ÉRTEKEZÉSEK

A

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

HARMADIK KÖTET. 1874.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

BUDAPEST, 1875.

A. M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1875. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Harmadik kötet. 1874.

ADALÉK

A VISSZAFUTÓ SOROK ELMÉLETÉHEZ.

IRTA

VÉSZ JÁNOS ÁRMIN

R. TAG.

BUDAPEST,

AZ EGGENBERGER-FÉLE AKAD. KÖNYVKERESKEDÉS.

(HOFFMANN és MOLNÁR.)

1874.

ADALÉK A VISSZAFUTÓ SOROK ELMÉLETÉHEZ.

Irta VÉSZ JÁNOS ÁRMIN r. tag.

A visszafutó sorok fogalma.

1. §.

Ha a következő végszerü tört

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\ldots+Kx^{m-1}}{a+bx+cx^2+\ldots+kx^{m-1}+lx^m}\ldots 1)$$

a benne tartalmazott x változó haladó egész hatványai szerint sorba fejtetik, akkor az eredt végtelen sor

$$M+M_1x+M_2x^2+\ldots+M_{n-1}x^{n-1}+\ldots 2)$$

(m—1)-ed rendü visszafutó sornak neveztetik; és pedig ha m=1 akkor a sor egyszerü mértani sort képez, melynek bár hanyadik tagját nyerjük, ha az előttevaló tagot $\left(-\frac{b}{a}\right)$-val szorozzuk; az alkotó tört ez esetben

$$\frac{A}{a+bx}$$

Ha m=2, vagyis ha az alkotó tört

$$\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}$$

akkor a megfelelő sor bármelyik tagjának együtthatóját meg lehet határozni az által, ha az előttevaló együtthatót $\left(-\frac{b}{a}\right)$-val a másodelőttit pedig $\left(-\frac{c}{a}\right)$-val szorozzuk. Épen így a harmadrendü visszafutó sor együtthatói úgy erednek az előttevalókból, hogy a közvetlen előttevaló együttható $\left(-\frac{b}{a}\right)$-val, a másod előttevaló $\left(-\frac{c}{a}\right)$-val, a harmad előttevaló pedig $\left(-\frac{d}{a}\right)$-val szoroztatik. — Hasonszerü törvény áll a magasabb rendü visszafutó sorokra nézve is.

2. §.

Viszont, ha az *alkotó tört* helyett a *visszafutó sor* van megadva, akkor az *előbbi* az *utóbbiból* Lagrange utmutatása szerint szintén meghatározható.

Ha ugyanis a 2) alatti adott sor röviden S-el jelöltetik, akkor az *egység* osztatik S-el, de az osztás csakis a hányados két első tagjáig folytattatik, e szerint

$$1:S=M'+M'_1x+\frac{x^2(R+R_1x+R_2x^2\ldots)}{S}$$

$$=M'+M'_1x+\frac{S_1x^2}{S}$$

ha a maradékot S_1x^2-el jelöljük; azután S osztatik S_1-el, szintén csak a hányados két első tagjára szorítkozva lesz:

$$S:S_1=M''+M''_1x+\frac{S_2x^2}{S_1}$$

hol S_2x^2 az uj maradékot jelenti; most ismét S_1 osztatik ugyanazon feltételek mellett S_2-vel, és ezen mütétel addig folytattatik, mig az osztás, két hányadosi tag után, maradék nélkül nem sikerül. — Az adott visszafutó sor ez esetben annyadrendü, a hány osztás vitetett végbe addig, míg a *semmi* maradékra jutottunk.

Ösmervén a visszafutó sor rendjét, annak általános alakja felirható, és a benne foglalt együtthatók a határozatlan együtthatók elve szerint könnyen meghatározhatók.

Az általános tag meghatározása.

3. §.

Valamint minden sornál, ugy a visszafutónál is a legnagyobb fontossággal bir az *általános*, vagyis az n-edik tag meghatározása az n függvényében, és pedig oly alakban, hogy az gyakorlati kiszámitásra alkalmas legyen. — S miután ezen követelményeknek a *mértani sor*, vagyis az *első rendü visszafutó sor* általános tagja eleget tesz, ennél ugyanis

$$M_{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}A\ b^{n-1}}{a^n}\ \ldots\ 3)$$

azért czélszerü a visszafutó sor alkotó törtjét csupa $\frac{A}{a+bx}$ alakú részlet törtekre bontani szét, minden ily sornak megfelelő mértani sorát kifejteni, és a nyert sorok általános tagjait összeadni.

Ezen eljárás tökéletesen helyes, és könnyen ki is vihető mindaddig, míg az alkotó tört csupa *valós* egyszerü törtekre bontható szét.

Az elv helyes ugyan még akkor is, ha a részlet tört képzetes, mert ez esetben a 3)-ik képletben A és a ugyan képzetesek, de miután a képzetes részlet törthöz még egy másik *kapcsolt* részlet tört tartozik, azért az általános tagban is két *kapcsolt értékü* rész fordulván elő, ezek összege okvetlen valós leend. — De már ez esetben a 3) alatti képlet kiszámitásra nem alkalmas, miután a benne előforduló A és a ezen esetben $P+Qi$ és illetőleg $p+qi$ alakúak lévén, a logarok közvetlen alkalmazását lehetlenné teszik.

4. §.

Ha az 1) alatti alkotó törtet részlet törtjeire szétbontjuk, akkor ezek alakja, ha $\sqrt{-1}=i$

$$\frac{P+Qi}{(p+qi-x)^r}\ \ldots\ldots\ 4)$$

melyhez (ha Q és q nem egyenlők a semmivel) még egy kapcsolt tört is járul, ugyanis:

$$\frac{P-Qi}{(p-qi-x)^r}\ \ldots\ldots\ldots\ 5)$$

Ezen alakok a részlettörtekrei bontás mind a négy esetét magokban foglalják, ugyanis

1. ha a nevező csupa egymástól különböző valós gyökkel bir, akkor csakis a 4) alatti képlet jut érvényre, a melyben még $Q=q=0$, és $r=1$ teendő.

2. ha a gyökök valósak ugyan, de egyenlők, akkor szintén a 4) képlet maga érvényes, tehát $Q=q=o$, r pedig ez esetben az egyenlő gyökök számát jelenti.

3. ha a gyökök képzetesek, de egymástól különbözők, akkor mind a két képlet érvényes, de bennök $r=1$, végre

4. ha nevező egyenlő képzetes gyökökkel bir, akkor a 4) és 5) alatti képletekben r az egyenlő gyökök számát jelenti

5. §.

A 4) alatti törtet sorba fejtvén, ered:

$$\frac{P+Qi}{(p+qi-x)^r}=\frac{P+Qi}{(p+qi)^r}\left[1+\frac{r}{1}\frac{x}{p+qi}+\frac{r(r+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{(p+qi)^2}+\right]$$

s azért ezen sor általános tagjának együtthatója

$$M'_{n-1}=\frac{P+Qi}{(p+qi)^r}\cdot\frac{r(r+1)(r+2)..(r+n-2)}{1.\ 2.\ \ 3\ldots\ (n-1)}\cdot\frac{1}{(p+qi)^{n-1}}$$

$$=\left[\begin{matrix}r+n-2\\ n-1\end{matrix}\right]\frac{P+Qi}{(p+qi)^{n+r-1}}$$

vagy miután r rendesen csak kis szám, holott n a végtelenig nagyitható, tekintetbe véve, hogy

$$\left[\begin{matrix}m\\ s\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}m\\ m-s\end{matrix}\right]$$

következik még:

$$M'_{n-1}=\left[\begin{matrix}n+r-2\\ r-1\end{matrix}\right]\frac{P+Qi}{(p+qi)^{n+r-1}}\ldots.6)$$

mely értéknek kapcsolt értéke az 5) alatti képlet kifejtéséből

$$M''_{n-1}=\left[\begin{matrix}n+r-2\\ r-1\end{matrix}\right]\frac{P-Qi}{(p-qi)^{n+r-1}}\ldots.7)$$

Ha tehát még a 6) és 7) alatti értékeket összeadjuk, megnyerjük az adott sor általános tagjának együtthatóját,

$$M_{n-1}=\left[\begin{matrix}n+r-2\\ r-1\end{matrix}\right]\left[\frac{P+Qi}{(p+qi)^{n+r-1}}+\frac{P-Qi}{(p-qi)^{n+r-1}}\right]$$

$$=\left[\begin{matrix}n+r-2\\ r-1\end{matrix}\right]\frac{(P+Qi)(p-qi)^{n+r-1}+(P-Qi)(p+qi)^{n+r-1}}{(p^2+q^2)^{n+r-1}}$$

vagy még:

$$M_{n-1}=\left[\begin{matrix}n+r-2\\ r-1\end{matrix}\right]\times$$

$$\frac{P\left[(p+qi)^{n+r-1}+(p-qi)^{n+r-1}\right]-Qi\left[(p+qi)^{n+r-1}-(p-qi)^{n+r-1}\right]}{(p^2-q^2)^{n+r-1}}\ldots 8)$$

A jelen képlet egészen általános, és a felsorolt mind a négy esetre alkalmazható ;

az 1. esetben $q=Q=o$ és $r=1$ lévén, belőle egyszerüen ered a 3) alatti képlet, ha $2P=-\frac{A}{b}$ és $p=-\frac{b}{a}$ helyettesíttetik:

a 2. esetben

$$M_{n-1}=\left[\begin{matrix} n+r-2 \\ r-1 \end{matrix}\right]\frac{2P}{p^{n+r-1}}$$

a 3. esetben

$$M_{n-1}=\frac{P\left[(p+qi)^n+(p-qi)^n\right]-Qi\left[(p+qi)^n-(p-qi)^n\right]}{(p^2+q^2)^n}$$

végre a 4. esetben maga a 8) alatti képlet alkalmazandó.

6. §.

Az 1. és 2. esetben a nyert képlet logar használatra közvetlen alkalmas lévén, az általános tag kiszámitása semmi nehézséggel sem jár, de a 3. és 4. eset tetemes átváltoztatást igényel, mit a következő módon lehet eszközölni.

Legyen $e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b)=p+qi$ . . . 9)

akkor $p=e^a\cos b$ és $q=e^a\sin b$

tehát $e^a=\sqrt{p^2+q^2}$ és $b=\text{arctg}\,\frac{q}{p}$

De ha $u=(p+qi)^n$

akkor a 9) alatti képlet szerint

$$lu=n\,l\,(p+qi)$$
$$=n\,(a+bi)$$
$$=n\left[l\sqrt{p^2+q^2}+i\,\text{arctg}\frac{q}{p}\right]$$

és ismét a megfelelő számokra térve vissza:

$$u=e^{n\left(l\sqrt{p^2+q^2}+i\,\text{arctg}\frac{q}{p}\right)}$$

vagyis

$$(p+qi)^n=\sqrt{(p^2+q^2)}^{\,n}\left[\cos n\,\text{arctg}\frac{q}{p}+i\sin n\,\text{arc tg}\frac{q}{p}\right]$$

hasonlóan

$$(p-qi)^n=\sqrt{(p^2+q^2)}^{\,n}\left[\cos n\,\text{arctg}\frac{q}{p}-i\sin n\,\text{arc tg}\frac{p}{q}\right]$$

mely egyenletek összeadása és kivonása által ered:

$$\left.\begin{array}{l}(p+qi)^{n}+(p-qi)^{n}=2\sqrt{(p^2+q^2)}^{\,n}.\cos n \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\\ \text{és}\,(p+qi)^{n}-(p-qi)^{n}=2i\sqrt{(p^2+q^2)}^{\,n}.\sin n \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\end{array}\right\}\ldots 10)$$

mely értékeket a 8) alatti képletbe helyettesitve, ha egyszersmind n helyibe $(n+r-1)$-et irunk, lesz rövid összevonás után:

$$M_{n-1} = 2\left[\begin{matrix}n+r-2\\ r-1\end{matrix}\right]\times$$

$$\frac{P.\cos(n+r-1)\operatorname{arctg}\frac{q}{p}+Q\sin(n+r-1)\operatorname{arctg}\frac{q}{p}}{\sqrt{(p^2+p^2)}^{\,n+r-1}}\ldots.11)$$

mely képlet szintén egészen általános, abban benn foglaltatván mind a négy eset, és mely segitségével most már az általános tag, logarok alkalmazása mellett, valós alakban minden előfordulható esetben könnyen kiszámitható.

Az első n tag összege.

7. §.

Meg lévén ekkép határozva az *általános tag,* most már megoldható azon kérdés is, miképen kell meghatározni egy adott visszafutó sornál az első n tag összegét.

Ha n végtelen nagy, akkor a visszafutó sor összege maga az 1) alatti alkotó tört,

$$S = \frac{A+Bx+Cx^2+\ldots.+Kx^{m-1}}{a+bx+cx^2+\ldots.+kx^{m-1}+lx^m}$$

ha továbbá az első n tag összegét S_n —el jelöljük, valamennyi többi tagból pedig a közös x^n tényezőt kiemeljük, s annak együtthatóját S'-el jelöljük, akkor

$$S_n = S - S'x^n$$

s igy csakis S'-et kell meghatározni; — ez pedig szintén egy végszerü tört, melynél a nevező azonos a S tört nevezőjével, mert ugyanazon visszafutó sór folytatása lévén, a képződés törvénye is ugyanaz.

Igy tehát

$$S' = \frac{A' + B'x + C'x^2 + \ldots + K'x^{m-1}}{a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{m-1} + lx^m}$$

mely törtnél még csak az A', B', ... együtthatók lesznek meghatározandók.

Minthogy pedig a 2) alatti képlet szerint:

$$\frac{A' + B'x + C'x^2 + \ldots + K'x^{m-1}}{a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{m-1} + lx^m} = M_n + M_{n+1}x + M_{n+2}x^2 +$$

M_n, M_{n+1}, ... értékei az általános tagból ösmertek lévén, következik a A', B', ... együtthatók részére:

$$A' = a\, M_n$$
$$B' = a\, M_{n+1} + b\, M_n$$
$$C' = a\, M_{n+2} + b\, M_{n+1} + c\, M_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

hol M_n, M_{n+1},... együtthatók a 11) alatti képletből egyszerüen következnek, ha abban n helyébe rendre $n+1$, $n+2$, $n+3$... értékek helyettesittetnek.

Feladat.

8. §.

Az előbbiekben kifejtett elvek alkalmazására legyen megadva a következő sor:

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 3{\cdot}3x^3 + 3{\cdot}01x^4 + 2{\cdot}417x^5 +$$
$$+ 1{\cdot}7589x^6 + 1{\cdot}17513x^7 + 0{\cdot}722221x^8 +$$
$$+ 0{\cdot}4044257x^9 + \ldots\ldots$$

kerestetik:

a) az adott sor alkotó törtje, és ebből az alakulási törvény, kerestetik

b) az adott sornak n-edik tagja n függvényében kifejezve, és

c) az első n tag összege azon esetben, ha a változó x helyébe az egység iratott.

9. §.

Az első a) pontot illetőleg osztassék a 2. §. értelme szerint az egység S-el, lesz

$$\frac{1}{S}=1-2x+x^2\frac{\begin{array}{c}1+2.7x+3.59x^2+3{\cdot}603x^3+3.0751x^4+\\+2{\cdot}34267x^5+1.628039x^6+1.0400163x^7+.\end{array}}{S}$$

$$=1-2x+\frac{S_1}{S}x^2$$

Osztva továbbá S-et S_1-el, ered:

$$\frac{S}{S_1}=1-0{\cdot}7x+x^2\frac{\begin{array}{c}1{\cdot}3+2.21x+2.457x^2+2{\cdot}2269x^3+\\+1{\cdot}77073x^4+1{\cdot}274741x^5+\ldots\ldots\end{array}}{S_1}$$

$$=1-0{\cdot}7x+1{\cdot}3x^2\frac{S_2}{S_1}$$

hol S_2-öt megkapjuk, ha a második maradékból a közös 1·3 tényezőt elkülönítjük. Végre S_1-et osztva S_2-vel az osztás további maradékot nem ad, jeléül annak, hogy az adott sor *harmadrendü visszafutó sor*, vagyis hogy

$$S=\frac{A+Bx+Cx^2}{a+bx+cx^2+dx^3}$$

$$=1+2x+3x^2+3{\cdot}3x^3+3{\cdot}01x^4+2{\cdot}417x^5+\ldots.$$

hol a tört állandóinak meghatározására az első hat tag elegendő.

Ezekből ugyanis:

$$3{\cdot}3a+3b+2c+d=o$$
$$3{\cdot}01a+3.3b+3c+2d=o$$
$$2{\cdot}417a+3.01b+3{\cdot}3c+3d=o$$

mely egyenletekből könnyen következik:

$$b=-1{\cdot}7a;\ c=a,\ \text{és}\ d=0{\cdot}2a$$

Továbbá

$$A=a$$
$$B=2\,a+b=2\,a-1{\cdot}7\,a=0{\cdot}3a$$
$$\text{és}\ C=3a+2b+c=4a-3.4a=0{\cdot}6a$$

mely értékek helyettesitése, és csekély rövidités által ered:

$$S=\frac{10+3x+6x^2}{10-17x+10x^2-2x^3}\ldots.12)$$

a sor alkotási törvénye tehát abban áll, hogy az előbbi együttható szoroztatik 1·7-el, abból levonatik a másod előtti együttható, és a különbséghez adatik a harmad előtti együttható szorozva 0·2-vel.

10. §.

A 8. §. alatti b) pont meghatározására nézve előbb a 12) alatt talált törtet kell részlet törtjeire szétbontani, és az ösmert módok szerint következik:

$$\frac{10+3x+6x^2}{10-17x+10x^2-2x^3}=\frac{40}{2-x}+\frac{\frac{1}{2}(-37+16i)}{\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}-x}+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(-37-16i)}{-\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}-x}\quad\ldots\quad 13)$$

s miután az általános tag meghatározására a 6. §. 11) képlete szolgál, a jelen esetben abban r=1 lesz teendő, mi által, tekintetbe véve az első valós törtet is

$$M_{n-1}=\frac{40}{2^n}+\frac{2}{\sqrt{(p^2+q^2)}^n}\left[P\ \text{cós}\ n\ \text{arctg}\frac{q}{p}+Q\sin . n . \text{arctg}\frac{q}{p}\right]$$

s miután a mi esetünkben $P=-\frac{37}{2}$; $Q=\frac{16}{2}$; $p=\frac{3}{2}$ és $q=\frac{1}{2}$

$$M_{n-1}=\frac{40}{2^n}-\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^n\left[37.\cos . n . \text{arctg}\frac{1}{3}-16\sin . n . \text{arctg}\frac{1}{3}\right]\ 14)$$

hol $\text{arctg}\frac{1}{3}=18^0\ 26'\ 5{\cdot}8''$

Igy például ha n=8, vagyis ha kerestetik az x^7 együtthatója ez az előbbi képletből logarok segitségével könnyen találtatik =1·17513 mint az adott sorban, igy ha az x^{19} együtthatója kerestetik, akkor n=20 és $M_{19}=-0{\cdot}003523\ldots$

11. §.

Végre a feladat c) pontját illetőleg először meghatározandó S', vagyis a sor összege az n-edik tagtól kezdve. De

$$S'=M_n x^n+M_{n+1}x^{n+1}+M_{n+2}x^{n+2}+\ldots$$

$$=x^n\left[M_n+M_{n+1}x+M_{n+2}x^2+\ldots\right]$$

$$=x^n\frac{A'+B'x+C'x^2}{10-17x+10x^2-2x^3}$$

hol M_n, M_{n+1}, . . . értékei a 14) alatti képletből veendők, ha abban n helyébe n+1, n+2, . . helyettesíttetnek, innét tehát

$$A' = 10\ M_n$$
$$B' = 10\ M_{n+1} - 17\ M_n$$
$$C' = 10\ M_{n+2} - 17\ M_{n+} + 10\ M_n$$

Miután azonban a feltett kérdés szerint csakis azon esetben kivántatik az összeg, ha $x=1$, lesz

$$S' = A' + B' + C'$$
$$= 10\ M_{n+2} - 7\ M_{n+1} + 3\ M_n$$

és az értékek helyettesitése után:

$$\left.\begin{aligned}
S' = \frac{10.40}{2^{n+3}} - 10\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^{n+3}&\Bigg[37\ \cos(n+3)\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \\
&-16\ \sin(n+3\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\Bigg] - \\
-\frac{7.40}{2^{n+2}} + 7\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^{n+2}&\Bigg[37\ \cos(n+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \\
&-16\ \sin(n+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\Bigg] + \\
+\frac{3.40}{2^{n+1}} - 3.\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^{n+1}&\Bigg[37\ \cos(n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \\
&-16\sin(n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\Bigg]
\end{aligned}\right\}\ldots 15)$$

mely kifejezés azonban tetemesen egyszerüsithető, tévén előlegesen $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = y$

miből következik $y = \operatorname{arc}\cos\frac{3}{\sqrt{10}} = \operatorname{arc}\sin\frac{1}{\sqrt{10}}$

tehát $\cos y = \frac{3}{\sqrt{10}}$; és $\sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}$

ezen értékekkel azután:

$$\cos(n+1)\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}\cos ny - \frac{1}{\sqrt{10}}\sin ny$$

$$\sin(n+1)\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}\cos ny + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin ny$$

$$\cos(n+2)\ y = \frac{8}{10}\cos ny - \frac{6}{10}\sin ny$$

$$\sin(n+2)y = \frac{6}{10}\cos ny + \frac{8}{10}\sin ny$$

$$\cos(n+3)y = \frac{26}{10\sqrt{10}}\cos ny - \frac{18}{10\sqrt{10}}\sin ny$$

$$\sin(n+3)y = \frac{18}{10\sqrt{10}}\cos ny + \frac{26}{10\sqrt{10}}\sin ny$$

mind ezen értékeket a 15) alatti képletbe helyettesitvén és kellően összevonván, ered:

$$S' = \frac{40}{2^n} - \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^n \left[21 \cos ny - 53 \sin ny\right] \ldots 16)$$

egy eléggé egyszerü képlet, mely az n-edik tagtól kezdett sor további összegének könnyü kiszámitására alkalmas.

Igy ha $n=8$, találtatik $S'=1{\cdot}33897$ vagy miután az egész sor összege $S=19$, következik, hogy az első nyolcz tag összege, ha $x=1$

$S_8 = S - S' = 17{\cdot}69108$

s valóban ugyanezen összeget találjuk, ha az adott sorban az első nyolcz megadott együtthatót összeadjuk.

Épen így találtatik ha $n=20$, vagyis az első 20 tag összegére nézve:

$S_{20} = 19{\cdot}001198\ldots$; miután a 21-ik tagtól kezdve a végtelenig a sor összege $S' = -0{\cdot}001298\ldots$

Külön esetek.

12. §.

Meg lehet itt még jegyezni, hogy az általános tag együtthatója (*6. §. 11.* képlet) azon esetben, ha az alkotó tört nevezője csakis két kapcsolt képzetes szorzóból áll, a következő alakú:

$$M_{n-1} = \frac{2P \cos n \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{q}{p} + 2Q \sin n \operatorname{arctg}\frac{q}{p}}{\sqrt{(p^2+q^2)}^{\,n}}$$

és ha még azonfelül $p=q$

$$M_{n-1} = \frac{P \cos\frac{n\pi}{4} + Q \sin\frac{n\pi}{4}}{2^{\frac{n-1}{2}} \; p^n}$$

miután pedig $\cos\frac{n\pi}{4}$ és $\sin\frac{n\pi}{4}$ csakis $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, és ± 1 értékeket vehet fel (n igenleges egész szám lévén) következik, hogy a számláló nyolcz tagú szakot fog képezni, ugyanis:

$$\frac{P+Q}{\sqrt{2}};\ Q;\ \frac{-P+Q}{\sqrt{2}};\ -P;\ -\frac{P+Q}{\sqrt{2}};\ -Q;\ \frac{P-Q}{\sqrt{2}};\ \text{és } P.$$

Ha pedig p=o, vagyis ha a nevező csak tíszta képzetes gyököket tartalmaz, akkor

$$M_{n-1} = \frac{2P\cos\frac{n\pi}{2} + 2Q\sin\frac{n\pi}{2}}{qn}$$

s miután $\cos\frac{n\pi}{2}$ és $\sin\frac{n\pi}{2}$ felváltva csakis 0 és ± 1 lehet, azért ez esetben a számláló négy tagú szakokat fog képezni, ugyanis

$$2Q;\ -2P;\ -2Q;\ \text{és } 2P$$

Így ha az alkotó tört $\frac{4+3x}{8-4x+x^2}$;

akkor ez részlet törtekre bontva lesz

$$= \frac{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i}{2+2i-x} + \frac{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-x}$$

itt tehát $P=-\frac{3}{2}$; $Q=\frac{5}{2}$; $p=q=2$ lévén, az illető sor leend:

$$\frac{1}{2}+\frac{5x}{2^3}+\frac{4x^2}{2^4}+\frac{3x^3}{2^6}-\frac{x^4}{2^7}-\frac{5x^5}{2^9}-\frac{4x^6}{2^{10}}-\frac{3x^7}{2^{12}}+\dots$$

ezen első nyolcz tag után az együtthatók számlálói ismétlődnek, a nevező alkotási törvénye szintén egészen világos.

Ha pedig az alkotó tört $\frac{1-2x}{4+x^2}$ volna, akkor a négy szakos sor volna:

$$\frac{1}{2^2}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^4}+\frac{x^3}{2^3}+\frac{x^4}{2^6}-\frac{x^5}{2^7}-\frac{x^6}{2^8}+\dots$$

az előbbi esetben az általános tag

$$M_{n-1} = -\frac{3\cos\frac{n\pi}{4} - 5\sin\frac{n\pi}{4}}{\sqrt{2^{3n}}}$$

az utóbbiban pedig:

$$M_{n-1} = \frac{4\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}}{2^{n+1}}$$

13. §.

A 6. §. 10) alatti képlete még egy nevezetes következtetésre szolgáltat alkalmat. Ha ugyanis

$$x^3 - ax + b = 0$$

akkor a Cardau képlete szerint

$$x_1 = -\left\{\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}\right\}$$

mely képlet tovább nem alkalmazható, ha

$$\frac{a^3}{27} > \frac{b^2}{4}, \text{ vagyis ha } \frac{2a\sqrt{a}}{3b\sqrt{3}} > 1.$$

ámde épen ez esetben, tévén előlegesen

$\frac{b}{2} = p$, és $\sqrt{\frac{a^3}{27} - \frac{b^2}{4}} = q$, a Cardan képletéből ered:

$$x_1 = -\left\{(p+qi)^{\frac{1}{3}} + (p-qi)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

és az említett 10) alatti képlet alkalmazása által

$$x_1 = -2\sqrt{(p^2+{}^2q)^{\frac{1}{3}}}\cos\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{q}{p}$$

vagy a p és q értékei visszahelyezése után csekély összevonással

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{a}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4a^3}{27b^2} - 1}$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\operatorname{arc}\cos\frac{3b\sqrt{3}}{2a\sqrt{a}}$$

mely képlet szerint a harmadfokú egyenlet gyöke könnyen kiszámitható, miután feltétel szerint $\frac{3b\sqrt{3}}{2a\sqrt{a}}$ valódi tört.