\mu = \int |u| d\mu$  (azaz az alapul vett  $u$  függvényre és



időátlagainak  $\bar{u}$  határértékére a térátlagok megegyeznek).

Az állításokban szereplő  $\mu$  - m.m. ( $\mu$  - majdnem minden) jelentése:  $\exists M' \subset M$ , hogy  $\mu(M \setminus M') = 0$  és minden  $x \in M'$  -re az állítás már igaz. Mivel az állítások az egyes trajektóriák térben nem átlagolt aszimptotikus viselkedéséről szólnak, a fenti tételt individuális ergodtételnek is nevezik.

Megjegyzések: 1. Abban az esetben, ha  $u(x)$  valamely  $ACM$  halmaz indikátorfüggvénye, azaz

$$u(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A . \end{cases}$$

$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x)$  megmutatja, hogy az  $x$  pont képei  $n$  időpontig az idő hanyadrészét töltik az  $A$  halmazban.

2. Ha  $\bar{u}(x) = \text{const.}$   $\mu$  - m.m., akkor nyilván  $\mu$  - m.m.  $x \in M$  -re

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(T^k x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u} = \int u \, d\mu ,$$

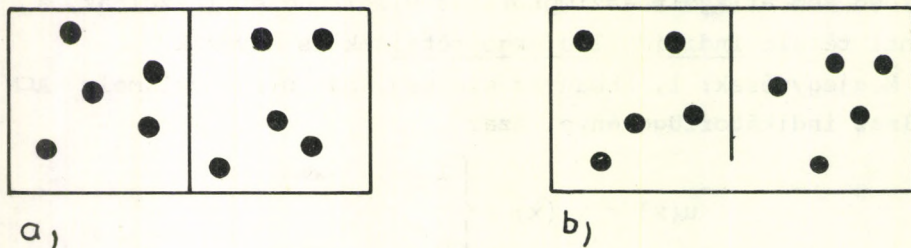
tehát az ergodikus hipotézisnek megfelelő állítást olvashatunk ki: az időátlagok a térátlaghoz konvergálnak. Ez a megjegyzés vezet a leggyengébb ergodikus tulajdonság, az ergodicitás definíciójához.

Definíció. Az  $(M, T, \mu)$  leképezés ergodikus, ha minden  $T$  -re invariáns  $u$  függvény (azaz  $u(Tx) = u(x)$   $\mu$  - m.m.  $x$  -re)  $\mu$  - m.m. egyenlő egy állandóval, (másképp: csak triviális invariáns függvények vannak!).

Ekvivalens definíció.  $(M, T, \mu)$  ergodikus, ha  $\mu((A \setminus T^{-1}A) \cup (T^{-1}A \setminus A)) = 0$  (azaz az  $A$  halmaz invariáns) maga után vonja, hogy  $\mu(A) = 0$  vagy  $1$  (csak triviális invariáns halmazok vannak!).

Nem ergodikus rendszerre jól ismert példa egy fallal két

részre osztott zárt edényben levő gáz (1. 3.1.a ábra). Az edény egyik, illetve másik részében levő gáz a rendszer ergodikus komponensei. Ha a falon lyukat vágunk, akkor a rendszer már ergodikus (3.1.b ábra).



3.1. ábra. a ) nem ergodikus rendszer; b ) ergodikus rendszer

Ugyancsak nem ergodikus a biliárd egy ellipszisben. Mit is nevezünk az ergodelméletben biliárdnak? Legyen  $Q \subset \mathbb{R}^d$  kompakt (azaz korlátos és zárt) halmaz, melynek határa szakaszonként sima. A biliárd fázistere  $M = Q \times S_{d-1}$ . Tehát  $x \in M$ -re  $x = (q, p)$ , ahol  $q \in Q$  a pontszerű biliárdgolyó helye és  $p \in S_{d-1}$ , azaz  $p$  az egységnyi nagyságú sebesség iránya (1. a 3.2 ábrát). A dinamika nem más, mint szabad mozgás  $Q$  belsejében és rugalmas ütközés  $Q$  határán. A Liouville-tétel szerint az

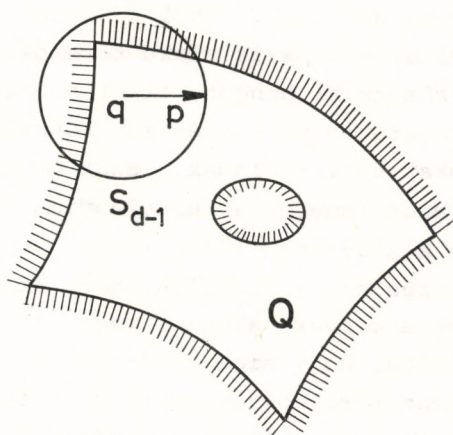
$$m = \text{térfogati mérték } Q \text{-n} \quad \times \quad \text{felületi mérték } S_{d-1} \text{-n}$$

mérték invariáns erre a dinamikára.

Definíció. Biliárdnak az így definiált  $(M, T^t, m)$  dinamikai rendszert nevezzük.

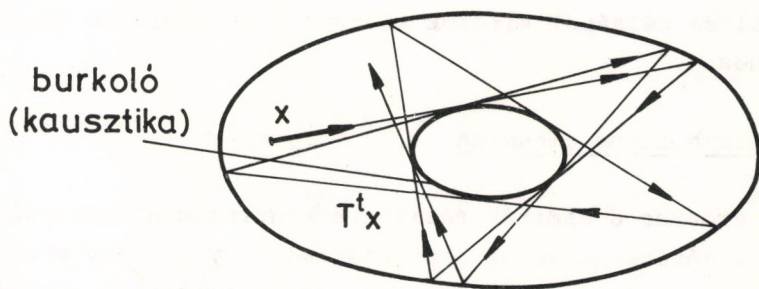
Mármost ha  $Q \subset \mathbb{R}^2$  ellipszis, akkor  $M = Q \times S$  3-dimenziós sokaság, és igaz a következő elemi geometriai tény: ha az  $x \in M$





3.2 ábra. Biliárd fázistere

által meghatározott húr nem metszi (metszi) a fókuszok közötti szakaszt, akkor a teljes  $T^t x$ ,  $-\infty < t < \infty$  trajektória összes húrja érint egy ellipszist (hiperbolát) (l. a 3.3 ábrát).



3.3 ábra. Biliárd ellipszisben

Az így fellépő ellipsziseket, ill. hiperbolákat burkolóknak

vagy kausztikáknak nevezzük. Ebből a képből világos, hogy ha egy ideálisan sima, ellipszis alakú teremben a fallal kis szögget bezárva bocsátunk ki hangot, akkor a hangenergia mindvégig a fal kis környezetében marad, és így könnyű nem-triviális invariáns halmazokat konstruálnunk. Tehát az ellipszis-biliárd nem ergodikus. Mint ismeretes (Bunyimovics [3]), már meglepő módon ergodikus a stadion-biliárd.

Fenti megjegyzésünk is sugallja, hogy akusztikai szempontból is érdekesek a konvex halmazon vett biliárdok. Lazutkin [10] bebizonyította, hogy sima (553-szor differenciálható) határú konvex halmaz területének pozitív mértékű részét töltik ki a burkolók, ami ismét kiadja a megfelelő biliárd nem-ergodikus voltát. Daoudy [4] - a KAM-elmélet alkalmazásával - nagymértékben enyhítette Lazutkin simasági feltételét. Lazutkin és Snyirelman [12] konvex halmazon vett biliárdok ergodicitásának a Schrödinger-operátor sajátfüggvényeinek viselkedésével való kapcsolatát tisztázták: ha a nagy sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények a halmazon közel állandók, a biliárd ergodikus, míg ha a biliárdnál vannak burkolók, akkor az előbbi sajátfüggvények ezek környezetére koncentrálódnak.

Ergodikus rendszerre is láthatunk majd több példát. Általános szituációt takar a diadikus endomorfizmus példája. Ennek tárgyalása céljából kitérőt teszünk a szimbolikus dinamika fogalmához.

### 3.2 Szimbolikus dinamika

Az érdekes dinamikák fázistere kontinuum számosságú. Gyakorlati méréseink véges pontosságúak, így egy-egy megfigyeléssel csak annyit tudunk eldönteni, hogy a fázispont véges sok halmaz közül éppen melyikben van. Ezeknek a megfigyeléseknek időbeli ismétlésével a fázistér egyre finomodó felbontását kapjuk, míg ha méréseink felbontóképessége mégis elég jó, akkor végtelen ideig tartó megfigyeléssorozattal a fázispont helyzete egyértelműen meghatározható. Ez a gondolatmenet indokolja a szimbolikus dinamika bevezetését.

Legyen  $(M, T)$  valamilyen dinamika és tekintsük  $M$  valamely  $M = \bigcup_{j=0}^r A_j$ ,  $r < \infty$  felbontását (azaz  $A_j \cap A_k = \emptyset$ , ha



$j \neq k$ ). Értelmezzük a  $\xi_n: M \rightarrow \{0, 1, \dots, r\}$  függvényt a következőképpen:  $\xi_n(x) = k$  csakkor, ha  $T^n x \in A_k$ , azaz  $x \in T^{-n} A_k$ .

Definíció.  $\xi_0, \xi_1, \dots$  az  $\{A_j\}_0^r$  felbontás által meghatározott szimbolikus dinamika.

Rögtön megjegyezzük, hogy ha a  $T: M \rightarrow M$  leképezés egy-egy értelmű, akkor  $\xi_n$  negatív egész  $n$ -ekre is értelmes, és definiálható a két irányban végtelen  $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$  szimbolikus dinamika is.

Tekintsük a  $([0, 1], T)$  diadikus leképezést, egyelőre az  $m$  invariáns mérték nélkül, továbbá a fázistér  $[0, 1] = A_0 \cup A_1 = [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 1)$  felbontását. A szimbolikus dinamika definíciója szerint

$$\xi_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$$\xi_1(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ 1 & , \quad x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

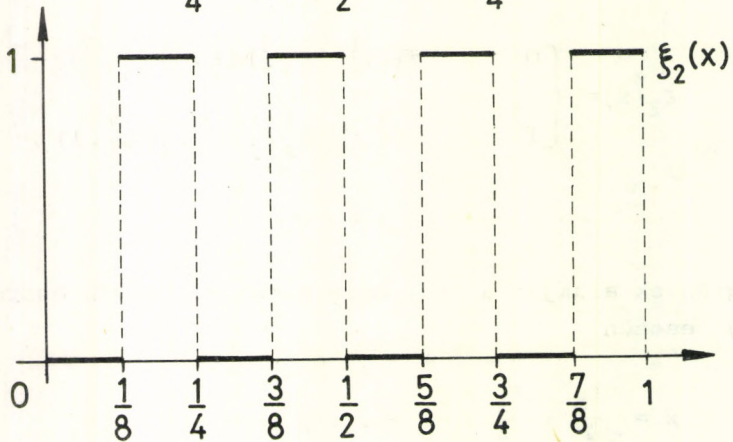
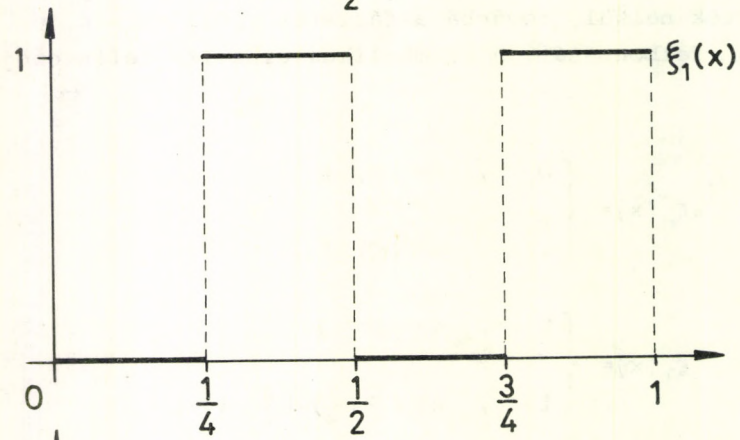
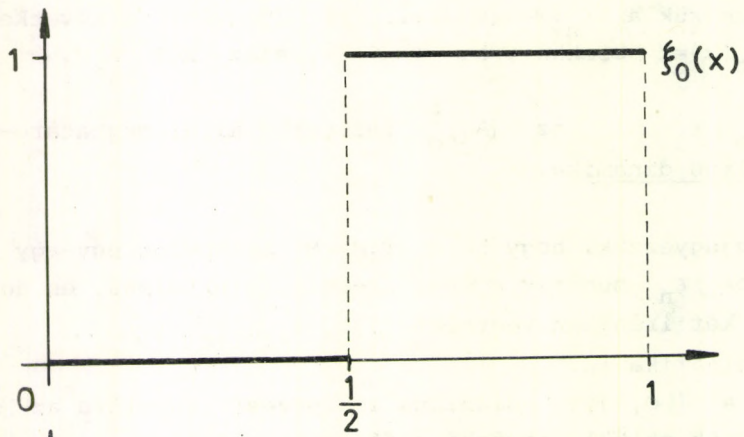
$$\xi_2(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, \frac{1}{8}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \cup [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}) \\ 1 & , \quad x \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}) \cup [\frac{7}{8}, 1) \end{cases}$$

.....

A  $\xi_n(x)$  függvények alakját a 3.4 ábra mutatja. Vegyük észre, hogy  $x \in [0, 1)$  esetén

$$x = \frac{\xi_0}{2} + \frac{\xi_1}{2^2} + \frac{\xi_2}{2^3} + \dots,$$

vagyis  $x$  diadikus alakja éppen  $x = 0, \xi_0 \xi_1 \xi_2 \dots$ . Mármost, ha a  $\varphi$  függvény minden  $x \in [0, 1)$  valós számhoz hozzárendeli



3.4 ábra. Szimbolikus dinamika a diadikus leképezésnél



a diadikus kifejtésében szereplő jegyekből álló sorozatot

$$x \xrightarrow{\varphi} (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots),$$

akkor nyilván

$$Tx \xrightarrow{\varphi} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

Megjegyezzük, hogy  $\varphi$  a diadikusan racionális számoktól eltekintve egy-egyértelműen képez le. Tehát a következő képhez jutunk: legyen

$$\tilde{M} = \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_n = 0 \text{ vagy } 1, n=0,1,\dots\},$$

$$\tilde{T}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots);$$

ekkor a

$$\begin{array}{ccc} [0,1) & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{M} \\ \downarrow T & & \downarrow \tilde{T} \\ [0,1) & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{M} \end{array} \quad (3.2)$$

diagram kommutatív, vagyis  $\tilde{T}\varphi = \varphi T$  (mindkét oldal  $[0,1) \rightarrow \tilde{M}$ ).  $T$ -nek ez a szoros kapcsolata a valós számok diadikus sorfejtésével már indokolja a diadikus leképezés elnevezést. A kapcsolat azonban még erősebb.

Vizsgáljuk ugyanis az  $m$  invariáns mértéket is  $[0,1)$ -en. Nyilván

$$m(x : \xi_n = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}) = \frac{1}{2},$$

sőt

$$m(x : \xi_{n_1} = j_1, \dots, \xi_{n_k} = j_k) = \frac{1}{2^k},$$

hacsak  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  és  $j_1, \dots, j_k = 0$  vagy  $1$ . Vagyis ha  $m$ -et valószínűségként értjük, akkor  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  ekviva-

lens egy szabályos érmével való független dobás-sorozat kime-  
neteleinek sorozatával. Az ilyen típusú sorozatok bizonyos ér-  
telemben a legvéletlenebbek, hosszú ideig elsősorban ezek ta-  
nulmányozásával foglalkozott a valószínűségszámítás.

Definíció. Legyen

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_n \in \{0, 1, \dots, r\}, n=0, 1, \dots\}, \\ \tilde{T}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) &= (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots), \\ \tilde{\mu}(\xi_{n_1}=j_1, \dots, \xi_{n_k}=j_k) &= p_{j_1} \dots p_{j_k}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

hacsak  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ , ahol  $p_j \geq 0$  és  $\sum_{j=0}^r p_j = 1$ . Az  
( $\tilde{M}, \tilde{T}, \tilde{\mu}$ ) endomorfizmust Bernoulli-eltolásnak vagy Bernoulli-  
shiftnek nevezzük.

Tehát a diadikus endomorfizmusra

$$([0, 1], T, m) \xrightarrow{\varphi} (\tilde{M}, \tilde{T}, \tilde{\mu}),$$

ami azt jelenti, hogy  $T$  kommutál a Bernoulli-eltolással és  
 $\varphi$  az  $m$  mértéket is  $\mu$ -be viszi. Ha  $\varphi$  emellett - mint  
példánkban is - majdnem mindenütt egy-egy értelmű, akkor azt  
mondjuk, hogy  $\varphi$  izomorfiát létesít a két dinamikai rendszer  
között.

Megjegyzések: 1. (3.3)-ban  $\tilde{M}$  definícióját módosítva

$$\tilde{M} = \{(\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots) : \xi_n \in \{0, 1, \dots, r\}, n=\dots, -1, 0, 1, \dots\},$$

és  $\tilde{T}$  -ot értelemszerűen így definiálva:

$$\tilde{T}(\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots) = (\dots, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots),$$

a két irányban végtelen Bernoulli-eltolás fogalmához jutunk.  
Ez az ( $\tilde{M}, \tilde{T}, \tilde{\mu}$ ) B-eltolás automorfizmus.

2. Könnyű belátni, hogy izomorf rendszerek ekvi-ergodiku-



sak, azaz vagy mindkettő ergodikus, vagy egyik sem. Mivel a diadikus leképezés izomorf egy Bernoulli-eltolással, elegendő belátni általában a B-eltolások ergodikus voltát. Ezekre azonban erősebb ergodikus tulajdonságok is fennállnak. Ezeket vizsgáljuk a következő pontban.

### 3.3 Keverés, Kolmogorov-keverés

Kezdjük az ergodicitás további ekvivalens átfogalmazásával.

Állítás. Az  $(M, T, \mu)$  endomorfizmus csak akkor ergodikus, ha minden  $A, B \subset M$ -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}A \cap B) = \mu(A)\mu(B) .$$

Mivel az A és B események függetlensége azt jelentené, hogy  $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ , azért a fenti követelményt jogos úgy értelmeznünk, hogy azt fejezi ki, hogy  $T^{-k}A$  és B átlagban aszimptotikusan függetlenek. Ha e tulajdonság nem csak átlagban véve teljesül, a keverés fogalmához jutunk.

Definíció. Az  $(M, T, \mu)$  endomorfizmus keverő, ha tetszőleges  $A, B \subset M$ -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B) .$$

Nyilvánvalóan igaz a következő

Állítás. A keverésből következik az ergodicitás.

A kvázi-periodikus mozgások példákat szolgáltatnak ergodikus, de nem keverő rendszerekre, így a keverés ténylegesen erősebb tulajdonság, mint az ergodicitás. A keverés igen fontos tulajdonság fizikai szempontból is, ugyanis biztosítja bizonyos nem egyensúlyi dinamikák egyensúlyhoz való konvergenciáját. Ha adott valamely  $(M, T, \mu)$  endomorfizmus és a  $\mu_0$  nem-egyensúlyi mérték, akkor e mérték az n időpontban kifejezhe-

tő  $\mu_0$  segítségével:  $\mu_n(A) = \mu_0(T^{-n}A)$ .

Tétel. Ha  $(M, T, \mu)$  keverő és létezik  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , hogy  $\int f^2 d\mu < \infty$  és minden ACM-re  $\mu_0(A) = \int_A f d\mu$  (azaz  $\mu_0$ -nak  $\mu$ -re vonatkozó  $\frac{d\mu_0}{d\mu}$  sűrűségfüggvénye létezik és négyzetesen integrálható), akkor

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu.$$

Ez a tétel széles körben alkalmazható véges szabadsági fokú rendszereknél. Azonban a modern statisztikus mechanikában szokásos végtelen szabadsági fokú rendszereknél a négyzetes integrálhatóság túl erős megkötés, és egyelőre csak a keverésnél erősebb feltételekkel sikerült használható kritériumokat adni az egyensúlyhoz való konvergenciára (l. [9]).

Most legyen  $(M, T, \mu)$  automorfizmus. Rögzítsünk valamely  $A = \{A_i, 0 \leq i \leq r\}$  felbontást és legyen  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  a felbontás által adott szimbolikus dinamika.

Definíció. A  $T$  automorfizmus Kolmogorov-keverő (röviden K-keverő), ha tetszőleges  $A$  felbontásra igaz: minden BCM-re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{C \in \sigma_n(A)} |\mu(C \cap B) - \mu(C)\mu(B)| = 0,$$

ahol  $\sigma_n(A)$  a csak  $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots$ -től függő események halmaza.

Megjegyezzük, hogy a K-keverés fogalmát automorfizmusokra vezettük be. Endomorfizmusok esetére analóg fogalom a pontos endomorfizmus fogalma (l. [8]).

Látszatra már nem nyilvánvaló, de igaz a következő

Állítás. A K-keverés erősebb tulajdonság, mint a keverés.

Szóban a K-keverésről azt mondhatjuk, hogy olyan keverés, amely bizonyos értelemben egyenletes.



Visszatérve a diadikus endomorfizmusra, annak ergodicitása a 0-1 törvényből adódik.

0-1 törvény. *Bármely Bernoulli-eltolás K-keverő.*

Valóban: a diadikus endomorfizmus - mint láttuk - izomorf, tehát ekvi-ergodikus egy Bernoulli-eltolással, amely a 0-1 törvény következtében K-keverő, így ergodikus is. Az ergodicitás ilyen egyszerű, kerek formában csak szerencsés esetekben adódik. A 3.4 fejezetben bevezetendő "macska automorfizmusának" ergodicitását majd egy másik gondolatmenettel bizonyítjuk, amely lényegesen továbbfejleszthető.

Befejezésül megjegyezzük még, hogy az ergodicitás, keverés, K-keverés mellett számos más sztochasztikus tulajdonság merül fel és alkalmazható különféle problémákban. A teljesség igénye nélkül megnevezünk ezek közül néhány fontosat:

- 1) A korreláció lecsengése.
- 2) A Kolmogorov-Szinaj-entrópia (1. 4.6 fejezet) pozitívitása.
- 3) Markov-felbontás létezése.
- 4) Bernoulli-tulajdonság.
- 5) Centrális határeloszlástétel teljesülése.
- 6) Lokális centrális határeloszlástétel teljesülése.

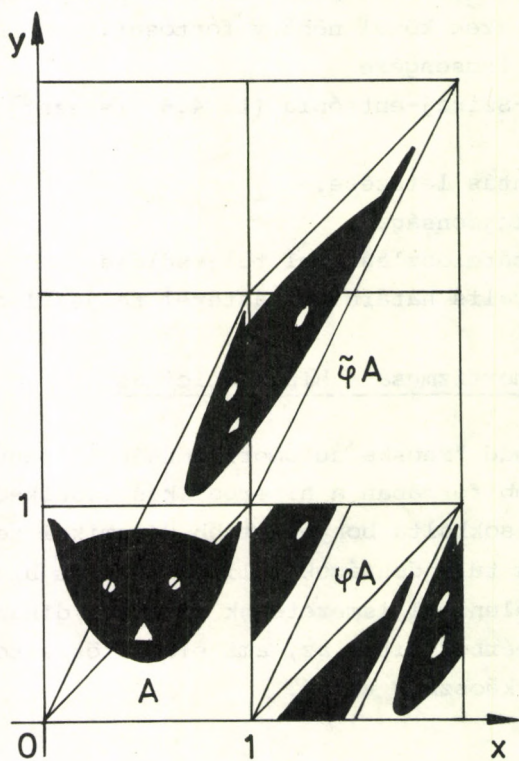
### 3.4 A macska automorfizmusa - hiperbolicitás

Az itt bevezetendő "macska automorfizmusánál" tanulmányozhatjuk legegyszerűbb formában a hiperbolikus viselkedést. Ez nemcsak itt, hanem sokkalta bonyolultabb dinamikai rendszereknél is az ergodikus tulajdonságok fellépésének és bizonyításának alapja. Sőt, jelenlegi ismereteink szerint, dinamikák esetén ugyancsak a hiperbolicitás az, ami elég erős sztochasztikus viselkedéshez, káoszhoz vezet.

Tekintsük a

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixszal adott lineáris operátort a síkon. Ennek egyrészt determinánsa 1, azaz a leképezés mértéktartó, másrészt az egész koordinátájú vektorok rácsát sajátmagára képezi le. E tulajdonságok következménye, hogy ha megvizsgáljuk az egység-négyzet képét, akkor olyan paralelogrammát kapunk, amelynek a négyzetháló által kimetszett darabjaiból eltolással - pontosabban a sík minden pontjának koordinátáit mod 1 véve - ismét az egység-négyzet áll elő. Ezáltal, amint az a 3.5 ábrán is látható,  $G$  egyúttal az egység-négyzetnek - pontosabban a szemközti oldalainál összeragasztott egység-négyzetnek: a tórusznak is önmagára való, mértéktartó, egy-egy értelmű  $T$  leképezését adja. Ezt az  $(S^2, T, m)$  dinamikai rendszert nevezik a macska automorfizmusának, avagy tudományosabban a tórusz algebrái automorfizmusának.



3.5 ábra. A macska automorfizmusa



Tétel. A macska automorfizmusa ergodikus.

A bizonyítás alapgondolata: 1. A Birkhoff-Hincsin-tételből következik, hogy m - m.m.  $x \in S^2$  -re léteznek a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} u(T^k x) = u^+(x)$$

és a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} u(T^{-k} x) = u^-(x)$$

határértékek ( $u: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\int |u| dm < \infty$ ), és m - m.m.  $x$  -re  $u^+(x) = u^-(x) = \bar{u}(x)$ .

2. Mint mondtuk, az ergodicitás ekvivalens azzal, hogy minden szóbajövő  $u$  függvényre  $\bar{u} = \text{const.}$  m - m.m. Egyszerűen belátható, hogy ezt a tulajdonságot elég folytonos függvényekre bizonyítani.

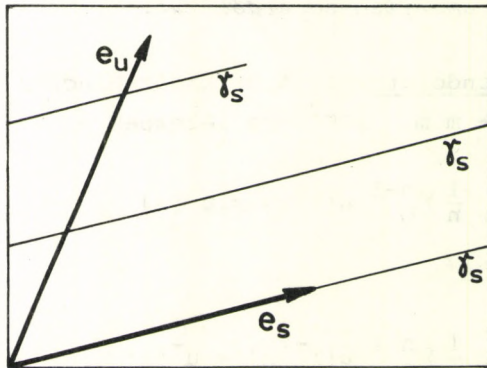
3.  $G$  sajátértékei:  $\lambda_s$  és  $\lambda_u$  kiszámolhatók. Nekünk csupán annyi fontos, hogy  $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$  (természetesen  $\lambda_s \lambda_u = 1$ ). Jelöljük a megfelelő sajátirányokat  $e_s$  -, illetve  $e_u$  -val ( $e_s, e_u \in \mathbb{R}^2$ ).

4. Fontos fogalmakat vezetünk be: a síknak egy egyenesét szűkülő egyenesnek (táguló egyenesnek) nevezzük, ha párhuzamos  $e_s$  -sel (ill.  $e_u$  -val). Az  $S^2$  tórusz egy részhalmazát szűkülő fonálnak (táguló fonálnak) nevezzük, ha az egy szűkülő (illetve táguló) egyenesnek mod  $S^2$  (azaz mindkét koordinátát mod 1 tekintve) vett képe (1. 3.6 ábra). Tehát a szűkülő fonál nem más mint egy szűkülő egyenes feltekerése a tóruszra, vagyis végül is a szűkülő fonál egy sűrű, de 0-mértékű részhalmaz.

5. Igaz a következő

Állítás. 1. Ha  $\gamma_s$  tetszőleges szűkülő fonál és  $x, y \in \gamma_s$ , akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u(T^k x) - u(T^k y)) = 0 ;$$



3.6 ábra. Szűkülő fonál

2. Ha  $\gamma_u$  tetszőleges táguló fonál, és  $x, y \in \gamma_u$ , akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u(T^{-k}x) - u(T^{-k}y)) = 0.$$

Az állítás következik  $u$  egyenletes folytonosságából, valamint a szűkülő és a táguló fonalak definíciójából. Megjegyezzük, hogy az általánosan használt  $s$  és  $u$  indexek a stabilis (stable) és instabilis (unstable) viselkedésre mutatnak.

6. Ennél a lépésnél azt is feltesszük, hogy minden  $x \in S^2$ -re létezik  $u^+(x), u^-(x)$  és  $\bar{u}(x)$ , és  $u^+(x) \equiv u^-(x) \equiv \bar{u}(x)$ . Általában ez nem áll, ami a bizonyításban további lényeges nehézségeket okoz, amelyeket Vetier [15] részletesebben tárgyal.

Célunk belátni, hogy bármely  $u$  folytonos függvényre  $\bar{u} = \text{const}$ . Válasszunk egy tetszőleges  $x, y \in S^2$  pontpárt.  $x$ -en keresztül megy egyetlen  $\gamma_s$  szűkülő fonál,  $y$ -on keresztül egyetlen  $\gamma_u$  táguló fonál. A két fonálnak számos metszéspontja van, ezek egyike legyen  $z$ .



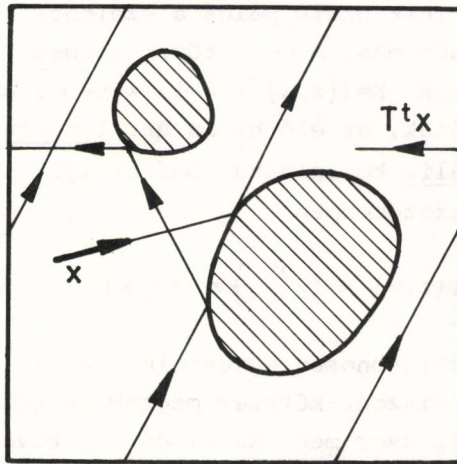
Mármost igaz a következő egyenlőségsorozat:

$$\bar{u}(x) = u^+(x) \stackrel{\gamma_s}{=} u^+(z) = u^-(z) \stackrel{\gamma_u}{=} u^-(y) = \bar{u}(y).$$

Itt a második és a negyedik egyenlőségnél felhasználtuk az 5. lépésnél szereplő állítás vonatkozó részét. Az egyenlőségsorozat első és utolsó tagja adja a kívánt állítást.

A fenti bizonyítás lényegesen felhasználta a szűkülő és a táguló fonalak létezését valamint azok bizonyos geometriai tulajdonságait. Egyszerű modellünknek ez a hiperbolikus viselkedése az, ami lényegesen általánosabban is megfogalmazható, és sok érdekes és fontos esetben fellelhető. Talán a legfontosabb példa erre a Szinaj-biliárd.

Vágjunk ki a  $d$ -dimenziós tóruszból,  $S^d$ -n (a 3.8 ábrán  $d=2$ ) véges sok, szakaszonként sima görbékkel határolt, szigorúan konvex halmazt; legyenek ezek  $H_1, \dots, H_m$ . Legyen  $Q = S^2 \cup_1^m H_i$ . A Szinaj-biliárd fázistere  $M = Q \times S^{d-1}$   $2d-1$ -dimenziós sokaság.  $x=(q,p) \in M$  esetén  $q$  a pontszerű részecske helye,  $p$  sebességének iránya. A biliárdnak a 3.1 fejezetben adott definíciója alkalmazásával az  $(M, T^t, m)$  dinamikai rendszerhez jutunk; ez a Szinaj-biliárd (l. 3.7 ábra).



3.7 ábra. Szinaj-biliárd

1970-ben Szinajnak a róla elnevezett biliárd hiperbolikus viselkedésének mély analizisével sikerült bebizonyítania annak ergodicitását, sőt  $K$ -keverő voltát is [14]. Ez volt az első fizikai jellegű rendszer, amelyre az ergodicitást bizonyították. Hogy a Szinaj-biliárd mennyire általános modell, az abból is látszik, hogy a tóruszon vagy edényben mozgó kemény gölyök rendszere lényegében olyan magas dimenziójú változata a Szinaj-biliárdnak, amelyben a  $H_j$  kivágott halmazok, az ún. szórótetek ugyan konvexek, de nem szigorúan konvexek. Ez a gyengébb feltevés erősen nehezíti a modell kezelését. Szinaj szóbeli közlése szerint Csernovval közösen most fejeznek be egy dolgozatot, amelyben e modell ergodicitása lesz bizonyítva legfeljebb öt, a két-dimenziós tóruszon mozgó korong esetére.

#### 4. DINAMIKÁK (ERGODELMÉLET ÉS KÁOSZ)

##### 4.1 Egyszerű disszipatív modell: a szolenoid leképezése

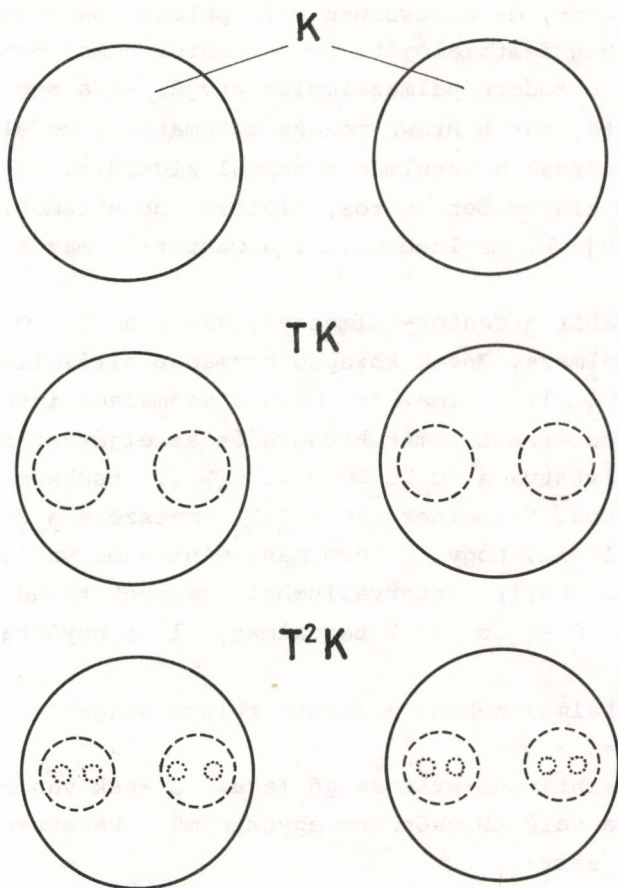
A matematika - és valószínűleg nemcsak a matematika - hagyományainak megfelelően bonyolult jelenségeket minél egyszerűbb példán keresztül igyekszünk megérteni és megvilágítani. Különös attraktorok és nem-konzervatív ergodelméleti tételek bemutatására az instruktív példa a szolenoid leképezése.

A szolenoid nem más, mint a tömör tórusz, azaz a tömör úszókarika. Formálisan  $K = \{(z, w) : \|z\| = 1, |w| \leq \frac{1}{2}\}$ , ahol  $z$  és  $w$  komplex koordináták, az előbbi az ún. longitudinális, az utóbbi a transzverzális koordináta. Definiáljuk a  $T:K \rightarrow TK$  leképezést a következőképpen

$$T(z, w) = (z^2, \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}w) .$$

Ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű. A  $K$  szolenoid  $TK$  képe vékonyabb, viszont kétszer megtekert tömör gyűrű lesz, míg  $T^2K$  már négyszer megtekert, és így tovább.  $K, TK, T^2K$ , keresztmetszeteit szemlélteti a 4.1 ábra. Nyilván  $K \supset TK \supset T^2K \supset \dots$ . Első kérdés: milyen halmaz a képek határértéke, a





4.1 ábra. A szolenoid képeinek keresztmetszetei

$\prod_{n=0}^{\infty} T^n K$  halmaz? Válasz: szorzata egy longitudinális vonalnak és egy transzverzális Cantor-halmaznak.

#### 4.2 Cantor-halmazok

Disszipatív dinamikáknál a sztochasztikus viselkedés szorosan összefügg különös attraktorok megjelenésével, amelyek leírásához fontos segédeszköz a Cantor-típusú halmaz fogalma. Először definiáljuk a történetileg első ilyen halmazt: a Cantor-halmazt. (A Cantor-halmaz hosszú ideig csak patológikus

jelenségnek tűnt, és elsősorban ellenpéldák konstrukciójára használták. Míg feltalálóját, Georg Cantor német matematikust (1845-1918), a modern halmazelmélet atyját kora meg nem értése örületbe vitte, már a Brown-mozgás matematikai modelljének, a Wiener-folyamatnak a tanulmányozásánál kiderült, hogy a Cantor-halmazok alapvetően fontos, "létező" objektumok. A különös attraktorok újabb, meglepő példái a Cantor-halmazok realitásának.)

Kezdjük tehát a Cantor-halmazzal, amely a  $C_0 = [0, 1]$  intervallum részhalmaza. Ennek középső harmadát eltávolítva jutunk a  $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$  halmazhoz. Majd a megmaradt intervallumok középső harmadrészeit ismét kivágva és az eljárást minden határon túl folytatva a  $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$  csökkenő halmazsorozathoz jutunk. Elemeinek  $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$  metszete a Cantor-halmaz. Könnyű látni, hogy  $C$  nem más, mint azon valós számok részhalmaza a  $[0, 1]$  intervallumból, amelyek triadikus sorfejtése csak 0-t és 2-t tartalmaz, 1-t egyáltalán nem.

A Cantor halmaz néhány alapvető tulajdonsága:

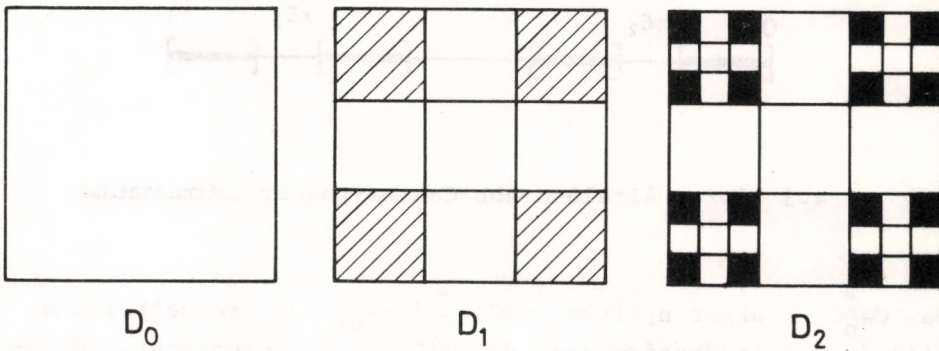
- (i)  $m(C) = 0$  ;
- (ii)  $C$  kontinuum-számosságú (azaz  $C$ -nek van a  $[0, 1]$  intervallumra való kölcsönösen egyértelmű leképezése);
- (iii)  $C$  zárt;
- (iv)  $C$  perfekt (azaz minden pontja torlódási pontja);
- (v)  $C$  minden pontja kondenzációs pontja is  $C$ -nek (azaz minden pontjának tetszőleges környezetében  $C$ -nek kontinuum sok pontja van);
- (vi)  $C$  sehol sem sűrű (azaz bármilyen intervallumnak van  $C$ -től idegen részintervalluma);
- (vii)  $C$  igen általános szerkezetű perfekt halmaz (lényegében az egydimenziós, izolált pontok nélküli perfekt halmazok hasonlóak  $C$ -hoz).

A Cantor-halmaznak messzemenő általánosítási lehetőségei vannak.



a) Többsdimenziós Cantor-halmazok

Vágjuk fel a  $D_0$  egységnyégzetet 9 egyenlő négyzetre, és vegyük el a középső, keresztyszerűen elhelyezkedő 5 négyzetet. A megmaradt 4 kisebb négyzetből álló  $D_1$  halmaz négyzeteire az eljárást hasonlóan megismételve a  $D_2$  halmazhoz jutunk, és az iterációt ismét folytatjuk. A  $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \dots$  halmazsorozat  $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$  metszete síkbeli Cantor-halmaz, amelyre állnak az (i)-(vi) tulajdonságok. Könnyű látni, hogy  $D=C \times C$ .



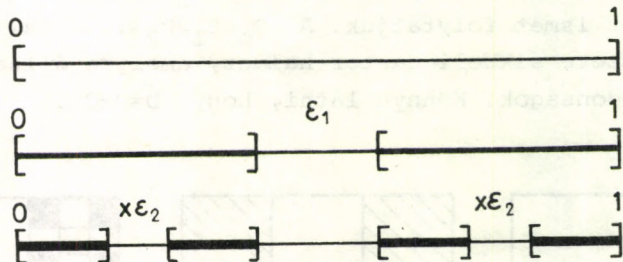
4.2 ábra. Síkbeli Cantor-halmaz származtatása

A konstrukció nemcsak magasabb dimenzióban alkalmazható, hanem azt is megfigyelhetjük, hogy ugyanez a gondolatmenet adja a szolenoid leképezésénél, hogy a  $K \supset TK \supset T^2K \supset \dots$  halmazsorozat  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n K$  metszetének keresztmetszete síkbeli Cantor-típusú halmaz a (i)-(vi) tulajdonságokkal.

b) Pozitív mértékű Cantor-halmazok

Egyszerűség kedvéért csak egydimenziós példát mutatunk be. Legyen  $C_0 = [0,1]$ . Vágjuk ki a  $C_0$   $\varepsilon_1$ -szeresét  $C_0$  közepéről. A maradék két intervallum egyesítése  $C_1$ , és nyilván  $m(C_1) = 1 - \varepsilon_1$ . Most vágjuk ki a maradék két intervallum  $\varepsilon_2$ -

szőrőseit az intervallumok közepéről. A megmaradt négy intervallumból álló halmaz  $C_2$ , és  $m(C_2) = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$ . Ha mármost előre megadunk egy  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  ( $0 < \varepsilon_n < 1$ ) számsorozatot, akkor a fenti módon egy  $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$  halmzsorozathoz jutunk.



4.3 ábra. Általánosabb Cantor-halmaz származtatása

Ha  $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ , akkor nyilván  $m(C) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n)$ .  $C$  rendelkezik a (ii)-(vi) tulajdonságokkal, de  $m(C) > 0$  is lehetséges, mégpedig pontosan akkor, ha  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ .

Érdekes  $C$  Hausdorff-dimenzióját, ún. fraktál-dimenzióját is kiszámolnunk (a definíciót illetően l. [16]):

$$\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(1 - \varepsilon_j)}$$

Innen látszik, hogy ha  $m(C) > 0$ , akkor  $\dim_H C = 1$ . De  $C$  Hausdorff-dimenziója  $m(C) = 0$  esetén is lehet 1, mégpedig mindig, ha  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

#### 4.3 Ergodtétel a szolenoid leképezésére

A szolenoidnak a 4.1 fejezetben definiált leképezésénél megjelent a  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n K$  halmaz. Ennek keresztmetszete - mint láttuk az előbbi pontban - Cantor típusú halmaz. Durva képet a  $\Lambda$  halmzsról úgy kaphatunk, ha egy kontinuum sokszor körbecsa-



vart befőttesgumira gondolunk. Mivel  $T$  iteráltjainak képei egyre inkább ráhúzódnak a  $\Lambda$  halmazra, érezhető, hogy  $T^n$  aszimptotikus viselkedésében  $\Lambda$ -nak jut alapvető szerep. Valóban, a Bowen-Ruelle-ergodtétel a szolenoid esetében így szól:

Bowen-Ruelle tétele a szolenoidra. *Létezik egyetlen olyan  $\mu$  valószínűségi mérték  $K$ -n, amely egyrészt  $\Lambda$ -ra van koncentrálna (azaz  $\mu(K \setminus \Lambda) = 0$ ), másrészt  $m$ -m.m.  $x \in K$ -ra (azaz van  $K' \subset K$ ,  $m(K \setminus K') = 0$ , hogy minden  $x \in K'$ -re)*

$$\frac{1}{n} \sum_{o}^{n-1} u(T^k x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} u d\mu, \quad (4.1)$$

ahol  $u$  tetszőleges folytonos függvény.

A tétel állításából először is következik, hogy  $\mu$  invariáns mérték, azaz  $(\Lambda, T, \mu)$  dinamikai rendszer (ahol  $T$  és  $\mu$  tulajdonképpen a  $T$  leképezés, illetve a  $\mu$  mérték  $\Lambda$ -re való megszorítását jelentik). Maga az a tény, hogy a  $(\Lambda, T)$  dinamika egyáltalán rendelkezik invariáns mértékkel, a Bogoljubov-Krüllov-tétel (1937) következménye (l. [8], 1.8.1 tétel).

Tehát a Birkhoff-Hincsin-tételből annyi adódna, hogy  $\mu$ -m.m.  $x \in \Lambda$ -ra áll (4.1) - sőt nemcsak folytonos  $u$ -kra is. Viszont itt (4.1) érvényességét  $m$ -m.m.  $x \in K$ -ra tudjuk, ami például nem zárja ki, hogy (4.1) egyetlen  $x \in \Lambda$ -re se legyen igaz, hiszen  $m(\Lambda) = 0$ .

Érdeemes vázolnunk a tétel bizonyításának alapgondolatát.

### A bizonyítás alapgondolata

Az állítást először csak olyan  $u$  függvényekre igazoljuk, amelyek csak  $z$ -től, a longitudinális koordinátától függnek. Legyen  $z = e^{2\pi i \theta}$  ( $0 \leq \theta < 1$ ). Ha a  $T$  leképezést csak a  $z$ , illetve a  $\theta$  koordinátában tekintjük, akkor ez a  $T_1$  koordináta-leképezés így néz ki:

$$T_1 \theta \equiv 2\theta \pmod{1},$$

ami a jólismert diadikus leképezés. Ennek invariáns mértéke a szögmérték, és a megfelelő dinamikai rendszer ergodikus. A

Birkhoff-Hincsin-ergodtétel állításában szerepel a rossz  $\theta$  pontok  $O$ -mértékű halmaza, ahol (4.1) nem áll. Esetünkben a  $T$  leképezés esetlegesen rossz pontjainak  $K \setminus K'$  halmaza a következő lesz:  $K$  mindazon pontjai, amelyek longitudinális szög-koordinátája  $T_1$ -re vonatkozóan rossz  $\theta$  pont. Ez a halmaz nyilván nullmértékű ( $m$ -re vonatkozólag), és bármely csak  $z$ -től függő  $u$  függvényre nyilván létezik a (4.1)-ben szereplő határérték.  $\mu$ -t itt nem definiáljuk precízen; annyit jegyünk meg, hogy  $\mu$  a  $\theta$  szög-változó szerint egyenletes eloszlást, továbbá  $\mu$  szerint  $\Lambda$  minden hurka egyformán valószínű. (Az "egyenlően valószínű" kifejezésnek pontos értelmet adni nem nehéz, de ettől itt most eltekintünk. Megjegyezzük viszont, hogy - érdekes módon - itt a diadikus leképezés szimbolikus dinamikáját használhatjuk fel.)

Az általános eset  $u$  egyenletes folytonossága és a  $T^n_K$  halmaz hurkainak szükülése miatt az előbbire vezethető vissza.

A szolenoid leképezésénél is megjelenik a macska automorfizmusánál megismert hiperbolikus viselkedés: egyrészt a 2-szeres longitudinális tágulás, másrészt a  $2^2$ -szeres transverzális szükülés. Az ergodtétel általános kimondásához megfogalmazzuk leképezések és ún. attraktorok hiperbolicitását.

#### 4.4 Attraktorok

A szolenoid leképezésénél megismert  $\Lambda$  halmaz az egyik legegyszerűbb hiperbolikus attraktor. Ennek megjelenése összefügg a sztochasztikus viselkedéssel. E pontban a fogalom általános definícióját adjuk.

A következőkben feltesszük, hogy  $T$  kölcsönösen egyértelmű és differenciálható leképezése (azaz diffeomorfizmus) az  $M$  kompakt Riemann-sokaságnak.

Definíció. A  $\Lambda \subset M$  részhalmazt hiperbolikus halmaznak nevezük, ha

- $\Lambda$  zárt és invariáns  $T$ -re vonatkozólag;
- minden  $x \in \Lambda$  pont  $\tau_x^M$  érintőtere előáll a



$$\tau_X^M = E_X^S \oplus E_X^U$$

alakban, és a felbontás elemeire teljesülnek:

$$(i) \quad DT(E_X^S) = E_{TX}^S,$$

$$DT(E_X^U) = E_{TX}^U,$$

(ii) alkalmas  $0 < \lambda < 1$  -re minden  $n=0,1,2,\dots$  esetén

$$\|DT^n v\| \leq \lambda^n \|v\|, \quad \text{ha } v \in E_X^S,$$

$$\|DT^{-n} v\| \leq \lambda^n \|v\|, \quad \text{ha } v \in E_X^U.$$

A definícióban szereplő  $DT: \tau_X^M \rightarrow \tau_X^M$ ,  $x \in M$  a  $T$  leképezés deriváltját jelöli. Az (i) feltevés egyszerűen a felbontás invarianciáját jelenti, míg a (ii)-ben szereplő követelmények épp a felbontás elemein érvényesülő exponenciális összehúzás, illetve tágítás. Például a macska automorfizmusánál  $\Lambda = S^2$  hiperbolikus halmaz,  $E_X^S$  és  $E_X^U$  az  $e_s$  és  $e_u$  saját-irányok alterei, míg  $\lambda = \lambda_s$ .

Definíció. A  $\Lambda \subset M$  halmazt attraktornak nevezzük, ha

a)  $\Lambda$  hiperbolikus halmaz;

b)  $T$  megszorítása  $\Lambda$  -ra topológikusan tranzitív (azaz van  $x \in \Lambda$  pont, hogy a  $\{T^n x, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$  trajektória sűrű  $\Lambda$  -n);

c) megadható egy  $U \supset \Lambda$  nyílt halmaz, hogy  $U \supset TU$  és  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n U$ .

A definícióban szereplő  $U$  halmaz a  $\Lambda$  attraktor vonzási halmaza.

Erősen jellemző a dinamikákat tanulmányozó nem-konzervatív ergodelméletre, hogy fogalomalkotásaiban erősen épít a klaszikus, konzervatív ergodelméletre; annak fogalmait megszabadítva az invariáns mértéktől való függéstől, már nem metrikus, hanem ún. topológikus fogalmakhoz jut. A fenti definícióban szereplő topológikus tranzitivitás a metrikus tranzitivitásból, vagyis az ergodicitásból származik ezen a módon: mind-

kettő bizonyos értelemben nem-triviális komponensek létezését zárja ki.

A macska automorfizmusánál  $\Lambda = S^2$ , a szolenoid leképezésénél  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n K$  (hiperbolikus) attraktorok.

#### 4.5 Hiperbolikus dinamikák

Az itt bevezetendő feltételek lényege az, hogy egy diffeomorfizmus akkor lesz hiperbolikus, ha egy - a diffeomorfizmus karakterizálásához szükséges - elég nagy halmaz hiperbolikus.

Definíció. Az  $x \in M$  pont az  $(M, T)$  dinamika nem-vándorló pontja, ha az  $x$  pont tetszőleges  $U$  környezetére  $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n U \neq \emptyset$ .

Nem-vándorló pontok például a  $T$  leképezés periodikus pontjai. Jelöljük a  $T$  leképezés nem-vándorló pontjainak halmazát  $\Omega(T)$  -vel.

Definíció (Smale, 1967). A  $T$  diffeomorfizmust A-diffeomorfizmusnak nevezzük, ha

- (i)  $\Omega(T)$  hiperbolikus halmaz;
- (ii)  $\Omega(T)$   $T$  periodikus pontjai halmazának lezárása.

Definíció (Anoszov, 1967). A  $T$  diffeomorfizmust U-diffeomorfizmusnak nevezzük, ha  $T$  A-diffeomorfizmus és  $\Omega(T) = M$ .

Példák: a macska automorfizmusa U-diffeomorfizmus, a szolenoid leképezése A-diffeomorfizmus. Igen fontos A-diffeomorfizmus a Smale-patkót definiáló diffeomorfizmus, de ennek definíciójától itt eltekintünk.

#### 4.6 Entrópia és topológikus entrópia

Az entrópia információelméleti fogalmát Shannon adta 1948-ban. Erre alapozva definiálták 1958-59-ben Kolmogorov és Szinaj dinamikai rendszerek entrópiáját, ami egyúttal kapcsolatot teremtett a klasszikus termodinamika entrópia fogalmával



is. A modern ergodelmélet dinamikákra is átvitte a fogalomalkotást, így jutunk a topológikus entrópiához.

Legyen  $(M, \mu)$  valószínűségi mező, azaz  $\mu$  valószínűségi mérték  $M$ -en ( $\mu(M)=1$ ). Adjuk meg  $M$  valamely  $A = \{A_i : 0 \leq i \leq r\}$  felbontását, és jelöljük:  $\mu(A_i) = p_i$  ( $\sum_0^r p_i = 1$ ).

Definíció (Shannon, 1948). Az  $A$  felbontás entrópiája

$$H(A) = - \sum_0^r p_i \log_2 p_i .$$

$H(A)$  leegyszerűsített jelentése: ha csak annyit akarunk tudni, hogy egy véletlen kísérlet kimenetele az  $A$  felbontás melyik elemébe esik, átlagosan körülbelül legalább hány igen-nem kérdésre van ehhez szükségünk. (E kép pontosítható, ha hosszú független kísérletsorozatokra fogalmazzuk át.)

Például ha  $p_0 = p_1 = \dots = p_r = \frac{1}{r+1}$ , akkor  $H(A) = \log_2(r+1)$ .

Tekintsük most az  $(M, T, \mu)$  dinamikai rendszert. Rögzítsük  $M$  tetszőleges  $A$  felbontását. Az  $A, T^{-1}A, \dots, T^{-(n-1)}A$  felbontások  $A \cap T^{-1}A \cap \dots \cap T^{-(n-1)}A$  közös finomítása nem más, mint az  $A$  által meghatározott szimbolikus dinamika  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  elemei által generált felbontás. Például szabályos érmével való dobásnál (1. diadikus endomorfizmus) e közös finomításnak  $2^n$  eleme van és mindegyik  $1/2^n$  valószínűségi.

Definíció. Az  $(M, T, \mu)$  dinamikai rendszernél az  $A$  felbontás által meghatározott szimbolikus dinamika entrópiája

$$H(A, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(A \cap T^{-1}A \cap \dots \cap T^{-(n-1)}A) .$$

Definíció (Kolmogorov, 1958; Szinaj, 1959). Az  $(M, T, \mu)$  dinamikai rendszer entrópiája

$$H(T) = \sup_A H(A, T) ,$$

ahol a  $\sup$   $M$  összes véges felbontásaira veendő.

A definíció alkalmazásával kapjuk például, hogy egy Bernoulli-eltolás entrópiája  $-\sum_0^r p_i \log_2 p_i$ , míg a macska automorfizmusának entrópiája  $\log_2 \lambda_u$ . Ezen utóbbi összefüggés sokkal általánosabb érvényű, ha úgy interpretáljuk, hogy a macska automorfizmusának entrópiája a tágulási együttható logaritmus. Ez az automorfizmus ugyanis a legegyszerűsebb, például a tágulási együttható mindenütt azonosan  $\lambda_u$ . Az  $M$  kompakt Riemann-sokaság elég szép  $T$  diffeomorfizmusaira egyrészt minden pontban létezik a  $\bar{\lambda}(x)$  Ljapunov-exponens, másrészt elég szép  $\mu$  invariáns mértékekre

$$H(T) = \int_M \bar{\lambda}(x) d\mu$$

(a macska automorfizmusánál természetesen  $\bar{\lambda}(x) \equiv \log_2 \lambda_u$ ). Ezen összefüggéssel kapcsolatban a legújabb eredményekről l. [6].

Végül egy érdekes és fontos megjegyzés: ha az  $(M, T, \mu)$  automorfizmus  $K$ -keverő, akkor  $H(T) > 0$ .

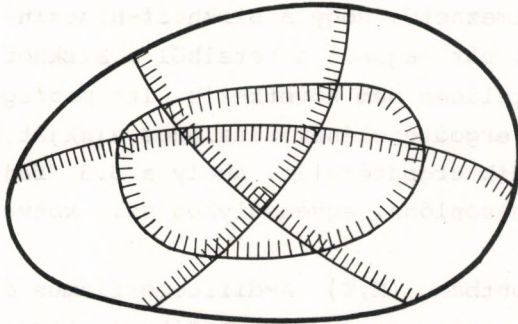
Térjünk át a topológikus entrópia fogalmára. Tekintsük a  $T$  dinamikát az  $M$  kompakt Riemann-sokaságon. A most  $M$ -nek nem felbontását, hanem nyílt halmazokkal való lefedését fogja jelenteni, azaz  $A = \{A_i : 0 \leq i \leq r\}$ , ahol  $\bigcup_0^r A_i = M$  és mindegyik  $A_i$  nyílt halmaz. Az  $A$  lefedésnek esetleg egy részlefedése is elegendő  $M$  lefedéséhez. Jelöljük általában  $N(A)$ -val az  $A$  lefedésből kiválasztható minimális elemszámú részlefedés számosságát; pl. a 4.4 ábrán  $N(A) = 4$ .

Rögzítve  $M$ -nek egy  $A$  lefedését, jelöljük  $A_{T,n}$ -nel az összes  $A_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}A_{i_{n-1}}$  alakú halmaz által adott lefedést, ahol  $A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_{n-1}}$  végigszaladnak  $A$  elemein (megjegyezzük, hogy nyílt halmazok metszete nyílt).

Definíció. Az  $(M, T)$  dinamika  $A$  -ra vonatkozó topológikus entrópiája



$$h(A, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 N(A_{T, n}) .$$



4.4 ábra. Nyílt lefedés

Definíció (Adler-Konheim-McAndrew, 1965). Az  $(M, T)$  dinamika topológikus entrópiája

$$h(T) = \sup_A h(A, T) ,$$

ahol  $A$   $M$ -nek az összes véges lefedésein fut végig.

Érdekes tény, hogy egy szép leképezés esetén a topológikus entrópia szoros kapcsolatban áll a leképezés periodikus pontjainak számával. Nevezetesen Bowen bizonyította 1970-ben, hogy ha  $T$   $A$ -diffeomorfizmus, akkor

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log_2 P_n(T) ,$$

ahol  $P_n(T)$  jelöli  $T$   $n$ -periódusú pontjainak számát.

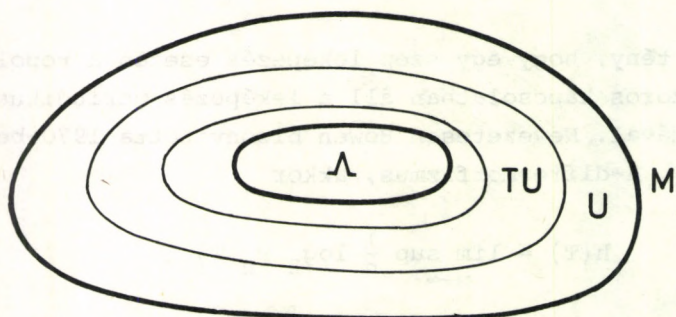
#### 4.7 Bowen-Ruelle ergodtételei dinamikákra

A szolenoid leképezésénél már megismerkedtünk Bowen-Ruelle első ergodtételeének speciális alakjával, és láttuk, hogy e tétel úgy is értelmezhető, hogy a Birkhoff-Hincsin-tétel stabilitását mutatja, bár magából a tételből a Birkhoff-Hincsin-tétel állítása általában nem következik. Itt megfogalmazzuk Bowen-Ruelle első ergodtételeének általános alakját, továbbá Bowen-Ruelle második ergodtételét, amely a 3.3 fejezetben tárgyalt tételhez hasonlóan, egyensúlyhoz való konvergenciát állít (l. [2]).

Legyen  $e$  pontban  $(M, T)$   $A$ -diffeomorfizmus és  $\Lambda$  korlátozott attraktor (természetesen hiperbolikus). Legyen  $U$  a  $\Lambda$  attraktor egy vonzási halmaza, azaz  $U \supset T U \supset \Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n U$  (l. 4.5 ábra). Legyen végül  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény.

Bowen-Ruelle első ergodtétele (1975). *Megadható egyetlen olyan  $\mu$  valószínűségi mérték  $\Lambda$ -n, hogy  $(\Lambda, T, \mu)$  dinamikai rendszer, és  $m$ -m.m.  $x \in U$ -ra*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(T^k x) = \int_{\Lambda} u \, d\mu .$$



4.5 ábra. A vonzási halmaz



Mivel  $\Lambda$  kompakt,  $T$ -re invariáns halmaz, és  $T$  folytonos, a Bogoljubov-Krülov-tétel szerint a  $\Lambda$ -n értelmezett,  $T$ -invariáns mértékek halmaza nem üres. A tétel állításában szereplő  $\mu$ -t egy variációs elv segítségével lehet meghatározni. Nevezetesen először értelmezünk egy  $\varphi^u: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelyet potenciálnak nevezhetünk. Ezt rögzítve bebizonyítható, hogy egyetlen  $T$ -invariáns  $\mu$  valószínűségi mérték létezik  $\Lambda$ -n, amelyre

$$H_\mu(T) + \int_\Lambda \varphi^u d\mu$$

maximális. Itt  $H_\mu(T)$  a  $(\Lambda, T, \mu)$  dinamikai rendszer entrópiája. Tehát  $\mu$  a  $\varphi^u$  potenciálhoz tartozó Gibbs-eloszlás, érdekes kapcsolatot találunk a statisztikus fizika és az ergodelmélet között.

A  $\varphi^u$  potenciál definícióját egyszerűbb folyamatok esetére megadjuk. Ha tehát  $(M, T^t)$  folyam és  $\Lambda$  attraktor, akkor jelölje  $DT^{t,u}: E_x^u \rightarrow E_{T^t x}^u$  ( $x \in \Lambda$ ) a derivált leképezés táguló részét. Ekkor

$$\varphi^u_x = - \left. \frac{d \log \text{Jac } DT^{t,u}_x}{dt} \right|_{t=0}.$$

Az egyensúlyhoz való konvergenciára, az ún. kinetikára vonatkozó tétel kimondásához szükség van a topológiai keverés fogalmára.

Definíció. Az  $(M, T)$  leképezés topológikusan keverő, ha minden  $U, V \subset M$  nyílt halmaz-párra megadható  $N$ , hogy  $U \cap T^n V \neq \emptyset$  hacsak  $n \geq N$ .

Bowen-Ruelle második ergodtétele a kinetikáról (1975). Ha az előző tétel feltételein túlmenően  $T$  topológikusan keverő, és  $\nu$  tetszőleges valószínűségi mérték  $U$ -n, amelynek létezik az  $m$ -re vonatkozó sűrűségfüggvénye (azaz van  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,

szerepelnek, és csak azt tesszük fel, hogy  $\lambda_1 < 1$  és  $\lambda_1 < \frac{1}{\lambda_2}$ . Peszin és Szinaj újabb ergodtételeket bizonyítottak parciálisan ergodikus rendszerekre (szóbeli közlés; egyébként a hiperbolikus tulajdonságok elméletéről igen hasznos áttekintést nyújt [11]).

Igen sok Hamilton-rendszerénél azonban a hiperbolicitás nem teljesül az egész fázistéren, sőt mint ismeretes, a sztochasztikus és a reguláris viselkedés tartományai meglehetősen kaotikusan keverednek. Ennek a keveredésnek a megragadása ma a matematika és a fizika egyik legérdekesebb kérdésének látszik.

Szingularitásokkal rendelkező sima rendszerek egyik legnehezebb modellje a Szinaj-biliárd. 1980-ban Bunyimovics és Szinaj erre konstruáltak Markov-felbontást, aminek segítségével azután centrális határeloszlástételt is sikerült bizonyítaniuk (ennek érdekes következménye, hogy a síkon a Lorentz-folyamat diffúziós határértéke - periodikus szórótestek esetén - a Brown-mozgás). A Lorenz-rendszerénél alkalmazott Poincaré-leképezésnek is van szingularitási vonala. A biliárdtechnika alkalmazásával Bunyimovicsnak erre a leképezésre is sikerült Markov-felbontást adnia és centrális határeloszlástételt bizonyítania.

Az empirikus, szimulációs kutatásoknál felmerül a kérdés: megbízhatóak-e a nyert eredmények. Az eredményeket ugyanis nagyszámú iteráció segítségével nyerjük, de csak korlátozott pontossággal tudunk számolni és a kerekítési hibák esetleg önmagukban is előidéznek a számunkra kaotikusnak tűnő viselkedést. Jóllehet a konkrét szimulációknál az alábbi eredmények érvényességét ellenőrizni kell, mégis megnyuugtatásul utalunk két vizsgálatra.

Bowen és Ruelle ergodtételeik stabilitását is bebizonyították. Nevezetesen megmutatták, hogy a  $\Lambda$  attraktor és az ezen adott  $\mu$   $T$ -invariáns Gibbs-mérték  $T$ -től folytonosan függ. Kifer [7] a következő sztochasztikus differenciálegyenletet vizsgálta

$$\frac{dx}{dt} = v(x) + \epsilon \zeta(t),$$



hogy minden ACU-re  $\nu(A) = \int_A f d\mu$ , akkor

$$\int_U u(T^n x) d\nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_U u d\mu.$$

#### 4.8 Kutatási irányok

Teljességre még jóval bővebb keretek között sem törekedhetnénk, itt csupán vázlatosan szólunk két fontos irányzatról. Matematikailag is szigorú módon legrészletesebben az egydimenziós intervallumleképezések elmélete kidolgozott. A kötet bevezető részében láttuk, hogy ez az elmélet bizonyos közelítéseken keresztül releváns a fizikailag érdekes rendszerekre, például a Lorenz-rendszerre vonatkozólag. Ennek ellenére, a kaosz kialakulásának és tulajdonságainak megértéséhez kívánatos lenne ezeknek a rendszereknek a közvetlen leírása. A Bowen-Ruelle-típusú tételek alkalmazásához szükség lenne a szóban forgó leképezések és attraktorok (Hénon-attraktor, Lorenz-attraktor) hiperbolikus tulajdonságainak ismeretére. Innen érthető, hogy az elmélet és e rendszerekről szerzett információink közötti hézagot két irányból próbálják szűkíteni: az elmélet oldaláról minél gyengébb feltételek mellett keresnek ergodikus tételeket, míg az empiria oldaláról - kölcsönhatásban a számítógépekkel - e konkrét rendszerek hiperbolikus tulajdonságait kísérlik meg verifikálni.

Az első, matematikai irányzat is két részre osztható. Egyrészt gyengébb hiperbolicitási feltételeknek eleget tevő, de differenciálható leképezéseket vizsgálnak, másrészt megengednek olyan leképezéseket is, amelyeknek szingularitásaik is vannak. A 4.4 fejezetben, a hiperbolikus halmaz definíciójában szereplő  $\lambda$  ott bármely trajektória minden pontjában azonos. Ha megengedjük, hogy  $\lambda$  értéke adott trajektória mentén nem túl gyorsan, de rosszabbodjon, azaz 1-hez közelebb kerüljön, akkor a nem-egyenletes hiperbolicitás feltételéhez jutunk. A parciális hiperbolicitásnál az említett definíció (ii) pontjában a két egyenlőtlenségnek különböző  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  állandók

ahol  $\zeta(t)$  a fehér zaj, és bebizonyította, hogy  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén az egyenlet stacionárius megoldásának eloszlása konvergál az  $\varepsilon=0$ -ra vett dinamikai invariáns mértékéhez.

#### IRODALOM

1. V.I. Arnold, A klasszikus mechanika matematikai módszerei, Műszaki Könyvkiadó (megjelenés alatt)
2. R.Bowen, D. Ruelle, *Inventiones Mathematicae* 29, 181, 1975.
3. L.A. Bunimovich, *Communications in Mathematical Physics* 65, 295, 1979.
4. Daoudy, előadás a "Chaotic Behaviour in Deterministic Systems" nyári iskolán, Les Houches, 1981.
5. M.V. Jakobson, *Communications in Mathematical Physics* 81, 39, 1981.
6. A. Katok, *Publications Mathématiques, Institut des Hautes Études Scientifiques* 51, 137, 1980.
7. Ju.I. Kifer, *Theory of Probability and its Applications* 19, 487, 1974.
8. I.P. Kornfeld, Ja.G. Szinaj, Sz.V. Fomin, *Ergogyicseszakaja Tyeorija (Nauke, Moszkva, 1980)*
9. A. Krámlí, D. Szász, *Colloquia Math. Soc. János Bolyai* (megjelenés alatt)
10. V.F. Lazutkin, *Izvesztyija AN SzSzsZR, Szer. mat.* 37, 186, 1973.
11. Ja.B. Peszin, Ja.G. Szinaj, kézirat, 1981.
12. A. Snyirelman, *Uszpehi Mat. Nauk* 29, 181, 1974.
13. Ja.G. Szinaj, *Uszpehi Mat. Nauk* 25, 141, 1970.
14. Vetier András, ez a kötet
15. Bevezetés..., 22. fejezet
16. Bevezetés..., F.5 függelék



# A SZINAJ-BILIÁRD ERGODICITÁSA

Vetier András

1. Bevezetés	481
2. A hiperbolikus sík Poincaré-féle modellje	481
3. Geodetikus folyam a hiperbolikus síkon	485
4. A "bizonyítás"	488
4.1 Riemann-metrika a fázistéren	488
4.2 Birkhoff-Hincsin-tétel	489
4.3 Szűkülő és táguló horociklusok	490
4.4 Szűkülő és táguló levelek	491
4.5 Ha nem lennének rossz elemek	492
4.6 Mértékek ekvivalenciája	494
5. Hiperbolikus tóruszok	496
6. Horociklusok a Szinaj-biliárdban	500
Irodalom	502





## 1. BEVEZETÉS

Feltételezem, hogy az Olvasó ismeri a Szinaj-biliárd fogalmát (1. [3]), és tisztában van jelentőségével. Írásomnak célja, hogy az Olvasó az ergodicitás bizonyításáról képet kapjon. Szinaj bizonyítását (1. [5]) még vázlatosan is nehéz lenne elmondani, hiszen bizonyítása, ami sok helyen szintén csak vázlatos, több mint 50 oldal. Mégis - egy másik modellel keresztül - lehetőség van rövid és szemléletes ismertetésre. Ehhez a modellhez viszont a Bolyai-féle hiperbolikus geometria néhány fogalma szükséges, ezeket sorolom fel a 2. fejezetben. A 3., 4., 5. fejezetekben E. Hopf 1939-es eredményét (1. [1]) igyekszem egyszerű lépésekre lebontani. A 6. fejezetben pedig megvilágítom, hogy ezek a lépések a Szinaj-biliárd esetében mit jelentenek, és milyen nehézségekkel járnak.

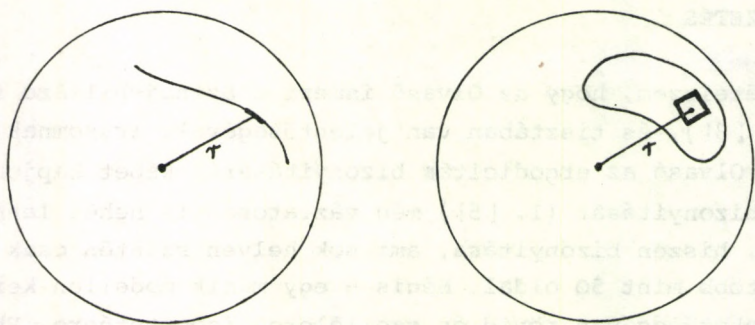
## 2. A HIPERBOLIKUS SIK POINCARÉ-FÉLE MODELLJE

Ebben a modellben az euklideszi sík egységsugarú körlapjának belseje játssza a hiperbolikus sík szerepét. A modell ismert tulajdonságai (1. [4]) közül összegyűjtjük azokat, melyekre szükségünk lesz.

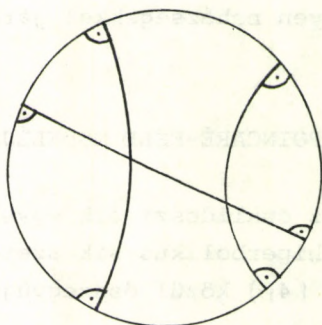
a.) Két görbe által bezárt szög ugyanannyi, mint az euklideszi geometriában.

b.) Az "elemi ívhossz" az euklideszi ívhossz  $2/(1-r^2)$  -szerese, ahol  $r$  a kör középpontjától való távolságot jelenti. Ennek megfelelően az "elemi terület" az euklideszi terület  $4/(1-r^2)^2$  -szerese (1. 2.1 ábra). Tehát a hiperbolikus geometriában az ívhosszt, illetve a területet az euklideszi ívhossz, illetve terület szerinti integrállal számolhatjuk ki.

c.) A hiperbolikus geometriában a geodetikus vonalak (azonosan  $O$  görbületű görbék) egybeesnek az euklideszi sík olyan köríveivel, melyek merőlegesek a körlap szélére. A körlap átmérőit is a körívek közé soroljuk (1. 2.2 ábra). A hiperbolikus sík geodetikus vonalai végtelen hosszúak.



2.1 ábra. "Elemi ivhossz és terület"

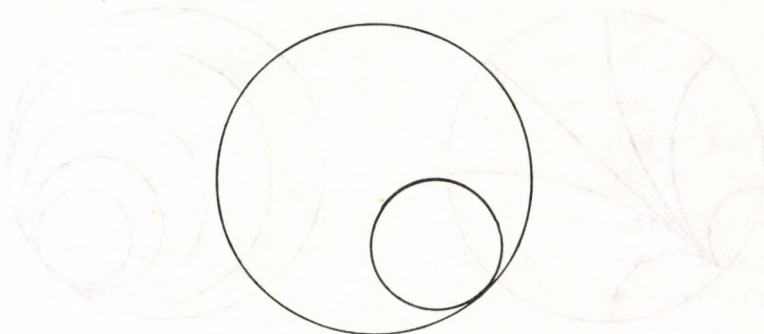


2.2 ábra. Geodetikus vonalak

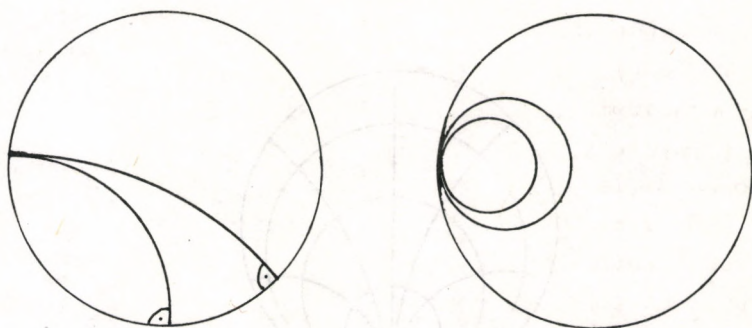
d.) A hiperbolikus geometriában horociklusnak (vagy paraciklusnak) nevezik az azonosan 1 görbületű görbét. A horociklusok egybeesnek az euklideszi sík olyan körvonalalaival, melyek belülről érintik a körlap szélét. Természetesen maga az érintési pont nem tartozik a horociklushoz (1. 2.3 ábra).

e.) Két geodetikus vonalat egymással összesimulónak, illetve két horociklust ugyanabba a családba tartozónak hívunk, ha a nekik megfelelő euklideszi körívek a körlap szélén érintik egymást (1. 2.4 ábra).





2.3 ábra. Horociklus

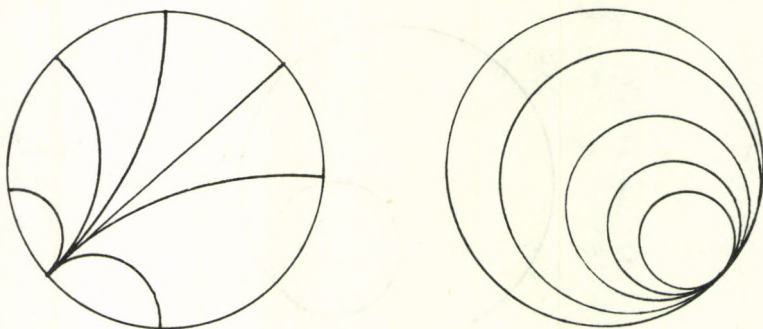


2.4 ábra. Összesimuló geodetikusok; egy családba tartozó horociklusok

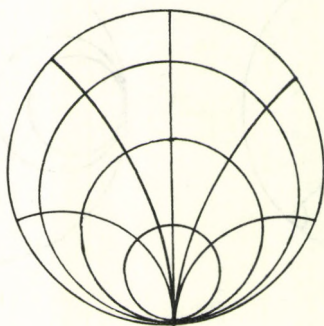
Az összesimuló geodetikus-sereg, illetve a horociklus-család definícióját szemlélteti a 2.5 ábra. Kézenfekvő, hogy egy összesimuló geodetikus-sereg ortogonális trajektória-rendszere egy horociklus-család (l. 2.6 ábra).

f.) Tekintsük egy összesimuló geodetikus-seregnek, illetve az ortogonális horociklus-családnak két-két elemét. A 2.7 ábra jelöléseit használva igaz, hogy az  $A_1A_2$  geodetikus-darab ivhossza egyenlő a  $B_1B_2$  geodetikus-darab ivhosszával.

g.) Tekintsük egy összesimuló geodetikus-sereg két elemét,



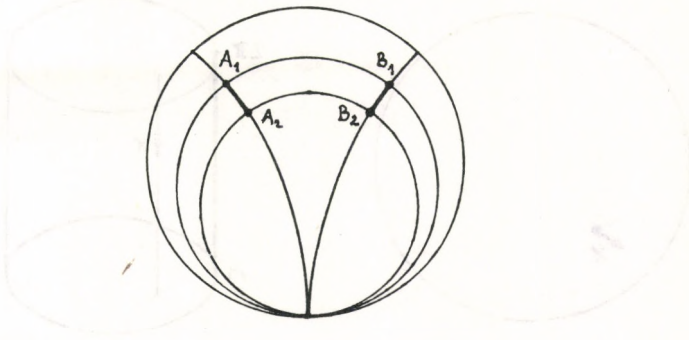
2.5 ábra. Összesimuló geodetikus-sereg; horociklus-család



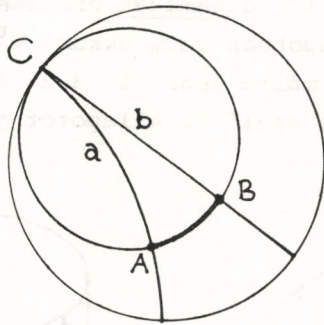
2.6 ábra. Ortogonális trajektória-rendszer

$a$ -t és  $b$ -t. Az euklideszi geometriában  $a$  és  $b$  érinti egymást egy  $C$  pontban. Az  $a$  és  $b$  geodetikus vonalakon vegyük fel az  $A$  és  $B$  pontokat úgy, hogy ezek a pontok az ortogonális horociklus-seregnek ugyanazon az elemén legyenek (l. 2.8 ábra). Ekkor  $A, B \rightarrow C$  esetén az  $AB$  horociklus-darab ivhossza  $O$ -hoz tart. A  $C$  pont nem eleme a hiperbolikus síknak. Ezért az  $a$  és  $b$  geodetikus vonalaknak nincs közös pontjuk, csak "összesimulnak a végtelenben".





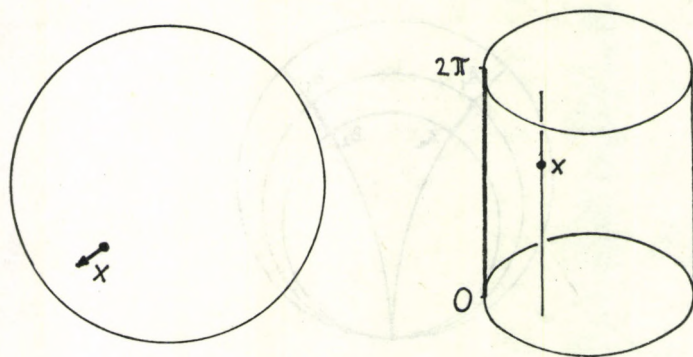
2.7 ábra.  $A_1A_2$  ivhossza =  $B_1B_2$  ivhossza



2.8 ábra. a és b "összesimul"

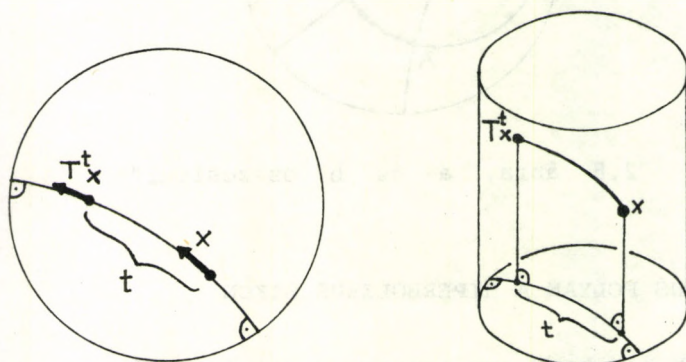
### 3. GEODETIKUS FOLYAM A HIPERBOLIKUS SIKON

Képzeljük el, hogy egy pontszerű golyó egységnyi sebességgel "egyenesen", azaz geodetikus vonal mentén halad a hiperbolikus síkon. A golyó állapotát a helye és a sebessége adja meg, ezért a mozgás leírása céljából fázistér gyanánt a hiperbolikus sík érintő egységvektoraiból álló  $M$  halmazt választjuk. Ez a halmaz kézenfekvő módon azonosítható a hiperbolikus sík modelljeként felvett körlap fölé emelt  $2\pi$  magasságú hengerrel (1. 3.1 ábra).



3.1 ábra. A fázistér

A golyó mozgása egy  $T^t$  dinamikát értelmez  $M$ -en. Ha a golyó most az  $x \in M$  állapotban van, akkor  $T^t x$  az az állapot, melyben a golyó  $t$  idő múlva lesz (l. 3.2 ábra).  $t < 0$  esetén  $T^t x$  a  $|t|$  idővel ezelőtti állapotot jelenti.



3.2 ábra. Dinamika

Mint ismeretes [2]-ből, erre a dinamikára invariáns az az  $m$  mérték  $M$ -en, melyet a hiperbolikus síkon vett területmértékből és az irányok halmazán tekintett szögmértékből (azaz a henger magasságának megfelelő  $[0, 2\pi]$  szakaszon vett Lebesgue-



mértékből) direktszorzatként kapunk.

A kapott  $(M, T^t, m)$  dinamikai rendszert a hiperbolikus sikon tekintett geodetikus folyamnak nevezzük.

A hiperbolikus sikon nem kompakt, és területe sem véges. Ezért a most következő állítás semmitmondó.

Állítás. *Ha a hiperbolikus sikon kompakt volna, és területe véges volna, akkor a rajta tekintett geodetikus folyam ergodikus volna.*

Megjegyzés. Ennek az állításnak nemcsak a premisszái, hanem a konklúziója is hamis, ugyanis a hiperbolikus sikon a geodetikus folyam nem ergodikus!

Az állítás "bizonyítása" mégis nagyon tanulságos. Ugyanis a.) a hiperbolikus tóruszok (1. 5. fejezet) kompaktok, és területük is véges, és mindaz teljesül rájuk, ami a hiperbolikus sikon teljesül, és amire a "bizonyításban" szükség van. Ezért a "bizonyítás" gondolatmenetéből közvetlenül adódik a hiperbolikus tóruszokon tekintett geodetikus folyamok ergodicitásának bizonyítása.

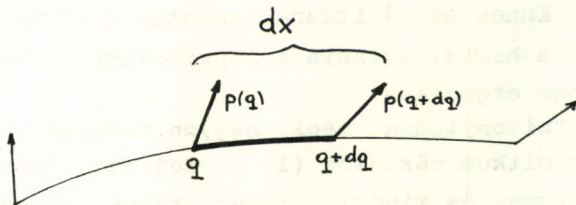
b.) Mint majd a 6. fejezetben utalunk rá, a Szinaj-biliárd ergodicitásának bizonyítása is ezen a gondolatmeneten alapszik.

Tehát a most következő "bizonyítás" GONDOLATMENETÉT kell az Olvasónak megérteni. A könnyebb érthetőség kedvéért követjük ezt a matematikában szokatlan utat, hogy egy semmitmondó állítást "bebizonyítunk". Ha a gondolatmenetet a hiperbolikus tóruszokon vett geodetikus folyamok ergodicitásának bizonyításával mutatnánk be, akkor a hiperbolikus tóruszok megemésztéséből adódó nehézségek esetleg elhomályosítanák a gondolatmenet lényegét.

#### 4. A "BIZONYÍTÁS"

##### 4.1 Riemann-metrika a fázistéren

Az  $M$  fázistéren Riemann-metrikát értelmezünk a hiperbolikus sík Riemann-metrikájából. E célból vegyünk egy  $dx$  "elemi görbedarabot"  $M$ -ben, azaz a hiperbolikus síkon tekintsünk egy  $dq$  "elemi görbedarab" mindenegyenes  $q$  pontjában egy  $p(q)$  egységvektort (l. 4.1 ábra). Jelöljük  $d\alpha$ -val a  $p(q)$ ,



4.1 ábra.  $dx$  "elemi görbedarab"

$p(q+dq)$  vektoroknak a  $dq$  menti párhuzamos eltolásnál adódó szögét. Legyen

$$dx \text{ ivhossza} = \sqrt{(dq \text{ ivhossza})^2 + (d\alpha)^2}.$$

Legyen most  $g$  véges ivhosszúságú görbe a hiperbolikus síkon. Ha a  $p(q)$  ( $q \in g$ ) egységvektorok mind merőlegesek  $g$ -re, akkor  $d\alpha = \kappa(q) \cdot dq$ , ahol  $\kappa(q)$  a  $g$  görbe görbületét jelenti a  $q \in g$  pontban. Ezért a  $g$ -ből ily módon kapott  $\tilde{g}_{CM}$  görbére

$$\tilde{g} \text{ ivhossza} = \int_g \sqrt{1 + (\kappa(q))^2} dq,$$

ahol az integrálás a hiperbolikus síkon vett ivhossz szerint értendő.

Ha speciálisan  $g$  egy horociklusnak véges ivhosszúságú darabja, akkor  $\kappa(q) = 1$  ( $q \in g$ ), és így



$$\tilde{g} \text{ ivhossza} = \sqrt{2} \cdot g \text{ ivhossza} . \quad (4.1)$$

#### 4.2 Birkhoff-Hincsin-tétel

Vegyünk egy tetszőleges  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, mely  $m$  szerint integrálható  $M$ -en. A Birkhoff-Hincsin-tétel szerint (l. [3]) az

$$u^+(x) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} u(T^t x) dt$$

jövőbeli időátlag és az

$$u^-(x) = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} u(T^t x) dt$$

múltbeli időátlag majdnem minden  $x \in M$ -re létezik; majdnem minden  $x \in M$ -re

$$u^+(x) = u^-(x) ; \quad (4.2)$$

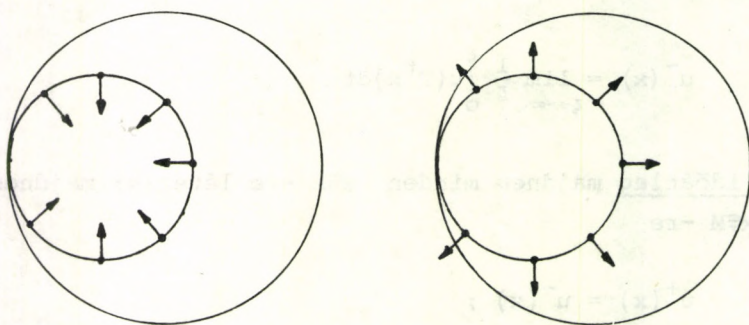
továbbá az  $u^+$  és az  $u^-$  függvények a  $T^t$  dinamika trajektoriái mentén invariánsak. Azt is tudjuk, hogy az  $\{M, T^t, m\}$  dinamikai rendszer ergodicitásának igazolásához elég azt belátni, hogy az  $u$  függvényhez van olyan  $c$  konstans, hogy majdnem minden  $x \in M$ -re

$$u^+(x) = u^-(x) = c . \quad (4.3)$$

Ha a fázistér véges mértékű, akkor az ergodicitás igazolásához a (4.3) egyenlőséget elég csak folytonos  $u$  függvényekre igazolni. Ha a fázistér kompakt, akkor a folytonos függvények egyenletesen is folytonosak, ezért a továbbiakban tegyük fel, hogy  $u$  egyenletesen folytonos, integrálható függvény  $M$ -en.

### 4.3 Szűkülő és táguló horociklusok

Tekintsünk egy horociklust, és állítsunk minden pontjába egy egységvektort úgy, hogy ezek az egységvektorok merőlegesek legyenek a horociklusra, és mindegyik a 4.2 ábrán szemléltetett irányba mutasson. A felvett egységvektorok együttesen a fázistérnek egydimenziós részsokaságát alkotják, amit szűkülő horociklusnak nevezünk. Ha az egységvektorokat ellenkezőleg irányítjuk, akkor táguló horociklushoz jutunk (l. 4.2 ábra).



4.2 ábra. Szűkülő és táguló horociklus

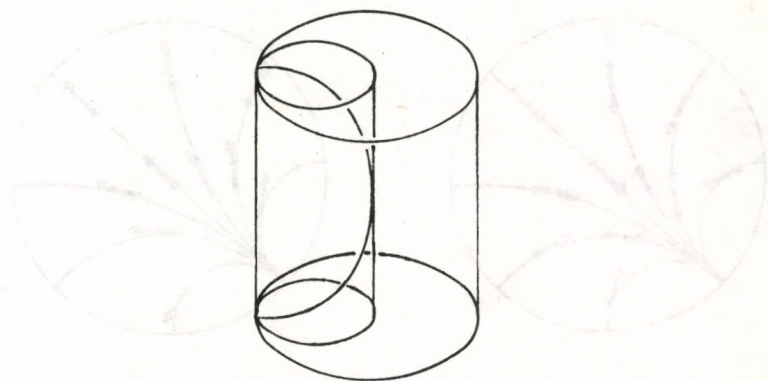
Kézenfekvő, hogy ha a fázisteret hengerrel reprezentáljuk, akkor a szűkülő és táguló horociklusok csavarvonalaknak felelnek meg (l. 4.3 ábra).

A 2. fejezet g.) pontjában mondottakból és (4.1)-ből következik, hogy ha  $x$  és  $y$  egy szűkülő horocikluson vannak, akkor  $T^t x$  és  $T^t y$  távolsága  $t \rightarrow \infty$  esetén  $0$ -hoz tart. Ha pedig  $x$  és  $y$  egy táguló horocikluson vannak, akkor  $T^t x$  és  $T^t y$  távolsága  $t \rightarrow -\infty$  esetén tart  $0$ -hoz. (Ezek a tények indokolják a "szűkülő", illetve "táguló" elnevezést.)

$u$  egyenletes folytonossága miatt ha  $x$  és  $y$  egy szűkülő horocikluson vannak, akkor  $t \rightarrow \infty$  esetén  $u(T^t x) - u(T^t y) \rightarrow 0$ , és ezért

$$u^+(x) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} u(T^t x) dt = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} u(T^t y) dt = u^+(y) .$$





4.3 ábra. Csavarvonal

$u^-$  -ra is hasonló okoskodást végezve adódik az

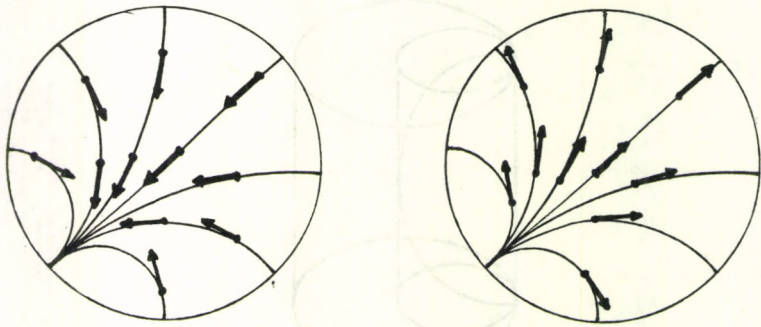
1. Segéd-állítás.  $u^+$  invariáns a *szűkülő horociklusok mentén*,  $u^-$  pedig invariáns a *táguló horociklusok mentén*.

#### 4.4 Szűkülő és táguló levelek

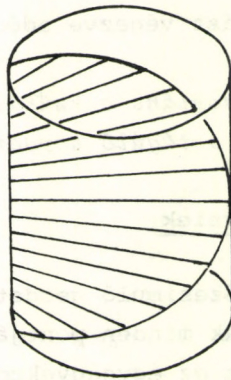
Tekintsünk most egy összesimuló geodetikus-sereget. A sereg minden geodetikus vonalának minden pontjában vegyünk fel egy egységvektort úgy, hogy ez az egységvektor érintse a geodetikus vonalat, és "abba az irányba mutasson, amerre a sereg összesimul" (l. 4.4 ábra). Ily módon a fázistérnek kétdimenziós részsokaságához jutunk, amit szűkülő levélnek nevezünk. Ha az egységvektorokat ellenkezőleg irányítjuk, akkor táguló levélhez jutunk. Kézenfekvő, hogy ha a fázisteret hengerrel reprezentáljuk, akkor a szűkülő és a táguló levelek "csavarfelületeknek" felelnek meg (l. 4.5 ábra).

Mivel  $u^+$  és  $u^-$  a dinamika trajektóriái mentén invariánsak, az 1. Segéd-állításból adódik a

2. Segéd-állítás.  $u^+$  invariáns a *szűkülő levelek mentén*,  $u^-$



4.4 ábra. Szűkülő és táguló levél



4.5 ábra. "Csavarfelület"

pedig invariáns a táguló levelek mentén.

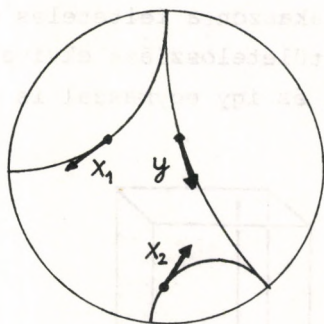
#### 4.5 Ha nem lennének rossz elemek

Mint a 4.2 pontban említettük, majdnem minden  $x \in M$ -re  $u^+(x) = u^-(x)$ , és azt szeretnénk belátni, hogy van olyan  $c$  konstans, hogy majdnem minden  $x \in M$ -re  $u^+(x) = u^-(x) = c$ .



3. Segéd-állítás. Ha minden  $x \in M$ -re  $u^+(x) = u^-(x)$ , akkor van olyan  $c$  konstans, hogy minden  $x \in M$ -re  $u^+(x) = u^-(x) = c$ .

Bizonyítás. Vegyünk két elemet a fázistérből:  $x_1$ -et és  $x_2$ -t. Keressünk egy olyan  $y$  elemet, mely  $x_1$ -gyel egy táguló levélen van,  $x_2$ -vel pedig egy szűkülő levélen van (1. 4.6 ábra). Ekkor a 2. Segéd-állítás miatt  $u^-(x_1) = u^-(y)$  és



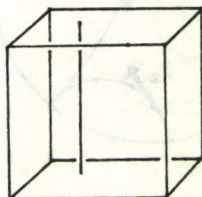
4.6 ábra.  $x_1$ ,  $x_2$  és  $y$  szemléltetése

$u^+(y) = u^+(x_2)$ . Mivel a feltétel szerint  $u^-(y) = u^+(y)$  és  $u^+(x_2) = u^-(x_2)$ , tényleg fennáll, hogy  $u^-(x_1) = u^-(x_2)$ , vagyis az  $u^+ \equiv u^-$  függvény tényleg konstanssal egyenlő  $M$ -en.

Látszik, hogy ha a 3. Segéd-állítás bizonyításában használt  $y$  elem rossz, azaz  $u^-(y) \neq u^+(y)$ , akkor nem jön ki az  $u^-(x_1) = u^-(x_2) = c$  egyenlőség. Ezért egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy a 3. Segéd-állítás igaz marad akkor is, ha benne a "minden" szavak helyére a "majdnem minden" kifejezést tesszük. Márpedig a 3. Segéd-állítás előtt megfogalmaztuk, hogy tulajdonképpen erre lenne szükségünk. A "bizonyítás" hátralevő részében azt mutatjuk meg, hogy ezen a nehézségen hogyan tehetjük túl magunkat.

#### 4.6 Mértékek ekvivalenciája

Két mértéket egymással ekvivalensnek szokás nevezni, ha minden olyan halmaz, ami az egyik mérték szerint nullmértékű, a másik mérték szerint is nullmértékű. Két mérték akkor és csak akkor ekvivalens egymással, ha egymásra vonatkozólag pozitív sűrűségfüggvénnyel rendelkeznek. Ismert dolog, hogy ha a (háromdimenziós euklideszi) kockán tekintünk egy olyan mértéket, ami ekvivalens a térfogatmértékkel, akkor ennek a mértéknek valamely függőleges szakaszon a feltételes eloszlása és a vízszintes síkok menti vetületeloszlása ekvivalens a szakaszon vett ivhosszmértékkel, és így egymással is (l. 4.7 ábra).



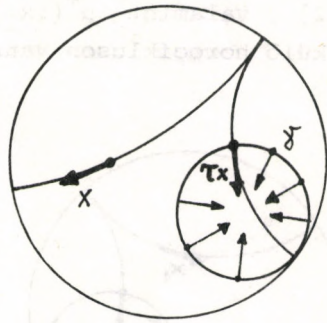
4.7 ábra. Kocka függőleges szakasszal

Nyilvánvaló, hogy ha kocka helyett hengert, függőleges szakasz helyett szűkülő horociklusnak megfelelő csavarvonalat, vízszintes síkok helyett pedig téguló leveleknek megfelelő csavarfelületeket veszünk, akkor is hasonlókat mondhatunk. Az állítás pontos megfogalmazása céljából tekintsünk egy  $\gamma^{\text{CM}}$  szűkülő horociklust, és  $x \in M$  esetén jelöljük  $\tau x$ -szel azt a  $\tau x \in \gamma$  elemet, amely egy téguló levélen van  $x$ -szel (l. 4.8 ábra). A  $\tau: M \rightarrow \gamma$  leképezést hívjuk téguló levelek menti vetítésnek  $M$ -ről  $\gamma$ -ra.

Tehát igaz a

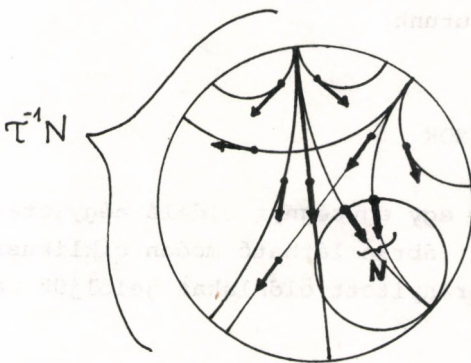
4. Segéd-állítás. A fázistéren vett  $m$  mértéknek valamely szűkülő horocikluson a feltételes eloszlása és a téguló levelek menti vetületeloszlása ekvivalens egymással.





4.8 ábra. Táguló levelek menti vetítés

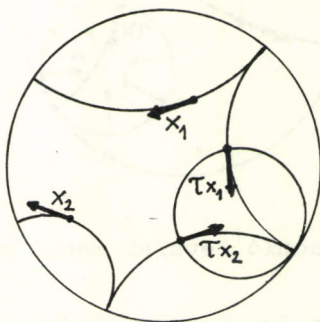
Mint tudjuk, a fázistér majdnem minden  $y$  eleme jó, azaz  $u^+(y)=u^-(y)$ . Ezért majdnem minden szükülő horocikluson a feltételes eloszlás szerint majdnem minden elem jó. Szemeljük ki és rögzítsünk egy ilyen  $\gamma$  szükülő horociklust. A  $\gamma$  horociklus rossz elemeinek halmazát jelöljük  $N$ -nel. Tehát  $N$  a  $\gamma$ -n vett feltételes eloszlás szerint nullmértékű. Mivel a  $\gamma$ -n vett feltételes eloszlás és az  $m$  mértéknek a  $\tau$  szerinti vetületeloszlása ekvivalens egymással,  $m(\tau^{-1}N)=0$  (1. 4.9 ábra).



4.9 ábra.  $N$  és  $\tau^{-1}N$  szemléltetése

Másrészt  $u^-(x_i)=u^-(\tau x_i)$ , hiszen  $x_i$  és  $\tau x_i$  egy táguló

levélen vannak ( $i=1,2$ ), valamint  $u^+(\tau x_1)=u^+(\tau x_2)$ , hiszen  $\tau x_1$  és  $\tau x_2$  egy szűkülő horocikluson vannak (1. 4.10 ábra).



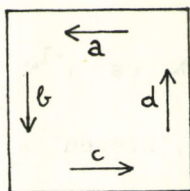
4.10 ábra.  $x_1, x_2, \tau x_1, \tau x_2$  szemléltetése

Ha  $x_i \notin \tau^{-1}N$ , akkor a  $\tau x_i$  elem jó, és ezért  $u^-(\tau x_i)=u^+(\tau x_i)$  ( $i=1,2$ ).

Mindebből kiadódik, hogy  $x_1, x_2 \notin \tau^{-1}N$  esetén  $u^-(x_1)=u^-(x_2)$ , vagyis van olyan  $c$  konstans, hogy majdnem minden  $x \in M$  esetén  $u^-(x)=c$ . Ezt (4.2)-vel összevetve az igazolandó (4.3) egyenlőséghez jutunk.

## 5. HIBERBOLIKUS TÓRUSZOK

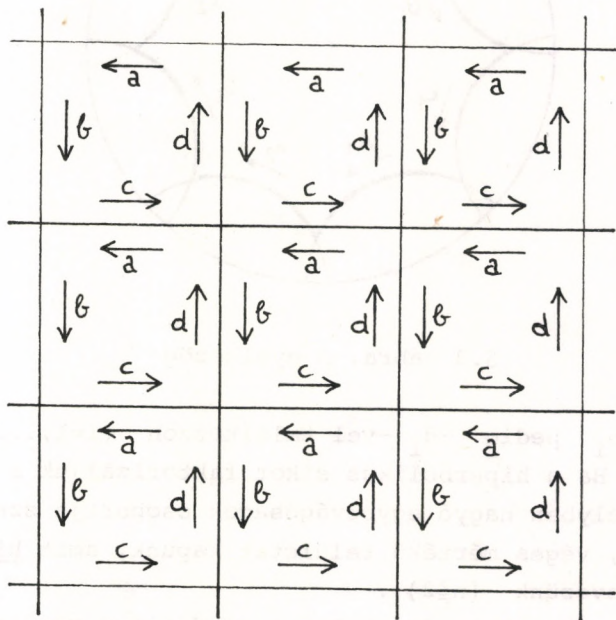
Tekintsünk először egy egységnyi oldalú négyzetet az euklidészi síkon, és a 5.1 ábrán látható módon ciklikusan irányítjuk az oldalait. Az irányított oldalakat jelöljük  $a, b, c, d$ -vel.



5.1 ábra. A négyzet



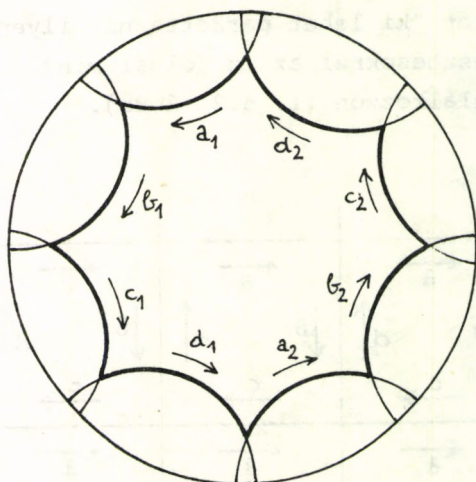
Az euklideszi síkot "ki lehet parkettázni" ilyen négyzetekkel úgy, hogy az illesztéseknél az  $a$  oldal mindig  $-c$ -vel,  $b$  pedig  $-d$ -vel találkozzon (1. 5.2 ábra).



5.2 ábra. Az euklideszi síkot "kiparkettázzuk"

Ha az euklideszi síkot faktorizáljuk a parketta-rendszert helyben hagyó egybevágóságok (azaz az egész koordinátájú eltolások) csoportja szerint, akkor a jól ismert euklideszi tóruszhoz jutunk. A faktorizáció szemléletesen annyit jelent, mintha a kiindulásként felvett négyzet szemközti oldalait "összeragasztottuk volna":  $a = -c$ ,  $b = -d$ .

Most a hiperbolikus síkon vegyünk egy olyan szabályos  $4n$ -szöget, melynek belső szögei  $\frac{2\pi}{4n}$  nagyságúak.  $n \geq 2$  esetén ilyen sokszög van,  $n=1$ -re nincs. Irányítsuk ciklikusan az oldalait, és jelöljük őket rendre  $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$ -nel. Például  $n=2$ -re a 5.3 ábrán látható nyolcszög megfelel a kívánalmaknak. "Parkettázzuk ki" a hiperbolikus síkot ilyen sokszögekkel úgy, hogy az illesztéseknél  $a_i$  mindig



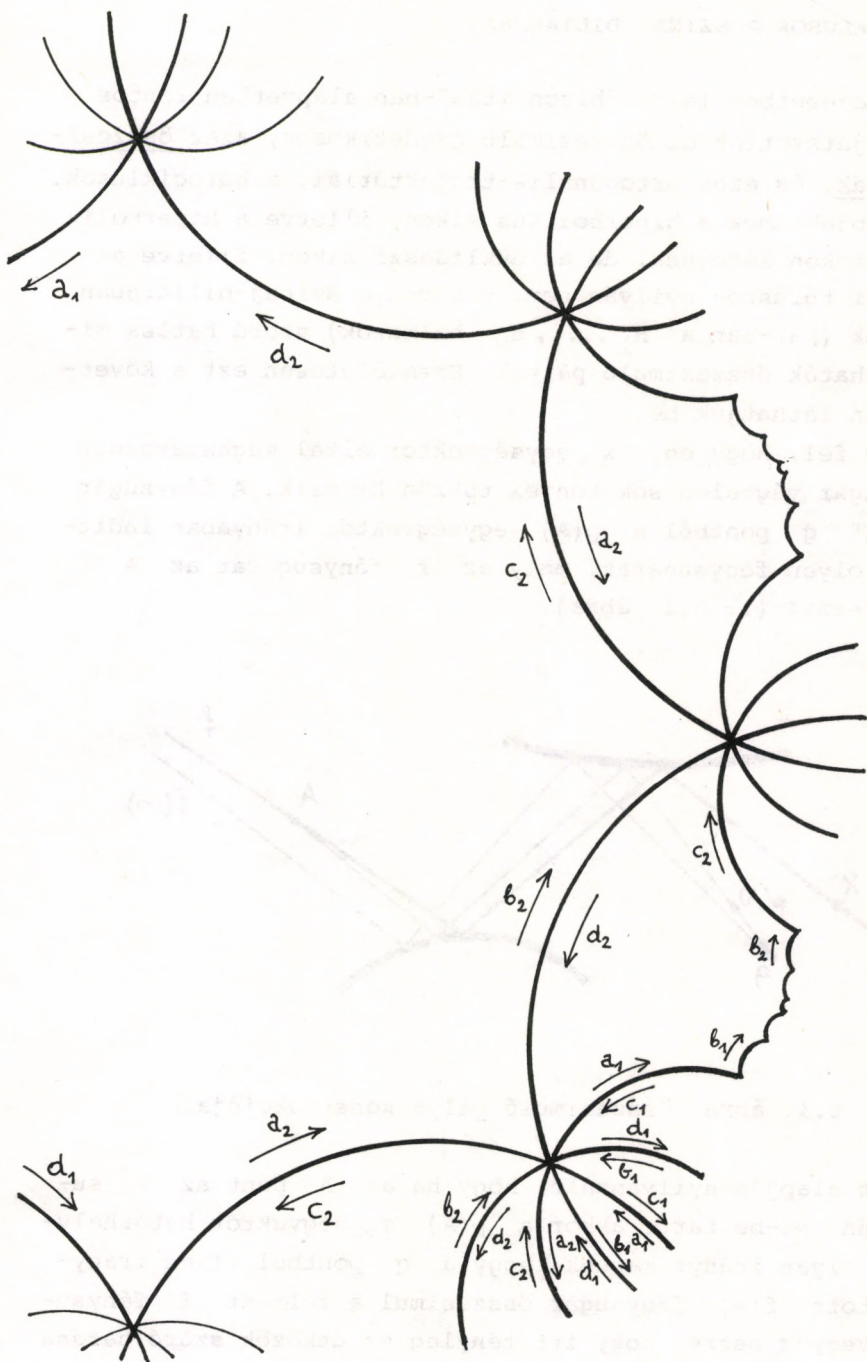
5.3 ábra. A nyolcszög

$-c_i$  -vel,  $b_i$  pedig  $-d_i$  -vel találkozzon ( $i=1, \dots, n$ ) (1. 5.4 ábra). Ha a hiperbolikus síkot faktorizáljuk a parketta-rendszert helyben hagyó egybevágóságok csoportja szerint, akkor kompakt, véges mértékű felületet kapunk, amit hiperbolikus tórusznak nevezünk ( $n \geq 2$ ).

Bár a hiperbolikus tóruszokon a geodetikus vonalak is és a horociklusok is önmagukat metsző görbék, velük kapcsolatban teljesülnek a 2. fejezetben a hiperbolikus síkra megfogalmazott tulajdonságok. Ezért a 3. fejezetből megismert gondolatmenettel bebizonyítható E. Hopf eredménye:

**Tétel.** *A hiperbolikus tóruszokon tekintett geodetikus folyamok ergodikusak.*



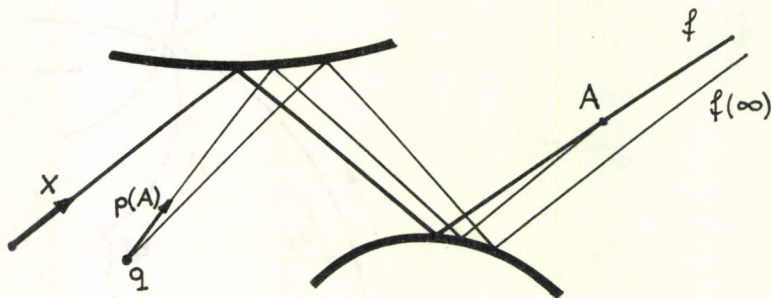


5.4 ábra. A hiperbolikus sítot "kiparkettázzuk"

## 6. HOROCIKLUSOK A SZINAJ-BILIÁRDBAN

A 4. fejezetben leírt "bizonyítás"-ban alapvetően fontos szerepet játszottak az összesimuló geodetikusok, azaz összesimuló pályák, és ezek ortogonális trajektóriái, a horociklusok. Ezek az objektumok a hiperbolikus síkon, illetve a hiperbolikus tóruszokon léteznek, de az euklideszi síkon, illetve az euklideszi tóruszon nyilván nem. Viszont a Szinaj-biliárdban az ütközők ([3]-ban a  $H_1, \dots, H_m$  halmazok) szóró hatása miatt találhatók összesimuló pályák. Szemléletesen ezt a következőképpen láthatjuk be.

Tegyük fel, hogy egy  $x$  egységvektor által meghatározott  $f$  fénysugár végtelen sok konvex tükrön ütközik. A fénysugár "melletti"  $q$  pontból a  $p(A)$  egységvektor irányában indítunk egy olyan fénysugarat, mely az  $f$  fénysugarat az  $A$  pontban metszi (1. 6.1 ábra).



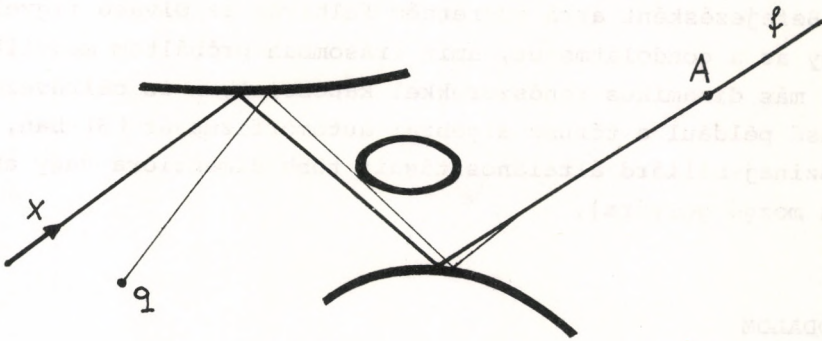
6.1. ábra. Összesimuló pálya konstrukciója

Szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ha az  $A$  pont az  $f$  sugár mentén  $\infty$ -be tart, akkor a  $p(A)$  egységvektor határhelyzeteként olyan irányt kapunk, hogy a  $q$  pontból ilyen irányban indított  $f(\infty)$  fénysugár összesimul a felvett  $f$  fénysugárral. Vegyük észre, hogy itt tényleg az ütközők szóró hatása érvényesül! Ugyanis ha nem lennének ütközők, akkor az  $f(\infty)$  fénysugár metszené az  $f$  fénysugarat, és utána  $f$  és  $f(\infty)$



széttartana. De mielőtt ez a metszés létrejönne, bekövetkezik az első ütközés, ami miatt  $f$  és  $f(\infty)$  kicsit kisebb szögben tart már össze, s így a következő ütközés előtt nem metszik egymást. Ez az ütköző tovább gyengíti  $f$  és  $f(\infty)$  összetartását, s i. t. kapjuk, hogy  $f$  és  $f(\infty)$  sosem metszi egymást, de tetszőlegesen közel kerül egymáshoz.

A vázolt konstrukció első nehézsége ott jön elő, hogy "oldalról belógó ütközők" miatt előfordulhat, hogy  $q$  és  $A$  nem köthető össze fénysugárral, azaz "a  $q$  pont az  $A$ -ból nézve nem látható" (1. 6.2 ábra). Ezért az összesimuló pályák



6.2 ábra. "A  $q$  pont az  $A$ -ból nem látható"

(fénysugarak) ortogonális trajektóriái, a horociklusok csak véges hosszúságúak.

Sőt, mivel  $A \rightarrow \infty$  esetén újabb és újabb "oldalról belógó ütközők" léphetnek be, előfordulhat, hogy minden olyan pont, ami nincs rajta az  $f$  fénysugáron,  $A \rightarrow \infty$  esetén előbb-utóbb "nem látható" már  $A$ -ból, és ezért nincs az  $f$  fénysugárral összesimuló pálya-sereg. Következésképpen az  $x$  elemhez tartozó szűkülő horociklus  $0$  hosszúságú. Ezért fontos eredmény a következő

Tétel. *A Szinaj-biliárdban a fázistér majdnem minden eleméhez pozitív hosszúságú szűkülő (és táguló) horociklus tartozik.*

A "bizonyítás" 4.5 és 4.6 pontjában fontos volt, hogy a

fázistér bármely két  $x_1$  és  $x_2$  eleme "horociklusok és geodetikusok mentén összeköthető" volt (1. pl. a 4.10 ábrán). Mivel a Szinaj-biliárdban a horociklusok véges hosszúságúak, egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ez itt is igaz. Szinaj bizonyításának igen nehéz részét képezi az "Основная лемма", ami lényegében ezt igazolja.

A "bizonyítás" 4.6 pontjában láthattuk, hogyan tehetjük túl magunkat azon, hogy a fázistérben rossz elemek is lehetnek. Erre a 4. Segéd-tételben megfogalmazott ekvivalencia adta az alapot. A 4. Segéd-tételnek megfelelő állítás a Szinaj-biliárdra is igaz, de bizonyítása ugyancsak elég nehéz.

Befejezőként arra szeretném felhívni az Olvasó figyelmét, hogy az a gondolatmenet, amit írásomban próbáltam megvilágítani, más dinamikus rendszerekkel kapcsolatban is célravezető (lásd például a tórusz algebrai automorfizmusát [3]-ban, vagy a Szinaj-biliárd általánosításait több dimenzióra vagy erőterben mozgó golyóra).

#### IRODALOM

1. E. Hopf, Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss., 91, 261, 1939.
2. I. P. Kornfeld, Ja. G. Szinaj, Sz. V. Fomin, Ergogyicsesz-kaja Tyeorija (Nauka, Moszkva, 1980 )
3. Szász D., ez a kötet, 3. fejezet
4. Szász P., Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriába (Akadémiai Kiadó, 1973 )
5. Ja. G. Szinaj, Uszpehi Mat. Nauk, 25, 141, 1970.



# KÁOSZ KVANTUMMECHANIKAI RENDSZEREK BEN

Forgács Gábor

1. Bevezetés	505
2. Maszlov-féle megfeleltetés fázistérbeli felületek és szemiklasszikus hullámfüggvények között	507
3. Wigner-függvény és a szemiklasszikus sajátfüggvény hipotézis	513
4. A kvantummechanikai Henon-Heiles-modell energiaspektruma	516
5. Kvantum-leképezések	518
6. Reguláris és irreguláris energiaspektrumok és állapotok Parcival-féle jellemzése	520
Irodalom	522





## 1. BEVEZETÉS

Az előző fejezetek valamennyien a klasszikus mechanika problémáival foglalkoztak. Ezekből kiderült, hogy a stochasztikus, irreguláris, vagy kaotikus mozgásformák matematikai értelmezése a klasszikus mechanika esetén mind konzervatív, mind disszipatív rendszerekre jól kidolgozott. A klasszikus mechanikai stochasztikus elmélet különböző aspektusairól és alkalmazásairól számos kitűnő összefoglaló tanulmány található [1-4].

A helyzet kvantum-rendszerek esetében egészen más. A stochaszticitás vizsgálata ilyen rendszerekben a kutatás nagyon kezdeti szakaszában van és komoly nehézségekkel találkozunk. Ezek alapvetően a kvantumos és klasszikus leírás közötti fundamentális különbségek következményei. Például, hiába tudunk mindent az adott klasszikus rendszerről, még ma sem tudjuk, hogyan kell egyértelműen meghatározni annak kvantummechanikáját.

Az előző fejezetekből az is kiderült, hogy a klasszikus mechanika törvényeit követő mozgásokat a következőképpen osztályozhatjuk.

- 1) Reguláris mozgás, melynek egyik legfontosabb jellemzője, hogy kicsit különböző kezdeti feltételekhez tartozó fázistérbeli trajektóriák időben legfeljebb lineárisan válnak szét.
- 2) Irreguláris mozgás, melyre az jellemző, hogy a szomszédos trajektóriák exponenciálisan válnak szét.

Természetes kérdésként merül fel, vajon a klasszikus mozgás eme két különböző fajtája hogyan jelentkezik a kvantummechanikában? Mivel azonban a kvantumos leírás eredendően statisztikus jellegű és a trajektória fogalma a kvantummechanikában nem is létezik (a kvantummechanikai mozgáshoz a Feynman-féle vonalintegrálba valamennyi klasszikus trajektória járulékot ad [5]), ezért kérdés, van-e egyáltalán értelme a fenti reguláris, irreguláris szétválasztásnak? Ha viszont ez a szétválasztás a klasszikus mechanikában jól definiált, akkor annak a kérdésnek, hogy mi történik a szemiklasszikus határesetben ( $\hbar \rightarrow 0$ ), feltétlenül van értelme. Ilyenkor azt várjuk, hogy valamiféle korrespondencia elv alapján különbség van azon szemiklasszikus



hullámfüggvények és sajátérték spektrumok között, melyek klasz- szikus megfelelője reguláris, illetve irreguláris mozgást ír le. Hogy ezek a különbségek, ha egyáltalán léteznek, hogyan je- lentkeznek a mély kvantum limitben, jelenleg általánosan nem ismeretes. Speciális tulajdonságú kvantum rendszerekre szigo- rúan bizonyítható, hogy nem létezik kaotikus tartomány, noha a megfelelő klasszikus rendszer lehet kaotikus [6]. Vizsgálatok azt mutatják, hogy bizonyos feltételek mellett, szemiklasszikus határesetben kvantum rendszerek leírhatnak stochasztikus folya- matokat. Ezen vizsgálatok eredményei azonban csak véges időre érvényesek, így még azt sem tudhatjuk, hogy a megjelenő sto- chasztikus tulajdonságok nem csupán olyan rendkívül bonyolult folyamatok közelítését jelentik-e, melyek teljes leírása csak a kvantummechanika (és nem annak szemiklasszikus határesetete) se- gítségével történhet.

A következőkben, a teljesség kedvéért, az olvasót a kvantum- mechanikai káosz kutatásának alapvető módszereivel, illetve né- hány eredményével kívánjuk megismertetni. Figyelmünket konzer- vatív rendszerekre fogjuk összpontosítani és azokat szemiklasz- szikus határesetben fogjuk vizsgálni.

A 2. fejezetben ismertetjük a klasszikus fázistérbeli felü- letek és a szemiklasszikus hullámfüggvények közötti ún. Maszlov-i megfeleltetést. A 3. fejezetben röviden tárgyaljuk a kvantummechanika Wigner-féle reprezentációját, majd ennek alap- ján felállítjuk a szemiklasszikus sajátfüggvény hipotézist er- godikus mozgás esetére. A 4. fejezetben a kvantummechanikai Henon-Heiles-modell segítségével kaotikus energiaspektrumot mutatunk be. Az 5. fejezetben röviden tárgyaljuk a kvantum le- képezések kérdését, végül a 6. fejezetben ismertetjük a regulá- ris és irreguláris hullámfüggvények és energiaspektrumok Parcival-féle jellemzését.

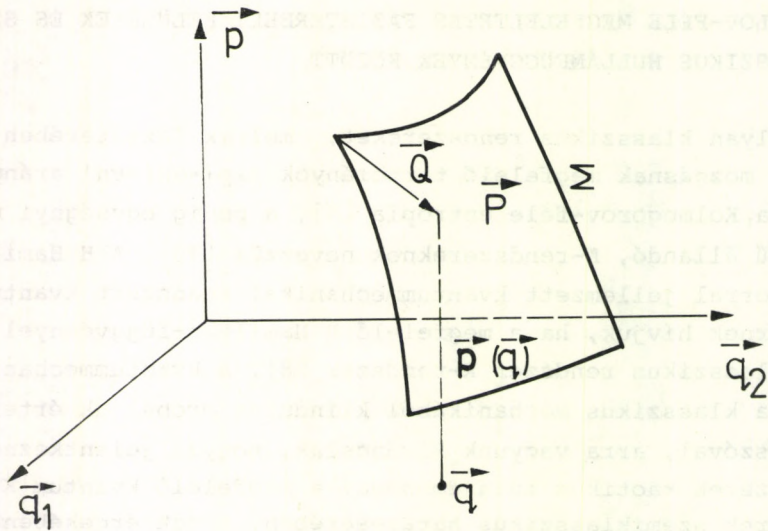
A kvantummechanikai stochasztikus elmélet további részletei után érdeklődőknek egy-két kiváló összefoglaló tanulmányt tu- dunk javasolni [7,8].



## 2. MASZLOV-FÉLE MEGFELELTETÉS FÁZISTÉRBELI FELÜLETEK ÉS SZEMI-KLASSZIKUS HULLÁMFÜGGVÉNYEK KÖZÖTT

Az olyan klasszikus rendszereket, melyek fázissterében a reguláris mozgásnak megfelelő tartományok  $\exp(-\alpha h)$ -val arányosak, ahol  $h$  a Kolmogorov-féle entrópia [9],  $\alpha$  pedig egységnyi nagyságrendű állandó,  $K$ -rendszereknek nevezzük [10]. A  $H$  Hamilton-operátorral jellemzett kvantummechanikai rendszert kvantum  $K$  rendszernek hívjuk, ha a megfelelő  $H$  Hamilton-függvénnyel megadott klasszikus rendszer  $K$ -rendszer [8]. A kvantummechanikai káoszt a klasszikus mechanikából kiindulva próbáljuk értelmezni. Másszóval, arra vagyunk kíváncsiak, hogyan jelentkeznek a  $K$  rendszerek kaotikus tulajdonságai a megfelelő kvantum  $K$  rendszerek szemiklasszikus határesetében. Annak érdekében, hogy erre a kérdésre bármiféle választ tudjunk adni, definiálnunk kell a kvantummechanika szemiklasszikus határesetét. Ez formálisan a Schrödinger-egyenletnek  $\hbar \rightarrow 0$  határesetéhez tartozó megoldásával (WBK-módszer [11]) történhet, de ilyenkor a kapcsolat a kvantummechanikai és a megfelelő klasszikus rendszer között nem teljesen nyilvánvaló. Az alábbiakban ismertetendő módszer esetében ez a kapcsolat nagyon szemléletes.

Tekintsünk a klasszikus  $2N$ -dimenziós  $\vec{q}, \vec{p}$  fázis térben, egy  $N$ -dimenziós  $\Sigma$  felületet (lásd a 2.1 ábrát).  $\Sigma$  nem szükségképpen tórusz.  $\Sigma$ -nak pusztán geometriai módon megfeleltethetünk egy  $\psi$  hullámfüggvényt [12,13]. Ehhez jellemezzük  $\Sigma$ -t lokálisan a  $\vec{p}(\vec{q})$  függvény segítségével. Így  $\Sigma$  egy  $N$  paraméteres állapot-sokaságnak felel meg a klasszikus fázis térben. Definiáljunk  $\Sigma$ -n sűrűséget úgy, hogy ezek az állapotok eme sűrűség szerint egyenletesen helyezkedjenek el valamilyen  $\vec{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$  koordinátában. Kényelmes eljárás az, ha  $\Sigma$ -t egy  $N$  paraméteres felületsereg egy tagjának tekintjük. Ezek a felületek töltésük ki a fázis teret  $\Sigma$  körül és legyenek parametrizálva  $\vec{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$  segítségével (lásd a 2.1 ábrát). Ezután tekintjük  $\vec{Q}, \vec{P}$ -t új változóknak, melyek  $\vec{q}, \vec{p}$ -ből kanonikus transzformációval kaphatók meg. Ezt a transzformációt az  $\vec{S}(\vec{q}; \vec{P})$  generátor függvény definiálja:



2.1 ábra. A klasszikus fázistérbeli  $\Sigma$  felület

$$(\vec{q}, \vec{p}) \leftarrow s(\vec{q}; \vec{P}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P}), \quad (2.1)$$

ahol

$$\vec{p} = \nabla_{\vec{q}} S, \quad \vec{Q} = \nabla_{\vec{P}} S. \quad (2.2)$$

(A hatás, szögváltozókra történő áttérés, [14], fentinek egy speciális esete.) Ezután  $\Sigma$ -nak a következőképpen feleltethetünk meg hullámfüggvényt:

$$\psi(\vec{q}) = a(\vec{q}) e^{ib(\vec{q})}. \quad (2.3)$$

Mivel dinamikát még nem definiáltunk, ezért  $\psi$ -t semmiféle hullámegyenlet nem korlátozza. Így elvben akármilyen megfeleltetést választhatnánk. Létezik azonban egy "természetes megfeleltetés", melyet a-ra és b-re vonatkozó fizikai megfontolások sugallnak. Az  $a(\vec{q})$  amplitudóra megköveteljük, hogy  $|\psi|^2$  legyen arányos a klasszikus  $\vec{q}$  térbeli állapotok sűrűségével. Mivel  $\vec{Q}$ -ban definíció szerint egyenletes az állapotok eloszlása, ezért  $Ld\vec{Q}$  a  $d\vec{Q}$ -ban levő állapotok száma ( $L$  állandó). Így végül (2.2) felhasználásával



$$a^2(\vec{q}) = L \left| \frac{d\vec{Q}}{d\vec{q}} \right| = L \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial p_j} \right|. \quad (2.4)$$

A  $b(\vec{q})$  fázist a de Broglie-szabály segítségével kaphatjuk, mely megadja a kapcsolatot a  $\vec{p}(\vec{q})$  klasszikus impulzus és egy lokális síkhullám  $\vec{k}(\vec{q})$  hullámszám vektora között [11]. Ebből

$$\nabla b(\vec{q}) = \frac{\vec{p}(\vec{q})}{\hbar}, \quad (2.5)$$

vagyis

$$b(\vec{q}) = \frac{1}{\hbar} \int_{\vec{q}_0}^{\vec{q}} \vec{p}(\vec{q}') d\vec{q}' = \frac{S(\vec{q}; \vec{P})}{\hbar} \quad (2.6)$$

Itt ismét felhasználtuk (2.2)-t, és  $S(\vec{q}_0; \vec{P}) = 0$  definíció szerint. Ha fennáll az ún. Lagrange-tulajdonság (amit a továbbiakban feltételezünk), vagyis

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}, \quad (2.7)$$

akkor  $b$  lokálisan egyértelmű és független a  $\vec{q}_0$  és  $\vec{q}$  közötti integrációs úttól, ugyanis (2.7) miatt  $S$  (lokálisan)  $\vec{q}$ -nak egyértékű függvénye [15]. (A WKB módszer  $\hbar$ -ban legalacsonyabb rendben szintén a (2.6) eredményt adja a hullámfüggvény fázisára [11].) Végezetül (2.4) és (2.6) alapján a  $\vec{P}$ -vel jellemzett felülethez hozzárendeltük a

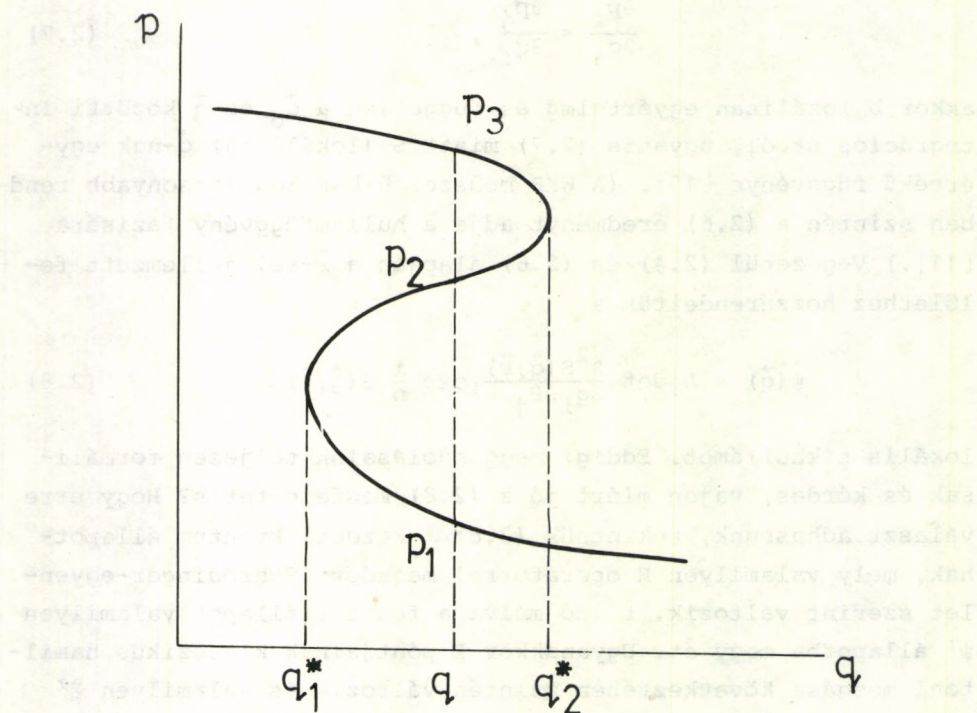
$$\psi(\vec{q}) = L \left| \det \frac{\partial^2 S(\vec{q}; \vec{P})}{\partial q_i \partial p_j} \right| \exp \frac{i}{\hbar} S(\vec{q}; \vec{P}) \quad (2.8)$$

lokális síkhullámot. Eddigi megfontolásaink teljesen formálisak és kérdés, vajon miért jó a (2.8) megfeleltetés? Hogy erre választ adhassunk, tekintsük (2.8)-at kezdeti kvantum állapotnak, mely valamilyen  $H$  operátorral megadott Schrödinger-egyenlet szerint változik.  $t$  idő múlva a fenti  $\psi$  állapot valamilyen  $\psi'$  állapotba megy át. Ugyanakkor  $\Sigma$  pontjainak klasszikus hamiltoni mozgása következtében szintén változik és valamilyen  $\Sigma'$  felületbe megy át. Ha a  $\psi$ -re vonatkozó időfüggő Schrödinger-egyenletet, aszimptotikusan, azaz  $\hbar$ -ban első rendig megoldjuk,

megmutatható, hogy  $\psi'$ -t  $\Sigma'$ -ből szintén (2.8) segítségével kaphatjuk meg [16]. Vagyis a (2.8) megfeleltetés időben megmarad, legalábbis a szemiklasszikus határeset szintjén és így természetes kapcsolatot ad az időben fejlődő kvantumállapotok és klasszikus pályák  $N$  paraméteres sokaságai (időben fejlődő klasszikus fázistérbeli felületek) között. Sajnos ez a megfeleltetés a  $t \rightarrow \infty$  határesetben elromlik [7].

A továbbiakban megvizsgáljuk a (2.8) megfeleltetés tisztán geometriai tulajdonságait. Ez a vizsgálat természetes módon a Bohr-Sommerfeld-féle kvantálási feltételektől különböző EBK (Einstein, Brillouin, Keller) kvantálási feltételeket adja, legalábbis reguláris (fázistérbeli tóruszon történő) klasszikus mozgás esetében.

A (2.8) megfeleltetéssel akkor van baj, ha a  $\vec{p}(\vec{q})$  függvény nem egyértékű (például tóruszon történik a mozgás). Egy ilyen helyzetet ábrázol a 2.2 ábra.



2.2 ábra. Többértékű  $\vec{p}(\vec{q})$  függvénnyel megadott fázistérbeli felület kétdimenziós metszete



Használjuk a szuperpozíció elvét, és  $\psi(\vec{q})$  legyen az egyes ágakra vett (2.8)-al megadott tagok összege. Ekkor azonban a következő nehézség lép fel. Hogyan illesszük az egyes ágakon vett járulékokat a kausztikus vonalak mentén? A 2.2 ábrán  $q_1^*$  és  $q_2^*$  jelenti a kausztikus vonalakat (itt pontok). Kausztikus vonal az, mely a  $\Sigma$   $\vec{q}$ -ra vett vetületének, vagyis a megfelelő trajektóriák  $q$  térbeli vetületének burkolóját adja. Nyilvánvaló, hogy  $\Sigma$  vetülete a kausztikus vonal mentén szinguláris. Tehát, egyrészt nem tudjuk, hogyan illesszük a szuperpozíció egyes tagjainak fázisát a kausztikus vonalak mentén, másrészt (2.8)-nak megvan az a kellemetlen tulajdonsága, hogy a kausztikus vonalak mentén a  $d\vec{Q}/d\vec{q}$  Jacobi-determináns és így az  $a(\vec{q})$  amplitúdó divergál. Mindkét probléma kiküszöbölhető a Maszlov-módszer segítségével [13]. Maszlov a korábbi megfeleltetést  $\psi$  és  $\Sigma$  között mind az impulzus, mind a helykoordinátában megkövetelte. Vagyis (2.8)  $\psi(\vec{p})$ -re is fennáll, amikor  $\Sigma$ -t a  $\vec{q}(\vec{p}; \vec{P})$  függvény adja. Mivel  $\Sigma$  sima felület, ezért lehetetlen, hogy olyan pontjai legyenek, melyek vetülete  $\vec{q}$ -ban és  $\vec{p}$ -ben egyszerre szingulárisak. Ha tehát (2.8)-ban szingularitás lép fel a  $\vec{q}$  kausztikus mentén ( $\psi(\vec{q})$  esetében), akkor az impulzus megfelelő biztosan jól viselkedik. Ugyanakkor azonban  $\psi(\vec{q})$ -t és  $\psi(\vec{p})$ -t Fourier-transzformáció köti össze, vagyis  $\psi(\vec{q})$ -t oszcilláló integrál adja, mely jól viselkedik a kausztikus mentén. Ha messze vagyunk a kausztikustól, akkor a  $\hbar \rightarrow 0$  határesetben a Fourier-integrált a nyeregpont módszerrel értékelhetjük ki. Ilyenkor azt kapjuk, hogy  $\psi$  (2.8) alakú kifejezések összege (szuperpozíciója), de az egyes kifejezések fázisai meghatározott kapcsolatban vannak egymással. A kapcsolatot a következő feltétel adja. A helyes szuperpozíciónak olyannak kell lennie, hogy a szuperpozíció tagjainak  $S_1$  fázisai, egyetlen  $\Sigma$ -n értelmezett  $S(\vec{q})$  hatásfüggvény egyes ágain felvett értékeinek feleljenek meg. Így a 2.2 ábrához tartozó  $S(\vec{q})$  függvény értéke ugyanaz kell legyen  $q_1^*$ -ban ( $q_2^*$ -ban) függetlenül attól, melyik ágon közeledünk  $q_1^*$ -hoz ( $q_2^*$ -hoz). Így  $S(\vec{q})$ -t a

$$\begin{aligned}
 1. \text{ ág: } & S = \int_{q_1^*}^q p_1(q') dq' , \\
 2. \text{ ág: } & S = \int_{q_1^*}^q p_2(q') dq' , \\
 3. \text{ ág: } & S = - \int_q^{q_2^*} p_3(q') dq' + \int_{q_1^*}^{q_2^*} p_2(q') dq'
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

összefüggésnek megfelelően kell választani.

Meg lehet mutatni [7], hogy ha a  $\psi$  hullámfüggvényt a Maszlov-módszer segítségével határozzuk meg, akkor  $\psi$  fázisban  $\pm\pi/2$ -t változik midőn áthalad egy kausztikuson. Ha  $\Sigma$  N-tórusz, akkor N különbözőképpen térhetünk vissza adott  $q$  pontba. így

$$\Delta_i S = \oint_{\gamma_i} \vec{p} d\vec{q} \tag{2.10}$$

a hatás (megfelelő ágának) változása, midőn adott  $\vec{q}$  ponthoz a tórusz  $i$ -edik ( $\gamma_i$ ) irreducibilis köre mentén térünk vissza. Ha ilyenkor  $\alpha_i$  számú kausztikust metszünk, a hullámfüggvény fázisa ( $\Delta_i S/\hbar - \alpha_i \pi/2$ )-t változik.  $\psi$  egyértékűségének feltétele tehát

$$\frac{1}{\hbar} \oint_{\gamma_i} \vec{p} d\vec{q} - \frac{\alpha_i \pi}{2} = 2 m_i \pi. \tag{2.11}$$

Itt  $\alpha_i$  az ún. Maszlov-indexek, melyek lényegében azt adják meg, hogyan van  $\Sigma$  beágyazva a fázistérbe.  $m_i$  egész szám.

(2.11)-et EBK kvantálási feltételnek nevezzük, mely láthatóan különbözik az

$$\frac{1}{\hbar} \oint p_i dq_i = 2\pi n \tag{2.12}$$

Bohr-Sommerfeld-féle kvantálási feltételtől. A Bohr-Sommerfeld-féle feltétel hiányosságaira (csak szeparábilis rendszerekre



alkalmazható, nem invariáns kanonikus transzformációval szemben) már Einstein is rámutatott [17]. (2.11) tehát  $N$  darab kvantumfeltétel és noha egy tipikus tórusz nem elégíti ki (2.11)-et,  $\Delta_1 S/\hbar \gg 1$  esetén mindig lehet találni olyan,  $\Sigma$ -hoz közeli felületet, melyre (2.11) már érvényes [7]. Ne feledjük, hogy  $\Sigma$ -definíció-szerint-egymáshoz közeli felületek  $N$  paraméteres seregének egy tagja.

A  $\psi$  hullám, melyet a kvantált  $\Sigma$  felület alapján kapunk, általában nem sajátfüggvénye a  $H$  operátornak, hiszen időben változik, midőn  $\Sigma$  a  $H$  függvény hatására deformálódik. Ha  $\Sigma$  invariáns tórusz, akkor  $\psi$  energia sajátfüggvény, melyet az  $N$  számú  $m_i$  kvantumszám jellemez.

Azt látjuk tehát, hogy szemiklasszikus energia sajátfüggvények, fenti, Maszlov-i konstrukciója csak akkor eredményes, ha tóruszok léteznek, azaz a mozgás reguláris. Irreguláris és ezen belül ergodikus rendszerek esetén nem léteznek tóruszok és a Maszlov-módszer nem alkalmazható. Jelenleg egyáltalán nem létezik olyan aszimptotikus elmélet, mely az irreguláris mozgáshoz tartozó hullámfüggvényeket megadná. Ilyen esetben, a következő fejezetben ismertetésre kerülő szemiklasszikus hullámfüggvény hipotézist fogadjuk egyelőre el és a különböző modell-számolások eredményeit eme hipotézis alátámasztására próbáljuk felhasználni.

### 3. WIGNER-FÜGGVÉNY ÉS A SZEMIKLASSZIKUS SAJÁTFÜGGVÉNY HIPOTÉZIS

Szemiklasszikus leírásra a kvantummechanika Wigner-féle reprezentációja [18] a legalkalmasabb. Ennek lényege, hogy a  $\psi(\vec{q})$  kvantumállapothoz hozzárendelünk egy  $W(\vec{q}, \vec{p})$  fázistér eloszlást a

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int d^N \vec{x} \exp(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{x}) \psi^*(\vec{q} - \frac{1}{2} \vec{x}) \psi(\vec{q} + \frac{1}{2} \vec{x}) \quad (3.1)$$

összefüggés segítségével. Könnyű belátni, hogy a  $W(\vec{q}, \vec{p})$  Wigner-függvény szimmetrikus  $\vec{q}$ -ban és  $\vec{p}$ -ben (ehhez csak azt kell tudni, hogy  $\psi(\vec{q})$  és  $\psi(\vec{p})$  egymás Fourier-transzformáltja). Tet-szőleges operátor, melynek hatását a  $\psi(\vec{q})$  kvantumállapotra is-

merjük, felírható a Wigner-reprezentációban:

$$A_W(\vec{q}, \vec{p}) = \int d^N \vec{x} \psi^*(\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{x}) A \psi(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{x}) \exp(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}). \quad (3.2)$$

Fenti leírás teljesen ekvivalens a kvantummechanika bármely más reprezentációjával. A Wigner-reprezentáció számunkra azért rendkívül előnyös, mert éppen a fázistérben lehet jól elkülöníteni egymástól a reguláris és irreguláris mozgást. (3.1)-ből a koordináta térbeli valószínűség sűrűségére

$$|\psi(\vec{q})|^2 = \int d^N \vec{p} W(\vec{q}, \vec{p}) \quad (3.3)$$

adódik.

Mivel minket a szemiklasszikus határeset érdekel, vizsgáljuk meg, hogyan néz ki a Wigner-függvény az előző fejezetben definiált szemiklasszikus hullámfüggvény esetén. (2.8)-at (3.1)-be beírva

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{L^2}{(2\pi\hbar)^N} \int d^N \vec{x} \left| \det \frac{\partial^2 S(\vec{q} + \frac{\vec{x}}{2}; \vec{p})}{\partial q_i \partial p_j} \det \frac{\partial^2 S(\vec{q} - \frac{\vec{x}}{2}; \vec{p})}{\partial q_i \partial p_j} \right|^{1/2} \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{x}}^{\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{x}} d^N \vec{q}', \vec{p}'(\vec{q}', \vec{p}) - \vec{p} \cdot \vec{x} \right] \quad (3.4)$$

adódik.  $\hbar \rightarrow 0$  esetén a stacionárius fázis módszert alkalmazva, az integrálban csak az  $\vec{x} \rightarrow 0$  tartomány járulékát tartjuk meg. Így

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = L^2 \left| \det \frac{\partial^2 S(q, P)}{\partial q_i \partial p_j} \right| \delta(\vec{p} - \vec{p}(\vec{q}, \vec{P})), \quad (3.5)$$

vagyis  $W(\vec{q}, \vec{p})$  az  $N$  paraméteres felületserregnek csak azon  $\Sigma$  tagján különbözik zérustól, melyet a  $\psi$  hullámfüggvény megkonstruálásához használtunk. Teljes stacionárius fázis analízist végezve, belátható, hogy a (3.4) által megadott klasszikus Wigner-függvény "kilágyul", azaz nemcsak  $\Sigma$ -n fog zérustól különbözni.

Alkalmazzuk a fenti eredményeket olyan rendszerre (integrálható, vagy kvázi integrálható), melyre bizonyos trajektóriák fázistérbeli tóruszon haladnak. Ezekre a Maszlov megfeleltetés-



ből fennáll az

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \vec{p} d\vec{q} = (m_i + \frac{\alpha_i}{4}) \hbar \quad (3.6)$$

kvantálási szabály, ahol  $I_i$  a rendszer  $i$ -edik hatásváltozója [14]. Így a megfelelő állapotot az  $m_i$  kvantumszámok jellemzik és a szemiklasszikus, megfelelően normált Wigner-függvény

$$W_m^{\rightarrow}(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \delta(\vec{I}(\vec{q}, \vec{p}) - I_m^{\rightarrow}). \quad (3.7)$$

Itt  $I(\vec{q}, \vec{p})$  a  $\vec{q}, \vec{p}$  pontokon áthaladó tórusz hatásfüggvénye. Az  $N$ -dimenziós delta-függvény azt fejezi ki, hogy az energia saját-függvényhez tartozó Wigner-függvény a fázistér azon részében különbözik zérustól, melyet a hatásfüggvénynek megfelelő klasszikus trajektória végtelen idő alatt bejár. Vagyis  $W$  a tóruszon nem zérus.

Mint már említettük, irreguláris klasszikus fázistérbeli trajektóriák esetén a Maszlov-megfeleltetés nem érvényes, nincs egyértelmű kvantálási szabály. Ugyanakkor a fentiek alapján plauzibilis ilyenkor a következő szemiklasszikus hullámfüggvény hipotézist elfogadni. Irreguláris mozgásnak megfelelő Wigner-függvény is csak a fázistérnek azon a részén különbözik zérustól, melyet a tipikus irreguláris trajektória végtelen idő alatt befut. (Tipikus azt jelenti, hogy az ettől különbözők nullmértékű halmazt képeznek.)

A fenti hipotézis illusztrálásaképpen tekintsünk ergodikus rendszert (extrém irreguláris eset). Ilyenkor minden kvantumállapotnak megfelel egy energiafelület, melyet a kvantumfeltétel ad meg. Hogy mik a sajátenergiák, azt nem tudjuk, hiszen nem tudjuk általánosan, hogyan kell ergodikus felületet kvantálni. (A Szinaj-biliárd esetében lásd [7].) Nyilvánvaló, hogy a fenti hipotézis, ergodikus rendszer normált Wigner-függvényére a

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\delta(E-H(\vec{q}, \vec{p}))}{\int d^N \vec{q} d^N \vec{p} \delta(E-H(\vec{q}, \vec{p}))} \quad (3.8)$$

kifejezést eredményezi. (3.7)-tel ellentétben (3.8) egydimen-

ziós delta-függvény, ami azt fejezi ki, hogy (3.8) sokkal nagyobb térrészben különbözik zérustól, mint (3.7). A klasszikus mozgás két (reguláris, irreguláris) típusához tartozó Wigner-függvények közötti, fenti hipotézis alapján várt különbségeket numerikus számolások támasztják alá. A Henon-Heiles-modell esetében ezt a számolást Hutchinson és Wyatt végezték el [19].

#### 4. A KVANTUMMECHANIKAI HENON-HEILES-MODELL ENERGIASPEKTRUMA

Az előző fejezetben ismertetett szemiklasszikus hullámfüggvény hipotézis alapján némi támpontunk van arra, hogyan próbáljuk megkülönböztetni a reguláris és irreguláris (szemiklasszikus) kvantum állapotokat. A hipotézis azonban nem mond semmit a reguláris és irreguláris energiaspektrumok közötti különbségekről. Ez a kérdés szinte teljesen nyitott és többnyire csak numerikus eredmények léteznek. Jelen fejezetben a kvantummechanikai Henon-Heiles-modell energiaspektrumára kapott numerikus eredményeket kívánjuk ismertetni [20].

A két ( $N=2$ ) szabadsági fokkal rendelkező Henon-Heiles-modell Hamilton operátora

$$H = H^0(\omega) + \frac{\alpha r^3}{3} \sin 3\theta + \frac{1}{2}(\omega^2 - 1)r^2 \quad (4.1)$$

alakba írható. Itt

$$H^0(\omega) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 r^2), \quad (4.2)$$

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad r^2 = q_1^2 + q_2^2. \quad (4.3)$$

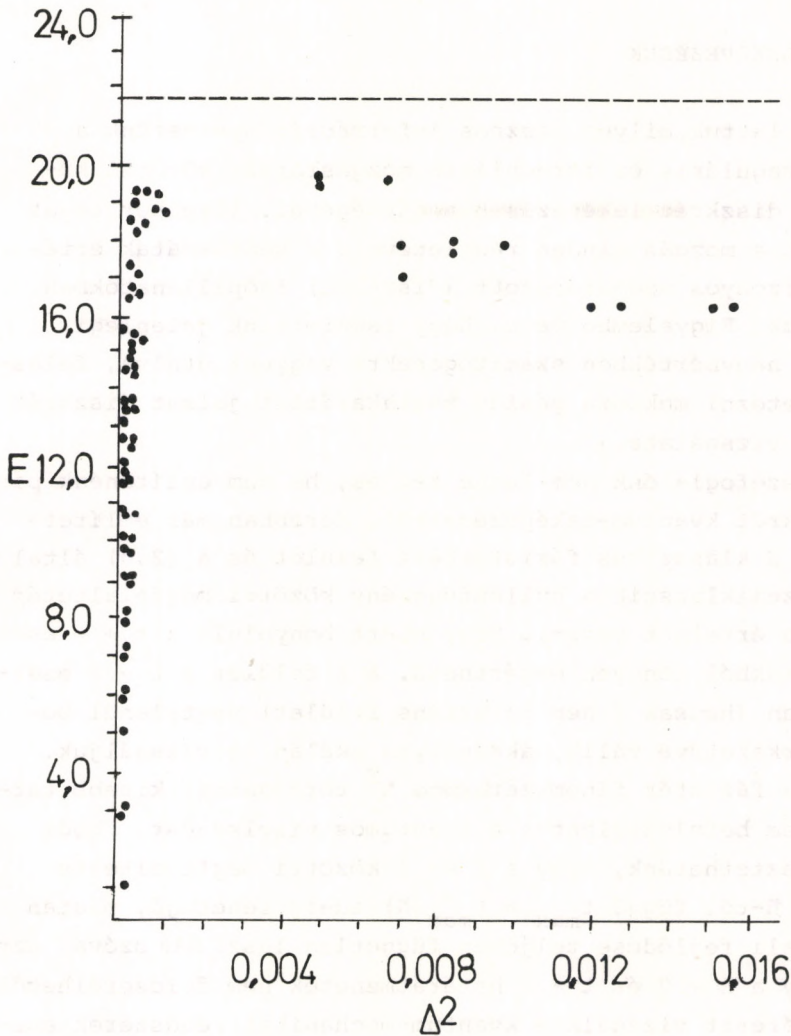
$\theta$  a kétdimenziós koordináta térben definiált polár szög. Természetesen  $p, r, \theta$  (4.1)-ben kvantummechanikai operátorok, melyek adott felcserélési törvényeknek tesznek eleget. (A klasszikus Henon-Heiles-moddellel kapcsolatban lásd [21].)

(4.1)-ben  $\alpha$  a kontroll-paraméter. A numerikus számolás a  $H^0$  perturbálatlan Hamilton-operátor sajátfüggvényeiből kiinduló Rayleigh-Ritz-módszeren alapult. Az energiaspektrum jellemzésére a



$$\Delta_i^2 = |E_i(\alpha + \Delta\alpha) - 2E_i(\alpha) + E_i(\alpha - \Delta\alpha)| \quad (4.4)$$

mennyiség szolgált. Itt  $E_i$  az  $i$ -edik állapot energiája. Az  $\alpha$  kontroll-paraméter a  $0,086 \leq \alpha \leq 0,09$  tartományban változott. A numerikus számolás eredményeit a (4.1) ábra mutatja.



4.1 ábra. Kvantummechanikai Henon-Heiles-modell energiaspektruma

Az ábrából látható, hogy a spektrum jellegében  $E \approx 16,0$  körül jól definiálható változás történik. Az  $E > 16,0$  tartományt tekinthetjük a spektrum irreguláris részének. A reguláris és irreguláris sajátértékeket itt aszerint különböztetjük meg, hogyan viselkednek lassan változó perurbációval szemben.

## 5. KVANTUM-LEKÉPEZÉSEK

Korábban láttuk, milyen hasznos információt nyerhetünk a klasszikus reguláris és irreguláris mozgásformák közötti különbségekre diszkrét leképezések segítségével. Ilyenkor tehát nem törődünk a mozgás minden részletével, a koordináták értékeit csak bizonyos meghatározott (diszkrét) időpillanatokban regisztráljuk. Figyelembe véve, hogy ismereteink jelenlegi szakaszában nagymértékben számítógépekre vagyunk utalva, felesleges részletezni mekkora gépidő megtakarítást jelent diszkrét leképezések vizsgálata.

Jelen összefoglalónk nem lenne teljes, ha nem említenénk pár szót a diszkrét kvantum-leképezésekről. Korábban már említettük, hogy a  $\Sigma$  klasszikus fázistérbeli felület és a (2.8) által definiált szemiklasszikus hullámfüggvény közötti megfeleltetés  $t \rightarrow \infty$  esetén értelmét veszti. Hogy miért bonyolult a  $t \rightarrow \infty$  eset, az az alábbiakból könnyen megérthető. A  $\Sigma$  felület a  $t \rightarrow \infty$  esetben általában (hacsak  $\Sigma$  nem invariáns felület) végtelenül bonyolult szerkezetűvé válik, akármilyen skálán is vizsgáljuk. Ugyanakkor a fázistér finomszerkezete  $\hbar^N$  térfogatnál kisebb tartományban nem befolyásolhatja a kvantumviselkedést. Ebből arra következtethetünk, hogy a  $\Sigma$  és  $\psi$  közötti megfeleltetés csak egy, a  $\hbar$ -tól függő  $t_{\max} = t_{\max}(\hbar)$  ideig lehet jó, miután  $\Sigma$  és  $\psi$  időbeli fejlődése teljesen független lesz. Más szóval azt várjuk, hogy a  $\hbar \rightarrow 0$  és  $t \rightarrow \infty$  határátmenetek nem felcserélhetők. A  $t \rightarrow \infty$  határeset vizsgálata kvantummechanikai rendszerek esetén rendkívül bonyolult és jelenleg az egyetlen remény, egyszerű modellek tanulmányozása, melyeknél  $\Sigma$  és  $\psi$  időbeli változása számolható és így meghatározható, mikor romlik el a (2.8) megfeleltetés. (Speciális kvantumrendszerekre azonban lásd [6].)



Ez az a pont, ahol a kvantummechanikai diszkrét leképezések szerepe szinte nélkülözhetetlenné válik.

Nincs módunk kvantummechanikai leképezés teljes analizisére. Inkább egy példán keresztül azt mutatjuk be, hogyan lehet diszkrét kvantummechanikai leképezést szerkeszteni. Tekintsük

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + TV(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (5.1)$$

Hamilton-függvényt. Fenti Hamilton-függvény egydimenziós mozgást ír le. Az idő diszkrétizálása itt szinte természetesen adódik, és a Hamilton-i mozgásegyenletekből a következő leképezést kaphatjuk.

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + \frac{T p_n}{m}, \\ p_{n+1} &= p_n - T \left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q_{n+1}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Adott  $V(q)$  potenciálfüggvény esetén (5.2) klasszikus mechanikai diszkrét leképezés. Kvantummechanikai esetben (5.2) analogja

$$|\psi_{n+1}\rangle = U |\psi_n\rangle, \quad (5.3)$$

ahol  $U$  unitér evolúciós operátor, mely megadja az (5.1)-nek megfelelő  $H$  Hamilton-operátor  $T$  ideig tartó hatásának eredményét. Hogy az (5.1) által definiált kvantum probléma  $U$  operátorát explicite megkonstruálhassuk, vegyük észre, hogy a  $0 \leq t \leq T$  tartományban, a  $\tau \rightarrow 0$  határesetben  $H-t$  a

$$H(q, p, t) = \begin{cases} \frac{p^2}{2m}, & 0 \leq t \leq T, \\ \frac{TV(q)}{m}, & T-\tau \leq t \leq T \end{cases} \quad (5.4)$$

kifejezés segítségével állíthatjuk elő. Az első tartományban az állapotok, az evolúciós operátor definíciója értelmében [11], az

$$U_1 = \exp \left[ \frac{-i}{2m\hbar} p^2 (T - \tau) \right], \quad (5.5)$$

míg a második intervallumban az

$$U_2 = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} TV(q) \right] \quad (5.6)$$

operátor hatására fejlődnek. A  $\tau \rightarrow 0$  határesetben a teljes evolúciós operátort tehát az

$$U = U_2 U_1 = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} TV(q) \right] \exp \left[ -\frac{i}{2m\hbar} p^2 T \right] \quad (5.7)$$

kifejezés adja meg. Ha (5.7)-et (5.3)-ba helyettesítjük, koordináta-reprezentációban a

$$\psi_{n+1}(q) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar T} \right)^{1/2} \exp \left[ -i \frac{\pi}{4} + i \frac{TV(q)}{\hbar} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dq' \exp \left[ \frac{im}{2\hbar T} (q-q')^2 \right] \psi_n(q') \quad (5.8)$$

diszkrét kvantum leképezést kapjuk. A (5.8) kvantum-leképezés rendkívül gazdag és bonyolult struktúrájú. Részletes analízise megtalálható [7]-ben és [8]-ban.

## 6. REGULÁRIS ÉS IRREGULÁRIS ENERGIASPEKTRUMOK ÉS ÁLLAPOTOK PARCIVAL-FÉLE JELLEMZÉSE

Az utolsó fejezetben pontokba sorolva összefoglaljuk a reguláris és irreguláris energiaspektrumok és állapotok jellemző tulajdonságait [22]. Az alábbiak többnyire hipotézisek és numerikus módszerek által kapott eredményekből levont következtetések.

### A reguláris energiaspektrum és állapot jellemzői:

- A kvantumállapot vektor kvantumszámmal,  $\vec{m} = (m_1 \dots m_N)$ , jellemezhető.
- Az  $\vec{m}$ -mel jellemzett állapot a klasszikus rendszer azon fá-



zistérbeli trajektóriáihoz tartozik, melyek az N-dimenziós invariáns tóruszon haladnak és melyekre fennáll (3.6). Továbbá  $E_{\vec{m}} = H(I_{\vec{m}})$ , ahol H a klasszikus rendszer Hamilton-függvénye.

- c) A kvantumállapot "rezonál" a klasszikus mozgás frekvenciájával, vagyis ha két kvantumállapotra az  $\vec{m}$  vektor egyik komponense eggyel különbözik, a többi pedig azonos, akkor

$$\Delta E_k = \hbar \omega_k, \quad (6.1)$$

ahol  $\omega_k$  a klasszikus mozgás tóruszának fundamentális frekvenciája [14].

- d) Létezik  $\vec{m}^0$ -hoz közeli, vele szomszédos kvantumállapot. A szomszédos állapotokra az jellemző, hogy energiájuk  $|\Delta E_k|$  kisszámú többszörösében tér el.
- e) Gyenge külső perturbáció hatására az  $\vec{m}^0$  állapot sokkal erősebben csatolódik szomszédos állapotokhoz, mint nem szomszédos állapotokhoz. A csatolódás erőssége  $|\vec{m} - \vec{m}^0|$ -kel gyorsan csökken.

Az irreguláris energiaspektrum és állapot jellemzői:

- a) A  $\psi_0$  állapothoz nem rendelhető egyértelműen kvantumszám.
- b) A kötött állapotok diszkrét spektruma a klasszikus határesetben a folytonos klasszikus spektrumba megy át. Az

$$\frac{1}{\hbar} [E(\psi) - E(\psi_0)] = \omega \quad (6.2)$$

frekvenciák fix, stacionárius  $\psi_0$ -ra és változó  $\psi$ -re diszkrét eloszlást alkotnak, mely a klasszikus határesetben folytonos eloszlásba megy át. Az irreguláris spektrum szintjeinek eloszlása véletlenszerű eloszlásra hasonlít.

- c) A reguláris esetben értelmezett szomszédos állapotok gyenge perturbáció esetén nem léteznek. Ilyenkor (eltekintve kiválasztási szabályok adta megszorításoktól) az irreguláris spektrumhoz tartozó állapot azonos erősséggel csatolódik

mindazon állapotokhoz, melyek az irreguláris spektrum közeli tartományában vannak.

- d) Az irreguláris spektrumhoz tartozó energiaszintek nagyon érzékenyek lassan változó perurbációra (lásd a 4.1 ábrát).

#### IRODALOM

1. J. Ford, Stochastic Behaviour in Non-linear Oscillator Systems in: Lectures in Statistical Physics, Lecture Notes in Physics (Springer, New York, 1974)
2. B.V. Chirikov, Phys. Reports 52, 263, 1979.
3. V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Dynamics (Springer, New York, 1978)
4. M.V. Berry, in Topics in Nonlinear Dynamics, szerk.: S. Jorna, Am. Inst. Conf. Proc. 46, 16, 1978.
5. R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill Book Company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sidney, 1965)
6. P. Hogg, B.A. Huberman, Phys. Rev. Lett. 48, 711, 1982.
7. M.V. Berry, in Lectures at Les Houches (North-Holland, Amsterdam, 1981)
8. G.M. Zaslavsky, Phys. Reports 80, 157, 1981.
9. A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SzSzsZR, 119, 861, 1958.
10. Szász D., ez a kötet
11. A. Messiah, Quantum Mechanics (North Holland, Amsterdam, 1981)
12. V.P. Maslov, Théories des Perturbations et des Methodes Asymptotiques (Dunod, Paris, 1972)
13. Yu.A. Kravtsov, Sov. Phys. Accust. 14, 1, 1968.
14. Bevezetés ..., F.6 függelék
15. L.D. Landau, E.M. Lifsic, Mechanika (Tankönyvkiadó, Budapest, 1974)
16. P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (Clarendon Press, Oxford, 1947)
17. A. Einstein, Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. 19, 82, 1917.
18. E.P. Wigner, Phys. Rev. 40, 749, 1932.
19. J.S. Hutchinson, R.E. Wyatt, Chem. Phys. Lett. 72, 378, 1975.
20. N. Pomfrey, J. Phys. B 7, 1909, 1974.
21. Párizs Gy., ez a kötet
22. I.C. Percival, in: Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, szerk.: G. Casati, J. Ford (Springer, New York, 1979)



KÁOSZ KÜLSŐ ZAJ JELENLÉTÉBEN

Györgyi Géza

1. Bevezetés	525
2. Fluktuációk a kaotikus állapotban	526
3. Az egydimenziós leképezés külső zaj jelenlétében	529
4. A zaj univerzális függvénye	532
5. A renormálási transzformáció külső zaj jelenlétében	534
6. Néhány megjegyzés	540
Irodalom	541





## 1. BEVEZETÉS

A mérések elkerülhetetlen kísérőjelensége a zaj. A fizikai mennyiségek átlagértékük körül fluktuálnak. A fluktuációt valószínűségi eloszlással írjuk le. A fluktuáció lehet például termikus, méréskor ezt zajként észleljük. A mérések véges pontosságúak. Ez egyrészt határt szab az észlelhető zajnak, másrészt pedig maga is egyfajta zaj forrása. Mérési zajnak nevezhetjük azt, hogy egy mennyiség mért értéke a pontos érték körül a mérési hibának megfelelő szórással "fluktuálhat". A termikus fluktuációk a méréssel célba vett fizikai mennyiség és nagyszámú szabadsági fok, a háttér kölcsönhatásának tulajdoníthatóak. A mérési és termikus zajt joggal tekinthetjük ezért külső zajnak.

Zajjal találkozunk kaotikus állapotban levő rendszereknél is, lásd például [1]-ben a 31. és 33. fejezetek és [2]. Alapvetően azonban a különbség a káoszban megfigyelhető zaj és a külső zaj között. A káosz zaja ugyanis egy alacsony szabadsági fokú rendszer - például egy nem invertálható egydimenziós leképezés vagy három megfelelően csatolt, nem-lineáris differenciálegyenlet stb. [1] - belső tulajdonságainak következménye. A káosz belső zaját a rendszer nem-lineáris egyenletei egyértelműen meghatározzák, a zaj ezért determinisztikus.

Mi alapján dönthető el, hogy a megfigyelt zaj külső vagy pedig determinisztikus eredetű? A hőmérséklet ismeretében például megbecsülhetjük a termikus, vagy annak fölerősített változata, a modulációs zaj nagyságát, s ha ennél erősebb zajt észlelünk, akkor káosz jelenlétére gyanakodhatunk.

Szokatlanul nagy zaj méréséről eddig többen beszámoltak [3,4], s történt kísérlet arra is, hogy a jelenséget alacsony szabadsági fokú rendszer kaotikus viselkedésével magyarázzák [5]. Ilyen esetekben általában az a probléma, hogy míg a zajt vagy igen alacsony szabadsági fokú és kaotikus viselkedést mutató, vagy igen sok szabadsági fokú rendszerben lehet viszonylag egyszerű numerikus, illetve elméleti módszerekkel vizsgálni, addig a gyakorlatban ritkán találkozunk tisztán az egyik vagy a másik esettel. Külső zaj nélkül elvileg egyszerűen eldönthetjük, hány szabadsági fokot kell figyelembe vennünk ahhoz, hogy a



kaotikus viselkedést kielégítően megmagyarázhassuk [6]. Külső zaj jelenlétében azonban a káosz szabadsági fokainak meghatározása mindmáig nem megoldott feladat.

Eddig a káosz és a külső zaj egymásra hatását konkrét fizikai problémák helyett elsősorban a káosz különböző modelljein vizsgálták. A továbbiakban e vizsgálatokról számolunk be, részletesen pedig a legegyszerűbb modellt, az egydimenziós leképezést tárgyaljuk.

## 2. FLUKTUÁCIÓK A KAOTIKUS ÁLLAPOTBAN

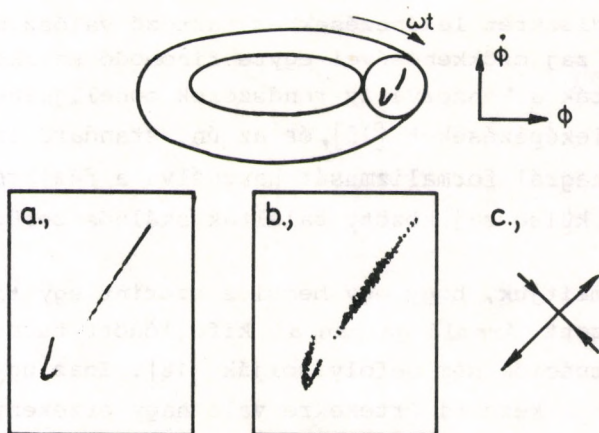
Egy kaotikus állapotban levő rendszert különös attraktorával jellemezhetünk, lásd [1] 11-14. és 29-33. fejezeteit. Különös attraktort járnak be például megfelelő  $\alpha$ ,  $\Gamma$  és  $\omega$  paraméterek esetén a

$$\ddot{\phi} + \alpha\dot{\phi} + \phi - 4\phi^3 = \Gamma\cos\omega t + \sigma f(t) \quad (2.1)$$

külső erővel gerjesztett, csillapított anharmonikus oszcillátor  $(\phi(t), \dot{\phi}(t), \omega t)$  fázistérbeli trajektóriái, ha  $\sigma = 0$  (lásd [1] 5. fejezete és [7]). A külső zajt az  $f(t)$  véletlen változó képviseli, ahol  $\langle f(t) \rangle = 0$  és  $\langle f(t)f(t') \rangle = \delta(t)$ . A zaj egymást követő időkből korrelálatlan. Mivel a termikus fluktuációk karakterisztikus ideje jóval kisebb, mint a makroszkopikus mennyiségeké, (2.1) alkalmas arra, hogy segítségével a termikus zaj hatását tanulmányozzuk.

Numerikus kísérletek szerint a zaj  $\sigma$  szórásának kis növelése esetén a különös attraktor globális szerkezete alig változik, csupán finom struktúráját törli el a növekvő külső zaj [8,9]. Ezt illusztráljuk vázlatosan a 2.1 ábrán. A különös attraktor metszete zaj nélkül és megfelelő  $\alpha$ ,  $\Gamma$ ,  $\omega$  paraméterek esetén két részből álló "kampó", amelynek az ábrán egy vonallal jelölt része valójában végtelenül sok, egymáshoz igen közel futó vonalak együttese. Kis zaj bekapcsolásakor a vonalak egy része összeolvad. Azt tapasztaljuk továbbá, hogy a zaj bekapcsolása után a trajektória szívesen felkeres olyan új tartományokat, amelyek metszete a "kampó" vonalába esik, vi-





2.1 ábra. A gerjesztett, csillapított anharmonikus oszcillátor fázistérbeli trajektóriáinak metszete a)  $\sigma$ , b)  $10\sigma$  külső zaj mellett, c) stabilitási és instabilitási irányok

szont kevésbé terjeszkedik keresztirányban. Ily módon a zaj nélküli különös attraktor stabilitási és instabilitási irányainak hatása a zaj megjelenése után is megfigyelhető. A különös attraktor az instabilitási irányban általában nem mutat finomszerkezetet, ilyenkor a zaj ebben az irányban nem okoz minőségi változást.

A kaotikus mozgást valószínűségeloszlás, másképpen invariáns mérték határozza meg. A mérték invarianciáját kifejező egyenletnek több megoldása is lehet. Belátható azonban, hogy közülük csupán stabil [11]. Bármilyen invariáns mérték írjon is le egy trajektóriát, a külső zaj ki- majd bekapcsolása után a mozgást a stabil invariáns mérték fogja jellemezni. A zajnak tehát fontos szerepe van a stabil invariáns mérték kiválasztásában. Az invariáns mértékkal kapcsolatosan ld. [1] 26. fejezete és [10]. A káosz külső zajjal szembeni stabilitását többen vizsgálták, ld. pl. [12,13].

A külső zajnak a káoszt jellemző mennyiségekre gyakorolt hatását számos modellen tanulmányozták. Feltárták például a

kétdimenziós diszkrét leképezésekhez tartozó valószínűségeloszlásoknak a zaj csökkenésével egyre finomodó szerkezetét [14], vizsgálták a konzervatív rendszerek modelljeinek számítótérülettartó leképezéseket [15], és az ún. standard leképezéseknél a pályaintegrál formalizmusát használva a fázistérbeli diffúzió és a külső zaj között találtak skálaösszefüggést [16,17].

Végül megemlítjük, hogy egy becslés szerint egy tipikus adatokkal jellemzett áramló gázban a kifejlődött turbulenciát a termikus fluktuációk nem befolyásolják [18]. Igaz ugyan, hogy a turbulenciát a kezdeti értékekre való nagy érzékenység jellemzi, annak a karakterisztikus ideje azonban, hogy egy fluktuáció nyomán gyökeresen új trajektória alakuljon ki, a fluktuációk elhalási idejénél jóval nagyobb.

A fentieket összegezve megállapíthatjuk, kis külső zaj a kaotikus állapot jellemzőit általában alig változtatja meg, mind konkrét fizikai rendszerekben, mind a káosz különböző modelljeiben.

Lényeges azonban a zaj szerepe a kaotikus állapotba való átmenet során. Ha például az anharmonikus, gerjesztett oszcillátor megfelelő beállításánál az  $\omega$  frekvenciát lassan növelni kezdjük, akkor azt tapasztaljuk, hogy a 2.1 ábrán bemutatott "kampó" két része további két-két részre szakad. A trajektória minden  $T$  körülfordulási idő múlva más és más részt metsz,  $4T$  időnként pedig ugyanabba a részbe esik, ugyanazon a részen belül azonban véletlenszerűen megválasztott pontokat metszve. A frekvenciát tovább növelve hasonló kettéválások sorozatát figyelhetjük meg, majd egy meghatározott küszöbfrekvenciát túllépve határciklusok alakulnak ki, amelyek pontjainak száma növekvő frekvenciával csökken [7]. A kaotikus állapot és a határciklusok közötti átmeneti tartományban az elmondottak szerint éppen a 2.1c ábrán jelölt instabilitási irányban, azaz a "kampó" mentén az attraktor, illetve a különös attraktor újabb finomszerkezete alakul ki. Arra számítottunk ezért, a zaj a kaotikus állapotba való átmenetet erősen befolyásolja.



### 3. AZ EGYDIMENZIÓS LEKÉPEZÉS KÜLSŐ ZAJ JELENLÉTÉBEN

Az átmeneti tartományt a továbbiakban az egydimenziós leképezésen tanulmányozzuk, amely modellje számos nemlineáris jelenségnek, lásd például [1] 15. fejezete, és sok tulajdonságában hasonlóságot mutat a differenciálegyenlet rendszerekkel, mint arról [1] 14. fejezetében és az F.2 függelékben olvashatunk.

Az egydimenziós leképezést az

$$x_{t+1} = f(r, x_t), \quad t=0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

iterációval definiáljuk. Az  $f(r, x)$  függvények jelentős osztályán azt tapasztaljuk, ha az  $r$  kontrollparamétert növeljük, akkor az iteráció egyetlen attraktorának pontjai az  $r_k$  értékeknél megkettőződnek, s az  $r_\infty$  pontban végtelen periódusú határciklus alakul ki. Az  $r > r_\infty$  paramétert tovább növelve határciklusok és kaotikus állapotok váltják egymást az [1] hivatkozás 29.1 ábráján látható módon. A kaotikus állapotok általában sávokra korlátozódnak, például a  $\rho_k$  pontokban  $2^k$  számú intervallumból áll a különös attraktor.

A trajektóriák kezdeti feltételre mutatott érzékenységet a

$$\bar{\lambda}(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \ln |f'(r, x_t)| \quad (3.2)$$

Ljapunov-exponenssel jellemezzük, ahol  $f'(r, x_t)$  az  $x$  szerinti parciális deriváltat jelöli az  $x_t$  pontban. Ha  $\bar{\lambda} > 0$ , a trajektória kaotikus, míg a  $\bar{\lambda} < 0$  Ljapunov-exponens az attraktorokat, vagyis a stabil fixpontokat és határciklusokat jellemzi. Az egydimenziós leképezés tulajdonságairól részletesen olvashatunk [1] 15-19. és 26-31. fejezeteiben.

Kapcsoljunk be minden iterációs lépésnél egy véletlenszám-generátort, vagyis legyen

$$x_{t+1} = f(r, x_t) + \xi_t. \quad (3.3)$$

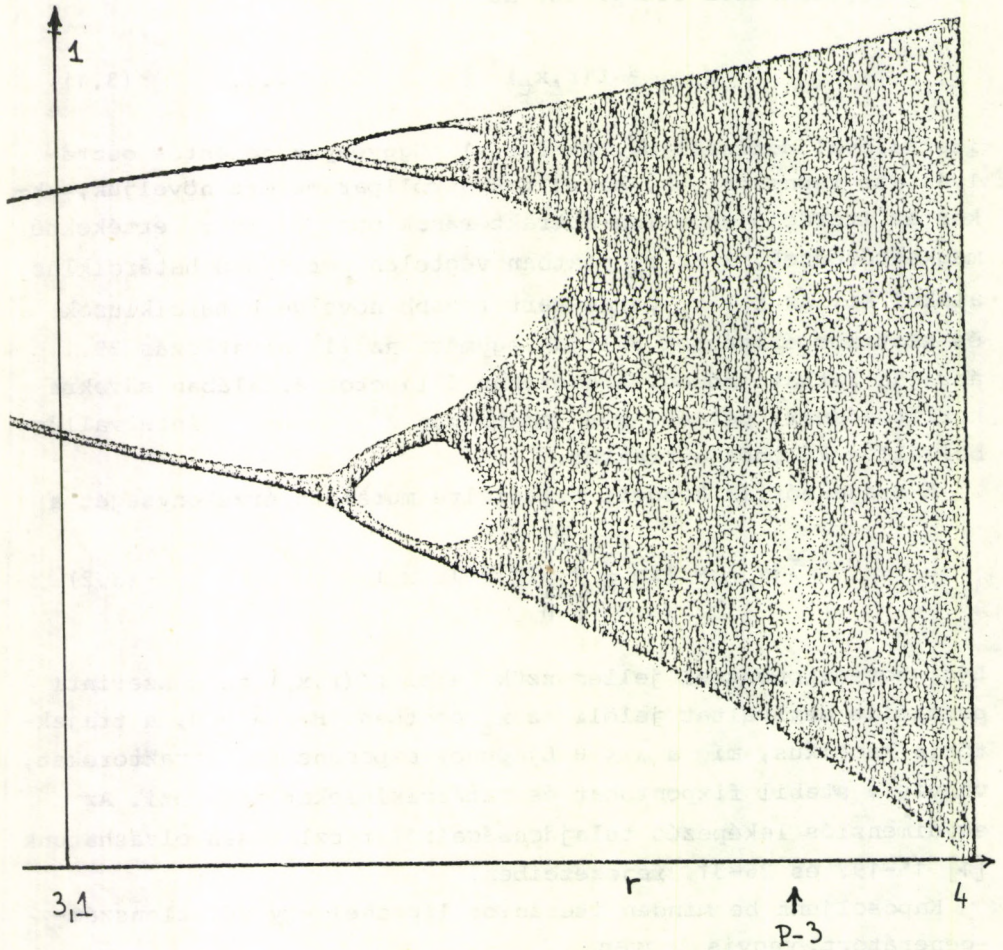
A generátorból az egymást követő lépések során az előző ér-

tékektől független, Gauss-eloszlású számokat nyerünk

$$\langle \xi_t \rangle = 0, \quad \langle \xi_t \xi_{t'} \rangle = \sigma^2 \delta_{tt'}, \quad (3.4)$$

ahol  $\delta_{tt} = 1$  és  $\delta_{tt'} = 0$ , ha  $t' \neq t$ .

Az  $f_L(r, x) \equiv rx(1-x)$  logisztikus leképezésen a  $\sigma = 0,001$  szórású zaj jelenlétében generált iterációkat a 3.1 ábrán mutatjuk be. (Hasonlítsuk össze a rajzot [1] 29.1 ábrájával!)



3.1 ábra. A logisztikus leképezés trajektóriái külső zaj jelenlétében



Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kaotikus tartománybeli határciklusok pontjai közti szakaszokon a trajektória pontjait közel egyenletes eloszlással találjuk meg, míg az  $r_\infty$  alatt az iteráció lényegében a határciklusok pontjainak kis környezetében mozog [19]. Ily módon tükröződik az a tény, hogy az  $r_\infty$  torló-dási pont fölött a stabil határciklusokat megközelítő tranziensek irregulárisan viselkednek, mint arról [1] 30. fejezetében részletesen írtunk. Az  $r_\infty$  pont környezetében a bifurkációs ágak és a kaotikus sávok finomszerkezete összemosódik, ezt a tartományt szokás a káoszba való átmenet "gap"-jének nevezni [8, 9].

A (3.3) zajos iterációt azonos átalakítással az

$$x_{t+1} = (r + q_t)f(r, x_t) \quad (3.5)$$

alakba írhatjuk, ahol

$$q_t \equiv \xi_t / f(r, x_t)$$

az ún. parametrikus zaj, amelynek  $x$ -től is függő eloszlását (3.4) alapján meghatározhatjuk. A parametrikus zaj bevezetésével kvalitatív módon megjósolhatjuk a kontrollparamétertől függő mennyiségek zaj hatására történő megváltozását. Azt mondhatjuk, az egyes mennyiségek zaj jelenlétében felvehetik bármely, a parametrikus zaj átlagos szórásának megfelelő tartományon felvett értéküket. Ekkor szemléletes módon értelmezhetjük a 3.1 ábrát, különösen az  $r_\infty$  alatti és fölötti periodikus attraktorok különböző típusú megváltozását.

A Ljapunov-exponensnek\* az [1] hivatkozásbeli 31.1 ábráját véges pontosságú numerikus számítás alapján rajzolták fel, vagyis külső zaj jelenlétében. Az ábra ezért a számítógép pontosságának megfelelő szélességű kis  $\Delta r$  intervallumokra vett átlag rajzának tekinthető. A zaj növekedésével a görbe egyre jobban kisimul. A görbe hossza  $\Delta r = 0$  esetén végtelen, fraktál dimenziója nagyobb egynél, ld. [1] 31. fejezete és [20]. Ha a

\* A Ljapunov-exponens a külső zaj bevezetésekor újból kell definiálnunk. Ezt az 5. fejezetben tesszük meg.

parametrikus zaj csökkentése során a  $\bar{\lambda}(r)$  görbe  $L$  hosszát rendszeresen megmérjük, az

$$L \propto (\Delta r)^{1-\beta}$$

arányosságot találjuk, ahol  $\beta = 1,69$  a fraktál dimenzió [9]. A zajnak tehát fontos mérés-technikai szerepe van.

Külső zaj nélkül a Ljapunov-exponens  $r_\infty$  alatt negatív, az  $r_\infty$  fölött viszont  $\bar{\lambda}(r)$  burkológörbéje pozitívvá válik. Zaj bekapcsolásával a Ljapunov-exponens már az  $r_c(\sigma) < r_\infty$  pontban eléri a nullát, s  $r_c$  fölött  $\bar{\lambda}(r, \sigma) > 0$ . Zaj esetében tehát a káoszba való átmenet kritikus pontja eltolódik,  $r_\infty = r_c(0) \rightarrow r_c(\sigma)$ .

#### 4. A ZAJ UNIVERZÁLIS FÜGGVÉNYE

Az alábbiakban intuitív és eddig csak numerikusan igazolt állításokkal a következő fejezetben elvégzendő renormálási transzformációt alapozzuk meg.

A bifurkációs szekvenciák univerzális elmélete szerint [21, 22] a maximumát az  $\hat{x} = 0$  helyen fölvevő leképezésekre fennáll

$$\begin{aligned} & (-\alpha)^k f(r_\infty, f(r_\infty, \dots, f(r_\infty, x/(-\alpha)^k) \dots)) \equiv \\ & \equiv (-\alpha)^k f^{(2^k)}(r_\infty, x/(-\alpha)^k) \rightarrow g(x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

ahol  $f^{(2^k)}$  az  $f$  függvény  $2^k$ -szoros iteráltját jelöli. Teljesül a

$$-\alpha^{-1} g(\alpha x) = g(g(x)) \quad (4.2)$$

egyenlet, amely a  $g(x)$  függvényt és az  $\alpha$  számot meghatározza, ha kikötjük,  $g(x)$  milyen típusú maximummal rendelkezzen. A témáról áttekintést kaphatunk az [1] hivatkozás F.4 függelékét elolvasva.

A  $g(x)$  függvény végtelen határciklust generál, vagyis a kaotikus állapotba való átmenet univerzális függvénye. Ennek



analógiájára feltételezzük, hogy külső zaj jelenlétében is létezik a kaotikus állapotba való átmenet univerzális függvénye, amelyet gyenge zaj mellett a  $g(x) + \xi D(x) \equiv F(x, \xi)$  alakban keressünk, s amely eleget tesz a

$$-\alpha^{-1} F(x\alpha, \kappa\xi) = F(F(x, \xi'), \xi'') \quad (4.3)$$

egyenletnek [23]. Bevezettük a  $\kappa$  új univerzális állandót. A  $\xi$ ,  $\xi'$  és  $\xi''$  zajok egyaránt  $\sigma$  szórású, Gauss-eloszlású véletlen változók.

A jobb oldalt a véletlen változókban sorbafejtjük. A (4.2) fixpont egyenletet felhasználva adódik

$$\begin{aligned} g(g(x) + \xi'D(x)) + \xi''D(g(x) + \xi'D(x)) &\approx \\ &\approx g(g(x)) + \xi'g'(g(x))D(x) + \xi''D(g(x)) = \\ &= g(x) + \xi\{[g'(g(x))D(x)]^2 + [D(g(x))]^2\}^{1/2}, \end{aligned}$$

ahol  $\xi$  szórása megegyezik a másik két zajváltozóval. A (4.3) egyenlet következképpen az

$$\alpha^{-2} \kappa^2 D^2(x\alpha) = [g'(g(x))D(x)]^2 + [D^2(g(x))] \quad (4.4)$$

univerzális összefüggést követeli meg, amely a  $\kappa$  számot és a  $D(x)$  függvényt meghatározza. A négyzetes maximumú függvényekhez tartozó univerzális  $D(x)$  függvényt Taylor-sorral közelítették. Numerikusan meghatározták a zaj skálafaktorát, a

$$\kappa = 6,61903\dots \quad (4.5)$$

univerzális állandót [23,24].

## 5. A RENORMALÁSI TRANSZFORMÁCIÓ KÜLSŐ ZAJ JELENLÉTÉBEN

Ebben a fejezetben a  $\bar{\lambda}(r, \sigma)$  Ljapunov-exponenst gyenge,  $\sigma \ll 1$  szórású zaj mellett és a kaotikus állapotba történő átmenet közelében vizsgáljuk. A pályaintegrál-formalizmust [25] használjuk. Ezt eredetileg a Langevin-egyenlet (ld. pl. [26]) megoldásának egy módszerül dolgozták ki, s később nem egyensúlyi kritikus jelenségek (ld. pl. [27]) tanulmányozásánál alkalmazták eredményesen. Az eljárás adaptálásához az a felismerés vezetett, hogy a (3.3) véletlen iteráció a Langevin-típusú sztochasztikus differenciálegyenletek diszkrét megfelelője [24].

Első lépésként megmutatjuk, hogyan állítható elő az  $x_t$  véletlen trajektóriától függő  $F\{x_t\}$  mennyiség külső zajra vett középértéke a pályaintegrállal. Az iteráció kezdőpontja  $x_0$ , rögzített. Az  $F\{x_t\}$  átlaga azonos átalakítások után

$$\begin{aligned} \langle F\{x_t\} \rangle &= \prod_{t=1}^{\infty} \langle \int dy_t \delta(x_t - y_t) F\{y_t\} \rangle = \\ &= \prod_{t=1}^{\infty} \langle \int dy_t F\{y_t\} \delta(f(r, y_{t-1}) + \xi_{t-1} - y_t) \rangle = \\ &= \prod_{t=1}^{\infty} \left[ \int \int dy_t ds_t F\{y_t\} \langle \exp \left[ -i \sum_{t=1}^{\infty} s_t (f(r, y_{t-1}) + \xi_{t-1} - y_t) \right] \right] \rangle, \end{aligned} \quad (5.1)$$

ahol a  $\delta(x)$  Dirac-féle delta függvényt az  $s$  változó bevezetésével Fourier-transzformáltuk. Az integrálás a teljes számgyenesre történik.

Használjuk ki, hogy a zaj Gauss-eloszlású, azaz  $P(\xi_t) \propto \exp[-\xi_t^2/2\sigma^2]$ , s ezért

$$\begin{aligned} \langle \exp \left[ -i \sum_{t=1}^{\infty} s_t \xi_{t-1} \right] \rangle &\propto \prod_{t=1}^{\infty} \int d\xi_t \exp(-is_t \xi_{t-1} - \xi_{t-1}^2/2\sigma^2) \propto \\ &\propto \prod_{t=1}^{\infty} \exp \left[ -s_t^2 \sigma^2 / 2 \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$



Az  $F$  mennyiség átlagát (5.1) és (5.2) alapján az

$$\langle F\{y_t\} \rangle = Z^{-1} \int F\{y_t\} \exp \Omega(r, \sigma, \{y_t\}, \{s_t\}) \prod_{t=1}^{\infty} dy_t ds_t \quad (5.3)$$

pályaintegrállal állíthatjuk elő, ahol

$$\Omega = \sum_{t=1}^{\infty} i s_t \left[ y_t - f(r, y_{t-1}) \right] - \sigma^2 s_t^2 / 2, \quad (5.4a)$$

és

$$Z = \int \prod_{t=1}^{\infty} ds_t dy_t \exp \Omega(r, \sigma, \{y_t\}, \{s_t\}). \quad (5.4b)$$

A Ljapunov-exponenst a

$$\bar{\lambda} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| d \langle x_N \rangle / dx_0 \right| \quad (5.5)$$

kifejezéssel terjesztjük ki a véletlen iteráció esetére. Az új definíció szerint a Ljapunov-exponens változatlanul a kezdeti feltételre mutatott érzékenységet jellemzi. Az (5.3) kifejezést felhasználva, s az  $y_t$ -ről az  $x_t$  változóra térve nyerjük:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \int \prod_{t=1}^{\infty} ds_t dx_t x_N \left[ -i s_1 f'(r, x_0) \right] \exp \Omega \right| = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \langle i s_1 x_N \rangle \right| \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln R(N, r, \sigma) = \bar{\lambda}(r, \sigma). \quad (5.6) \end{aligned}$$

A logaritmus alatt elhagytuk a határátmenet során eltűnő  $Z^{-1}$  és  $f'(r, x_0)$  tényezőket.

A renormálási eljárás alapgondolata szerint nem veszítünk információt az  $r_{\infty}$  torlódási pont közelében, ha az iterációnak csupán minden második pontját követjük. Külső zaj jelenlétében hasonló megfontolások érvényesek feltéve, hogy a zaj gyenge, azaz  $\sigma \ll 1$ . A renormálási eljárás során felhasználjuk a leképezések univerzális skálatulajdonságait.

Vizsgáljuk a (3.3) leképezés helyett annak  $2^k$ -edik iteráltját

$$x_{t+1} = f^{(2^k)}(r, x_t) + \xi'_t D_k(r, x_t) \quad , \quad (5.7)$$

amelyben a zajt lineáris rendig vettük figyelembe,  $\xi'_t$  szórása változatlanul  $\sigma$ , és az  $x_{t+2^k} \rightarrow x_{t+1}$  új jelölést vezettük be.

A Ljapunov-exponens értéke zérus zaj esetén nyilvánvalóan nem függ attól, melyik  $k$  indexű iterált leképezésen definiáljuk. Hasonló helyzetre számítunk gyenge zaj esetén is.

Az új leképezés definiál egy új  $\Omega$  függvényt. Az (5.4a) összefüggés szerint

$$\Omega = \sum_{t=1}^{\infty} \left[ is_t \left[ x_t - f^{(2^k)}(r, x_{t-1}) \right] - \frac{\sigma^2}{2} s_t^2 D_k^2(x_{t-1}, r) \right] = \\ = \Omega(r, \sigma, \{x_t\}, \{s_t\}, k) \quad . \quad (5.8)$$

Az eljárás első lépéseként a  $2^k$ -edik iterált leképezésről áttérünk a  $2^{k+1}$ -edik iteráció vizsgálatára. Ehhez meg kell szabadulnunk minden második  $x_t$  és  $s_t$  változótól. Tekintsük az (5.4b) "állapotösszeg"-et! Az alábbi átalakítások során az "állapotösszeg"-et szorzó,  $r$ -től és  $\sigma$ -tól független állandókat figyelmen kívül hagyjuk. Integráljunk először a páratlan indexű  $s_t$  változókra

$$Z = \int \prod_{t=1}^{\infty} ds_t dx_t \exp \left[ \sum_{t=1}^{\infty} is_t (x_t - f^{(2^k)}(r, x_{t-1})) - \frac{\sigma^2}{2} s_t^2 D_k^2(r, x_{t-1}) \right] = \\ = \int \prod_{t=2t'}^{\infty} ds_t \prod_{t=1}^{\infty} dx_t \exp \left[ \sum_{t=2t'}^{\infty} is_t (x_t - f^{(2^k)}(r, x_{t-1})) - \frac{\sigma^2}{2} s_t^2 D_k^2(r, x_{t-1}) - \sum_{t=2t'-1}^{\infty} \frac{[x_t - f^{(2^k)}(r, x_{t-1})]^2}{2\sigma^2 D_k^2(r, x_{t-1})} \right] = \\ = \int \prod_{t=2t'}^{\infty} ds_t \prod_{t=1}^{\infty} dx_t \exp \left[ \sum_{t=2t'}^{\infty} \left[ is_t (x_t - f^{(2^k)}(r, x_{t-1})) - \frac{\sigma^2}{2} s_t^2 D_k^2(r, x_{t-1}) - \frac{[x_{t-1} - f^{(2^k)}(r, x_{t-2})]^2}{2\sigma^2 D_k^2(r, x_{t-2})} \right] \right], \quad t' = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

A páratlan indexű  $x_t$  változókra a nyeregpont módszer szerint integrálhatunk, ha a  $\sigma \rightarrow 0$  határátmenetet elvégezzük. A nye-



regpontokat az exponens harmadik tagjának zérushelye jelöli ki,  $x_{t-1}^0 = f^{(2^k)}(r, x_{t-2})$ . Az integrálás elvégzése után az  $0(\sigma^2)$ -nél magasabb rendű tagokat elhanyagolva kapjuk,

$$\begin{aligned}
 Z &= \int \prod_{t=2t'}^{\infty} ds_t dx_t \exp \left\{ \sum_{t=2t'}^{\infty} is_t (x_t - f^{(2^k)}(r, x_{t-2})) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2} \sigma^2 s_t^2 \left[ D_k^2(r, f^{(2^k)}(r, x_{t-2})) + D_k^2(r, x_{t-2}) \left| f^{(2^k)'}(r, f^{(2^k)}(r, x_{t-2})) \right|^2 \right] \right\} \\
 &\equiv \int \prod_{t=2t'}^{\infty} ds_t dx_t \exp \left\{ \sum_{t=2t'}^{\infty} is_t (x_t - f^{(2^{k+1})}(r, x_{t-2})) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2} \sigma^2 s_t^2 D_{k+1}^2(r, x_{t-2}) \right\} \equiv \int \prod_{t=2t'}^{\infty} dx_t ds_t \exp \Omega(r, \sigma, \{x_{2t'}\}, \{s_{2t'}\}, k+1).
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

A fenti összefüggés definiálja a  $D_{k+1}(r, x)$  függvényt. A nagy  $k$  határesetben az [1] hivatkozás 19. fejezete szerint a megfelelő stabilitású  $\tilde{r}_k$  pontok között fennáll

$$f^{(2^{k+1})}(\tilde{r}_{k+2}, x) = -1/\alpha f^{(2^k)}(\tilde{r}_{k+1}, -x\alpha). \tag{5.11}$$

Feltesszük, hogy a zaj együtthatófüggvénye eleget tesz nagy  $k$  esetén a

$$D_{k+1}(\tilde{r}_{k+2}, x) = -\kappa/\alpha D_k(\tilde{r}_{k+1}, x\alpha) \tag{5.12}$$

összefüggésnek [24]. Az itt fellépő  $\kappa$  ugyanaz a szám, amely a (4.4) fixpont egyenletben lép föl, s amelyet számszerűen (4.5)-tel adtunk meg. [Megjegyezzük, a  $D_k(\tilde{r}_{k+s}, x)$  függvények feltehetően hasonló szerkezetű függvényteret alkotnak, mint amelyet az  $f^{(2^k)}(r_{k+s}, x)$  függvények feszítenek ki az [1] hivatkozás F.4 függelékében leírt módon.]

Az (5.11) és (5.12) formulát az (5.10) összefüggésbe helyettesítve, és bevezetve az

$$x'_{t'} = -\alpha x_{2t'}, \quad s'_{t'} = -\alpha^{-1} s_{2t'}, \quad t' = 1, 2, \dots,$$

új változókat, az

$$\begin{aligned} \Omega(\tilde{r}_{k+2}, \sigma, \{x_{2t},\}, \{s_{2t},\}, k+1) &= \\ &= \Omega(\tilde{r}_{k+1}, \kappa\sigma, \{x'_t,\}, \{s'_t,\}, k) \end{aligned} \quad (5.13)$$

skálaösszefüggést nyerjük. Következésképpen az "állapotösszeg" is skálázódik

$$Z(\tilde{r}_{k+2}, \sigma) = Z(\tilde{r}_{k+1}, \kappa\sigma) , \quad (5.14)$$

ha tehát a zaj szintjét  $\kappa$ -szorosára emeljük, akkor a kontrollparaméter  $\tilde{r}_{k+1}$  értéke mellett épp olyan tulajdonságúnak látjuk az iterációt, mint amilyennek az eredeti zaj mellett az  $\tilde{r}_{k+2}$  pontban láttuk.

Legyen  $N$  páros szám. Ekkor (5.8) első egyenlősége alapján

$$\langle x_N \rangle = Z^{-1} \int \prod_{t=1}^{\infty} ds_t dx_t x_N \exp \Omega(\tilde{r}_{k+2}, \sigma, \{x_t,\}, \{s_t,\}, k) ,$$

és felhasználva (5.10)-et és (5.13)-at pedig

$$\langle x_N \rangle = Z^{-1} \int \prod_{t'=1}^{\infty} ds_{t'} dx_{t'} (-x_{N/2}/\alpha) \exp \Omega(\tilde{r}_{k+1}, \kappa\sigma, \{x_t,\}, \{s_t,\}, k)$$

adódik. A Ljapunov-exponens (5.5) definícióját használva, az (5.6)-ban végzett átalakításoknak megfelelően kapjuk:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\tilde{r}_{k+2}, \sigma) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |d\langle x_N \rangle / dx_0| = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\alpha^{-1} d\langle x_{N/2} \rangle / dx_0| = \frac{1}{2} \bar{\lambda}(\tilde{r}_{k+1}, \kappa\sigma) . \end{aligned}$$

A skálázást többször megismételve a

$$\bar{\lambda}(\tilde{r}_k, \sigma) = 2^m \bar{\lambda}(\tilde{r}_{k+m}, \sigma \kappa^{-m}) \quad (5.15)$$

általánosított homogén függvényalakot kapjuk [9,23,24]. A megfelelő stabilitású pontok konvergenciáját a  $\delta$  univerzális ex-



ponens jellemzi, ld. [1] 18. fejezete. Következésképp bevezetve az  $\bar{r} = r_\infty - \tilde{r}_m \approx \delta^k (r_\infty - \tilde{r}_{k+m})$  redukált kontrollparamétert a

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\sigma, \bar{r}) &= 2^k \bar{\lambda}(\kappa^{-k} \sigma, \bar{r} \delta^{-k}) = \\ &= \bar{r}^\tau \bar{\lambda}(\sigma \bar{r}^{-\tau/u}, 1) \equiv \bar{r}^\tau \lambda^<(\sigma \bar{r}^{-\tau/u}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

kifejezéshez jutunk, ahol  $\tau = \ln 2 / \ln \delta = 0,4498\dots$  és  $u = \ln 2 / \ln \kappa = 0,3667\dots$ . Eredményünk szerint tehát a Ljapunov-exponens kétváltozós függvénye visszavezethető az egyváltozós  $\lambda^<(x)$  skálafüggvényre.

A kaotikus állapotba való átmenet körüli tartományt - hasonlóan a másodrendű fázisátalakulások kritikus tartományához - hatványfüggvények írják le. Zérus külső zaj mellett (5.16) szerint

$$\bar{\lambda}(\bar{r}, 0) = \bar{r}^\tau \lambda^<(0) ,$$

visszakapjuk tehát a megfelelő stabilitási pontok sorozatára vonatkozó hatványfüggést (lásd az [1] hivatkozás 18. fejezetét). Az  $r_\infty$  torlódási pontban a

$$\bar{\lambda}(0, \sigma) \propto \sigma^u$$

Ljapunov-exponens pozitív, itt a legkisebb zaj megjelenése is kaotikus állapothoz vezet. A káoszba való átmenet eltolódott  $r_c(\sigma)$  kritikus pontját (5.16) szerint a  $\lambda^<$  függvény  $x_0$  nullhelye határozza meg, ahonnan

$$(\sigma/x_0)^\gamma = r_\infty - r_c(\sigma) ,$$

ahol  $\gamma = u/\tau$ . A kritikus pont eltolódása egyben a "gap" (ld. 3. fejezet) szélességének zajfüggését is mutatja [9]. A három hatványfüggvény exponensei között fennáll a  $\gamma = u/\tau$  skálatörvény, ami a kísérletező számára az (5.16) skálaalak legegyszerűbben ellenőrizhető következménye. Numerikus mérések szerint a skálatörvény teljesül [9,23].

## 6. NÉHÁNY MEGJEGYZÉS

Az (5.16) skálaalak emlékeztet az egyensúlyi kritikus jelenségek (lásd például [28,29]) rendparaméterének skálaviselkedésére. Azt mondhatjuk, a Ljapunov-exponens a káosz rendparamétere (lásd továbbá [30]). Az analógia továbbvihető, s a külső zajt tekinthetjük a rendparaméterhez konjugált térnek. A külső tér bekapcsolása esetén például az eddigi kritikus pontban a rendparaméter hatványfüggvény gyorsaságával nő,  $\bar{\lambda} \propto \sigma^u$ . Ez a tulajdonság általában jellemző a másodrendű átalakulásokra.

Az 5. fejezetben vázolt renormálási transzformáció feltehetően kiterjeszhető az  $r_\infty$  torlódási ponton túli tartományra is. Ott azonban a  $\lambda^<(x)$  skálafüggvény szerepét várhatóan más függvény,  $\lambda^>(x)$  veszi át a megfelelő stabilitású pontok sorozatán.

A kaotikus állapotba való átmenet Feigenbaum-féle útját tanulmányoztuk eddig. Az egydimenziós leképezésben ennél egyszerűbb feladat az intermittens átmenet [31] vizsgálata külső zaj jelenlétében. A stochasztikus iterációt Fokker-Planck-egyenlettel írták le [32], s itt is skálaviselkedést találtak [32,33]. A problémáról olvashatunk matematikai egzaktsággal megírt cikket is [34].

A könyv többi részében a nemlineáris modellek alkalmazási területeiről igen bőven esik szó. Ebben a cikkben ezért elsősorban konkrét modelleket vizsgáltunk anélkül, hogy relevanciájukkal részletesen foglalkoztunk volna. A lehetséges alkalmazásokra a cikk elején röviden kitértünk. Nem lenne azonban teljes a kép, ha nem tennénk említést egy érdekes módszerről. Véletlenszerű térbeli kölcsönhatásokat tartalmazó rendszer esetén az energia sajátállapotokat, illetve a termodinamikai egyensúlyban levő állapotok egyes esetekben stochasztikus iterációk segítségével határozhatóak meg. Az eljárást eredményesen használták például a lokalizáció problémájára 2 és 3 dimenziókban [35].



1. Bevezetés..., ez a kötet
2. B.A. Huberman, A.B. Zisook, *Phys. Rev. Lett.* 46, 626, 1981.
3. R.Y. Chiao, M.J. Feldman, D.W. Peterson, B.A. Tucker, M.T. Levensen, in *Future Trends in Superconductive Electronics*, AIP Conf. Proc. 44 (AIP, N.Y., 1978)
4. Y. Taur, P.L. Richards, *J. Appl. Phys.* 48, 1321, 1977.
5. B.A. Huberman, J.P. Crutchfield, N.H. Packard, *Appl. Phys. Lett.* 37(8), 750, 1980.
6. N.H. Packard, J.P. Crutchfield, D. Farmer, R. Shaw, *Phys. Rev. Lett.* 45, 712, 1980.
7. B.A. Huberman, J.P. Crutchfield, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1743, 1979.
8. J.P. Crutchfield, B.A. Huberman, *Phys. Lett.* 77A, 407, 1980.
9. J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, B.A. Huberman, *Physica D*, 1981.
10. Szász Domokos, ez a kötet
11. Ju.I. Kifer, *Izvestija* 8, 1083, 1974.
12. Y. Oono, Y. Takahashi, *Progr. Theor. Phys.* 63, 1804, 1980.
13. S.J. Chang, J. Wright, *Phys. Rev.* A23, 1419, 1981.
14. E. Ott, J.D. Hanson, *Phys. Lett.* 85A, 20, 1981.
15. M. Lücke, *J. Stat. Phys.* 15, 455, 1976.
16. A.B. Rechester, M.N. Rosenbluth, R.B. White, *Phys. Rev.* A23, 2664, 1981.
17. C.F.F. Karney, A.B. Rechester, R.B. White, *Plasma Phys. Rept. PPPL-1752*, Princeton University, 1981.
18. D. Ruelle, *Phys. Lett.* 72A, 81, 1979.
19. G. Mayer-Kress, H. Haken, *J. of Stat. Phys.* 26, 149, 1981.
20. B.B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (W.H. Freeman, San Francisco, 1977)
21. M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19, 25, 1978.
22. M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 21, 669, 1979.
23. J.P. Crutchfield, M. Nauenberg, J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* 46, 933, 1981.
24. B. Shraiman, C.E. Wayne, P.C. Martin, *Phys. Rev. Lett.* 46, 935, 1981.
25. P.C. Martin, E.D. Siggia, H.A. Rose, *Phys. Rev.* A8, 423, 1973.
26. L. Arnold, *Stochastic Differential Equations* (Wiley, N.Y., 1974)
27. *Dynamical Critical Phenomena and Related Topics*, Ed. by C.P. Enz; *Lecture Notes in Physics* 104, (Springer, 1979)
28. S.K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena* (Benjamin, N.Y., 1976)
29. G. Toulouse, P. Pfeuty, *Introduction au groupe de renormalization et á ses applications* (Presse Universitaire de Grenoble, 1975)
30. Y. Oono, M. Osikawa, *Progr. Theo. Phys.* 64, 54, 1980.
31. Gálfi László, ez a kötet
32. J.E. Hinch, B.A. Huberman, D.J. Scalapino, preprint, 1981.
33. J.P. Eckmann, L. Thomas, P. Wittwer, preprint, Genf, 1981.
34. D. Ruelle, I.H.E.S. preprint, 1981.
35. J.L. Pichard, G. Sarna, *J. Phys. C* 14, L127, 1981; *C* 14, L617, 1981.





KÁOSZ-JELENSÉGEK GEOFIZIKAI ÉS ASZTROFIZIKAI  
RENDSZEREKBE

Király Péter

1. Bevezetés	545
2. A kozmikus káosz-jelenségek áttekintése	546
2.1 A föld és a bolygók	547
2.2 A nap és a csillagok	548
2.3 A naprendszer	549
2.4 Galaxisunk és más galaxisok	550
2.5 A galaxisnál nagyobb struktúrák	551
3. Nagy földrengések kirobbanásának káosz-modellje	552
4. Kozmikus dinamók	556
4.1 Magnetohidrodinamikai dinamó-modellek	558
4.2 A Rikitake-dinamó	559
4.3 A föld és a nap mágneses tere	562
5. A Szaturnusz gyűrűi	565
Irodalom	566





## 1. BEVEZETÉS

Az itt tárgyalandó jelenségeket csak megfigyelni tudjuk, kezdeti feltételeiket, valamint más rendszerek rájuk gyakorolt hatását azonban nem szabhatjuk meg, sőt általában nem is ismerjük nagyon jól. A belső dinamikai okokra visszavezethető, determinisztikus káosz elméletének könyvünkben vizsgált matematikai definíciói és eredményei ezért a ténylegesen létező kozmikus rendszerekre lényegesen kevésbé alkalmazhatók, mint a gondosan preparált laboratóriumi rendszerekre. Idealizált elméleti modellek építésére viszont itt is sok lehetőség nyílik, s e modellek viselkedését a megfigyelésekkel egybevetve remélhetjük, hogy sikerül megragadnunk egyes geofizikai és asztrofizikai jelenségek lényegét. Az kétségtelen, hogy a kozmikus fizikában egyrészt általános a disszipáció és a nemlinearitás, másrészt az egyensúlytól igen távol levő, bonyolult szerkezetű térbeli és időbeli struktúrák figyelhetők meg, így a különös attraktorok kialakulásának feltételei és jellegzetes tünetei is jelen vannak. Hasonló tüneteket azonban külső behatások is létrehozhatnak, s információnk legtöbb esetben kevés ahhoz, hogy ezt a lehetőséget kizárhassuk.

Minden kozmikus rendszer bonyolult kölcsönhatásban áll környezetével. Számunkra elsősorban az olyan rendszerek érdekesek, amelyeknél ez a kölcsönhatás egyoldalú: a vizsgált rendszert kívülről vagy csak igen kicsi, vagy egyszerű hatások érik, maga a rendszer viszont kifelé viselkedhet bonyolult módon, és környezetét erősen is befolyásolhatja. Ilyen rendszereknél várható, hogy viselkedésüket (legalább is bizonyos szempontból) jól leírhatjuk viszonylag egyszerű dinamikai modellek segítségével, a külvilág hatását disszipációként, kis perturbációként, energiabetáplálásként és esetleg más, egyszerű szerkezetű behatásokként véve figyelembe.

A káoszhoz vezető determinisztikus út egyértelmű bizonyítékaikat, így pl. a Feigenbaum-szekvenciákat, vagy különös attraktorok meghatározó szerepét még nem sikerült megfigyelni a kozmikus fizikában, és az sem nyilvánvaló, hogy ilyen megfigyelésre hol van a legnagyobb esély. Mindenesetre megpróbálunk egy rövid, kvalitatív áttekintést adni azokról a kozmikus jelensé-



gekről, amelyeknél ilyen megfigyelés esetleg elképzelhető, vagy ahol legalább a determinisztikus káosz oldaláról való megközelítés hasznosnak bizonyulhat. Ezután néhány, az irodalomban már vizsgált geofizikai, ill. asztrofizikai ihletésű, kaotikus viselkedést is mutató modellel foglalkozunk.

## 2. A KOZMIKUS KÁOSZ-JELENSÉGEK ÁTTEKINTÉSE

A kozmikus fizikában a rendezett és kaotikus jelenségek bonyolult, hierarchikus struktúrában épülnek egymásra. Igen nagy például az a hullámhossztartomány, amelyben turbulencia léphet fel, így gyakran előfordul, hogy a kis hullámhosszakon turbulens plazma nagy méreteken reguláris viselkedést mutat; a turbulencia hatását ekkor pl. a viszkozitás és a termikus és elektromos vezetőképesség megváltozásaként vehetjük figyelembe. Turbulens konvektív zónával rendelkező csillagok időben jó közelítésben állandó viselkedést (fixpont) vagy szabályos globális oszcillációt (határciklus) mutathatnak. Jelentős kaotikus sebességgel mozgó csillagokból és gázfelhőkből szép, szabályos spirálkarok fejlődhetnek ki. Szigorú matematikai értelemben ilyenkor valószínűleg mindig kaotikus állapotról kellene beszélnünk, modell-szinten viszont általában célszerű a vizsgált jelenség skálájához képest kis változásokat elhanyagolni. Az ilyen modellek hosszútávú viselkedésének vizsgálatakor viszont lényegessé válhat, hogy figyelembe vegyünk az ilyen "belső zajforrások" hatását is.

E könyv témája elsősorban a rend és káosz határterülete, így nem foglalkozunk részletesen a kozmikus fizikában eléggé elterjedt jól kifejtett, egyelőre csak statisztikus modellekkel megközelíthető káosszal. A magnetohidrodinamikai turbulencia az interplanetáris és csillagközi térben, de valószínűleg egyes csillagokban is jónéhány nagyságrendnyi hullámhossztartományban ilyen viselkedést mutat. A kibocsátott elektromágneses sugárzásban és a felgyorsított töltött részecskék energiaeoszlásában ilyenkor skálafüggetlen hatványspektrumok megjelenését várjuk, amit a tapasztalat elég jól igazol. A földünk légkörébe érkező kozmikus sugárzási részecskék energiaeoszlása például



$10^9$  és  $10^{15}$  eV között, azaz egy hat dekádos energiatartományban igen jól leírható állandó kitevőjű hatványspektrumként, s a kitevő változása egy további öt dekádos tartományban ( $10^{15}$ - $10^{20}$  eV) sem haladja meg a 0.5 értéket.

## 2.1 A föld és a bolygók

Földünkre is igaz, hogy a kívülről jövő hatások részben egyszerűek (a nap látható és infravörös sugárzása, mely időben alig változik), részben pedig kicsik a rendszeren belüli kölcsönhatásokhoz képest. Maga a föld (atmoszféráját és magnetoszféráját is beleértve) olyan bonyolult rendszer, hogy legfeljebb bizonyos részrendszereinek modellezésére vállalkozhatunk, ezeknél viszont a belső dinamika meghatározó volta általában már kétséges. Így például az atmoszféra változásai erősen beleszól a nagy hőkapacitású tengerek változó hőmérsékleteloszlása, ezért az időjárás hosszútávú előrejelzése tisztán meteorológiai adatok alapján még akkor sem lenne lehetséges, ha maga a légkör nem reagálna érzékenyen a kezdőfeltételek kis változásaira. A naptól érkező, időben változó hatások szintén befolyásolhatják az időjárást, sőt magát az éghajlatot is. A jégkorszakok oka például lehet a nap sugárzásának néhány százalékos megváltozása, vagy más külső hatás, de lehet a légkör és a csatolt földi rendszerek belső dinamikája által meghatározott instabilitás, ill. kaotikus viselkedés is.

A földkéreg (vagy pontosabban a litoszféra) állapotát és így a földrengések kirobbanásának helyét és időpontját a föld mélyebb rétegeiben végbemenő mozgások, de esetleg más, külső tényezők is befolyásolhatják. A földrengések előrejelzése a jelentős ráfordítások ellenére távolról sem megoldott feladat. A szeizmikus aktivitást kiváltó feszültségi energiák növekedési ütemét több rengési zónában elég jól ismerjük, az egyes rengések kirobbanásának helye és ideje mégis nagymértékben sztochasztikusnak tűnik. Ha a determinisztikus káosz-elméleten alapuló modellek az alapfeladatot nem is oldják meg, a jelenség jobb megértéséhez hozzájárulhatnak.

Földünk mágneses tere egyrészt az erősen turbulens napszéllel, másrészt a föld jól vezető magjával áll dinamikai kapcsos-



latban. A mágneses tér fenntartásáért és lassú változásaiért minden bizonnyal a folyékony magban működő önfenntartó magneto-hidrodinamikai dinamó felelős, míg gyors, kis megváltozásait közvetve vagy közvetlenül a napból eredő hatások okozzák. Valószínű, hogy a polaritás átlagosan néhány százezer évenként létrejövő átfordulása alapvetően belső okokra vezethető vissza, de elképzelhető, hogy a változások időpontja érzékenyen függ a külső hatásoktól is.

A többi bolygóra vonatkozó ismereteink az elmúlt húsz évben rohamosan gyarapodtak, így ma már komoly tudományágnak tekinthető az összehasonlító planetológia. Különösen az időjárás és a mágneses tér gyors megváltozásai figyelhetők meg; sajnos a hosszútávú viselkedés összehasonlítására még közvetett adatok is alig vannak.

## 2.2 A nap és a csillagok

A nap olyan bonyolult belső dinamikájú rendszer, amelyet kívülről jövő hatások alig befolyásolnak. A magban termelt fúziós energia vezetés útján, majd a külső rétegekben konvekció útján jut el a fotoszférába, ahol nagyrészt látható fény alakjában kisugárzódik. A jó elektromos vezető, turbulens konvektív zónában magnetohidrodinamikai dinamó működik, és az itt generált mágneses tér iránya mintegy 11 évenként ellenkezőjére változik. Az így létrejövő 22 éves, nem szigorúan periodikus mágneses ciklus hosszabb időn át figyelve jelentős változásokat mutat, sőt úgy tűnik, néha szinte teljesen szünetel. A nap felszínének, kromoszférajának és koronájának bonyolult viselkedését (aktivitását) elsősorban a mágneses terek okozzák, ezért a 22 éves ciklus az aktivitás legkülönbözőbb jellemzőiben kimutatható. Egyelőre nem tudjuk, hogy a dinamó működésének szabálytalan jellegét belső dinamikája, vagy a nap belsejében végbemenő más, időben változó folyamatokkal való kapcsolata okozza-e.

A nap felszínén fellépő erős mágneses terek a nap méretéhez képest kicsi és elég stabil, környezetüktől csak gyengén függő struktúrákat alakítanak ki (mágneses erővonal-kötegek és napfoltok). A kromoszféra és korona viszonylag hosszúéletű aktív tartományai is legtöbbször napfoltcsoportok felett jönnek lét-



re. Az ezekben tárolt hatalmas mágneses energia jelentős része valamilyen, részleteiben még nem ismert instabilitás folytán percek alatt képes felszabadulni (flerek). A flerek a földi rádióösszeköttetésekre is nagy hatással vannak, ezért előrejelzésükre nagy erőfeszítések történtek, de egyelőre nem sok sikerrel. Lehet, hogy a belső dinamika kaotikus tulajdonságai e jelenségeknél is fontos szerepet játszanak.

A csillagokról lényegesen kevésbé részletes információink vannak, mint a napról. A naphoz hasonló fősorozatbeli csillagok mágneses eredetű aktivitása túl kicsi ahhoz, hogy ilyen messziről észlelni tudjuk. Vannak viszont csillagok, melyek flertevékenysége, mágneses tere vagy globális oszcillációi olyan nagyok, hogy észlelésük a távolság ellenére sem nehéz. A szabályos és kaotikusnak tűnő változások érdekes keverékéről tanúskodnak a pulzárokból vagy az egymástól igen kis távolságban keringő kettős csillagokból hozzánk érkező elektromágneses hullámok.

### 2.3 A naprendszer

A naprendszer égimechanikai szempontból a nap, a bolygók és holdjaik, gyűrűik, valamint a kisbolygók, a meteorok és üstökösök együttese. A rendszer mozgását jó közelítésben a nap és a nagyobb bolygók gravitációs tere határozza meg; a többi, kisebb tömegű testet tömeg nélküli próbatestnek tekinthetjük. A kívülről (közeli csillagokból) eredő gravitációs hatások csak egyes távol keringő üstökösök pályáját tudják lényegesen befolyásolni. Az ár-apály jelenségek miatti disszipációt és az égitestek véges méretéből adódó más hatásokat elhanyagolva konzervatív pontrendszerre jutunk, melynek hosszútávú viselkedése igen bonyolult módon függ a kezdeti feltételektől (KAM-elmélet). Érdekesnek tűnik az a kérdés, hogy az elhanyagolt kis hatásokat visszatéve lényegesen megváltozik-e a rendszer hosszútávú viselkedése.

Plazmafizikai szempontból a nap mintegy 50-100 asztronómiai egység sugarú környezetét (Helioszféra, solar cavity) a naptól kiinduló turbulens napszél uralja. A napszél olyan híg, hogy az "égimechanikai naprendszer" nagyobb tömegeinek mozgását igen



kis mértékben befolyásolja. Fordított irányban a hatás jelentősebb, elsősorban a nap és a bolygók mágneses tere miatt: a forgó napból kifelé fújó, jól vezető napszél a napegyenlítő síkja közelében spirál alakú mágneses szerkezetet hoz létre, amelyben a bolygókkal együtt keringő magnetoszférák a nappal ellentétes irányban igen elnyújtott, instabil csóvával rendelkeznek. A szuperszónikus, ill. szuperalfvenikus napszél megakadályozza, hogy a környező csillagközi térből magnetóhidrodinamikai hatások ériék a belső naprendszert.

Kaotikusnak tűnő jelenségek mind a mechanikai, mind a plazmafizikai naprendszerben bőven találhatóak, de hasznos modellek konstruálására csak igen nagy elhanyagolások és egyszerűsítések árán van remény. Legreményteljesebbnek a Szaturnusz-gyűrűk újonnan felfedezett, rendkívül gazdag struktúrájának elemzése és - legalább részeinek - modellezése látszik.

## 2.4 Galaxisunk és más galaxisok

Galaxisunk, a Tejútrendszer is önálló, környezetével valószínűleg csak gyengén kölcsönható rendszer. A mechanikai és plazmafizikai részrendszerek egymáshoz való viszonya általában hasonló, mint a naprendszerben, talán az a legfontosabb különbséggel, hogy a gázok tömegaránya itt lényegesen nagyobb, és a sűrűbb gázfelhőkben végbemenő csillagkeletkezés biztosítja az anyag állandó körforgását. A gázfelhők "csillagokra darabolódása" erősen instabil folyamat, amely esetleg a káosz-elmélet szempontjából is érdekes lehet; csillagászati szempontból mindenesetre igen hasznos lenne a létrejövő csillagok tömeg-spektrumának a felhő fizikai tulajdonságaiból való levezetése. Egy másik sokat vitatott kérdés, amelynek megoldásában esetleg a káosz-elmélet is segíthet, a spirálkarok eredete és időbeli fejlődése. Egyes megfigyelések arra utalnak, hogy galaxisunk magja több tízmillió évenként bekövetkező nagy robbanások színhelye - könnyen lehet, hogy itt is valamilyen kaotikus jelenséggel van dolgunk.

Nincs kielégítő elmélet, amely a galaxis mágneses terének eredetét és konfigurációját jól leírná; valószínű, hogy a földhöz és naphoz hasonlóan itt is kaotikus tulajdonságokat is mutató öngerjesztő dinamóról van szó. A töltött kozmikus sugár-



zási részecskék - az extrém nagy energiájúak kivételével - a mágneses erővonalak mentén terjednek, így mozgásuk leírásához szükséges az erővonal-rendszer geometriájának ismerete. Különösen érdekes az a kérdés, hogy az adott helyen egymáshoz közel levő erővonalak távolsága hogyan változik az erővonalak mentén mért elmozdulás függvényében. A jól vezető intersztelláris közegekben ez a változás - legalább is kezdetben - exponenciális, később azonban lelassulhat. Az ilyen erővonalrendszerek sok szempontból hasonló viselkedést mutathatnak, mint a kaotikus dinamikai rendszerek fázistérbeli pályái, és mint turbulens folyadékok áramvonalai.

A galaxisok alapvetően három típusba sorolhatók: a miénkhez hasonló spirál-galaxisokéba, valamint az elliptikus és irreguláris galaxisokéba. Érdekes, hogy több közeli galaxis spirál-karjainak és mágneses terének szerkezetét jobban ismerjük, mint a Tejútrendszerét. Ennek oka a belső nézőpont kedvezőtlen volta és a galaxisunk síkja közelében felhalmozódott por és gáz megfigyeléseinket gátló hatása. Sok galaxis a Tejútrendszerénél lényegesen nagyobb mágneses aktivitást mutat; ilyenek például az igen érdekes térbeli struktúrát mutató rádiógalaxisok, valamint a kvazárok. Ezek modellezésére már sok kísérlet történt, de általánosan elfogadott "standard modell" még nincs. Valószínű, hogy e nagy aktivitás csak bizonyos ideig tart, és sok galaxis - talán élete folyamán többször is - átmegy ilyen fázison.

## 2.5 A galaxisnál nagyobb struktúrák

A számunkra elvileg hozzáférhető, Hubble-sugáron belüli Univerzumban mintegy  $10^{10}$  galaxis van. Ezek nagy többsége halmazokba, a halmazok pedig szuperhalmazokba rendeződnek. A galaxisok megfigyelt térbeli korrelációs függvénye elég nagy tartományban jó közelítésben hatványfüggvény, és így skálafüggetlen. E jelenlegi korrelációs függvény együtt tartalmazza a big bang korai szakaszában meglévő (vagy létrejövő) kis sűrűségfluktuációk spektrumát, és a különböző skálájú fluktuációk időbeli fejlődését. Amikor a sűrűség fluktuációi magával a sűrűséggel összehasonlíthatóvá válnak, a fluktuációk növekedésé-



nek leírásában lényegessé válnak a nemlineáris tagok. A jelenség megértésére sok számológépes szimulációt végeztek, de sok még a nyitott kérdés. A létrejövő sűrűbb tartományok belső dinamikai időskálája nem tekinthető kicsinek az Univerzum korához képest, úgy hogy a káosz-elmélet jelenlegi, végtelen hosszú időre vonatkozó kijelentései valószínűleg nem alkalmazhatók közvetlenül.

A táguló Univerzum standard elméletének két fontos következményét érdemes még itt megemlíteni. Egyik, hogy az univerzális tágulásból kiszakadt, közel állandó méretű, de a termodinamikai egyensúlytól távol lévő rendszerek (mint a bolygók, csillagok és galaxisok) számára a tágulás "feneketlen tartályt" biztosít, amely a kibocsátott sugárzást, gázokat és mágneses fluxust képes "elnyelni", vagyis biztosítja, hogy rendszereinket kívülről ne érje túl nagy hatás, s így érvényre juthasson belső dinamikájuk. Másik, hogy egyre újabb és újabb rendszerek kerülnek a tágulás során az adott rendszer horizontján belülre, s ezzel, ha kis mértékben is, a korábban látott "világon" kívülről jövő, elvileg megjósolhatatlan perturbációk jelennek meg. A jövő pontos előrejelzését a kvantummechanikai, információelméleti és káosz-elméleti okok mellett e hatás is lehetetlenné teszi.

### 3. NAGY FÖLDRENGÉSEK KIROBBANÁSÁNAK KÁOSZ-MODELLJE

Földünk viszonylag merev, de töredezett felső rétege, az átlagosan 100 km vastag litoszféra állandó mozgásban van. Az alatta lévő képlékenyebb asztenoszféra áramlatai jégtáblákként mozgatják a merev litoszféralemezeket, s ezek egymásratorlódása illetve összenyomódása során igen nagy feszültségi energiák keletkeznek. A feszültségek egy része csak plasztikus alakváltozásokat okoz, más része viszont különböző magnitúdójú földrengések kirobbanásához vezet. A szeizmikus aktivitás elsősorban a lemezek határán lévő törésvonalak (vagy vetők) közelében nagy. Egy nagy aktív vető mentén jónéhány, harántirányban törésvonalakkal elválasztott merev tábla lehet, amelyek hirtelen elmozdulása földrengést okoz. A kisebb rengések a felhalmozódott feszültségi energiának még lokálisan is csak kis részét



szabadítják fel; ezek leírására teljesen kielégítőnek tűnnek a valószínűségi modellek. A nagyobb rengések viszont a helyileg felhalmozott energia nagy részét felszabadíthatják, emiatt ugyanannak a táblának a megcsúszása egy ilyen rengés után hosszabb ideig nem következhet be. Egy nagy rengés jelentős hatást fejthet ki az illető vető mentén elhelyezkedő többi tábla energiájára ill. "gerjesztési fokára" is, sőt az energia későbbi felhalmozódási sebességét is csökkentheti (vagy pontosabban: a vető fellazításával növelheti a kívülről állandó rátával bevitt energia spontán kisülési sebességét).

Az adott vető mentén bekövetkező nagy rengések térbeli és időbeli eloszlását befolyásolhatják külső perturbációk és a táblák jellemzőinek heterogenitása is. K. Ito [1] japán kutató - elsősorban a káosz-elmélet és a neuronrendszerek vizsgálati eredményei alapján - megpróbált a vetőre véletlenszerű külső hatások és heterogenitás nélküli modelleket szerkeszteni. Első modelljében elhanyagolta a rengéseknek a későbbi energiafelhalmozási rátára gyakorolt hatását (másodfajú hatás), s csupán az elsőfajú, közvetlen energiaváltozásra vezető hatást hagyta meg. Tegyük fel, hogy az energia egy bizonyos, minden táblára azonosnak felvett küszöbértéket az  $i$ -edik táblában ér el először. Az itt kirobbanó rengés a közeli táblák energiáját adott módon növeli, a távoliakét (adott távolságig) csökkenti, ezen túl pedig hatása elhanyagolható. Az  $i$ -edik tábla energiája zérusra csökken. Az így megváltoztatott energiaértékek közül egyesek elérhetik vagy meghaladhatják a küszöbértéket; ebben az esetben ezek a táblák is rengenek és elvesztik energiájukat, az adott szeizmikus esemény során nem rengett táblák energiája pedig a távolságtól függő értékkel nő vagy csökken (megjegyezzük, hogy a modellezett vetőt Ito zárt görbének tekinti). Ezt az eljárást mindaddig folytatja, míg a "láncreakció" le nem áll. Ezután az állandó energiabetáplálás hatására ismét mindegyik tábla energiája egyenletesen, azonos rátával nő, míg egy újabb tábla el nem éri a kritikus értéket és el nem kezdi az újabb rengéssorozatot. Ito 100 fenti módon csatolt tábla viselkedését szimulálta különböző kölcsönhatási paraméterekre, és sok esetben a megfigyelésekhez hasonló kaotikus, nem periodikus térbeli és időbeli viselkedést talált. Erős pozitív csatolás



esetén, mint várható, a rendszer bizonyos tranziens után ciklikus, mindig együtt rengő viselkedést mutat.

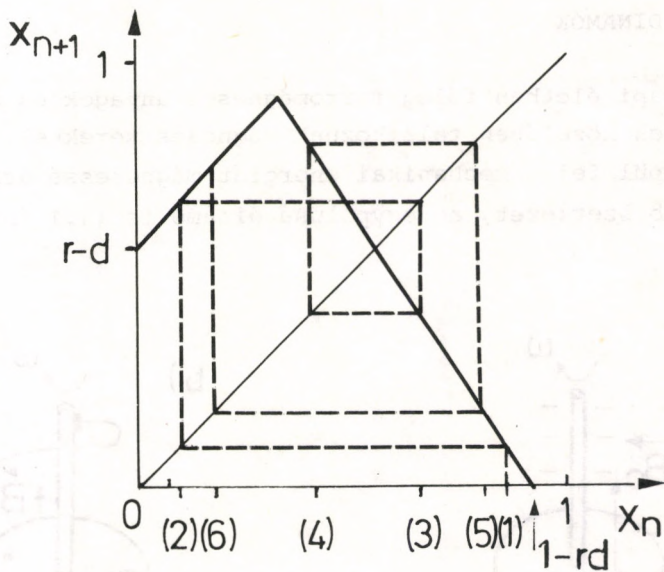
A rendszer viselkedése a táblák számától is függ. Két tábla esetén a fenti feltevésekkel bizonyos tranziens után mindig ciklikus viselkedésre jutunk. A helyzet analóg a Rössler által tárgyalt csatolt kémiai oszcillátorok viselkedéséhez [2]: itt is igaz, hogy a periodikus viselkedést mutató részrendszerek nemlineáris, negatív csatolása vezet a nagy rendszer kaotikus viselkedésére. Érdekesebbé válhat azonban a két táblából álló rendszer is, ha a rengések másodfajú hatását is figyelembe vesszük, vagyis feltesszük, hogy az egyik tábla rengése után a másikban az energiafelhalmozódás rátája a "normális" 1 értéknél kisebb lesz. Ha az  $i$ -edik ( $i=1,2$ ) tábla energiája elérte az 1 értéket, ott rengés megy végbe, amely a másik ( $j$ -edik) tábla energiáját adott  $d$  értékkel csökkenti, és ettől kezdve energiájának növekedési rátája  $r < 1$  lesz. Ugyanakkor az  $i$ -edik tábla energiája 0 lesz, majd 1 rátával nőni kezd. A legközelebbi rengés abban a táblában lesz, amelyik előbb éri el az 1 értéket (ez az  $i$ -edik, ha a  $j$ -edik energiája a rengés pillanatában  $< 1-r$  volt, ellenkező esetben a  $j$ -edik). A rendszer történetét leírhatjuk az  $x_n$  diszkrét sorozattal, ahol  $x_n$  közvetlenül egy rengést követően a "másik" tábla energiája. E sorozat ismeretében akár a rengések követési idejét, akár az energiák mindenkori értékét könnyen kiszámíthatjuk. Az  $x_n$  sorozat rekurziója a fentiek alapján a következő:

$$x_{n+1} = \begin{cases} -d + r + x_n, & \text{ha } x_n < 1 - r, \\ -d + (1-x_n)/r, & \text{ha } x_n > 1 - r. \end{cases}$$

A rekurziós diagram ( $d = 0,1$ ,  $r = 2/3$  paraméterértékekre) a 3.1 ábrán látható.

E rekurziós diagram emlékeztet a logisztikus egyenletnél megismertre, itt azonban a maximum környékén a viselkedés nem kvadratikussá, hanem lineáris (háztető típusú) válik. A függvénynek a  $45^\circ$ -os egyenessel való metszéspontja instabil fixpont, mivel itt a függvény iránytangense  $-1/r$ , ami feltevéseink szerint abszolút értékben egynél nagyobb. Mint elég könnyen látható [3], a viselkedés kaotikus, eltekintve végtelen sok taszító





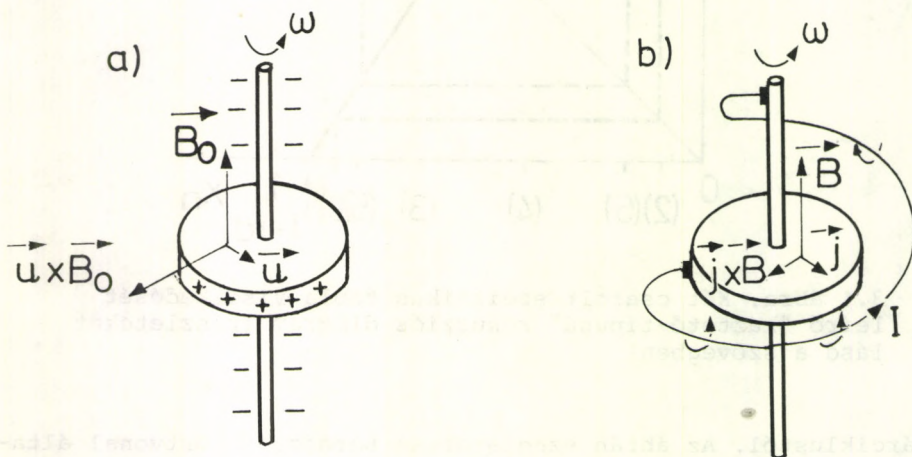
3.1 ábra. Két csatolt szeizmikus tábla viselkedését leíró "háztető-típusú" rekurziós diagram (részleteket lásd a szövegben)

határciklustól. Az ábrán szaggatottan berajzolt törtvonal általában nemperiodikus, s csak speciális kezdőfeltételek mellett vezet valahány rengés után önmagába záródó ciklusra. Közeli kezdőfeltételek esetén az  $x_n$  értékek távolsága  $n$ -nel exponenciálisan nő, így a rendszer a kezdőfeltételekre igen érzékenyen reagál, s ezért az e mechanizmust követő rengésekre hosszútávú prognózis nem adható, rövidtávú viszont igen.

Mindössze két csatolt táblát tartalmazó, s a környezettől csak elhanyagolható mértékben függő vető a valóságban valószínűleg nem található, így e modell legfeljebb illusztrációra alkalmas. Több táblát tartalmazó vetőknél fontos lenne a nagy rengések hosszú sorozatának beható vizsgálata ahhoz, hogy a belső dinamika döntő szerepét esetleg igazolni lehessen; a nagy rengések viszont olyan hosszú időközönként fordulnak elő, hogy erre kevés a kilátás.

#### 4. KOZMIKUS DINAMÓK

A hétköznapi életben főleg ferromágneses anyagok és áramot vezető huzalok közelében találkozunk mágneses terekkel. Ilyen anyagokból épül fel a mechanikai energiát mágnesessé átalakító legegyszerűbb szerkezet, az egypólusú dinamó is (4.1 ábra).



4.1 ábra. Egypólusú dinamó működési elve. A kezdetben  $\vec{B}_0$  külső térben forgó korongban a) töltésmegosztás jön létre; b) a korong peremét a tengellyel a forgásirányának megfelelően körbefutó, kefékkel ellátott, a forgásban részt nem vevő huzallal összekötve abban olyan  $I$  áram indul, amely a kezdeti mágneses teret erősíti [4]

Figyeljük meg, hogy e dinamó ugyanilyen irányú forgás mellett ellenkező irányú kezdeti teret is erősíteni tudna, ha viszont a forgásirányt vagy a huzal körültekerési irányát fordítanánk meg (de nem mindkettőt), semmilyen teret sem erősítene. Ha a forgatást adott forgatónyomatékkal végezzük, a mágneses tér csak addig nőhet, míg e forgatónyomatékot a korongot fékező,  $\vec{j} \times \vec{B}$ -vel arányos elektromágneses forgatónyomaték nem kompenzálja. A tárcsa jó vezető és ferromágneses anyagból kell hogy készüljön, mivel máskülönben a laboratóriumban elérhetőnél na-



gyobb korongokra illetve fordulatszámokra lenne szükség  $\vec{B}_0$  jelentős megnöveléséhez.

A kozmikus fizikában jól vezető közegekkel, így ionizált plazmákkal, illetve a föld belsejében olvadt fémekkel gyakran találkozunk, huzal-szerű képződmények és ferromágneses anyagok viszont általában nem fordulnak elő (a földkéregben ugyan vannak ferromágneses ásványok is, a hőmérséklet azonban 20-25 km-nél nagyobb mélységben ezek Curie-pontja felett van). A kozmikus mágneses terek eredetét így nem egyszerű megérteni a laboratóriumi dinamók működése alapján; olyan nagy kiterjedésű, jól vezető, bonyolult mozgású közeget, mint amelyet pl. a föld belsejében is feltételezünk, laboratóriumban nem valósíthatunk meg. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy a mágneses terek fenntartásához sok esetben nincs feltétlenül szükség aktív regenerációra, mivel pl. sok csillag mágneses terének "bomlási ideje" összehasonlítható lehet az Univerzum korával (a bizonytalan megfogalmazást az indokolja, hogy a plazma elektromos vezetőképességét erősen befolyásolja a közeg turbulenciája, amiről keveset tudunk).

A föld és a nap mágneses terének bonyolult, de mégis sok szabályszerűséget mutató viselkedése feltétlenül érdekes belső dinamikát sejtet. Ha a földben nem működne öngerjesztő dinamó, mágneses tere mintegy  $3 \cdot 10^4$  éves bomlási idővel tűnne el [5], ami ellentétben áll a paleomágneses megfigyelésekkel. Az elméleti modellek szerint mindkét égitest belsejében végbemennek olyan folyadékáramlások, amelyek fenntarthatják a mágneses tereket, a tényleges dinamó-mechanizmusról azonban egyelőre keveset tudunk. Mindenesetre az egypólusú dinamóhoz hasonlóan itt is igaz, hogy ha a mechanikai mozgások egy adott mágneses konfigurációt fenn tudnak tartani, úgy annak ellentettjét ( $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ ) is éppígy fenntarthatják. A vezető közegben folyó elektromos áramok ekkor szintén az előbbivel ellentétesek lesznek, a folyadékra visszaható Lorentz-erők pedig nem változnak. Így ha akár külső hatásra, akár a rendszer belső dinamikája miatt az egyébként elég stabil viselkedést mutató tér átfordul, a következő hasonló átfordulásig a dinamó az előzőhöz minden szempontból hasonlóan, de fordított polaritással fog működni.



#### 4.1 Magnetohidrodinamikai dinamó-modellek

A kozmikus dinamók működését legjobban numerikus modellek segítségével lehet tanulmányozni. A probléma bonyolultsága miatt legtöbbször nem foglalkoztak a mágneses térnek a folyadékra való visszahatásával, hanem csak az ún. kinematikai feladatot vizsgálták. Ennél a sebességet, mint a hely függvényét előírjuk, és azt vizsgáljuk, hogy a vezető folyadék képes-e a mágneses tér valamilyen módusát fenntartani vagy állandóan erősíteni. Egyszerű szimmetriájú, pl. tengelyszimmetrikus áramlás nem tarthat fenn mágneses teret, így a számolások elég bonyolultak. Az 50-es évek vége óta tudjuk, hogy valóban vannak olyan megoldások, amelyek a mágneses teret külső forrás nélkül, kizárólag egy szigetelő közegbe ágyazott, véges kiterjedésű vezető folyadék áramlása révén tartják fenn. A mágneses téren átáramló folyadékban ekkor olyan elektromotoros erő indukálódik, amely által keltett áram pont fenntartja (vagy erősíti) a kiindulási mágneses teret [4,5,6]. Vannak emellett időben periodikusan változó (oszilláló) mágneses teret fenntartó, ill. erősítő stacionárius áramlások is.

A kinematikai dinamó-feladat lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vezet. A zárt térrészben (pl. gömbben) előírt, időfüggetlen sebességtér ezért nem tarthat fenn kaotikusan viselkedő mágneses teret. Tegyük fel ugyanis, hogy az  $\vec{u}(\vec{r})$  sebességtér éppen fenn tud tartani valamilyen meghatározott konfigurációjú, de határozatlan erősségű  $\vec{B}(\vec{r})$  mágneses teret (vagy ciklust), és vizsgáljuk a  $\lambda \vec{u}(\vec{r})$  alakú áramlások hatását ( $\lambda$  kontrol-paraméter). Ha  $\lambda < 1$ , a mágneses tér exponenciálisan elbomlik. Ha  $\lambda$  kissé nagyobb egynél,  $\vec{B}(\vec{r})$  időben exponenciálisan növekvő faktorral szorzódik, a többi módusok viszont még szubkritikusak és így elbomlanak. Növekvő  $\lambda$ -ra egyre több módus válik szuper-kritikussá, de kaotikus változás nem jelenik meg.

Figyelembe vehető közelítő módon az áramló folyadék sebességének turbulens komponense is. Ha e komponens nem tükrörszimmetrikus (pl. forgó égitestekben fellépő Coriolis-erő hatására), akkor jól elősegítheti mágneses terek regenerálását még akkor is, amikor a nem turbulens komponens szimmetriatulajdonosságai miatt egyedül nem tarthatna fenn dinamót [7]. A kétféle

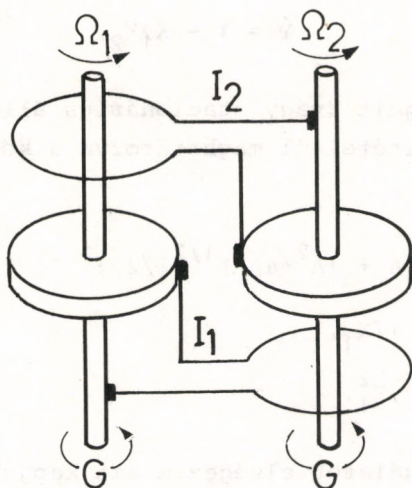


komponens szétválasztása sokszor előnyös a dinamók numerikus vizsgálatánál, mivel ekkor a reguláris (vagy átlagos) folyadékáramlás egyszerűnek tekinthető fel, és sokszor az átlagos mágneses térre is egyszerű konfigurációt kapunk.

A mágneses terek visszahatását valamilyen közelítésben figyelembe véve nemlineáris feladatra jutunk. Ennek megoldása mutathat fixpont-jellegű viselkedést (adott erősségű és konfigurációjú mágneses tér), de vezethet határciklusra vagy kaotikus viselkedésre is. A teljes csatolt magnetohidrodinamikai egyenletrendszert eddig még egyszerű esetekre sem sikerült megoldani.

#### 4.2 A Rikitake-dinamó

A föld mágneses terének pólusváltásait kvalitatíve megérthetjük egy a fentieknél sokkal egyszerűbb modell, a Rikitake-dinamó [6,8-14] segítségével. E modell nem törekszik arra, hogy a föld magjának geometriai és áramlási viszonyait szimulálja, csupán azt mutatja meg, hogy a mágneses tér irányának kaotikus megváltozásait már egy igen egyszerű, két csatolt forgó korongból álló rendszer is produkálni képes.



4.2 ábra. A Rikitake-dinamó

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a két korongot egyenlő  $G$  forgatónyomatékokkal forgatjuk; a dróthurkok  $R$  ellenállása, az  $L$  önindukciós együttható és a korongok  $C$  tehetetlenségi nyomatéka szintén legyen egyenlő. A kölcsönös indukciós együtthatót  $M$ -mel, a hurkokban folyó áramokat  $I_1$ -,  $I_2$ -vel, a szögsebességeket  $\dot{\Omega}_1$ -,  $\dot{\Omega}_2$ -vel jelölve a következő mozgásegyenletekre jutunk:

$$L \dot{I}_1 + R I_1 = M \dot{\Omega}_1 I_2,$$

$$L \dot{I}_2 + R I_2 = M \dot{\Omega}_2 I_1,$$

$$C \dot{\Omega}_1 = G - M I_1 I_2,$$

$$C \dot{\Omega}_2 = G - M I_1 I_2.$$

Mivel  $\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 = 0$ ,  $\Omega_1 - \Omega_2$  állandó, és a rendszer fázistere 3-dimenziós. Az egyenleteket megfelelő skálaválasztással dimenziótlanítva a következőt kapjuk:

$$\dot{X}_1 + \mu X_1 = Y X_2,$$

$$\dot{X}_2 + \mu X_2 = (Y-A) X_1,$$

$$\dot{Y} = 1 - X_1 X_2.$$

A rendszer fixpontjait (vagy stacionárius állapotait) az  $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = \dot{Y} = 0$  feltételből meghatározva a következő két megoldást kapjuk:

$$X_1 = \pm \{ [A + (A^2 + 4\mu^2)^{1/2}] / 2\mu \}^{1/2},$$

$$X_2 = 1/X_1,$$

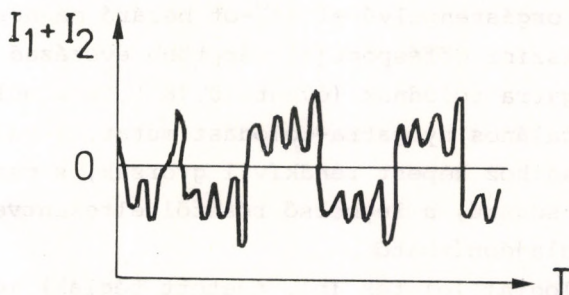
$$Y = \mu X_1^2.$$

A stabilitási vizsgálatot elvégezve azt kapjuk, hogy az  $A \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  esetben mindkét fixpont taszító. A rendszer viselkedése általában kaotikus és sok szempontból emlékeztet a Lorenz-attraktoréra, de a Lorenz-rendszer harmadik fixpontja itt az



Y-irányú végtelenben van [14]. A fázistérbeli pontot egy, a fixponton átmenő felület vonzza, ezen belül viszont maga a fixpont taszítja; a felület mentén a pont a másik fixpont vonzó felületének környezetébe jut, majd attól függő idő múltán, hogy milyen közel került e fixponthoz, ismét visszatér az előbbi felülethez.

Megjegyezzük, hogy mivel a két korong szögsebessége itt együtt változik ( $\Omega_1 - \Omega_2 \approx A$  állandó), a kaotikus energiaátadás nem a két korong, hanem a mechanikai mozgás és a mágneses tér között megy végbe. A távoli mágneses teret is meghatározó  $I = I_1 + I_2$  áram jellegzetes időbeli változását a 4.3 ábra mutatja [13]:



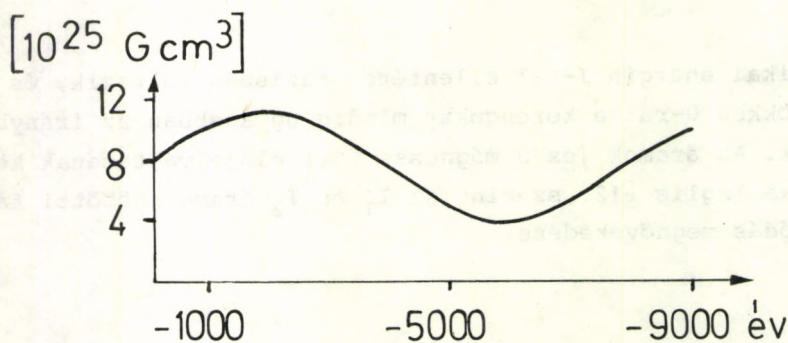
4.3 ábra. A Rikitake-dinamó áramának jellegzetes viselkedése

A mechanikai energia  $I$ -vel ellentétes fázisban változik, és sohasem csökken 0-ra: a korongokat mindig ugyanabban az irányban forgatjuk. Az áramok (és a mágneses tér) előjelváltásának közvetlen oka Inglis [12] szerint az  $I_1$  és  $I_2$  áramok közötti fáziseltolódás megnövekedése.

### 4.3 A föld és a nap mágneses tere

A föld mágneses potenciáljának gömbfüggvények szerinti kifejtését a 10-edrendű tagokig elég jól ismerjük, sőt az alacsonyabbrendű tagoknál a változás sebessége is elég pontosan ismert [15]. E gömbfüggvények együtthatóit valószínűleg csak gyengén befolyásolják a földkéreg összetételéből adódó, általában kisebb tartományokra kiterjedő mágneses anomáliák és az inoszférából és plazmaszférából származó, időben sokkal gyorsabban változó hatások. A földfelszínen az alapvető járulékot a dipólkomponens adja (a dipólnyomaték  $8 \cdot 10^{25}$  gauss  $\text{cm}^3$ ), amely jelenleg csökkenőben van; hasonló ütemű tartós csökkenés esetén mintegy 1500 éven belül "elfogyhatna" e komponens. Még gyorsabb relatív változás figyelhető meg sok multipól-komponensnél. Emellett a föld forgástengelyével  $11^\circ$ -ot bezáró mágneses dipól-tengely földfelszíni dőléspontjai már több évszázad óta szisztematikusan nyugatra tolódnak (évente  $0.18^\circ$ ), s a multipól-tér még gyorsabb általános nyugatra-tolódást mutat. E változások a földkéreg mozgásaihoz képest rendkívül gyorsak, s csak a föld mintegy 3500 km sugarú, a legbelső résztől eltekintve folyékony magjának tulajdoníthatók.

Egyes archeológiai leletek (pl. égetett téglák) megőrizték a lehűlésükkor befagyott mágneses teret, így mintegy 10000 évre visszamenően nyomon követhetjük a mágneses tér változásait (4.4 ábra).

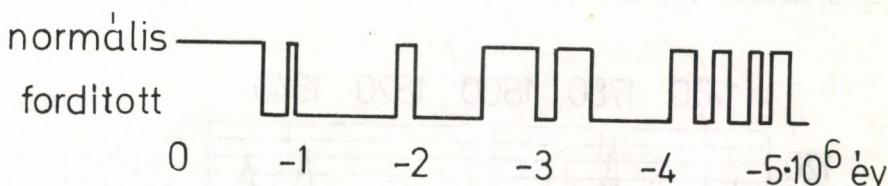


4.4 ábra. Archeo-mágneses indikációk a föld mágneses momentumának változásaira. A 4000 évnél régebbi adatok különösen bizonytalanok



E megfigyelések 8-10000 éves periodikus változásra utalnak [13].

Lényegesen hosszabb időtartamra terjednek ki a paleomágneses megfigyelések. Az óceánok közepe táján lévő, szétnyíló törésvonalak mentén új litoszféra keletkezik, s a lehülő kőzetekbe fagyott mágneses tér sok millió éven át többé-kevésbé pontosan nyomom követhető a törésvonal mindkét oldalán. A szétnyílás sebessége a mágneses tér változásainak időpontjára és időtartamára nézve is ad információt. E mérésekből az alapvető konklúzió az, hogy a 10000 év körüli periódusú oszcillációk mellett szabálytalan, átlagosan néhány százezer éves időtartamonként a mágneses tér iránya megfordul. A 4.5 ábrán bemutatjuk az utóbbi  $5 \cdot 10^6$  év polaritásváltásait, a mágneses tér erősségének feltüntetése nélkül [13]:



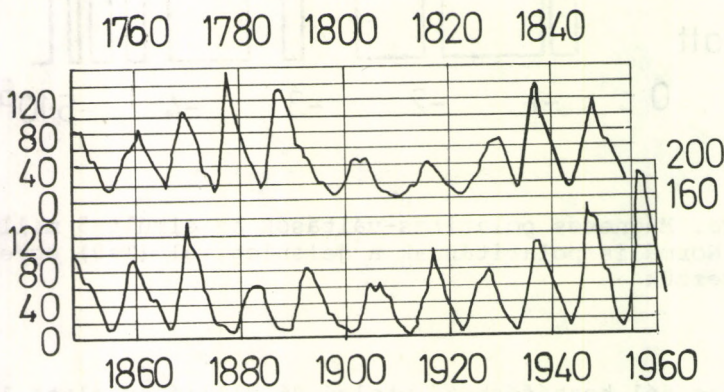
4.5 ábra. Mágneses polaritás-váltások az elmúlt 5 millió évben. Normális polaritásnak a jelenlegivel ( $T=0$ ) egyezőt nevezzük

A viszonylag jól hozzáférhető utolsó 76 millió év alatt 171 polaritásváltást észleltek [13], az állandó polaritású intervallumok hossza  $3 \cdot 10^4$  és  $3 \cdot 10^6$  év között ingadozik. Valószínű, hogy sok rövidebb időtartamot nem sikerült észrevenni. Ez alatt az időszak alatt a kétféle polaritás kb. szimmetrikusan viselkedett, de korábban, a földtörténet ókorának végén olyan időszakokra is van indikáció, amikor a polaritás mintegy 60 millió évig fordított, vagy legalább túlnyomóan fordított irányú volt.

Ez a bonyolult viselkedés nyilvánvalóan nem magyarázható meg minden részletében a Rikitake-dinamó kaotikus tulajdonságaival. Maga a kisebb időtartamokban közel periodikus viselkedés és a

hosszabb, véletlenszerű időközökben bekövetkező pólusváltás viszont nagyon emlékeztet a 4.3 ábrára. Ma még nem tudjuk, hogy az analógia mennyire mély. Lehet, hogy a föld magjában létrejövő és a vezető közeg áramlása által fenntartott elektromos áramok időnként elromló fázisviszonyai vezetnek a mágneses tér részleges összeomlására és a dipól-komponens átfordulására, mint a Rikitake-dinamónál, de az is lehet, hogy több, egymással csak gyengén összefüggő, időben változó dinamó működik, és mikor egyik leáll, újraéledésekor a saját helyén a többiek által keltett mágneses teret kezdi erősíteni [14]. A jelenség részletes megértése még valószínűleg sokáig várhat magára.

Nem tűnik egyszerűbbnek a nap mágneses viselkedése sem. A polaritásváltás itt sokkal szabályosabban, mintegy 11 évenként következik be, de minden ciklus kissé más, és a naptevékenység erősségét jellemző "napfoltszám" 80-100 éves ciklikus viselkedést is mutat (4.6 ábra).



4.6 ábra. A napfoltszám időbeli változásai [16]

Erős indikáció van arra, hogy a nap hosszab távon még kaotikusabb viselkedést is tud mutatni. Így az 1600-as évek közepétől az 1700-as évek elejéig a nap mágneses tevékenysége valószínűleg szinte teljesen szünetelt (Maunder-minimum), napfoltok megfigyeléséről alig történik említés (pedig ekkor élt Newton). Arra is vannak adatok, hogy a kozmikus sugárzás ebben



az időszakban jobban be tudott hatolni a föld pályájáig a feltehetően kevésbé turbulens interplanetáris mágneses téren keresztül. A nap dinamójának működésében valószínűleg nagy szerepe van a felszín alatti turbulens zónának, de a részletek megértéséhez még itt is sok megfigyelésre van szükség.

## 5. A SZATURNUSZ GYŰRŰI

A Voyager 1 és 2 űrszondák megsokszorozták ismereteinket a Szaturnusz gyűrűiről [17-21]. Ha a bolygótól a gyűrű síkjában kifelé haladunk, igen gazdag struktúrát találunk, s e struktúra annál gazdagabbnak tűnik, minél jobbak megfigyeléseink: ma már nem néhány, hanem néhány százezer gyűrűről beszélhetünk, de az is lehet, hogy a "gyűrűk" egy részét inkább szorosan feltekert spirálhoz hasonlíthatjuk. Mivel a megfigyelések igen újak, az elméleti feldolgozás még nem teljes. Itt csupán fel szeretném hívni a figyelmet erre az érdekes jelenségre, s a káosz-elmélettel való esetleges kapcsolatára.

Egyik lehetséges kapcsolatra Avron és Simon [19] mutatott rá. A gyűrűt alkotó részecskéket egymással nem kölcsönható próbatestnek tekintve és a pályák kis perturbációkra való stabilitását vizsgálva időfüggetlen Schrödinger-egyenlet sajátértékproblémájára jutnak. A kvantumfizikából vett példák segítségével plauzibilissé teszik (de nem bizonyítják), hogy a nap és néhány Szaturnusz-hold perturbáló hatása igen bonyolult spektrumu Hamilton-operátorra vezethet: a spektrum a káosz-elméletben is gyakran fellépő Cantor-halmaz típusú lehet. Ilyen spektrum esetén a gyűrűk szerkezete is igen bonyolultnak adódhat.

Egy másik érdekes lehetőség, hogy az egyenletesen kitöltött gyűrűk önmagukban dinamikailag instabilak lehetnek, ha a gyűrűt alkotó részecskék felületi sűrűsége nem elhanyagolható. Ez is kaotikus, a gázfelhők csillagokra darabolódásához hasonló folyamatokra vezethet.

IRODALOM

1. K. Ito, J. Geophys. Res. 85, 1399, 1980.
2. O.E. Rössler, Synergetics - A Workshop, Ed. H. Haken, 174-183. old.(Springer, New York, 1978 )
3. S. Ito, S. Tanaka, H. Nakada, Proc. Jap. Acad. 55, Ser.A, 231, 1979.
4. P.H. Roberts, An Introduction to Magnetohydrodynamics (Longmans, London, 1967 )
5. E.N. Parker, Cosmical Magnetic Fields (Clarendon Press, Oxford, 1979 )
6. H.K. Moffatt, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1978 )
7. F. Krause, K.H. Rädler, Elektrodynamik der Mittleren Felder in turbulenten leitenden Medien und Dynamotheorie, Ergebnisse der Plasmaphysik und der Gaselektronik, Band II. 3-154 old.(Akademie-Verlag, Berlin, 1971 )
8. T. Rikitake, Proc. Cambridge Philos. Soc. 54, 89, 1958.
9. T. Rikitake, Electromagnetism and the Earth's Interior (Elsevier, Amsterdam, 1966 )
10. D.W. Allan, Nature 182, 469, 1958.
11. D.W. Allan, Proc. Cambridge Philos. Soc. 58, 671, 1962.
12. D.R. Inglis, Rev. Mod. Phys. 53, 481, 1981.
13. M.W. McElhinny, Palaeomagnetism and Plate Tectonics (Cambridge Univ. Press, 1973 )
14. J. Guckenheimer, Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Ed. M.L. Swinney, J.P. Gollub, 271-274. old. (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981 )
15. D.R. Barraclough, Nature 294, 14, 1981.
16. Д.Я. Мартынов, Курс общей астрофизики (Наука, Москва, 1971 )
17. N. Henbest, New Scientist 93, 235, 1982.
18. E.C. Stone, Nature 292, 675, 1981.
19. J.E. Avron, B. Simon, Phys. Rev. Letts. 46, 1166, 1981.
20. J.N. Cuzzi, J.J. Lissauer, F.H. Shu, Nature 292, 703, 1981.
21. J.J. Lissauer, F.H. Shu, J.N. Cuzzi, Nature 292, 707, 1981.



# KAOTIKUS VISELKEDÉS AZ UNIVERZUM FEJLŐDÉSÉBEN

Perjés Zoltán

1. Bevezetés	569
2. Levezethető-e a kozmológiai elv?	571
3. Homogén terek	573
4. A Kasner-univerzum	579
5. A Mixmaster-univerzum	582
6. Kasner-korok az egységintervallumon	587
7. A Mixmaster-univerzum Kolmogorov-entrópiája	590
8. A topológikus entrópia	593
9. A kaotikus kozmológia bukása	596
10. A téridő entrópiája - avagy éljen a kaotikus kozmológia!	601
Irodalom	604





## 1. BEVEZETÉS

Ez az előadás nemcsak az ergodelmélet egyes kozmológiai alkalmazásait kívánja megvilágítani, hanem kicsit bevezetés is a modern kozmológiába. Kicsit, mert a kozmológia tudománya példátlan fejlődésnek indult a közelmúltban, s immár vaskos monográfia terjedelme sem lenne elég az ambiciózus összefoglalóhoz. A pártos áttekintés paradox módon a káoszra összpontosít a témakör rendszerezésében. A káosz és a világmindenség térbeli szimetriáinak eredete a közelmúlt kozmológiai kutatásainak szorosan összefüggő kérdései. Tanulmányaink ez utóbbi kérdésre, az izotropia és homogenitás eredetére is választ kínálnak.

Ismétlem: nem áll módunkban itt több más, alapvető kozmológiai problémát megtárgyalni. Nem térhetünk ki például a helyi anyagsűrűségek kialakulásának dinamikájára vagy az elemkeletkezés modelljeire. Némi kárpótlásul szeretnék rámutatni arra, hogy célkitűzéseink követése közben az elméletnek vélhetően időtálló, szilárd területein haladunk. Az érintett részletek irodalmára bőségesen hivatkozom. Az idézett munkák ennek ellenére a vonatkozó irodalomnak csupán töredékét képezik. A világ-egyetem általános tágulását a kozmológiai elmélet is követi.

A kozmológia alapelvei az utóbbi két évtizedben szilárdultak meg. A megfigyelési anyag ezalatt kellően egyértelművé vált az egymással vetélkedő koncepciók közti döntéshez. Talán a legfontosabb két fejlemény ebben, hogy (a) a tér és az idő szerkezetére vonatkozó elméletek közül az általános relativitáselméletet támasztották alá pontosabb mérések, és (b) a kozmológiai elv érvényességét több, egymástól független felfedezés bebizonyította.

A kozmológiai elv igen hatékony eszköz a relativisztikus kozmológiában. Kimondja, hogy a világmindenség nagy távolságskálán homogén és izotrop. A homogenitás azt jelenti, hogy a világmindenség anyagsűrűsége és geometriai tulajdonságai a tér különböző pontjaiban azonosak. Az izotropia pedig azt fejezi ki, hogy a világmindenség tulajdonságai a megfigyelés irányától is függetlenek. Érdemes röviden áttekintenünk a kozmológiai elv érvényességéről ma rendelkezésünkre álló bizonyítékokat [1,2].



## 1.1 Az izotrópia bizonyítékai

(1) A galaktikák eloszlása az égbolton körülbelül 30 % pontossággal izotrop. A vizsgálatok 2000 Mparsec távolságra terjednek ki [3]. Újabb megfigyelések szerint [4] a galaktikák csoportosuló hajlama még 200 Mparsec távolságban is megnyilvánul.

(2) A Hubble-távolodás állandója körülbelül 25 % pontossággal izotrop [5]. A megfigyelhető anizotrópia galaktikánk helyi mozgásával magyarázható [6,7].

(3) A rádióforrások eloszlása nagy pontossággal izotrop, az anizotrópia meglepő módon kevesebb 5 %-nál [8,9,10,11].

(4) A kozmikus röntgen-háttérsugárzás 5 %-nál pontosabban izotrop [12].

(5) A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás nemcsak átlagosan, hanem teljesen izotrop, ezrelékes pontossággal [3]. A megfigyelhető dipólus-anizotrópiából pontosan meg lehet határozni galaktikánk helyi sebességét [13], a maradék anizotrópia pedig nagyobb inhomogenitások létezésére utal [14].

## 1.2 A térbeli homogenitás bizonyítékai

Az izotrópiára vonatkozó megfigyelések egyúttal a tér homogenitásának bizonyítékait is szolgáltatják, ha elfogadjuk, hogy a Föld nincsen kitüntetett helyzetben az Univerzumban ("kopernikuszi elv"). A megfigyelt izotrópiából ugyanis következik, hogy csak a Földtől radiálisan mért távolsággal változhatna a világmindenség szerkezete. Más, a homogenitást megerősítő megfigyelések:

(1) A galaktikáknak távolságméréssel kiegészített feltérképezése [4].

(2) Közvetve a homogenitásról tanúskodik a Hubble-törvény linearitása.

## 1.3 A Robertson-Walker-modell

A világmindenség szabványos ősrobbanás-modellje homogén és izotrop. Az ősrobbanás-modell abban az értelemben vált szabványossá, hogy ma ezt szokás a kozmológiai problémákban kiinduló-



pontként elfogadni. Az ősrobbanás-modell immár olyan mélyen rögzült a kutatók tudatában, hogy mintegy mellékesen, különösebb indoklás nélkül szokásos bevezetni.

Az ősrobbanás-modellben a homogén és izotrop Univerzumot a Robertson-Walker-ívelem írja le [15]:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)dr^2}{1-kr^2} - R^2(t)r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \quad (1.1)$$

( $c=1$ ,  $G=1$  és  $\hbar=1$  egységrendszerrel használunk). Az  $R(t)$  függvényt az

$$R_{,ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -8\pi T_{ik} \quad (1.2)$$

Einstein-egyenletek határozzák meg. Ha az egyenletekben  $p=0$  nyomást tételezünk fel, akkor az Univerzum Fridman-egyenleteit kapjuk. Ezek megoldásait Lemaitre vezette le elsőként [16]. A három megoldásosztályt a  $k = -1, 0$  és  $1$  paraméterértékek egyike jellemzi. A  $k = -1$  értékkel jellemzett univerzumok háromdimenziós tere nyílt; kis anyagsűrűséget tételeznek fel. Az anyagsűrűség növelésével a  $k=0$  paraméterű, euklidészi tért tartalmazó modellt, majd a  $k = 1$  paraméterrel jellemzett, zárt terű modelleket nyerjük.

Az átlagos anyagsűrűségekre vonatkozó becslések nem eléggé pontosak ahhoz, hogy a három Fridman-osztály közül kiválasszuk az Univerzumot leíró modellt.

## 2. LEVEZETHETŐ-E A KOZMOLÓGIAI ELV?

A Fridman-féle kozmológiai modellek olyan kitűnő összhangban vannak a megfigyelésekkel, hogy felmerül a kérdés: kell-e egyáltalán vizsgálnunk a kozmológiai elvvel összeegyeztethetetlen, nem-Fridman-modelleket. Ha elfogadjuk a Fridman-kozmológiák és a megfigyelések összhangját, meg kellene azt is értenünk, hogy miért kielégítőek ezek az egyszerű Fridman-modellek. Milyen fizikai törvények írják elő, hogy az Univerzum nagy pontossággal homogén és izotrop legyen? Lehetséges, hogy az Univerzum közvetlenül az ősrobbanás után erősen szabálytalan és kaotikus volt, és mai állapotába kiegyenlítő és hőfejlesztő folyamatok-



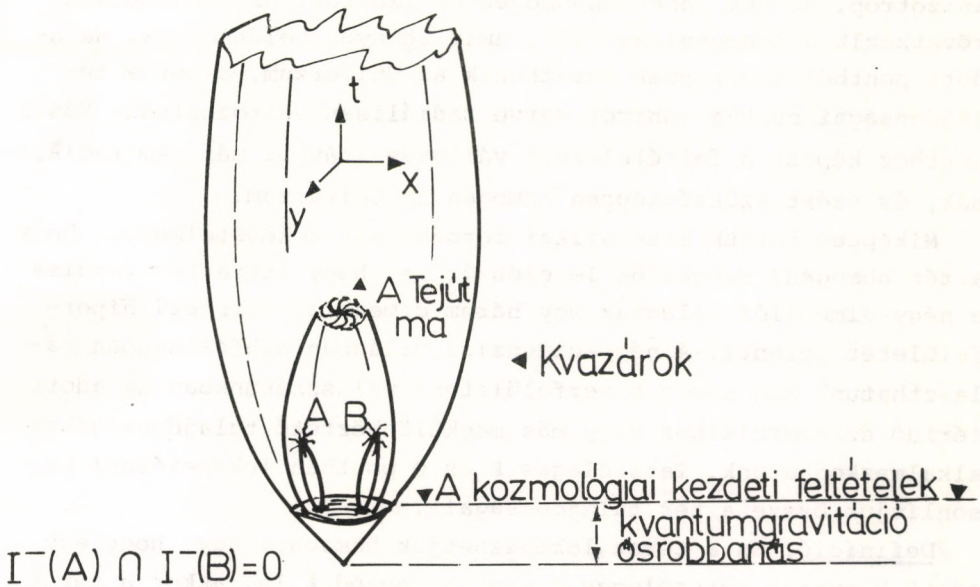
kal jutott. Ezt az elképzelést, a kaotikus kozmológiát Misner vetette fel 1968-ban [17]. A Misner-féle kaotikus kozmológia nem igényli a kezdeti feltételek ismeretét. A kaotikus kozmológia - a biológiához hasonlóan - azt tartja, hogy a világmindenség jelenlegi állapota fejlődési folyamatok következménye [18]. Egyfajta gravitációs "kiválasztási mechanizmus" útján jöttek létre a mai átfogó tulajdonságai. Így levezethetnénk a világmindenség unicitását, ha meg tudjuk mutatni, hogy a jelenlegi szerkezet jön létre a kezdeti feltételektől függetlenül.

Ezzel szemben a nyugalmatlan kozmológia azt hirdeti, hogy a világmindenség kezdetétől fogva homogén és izotrop. Jelenlegi szerkezetét a kezdeti feltételek magyarázzák meg. Az ősrobbanás szingularitása meghatározott tulajdonságokkal rendelkezett, aminek az oka stabilitásban, önkonzisztenciában vagy egyértelműségben keresendő. Ez azt jelenti, hogy a gravitációs fejlődési folyamatok nem a világmindenség általános felépítését, hanem olyan alrendszerket alakítottak ki, mint a galaktikák, csillagok és bolygók.

A kozmológiai elmélet fejlődését az elmúlt évtizedben nagymértékben ösztönözte e kétfajta koncepció közötti döntés vágya. Ebben a munkában nélkülözhetetlen a nem-Fridman-kozmológiák tulajdonságainak elemzése. A kaotikus kozmológia például megköveteli, hogy a nem-Fridman-típusú univerzum dinamikai tulajdonságai aszimptotikusan elvezessenek a Fridman-modellek egyikéhez. Az egész világegyetemet kiegyengető dinamikát találni igen nehéz feladat, amit jól érzékeltet a kozmológiai horizontprobléma.

Részecskehorizontnak vagy múltbeli eseményhorizontnak nevezzük a test időrendi múltjának a határát [19]. A részecskehorizont azokat a téridő-pontokat határolja, amelyekből a test a fénysebességnél nem gyorsabban elérhető. Fridman-univerzumban léteznek diszjunkt időrendi múltak. A 2.1 ábrán feltüntettük A és B kvazárokat és részecskehorizontjukat. A kvazárokat abban a pillanatban ábrázoltuk, amikor kibocsátották a ma hozzánk érkező fényt. A két kvazár időrendi múltja diszjunkt, és ezért kialakulásukban semmiféle oksági kapcsolat sem állhatott fenn közöttük. Az észlelés mégis azt mutatja, hogy távolodásuk bele-





2.1 ábra. A táguló Fridman-univerzum izotrop. Mi rendezi össze A és B megfigyelt kvazár mozgását, ha ezek múltja elkülönült?

illeszkedik az Univerzum általános izotrópiájába. Hogyan lehet az Univerzumnak okságilag teljesen elkülönülő, horizonttal elválasztott két tartománya oly hasonló egymáshoz? Ez a kozmológiai horizontprobléma. A megoldás olyan korai univerzumszerkezetben keresendő, amelyben áttörhető a Fridman-világ részecskehorizontja. Ilyen modellhez vezetett el a Kasner-univerzum tanulmányozása. A Kasner-univerzum a homogén, de nem izotrop terű modellek közül az egyik legegyszerűbb.

### 3. HOMOGÉN TEREK

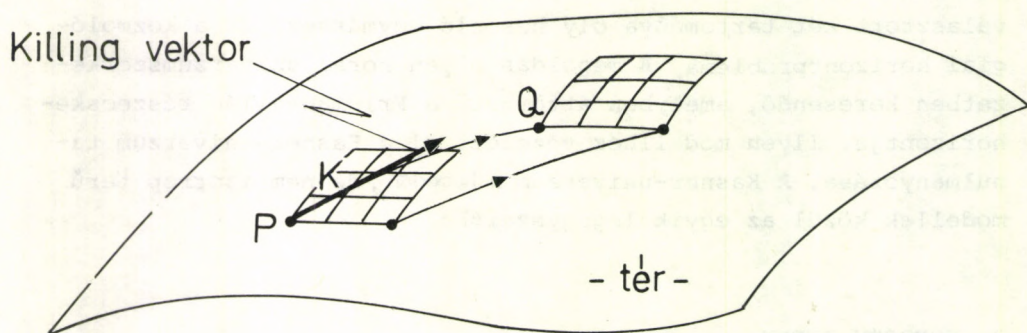
Ha engednünk kell a kozmológiai elvből, akkor inkább ragaszkodunk a homogenitáshoz, mint az izotrópiához. A modell homogenitása ugyanis kifejezi, hogy a Földünk nincsen kitüntetett helyzetben a világmindenségben. Az Univerzum lehet homogén és

anizotrop, de nem lehet inhomogén és izotrop. Az izotrópiából következik a homogenitás [20], amit könnyen beláthatunk. Ha adott pontból izotropnak mutatkozik az Univerzum, akkor a tulajdonságai csak a ponttól mérve radiálisan változhatnak. Másik ponthoz képest a feltételezett változás irányai már nem radiálisak, és ezért szükségképpen homogén az Univerzum.

Miképpen öntjük matematikai formába azt a követelményt, hogy a tér homogén? Szögezzük le először is, hogy itt a tér fogalma a négy-dimenziós világnak egy három-dimenziós térszerű hiperfelületét jelenti. A négy-dimenziós világban sokféleképpen választhatunk meg ilyen hiperfelületet; választásunkban az adott téridő szimmetriáihoz vagy más megkülönböztető tulajdonságához alkalmazkodhatunk. Tetszőleges P és Q pontban leképezéssel hasonlítjuk össze a tér tulajdonságait.

Definíció. Ha a teret leképezhetjük önmagára úgy, hogy egy adott P pontja tetszőleges Q pontra képződik le, akkor a teret homogénnek mondjuk.  $\square$

Emeljük ki a definícióból, hogy a tér valóban le is képezhető önmagára minden esetben, vagyis a leképezés megőrzi a geometriai viszonyokat minden egyes pont és képe között (3.1 ábra).



3.1 ábra. A tér önmagára történő egyparaméteres leképezései



A geometriai viszonyokat a mértéktenzor írja le maradéktalanul. A mértéktenzort megőrző leképezéseket izometriának nevezzük. Az izometriák elméletének elemeiből ismeretes [21], hogy az izometriák generátorai olyan vektorok, amelyek megoldják a Killing-egyenletet:

$$\nabla_{\lambda} K_{\mu} + \nabla_{\mu} K_{\lambda} = 0 . \quad (3.1)$$

Itt  $\nabla_{\lambda}$  a kovariáns deriváló operátort jelöli és három-dimenziós térben a  $\lambda$  és  $\mu$  indexek az 1, 2 és 3 értékeket vehetik fel. A (3.1) egyenletet kielégítő  $K = K^{\mu} \partial/\partial x^{\mu}$  vektort Killing-vektor-nak nevezzük. Wilhelm K.J. Killing vezette le 90 évvel ezelőtt a (3.1) egyenletet.

Adott tér izometriái folytonos csoportot alkotnak. A csoport szerkezetét annak Lie-algebrája jellemzi. A csoport generátorait  $K_A$ -val jelölve ( $A = 1, 2, \dots, m$ , ahol  $m$  a csoport paramétereinek száma), az algebra alapvető kommutátorait így írhatjuk fel:

$$[K_A, K_B] = C_{AB}^C K_C . \quad (3.2)$$

Itt a  $C_{AB}^C$  kombinációs együtthatók a csoport szerkezeti állandói, amelyek alsó indexpárjukban antiszimmetrikusak:

$$C_{AB}^C = -C_{BA}^C . \quad (3.3)$$

A Lie-zárójelekre vonatkozó Jacobi-féle azonosságból és a (3.2) felcserélési törvényből következik, hogy a szerkezeti állandók kielégítik a

$$C_{AB}^R C_{RC}^D + C_{BC}^R C_{RA}^D + C_{CA}^R C_{RB}^D = 0 \quad (3.4)$$

egyenletet.

A homogén terek és osztályozásuk elmélete meglehetősen komplikált, és annak különféle részletei szétszórtan találhatóak meg az irodalomban [22,23,24]. Megkísérlem ezért a homogén terek osztályozásához vezető főbb eredményeket összefoglalni.

1. TÉTEL [22]. Egy  $d$ -dimenziós sokaság izometriacsoportja legfeljebb  $d(d+1)/2$  paraméteres.  $\square$

A bizonyítás nem túl nehéz, és bátorításképpen kitérek rá. Tegyük fel, hogy az izometriacsoport paramétereinek száma  $r > d(d+1)/2$ . Legyen a Lie-algebra egy bázisa  $K_A$ . Az  $L = C_A K_A$  vektor is Killing-vektor, ha  $C_A$  tetszőleges állandók. Az  $L$  vektor komponenseinek száma  $d$ . Az  $L$  vektor kovariáns deriváltja  $d(d-1)/2$  független komponenst tartalmaz, mivel antiszimmetrikus a (3.1) Killing-egyenlet folytán. Tetszőleges  $P$  ponton elérhetjük a  $C_A$  együtthatók alkalmas, de  $C_A \neq 0$  választással, hogy ott az  $L$  vektor és kovariáns deriváltja eltűnjön; ez csak a  $d(d+1)/2$  feltétel a  $d$  számú együtthatóra. Az  $L$  az alcsoporthoz, amelynek  $L$  a generátora,  $P$  pontot és  $P$  pontban a vektorokat önmagukba viszi át. Minthogy az alcsoporthoz is izometriacsoport megőrzi a metrikus tenzor alakját.  $P$  pontból egy tetszőleges másik pontba futó geodetikus vonal mentén mért távolság is változatlan marad. Így a sokaság egyetlen pontja sem mozdul el, és  $L = 0$ . Ezért  $C_A = 0$ , a korábbi feltevésünkkel ellentétben.

A  $d = 3$  dimenziós tér a tétel szerint legfeljebb 6-paraméteres izometriacsoporttal rendelkezik. Az izometriákat tovább korlátozza a következő tétel.

2. FUBINI TÉTELE [25]. A  $d > 2$  dimenziós sokaságban nincs  $d(d+1)/2 - 1$  paraméteres izometriacsoport.  $\square$

Minthogy a 2. tétel megtiltja a maximálisnál eggyel alacsonyabb paraméterszámú csoportot, a három-dimenziós térben nem létezik 5-paraméteres izometria. A paraméterek száma nem lehet kevesebb 3-nál, mert ellenkező esetben a transzformációk nem lennének tranzitívak a téren. Maradnak tehát a 3-, 4- és 6-paraméteres csoportok.

3. EISENHART TÉTELE [22]. A maximális paraméterszámú izometriacsoportot megengedő sokaság állandó görbületű.  $\square$

A tér állandó görbületű a Fridman-univerzumokban, amelyeknek 6-paraméteres izometriacsoportjuk van. Ez tartalmaz (a) három paraméteres izotrópiacsoportot és (b) háromparaméteres, a téren tranzitív alcsoporthoz. Ha az izotrop Fridman-modellektől eltekintünk, akkor az izometriák 3- vagy 4-paraméteresek lehetnek.



4. JEGOROV TÉTELE [26]. Bármely 4-paraméteres csoportnak van 3-paraméteres alcsoportja.  $\square$

Az 1-4. tételek alapján kimondhatjuk, hogy homogén tereknek mindig van 3-paraméteres izometriacsoportjuk. A homogén terek Bianchi-féle osztályozása [23] nem más, mint a 3-paraméteres Lie-csoportok osztályozása.

Háromparaméteres Lie-csoport struktúraállandóit egyértelműen jellemzik az azokból képzett

$$C^{AB} = -\epsilon^{AKS} C_{RS}^B \quad (3.5)$$

lineáris kombinációk, amelyekben  $\epsilon^{ARS}$  együtthatók az antiszimmetrikus Levi-Civita-szimbólum komponensei ( $\epsilon^{123}=1$ ). Bontsuk fel a  $C^{AB}$  mátrixot szimmetrikus és antiszimmetrikus részre, és az antiszimmetrikus részt írjuk fel ismét a (3.5) minta szerint:

$$C^{AB} = N^{AB} + \epsilon^{ABC} A_C. \quad (3.6)$$

Itt  $N^{AB} = N^{BA}$ . Jelölésünkben a struktúraállandókra vonatkozó (3.4) algebrai egyenletet így írhatjuk fel:

$$N^{AD} A_D = 0. \quad (3.7)$$

Az egyenlet tartalma, hogy  $A_D$  az  $[N^{AD}]$  mátrixnak 0 sajátértékhez tartozó sajátvektora.

Vizsgáljuk most meg a struktúraállandók viselkedését a Lie-algebra bázistranszformációinak hatására! A  $K_A$  bázisról áttérünk a  $K_{\tilde{A}}$  bázisra a

$$K_{\tilde{A}} = \alpha_{\tilde{A}}^A K_A \quad (3.8)$$

transzformációval, ahol  $\alpha_{\tilde{A}}^A$  tetszőleges állandó együtthatók. A (3.8) transzformációkkal szemben a struktúraállandók tenzorként viselkednek, amint arról a (3.2) felcserélési törvények segítségével könnyen meggyőződhetünk. Így például az  $[N^{AB}]$  szimmetrikus mátrix transzformációs tulajdonságai megegyeznek a 3-dimenziós tér metrikus tenzorának tulajdonságaival. Ezért a (3.8) transzformációk segítségével elérhetjük, hogy  $[N^{AB}]$  diagonális

legyen, és főátlójában csak  $\pm 1$  és 0 forduljon elő. Az ilyen alakú "metrikát" még megőrzik speciális transzformációk. (Például az

$$[N^{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

"metrika" invarianciatranszformációi az  $O(3)$  csoportot alkotják.) A fennmaradó transzformációkat felhasználjuk az  $A_D$  vektorhoz illesztett koordináták bevezetésére:

$$(A_D) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

A (3.7) sajátértékegyenlet:

$$N_1 A = 0.$$

A háromparaméteres csoportok két alapvető osztályát kaptuk: (A)  $A = 0$  és (B)  $N_1 = 0$ . Az osztályozást úgy finomítjuk, hogy megadjuk  $N_1, N_2, N_3$  és  $A$  különféle lehetséges értékeit [27]. Ezek jellemzik a homogén terek Bianchi-féle típusait (I. táblázat).

I. táblázat. A Bianchi-típusok

Osz-tály	Típus	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$A$	Univerzum
A	I	0	0	0	0	Fridman ( $k=0$ ) [40], Kasner [29], Taub-NUT [41]
	II	1	0	0	0	Taub [30]
	VI	0	1	-1	0	Barnes [35], Dunn-Tupper [36]
	VII	0	1	1	0	Barnes [35]
	VIII	1	1	-1	0	Kantowski-Sach $C_4$ [28]
	IX	1	1	1	0	
B	III	0	1	-1	1	Ryan-Shepley [24]
	IV	0	0	1	1	Harvey-Tsoubelis [34]
	V	0	0	0	1	Fridman ( $k=-1$ )
	VI <sub>A</sub>	0	1	-1	A	Siklós [33]
	VII <sub>A</sub>	0	1	1	A	Siklós [33], Lukash [37], Melvin [38]
	VI <sub>1/3</sub>	0	1	-1	1/3	



#### 4. A KASNER-UNIVERZUM

Az erős anizotrópiát mutató homogén terű kozmológiai modellek igen egyszerű mintapéldánya a Kasner-univerzum [29]. Mértéktenzora:

$$ds^2 = dt^2 - d\ell^2, \quad (4.1)$$

ahol a  $d\ell^2$  a tér metrikája,

$$d\ell^2 = t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2. \quad (4.2)$$

Itt  $p_1$ ,  $p_2$  és  $p_3$  valós számok. Az üres tér  $R_{ik} = 0$  gravitációs egyenleteiből a paraméterekre a

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad (4.3)$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (4.4)$$

algebrai egyenletek származnak. Az egyenletek nem elégíthetők ki azzal a feltevéssel, hogy mindhárom paraméter egyenlő egymással. Ha feltesszük, hogy két paraméter egyenlő, akkor a

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad (4.5)$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1) \quad (4.6)$$

megoldásokat kapjuk, amelyek közül (4.6) sík téridőt jellemez. Minden más esetben elrendezhetjük a három paramétert a következőképpen:

$$p_1 < p_2 < p_3. \quad (4.7)$$

A paraméterek szélső értékeit (4.5) és (4.6) szolgáltatják. A megengedett értéktartományuk:

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1. \quad (4.8)$$

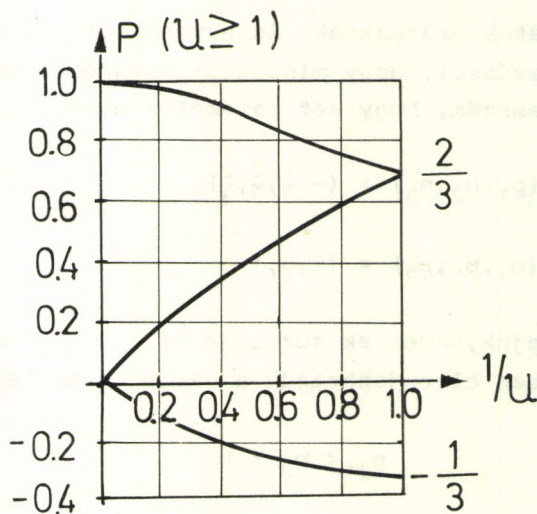
A (4.3) és (4.4) egyenletek megoldását egyetlen  $u$  paraméterrel jellemezhetjük [31]:

$$p_1 = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \quad (4.9)$$

Elegendő az  $u \geq 1$  tartományra szorítkozni ahhoz, hogy valameny-nyi megoldást előállítsuk. Az  $u \in [0, 1]$  tartományban másodszor is megkapjuk a megoldásokat, amint az a

$$\begin{aligned} p_1\left(\frac{1}{u}\right) &= p_1(u), \\ p_2\left(\frac{1}{u}\right) &= p_3(u), \\ p_3\left(\frac{1}{u}\right) &= p_2(u) \end{aligned} \quad (4.10)$$

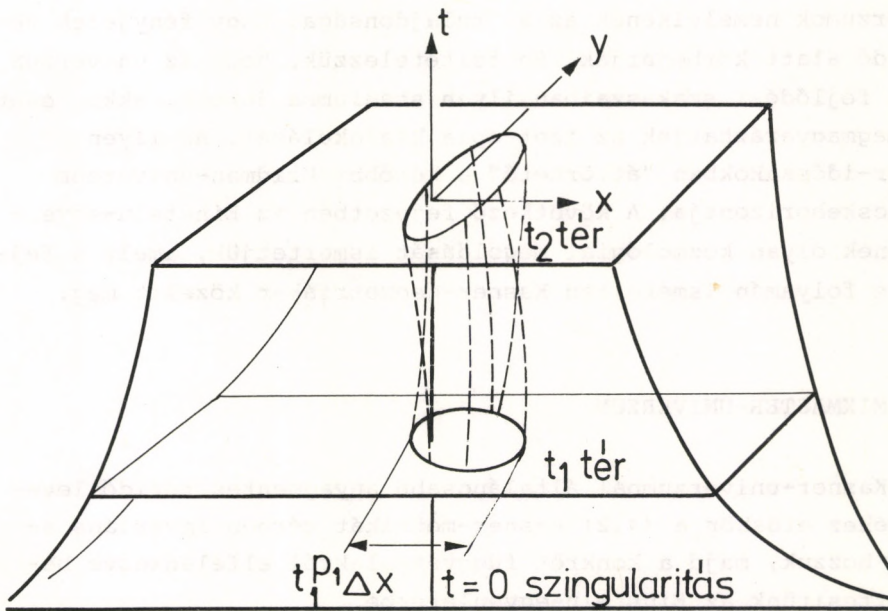
szimmetriatulajdonságokból látható. A 4.1 ábrán feltüntettük  $p_1$ ,  $p_2$  és  $p_3$  értékét az  $u$  Lifsic-paraméter reciproka függvényében.



4.1 ábra. A Kasner-kitevők a Lifsic-paraméter reciproka függvényében



A Kasner-téridő fizikai értelmezése 1958-ig váratott magára. Kozmológiai interpretációját Schücking és Heckmann javasolták [39]. A metrika (4.1), (4.2) alakjából következik, hogy a  $t = \text{konst.}$  térszerű hiperfelületek görbületlen három-dimenziós terek. Az  $(x, y, z)$  koordináták állandó értékével jellemzett görbék időszerű geodetikus vonalak, amelyek szabadon mozgó galaktikák vagy megfigyelők történetét ábrázolják. Ha két szomszédos megfigyelőnek például csak  $x$  koordinátája különbözik, akkor távolságuk  $d\ell_1 = t^{p_1} \Delta x$ . (4.3) szerint a két megfigyelő távolodik egymástól:  $\ell_1 \propto t^{p_1}$ . Az  $y$  tengely mentén két megfigyelő az  $\ell_2 \propto t^{p_2}$  törvény szerint távolodik (4.2 ábra) A  $z$  tengely mentén elhelyezkedő megfigyelők viszont általában közelednek egymáshoz, mivel  $p_3$  negatív. A Kasner-univerzumban az égbolt két átellenes pontja körül kékeltozódás figyelhető meg, az égbolt más részein pedig vöröseltolódás.



4.2 ábra. A Kasner-univerzum geometriája

A Kasner-univerzum tágul. A térfogatelem a  $t$  idővel növekszik:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{{}^{(3)}g} = t. \quad (4.11)$$

Az ősrobbanás (szingularitás)  $t=0$  időpontban volt.

Egyaránt tekinthetjük nyílnak vagy zártnak a Kasner-univerzumot. A metrika nem függ az  $(x, y, z)$  térkoordinátáktól, ezért az univerzumból kivágott szeletet végessé tehetjük a  $t=\text{konst.}$  térszerű hiperfelületek pereme mentén elhelyezkedő pontok páronkénti azonosításával. A (4.6) paraméterértékekkel jellemzett Kasner-modell például a Minkowski-téridő. A Minkowski-téridőben nincsen részecskehorizont. Ha olló-és-ragasztó módszerünkkel végessé tesszük, véges idő alatt körbejárhatják fényjelek. Ez fennáll a Minkowski-téridőhöz elegendően közeli paraméterek esetén is a Kasner-univerzumra, mivel a metrika folytonosan függ a paraméterektől.

A kaotikus kozmológia szemszögéből igen biztató a Kasner-univerzumok némelyikének az a tulajdonsága, hogy fényjelek véges idő alatt körbejárják. Ha feltételezzük, hogy az Univerzum korai fejlődési szakaszaiban ilyen stádiumba jutott, akkor esetleg megmagyarázhatjuk az izotrópia kialakulását. Az ilyen Kasner-időszakokban "áttörhető" a későbbi Fridman-univerzum részecskehorizontja. A következő fejezetben az Einstein-egyenleteknek olyan kozmológiai megoldását ismertetjük, amely a fejlődése folyamán ismételten Kasner-geometriákat közelít meg.

## 5. A MIXMASTER-UNIVERZUM

A Kasner-univerzumnál általánosabb anyagmentes téridő levezetéséhez először a (4.2) Kasner-metrikát térben invariáns alakra hozzuk, majd a konkrét függvényalakról elfeledkezve behelyettesítünk az Einstein-egyenletekbe.

Vezessük be a Kasner-univerzum terében a  $\underline{k}$ ,  $\underline{m}$  és  $\underline{n}$  bázisvektorokat rendre az  $x$ ,  $y$  és  $z$  irányban. Ezzel a (4.2) metrika így írható fel:



$$d\ell^2 = (a^2 k_i k_k + b^2 m_i m_k + c^2 n_i n_k) dx^i dx^k, \quad (5.1)$$

ahol

$$a = t^{p_k}, \quad b = t^{p_m}, \quad c = t^{p_n}, \quad (5.2)$$

és  $ds^2 = dt^2 - d\ell^2$ . Itt Belinszkij, Lifsic és Khalatnikov munkája nyomán [31,42] a nagyság szerint nem rendezett paraméterhármásra a  $(p_k, p_m, p_n)$  indexezést használjuk. A bázisvektorok komponensei koordináta-rendszerünkben  $k_i = \delta_i^1$ ,  $m_i = \delta_i^2$  és  $n_i = \delta_i^3$  alakúak. Éppen ezt az alakot és az (5.2) függést kívánjuk most elfelejteni az általánosabb téridő levezetésekor. Feltesszük viszont, hogy a  $\underline{k}$ ,  $\underline{m}$  és  $\underline{n}$  vektorok továbbra is kielégítik a

$${}^{(3)}\nabla_i K_j + {}^{(3)}\nabla_j K_i = 0 \quad (5.3)$$

Killing-egyenletet, mivel homogén univerzumot keresünk.

A tér izometriacsoportjának a szerkezetére a Bianchi-típusok (I. táblázat) közül bármelyikkel megpróbálkozhatunk. Belinszkij, Lifsic és Khalatnikov úgy találták, hogy ezek közül a Bianchi-IX típus mutatja a legérdekesebb viselkedést. Ez az univerzum hatalmas anyagkeverőként viselkedik, ezért a Mixmaster-univerzum elnevezést kapta [32]. A IX típus szerkezeti állandóit az  $N_1 = N_2 = N_3 = 1$ ,  $A = 0$  feltételek jellemzik, amelyek az  $O(3)$  csoportnak felelnek meg. Ezek a megszorítások a (3.5) és (3.6) képletek segítségével felírhatók közvetlenül a  $C_{AB}^C$  állandókra, amelyeket a (3.2) felcserélési törvények felhasználásával közvetlenül a bázisvektorokkal és azok kovariáns deriváltjaival írhatunk fel:

$$\underline{k} \text{ rot } \underline{k} = 1, \quad \underline{m} \text{ rot } \underline{m} = 1, \quad \underline{n} \text{ rot } \underline{n} = 1 \quad (5.4)$$

és a bázisvektoroknak minden vegyes választásakor a megfelelő kifejezések eltűnnek (például  $\underline{k} \text{ rot } \underline{m} = 0$ ). Így módon a struktúraállandókra fennálló feltételeket a Ricci-féle forgási együtthatókkal írtuk fel. A gravitációs egyenletek bal oldalán álló Ricci-tenzort kifejezhetjük a forgási együtthatókkal és azok deriváltjaival, ha a Ricci-tenzort a bázison vett kompo-

nenseivel írjuk fel [22]. Így az  $R_{ik} = 0$  vákuumegyenletekből kapjuk:

$$-R_{\underline{k}}^{\underline{k}} = \frac{(\dot{abc})^*}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2}[a^4 - (b^2 - c^2)^2] = 0, \quad (5.5a)$$

$$-R_{\underline{m}}^{\underline{m}} = \frac{(\dot{abc})^*}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2}[b^4 - (a^2 - c^2)^2] = 0, \quad (5.5b)$$

$$-R_{\underline{n}}^{\underline{n}} = \frac{(\dot{abc})^*}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2}[c^4 - (a^2 - b^2)^2] = 0, \quad (5.5c)$$

$$-R_O^O = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0. \quad (5.5d)$$

Itt pont jelöli a  $t$  idő szerint történő parciális deriválást. A deriváltakat tartalmazó tagok egyszerűsödnek, ha bevezetjük az új  $\tau$  időkoordinátát a

$$dt = abc \, d\tau \quad (5.6)$$

összefüggéssel, és az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  függvények helyett azok logaritmusát:

$$a = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad c = e^\gamma. \quad (5.7)$$

Ezzel a téregyenletek:

$$2\alpha_{\tau\tau} = (b^2 - c^2)^2 - a^4, \quad (5.8a)$$

$$2\beta_{\tau\tau} = (a^2 - c^2)^2 - b^4, \quad (5.8b)$$

$$2\gamma_{\tau\tau} = (a^2 - b^2)^2 - c^4, \quad (5.8c)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)_{\tau\tau} = \alpha_\tau\beta_\tau + \alpha_\tau\gamma_\tau + \beta_\tau\gamma_\tau. \quad (5.8d)$$

Az egyenleteknek egy első integrálját kapjuk úgy, hogy (5.8a)-(5.8c)összegéből kiküszöböljük a deriváltakat (5.8d) segítségével:

$$\alpha_\tau\beta_\tau + \alpha_\tau\gamma_\tau + \beta_\tau\gamma_\tau = \frac{1}{4}(a^4 + b^2 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2). \quad (5.9)$$

Az első integrál ismeretében egyszerűbbé válik a megoldások



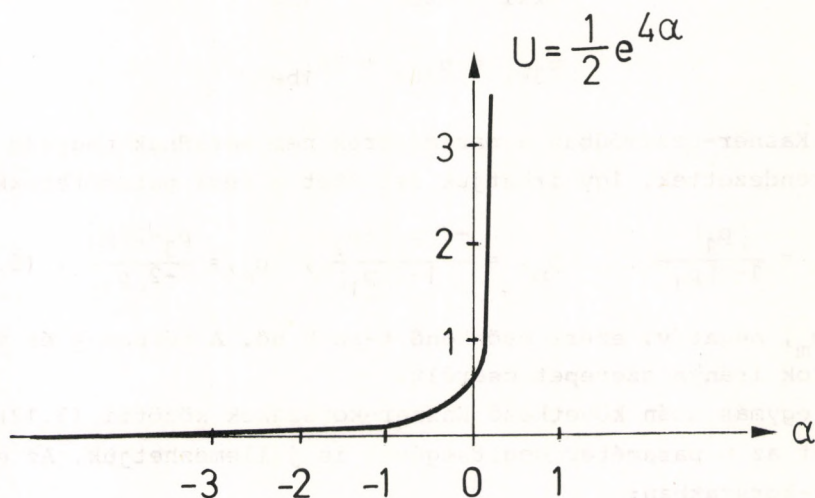
dinamikájának elemzése.

Ha behelyettesítjük a téregyenletekbe az  $a$ ,  $b$  és  $c$  függvényeknek a Kasner-univerzumra érvényes (5.2) alakját, akkor azt találjuk, hogy a bal oldal minden esetben eltűnik. A jobb oldalnak is el kell tűnniük. Ha ez teljesül valamely  $t$  időpontban, idővel szükségképpen elromlik. Időben visszafelé követve az eseményeket, az  $a = t^{p_1}$  függvény kitevője negatív, ezért a jobb oldalakon az  $a^4$  tagok dominálóvá válnak. Ezeket a tagokat tartva meg a jobb oldalakon, az (5.8) téregyenletek közelítő alakja:

$$\alpha_{\tau\tau} = -\frac{1}{2}e^{4\alpha}, \quad (5.10a)$$

$$\beta_{\tau\tau} = \gamma_{\tau\tau} = \frac{1}{2}e^{4\alpha}. \quad (5.10b)$$

A közelítő egyenletek közül (5.10a) alakilag az egy-dimenziós térben mozgó pont Newton-féle mozgásegyenlete. A pont koordinátája  $\alpha$ , a pontra ható erő potenciálja  $U = \frac{1}{8}e^{4\alpha}$ .  $\alpha$  ismeretében  $\beta$  és  $\gamma$  könnyen kiszámítható. (5.10b) egyenletből következik, hogy  $\alpha_{\tau} + \beta_{\tau} = \text{állandó}$  és  $\alpha_{\tau} + \gamma_{\tau} = \text{állandó}$ .



5.1 ábra. Az oszcillációk  $U$  effektív potenciálja

Az 5.1 ábrán feltüntettem az U potenciál helyfüggését. Hogyan mozog az "univerzum-részecske" ezen a potenciálfalon? Megjegyzendő, hogy Kasner-univerzumra  $abc = 1$  és (5.6) szerint  $\tau = \ln t$ . Az első deriváltak az (5.2) és (5.7) egyenletekből:

$$\alpha_\tau = p_1, \quad \beta_\tau = p_2, \quad \gamma_\tau = p_3. \quad (5.11)$$

Az univerzum-pont  $\alpha_\tau$  sebessége állandó. Szabad mozgást végez, minthogy a Kasner-univerzumra (5.10a) jobb oldala eltűnik. Ez az  $\alpha \rightarrow -\infty$  limesznek felel meg. A pont sebessége negatív. Az 5.1 ábrán, időben visszafelé haladva a pont nagy negatív  $\alpha$  értékek felől megközelíti a potenciálfalat, majd visszaverődik, és egy újabb Kasner-korszakhoz közeledik. A visszaverődés után azonban más paraméterértékekkel jellemzett Kasner-univerzumot közelít meg. Rugalmas szórás történik, ezért a kimenő sebesség aszimptotikusan:

$$p_{1ki} = -p_{1be}.$$

A mozgásállandókba behelyettesítve:

$$p_{2ki} = p_{2be} + 2p_{1be},$$

$$p_{3ki} = p_{3be} + 2p_{1be}.$$

Az új Kasner-üzemmódban a paraméterek nem maradnak nagyság szerint rendezettek. Így írhatjuk fel őket a régi paraméterekkel:

$$p_k' = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p_m' = \frac{-2|p_1| + p_2}{1-2|p_1|}, \quad p_n' = \frac{p_3 - 2|p_1|}{1-2|p_1|}. \quad (5.12)$$

Most  $p_m$ , negatív, ezért csökkenő  $t$ -re  $b$  nő. A térben  $\underline{k}$  és  $\underline{m}$  vektorok iránya szerepet cserélt.

Az egymás után következő Kasner-korszakok közötti (5.12) átmenetet az  $u$  paraméter segítségével is jellemezhetjük. Az első Kasner-korszakban:

$$p_k = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u).$$



A második Kasner-korszakban a (4.9) paraméterezés így alakul:

$$p'_k = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1). \quad (5.13)$$

A harmadik Kasner-korszakban ismét szerepet cserél a  $k$  és  $m$  irány és  $u$  paraméter újból csökken eggyel. Természetesen, a Kasner-korszakok közötti átmenetben a téregyenletek jobb oldalán álló perturbációs tagok megnőnek, ezért a leírás bonyolultabb.

Meddig folytatódik a Kasner-korszakoknak ez a sorozata? Az  $u$  paraméter csak az  $u \geq 1$  értékekre címkézi egyértelműen a Kasner-univerzumot. Ha az átmenetek során  $u$  értéke 1 alá csökken, akkor  $u$  reciprokára kell áttérnünk a (4.10) képletek felhasználásával. A (4.10) transzformáció a két pozitív kitevőt ( $p_2$  és  $p_3$ ) felcseréli. Az áttérés pillanatában vagy  $p_k$ , vagy pedig  $p_m$  negatív. Ezután (4.10) szerint  $p_n$  lesz a kisebb pozitív kitevő és ez cserélődik majd a továbbiakban a negatív kitevővel.

## 6. KASNER-KOROK AZ EGYSEGINTERVALLUMON

Az 5. fejezetben megvizsgáltuk a Mixmaster-univerzum oszcillációit egymást követő Kasner-korszakokon keresztül. Az egyes korszakokat az  $u$  Lifsic-paraméter értéke jellemzi. A korszakváltásokban a tér kontraháló tengelye felcserélődik a kevésbé táguló tengellyel és az  $u$  paraméter értéke eggyel csökken. A Kasner-korszakoknak ez a sorozata az univerzum fejlődésének egyetlen korát alkotja. Ez a kor addig tart, míg az  $u$  paraméter értéke 1-nél kisebb lesz. Ha az  $s$ -edik kor kezdetekor az  $u$  paraméter értéke  $u_{\max}^{(s)}$ , és ebben a korban a Kasner-korszakok száma  $k^{(s)}$ , akkor

$$u_{\max}^{(s)} = k^{(s)} + x^{(s)}, \quad (6.1)$$

ahol  $0 \leq x^{(s)} < 1$ .

A következő,  $(s+1)$ -edik kor kezdetén (4.10) szerint az  $u$  paraméter értéke:

$$u_{\max}^{(s+1)} = \frac{1}{x^{(s)}}. \quad (6.2)$$

A rekurzív szabály:

$$x^{(s)} = \frac{1}{k^{(s+1)} + x^{(s+1)}}, \quad (6.3)$$

ahol

$$k^{(s+1)} = \frac{1}{x^{(s)}}.$$

A rekurzív szabály ismételt alkalmazásával az  $x^{(0)}$  szám lánc-törtfelbontását kapjuk:

$$x^{(0)} = \frac{1}{k^{(1)} + \frac{1}{k^{(2)} + \frac{1}{k^{(3)} + \dots}}}. \quad (6.4)$$

A Mixmaster-univerzum fázisterében a (6.3) korráltságok Poincaré-leképezést definiálnak [43]. A  $T: [0, 1] \rightarrow$  visszatérő leképezés egydimenziós, és

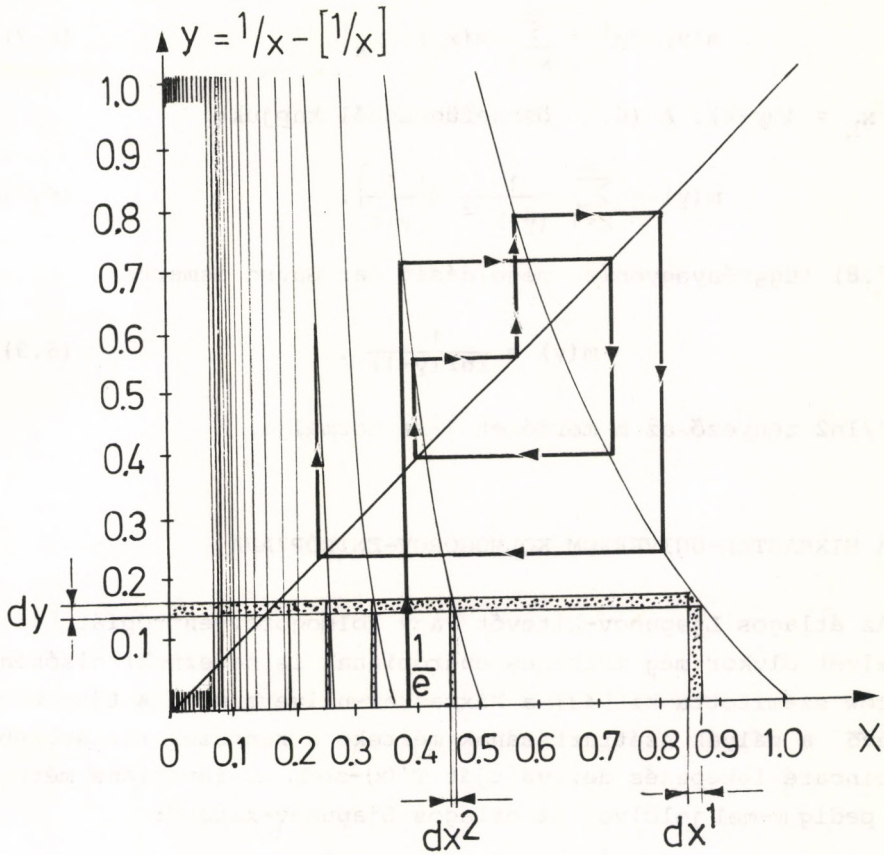
$$x_{n+1} = T(x_n) = x_n^{-1} - [x_n^{-1}], \quad (x_n \neq 0) \quad (6.5)$$

$$T(0) = 0$$

alakban is felírhatjuk. A leképezés szakaszonként folytonos. Szakadási helyei az  $x=1/r$  pontokban vannak, ahol  $r$  egész. A leképezés az  $x \in (1/(r+1), 1/r)$  intervallumban analitikus és  $T(x) = x^{-1} - r$  alakú. Az  $y = 1/x - [1/x]$  függvényt a 6.1 ábrán rajzoltam fel. A görbe az  $y = 1/x$  görbéből keletkezik annak egy-ségnyi magasságú részekre darabolásával.

A 6.1 ábra feltünteti a (6.5) leképezés iterációjával kapott pontokat az  $1/e$  kezdőpontból. Irracionális kezdőpontot választottunk az egységintervallumon, mert racionális számokra - amelyek nulla mértékű halmazt alkotnak - a (6.4) lánc-törtfelbontás véges számú iteráció után megszakad. Az iteráció során a függvényértékek láthatóan véletlenszerűen bolyongják be az in-





6.1 ábra. A korváltásokkal definiált Poincaré-leképezés

tervallumot. Felmerül a gyanú, hogy a Mixmaster-univerzum viselkedése kaotikus. A feltevés igazolására mindenek előtt meghatározzuk az invariáns mértéket a (6.5) leképezésre.

Definíció [45].  $m$  invariáns mérték, ha bármely (mérhető)  $A$  halmazra

$$m(A) = m(T^{-1}A) . \quad \square \quad (6.6)$$

Az  $m$  invariáns mértéket a valószínűségre vonatkozó megmaradási törvény felhasználásával számíthatjuk ki. Ha az  $n$ -edik iteráció után az  $x$  változó biztosan az  $(y, y+dy)$  intervallumban tartózkodik, akkor az iteráció előtt a  $(T^{-1}y, T^{-1}(y+dy))$  intervallumok egyikében volt biztosan (6.1 ábra). Ha az  $m(y)$  valószínűségeloszlás invariáns a  $T$  leképezéssel szemben, akkor írhatjuk:

$$m(y) |dy| = \sum_{k=1}^{\infty} m(x_k) |dx_k|. \quad (6.7)$$

Itt  $x_k = 1/(y+k)$ . A (6.7) összefüggésből kapjuk:

$$m(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(y+k)^2} m\left(\frac{1}{y+k}\right). \quad (6.8)$$

A (6.8) függvényegyenlet megoldását már Gauss ismerte:

$$m(y) = \frac{1}{\ln 2 (y+1)}. \quad (6.9)$$

Az  $1/\ln 2$  tényező az  $m$  mértéket 1-re normálja.

## 7. A MIXMASTER-UNIVERZUM KOLMOGOROV-ENTRÓPIÁJA

Az átlagos Ljapunov-kitevőt vagy Kolmogorov-entrópiát [45] (amelyet olykor még metrikus entrópiának is neveznek) elsőként Barrow számította ki [43] a Mixmaster-univerzumra. A Ljapunov-kitevő a pályák széttartásának mértéke a rendszer fázissterében. A Poincaré-leképezés deriváltját  $T'(x)$ -szel, az invariáns mértéket pedig  $m$ -mel jelölve, az átlagos Ljapunov-kitevő:

$$\bar{\lambda} = \int_0^1 m(x) \log_2 |T'(x)| dx. \quad (7.1)$$

A Mixmaster-univerzum Kasner-koraira (6.5) szerint:

$$|T'(x)| = x^{-2} \quad (x \in (1/(r+1), 1/r)). \quad (7.2)$$

Behelyettesítünk, felhasználva az invariáns mérték (6.7) alakját:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 m(x) \ln |T'(x)| dx = - \frac{2}{(x+1)^2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} \ln x dx. \quad (7.3)$$

Az itt szereplő határozott integrál:

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} \ln x dx = - \frac{\pi^2}{12}.$$



Ezzel a Ljapunov-kitevőre a

$$\bar{\lambda} = \frac{\pi^2}{6(\ln 2)^2} \approx 3,42371474\dots \quad (7.4)$$

értéket kapjuk. Minthogy a Ljapunov-kitevő pozitív, megegyezik a Kolmogorov-entrópiával [46], és a rendszer kaotikus.

A  $\bar{\lambda}$  szám a Mixmaster-univerzum ergodikus tulajdonságait jellemzi. Igen nagy Kolmogorov-entrópia ez, más, korábban tanulmányozott rendszerekéhez viszonyítva. A Lorenz-féle különös attraktor Kolmogorov-entrópiája például [44]  $\bar{\lambda} = 0,98\dots$ , ami harmada sincs a Mixmasterének. Hogyan áll elő a nagy entrópia? Megjegyzendő, hogy a Kasner-univerzum - amely az a, b és c függvények két egymás utáni fordulópontja között közelítőleg egybeesik a Mixmaster-univerzummal - zérus entrópiájú. Hasonlóképpen zérus entrópiájú a két, egymás utáni Kasner-korszakot tartalmazó Bianchi-II típusú univerzum [43]. Az entrópia forrását nem az  $u \rightarrow u-1$  típusú korszakváltásban kell keresnünk. Az állítást rövid számolással könnyen alátámaszthatjuk.

Definiáljuk a korszakváltás Poincaré-leképezését:

$$T : u \rightarrow u' = u-1. \quad (7.5)$$

A derivált leképezésre  $T' = 1$ , ezért (7.1)-ből  $\bar{\lambda} = 0$ . Az entrópia tehát nem a korszakokkal, hanem a korok változásával függ össze.

Felmerül az a kérdés is, hogy mennyire érzékenyen függ a Mixmaster-univerzum ergodikus viselkedése a választott dinamikától. Vajon erősen megváltozik-e a Kolmogorov-entrópia, ha a rendszer mozgástörvényeit perturbáljuk? Ennek eldöntésére megváltoztatjuk a (6.5) Poincaré-leképezés alakját az perturbációs paramétert tartalmazó járulékos taggal:

$$x_{n+1} \equiv T(x_n) = x_n^{-1} - [x_n^{-1} + \varepsilon], \quad (7.6)$$

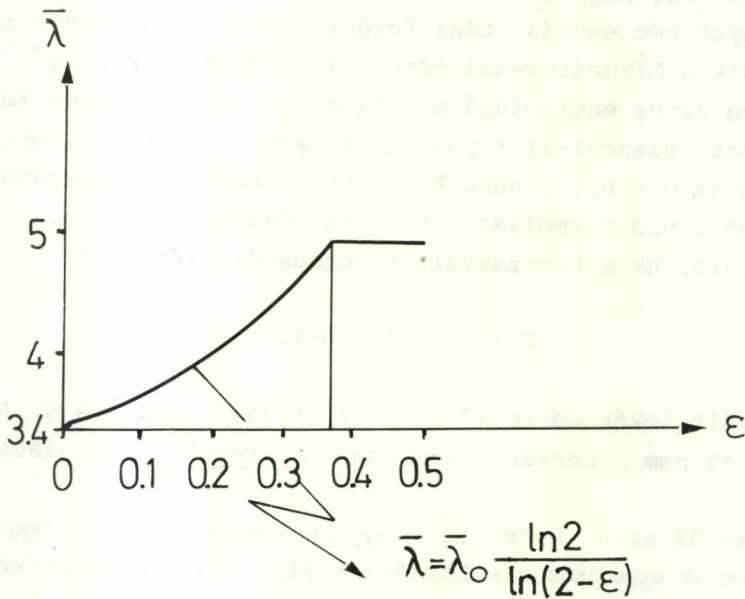
ahol  $\varepsilon \geq 0$  és  $x \in [-\varepsilon, 1-\varepsilon]$ . Minthogy a (7.6) leképezés meredekségének abszolút értéke 1-nél nagyobb, Lasota és Yorke szerint [47] létezik hozzá egy  $m_\varepsilon$  invariáns és folytonos mérték. A (7.6) leképezés viszonylag "enyhe" perturbációt modellez: a  $T'$  deri-

vált leképezést (ott, ahol létezik) nem változtatja meg. A (7.1) entrópiakifejezésben csupán az invariáns mérték módosul.

A Ljapunov-kitevő a (7.6) perturbációra a  $0 \leq \varepsilon \leq (3-\sqrt{5})/2$  intervallumban perturbációs paraméterrel logaritmikusan nő, majd  $\varepsilon = 0,5$ -ig állandó marad (7.1 ábra). A  $[0, (3-\sqrt{5})/2]$  intervallumban:

$$\bar{\lambda}(T_\varepsilon, m_\varepsilon) = \bar{\lambda}(T, m) \frac{\ln 2}{\ln(2-\varepsilon)} \quad (7.7)$$

Ez a viselkedés arra enged következtetni, hogy a nagy entrópia a Mixmaster-univerzumnak stabilis tulajdonsága.

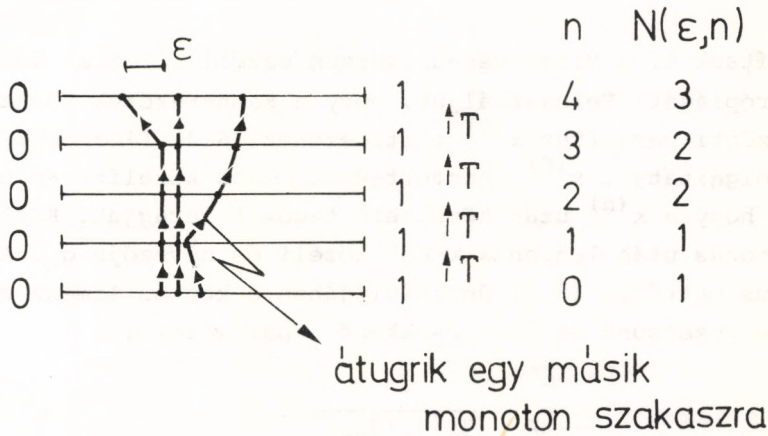


7.1 ábra. A Ljapunov-kitevő az  $\varepsilon$  perturbáció függvényében.



## 8. A TOPOLÓGIKUS ENTRÓPIA

A Kolmogorov-entrópia mellett jellemezhetjük a T Mixmaster-leképezést annak topológikus entrópiájával is, amely az m invariáns mértéktől független. A topológikus entrópia azt méri, hogy a T leképezés iterálásával milyen gyakorisággal válnak szét a szomszédos állapotok pályái [45,48,49].



8.1 ábra. Topológikus entrópia

Két állapotot elkülönültnek tekintünk, ha adott  $\epsilon$  távolságnál messzebbre vannak egymástól. A 8.1 ábrán három, kezdetben szomszédos pont történetét ábrázoltuk az egységintervallum önmagára történő, ismételt T leképezése során. Az n-edik iteráció után az elkülönült pontok számát  $N(\epsilon, n)$  jelöli.

A topológikus entrópia definíciójának részleteiben nem egyöntetű a szakirodalom [50,51,52]. A továbbiakban a  $h(T)$  topológikus entrópiát a

$$h(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(\epsilon, n)}{n} \quad (8.1)$$

kettős határátmenettel definiáljuk, ahol  $N(\epsilon, n)$  az n iteráció után egymástól  $\epsilon$ -nál távolabbra eső pályák maximális számát jelöli. (8.1) szerint a kezdeti feltételek emléke körülbelül  $h^{-1}$  iteráció múlva mosódik el.

Érdekes kérdés, hogy olyan rendszerekre, amelyekre létezik az  $m$  invariáns mérték, miként viszonyul egymáshoz a Kolmogorov-entrópia és a topológikus entrópia. Nem örülnénk annak, ha valamely fizikai rendszerre a kétféle entrópia két különböző értékű lenne. Ha azt nem is sikerül bebizonyítani, hogy a kétféle entrópia értéke adott rendszerre - ha létezik - egyenlő, de fennáll:

TÉTEL [53]

$$\bar{\lambda}(T, m) \leq h(T). \quad \square \quad (8.2)$$

Számítsuk ki a Mixmaster-univerzum oszcillációinak topológikus entrópiáját! Felhasználjuk, hogy a Kasner-korok hosszát az  $u^{(0)}$  kezdeti paraméter  $x^{(0)}$  törtrésznének (6.4) lánctörtfelbontása szolgáltatja.  $x^{(0)}$  lánctörtjének  $n$ -edik közelítését úgy kapjuk, hogy a  $k^{(n)}$  után következő tagokat levágjuk. Közös nevezőre hozás után legyen a  $k$ -edik közelítés nevezője  $q_n$ . A topológikus entrópia (8.1) definíciójában a kettős limesz eltüntetésére vezessünk be  $n$ -nel csökkenő  $\varepsilon$  paramétert:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}.$$

Ekkor az  $\varepsilon_n$ -nél nagyobb távolságra eső pályák száma  $q_n(q_n + q_{n+1})$ . Így a (8.1) topológikus entrópia:

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln q_n}{n \ln 2}. \quad (8.3)$$

Az itt szereplő limeszt Lévy tétele segítségével számítjuk ki:

LÉVY TÉTELE [54]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n)^{1/n} = e^{\frac{\pi^2}{12 \ln 2}}. \quad \square \quad (8.4)$$

Ebből a topológikus entrópiára kapjuk:

$$h(T) = \frac{\pi^2}{6 (\ln 2)^2}. \quad (8.5)$$

Megkönnyebbülve vesszük tudomásul, hogy a Kolmogorov-entrópia megegyezik a topológikus entrópiával [55].



A (7.4) Ljapunov-kitevő kiszámításakor azt a Poincaré-leképezést használtuk fel, amelyet a (6.5) korváltások definiálnak a Mixmaster-univerzum fázissterében. Más módszerrel is kiszámíthatjuk a Ljapunov-kitevőt. Barrow [43] elvégezte a számítást  $\bar{\lambda}$ -nak közvetlen dinamikai jelentéséből kiindulva.

Hadd ismételjem meg, hogy a  $\bar{\lambda}$  átlagos Ljapunov-kitevő a fázissterben a pályák széttartását méri. A pályák széttartását jellemezhetjük a rezgési amplitudó logaritmusának fluktuációjával adott korban belül. Legyen adott korban az  $a^2$ ,  $b^2$  és  $c^2$  függvények maximuma  $\max\{a^2, b^2, c^2\}$ , minimuma pedig  $\min\{a^2, b^2, c^2\}$ . Jelöljük hányadosukat az  $n$ -edik korban  $\Delta_n$ -nel:

$$\Delta_n \equiv \frac{\max\{a^2, b^2, c^2\}}{\min\{a^2, b^2, c^2\}} \quad (8.6)$$

Doroskevics és Novikov [56] eredménye szerint

$$\ln \Delta_n = k_1^2 k_2^2 \dots k_n^2 \ln \Delta_0, \quad (8.7)$$

ahol  $\Delta_0$  a (8.6) hányados értéke a kezdeti korban és  $k_1, k_2, \dots$  az  $u$  kezdeti paraméter (6.4) alakú lánc törte felbontásának együtthatói:

$$u = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\} \quad (8.8)$$

A Ljapunov-kitevőt most az

$$e^{\bar{\lambda}n} = \frac{\ln \Delta_n}{\ln \Delta_0} \quad (8.9)$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Figyelemre méltó, hogy aszimptotikusan  $\bar{\lambda}$  valóban független  $n$ -től. Ezt a lánc törtek elméletének egyik tétele biztosítja.

HINCSIN TÉTELE [57, 58]. Majdnem minden  $u$  szám

$$u = k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}$$

lánc törte felbontásában a  $k_i$  egészek mértani közepe univerzál-

lis állandóhoz tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k_1 k_2 \dots k_n)^{1/n} = \prod_{r=1}^{\infty} \left[ (r+1)^2 / r(r+1) \right]^{\frac{\ln r}{\ln 2}} \equiv K, \quad (8.10)$$

ahol  $K = 2,6854520010\dots$   $\square$

Egyik kivételes eset az  $e = \{2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots\}$  szám, amelyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} (k_1 \dots k_n)^{1/n} \propto n^{1/3}$ .

Hincsin tétele értelmében a Ljapunov-kitevő értéke, (8.9)-et felhasználva:

$$\bar{\lambda} = \ln K^2 = 1,97569\dots \quad (8.11)$$

Az  $u = e$  kezdőértékű Mixmaster-univerzumra tehát a Ljapunov-kitevő végtelen. Ezzel alátámasztottuk a 6.1 ábrán először megfigyelt véletlenszerű viselkedést az  $x = 1/u$  paraméter  $1/e$  kezdőértéke esetében.

## 9. A KAOTIKUS KOZMOLÓGIA BUKÁSA

Az előző fejezetekben megvizsgáltuk a Mixmaster-univerzum oszcillációt egymást követő Kasner-korszakok és korok között. A kaotikus kozmológia érvelése szerint az ősrobbanás után ezek a rezgések az anyag teljes keveredéséhez és az Univerzum kezdeti irregularitásainak kisimulásához vezettek. Ez az elképzelés azonban téves.

A kaotikus kozmológia - amely magyarázatot hivatott adni arra, hogy a világmindenség távoli tartományai hogyan kerültek igen nagy pontossággal azonos állapotba - a Mixmaster-oszcillációkra épít. Chitre [60] megmutatta, hogy nemcsak a fény, hanem hanghullámok (sűrűség-ingadozások) is néhány oszcilláció alatt körbejárják az Univerzumot. Az anyag keveredése így kétségtelenül végbemegy. Meg kellene azonban mutatni azt is, hogy a kezdeti állapottól függetlenül kifejlődnek a keveréshez szükséges oszcillációk. Abban az esetben ugyanis, ha bizonyos kezdeti állapotokból kiindulva nincs anyagkeverés, megghiúsul a kaotikus kozmológia programja, amely a kezdeti állapottól független dinamikai folyamatokra vezet vissza az Univerzum szer-

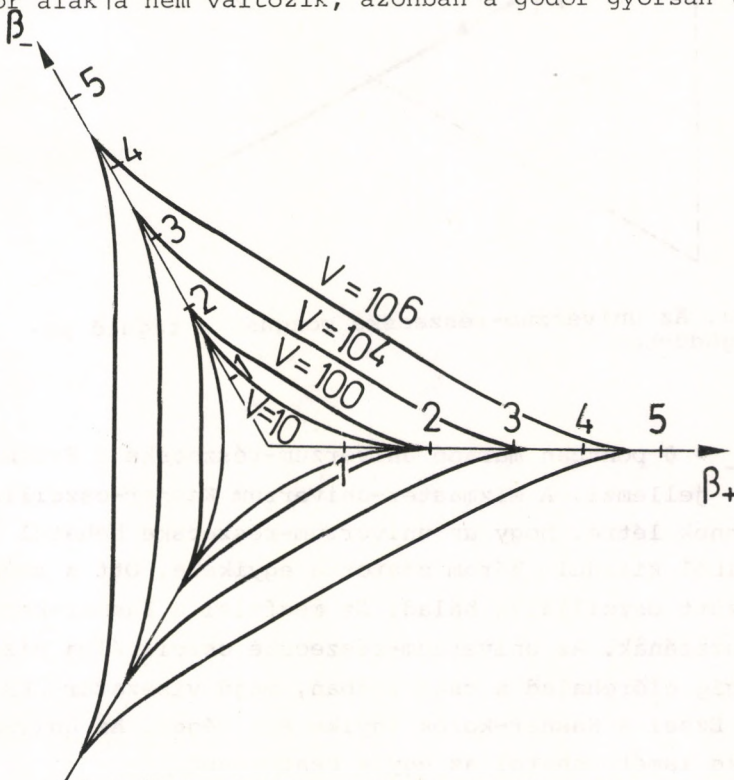


kezetét.

Az előzőekben a Mixmaster-univerzum viselkedését vizsgálva feltettük, hogy a fejlődés adott időpontban közelítőleg Kasner-geometriából indul ki. Általános esetben el kell hagynunk ezt a feltevést. Szerencsére érvényes marad a fejlődés leírása az 5. fejezetben ismerttetett módszerrel, az "univerzum-pont" mozgásával. Az univerzum-pont két dimenzióban, síkon mozog, amely nem más, mint a Misner-féle "minisuperspace" [62] egyik igen egyszerű mintapéldánya. A koordináták a  $\beta_-$  és  $\beta_+$  anizotrópia-paraméterek, amelyek a metrika segítségével így fejezhetők ki:

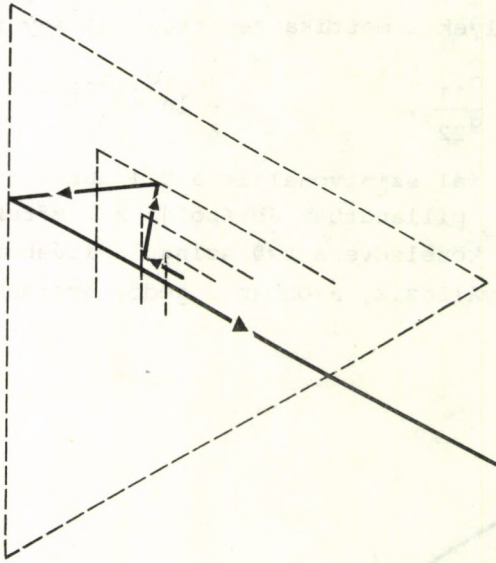
$$\beta_- = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{g_{11}}{g_{22}}, \quad \beta_+ = \frac{1}{8} \ln \frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}^2}. \quad (9.1)$$

Az effektív potenciál szintvonalait a 9.1 ábrán találjuk meg. Az ábra adott  $t=t_0$  pillanatban ábrázolja a  $V$  effektív potenciált. Időben visszafelé közeledve a  $t=0$  szingularitáshoz, a potenciálgödör alakja nem változik, azonban a gödör gyorsan tágul.



9.1 ábra. A Mixmaster-potenciál szintvonalai

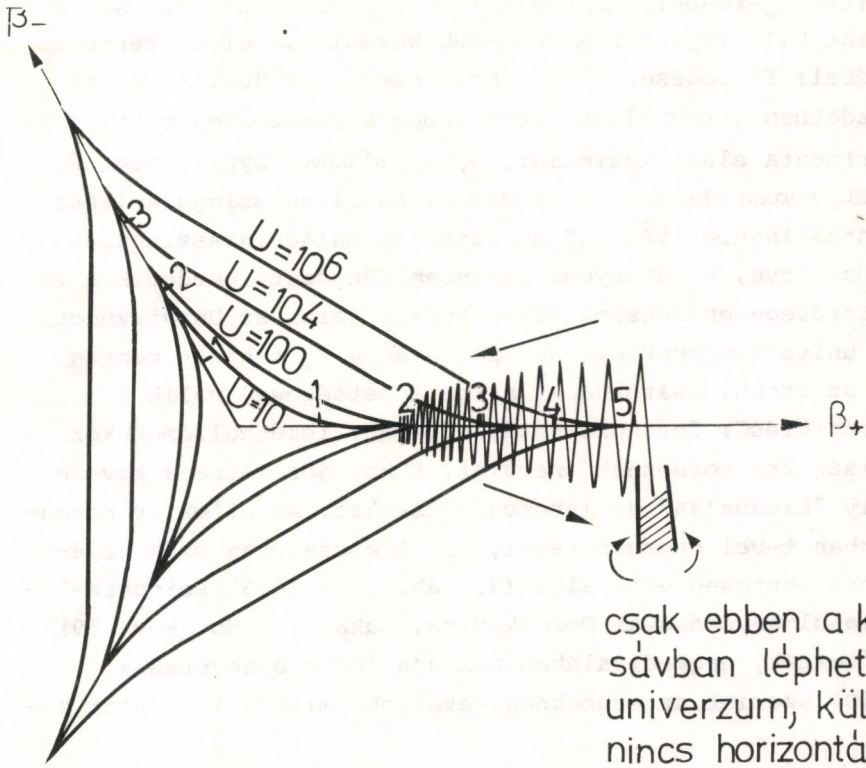
A  $V$  potenciál falai exponenciális meredekségűek. A háromszög alakú potenciálgödört végtelen magas, függőleges falú dobozzal közelíthetjük ("kvalitatív kozmológia" [24]). A doboz csücskeiben (például a pozitív  $\beta_+$  tengely mentén) csatornák nyílnak. Az univerzum-részecske közelítőleg állandó sebességgel mozog a dobozban, míg a falhoz nem ér. Itt visszapattan a falról. A 9.2 ábrán az univerzum-részecske egyik lehetséges pályáját látjuk. A táguló potenciálgödörben ide-oda pattog.



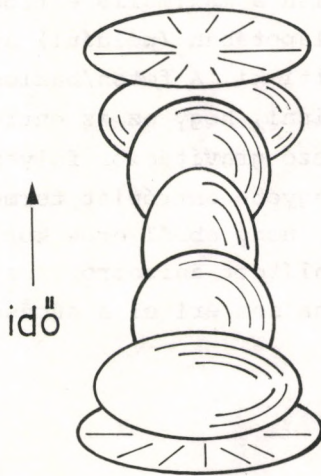
9.2 ábra. Az univerzum-részecske mozgása a táguló potenciálgödörben

A  $\beta_+ = \beta_- = 0$  pontban maradó univerzum-részecske a Fridman-kozmológiát jellemzi. A Mixmaster-univerzum Kasner-oszcillációi úgy jönnek létre, hogy az univerzum-részecske behatol a doboz sarkaiból kiinduló három csatorna egyikébe. Ott a szűkülő falak között oszcillálva halad. Ez megfelel a Kasner-korszakok egy sorozatának. Az univerzum-részecske oszcillálva bizonyos mélységig előrehalad a csatornában, majd visszatér [63,64] (9.3 ábra). Ezzel a Kasner-korok egyike ért véget. Az univerzum-részecske ismét behatol az egyik csatornába.





9.3 ábra. Kasner-oszcillációk képe a potenciálgödörben.



9.4 ábra. Elemi tércella fejlődése a Taub-NUT kozmológiában

A pozitív  $\beta_+$ -tengely mentén haladó univerzum-pont a Taub-NUT kozmológiát [41] írja le. A Taub-NUT kozmológia elemi tércellájának időbeli fejlődését a 9.4 ábrán szemléltetjük. Az elemi cella kezdetben korong alakú, majd lapos ellipszoiddá vastagszik. Amint térfogata eléri maximumát, szivar alakúvá nyúlik meg. Ezután ismét korong alakúvá omlik össze. Az ilyen szingularitást "palacsintaszingularitásnak" nevezzük. A palacsintaszingularitáshoz közelítve, a vékonyodó irányban fényszerű geodetikus vonalak tetszőlegesen sokszor körbe tudják járni az Univerzumot.

Ha az univerzum-pont csaknem pontosan a  $\beta_+$  tengely mentén hatol be az itteni csatornába, akkor lehetségessé válik a "horizontáttörés": fotonok, neutrínók vagy lökéshullámok kozmikus távolságokra hordoznak energiát. Ekkor jön létre a keveredés, amely "kivasalja" az inhomogenitásokat. Az effektív potenciál azonban  $t$ -vel gyorsan tágul, ezért a csatorna szűk bejáratát nehéz pontosan eltalálni (9.1 ábra). A (6.5) Poincaré-leképezés tanulmányozásával Doroskevics, Lukash és Novikov [59] megállapították, hogy általában nem jön létre a keveredés. Chitre [60] szerint az eseteknek kevesebb, mint 2 %-a mutat keveredést.

A kaotikus kozmológia koncepciója több más csapást is szenvedett [65,66]. A legsúlyosabb ellenérvet az entrópiaviszonyok tanulmányozása szolgáltatja. Az univerzum entrópiáját a foton/barion hányados méri. A hányados azt jellemzi, hogy az anyag hányadrésze van jelen a maximális entrópiájú hőszugárzás formájában. A hőhalál állapotában (például) az univerzumot kizárólag sugárzási tér tölti ki. A foton/barion hányados értéke  $10^8$ . Tévedés lenne azt hinni, hogy ez az entrópia nagy. Az anyag keveredését létrehozó gravitációs folyamatok minden esetben sok nagyságrenddel nagyobb entrópiát termelnek. Barrow és Matzner [67] megmutatták, hogy ebből erős korlát származik a disszipáció útján kiegyenlített anizotrópiára. Az anyageloszlás kezdeti inhomogenitása nem éri el a sűrűség  $10^{-31}$ -ed részét!



## 10. A TÉRIDŐ ENTRÓPIÁJA - AVAGY ÉLJEN A KAOTIKUS KOZMOLÓGIA!

A gravitációs tér entrópiáját általánosságban még nem tudjuk egzakt módszerekkel kezelni. Kivételt képeznek a fekete lyukak, amelyeknek a termodinamikáját kimerítő és pontos elmélet írja le [68-71]. A fekete lyuk a téridőnek olyan tartománya, amelyből a környezetbe nem jut ki fényjel vagy más hatás. Határa az eseményhorizont. A legegyszerűbb, gömbszimmetrikus fekete lyuk körül az üres teret a Schwarzschild-ívelem írja le. Az  $M$  tömegű, gömb alakú fekete lyuk sugara  $2M$ . Az eseményhorizont  $A$  területe a lyuk tömegének négyzetével arányos:

$$A = 16\pi M^2. \quad (10.1)$$

A lyuk perturbációinak viselkedéséből kitűnt, hogy klasszikus fizikai folyamatokban az  $A$  terület nem csökkenhet:  $\delta A \geq 0$ . A perturbációk hatására történő változásokat a termodinamika főtételeivel alakilag pontosan megegyező összefüggések írják le [72]. Bekenstein [73] felismerte, hogy ezekben az összefüggésekben az eseményhorizont  $A$  területe az entrópiával analóg. A fekete lyukak hőmérsékleti sugárzásának felfedezésével bizonyosodott [71], hogy nem csupán formai az analógia. Az eseményhorizont  $A$  területe és  $S$  entrópiája között fennáll az

$$S = \frac{1}{4}kA \quad (10.2)$$

összefüggés, ahol  $k$  a Boltzmann-állandó.

Nem könnyű beletörődni, hogy az üres tér entrópiát hordoz. Másképpen azonban nem tarthatjuk fenn a termodinamika érvényességét fekete lyukak jelenlétében. A lyukba hulló anyagnak tömegén, impulzusmomentumán és elektromos töltésén kívül minden más fizikai sajátága visszahozhatatlanul elvész. A fekete lyuk egyensúlyi állapotának e három jellemzőn kívül nincsen más független paramétere [75,76]. A termodinamika második főtétele úgy maradhat érvényben, ha a behulló test entrópiájának rovására a fekete lyuk entrópiája gyarapszik. A fekete lyuk hőmérsékleti sugárzása megsérti ugyan a klasszikus területi törvényt,  $\delta A \neq 0$ , de nem hatol át az eseményhorizonton. A hőmérsékleti



sugárzás a horizont környezetében, azon kívül keletkezik, és a lyuk energiavesztesége alagúteffektus és negatív energia beáramlása számlájára irandó [74,77].

Megjegyzendő, hogy a gravitációs entrópia viselkedése anomáliákat mutat [78], amelyek már a newtoni elméletben is jelentkeznek. Gravitáció jelenlétében a rendszer fajhője sok esetben negatív. Ez kétségtelenül fennáll a fekete lyukakra. A hőmérsékleti sugárzás kibocsátása közben a fekete lyuk forróbbá válik. De a jelenség megfigyelhető a Föld körül keringő mesterséges hold esetében is [74]. A légköri sűrűlődségből származó diszzipáció következtében a hold felgyorsul. Az ilyenfajta paradox jelenségek a gravitációs kölcsönhatás vonzó jellegével magyarázhatók.

A (10.1) és (10.2) egyenletek segítségével kiszámíthatjuk a gravitációs összeomlás során létrejövő entrópiát. Ha az összeomló csillag  $1 M_{\odot}$  tömegű, akkor az egy barionra jutó fajlagos entrópia  $10^{18}$ . Egy  $10^{10} M_{\odot}$  tömegű galaktika, amelynek a centrumában  $10^6 M_{\odot}$  tömegű fekete lyuk van,  $10^{28}$ /barion fajlagos entrópiát hordoz [74]. Ha az Univerzum anyagsűrűsége elegendő lenne a végső összeomláshoz, akkor a galaktikák fekete lyukká egyesülése után a fajlagos entrópia  $10^{40}$ /barion lenne. Megfordítva az idő irányát, látjuk, hogy az ősrobbanásban rendkívül magas fajlagos entrópiának kellett jelen lennie, ha az kaotikus volt. A megfigyelt érték ennek csupán  $10^{-31}$ -szerese.

Collins és Hawking [79] megvizsgálták, hogy mennyire stabilis a nyílt Fridman-univerzumok izotrópiája perturbációkkal szemben. Eredményük, hogy a kezdeti izotrópia fokozatosan elromlik, hacsak az univerzum nem pontosan görbületlen terű ( $k=0$ ). Barrow és Tipler szerint [80] a görbületlen terű Fridman-univerzum is instabil. Az instabilitás a fekete lyukak kvantumtulajdonságaival kapcsolatos, és így csak a jövőben, a lyukak kialakulása után vezet kaotikus térgeometria kifejlődésére. Úgy tűnik, hogy "talpára kell állítanunk" a kaotikus kozmológiát: az univerzum magas szimmetriával és alacsony entrópiával kezdte történetét - akár véges, akár végtelen ez a történet a jövőben - és aszimmetrikus, nagy entrópiájú állapot felé tart. Ez az elképzelés megnyugtatóan tiszteletben tartja a termodinamika második főtételeit, amely szerint az összentró-



pia zárt rendszerben nem csökken.

A gravitációs entrópia természetét illetően szélsőséges álláspontok csapnak össze. Gibbons és Hawking [81] úgy vélik, hogy fekete lyukak távollétében a gravitációs entrópia zérus. Ez valószínűleg helytelen, amint azt a következő kvalitatív érvelés mutatja. Az elektromágneses tér entrópiáját a fotonok száma méri. A gravitonok a gravitációs tér saját szabadsági fokainak gerjesztései, mint ahogyan a fotonok az elektromágneses tér kvantumai. A Maxwell-tenzor vagy térerősség gravitációs párja a Weyl-görbület. Valamiképpen a Weyl-görbületnek kell hordoznia a gravitációs entrópiát [82]. Az érvelés Penrose-tól származik, aki további okfejtéssel is alátámasztja javaslatát.

A nyugalmas kozmológia álláspontjára helyezkedve, az ősrobbanástól napjainkig a Fridman-kozmológiával modellezzük az univerzum szerkezetét. A Fridman-univerzumokban a Weyl-tenzor zérus, a nyugalmas kozmológiának azzal a tanításával összhangban, hogy az ősrobbanás idején alacsony entrópiával indul a fejlődés. A Weyl-tenzor zérus volta összefügg az univerzum izotrópiájával. A gravitációs tér nem tüntet ki fényszerű főirányokat [21]. Amint az anyag csomósodik, a sűrűsödéseket Weyl-görbülettel rendelkező tartomány veszi körül. A sűrűsödések növekedtével nőnek az erős Weyl-görbülettel jellemzett tartományok. Gravitációs összeomlással téridő-szingularitások keletkeznek, amelyek közelében Mixmaster-típusú oszcillációk lépnek fel. Ezekben a tartományokban a Weyl-görbület mellett elhanyagolható a Ricci-görbület.

Azt a javaslatot, hogy a gravitáció entrópiáját a Weyl-görbület hordozza, egyelőre nem sikerült kvantitatív alakban megfogalmazni. Ez a modern kozmológiának egyik sarkalatos problémája, megszabadítani a gravitációs entrópia leírását az eseményhorizonttól. A Mixmaster-oszcillációk és a káosz kapcsolatának a megértése ebben az összefüggésben jelentős igazán, és nem a korai univerzum modellezésében. Először sikerült a gravitációs tér entrópiáját kiszámítani eseményhorizont távollétében. Ha még nem is tudjuk végigkövetni a Poincaré-leképezésektől a Weyl-tenzorig vezető ösvényeket, az út egy része már mögöttünk van.



1. M.A.H. MacCallum, Anisotropic and inhomogeneous relativistic cosmologies, a "General Relativity - An Einstein Centenary Survey" c. kötetben, szerk.: S.W. Hawking és W. Israel (Cambridge University Press, 1979)
2. R.B. Partridge, Observational cosmology, a "Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity" c. kötetben, szerk.: R. Ruffini (North-Holland, 1977)
3. P.J. Peebles, Physical Cosmology (Princeton University Press, 1971)
4. R.P. Kirschner, A. Oemler Jr., P.L. Schechter és S.A. Shectman, Ap. J. 248, L57, 1981.
5. M. Rowan-Robinson, Nature 262, 97, 1976.
6. P.L. Schechter, Astron. J. 82, 569, 1977.
7. T. Jaakkola et al., Mon.Not.R.Astron.Soc. 177, 191, 1976.
8. L.M. Golden, Observatory 94, 122, 1974.
9. A.R. Gillespie, Mon.Not.R.Astron.Soc. 170, 541, 1975.
10. A. Webster, Mon.Not.R.Astron.Soc. 175, 61 és 71, 1976.
11. J. Machalski, Astron.Astrophysics 56, 53, 1977.
12. J. Silk, Space Sci. Rev. 11, 671, 1971.
13. G.F. Smoot et al., Phys.Rev.Letters 39, 898, 1977.
14. M. Rowan-Robinson, Nature 270, 9, 1977.
15. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Wiley, 1972)
16. G. Lemaitre, Ann.Soc.Sci.Bruxelles A47, 49, 1927.
17. C. Misner, Ap. J. 151, 459, 1968.
18. J.D. Barrow and J. Silk, Scientific American, April 1980.
19. Perjés Z., Kauzalitás és konformis módszerek a "Téridő, gravitáció és relativitáselmélet" c. kötetben, KFKI, 1979.
20. C.W. Misner, K.S. Thorne és J.A. Wheeler, Gravitation (Freeman, 1973)
21. Perjés Z., Magyar Fizikai Folyóirat XXIV, 173, 1976.
22. L.P. Eisenhart, Riemannian Geometry (Princeton Univ. Press, 1950)
23. L. Bianchi, Mem.Soc.It.Della Sc. (Dei.XL) (3)11, 267, 1897.
24. M.P. Ryan, Jr. and L.C. Shepley, Homogeneous Relativistic Cosmologies (Princeton Univ. Press, 1975)
25. G. Fubini, Annali di Matematica, ser.3, 9, 33, 1903.
26. A.Z. Petrov, Einstein Spaces (Pergamon, 1969)
27. G.F.R. Ellis és M.A.H. MacCallum, Commun.Math.Phys. 12, 108, 1969.
28. R. Kantowski és R.K. Sachs, J.Math.Phys. 7, 443, 1966.
29. E. Kasner, Amer.J.Math. 43, 217, 1921.
30. A.H. Taub, Ann.Math. 53, 472, 1951.
31. V.A. Belinszkij, E.M. Lifsic és I.M. Khalatnikov, Adv. Phys. 19, 525, 1970.
32. C.W. Misner, Phys.Rev.Letters 22, 1071, 1969.
33. S.T.C. Siklós, Ph.D., University of Cambridge, 1976.
34. A. Harvey és D. Tsoubelis, Phys. Rev. D15, 2734, 1977.
35. A. Barnes, J. Phys. A11, 1303, 1978.
36. K.A. Dunn és B.O.J. Tupper, Ap. J. 204, 322, 1976.
37. V.N. Lukash, Zs.Exp.Teor.Fiz. 67, 1594, 1974.
38. M.A. Melvin, Ann. N.Y. Acad.Sci. 262, 253, 1975.
39. E. Schücking és O. Heckmann, World Models, az "Onzieme Conseil de Physique Solvay" c. kötetben (Éditions Stoops, 1958)
40. A. Fridman, Z. Phys. 10, 377, 1922.



41. C.W. Misner és A. Taub, Zs.Exp.Teor.Fiz. 55, 233, 1968.
42. L.D. Landau és E.M. Lifsic, Elméleti Fizika II. Klasszikus erőterek, XIV. fejezet (Tankönyvkiadó, 1976)
43. J.D. Barrow, Phys. Rev. Letters 46, 963, 1981; Phys.Reports és GRG Journal (megjelenőben)
44. Bevezetés..., 24. fejezet
45. Szász Domokos, ez a kötet
46. R. Shaw, Z. Naturforsch. 36a, 80, 1981.
47. A. Lasota and J. Yorke, Trans.Am.Math.Soc. 186, 481, 1973.
48. R. Bowen, Am. Math. Soc. CBMS No.35 (1977)
49. P. Collet és J.-P. Eckmann, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems (Birkhäuser, 1980)
50. M. Misiuriewicz, Studia Math. 55, 175, 1976.
51. R.L. Adler, A.C. Konheim, M.H. McAndrew, Trans. Am. Math. Soc. 114, 309, 1965.
52. M. Misiuriewicz és W. Szlenk, Astérisque 50, 299, 1977.
53. D. Ruelle, Thermodynamic Formalism (Addison-Wesley, 1979)
54. P. Lévy, Theorie de L'Addition des Variables Aléatoires (Gauthier-Villars, 1954), Chap.9.
55. Ez annak köszönhető, hogy az  $m$  invariáns mérték egyértelmű.
56. A.G. Doroskevics és I.D. Novikov, Astron.Zs. 47, 948, 1971.
57. G.H. Hardy és E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (Oxford Univ. Press, 1960)
58. A.Y. Khinchin, Continued Fractions (Univ. of Chicago Press, 1964)
59. A.G. Doroskevics, A.G. Lukash és I.D. Novikov, Zs.Exp.Teor. Fiz.Piszma 5, 119 (1967)
60. D. Chitre, Ph.D. disszertáció, University of Maryland (1972)
61. T.B. Criss, R.A. Matzner, M.P. Ryan, Jr. és L.C. Shepley, Modern Theoretical and Observational Cosmology, a "General Relativity and Gravitation" c. kötetben, szerk.: G. Shaviv és J. Rosen (Keterpress, 1975)
62. C.W. Misner, Minisuperspace, a "Magic Without Magic: John Archibald Wheeler" c. kötetben, szerk.: J.R. Klauder (Freeman, 1972)
63. A. Moser, R.A. Matzner és M.P. Ryan, Jr., Ann. Phys. 79, 558, 1973.
64. M. Ryan, Hamiltonian Cosmology, a "Lecture Notes in Physics" c. sorozat 13. kötete (Springer, 1972)
65. L.P. Grischuk, A.G. Doroskevics és V.N. Lukash, Zs.Exp. Teor. Fiz. 61, 3, 1971.
66. R.A. Matzner és D.M. Chitre, Commun. Math. Phys. 22, 173, 1971.
67. J.D. Barrow és R.A. Matzner, Mon. Not. R. Astron. Soc. 181, 719, 1977.
68. S.W. Hawking és G.F.R. Ellis, The Large-Scale Structure of Space-Time (Cambridge Univ. Press, 1973)
69. S.W. Hawking, The Event Horizon, a "Black Holes" c. kötetben, szerk.: C. DeWitt és B.S. DeWitt (Gordon and Breach, 1973)
70. B. Carter, The General Theory of the Mechanical, Electromagnetic and Thermodynamic Properties of Black Holes, az 1. hivatkozás kötetében
71. S.W. Hawking, Particle Creation by Black Holes, Commun. Math. Phys. 43, 199, 1975. Megjelent a "Quantum Gravity: An Oxford Symposium" c. kötetben is, szerk.: C.J. Isham,

- R. Penrose és D.W. Sciama (Oxford Univ. Press, 1975)
72. J.H. Bardeen, B. Carter és S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 31, 181, 1973.
  73. J. Bekenstein, Phys. Rev. D7, 949 és 2333, 1973.
  74. R. Penrose, Singularities and Time-Asymmetry, az 1. hivatkozás kötetében
  75. W. Israel, Phys. Rev. 164, 1776, 1967.
  76. D.C. Robinson, Gen. Rel. Grav. 8, 695, 1977.
  77. R. Penrose, Fizikai Szemle XXV, 1, 1975.
  78. D. Lynden-Bell és R.M. Lynden-Bell, Mon. Not. R. Astron. Soc. 181, 405, 1977.
  79. C.B. Collins és S.W. Hawking, Ap. J. 180, 317, 1973.
  80. J.D. Barrow és F.J. Tipler, Nature 276, 453, 1978.
  81. G.W. Gibbons és S.W. Hawking, Phys. Rev. D15, 2752, 1977.
  82. R. Penrose, Space-Time Singularities, a "Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity" c. kötetben, szerk.: R. Ruffini (North-Holland, 1977)



A KÖTET SZERZŐI

BERGOU JÁNOS

MTA Központi Fizikai  
Kutató Intézet

GÁLFI LÁSZLÓ

ELTE Elméleti Fizikai  
Tanszék

GNÁDIG PÉTER

ELTE Atomfizikai  
Tanszék

KIRÁLY PÉTER

MTA Központi Fizikai  
Kutató Intézet

PÁRIZS GYULA

MTA Központi Fizikai  
Kutató Intézet

RÁCZ ZOLTÁN

ELTE Elméleti Fizikai  
Tanszék

SZÉPFALUSY PÉTER

MTA Központi Fizikai Kutató  
Intézet és  
ELTE Elméleti Fizikai  
Tanszék

TÓTH BÁLINT

Olajipari Fővállalkozó és  
Tervező Vállalat

ÉRDI BÁLINT

ELTE Csillagászati  
Tanszék

GESZTI TAMÁS

MTA Műszaki Fizikai  
Kutató Intézet

GYÖRGYI GÉZA

ELTE Elméleti Fizikai  
Tanszék

KRÁMLI ANDRÁS

MTA Számítástechnikai és  
Automatizálási Kutató Intézet

PERJÉS ZOLTÁN

MTA Központi Fizikai  
Kutató Intézet

SZÁSZ DOMOKOS

MTA Matematikai  
Kutató Intézet

TÉL TAMÁS

ELTE Elméleti Fizikai  
Tanszék

VETIER ANDRÁS

BME Villamosmérnöki  
Matematikai Tanszék







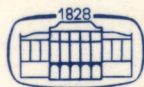




a káosz tanulmányozására, s ily módon napjainkban új „kísérleti matematika” van kialakulóban.

Az a tény, hogy egyszerű nemlineáris differenciálegyenletek megoldása kaotikus is lehet, szemléleti változást igényel mindazokon a tudományterületeken (fizika, meteorológia, mérnöki tudományok, rendszer- és szabályozáselmélet, kémia, biológia, elméleti közgazdaságtan), ahol ilyen típusú egyenletek előfordulnak. Az új szemlélet várhatóan rövid időn belül megjelenik az oktatásban is.

A könyv megismerteti az olvasót a káosz univerzális törvényeivel, és egyben számos alkalmazási területet is bemutat.



AKADÉMIAI KIADÓ  
BUDAPEST



Ára: 151,—Ft

ISBN 963 05 3208 5