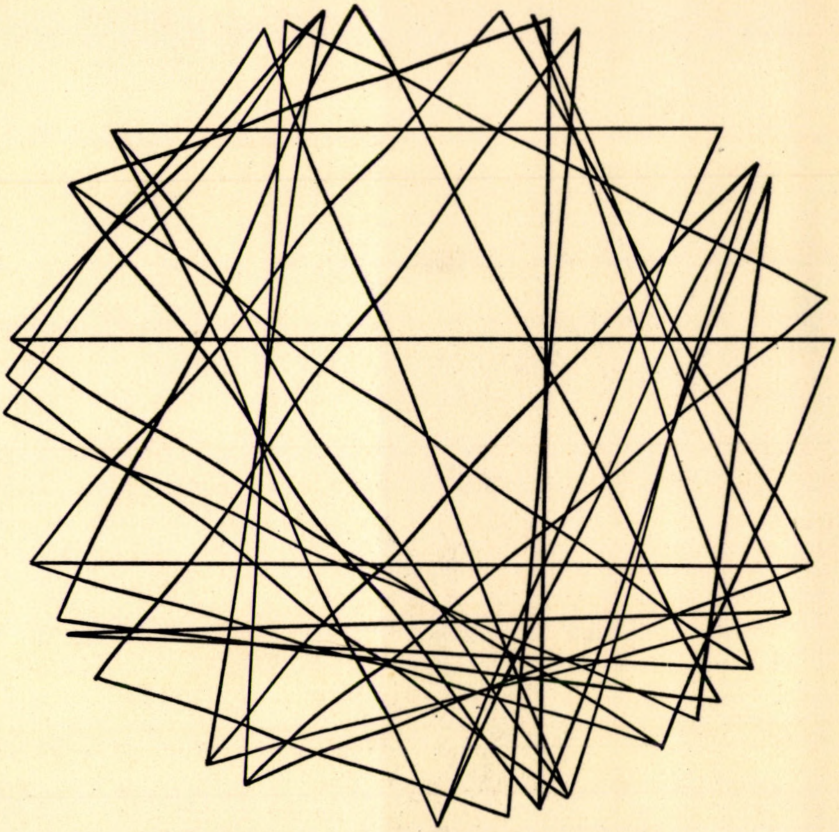
SZŐKEFALVI NAGY GYULA



A GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK ELMÉLETE

SZŐKEFALVI NAGY GYULA

A GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK ELMÉLETE

Szőkefalvi Nagy Gyula „A geometriai szerkesztések elmélete" c. könyve 1943-ban került először kiadásra. A könyv új kiadása az eredetihez képest több új résszel bővült. Jelentős részében a körzővel és vonalzóval való szerkeszthetőség problémájával foglalkozik. Vizsgálja a kockakettőzést, szögharmadolást, körosztást és a háromszögek szerkesztésével kapcsolatos különböző feladatokat. Szól az ún. Mohr—Mascheroni-, valamint a Steinek-féle szerkesztésekről. Foglalkozik a vonalzó használatának kiterjesztésével, valamint adott kúpszelet vagy harmadrendű görbe segítségével végezhető geometriai szerkesztésekkel. Az utolsó rész a kör négyszögesítésének problémáját tárgyalja és bizonyítását adja a π szám transzcendens voltának.

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

DR. SZŐKEFALVI NAGY GYULA

A GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK ELMÉLETE

A GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK ELMÉLETE

ÍRTA

DR. SZŐKEFALVI NAGY GYULA

2., BŐVÍTETT ÉS ÁTDOLGOZOTT KIADÁS

1828—1968

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1968

A kéziratot átdolgozta:

STROMMER GYULA

Sajtó alá rendezte:

CSÚRI JÓZSEFNÉ

Lektorok:

HEPPES ALADÁR

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

PRINTED IN HUNGARY

ELŐSZÓ AZ ELSŐ KIADÁSHOZ

A geometriai szerkesztések elméletének ez az összefoglalása azokban az előadásokban gyökeredzik, amelyeket a Ferenc József Tudományegyetemen több ízben tartottam. Ahhoz az elhatározáshoz, hogy ez az összefoglalás napvilágot lásson, nem kis részben járult hozzá az a több oldalról kifejezett óhajtás, hogy a középiskolai matematikatanárok részére 1942 nyarán rendezett továbbképző tanfolyamon erről a tárgyról tartott előadásaim szélesebb körök részére hozzáférhetők legyenek.

A geometriai szerkesztések elmélete a legklasszikusabb tudományágak közé tartozik. Varázsát a régi görögök óta a mai napig nem vesztette el. Ennek a munkának célja az, hogy a geometriai szerkesztések elméletének főbb eredményeit lehetőleg röviden, de azért könnyen érthetően és áttekinthetően összefoglalja. Ennek a célnak megfelelően néhány olyan eredményt, amelyet jelentőségéhez képest túlságosan hosszadalmasan, vagy nehézkesen lehetne megokolni, lapalji jegyzetben bizonyítás nélkül közlünk.

A munka — címének megfelelően — a geometriai szerkesztések elméletét és nem egyes szerkesztéseket kíván ismertetni. Emiatt egyes szerkesztéseket csak akkor tárgyal, ha azok az elmélettel szoros összefüggésben vannak, vagy annak megvilágítására szükségesek és alkalmasak. Ezért nem törekszik arra, hogy a tárgyalt szerkesztéseket a legegyszerűbb alakban állítsa elő, hanem csak arra, hogy a megengedett rajzeszközökkel való keresztülvitelük lehetőségét igazolja.

A munka terjedelmének korlátozása miatt nem lehetett a szerkesztések elméletével összefüggésben levő minden szempontot figyelembe venni. Ez a munka csak az euklideszi és a projektív síkon való szerkesztéseket tárgyalja, noha a gömbön és a Bolyai-síkon való szerkesztéseknek is egész irodalmuk van. Ez magyarázza meg azt is, hogy a geometriai szerkesztések elméletének a gyakorlati matematikust különösen érdeklő következő kérdései: a geometriai szerkesztések módszerei, a szerkesztési hibák elmélete és a különböző geometriai műszereknek és alkalmazásuknak ismertetése ebben a munkában nem jutnak, vagy alig jutnak szóhoz.

Nem tárgyalja ez a munka a közelítő szerkesztéseket sem, de ismertet harmadfokú és negyedfokú feladatok megoldására szolgáló geometriai kísérleteket.

Ezek azonban nem megközelítések, hanem pontos szerkesztések. A kísérlet szó azt akarja jelenteni, hogy alkalmazásakor a vonalzónak a kívánt helyzetbe való hozása — a két adott ponton átmenő egyenes húzásával szemben — bizonyos kísérletezéssel, próbálgatással történik. Amíg ugyanis két adott ponton átmenő egyenes húzásakor a vonalzó helyzetének két föltételt kell kielégítenie, addig geometriai kísérlet alkalmazásakor a vonalzó helyzetére három föltételnek kell teljesülnie. Ilyen pl. a következő három föltétel: a vonalzó élének adott ponton kell átmennie, két megjelölt pontjának pedig egy-egy adott vonalra kell esnie; vagy: egy derékszögvonalzó két szárának egy-egy adott ponton kell átmennie, csúcsának pedig egy adott vonalra kell esnie. Ha a vonalzót sikerült a kívánt helyzetbe hozni, akkor a geometriai kísérlet pontos szerkesztést szolgáltat.

Ez a könyv az olvasótól általában nem kíván meg több matematikai és geometriai ismeretet, mint amennyivel egy alsóbb éves matematikus egyetemi hallgató rendelkezhetik. A szükséges algebrai kiegészítéseket ott adjuk meg, ahol azokra éppen szükség van. Megjegyezzük, hogy az 1. §-on kívül az I. és II. fejezet algebrai vizsgálatai nem szükségesek a III—VI. fejezet fejtegetéseinek megértéséhez.

A matematikai irodalom a geometriai szerkesztések elméletére vonatkozólag több kitűnő munkával rendelkezik. Ezeknek jegyzékét e könyv végén található irodalmi összeállítás tartalmazza. Legtöbbet Vahlen munkájából merítettünk, de felhasználtuk Enriques és Adler könyvét és az újabb irodalmat is. Ahol lehetett, az ismert tárgyalásmódokon kisebb-nagyobb mértékben egyszerűsítettünk. Több olyan eredményt is ismertetünk, amelyet tankönyvszerűen még nem dolgoztak fel. Nem tartottuk szükségesnek az egyes olyan részletek megjelölését, amelyek — véleményünk szerint — ebben a könyvben látnak először napvilágot.

Könyvünk csak a legszükségesebb irodalmi idézetekre szorítkozik. A részletes irodalmi adatok iránt érdeklődő olvasó bőséges tájékozást találhat az irodalmi összeállításban idézett német és olasz enciklopédiacikkekben, továbbá Vahlen és Enriques könyvében.

A geometriai szerkesztések elméletében rejlő az az érdekesség, amely harmadfélezer éven át annyi embernek okozott gyönyörűséget és elmélyedést, e könyv szerzőjét arra a reményre biztatja, hogy könyvének tárgya a magyar olvasóban is kívánatos érdeklődést és vonzalmat fog kelteni.

Kolozsvárt, 1943 július havában.

Dr. Szőkefalvi Nagy Gyula
egyetemi ny. r. tanár

ELŐSZÓ A MÁSODIK KIADÁSHOZ

Szőkefalvi Nagy Gyula élete utolsó két évében — súlyos betegsége ellenére — lelkesen és nagy szorgalommal dolgozott a geometriai szerkesztések elméletét tárgyaló kitűnő könyvének új kiadásán, amelyet lényeges átdolgozásnak szánt.

Amikor az Akadémiai Kiadó a könyv újból való kiadását elhatározta, örömmel tettem eleget a megtisztelő megbízásnak, hogy a kéziraton elvégezzem az utolsó simításokat, amiben a szerzőt 1954. október 14-én bekövetkezett korai halála megakadályozta.

Az új kiadás részletesebben tárgyalja a körosztást, az egységátrakó vonalzóval végezhető szerkesztéseket és a harmadfokú szerkesztéseket, továbbá pusztán a betoló vonalzóval, ill. körtől különböző kúpszelet felhasználásával végrehajtott szerkesztéseket. A gömbön való szerkesztések és különböző geometriai műszerek ismertetése, továbbá néhány elméleti szempontból is érdekes újabb szerkesztési feladat teszi még változatosabbá a könyvet. Az új kiadásba a szerző több újabb eredményét is beledolgozta.

A kiadás munkájában nagy segítségemre volt Heppes Aladár-nak a könyv nagy részére vonatkozó részletes lektori véleménye, továbbá Vermes Imre szíves közreműködése, amiért e helyt is köszönetet mondok.

Budapesten, 1966 december havában.

Strommer Gyula

TARTALOMJEGYZÉK

I. Körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztések algebrai vizsgálata

1. §. Körzővel és vonalzóval végezhető geometriai szerkesztések és algebrai ismertetőjeleik 11
2. §. Harmadfokú irreducibilis egyenlet gyökei elemi szerkesztésének lehetetlensége 15
3. §. Elemi szerkesztéssel meg nem oldható harmadfokú feladatok 18
4. §. Szabályos tízszög és ötszög 26
5. §. Szabályos 34-oldalú és 17-oldalú sokszög 28
6. §. Az olyan irreducibilis algebrai egyenletek fokszáma, amelyeknek van elemi módon szerkeszthető gyökük 31

II. Körosztás

7. §. A körosztás feladata. Gauss általános tétele 34
8. §. Elemi szerkesztések a komplex síkon 35
9. §. Páratlan törzsszámhoz tartozó körosztási egyenlet irreducibilitása. Törzsszámnégyzethez tartozó körosztási egyenlet 37
10. §. A Gauss-féle feltétel szükséges voltának bizonyítása. A 2^k+1 alakú törzsszámok 40
11. §. A Gauss-féle feltétel elégséges voltának bizonyítása 41
12. §. Elemi szerkesztéssel nem szerkeszthető szabályos sokszögek 47
13. §. Körlapnak egyenlő területű részekre való osztása 50

III. Geometriai szerkesztések a körző és vonalzó korlátozott használatával

14. §. A Mohr—Mascheroni-féle szerkesztések 52
15. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések 56
16. §. A sík határolt részén vonalzóval végezhető szerkesztések 61
17. §. Vonalzóval végezhető affin szerkesztések 64
18. §. Vonalzóval végezhető metrikus szerkesztések 68
19. §. A Poncelet—Steiner-féle szerkesztések 72
20. §. Az alapkör középpontjának nélkülözhetetlensége a Poncelet—Steiner-féle szerkesztésekben 74
21. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések egy akármilyen kicsiny körív és a hozzátartozó kör középpontjának felhasználásával 78
22. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések egy ismeretlen középpontú kör, vagy egy kúpszelet felhasználásával. Projektív másodfokú szerkesztések 79

IV. Geometriai szerkesztések a vonalzó használatának kiterjesztésével

23. §. Egységátrakó vonalzó vagy normavonalzó. Hilbert-féle szerkesztések 83
24. §. A párhuzamosság axiómájától független Hilbert-féle szerkesztések 88
25. §. Körző helyettesítése egységátrakó vonalzóval. Párhuzamos élű vonalzó 91
26. §. Szögvonalzó. Derékszögvonalzó 94
27. §. Szerkesztések a gömbön 95

V. Köbös szerkesztések

28. §. Harmad- és negyedfokú egyenletek. Köbös alapszerkesztések. Köbösen szerkeszthető pontok és koordinátáik számteste 99
29. §. Betolóvonalzó 102
30. §. Több derékszögvonalzó 107
31. §. Papírhajtogatás 110
32. §. Geometriai szerkesztések körtől különböző megrajzolt kúpszelet felhasználásával. Smith és Kortum tétele 112
33. §. Néhány szerkesztés körtől különböző kúpszelet felhasználásával 115
34. §. Ellipsziskörző, kúpszeletkörző 123
35. §. Nikomédész-féle kagylóvonal, konkhoisz. Konkhoiszkörző 126
36. §. Harmadrendű görbék 128

VI. Csuklós szerkezetek. Geometrográfia

37. §. Egyenes vonal húzása csuklós szerkezettel 131
38. §. Geometrografikus képlet. A geometriai szerkesztések egyszerűsége 134

VII. Körnégyszögesítés

39. §. A körnégyszögesítés és körkiegyenesítés feladata 137
40. §. Lindemann általános tételének bizonyítása 138
41. §. Lindemann általános tételének néhány következménye. Kör-, ellipszis-, hiperbola- és parabolaszelet négyszögesítése 142
42. §. Négyszögesíthető körkétszögek. Hippokratész holdacskái 145
43. §. Viviani tétele 147

Irodalom 151
Név- és tárgymutató 153

I. KÖRZŐVEL ÉS VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ SZERKESZTÉSEK ALGEBRAI VIZSGÁLATA

1. §. KÖRZŐVEL ÉS VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK ÉS ALGEBRAI ISMERTETŐJELEIK

Az elemi geometriai szerkesztések segédeszköze a *vonalzó* és a *körző*. *A vonalzót két adott ponton átmenő egyenes húzására, a körzőt adott pont körül két adott pont távolságával egyenlő sugarú kör rajzolására használjuk.*[1] Szerkesztett pontoknak tekintjük azokat (és csak azokat) a pontokat, amelyeket adott pontok felhasználásával ily módon rajzolt egyenesek és körök metszéspontjai szolgáltatnak. A már szerkesztett pontokat a további szerkesztésekben adott pontoknak kell tekintenünk.

A vonalzóval és körzővel végezhető szerkesztéseket tehát a következő háromféle alapszerkesztésből tehetjük össze:

1. *két egyenes metszéspontjának meghatározása,*
2. *egyenes és kör metszéspontjainak meghatározása,*
3. *két kör metszéspontjainak meghatározása.*

Az alapszerkesztések véges számú ismétlésével végrehajtható szerkesztéseket *elemi szerkesztések*nek nevezzük.

Bármely geometriai szerkesztési feladatot következőképp lehet fogalmazni: Adva van a síkban bizonyos számú pont; olyan pontot vagy pontokat kell szerkeszteni, amelyek egymáshoz és az adott pontokhoz meghatározott vonatkozásban vannak.

Csak fogalmazásra nézve általánosabb eset, amikor pontokon kívül adva vannak egyenesek, továbbá adva vannak a szerkesztésben külön szerepet nem játszó pontok által távolságok és szögek. Ilyenkor az adott egyenesek helyett ezeknek tetszőleges két-két pontját adott pontoknak tekintjük.

Megjegyzendő, hogy szerkesztési feladatok megoldásánál gyakran felhasználunk *önkényesen felvett* pontokat is, olyan pontokat, amelyek választása nem játszik szerepet.

Azt a kérdést, hogy valamely szerkesztés körzővel és vonalzóval elvégezhető-e, legkönnyebben úgy dönthetjük el, hogy a geometriai szerkesztést algebrai alakra hozzuk. Sokszor ez az egyetlen eljárás, amely célhoz vezet.

[1]) A geometriai szerkesztések klasszikus elmélete Euclides követelményeivel megegyezésben feltételezi, hogy bármely két ponton át lehet vonalzóval egyenest húzni és bármely pont körül bármely sugárral lehet kört rajzolni.

A geometriai szerkesztésnek algebrai köntösbe való öltöztetése végett a síkon felveszünk egy derékszögű koordinátarendszert. Egyszerűség kedvéért ezt a koordinátarendszert úgy választjuk meg, hogy kezdőpontja és x-tengelyének egységpontja egy-egy adott pontba essék. Az ilyen koordinátarendszert az adatokhoz kapcsoltnak nevezzük. Ha csak egy O pont van megadva, akkor bármely olyan derékszögű koordinátarendszer, amelynek O a kezdőpontja és egyik adott szakasz az egysége, az adatokhoz kapcsolt. Ha a szerkesztési feladatban nincs lényeges pont, hanem csak távolságok vannak megadva, akkor bármely olyan derékszögű koordinátarendszer, amelyben az egységszakasz egy adott szakassza egyenlő, az adatokhoz kapcsolt. Ha az utóbbi két esetben nincs adott távolság, akkor a koordinátarendszer x-tengelyének egységpontját, illetőleg kezdőpontját is tetszőlegesen vehetjük fel.

A koordinátarendszer megválasztása után az adott szakaszokat és szögeket is pontokkal ábrázolhatjuk, mégpedig a $(d, 0)$ ponttal a d hosszúságú szakaszt, a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ponttal pedig az α szöget.

Ha a és b az így kapott véges számú pontból körzővel és vonalzóval szerkeszthető két pontnak egy-egy koordinátája, vagy egy pontnak két koordinátája, vagyis más szóval kifejezve: ha a és b szerkeszthető szám, akkor

$$a+b, \quad a-b, \quad ab, \quad \frac{a}{b} \quad (b \neq 0) \quad \text{és} \quad \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

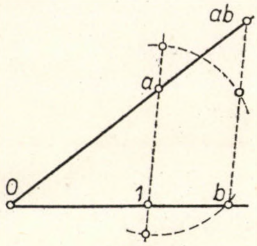
is szerkeszthető szám.

Az $a+b$ és $a-b$ szerkesztése közismert. Az ab és az $\frac{a}{b}$ szám szerkesztése végett feltételezhetjük, hogy a és b pozitív, $\sqrt{a}$ szerkesztése végett pedig fel is kell tételeznünk, hogy a pozitív. A szerkesztést az 1—3. ábra mutatja.

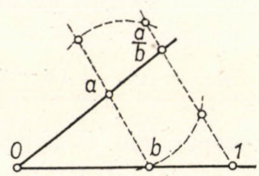
Az első két ábrában egy szög szárainak egy párhuzamos egyenespárral való metszésével kapjuk az ab és az $\frac{a}{b}$ számot. Adott ponton átmenő és adott egyenessel párhuzamos szerkesztésére azt a tételt használtuk fel, hogy az olyan konvex húrnégyszög, amelynek szemközt fekvő két oldala egyenlő, vagy trapéz, vagy parallelogramma.

A harmadik ábrában a mértani középarányos ismert szerkesztésével kapjuk a $\sqrt{a}$ számot.

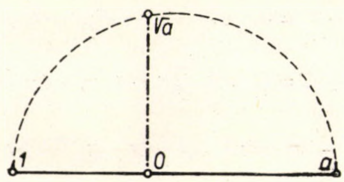
A számoknak egy olyan összességét, amely hozzátartozó bármely két számmal együtt azok összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát is tartalmazza (zérust, mint osztót kizárva), *számtest*nek nevezzük. A legkisebb, legszűkebb olyan számtest, amelyben van zérustól különböző szám is, a racionális számok összességéből álló *racionális számtest*. Ez a számtest az egységből racionális műveletekkel nyilvánvalóan felépíthető és bármely olyan számtestnek része, amelynek van zérustól különböző száma. Ha ugyanis egy számtest tartalmazza az $a(\neq 0)$ számot, akkor tartalmazza az $\frac{a}{a}=1$ számot és ezzel együtt a racionális számtestet is.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A számtest értelmezésével kimondhatjuk a következő tételt:

Egy derékszögű koordinátarendszerben az adott pontokból az adott távolságok és szögek felhasználásával körzővel és vonalzóval szerkeszthető pontok koordinátái egy S^* számtestet alkotnak. Ennek a számtestnek jellemző tulajdonsága, hogy bármely pozitív számának négyzetgyökét is tartalmazza.[2])

Az adatokhoz kapcsolt koordinátarendszerben ez a tétel is igaz:

Adott pontokból adott távolságok és szögek felhasználásával körző és vonalzó segítségével olyan és csak olyan pontok szerkeszthetők, amelyeknek az adatokhoz kapcsolt egy tetszőleges derékszögű koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái abban a legkisebb S^* számtestben vannak, amely magában foglalja az adatokhoz tartozó pontok koordinátáit és bármely pozitív számának négyzetgyökét.

[2]) A szerkeszthető számok S^* számteste a koordinátarendszer megválasztásától független a következő értelemben. Ha egy olyan más x', y' derékszögű koordinátarendszert veszünk fel, amelynek kezdőpontja és egységpontja (az $x'=1$ és $y'=1$ koordinátájú pont) adott, vagy az adatokból körzővel és vonalzóval szerkeszthető pont, akkor egy P pontnak x, y és x', y' koordinátái között olyan lineáris transzformációs egyenletek vannak, amelyeknek együtthatói hozzátartoznak az adatok x és y koordinátáival meghatározott S^* számtesthez. Ha tehát az x, y és x', y' koordinátapár közül az egyik hozzátartozik az S^* számtesthez, akkor a másik is.

Ennek a tételnek igazolására nyilvánvalóan elég azt kimutatnunk, hogy olyan pontokból, amelyeknek koordinátái az S^* számtesthez tartoznak, az alapszerkesztésekkel szintén S^*-hoz tartozó koordinátákkal bíró pontokat kapunk.

Ha ugyanis a $P_1=(x_1, y_1)$ és a $P_2=(x_2, y_2)$ pont koordinátái és r az S^* számtesthez tartoznak, akkor a P_1P_2 egyenes, illetőleg a P_1 pont körül r sugárral leírt kör

$$x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1=0,$$

illetőleg

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

egyenletének együtthatói is nyilvánvalóan hozzátartoznak az S^* számtesthez.

Azoknak a pontoknak koordinátái tehát, amelyekhez az 1., 2., illetőleg 3. alapszerkesztéssel jutunk,

$$Ax+By+C=0 \quad \text{és} \quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$Ax+By+C=0 \quad \text{és} \quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

illetőleg

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \text{és} \quad (x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

alakú két egyenletnek tesznek eleget, amelyekben $A, B, C, A_1, B_1, C_1, a, b, a_1, b_1, r$ és r_1 az S^* számtesthez tartozó számok.[3])

Az ilyen egyenletrendszerek megoldásai azonban vagy R, vagy $R+R_1\sqrt{R_2}$ alakú számok, ahol R, R_1 és R_2 a két egyenlet együtthatóinak racionális kifejezése és emiatt az S^* számtesthez tartozó szám.

Véges számú elsőféle alapszerkesztésből álló szerkesztés *vonalas*, vagy *lineáris szerkesztés*, mert az így szerkesztett pontok koordinátáinak kiszámítására lineáris egyenletek megoldása szükséges. Ilyen szerkesztés elvégzésére vonalzó elégséges.

Nem lineáris elemi szerkesztés második- vagy harmadikféle alapszerkesztést is tartalmaz, elvégzésére körzőre is szükség van. Az így szerkeszthető pontok koordinátáinak kiszámítására másodfokú, kvadratikus egyenlet megoldása szükséges,

[3]) Vannak olyan geometriai szerkesztések, amelyekben paraméterek szerepelnek. Az AB szakasz felezőpontja pl. A és B körül az AB szakasz felénél nagyobb bármely r sugárral leírt körpár metszéspontjait összekötő egyenesnek az AB egyenessel való metszéspontja. Az r sugár itt paraméter. Minthogy tetszőlegesen vehetjük fel, azért az AB szakasz felénél nagyobb akármelyik adott szakasszal, pl. az AB szakasszal egyenlőnek választhatjuk. Így elérhetjük azt, hogy még átmenetileg se szerepeljenek szerkesztéseinkben olyan pontok, amelyeknek koordinátái nem tartoznak az S^* számtesthez. Ugyanezt meg lehet tenni bármely olyan szerkesztésben, amelyben paraméterek szerepelnek.

az ilyen elemi szerkesztés *kvadratikus szerkesztés*. Valós metszéspontokat csak akkor kapunk, ha az $R+R_1\sqrt{R_2}$ alakú megoldásban $R_2 \geqq 0$. Geometriai szerkesztésekben a képzetes metszéspontokat figyelmen kívül hagyhatjuk.

Egymást (valós pontokban) nem metsző K_1 és K_2 kör képzetes metszéspontjait össze lehet ugyan kötni valós egyenessel, a két kör hatványvonalával. Ennek szerkesztése azonban csupa valós pontok felhasználásával úgy történik, hogy olyan K_3 és K_4 kört veszünk fel, amely mind a K_1, mind a K_2 kört metszi. A K_1 és K_2 kör hatványvonala a K_1, K_2, K_3 és a K_1, K_2, K_4 körhármas hatványpontjának összekötő egyenese.

Hasonlóképp meg lehet szerkeszteni egy K körhöz és a K kört nem metsző e egyeneshez azt az adott P ponton átmenő K' kört, amelynek a K körrel való hatványvonala az e egyenes. Ez a K' kör tehát átmegy a P ponton és az e egyenesnek a K körrel való képzetes metszéspontjain.

Ezzel a kimondott tételt teljesen bebizonyítottuk.

2. §. HARMADFOKÚ IRREDUCIBILIS EGYENLET GYÖKEI ELEMI SZERKESZTÉSÉNEK LEHETETLENSÉGE

Föltételezzük, hogy a valós együtthatókkal bíró

$$f(x)=x^3+H_1x^2+H_2x+H_3=0$$

harmadfokú egyenlet a H_1, H_2, H_3 együtthatót magában foglaló S_0 számtestben irreducibilis. Ez azt jelenti, hogy az $f(x)$ polinom nem írható fel olyan első és másodfokú kifejezés szorzataként, amelynek együtthatói az S_0 számtestnek szintén számai.

Az $f(x)=0$ egyenlet gyökeinek szerkesztése végett a derékszögű koordinátarendszert tetszőlegesen vehetjük fel. Ennek felvétele után az x-tengely 1, H_1, H_2, H_3 abszcisszájú pontja meghatározza az $f(x)=0$ egyenletet. Az egyenlet gyökeinek meghatározására irányuló szerkesztésben tehát ez a négy pont megadott pont.

Föltesszük, hogy az $f(x)=0$ harmadfokú egyenlet x_1 gyöke körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Ez az x_1 szám nem tartozik az S_0 számtesthez, mert ha hozzátartoznék, akkor $f(x)$ az S_0 számtestben reducibilis volna, mivel $f(x)$ osztható $(x-x_1)$-gyel.

Az a föltevés, hogy x_1 körzővel és vonalzóval szerkeszthető, azt jelenti, hogy a három alapszerkesztésnek *véges számú* megfelelő alkalmazásával az x tengely 1, H_1, H_2 és H_3 pontjából eljuthatunk az x_1 ponthoz.

Az x_1 pont szerkesztése végett egymás után véges számszor alkalmazott alap szerkesztésekben új pontokat az adott és a belőlük szerkesztett pontokkal meghatározott egyenesek és körök metszéspontjai szolgáltatnak. A már szerkesztett pontokat a következő szerkesztésekre nézve adott pontoknak kell tekintenünk. A további szerkesztésekben az S_0 számtest szerepét tehát az a számtest veszi át, amely S_0 számain kívül a szerkesztett pontok koordinátáit is magában foglalja. Ez az S számtest akkor egyezik meg S_0-lal, ha a szerkesztett pontok koordinátái S_0-hoz tartoznak. Ha azonban valamelyik szerkesztett pont koordinátája nem száma S_0-nak, akkor az S számtest S_0-nak egy kibővítése. Ez a számtest tartalmazza S_0 számait és mindazokat a számokat, amelyek S_0 számaiból és a már szerkesztett pontok koordinátáiból a racionális műveletek tetszőleges alkalmazásával származnak.

Mivel x_1 nincs az S_0 számtestben, de föltevésünk szerint véges számú alapszerkesztéssel megkaphatjuk az x-tengely x_1 abszcisszájú pontját, azért S_0-ból a már szerkesztett pontok koordinátáinak a számtesthez való fokozatos hozzácsatolása után végül olyan számtesthez kell jutnunk, amely az x_1 számot magában foglalja.

Egy újonnan kapott P pont koordinátái csak akkor bővíthetik az előzőleg szerkesztett pontok koordinátáit tartalmazó S számtestet, ha P-t körnek egyenessel, vagy körrel való metszéspontjaként kapjuk. Ekkor P koordinátái olyan másodfokú egyenleteknek gyökei, amelyeknek együtthatói S-hez tartozó számok. P koordinátái tehát akkor bővítik az S számtestet, ha P-nek legalább egyik koordinátája $u=p+q\sqrt{c}$ alakú, ahol p, $q\,(\neq 0)$ és $c\,(>0)$ hozzátartozik az S számtesthez, $\sqrt{c}$ azonban nem.

Az $u=p+q\sqrt{c}$ számnak az S számtesthez való csatolása, adjungálása a számtestet $S'=S(u)=S(p+q\sqrt{c})$ számtestté bővíti. A számtest értelmezése szerint S' számai u-ból és S számaiból racionális műveletekkel származnak és emiatt u-nak olyan racionális kifejezései, amelyeknek együtthatói S-hez tartoznak. Mivel p és q S-hez tartozik és mivel $\sqrt{c}=\dfrac{u-p}{q}$ és $u=p+q\sqrt{c}$ azért az $S(u)=$ $=S(p+q\sqrt{c})$ és az $S(\sqrt{c})$ számtest összeesik.

Az $S'=S(p+q\sqrt{c})=S(\sqrt{c})$ számtest bármely száma $a+b\sqrt{c}$ alakú, ahol a és b az S számtesthez tartozó szám.

Egyfelől ugyanis bármely ilyen alakú szám S'-höz tartozik, mivel az a, b és $\sqrt{c}$ számmal együtt $a+b\sqrt{c}$ is száma az S' számtestnek; másfelől pedig bármely két ilyen $A_1=a_1+b_1\sqrt{c}$ és $A_2=a_2+b_2\sqrt{c}$ számnak nemcsak az összege és különbsége, hanem a szorzata és hányadosa is ilyen alakú, mivel

$$A_1A_2=(a_1a_2+b_1b_2c)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{c} \quad \text{és ha } A_2\neq 0, \text{ akkor}$$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{a_1+b_1\sqrt{c}}{a_2+b_2\sqrt{c}}=\frac{a_1+b_1\sqrt{c}}{a_2+b_2\sqrt{c}}\cdot\frac{a_2-b_2\sqrt{c}}{a_2-b_2\sqrt{c}}=\frac{(a_1a_2-b_1b_2c)+(b_1a_2-a_1b_2)\sqrt{c}}{a_2^2-b_2^2c},$$

és itt a nevező zérustól különbözik. Ha ugyanis $a_2^2 - b_2^2 c = 0$ volna, akkor föltevésünkkel ellentétben $\sqrt{c} = \frac{a_2}{b_2}$ és ezzel együtt $u = p + q\sqrt{c}$ is hozzátartoznék az S számtesthez.

Ezzel az előbbi állítást bebizonyítottuk.

Az $f(x) = 0$ harmadfokú egyenletnek az S_0 számtestben nincs gyöke, de föltevésünk szerint S_0-ból a leírt módon való fokozatos bővítéssel el lehet jutni olyan számtesthez, amelyben van gyöke. Ezért föltételezhetjük, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek még nincs gyöke az S számtestben, de már van gyöke az $S' = S(\sqrt{c})$ számtestben, ahol c az S számtest egy pozitív száma. Ha x_1 az $f(x) = 0$ egyenletnek az S' számtestben levő gyöke, akkor az előzők szerint $x_1 = a + b\sqrt{c}$ alakban írható, ahol a, b és $c(>0)$ S-hez tartozik, $\sqrt{c}$ azonban nem.

Mivel $f(x_1) = 0$, azért

$$f(a + b\sqrt{c}) = A + B\sqrt{c} = 0,$$

ahol

$$A = (a^3 + 3ab^2c) + H_1(a^2 + b^2c) + H_2a + H_3$$

és

$$B = (3a^2b + b^2c) + 2H_1ab + H_2b.$$

Az $A + B\sqrt{c} = 0$ egyenlet csak akkor állhat fenn, ha $B = 0$. Ha ugyanis $B \neq 0$ volna, akkor föltevésünkkel ellentétben $\sqrt{c} = -\frac{A}{B}$ és $x_1 = a + b\sqrt{c}$ már az S számtestnek is száma volna.

Ha azonban $B = 0$, akkor egyúttal $A = 0$ és így

$$f(a - b\sqrt{c}) = A - B\sqrt{c}$$

is eltűnik. Az $f(x) = 0$ egyenletnek tehát nemcsak $x_1 = a + b\sqrt{c}$, hanem $x_2 = a - b\sqrt{c}$ is gyöke. Ha ennek az egyenletnek x_3 a harmadik gyöke, akkor a gyökök és az egyenlet együtthatói között levő összefüggések miatt

$$x_1 + x_2 + x_3 = -H_1, \quad \text{vagyis} \quad x_3 = -H_1 - (x_1 + x_2) = -H_1 - 2a.$$

Ez azonban ahhoz az ellentmondáshoz vezet, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek már az S számtestben is van gyöke.

Ebből az ellentmondásból következik, hogy az $f(x) = 0$ irreducibilis harmadfokú egyenletnek x_1 gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

Irreducibilis harmadfokú egyenlet gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető.

Ha a racionális együtthatókkal bíró harmadfokú $f(x)=0$ egyenlet (a racionális számtestben) reducibilis, akkor van racionális gyöke, mert az $f(x)$ polinomnak van racionális együtthatókkal bíró elsőfokú tényezője. Ha pedig x_1 az egyenlet racionális gyöke, akkor az egyenlet reducibilis, mert $f(x)$ osztható az $x-x_1$ tényezővel. Ezért az előbbi tételből következik:

Racionális együtthatókkal bíró olyan harmadfokú egyenletnek, amelynek nincs racionális gyöke, nincs körzővel és vonalzóval szerkeszthető gyöke sem.

Ha a harmadfokú $f(x)=0$ egyenlet H_1, H_2 és H_3 együtthatója egész szám, akkor véges számú lépéssel el lehet dönteni, hogy az egyenletnek van-e racionális gyöke, mivel az egyenlet racionális gyöke szükségképpen egész szám és a H_3 szám osztója.

Ha ugyanis a és b $(b>0)$ olyan közös osztó nélküli egész szám, hogy

$$b^3 f\left(\frac{a}{b}\right) = a^3 + b(H_1 a^2 + H_2 ab + H_3 b^2) =$$

$$= a(a^2 + H_1 ab + H_2 b^2) + H_3 b^3 = 0,$$

akkor az előző kifejezés két alakja közül az elsőből az következik, hogy $b=1$, a másodikból pedig az, hogy H_3 osztható a-val.

3. §. ELEMI SZERKESZTÉSSEL MEG NEM OLDHATÓ HARMADFOKÚ FELADATOK

a) Déloszi probléma. Kocka térfogatának sokszorozása

A déloszi probléma egy kocka éléből kétszer akkora térfogatú kocka élének, vagyis a hosszúság egységéből a $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakasznak a szerkesztése.[4])

A déloszi feladat elemi szerkesztéssel nem oldható meg.

[4]) A feladat keletkezését Plutarkhosz görög történetíró írta meg. Egyszer Délosz szigetén pestis dühöngött. A délosziak szorultságukban a Delphoi-i jósdához fordultak. Onnan arra a kérdésükre, hogy mitevők legyenek, azt a feleletet kapták, hogy cseréljék ki Apollo Delphoi-i kocka alakú oltárkövét kétszer akkora kocka alakú oltárkővel, ha a pestistől meg akarnak szabadulni.

Ez az aránylag könnyűnek látszó feladat a régi görögöknek legyőzhetetlen nehézséget okozott, de egyúttal számos értékes geometriai vizsgálatnak megindítója lett. A feladat megoldására Platón mechanikai eszközt készített, Arkhütasz térgörbét vizsgált, Menaikhmosz felfedezte a kúpszeleteket, Nikomédész a konkhoisztot, Dioklész a cisszoiszt stb.

Ennek kimutatására az előző § utolsó tétele miatt csak azt kell kimutatnunk, hogy az $x^3-2=0$ egyenletnek nincs racionális gyöke.

Ha ennek az egyenletnek volna racionális gyöke, akkor az egész szám és -2 osztója volna. Mivel $+1$, -1, $+2$, -2 közül egyik sem gyöke az $x^3-2=0$ egyenletnek, azért ennek az egyenletnek nincs racionális gyöke.

b) Szögharmadolás (triszekció), vagyis szögnek vagy körívnek három egyenlő részre osztása

Mivel a φ szögből $\cos\varphi$ és $\cos\varphi$-ből a φ szög egyszerűen szerkeszthető, azért a feladatunk egyenértékű $\cos\frac{\varphi}{3}$-nak $\cos\varphi$-ből való szerkesztésével.

Moivre képlete szerint

$$\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)^3 = \cos\varphi+i\sin\varphi.$$

A valós részeket véve, adódik ebből

$$\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3} = 4\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3} = \cos\varphi,$$

vagyis

$$(1)\qquad \left(2\cos\frac{\varphi}{3}\right)^3-3\left(2\cos\frac{\varphi}{3}\right)-2\cos\varphi = 0.$$

Ebből a szögharmadolás (triszekció) egyenlete

$$(2)\qquad x^3-3x-C=0,\quad |C|\leqq 2,$$

ahol $C=2\cos\varphi$, $x=2\cos\frac{\varphi}{3}$.

Ennek a harmadfokú egyenletnek a $C=-2$ ($\varphi=\pi$) esetben $x=1=2\cos\frac{\pi}{3}$ gyöke. A π szögnek és vele a derékszögnek harmadolása tehát körzővel és vonalzóval elvégezhető. Ha azonban C tetszőleges szám, akkor az $x^3-3x-C=0$ egyenlet gyökét körzővel és vonalzóval általánosságban nem lehet szerkeszteni, noha végtelen sok olyan C szám van, amelyre nézve az egyenletnek van szerkeszthető gyöke. Ilyenek pl. a $C=(a+b\sqrt{c})^3-3(a+b\sqrt{c})$ alakú számok, ahol a, b és c racionális szám.

2*

Tetszőlegesen megadott szöget körzővel és vonalzóval nem lehet három egyenlő részre osztani.

Ennek igazolására elég kimutatnunk azt, hogy a legkönnyebben szerkeszthető szöget, a $\frac{\pi}{3}$ szöget sem lehet körzővel és vonalzóval három egyenlő részre osztani. Erre az esetre a szögharmadolás egyenlete:

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \tag{3}$$

Ennek az egyenletnek nincs racionális gyöke, mivel a -1 szám két osztója közül sem $+1$, sem -1 nem gyöke a (3) egyenletnek.

A 2. § utolsó tétele szerint ebből következik a kimondott tétel igazsága és egyúttal a következő tétel:

Egyenesszög kilenc egyenlő részre osztása elemi szerkesztéssel nem végezhető el.[5]

c) Szabályos kilencszög szerkesztése

Mivel bármely szöget lehet körzővel és vonalzóval felezni és kettővel szorozni, azért n-oldalú és $2n$-oldalú szabályos sokszög közül vagy mindkettő szerkeszthető, vagy egyik sem. Mivel a 18-oldalú szabályos sokszög egy oldalához tartozó $\frac{\pi}{9}$ középponti szög az előbb kimutatott tétel szerint körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető, azért igaz a következő tétel:

Szabályos kilencszög elemi módon nem szerkeszthető.

d) Szabályos hétszög szerkesztése

Kimutatjuk, hogy szabályos tizennégyszög elemi módon nem szerkeszthető. Ez ugyanazt jelenti, mint a következő tétel:

Szabályos hétszög elemi módon nem szerkeszthető.

Az egységsugarú körbe írt 14-oldalú szabályos sokszög $x = a_{14}$ oldalának trigonometrikus kifejezése

$$x = a_{14} = 2\sin\frac{\pi}{14} = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right) = -2\cos 2\frac{2\pi}{7}.$$

[5]) A matematikusok több ezer éve sejtették, hogy tetszőleges szöget nem lehet elemi szerkesztéssel harmadolni, de ennek első szigorú bizonyítása csak 1837-ben jelent meg (P. L. Wantzel, Liouville Journal II. k. 366). A szögharmadolást e könyv végén felsorolt tankönyveken kívül W. Breidenbach (Dreiteilung des Winkels, I. kiadás 1933, II. kiadás 1951) és R. C. Yates (The Trisection Problem, 1942) monográfiája tárgyalja.

Ha $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$, akkor $x = a_{14} = -(\varepsilon^2+\varepsilon^{-2})$. ε mint hetedik egységgyök eleget tesz a

$$\frac{z^7-1}{z-1} = z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$$

egyenletnek és így ε^{-3}-nal való szorzás után az

$$(\varepsilon^3+\varepsilon^{-3})+(\varepsilon^2+\varepsilon^{-2})+(\varepsilon+\varepsilon^{-1})+1=0$$

egyenlőséghez jutunk. Ebből az $\varepsilon^2+\varepsilon^{-2} = -x$ egyenlőség felhasználásával és négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$(x-1)^2 = [(\varepsilon^3+\varepsilon^{-3})+(\varepsilon+\varepsilon^{-1})]^2 =$$
$$= (\varepsilon^6+\varepsilon^{-6}+2)+2(\varepsilon^4+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2})+(\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}+2) =$$
$$= (\varepsilon^6+3\varepsilon^2+3\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-6})+2(\varepsilon^4+2+\varepsilon^{-4}) = -x^3+2x^2.$$

Az egységsugarú körbe írt szabályos 14-oldalú sokszög oldala tehát gyöke az

$$x^3-x^2-2x+1=0 \tag{4}$$

egyenletnek. Ennek az egyenletnek gyöke elemi módon nem szerkeszthető meg, mivel nincs racionális gyöke. Ezt éppúgy lehet kimutatni, mint a (3) egyenlet esetében.

Az egységsugarú körbe írt szabályos hétszög a_7 oldalára kapjuk az

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7} \quad \text{és} \quad y = 2\cos\frac{2\pi}{7} = \varepsilon+\varepsilon^{-1}$$

jelöléssel:

$$a_7 = 2\sin\frac{\pi}{7} \quad \text{és} \quad a_7^2 = 4\sin^2\frac{\pi}{7} = 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right) = 2-y.$$

Továbbá

$$\varepsilon^2+\varepsilon^{-2} = y^2-2 \quad \text{és} \quad \varepsilon^3+\varepsilon^{-3} = (\varepsilon+\varepsilon^{-1})(\varepsilon^2-1+\varepsilon^{-2}) = y(y^2-3).$$

Tehát

$$(\varepsilon^3+\varepsilon^{-3})+(\varepsilon^2+\varepsilon^{-2})+(\varepsilon+\varepsilon^{-1})+1 = 0$$

figyelembevételével y eleget tesz az

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

egyenletnek.

Ez az egyenlet irreducibilis, mert sem 1, sem -1 nem gyöke.

e) Néhány nem elemi háromszög-szerkesztési feladat

1. *Háromszög szerkesztése köréírt köre középpontjának az oldalaktól való távolságából, általában nem elemi feladat.*

Az ABC háromszög oldalait és szögeit a szokott módon a, b, c-vel, ill. α, β, γ-val jelölve két-két oldalának a harmadik oldalra való derékszögű vetítésével kapjuk, hogy

$$b \cos \gamma + c \cos \beta - a = 0, \quad c \cos \alpha + a \cos \gamma - b = 0, \quad a \cos \beta + b \cos \alpha - c = 0.$$

Ez a három egyenlet az oldalakban lineáris és homogén. Ezért a, b, c együtthatói determinánsának bármely ABC háromszögre el kell tűnnie. Ennek a determinánsnak kifejtése szolgáltatja a háromszög szögeinek

$$1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0 \tag{6}$$

goniometrikus azonosságát $(\alpha + \beta + \gamma = \pi)$.

A köréírt kör r sugara és középpontjának az oldalaktól való d_1, d_2, d_3 távolsága között

$$d_1 = r \cos \alpha, \quad d_2 = r \cos \beta, \quad d_3 = r \cos \gamma$$

összefüggés van. $\left(d_3 < 0, \text{ ha } \gamma > \frac{\pi}{2}\right)$.

A (6) azonosság r^3-nal való végigszorzása után kapjuk, hogy r eleget tesz az

$$r^3 - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)\, r - 2\, d_1 d_2 d_3 = 0$$

egyenletnek. Ez az egyenlet általában irreducibilis, pl. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ esetben is. Ebből következik az 1. tétel.

Könnyen beláthatjuk, hogy a háromszög magasságpontjának a távolsága egy csúcstól kétszer akkora, mint a köréírt kör középpontjának a távolsága a szemközt fekvő oldaltól.[6]) Emiatt *a háromszög szerkesztése magasságpontjának a csúcsoktól való távolságából általában nem elemi feladat.*

[6]) L. pl. L. Bieberbach, Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel 1952, 114.

2. *A háromszög szerkesztése egyik érintő (beírható vagy hozzáírható) köre középpontjának a csúcsoktól való távolságaiból általában nem elemi feladat.*

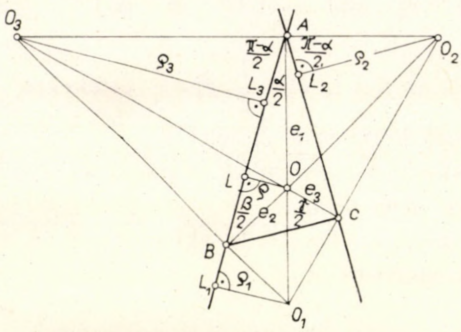
Minthogy tetszőleges háromszög α, β, γ szögeire $\frac{\pi-\alpha}{2}+\frac{\pi-\beta}{2}+\frac{\pi-\gamma}{2}=\pi$, azért a

$\frac{\pi-\alpha}{2}$, $\frac{\pi-\beta}{2}$, $\frac{\pi-\gamma}{2}$ szögekre a (6) goniometrikus azonosság alakja

$$1-\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=0. \tag{7}$$

A beírható kör ϱ sugarára és O középpontjának a csúcsoktól való $OA=e_1$, $OB=e_2$, $OC=e_3$ távolságára (4. ábra)

$$\varrho=e_1\sin\frac{\alpha}{2}=e_2\sin\frac{\beta}{2}=e_3\sin\frac{\gamma}{2}.$$



4. *ábra*

Ha $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ értékét az előbbi egyenletbe helyettesítjük, akkor $x=\frac{1}{\varrho}$-ra

$$x^3-\left(\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}+\frac{1}{e_3^2}\right)x-\frac{2}{e_1e_2e_3}=0.$$

Ez az egyenlet általában irreducibilis, például az $e_1=1$, $e_2=\frac{1}{2}$, $e_3=\frac{1}{3}$ értékekre. Ebből következik a beírható körre a 2. tétel.

Ha (7) bal oldalának utolsó tagját jobb oldalára visszük, az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, $\sin\frac{\beta}{2}$ és $\sin\frac{\gamma}{2}$ értékét $\cos\frac{\beta}{2}$, ill. $\cos\frac{\gamma}{2}$ értékével fejezzük ki, és a kapott egyenletet zérusra redukáljuk, kapjuk a következőt:

$$\left(1-\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}=0.$$

Legyen a háromszög k-adik ($k=1, 2, 3$) hozzáírható körének középpontja O_k, sugara ϱ_k. Ha mármost $AO_1=f_1$, $BO_1=g_2$, $CO_1=g_3$, akkor

$$\varrho_1=f_1\sin\frac{\alpha}{2}=g_2\cos\frac{\beta}{2}=g_3\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ha $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$ értékét innen kiszámítjuk és az előbbi egyenletbe helyettesítjük, $x=\frac{1}{\varrho_1^2}$ értékére az

$$x^3-2\left(\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)^2x-\frac{4}{f_1^2g_2^2g_3^2}=0$$

egyenletet kapjuk. Ez az $f_1=1$, $g_2^2=\frac{1}{2}$, $g_3^2=\frac{1}{3}$ értékekre irreducibilis. Ebből következik hozzáírható körre is a 2. tétel.[7])

3. *Háromszög szerkesztése kerületéből, beírható és köréírható körének sugarából csak kivételesen elemi feladat.*

Ha az oldalak összege: $a+b+c=2s$, akkor $s_1=s-a$, $s_2=s-b$ és $s_3=s-c$ az általánosságban irreducibilis

$$x^3-sx^2+(4r+\varrho)\varrho x-\varrho^2 s=0$$

egyenlet gyöke.

Ha ugyanis T a háromszög területe, akkor

$$s_1+s_2+s_3=s,\quad T=\varrho s=\varrho_1 s_1=\varrho_2 s_2=\varrho_3 s_3,\quad s_1s_2s_3=\varrho T=\varrho^2 s$$

és

$$s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1=s_1s_2s_3\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}\right)=\varrho T\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}\right)=\varrho(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3).$$

A gyökök és együtthatók közti összefüggések miatt állításunk igazolására csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3=4r+\varrho.$$

[7]) A háromszög szerkesztése az $AO_1=f_1$, $BO_2=f_2$, $CO_3=f_3$ szakaszból mindig elemi (l. szerző cikkét, Elemente d. Math. 6. k. (1951), 82).

Ha L, ill. L_1 az O, ill. O_1 középpontból az AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja és ha L_2, ill. L_3 O_2-ből az AC, ill. O_3-ból az AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja, akkor az AOL és AO_1L_1, ill. az AO_2L_2 és AO_3L_3 derékszögű háromszög A mellett fekvő hegyes szöge $\frac{\alpha}{2}$, ill. $\frac{\pi-\alpha}{2}$ (4. ábra). Ezért

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s_1} = \frac{\varrho_1}{s} = \frac{s_2}{\varrho_3} = \frac{s_3}{\varrho_2},$$

mert könnyen igazolhatólag $\overline{AL} = s_1$, $\overline{AL_1} = s$, $\overline{AL_2} = s_3$ és $\overline{AL_3} = s_2$.

Ezekből a képletekből

$$\varrho_1 - \varrho = (s - s_1)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\varrho_2 + \varrho_3 = (s_3 + s_2)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

és így

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = a\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2a}{\sin\alpha} = 4r.$$

Ezzel igazoltuk a 3. tételt.

A háromszög szerkesztése r, ϱ_1 és s_1 által hasonlóképp az általában irreducibilis harmadfokú

$$x^3 - s_1x^2 - (4r - \varrho_1)\varrho_1 x^2 + \varrho_1^2 s_1 = 0$$

egyenlethez vezet. Ennek az egyenletnek gyökei: s, $-s_2$ és $-s_3$, mert

$$s - s_2 - s_3 = s_1, \quad s\,s_2 s_3 = \frac{s\,s_1 s_2 s_3}{s_1} = \frac{T^2}{s_1} = \varrho_1^2 s_1$$

és

$$-s\,s_2 - s\,s_3 + s_2 s_3 = s\,s_2 s_3\left(-\frac{1}{s_3} - \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s}\right) =$$

$$= \frac{T}{s_1}T\left(-\frac{1}{s_3} - \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s}\right) = \varrho_1(-\varrho_3 - \varrho_2 + \varrho) = -(4r - \varrho_1)\,\varrho_1.$$

Számos más háromszögszerkesztés vezet harmadfokú egyenlethez. Ilyen a háromszögszerkesztés, ha adva van: két oldal és az egyik érintőkör sugara; az egyik szögfelező hossza, a köré írható és az egyik érintőkör sugara stb.

Ha K a háromszög köré írható körének középpontja, M a magasságpontja, S a súlypontja, akkor általában szintén harmadfokú irreducibilis egyenlethez vezet a háromszög szerkesztése a következő három-három pontból: K, M, O; K, M, O_1; K, S, O; S, M, O; S, M, O_1.[8])

Háromszög szerkesztése három szögfelezőnek (a háromszögbe eső) szakaszából aránytalanul nehezebb feladat.[9])

4. §. SZABÁLYOS TÍZSZÖG ÉS ÖTSZÖG

Eddig olyan feladatokat vizsgáltunk, amelyek megoldása körzővel és vonalzóval vagy sohasem, vagy, miként a triszekció, általánosságban nem lehetséges. Ezekkel szemben a szabályos tízszög és ötszög szerkesztése körzővel és vonalzóval keresztülvihető. Ezt már Eukleidész is tudta.

Az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög $x = a_{10}$ oldalára az

$$x = a_{10} = 2\sin\frac{\pi}{10} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{5} \tag{8}$$

egyenlőség érvényes. Ha $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, akkor $x = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$.

Az ε szám, mint ötödik egységgyök, gyöke a

$$\frac{z^5-1}{z-1} = z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$$

egyenletnek. Ezért

$$\varepsilon^{-2}(\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1) = (\varepsilon^2+2+\varepsilon^{-2})+(\varepsilon+\varepsilon^{-1})-1 = x^2+x-1 = 0.$$

Az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög x oldala tehát gyöke az

$$x^2+x-1 = 0 \tag{9}$$

egyenletnek. Ezt az egyenletet

$$1:x = x:(1-x)$$

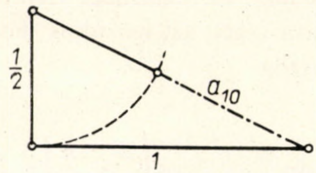
[8]) Más feladatok is találhatók W. Killing—H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts munkájában, I. k. 1910, 166—169. II. k. 1913, 110—123. — Derékszögű vagy egyenlő szárú háromszög szerkesztése is vezethet irreducibilis harmadfokú egyenletre.

[9]) Ennek a feladatnak az irodalma: A. Korselt, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 42. k. (1897), 304—312, P. Neiss és H. Wolf, J. reine u. angew. Math. 177. k. (1937), 129—133. ill. 134—151.; B. L. van der Waerden, ugyanitt 178. k. (1938), 65—68.

alakban is írhatjuk. Ebből következik, hogy az r sugarú körbe írt szabályos tízszög oldala a sugár aranymetszésekor kapott nagyobbik szakasszal egyenlő. A (9)-es egyenletből kapjuk, hogy

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}.$$

Ebből következik a_{10} derékszögű háromszöggel való ismert szerkesztése (5. ábra).



5. ábra

Az egységsugarú körbe írt szabályos ötszög a_5 oldalára fennáll az

$$a_5 = 2\sin\frac{\pi}{5} = 4\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 2\sin\frac{\pi}{10}\sqrt{4-\left(2\sin\frac{\pi}{10}\right)^2}$$

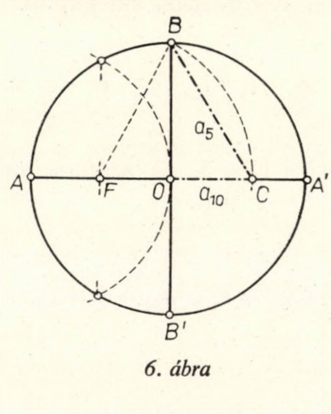
egyenlőség. Mivel a (8)-as és (9)-es egyenletből

$$a_{10} = 2\sin\frac{\pi}{10} \quad \text{és} \quad a_{10}^2 - 1 = -a_{10},$$

azért

$$a_5^2 = a_{10}^2(4-a_{10}^2) = 1+2a_{10}^2-(a_{10}^2-1)^2 = 1+a_{10}^2.$$

Ezzel igazoltuk a szabályos ötszög és tízszög következő szerkesztését:



6. ábra

Az O középpontú K körben megrajzoljuk a merőleges AA' és BB' átmérőpárt. Ha az AO sugár F felezőpontja körül a BF sugárral leírt kör C pontban metszi a kör OA' sugarát, akkor a BC, illetőleg OC szakasz a K körbe írt szabályos ötszögnek, illetőleg tízszögnek oldalával egyenlő (6. ábra).

5. §. SZABÁLYOS 34-OLDALÚ ÉS 17-OLDALÚ SOKSZÖG

Gauss 18 éves korában mutatta ki a következő tételt:

Szabályos tizenhétszög körzővel és vonalzóval szerkeszthető.

Ennek a tételnek kimutatása végett azt igazoljuk, hogy az egységsugarú körbe írt 34-oldalú szabályos sokszög

$$(10)\qquad x = a_{34} = 2\sin\frac{\pi}{34} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{34}\right) = 2\cos 4\frac{2\pi}{17}$$

oldala körzővel és vonalzóval szerkeszthető.

Ha

$$(11)\qquad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17} \quad \text{és} \quad c_h = \varepsilon^h+\varepsilon^{-h} = 2\cos h\frac{2\pi}{17},$$

akkor ε mint 17-edik egységgyök a

$$\frac{z^{17}-1}{z-1} = z^{16}+z^{15}+\ldots+z+1 = 0$$

körosztási egyenlet gyöke. Ha ebben a $z=\varepsilon$ helyettesítést végezzük és azután a kapott egyenlőséget ε^{-8}-nal átszorozzuk, azt kapjuk, hogy

$$(12)\qquad c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7+c_8 = -1.$$

A $c_h=2\cos h\frac{2\pi}{17}$ $(h=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$ számok mind valósak és közöttük nyilván a

$$(13)\qquad 2 > c_1 > c_2 > 2\cos\frac{\pi}{3} > c_3 > c_4 = a_{34} > 0 > c_5 > c_6 > c_7 > c_8 > -2$$

nagyságviszony van.

A c_h számok értelmezéséből következnek a

$$(14) \qquad c_h = c_{-h}, \quad c_{17-h} = c_h, \quad c_h c_k = c_{h-k} + c_{h+k}$$

könnyen igazolható összefüggések. Ezek miatt negatív indexű c_h pozitív indexűvel, 8-nál nagyobb indexű c_h 8-nál nem nagyobb indexűvel helyettesíthető és c_h számok szorzata ilyen számok összegével kifejezhető.

Ha a $c_1, c_2, \ldots, c_8$ számokat az

$$y_1 = c_1 + c_2 + c_4 + c_8 \quad \text{és} \quad y_2 = c_3 + c_5 + c_6 + c_7$$

összegekbe, ún. Gauss-féle félperiódusokba foglaljuk, akkor a (12)-es és (14)-es összefüggések felhasználásával ered:

$$y_1 + y_2 = -1 \quad \text{és} \quad y_1 \cdot y_2 = 4(c_1 + c_2 + \ldots + c_8) = -4.$$

y_1 és y_2 tehát az

$$y^2 + y - 4 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei. Mivel a (13)-as egyenlőtlenségsorozat miatt $y_1 > 0$, azért

$$(15) \quad y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \quad \text{és} \quad y_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2}.$$

A Gauss-féle félperiódusokat a következő módon két-két negyedperiódusba osztjuk:

$$y_{11} = c_1 + c_4 \quad \text{és} \quad y_{12} = c_2 + c_8; \quad y_{21} = c_3 + c_5 \quad \text{és} \quad y_{22} = c_6 + c_7.$$

A (14)-es összefüggések miatt

$$y_{11} + y_{12} = y_1 \quad \text{és} \quad y_{11} \cdot y_{12} = -1; \quad y_{21} + y_{22} = y_2 \quad \text{és} \quad y_{21} \cdot y_{22} = -1.$$

Emiatt y_{11} és y_{12}, illetőleg y_{21} és y_{22} gyöke az

$$y^2 - y_1 y - 1 = 0, \quad \text{illetőleg az} \quad y^2 - y_2 y - 1 = 0$$

másodfokú egyenletnek. Mindkét egyenletnek egyik gyöke pozitív, másik negatív. Mivel a (13)-as egyenlőtlenségsorozat miatt $y_{11} > 0$ és $y_{22} < 0$, azért

$$(16) \qquad y_{11} = \frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + 1^2} \quad \text{és} \quad y_{21} = \frac{y_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + 1^2}.$$

Minthogy $c_1+c_4=y_{11}$ és $c_1c_4=c_3+c_5=y_{21}$ és minthogy $c_1>c_4$, azért c_1 és $c_4=a_{34}=x$ az

$$x^2-y_{11}x+y_{21}=0$$

másodfokú egyenletnek gyöke és

(17) $$c_4=a_{34}=\frac{y_{11}}{2}-\sqrt{\left(\frac{y_{11}}{2}\right)^2-y_{21}}.$$

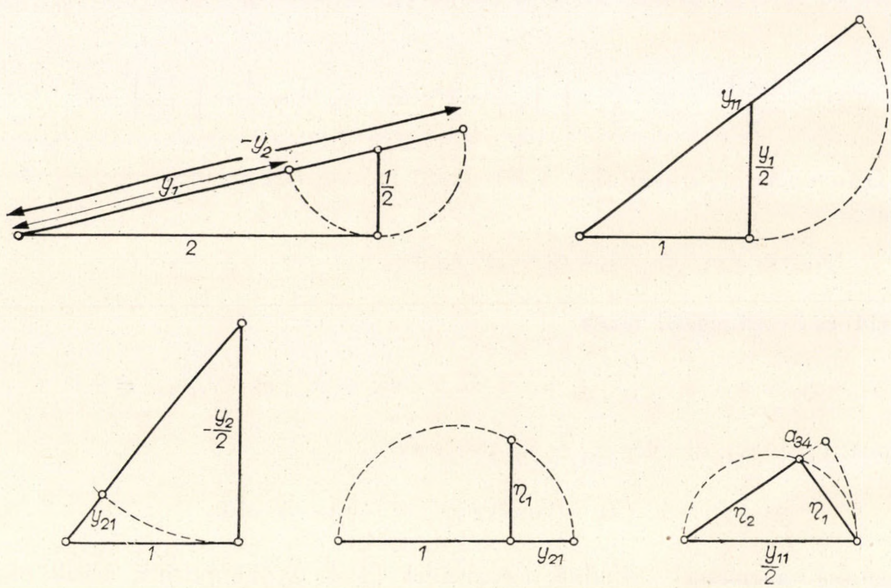
Ha tehát

(18) $$\eta_1=\sqrt{y_{21}} \quad \text{és} \quad \eta_2=\sqrt{\left(\frac{y_{11}}{2}\right)^2-\eta_1^2},$$

akkor

(19) $$a_{34}=\frac{y_{11}}{2}-\eta_2.$$

A (15), (16), (18) és a (19) jelzésű képlet szerint az egységsugarú körbe írt szabályos 34-oldalú sokszög a_{34} oldalát az alábbi öt ábra szerint szerkesztjük meg. A szerkesztésben figyelembe vesszük azt, hogy $y_2<0$.



7. ábra

Ezzel egyúttal a szabályos tizenhétszög szerkesztését is megmutattuk.

6. §. AZ OLYAN IRREDUCIBILIS ALGEBRAI EGYENLETEK FOKSZÁMA, AMELYEKNEK VAN ELEMI MÓDON SZERKESZTHETŐ GYÖKÜK

Bebizonyítottuk, hogy harmadfokú irreducibilis egyenletnek gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető. Arra a kérdésre, hogy milyen tulajdonságú irreducibilis egyenletek gyöke szerkeszthető körzővel és vonalzóval, a következő tétel ad választ:

Csak olyan (együtthatóinak számtestében) irreducibilis egyenletnek lehet elemi módon szerkeszthető gyöke, amelynek fokszáma 2-nek hatványa.

Ez a feltétel szükséges, de nem egyszersmind elégséges.

Ennek a tételnek kimutatása végett előbb a következő tételt bizonyítjuk be:

Ha az

$$f(x)=x^n+H_1x^{n-1}+\ldots+H_n$$

polinom irreducibilis az együtthatóit magában foglaló S számtestben, de reducibilis az $S(\sqrt{c})$ számtestben, ahol c az S számtesthez tartozó szám, akkor $f(x)$ az $S(\sqrt{c})$ számtestben két egyenlő fokú irreducibilis polinom szorzatára bomlik fel.

A tétel feltevései miatt nincs két olyan polinom, amelyek együtthatói S-hez tartoznak és amelyek szorzata $f(x)$-szel egyenlő, de létezik olyan $f_1(x)$ és $f_2(x)$ polinom, amelyeknek együtthatói az $S(\sqrt{c})$ számtestben vannak és amelyekre vonatkozólag

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x).$$

Mivel $f(x)$-ben a legmagasabb hatványnak egység az együtthatója, ugyanezt az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ polinomról is feltételezhetjük. Az ellenkező esetben ugyanis ezt elérjük, ha az $f_1(x)$ polinomot legmagasabb hatványának együtthatójával elosztjuk és ezzel a számmal az $f_2(x)$ polinomot megszorozzuk.

Mivel $f_1(x)$ és $f_2(x)$ együtthatói az $S(\sqrt{c})$ számtesthez tartoznak és mivel az ilyen számoknak $a+b\sqrt{c}$ az általános alakja, ahol a, b és c az S számtestnek száma, azért $f_1(x)$ és $f_2(x)$ nyilvánvalóan az

$$f_1(x) = g_1(x)+\sqrt{c}\,h_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x)+\sqrt{c}\,h_2(x)$$

alakban írható, ahol g_1, g_2, h_1, h_2 együtthatói az S számtesthez tartoznak, a $g_1(x)$ és $g_2(x)$ polinomban x legmagasabb hatványának együtthatója az egység, és g_1 magasabb fokú, mint h_1, g_2 pedig, mint h_2. (A h_1 vagy h_2 polinom állandó is lehet.)

Ebből következik, hogy

$$f=f_1f_2 = (g_1+\sqrt{c}\,h_1)(g_2+\sqrt{c}\,h_2) = (g_1g_2+ch_1h_2)+\sqrt{c}\,(g_1h_2+g_2h_1) = F+\sqrt{c}\,G$$

és hogy

$$G \equiv g_1(x) \cdot h_2(x) + g_2(x) \cdot h_1(x) \equiv 0.$$

Ha ugyanis $G \not\equiv 0$ volna, akkor a

$$\sqrt{c} = \frac{f(x) - F(x)}{G(x)}$$

egyenlőség miatt $\sqrt{c}$ is száma volna az S számtestnek és így $f(x)$ már az S számtestben reducibilis volna.

Mivel

$$(g_1 - \sqrt{c}\, h_1)(g_2 - \sqrt{c}\, h_2) \equiv (g_1 g_2 + c h_1 h_2) - \sqrt{c}\,(g_1 h_2 + g_2 h_1) \equiv F - \sqrt{c}\, G$$

és mivel G azonosan eltűnik, azért

$$f \equiv (g_1 + \sqrt{c}\, h_1)(g_2 + \sqrt{c}\, h_2) \equiv (g_1 - \sqrt{c}\, h_1)(g_2 - \sqrt{c}\, h_2)$$

és emiatt

$$f^2 = (g_1 + \sqrt{c}\, h_1)(g_2 + \sqrt{c}\, h_2)(g_1 - \sqrt{c}\, h_1)(g_2 - \sqrt{c}\, h_2) = (g_1^2 - c h_1^2)(g_2^2 - c h_2^2).$$

Az f, $g_1^2 - c h_1^2$ és $g_2^2 - c h_2^2$ polinomok együtthatói az S számtesthez tartoznak és S-ben f irreducibilis. Mivel a $(g_1^2 - c h_1^2)(g_2^2 - c h_2^2)$ $2n$-edfokú polinom osztható az n-edfokú f polinom négyzetével, azért $g_1^2 - c h_1^2$ és $g_2^2 - c h_2^2$ csak állandó tényezőben különbözhetik az f polinomtól. Mivel mindhárom polinomban a legmagasabb hatvány együtthatója az egység, azért

$$f \equiv g_1^2 - c h_1^2 \equiv g_2^2 - c h_2^2$$

és így

$$f \equiv (g_1 + \sqrt{c}\, h_1)(g_1 - \sqrt{c}\, h_1).$$

Ezzel kimutattuk, hogy $f(x)$ az $S(\sqrt{c})$ számtestben két egyenlőfokú polinom szorzatára bomlik fel. Ki kell még mutatnunk, hogy az $S(\sqrt{c})$ számtestben mindkét tényező irreducibilis.

Ha pl. a $g_1 + \sqrt{c}\, h_1$ polinom az $S(\sqrt{c})$ számtestben szétesnék két polinom szorzatára, akkor fennállana egy

$$g_1 + \sqrt{c}\, h_1 \equiv (\varphi_1 + \sqrt{c}\, \psi_1)(\varphi_2 + \sqrt{c}\, \psi_2) \equiv (\varphi_1 \varphi_2 + c \psi_1 \psi_2) + \sqrt{c}\,(\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1)$$

alakú azonos egyenlet, amelyben nemcsak a g_1 és h_1, hanem a φ_1, φ_2, ψ_1 és ψ_2 polinom együtthatói is az S számtesthez tartoznak és amelyben φ_k magasabb fokú, mint ψ_k $(k = 1, 2)$.

De akkor

$$(\varphi_1 - \sqrt{c}\,\psi_1)(\varphi_2 - \sqrt{c}\,\psi_2) = (\varphi_1\varphi_2 + c\psi_1\psi_2) - \sqrt{c}\,(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) \equiv g_1 - \sqrt{c}\,h_1$$

volna és így az

$$f \equiv (g_1 + \sqrt{c}\,h_1)(g_1 - \sqrt{c}\,h_1) = (\varphi_1^2 - c\,\psi_1^2)(\varphi_2^2 - c\,\psi_2^2)$$

azonos egyenlet miatt $f(x)$ — feltevésünk ellenére — az S számtestben is reducibilis volna.

Ezzel a második tételt teljesen bebizonyítottuk.

Most feltesszük, hogy az S számtestben irreducibilis n-edfokú $f(x)$ polinomnak x_1 gyöke körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Ekkor az S számtestből kiindulva véges számú megfelelő négyzetgyökkel való fokozatos bővítéssel olyan S' számtesthez jutunk, amelyben benne van az x_1 szám és amelyben $f(x)$ reducibilis és egyik tényezője $x - x_1$. A fokozatos bővítés úgy történik, hogy a számtesthez hozzákapcsoljuk (adjungáljuk) egy számának (a számtesthez nem tartozó) négyzetgyökét és az így kapott számtestet bővítjük tovább egy száma négyzetgyökének hozzákapcsolásával.

Amikor az S számtest fokozatos bővítésével először jutunk olyan számtesthez, amelyben $f(x)$ reducibilis, akkor $f(x)$ két egyenlőfokú $f_1(x)$ és $f_2(x)$ polinom szorzatára bomlik. Ebből következik, hogy $n = 2n_1$ páros szám. Ha x_1 az n_1-edfokú $f_1(x)$ polinomnak zérushelye, akkor a számtest további bővítése közben egyszer $f_1(x)$ is két irreducibilis és egyenlő fokú polinom szorzatára esik szét, mivel az utolsó számtestben, az S' számtestben $x - x_1$ az $f_1(x)$ polinomnak is irreducibilis tényezője. Emiatt $n_1 = 2n_2$ és hasonló okból $n_2 = 2n_3$, $n_3 = 2n_4$, ... is páros szám. Ebből következik, hogy az n szám 2-nek hatványa, mivel az utolsó irreducibilis tényező lineáris.

Ezzel az első tételt is teljesen igazoltuk.

A most kimutatott tételből következik, hogy irreducibilis harmadfokú egyenleteknek gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető, és következnek a 2. § tételei. De nem szerkeszthetők irreducibilis 5-öd, 6-od, 7-ed, 9-ed, 10-edfokú egyenletek gyökei sem.

Annak eldöntésére, hogy egy algebrai egyenlet gyökét lehet-e körzővel és vonalzóval szerkeszteni, vagy sem, egyik legfontosabb feladat annak megállapítása, hogy az egyenlet az együtthatóit tartalmazó legkisebb számtestben irreducibilis, vagy reducibilis. Ez különlegesebb vizsgálatot igényel.

II. KÖROSZTÁS

7. §. A KÖROSZTÁS FELADATA. GAUSS ÁLTALÁNOS TÉTELE

Egyik legfontosabb és legérdekesebb szerkesztési feladat a körosztás. Ez a körön megadott n számú olyan pont szerkesztését kívánja, amely a kört n egyenlő ívre bontja. Az ilyen n pont egy n-oldalú szabályos sokszögnek n szögpontja. Megfordítva: egy n-oldalú szabályos sokszög n szögpontja a sokszög köré írt kört n egyenlő körívre osztja. A körnek n egyenlő ívre való osztása és n-oldalú szabályos sokszög szerkesztése tehát lényegében azonos feladat.

A körosztást az ókorban az n szám páratlan értékei közül a 3, 5 és 15 számra tudták csak elvégezni. Az így kapott körívek folytatólagos felezésével a körosztás körzővel és vonalzóval való szerkesztését még a $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$ és a $15 \cdot 2^k$ számra is ismerték, ahol k akármilyen nem negatív egész számot jelenthet.

Az ókori eredmények után a körosztásban az első jelentős lépést Gauss tette, amikor felfedezte a szabályos tizenhétszög szerkesztését.

A körosztás lehetőségének további vizsgálatában elég azokra az esetekre szorítkoznunk, amikor n páratlan törzsszám, vagy ilyen szám négyzete. Ha ugyanis n a páratlan n_1 és n_2 viszonylagos törzsszám szorzata, akkor a kör $n_1 n_2$ egyenlő ívre való osztását vissza lehet vezetni n_1 és n_2 ívre való osztására. Ezt így láthatjuk be:

Mivel n_1 és n_2 viszonylagos törzsszám, azért az

$$xn_2 - yn_1 = 1$$

határozatlan egyenletnek van $x = k_1$ és $y = k_2$ egész szám megoldása. Ha a $k_1 n_2 - k_2 n_1 = 1$ egyenlőséget a $\frac{2\pi}{n_1 n_2}$ számmal átszoroz zuk, a kapott

$$\frac{2\pi}{n_1} k_1 - \frac{2\pi}{n_2} k_2 = \frac{2\pi}{n_1 n_2}$$

egyenlőség szerint a körosztásnak n_1 és n_2 esetre való ismerete után a körosztás az $n = n_1 n_2$ esetre a következőképpen végezhető el. A kört az $A_0 \equiv B_0$ pontjából kiindulva n_1 és n_2 egyenlő ívre osztjuk és A_k-val, illetőleg B_k-val jelöljük az első, illetőleg második körosztásban a közös osztóponttól ugyanabban a forgásértelemben számított k-adik osztópontot. Ekkor az $A_{k_1}B_{k_2}$ körív a körnek $\frac{1}{n_1 n_2}$ része.

Ennek a tételnek és az eddig bebizonyított tételeknek felhasználásával a körosztás minden olyan páratlan számra, amely a $3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$ számnak osztója, körzővel és vonalzóval elvégezhető.

A körosztás szerkeszthetőségének elméletében a következő és egyúttal befejező lépést szintén Gauss tette meg Disquisitiones arithmeticae (sect. VII. 1801.) c. művében. Gauss általános tétele a következő:

Ahhoz, hogy a körnek n egyenlő ívre való osztását körzővel és vonalzóval el lehessen végezni, szükséges és elegendő, hogy az n szám törzstényezőkre való bontásában a páratlan törzsszámok legfeljebb első hatványon forduljanak elő és mind

$$p_m = 1 + 2^{2^m}$$

alakúak legyenek.

A p_m alakú számok közül az első öt: $p_0 = 3, p_1 = 5, p_2 = 17, p_3 = 257$ és $p_4 = 65537$ mind törzsszám. Gauss általános tétele szerint tehát a kört körzővel és vonalzóval nem lehet n egyenlő ívre osztani, ha n értéke 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21—23, 25—29, 31, 33, 35—39, 41—47 stb.

A komplex síkon a $z^n = 1$ egyenlet gyökei a $|z| = 1$ kört n egyenlő ívre osztják. Ennek az egyenletnek $+1$-től különböző gyökei a

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$$

egyenletnek, a *körosztási egyenlet*nek tesznek eleget. A körosztásnak az euklidészi síkon és a körosztási egyenlet gyökeinek a komplex síkon való szerkeszthetősége nyilvánképp azonos feladat. Az általános Gauss-féle tételt a körosztási egyenlet vizsgálatával fogjuk bebizonyítani.

8. §. ELEMI SZERKESZTÉSEK A KOMPLEX SÍKON

Az eddigi vizsgálatokban valós pontokat és valós együtthatós egyenletek valós gyökeit szerkesztettük. Ezeket egyenesek és körök valós metszéspontjai szolgáltatták.[10])

[10]) A komplex síkon bármely számhoz *valós pont* tartozik és bármely ponthoz egy egyértelműen meghatározott szám tartozik, mégpedig az a szám, amelynek valós része a pont abszcisszája, képzetes része pedig a pont ordinátája. A komplex síkon tehát nem egyenes és kör, vagy két kör képzetes metszéspontjait szerkesztjük meg, hanem egyenesek és körök valós metszéspontjaihoz tartozó komplex számokat határozunk meg.

A komplex síkon egy komplex szám adott komplex számokból elemi módon akkor szerkeszthető, ha a komplex számot ábrázoló pont az adatokból szerkeszthető. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy egy komplex szám akkor szerkeszthető, ha valós és képzetes része, vagy abszolút értéke és szöge szerkeszthető. A szerkesztéstől megkívánjuk, hogy kört és egyenest csak véges számszor használjon fel.

A komplex számokra vonatkozó számolási szabályok tekintetbevételével az 1. § tételeit a következőképp lehet megfogalmazni:

Adott komplex számokból elemi módon szerkeszthető komplex számok olyan számtestet alkotnak, amely bármely számának négyzetgyökét is tartalmazza. Az adott komplex számokat magában foglaló ilyen tulajdonságú legkisebb számtestnek bármely száma elemi módon szerkeszthető.

Ha ugyanis

$$z_1 = a_1 + ib_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = a_2 + ib_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

akkor a komplex számokra vonatkozó szabályok szerint $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ és $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ a z_1 és z_2 szám ábrázoló pontjából könnyen szerkeszthető.

A $z = a + ib = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ szám négyzetgyökének, a

$$\sqrt{z} = \sqrt{a+ib} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{2} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{2}\right) = x + iy \qquad (k = 0, 1)$$

számnak szerkesztése is elemi, mivel pozitív szám négyzetgyökének szerkesztését és szögnek felezését kívánja meg. Könnyű x és y közvetlen szerkesztése is az a és b számból.

Az $a + ib = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ egyenletből következik, hogy

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{és} \quad 2xy = b.$$

Ebből a két egyenletből:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{és így} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x^2 - y^2 = a.$$

Ennélfogva

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{+a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

ahol a belső négyzetgyök előjelét pozitívnak, a két külső négyzetgyök előjelét pedig egyezőnek, vagy ellenkezőnek kell választani aszerint, amint b pozitív, illetőleg negatív.

Ebből következik ez a tétel:

Bármely másodfokú egyenlet gyökeit elemi módon lehet szerkeszteni.

Komplex síkon történő szerkesztéssel a 2. § általános tétele nyilvánvalóan akkor is érvényes, ha az egyenlet együtthatói komplexek, vagyis:

Egy irreducibilis harmadfokú egyenlet gyökét sem lehet elemi módon szerkeszteni.

Egy szám köbgyökének szerkesztése abszolút értéke köbgyökének és szöge harmadrészének szerkesztését és így lényegében a déloszi problémának és a triszekciónak együttes megoldását kívánja meg. Ezért csak kivételes esetekben lehet egy szám köbgyökének szerkesztése elemi.

A 6. § második tételének bizonyítása alkalmából nem hangsúlyoztuk, hogy c pozitív. A bizonyítás arra az esetre is érvényes, amikor az S számtest komplex számokat is tartalmaz és amikor c is komplex szám. Ennek megfelelően komplex együtthatókkal bíró egyenletekre és ezeknek komplex gyökeire is érvényes a következő tétel:

Ha egy irreducibilis algebrai egyenletnek fokszáma nem hatványa 2-nek, akkor az egyenletnek sem valós, sem képzetes gyöke nem szerkeszthető elemi módon.

9. § PÁRATLAN TÖRZSSZÁMHOZ TARTOZÓ KÖROSZTÁSI EGYENLET IRREDUCIBILITÁSA. TÖRZSSZÁMNÉGYZETHEZ TARTOZÓ KÖROSZTÁSI EGYENLET

Gauss általános tételének bebizonyításához szükségünk van a következő tételre:

Ha p páratlan törzsszám, akkor a

$$z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+z+1=0$$

körosztási egyenlet a racionális számtestben irreducibilis.

Ennek a tételnek kimutatására felhasználjuk Gauss-nak egy tételét, az úgynevezett Gauss-féle lemmát és a Schoenemann—Eisenstein-féle irreducibilitási tételt.

A Gauss-féle lemma a következő:

Ha az egész együtthatókkal bíró

$$F(x)=x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$$

polinom a racionális számtestben két polinom szorzatára bomlik, akkor $F(x)$ egyúttal két egész együtthatós polinom szorzataként is felírható.

(Ez a tétel akkor is érvényes, ha x^n együtthatója, A_0 egységtől különböző egész szám.)

Ha ugyanis

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = (x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \ldots + b_\mu)(x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \ldots + c_\nu),$$

ahol $\mu+\nu=n$ és a b_h és c_k együtthatók racionális számok, és ha B_h és C_k $(h=1, 2, \ldots, \mu;\ k=1, 2, \ldots, \nu)$ olyan egész szám, hogy

$$b_h = \frac{B_h}{B_0}, \quad c_k = \frac{C_k}{C_0}, \quad [B_0, B_1, \ldots, B_\mu] = [C_0, C_1, \ldots, C_\nu] = 1,$$

ahol a szögletes zárójel a benne foglalt számok legnagyobb közös osztóját jelenti, akkor

$$B_0 C_0 F(x) = (B_0 x^\mu + B_1 x^{\mu-1} + \ldots + B_\mu)(C_0 x^\nu + C_1 x^{\nu-1} + \ldots + C_\nu).$$

Ebből a megfelelő hatványok együtthatóinak összehasonlításával kapjuk, hogy

$$B_0C_0A_1 = B_0C_1 + B_1C_0, \quad B_0C_0A_2 = B_0C_2 + B_1C_1 + B_2C_0, \ldots, \quad B_0C_0A_{h+k} =$$
$$= B_0C_{h+k} + B_1C_{h+k-1} + \ldots + B_{h-1}C_{k+1} + \underline{B_hC_k} + B_{h+1}C_{k-1} + \ldots + B_{h+k}C_0.$$

Ha p a B_0C_0 számnak egy olyan törzsszám osztója, amely osztója a $B_0, B_1, \ldots, B_{h-1}, C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ számnak, de nem osztója a B_h és C_k számnak, akkor p az előbbi kifejezés bal oldalát osztja, de a jobb oldalát nem, mert a jobb oldalon egy tag (az aláhúzott tag) kivételével minden tagot oszt.

Ebből az ellentmondásból következik, hogy a B_0C_0 számnak nem lehet törzsszám osztója és így $B_0C_0=1$, tehát $B_0=C_0=1$.

Schoenemann és Eisenstein tétele[11]) a következő:

Ha az egész együtthatókkal bíró

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

polinom $A_1, A_2, \ldots, A_n$ együtthatója osztható a p törzsszámmal, de A_n nem osztható p^2-tel, akkor a polinom irreducibilis a racionális számtestben.

[11]) Schoenemann, Journal f. d. reine u. angew. Math. 32. k. (1846) 100. Eisenstein, uo. 39. k. (1850), 166.

Ha föltételezzük, hogy

$$(20) \qquad F(x) = (x^{\mu}+B_1x^{\mu-1}+\ldots+B_{\mu})(x^{\nu}+C_1x^{\nu-1}+\ldots+C_{\nu})$$

és hogy $B_1, B_2, \ldots, B_{\mu}, C_1, C_2, \ldots, C_{\nu}$ racionális szám, akkor ezek az együtthatók a Gauss-féle lemma szerint egyúttal egész számok. Mivel az $A_n = B_{\mu}C_{\nu}$ szám osztható p-vel, de p^2-tel nem, azért B_{μ} és C_{ν} közül az egyik, de csak egyik osztható p-vel. Ha C_{ν} osztható p-vel, akkor az $A_{n-1} = B_{\mu}C_{\nu-1}+B_{\mu-1}C_{\nu}$ összefüggés miatt $C_{\nu-1}$ is osztható p-vel, mivel A_{n-1} és C_{ν} osztható p-vel, de B_{μ} nem.

Hasonlóképp láthatjuk be a (20)-as azonosság jobb és bal oldalának összehasonlításával kapott

$$A_k = B_{\mu}C_{k-\mu}+B_{\mu-1}C_{k-\mu+1}+\ldots+B_0C_k,$$
$$(k = n-1, n-2, \ldots, 1;\ C_0 = 1,\ C_{\nu+1} = C_{\nu+2} = \ldots = 0)$$

összefüggéssorozaton, hogy $C_{\nu}, C_{\nu-1}, \ldots, C_1$ és $C_0 = 1$ is osztható p-vel.

Ebből az ellentmondásból következik Schoenemann és Eisenstein tételének igazsága.

E szerint a tétel szerint az

$$F(x+1) = \frac{(x+1)^p-1}{x} = x^{p-1}+\binom{p}{1}x^{p-2}+\ldots+\binom{p}{2}x+p$$

polinom irreducibilis és ezzel együtt az

$$F(z) = \frac{z^p-1}{z-1} = z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+z+1 = 0$$

körosztási egyenlet is.

Ha $n = p^2$ és p páratlan törzsszám, akkor a $z^p-1 = 0$ egyenlet bármely gyöke egyúttal a $z^{p^2}-1 = 0$ egyenletnek is gyöke. Ebben az esetben a körnek p^2 számú egyenlő ívre való osztására a

$$(21) \qquad \frac{z^{p^2}-1}{z^p-1} = z^{p(p-1)}+z^{p(p-2)}+\ldots+z^p+1 = 0$$

egyenletet vizsgálhatjuk.

Ennek az egyenletnek gyökei a kört $p(p-1)$ ívre bontják. Ezek közül az ívek közül az a p ív, amely a $z^p-1 = 0$ egyenlet egy-egy gyökét tartalmazza, nyilvánvalóan kétszer akkora, mint a többi $p(p-1)-p$ ív. Felezésükkel tehát a kört p^2 egyenlő ívre lehet osztani.

Ebből következik, hogy abban az esetben, amikor $n=p^2$ és p páratlan törzsszám, a (21) egyenletet lehet körosztási egyenletnek tekinteni.

Kimutatjuk a következő tételt:

Ha p páratlan törzsszám, akkor a

$$z^{p(p-1)}+z^{p(p-2)}+\ldots+z^p+1=0$$

egyenlet a racionális számtestben irreducibilis.

Ez a tétel is lehozható a Schoenemann—Eisenstein-féle tételből, mivel a (21)-es egyenlet $z=x+1$ helyettesítés után

$$x^{p(p-1)}+pxG(x)+p=0$$

alakú, ahol $G(x)$ egész együtthatós $p(p-1)-2$ fokú polinom.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$(x+1)^p = x^p+1+pxg(x)$$

alakban írható, ahol $g(x)$ egész együtthatós $(p-2)$-edfokú polinom. A (21)-es egyenlet tehát következő alakú:

$$\sum_{h=0}^{p-1}[(x^p+1+pxg(x)]^h=\sum_{h=0}^{p-1}(x^p+1)^h+pxH(x) = \frac{(x^p+1)^p-1}{x^p}+pxH(x) =$$

$$= x^{p(p-1)}+\binom{p}{1}x^{p(p-2)}+\ldots+\binom{p}{1}+pxH(x) = x^{p(p-1)}+pxG(x)+p,$$

ahol $H(x)$ és $G(x)$ egész együtthatós $p(p-1)-2$ fokú polinom.

10. §. A GAUSS-FÉLE FELTÉTEL SZÜKSÉGES VOLTÁNAK BIZONYÍTÁSA. A 2^k+1 ALAKÚ TÖRZSSZÁMOK

A p páratlan törzsszámhoz tartozó

$$z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+z+1=0$$

körosztási egyenlet a racionális számtestben irreducibilis (9. §). Ahhoz, hogy ennek az egyenletnek gyökét körzővel és vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni, szükséges feltétel (6. és 8. §), hogy az egyenlet fokszáma 2-nek hatványa legyen.

Ebből következik, hogy ha a p törzsszám nem $1+2^k$ alakú, akkor a kört körzővel és vonalzóval nem lehet p egyenlő részre osztani. Körzővel és vonalzóval nem lehet tehát n egyenlő ívre osztani a kört, ha az n számnak van legalább egy olyan páratlan törzstényezője, amely nem $1+2^k$ alakú.

Kimutatjuk a következő tételt:

Ha egy törzsszám 2^k+1 alakú, akkor a k kitevő 2-nek hatványa.

Ha ugyanis k nem volna 2-nek hatványa, akkor volna egy $q(>1)$ páratlan osztója. Ha $k=qs$ és $2^s=a$, akkor

$$2^k+1 = (2^s)^q+1 = a^q+1 = (a+1)[a^{q-1}-a^{q-2}+\ldots+(-1)^{q-1}]$$

volna, vagyis 2^k+1 nem volna törzsszám.

Az $1+2^{2^m}$ alakú számok közül az $m=0, 1, 2, 3$ és 4 kitevőhöz tartozó szám: 3, 5, 17, 257 és 65537 mind törzsszám. Még nincs bebizonyítva, hogy ezen az öt számon kívül van-e még ilyen alakú törzsszám. Ki van mutatva, hogy m-nek 5, 6, 7, 9, 11, 12, 18, 23, 36 és 38 értékéhez összetett szám tartozik.

Ha p bármilyen páratlan törzsszám, akkor a körnek p^2 egyenlő ívre való osztását szolgáltató

$$\frac{z^{p^2}-1}{z^p-1} = z^{p(p-1)}+z^{p(p-2)}+\ldots+z^p+1 = 0$$

egyenlet irreducibilis (9. §). Ennek az egyenletnek $p(p-1)$ fokszáma nem lehet 2-nek hatványa, gyökei tehát körzővel és vonalzóval nem szerkeszthetők.

Ha tehát p akármilyen páratlan törzsszám, akkor a kört körzővel és vonalzóval nem lehet p^2, s még kevésbé $p^3, p^4, \ldots$ egyenlő ívre osztani. A kört tehát nem lehet körzővel és vonalzóval 9, 25, $17^2=289$ stb. egyenlő ívre osztani.

Ezzel Gauss tételének a szükségességet állító részét teljesen bebizonyítottuk.

11. §. A GAUSS-FÉLE FELTÉTEL ELÉGSÉGES VOLTÁNAK BIZONYÍTÁSA

Először is kimutatjuk a következő tételt:

Ha p Gauss-féle törzsszám, vagyis ha $p=2^k+1$ alakú törzsszám, akkor a

(22) $$z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+z+1=0$$

körosztási egyenlet másodfokú egyenletek egymásutánjával megoldható.

Ennek a körosztási egyenletnek a gyökei $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, ahol

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}.$$

A bizonyításban szükségünk van a következő számelméleti tételre:

Ha p törzsszám, akkor a $2, 3, \ldots, p-1$ *számok között mindig van olyan g szám, hogy a*

$$g, g^2, \ldots, g^{p-1}$$

hatványok p-vel való osztásakor kapott maradékai csak sorrendben különböznek az $1, 2, \ldots, p-1$ *számoktól.* Az ilyen g számot a p modulusra vonatkozólag primitív kongruenciagyöknek nevezzük.

Pl. $p=5$-re primitív gyök 2 és 3, de nem primitív gyök 4, $p=17$-re 3, 5, 6 és 7 primitív gyök, 2, 4 és 8 nem.

Ha g primitív kongruenciagyök egy (páratlan) p törzsszámmodulusra és ha

$$\delta_h = \varepsilon^{g^h},$$

akkor $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{p-1}$ is p-edik egységgyök és csak sorrendben különbözik $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ egységgyöktől, mert $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ p-vel való osztásmaradékai is csak sorrendben különböznek az $1, 2, \ldots, p-1$ számoktól, és mert $\varepsilon^p=1$.

Ha h és k pozitív egész számok, akkor

$$\delta_{p-1} = \varepsilon, \quad \delta_{k+p-1} = \delta_k, \quad \delta_h^{g^k} = \delta_k^{g^h} = \delta_{h+k} = \delta_{k+h},$$

mert Fermat tétele szerint

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad g^{k+p-1} \equiv g^k \pmod{p}$$

és

$$g^h g^k = g^{h+k} \quad \text{miatt} \quad \delta_h^{g^k} = (\varepsilon^{g^h})^{g^k} = \delta_{h+k}.$$

A $\delta_h = \varepsilon^{g^h}$ egységgyökből ε-nak δ_k-val való helyettesítésével δ_{h+k}-t kapjuk. Ezt kapjuk akkor is, ha δ_k-ban δ_h-val helyettesítjük ε-t. ∎

Ha p (páratlan) prímszám, akkor a (22) körosztásegyenlet $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{p-1}$ gyökét

$$y_1 = \delta_1 + \delta_3 + \ldots + \delta_{p-2} \quad \text{és} \quad y_2 = \delta_2 + \delta_4 + \ldots + \delta_{p-1}$$

Gauss-féle periódusba osztjuk. $y_1 + y_2$ a (22) egyenlet gyökeinek összege, s ezért $y_1 + y_2 = -1$. A két periódus eleget tesz egy

$$y^2 + y + A = 0$$

másodfokú egyenletnek. Ki fogjuk mutatni, hogy

$$A = \frac{1-p}{4} \quad \text{ill.} \quad A = \frac{1+p}{4}$$

aszerint, amint $p = 4m+1$, ill. $p = 4m-1$ alakú törzsszám.

ε-nak δ_1-gyel való helyettesítésekor δ_h átmegy δ_{h+1}-be. Ez a helyettesítés tehát az y_1 és y_2 periódust egymásba viszi át, az y_1y_2 szorzatot pedig változatlanul hagyja.

Az y_1 és y_2 periódus $\frac{p-1}{2}$ tagból, az y_1y_2 szorzat tehát $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ számú $\delta_{2r+1}\delta_{2s}$ alakú tagból áll. Egy $\delta_{2r+1}\delta_{2s}$ tag vagy egy δ_h $(1 \leq h \leq p-1)$ egységgyökkel vagy az egységgel egyenlő. Ezért

$$y_1y_2 = a_0 1 + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots + a_{p-1}\delta_{p-1},$$

ahol $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ nem negatív egész szám és

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Az y_1y_2 szorzat értéke ugyanaz marad, ha minden egyes δ_h egységgyökben ε-t δ_1-gyel helyettesítjük, ezért

$$a_0 + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots + a_{p-1}\delta_{p-1} = a_0 + a_1\delta_2 + a_2\delta_3 + \ldots + a_{p-1}\delta_1$$

és

$$(a_1 - a_{p-1})\delta_1 + (a_2 - a_1)\delta_2 + \ldots + (a_{p-1} - a_{p-2})\delta_{p-1} = 0.$$

Ez az egyenlet

$$\varepsilon(c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \ldots + c_{p-2}\varepsilon^{p-2}) = 0$$

alakban írható, ahol $c_0 = a_{p-1} - a_{p-2}$ és a $c_1, c_2, \ldots, c_{p-2}$ együttható az $a_1 - a_{p-1}$, $a_2 - a_1, \ldots, a_{p-2} - a_{p-1}$ együtthatótól csak sorrendjében különbözhetik. Az utolsó egyenlet csak akkor állhat fenn, ha $c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-2} = 0$, vagyis ha $a_1 = a_2 = \ldots$ $\ldots = a_{p-1} = a$.

Ha ugyanis egy c_k együttható zérustól különböző volna, akkor az irreducibilis (22) egyenlet ε gyöke egyúttal gyöke volna az egész együtthatós

$$g(z) = c_0 + c_1z + \ldots + c_{p-2}z^{p-2} = 0$$

legfeljebb $p-2$-edfokú egyenletnek.

Ebből az ellentmondásból következik, hogy az y_1y_2 szorzat kifejtett alakjában mindegyik δ_h $(h = 1, 2, \ldots, p-1)$ egységgyök ugyanannyiszor, a-szor fordul elő és ezért

$$a_0 + (p-1)a = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Ha $a_0=0$, akkor $a=\frac{p-1}{4}$, és így $p=4a+1$. Ha pedig $a_0\neq 0$, akkor a_0 osztható $\frac{p-1}{2}$-vel, s ezért $a_0\geqq\frac{p-1}{2}$.

Az ε^k és ε^{p-k} egységgyökpár konjugált komplex, szorzatuk az egység. Ha $a_0=0$, akkor bármelyik δ_h egységgyök konjugáltjával egy periódusban fordul elő, s ezért y_1 és y_2, konjugált komplex számok összegei lévén, valósak.

Az $a_0\neq 0$ esetben van olyan konjugált egységgyökpár, amelyből az egyik egységgyök az y_1, a másik az y_2 periódushoz tartozik. Mivel a $p-1$ egységgyök $\frac{p-1}{2}$ konjugált komplex számpárt alkot, azért az y_1y_2 szorzatban legfeljebb $\frac{p-1}{2}$ tag értéke az egység. Ezért $a_0\leqq\frac{p-1}{2}$ és az előző $a_0\geqq\frac{p-1}{2}$ egyenlőtlenség miatt $a_0=\frac{p-1}{2}$. Ekkor $a=\frac{p-3}{4}$ vagyis $p=4a+3=4(a+1)-1=4m-1$. Ilyen alakú p törzsszámra y_1 és y_2 konjugált komplex, mert az egyik periódus bármely δ_h egységgyökének konjugáltja a másik periódushoz tartozik.

Kaptuk tehát:

$$y_1y_2 = A = a_0+a(\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{p-1}) = a_0-a$$

és

$$a_0-a = -a = \frac{1-p}{4}, \quad \text{ha} \quad p = 4m+1,$$

$$a_0-a = \frac{p-1}{2}-\frac{p-3}{4} = \frac{p+1}{4}, \quad \text{ha} \quad p = 4m-1.$$

A $p=8m+1$ esetben y_1 és y_2 páros számú tagból áll. A két periódus tagjait félannyi tagból álló

$$y_{11} = \delta_1+\delta_5+\ldots+\delta_{p-4} \quad \text{és} \quad y_{12} = \delta_3+\delta_7+\ldots+\delta_{p-2}, \quad y_{11}+y_{12} = y_1$$

$$y_{21} = \delta_2+\delta_6+\ldots+\delta_{p-3} \quad \text{és} \quad y_{22} = \delta_4+\delta_8+\ldots+\delta_{p-1}, \quad y_{21}+y_{22} = y_2$$

újabb periódusokba osztjuk.

A δ_h egységgyökből ε-nak δ_2-vel való helyettesítésekor a δ_{h+2} egységgyököt kapjuk. Ez a helyettesítés az y_{11} és az y_{12}, továbbá az y_{21} és y_{22} periódust egymásba viszi át, szorzatukat tehát nem változtatja. Mivel két p-edik egységgyök szorzata vagy egy δ_h $(h=1, 2, \ldots, p-1)$ egységgyök, vagy az egység, azért

$$y_{11}y_{12}=b_0+b_1\delta_1+b_3\delta_3+\ldots+b_{p-2}\delta_{p-2}+b_2\delta_2+b_4\delta_4+\ldots+b_{p-1}\delta_{p-1}=$$
$$=b_0+b_{p-2}\delta_1+b_1\delta_3+\ldots+b_{p-4}\delta_{p-2}+b_{p-1}\delta_2+b_2\delta_4+\ldots+b_{p-3}\delta_{p-1}.$$

Ezért

$$(b_1 - b_{p-2})\delta_1 + (b_3 - b_1)\delta_3 + \ldots + (b_{p-2} - b_{p-4})\delta_{p-2} +$$
$$+ (b_2 - b_{p-1})\delta_2 + \ldots + (b_{p-1} - b_{p-3})\delta_{p-1} = 0.$$

Ebben az egyenletben mindegyik δ_h együtthatója eltűnik, mert ellenkező esetben az irreducibilis (22) egyenlet ε gyöke egy alacsonyabb fokú egész együtthatós egyenletnek is gyöke volna.

Ebből következik, hogy

$$b_1 = b_3 = \ldots = b_{p-2} = a_{11} \quad \text{és} \quad b_2 = b_4 = \ldots = b_{p-1} = a_{12}$$

és

$$y_{11} \cdot y_{12} = b_0 + a_{11}(\delta_1 + \delta_3 + \ldots + \delta_{p-2}) + a_{12}(\delta_2 + \delta_4 + \ldots + \delta_{p-1}) =$$
$$= b_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2.$$

Az y_1 és y_2 periódus $\frac{p-1}{2}$, az y_{11} és y_{12} periódus $\frac{p-1}{4}$ tagból, az $y_{11}y_{12}$ szorzat $\left(\frac{p-1}{4}\right)^2$ tagból áll. Ezért $\left(\frac{p-1}{4}\right)^2 = b_0 + (a_{11} + a_{12})\frac{p-1}{2}$.

b_0 azoknak a konjugált egységgyökpároknak száma, amelyekből az egyik egységgyök az y_{11}, a másik az y_{12} periódushoz tartozik, ezért $b_0 \leqq \frac{p-1}{4}$. A $b_0 \neq 0$ esetben b_0 osztható $\frac{p-1}{4}$-gyel, és ezért $b_0 \geqq \frac{p-1}{4}$. E két egyenlőtlenség miatt $b_0 = \frac{p-1}{4}$ és ezzel $p = 8(a_{11} + a_{12}) + 5$.

Ez azonban ellentmond annak a föltevésnek, hogy a p szám $8m+1$ alakú. Emiatt $b_0 = 0$ és $a_{11} + a_{12} = \frac{p-1}{8}$, továbbá y_{11} és y_{12} valós szám, mert közülük akármelyik periódus egyik egységgyökkel annak konjugáltját is tartalmazza.

Ebből következik, hogy $8m+1$ alakú p törzsszám esetében y_{11} és y_{12}, ill. y_{21} és y_{22} valósak és $y^2 - y_1y + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0$, ill. $y^2 - y_2y + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 0$ egyenletnek tesznek eleget, ahol a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} nem negatív egész szám és $a_{11} + a_{12} = = a_{21} + a_{22} = \frac{p-1}{8}$.

Ha $p = 1 + 2^k$ alakú Gauss-féle törzsszám, akkor az eljárást tovább folytathatjuk. Az $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ periódus egységgyökeit félannyi tagból álló

$$y_{111} = \delta_1 + \delta_9 + \delta_{17} + \ldots \quad \text{és} \quad y_{112} = \delta_5 + \delta_{13} + \delta_{21} + \ldots$$
$$y_{121} = \delta_3 + \delta_{11} + \delta_{19} + \ldots \quad \text{és} \quad y_{122} = \delta_7 + \delta_{15} + \delta_{23} + \ldots$$
$$y_{211} = \delta_2 + \delta_{10} + \delta_{18} + \ldots \quad \text{és} \quad y_{212} = \delta_6 + \delta_{14} + \delta_{22} + \ldots$$
$$y_{221} = \delta_4 + \delta_{12} + \delta_{20} + \ldots \quad \text{és} \quad y_{222} = \delta_8 + \delta_{16} + \delta_{24} + \ldots$$

újabb periódusokba osztjuk be. Ezek a periódusok is valósak. y_{111} és y_{112} egy

$$y^2 - y_{11}y + (a_{111}y_{11} + a_{112}y_{12} + a_{121}y_{21} + a_{122}y_{22}) = 0$$

egyenlet gyöke, ahol az a_{111}, a_{112}, a_{121}, a_{122} együtthatók nem negatív egész számok.

Ez abból következik, hogy az y_{111} és y_{112} periódus fölcserélődik, szorzatuk tehát változatlan marad, ha a bennük előforduló egységgyökökben ε-t δ_4-gyel helyettesítjük. Emiatt $y_{111}y_{112}$ az y_{11} periódus tagjait ugyanannyiszor tartalmazza. Hasonlót állíthatunk a többi három perióduspárra is.

Így haladva tovább, másodfokú egyenleteknek, a körosztásegyenlet rezolvenseinek segítségével rendre megszerkeszthetjük az egységgyökök $\frac{p-1}{2}$, $\frac{p-1}{4}$, ..., $\frac{p-1}{2^{k-1}} = 2$ tagú periódusait. A kéttagú periódusok két-két konjugált komplex egységgyökből állanak. Ha η egy kéttagú periódus, akkor a két egységgyök a másodfokú $z^2 - \eta z + 1 = 0$ egyenlet gyöke.

Szabályos p szöget a $\frac{2\pi}{p}$ szögnek az $\eta_0 = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = \varepsilon + \varepsilon^{p-1}$ kéttagú periódusból való szerkesztésével kapunk. Minthogy $\varepsilon = \delta_{p-1}$, azért η_0 az a kéttagú periódus, amelynek $k-1$ számú indexe mind kettes. A δ_h egységgyökök sorrendje függ a p modulusú g kongruenciagyök választásától, de mindig $\varepsilon = \delta_{p-1}$, s emiatt az ε egységgyököt tartalmazó periódusok: y_2, y_{22}, y_{222}, ...

Az η_0 periódushoz csupa valós gyökökkel bíró másodfokú egyenletek gyökeinek szerkesztésével jutunk. Ezzel kimutattuk: $p = 2^k + 1$ alakú törzsszámokra a körosztás elemi, s ezért Gauss tételét teljesen bebizonyítottuk, mert a 7. § szerint a körosztás $n_1 \cdot n_2$ számra is elemi, ha az n_1 és n_2 viszonylagos törzsszámra elemi.

Szabályos tizenhétszöghöz (5. §) nem a $\frac{2\pi}{17}$ szögnek, hanem az egységsugarú körbe írt szabályos 34 szög oldalának szerkesztésével jutottunk. A szerkesztésben tett lépések nem sokat különböznek az általános esetben $\frac{2\pi}{p}$ szerkesztésére tett lépésektől. $p = 17$-re c_1, c_2, ..., c_8 kéttagú periódus, az y_1 és y_2 összeg tehát nyolctagú periódus. Közülük y_1 tartalmazza a c_1 kéttagú periódusban az $\varepsilon = \delta_{16}$ egységgyököt és konjugáltját, az általános esetben ez a nyolctagú periódus kettes indexű.

A körosztás $2^k + 1$ törzsszámra vonatkozó bizonyításában maradt némi bizonytalanság és éppen ez könnyítette a bizonyítást. Nem határoztuk meg a rezolvens egyenletek együtthatóinak értékét és nem vizsgáltuk meg, hogy az egyes rezolvensek gyökei milyen periódust adnak. A szerkesztés elvégzésekor ez a vizsgálat nem maradhat el, a vizsgálat azonban nagyon hosszadalmas és körülményes.

Richelot a szabályos 257 oldalú sokszög szerkesztését a Journal f. d. reine u. angew. Math. 9. kötetében (1832) 84 lapon végezte el. A 65 537 oldalú szabályos sokszög szerkesztésére Hermes német matematikus életének 10 évét fordította. Erre vonatkozó számításai és szerkesztései terjedelmüknél fogva máig is kiadatlanok. A munka a göttingai matematikai intézet birtokában van.

12. §. ELEMI SZERKESZTÉSSEL NEM SZERKESZTHETŐ SZABÁLYOS SOKSZÖGEK

A szabályos sokszögek sorában Gauss tétele alapján a hétszög az első, amelyik elemi szerkesztéssel nem szerkeszthető.

$g=3$ primitív kongruenciagyök a 7 modulusra. Ha

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7} \quad \text{és} \quad \delta_h=\varepsilon^{3^h},$$

akkor $\varepsilon^7=1$ miatt

$$\delta_1=\varepsilon^3,\ \delta_2=\varepsilon^2,\ \delta_3=\varepsilon^6,\ \delta_4=\varepsilon^4,\ \delta_5=\varepsilon^5 \ \text{és}\ \delta_6=\varepsilon.$$

Az

$$y_1=\delta_1+\delta_3+\delta_5 \quad \text{és} \quad y_2=\delta_2+\delta_4+\delta_6$$

periódus az

$$y^2+y+2=0$$

egyenlet gyöke, mert most $A=\dfrac{1+p}{4}=2.$

$\delta_2,\ \delta_4,\ \delta_6$ a

$$z^3-y_2z^2+y_1z-1=0$$

egyenlet gyöke, mert

$$\delta_2+\delta_4+\delta_6=y_2,\quad \delta_2\delta_4+\delta_2\delta_6+\delta_4\delta_6=y_1 \quad \text{és} \quad \delta_2\delta_4\delta_6=1.$$

Hasonlóképp δ_1, δ_3 és δ_5 a

$$z^3-y_1z^2+y_2z-1=0$$

egyenlet gyöke.

A $p=7$ esetben, annak megfelelően, hogy $p-1=2\cdot 3$, egy másodfokú és egy harmadfokú rezolvens megoldásával jutunk a $\delta_6=\varepsilon$ egységgyökhöz és ezzel szabályos hétszög szerkesztéséhez.

A körosztásegyenlet megoldása $p=13$ esetben is $p-1=2\cdot2\cdot3$ tényezőinek megfelelően másod- és harmadfokú rezolvenshez vezet. Ekkor $g=2$ egy 13 modulusú primitív kongruenciagyök, mert 2 hatványainak osztásmaradékai 13-ra sorjában

$$2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1.$$

Ha

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{13}+i\sin\frac{2\pi}{13} \quad \text{és} \quad \delta_h=\varepsilon^{2^h}$$

akkor az

$$y_1=\delta_1+\delta_3+\ldots+\delta_{11} \quad \text{és} \quad y_2=\delta_2+\delta_4+\ldots+\delta_{12}$$

periódus az

$$y^2+y-3=0 \quad \left(\frac{1-p}{4}=-3\right)$$

egyenlet gyöke.

A hattagú y_2 periódust három kéttagú

$$z_1=\delta_2+\delta_8=\varepsilon^4+\varepsilon^9=\varepsilon^4+\varepsilon^{-4}, \quad z_2=\delta_4+\delta_{10}=\varepsilon^3+\varepsilon^{10}=\varepsilon^3+\varepsilon^{-3},$$

$$z_3=\delta_6+\delta_{12}=\varepsilon^{12}+\varepsilon=\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{+1}$$

periódusba osztjuk.

Ez a három periódus a

$$z^3-y_2z^2-z-(2+y_1)=0$$

egyenlet gyöke, mert

$$z_1+z_2+z_3=y_2, \quad z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=\sum_{k=1}^{12}\varepsilon^k=-1 \quad \text{és} \quad z_1z_2z_3=2+y_1.$$

A három gyök valós és közülük csak $z_3=2\cos\frac{2\pi}{13}$ pozitív. Ennek meghatározása után a szabályos 13-szög szerkesztése elemi.

Egy p törzsszámra a (22) körosztásegyenlet rezolvenseinek fokszámai $p-1$ törzstényezőivel egyeznek. Ha $p-1=r\cdot s$ és s törzsszám, akkor a körosztásegyenletnek van s-fokú rezolvense. Ha g primitív kongruenciagyök p modulusra és ha $\delta_h=\varepsilon^{g^h}$, $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$, akkor az

$$u_k=\delta_k+\delta_{k+s}+\delta_{k+2s}+\ldots+\delta_{k+rs-s} \qquad (k=1, 2, \ldots, s)$$

periódus egészegyütthatós s-fokú algebrai egyenlet gyöke.

Ha a δ_h egységgyökökben ε-t δ_1-gyel helyettesítjük, akkor az u_k periódus az u_{k+1} periódusba u_s az u_1-be megy át. Ez a helyettesítés az u_k periódusok sorrendjét cseréli fel, hasonlóképpen történik ε-nak az összes δ_h egységgyökben uygan-azzal a δ_l-lel helyettesítésekor. Egy ilyen helyettesítés tehát változatlanul hagyja $u_1, u_2, \ldots, u_s$ elemi szimmetrikus függvényeit.

$u_1, u_2, \ldots, u_s$ egy elemi szimmetrikus függvényének kifejezése a δ_h egységgyökökkel ezeknek homogén kifejezése, amelyben az egyes tagok p-edik egységgyökök szorzatai, tehát értékük vagy az egység, vagy egy δ_h gyök. Ez a kifejezés tehát

$$a_0 + \sum_{h=1}^{p-1} a_h \delta_h$$

alakú, ahol a_0 és a_h pozitív egész szám. Mivel ez a kifejezés nem változtatja értékét, amikor δ_h-ban ε-t akármelyik más δ_k-val helyettesítjük, ezért $a_1 = a_2 = \ldots = = a_{h-1} = a$ és

$$a_0 + \sum_{h=1}^{p-1} a_h \delta_h = a_0 + a \sum_{h=1}^{p-1} \delta_h = a_0 - a.$$

$u_1, u_2, \ldots, u_s$ tehát egy

$$u^s + A_1 u^{s-1} + \ldots + A_s = 0$$

egészegyütthatós egyenlet gyökei.

Ha

$$p = 1 + 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \ldots$$

alakú törzsszám, akkor a körosztásegyenlet megoldása Galois elméletéve, megegyezésben a számú kvadratikus, b számú kubikus, c számú ötödfokúl d számú hetedfokú, ... rezolvens megoldásából nyerhető.

A kocka sokszorozása és a szög harmadolása kubikus alapszerkesztés. Vannak olyan rajzeszközök és szerkesztések, amelyekkel a két kubikus alapszerkesztést végre lehet hajtani. Akármilyen harmadfokú egyenlet megoldását kubikus alapszerkesztésekből össze lehet tenni. Ez azonban nem lehetséges akármilyen ötödfokú, hetedfokú, ... egyenletre.

Szabályos háromszög középponti szögének harmadolása szabályos kilencszöghöz, s ez utóbbi középponti szögének harmadolása szabályos 27 szöghöz vezet. Ebből következik:

Kvadratikus és kubikus alapszerkesztésekkel szerkeszthető szabályos sokszögek n oldalszáma

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot p_1 p_2 \ldots p_r$$

alakú, ahol

$$p_k = 1 + 2^{a_k} 3^{b_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

alakú különböző törzsszámok (a, b, a_k és b_k nem negatív egész számok).[12])

[12]) T. Kubota, Geschichtliches über geometrische Konstruktionen, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigung 37. k. (1928), 71—73.

A kvadratikus és kubikus alapszerkesztésekkel nem szerkeszthető szabályos sokszögek oldalszáma sorjában: 11, 22, 23, 25, 29, 31, 33, 39, 41, 43, 44, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 66, 67, 69, 71, 75, 78, 81, ...

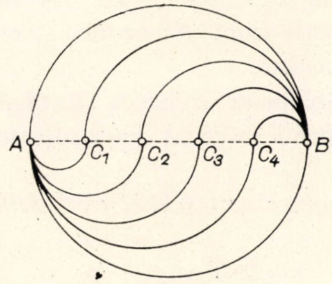
13. §. KÖRLAPNAK EGYENLŐ TERÜLETŰ RÉSZEKRE VALÓ OSZTÁSA

A kört n egyenlő ívre osztó pontokat a középponttal összekötő sugarak a körlapot n egybevágó körcikkre osztják. Könnyű belátni, hogy a körlapot körzővel és vonalzóval akkor és csak akkor lehet n egybevágó tartományra osztani, ha a körvonalat is lehet n egyenlő ívre osztani.

Ha a körlap részeitől nem kívánjuk meg az egybevágóságot, hanem csak területük és kerületük egyenlőségét, akkor a következő egyszerű tétel mondható ki:

Ha n tetszőleges pozitív szám, akkor a körlapot körzővel és vonalzóval fel lehet osztani n egyenlő területű és kerületű tartományra.

A felosztást úgy végezzük, hogy a kör AB átmérőjét a $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ ponttal n egyenlő szakaszra osztjuk. Ez a felosztás körzővel és vonalzóval mindig lehetséges. Az AB átmérő egyik oldalán megrajzoljuk azokat a félköröket, amelyeknek átmérője $AC_1, AC_2, \ldots, AC_{n-1}$, az AB átmérő másik oldalán pedig azokat a félköröket, amelyeknek átmérője $BC_1, BC_2, \ldots, BC_{n-1}$. Az így kapott két-két félkörből álló $n-1$ számú AC_kB $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ görbevonal a körlapot könnyen belátható módon az eredeti körrel egyenlő kerületű és egymással egyenlő területű n tartományra bontja.



8. ábra

Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a körosztásnak a térben megfelelő feladat, a gömbfelületnek egyenlő felszínű részekre való felosztása is bármely pozitív n számra könnyen elvégezhető, ha nem kívánjuk meg, hogy a gömbfelületrészek egyúttal egybevágók is legyenek.

Ha ugyanis a gömbnek egy átmérőjét n egyenlő részre osztjuk, akkor az osztópontokon átmenő és az átmérőre merőleges síkok a gömb felületét n egyenlő felszínű gömbövre és gömbsüvegre osztják.

A gömbfelületnek ezt az n egyenlő részre való osztását síkok nélkül körzővel el lehet végezni a gömbfelületen. A gömbbel egyenlő AB átmérőjű kör AB átmérőjét a $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ ponttal n egyenlő szakaszra osztjuk és ezekben a pontokban az átmérőre merőleges $D_kD'_k$ húrokat $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ állítunk. A gömb egy átmérőjének A' és B' végpontja körül az $AD_k = BD_{n-k}$ körzőnyílással $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ leírt körök a gömb felületét n egyenlő részre osztják.

III. GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK A KÖRZŐ ÉS VONALZÓ KORLÁTOZOTT HASZNÁLATÁVAL

14. §. A MOHR—MASCHERONI-FÉLE SZERKESZTÉSEK

G. Mohr dán matematikus „Euclides Danicus" c. munkájában 1672-ben és tőle függetlenül L. Mascheroni olasz matematikus „Geometria del compasso" c. munkájában 1797-ben kimutatta a következő tételt:

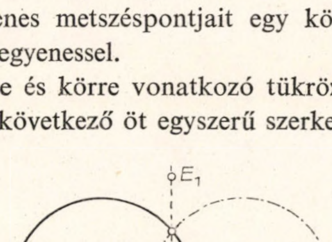
Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés egyedül körzővel is elvégezhető.

Mohr munkája teljesen feledésbe merült és csak 1928-ban szerzett róla tudomást a matematikus világ. Mascheroni munkája annak idején nagy feltűnést keltett. Napóleon is érdeklődött iránta.

Tulajdonképpen sem Mohr, sem Mascheroni nem mondotta ki az előbbi általános tételt, hanem mindkettő megmutatta, hogy az Eukleidész munkáiban előforduló, körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztések csak körzővel is elvégezhetők. Ebből azonban az általános tétel is következik, mivel Eukleidész Elemeiben megvannak azok az elemi alapszerkesztések, amelyekből minden elemi szerkesztés összetehető.

Az elemi alapszerkesztések: I. két egyenes, II. egyenes és kör, III. két kör metszéspontjainak szerkesztése. A Mohr—Mascheroni-tétel bizonyítására tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy csupán körzővel meg tudjuk szerkeszteni két pontjával megadott egyenes metszéspontjait egy körrel vagy egy szintén két pontjával meghatározott egyenessel.

A bizonyítást egyenesre és körre vonatkozó tükrözéssel végezzük el. Csupán körzővel hajtjuk végre a következő öt egyszerű szerkesztést:



9. ábra

1. *Pont és kör tükörképe az E_1E_2 egyenesre vonatkozólag.*

A C ponton át az E_1 és E_2 pont körül rajzolt két kör másik metszéspontja C-nek az E_1E_2 egyenesre vonatkozó tükörképe. A C és C' középpontú egyenlő sugarú K és K' kör az E_1E_2 egyenesre vonatkozólag egymásnak tükörképe (9. ábra). Ha az E_1E_2 egyenes nem megy át a K kör C középpontján, akkor ezzel a II. alapszerkesztést is elvégeztük, mivel az E_1E_2 egyenesnek a K körrel való metszéspontjai a K és K' kör metszéspontjaival összeesnek.

2. *Az OA szakasz egész számszorosa.*

Az A pont körül OA sugárral leírt K körre az O pontból kiindulva háromszor rámérjük az OA sugarat mint húrt. A harmadik húr B végpontja a K körbe írt szabályos hatszög O-val szemközt fekvő szögpontja. Emiatt O, A és B egy egyenesen van és $\overline{OB}=2\cdot\overline{OA}$. Hasonlóképp szerkeszthető az $\overline{OC}=3\cdot\overline{OA}$, $\overline{OD}=$ $=4\cdot\overline{OA}$, ... szakasz is (10. ábra).

3. *Az A pontnak a K_0 körre vonatkozó A' tükörképe.*

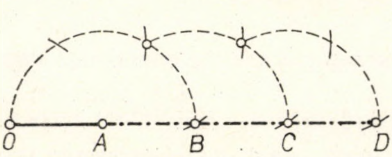
Az O középpontú és R sugarú K_0 körre vonatkozólag az A pont tükörképe, vagy inverz képe az OA félegyenesnek az az A' pontja, amelyre vonatkozólag

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=R^2.$$

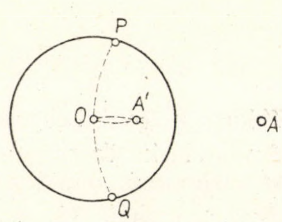
Emiatt az AA' pontpár harmonikusan választja el az egyenesével a K_0 körből kivágott pontpárt.

Ha $\overline{OA}>\frac{R}{2}$, akkor A' szerkesztése a következőképp végezhető el:

Az A pont körül OA sugárral rajzolt kör a K_0 kört P és Q pontban metszi. Az O ponton átmenő P és Q középpontú kör másik metszéspontja A-nak K_0-ra vonatkozó A' tükörképe (11. ábra).



10. ábra



11. ábra

O, A és A' ugyanis egy egyenesen van, mert P és Q mind az OA, mind az OA' egyenesre vonatkozólag egymásnak tükörképe. Emiatt az AOP és a POA' egyenlőszárú háromszög hasonló és így

$$\overline{OA}:\overline{OP}=\overline{OP}:\overline{OA'}, \quad \text{vagyis} \quad \overline{OA}\cdot\overline{OA'}=R^2.$$

Ha $\overline{OA} < \frac{R}{2}$, akkor ez a szerkesztés nem végezhető el, mivel az A középpontú és OA sugarú kör nem metszi a K_0 kört. Ekkor az OA félegyenesen előbb olyan N pontot szerkesztünk (2. szerkesztés), hogy $\overline{ON} = n \cdot \overline{OA} > \frac{R}{2}$ legyen. Ennek az N pontnak N' tükörképére áll az

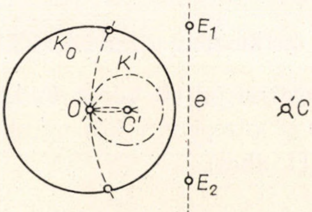
$$\overline{ON} \cdot \overline{ON'} = n \cdot \overline{OA} \cdot \frac{\overline{OA'}}{n} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2$$

egyenlőség. Emiatt az A' pontot az $\overline{OA'} = n \cdot \overline{ON'}$ egyenlőségnek megfelelően a 2. szerkesztéssel kaphatjuk meg.

Ezek szerint az O-tól különböző bármely A pontnak a K_0 körre vonatkozó tükörképét körzővel szerkeszthetjük.

4. *Az E_1 és E_2 pontjával megadott e egyenesnek olyan K_0 körre vonatkozó tükrözése, amelynek O középpontja nem esik az e egyenesre.*

Az ilyen e egyenesnek a K_0 körre vonatkozó tükörképe olyan K' kör, amely O-n átmegy. Ha C a K_0 kör O középpontjának az e egyenesre vonatkozó tükörképe (1. szerkesztés) és C' a C pont tükörképe K_0-ra nézve (3. szerkesztés), akkor C' a K' kör középpontja.

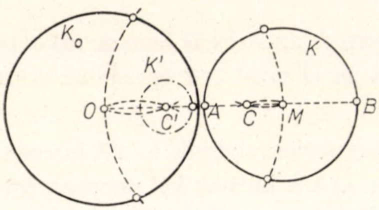


12. ábra

A K' körnek O-val átellenes M' pontja ugyanis az e egyenes O-hoz legközelebb eső M pontjának tükörképe. Mivel C' felezi a K' kör OM' átmérőjét, azért C' az OM félegyenesen annak a C pontnak tükörképe, amely O-tól kétszer akkora távolságra van, mint M. A C pont tehát O-nak az e egyenesre vonatkozó tükörképe (12. ábra).

5. *Egy K körnek egy olyan K_0 körre vonatkozó tükörképe, amelynek O középpontján K nem megy át.*

Megszerkesztjük az O pont C tükörképét a K körre és C-nek C' tükörképét a K_0 körre vonatkozólag és végül K egy Q pontjának Q' tükörképét a K_0 körre vonatkozólag. Azt állítjuk, hogy a Q' ponton átmenő és C' középpontú K' kör a K körnek tükörképe a K_0 körre vonatkozólag (13. ábra).



13. ábra

Ha A és B a K_0 és K kör centrálisának K-val való metszéspontja, akkor e két pontnak a K_0 körre vonatkozó A' és B' tükörképe nyilvánvalóan K' egy átmérőjének két végpontja. Azt kell tehát csak igazolnunk, hogy C' az A' B' szakasz felezőpontja.

Ámde, ha a K kör középpontja M, sugara R, és a K_0 kör sugara R_0, akkor

$$\overline{OM}\cdot\overline{MC}=R^2,\qquad \overline{OC}\cdot\overline{OC'}=\overline{OA'}\cdot(\overline{OM}-R)=\overline{OB'}(\overline{OM}+R)=R_0^2$$

és így

$$\overline{OA'}+\overline{OB'}=\frac{R_0^2}{\overline{OM}-R}+\frac{R_0^2}{\overline{OM}+R}=\frac{2R_0^2}{\overline{OM}-\dfrac{R^2}{\overline{OM}}}=\frac{2R_0^2}{\overline{OM}-\overline{MC}}=\frac{2R_0^2}{\overline{OC}}=2\cdot\overline{OC'}.$$

Emiatt C' az A' B' szakasz felezőpontja.

Ezzel a K' kör szerkesztését igazoltuk.

Ezek után az I. és II. alapszerkesztést csupán körzővel következőképp végezhetjük el:

I. *alapszerkesztés.*

Megszerkesztjük a két-két pontjával megadott e és f egyenes e' és f' tükörképét egy olyan K_0 körre vonatkozólag, amelynek O középpontja nem esik sem az e, sem az f egyenesre. Az e' és f' kör egymást O-ban és egy A' pontban metszi. Az A' pont K_0 körre vonatkozó A tükörképe az e és f egyenes metszéspontja.

II. *alapszerkesztés.*

Ha az e egyenes nem megy át a K kör C középpontján, akkor a K körrel való metszéspontjait az 1. szerkesztés adja. Ha e átmegy a C középponton, akkor megszerkesztjük e és K tükörképét egy olyan K_0 körre vonatkozólag, amelynek középpontján sem e, sem K nem megy át. Az így kapott két kör metszéspontjainak a K_0 körre vonatkozó tükörképei az e egyenesnek és a K körnek metszéspontjai.

Ha egy feladatban a K kör középpontja nem adott, az X ismeretlen középponthoz az 5. szerkesztés juttat. K egy O pontja körül K-t az A és B pontokban metsző K_0 kört rajzolunk. Az AB egyenes tükörképe K_0-ra olyan kör, amely átmegy K_0 O középpontján és az A és B pontok tükörképein, A'-n és B'-n, ezért K-val összeesik. X tehát az O pont AB egyenesre vonatkozó C tükörképének tükörképe a K_0 körre.

Az X pontot akkor is megszerkeszthetjük, ha a K körnek csak egy k íve ismeretes. Ekkor O k-nak pontja és K_0 a k körívet két pontban metsző kör.

Ezzel a Mohr—Mascheroni-féle tételt teljesen bebizonyítottuk.[13])

15. §. VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ SZERKESZTÉSEK

Csak vonalzóval olyan szerkesztések végezhetők el, amelyek pontoknak egyenesekkel való összekötését és egyenesek metszéspontjainak meghatározását kívánják meg.

Csak vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni a következőket: teljes négyoldal és teljes négyszög segítségével harmonikus pontokat és sugarakat, perspektivitásokkal projektív sorokban a megfelelő elemeket; a Pascal-féle hatszög és a Brianchon-féle hatoldal segítségével öt pontjával, vagy öt érintőjével megadott kúpszelet akárhány további pontját és érintőjét; az így megadott kúpszeletre vonatkozólag egy pont polárisát és egy egyenes pólusát.

Adott pontokból és egyenesekből vonalzóval szerkeszthető pontok jellemzésére olyan projektív koordinátarendszert veszünk fel, amelynek O, X, Y alappontja és E egységpontja adott pontokba esik.

A projektív sík egy P pontját két kettősviszonykoordinátával jellemezhetjük. Ha P_1, P_2, P_3 és E_1, E_2, E_3 a P, ill. az E pont vetülete az OXY háromszög

[13]) A Mohr—Mascheroni-féle tétel feltételezi, hogy körzővel bármilyen sugarú kört le lehet rajzolni. K. Yanagihara japán matematikus (The Tôhoku Mathematical Journal 34. k., 1931) azt is kimutatta, hogy körzővel végezhető bármely szerkesztés akkor is elvégezhető, ha körzővel nem lehet akármilyen nagy és akármilyen kicsiny sugarú kört rajzolni, hanem csak olyan ϱ sugarú köröket, amelyeknek sugarára az $r \leqq \varrho \leqq R$ egyenlőtlenség áll fenn, ahol r és R előre megadott nagyságú szakasz és $R > r$.

A körző használatának további korlátozása az egyenlő sugarú körökre való szorítkozás. Ezzel a kérdéssel rokon tárgyú J. Hjelmslev dán matematikusnak egy dán nyelvű dolgozata (Matematisk Tidsskrift A, 1938, 77.). A dolgozat olyan szerkesztéseket vizsgált, amelyeket körző és vonalzó használata nélkül egyetlen kör alakú éremmel lehet végezni, ha az éremmel egyenlő sugarú köröket írunk le és föltételezzük, hogy egy körhöz egy pontjában az érintőkört is meg tudjuk rajzolni. Ezzel az eszközzel aránylag sok szerkesztés végezhető, de nem minden olyan szerkesztés, amely körzővel elvégezhető. L. Bieberbach, Theorie der geom. Konstr., 37—39.

Nem ismeretes olyan vizsgálat, amely két vagy több, egymástól különböző sugarú kör alakú érem használatára vonatkozik.

Y, X és O szögpontjaiból a szemközt fekvő háromszögoldalra, akkor a P pont x, y projektív koordinátáit az

$$x = (OXP_1E_1), \quad y = (OYP_2E_2), \quad \frac{y}{x} = (XYP_3E_3)$$

kettősviszonyokkal értelmezzük.

A harmadik egyenletet Ceva tételéből kapjuk, ha az $(OXP_1)(XYP_3)(YOP_2) = -1$ egyenletet osztjuk az $(OXE_1)(XYE_3)(YOE_2) = -1$ egyenlettel.

Az XY egyenes pontjait a kérdéses pontot O-val összekötő egyeneshez tartozó pontok koordinátáinak $m = \dfrac{y}{x}$ viszonyával jellemezzük.

Az $(ABCD)$ kettősviszony

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$

értelmezéséből következik, hogy

$$(19) \qquad (ABCD)(ABDE) = (ABCE) \quad \text{és} \quad (ABCD) + (ACBD) = 1.$$

Az első összefüggés közvetlenül belátható, a másodikról legkönnyebben úgy győződhetünk meg, hogy az A, B, C és D pontot tartalmazó egyenesen olyan távolsági koordinátarendszert veszünk fel, amelyben az A, B, C és D pontnak abszcisszája $a=0$, b, c, illetőleg d. Ekkor a $b(c-d)+c(d-b)+d(b-c)=0$ azonosság $\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{CB} = 0$ alakban írható. Ebből $\overline{AD} \cdot \overline{CB}$-vel való osztás és megfelelő átalakítás után a kettősviszonyokra felírt második összefüggés egyszerűen következik.

Ha egy g egyenes A, B és E pontjára, továbbá ezen egyenes P, ill. Q pontjára nézve $(ABPE)=p$, ill. $(ABQE)=q$, akkor a g egyenesen vonalzóval szerkeszthetünk olyan U pontot, amelyre az $u=(ABUE)$ kettősviszony eleget tesz az

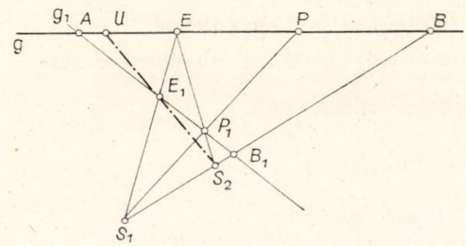
$$(1) \quad u = -p, \qquad (2) \quad u = \frac{1}{p}, \qquad (3) \quad u = 1-p, \qquad (4) \quad u = pq,$$

$$(5) \quad u = \frac{p}{q}, \qquad (6) \quad u = q-p, \qquad (7) \quad u = q+p$$

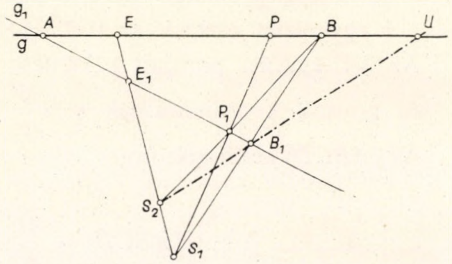
egyenletek bármelyikének.

Az (1) esetben az U pont P harmonikus társa az AB pontpárra, mert $(ABPU) = (ABPE):(ABUE) = -1$.

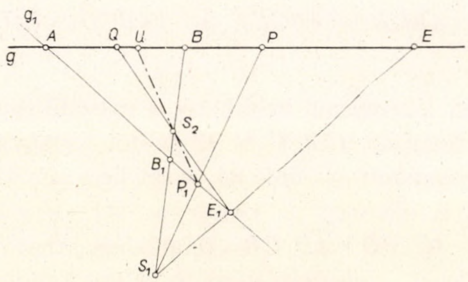
A (2), (3) és (4) esetben A-n át egy g_1 egyenest húzunk és egy g és g_1-en kívül fekvő S_1 pontból a g egyenes B, E és P pontját a g_1 egyenes B_1, E_1, P_1 pontjába vetítjük. Ezekből a pontokból szerkesztünk olyan S_2 pontot, amelyből B_1, E_1 vagy P_1 vetülete g-n a kívánt U pont.



14. ábra



15. ábra



16. ábra

A (2) esetben $u = \frac{1}{p} = (ABEP) = (AB_1E_1P_1) = (ABUE)$ és S_2 a BB_1 és EP_1 egyenes metszéspontja (14. ábra). Az S_1 és S_2 középpontú perspektivitás miatt nyilvánvalóan $(ABUE) = \frac{1}{p}$.

A (3) esetben $u = 1 - p = (APBE) = (AP_1B_1E_1) = (ABUE)$ és S_2 a BP_1 és EE_1 egyenes metszéspontja (15. ábra).

A (4) esetben $u = pq = (ABPE) \cdot (ABQE)$. Ekkor U-ra $(ABUQ) = p = (ABPE)$, mert $(ABUQ) \cdot (ABQE) = (ABUE) = u = pq$. Ezért $(ABUQ) = (ABPE) = (AB_1P_1E_1)$ és S_2 a BB_1 és QE_1 egyenes metszéspontja (16. ábra).

A többi három esetet az előzőkre visszük vissza.

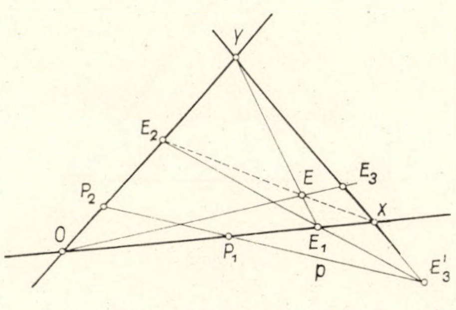
Az (5) esetben $u = \frac{p}{q}$. Ekkor (2) szerint először azt az U_1 pontot szerkesztjük meg, amelyre $(ABU_1E) = \frac{1}{q}$, s azután (4) szerint azt az U pontot, amelyre $(ABUE) = (ABPE) \cdot (ABU_1E)$.

A (6) esetben $u = q - p$. Ekkor (5) szerint azt az U_2 pontot szerkesztjük meg, amelyre $(ABU_2E) = u_2 = \frac{p}{q}$, azután (3) szerint azt az U_3 pontot, amelyre $(ABU_3E) = = u_3 = 1 - u_2 = 1 - \frac{p}{q}$ és végül (4) szerint azt az U pontot, amelyre $(ABUE) = u = = qu_3 = q - p$.

A (7) esetben $u = q + p$. Ekkor először (1) szerint azt az U' pontot szerkesztjük meg, amelyre $(ABU'E) = u' = -p$, s azután (6) szerint azt az U pontot, amelyre $(ABUE) = q - u' = q + p$.

Ezzel kimutattuk, hogy vonalzóval szerkeszthetünk a projektív koordinátarendszer x-tengelyén olyan pontot, amelynek koordinátája az adott pontok x-koordinátáit magában foglaló legkisebb számtesthez tartozik. Ugyanez érvényes az y-tengely pontjaira is.

Az x- és y-tengely E_1 és E_2 egységpontját összekötő egyenes az XY tengelyt egy E_3'-pontban, az XY pontpárra vonatkozólag E_3 harmonikus társában metszi. Az E_3' ponton átmenő p egyenes az OX, ill. OY tengelyt olyan P_1 és P_2 pontban metszi, hogy $x = (OXP_1E_1) = (OYP_2E_2)$.



17. ábra

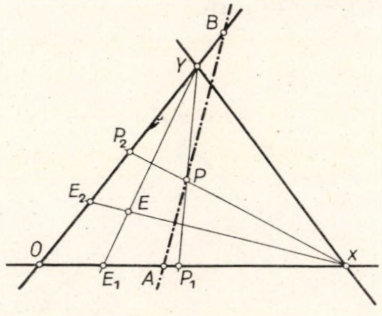
Ebből következik, hogy vonalzóval szerkeszthetjük az x- és y-tengely olyan pontjait, amelyeknek koordinátái az adott pontok x és y koordinátáit tartalmazó legkisebb számtestben vannak (17. ábra).

A most kimutatott tételt ki lehet egészíteni a következő tétellé:

Adott pontokból vonalzóval azok és csak azok a pontok szerkeszthetők, amelyeknek az adott pontokkal meghatározott valamelyik projektív koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái az adott pontok projektív koordinátáit magában foglaló legkisebb számtest számai.

Ez a tétel magában foglalja azt a csak fogalmazásra nézve általánosabb esetet, amikor pontokon kívül adva vannak egyenesek és adva vannak kettősviszonyok a szerkesztésben külön szerepet nem játszó pontnégyesekkel. Ekkor az adott egyenesek helyett ezeknek más adott egyenesekkel és az adott pontokat összekötő egyenesekkel való metszéspontjait adott pontoknak tekintjük. Egy egyenesen fekvő adott és az előbbi módon adottnak tekintett pontok közül felveszünk három különböző A, B és C pontot és perspektivitásokkal (tehát vonalzóval) meghatározzuk azon az egyenesen azt a $D_1, D_2, \ldots$ pontot, amelyre nézve az $(ABCD_k)$ kettősviszony $(k=1, 2, \ldots)$ adott kettősviszonnyal egyenlő. Ezután az adott kettősviszonyok helyett a $D_1, D_2, \ldots$ pontot is adott pontnak tekintjük. (Ha a szerkesztési feladatban nincs lényeges pont és egyenes, hanem csak kettősviszonyok vannak megadva, akkor az egyik egyenesen az adott kettősviszonyt meghatározó négy pontot vesszük adottnak. A projektív koordinátarendszer ezen az egyenesen kívül fekvő harmadik alappontját és egységpontját tetszőlegesen vehetjük fel.)

A kimondott tétel igazolására szükségünk van az egyenes projektív koordinátás egyenletére.



18. ábra

Ha az XY-tól különböző egyenes az x-tengelyt A, az y-tengelyt B pontban metszi, ha továbbá $a=(OXAE_1)$ és $b=(OYBE_2)$, és ha végül az egyenes egy tetszőleges P pontjának x és y a projektív koordinátája, akkor

$$\frac{x}{a}=\frac{(OXP_1E_1)}{(OXAE_1)}=(OXP_1A) \quad \text{és} \quad \frac{y}{b}=\frac{(OYP_2E_2)}{(OYBE_2)}=(OYP_2B).$$

Ha az y-tengely O, Y, P_2, B pontnégyesét P-ből az x-tengelyre vetítjük, akkor $(OYP_2B) = (OP_1XA)$. A kettősviszonyokra vonatkozó megfelelő tétel szerint tehát

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1, \quad \text{mert} \quad (OXP_1A)+(OP_1XA) = 1.$$

Csak az O ponton átmenő egyenesek egyenlete nem ilyen alakú. Ezek közül az x-tengelynek $y=0$, az y-tengelynek $x=0$ az egyenlete. Ha a P ponton átmenő ilyen egyenes az XY egyenest a P_3 pontban metszi, akkor ennek az egyenesnek bármely P pontjára fennáll az

$$\frac{y}{x} = (XYP_3E_3) = m = \text{állandó}$$

egyenlet.

Egy egyenes egyenlete tehát projektív koordinátákban is

$$Ax+By+C=0.$$

Ha már most S jelöli az adott pontok koordinátáit magában foglaló legkisebb számtestet, akkor két adott ponton átmenő egyenes egyenletének együtthatói az S számtesthez tartoznak, mivel a két pont projektív koordinátáinak racionális kifejezéseképp állíthatók elő. Két ilyen egyenes metszéspontjának koordinátái is S-hez tartoznak.

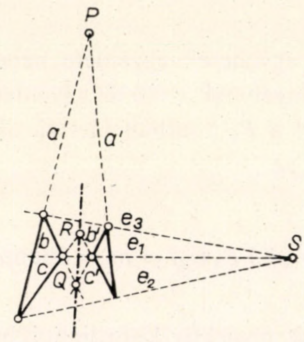
Ezzel a kimondott tétel második részét bebizonyítottuk, mivel a vonalzóval való szerkesztés adott és szerkesztett pontokból olyan pontokhoz juttat, amelyeknek koordinátái szintén S számai. A tétel első része abból következik, hogy az S számtest bármely c száma az adott pontok koordinátáinak racionális kifejezése és emiatt az 1.—7. szerkesztés felhasználásával a c projektív koordináta szerkeszthető.

16. §. A SÍK HATÁROLT RÉSZÉN VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ SZERKESZTÉSEK

A sík határolt részén, a rajzlapon vonalzóval olyan szerkesztéseket is el lehet végezni, amelyekben egyes pontok olyan egyenespárok metszéspontjaiként vannak megadva, amelyek egymást a rajzlapon kívül metszik.

Az ilyen szerkesztések keresztülvitele legtöbbször Desargues tételének alkalmazásával történik. Ez a tétel azt mondja ki, hogy két pespektív háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen, a perspektivitás tengelyén vannak, és megfordítva: két olyan háromszög, amelyeknek megfelelő oldalai egy egyenesen metszik egymást, perspektív, vagyis a megfelelő szögpontjaikat összekötő egyenesek egy ponton, a perspektivitás középpontján mennek át.

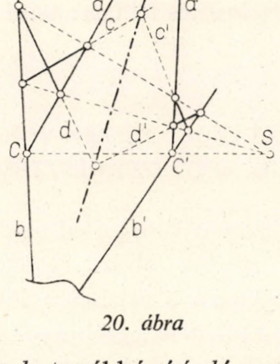
I. feladat: *Az a, a′ egyenespárnak a rajzlapon kívül eső P metszéspontján és a rajzlapon adott Q ponton át haladó egyenes húzása.*



19. ábra

A szerkesztést a 19. ábra mutatja. Olyan két perspektív háromszöget vettünk fel, amelyeknek a, a' megfelelő oldalpárja és amelyeknek megfelelő b, b' oldalpárja a Q pontban metszi egymást. A harmadik megfelelő oldalpár R metszéspontját a Q ponttal összekötő egyenes a perspektivitás tengelye és így P-n átmegy. A perspektivitás S középpontját és az e_1, e_2, e_3 egyenest tetszőlegesen, de úgy vesszük fel, hogy a b, b', c, c' és QR egyenes húzására szükséges két pontot a vonalzóval közvetlenül összeköthessük. Könnyű belátni, hogy ez lehetséges.

II. feladat: *Az a, a′ és b, b′ egyenespárok rajzlapon kívül eső P és Q metszéspontjain át egyenes húzása.*



20. ábra

Föltételezhetjük, hogy a és b, továbbá a' és b' a rajzlapon fekvő C és C' pontban metszi egymást. (Az ellenkező esetben a rajzlap C és C' pontján át az I. szerkesztéssel húzunk P és Q ponton átmenő egyenespárt.)

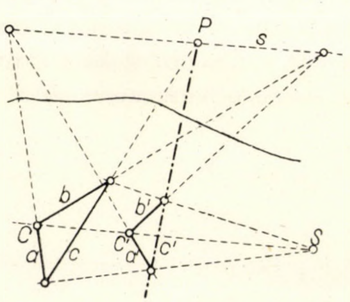
A CC' egyenesen fölvesszük a perspektivitás S középpontját és fölveszünk két olyan perspektív háromszögpárt, amelyeknek a és a', b és b' megfelelő oldalpárjuk. Az ilyen perspektív háromszögpárok perspektivitási tengelye a PQ egyenes, mivel az a és a', b és b' oldalpár ezen az egyenesen metszi egymást. A két háromszögpár harmadik oldalpárjának metszéspontja is a PQ egyenesre esik, ennélfogva ennek a két pontnak összekötő egyenese a PQ egyenes (20. ábra).

Az ábrán abc és $a'b'c'$ az egyik, abd és $a'b'd'$ a másik perspektív háromszögpár. Ha a c és c', d és d' egyenespár metszéspontja közül legalább az egyik a rajzlapra esik, akkor a PQ egyenes megszerkeszthető.

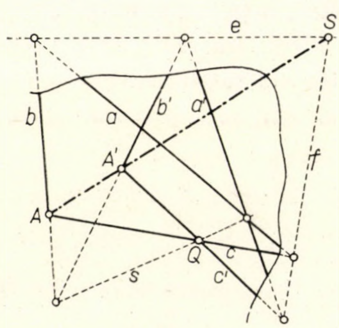
Előfordulhat az az eset, hogy a PQ egyenes teljesen a rajzlapon kívül esik. Ekkor a PQ egyenesnek egy darabja sem húzható meg, de az egyenes a következő feladat szerint felhasználható szerkesztésre.

III. feladat: *Az a, a' és b, b' egyenespárok metszéspontján átmenő s egyenes a rajzlapon kívül esik. Szerkesztendő olyan c' egyenes, amely az s és az adott c egyenes metszéspontján áthalad.*

A perspektivitás S középpontjának alkalmas fölvétele után az abc háromszöggel pespektív $a'b'c'$ háromszög c' oldala az s egyenesen, a pespektivitás tengelyén metszi a c egyenest. A szerkesztés elvégzése után egy Q pontnak az s és c egyenes P metszéspontjával való összekötése az I. feladatra vezethető vissza (21. ábra).



21. ábra



22. ábra

IV. feladat: *Olyan egyenest rajzolni, amely a rajzlapon kívül eső e és f egyenes S metszéspontján átmegy.*

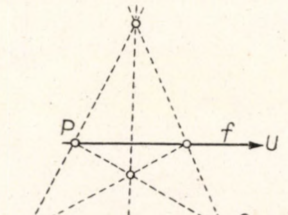
Az S pontot két perspektív háromszög perspektivitási középpontjának tekintjük. Ha az e egyenesen az a, b és a', b' egyenespár metszi egymást, akkor az a, a' és b, b' egyenespár metszéspontját összekötő egyenes a perspektivitás tengelye. Ennek az egyenesnek egy Q pontjából az f egyenesnek az a és a' egyenessel való metszéspontjához c, illetőleg c' egyenest húzunk (III. feladat). A b, c és a b', c' egyenespár A és A' metszéspontját összekötő egyenes az S ponton átmegy (22. ábra).

17. §. VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ AFFIN SZERKESZTÉSEK

Az előző két §-ban vonalzóval elvégezhető projektív szerkesztéseket, más kifejezéssel: projektív vonalas, vagy projektív lineáris szerkesztéseket tárgyaltunk. A projektív síkgeometria az olyan síkgeometriai fogalmak és vonatkozások összessége, amelyek nem változnak meg, ha egy síkról bármely (akár középpontos, akár párhuzamos) vetítéssel egy tetszőleges (párhuzamos, vagy nem párhuzamos) síkra térünk át. Egy geometriai szerkesztés a síkban akkor projektív, ha a szerkesztésnek egy tetszőleges új síkra való tetszőleges vetülete az első sík adatainak vetületéből kiindulva az új síkon ugyanazt a feladatot és ugyanúgy oldja meg. A projektív szerkesztési feladatok tehát nem kívánhatják párhuzamos egyenesek húzását, sem szakaszok felezését, mivel nem párhuzamos síkra történő középpontos vetítés a párhuzamosságot és a szakaszfelezést általában megváltoztatja.

Affin síkgeometriának nevezzük azoknak a síkgeometriai fogalmaknak és vonatkozásoknak összességét, amelyek tetszőleges síkra való párhuzamos vetítéskor változatlanok maradnak. A párhuzamosság és a szakaszfelezés affin fogalom. Az affin szerkesztésekben tehát szerepelhetnek párhuzamos egyenesek és szakaszfelezések, de nem szerepelhetnek derékszögek, mivel a szögek nagysága párhuzamos vetítéssel megváltoztatható.

Ahhoz, hogy a síkon az *AB* egyeneshez csupán vonalzóval párhuzamost tudjunk húzni, szükséges az *AB* egyenes *U* végtelen távoli pontjának valamilyen módon való megadása. Ezt az *U* pontot meghatározza az *AB* szakasz *C* felezőpontja, mint az *U* pontnak az *AB* pontpárra vonatkozó harmonikus társa.



23. ábra

Ha adva van az *e* egyenesen az *AB* szakasz *C* felezőpontjával, akkor egy *P* ponton át az *e*-vel párhuzamos *f* egyenes húzása teljes négyoldal segítségével történik. A 23. ábrán *f* a *C* pontnak az *AB* pontpárra vonatkozó harmonikus társát, *U*-t vágja ki *e*-ből és így *e*-vel párhuzamos.[14])

[14]) Az ebben a §-ban tárgyalt szerkesztések általában J. Steiner-től származnak (Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, 1833).

Ez az ábra egyúttal azt is megmutatja, hogy miképp lehet vonalzóval megszerkeszteni az AB szakasz felezőpontját, ha adva van az AB egyenessel párhuzamos f egyenes.

Ezzel kimutattuk a következő tételt:

Ha ismerjük az e egyenesen egy szakasz felezőpontját, vagy ismerjük az e-vel párhuzamos f egyenest, akkor csupán vonalzóval a sík bármely pontján át tudunk e-hez párhuzamost húzni és tudjuk az e-vel párhuzamos szakaszokat felezni.

Kimutatjuk a következő tételt is:

Vonalzóval az AB egyeneshez akkor is lehet párhuzamost húzni, ha rajta az AB szakasz felezőpontja helyett egy olyan C pontja ismeretes, amelyre vonatkozólag az $(ABC)=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\lambda$ *osztóviszony tetszőleges racionális szám.*

Vonalzóval szerkeszthető C-nek az AB pontpárra vonatkozó D harmonikus társa. Ekkor

$$(ABC)=\lambda,\quad (ABD)=-\lambda,\quad (BAC)=\frac{1}{\lambda},\quad (BAD)=-\frac{1}{\lambda}.$$

A tételt $\lambda=-1$ esetre előbb bizonyítottuk be; ezért föltehetjük, hogy e négy osztóviszony közül az egyik, pl. $\lambda=\dfrac{p}{q}>1$, ahol p, q viszonylagos törzsszámok. Ekkor

$$(ABC)-1=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}-1=\frac{\overline{AC}-\overline{BC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=-(ACB)=\lambda-1=\frac{p-q}{q}.$$

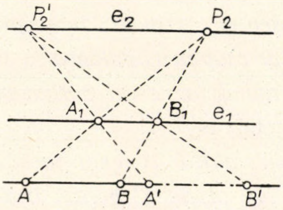
Az $(ACB)=1-\lambda=-\dfrac{p-q}{q}$ osztóviszony tehát kisebb egész számok hányadosa, mint λ. Ha $1-\lambda\neq-1$, akkor az AB egyenesen vonalzóval olyan ponthármashoz juthatunk, amelynek osztóviszonya kisebb egész számok hányadosa, mint $1-\lambda$. Ezzel az eljárással végül az egyenes olyan P, Q és R pontjához jutunk, hogy $(PQR)=-1$.

Ezzel a kimondott tételt igazoltuk, mivel R a PQ szakasz felezőpontja.

Ha ismerjük az e egyenessel párhuzamos e_1 egyenest, akkor az e egyenesen egy AB szakaszt vonalzóval el lehet tolni, vagyis e adott A' pontjához lehet vonalzóval olyan B' pontot szerkeszteni, hogy $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ (24. ábra).

Az előbb mondottak szerint tudunk e és e_1 egyenessel párhuzamos e_2 egyenest szerkeszteni. Ennek egy P_2 pontjából az AB szakaszt e_1-nek A_1B_1 szakaszába vetítjük. B_1-nek az e_2 és $A'A_1$ egyenes P_2' metszéspontjából e-re való vetülete a B' pont.

Az e egyenesen fekvő AB és CD szakasz AE összegének és AF különbségének meghatározására a CD szakaszt úgy toljuk el az e egyenesen, hogy C vagy D végpontja az eltolás után B-vel összeessék. A másik végpont a kívánt E, illetőleg F pont.



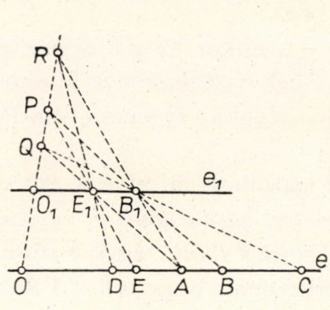
24. ábra

Kimutatjuk a következő tételt:

Legyen adva az e egyenesen bizonyos számú pont és szakasz, s legyen adva, vagy az adatok alapján legyen megszerkeszthető egy e-vel párhuzamos e_1 egyenes. Az adott pontok közül egyik mint O kezdő, egy másik mint E egységpont az e egyenesen távolsági koordinátarendszert határoz meg. Ha ebben a koordinátarendszerben az adott pontok koordinátái és az adott szakaszoknak a fölvett egységgel mért hosszai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor az adatokból vonalzóval az e egyenesnek azok a pontjai szerkeszthetők, amelyeknek abszcisszái az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számot tartalmazó legkisebb számtestnek számai.

Ennek igazolására elég kimutatni, hogy az a, ill. b abszcisszájú A, ill. B pontból vonalzóval lehet szerkeszteni a $c=ab$ és $d=\frac{a}{b}$ abszcisszájú C, ill. D pontot. Az $a+b$ és $a-b$ abszcisszájú pont szerkeszthetőségét ugyanis már megmutattuk.

Föltételezhetjük, hogy a és b pozitív, mivel a szakaszok összegére és különbségére adott szerkesztéssel az x és $-x$ abszcisszájú pont egymásból vonalzóval szerkeszthető.



25. ábra

Az e egyenes O, E és B pontját egy P pontból az e_1 egyenes O_1, E_1 és B_1 pontjába vetítjük. Ha Q, illetőleg R jelöli az OP egyenesnek az AE_1, illetőleg az AB_1

egyenessel való metszéspontját, akkor Q-ból B_1-nek, illetőleg R-ből E_1-nek az e egyenesre való vetülete a C, illetőleg D pont (25. ábra).

A szerkesztés szerint ugyanis

$$\overline{OC}:\overline{OA}=\overline{O_1B_1}:\overline{O_1E_1}=\overline{OB}:\overline{OE}, \quad \text{vagyis} \quad c:a=b:1, \quad \text{és}$$

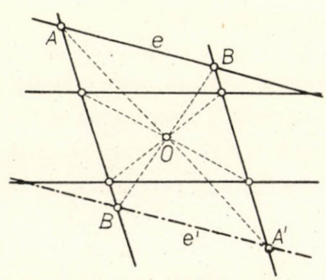
$$\overline{OD}:\overline{OA}=\overline{O_1E_1}:\overline{O_1B_1}=\overline{OE}:\overline{OB}, \quad \text{vagyis} \quad d:a=1:b.$$

Ebből következik a kimondott tétel igazsága.

A párhuzamos e, e_1 egyenespár megadásával nem lehet csupán vonalzó segítségével másirányú f, f_1 párhuzamos egyenespárt húzni. Ez abból következik, hogy a síknak egy S középpontú vetítése az e egyenesen átmenő σ síkra az e, e_1, illetőleg f, f_1 egyenespárt párhuzamos e', e_1', illetőleg metsző f', f_1' egyenespárba viszi át. Márpedig, ha léteznék olyan *vonalas* szerkesztés, amely a párhuzamos e, e_1 egyenespárból (más irányú) párhuzamos f, f_1 egyenespárt szolgáltatna, akkor ennek a szerkesztésnek a középpontos vetítés után is érvényesnek kellene lennie, azaz az e', e_1' párhuzamos egyenespárból kiindulva is párhuzamos f', f_1' egyenespárt kellene szolgáltatnia.

Ha a síkban adva van egy parallelogramma, akkor vonalzó segítségével bármely e egyeneshez lehet párhuzamos e′ egyenest húzni.

Az e' egyenes szerkesztése az e egyenesnek a parallelogramma O középpontjára vonatkozó tükrözésével történik. (Ha az e egyenes a parallelogramma egyik oldalát A pontban metszi, akkor az AO egyenesnek a szemközt fekvő oldallal való A' metszéspontja az e' egyenes pontja.) (26. ábra)



26. ábra

Ha e átmegy O-n, akkor e'-vel egybeesik, ekkor azonban O felezi az e egyenesnek a parallelogrammába eső szakaszát és így lehet vonalzó segítségével e-vel párhuzamost húzni.

Az előzők szerint a parallelogrammát helyettesítheti egy párhuzamos egyenespár és egy más irányú, felezőpontjával együtt megadott szakasz, vagy felezőpontjával együtt megadott két különböző irányú szakasz.

Kimondhatjuk a következő tételt:

Legyen adva egy parallelogramma, amelynek O és E két szemközt fekvő szögpontja és legyen adva még véges számú $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pont a síkban. Ha abban a Descartes-féle koordinátarendszerben, amelynek tengelyei tartalmazzák a parallelogrammának O-ból kiinduló két oldalát és amelynek E az egységpontja, a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontnak valamilyen sorrendben $a, b, c, \ldots$ a koordinátái, akkor vonalzó segítségével az adott pontokból a síknak mindazok és csak azok a pontjai szerkeszthetők, amelyeknek koordinátái az $a, b, c, \ldots$ számot magában foglaló legkisebb számtestnek számai.

Ebben a tételben feltételeztük, hogy vonalzóval adott pontpárokat egyenesekkel kötünk össze és az így kapott egyenesek metszéspontjait a további szerkesztésben adottaknak tekintjük.

Ha E_x és E_y az alapul vett parallelogrammának az x- és y-tengelyre eső másik két szögpontja, akkor az x-tengelyen OE_x, az y-tengelyen OE_y az egység. Ha x_k és y_k a P_k pont két koordinátája, akkor az x-tengelyen az x_k, az y-tengelyen az y_k koordinátájú pont vonalzóval szerkeszthető.

Az OE egyenes egyenlete $x=y$. Ha a P_k ponton átmenő és az x-, illetőleg y-tengellyel párhuzamos az OE egyenest P_k', ill. P_k'' pontban metszi, akkor P és P_k'' mindkét koordinátája egyenlő, mégpedig y_k, ill. x_k.

Ezzel a kimondott tétel első részét bebizonyítottuk, mivel a jelen § első felében kimutatott tétel szerint az x és y tengelynek mindazok a pontjai vonalzóval szerkeszthetők, amelyeknek koordinátái az $a, b, c, \ldots$ számot magában foglaló legkisebb számtesthez tartoznak, és így mindazok a pontok is, amelyeknek mindkét koordinátája ilyen tulajdonságú szám.

Az, hogy vonalzóval más pont nem szerkeszthető, abból következik, hogy két olyan ponton átmenő egyenes egyenlete, amelyeknek koordinátái az S számtesthez tartoznak, Descartes-féle koordinátákban is olyan $c_1x+c_2y+c_3=0$ egyenlet, amelynek együtthatói S-nek számai. Két ilyen egyenes metszéspontjának koordinátái tehát szintén S-hez tartoznak.

18. §. VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ METRIKUS SZERKESZTÉSEK

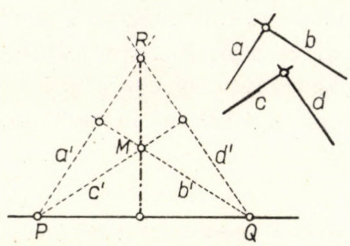
A metrikus síkgeometria mindazoknak a síkbeli geometriai fogalmaknak, vonatkozásoknak és tételeknek összessége, amelyek változatlanok maradnak, ha egy síkról tetszőleges párhuzamos vetítéssel egy vele párhuzamos síkra térünk át. A metrikus geometria tehát magában foglalja az affin síkgeometriát és ezzel együtt a projektív síkgeometriát.

A metrikus síkgeometriának azok a fogalmai, amelyek nem affin (s még kevésbé projektív) fogalmak, metrikus fogalmak. Ilyen metrikus fogalom a derékszög, a háromszögek osztályozása szögeik és oldalaik szerint, rombusz, négyzet stb.

Ha a síkban egy parallelogrammán kívül adva van egy derékszög, akkor lehet vonalzóval olyan derékszögeket szerkeszteni, amelyeknek szárai az adott derékszög száraival párhuzamosak, de más derékszöget nem. Ez abból következik, hogy derékszögnek párhuzamos vetülete a száraival nem párhuzamos síkra általában nem derékszög.

Ha a síkban adva van egy parallelogramma és két nem párhuzamos szárú derékszög, akkor vonalzóval bármely egyenesre lehet merőlegest állítani.

Ha a és b az egyik, c és d a másik derékszög szára és ha P és Q annak az e egyenesnek két pontja, amelyre merőlegest akarunk állítani, akkor a parallelogramma segítségével olyan két derékszöget szerkesztünk, amelyeknek csúcsai az e egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek, szárai P-n és Q-n mennek át és az adott két derékszög száraival párhuzamosak.



27. ábra

Ha az így kapott egyik derékszög szárai a másiknak szárait (P-n és Q-n kívül) az R és M pontban metszik, akkor M a PQR háromszög magasságpontja és így RM merőleges a PQ egyenesre (27. ábra).

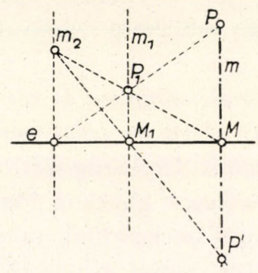
Ebből következik, hogy adott parallelogramma és nem párhuzamos szárakkal bíró két adott derékszög segítségével lehet vonalzóval bármily irányú oldalakkal bíró téglalapot és bármily irányú átlókkal bíró rombuszt szerkeszteni.

Ha adva van a síkban egy parallelogramma és két nem párhuzamos szárakkal bíró derékszög, akkor vonalzóval lehet szerkeszteni pontnak és egyenesnek egy egyenesre vonatkozó tükörképét.

P pontnak az e egyenesre vonatkozó P' tükörképét úgy szerkesztjük meg, hogy az e egyenesre m_1 merőlegest állítunk, azzal P-n át párhuzamos m egyenest húzunk és egy másik m_2 párhuzamos segítségével az m egyenesen megszerkesztjük az $\overline{MP'} = \overline{PM}$ szakaszt (28. ábra).

Az f egyenes e-re vonatkozó tükörképe f két pontjának tükörképén átmegy. Ha f metszi e-t, akkor az egyik pont helyett ezt a metszéspontot választjuk.

Tükrözéssel megszerkeszthetjük egy szög kétszeresét, háromszorosát stb. Ha ugyanis e_0 és e_1 az α szög két szára, akkor az e_0 félegyenesnek az e_1 tengelyre vonatkozó e_2 tükörképe e_0-lal 2α szöget alkot, az e_1 félegyenesnek az e_2 tengelyre vonatkozó e_3 tükörképe pedig e_0-lal 3α szöget alkot stb.

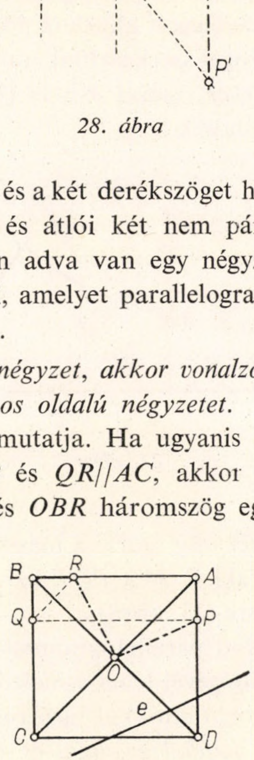


28. ábra

Az adott parallelogrammát és a két derékszöget helyettesítheti egy adott négyzet, mivel a négyzet oldalai és átlói két nem párhuzamos szárú derékszöget határoznak meg. Ha azonban adva van egy négyzet, akkor vonalzóval olyan szerkesztést is el lehet végezni, amelyet parallelogramma és két derékszög alapul vételével általában nem lehet.

Ha adva van a síkban egy négyzet, akkor vonalzóval lehet szerkeszteni tetszőleges e egyenessel párhuzamos oldalú négyzetet.

A szerkesztést a 29. ábra mutatja. Ha ugyanis O az $ABCD$ négyzet középpontja és ha $OP \| e$, $PQ \| AB$ és $QR \| AC$, akkor $\overline{OR} = \overline{OP}$ és OR merőleges OP-re, mert az OAP, OBQ és OBR háromszög egybevágó.



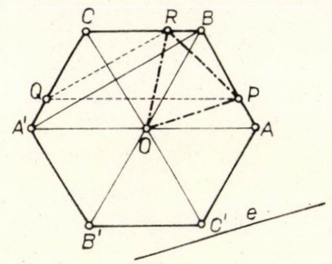
29. ábra

Ebből következik, hogy négyzet alapul vételével vonalzó használatával lehet tetszőleges szakaszt derékszöggel elforgatni és tetszőleges derékszöget felezni.

A parallelogrammát és a két derékszöget helyettesítheti egy szabályos hatszög. Ha ugyanis $ABCA'B'C'$ a szabályos hatszög, akkor $ABA'B'$ és $BCB'C'$ téglalap.

Ha adva van egy szabályos hatszög, akkor vonalzóval lehet szerkeszteni tetszőleges e egyenessel párhuzamos oldalú szabályos háromszöget.

A szerkesztést a 30. ábra mutatja. Ezen az ábrán $OP \| e$, $PQ \| AA'$ és $QR \| A'B$. Az OPR háromszög egyenlő oldalú, mivel az OAP, $OA'Q$ és OBR háromszög egybevágóságából következik, hogy $\overline{OP} = \overline{OR}$ és $AOB\sphericalangle = POR\sphericalangle$.



30. ábra

Ha tehát meg van rajzolva egy szabályos hatszög, akkor vonalzóval lehet bármely szakaszt a derékszög kétharmad részével elforgatni és lehet bármilyen helyzetű és a derékszög kétharmad részével egyenlő szöget felezni, vagy bármily helyzetű derékszöget három egyenlő részre osztani.

Azok a vonalzóval végezhető szerkesztések, amelyekben négyzet van megadva, nem azonosak azokkal, amelyekben szabályos hatszög van megrajzolva. Az első esetben lehet négyzetet, de nem lehet egyenlő oldalú háromszöget szerkeszteni, a második esetben éppen megfordítva.

Ha ugyanis a négyzet két szemközt fekvő szögpontja közül az egyiket egy derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjának, a másikat pedig egységpontjának választjuk, akkor a négyzet szögpontjaiból vonalzóval szerkeszthető pontok koordinátái mind racionálisak. Az $A=(0, 0)$, $B=(2, 0)$ és $C=(1, \sqrt{3})$ csúcsú egyenlő oldalú háromszög C csúcsa tehát vonalzóval nem szerkeszthető.

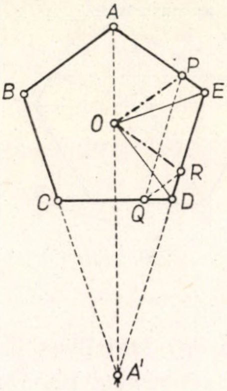
Hasonlóképp lehet kimutatni, hogy szabályos hatszögből kiindulva vonalzóval nem szerkeszthető négyzet.

Egy egyenlő oldalú háromszögből csupán párhuzamos egyenes húzásával lehet szabályos hatszöget szerkeszteni. Ebből következik, hogy a szabályos háromszög és egy parallelogramma helyettesítheti a szabályos hatszöget, a szabályos háromszög azonban egymagában nem.

Egy szabályos ötszög is helyettesíthet egy adott parallelogrammát és két nem párhuzamos szárú derékszöget. Az $ABCDE$ szabályos ötszögben pl. a CD oldallal párhuzamos a BE átló és a CD oldalra merőleges az AA' egyenes, ha A' a BC és ED egyenes metszéspontját jelenti (31. ábra).

Szabályos ötszög segítségével olyan szerkesztést is lehet vonalzóval elvégezni, amelyet sem négyzet, sem szabályos hatszög segítségével nem lehet. Szabályos ötszög megadása után vonalzóval szerkeszthető egy OP szakaszból olyan $\overline{OR}=\overline{OP}$ szakasz, amely OP-vel a teljes szög ötödrészét alkotja.

A szerkesztésben $PQ // DE$ és $QR // AB$. A szerkesztés helyessége az OEP, ODQ és ODR háromszög egybevágóságából és abból következik, hogy a DOE szög nagysága a teljes szög ötödrésze.



31. ábra

Párhuzamosak húzásának lehetőségéből következik, hogy vonalzóval nemcsak az OP szakasznak, hanem bármely FG szakasznak a teljes szög ötödrészével való elforgatását meg lehet szerkeszteni.

19. §. A PONCELET—STEINER-FÉLE SZERKESZTÉSEK

Poncelet 1822-ben és tőle függetlenül Steiner 1833-ban a következő tételt találta[15]):

Ha a síkon meg van rajzolva egy kör és annak középpontja is meg van adva akkor mindazok a geometriai szerkesztések, amelyek körzővel és vonalzóval elvégezhetők, egyedül vonalzóval is elvégezhetők.

Minthogy két egyenes metszéspontja közvetlenül meghatározható, azért csak azt kell kimutatnunk, hogy az O középpontjával együtt megadott K kör segítségével akkor is meg lehet vonalzóval szerkeszteni

1. egyenes és kör metszéspontjait és
2. két kör metszéspontjait,

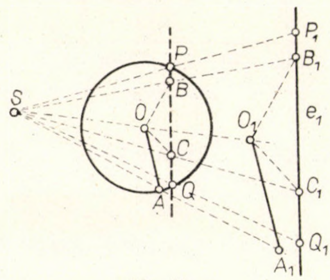
ha a köröknek csak középpontja és egy-egy pontja van megadva.

[15]) J. V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures. Paris, I. kiadás 1822, 187. II. kiadás 1865, 181., ill. J. Steiner könyvünk irodalmi összeállításában és a [14]) lapalji jegyzetben felsorolt munkája.

Minthogy a K kör bármely két átmérőjének végpontjai téglalapnak szögpontjai, azért 18. § értelmében csupán vonalzó használatával lehet egy ponton át bármely egyenessel párhuzamost húzni és bármely egyenesre merőlegest állítani, továbbá lehet a K kör r sugarával egyenlő oldalú négyzetet szerkeszteni.

A Poncelet—Steiner-féle tétel kimutatására szükséges két alapszerkesztést vonalzóval következőképp lehet elvégezni:

1. Az e_1 egyenes és az O_1 középpontjával és A_1 pontjával megadott K_1 kör metszéspontjainak szerkesztése végett megszerkesztjük a K és K_1 kör egyik hasonlósági pontját, pl. az S külső hasonlóságpontját. Ha A az O pontból kiinduló és az O_1A_1 félegyenessel egyező irányú félegyenesnek a K körrel való metszéspontja, akkor az OO_1 és AA_1 egyenes metszéspontja az S pont (32. ábra).



32. ábra

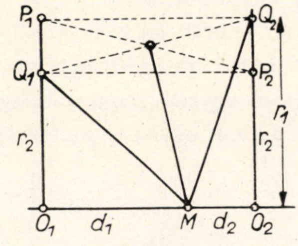
Ezután az e_1 egyenesen felveszünk egy B_1 és C_1 pontot és párhuzamosak húzásával meghatározzuk az S külső hasonlósági pontra vonatkozólag az $O_1B_1C_1$ háromszöghöz hasonló és hasonló helyzetű OBC háromszöget. Ez a hasonlósági átalakítás az e_1 egyenesnek a BC egyenest felelteti meg. Az e_1 egyenes metszi, érinti, vagy nem metszi a K_1 kört, aszerint, amint a BC egyenes metszi, érinti, illetőleg nem metszi a K kört. Ha P és Q a BC egyenes és a K kör metszéspontja, és ha az SP és SQ egyenes az e_1 egyenest P_1 és Q_1 pontban metszi, akkor ez a két pont e_1 és K_1 metszéspontja.

2. Az O_1 középpontjával és A_1 pontjával megadott K_1 kör és az O_2 középpontjával és B_2 pontjával megadott K_2 kör metszéspontjainak meghatározását visszavezethetjük az előbbi szerkesztésre. K_1 és K_2 metszéspontjait ugyanis a két kör m hatványvonala metszi ki a K_1 vagy a K_2 körből. Mivel m merőleges a két kör O_1O_2 centrálisára, azért elég annyit kimutatnunk, hogy az m és O_1O_2 egyenes M metszéspontja vonalzóval szerkeszthető.

Megszerkesztjük az O_1O_2 egyenesre, ennek ugyanazon oldalán az O_1, illetőleg O_2 pontban állított merőleges félegyenesnek a K_1 körrel való P_1, illetőleg a K_2 körrel való P_2 metszéspontját (az 1. szerkesztéssel), s azután a $P_1O_1O_2Q_2$ és a $P_2O_2O_1Q_1$ téglalapot. Az O_1O_2 centrálisból a Q_1Q_2 szakasz középvonala vágja ki az M pontot (33. ábra).

Ennek igazolására azt kell kimutatnunk, hogy az így szerkesztett M pontnak a K_1 és K_2 körre vonatkozó hatványa ugyanaz. (Egy pontnak egy r sugarú körre vonatkozó hatványa — miként ismeretes — $H=d^2-r^2$, ahol d jelöli a pontnak a kör középpontjától való távolságát.)

Ha r_1 jelöli a K_1 és r_2 a K_2 kör sugarát és $\overline{O_1M}=d_1$, $\overline{O_2M}=d_2$, akkor az M pont hatványa a K_1 körre $H_1=d_1^2-r_1^2$, a K_2 körre pedig $H_2=d_2^2-r_2^2$.



33. ábra

Mivel M a Q_1Q_2 szakasz középvonalán van és mivel az MO_1Q_1 és MO_2Q_2 háromszög derékszögű, azért

$$d_1^2+r_2^2=\overline{MQ_1^2}=\overline{MQ_2^2}=d_2^2+r_1^2.$$

Ebből következik, hogy $H_1=H_2$. Ezzel a Poncelet—Steiner-féle tételt teljesen bebizonyítottuk.[16])

20. §. AZ ALAPKÖR KÖZÉPPONTJÁNAK NÉLKÜLÖZHETETLENSÉGE A PONCELET—STEINER-FÉLE SZERKESZTÉSEKBEN

Az alapkör középpontjának szükségességét a következő tétel fejezi ki:

Ha a K kör meg van rajzolva, de középpontja nincs megadva, akkor K középpontját vonalzóval nem lehet megszerkeszteni.[17])

[16]) Poncelet és Steiner tétele szerint a körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztésekben a sík ∞^3 körét nélkülözni lehet, ha egy kört középpontjával együtt ismerünk. Ehhez csatlakozólag E. A. Weiss (Konstruktionen mit hängenden Linealen. Deutsche Mathematik 6. k. 1941, 3. lap) kimutatta, hogy a Poncelet—Steiner-féle szerkesztésekben a sík ∞^3 számú sugársora helyett elég négy sugársorra szorítkozni. Másképp kifejezve: ha meg van adva egy kör középpontjával együtt, akkor bármely körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztést vonalzóval úgy is lehet végezni, hogy csak olyan egyeneseket húzunk, amelyek a síknak négy meghatározott pontja közül valamelyiken átmennek. (Weiss föltételezi, hogy a négy pont közül három egy egyenesre esik, a negyedik azonban azon az egyenesen kívül van, és hogy a négy pont közül egyik az alapkörön kívül esik, s belőle a körhöz húzható érintők érintéspontjai adva vannak.)

[17]) Ezt a tételt D. Hilbert előadásaiban mutatta ki először, a bizonyítást D. Cauer közölte és kiterjesztette két kör esetére is, Math. Annalen 73. k. (1913), 90.; 74. k. (1913), 472.

Legyen egy derékszögű koordinátarendszerben

$$K(x, y) \equiv (x-a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0, \quad |a| > 1$$

a K kör egyenlete. Ennek a körnek síkjában az

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

helyettesítés kollineációt határoz meg, amely a

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0, \qquad c_3x' + c_2y' + c_1 = 0$$

egyeneseket egymásnak felelteti meg. Ez a kollineáció a K kör $(a, 0)$ középpontját az $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ pontba, a K kört pedig önmagába viszi át, mivel a

$$K(x, y) \equiv \left(\frac{1}{x'} - a\right)^2 + \frac{y'^2}{x'^2} + 1 - a^2 \equiv \frac{1}{x'^2}[(x'-a)^2 + y'^2 + 1 - a^2] \equiv \frac{K(x', y')}{x'^2}$$

azonosság miatt a $K(x, y) = 0$ egyenletből a $K(x', y') = 0$ egyenlet következik és megfordítva.

Tegyük föl most, hogy van olyan csak vonalzóval elvégezhető szerkesztés, amely bizonyos számú, részben a K körön fekvő pontból, részben más tetszőleges pontból kiindulva a K kör középpontjához vezet. Ennek a szerkesztésnek az előbbi kollineáció a K kör ugyanannyi pontjából és ugyanannyi más pontból kiinduló és ugyanolyan tulajdonságú szerkesztést feleltet meg, mint az első szerkesztés. Ez a tisztán vonalas második szerkesztés azonban az $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ ponthoz juttat, noha az $(a, 0)$ középponthoz kellene vezetnie.

Ebből az ellentmondásból következik a kimondott tétel igazsága.

Ugyanígy lehet kimutatni a következő tételt:

Ha két alapkör van megrajzolva, de egyiknek sem ismeretes a középpontja, és ha a két kör sem nem metszi egymást, sem nem koncentrikus, akkor egyik középpontot sem lehet vonalzóval megszerkeszteni.

Ha két ilyen kör centrálisát a derékszögű koordinátarendszer x-tengelyének, hatványvonalát y-tengelynek és a kezdőpontból a két körhöz húzott érintő hosszát egységnek választjuk, akkor a két kör egyenlete

$$(x-a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0, \quad (x-a_1)^2 + y^2 + 1 - a_1^2 = 0, \quad |a| > 1, \ |a_1| > 1, \ a \neq a_1,$$

alakban írható. Az

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

kollineáció mindkét kört önmagába viszi át, az $(a, 0)$ és $(a_1, 0)$ középpontot ellenben más pontba, mégpedig az $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ és $\left(\frac{1}{a_1}, 0\right)$ pontba viszi át.

Ha föltennénk, hogy van olyan vonalas szerkesztés, amellyel az egyik kör középpontjához eljutunk, akkor a kollineációnak erre a vonalas szerkesztésre való alkalmazása éppúgy ellentmondáshoz vezet, mint egy kör esetén.[18])

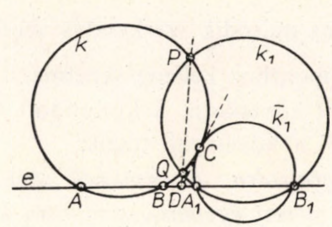
Ezt a két tételt geometriai úton is könnyű bebizonyítani. A bizonyítás annak a térmértani tételnek felhasználásával történik, amely szerint egy köralapú ferde kúp alapkörén átmenő gömbök a kúpból még egy-egy kört vágnak ki. Ezeknek a köröknek síkjai párhuzamosak a kúp csúcsán és alapkörén átmenő gömbnek a kúp csúcsához tartozó érintősíkjával.

Legyen a ferde kúp csúcsa C, alapköre K és ennek síkja σ és legyen K' az a kör, amelyet a K körön és a C ponton átmenő gömb C pontjának érintősíkjával párhuzamos σ' sík vág ki a kúpfelületből. A C pontból a σ' síkra való vetítés a K kört a K' körbe viszi át, a K kör középpontjának vetülete azonban nyilvánvalóan nem esik össze K' középpontjával.

Ha volna olyan vonalzóval végezhető szerkesztés, amely megadja a K körből ennek ismeretlen középpontját, akkor a C pontból ennek a szerkesztésnek a σ' síkra, való vetítésével K' középpontjához kellene jutnunk. Mivel ez nem következik be, azért a föltevés helytelen.

A második tétel igazolására elég azt kimutatni, hogy ha a σ síkon a nem koncentrikus K és K_1 körnek nincs közös pontja, akkor van olyan G és G_1 gömb, amely a K, ill. K_1 körön átmegy, egymást egy C pontban érinti és az ehhez a ponthoz tartozó közös σ_0' érintősík metszi a σ síkot.

Egy ilyen C pontból a K és K' kör vetülete a σ_0' síkkal párhuzamos σ' síkra olyan K' és K_1' kör, amelynek középpontja nem esik egybe K, ill. K_1 középpontjának vetületével. Ha volna olyan vonalas szerkesztés, amely a K és K_1 körből K középpontjához juttatna el, akkor ennek a szerkesztésnek C-ből a σ' síkra való vetítésével K' középpontjához kellene vezetnie. Ez azonban nem következik be, mivel a vetítéssel K középpontjának vetületét kapjuk.



34. ábra

[18]) Ezt a tételt elemi geometriai úton bizonyította be H. Rademacher és O. Toeplitz „Von Zahlen und Figuren" c. könyvében, II. kiadás, 1933, 21. §, 50., és magyarul: „Számokról és alakzatokról" Budapest 1954, 166—176.; továbbá K. Yanagihara, Tôhoku Math. Journal 44. k. (1938), 322.

A G és G_1 gömböt következőképp állíthatjuk elő:

K és K_1 e centrálisán átmenő és a σ síkra merőleges $\bar{\sigma}$ sík olyan AB és A_1B_1 átmérőt vág ki a K és K_1 körből, amelyek vagy egymáson kívül vannak, vagy az egyik magában foglalja a másikat, de felezőpontjuk nem esik egybe. Ha Q a $\bar{\sigma}$ sík egy P pontján és az AB, ill. A_1B_1 pontpáron átmenő k és k_1 kör második metszéspontja és ha D a PQ és e egyenes metszéspontja, akkor $\overline{DA}\cdot\overline{DB}=\overline{DA_1}\cdot\overline{DB_1}$, mivel D a k és k_1 kör hatványvonalán van. Az AB és A_1B_1 szakasz egymáshoz való helyzetéből következik, hogy $\overline{DA}\cdot\overline{DB}$ hatvány véges és pozitív és így lehet D-ből k-hoz érintőt húzni. Ha C az egyik ilyen érintéspont, akkor az A_1, B_1, C ponton átmenő $\overline{k_1}$ kör C-ben érinti a k kört, mivel $\overline{DA_1}\cdot\overline{DB_1}=\overline{DC}^2$ (34. ábra).

Ebből következik, hogy a K, k és a K_1, $\overline{k_1}$ körpáron átmenő G és G_1 gömb érinti egymást és hogy e pont közös érintősíkja metszi a σ síkot.

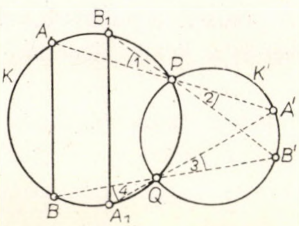
Ezzel tiszta geometriai úton is bebizonyítottuk a második tételt.

A most kimutatott tétellel ellentétben kimondható a következő:

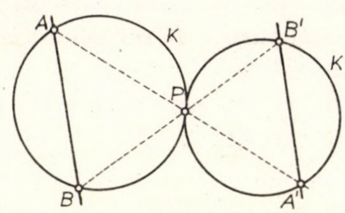
Vonalzóval meg lehet szerkeszteni a középpontja nélkül megadott K és K' kör hiányzó középpontját, ha

1. *a két kör metszi, vagy érinti egymást,*
2. *a két kör középpontja egybeesik.*

Ha K és K' a P és Q pontban metszi egymást és ha a K kör tetszőleges A és B pontját a 35. ábra szerint P-ből és Q-ból kétszeres vetítéssel a K kör A_1 és B_1 pontjába visszük át, akkor az



35. ábra



36. ábra

1, 2, 3 és 4 számmal megjelölt szögek egyenlősége miatt a K kör AB_1 és BA_1 íve egyenlő és így az AB és A_1B_1 húr párhuzamos. Emiatt e két húr felezőpontja és a két felezőpontot összekötő átmérő vonalzóval szerkeszthető. Egy hasonlóképp szerkeszthető másik átmérő az elsőt a K kör középpontjában metszi.

Ha a K és K' kör a P pontban érinti egymást és ha a K kör A és B pontját P-ből a K' kör A' és B' pontjába vetítjük, akkor $AB \parallel A'B'$, mert K és K' a P hasonlóságpontra vonatkozólag hasonló helyzetű (36. ábra).

Ha K és K' egyközepű (koncentrikus), akkor egy tetszőleges pontnak a két körre vonatkozó polárisa egymással párhuzamos. Egy pontnak körre vonatkozó polárisa vonalzóval mindig szerkeszthető.

Így szerkeszthetünk parallelogrammákat és ezek segítségével az adott körök középpontjait vonalzóval szerkesztjük.

Megjegyezzük, hogy nem ugyanahhoz a körsorhoz tartozó három kör segítségével vonalzóval akkor is meg lehet szerkeszteni a három kör hiányzó középpontját, ha a három kör között nincs olyan kettő, amelyeknek egymással közös pontjuk volna. A szerkesztés és megokolása nem egyszerű.[19])

[19]) Lásd Cauer cikkét, Math. Ann. 74. k. 472.

21. §. VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ SZERKESZTÉSEK EGY AKÁRMILYEN KICSINY KÖRÍV ÉS A HOZZÁTARTOZÓ KÖR KÖZÉPPONTJÁNAK FELHASZNÁLÁSÁVAL

Kimutatjuk a következő tételt:[20])

Ha egy K körnek meg van adva egy akármilyen kicsiny k köríve és O középpontja, akkor egyedül vonalzóval el lehet végezni mindazokat a szerkesztéseket, amelyeket körzővel és vonalzóval el lehet végezni.

Ha A és B a k körív két végpontja, akkor a Pascal-féle hatszög tételének felhasználásával egyedül vonalzóval meg lehet szerkeszteni a K kör A és B pontjának a és b érintőjét és ezek S metszéspontját. Az S pontnak az A és B ponton átmenő s egyenes a polárisa a K körre vonatkozólag.

Az S pont és az s egyenes a projektív síkon egy H harmonikus perspektivitást határoz meg. Ez a sík egy P pontjának az SP egyenesen azt a P' pontot felelteti meg, amelyre vonatkozólag $(SS'PP') = -1$, ha S' jelöli az SP egyenesnek az s egyenessel való metszéspontját. Ez a H perspektivitás a P ponton és az s egyenes egy A pontján átmenő egyenesnek a $P'A$ egyenest felelteti meg.

Az s egyenes S-nek K-ra vonatkozó polárisa. A pólus és a poláris harmonikus tulajdonságai miatt a H perspektivitás a k körívet és a K kör kiegészítő k' ívét egymásba viszi át.

A k' körív és egy s egyenes metszéspontjainak meghatározása végett vonalzóval megszerkesztjük az e egyenesnek a harmonikus perspektivitásban megfelelő e' egyenest. A k körív és az e' egyenes egy közös pontjának S-ből az e egyenesre való vetülete a k' körív és az e egyenes közös pontja.

Ezzel az eljárással a k körív ismerete alapján vonalzóval lehet szerkeszteni a K körnek bármely egyenessel való valós metszéspontjait. A k körív tehát helyettesítheti a teljes K kört. Ha tehát a k köríven kívül a K kör középpontja is meg van adva, akkor vonalzóval mindazok a szerkesztések elvégezhetők, amelyek a Poncelet—Steiner-féle tétel alapján elvégezhetők.

Ha a K körnek csak egy k köríve és a K' körnek csak öt pontja van megadva, de tudjuk, hogy e közül az öt pont közül P és Q a K körnek is pontja, akkor K középpontját vonalzóval éppúgy szerkeszthetjük meg, mintha K és K' teljesen meg volna rajzolva (19. §), mivel a P és Q ponton átmenő egyeneseknek a K és K' körrel való második metszéspontját a Pascal-féle hatszög tételének felhasználásával vonalzóval szerkeszthetjük.

[20]) Ezt a tételt egymástól függetlenül többen bebizonyították: F. Severi (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 18. k. (1904), 256.), K. Yanagihara (Tôhoku Math. Journal 24. k. (1925), 125.), G. Platone (Periodico di Matematiche IV. 10. k. (1930), 307.); F. Hüttemann (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung 43. k. (1933), 184.); Sz. Nagy Gy. (Tôhoku Math. Journal 40. k. (1934), 76.), D. Morduhaj—Boltovszkoj (Period. Mat. IV. 14. k. (1934), 101.). Lásd még R. Obláth(Monatshefte für Math. u. Phys. 26. k. (1915), 295.).

A k körív és harmadoló pontjainak ismeretében bármilyen elemi szerkesztést csupán vonalzóval is elvégezhetünk.[21])

Ha a PP' körív harmadoló pontjai P_1 és P_2, akkor P_1 a PP_2, P_2 a P_1P' körív felezőpontja. Ha Q_1 a PP_2, Q_2 a P_1P' egyenes pólusa k körére, akkor a P_1Q_1 és P_2Q_2 egyenesek a kör középpontjában metszik egymást. Q_1, ill. Q_2 a PP_2, ill. P_1P' körív végpontjai érintőinek metszéspontja. Az érintők szerkesztése a k körív öt pontjából a Pascal-hatszög alapján vonalas.

22. §. VONALZÓVAL VÉGEZHETŐ SZERKESZTÉSEK EGY ISMERETLEN KÖZÉPPONTÚ KÖR, VAGY EGY KÚPSZELET FELHASZNÁLÁSÁVAL. PROJEKTÍV MÁSODFOKÚ SZERKESZTÉSEK

Ha adva van egy K kör, de középpontja ismeretlen, akkor vonalzóval affin szerkesztéseket nem lehet végezni. Ez abból következik, hogy vonalzóval nem lehet az ismeretlen középpontot megszerkeszteni. Bizonyos metrikus szerkesztést mégis lehet vonalzóval végezni, nevezetesen lehet egyenlő kerületi szögeket szerkeszteni.

Ezen a szerkesztésen kívül a K kör segítségével vonalzóval csak olyan szerkesztéseket lehet végezni, amelyek akkor is elvégezhetők, ha a K kör helyett tetszőleges kúpszelet van megadva. Ha ugyanis a K kör síkjáról egy vonalas szerkesztést valamilyen vetítéssel egy nem párhuzamos síkra viszünk át, akkor olyan vonalas szerkesztést kapunk, amelyben a K kört egy kúpszelet helyettesíti.

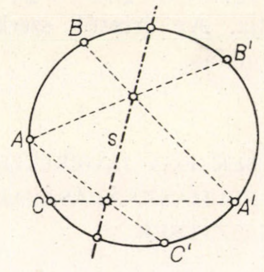
Egy megrajzolt K kúpszelet segítségével történő vonalas szerkesztésekben a kúpszeletnek azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy a kúpszelet tetszőleges A, B, C és D pontját a kúpszelet bármely P pontjából vetítő négy sugár kettősviszonya csak az A, B, C és D ponttól függ, a P ponttól független. Ez a kettősviszony értelmezi a kúpszelet A, B, C és D pontjának $(ABCD)$ kettősviszonyát. Ennek megfelelően a K kúpszelet A, B, C és A', B', C' ponthármasa a kúpszelet pontjai között projektív vonatkozást létesít, amelyben a kúpszelet egy D pontjának az a D' pont felel meg, amelyre vonatkozólag

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

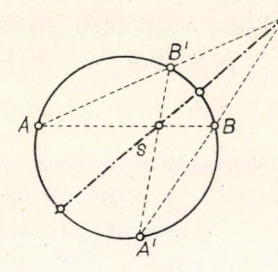
Az ilyen módon értelmezett projektivitás kettőspontjait (vagyis a projektivitásban önmaguknak megfelelő pontokat) az $A'B$, AB' és az $A'C$, AC' egyenespár metszéspontján átmenő egyenes vágja ki a kúpszeletből (37. ábra).

[21]) Obláth R., Mat. Lapok II. k. (1951), 219.

A kúpszeleten fekvő $(ABCX)$ pontsort A'-ből, s a projektív $(A'B'C'X')$ pontsort A-ból vetítő két projektív sugársor ugyanis perspektív, mivel az AA' sugár önmagának felel meg. A két sugársor megfelelő sugarai tehát egy s egyenesen metszik egymást.



37. *ábra*



38. *ábra*

A kúpszeleten fekvő két pontsor közötti projektív vonatkozás akkor involúció, ha a kúpszelet egy P pontjának ugyanaz a P' pont felel meg, ha P-t akár X-nek, akár X'-nek tekintjük. Az involúciót két pontpárja, A, A' és B, B' meghatározza. Mivel $(ABB'X)=(A'B'BX')$, azért az első pontsort A'-ből, a másodikat A-ból vetítő sugársor projektív és (mivel AA' önmagának megfelelő sugár, azért) egyúttal perspektív. Emiatt az $A'B$, AB', és az $A'B'$, AB egyenespár metszéspontján átmenő s egyenes metszi ki a kúpszeletből az involúció két kettőspontját. Ez a két pont (föltéve, hogy az s egyenes metszi a kúpszeletet) mind az AB, mind az $A'B'$ pontpárt harmonikusan választja el a kúpszeleten (38. ábra).

Ezt a két szerkesztést felhasználhatjuk az e_1 egyenesen az $A_1B_1C_1$ és az $A_1'B_1'C_1'$ ponthármassal megadott két projektív pontsor és az A_1A_1' és a B_1B_1' pontpárral megadott involúció kettőspontjainak meghatározására. Evégből az e_1 egyenesen fekvő két projektív pontsort a kúpszelet egy S pontjából a kúpszeletre vetítjük. A kúpszeleten így kapott két projektív pontsor kettőspontjainak S-ből az e_1 egyenesre való vetülete az e_1 egyenesen fekvő két projektív pontsornak kettőspontja.

Ha meg van adva egy K kúpszelet és ha A, B, P és E egy e egyenes olyan négy pontja, hogy $k=(ABPE)>0$, akkor vonalzóval szerkeszthető az e egyenesen olyan Q pont, amelyre vonatkozólag $(ABQE)=\sqrt{k}=\sqrt{(ABPE)}$. A négyzetgyök két előjelének megfelelően két ilyen pont van, ezek az AB és PE pontpárral meghatározott involúció kettőspontjai.

Mivel $(ABPE)=(ABPQ)\,(ABQE)$, azért csak azt kell kimutatnunk, hogy arra a QQ' pontpárra, amelyre vonatkozólag $(ABQQ')=-1$ és $(PEQQ')=$ $=-1$, $(ABPQ)=(ABQE)$ és így $(ABPE)=(ABQE)^2$ és hasonlóképp $(ABPE)=$ $=(ABQ'E)^2$.

A QQ' pontpár értelmezése és a kettősviszonyok között fennálló összefüggések miatt

$$\frac{1+(ABPQ)}{1-(ABPQ)}=\frac{1+(ABPQ')(ABQ'Q)}{(APBQ)}=\frac{1-(ABPQ')}{(APBQ)}=\frac{(APBQ')}{(APBQ)}=$$

$$=\frac{(APBQ)(APQQ')}{(ABPQ)}=(APQQ')=(QQ'AP)=(QQ'AE)(QQ'EP)=$$

$$=-(QQ'AE)=-(AEQQ')=-(AEQB)(AEBQ')=-\frac{(AEBQ')}{(AEBQ)}=$$

$$=\frac{1-(ABEQ')}{-(AEBQ)}=\frac{1-(ABEQ)(ABQQ')}{-1+(ABEQ)}=\frac{1+(ABEQ)}{-1+(ABEQ)}=\frac{1+\dfrac{1}{(ABQE)}}{-1+\dfrac{1}{(ABQE)}}.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{1+(ABPQ)}{1-(ABPQ)}=\frac{1+(ABQE)}{1-(ABQE)}.$$

Ezzel be van bizonyítva, hogy $(ABPQ)=(ABQE)$. A Q és Q' pont felcserélésével kapjuk, hogy $(ABPQ')=(ABQ'E)$.

Ezekre a szerkesztésekre lehet visszavezetni a projektív kvadratikus szerkesztéseket. Így szerkesztjük vonalzóval egy megrajzolt K kör vagy kúpszelet felhasználásával egy f egyenes és egy olyan K' kúpszelet metszéspontjait, amely öt pontjával vagy öt érintőjével van megadva.

Ha A, B, C, D, E ez az öt pont, akkor K' azoknak az A és B középpontú projektív sugársoroknak a képződménye, amelyekben a C, D és E ponton átmenő sugarak megfelelő sugarak. Az f egyenesen a két projektív sugársor megfelelő sugárpárjaival való metszéspontok projektivitást alkotnak. Ebben a projektivitásban az f egyenes és az AC, AD, ill. AE sugár metszéspontjának az a pont felel meg, amelyben a BC, BD, ill. BE sugár metszi f-et. Ennek a projektivitásnak kettőspontjai K' és f közös pontjai.

Ha K' az a, b, c, d, e érintőkkel van megadva, akkor először Brianchon-hatoldal segítségével meghatározzuk ezeken az érintőkön az A, B, C, D, E érintéspontot és ezen az öt ponton átmenő K' kúpszelet metszéspontjait f-fel.

Projektív kvadratikus feladat az A, B, C, D pontjával és t érintőjével megadott kúpszelet érintéspontjának szerkesztése t-n, ha t az A, B, C, D pontok egyikén sem megy át.

Az A, B, C, D pontokon átmenő kúpszeletek kúpszeletsort alkotnak. E kúpszeletsor kúpszeleteit t egy involúció pontpárjaiban metszi. Ehhez az involúcióhoz tartozik az a három pontpár, amelyben t az AB, CD, az AC, BD és az AD

és BC egyenespárokat (a kúpszeletsor elfajult kúpszeleteit) metszi. E három pontpár közül akármelyik kettő meghatározza az involúció E, F kettőspontjait. Az A, B, C, D pontokon átmenő kúpszeletek közül t kettőt érint: az egyiket E-ben, a másikat F-ben. Nincs ilyen kúpszelet, ha az involúció elliptikus.

Egy G pontból egy K' kúpszelethez húzható érintők érintéspontjait G polárisa metszi ki a görbéből. Ezt a g polárist Pascal-hatszög és teljes négyoldal segítségével akkor is könnyen megszerkeszthetjük, ha K' öt pontjával, vagy négy pontjával és egy érintőjével van megadva. Ez utóbbi esetben két K' kúpszelet is lehetséges és emiatt a feladatnak két megoldása is lehet.

A projektív vonalas szerkesztésekre kimutatott tételek alapján most már nem okoz nehézséget a következő tétel belátása:

Ha a síkban meg van adva egy kör középpontja nélkül, vagy általában egy kúpszelet, akkor megadott pontokból és kettősviszonyokból vonalzóval mindazok a pontok szerkeszthetők, amelyeknek projektív koordinátái az adatokhoz kapcsolt koordinátarendszerben ahhoz a legszűkebb számtesthez tartoznak, amely magában foglalja az adott kettősviszonyokat, az adott pontok projektív koordinátáit és a számtest bármely pozitív számának négyzetgyökét.

Ez abból következik, hogy öt ponton átmenő kúpszelet egyenlete projektív koordinátákban is olyan

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2_{23}y+a_{33}=0$$

egyenlet, amelynek együtthatói az öt pont projektív koordinátáinak racionális kifejezései. Ha tehát az öt pont koordinátái az előbb jellemzett S számtest számai és egy egyenes együtthatói szintén ilyen számok, akkor a kúpszelet és az egyenes valós metszéspontjainak projektív koordinátái szintén S-hez tartoznak.

Megadott kúpszelet alapján vonalzóval végezhető szerkesztéseket akkor is el lehet végezni, ha a teljes kúpszelet helyett tetszőleges kis k íve van megadva.

Ennek igazolása a 21. §-ban kimondott tétel bebizonyításához hasonlóan történik. Ha ugyanis A és B a K kúpszelet k ívének két végpontja és ha c jelöli az AB egyenest, akkor a c egyenesnek a K kúpszeletre vonatkozó C pólusa vonalzóval szerkeszthető. A C középponttal és c tengellyel bíró harmonikus perspektivitás a k ívet és a kúpszelet kiegészítő k' ívét egymásba viszi át. Egy e egyenesnek a k' ívvel való metszéspontjai az e egyenesnek a perspektivitásban megfelelő e' egyenes és a k körív metszéspontjaiból vonalzóval szerkeszthetők.

IV. GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK A VONALZÓ HASZNÁLATÁNAK KITERJESZTÉSÉVEL

23. §. EGYSÉGÁTRAKÓ VONALZÓ VAGY NORMAVONALZÓ. HILBERT-FÉLE SZERKESZTÉSEK

Egységátrakó vonalzó vagy *normavonalzó*, röviden *N-vonalzó* olyan vonalzó, amelynek élén két pont meg van jelölve. A megjelölt két pont — alappont — *s* távolsága a vonalzó *egysége* vagy *normája*, ez nem szükségképpen a hosszúság egysége. Az egységátrakó vonalzó egysége, normája egy mindenkorra megszabott szakasz, alapszakasz.

Az N-vonalzót kétféleképp használjuk:

1. közönséges vonalzóként két ponton át egyenes húzására,
2. az alapszakasznak egy félegyenesre a kezdőpontjától való felmérésére.

David Hilbert német matematikus a geometria axiómáit öt csoportba osztotta: I. az illeszkedés, II. a rendezés, III. az egybevágóság, IV. a párhuzamosság és V. a folytonosság axióma-csoportjába.[22])

Azok a szerkesztések, amelyeket az első négy axiómacsoport követel:

1. Adott két ponton át egyenes húzása és egy síkban két nem párhuzamos egyenes metszéspontjának meghatározása.

Ezt a két szerkesztést vonalzóval végezhetjük, s az N-vonalzó alappontjait nem szükséges használnunk.

2. Adott szakasz fölrakása adott félegyenesre a kezdőpontjától.
3. Adott szögnek adott félegyeneshez ennek megszabott oldalára való átrakása.
4. Egy ponton át adott egyeneshez párhuzamos húzása.
5. Egy ponton át adott egyenesre merőleges szerkesztése.

A 2. szerkesztéshez *mérőkörző* (szakaszátrakó, Streckenübertrager) szükséges, vagyis olyan eszköz, amellyel bármely szakaszt bármely félegyenesre kezdőpontjától fölrakhatunk.

Kürschák József kimutatta, hogy Hilbert szerkesztéseiben a szakaszátrakáshoz egyszerűbb eszköz, ún. „egységátrakó étalon", „Eichmass" elégséges.[23]) Ezzel az eszközzel csak *egy*, mindenkorra megszabott szakaszt, alapszakaszt lehet egy félegyenesre kezdőpontjától fölrakni. Más szakasz fölrakása

[22]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Először 1899-ben jelent meg a göttingai Gauss—Weber-szobor leleplezése alkalmából készült ünnepi kiadványban. Később külön könyvként jelent meg, a kilencedik kiadás 1962-ben.

[23]) Math. Ann. 55. k. (1902), 597—598.

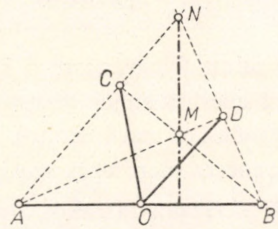
vonalas szerkesztés. Hilbert munkája 1902 után megjelent kiadásaiban a szakaszátrakót Kürschák egységátrakójával helyettesítette.

Az egységátrakó (N) vonalzó a két rajzeszközt, a vonalzót és az egységátrakót egyesíti.

Vahlen német matematikus 1911-ben kimutatta,[24]) hogy Hilbert szerkesztéseiben az egységátrakó eszközt még egyszerűbb eszközzel, egységfordítóval lehet helyettesíteni. Ez olyan eszköz, amellyel egy bizonyos szakaszt, az alapszakaszt csak *egy* pontból kiinduló félegyenesekre lehet fölrakni.

A 4. szerkesztést egységátrakó vonalzóval a 23. ábra (64. old.) szerint végezzük. Egy P ponton át egy e egyenessel párhuzamos húzása végett az e egyenesen olyan A, B és C pontot veszünk fel, hogy $\overline{AC}=\overline{BC}$ az alapszakasszal egyenlő.

5. szerkesztés. Az e egyenesre merőleges szerkesztése végett az e egyenes egy O pontjából kiinduló mindkét félegyenesére egységátrakó vonalzóval rávisszük a vonalzó $\overline{OA}=\overline{OB}$ egységszakaszát. Az e egyenes ugyanazon oldalán O-ból kiinduló két félegyenesre is fölrakjuk az $\overline{OC}$, ill. $\overline{OD}$ egységszakaszt (39. ábra). A, B, C, D az AB átmérőjű kör pontja. Thalész tétele miatt az ACB és ADB szög derékszög. Ha N az AC és BD egyenes metszéspontja, akkor az ABN háromszögnek AD és BC magasságvonala, M metszéspontjuk tehgt ennek a háromszögnek magasságpontja, NM tehát a háromszög harmadik magasságvonala, s ezért merőleges az AB egyenesre. Egy P ponton át az e egyenesre merőlegest úgy szerkesztünk, hogy P-n át az MN egyenessel párhuzamost húzunk (39. ábra).

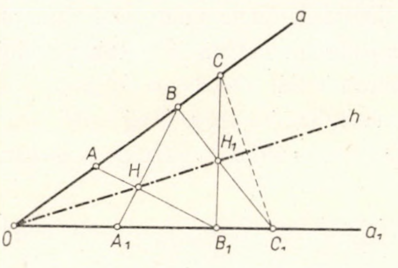


39. ábra

2. szerkesztés. A 40. ábrán az O csúcsú (a, a_1) szöget egységátrakó vonalzóval feleztük. A szög szárain úgy vettük fel az A, B, A_1, B_1 pontokat, hogy $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{OA_1}=\overline{A_1B_1}$ a vonalzó alapszakaszával egyenlő. Ekkor az AB_1, A_1B egyenesek H metszéspontja a h szögfelező pontja.

[24]) Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, 1911, 59. Hilbert munkájának későbbi kiadásaiban sem tesz említést Vahlen egységfordítójáról.

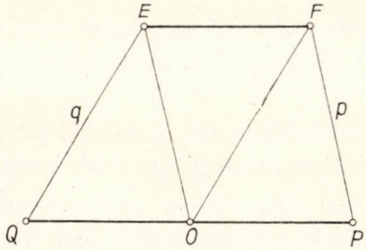
A szögfelező szerkesztése után h egy tetszőleges H_1 pontját B_1-gyel, ill. B-vel (vagy A_1-gyel, ill. A-val) összekötő egyenes a szög a, ill. a_1 szárát olyan C, ill. C_1 pontban metszi, hogy $\overline{OC}=\overline{OC_1}$. A szög a szárának OC szakaszát vonalzóval tehát átrakhatjuk a másik szárra. Ez a szerkesztés egyszerűbb, mintha C-n át az AA_1 vagy BB_1 egyenessel párhuzamost húznánk. C és C_1 a h szögfelezőre egymás tükörképei.



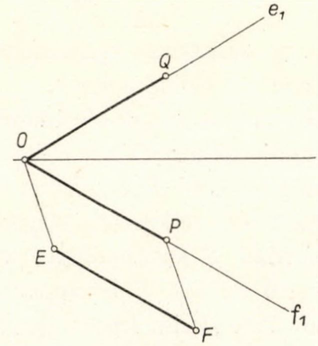
40. ábra

Az $\overline{EF}$ szakaszt vele párhuzamos e egyenes O-ból kiinduló két félegyenesére párhuzamos húzásával visszük át. OE egyenessel F-en át az OF egyenessel E-n át párhuzamos p, ill. q egyenest húzunk, ez e-t olyan P, ill. Q pontban metszi, hogy $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{EF}$. (41. ábra.)

Ha az EF szakaszt vele nem párhuzamos e_1 félegyenesre kell átvinni, (42. ábra), ennek O kezdőpontjától, akkor O-ból az EF egyenessel párhuzamos f_1 félegyenest húzunk és arra visszük át az $\overline{EF}=\overline{OP}$ szakaszt, s ezt a szakaszt az (e_1, f_1) szög felezésével rakjuk át az e_1 félegyenesre. Ezzel igazoltuk a 2. szerkesztés elvégezhetőségét N-vonalzóval, vagy vonalzóval és egységátrakóval.



41. ábra



42. ábra

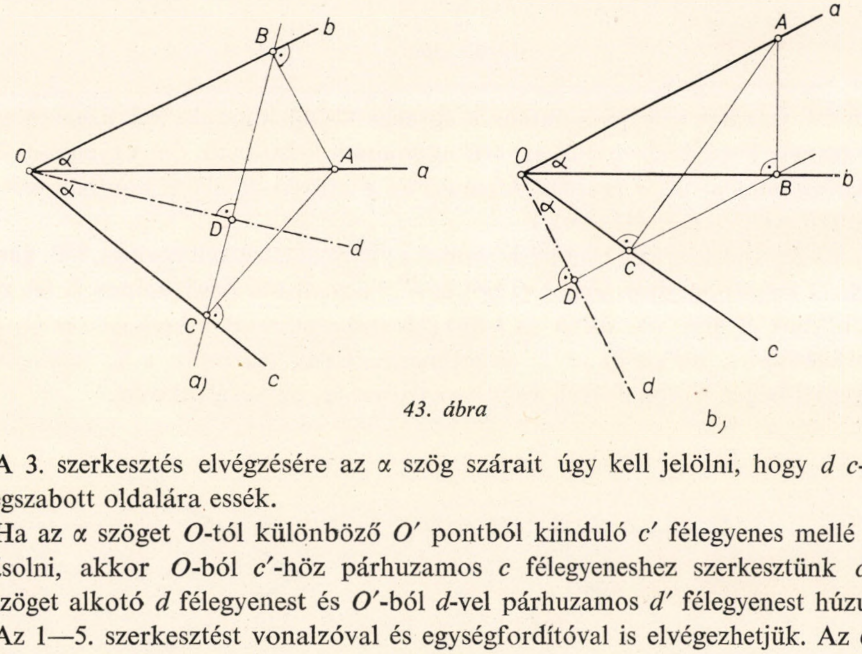
3. szerkesztés. Az O csúcsú $\alpha=(a, b)$ szöget O-ból kiinduló c félegyenes egyik oldalára úgy rakjuk át, hogy merőlegesek húzásával olyan d félegyenest szerkesztünk, hogy (a, b) és (c, d) egyenlő szög.

Föltételezhettük, hogy α hegyes szög, mert tompa α szög mellékszöge hegyes. Derékszög másolása nyilvánvaló.

Az a félegyenes egy tetszőleges A pontjából b-re és c-re merőlegest állítunk és a merőleges talppontját B-vel, ill. C-vel jelöljük. O-ból a BC egyenesre merőleges d félegyenest állítunk, s talppontját D-vel jelöljük. (43. ábra.) Ekkor $\alpha=(a, b)\sphericalangle=(c, d)\sphericalangle$.

A 43. ábrán B és C Thalész tétele miatt OA átmérőjű kör pontja. $OAB\sphericalangle$ és $OCB\sphericalangle$ az a) ábrán ugyanazon az íven, a b) ábrán pedig kiegészítő íven nyugvó kerületi szög. Az a) ábrán tehát $OAB\sphericalangle=OCB\sphericalangle$, s ezért az OAB és OCD derékszögű háromszög másik hegyes szöge is egyenlő, azaz $\alpha=(a, b)\sphericalangle=(c, d)\sphericalangle$. A b) ábrán $OAB\sphericalangle+OCB\sphericalangle=OCB\sphericalangle+OCD\sphericalangle$ és ismét $AOB\sphericalangle=(a, b)\sphericalangle=$ $=COD\sphericalangle=(c, d)\sphericalangle$.

Az a) és b) ábrán az (a, b) és hasonlóképp a (c, d) szög forgásértelme ellenkező.



43. ábra

A 3. szerkesztés elvégzésére az α szög szárait úgy kell jelölni, hogy d c-nek megszabott oldalára essék.

Ha az α szöget O-tól különböző O' pontból kiinduló c' félegyenes mellé kell másolni, akkor O-ból c'-höz párhuzamos c félegyeneshez szerkesztünk c-vel α szöget alkotó d félegyenest és O'-ból d-vel párhuzamos d' félegyenest húzunk.

Az 1—5. szerkesztést vonalzóval és egységfordítóval is elvégezhetjük. Az egységfordító S középpontján átmenő két egyenesen egységforgatóval meghatározható pontok S középpontú téglalap csúcsai. Egy téglalap felhasználásával a 26. ábra szerint közönséges vonalzóval lehet bármely egyeneshez S-en át párhuzamost húzni, s azon S-től mindkét irányban az alapszakaszt fölrakni. Ebből következik, hogy az 1—5. szerkesztések vonalzóval és egységfordítóval is végrehajthatók. Az így végzett szerkesztések olyan viszonyban vannak a vonalzóval és szakaszátrakóval, ill. vonalzóval és egységátrakóval, vagy N-vonalzóval végzett szerkesztésekhez, mint Poncelet—Steiner szerkesztései az elemi szerkesztésekhez, ha azokban bármilyen nyílású körzőt, ill. csak egyetlen nyílású körzőt használhatunk.

A Poncelet—Steiner-féle szerkesztésekben O középpontú alapkör tetszőleges egyenesekkel való metszéspontjai szerepelnek, az S középpontú egységfordítóval végzett (vonalas) szerkesztések ellenben S középpontú egységkör és középpontján átmenő egyenesek metszéspontjait használják. Ezek a metszéspontok mindig *valósak*.

Hilbert I—IV. axiómacsoportjának axiómái szerint végezhető szerkesztések, a Hilbert-féle szerkesztések nem használják fel a folytonosság, az V. axiómacsoport axiómáit. Ezek nélkül egy körnek csak olyan egyenessel szerkeszthetjük a metszéspontjait, amely a kör középpontján vagy egy adott pontján megy át. A folytonosság axiómái nélkül nem mutathatjuk ki egy kör és egy olyan egyenes metszéspontjainak létezését, amelyről csak annyit tudunk, hogy távolsága a középponttól a kör sugaránál kisebb.

A Hilbert-féle szerkesztések mind elemi szerkesztések. Egy elemi szerkesztés azonban csak akkor Hilbert-féle, ha úgy is végre lehet hajtani, hogy a benne előforduló bármely körnek csak egyenessel, mégpedig középpontján átmenő egyenessel való metszéspontjait használjuk fel. A kör egy P pontján átmenő e egyenes második metszéspontja a körrel P tükörképe a középpontból e-re bocsátott merőlegesre vonatkozólag és így N-vonalzóval könnyen szerkeszthető.

A Hilbert-féle szerkesztésekkel megoldható feladatok olyan algebrai egyenletekhez vezetnek, amelyeknek bármely gyöke az adott pontok és az adatokkal meghatározott pontok helyzetétől függetlenül, vagyis ezeknek a pontoknak koordinátáitól mint paraméterektől függetlenül mindig valós.

Adott pontokból és adatokból Hilbert-féle szerkesztéssel csak olyan pontokat kaphatunk, amelyeknek derékszögű koordinátái az adott pontoknak és az adatokkal meghatározott pontoknak koordinátáit tartalmazó olyan számtest számai, amely bármely m számával együtt a $\sqrt{1+m^2}$ számot is magában foglalja. $\sqrt{1+m^2}$ szerkesztése m-ből és 1-ből, s általánosan derékszögű háromszög átfogójának szerkesztése befogóiból Hilbert-féle szerkesztés.

Nem Hilbert-féle szerkesztés a derékszög átfogójából és egyik befogójából a másik befogó szerkesztése. Ennek a befogónak x hossza ugyanis eleget tesz az $x^2+y^2=c^2$ és $y=a$ egyenletnek. A szerkesztés tehát kör és középpontján át nem menő egyenes metszéspontjainak szerkesztését kívánja. Kör és középpontján át nem menő egyenes metszésére vezethető vissza két szakasz mértani középarányosának szerkesztése, s ezért nem Hilbert-féle.

Ha ugyanis $x^2=ab$, akkor az

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

azonosság miatt x kielégíti a

$$x^2+y^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad y=\frac{a-b}{2}$$

egyenletrendszert.

Hilbert kimutatta a következő tételt:

Ha n a négyzetgyökvonások legkevesebb száma, amelyek egy feladatban a keresett pontok derékszögű koordinátáinak az adott (és az adatokkal meghatározott) pontok koordinátáiból való kiszámítására szükségesek, akkor a feladat vonalzóval és egységátrakóval való szerkesztésére szükséges és elégséges, hogy a föllépő négyzetgyökök az adott pontok bármely helyzetében és az egyes négyzetgyökök mindkét előjelére valósak legyenek, s emiatt a feladatnak 2^n valós megoldása legyen.

Példának hozza fel Hilbert, hogy a körosztás minden olyan n számra vonalzóval és egységátrakóval szerkeszthető, amelyre vonalzóval és körzővel végezhető. Ez abból következik, hogy a Gauss-féle törzsszámokra a körosztás periódusai mind valósak. Szabályos háromszög és szabályos ötszög Hilbert-féle szerkesztése egyszerű. Az első a szabályos háromszög magasságának szerkesztése alapjából, s ezért $\sqrt{3}$ szerkesztése az egységből. A szabályos tízszög középponti szögét a 4. ábra szerint szerkesztjük, s ebből a szabályos ötszög középponti szögét. Nem ismeretes a szabályos tizenhétszög Hilbert-féle szerkesztése, még kevésbé a szabályos 257 és 65537 oldalú sokszög Hilbert-féle szerkesztése, noha ilyen Hilbert szerint lehetséges.

24. §. A PÁRHUZAMOSSÁG AXIÓMÁJÁTÓL FÜGGETLEN HILBERT-FÉLE SZERKESZTÉSEK

Hjelmslev dán matematikus megmutatta,[25]) hogy azokat a szerkesztéseket, melyeket az I—III. axiómacsoport követel, vonalzóval és egységátrakóval, vagy N-vonalzóval a Bolyai—Lobacsevszkij-síkon is végre lehet hajtani. Ezek a szerkesztések tehát a párhuzamos húzását kívánó 4. szerkesztést nem tételezik fel. Hjelmslev szerkesztéseit Kürschák József ismertette és bizonyította csak magyarul közölt dolgozatában.[26])

Hjelmslev a szakaszfölrakást, szögátrakást és merőleges húzását kívánó 2., 3., ill. 5. szerkesztés elvégzéséhez a következő feladatok N-vonalzóval való megoldása után jut.

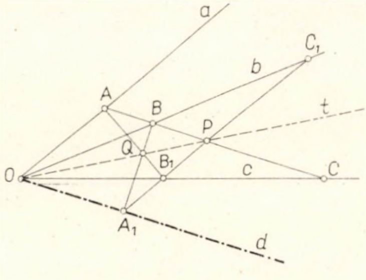
[25]) J. Hjelmslev, Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmasses. Festskrift Anders Wiman. Upsala 1930, 175—177.; Konstruktioner med normeret Lineal. Matematisk Tidsskrift B, 1943, 21—26.

[26]) Kürschák József, A parallelák axiómájától független szerkesztések. Matematikai és Fizikai Lapok, 37. k. (1930), 1—20.

1. *Adott szög felezése és a szög egyik szárán adott szakasz átrakása a másik szárra. Az egyik szár egy pontjának tükrözése a szögfelezőre.*

Ezt a szerkesztést a 40. ábra szerint már elvégeztük.[27])

2. *Az O pontból kiinduló a, b, c félegyenes közül b az (a, c) szög szárai közé esik. Szerkesztendő a-nak a (b, c) szög t felezőjére vonatkozó d tükörképe.*

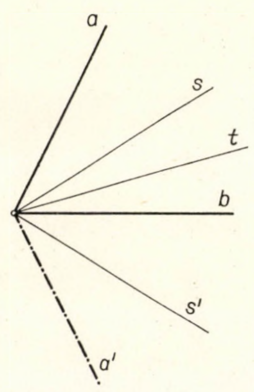


44. ábra

Az a, ill. c félegyenes egy A, ill. C pontját összekötő AC egyenes b-t egy B, t-t pedig egy P pontban metszi (44. ábra). Az 1. feladat szerint szerkesztjük B-nek t-re vonatkozó B_1 tükörképét (hasonlóképp C-nek C_1 tükörképét). Ha az AB_1 egyenes t-t Q-ban metszi, akkor a PB és QB_1 egyenes t-tengelyű tükörképe a PB_1 és QB egyenes, s ezért A-nak tükörképe e két egyenes A_1 metszéspontja, továbbá az OA félegyenes tükörképe az OA_1 félegyenes, tehát a tükörképe d.

3. *Szerkesztendő az (a, b) szög a szárának a′ tükörképe a b szárra.*

Megszerkesztjük az (a, b) szög s és az (s, b) szög t szögfelezőjét (45. ábra;

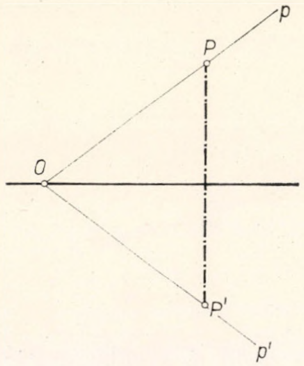


45. ábra

[27]) A szögfelezés ilyen elvégzése — tudomásom szerint — A. Adler-től származik, Theorie der geometrischen Konstruktionen, 1906, 140.

1. feladat) és a-nak t-re, az (s, b) szög felezőjére vonatkozó s' tükörképét (2. feladat), s' s-nek b-re vonatkozó tükörképe, ezért a' a-nak az (s, s') szög b felezőjére vonatkozó tükörképe (2. feladat).

4. *Adott P pont adott e egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése. Adott e egyenesre kívüle fekvő P pontból merőleges szerkesztése.*

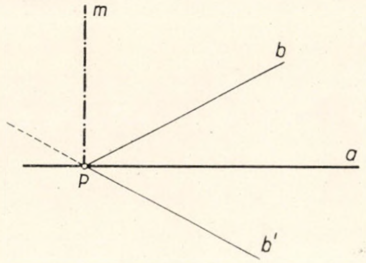


46. ábra

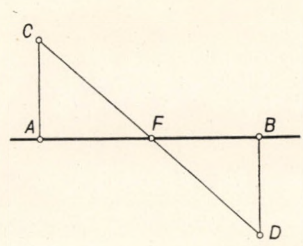
Az e egyenes egy O pontjából P-n át p félegyenest húzunk (46. ábra), megszerkesztjük p-nek e-re vonatkozó p' tükörképét (4. feladat) és a (p, p') szög p' szárára fölrakjuk az $\overline{OP} = \overline{OP'}$ szakaszt. Az így kapott P' pont P-nek e-re vonatkozó tükörképe és a PP' egyenes merőleges e-re.

5. *Adott a egyenesre ennek adott P pontjában merőleges emelése.*

P-ből b félegyenest húzunk (47. ábra), megszerkesztjük ennek a-ra vonatkozó b' tükörképét, a (b, b') szög mellékszögének m felezője (1. feladat) a kívánt merőleges.



47. ábra



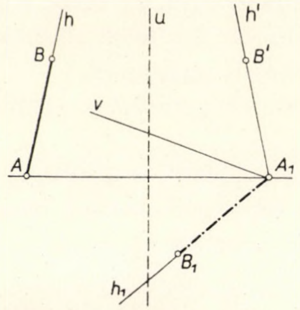
48. ábra

6. *Adott AB szakasz felezése.*

Az AB egyenesre A és B pontjában merőlegest állítunk (48. ábra; 5. feladat) és ezekre a merőlegesekre az AB egyenes ellenkező oldalán fölrakjuk az alapegységgel egyenlő AC és BD szakaszt, az AB és a CD egyenes F metszéspontja az AB szakasz felezőpontja.

7. *Adott AB szakasz fölrakása adott félegyenesre a kezdőpontjától.*

Ezt a szerkesztést (49. ábra) N-vonalzóval végezhető két tükrözés segítségével hajtjuk végre. Ha az A-ból kiinduló h félegyenes AB szakaszát A_1-ből kiinduló h_1 félegyenesre kell A_1-től fölrakni, akkor először az AA_1 szakasz felező merőleges u egyenesét húzzuk meg (6. és 5. feladat). B-nek u-ra vonatkozó B' tükörképe (4. feladat) h-nak h' tükörképét is meghatározza. A (h', h_1) szög v felezőjének szerkesztése (1. feladat) után B'-nek v-re vonatkozó B_1 tükörképe a 7. feladat megoldása, mert h_1-nek olyan pontja, amelyre $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1B'} = \overline{AB}$.



49. ábra

8. *Adott (h, k) szögnek egy h_1 félegyenes adott oldalára való másolása.*

Ennek a feladatnak megoldása az előzőéhez hasonló. Ha a (h, k) szög csúcsa A, h_1 kezdőpontja A_1, akkor először az AA_1 szakasz u felezőmerőlegesét szerkesztjük. Az u-tengelyű tükrözésben a (h, k) szög képe A_1 csúcsú (h', k') szög. Ennek a szögnek tükörképe a (h', k_1) szög v felezőjére mint tengelyre olyan (h_1, k_1) szög, hogy $(h_1, k_1)\sphericalangle = (h', k')\sphericalangle = (h, k)\sphericalangle$. Ha k_1 h_1-nek adott oldalára esik, akkor (h_1, k_1) szög a feladat megoldása. Az ellenkező esetben k_1-nek h_1-re vonatkozó k_1' tükörképe a feladat megoldását adó szög második szára.

Ezzel igazoltuk, hogy egységátrakó vonalzóval el lehet végezni a Hilbert-féle I—III. axiómacsoport axiómáin alapuló szerkesztéseket.

25. §. KÖRZŐ HELYETTESÍTÉSE EGYSÉGÁTRAKÓ VONALZÓVAL. PÁRHUZAMOS ÉLŰ VONALZÓ

1. N-vonalzó segítségével két ponton át egyenest húzhatunk és adott félegyenesre kezdőpontjából az alapszakaszt felmérhetjük.

Ha megengedjük, hogy az N-vonalzó egyik alappontját egy adott O pontba helyezzük és a vonalzót O körül addig forgassuk, míg másik alappontja egy adott e egyenes egy pontjába essék, akkor az O középpontú és az alapszakasszal egyenlő sugarú K körnek olyan egyenesekkel való metszéspontjait is szerkeszthetjük, amelyek nem mennek át a kör középpontján. Az N-vonalzót ilyen használat esetén *K-vonalzó*nak fogjuk nevezni. Az N-vonalzónak K-vonalzóként való alkalmazásakor minden elemi szerkesztést körző nélkül csupán vonalzóval tudunk végrehajtani.

Ez Poncelet—Steiner tételének következménye, mert K-vonalzóval meghatározhatjuk egyenesek metszéspontjait egy O középpontú olyan K körrel, amelynek sugara az alapszakasz.

2. A párhuzamos élű vonalzót vagy úgy használjuk, hogy egyik éle két adott ponton menjen át, vagy úgy, hogy egyik éle egyik, a másik éle egy másik ponton menjen át. A párhuzamos élű vonalzó tehát alkalmas:

1. két adott pont összekötésére egyenessel,

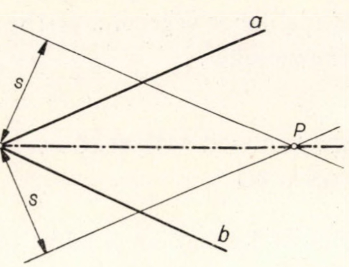
2. két pontjával adott egyenessel párhuzamos, attól s távolságban levő egyenes húzására,

3. egy ponton át egy másik ponttól s távolságra haladó egyenes húzására. Bármely egyenessel tehát lehet párhuzamost húzni, s ezért egy egyeneshez adott ponton át is lehet párhuzamost húzni és bármely szakaszt lehet felezni (17. §).

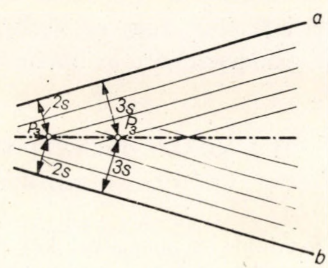
Az s szélességű, párhuzamos élű vonalzó élei mentén húzott két (különböző irányú) egyenespár rombuszt határol, mert az így kapott parallelogramma mindkét magassága s, oldalai tehát egyenlők. A rombusz átlói egymásra merőlegesek és felezik a rombusz szögeit. A rombusznak ezt a tulajdonságát használjuk fel a következő feladatok párhuzamos élű vonalzóval való megoldására.

a) *Szög felezése.*

Az O csúcsú (a, b) szöget a párhuzamos élű vonalzóval szerkesztett rombusz (50. ábra) OP átlója felezi. Így felezünk olyan szöget is (51. ábra), amelynek csúcsa a rajzlapon kívül esik, mert a szögfelező pontjai a szög száraitól egyenlő távolságra vannak.



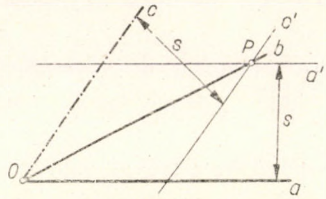
50. ábra



51. ábra

b) *Szög kétszerezése.*

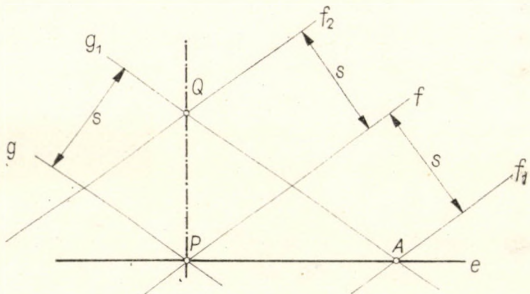
Az O csúcsú $(a, b)\sphericalangle$ kétszerezése végett (52. ábra) a párhuzamos élű vonalzóval a-hoz párhuzamos a' egyenest húzunk. Ha ez a b szárt P pontban metszi, akkor a párhuzamos élű vonalzó olyan elhelyezése, amelyben O és P különböző élre esik, olyan c és c' egyenest határoz meg, hogy $(ac)\sphericalangle = 2(a, b)\sphericalangle$.



52. *ábra*

c) *Egyenesre adott pontjában merőleges állítása.*

Az e egyenesre P pontjában úgy emelünk merőlegest (53. ábra), hogy P-n át egy f egyenest és a párhuzamos élű vonalzóval vele párhuzamos (s-távolságú) f_1 és f_2 egyenest húzunk. Ha e és f_1 metszéspontja A, akkor a párhuzamos élű vonalzó olyan elhelyezésében, amelyben P és A a vonalzó különböző élére kerül, olyan g és g_1 párhuzamost ad, hogy QP merőleges e-re, ha Q f_2 és g_1 metszéspontja.



53. *ábra*

d) *Egy e egyenesre annak O pontjából a párhuzamos élű vonalzó szélességének felrakása.*

Az e egyenesre O pontjában merőlegest állítunk, s ahhoz illesztjük a párhuzamos élű vonalzó egyik élét. A másik él mentén húzott egyenes O-tól s távolságra fekvő pontot vág ki e-ből.

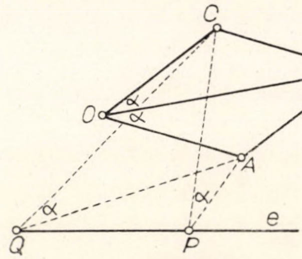
1. A szögvonalzó olyan rajzeszköz, amelynek két egyenes vonalú éle van és ezek határozott α $(0<\alpha\leqq\pi)$ szöget alkotnak egymással. Először föltételezzük, hogy α nem derékszög.

A szögvonalzót kétféleképp alkalmazhatjuk: vagy úgy, hogy egyik éle két adott ponton menjen át, vagy úgy, hogy egyik éle egyik, a másik éle egy másik adott ponton menjen át.

Párhuzamos egyenesek α-szögű vonalzóval való szerkesztése α-szögű belső váltószögek rajzolásával történik. Az e egyenesre merőleges szerkesztése végett az egyenes egy AB szakaszához, mint alaphoz megrajzoljuk azt a két egyenlő szárú háromszöget, amelyeknek az alapon fekvő szögei α-val egyenlők. A két háromszög csúcsát összekötő egyenes merőleges e-re.

Ebből következik, hogy szögvonalzóval mindazokat a szerkesztéseket el lehet végezni, amelyeket egy parallelogramma és két nem párhuzamos szárú derékszög megadása után közönséges vonalzóval el lehet végezni.

A szögvonalzónak második alkalmazásával annak a K körnek, amely adott A és B ponton átmegy és amelynek pontjaiból az AB szakasz α (vagy $\pi-\alpha$) szögben látszik, akárhány további pontját lehet szerkeszteni.



54. ábra

Egy e egyenes és az O középpontjával és egy A pontjával megadott K kör metszéspontjainak meghatározása végett szögvonalzóval OA oldalú és az O pontban 2α-szögű $OABC$ rombuszt szerkesztünk. Ha a szögvonalzót úgy helyezzük el a síkban, hogy egyik szára az A, a másik a C ponton menjen át, csúcsa pedig az e egyenes olyan P pontjába essék, amely az AC egyenesnek arra az oldalára esik, mint O, akkor P a K kör és az e egyenes metszéspontja (54. ábra).

A Poncelet—Steiner-féle tétel alapján tehát kimondhatjuk a következő tételt:

Ha a szögvonalzó olyan elhelyezését is megengedjük, amelyben csúcsa egy adott egyenesre esik, szárai pedig két adott ponton mennek át, minden elemi szerkesztést egyedül szögvonalzóval is el lehet végezni.

2. Az olyan szögvonalzót, melynek élei derékszöget alkotnak egymással, derékszögvonalzónak nevezzük. Derékszögvonalzóval lehet bármily irányú ol-

dalakkal bíró téglalapot és egy átmérőjével megadott körön akárhány pontot szerkeszteni. A derékszögvonalzóval végezhető szerkesztések nyilvánvalóan ugyanazok, mint amelyeket közönséges vonalzóval lehet végezni, ha a síkban egy parallelogramma és nem párhuzamos szárakkal bíró két derékszög meg van rajzolva.

Derékszögvonalzóval meg lehet határozni egy *e* egyenesnek az *O* középpontjával és egy *A* pontjával megadott *K* körrel való metszéspontjait.

Először a *K* kör *OA* sugarához tartozó *AA'* átmérőt szerkesztjük meg a következőképpen: *OA* oldalú *OABC* téglalapot szerkesztünk; *C*-n át az *OB* egyenessel párhuzamos egyenes metszi ki az *OA* egyenesből az *A'* pontot. Ha most a derékszögvonalzó csúcsát az *e* egyenesen mozgatjuk, miközben az egyik szár az *A* ponton megy át, akkor a derékszög csúcsának az *e* egyenesen való az a helyzete, amelyben a másik szár az *A'* ponton megy át, a *K* kör és az *e* egyenes metszéspontja.

27. §. SZERKESZTÉSEK A GÖMBÖN

1. A gömbön a geodétikus vonalak főkörök. Egy főkörnek két gömbi középpontja van, a főkör két pólusa. Ezek a gömbön átellenes pontok. Egy főkör gömbi sugara akármelyik középpontjának a kör pontjaitól való gömbi távolsága. Ez a főkör negyedrésze, $R\frac{\pi}{2}$, ha a gömb sugara *R*. A gömbön a főköröket egyeneseknek és a rajzolásukra alkalmas készüléket vonalzónak fogjuk nevezni. Az *R* sugarú gömbön a vonalzó $R\sqrt{2}$ nyílású körző, vagyis olyan körző, amelyben a két körzőhegy távolsága az *R* sugarú körbe írt négyzet oldala. Az ilyen nyílású nem változtatható körzőt *kvadránskörző*nek is nevezik. A gömbön tehát a vonalzó kvadránskörző.

Két egyenesnek a gömbön mindig van két metszéspontja, ezek átellenes pontok. Ha *A* és *B* nem átellenes pont, akkor rajtuk egy és csak egy főkör, egyenes megy át. Az olyan főkört, amelynek pólusa a gömb egy *A* pontja, *A* polárisának is nevezik. Az *AB* egyenes pólusa *A* és *B* polárisának két metszéspontja közül akármelyik. Az *AB* egyenes rajzolása úgy történik, hogy vonalzóval, kvadránskörzővel megrajzoljuk *A* és *B* polárisát, s ha ezek metszéspontja *C*, akkor a *C* pólusú egyenes az *AB* egyenes. Az *AB* egyenes pontjai körül kvadráns körzővel rajzolható körök, az *AB* egyenes pontjainak polárisai az *AB* egyenesre merőleges egyenesek. Merőleges egyenesek szerkesztéséhez ezért a gömbön vonalzó, kvadránskörző elégséges.

A gömb főkörnél kisebb sugarú köreit röviden a gömb köreinek nevezzük. Ilyenek rajzolására szolgál a körző. Ennek nyílása változtatható, kvadránsnál nagyobb körzőnyílásra nincs szükség.

Körzővel a gömbön egyeneseket is rajzolhatunk, ha a körzőnyílást kvadránsra állítjuk be. Ezt megtehetjük, ha ismerünk valahol olyan két pontot, amelyeknek távolsága $R\sqrt{2}$, pl. a gömbön egy egyenest és (legalább) egyik pólusát.

Síkon körzővel végrehajtott szerkesztés által a kvadráns hosszúságát a gömb sugarának ismerete nélkül is meghatározhatjuk:

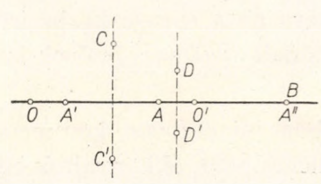
A gömb egy A pontja körül a gömbön egy ϱ sugárral K kört írunk. Ha A' A-nak átellenes pontja, akkor a kör síkjába eső C középpontja a gömb AA' átmérőjére esik. Ha B a kör egy pontja és r a kör sugara, akkor az $AA'B$ derékszögű háromszögben $AA'=2R$ az átfogó, $AB=\varrho$ befogó és $BC=r$ az átfogóhoz tartozó magasság, ezért $\varrho^2=2R\sqrt{\varrho^2-r^2}$. Ebben az egyenletben ϱ-t ismerjük, r meghatározása végett a K körbe BDE háromszöget írunk. Ennek a háromszögnek oldalait körzővel lemérjük és a síkon vele egybevágó háromszöget szerkesztünk és meghatározzuk a köré írható kör r sugarát. Ezután ϱ-ból és r-ből szerkesztjük a gömb R sugarát és ebből az $R\sqrt{2}$ kvadránst.

Ki lehet mutatni,[28]) hogy körzővel csupán a gömbön végrehajtott szerkesztés nem vezet az ismeretlen kvadránshoz.

A gömbön csak körzővel kvadráns meghatározása nélkül véghezvitt szerkesztések a síkon a Mohr—Mascheroni-féle szerkesztéseknek felelnek meg. Az ottani két egyszerű szerkesztést a gömbön körzővel könnyen elvégezhetjük.

A gömbfelület egy C pontjának az AB egyenesre (főkörre) vonatkozó C' tükörképe az A és B pont körül C-n át rajzolt két kör második metszéspontja.

A félkörnél kisebb $\overline{OA}$ szakasz kétszerezése az OA egyenesen olyan B pont szerkesztését kívánja, hogy $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}=2\cdot\overline{OA}$. Ezt a szerkesztést tükrözésekkel végezzük.



55. ábra

Az OA egyenesen kívül a gömbön felveszünk egy olyan C-pontot, amelynek (gömbi) távolsága O-tól nem akkora, mint A-tól. Megszerkesztjük C-nek az OA egyenesre vonatkozó C' tükörképét és a CC' egyenesre vonatkozólag O-nak O' és A-nak A' tükörképét. O' és A' az OA egyenes pontja és O' nem esik össze A-val. $O'A$ fölé ennek két oldalán egyenlő oldalú (vagy egyenlő szárú) $O'AD$ és $O'AD'$ háromszöget szerkesztünk. A DD' egyenes az $O'A$ szakasz felező

[28]) B. Wiedemann, Algebraisch-geometrische Untersuchungen über Konstruktionsmöglichkeiten auf der Kugel. Deutsche Mathematik 2. k. (1937), 520.; L. Bieberbach, Theorie der geom. Konstruktionen, 147.

merőlegese, s ezért O'-nek A a tükörképe. A'-nek A'' tükörképe pedig a kívánt B pont, mert a CC', ill. DD' tengelyű tükrözés miatt $\overline{OA}=\overline{O'A'}$, ill. $\overline{O'A'}=\overline{AB}$ és így $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}=2\cdot\overline{OA}$.

Ez a szerkesztés nyilvánvalóan az euklideszi síkon is érvényes, s ott Mohr—Mascheroni-féle szerkesztés, de a Bolyai—Lobacsevszkij-síkon is végrehajtható, mert a párhuzamosság axiómájától független. Az 55. ábra a szerkesztést síkon mutatja.

Ha az $\overline{AB}$ szakasz kétszerese $\overline{AC}$, az $\overline{OB}$ szakasz kétszerese pedig $\overline{OD}$, akkor $\overline{OC}=3\cdot\overline{OA}$ és $\overline{OD}=4\cdot\overline{OA}$. Így könnyen beláthatjuk, hogy a gömbön egy szakasz n-szerese körzővel bármely n pozitív egész számra kvadráns nélkül szerkeszthető. Az n-szeres szakasz az egyenes (főkör) hosszánál nagyobb is lehet.

2. Az elemi, ill. Hilbert-féle szerkesztéseknek a gömbön megfelelő szerkesztések a vonalzóval és körzővel, ill. vonalzóval és egységátrakóval végezhető szerkesztések. Az egységátrakó olyan eszköz, amellyel a gömb bármely P pontján átmenő akármelyik egyenesre (főkörre) P-ből kiindulva P mindkét oldalán fölrakhatunk egy bizonyos gömbszakaszt, kvadránsnál kisebb egységet. Az egységátrakó állandó nyílású, de kör rajzolására nem használható mérőkörző.

Vonalzóval és egységátrakóval a párhuzamosság és folytonosság axiómáitól független Hilbert-féle szerkesztéseknek megfelelő szerkesztéseket el tudjuk végezni.

Ennek igazolására a 24. § szerint csak azt kell igazolnunk, hogy ezzel a két rajzeszközzel a gömbön szakaszfölrakást és szögátrakást el lehet végezni, mert merőlegesek szerkesztésére vonalzón kívül másra nincs szükség.

A szög szerepét a gömbön gömbkétszög veszi fel. A gömbkétszögnek két csúcsa és két szára van. A csúcsok átellenes pontok, a szárak félkörök. A gömbkétszög szöge a két félkört tartalmazó, közös határegyenessel rendelkező két félsík szöge. A gömbfelületnek a gömbkétszög félköreivel határolt egyik része a gömbkétszög belseje, másika a külseje. A csúcsok polárisának a gömbkétszög belsejébe eső szakasza a gömbkétszög szélessége. A gömbkétszög felezője felezi a szélességet és rá merőleges, megfordítva: a gömbkétszög szélességének felező merőlegese a gömbkétszög felezője. A gömb egy $\overline{AB}$ szakasza annak a gömbkétszögnek szélessége, amelynek csúcsai az AB egyenes pólusai, szárai pedig A-n és B-n átmenő félkörök. Vonalzóval és egységátrakóval egyszerre végezhetünk szög- és szakaszfelezést.

Ha a gömbkétszögnek C és C' csúcsa, az $\overline{AB}$ szakasz pedig szélessége és ha A_1 az AC, B_1 pedig a $\overline{BC'}$ szakasz olyan pontja, hogy $\overline{AA_1}$ és $\overline{BB_1}$ az egységátrakó egységével egyenlő, akkor a gömbkétszögbe eső $\overline{AB}$ és $\overline{A_1B_1}$ szakasz F metszéspontja az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja és a CFC' félkör a gömbkétszög f felezője.

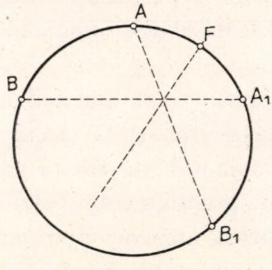
Most az F felezőpontból szerkesztettük az f szögfelezőt. Megfordítva is eljárhatunk. Ha a CA, ill. CB negyedkörre egységátrakóval rávisszük a $\overline{CA_2}=\overline{CB_2}$

egységet, akkor az $\overline{AB_2}$ és $\overline{BA_2}$ szakasz F_2 metszéspontja f-nek pontja és a CF_2 egyenes az $\overline{AB}$ szakaszt az F felezőpontjában metszi.

Ha P, ill. Q a $\overline{CA}$, ill. $\overline{CB}$ szakasz pontja és ha $\overline{CP}=\overline{CQ}$ (vagy $\overline{AP}=\overline{BQ}$), akkor az $\overline{AQ}$ és $\overline{BP}$ szakaszok az f szögfelezőn metszik egymást. Ennek alapján szerkesztjük P-ből Q-t.

A gömb egy $\overline{CP}$ szakaszához egy adott, C-ből kiinduló félegyenesen vonalzóval és egységátrakóval szerkeszthetünk olyan P_1 pontot, hogy $\overline{CP_1}=\overline{CP}$. Ehhez a P_1 ponthoz annak a gömbkétszögnek felezése vezet, amelynek egyik szára az adott félegyenes, másik szára pedig P-t tartalmazza. Ezt a szerkesztést π-szögű gömbkétszögre, vagyis félgömbre is elvégezhetjük.

Ha az $\overline{AB}$ szakaszt egyenesének egy A_1 pontjából kiinduló félegyenesére kell fölrakni, vagyis e félegyenesen olyan B_1 pontot kell szerkeszteni, hogy $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$, akkor föltételezhetjük, hogy az egyenesen az $\overline{AB}$ szakasz és az A_1 pontból kiinduló félegyenes iránya ellentétes. (Az ellenkező esetben a szakasz végpontjainak jelölését egymással fölcseréljük.) Az $\overline{AA_1}$ szakasz F felezőpontjára (56. ábra) $\overline{FA}=\overline{FA_1}$, F csúcsú π-szögű gömbkétszög felezése juttat az adott félegyenes olyan B_1 pontjához, amelyre $\overline{FB_1}=\overline{FB}$ és $\overline{A_1B_1}=\overline{AB}$.



56. ábra

Ha az $\overline{AB}$ szakaszt A_1-ből kiinduló tetszőleges félegyenesre kell fölrakni, akkor a most mondott módon előbb az AA_1 egyenes A_1-ből kiinduló egyik félegyenesének $\overline{A_1B_1}$ szakaszára rakjuk föl, s azután ezt a szakaszt rakjuk át a kívánt félegyenes $\overline{A_1B_2}$ szakaszára.

Ezzel igazoltuk, hogy a 24. §. 7. feladatának a gömbön megfelelő feladat vonalzóval (kvadránskörzővel) és egységátrakóval megoldható.

Ebből egyszersmind következik, hogy a 24. §. 8. feladata a gömbön vonalzóval és egységátrakóval szintén megoldható.

Ha ugyanis O kezdőpontú adott a félegyenessel ennek adott oldalán adott γ szöget (gömbkétszöget) alkotó b félegyenest kell szerkeszteni, akkor O polárisának és a-nak A metszéspontjától a poláris a „oldalával" megadott félegyenesére fölrakjuk a gömbkétszög szögével meghatározott szélességét B-ig, s az AB félegyenes a kívánt b félegyenest szolgáltatja.

V. KÖBÖS SZERKESZTÉSEK

28. §. HARMAD- ÉS NEGYEDFOKÚ EGYENLETEK. KÖBÖS ALAPSZERKESZTÉSEK. KÖBÖSEN SZERKESZTHETŐ PONTOK ÉS KOORDINÁTÁIK SZÁMTESTE

A harmadfokú (köbös) egyenlet általános alakja

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 = 0. \tag{23}$$

Ezt az egyenletet az $x=y-\frac{a_1}{3}$ helyettesítés az

$$y^3+py+q = 0, \quad p = a_2-\frac{a_1^2}{3}, \quad q = a_3-\frac{a_1a_2}{3}+\frac{2a_1^3}{27} \tag{24}$$

egyenletbe viszi át. Ennek az egyenletnek diszkriminánsa

$$D = -4p^3-27q^2.$$

Tegyük fel, hogy a_1, a_2, a_3 valós.

$p\neq 0$ esetben az

$$y = \alpha x, \quad \alpha^2 = \frac{|p|}{3}$$

helyettesítés a (24) egyenletet az

$$x^3-3x+2u = 0, \quad \text{ill.} \tag{25}$$

$$x^3+3x+2u = 0, \quad 2u = \frac{q}{\alpha^3} \tag{26}$$

egyenletbe viszi át. Ennek diszkriminánsa $108(1-u^2)$, ill. $108(-1-u^2)$.

A (25) egyenletnek három különböző valós gyöke, ill. csak egy valós gyöke van, aszerint, amint $u^2<1$, ill. $u^2>1$. Az első esetben (25) a $\varphi=\arccos u$ szög triszekcióegyenlete. Gyökei tehát

$$x_1 = 2\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = 2\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}, \quad x_3 = 2\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$$

a (24) egyenlet gyökei tehát $y_k = \alpha x_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

A (26) egyenletnek és az $u^2 > 1$ esetben a (25) egyenletnek Cardano képlete szerint egyetlen valós gyöke

$$x = \sqrt[3]{-u+v} + \sqrt[3]{-u-v}, \quad v^2 = u^2+1 \text{ ill. } v^2 = u^2-1.$$

A (24) egyenletnek $p = 0$ esetben $\sqrt[3]{-q}$ gyöke. Ez a gyök tehát $q < 0$ esetben a kockasokszorozás megoldása, $q > 0$ esetben pedig $-y = \sqrt[3]{q}$ átalakítással erre vezethető vissza. A p, q, u és φ, ill. u és v szerkesztése a (23) egyenlet együtthatóiból $u^2 < 1$, ill. $u^2 > 1$ esetben elemi. Ebből következik:

Valós együtthatókkal bíró harmadfokú egyenlet valós gyökeinek szerkesztését elemi szerkesztéssel vagy szögharmadolásra, vagy kocka sokszorozására lehet visszavinni aszerint, amint az egyenletnek három valós gyöke, ill. csak egy valós gyöke van.

Együtthatóinak számtestében egy irreducibilis harmadfokú egyenlet gyökeinek szerkesztését köbösnek nevezzük. A (24) egyenlet egy y_1 gyökének szerkesztése után az y_2 és y_3 gyök szerkesztése elemi, mert az $y_1+y_2+y_3 = 0$ és $y_1y_2y_3 = q$ egyenlet miatt y_2 és y_3 a

$$z^2 + y_1 z + \frac{q}{y_1} = 0$$

egyenlet gyöke.

A kockasokszorozás és a szögharmadolás *köbös alapszerkesztés.* Bármely köbös szerkesztést elemi szerkesztéssel köbös alapszerkesztésekre lehet visszavinni. Ez harmadfokú egyenlet gyökeinek szerkesztésére a komplex síkon is igaz. A gyökök kiszámítása racionális műveleteken kívül ugyanis négyzetgyök és köbgyök kiszámítását kívánja meg. $\sqrt{A}$ szerkesztése a komplex síkon elemi, $\sqrt{|A|}$ szerkesztését és A szögének felezését kívánja. $\sqrt[3]{A}$ szerkesztésére szükséges $\sqrt[3]{|A|}$ kockasokszorozás és A szögének harmadolása.

Az

$$(27) \qquad x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

negyedfokú egyenlet gyökeinek szerkesztését az együtthatókból elemi és köbös alapszerkesztésekkel lehet végrehajtani. Ezt az egyenletet az $y=x+\frac{a_1}{4}$ helyettesítés az

$$y^4+py^2+qy+r=0 \tag{28}$$

egyenletbe viszi át, ahol

$$p=a_2-\frac{3}{8}a_1^2,$$

$$q=a_3-\frac{a_2a_1}{2}+\frac{a_1^3}{8},$$

$$r=a_4-\frac{a_1a_3}{4}+\frac{a_1^2a_2}{16}-\frac{3a_1^4}{256}.$$

Ennek az egyenletnek köbös rezolvense

$$z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0. \tag{29}$$

Ha y_1, y_2, y_3, y_4, ill. z_1, z_2, z_3 a (28), ill, (29) egyenlet gyökei, akkor

$$y_1=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3},\quad y_2=\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},\quad y_3=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}$$

és

$$y_4=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}.$$

A négyzetgyökök előjelét itt úgy kell megválasztani, hogy

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}=-\frac{q}{8}$$

legyen.

A (29) egyenlet együtthatóinak szerkesztése a (27) vagy (28) egyenlet együtthatóiból és y_1, y_2, y_3, y_4 szerkesztése z_1, z_2, z_3-ból elemi. A (29) egyenlet gyökeinek szerkesztése köbös alapszerkesztésekhez vezet. Ez akkor is igaz, ha a (29) egynelet gyökeit a komplex síkon kell szerkeszteni.

Egy feladat akkor *köbösen szerkeszthető*, ha véges számú elemi és köbös alapszerkesztésből összetehető.

A köbösen szerkeszthető pontok koordinátái az adott pontok koordinátáit és az adott szakaszok mérőszámait tartalmazó olyan számtest számai, amely bármely c pozitív számával együtt a $\sqrt{c}$ és a $\sqrt[3]{c}$ számot is és bármely $0<c<1$ számával együtt az $x^3-3x-2c=0$ szögharmadolási egyenlet gyökeit is tartalmazza.

Egy köbös feladatot vonalzóval, körzővel és bármely olyan rajzeszközzel meg lehet oldani, amelynek segítségével a kockasokszorozást és a szögharmadolást bármely $c(>0)$, ill. $0<c<1$ értékre szerkeszteni lehet. Ilyen eszközökről és alkalmazásukról a következőkben lesz szó. Ilyen eszközt helyettesíthet akármilyen körtől különböző megrajzolt kúpszelet, vagy egy megrajzolt racionális harmadrendű vagy negyedrendű algebrai görbe.

29. §. BETOLÓVONALZÓ

Az egységátrakó ún. N-vonalzót *betolóvonalzó*nak, röviden B-*vonalzó*nak fogjuk nevezni, ha a szerkesztésekben a következő négyféleképp használjuk: 1. közönséges vonalzóként két adott ponton átmenő egyenes húzására; 2. N-vonalzóként az alapszakasznak, normának adott félegyenesre történő fölrakására kezdőpontjától; 3. K-vonalzóként egy e egyenes metszéspontjainak meghatározására egy olyan körrel, amelynek sugara az alapszakasz; 4. az alapszakasznak két (nem párhuzamos) e és g egyenes közé tolására, úgy, hogy az alapszakasz által meghatározott egyenes egy P ponton menjen át. Ekkor az N-vonalzót úgy helyezzük el, hogy éle P-n menjen át és egyúttal egyik megjelölt pontja e-re, a másik g-re essék.

A betolást nem elemi szerkesztések végzésére már a régi görög matematikusok is alkalmazták és a betolást általánosították, amikor a két egyenes közül, amelyek közé a B-vonalzó alapszakaszát be kellett tolni, az egyiket körrel helyettesítették.

Bármely köbös szerkesztést csupán betolóvonalzó használatával (körző, vagy megrajzolt kör nélkül) végre lehet hajtani.

Ennek igazolására elég kimutatni, hogy a köbös alapszerkesztéseket, a kockasokszorozást és a szögharmadolást B-vonalzóval végre lehet hajtani.

a) *Kockasokszorozás*

$\sqrt[3]{a}$ $(a>0)$ szerkesztésére föltehetjük, hogy $a<1$. Az ellenkező esetben van olyan pozitív k egész szám, hogy $a=k^3c$ és $c<1$, tehát $\sqrt[3]{a}=k\sqrt[3]{c}$ $(c<1)$. A c szakasz kisebb, mint a B-vonalzó egységül választott alapszakasza.

Az 57. ábrán $\overline{OE}=1$, $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=4a$, a g_0 egyenes párhuzamos a BE egyenessel és AB merőleges EA-ra. A B-vonalzót E-n át a g_0 és az OA egyenes közé toljuk, ha ekkor az alapszakasz egyik végpontja g_0 C pontjába, a másik pedig az OA egyenes D pontjába esik, akkor az $\overline{OD}$ szakasz hossza $x=2\sqrt[3]{a}$.

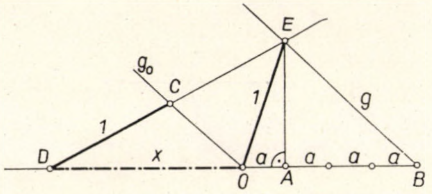
A BDE és ODC háromszög hasonlósága miatt ugyanis

$$\overline{DO}:\overline{DB}=\overline{DC}:\overline{DE}, \quad \text{vagyis} \quad \overline{DO}\cdot\overline{DE}=\overline{DC}\cdot\overline{DB}.$$

Itt $\overline{DO}=x$, $\overline{DE}^2=\overline{DA}^2+\overline{EA}^2=(x+a)^2+(1-a^2)=x^2+2ax+1$, $\overline{DB}=x+4a$. x tehát eleget tesz a

$$\overline{DO}^2\cdot\overline{DE}^2-\overline{DC}^2\cdot\overline{DB}^2=x^2(x^2+2ax+1)-1(x+4a)^2=$$
$$=x^4+2ax^3-8ax-16a^2=(x+2a)(x^3-8a)=0$$

egyenletnek. Ennek az egyenletnek csak egy pozitív gyöke van: $x=2\sqrt[3]{a}$.



57. ábra

A 58. ábra $\sqrt[3]{a}$ $(0<a=4b<8)$ Newton-tól[29]) származó szerkesztését mutatja B-vonalzóval. Az A ponton átmenő O középpontú kör csak megkönnyíti annak igazolását, hogy $CD=x=\sqrt[3]{a}$, megrajzolására azonban nincs szükség.

Az ábrán az AC és BC egyenest B-vonalzóval szerkeszthetjük. Az $\overline{AC}=b$ szakasz felező merőlegesét a vonalzó 1. és 2. alkalmazásával szerkeszthetjük. Ennek a merőlegesnek az A középpontú egységsugarú körrel való O metszéspontjához a vonalzó 3. alkalmazása juttat, ezután B-hez a vonalzó 2. alkalmazásával jutunk. Végre a B-vonalzó alapszakaszát O-n át toljuk az AC és BC egyenes közé.

Ha az OD egyenes az O középpontú egység sugarú K kört F és F' pontban metszi és ha az OE szakasz hossza y, akkor

$$\overline{OE}=\overline{OF}+\overline{FE}=1+\overline{FE}=\overline{DE}+\overline{EF}=y, \quad \overline{DF'}=\overline{DF}+\overline{FF'}=y+2.$$

Menelaosz tételének az OAD háromszögre és a BC egyenesre való alkalmazásával kapjuk, hogy

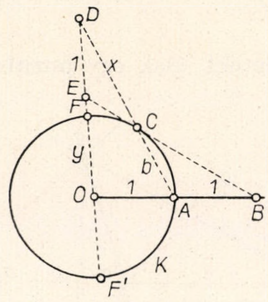
[29]) Mathematika Universalis. Cambridge 1707, 305.

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{EO}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{1}{y}=1,\quad\text{vagy}\quad \frac{x}{2}=\frac{b}{y}=\frac{x+b}{2+y}.$$

A D pont hatványa K-ra

$$\overline{DC}\cdot\overline{DA}=\overline{DF}\cdot\overline{DF'}\quad\text{vagyis}\quad x(x+b)=y(y+2).$$

Az előbbi egyenletből tehát $\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{b}{y}\cdot\frac{y}{x}=\frac{b}{x}$, vagyis $x^3=4b=a$.

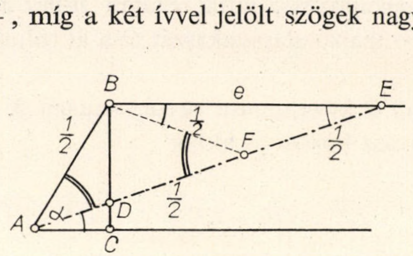


58. ábra

Egy $c>8$ számhoz van olyan k egész szám, hogy $c=k^3\cdot a\,(a<8)$, tehát $\sqrt[3]{c}=k\sqrt[3]{a}$.

b) *Szögharmadolás*

Az 59. ábra az α hegyesszög Papposz görög matematikustól közölt harmadolását mutatja B-vonalzóval. Az $AB=1/2$ átfogójú ABC derékszögű háromszög A mellett fekvő α szögének harmadolását úgy végezzük, hogy A-n át a vonalzó egységszakaszát a BC egyenes és a rá merőleges és B-n átmenő e egyenes közé toljuk. Az ábrán könnyen beláthatjuk, hogy a CAD szög és a többi egy ívvel jelölt szög nagysága $\frac{\alpha}{3}$, míg a két ívvel jelölt szögek nagysága $\frac{2\alpha}{3}$.



59. ábra

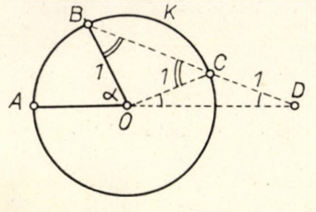
Az α szög harmadolás-egyenletének gyökei $2\cos\frac{\alpha}{3}$, $2\cos\frac{\alpha+2\pi}{3}$ és $2\cos\frac{\alpha+4\pi}{3}$. Az első gyökből a többit a B-vonalzó negyedik alkalmazása nélkül meghatározhatjuk. Hasonlóképp elemi a tompa $\pi-\alpha$, ill. domború $\pi+\alpha$ szög $(0<\alpha<\pi)$ harmadolása az $\frac{\alpha}{3}$ szerkesztése után.

Valós együtthatókkal bíró bármely

$$y^3+py+q=0 \qquad (p\neq 0)$$

egyenlet gyökeit tehát B-vonalzóval szerkeszthetjük, mert szerkesztésük köbös alapszerkesztésekből összetehető. A 3. § feladatait tehát B-vonalzóval könnyen megoldhatjuk.

A 60. ábra az $\alpha=AOB$ szög Arkhimédész-től származó harmadolását mutatja az O középpontú, egység sugarú K kör felhasználásával. A betolóvonalzót a B ponton át úgy helyezzük el, hogy egységszakaszának C végpontja a K körre, D végpontja pedig az AO félegyenes K-n kívül eső darabjára essék. Az ábrán könnyen beláthatjuk, hogy $ADB\sphericalangle=ODB\sphericalangle=\frac{\alpha}{3}$.



60. ábra

c) *Szabályos hétszög*

Szabályos hétszöget betolással E. J. Hoffmann[30]) szerkesztett. Szerkesztésében körzőt vagy megrajzolt kört használt. Most olyan szerkesztést adunk, amelyben B-vonalzón kívül más segédeszközre nincs szükség. Abból indulunk ki, hogy $x=2\cos\frac{2\pi}{7}$ az

$$f(x)=x^3+x^2-2x-1=0$$

egyenlet egyetlen pozitív gyöke, s egyúttal az

$$(x+1)f(x)=x^4+2x^3-x^2-3x-1=0$$

[30]) L. Bieberbach, Theorie der geom. Konstruktionen, 84—85.

egyenletnek is egyetlen pozitív gyöke. Az utóbbi egyenletet az

$$x^4+2x^3+\frac{5}{4}x^2=\frac{9}{4}x^2+3x+1,$$

vagyis az

$$x^2\left[(x+1)^2+\frac{1}{4}\right]=\left(\frac{3}{2}x+1\right)^2$$

alakban is írhatjuk. Legyen

$$d^2=(x+1)^2+\frac{1}{4}\quad(d>0);$$

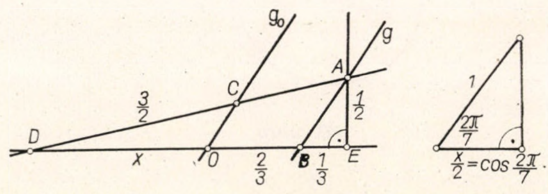
az egyetlen pozitív gyök eleget tesz az

$$xd=\frac{3}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

egyenletnek, azaz kielégíti az

$$x:\frac{3}{2}=\left(x+\frac{2}{3}\right):d$$

aránylatot.



61. ábra

Az $x=\overline{DO}=2\cos\frac{2\pi}{7}$ szerkesztését a 61. ábra mutatja, ahol az $\overline{OE}$ egységszakaszt az alapszakasz kétharmad részének választottuk, és az A, B, E és O pontot, továbbá a g_0 egyenest úgy szerkesztettük, hogy O és E egy egyenesen, a B pont különböző oldalán fekszenek, $\overline{OB}=\frac{2}{3}$, $\overline{BE}=\frac{1}{3}$, az AE egyenes merőleges OE-re, $\overline{EA}=\frac{1}{2}$ és $g_0\|g=AB$. A $\overline{CD}=\frac{3}{2}$ szakaszt az A ponton át B-vonalzóval a g_0 és OE egyenes közé toltuk. Az ábrán $\overline{DA}=d$, $\overline{DB}=x+\frac{2}{3}$, az OC és AB egyenes párhuzamos, a DOC és DBA háromszög ezért hasonló. Hasonlóságukból következik a szerkesztés helyessége. Ezzel bebizonyítottuk:

Szabályos hétszöget lehet B-*vonalzóval szerkeszteni.*

d) *Papposztól, Arkhimédésztől, ill. Apollóniosztól származó egy-egy feladat*

Egyenletre áttérés nélkül oldjuk meg B-vonalzóval ezeket a feladatokat.

Papposz feladata: Adott A ponton át olyan e egyenes húzása, amelynek adott α szög szárai közé eső darabja adott s szakasszal egyenlő.

Ha s a B-vonalzó alapszakaszával egyenlő, akkor a feladat megoldását a B-vonalzó alapszakaszának az A ponton át az α szög szárai közé való betolása adja. Ha az alapszakasz e és az adott szakasz s hossza egymástól különbözik, akkor a B-vonalzóval mint N-vonalzóval megszerkesztjük az A hasonlóságpontra az α szög $s:e$ arányú, hasonló helyzetű α' képét. Az α' szög α-val egyenlő és annak az A-n átmenő egyenesnek, amelynek az α' szög szárai közé eső szakasza e-vel egyenlő, az α szög szárai közé eső szakasza s-sel egyenlő.

Ha a B-vonalzó még általánosabb használatát is megengedjük, mely abban áll, hogy a két egyenes közül, amelyek közé a B-vonalzót be kell tolni, az egyiket vagy mind a kettőt körrel helyettesítjük, megoldhatjuk a következő feladatokat is.

Egy kört egy h húrja k_1 és k_2 körívre bontja. Arkhimédész feladata: A k_1 körív adott A pontján át olyan egyenes húzása, amelynek h és k_2 közé eső szakasza adott s hosszúságú.

Apollóniosz feladata: Adott A ponton át olyan egyenes húzása, amelyre adott kör vagy adott körkétszög s hosszúságú húrja esik.

Ha s és a B-vonalzó e alapszakasza egyenlő, akkor e két feladat megoldását a B-vonalzó alapszakaszának az A ponton át a h húr és a k körív, ill. az adott kör vagy körkétszög két íve közé tolásával kapjuk. Ha ellenben $e \neq s$, akkor Papposz feladatának megoldásához hasonlóan A középpontú $s:e$ arányú hasonlósági átalakítás vezet megoldáshoz.

30. §. TÖBB DERÉKSZÖGVONALZÓ

A derékszögvonalzó használatát egybe lehet kapcsolni az algebrai egyenletek gyökeinek meghatározására szolgáló Lill-féle eljárással. Egy derékszögvonalzóval meg lehet szerkeszteni a valós együtthatókkal bíró másodfokú egyenletek valós gyökeit, két derékszögvonalzóval pedig a valós együtthatókkal bíró harmadfokú egyenletek valós gyökeit.

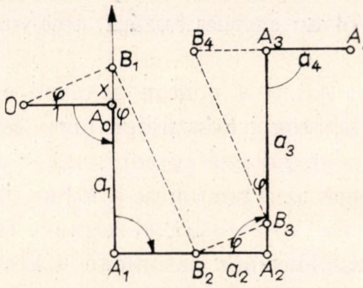
A Lill-féle eljárás[31]) az

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

[31]) A Lill-féle eljárást a következő tankönyvek is tárgyalják: L. Bieberbach, Vorlesungen über Algebra, 1928, 134, továbbá Adler, Hjelmslev és Vahlen könyvünk végén felsorolt munkái.

polinomhoz egy törtvonalat rendel, az együtthatók $OA_0A_1...A_n$ törtvonalát. Ez a törtvonal $n+1$ szakaszból áll. Az OA_0 szakasz hossza az egység, az $A_{k-1}A_k$ szakaszé pedig $|a_k|$. Az $n+1$ szakasz közül akármelyik az előzővel derékszöget alkot, mégpedig pozitív, illetőleg negatív értelemben aszerint, amint egyező, ill. ellenkező előjelű együttható tartozik a két szakaszhoz. Határesetként könnyen tárgyalható az az eset is, amikor az $a_1, a_2, ..., a_n$ együttható közül egy vagy több zérus.

Ha az OA_0 félegyenessel φ szöget alkotó félegyenes B_1 pontban metszi az A_0A_1 egyenest, akkor $\overline{A_0B_1} = \operatorname{tg} \varphi = x$. Az OB_1 egyenesre a B_1 pontban állított merőleges és az A_1A_2 egyenes metszéspontját B_2-vel, a $B_{k-1}B_k$ egyenesre a B_k pontban állított merőleges és az A_kA_{k+1} egyenes metszéspontját B_{k+1}-gyel jelöljük ($k=2, 3, ..., n-1$). Ha $a_k=0$, akkor A_k az A_{k-1} ponttal összeesik, de úgy kell tekinteni, mintha A_k az $A_{k-2}A_{k-1}$ egyenesre az A_{k-1} pontban állított merőlegesen volna és ennek megfelelően B_k is erre a merőlegesre esik.



62. ábra

A szerkesztéskor föllépő derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy az $\overline{A_0B_1}, \overline{A_1B_1}, ..., \overline{A_{n-1}B_n}, \overline{A_nB_n}$ szakasz megfelelő előjellel vett hosszára nézve a következő egyenletek állnak fenn:

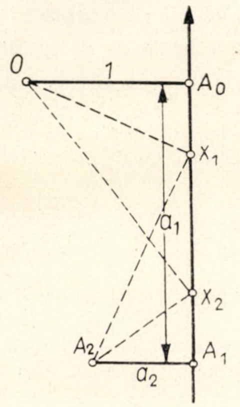
$$\overline{A_0B_1} = x,\ \overline{A_1B_1} = x + a_1,\quad \overline{A_1B_2} = \overline{A_1B_1} \cdot \operatorname{tg} \varphi = (x+a_1)x = x^2 + a_1x,$$

$$\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_2} + a_2 = x^2 + a_1x + a_2,\quad \overline{A_2B_3} = (x^2 + a_1x + a_2)x =$$

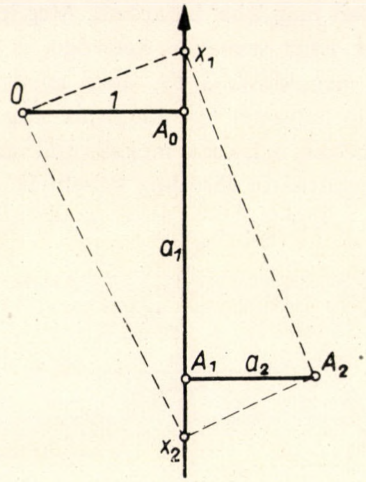
$$= x^3 + a_1x^2 + a_2x, ...,\quad \overline{A_nB_n} = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = f(x).$$

Az $x = \operatorname{tg} \varphi = \overline{A_0B_1}$ szakasz akkor megoldása az $f(x)=0$ egyenletnek, ha a B_n pont az A_n ponttal összeesik. Az $OB_1B_2...B_n$ törtvonal jellemző tulajdonsága az, hogy B_k szögpontja az $A_{k-1}A_k$ egyenesre esik, és hogy bármely két egymás után következő szakasza merőleges egymásra.

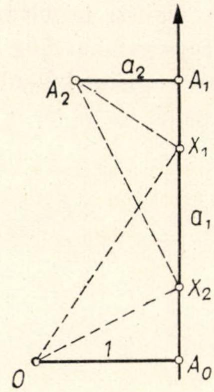
Az $x^2 + a_1x + a_2 = 0$ egyenlet gyökeinek szerkesztése végett az A_0A_1 egyenesen az $X = B_1$ pontot úgy kell meghatároznunk, hogy A_2 és B_2 összeessék. Ez derékszögvonalzóval mindig lehetséges, föltéve, hogy az egyenletnek van valós gyöke. A szerkesztést a_1 és a_2 előjelének megfelelően a 63—68. ábra mutatja. A 67. ábrában $a_1 = 0$ és $a_2 < 0$, a 68. ábrában $a_1 = 0$ és $a_2 > 0$. Ebben az utolsó esetben nincs valós gyök, mivel az OA_0 egyenesre az A_0 pontban emelt merőlegesnek nincs olyan pontja, amelyből az OA_2 szakasz derékszögben látszik.



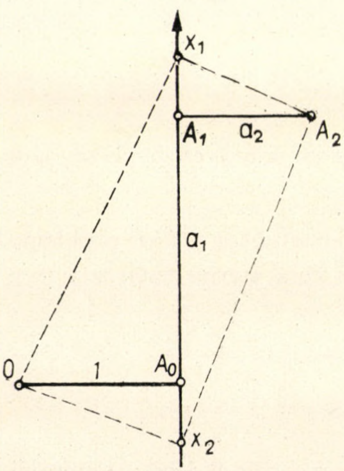
63. ábra



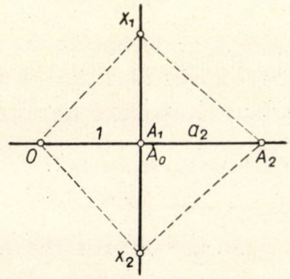
64. ábra



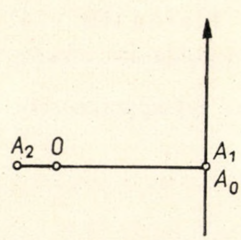
65. ábra



66. ábra



67. ábra

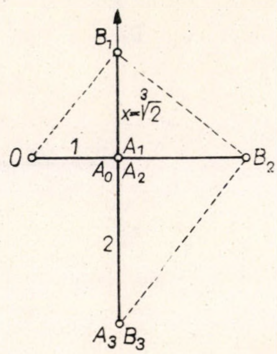


68. ábra

Az $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ egyenletet az $OB_1B_2B_3$ törtvonal akkor oldja meg, ha B_3 az A_3 ponttal összeesik, ekkor $\overline{A_0B_1} = x$ az egyenletnek egyik gyökét adja. A megoldást adó $OB_1B_2B_3$ törtvonalhoz két derékszögvonalzóval lehet eljutni. Az első derékszögvonalzó első szárát O körül forgatjuk, miközben csúcsát az A_0A_1 egyenesen mozgatjuk. Ezzel egyidejűleg a másik derékszögvonalzót az első derékszögvonalzó második szárán való csúsztatással úgy mozgatjuk, hogy a derékszög csúcsa az A_1A_2 egyenesen maradjon. A két derékszögvonalzót egyidejűleg addig mozgatjuk, amíg a második derékszögvonalzó második szára az A_3 ponton megy át.

Két derékszögvonalzóval tehát bármely valós együtthatójú harmadfokú egyenlet valós megoldásait meg lehet határozni. Meg lehet tehát oldani a déloszi problémát, a triszekciót, lehet szabályos hétszöget és kilencszöget szerkeszteni.

A déloszi probléma megoldását a 69. ábra adja. Az $a_3 = -2$ szakasznak az egységszakaszhoz való helyzetét úgy állapítjuk meg, hogy az a_1 és a_2 együtthatót zérustól különbözőnek választva megalkotjuk az együtthatók törtvonalát és azután az a_1 és a_2 együtthatót zérushoz közelítjük.



69. ábra

Az ábra három hasonló derékszögű háromszögéből könnyen be lehet látn közvetlenül is, hogy az A_0B_1 szakasz hossza $x = \sqrt[3]{2}$.

Platón (Kr. e. 429—347) görög filozófus és matematikus a déloszi probléma megoldására eszközt készített. Készüléke ugyanezen ábra szerint határozta meg az egységszakaszból a $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakaszt.

31. §. PAPÍRHAJTOGATÁS

Papírlap hajtogatásával vonalzó, körző, sőt ceruza nélkül lehet geometriai szerkesztéseket végezni. Papírlap összehajtogatásával egyenest lehet előállítani. A papírlapot lehet úgy összehajtani, hogy a kapott egyenes két adott (hajtogatással megjelölt) ponton menjen át.

Ha egy hajtogatással kapott e egyenes két pontját egymásra hajtjuk és azután a papírlapot kisimítjuk, akkor az e egyenesre merőleges m egyeneshez jutunk. A papírlap oly módon való összehajtásával, amely az e egyenesnek más két pontját helyezi egymásra, az m egyenessel párhuzamos m' egyeneshez juthatunk. Egy egyenes A és B pontjának és egy szög a és b szárának egymásra való hajtogatásával az AB szakasz felezőpontját és középvonalát, illetőleg az $(a, b)\sphericalangle$ szögfelezőjét kapjuk meg.

Hajtogatással lehet szakaszt átrakni, de nem lehet átfogóból és egyik befogóból derékszögű háromszöget előállítani.

A mondottakból következik, hogy papírlap hajtogatásával a Hilbert-féle szerkesztéseket el lehet végezni.[32])

Ha egy másik papírlapból hajtogatással párhuzamos szalagot állítunk elő, akkor ezt az első lapon párhuzamos élű vonalzóként használhatjuk. A szerkesztésben szükséges egyeneseket nem kell meghúznunk, hanem azok mentén az első lapot összehajtjuk.

Ebből következik, hogy két papírlap segítségével bármely elemi szerkesztést papírhajtogatással is el lehet végezni.[33])

Minthogy az egyik papírlapot betolóvonalzónak használhatjuk, azért papírhajtogatással a harmad- és negyedfokú feladatokat is megoldhatjuk.

[32]) A papírhajtogatás irodalmára vonatkozólag hivatkozunk Th. Vahlen idézett könyvére, 59., és W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele c. könyvére, (1901), 395.

[33]) Papírhajtogatással könnyen előállíthatunk szabályos háromszöget, négyszöget, ötszöget, hatszöget, nyolcszöget és tízszöget. Az AB oldalú szabályos háromszög előállítása végett a papírlapot úgy hajtjuk össze, hogy az összehajtás egyenese A-n menjen át és az összehajtáskor B az AB szakasz középvonalára essék. Ha C a középvonalnak az a pontja, amellyel B a hajtogatáskor összeesik, akkor ABC egyenlő oldalú háromszög. Hajtogatással ennek a háromszögnek AC és BC oldalát könnyen megkaphatjuk.

Hajtogatással megkaphatjuk az ABC egyenlő oldalú háromszög S súlypontját. Ha elvégezzük a papírlapnak azt a három hajtogatását, amely az A, B és C pontot S-be juttatja, olyan szabályos hatszöget kapunk, amelynek oldala az AB oldal harmadrésze.

Négyzet szerkesztése hajtogatással közismert. Az $ABCD$ négyzetből hajtogatással megszerkesztjük azt az $A_1B_1C_1D_1$ négyzetet, amelynek szögpontjai az előbbi négyzetnek oldalfelezőpontjai. Ha AA_1D_1 az első négyzetnek a másodikon kívül eső egyik (egyenlőszárú derékszögű) háromszöge, akkor az AA_1D_1 háromszög A_1 és D_1 mellett fekvő szögének felező egyenese és a többi három derékszögű háromszög megfelelő két-két szögfelezője egy olyan szabályos nyolcszöget alkot, amelynek A_1, B_1, C_1 és D_1 négy nem egymásra következő szögpontja.

Azt a szerkesztést, amellyel az egységsugarú körbe írt szabályos ötszögnek és tízszögnek egy oldalát kaptuk, hajtogatással is el lehet végezni.

Szabályos ötszöget hajtogatással legegyszerűbben úgy lehet előállítani, hogy egy párhuzamos élű papírszalagból hurkot kötünk és azt lassankint szorosra húzzuk össze.

32. §. GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK KÖRTŐL KÜLÖNBÖZŐ MEGRAJZOLT KÚPSZELET FELHASZNÁLÁSÁVAL. SMITH ÉS KORTUM TÉTELE

Kortum és Smith[34]) egyidejűleg és egymástól függetlenül kimutatták a Poncelet—Steiner-féle tételnek megfelelő következő tételt:

Ha meg van rajzolva egy körtől különböző kúpszelet, akkor valós együtthatókkal bíró bármely harmadfokú vagy negyedfokú egyenlet valós gyökeit az egyenlet együtthatóit meghatározó szakaszokból körzővel és vonalzóval lehet szerkeszteni.

Ez a tétel akkor, amikor a megrajzolt kúpszelet parabola, könnyen belátható. A parabola egyenlete a derékszögű koordinátarendszer alkalmas megválasztásával mindig

$$P(x, y) \equiv x^2 - y = 0$$

alakban írható. Bármely negyedfokú egyenletet mindig

$$f(x) \equiv x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

alakra lehet hozni. Ennek az egyenletnek négy gyöke nyilvánvalóan a

$$K(x, y) \equiv x^2 + y^2 + qx + (p-1)y + r \equiv \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 - \left[\frac{q^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} - r\right] = 0$$

kör és a P parabola négy metszéspontjának abszcisszája. A p, q és r hosszúságú szakaszból egyszerűen szerkeszthető K középpontja, és ha K valós kör, sugara is. Ha K képzetes kör, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke. Ha K pontkör, akkor középpontjának abszcisszája gyöke lehet az egyenletnek, de az egyenletnek ettől különböző valós gyöke nem lehet.

P és K valós metszéspontjai és az $f(x) = 0$ egyenlet valós gyökei között egyértelmű megfelelés van. Valós metszéspont abszcisszája az egyenlet valós gyöke és megfordítva: az egyenlet valós gyöke P és K egy valós metszéspontjának abszcisszája. Ha ugyanis x_1 az $f(x) = 0$ egyenletnek valós gyöke, akkor $y_1 = x_1^2$ is valós és így $P(x_1, y_1) = 0$ és $K(x_1, y_1) = 0$.

Az általános tétel kimutatására feltételezhetjük, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek van valós gyöke és az nem többszörös. Ha ugyanis egy valós gyök többszörös volna, akkor annak kiszámítását legfeljebb másodfokú egyenletre lehet visszavinni és így azt a gyököt körzővel és vonalzóval lehetne szerkeszteni. Ebből a föltevésből következik, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább két egymástól különböző valós gyöke van.

[34]) H. Kortum, Über geometr. Aufgaben 3. und 4. Grades. Bonn 1869; H. J. S. Smith, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. Annali di Mat. (2) 3. k. 1869. A Berlini Akadémia mindkét dolgozatot Steiner-díjjal tüntette ki.

Ha $r=0$ (de $q \neq 0$), akkor a P és K kúpszelet kezdőponttól különböző három metszéspontjának abszcisszája az

$$x^3+px+q=0$$

harmadfokú egyenletnek gyöke.

A P és K kúpszelet négy közös pontján egyúttal keresztülmegy a $K(x, y)-$ $-\lambda P(x, y) \equiv (1-\lambda)x^2+y^2+qx+(p-1+\lambda)y+r=0$ kúpszeletsor bármely tagja. Az $f(x)=0$ egyenlet négy gyöke tehát a K kör és a $K-\lambda P=0$ kúpszelet négy metszéspontjának is abszcisszája.

Ha a megrajzolt kúpszelet a és b féltengellyel bíró E^* ellipszis, akkor a kúpszeletsornak az a tagja, amelyre vonatkozólag $1-\lambda=\frac{b^2}{a^2}$, E^*-hoz hasonló E ellipszis, mivel — az $f(x)=0$ valós gyökeire tett föltevés miatt — van két különböző pontja és emiatt E nem lehet képzetes vagy pontellipszis.

Van tehát a síkban olyan T hasonlósági átalakítás, amely az E ellipszist az E^* ellipszisbe viszi át és nyilvánvalóan körzővel és vonalzóval szerkeszthető egy Q pontból az a két pont, amelybe a Q pontot a T hasonlósági átalakítás és annak T^{-1} megfordítottja átviszi. T az E ellipszist E^*-ba, a K kört egy K^* körbe és így E és K valós metszéspontjait E^* és K^* valós metszéspontjaiba viszi át. Ezek a metszéspontok szerkeszthetők, mivel E^* meg van rajzolva. E^* és K^* valós metszéspontjait a T^{-1} hasonlósági átalakítás E és K valós metszéspontjaiba viszi át. Ezek a metszéspontok és így az $f(x)=0$ egyenlet valós gyökei körzővel és vonalzóval szerkeszthetők.

Hasonlóképp mutatható ki a tétel arra az esetre is, amikor a megrajzolt kúpszelet a és b féltengellyel bíró H^* hiperbola. A $K-\lambda P=0$ kúpszeletsorban két olyan hiperbola van, amelyeknek aszimptotái ugyanakkora szöget zárnak be, mint a H^* hiperbola aszimptotái. Ennek a két hiperbolának paramétere a

$$\lambda-1=\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{illetőleg a} \quad \lambda-1=\frac{a^2}{b^2}$$

egyenletnek tesz eleget. Ha H^* egyenlő oldalú, akkor H_1 és H_2 egybeesik. Föltételezhetjük, hogy H_1 és H_2 valódi kúpszelet, mert ha az egyik két egyenesre esnék szét, akkor azt a két egyenest és ezeknek a K körrel való metszéspontjait a H^* hiperbola nélkül körzővel és vonalzóval lehetne szerkeszteni.

H_1 és H_2 vagy H^*-hoz, vagy a H^*-hoz kapcsolt H' hiperbolához hasonló. Ha H_1 hasonló H^*-hoz, akkor H_1 és K metszéspontjait éppúgy határozzuk meg, mint előbb E és K metszéspontjait. Lehetséges azonban, hogy mind H_1, mind H_2 a H' hiperbolához hasonló. A tétel teljes kimutatásához tehát csak azt kell bebizonyítanunk, hogy egy tetszőleges K' körnek a H' hiperbolával való metszéspontjait — a H^* hiperbola felhasználásával — körzővel és vonalzóval lehet szerkeszteni.

Ez valóban lehetséges. Ha ugyanis

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad \text{és} \quad x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

a H' hiperbolának és a K' körnek egyenlete és ha $P_k^*=(x_k^*, y_k^*)$ az

$$x^2+y^2+\frac{b}{a}Bx+\frac{a}{b}Ay+C+a^2-b^2=0$$

egyenlettel bíró K^* körnek metszéspontja a H^* hiperbolával, akkor a $P_k'=(x_k', y_k')=$ $=\left(\frac{a}{b}y_k^*, \frac{b}{a}x_k^*\right)$ pont metszéspontja a H' és K' görbének.

Mivel a H' hiperbolának paraméteres egyenletrendszere

$$x=a\sec t, \qquad y=b\operatorname{tg} t,$$

azért a K' körrel való metszéspontjaihoz tartozó paraméterértékek az

$$(a^2+b^2)\operatorname{tg}^2 t+Aa\sec t+Bb\operatorname{tg} t+C+a^2=0$$

egyenletnek tesznek eleget.

Ugyanennek az egyenletnek tesznek eleget a H^* hiperbola és a K^* kör metszéspontjaihoz tartozó t paraméterértékek, mivel H^* egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0, \qquad \text{vagy} \qquad x=a\operatorname{tg} t, \quad y=b\sec t$$

alakban írható. Ebből következik, hogy

$$x_k'=a\sec t_k=\frac{a}{b}(b\sec t_k)=\frac{a}{b}y_k^* \quad \text{és} \quad y_k'=b\operatorname{tg} t_k=\frac{b}{a}(a\operatorname{tg} t_k)=\frac{b}{a}x_k^*.$$

Ezzel Kortum és Smith tételét teljesen bebizonyítottuk.[35])

[35]) Kortum és Smith eredményeit Th. Vahlen bizonyította be elemi úton (Arch. d. Mathematik und Physik III. 3. k. 1902, 112, Konstr. u. Approx. III. rész). Az általunk adott bizonyítás Vahlen bizonyításánál is egyszerűbb és elemibb.

Vahlen kimutatta (az idézett helyen) Descartes és Smith tételét, hogy a harmad- és negyedfokú feladatoknak körzővel és vonalzóval való szerkesztéséhez elégséges az is, ha a körtől különböző kúpszeletnek csak egy íve van megrajzolva.

Kortum és Smith tételét bármely (valós vagy képzetes együtthatóval bíró) harmad- és negyedfokú egyenlet bármely (valós vagy képzetes) gyökének szerkesztésére kiterjeszthetjük. Egy ilyen egyenlet gyökeinek meghatározása racionális műveleteken kívül négyzetgyökvonásokból és köbgyökvonásokból áll. A négyzetgyökvonás pozitív szám négyzetgyökvonásából és szögnek felezéséből áll, tehát körzővel és vonalzóval elvégezhető. Egy komplex szám köbgyöke abszolút értékének köbgyökét és szögének harmadolását kívánja. Mindkét feladat valós együtthatójú harmadfokú egyenlet megoldását kívánja, s így Kortum és Smith tétele szerint elvégezhető.

33. §. NÉHÁNY SZERKESZTÉS KÖRTŐL KÜLÖNBÖZŐ KÚPSZELET FELHASZNÁLÁSÁVAL

1. Smith és Kortum tétele szerint bármely köbös szerkesztés elvégezhető körzővel, vonalzóval és egy megrajzolt kúpszelet segítségével. Ugyanannak a köbös feladatnak végrehajtása a kúpszelettől is függ, harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása *parabolával* legegyszerűbb.

Parabolára érvényes a következő tétel:

Parabola és kör négy metszéspontjának súlypontja a parabola tengelyére esik; *megfordítva: a parabolának bármely olyan négy pontja, amelynek súlypontja a parabola tengelyére esik, egy körön van, konciklikus.*

Az

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

kör és az $y=x^2$ parabola metszéspontjainak x_1, x_2, x_3, x_4 abszcisszája az

$$x^4+(b+1)x^2+ax+c=0$$

egyenlet gyöke. Ebben az egyenletben x^3 együtthatója zérus, ezért $x_1+x_2+x_3+$ $+x_4=0$, tehát $\zeta=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=0$, vagyis a négy pont súlypontja a parabola tengelyére esik.

Az $y=x^2$ parabola $P_i=(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ pontjának S súlypontja akkor esik a parabola tengelyére, az y-tengelyre, ha $4\zeta=x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Ekkor x_1, x_2, x_3, x_4 egy

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

egyenlet gyöke és az $y=x^2$ parabola és az

$$x^2+y^2+qx+(p-1)y+r=0$$

kör metszéspontjainak abszcisszája.

Ebből következik, ha a parabolába írt háromszög súlypontja a parabola tengelyére esik, akkor a köré írt kör a parabola csúcsán átmegy.

A kockasokszorozás, ill. a szögharmadolás egyenletét

$$x(x^3-a) = x^4-ax=0$$

ill.

$$x(x^3-3x-2c)=x^4-3x^2-2cx=0, \quad c=\cos\varphi$$

alakban írhatjuk. Ennek az egyenletnek gyökei az $y=x^2$ parabola és a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2+1}{4} = x^2+y^2-ax-y = 0,$$

ill.

$$(x-c)^2+(y-2)^2-c^2-4=x^2+y^2-2cx-4y=0$$

kör metszéspontjainak abszcisszái.

A két köbös alapszerkesztést akkor is végre lehet hajtani, ha a parabolának csak az $O=(0, 0)$ csúcsa és az $E=(1, 1)$ pontja közé eső I íve van megrajzolva.

A parabola és az $x^2+y^2-ax-y=0$ kör O-tól különböző metszéspontjának abszcisszája $\sqrt[3]{a}$. Ez a metszéspont az I parabolaívre esik, ha $0<a<1$. Ha $a>1$, akkor van olyan n pozitív szám, hogy

$$a_1 = \frac{a}{n^3} < 1 \quad \text{és így} \quad a = n\sqrt[3]{a_1}.$$

Az $y=x^2$ parabola és az $x^2+y^2-2cx-4y=0$ ($c=\cos\varphi$) kör O-tól különböző P_1, P_2, P_3 metszéspontjára az OP_1, OP_2, ill. OP_3 félegyenes az x-tengely pozitív felével $\frac{\varphi}{3}$, $\frac{\varphi+2\pi}{3}$, ill. $\frac{\varphi+4\pi}{3}$ szöget alkot. Két derékszögnél kisebb pozitív φ szögre P_1, P_2 közül egyik sem pontja az I parabolaívnek, mert $\frac{\varphi}{3}<\frac{\pi}{3}$ miatt P_1 abszcisszája $2\cos\frac{\varphi}{3}>2\cos\frac{\pi}{3}=1$ és mert P_2 abszcisszája negatív. Ha a parabola tengelyére egy P pontnak P^*, az I parabolaívnek I^* a tükörképe, akkor vagy az $I=OE$, vagy az $I^*=OE^*$ parabolaív tartalmazza a P_3 pontot, P_2-t azonban nem, mert P_2, ill. P_3 abszcisszája

$$-2=2\cos\pi < 2\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} < 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1.$$

és

$$-1 = 2\cos\frac{4\pi}{3} < 2\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} < 2\cos\frac{5\pi}{3} = 1.$$

Ha I nem tartalmazza a P_3 pontot, akkor tekintsük a P_3^* pontot, amely az I parabolaív és az $x^2+y^2+2cx-4y=0$ kör metszéspontja. Ez a kör a $P_1P_2P_3$ kör tükörképe az y-tengelyre, a parabola tengelyére. Így tehát az I parabolaív segítségével körzővel és vonalzóval megszerkeszthetjük a P_3^* pontot és ennek P_3 tükörképét. Az OP_3 félegyenesnek O körül $\frac{4\pi}{3}$ szöggel való negatív irányú elfordításával az x-tengellyel $\frac{\varphi}{3}$ szöget alkotó OP_1 félegyeneshez jutunk.

Ezzel kimutattuk, hogy a megrajzolt I parabolaív ismeretében a köbös alapszerkesztéseket és ezekkel bármely köbös szerkesztést körzővel és vonalzóval végre lehet hajtani.

Bármely szög harmadolásához az I parabolaív akármilyen kis OF darabjának megrajzolása is elég. Két derékszögnél kisebb szög harmadolása az I parabolaív $2\cos\frac{\pi+\varphi}{3}$ koordinátájú P_3^* pontjának szerkesztésével történik. P_3^* az OF parabolaív pontja, ha P_3^* abszcisszája kisebb, mint F-é. Ez mindig bekövetkezik, ha φ derékszögtől nem sokat különbözik. Egy

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \frac{\pi}{2^k}$$

nagyságú szöget, ahol $\varepsilon_k = 1$ vagy 0, körzővel és vonalzóval harmadolhatunk, mert a szögösszeg bármely tagját harmadolhatjuk.

A megrajzolt OF parabolaív felhasználásával egy ψ hegyes-, ill. tompaszög harmadolására előbb olyan harmadolható ω szöget szerkesztünk, amelyre a $\varphi=\psi+\omega$, ill. $\varphi=\psi-\omega$ szög derékszöghöz olyan közel áll, hogy a harmadoláskor szerkesztett P_3^* pont az OF parabolaívre esik. A φ szög harmadolása után $\frac{\psi}{3}=\frac{\varphi}{3}-\frac{\omega}{3}$, ill. $\frac{\psi}{3}=\frac{\varphi}{3}+\frac{\omega}{3}$ szerkesztése elemi.

Az OF parabolaív felhasználásával az első köbös alapszerkesztést is könnyen végrehajthatjuk.

Ha F abszcisszája f, akkor $a<f^3$ esetben az $y=x^2$ parabola és az $x^2+y^2-ax-y=0$ kör O-tól különböző metszéspontja az OF parabolaívre esik. Ilyen a számokra tehát $\sqrt[3]{a}$ az OF parabolaív felhasználásával szerkeszthető, de $a>f^3$

számokra is, mert akkor van olyan racionális b szám, hogy

$$\frac{a}{b^3} = c < f^3 \quad \text{és így} \quad \sqrt[3]{c} \quad \text{és vele} \quad \sqrt[3]{a} = b\sqrt[3]{c} \text{ is szerkeszthető.}$$

Szögharmadolást Descartes végzett parabolával, s ő vette észre, hogy az egész parabola helyett egy darabja is elég a szerkesztés elvégzéséhez.

A szabályos hétszög középponti szöge cosinusának kétszerese eleget tesz az

$$(x^3+x^2-2x-1)(x-1)=x^4-3x^2+x+1=0$$

egyenletnek. Ennek gyökei az $y=x^2$ parabola és az $E=(1,1)$ ponton átmenő

$$x^2+y^2+x-4y+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2-\frac{13}{4} = 0$$

kör metszéspontjainak az abszcisszáival egyenlők. A két görbe két pontban metszi egymást, az E-től különböző metszéspont abszcisszája $2\cos\frac{2\pi}{7}$. Ebből megszerkeszthető a szabályos hétszög középponti szöge és ezzel azután bármely körbe írt szabályos hétszög.

2. Az $xy=1$ *egyenlő szárú hiperbola* felhasználásával is könnyű harmad- és negyedfokú egyenletek gyökeit körző és vonalzó segítségével megszerkeszteni.

Kezdjük az

$$x^3+px+q=0$$

harmadfokú egyenlettel (ahol p és q valós együtthatók, $q\neq 0$). Ennek gyökei eleget tesznek az

$$(x^3+px+q)\left(x+\frac{1}{q}\right) = x^4+\frac{1}{q}x^3+px^2+\left(q+\frac{p}{q}\right)x+1 = 0$$

egyenletnek is. Utóbbinak gyökei viszont egyenlők az $xy=1$ hiperbola és a $\left(-\frac{1}{q}, -q\right)$ ponton átmenő

$$x^2+y^2+\frac{1}{q}x+\left(q+\frac{p}{q}\right)y+p = 0$$

kör metszéspontjainak az abszcisszáival. Ezt azonnal beláthatjuk, ha a kapott negyedfokú egyenletet x^2-tel végigosztjuk és $\frac{1}{x}$ helyébe y-t helyettesítünk.

Például az

$$x^3-a=0 \qquad (a \text{ valós, } a\neq 0)$$

egyenlet $x=\sqrt[3]{a}$ valós gyökét megkaphatjuk mint az $xy=1$ hiperbola és az

$$x^2+y^2-\frac{1}{a}x-ay=0$$

kör egyik $\left(\text{ti. az } A=\left(\frac{1}{a},\, a\right) \text{ ponttól különböző}\right)$ metszéspontjának az abszcisszáját.

Tekintsük most az

$$f(x)\equiv x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

valós együtthatós, negyedfokú egyenletet. Ha $s=1$, akkor az előbbi esethez hasonló módon beláthatjuk, hogy a gyökök az $xy=1$ hiperbola és az

$$x^2+y^2+px+ry+q=0$$

kör metszéspontjainak abszcisszáival egyenlők.

Az $s\neq 1$ esetet az előbbi speciális esetre könnyen visszavezethetjük. Ha $s>0$, az $x=cz$ helyettesítést végezzük, ahol $c=\sqrt[4]{s}$ (>0); ugyanis

$$\frac{f(cz)}{s}\equiv z^4+\frac{p}{c}z^3+\frac{q}{c}z^2+\frac{r}{c}z+1=0.$$

Ha $s\leqq 0$, akkor először keresünk egy olyan valós a számot, amelyre $f(a)>0$; könnyen látható, hogy ilyen például az $a=1+|p|+|q|+|r|+|s|$ szám. Az $x=a+x'$ helyettesítéssel egyenletünk az

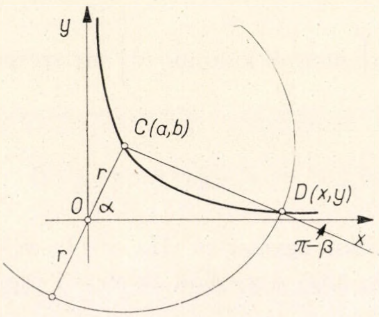
$$f(a+x')\equiv x'^4+Px'^3+Qx'^2+Rx'+S$$

alakot veszi fel, ahol $S=f(a)>0$ és így az imént már elintézett esetre jutunk.

Az α hegyes szög *harmadolása* körző, vonalzó és az $xy=1$ egyenlő szárú hiperbola felhasználásával a következő közvetlen módon is történhet. Ez a szögharmadolási eljárás Bolyai János hagyatékában talált egyik pársoros följegyzésén alapul. (Bolyai János csak néhány hónappal volt 17 évnél idősebb, amikor ezt a feljegyzést írta.)[36]

[36]) Stäckel Pál, Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. I. rész: A két Bolyai élete és művei. Rados Ignác fordításában a 235. lapon közli Bolyai János cédulájának sorait.

A hiperbola O középpontján át az x tengely pozitív felével α szöget alkotó félegyenest húzunk (70. ábra). Ez a hiperbolát egy $C=(a, b)$ pontban metszi ($ab=1$). Írjunk C körül $2r$ sugárral K kört, ahol $r=\overline{OC}$. A K kör az α szög terében a hiperbolát olyan D pontban metszi, hogy a CD félegyenes az x-tengely pozitív felével $\pi-\beta=\frac{\alpha}{3}$ szöget alkot.



70. ábra

Valóban, a $C=(a, b)$ és a $D=(x, y)$ pontok koordinátáira a következő összefüggések érvényesek:

$$b=a \operatorname{tg} \alpha, \quad a=r \cos \alpha, \quad x=a+2r \cos \beta, \quad y=b-2r \sin \beta,$$

$$xy-ab=(a+2r \cos \beta)(b-2r \sin \beta)-ab=$$

$$=2r(b \cos \beta-a \sin \beta)-4r^2 \sin \beta \cos \beta=0,$$

tehát

$$b \cos \beta-a \sin \beta=r \sin 2\beta.$$

Ha ezt az egyenletet r-rel végigosztjuk és tekintetbe vesszük, hogy $\frac{a}{r}=\cos \alpha$ és $\frac{b}{r}=\frac{a}{r} \operatorname{tg} \alpha=\sin \alpha$, kapjuk, hogy

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin 2\beta \quad \text{és így} \quad \alpha=3\beta,$$

amint állítottuk.

Megjegyzések. A K kör a hiperbolát még egy, az első koordinátanegyedbe eső pontban metszi, legyen ez D'. Az előbbi meggondolással beláthatjuk, hogy az OC, ill. CD' félegyenesnek az y tengellyel alkotott $\alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha$, ill. β' szögére szintén $\alpha'=3\beta'$.

Az, hogy az előbbi szerkesztésben hegyesszögekre szorítkoztunk, nem jelent lényeges megszorítást, hiszen az α hegyesszög harmadrészének ismeretében

$\pi-\alpha$ és $\pi+\alpha$ harmadolása már elemi szerkesztéssel történhet. Hasonló okokból elegendő az is, ha a félderékszögnél nem nagyobb szögekre szorítkozunk. Egy ilyen α szög harmadolására az $xy=1$ egyenlő szárú hiperbolával szerkesztett C és D pont a hiperbolának $C_0=(1, 1)$ csúcsából kiinduló azon a H_1 félágán van, amely pontjainak abszcisszái 1-nél nem kisebbek. Félderékszögnél nem nagyobb hegyesszögek harmadolását el tudjuk tehát végezni a hiperbola H_1 félágának ismeretében. De még ez a (végtelenbe nyúló) félág sem szükséges teljes egészében. Tekintsük ui. H_1-nek azt a Q pontját, amelyben H_1-et az O pont körüli, $3\cdot\overline{OC_0}$ sugarú kör metszi. Ha a félderékszög fenti módon való harmadolásakor megszerkesztett D pontot D_0-lal jelöljük, D_0 a C_0Q hiperbolaív belsejében fekszik. Ez abból következik, hogy

$$\overline{OD_0}<\overline{OC_0}+\overline{C_0D_0}=\overline{OC_0}+2\cdot\overline{OC_0}=3\cdot\overline{OC_0}=\overline{OQ}$$

és itt biztosan egyenlőtlenség áll fenn, hiszen az O, C_0, D_0 pontok nem lehetnek kollineárisak (ui. a hiperbola középpontjából kiinduló félegyenes a hiperbolát nem metszheti két pontban). Ha α a félderékszögnél csak kevéssel kisebb, akkor a hozzá tartozó D pont még szintén a C_0Q hiperbolaívre esik és így α harmadolását a C_0Q hiperbolaív segítségével elvégezhetjük. Ha pedig α a félderékszögnél annyival kisebb, hogy nem felel meg az előbbi feltételnek, akkor meghatározunk hozzá egy elemi szerkesztéssel harmadolható

$$\omega=\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_k\frac{\pi}{2^k}\qquad(\varepsilon_k=1 \text{ vagy } 0)$$

szöget úgy, hogy az $\alpha'=\alpha+\omega$ szög a félderékszög kívánt közelségében levő hegyesszög legyen; ezt a C_0Q hiperbolaív felhasználásával harmadolva, α harmadrésze az $\alpha/3=\alpha'/3-\omega/3$ összefüggés alapján elemien adódik.

Ezzel igazoltuk, hogy az $xy=1$ egyenlő szárú hiperbola C_0Q ívének ismeretében bármely szöget körzővel és vonalzóval harmadolhatunk.

Szabályos hétszög középponti szöge cosinusának kétszereséről tudjuk, hogy az

$$(x^3+x^2-2x-1)(x-1)\equiv x^4-3x^2+x+1=0$$

egyenletnek 1-től különböző, pozitív gyöke. A fentiek szerint ($p=0, q=-3$, $r=1$, $s=1$ eset) ezt az x_0 gyököt a következőképpen kaphatjuk meg: Vesszük az $xy=1$ egyenlő szárú hiperbolát és az

$$x^2+y^2+y-3\equiv x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}=0$$

kört. E két görbevonalnak az első koordinátanegyedben két metszéspontja van: az (1, 1) pont és még egy pont, utóbbinak az abszcisszája a keresett x_0-lal egyenlő. Ennek az abszcisszának a fele tehát $\cos\frac{2\pi}{7}$ -tel egyenlő, amiből azután a szabályos hétszög megszerkeszthető.

Megrajzolt egyenlő szárú hiperbola segítségével könnyű *háromszög szerkesztése a és b oldalából és γ és β szögének $\gamma-\beta=\delta$ különbségéből.*

Az *ABC* háromszög *C* csúcsából kiinduló magasság hossza

$$b\sin\alpha = a\sin\beta = a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = a\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right) =$$
$$= a\cos\frac{\delta+\alpha}{2}$$

és így α eleget tesz az

$$a\cos\frac{\delta+\alpha}{2} = a\left(\cos\frac{\delta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2b\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

vagyis az

$$\frac{a\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{a\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2b$$

egyenletnek.

Ha

$$2b\cos\frac{\alpha}{2} = x \quad \text{és} \quad 2b\sin\frac{\alpha}{2} = y,$$

akkor x és y eleget tesz a

$$-\frac{a\sin\frac{\delta}{2}}{x}+\frac{a\cos\frac{\delta}{2}}{y} = 1 \quad \text{és} \quad x^2+y^2 = 4b^2$$

egyenletnek. Az (x, y) pont tehát egy hiperbola és egy kör metszéspontja. A két görbe metszéspontjainak abszcisszái az $x=2b\cos\frac{\alpha}{2}$ egyenlettel meghatározzák a feladatnak megfelelő α szögeket és velük a megfelelő *ABC* háromszögeket.

A hiperbola egyenletét az

$$xy-a\cos\frac{\delta}{2}\cdot x+a\sin\frac{\delta}{2}\cdot y = 0,$$

vagyis az

$$\left(x+a\sin\frac{\delta}{2}\right)\left(y-a\cos\frac{\delta}{2}\right)=a^2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}=\frac{a^2}{2}\sin\delta$$

alakban is felírhatjuk.

A feladatnak ugyanazok az α szögek a megoldásai, ha $\delta(>0)$ változatlanul tartásakor a-t λa-val és b-t λb-vel helyettesítjük, ahol λ akármely pozitív szám lehet. Ha λ-t úgy választjuk meg, hogy $\frac{\lambda^2}{2}a^2\sin\delta=1$ legyen, akkor a szóban forgó hiperbola az $xy=1$ hiperbola eltolásával származik. Az első hiperbolának az $x^2+y^2\equiv 4b^2$ körrel való metszéspontjai az $xy=1$ hiperbolának a $2\lambda b$ sugarú és $\left(-a\lambda\sin\frac{\beta}{2}, a\lambda\cos\frac{\beta}{2}\right)$ középpontú körrel való metszéspontjaiból könnyen szerkeszthetők. A feladat tehát a megrajzolt $xy=1$ hiperbolával végrehajtható.

34. §. ELLIPSZISKÖRZŐ. KÚPSZELETKÖRZŐ

Smith és Kortum tétele szerint bármely köbös feladatot körtől különböző kúpszelet felhasználásával körzővel és vonalzóval meg lehet oldani. A kúpszeletek közül különösen ellipszis rajzolására van többféle rajzeszköz. Az ellipsziskörzők az ellipszis különböző jellemző tulajdonságain alapulnak.

Leonardo da Vinci (1452—1519) ellipsziskörzőjének alapgondolata a következő:

Ha a normavonalzó AB alapszakaszának A, ill. B végpontja O középpontú derékszögű koordinátarendszer y-, ill. x-tengelyén mozog, akkor a vonalzónak egy P pontja eközben O középpontú ellipszist ír le. Ennek az ellipszisnek egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

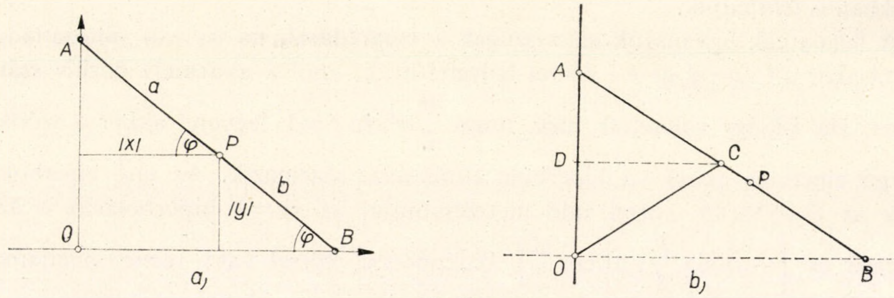
ahol a, ill. b P távolsága A-tól, ill. B-től.

Ha ugyanis $P=(x, y)$ és a BA félegyenes az x tengely egyik irányával φ hegyes szöget alkot, akkor (71a ábra)

$$|x|=a\cos\varphi,\quad |y|=b\sin\varphi.$$

Amíg a normavonalzó AB alapszakaszának végpontjai a koordinátatengelyeken mozognak, az AB szakasz C felezőpontja kört ír le. Ennek a körnek sugara OC. Thalész tétele miatt O az AB átmérőjű kör pontja (71b ábra) és így $\overline{OC}=\overline{AC}=\overline{BC}$. Ebből következik egy ellipsziskörző következő szerkezete:

Ha az $\overline{AB}$ szakaszhoz C felezőpontjában az $\overline{AB}$ szakasz felével egyenlő $\overline{CO}$ szakaszt csuklóval kapcsolunk és ha az A pontot O-n átmenő y egyenesen mozgatjuk, akkor az AB egyenes egy P pontja O középpontú és y tengelyű ellipszisen mozog.

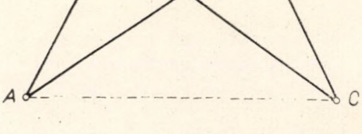


71. ábra

Az AOC egyenlő szárú háromszög CD magassága felezi a háromszög $\overline{AO}$ alapját, a CD egyenes felezi az AOB háromszög $\overline{AO}$ és $\overline{AB}$ oldalát, ezért a $\overline{BO}$ egyenes párhuzamos a CD egyenessel, s így merőleges az y egyenesre. Az $\overline{AB}$ szakasz végpontjai egymásra merőlegeseken mozognak, tehát az előbbiek szerint az AB egyenes bármely P pontja A mozgása közben ellipszisen mozog.

Az *ellenparallelogramma* tulajdonságain alapszik R. C. Yates ellipsziskörzője.[37])

Az $ABCD$ négyszöget ellenparallelogrammának nevezzük, ha szemközt fekvő $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, valamint $\overline{BC}$ és $\overline{AD}$ oldalai egyenlők, de a szemközt fekvő egyik oldalpárnak van metszéspontja (72. ábra).



72. ábra

Ha az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szemközt fekvő oldalak metszik egymást egy P pontban, akkor az ABC és ACD, továbbá a BDA és BDC háromszögek egybevágósága miatt az ACP és BDP háromszögek egyenlő szárúak és ezért

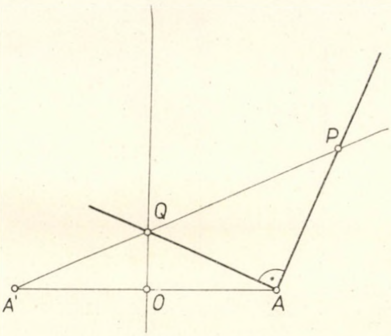
$$\overline{AP} + \overline{DP} = \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB} = \overline{CD} = 2a.$$

[37]) R. C. Yates, The description of surface of constant curvature. Amer. Math. Monthly 1931; Hilbert—Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie (1932), 249.

Ha az $ABCD$ ellenparallelogramma csuklós négyszög, akkor az A és D csukló rögzítésekor a csuklós négyszög többi három karjának elmozdításakor a P pont A és D gyújtóponttal és $\overline{AB}$ hosszúságú főtengellyel bíró ellipszisen mozog.

Másféle ellipsziskörző is van, más kúpszelet rajzolására is van kúpszeletkörző. Bármely kúpszelet rajzolására alkalmas W. Jörges készüléke. Alapgondolata a kúpszelet projektív származtatása egy síkban fekvő két projektív sugársorral. Ezt a kúpszeletvonalzót öt ponton átmenő kúpszelet rajzolására lehet használni. Az öt pont helyzete szerint a kúpszelet lehet ellipszis, hiperbola vagy parabola.

Két projektív sugársor képződménye hiperbola, ha a két sugársorban van két pár megfelelő párhuzamos sugár, ezek a hiperbola aszimptotáival párhuzamosak. Ha a két párhuzamos sugárpár egymásra merőleges, akkor egyenlő oldalú hiperbolát kapunk. B. J. Hasius német matematikus (1707) szerkesztett AA' főtengelyű egyenlő oldalú hiperbola rajzolására készüléket. A csúcsú derékszög forog A körül. A derékszög egyik szára a hiperbola melléktengelyét, az AA' szakasz középegyenesét Q pontban metszi, a másik szárának és az AQ egyenesnek P metszéspontja egyenlő oldalú hiperbolán mozog (73. ábra).



73. ábra

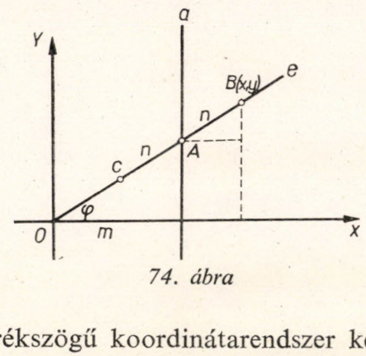
A szerkesztés szerint az a vonatkozás, amely az $A'Q$ sugárnak az AP sugarat felelteti meg, projektív, mert projektív az a két vonatkozás is, amely az $A'Q$ sugárnak az AQ sugarat illetőleg az AQ sugárnak a reá merőleges AP sugarat feleteti meg. Ha az $A'QO$ (derékszögű) háromszög egyenlő szárú, akkor az AQO háromszög is ilyen. Ekkor az $A'Q$ és AP sugár párhuzamos. E két sugárnak az AA' főtengelyre vonatkozó tükörképe is párhuzamos és a két sugársorban megfelelő sugár. P tehát egyenlő oldalú hiperbolát ír le.

Parabolát integráffal is rajzolhatunk. Az integráf olyan készülék, amely az az $y=f(x)$ görbéhez az $y=g(x)=\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi$ görbét megrajzolja. Az $y=2x$ egyeneshez tehát az integráf az $y=x^2$ parabolát rajzolja.

Nikomédész görög matematikus (kb. 2100—2200 évvel ezelőtt) a betolás elvégzésének megkönnyítésére föltalálta a kagylóvonalat, konkhoiszt és annak rajzolására egyszerű rajzeszközt, konkhoiszkörzőt készített.

A kagylóvonal Newton szerint a körön kívül legkönnyebben rajzolható görbe, felhasználása a kubikus szerkesztések végrehajtását megkönnyíti és meggyorsítja.

A kagylóvonal értelmezésére fölveszünk a síkban egy *a alapegyenest*, egy rajta kívül fekvő O pontot, a *pólust*, és egy *n alapszakaszt*. Ha valamely O-n átmenő egyenes az a alapegyenest A-ban metszi és ha e-n B és C olyan pontok, hogy $\overline{AC}=\overline{AB}=n$ és B az e egyenes O-t nem tartalmazó, C pedig az O-t tartalmazó oldalán van, akkor az e egyenes O körüli forgása közben B a kagylóvonal első ágát, C pedig a második ágát írja le. A két ág együtt alkot egy teljes kagylóvonalat és az alapegyenes ellenkező oldalán mindkettő aszimptotikusan közeledik az alapegyeneshez.



74. ábra

Ha az O pólus a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontja, az x tengely O-ból az alapegyenesre bocsátott merőleges egyenes és ha m O távolsága a-tól, akkor az x tengellyel $\varphi(0<\varphi<\pi)$ szöget alkotó e egyenes $B=(x, y)$ pontjára (74. ábra)

$$\overline{OB} = r = \overline{OA}+\overline{AB} = \frac{m}{\cos\varphi}+n$$

és

$$x = m+n\cos\varphi \quad \text{és} \quad y = m\operatorname{tg}\varphi+n\sin\varphi.$$

Ezekből

$$(x-m)^2 = n^2\cos^2\varphi, \quad x^2+y^2 =$$

$$= m^2+2mn\cos\varphi+n^2\cos^2\varphi+m^2\operatorname{tg}^2\varphi+2mn\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}+n^2\sin^2\varphi =$$

$$= \frac{m^2}{\cos^2\varphi}+\frac{2mn}{\cos\varphi}+n^2$$

és így

$$(x^2+y^2)(x-m)^2=n^2(m+n\cos\varphi)^2=n^2x^2.$$

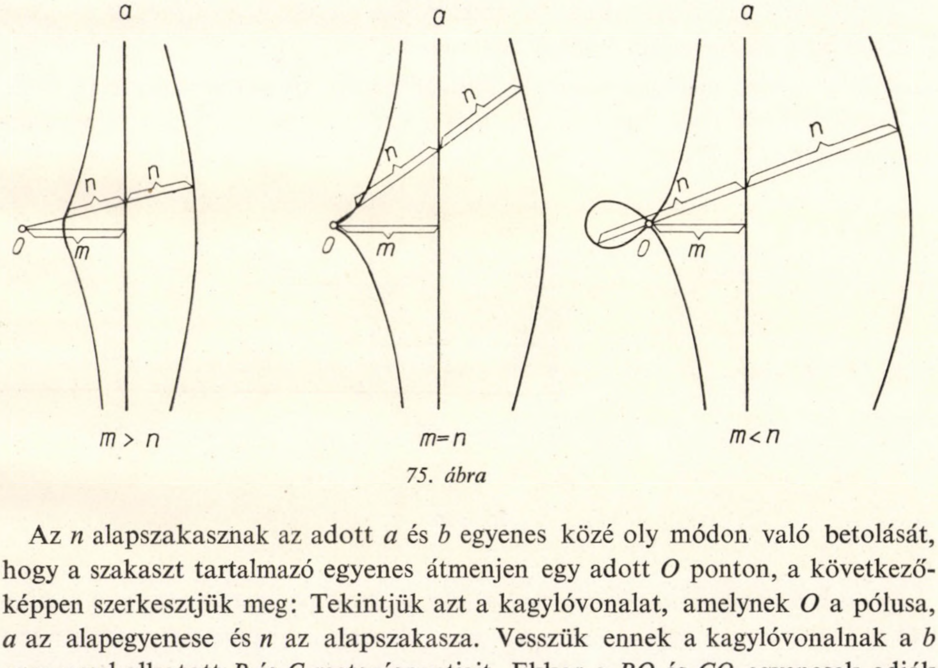
Ennek az egyenletnek tesznek eleget a kagylóvonal második ága C pontjainak koordinátái is, amiről könnyű meggyőződni. Ekkor ugyanis

$$\overline{OC}=\overline{OA}-\overline{AC}=\frac{m}{\cos\varphi}-n,$$

és az előzőhöz hasonlóan látható, hogy a C pont koordinátái is az

$$(x^2+y^2)(x-m)^2-n^2x^2=0$$

egyenletnek tesznek eleget, a kagylóvonal tehát negyedrendű görbe. Az O pólus a görbének kettőspontja, mégpedig a második ág izolált pontja, csomópontja, ill. csúcspontja aszerint, amint $m>n$, $m<n$, ill. $m=n$. A kagylógörbe három alakját a 75. ábra mutatja.



75. ábra

Az n alapszakasznak az adott a és b egyenes közé oly módon való betolását, hogy a szakaszt tartalmazó egyenes átmenjen egy adott O ponton, a következőképpen szerkesztjük meg: Tekintjük azt a kagylóvonalat, amelynek O a pólusa, a az alapegyenese és n az alapszakasza. Vesszük ennek a kagylóvonalnak a b egyenessel alkotott B és C metszéspontjait. Ekkor a BO és CO egyenesek adják a feladat két megoldását.

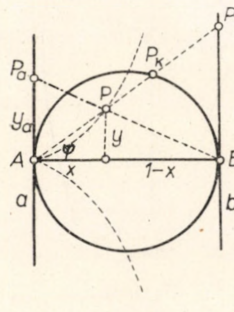
Nikomédész konkhoiszkörzője három vonalzóból áll. Két nem széles vonalzó közepén egy a, ill. e egyenes egy szakaszán ki van vágva. Az első kivágásos vonalzóhoz, mint a T betű vízszintes szárához, merőlegesen és szilárdan csatlakozik a harmadik, tömör vonalzó, mint a T függőleges szára. A második átvágásos vonalzó O pontban a tömör vonalzóhoz van szögezve, úgy hogy O körül foroghat, és O az e bevágásban csúszhat. Az e kivágás meghosszabbításának egy A pontjában megerősített szeg az a kivágásban mozoghat. A második vonalzó e egyenese ezért O körül forog, miközben A pontja az a alapegyenesen mozog. A második vonalzó e egyenesén A-tól n távolságban ceruzát erősítünk meg. A vonalzó O körüli forgásakor a ceruza O pólusú a alapegyenesű és n alapszakaszú kagylóvonal egyik ágán mozog.

36. § HARMADRENDŰ GÖRBÉK

Ha az $y=x^3$ harmadfokú parabola meg van rajzolva és ha a derékszögű koordinátarendszer egységnégyzetének szögpontjai, vagyis a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ *és az* $(1, 0)$ *koordinátákkal bíró pontok meg vannak adva, akkor bármely valós együtthatójú harmadfokú egyenlet valós gyökeit vonalzóval lehet szerkeszteni.*

Az $x^3+px+q=0$ harmadfokú egyenlet gyökei ugyanis az $y=x^3$ és az $y+px+$ $+q=0$ egyenes metszéspontjainak abszcisszái.

A régi görög matematikusok a harmadrendű görbék közül szerkesztésre a Dioklész-féle cisszoiszt használták fel. Ezt a görbét következőképp származtathatjuk (76. ábra).



76. ábra

Egy a és b párhuzamos egyenes egy K kört A, ill. B pontban érint. Az A ponton átmenő tetszőleges e egyenesnek a K körrel, illetőleg a b egyenessel való metszéspontját P_k-val, illetőleg P_b-vel jelöljük. Az $\overline{AP_b}$ szakasznak az a P pontja, amelyre vonatkozólag $\overline{AP}=\overline{P_kP_b}=\overline{AP_b}-\overline{AP_k}$, a cisszoisznak pontja. Az e egyenesnek A körül való forgatásával megkapjuk a cisszoisz valamennyi pontját. A cisszoisznak az A pontban csúcspontja van.

Ha az a egyenest y-tengelynek, az A pontot kezdőpontnak és az AB szakaszt egységnek választjuk, akkor a cisszoisz egyenletét a következőképp írhatjuk:

$$x(x^2+y^2) = y^2, \quad \text{vagy} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y}{1-x}, \quad \text{vagy} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x}{1-x}.$$

Ha ugyanis az AP félegyenes az x tengely pozitív felével φ szöget alkot, akkor

$$r = \overline{AP} = \overline{AP_b} - \overline{AP_k} = \frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

és így

$$r\cos\varphi \cdot r^2 = r^2\sin^2\varphi, \quad \text{vagyis} \quad x(x^2+y^2) = y^2.$$

Ezzel a görbével az y_a számból könnyen lehet köbgyököt vonni. Ha ugyanis $P_a = (0, y_a)$, ha továbbá P jelöli a BP_a egyenesnek a cisszoisszal és P_b az AP egyenesnek a b egyenessel való metszéspontját, és ha végül $P = (x, y)$ és $P_b = (1, y_b)$, akkor $y_b = \sqrt[3]{y_a}$, mivel

$$\frac{y_a}{1} = \frac{y}{1-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = y_b^3, \quad \text{mert} \quad \frac{y}{x} = \frac{y_b}{1}.$$

A cisszoiszgörbe megrajzolására Newton eszközt, cisszoiszkörzőt szerkesztett.

Ha meg van rajzolva az $x(x^2+y^2) = y^2$ *cisszoisz és meg van adva a koordinátarendszer* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ *és* $(1, 0)$ *pontja, akkor bármely harmadfokú (valós együtthatójú) egyenlet valós gyökeit vonalzóval lehet szerkeszteni.*

Az $f(x) = x^3 + px + q = 0$ egyenlet megoldása végett meghatározzuk a $qy + (p-1)x + 1 = 0$ egyenesnek a cisszoisszal való metszéspontjait és ezeket az A pontból a b egyenesre vetítjük. A kapott pontok ordinátáinak reciprok értékei az $f(x) = 0$ egyenlet gyökei. A reciprok értékek az egységnégyzet ismerete alapján vonalzóval szerkeszthetők.

Ha ugyanis $P = (x, y)$ egy metszéspont, akkor P-nek A-ból a b egyenesre való vetülete olyan P_b pont, amelynek ordinátája $t = \frac{y}{x}$. Ha az egyenes egyenletét elosztjuk $(1-x)$-szel és felhasználjuk a cisszoisz egyenletéből kapott

$$\frac{y}{1-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = t^3 \quad \text{és} \quad \frac{x}{1-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = t^2$$

értékeket, akkor t részére a

$$qt^3 + pt^2 + 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek gyökei az $f(x)=0$ egyenlet gyökeinek reciprok értékei.[38])

Ha az $y=x^3$ görbe meg van rajzolva, akkor körző és vonalzó segítségével bizonyos hatodfokú egyenletek gyökeit is megszerkeszthetjük. Az

$$x^2+y^2+px+qy+r = 0$$

kör és az $y=x^3$ görbe metszéspontjainak abszcisszái ugyanis

$$x^6+qx^3+x^2+px+r = 0$$

egyenlet gyökei.

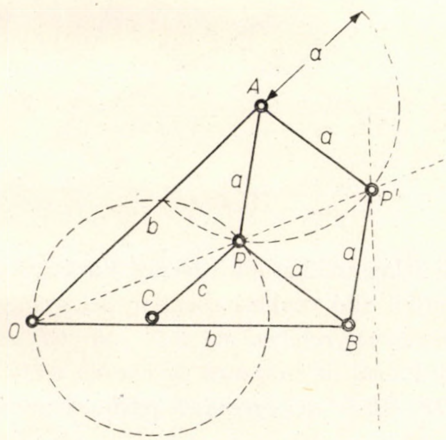
[38]) Egyéb harmadrendű görbék felhasználását is tárgyalja F. London a Zeitschrift für Math. und Phys. 41. kötetében (1896), 129. Lásd Vahlen könyvét, 96—101. lap. Az erre a célra felhasznált harmadrendű görbék mind unikurzálisak, vagy más néven racionálisak. Az ilyen görbéket jellemzi az a tulajdonságuk, hogy koordinátáik egy paraméter racionális függvényeiképpen állíthatók elő. T. Kubota (Tôhoku Math. Journal 5. k. (1914), 29.) kimutatta azt, hogy bármely harmad- vagy negyedfokú szerkesztési feladat körzővel és vonalzóval elvégezhető akkor, ha meg van rajzolva egy negyedrendű unikurzális (racionális) síkgörbe.

VI. CSUKLÓS SZERKEZETEK. GEOMETROGRÁFIA

37. §. EGYENES VONAL HÚZÁSA CSUKLÓS SZERKEZETTEL

A körző és vonalzó közül elméleti szempontból csak a körző pontos rajzeszköz, mert szerkezeténél fogva a vele leírt síkgörbének bármely pontja a sík egy pontjától egyenlő távolságra van, a görbe tehát kör. A vonalzó akkor volna elméleti szempontból a körzővel egyenlő értékű rajzeszköz, ha egyenes húzására ennek valamelyik jellemző tulajdonságát használná fel (pl. azt, hogy az egyenes szakasz két pont legrövidebb összekötő vonala, vagy azt, hogy az egyenes a síkban azoknak a pontoknak geometriai helye, amelyek két rögzített ponttól egyenlő távolságra vannak). Amikor azonban vonalzóval egyenest húzunk, akkor az egyenest nem valamelyik jellemző tulajdonsága szolgáltatja, hanem a vonalzó egyenesnek föltételezett éle. Ebből a szempontból a vonalzó használata hasonlít egy kör alakú éremnek kör leírására való használatához.

Olyan műszer, amely az egyenes valamelyik jellemző tulajdonságát használja fel egyenes szakasz leírására, csak 1864 óta ismeretes. Ez a műszer Peaucellier francia katonatiszt inverzor nevű készüléke (77. ábra).



77. ábra

A Peaucellier-féle inverzor négy, egyenkint *a* hosszúságú karját csuklószerkezet egy *APBP'* rombuszba foglalja össze. A rombusz szemközt fekvő *A* és B csúcspontjában szintén csuklóval csatlakozik a rombusz síkjába eső $\overline{OA} = \overline{OB} = b(>a)$ kar és az O pontban ugyanígy egyesül.

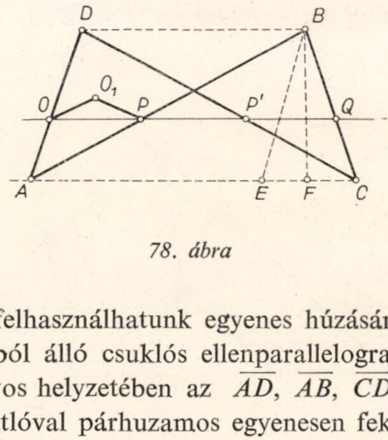
Az eszköz bármely állásában az O, P és P' pont egy egyenesen, az AOB szögfelezőjén van. Mivel az O pontnak az A középpontú és a sugarú körre vonatkozó hatványa

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = (b+a)(b-a) = b^2-a^2 = R^2,$$

azért az O pont rögzítésekor A, B, P és P' bármely lehetséges helyzetében P és P' egymásnak tükörképe az O középpontú és R sugarú K körre vonatkozólag.

Az O pont rögzítésekor P és P' az O középpontú $b+a$ és $b-a$ sugarú körgyűrű bármely pontjába eljuttatható. Ebben a körgyűrűben fekvő bármely vonalnak tehát meg lehet rajzolni az inverzorral a K körre vonatkozó tükörképét. Ha ugyanis P egy ilyen vonalon végighalad, akkor P' ezalatt a vona tükörképét írja le.

Bármely O-n átmenő körnek K-ra vonatkozó tükörképe egyenes. Ha tehát P-t egy c hosszúságú olyan karral, amelynek egyik végpontja P-hez csuklóban kapcsolódik, a másik végpontja pedig az O ponttól c távolságra eső C pontban rögzítve van, arra kényszerítjük, hogy a C középpontú (O-n átmenő) körön mozogjon, akkor P' egyenes szakaszt ír le. Ha pedig P egyenesen mozog, akkor P' O-n átmenő körön mozog.



78. ábra

Másféle inverzort is felhasználhatunk egyenes húzására, például a Hart-féle inverzort. Ez négy karból álló csuklós ellenparallelogramma. Az $ABCD$ ellenparallelogramma bizonyos helyzetében az $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ és $\overline{CB}$ karokon megjelöljük az AC és BD átlóval párhuzamos egyenesen fekvő O, P, P' és Q pontokat (78. ábra). Az OP, DB és AC egyenesek párhuzamossága miatt

$$\overline{AO} : \overline{OD} = \overline{AP} : \overline{PB},$$

és hasonlóképp

$$\overline{AO} : \overline{OD} = \overline{CP'} : \overline{P'D}, \quad \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{CQ} : \overline{QB} \quad \text{és} \quad \overline{CQ} : \overline{QB} = \overline{CP'} : \overline{P'D}.$$

A csuklós négyszög mozgatásakor ezek az arányok nem változnak. Ebből következik, hogy az OP, OP', PQ és QP' egyenesek az AC és BD átlókkal párhuzamosak, s ezért O, P, P' és Q pontok kollineárisak maradnak.

Vegyük továbbá észre, hogy $\overline{OP}:\overline{DB}=\overline{AO}:\overline{AD}$ és $\overline{OP'}:\overline{AC}=\overline{DO}:\overline{DA}$; ebből

$$\overline{OP}\cdot\overline{AD}=\overline{AO}\cdot\overline{DB} \quad \text{és} \quad \overline{OP'}\cdot\overline{DA}=\overline{DO}\cdot\overline{AC}.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak összeszorzása és $\overline{AD}^2$-tel való osztás után kapjuk, hogy

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{AD}^2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{DO}.$$

Az ábrán $BE \parallel DA$, $BF \perp AC$ és

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=(\overline{AF}+\overline{FC})(\overline{AF}-\overline{FC})=\overline{AF}^2-\overline{FC}^2,$$

mert

$$\overline{BD}=\overline{AE}=\overline{AF}-\overline{EF}=\overline{AF}-\overline{FC}.$$

Az ABF, ill. BCF derékszögű háromszögben

$$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=\overline{AB}^2 \quad \text{ill.} \quad \overline{FC}^2+\overline{BF}^2=\overline{BC}^2$$

és így

$$\overline{AF}^2-\overline{FC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2.$$

Ezek alapján

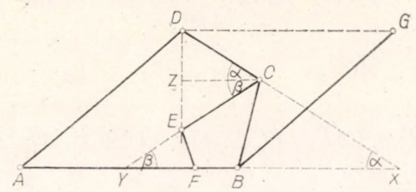
$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\frac{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{\overline{AD}^2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OD}.$$

A jobb oldal állandó, mert a tört az ellenparallelogramma oldalaival, az $\overline{AO}\cdot\overline{DO}$ szorzat pedig az O pont fölvételével meghatározott. Jelöljük ennek a (pozitív) állandónak a (pozitív) négyzetgyökét R-rel. Ha az O pontot rögzítjük, akkor az ellenparallelogrammának a síkon való mozgatásainál P és P' az O középpontú R sugarú körre vonatkozólag egymásnak tükörképei. Ha P-t és a rögzített O pontot csuklós karokkal úgy kapcsoljuk össze, hogy a csuklós négyszög mozgatásai alatt P egy rögzített O_1 középpontú, O-n átmenő körön maradjon, akkor a pont ennek a körnek a tükörképén, vagyis egy egyenesen fog mozogni.

Hart inverzorával így valóban lehet egyenest húzni.

Kempe kettősdeltoidja olyan csuklós szerkezet, amely egyenest körre vonatkozó tükrözés nélkül ír le (79. ábra). A szerkezet az $ABCD$ és a $BCEF$ hasonló és egymáshoz kapcsolt csuklós konvex deltoidokból áll, amelyeknek $\overline{BC}$ közös karjuk: $\overline{BC}$ az első deltoid egyik kisebb oldala, a második deltoid egyik nagyobb oldala. A két deltoidban az $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ és $\overline{CE}$ oldalak egyenlők és a D, B, E mellett fekvő szögek is egyenlők. A B mellett fekvő szögek egyezése miatt a két deltoid hasonlóságának föltétele az $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{EF}$ arány.

A két hasonló deltoid szemközt fekvő oldalainak egyenesei egyenlő szögeket alkotnak, azaz az AB egyenesnek a CD, ill. CE egyenessel alkotott α ill. β szöge egyenlő. C-ből a BA félegyenessel párhuzamosan húzott CZ félegyenes a DCE szöget felezi, mert mint megfelelő, ill. belső váltószögpár $DCZ\sphericalangle=\alpha$ és $ECZ\sphericalangle=\beta$, $\overline{CZ}$ tehát a DEC egyenlőszárú háromszög magassága, ezért a DE egyenes merőleges a CZ egyenesre és a vele párhuzamos AB egyenesre.



79. ábra

Ha tehát a D pontot rögzítjük és AB csak önmagával párhuzamosan mozoghat, akkor a DE egyenes AB-re mindig merőleges és így az E pont az AB egyenesre merőleges egyenest ír le. Az AB karnak önmagával párhuzamos mozgását úgy biztosítjuk, hogy a kettősdeltoidhoz B-ben csuklóval egy, az AB és AD karral egyenlő BG kart csatolunk és ennek G végpontját olyan helyzetben rögzítjük, amelyben $\overline{DG}=\overline{AB}$.

38. § GEOMETROGRAFIKUS KÉPLET. A GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK EGYSZERŰSÉGE

A geometrográfia a végrehajtott elemi szerkesztések összehasonlításával foglalkozik. A geometriai szerkesztések körzővel és vonalzóval való elvégzése a következő öt elemi művelettel történik:

E_0: a vonalzónak adott ponthoz való helyezésével,

E : egyenes húzásával,

K_0: a körző valamelyik hegyének adott pontba, vagy adott vonal egy tetszőleges pontjába való helyezésével,

K : kör lerajzolásával,

V : a vonalzó és körző használatának szerkesztés közben történő felcserélésével, felváltásával.

Ennek megfelelően körzővel és vonalzóval véghezvitt bármely geometriai szerkesztéshez hozzárendelhető egy

$$e_0 E_0 + eE + k_0 K_0 + kK + vV$$

alakú szimbolikus összeg, a szerkesztés geometrografikus képlete, amelyben az e_0, e, k_0, k és v egész szám azt jelenti, hogy a szerkesztés elvégzése közben az illető elemi műveletet hányszor alkalmaztuk.[39])

Egy elvégzett elemi szerkesztésnek határozott geometrografikus képlete van, de ez a képlet csak a lehető legegyszerűbb esetekben határozza meg a szerkesztést, mivel nem ad felvilágosítást arról, hogy az egyes elemi műveleteket miképp és milyen sorrendben alkalmaztuk. Ugyanannak a geometriai feladatnak különböző megoldásaihoz általában különböző geometrografikus képletek tartoznak.

A geometrografikus képletben két vonal (két egyenes, egyenes és kör, két kör, a feladatban előre megrajzolt vonal és egyenes vagy kör) metszéspontjainak meghatározását nem kell figyelembe venni, mivel egy ilyen metszéspont a további szerkesztésben csak E_0 vagy K_0 elemi műveletként szerepelhet. A képletre nézve az is közömbös, hogy a szerkesztés keresztülvitelére előre megrajzolt ábrával (pl. körrel, négyzettel stb.) rendelkezünk-e vagy sem.

A geometrografikus képlet értelmezése szerint két adott ponton átmenő egyenes húzásának $2E_0 + E$, adott pont körül adott ponton átmenő kör vagy körív lerajzolásának pedig $2K_0 + K$ a képlete. Az I. alapszerkesztéshez, vagyis egy-egy pontpárjával megadott két egyenes metszéspontjának vonalzóval való szerkesztéséhez tehát a $4E_0 + 2E$ képlet tartozik. A körzővel és vonalzóval véghezvitt III. és II. alapszerkesztéshez, vagyis adott középpontú és adott ponton átmenő körnek hasonló módon megadott más körrel, illetőleg egy pontpárjával megadott egyenessel való metszéspontjainak meghatározásához a $4K_0 + 2K$, illetőleg a $2E_0 + E + 2K_0 + K + V$ geometrografikus képlet tartozik.

A Mohr—Mascheroni-féle és a Poncelet—Steiner-féle szerkesztések geometrografikus képletében $v = 0$ és ezenkívül $e = 0$, illetőleg $k = 0$. E között a két szélső eset között vannak azok a szerkesztések, amelyekben körzőt és vonalzót korlátozás nélkül használhatunk.

Ha más rajzeszközt is alkalmazunk, akkor az arra vonatkozó új elemi műveleteket is meg kell állapítanunk és azokkal a geometrografikus képletet ki kell egészíteni. Nem kell új elemi műveletet bevezetni párhuzamos élű vonalzó hasz-

[39]) A geometrográfia és a geometrografikus elnevezés E. Lemoine francia matematikustól származik (Géométrographie, Paris 1902). Ő volt az első, aki az elemi szerkesztéseket a bennük előforduló elemi alapműveletek szerint osztályozta. Lemoine különbséget tett olyan két elemi művelet között, amelyben a körző hegyét egy adott pontba, vagy egy adott vonal tetszőleges pontjába kell helyezni, nem vette azonban figyelembe a V elemi műveletet.

nálatakor, ha ennek a vonalzónak egy olyan elhelyezését, amelyben egy éle adott egyenesre esik, vagy pedig egy-egy éle egy-egy adott ponton megy át, $2E_0$ műveletnek tekinthetjük.

Ugyanannak a szerkesztési feladatnak kétféle végrehajtását a hozzájuk tartozó geometrografikus képletek segítségével lehet összehasonlítani. Evégett az öt elemi művelethez egyszerűségük mérlegelése után úgy rendelünk egy-egy pozitív számot, az illető művelet egyszerűségét, hogy egyszerűbb művelethez kisebb szám tartozzék. Ha F_0, E, K_0, K és V jelöli az öt művelet egyszerűségét is, akkor egy szerkesztés geometrografikus képlete mint összeg egy számot értelmez, az illető szerkesztés egyszerűségét. Ugyanannak a szerkesztési feladatnak két megoldása közül azt tekinthetjük egyszerűbbnek, amelynek egyszerűségét kisebb szám értelmezi.

Az egyes elemi műveletek egyszerűségét mérő E_0, E, ... számok megválasztása bizonyos önkényességet rejt magában. Legtermészetesebb, ha valamennyiüket egyenlőnek vesszük fel, pl. 1-nek. Ekkor egy geometriai szerkesztés egyszerűsége a szerkesztés geometrografikus képlete együtthatóinak összegével lesz egyenlő.[40])

[40]) Egy geometriai szerkesztés geometrografikus pontosságán a hozzátartozó képlet e_0 és k_0 együtthatójának összegét értik. Ez az értelmezés föltételezi, hogy csak a vonalzónak és a körzőnek a szükséges helyzetbe hozásakor követhetünk el hibát, az egyenes és a kör leírásakor azonban nem. A vonalzó és körző tökéletlenségei és a ceruzahegy szélessége miatt a velük leírt vonalak csak megközelítései a geometriai egyeneseknek és köröknek. A rajzeszközökkel kapott vonalak szélessége miatt metszéspontjaik is csak megközelítőleg határozhatók meg. A geometrografikus pontosság tehát egészen elméleti fogalom, sokkal inkább önkényes fogalom, mint a geometrografikus egyszerűség fogalma.

A gyakorlati pontosság elmélete a valószínűségszámítás és a hibaelmélet körébe tartozik. Egy szerkesztés gyakorlati pontosságának vizsgálata összefügg az adatok között föllépő olyan összefüggések megállapításával, amelyek teljesülésekor a megoldandó feladatnak végtelen sok megoldása van. Erre nézve jellemző a geodéziában gyakran alkalmazott következő feladat: adva vannak egy háromszög szögpontjai és azok a szögek, amelyekben a háromszög oldalai a sík egy P pontjából látszanak; meg kell határozni P távolságát a háromszög szögpontjaitól. Ennek a feladatnak megoldása határozatlan, ha P a háromszög köré írható körre esik, és gyakorlatilag bizonytalan akkor, ha P ahhoz a körhöz, a geodézia veszélyes köréhez elég közel esik.

Gyakorlati szempontból a vonalzó és a körző használatával járó szerkesztési hibák körülbelül ugyanazok közé a határok közé esnek.

VII. KÖRNÉGYSZÖGESÍTÉS

39. §. A KÖRNÉGYSZÖGESÍTÉS ÉS KÖRKIEGYENESÍTÉS FELADATA

A matematika történetének évezredeken át egyik legnépszerűbb feladata volt a kör négyszögesítése, vagyis olyan négyzet szerkesztése, amelynek területe egy adott r sugarú kör πr^2 területével egyenlő. A kör kiegyenesítése olyan egyenes szakasz szerkesztése, amelynek hossza az r sugarú kör $2\pi r$ kerületével egyenlő. Mindkét feladat tehát visszavezethető az egységszakaszból a π hosszúságú szakasz szerkesztésére.

A feladat történeti fejlődésében három korszakot lehet megkülönböztetni. Az első vagy elemi geometriai korszakban a vizsgálatok célja a kör négyszögesítésének és kiegyenesítésének geometriai szerkesztése, illetőleg az erre vonatkozó törekvés volt. Ez a korszak a differenciál- és integrálszámítás feltalálásáig, a XVII. század második feléig tartott.

A második vagy analitikus korszakban a vizsgálatok célja a π számnak analitikus kifejezésekkel való előállítása volt, végtelen sor, végtelen szorzat, vagy végtelen lánctört alakjában. Ez a korszak a XVIII. század második feléig tartott.

A harmadik vagy kritikus korszak 1766-ban Lambert német matematikus vizsgálataival kezdődött és napjainkig tart. Ez a korszak a π szám természetét vizsgálta. Lambert 1766-ban kimutatta, hogy a π szám és hasonlóképp a természetes logaritmusrendszer e alapszáma irracionális. Legendre francia matematikus a XIX. század elején azt is kimutatta, hogy π^2 is irracionális.

Olyan számot, amely gyöke egy egész együtthatós algebrai egyenletnek, *algebrai számnak* nevezünk. Az olyan szám, amely nem algebrai, vagyis amely egyetlen egész együtthatós algebrai egyenletnek sem gyöke, *transzcendens*.

Már a XVIII. század végén fölmerült az a sejtés, hogy π transzcendens.

Lindemann német matematikusnak sikerült 1882-ben a Mathematische Annalen 20. kötetében „Über die Zahl π" értekezésében először bebizonyítania, hogy *a π szám transzcendens.* Lindemann vizsgálatai összefüggésben vannak Hermite francia matematikusnak 1873-ban megjelent és az e szám transzcendens voltát kimutató dolgozatával.

Lindemann tétele a körnégyszögesítés több ezer éves feladatát véglegesen elintézte, mivel tételéből következik, hogy a körnégyszögesítés nemcsak körzővel és vonalzóval nem végezhető el, hanem akkor sem végezhető el, ha magasabbrendű algebrai görbéket veszünk segítségül.

Lindemann a π szám transzcendens voltát egy általános tétel különös eseteként igazolta.

40. §. LINDEMANN ÁLTALÁNOS TÉTELÉNEK BIZONYÍTÁSA

1. Lindemann tételének Schottky-tól származó bizonyítását fogjuk ismertetni (H. A. Schwarz Festschrift, Berlin 1914).

Az, hogy π nem algebrai szám, azt jelenti, hogy a $\sin x$ függvény zérushelyei között az $x=0$ hely kivételével nincs algebrai szám. A $\sin x$ és hasonlóképp az e^x és a $\cos x$ függvény az

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu e^{\gamma_\nu x}$$

alakú függvények osztályába tartozik, ahol $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ egymástól különböző, $c_1, c_2, \ldots, c_r$ pedig zérustól különböző algebrai számok.

Lindemann általános tétele következőképp fogalmazható: *Bármely $L(x)$ függvényre és zérustól különböző bármely ϱ algebrai számra vonatkozólag*

$$L(\varrho) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu e^{\gamma_\nu \varrho} \neq 0.$$

Ez a tétel következőképp is kifejezhető: *Egy $L(x)$ függvénynek sincs az $x=0$ esetleges zérushely kivételével algebrai zérushelye.*

Minthogy bármely ϱ ($\neq 0$) algebrai számra vonatkozólag az $L(\varrho x) = \bar{L}(x)$ egyenlőséggel értelmezett $\bar{L}(x)$ függvény az $L(x)$ függvények osztályába tartozik, azért Lindemann általános tételének igazolására elég azt kimutatnunk, hogy bármely $L(x)$ függvényre vonatkozólag

$$L(1) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu e^{\gamma_\nu} \neq 0.$$

$L(x)$ transzcendens függvény hatványsora

$$L(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} x^m, \quad \text{ahol} \quad a_m = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \gamma_\nu^m.$$

$L(x)$ csak akkor állandó, ha $r=1$ és $\gamma_1 = 0$. Ha ugyanis $r > 1$ és $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$ volna, akkor $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$ és emiatt $L(x) \equiv 0$ volna, mert $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., ..., $a_r = 0$ a c_ν számokra zérustól különböző determinánsú homogén lineáris egyenletrendszer.

2. Az a_m együtthatók általában irracionális algebrai számok. Az olyan $L(x)$ függvényeket, amelyek hatványsorában az a_m együtthatók mind (racionális) egész számok, Schottky *normafüggvényeknek* nevezi. Ilyen pl. $\sin x$, $\cos x$, e^x.

Normafüggvényeket kapunk a következő módon: Legyen $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ változóknak egész együtthatókkal bíró szimmetrikus polinomja. Végezzük el az $u_\nu = e^{\varkappa_\nu x}(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ helyettesítést és tekintsük az $x, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ számokat független változóknak. A helyettesítés után az S polinom bármely tagja $ae^{\sigma x}$ alakú, ahol a egész szám és σ a $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ változóknak egész együtthatós elsőfokú függvénye, úgyhogy

$$S = \sum_\sigma a\, e^{\sigma x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} x^m, \quad \text{ahol} \quad A_m = \sum_\sigma a \sigma^m.$$

Minthogy S szimmetrikus függvény, azért minden egyes A_m együttható a $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ változóknak egész együtthatós szimmetrikus polinomja. Ha tehát $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ az egész együtthatós

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n = \prod_{\nu=1}^{n} (z - \varkappa_\nu)$$

polinomnak zérushelye, akkor A_m egész szám és $S(x)$ normafüggvény, föltéve, hogy nem tűnik el azonosan.

3. Egy transzcendens egész függvényt akkor nevezünk egy másikkal oszthatónak, ha hányadosuk szintén transzcendens egész függvény.

Bármely $L(x)$ függvény egy normafüggvénynek osztója.

Ez a tétel az $r = 1$ esetre nyilvánvaló. A tételnek az $r > 1$ esetre való kimutatása végett $f(z)$-vel jelölünk egy egész együtthatós és csupa egyszeres zérushellyel bíró olyan polinomot, amelynek $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ zérushelyei. A többi zérushelye legyen $\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \ldots, \gamma_n$. Ha

$$f(z) = mz^n + m_1 z^{n-1} + \ldots + m_n,$$

akkor

$$m^{n-1} f(z) = g(mz) \quad \text{és} \quad g(z) = z^n + m_1 z^{n-1} + m m_2 z^{n-2} + \ldots + m^{n-1} m_n$$

szintén egész együtthatós polinom. Ha $g(z) = (z - \varkappa_1)(z - \varkappa_2) \ldots (z - \varkappa_n)$, akkor $\varkappa_\nu = m\gamma_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\text{Ha } u_\nu = e^{\varkappa_\nu x}, \quad \text{akkor} \quad e^{\gamma_\nu x} = u_\nu^{\frac{1}{m}} \quad \text{és} \quad L(x) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu u_\nu^{\frac{1}{m}}.$$

Legyen $\varphi_\nu(z)$ az az egész együtthatós irreducibilis polinom, amelynek c_ν zérushelye és legyen $\Phi(z)=\varphi_1(z)\cdot\varphi_2(z)\ldots\varphi_r(z)$. A $\Phi(z)$ polinomnak lehetnek többszörös zérushelyei is, de tekintsük zérushelyeit különbözőknek, s közülük minden lehetséges módon ragadjunk ki r számút és helyettesítsük ezekkel minden lehetséges sorrendben az $L(x)$ függvény $c_1, c_2, \ldots, c_r$ együtthatóit. Az így kapott $L(x)$ függvényekben helyettesítsük minden lehetséges módon $u_\nu^{\frac{1}{m}}$-t $\varepsilon^h u_\nu^{\frac{1}{m}}$-val ($\nu=1, 2, \ldots, r$; $h=1, 2, \ldots, m$), ahol $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}$.

Az így kapott $L(x)$ függvények ΠL szorzata szimmetrikus függvénye a $\Phi(z)$ polinom zérushelyeinek és az $u_\nu^{\frac{1}{m}}, \varepsilon u_\nu^{\frac{1}{m}}, \ldots, \varepsilon^{m-1} u_\nu^{\frac{1}{m}}$ ($\nu=1, 2, \ldots, r$) változóknak. Ebből következik, hogy ΠL racionális együtthatójú szimmetrikus polinomja az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ változóknak. Van tehát olyan C egész szám, hogy $C\Pi L= S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ változóknak egész együtthatós szimmetrikus polinomja.

Minthogy $\Pi(z-x_\nu)=g(z)$ egész együtthatós polinom és $u_\nu=e^{x_\nu x}$, azért $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)=N(x)$ normafüggvény. $N(x)$ ugyanis nem tűnhetik el azonosan, mivel ΠL egyik tényezője sem tűnik el azonosan.

Az eredeti $L(x)$ tényezőnek kihagyása után az $N(x)$-ből megmaradó $L_1(x)$ függvény szintén transzcendens egész függvény, ennélfogva az $L(x)\cdot L_1(x)=N(x)$ egyenlőség miatt $L(x)$ osztója $N(x)$-nek.

4. A most igazolt tétel segítségével Lindemann általános tételének bizonyítását annak az egyszerűbb tételnek kimutatására vihetjük vissza, amely szerint *egy normafüggvény sem tűnhetik el az $x=1$ helyen.* Az $L(x)\cdot L_1(1)=N(1)$ egyenlőségből következik ugyanis az is, hogy $L(1)\neq 0$, ha $N(1)\neq 0$.

Föltételezzük tehát, hogy $L(x)=\sum_{\nu=1}^{r} c_\nu e^{\gamma_\nu x}=N(x)$ normafüggvény és röviden N-nel jelöljük az $N(1)=\sum_{\nu=1}^{r} c_\nu e^{\gamma_\nu}$ összeget.

Az $U=f(z)$ polinomon egész együtthatókkal és csupa egyszeres zérushelyekkel bíró olyan polinomot értünk, amelynek $z=0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ zérushelyei. Ha U n-edfokú, k pozitív egész szám és $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ paraméterek, akkor a

$$V = U^k(q_0+q_1 z+\ldots+q_{n-1}z^{n-1}) = U^k Q$$

egyenlőséggel értelmezett $p=(nk+n-1)$-edfokú V polinom együtthatói a q paramétereknek egész együtthatós homogén lineáris kifejezései. Ugyanilyen tulajdonságú polinom a V polinomnak és összes deriváltjainak W összege. Erre a W polinomra fennállnak a

$$W = V+V'+V''+\ldots+V^{(p)}, \quad W = V+W' \quad \text{és} \quad (e^{-z}W)' = -e^{-z}V$$

összefüggések. A q paraméterekben hasonlóképp homogén lineáris kifejezések a

$$P(z) = \frac{1}{k!} W^{(k)}$$

polinom együtthatói is, mivel P a $W(z+t)$ polinom t hatványai szerinti kifejtésében t^k szorzója.

A q paramétereknek a

$$D = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu P(\gamma_\nu)$$

összeg is egész együtthatós homogén elsőfokú függvényük. Ez abból következik, hogy $N(x)$ normafüggvény és emiatt x szerinti sorfejtésében az $a_m = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \gamma_\nu^m$ együtthatók mind egész számok. Azt, hogy D nem azonosan zérus, úgy mutatjuk ki, hogy megadunk olyan $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ értékeket, amelyekre $D \neq 0$.

Minthogy $W - W' = V$ osztható U^k-val, azért a $W - W'$ függvény $W' - W''$, $W'' - W'''$, ..., $W^{(k-1)} - W^{(k)}$ deriváltjai is mind oszthatók U-val. De nem osztható U-val $W^{(k)} = k!\, P$. Ha ugyanis osztható volna, akkor $W^{(k-1)}$, $W^{(k-2)}$, ..., W', illetőleg W rendre osztható volna U-nak második, harmadik, ..., k-adik, illetőleg $(k+1)$-edik hatványával. Ez azonban lehetetlen, mert W ugyanolyan fokú, mint V és így alacsonyabb fokú, mint U^{k+1}.

Ebből következik, hogy $P(z)$ a q paramétereknek (csupa zérustól különböző) egy értékrendszerére sem osztható U-val, tehát akkor sem, ha a paramétereket úgy határozzuk meg, hogy P eltűnjék az $U = f(z)$ polinom γ_1-től különböző $n-1$ zérushelyén. Ez a feltevés $n-1$ elsőfokú egyenletet ad az n számú homogén q paraméter számára. Az így meghatározott $P(z)$ polinomra vonatkozólag $P(\gamma_1) \neq 0$, mert ha $P(\gamma_1) = 0$ volna, akkor $P(z)$ U-val osztható volna. Minthogy ezekre a q értékekre vonatkozólag

$$P(\gamma_2) = P(\gamma_3) = \ldots = P(\gamma_r) = 0, \quad \text{azért} \quad D = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu P(\gamma_\nu) = c_1 P(\gamma_1) \neq 0.$$

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy D a q paramétereknek egész együtthatós lineáris függvénye és együtthatói nem mind zérusok. A

$$\Delta = D - NP(0) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu P(\gamma_\nu) - P(0) \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu e^{\gamma_\nu} = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu e^{\gamma_\nu} [P(\gamma_\nu) e^{-\gamma_\nu} - P(0)]$$

különbség a q paramétereknek szintén homogén lineáris kifejezése. Mivel W

értelmezése alapján

$$W=V+V'+\ldots+V^{(k-1)}+W^{(k)}=V+V'+\ldots+V^{(k-1)}+k!\,P$$

és mivel U zérushelyein $V, V', \ldots, V^{(k-1)}$ eltűnik, azért

$$W(0)=k!\,P(0) \quad \text{és} \quad W(\gamma_\nu)=k!\,P(\gamma_\nu) \qquad (\nu=1,2,\ldots,r).$$

Ezekből és az $(e^{-z}W)'=-e^{-z}V=-e^{-z}U^kQ$ egyenletből következik, hogy

$$k!\,[P(\gamma_\nu)e^{-\gamma_\nu}-P(0)]=W(\gamma_\nu)e^{-\gamma_\nu}-W(0)e^{-0}=-\int_0^{\gamma_\nu} U^k Q e^{-z}\,dz.$$

Ebből

$$\Delta=-\sum_{\nu=1}^{r}\int_0^{\gamma_\nu}\frac{U^k}{k!}(q_0+q_1z+\ldots+q_{n-1}z^{n-1})c_\nu e^{\gamma_\nu-z}\,dz.$$

Ez az integrál és így Δ a $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ paramétereknek homogén lineáris függvénye. Az egyes q paramétereknek együtthatói olyan határozott integrálok, amelyek k-nak növekedésével nyilvánvalóan mind zérus felé tartanak, mivel ekkor $\frac{U_k}{k!}$ és vele az integrálandó függvények egyenletesen zérushoz tartanak. Lehet tehát k-t olyan nagynak választani, hogy Δ-ban az összes együtthatók számértéke egynél kisebb legyen. Ekkor azonban $D-\Delta\neq 0$, mert D együtthatói mind egész számok és nem mindegyik együttható zérus. Az $N\cdot P(0)=D-\Delta\neq 0$ összefüggésből tehát következtethetjük, hogy $N=N(1)\neq 0$.

Ezzel Lindemann általános tételét bebizonyítottuk.

41. §. LINDEMANN ÁLTALÁNOS TÉTELÉNEK NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE. KÖR-, ELLIPSZIS- HIPERBOLA- ÉS PARABOLASZELET NÉGYSZÖGESÍTÉSE

Egy derékszögű koordinátarendszerben egy pontot akkor mondunk algebrainak, ha mindkét koordinátája algebrai szám. Ha ezen felül mindkét koordináta racionális szám, akkor a pont racionális pont.

A síkban a racionális pontok, s még inkább az algebrai pontok mindenütt sűrűn vannak. Ennek ellenére az

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=e^x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x$$

görbék közül egy sem megy át egynél több algebrai ponton. Az az algebrai pont, amelyen valamelyik görbe átmegy, egyben racionális pont is és az y-tengelyre esik.

Ha ugyanis c tetszőleges algebrai szám, akkor az $y=c$ egyenes és az előbb fölsorolt öt görbe metszéspontjainak abszcisszái rendre a

$$\sin x - c = \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix} - ce^{0\cdot x}, \quad \cos x - c, \quad e^x - c,$$

$$(\operatorname{tg} x - c)\cos x = \sin x - c\cos x, \quad (\operatorname{ctg} x - c)\sin x = \cos x - c\sin x$$

függvényeknek zérushelyei. Ezek a függvények azonban mind $L(x)$ típusú függvények és emiatt nincs 0-tól különböző algebrai zérushelyük.

Ebből következik, hogy az előbbi öt görbének csak az y-tengelyen lehet algebrai pontja, s ez az elgebrai pont szükségképpen racionális pont.

Mivel a $(\pi, \sin\pi = 0)$ pont az $y=\sin x$ görbén, az $(1, e)$ pont pedig az $y=e^x$ görbén van, azért π és e körzővel és vonalzóval akkor sem szerkeszthető, ha tetszőleges algebrai görbéket is felhasználunk a szerkesztésre. Ez a két szám transzcendens.

Ebből következik, hogy a kör nem négyszögesíthető. Lindemann tételével azt is lehet igazolni, hogy *nem lehet körzővel és vonalzóval olyan körszeletet szerkeszteni, amely négyszögesíthető.*

A körszeletet meghatározza a kör r sugara és a körszelethez tartozó ω középponti szög. A körszelet területének kétszerese

$$r^2\omega - r^2\sin\omega = r^2(\omega - \sin\omega).$$

Minthogy $\omega(\neq 0)$ és $\sin\omega$ nem lehet egyszerre algebrai szám, azért az $\omega - \sin\omega$ különbség általában transzcendens szám és így körzővel és vonalzóval még akkor sem szerkeszthető, ha tetszőleges algebrai görbéket is felhasználunk a szerkesztésre. Van olyan körszelet, amely négyszögesíthető, de ilyen körszeletet nem tudunk szerkeszteni. Az egységszakaszból ugyanis körzővel és vonalzóval (sőt algebrai görbékkel is) csak olyan szögeket lehet szerkeszteni, amelyeknek szinusza algebrai szám. Az ilyen szögekre vonatkozólag azonban $\omega - \sin\omega$ transzcendens szám.

Az a és b $(<a)$ féltengellyel bíró ellipszisnek nem lehet olyan szeletét megszerkeszteni, amelynek területe is szerkeszthető.

Ellipszisszeletet úgy kapunk, hogy az a sugarú kör egy szeletét merőlegesen vetítjük egy olyan síkra, amely a kör síkjával a $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ egyenletnek eleget tevő α szöget alkotja. A körszelet t_k és az ellipszisszelet t_e területe között tehát a

$$t_e = t_k\cos\alpha = t_k\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{2}(\omega - \sin\omega)$$

vonatkozás van. Mivel az ellipszisszeletből az ellipszis főköréhez tartozó megfelelő körszelet körzővel és vonalzóval szerkeszthető, azért a körszeletre kimutatott tételnek következménye az ellipszisszeletre kimondott tétel.

Hasonló tétel mondható ki a hiperbolaszeletek négyszögesítésére is.

Az a féltengellyel bíró egyenlő oldalú hiperbola egyenlete az aszimptotákra vonatkozó koordinátarendszerben $2xy = a^2$ lévén, a görbe $P_1 = (x_1, y_1)$ és $P_2 = (x_2, y_2)$ pontján $(0 < x_1 < x_2)$ átmenő egyenes a hiperbolából olyan szeletet vág ki, amelynek területe

$$\frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) - \frac{a^2}{2}(\log x_2 - \log x_1) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2\log\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Ennek a területnek mérőszáma transzcendens bármely olyan x_1 és x_2 abszcisszára vonatkozólag, amelyeknek hányadosa algebrai szám. Ha ugyanis $h = \frac{x_2}{x_1}$ $(\neq 1)$ és $\log h = m$ algebrai szám volna, akkor az $x = m = \log h$, $y = e^m = h$ pont az $y = e^x$ görbének az y-tengelyen kívül eső algebrai pontja volna.

Az egyenlő oldalú hiperbolának az egyik, vagy a másik tengelyével párhuzamos síkra való merőleges vetülete olyan hiperbola, amelynek egyik féltengelye a, a másik pedig $b = a \cos \alpha$, ha α jelöli a két sík szögét. Ha tehát t_0 jelöli az egyenlő oldalú hiperbola szeletének és t_1 a vetületben kapott hiperbola megfelelő szeletének területét, akkor $t_1 = \frac{b}{a} t_0$. Ebből következik, hogy egy megrajzolt *hiperbolának nem lehet körzővel és vonalzóval olyan húrját szerkeszteni, amely a hiperbolával négyszögesíthető hiperbolaszeletet határol.*

A többi kúpszelettel ellentétben *bármely parabolaszelet négyszögesíthető.*

Alkalmas derékszögű koordinátarendszerben ugyanis bármely parabola egyenlete $y = x^2$ alakban írható. Annak a parabolaszeletnek területe tehát, amelyet a parabola $P_1 = (x_1, y_1)$ és $P_2 = (x_2, y_2)$ pontját $(x_1 < x_2)$ összekötő húr a parabolával határol:

$$\frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) - \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3}\right) = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}.$$

Ennek a területnek mérőszáma P_1-ből és P_2-ből szerkeszthető és csak a P_1 és P_2 ponton átmenő s a parabola tengelyével párhuzamos egyenespár távolságától és a parabola paraméterétől függ.

A körszeletekkel ellentétben már a régi görögök ismertek körívekkel határolt négyszögesíthető idomokat. A khioszi Hippokratész-nak (i. e. az 5. században) tulajdonítják a következő tételt:

Ha egy derékszögű háromszög oldalaira, mint átmérőkre úgy rajzolunk egy-egy félkört, hogy az átfogóra rajzolt félkör a háromszöggel ugyanazon oldalra, a befogókra rajzolt két félkör pedig a háromszögön kívül essék, akkor a három félkörrel határolt két hold alakú körkétszög, lunula területének összege a háromszög területével egyenlő.

Ha ugyanis a és b a háromszög befogója, c az átfogója és ha H_a és H_b jelöli a két holdacska, T pedig a háromszög területét, akkor nyilvánvalóan

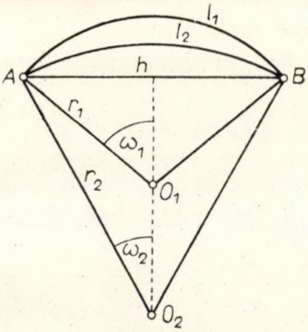
$$H_a+H_b+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi = T+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi$$

és így

$$H_a+H_b = T+\frac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2) = T.$$

Ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú, akkor $H_a=H_b=\frac{T}{2}=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Ebből következik, hogy az a hold alakú körkétszög, amelyet egy négyzet oldalára, mint átmérőre rajzolt körlapnak a négyzet köré írható körön kívül eső része alkot, a négyzet területének negyedrészével egyenlő területű.



80. ábra

Hold alakú általános körkétszöget határol a közös A és B végponttal bíró és az AB egyenesnek ugyanazon oldalán fekvő l_1 és l_2 körív. Ha a két kör középpontja, sugara és a fölvett körívhez tartozó középponti szög O_1, r_1 és $2\omega_1$, illetőleg O_2, r_2 és $2\omega_2$, ha továbbá $\overline{AB}=h$ és $r_1<r_2$, és ha végül T jelöli az AO_1O_2 háromszög területét (80. ábra), akkor a holdacska területe nyilvánvalóan

$$H = r_1^2\omega_1 - r_2^2\omega_2 + 2T$$

és

$$r_1 \sin\omega_1 = r_2 \sin\omega_2 = \frac{h}{2}.$$

A holdacska akkor négyszögesíthető, ha h-ból H, r_1 és r_2 körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Ekkor azonban $\sin\omega_1$, $\sin\omega_2$ és $2T$ is szerkeszthető. Mivel a felírt két egyenletből

$$\frac{\omega_1}{\sin^2\omega_1} - \frac{\omega_2}{\sin^2\omega_2} = \frac{4}{h^2}(H-2T) = C,$$

azért a holdacska négyszögesíthetőségének az a feltétele, hogy az egységből C, $\sin\omega_1$ és $\sin\omega_2$ szerkeszthető legyen. A kapott egyenletet $\frac{\omega_2}{\omega_1} = p$ jelöléssel

$$\frac{1}{\sin^2\omega_1} - \frac{p}{\sin^2\omega_2} = \frac{C}{\omega_1}$$

alakban írhatjuk. Ebből az egyenletből Lindemann tétele alapján következik, hogy a holdacska négyszögesíthetősége esetén p transzcendens, vagy algebrai szám aszerint, amint $C \neq 0$, illetőleg $C = 0$.

Ha ugyanis p algebrai szám és $C \neq 0$ volna, akkor az előbbi egyenlet bal oldala algebrai szám volna és így ω_1 is algebrai szám lenne. Ez azonban lehet etlen mert akkor $\omega_1 (\neq 0)$ és $\sin\omega_1$ egyszerre volna algebrai szám.

Még nincs eldöntve, hogy van-e olyan négyszögesíthető holdacska, amelyre vonatkozólag p transzcendens szám.

Ha föltételezzük, hogy p algebrai szám, akkor fennáll a

$$\sin p\,\omega_1 = \sqrt{p}\sin\omega_1$$

egyenlet és ebben p és $\sin\omega_1$ ez egységből négyzetgyökvonással állítható elő. Eddig csak olyan négyszögesíthető holdacskák létezését mutatták ki, amelyekre vonatkozólag p-nek

$$2,\quad 3,\quad \frac{3}{2},\quad 5 \text{ vagy } \frac{5}{3}$$

az értéke. Erre az öt esetre a $\sin p\,\omega_1 = \sqrt{p}\sin\omega_1$ egyenletet

$$\sin 2\varphi = \sqrt{2}\sin\varphi,\quad \sin 3\varphi = \sqrt{3}\sin\varphi,\quad \sin 3\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin 2\varphi,$$

$$\sin 5\varphi = \sqrt{5}\sin\varphi, \text{ illetőleg } \sin 5\varphi = \sqrt{\frac{5}{3}}\sin 3\varphi$$

alakban írhatjuk. Ezekből az egyenletekből könnyű számításokkal

$$2\cos\varphi = \sqrt{2},\quad 2\cos\varphi = \sqrt{1+\sqrt{3}},\quad 8\cos\varphi = \sqrt{6}+\sqrt{22},$$

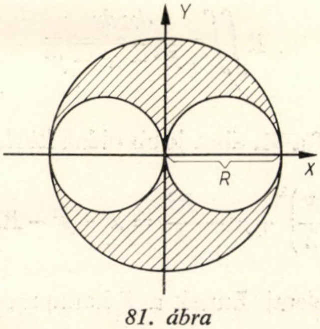
$$4\cos 2\varphi = -1+\sqrt{5+4\sqrt{5}},\quad \text{illetőleg}\quad 4\cos 2\varphi = -1+\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{20}{3}+\sqrt{\frac{20}{3}}}.$$

Az első három esetet Hippokratész, az utolsó kettőt (körülbelül 2300 évvel később) Clausen találta.[41])

43. §. VIVIANI TÉTELE

Mivel az R sugarú gömb felszíne $4\pi R^2$, azért a gömb felszínének négyszögesítése algebrai segédeszközökkel lehetetlen. Érthető tehát az a nagy feltűnés, amelyet Viviani, Galilei tanítványa, 1692-ben keltett, amikor a félgömbfelület egy könnyen szerkeszthető darabjának négyszögesíthető voltát kimutatta.

Ezt a felületdarabot Viviani az R sugarú félgömbfelületből úgy kapta, hogy belőle eltávolította azt a két egybevágó felületdarabot (Viviani-ablakot), amelyet a félgömb alapkörére merőleges és a gömb középpontján átmenő közös alkotóban egymást érintő R átmérőjű két forgáshenger a félgömbfelületből kivág. A félgömbfelületből a két Viviani-ablak eltávolítása után megmaradt felületdarab felszíne a félgömb alapköre köré írható négyzet területével, $4R^2$-tel egyenlő.



81. ábra

[41]) Journal f. d. reine u. angew. Math. 21. k. (1840), 375.

A négyszögesíthető holdacskákat E. Landau vette részletes vizsgálat alá, Sitzungsber. d. Berliner Math. Gesellschaft 2. k. (1903), 1. (Archiv d. Math. u. Physik III. 4. k. 1903, melléklet). Új négyszögesíthető holdacskákat nem talált ugyan, de kimutatta, hogy akkor, amikor p törzsszám, de nem Gauss-féle törzsszám, a p számhoz tartozó holdacska nem négyszögesíthető. — Csakalov bolgár matematikus (l. L. Tschakaloff, Math. Zeitschrift 30. k. (1929), 552.) kimutatta azt is, hogy a $p=17$ számhoz és bizonyos más racionális számokhoz sem tartozik négyszögesíthető holdacska. Ebben a negatív irányban további eredményeket ért el Csebotarjov szovjet matematikus (l. N. Tschebotaröw, Math. Zeitschr. 39. k. (1935), 161).

A félgömbfelület megmaradt darabjának merőleges vetületét a félgömb alapkörének síkjára a 81. ábrán az R sugarú körlap bevonalkázott darabja mutatja, ebből a körlapból hiányzó R átmérőjű két körlap a két Viviani-ablak vetülete.

Viviani tételének igazolására a derékszögű koordinátarendszer xy-síkját, ill. kezdőpontját a félgömbfelület alapkörének síkjába, ill. középpontjába helyezzük. Ekkor a félgömbfelület egyenlete

$$z = f(x,y) = +\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Mivel

$$z_x = -\frac{x}{z}, \quad z_y = -\frac{y}{z} \quad \text{és}$$

$$1+z_x^2+z_y^2 = 1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2} = \frac{R^2}{z^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2},$$

azért a félgömb $2R^2\pi$ felszínét az alapkörlapra vonatkozó

$$\iint \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = R\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

integrálás adja.

A jobb oldali Viviani-ablak F felszínét pedig az

$$R\iint\limits_T \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

integrál értéke adja, ahol T a 81. ábra jobb oldali körlapját, vagyis az

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2-\frac{R^2}{4} = x^2+y^2-Rx = 0$$

körrel határolt körlapot jelenti. Ennek a T körlapnak a felső félsíkba eső felére vonatkozólag.

$$0 \leqq x \leqq R \quad \text{és} \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{Rx-x^2}.$$

Ezért

$$F = 2R\int\limits_0^R dx \int\limits_{y=0}^{y=\sqrt{Rx-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Mivel

$$\frac{d}{dy}\arc\sin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

az y-ra vonatkozó határozott integrál értéke

$$\arcsin \frac{\sqrt{Rx-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}} = \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}},$$

tehát

$$F = 2R\int_0^R \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}}\, dx.$$

Ezt az integrált az

$$\arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} = t$$

helyettesítéssel számítjuk ki. Ekkor

$$\frac{x}{R+x} = \sin^2 t, \quad x = R\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = R\,\mathrm{tg}^2\, t = R\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right),$$

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)$$

és így a helyettesítéssel és parciális integrálással adódik:

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}}\, dx = R\int t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right) dt = R\frac{t}{\cos^2 t} - R\int \frac{1}{\cos^2 t}\, dt =$$

$$= R\left(\frac{t}{\cos^2 t} - \mathrm{tg}\, t\right).$$

Amíg x a $(0, R)$ szakaszt leírja, t 0-tól $\arcsin \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$-ig nő. Ezért

$$\int_0^R \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}}\, dx = R\left(\frac{t}{\cos^2 t} - \mathrm{tg}\, t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = R\left(\frac{2\pi}{4}-1\right).$$

Egy Viviani-ablak felszíne tehát $2R^2\left(\frac{2\pi}{4}-1\right) = R^2\pi - 2R^2$. A félgömbből a két Viviani-ablak elhagyásával kapott felület felszíne ezért

$$2R^2\pi - (2R^2\pi - 2R^2) = 4R^2.$$

Ezzel Viviani tételét igazoltuk.

IRODALOM

Adler A., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Leipzig 1905. Sammlung Schubert LII

Bieberbach L., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel 1952.

Enriques F., Questioni riguardanti la geometria elementare. Bologna 1900. Német nyelvre fordította és kiadta Fleischer H., Fragen der Elementargeometrie. II. rész: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Leipzig 1907, újabb kiadás 1923.
Ennek a munkának II—IX. fejezete tárgyal könyvünkhöz hasonló kérdéseket. Az egyes fejezeteket általában különböző olasz matematikusok írták, mégpedig: Daniele E., Giacomini A., Castelnuovo G., Enriques F., Conti A. és Calò B.
Enriques gyűjteményes munkájának újabb kiadása Questioni riguardanti le matematiche elementari címmel jelent meg.

Enciclopedia delle matematiche elementari (Berzolari L., Vivanti G. és Gigli D. II. köt. I. rész, 1937.
Brusotti L., Poligoni e poliedri, 10. §.
Agostini A., I problemi geometrici elementari e i problemi classici, 1—35. §.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften: Sommer J., Elementare Geo metrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus, III AB 8, 6—14. § (1914).
Zacharias M., Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, III AB 9, 10., 23—25. §.

Hjelmslev J., Geometrische Experimente. Leipzig u. Berlin 1915. Dán nyelvről Rohrberg A fordította németre. Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 5.

Klein F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Leipzig 1895.

Mascheroni L., Geometria del compasso. Pavia 1797.

Mohr G., Euclides Danicus. Amsterdam 1672. Újra kiadta Hjelmslev J., német fordítással ellátta Pál Gyula, Kopenhagen 1928.

Steiner J., Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833; gesammelte Werke I, Berlin 1881; Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 60, 1895.

Vahlen Th., Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung, Leipzig und Berlin 1911. Teubners Lehrbücher der math. Wiss. XXXIII.

NÉV ÉS TÁRGYMUTATÓ

A

adjungálás 16, 33
Adler 6, 89, 107, 151
affin síkgeometria 64
affin szerkesztések 64—68, 79
Agostini 151
Ahrens 111
alapszerkesztések 11
algebrai pont 142, 143, 144
— szám 137, 138, 139, 142, 143, 144
Apollóniosz 107
aranymetszés 27
Arkhimédész 105, 107
Arkhütasz 18
axiómacsoportok 83

B

Berzolari 151
betolás 102—107, 127
betolóvonalzó 102—107
Bieberbach 22, 56, 96, 105, 107, 151
Bolyai 88, 96, 97, 119
Breidenbach 20
Brianchon 56, 84
Brusotti 151
B-vonalzó 102—107

C

Calò 151
Cardano 100
Castelnuovo 151
Cauer 74, 77
cisszoisz 128,129
cisszoiszkörző 129,
Clausen 147
Cohn-Vossen 124
Conti 151
Csakalov 147
Csebotarjov 147
csuklós szerkezet 124—125

D

Daniele 151
déloszi probléma 18, 19, 100, 110
derékszög szerkesztése 69, 84, 90, 91, 93
derékszögvonalzó 94, 107
Desargues 61
Descartes 68, 114, 118
Dioklész 18, 128

E

egyenes egyenlete 14, 60, 61, 68
— jellemző tulajdonságai 131
— leírása inverzorral 131—134
egységátrakó 83, 84, 85
egységátrakó vonalzó 83—94
egységelforgató 84, 86
egységgyök, ötödik 26
—, hetedik 21, 47
—, 17-dik 28
—, *p*-edik 41—47, 48—49
egyszerűség 134
Eisenstein 37—40
elemi szerkesztés 11
— szerkesztési műveletek 134
ellenparallelogramma 124, 125, 132, 133
ellipsziskörző 123, 124
ellipszisszelet 143—144
Enriques 6, 151
érem mint rajzeszköz 56
e szám transzcendens volta 137, 143
Eukleidész 11, 26, 52

F

felezőpont felhasználása párhuzamos húzására 64, 65
Fermat 42
Fleischer 151
forgatás derékszöggel 70
— az egyenesszög kétharmad részével 71
— a teljes szög ötödrészével 72

G

Galilei 147
Galois 49
Gauss 28, 34, 35, 37, 39, 40, 41, 42, 46, 47, 83, 88, 147
Gauss-féle lemma 37—39
— periódusok 29, 42, 88
— törzsszámok 41, 45, 88, 147
geometriai kísérlet 5—6
geometrografikus egyszerűség 134—136
— képlet 134—136
— pontosság 136
Giacomini 151
Gigli 151
gömbfelület osztása 50—51
gyök, primitív számelméleti 42, 46
gyökvonás, négyzetgyök 12, 36, 80, 115
—, köbgyök 18, 37, 110, 115—119, 129

H

harmadfokú egyenlet gyökeinek szerkeszthetősége 15
harmadfokú egyenlet megoldása parabola felhasználásával 116
— — — egyenlő oldalú hiperbola felhasználásával 118—119
harmadfokú parabola 128—129
harmadrendű görbék 128, 130
harmonikus perspektivitás 78, 82
háromszög szerkesztése, köréírt köre középpontjának az oldaltól való távolságából 22
— — magasságpontjának a csúcsoktól való távolságából 22
— — két oldalból és az egyik mellett fekvő szögek különbségéből 122—123
— — egyik érintőköre középpontjának a csúcsoktól való távolságából 23
— — kerületéből, beírható és körülírható körének sugarából 24
— — egyéb adatokból 25, 26
Hart 132, 133
Hart-féle inverzor 132—133
Hasius 125
hatodfokú egyenlet megoldása harmadfokú parabola felhasználásával 130
Hermes 47
Hermite 137
hétszög, szabályos 20—22, 105—106, 118, 121
hibaelmélet, hibák 136
Hilbert 74, 83, 84, 87, 88, 91, 111, 124
Hilbert-féle axiómarendszer 83
Hilbert-féle szerkesztések 83—91, 97, 111
Hippokratész 145, 147
Hjelmslev 56, 88, 107, 151
Hjelmslev-féle szerkesztések 88
Hoffmann 105
holdacska 145—147
Hovestadt 26
Hüttemann 78

I

integráf 125
inverz kép 52—56, 132
inverzor 131—134
irreducibilis 15, 17, 31—33, 37, 38, 39, 40, 41, 100

J

Jörges 125

K

kagylóvonal 126, 127, 128
Kempe 133
kettősviszony 56, 57, 61
— négyzetgyöke 80
kiegyenesítés 137
kilencszög, szabályos 20, 110
Killing 26
kísérlet 5, 6
— betolással 102—107
— szögvonalzóval 94—95
— derékszögvonalzóval 94—95
— egységátrakó vonalzóval 83—93
— két derékszögvonalzóval 107—110
— papírhajtogatással 110—111
Klein 151
kockakétszerezés 18, 100, 101, 102, 110, 115
komplex számok gyöke 36
konkhoisz 126, 127
konkhoiszkörző 126, 127
koordináta-rendszer, adatokhoz kapcsolt 12, 60, 66
—, Descartes-féle 68
—, projektiv 57, 60
—, távolsági 66
Korselt 26
Kortum 112, 114, 115, 123
köbgyökvonás 18—19, 37, 102—103, 110, 116—122, 128—129

köbös alapszerkesztések 100, 105, 117
köbös szerkesztés 101, 102
kör önmagába való kollineációja 75—77
kör mint vonalas szerkesztések alapvonala 72—74
körív mint vonalas szerkesztések alapvonala 78—79
körkerület 137
körkiegyenesítés 137
körlap osztása 50—51
körnégyszögesítés 137
körosztás 34, 46
körosztási egyenlet 35, 37, 40, 41, 48
— — irreducibilitása 39, 40
— — rezolvensei 46, 47, 48, 49
körterület 137
körző használatának korlátozása 56
— mint pontos rajzeszköz 131
Kubota 49, 130
kúpszeletkörző 123—125
Kürschák 83,84, 88
kvadránskörző 95, 98
kvadratikus szerkesztés 15

L

Lambert 137
Landau 147
Legendre 137
Lemoine 135
Leonardo da Vinci 123
Lill 107
Lindemann 137, 138, 142, 146
— általános tétele 138, 140, 142
lineáris szerkesztések 14
Lobacsevszkij 88, 97
London 130
lunula 145

M

Mascheroni 52—56, 96, 97, 135, 151
Mascheroni-féle szerkesztések 52—56, 96, 135,
Menaikhmosz 18
Menelaosz 104
merőleges szerkesztése 69, 84, 90, 91, 93
Mohr 52, 56, 96, 97, 135, 151
Mohr—Mascheroni-féle szerkesztések 52—56, 96, 135
Morduhaj—Boltovszkoj 78

N

negyedfokú egyenlet megoldása parabola felhasználásával 112
— — ellipszis felhasználásával 113
— — hiperbola felhasználásával 113—114
négyszögesítés 137, 142—149
négyszögesíthető holdacska 145
— körkétszög 146
— parabolaszelet 144
négyzetgyökvonás szakaszból 12
— komplex számból 36
— kettősviszonyból 80
Neiss 26
Newton 103, 126, 129
Nikomédész 18, 126, 127
normafüggvény 139—142
normavonalzó *l.* egységátrakó vonalzó
N-vonalzó *l.* egységátrakó vonalzó

O

Obláth 78, 79
osztóviszony 65
ötszög, szabályos 26—28, 71, 111

P

Pál 151
papírhajtogatás 110—111
Papposz 104, 107
paraméter 14
párhuzamos élű vonalzó 91—94
párhuzamosok szerkesztése egységátrakó vonalzóval 84
párhuzamosok vonalas szerkesztése, ha adva van: *a)* egy szakasz felezőpontjával 64
b) egy parallelogramma 67
c) egy kör középpontjával 72
d) két metsző vagy érintő kör 77
e) két koncentrikus kör 77
Pascal 56, 78, 79, 82
Peaucellier 131
perspektív háromszögek 61, 62
perspektivitás, harmonikus 78, 82
Platón 18, 110
Platone 78
Plutarkhosz 18
Poncelet 72, 73, 74, 78, 86, 87, 92, 94, 112, 135
Poncelet—Steiner-féle szerkesztések 72—74, 78, 86, 87, 92, 94, 112, 135
pontosság 136

primitív számelméleti gyök 42, 47
projektív koordináta 56—57
— leképezés 79, 80
— másodfokú szerkesztések 79—82
— szerkesztések 56—61, 82
π szám transzcendens volta 137, 138

R

racionális görbe 102
— pont 142
— számtest 13
Rademacher 76
Rados 119
reducibilis 15, 18, 31—33
Richelot 47

S

Schoenemann 37—40
Schottky 138, 139
Schottky-féle normafüggvény 139
Schwarz 138
Severi 78
Smith 112, 114, 115, 123
Sommer 151
Stäckel 119
Steiner 64, 72, 73, 74, 78, 86, 87, 92, 94, 112, 135, 151
Steiner-féle szerkesztések 64—68, 72—74, 78, 86, 87, 92, 94, 112, 135

Sz

szabályos háromszög 71, 111
— négyszög 70, 111
— ötszög 71, 111
— hatszög 71, 111
— hétszög 20—21, 47, 105—107, 110, 121—122
— nyolcszög 111
— kilencszög 20, 110
— tízszög 26—28
— tizennégyszög 20—21
— tizenhétszög 21, 28—30, 46
— 13-szög 48
— 34-szög 28—30, 46
— 257-szög 47
— 65 537-szög 47
szakasz négyzetgyöke 12
szakasz szorzása egész számmal 53
szakaszok összege 12, 66
szakaszok különbsége 12, 66
— hányadosa 12, 66
— szorzása 12, 66
számtest 13, 66, 101
— kibővítése 16
szerkesztés körzővel 52—56
— éremmel 56
— vonalzóval 56—61
— vonalzóval, határolt síkon 61—64
— egységátrakó vonalzóval 83—94
— vonalzóval és egységelforgatóval 88
— párhuzamos élű vonalzóval 91—94
— szögvonalzóval 94
— derékszögvonalzóval 94
— papírhajtogatással 110—111
szerkesztés vonalzóval, ha adva van egy pár párhuzamos 65—67
— felezett szakasz 64
— racionális osztóviszonyú ponthármas 65
— parallelogramma 67—68
— parallelogramma és két derékszög 69, 70
— négyzet 70
— hatszög 71
— parallelogramma és szabályos háromszög 71
— szabályos ötszög 71—72
— kör középpontjával 72—74
— metsző körpár 77
— érintő körpár 77
— egyközepű körpár 77
— három kör 77
— akármilyen kicsiny körív a hozzátartozó kör középpontjával 78—79
— kör középpontja nélkül 79
— körív a kör középpontja nélkül 78—79
— kúpszelet 79, 80
— kúpszeletív 46, 117, 121
— egységnégyzet és harmadfokú parabola 128
— egységnégyzet és cisszoisz 128—129
szerkesztés körzővel, vonalzóval és adott kúpszelettel 112—115
— adott kúpszeletívvel 116—117, 121
— adott körrel és négy sugársor egyeneseivel 74
szerkesztések a gömbön 95—98
szerkesztési hibák 136
szerkeszthető pontok koordinátáinak számteste 13
szerkeszthetőség körzővel és vonalzóval 12, 13
szögfelezés 89,92
szögharmadolás 19—20, 100, 101, 104, 110, 115, 119—121
— egyenlete 19—20
szög többszöröse 70

szögvonalzó 94
Szőkefalvi Nagy Gy. 6, 24, 78

T

Thalész 84, 86, 123
Toeplitz 76
transzcendens szám 137, 143
— függvény 138, 139
triszekció *l.* szögharmadolás
Tschakaloff *l.* Csakalov
Tschebotaröw *l.* Csebotarjov
tükrözés körre 53—55

U

unikurzális görbe 130

V

Vahlen 6, 84, 107, 111, 114, 130
van der Waerden 26
Vivanti 151
Viviani 147—149
Viviani-ablak 147—149
vonalas szerkesztések, vagy vonalzóval való szerkesztések *l.* szerkesztés(ek) vonalzóval
vonalzó mint rajzeszköz 131

W

Wantzel 20
Weiss 74
Wiedemann 96
Wolf 26

Y

Yanagihara 56, 76, 78
Yates 20, 124

Z

Zacharias 151

A kiadásért felel: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: Fehér József — Műszaki szerkesztő: Garamvölgyi Ernőné
Burkoló és kötésterv Piros István munkája — Alkalmazott betűtípus: New Times 10/12 pont
A kézirat a nyomdába érkezett: 1967. V. 12
Terjedelem: 13,25 A/5 ív — Példányszám: 1150
67-5625 — Szegedi Nyomda

Ára: 35,— Ft