Vallas

FELSŐBB

EGYENLETEK,

EGY

ISMERETLENNEL.

IRTA

D. VÁLLAS ANTAL,

A' M. TUD. TÁRS. REND. TAGJA.

KIADJA A' MAGY. TUD. TÁRSASÁG.

BUDÁN,

A' M. KIR. EGYETEM' BETŰIVEL, 'S EGGENBERGER ÉS FIA
MAGY. ACAD. KÖNYVÁRUSOK KÖLTSÉGÉN.
1848.

ELÖSZÓ.

Midőn ezen hosszú vajudás után végtére megszülemlett munkámat közre bocsátom, szükségesnek találom, hogy rendeltetéséről 's a' tudomány mai álláshoz képesti viszonyáról néhány felvilágosító szót ejtsek.

E' munkámat még 1836-ban kezdém irni, a' midőn sem külföldön a' Fourier módszerénél czélszerűbb felállítva még nem volt, sem Magyarországban a' páratlan fontosságú mathematicai tudományok még nem méltattak annyi figyelemre, mint a' mennyit hála Istennek, jelenleg kezdünk azokra fordítani. Innen magyarázható az, hogy munkám elé Előismeretek czíme alatt bevezetést kellett irnom, melly a' kellő álláspontot kimutassa 's a' magyar olvasót, ki mindennel szokott inkább megbarátkozni, mint a' mathematicai tudományokkal, a' következőknek helyes felfogására előkészítse. Ezen előismeretek közvetlenűl arra voltak számítva, hogy azokból a' felsőbb egyenletek főtulajdonságain kivűl, a' Fourier módszere 's az általam előadandott képzeleti gyökerek kikeresése minél könnyebben megértessék. Illy stádiumán állott a' munka, midőn az 1837-ben a' M. Tud. Társaság által nyomtatás alá elfogadtatott, 's vajha mindjárt sajtó alá kerűlhetett volna is, mi nem csak a' mathematicai tudományok kifejlésének honunkban egy kis lökést adott volna, hanem engem meg is kimélendett az azóta felmerült megfejtési módszerek pótlásával, melly pótlás annyival több bajokkal járt, minthogy évről évre halmozódék az anyag, melly tömege által befejezett, hanem ki nem adott munkámat vagy ki nem adásra, vagy teljes átdolgozásra látszék kárhoztatni.

Illy körűlmények alatt meggondolván helyzetemet, mellynél fogva többféle hivatalos foglalatosságok 's irodalmi halaszthatlan vállalatok foglalák el csaknem minden időmet, arra határzám magamat 1841-ben, midőn az academiai titoknoki hivatal által munkámnak sajtó alá bocsátására felszólítattam, hogy munkámnak csak első felét bocsássam közre, másik felét pedig egyszerűen elnyomván, helyette az ujabb találmányokkal szolgáljak a' tisztelt olvasó közönségnek — magában értetvén, hogy mindazon tételek előbocsátásával, mellyek megértésükre megkivántatnak.

Így járult a' Fourier módszeréhez a' Horner és a' Graeffe feloldása. Azonban midőn Hornerét kidolgoznám, csakhamar észrevettem annak némi azonosságát a' Fourieréval, minek bebizonyítását mindazáltal, nehogy e' munka kelletinél hosszasabbra terjedjen, saját nézeteimmel együtt külön munka tárgyává tettem, melly munkának egyik főfeladása épen a' mondott azonosság kipuhatolása 's bebizonyítása körül forog *). A' Graeffe módszerének felvételét annál szükségesebbnek tartottam, minthogy az egyenesen a' képzeleti gyökereket is adja, mi által természetesen feleslegessé lett a' képzeletieknek én általam kidolgozott felkeresési módja. Azonban a' Graeffe módszerét nem saját mun-

*) Czíme ez: Beitrag zur Auflösung der höheren Gleichungen. Von Dr. Anton Vállas, ordentlichem Mitgliede der ungarischen Gelehrten-Gesellschaft zu Pesth. Wien 1843. Gedruckt bei J. P. Sollinger. 8-rét. — Melly munkámról igen dicsérőleg emlékezik: Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. III. Theil. Greifswalde 1843. Literarischer Bericht 178 és köv. l.

kája, hanem az Enck e által kidolgozott czélszerübb alakban tartottam felveendőnek, miben, reménylem, minden hozzáértő velem egyet értend. Hátra volt volna a' Cauchy ujabb dolgozatairól tenni említést 's azokat egészszé összeolvasztani, valamint a' képzeletiek mértani alkotásáróli tant is megvitatni. Minthogy azonban e' munka úgy is már eléggé megvastagodott, más részről pedig Cauchynak értekezései csak elődolgozatúl tekinthetők egy majdan összeállítandó új megfejtésmódnak, végtére pedig a' képzeletiek alkothatása közben pályakérdésül lőn kitűzve a' Magy. Tudós Társaság részéről (melly kérdésről többek közt saját eszméimet is adtam elő egyik osztályülésünkben): ez úttal elégnek tartottam, a' fentebbiek közzétételével járúlni a' mathematicai tudományok Magyarországbani felélesztéséhez. Melly czélomat ha elérem, bőven meg leszek jutalmazva mindazon fáradságért és bosszantásokért, mellyekkel e' munka kiadása össze vala kapcsolva.

Irám Pesten, jan. 27, 1848.

A' szerző.

TARTALOM.

Figyelmeztetés a' könyvkötőnek. Midőn a' két fűzet együvé köttetik, elől álljon a' főczím (az első fűzet czímét el kell vetni), arra következik az előszó a' tartalommal és ezután a' titoknoki **Tudnivalók.** A' sajtókibák a' munka végéhez csatolandók, a' régi 18-dik ív eleje félreteendő.

FELSŐBB EGYENLETEK,

EGY

ISMERETLENNEL.

IRTA

D. VÁLLAS ANTAL,

A' M. TUD. TÁRS. REND. TAGJA.

ELSŐ FÜZET.

I

BUDÁN,

A' M. KIR. EGYETEM' BETŰIVEL, 'S A' M. NEMZ. ACADEMIA' KÖLTSÉGÉVEL.

1842.

TUDNIVALÓK.

---

1. A' magyar tudós társaság ezen munkának csak kiadója levén, nem kezeskedik a' benne követett nyelvszabályokról, sem irásmódról, sem végre akármi nemü nyelvet 's irást illető elvekről: egyedül arra kívánt a' kéziratok' birálatában ügyelni, hogy az elfogadott és sajtó alá bocsátandó munka, mint egész egy vagy más tekintetből ajánlható legyen, 's a' literatura' jelen állapotjában kiadásra méltónak tartathassék.

2. Nem vizsgálhatván meg a' benyujtott kéziratokat a' társaság fejenként és egészben; ez u. m. *Felsőbb egyenletek egy ismeretlennel Vállas Antaltól*, Győry Sándor és Vásárhelyi Pál rr. tt. mint e' végre hivatalosan megbízottak' ajánlására adatott sajtó alá.

3. A' társaság által kiadott kéziratok közűl ez LXXVII. számu.

Pesten, november' 10-kén 1842.

D. SCHEDEL FERENCZ,
titoknok.

ELŐISMERETEK.

1. §.

A' mathesis' tárgyai: mennyiségek és munkák (operatio). Mindkettő átalános vagy különös, azaz: valamint mennyiséget, úgy munkát is képzelhetni átalánosan, minden egyéb meghatározás nélkül. Szembetünő, hogy mennyiség vagy munka akkor, midőn az elsőnek egységei, az utolsónak pedig meghatározott minősége tudva nincsenek, csak átalános mennyiség vagy munka. Különös mennyiségek' jelei az arab számok:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots;$$

átalánosokéi betűk; legtöbbnyire a' kis latin alphabet' betűi 'stb. Ha ezekkel be nem érjük, mutatót (index) használunk, 's úgy különböztetjük egymástól a' következőket:

$$a,\ a^{\mathrm{I}},\ a^{\mathrm{II}},\ a^{\mathrm{III}},\ a^{\mathrm{IV}}\ \ldots$$

$$a,\ a_{\mathrm{I}},\ a_{\mathrm{II}},\ a_{\mathrm{III}},\ a_{\mathrm{IV}}\ \ldots$$

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ \ldots$$

Mutatót akkor is használunk, midőn mennyiségeknek hasonlóságát (belsőt, vagy eredésükből folyót) akarunk jelelni, 's ekkor a' mutató ismétlő jegy tulajdonképen. Igy ha egy felsőbb egyenlet' valamelly gyökerét x_1 — x-el jeleljük, a' többieket

$$x_2,\ x_3,\ x_4\ \ldots$$

által tesszük ki.

2. §.

Meghatározott munkák: α) kapcsolatiak, (combinatorius) azaz helyváltoztatást illetők; β) értékiek, mellyeknek tárgya valóságos értékváltoztatás. Az elsők, különös esetekben, elemek' odairásával vitetnek végbe; az utolsók valóságos számolást kivánnak meg, 's különös jegyekkel birnak, a' millyenek:

$$+,\ -,\ \times,\ :\ \ldots$$

Munkát átalában jelelni nem csak lehet, hanem kell is sokszor. Átalános munkajegyül is használtatnak betűk, nevezetesen a' következők:

$$F,\ f,\ \Phi,\ \varphi,\ \Psi,\ \psi\ \ldots$$

's a' munkába veendő mennyiség utánok iratik.

Igy például:

$$Fa,\ fb,\ \Phi x,\ \varphi y\ \ldots$$

azt teszik, hogy illetőleg a, b, x, y ..-nal valamelly munkát kell végbe vinni. Ha több illyetén mennyiség adatik, rekeszbe foglaltatnak azok 's vonalokkal különböztetetnek meg. Igy

$$f(a,\ b,\ x)$$

azt teszi, hogy az a, b, x mennyiségek valamelly munkába vagy munkákba veendők. Szokásban van rekesz alatt csak azon mennyiségeket kitenni, mellyeknek több értékei vannak, vagyis a mellyek változók. Az illyetén kitételek:

$$Fa,\ \varphi x,\ f(x,y)\ \ldots$$

függvényeknek neveztetnek, mert értékök a' benfoglalt mennyiség- vagy mennyiségektől függ. Jelentésük tulajdonképen ez: a-val, x-xel, vagy x-xel és y-nal valamelly munkákat kell végbe vinni, minek következésében tehát $F, f, \Phi, \varphi\ldots$ csupa átalános munkajegyek, mint följebb határoztuk meg.

3. §.

Ezen munkák kapcsolatiak vagy értékiek lehetnek. Kapcsolati munkáknál kevesbbé közönséges munkajegyekkel is élünk. Tudjuk, hogy a' kapcsolati munkák:

α) Helyváltoztatás (*permutatio*);

β) Csoportozás (*combinatio*);

γ) Változtatás (*variatio*).

Ezeket a' munkák' főbetűivel jeleljük, minél fogva:

$P(a, b, c..n)$

az: $a, b, c..n$ elemek' helyváltoztatásait teszi;

$C(a, b, c..n)$

$a, b, c..n$' csoportozásait;

$K(a, b, c..n)$

ugyan azon elemeknek, változtatásait. A' csoportozásnál és változtatásnál, különösb fajaik' megkülönböztetésére mutatóval is élünk. Igy:

$$C_1\,(a, b, c, ..\,n) = a \quad b \quad c \quad ..\,n$$

$$\begin{array}{llll} C_2\,(a, b, c, ..\,n) = ab & ac & ad & .. \\ & bc & bd & .. \\ & & cd & .. \\ & & & ... \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_3\,(a, b, c, ..\,n) = abc & abd\,.. \\ & bcd\,.. \\ & .... \end{array}$$

Következő előadásunkban némi ide tartozó tételekre szükségünk lesz.

4. §.

Különös értéki munkák:

α) Összeadás és kivonás, mellyeknek különösb esetei a szorzás és elosztás, az emelés és gyökérvevés;

β) Leszármaztatás és visszavivés.

Az elsők tudvák, az utolsókat így határozhatjuk meg. Minden függvény más belőle eredhető függvényekre nézve alapfüggvény. Származéknak mondatik pedig minden függvény, melly az alapfüggvénytől ekképen ered:

1-ször. Tétessék az alapfüggvényben x helyett $x+k$ (mi itt csak a' legegyszerűbb esetet, mellyben tudni illik csak egy változója van a' függvénynek, veszszük vizsgálat alá).

2-szor. Az eredményből vonassék ki az alapfüggvény.

3-szor. Az eredmény (itt különbség) osztassék el k-val; 's végre

4-szer. Tétessék $k=o$.

Például legyen az alapfüggvény:

$$a+x^2;$$

lesz:

1-ször.	$a+(x+k)^2$
	$=a+x^2+2xk+k^2$
2-szor	$2xk+k^2$
3-szor	$2x+k$
4-szer	$2x$;

's ez a' keresett származék.

Itt észrevehetjük egyszersmind, hogy a származékban $2x$, az alapfüggvény' állandó tagja a kimaradt. A' leszármaztatás alapfüggvényből származékot, a visszavivés származékból alapfüggvényt találni tanít.

5. §.

Minthogy átalában a származék is függvénye ugyan azon változónak, ugyan azon szabályoknál fogva ennek is származékát kereshetni; melly utolsó az alapfüggvényre nézve második származéknak neveztetik. Igy kell érteni a harmadik, negyedik .... származékokat is. Ha az alapfüggvény' munkajegye:

$$F, f, \Phi, \varphi ..$$

legczélszerűbb az első származékokat így jelelni:

$$F', f', \Phi', \varphi' ..$$

a' másodikat így:

$$F'', f'', \Phi'', \varphi'' ..$$

'stb. A' visszavivés' munkajele ez: $\int$. Ennél fogva tehát:

$$\int \varphi' x = \varphi x$$
$$\int \varphi'' x = \varphi' x$$
$$\int \varphi''' x = \varphi'' x$$

. . . . . .

$$\int\int \varphi'' x = \int \varphi' x$$
$$= \varphi x$$
$$\int\int\int \varphi''' x = \int\int \varphi'' x$$
$$= \int \varphi' x$$
$$= \varphi x \text{ *)}$$

. . . .

Mi a' következőben a' leszármaztatás' főszabályai nélkül el nem lehetünk.

*) Valamint a' $\int$ jegy a' származékvetés' eredetének bélyegét félreismerhetlenül mutatja, úgy maiglan is illy esetekben még egy más jegy használtatik, melly szinte a' mondott körülménynek köszöni lételét s mellynél fogva a visszaviendő mennyiségeket így szokták jelelni,

$$\int \varphi' x dx$$
$$\int\int \varphi'' x dx^2 \text{ 'stb.}$$

6. §.

Tétessék fx-ben x helyett $x+k$, világos, hogy fx valamelly változást fog szenvedni, azaz, hogy nagyobbodni vagy kisebbedni fog. Tehát:

$$f(x+k)=fx+A.$$

Minthogy pedig A-nak k-val elenyésznie kell, nyilván tehetjük a' következőt:

$$f(x+k)=fx+ak\,..$$

Legyen továbbá $x=0$, tehát

$$fk=f(0)+ak,$$

hol $f(0)$ szemlátomást, minthogy x-xel többé nem bír, állandó, és innen

$$\frac{fk-f(0)}{k}=\alpha,$$

miből világos, hogy α' értéke k-tól függ, hogy k' függvénye az; tehát lesz

$$\alpha=f_1k.$$

Ennél fogva:

$$fk=f(0)+f_1k\,.\,k,$$

avvagy ha itt k helyett x tétetik, minthogy átalában változókat és határozatlanokat egymással fölcserélni lehet:

$$fx=f(0)+f_1x\,.\,x.$$

Ennek következésében továbbá:

$$f_1x=f_1(0)+f_2x\,.\,x$$
$$f_2x=f_2(0)+f_3x\,.\,x$$
$$f_3x=f_3(0)+f_4x\,.\,x$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

melly értékeket egymásután a fölebbi egyenletekbe tévén, lesz:

$$fx=f(0)+f_1(0)\,.\,x+f_2(0)\,.\,x^2$$
$$+f_3(0)\,.\,x^3+f_4(0)\,.\,x^4+\,..$$

7. §.

Tétessék itt x helyett $x+k$, lesz:

$$f(x+k)=f(0)+f_1(0).(x+k)$$
$$+f_2(0).(x+k)^2$$
$$+f_3(0).(x+k)^3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+f_m(0).(x+k)^m$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

azaz, ha a' jelelt emeléseket végbe viszszük:

$$f(x+k)=f(0)+f_1(0).x+f_2(0).x^2+f_3(0).x^3+..$$
$$+k[f_1(0)+2f_2(0).x+3f_3(0).x^2+..]$$
$$+k^2[f_2(0)+3f_3(0).x+..]$$
$$+k^3[f_3(0)+..]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (1)$$

's itt a' felső sor' közönséges tagja:

$$f_m(0)..x^m;$$

a' másodiké:

$$mf_m(0).x^{m-1};$$

a' harmadiké;

$$\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}f_m(0).x^{m-2};$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

mi Newton' binomiumából világos. Továbbá a' felső sor $=fx$, 's ennél fogva, ha azt mindjárt az egyenlőségjegy' bal oldalára teszszük, 's mindent k-val osztunk, lesz:

$$\frac{f(x+k)-fx}{k}=f_1(0)+2f_2(0).x+3f_3(0).x^2+..$$
$$+k[f_2(0)+3f_3(0).x^2+..]$$
$$+k^2[f_3(0)+..]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

's itt k elenyészvén, mi által fx' első származéka ered, lesz:

$$f'x = f_1(0) + 2f_2(0).x + 3f_3(0)x^2 + \ldots \qquad (2).$$

Ezen értéket (1)-be tévén, következik:

$$f(x+k) = fx + f^1x.k + k^2[f_2(0) + 3f_3(0)x + ..]$$
$$+ k^3[f_3(0) + ..]$$
$$\ldots\ldots \qquad (3).$$

8. §.

Tétessék (2)-ben x helyett $x+k$, lesz:

$$f^1(x+k) = f_1(0) + 2f_2(0).(x+k)$$
$$+ 3f_3(0).(x+k)^2$$
$$\ldots\ldots$$
$$= f_1(0) + 2f_2(0).x + 3f_3(0).x^2 + \ldots$$
$$+ k[2f_2(0) + 2.3f_3(0)x + ..]$$
$$+ k^2[3f_3(0) + ..]$$
$$\ldots\ldots$$

azaz:

$$\frac{f'(x+k) - f'x}{k} = 2[f_2(0) + 3f_3(0)x + ..]$$
$$+ k[3f_3(0) + ..]$$
$$\ldots\ldots$$

's azon esetben, midőn $k=0$:

$$f''x = 2[f_2(0) + 3f_3(0)x + \ldots] \qquad (4)$$

azaz:

$$f_2(0) + 3f_3(0)x + \ldots = \frac{f''x}{2},$$

melly értéket (3)-ba tévén:

$$f(x+k) = fx + f'x.k + \frac{f''x}{2}.k^2$$
$$+ k^3[f_3(0) + \ldots]$$
$$\ldots\ldots$$

Mit e' szerint folytatván találjuk, hogy a' talált kifejlésben k^3' szorzója:

$$=\frac{f'''x}{2.3};$$

k^4 — é:

$$=\frac{f''''x}{2.3.4}, \text{'stb.}$$

minél fogva a' legutolsóbban fölhozott sor ezzé lesz:

$$f(x+k)=fx+f'x.k+\frac{f''x}{2}.k^2+\frac{f'''x}{2.3}.k^3+$$

$$+\ldots+\frac{f^{m-1}x}{2.3.(m-1)}.k^{m-1}+\ldots \quad (5)$$

9. §.

Ámbár itt a' haladási törvény magában világos, mindazáltal még sem lesz haszontalan észrevenni, miképen, ha (1)-ben a' függélyes sorokat folytatjuk, ezen közönséges kitételekre akadunk:

$$f_m\ (0).x^m + f_{m+1}\ (0).x^{m+1}+\ldots$$

$$mf_m\ (0).x^{m-1}+(m+1)\ f_{m+1}\ (0).x^m+\ldots$$

$$\frac{m(m-1)}{1.2}f_m\ (0).x^{m-2}+\frac{(m+1)m}{1.2}f_{m+1}(0).x^{m-1}+\ldots$$

. . . .

$$mf_m\ (0)x+\frac{(m+1)m}{1.2}f_{m+1}\ (0).x^2+\ldots$$

$$f_m\ (0)+(m+1)\ f_{m+1}\ (0).x+\ldots$$

$$f_{m+1}\ (0)\quad +\ldots$$

. . . .

's ebből k^m szorzója:

$$=f_m(0)+(m+1)f_{m+1}(0).x$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)}{1\;.\;2}f_{m+2}(0).x^2$$
$$+\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1\;.\;2\;.\;3}f_{m+3}(0).x^3$$

. . . .

's hasonlólag k^{m+1} szorzója:
$$=f_{m+1}(0)+(m+2)f_{m+2}(0).x$$
$$+\frac{(m+3)(m+2)}{1\;.\;2}f_{m+3}(0).x^2$$
$$+\frac{(m+4)(m+3)(m+2)}{1\;.\;2\;.\;3}f_{m+4}(0).x^3$$

. . . .

Legyen már most:
$$\frac{f^m x}{2.3..m}=f_m(0)+(m+1)f_{m+1}(0).x$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)}{1\;.\;2}f_{m+2}(0).x^2$$
$$+\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1\;.\;2\;.\;3}f_{m+3}(0).x^3$$

. . . .

's tétessék x helyett $x+k$, lesz:
$$\frac{f^m(x+k)}{2.3..m}=f_m(0)+(m+1)f_{m+1}(0).(x+k)$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)}{1\;.\;2}f_{m+2}(0).(x+k)^2$$
$$+\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1\;.\;2\;.\;3}f_{m+3}(0).(x+k)^3$$

. . . .

$$=f_{m}(0)+(m+1)f_{m+1}(0).x$$
$$+\frac{(m+2)\,(m+1)}{1\;.\;2}f_{m+2}(0).x^2$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$
$$+k\,[\,(m+1)f_{m+1}(0)$$
$$+(m+2)\,(m+1)f_{m+2}(0).x$$
$$+\frac{(m+3)(m+2)\,(m+1)}{1\;.\;2}f_{m+3}(0).x^2$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\;]$$
$$+k^2\,[.\;.\;.]+k^3\,[.\;.\;.\;.]$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

hol a' k nélküli sor nyilván $=\frac{f^m x}{2\,.\,3..m}$, lesz tehát, ha ezt mindjárt a bal oldalra teszszük, 's mindent k által osztunk és $2\,.\,3\,..\,m$ által szorzunk:

$$\frac{f^m(x+k)-f^m x}{k}=2\,.\,3\,..\,m\,(m+1)\,[f_{m+1}(0)$$
$$+(m+2)\,f_{m+2}(0).x$$
$$+\frac{(m+3)\,(m+2)}{1\;.\;2}f_{m+3}(0).x^2$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad]$$

azaz, az elenyészés' esetében:

$$\frac{f^{m+1}x}{2.3\,..\,(m+1)}=f_{m+1}(0)$$
$$+(m+2)f_{m+2}(0).x$$
$$+\frac{(m+3)\,(m+2)}{1\;.\;2}f_{m+3}(0).x^2$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

azaz, épen az, mi k^{m+1}' szorzója a' binomiumok' kifejtésénél fogva. Ennek okvetetlen következése, hogy ha k^{m}' szorzója

$$\frac{f^{m}x}{2.3..m},$$

k^{m+1} — é szükségképen ez:

$$\frac{f^{m+1}x}{2.3..(m+1)}.$$

Ha tehát k' szorzója (mint már fölebb találtuk)

$$f'x$$

lesz k^2 — é:

$$\frac{f''x}{2}$$

minthogy pedig ez így van, k^3 — é:

$$\frac{f'''x}{2.3}$$

'stb. Hogy ez által az (5) tétel közönségesen bebizonyul, magában világos.

10. §.

Melly föltételek alatt kellessék e' sort használni, részint az előbbi előadásból tetszik ki, részint itt bővebben fejtegetni nem lehet. Elég legyen érinteni, hogy a' következőben a' kivétel' esete nem fordul elő.

E' tételnél fogva, melly Taylor' sorának neveztetik, a' leszármaztatás' első főszabályait lehozni igen könnyü. Legyen:

α) $\qquad Fx = fx + \varphi x + \psi x + ..$

tehát. $\qquad F(x+k) = f(x+k)$
$\qquad\qquad + \varphi(x+k)$
$\qquad\qquad + \psi(x+k)$

$$=fx+f'x.k+\frac{f''x}{2}.k^2+..$$
$$+\varphi x+\varphi' x.k+\frac{\varphi'' x}{2}.k^2+..$$
$$+\psi x+\psi' x.k+\frac{\psi'' x}{2}.k^2+..$$

. . . .

azaz helyes elrendelés után, minthogy itt az első függő sor $=Fx$:

$$F(x+k)=Fx$$
$$+k[f'x+\varphi'x+\psi'x+..]$$
$$+k^2\left[\frac{f''x}{2}+\frac{\varphi''x}{2}+\frac{\psi''x}{2}+..\right]$$

. . . .

tehát:

$$\frac{F(x+k)-Fx}{k}=f'x+\varphi'x+\psi'x+\ldots$$
$$+k\left[\frac{f''x}{2}+\frac{\varphi''x}{2}+\frac{\psi''x}{2}+..\right]$$

. . . .

és az elenyészés' esetében:

$$F'x=f'x+\varphi'x+\psi'x+\ldots$$

Minthogy pedig általában, ha:

$$fx=-\varphi x,$$

ugyan azon módon megmutathatni, hogy:

$$f'x=-\varphi'x$$

lesz közönségesben, midőn:

$$Fx=fx\pm\varphi x\pm\psi x\pm\ldots,$$

az első származék:

$$F'x=f'x\pm\varphi'x\pm\psi'x\pm\ldots$$

melly tételt szavakkal kimondani igen könnyü.

11. §.

Legyen (β):

$$Fx = fx \,.\, \varphi x \,.\, \psi x \ldots$$

lesz egyszersmind:

$$F(x+k) = f(x+k)\varphi(x+k)\psi(x+k)\ldots$$

$$= \left[fx + f'x \,.\, k + \frac{f''x}{2} \,.\, k^2 + \ldots\right]$$

$$\times \left[\varphi x + \varphi' x \,.\, k + \frac{\varphi'' x}{2} \,.\, k^2 + \ldots\right]$$

$$\times \left[\psi x + \psi' x \,.\, k + \frac{\psi'' x}{2} \,.\, k^2 + \ldots\right]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

azaz k' kitevői szerint elrendelve:

$$\begin{aligned} F(x+k) = fx \,.\, \varphi x \,.\, \psi x \ldots & \\ + k [\, f'x \,.\, \varphi x \,.\, \psi x \ldots & \\ + fx \,.\, \varphi' x \,.\, \psi x \ldots & \\ + fx \,.\, \varphi x \,.\, \psi' x \ldots \,] & \\ + k^2 [\, fx \,.\, \varphi' x \,.\, \psi' x \ldots & \\ + f'x \,.\, \varphi x \,.\, \psi' x \ldots & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \,] & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \end{aligned}$$

azaz, mint fölebb:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+k) - Fx}{k} = f'x \,.\, \varphi x \,.\, \psi x \ldots & \\ + fx \,.\, \varphi' x \,.\, \psi x \ldots & \\ + fx \,.\, \varphi x \,.\, \psi' x \ldots & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ + k [\, \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \end{aligned}$$

és $k = 0$ levén:

$$\begin{aligned} F'x = & f'x \,.\, \varphi x \,.\, \psi x \ldots \\ & + fx \,.\, \varphi' x \,.\, \psi x \ldots \\ & + fx \,.\, \varphi x \,.\, \psi' x \ldots \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Azon különös esetben, midőn:

$$fx = \varphi x = \psi x = \ldots$$

's ezen szorzók' száma m, szemlátomást egyfelül:

$$Fx = [fx]^m,$$

másfelül pedig:

$$F'x = m[fx]^{m-1} \,.\, f'x.$$

12. §.

γ) Legyen:

$$Fx = \frac{fx}{\varphi x},$$

azaz:

$$fx = Fx \,.\, \varphi x,$$

tehát az imént mondottak szerint:

$$f'x = F'x \,.\, \varphi x + Fx \,.\, \varphi' x$$

's ebből:

$$F'x = \frac{f'x - Fx \,.\, \varphi' x}{\varphi x}$$

avvagy a' számolót és nevezőt φx által szorozva, 's minthogy:

$$Fx \,.\, \varphi x = fx;$$

lesz:

$$F'x = \frac{\varphi x \,.\, f'x - fx \,.\, \varphi' x}{(\varphi x)^2}$$

δ) Már előbb láttuk, hogy midőn e' kitételben:

$$Fx = [fx]^m$$

m egész állító szám; akkor

$$F'x = m[fx]^{m-1} \,.\, f'x.$$

Ez akkor is áll, midőn:

α) m tört szám. Legyen tehát:

$$Fx = [fx]^m,$$

és:

$$m = \frac{\alpha}{\beta},$$

lesz:

$$Fx = [fx]^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

következőleg:

$$[Fx]^{\beta} = [fx]^{\alpha},$$

melly egyenletben mind α, mind β egész szám. Ennek következésében leend:

$$\beta\,[Fx]^{\beta-1} . F'x = \alpha\,[fx]^{\alpha-1} . f'x$$

tehát:

$$F'x = \frac{\alpha}{\beta} . \frac{[fx]^{\alpha-1}}{[Fx]^{\beta-1}} . f'x .$$

minthogy pedig:

$$\frac{[fx]^{\alpha-1}}{[Fx]^{\beta-1}} = \frac{Fx}{fx}\,\frac{[fx]^{\alpha}}{[Fx]^{\beta}}$$

és az előbbinél fogva:

$$[fx]^{\alpha} = [Fx]^{\beta}$$

azaz:

$$\frac{[fx]^{\alpha}}{[Fx]^{\beta}} = 1,$$

lesz:

$$F'x = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{Fx}{fx}\,.f'x$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}[fx]^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\,.f'x.$$

β') midőn m tagadó. Legyen tehát

$$m = -n$$

és:

$$Fx = [fx]^{-n}$$

lesz az egyenlet' mind két oldalát

$$[fx]^{n}\text{-nel}$$

szorozva:

$$Fx\,.\,[fx]^{n} = 1\,,$$

következőleg:

$$F'x\,.\,[fx]^{n} + nFx\,.\,[fx]^{n-1}\,.f'x = 0$$

tehát:

$$F'x = -\frac{nFx\,[fx]^{n-1}}{[fx]^{n}}\,.f'x$$

$$= -\frac{nFx}{fx}\,.f'x$$

$$= -n[fx]^{-n-1}\,.f'x\,.$$

13. §.

Az előbbi tételekben a' binomium egész 's állító kitevőkre nézve használtatott. Könnyü lesz már most azt minden (akár állító, akár tagadó; akár egész, akár tört) kitevőkre nézve megmutatni. Legyen ezen kitételben:

$$Fx = [fx]^{m},$$

mellynek első származéka, akármit jelentsen m,

$$F'x = m[fx]^{m-1}\,.f'x$$

legyen, mondom:

$$fx = x,$$

tehát: $[fx]^m = x^m$,

és $f'x = 1$,
mi már az értelemhatározásból is következik. Ennél fogva tehát:

$$Fx = x^m$$
$$F'x = mx^{m-1}$$
$$F''x = m(m-1)x^{m-2}$$
$$F'''x = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

's ezen értékeket (5)-be téve, lesz:

$$(x+k)^m = x^m + mx^{m-1}.k + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}.k^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Világos, hogy e' szerint a' binomium m-nek akarmelly véges és való értékére nézve meg van mutatva. De mi e' szép tárgyba bővebben nem bocsátkozhatunk.

14. §.

Minden illyetén kitétel

$$\sqrt[m]{-a},$$

mellyben m páros szám, avvagy

$$\sqrt[2n]{-a},$$

mellyben n páros vagy páratlan, képtelen avvagy képzeleti mennyiségnek neveztetik; mert $-a$, mint páros hatvány sem állító sem tagadó gyökérből nem eredhet. Minthogy pedig

$$-a = a \times -1,$$

nyilván való, hogy

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \,.\, \sqrt[2n]{-1};$$

melly kifejezésben $\sqrt[n]{a}$ képes mennyiség 's a' képtelenség csak $\sqrt[2n]{-1}$-et illeti. S minden illyetén

$$\sqrt[2n]{-1} \text{ tehát } \sqrt[2n]{-a}$$

mennyiséget is a' következő alakba

$$\alpha + \beta . \sqrt{-1}$$

önthetni, hol α és β képesek.

Hogy ezt megmutathassam, egy segédtételre van szükségünk, melly Moivre' tétele név alatt, egyéb tekintetekben is igen nevezetes.

Ha e' két mennyiség

$$\begin{aligned} &\text{Cos } \varphi + i \sin \varphi \\ &\text{Cos } \varphi' + i \sin \varphi'; \end{aligned}$$

mellyekben $i = \sqrt{-1}$, egymással sokszoroztatik, látható, hogy a' sokszorozmány

$$\begin{aligned} &\text{Cos } \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi' \\ &+ i (\sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi') \\ &= \cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi'); \end{aligned}$$

's midőn három az adott sokszorozó, azaz, ha az előbbi két sokszorozóhoz, még ez

$$\cos \varphi'' + i \sin \varphi''$$

járul, látható, hogy az eredmény ez:

$$\cos (\varphi + \varphi' + \varphi'') + i \sin (\varphi + \varphi' + \varphi'').$$

A' sokszorzást hasonló alakú sokszorzókkal folytatván, meggyőződünk, hogy általában:

$$\begin{aligned} &(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ \times &(\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ \times &(\cos \varphi'' + i \sin \varphi'') \ldots \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

$$= \cos (\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) + i \sin (\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots)$$

a' mellyből, midőn

$$\varphi = \varphi' = \varphi'' = \varphi''' \ldots .$$

egyszerűen következik m-nek egész állító értékeire nézve

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi.$$

Ezen alakból közvetlenül következik

$$(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)^{\frac{1}{m}} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

's minthogy ez φ-nek akarmelly értékére nézve áll, lesz ha φ helyett $\frac{\varphi}{m}$ iratik — minél fogva tahát $m\varphi$ helyett φ-t kell irni —

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m},$$

's ha ezen egyenlet az előbbi szerint az n-dik hatványra emeltetik, lesz:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n}{m}.\varphi + i\sin\frac{n}{m}.\varphi,$$

mi által bebizonyúl, hogy a' feljebbi egyenlet tört kitevőkre nézve is megáll.

Végül, minthogy

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi).(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1,$$

mert

$$= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi,$$

következik, hogy

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}$$
$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1}$$

's minthogy

$$\cos\varphi = \cos(-\varphi)$$
$$-\sin\varphi = \sin(-\varphi),$$

nyilván lesz

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$$

és általában

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} = \cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi);$$

mik által a'

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$$

tételnek általános volta m-nek egész és törött, állító és tagadó létére nézve meg van mutatva.

A' tétel áll, midőn φ tagadó is, mellyből következik, hogy

$$(\cos\varphi - i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi - i\sin m\varphi$$

's e' két esetet együvé foglalva tehát

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi \pm i\sin m\varphi.$$

Legyen már most

$$\varphi = \pi,$$

tehát

$$\cos\varphi = -1,$$
$$\sin\varphi = 0;$$

lesz egyszersmind

$$(-1)^m = \cos m\pi \pm i\sin m\pi$$

következőleg

$$\sqrt[2n]{-1} = \cos\frac{\pi}{2n} \pm \sqrt{-1}\,.\sin\frac{\pi}{2n},$$

melly kifejezésben

$$\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2n}$$

$$\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2n}$$

n-nek képes voltához képest, magok is képes mennyiségek; mit meg kell vala mutatni.

Ezt előre bocsátva állítom, hogy az illy

$$p + q\,.\sqrt{-1}$$

kitételek, minden állító tagadó 'stb. való és képzeleti mennyiségeknek képviselői. Az utolsót épen most láttuk, az elsőre nézve, hogy t. i.

$$p+q.\sqrt{-1}$$

való mennyiséget is jelentsen $q$el kell enyésztetni; az az midőn

$$p+q.\sqrt{-1}$$

képes mennyiség, akkor $q=0$.

15. §.

Legyenek több illyetén kitételek adva:

$$p+q\sqrt{-1}$$
$$p'+q'\sqrt{-1}$$
$$p''+q''\sqrt{-1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

az olvasó könnyen meggyőződhetik arról:

α) hogy képzeleti mennyiségek' öszvete vagy különbsége maga is képzeleti. Mert ezen öszvet:

$$=[p+p'+p''+..]+[q+q'+q''+..]\sqrt{-1}$$

a' kölönbség pedig:

$$=[p\pm p'\pm p''\pm..]+[q\pm q'\pm q''\pm..]\sqrt{-1}.$$

β) hogy két, tehát akar hány képzeleti mennyiségek' szorzata, vagy hányasa is képzeti; mert:

$$[p+q\sqrt{-1}]\times[p'+q'\sqrt{-1}]$$
$$=pp'-qq'+(pq'+p'q)\sqrt{-1},$$

vagy is, ha:

$$pp'-qq'=P$$
$$pq'+p'q=Q,$$
$$[p+q\sqrt{-1}]\times[p'+q'\sqrt{-1}]$$
$$=P+Q\sqrt{-1};$$

minek közvetlen következése, hogy:

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}}=p'+q'\sqrt{-1},$$

's ezen esetben p' és q' a'

$$pp'-qq'=P$$
$$pq'+p'q=Q$$

egyenletek által határoztatik meg.

16. §.

Ollyan kitételek, mint:

$$p+q\sqrt{-1}$$
$$p-q\sqrt{-1},$$

mellyek t. i. csak q' előjegye által különböznek egymástól, összerendelt kifejezéseknek neveztethetnek. Továbbá p és q négyszögei' összetének, négyszög-gyökere, azaz:

$$\sqrt{p^2+q^2}$$

a' mondott képzeleti kitétel' modulusának neveztetik. Miből következik, minthogy:

$$(+q)^2=(-q)^2,$$

hogy két összerendelt kifejezésnek ugyan azon egy modulusa van: Tudjuk, hogy

$$p+q\sqrt{-1}$$

való mennyiségeknek is képviselője, azon föltétel alatt, hogy

$$q=0.$$

E' szerint tehát a való mennyiségnek modulusa

$$\sqrt{p^2}=p,$$

azaz a' való mennyiség maga.

Közép-mennyiség, más adatott mennyiségekre nézve, az, melly ezen utolsók' legnagyobbikánál nem nagyobb, legkisebbikénél nem kisebb. Ebből következik, hogy adatott mennyiségek közt több közép is lehető, s hogy mindazáltal ez utolsó az elsőktől függ, melly függést M (*media seu quantitas τῶν*) által jelelünk. Igy például, ha advák:

$$a, b, c..k$$

hol a a' legkisebb, k a' legnagyobb lesz:

$$a, b, c...k$$
$$= M[a, b, c..k],$$

avvagy közönségesben, ha m és a' állítók, és

$$a + ma' \overset{=}{<} k;$$

$$a + ma' = M[a, b, c...k].$$

számokban:

$$-10, -9.. -1, 0, 1.. 4, 5$$
$$= M[-10, -2, 1, 3, 5].$$

17. §.

Az értelem-határozásból az is következik, hogy ha a a' legkisebb, k a' legnagyobb, és α valamelly közép mennyiség, e' kitételek

$$a - \alpha, \alpha - k$$

mindig állítók, a' semmit is állítónak véve, azaz:

$$a - \alpha \overset{=}{>} 0$$

$$\alpha - k \overset{=}{>} 0,$$

minek következése, hogy:

$$(a-\alpha)\ (\alpha-k) \overset{=}{>} 0,$$

azaz, hogy illyetén két kitétel' szorzata is állító. És visszont, ha:

$$(a-\alpha)\ (\alpha-k) \overset{=}{>} 0,$$

azaz állító, meg lehet mutatni, hogy α, a és k között közép mennyiség. Mert:

α) Legyen

$$(a-\alpha)\ (\alpha-k) = 0,$$

azaz vagy:

$$a-\alpha = 0$$

vagy:

$$\alpha-k = 0.$$

Az első esetben:

$$a = \alpha,$$

tehát α nem kisebb a-nál; továbbá a' második szorzó, melly most ezzé lesz:

$$a-k,$$

ha állító

$$a-k > 0$$

tehát:

$$a > k,$$

és k a' kisebbik. Ellenben ha tagadó:

$$a-k < 0,$$

tehát:

$$k > a.$$

Azaz, minden esetben, akár k a' kisebbik, akár a az, ha

$$(a-\alpha)\ (\alpha-k) = 0$$

és

$$a-\alpha = 0,$$

α közép mennyiség. Szintúgy mutathatni meg a' tétel' helyességét akkor is, midőn

$$\alpha - k = 0.$$

β) Legyen továbbá:

$$(a - \alpha)\ (\alpha - k) > 0\ ,$$

mi csak úgy lehet, ha a' két szorzó ugyan azon előjegyű. 'S legyen itt először mind a' kettő állító, azaz:

$$a - \alpha > 0$$
$$\alpha - k > 0,$$

kitetszik, hogy:

$$a > \alpha$$
$$\alpha > k$$

azaz

$$a > \alpha > k,$$

's így α közép mennyiség a és k között. Ha pediglen mind a' kettő tagadó, lesz:

$$a - \alpha < 0$$
$$\alpha - k < 0,$$

tehát:

$$a < \alpha$$
$$\alpha < k,$$

's elrendelve:

$$k > \alpha > a,$$

's α ekkor is közép mennyiség, csakhogy midőn mind a' két szorzó állító

$$a > k,$$

ellenben pedig, mikor mind a' kettő tagadó

$$k > a.$$

18. §.

Midőn:

$$\alpha = M[a,\ b,\ c \ldots k],$$

lesz mindig:

$$ma = M[ma,\ mb,\ mc\ ..\ mk],$$

akár állító, akár tagadó legyen m. Az előbbi szerint:

$$(a - \alpha)\ (\alpha - k) \overset{=}{>} 0,$$

továbbá minden esetre:

$$m^2 > 0,$$

mert minden négyszög állító. Tehát:

$$m^2(a - \alpha)\ (\alpha - k),\ \text{azaz}$$

$$m(a - \alpha)\ .\ m(\alpha - k) \overset{=}{>} 0,$$

avvagy a' szorzást végbe víve:

$$(ma - m\alpha)\ (m\alpha - mk) \overset{=}{>} 0,$$

's így:

$$m\alpha = M[ma,\ mk].$$

minthogy pedig:

$$mk > .. > mc > mb > ma;$$

midőn m állító, 's

$$mk < .. < mc < mb < ma,$$

midőn az tagadó, nyilvánvaló, hogy:

$$m\alpha = M[ma,\ mb,\ mc\ ..\ mk].$$

19. §.

Ha

$$\alpha = M[a,\ b,\ c\ ..\ k]$$

lesz:

$$\alpha \pm m = M[a \pm m,\ b \pm m\ ..\ k \pm m].$$

Az előbbi szerint:

$$(a - \alpha)\ (\alpha - k) \overset{=}{>} 0,$$

tehát:

$$[a \pm m - (\alpha \pm m)]\ [\alpha \pm m - (k \pm m)] \underset{>}{=} 0,$$

következőleg:

$$\alpha \pm m$$

közép mennyiség

$$a \pm m \text{ és } k \pm m$$

között, azaz:

$$\alpha \pm m = M\,[a \pm m,\ k \pm m].$$

Minthogy pedig, mint fölebb:

$$k \pm m > \ldots > b \pm m > a \pm m$$

átalában áll az is, hogy:

$$\alpha \pm m = M\,[a \pm m,\ b \pm m \ldots k \pm m].$$

20. §.

Midőn:

$$a,\ b,\ c \ldots k > 0,$$

azaz állítók és:

$$\alpha = M\,[a,\ b,\ c \ldots k],$$

lesz, bár mit jelentsen m:

$$\alpha^m = M\,[a^m,\ b^m,\ c^m \ldots k^m].$$

mert, mint fölebb:

$$(a - \alpha)\ (\alpha - k) \underset{>}{=} 0,$$

's itt, midőn

$$a - \alpha = 0$$

vagy

$$\alpha - k = 0$$

szemlátomást:

$$(a^m - \alpha^m)\ (\alpha^m - k^m) = 0,$$

tehát:

$$\alpha^m = M\,[a^m,\ k^m].$$

A második esetben pedig:

$$a < \alpha$$
$$\alpha < k,$$

's ekkor, ha m állító:

$$a^m < \alpha^m$$
$$\alpha^m < k^m,$$

azaz:

$$a^m - \alpha^m < 0$$
$$\alpha^m - k^m < 0,$$

minthogy pediglen két tagadó mennyiség' szorzata állító, lesz:

$$(a^m - \alpha^m)\ (\alpha^m - k^m) > 0.$$

Ha pedig m tagadó:

$$\alpha^m < a^m$$
$$\alpha^m < \alpha^m,$$

következőleg:

$$a^m - \alpha^m > 0$$
$$\alpha^m - k^m > 0$$

tehát, két állító mennyiségnek szorzata is állító levén:

$$(a^m - \alpha^m)\ (\alpha^m - k^m) > 0.$$

Közönségesen tehát, akár állító, akár tagadó legyen m:

$$\alpha^m = M[a^m, k^m].$$

Minthogy pedig, midőn m állító:

$$k^m > .. > c^m > b^m > a^m,$$

's midőn tagadó:

$$k^m < .. < c^m < b^m < a^m,$$

közönségesen:

$$\alpha^m = M[a^m, b^m, c^m \ldots k^m].$$

Azon különös esetben, midőn $m = \frac{1}{2}$, lesz:

$$\sqrt{\alpha} = M[\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} \ldots \sqrt{k}].$$

21. §.

Ezeket előre bocsátva, állítjuk, hogy két képzeleti mennyiség' összvetének vagy különbségének, modulusa középmennyiség ezen képzeleti mennyiségek' modulusainak özszvete és különbsége között.

α.) Legyen adva:

$$p + q\sqrt{-1}$$
$$p' + q'\sqrt{-1}.$$

Lesz a' mondott összvet:

$$(p + p') + (q + q')\sqrt{-1},$$

's ennek modulusa:

$$\sqrt{(p + p')^2 + (q + q')^2},$$

azaz:

$$= \sqrt{p^2 + p'^2 + 2(pp' + qq') + q^2 + q'^2}.$$

Továbbá a' képzeleti mennyiségek' modulusai:

$$\sqrt{p^2 + q^2}$$
$$\sqrt{p'^2 + q'^2},$$

's ezeknek összvete:

$$\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p'^2 + q'^2},$$

különbségök:

$$\sqrt{p^2 + q^2} - \sqrt{p'^2 + q'^2}.$$

Azt állítjuk pedig, hogy

$$\sqrt{p^2 + p'^2 + 2(pp' + qq') + q^2 + q'^2}$$

közép mennyiség

$$\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p'^2 + q'^2}$$

és:

$$\sqrt{p^2 + q^2} - \sqrt{p'^2 + q'^2}$$

között. Meg lesz az mutatva, ha az épen mondottak szerint megmutathatjuk, hogy:

és $\qquad [\sqrt{p^2 + p^2} - \sqrt{p'^2 + q'^2}]^2$

$$p^2+p'^2+2(pp'+qq')+q^2+q'^2=a$$

közepe ezeknek:

$$[\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{p'^2+q'^2}]^2$$

és

$$[\sqrt{p^2+q^2}-\sqrt{p'^2+q'^2}]^2$$

avvagy ezeknek:

$$p^2+p'^2+2\sqrt{(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)}+q^2+q'^2=a$$
$$p^2+p'^2-2\sqrt{(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)}+q^2+q'^2=a'.$$

Először itt:

$$a-\alpha$$
$$=2\sqrt{(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)}-2(pp'+qq')$$

és

$$\alpha-a'$$
$$=2\sqrt{(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)}+2(pp'+qq')$$

tehát:

$$(a-\alpha)(\alpha-a')$$
$$=4(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)-4(pp'+qq')^2.$$

Másodszor:

$$(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)$$
$$=p^2p'^2+p^2q'^2+p'^2q^2+q^2q'^2,$$

aztán:

$$(pp'+qq')^2=p^2p'^2+2pp'qq'+q^2q'^2,$$

minél fogva:

$$(a-\alpha)(\alpha-a')$$
$$=4(p^2q'^2-2pp'qq'+p'^2q^2)$$
$$=4(pq'-p'q)^2,$$

mi, mint négyszög, szükségképen állító 's ennél fogva igaz, hogy α közép-mennyiség a és a' között. Minthogy pedig, a' mint épen most láttuk:

$$p^2+p'^2+2(pp'+qq')+q^2+q'^2$$

közép-mennyiség

$$[\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{p'^2+q'^2}]^2$$

és $[\sqrt{p^2+p^2} - \sqrt{p'^2+q'^2}]^2$

között, lesz, négyszög gyökerekre menvén által:

$$\sqrt{p^2+p'^2+2(pp'+qq')+q^2+q'^2}$$

közép-mennyiség:

$$\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{p'^2+q'^2}$$

és:

$$\sqrt{p^2+q^2}-\sqrt{p'^2+q'^2}$$

között; a' mi által tételünk' első része meg van mutatva.

22. §.

β) Legyen ismét adva:

$$p+q\sqrt{-1}$$
$$p'+q'\sqrt{-1}.$$

Ezeknek különbsége:

$$(p-p')+(q-q')\sqrt{-1}.$$

Már most ugyan azon módon, mint fölebb, megmutathatjuk, hogy

$$\sqrt{(p-p')^2+(q-q')^2}$$

közép-mennyiség

$$\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{p'^2+q'^2}$$

és:

$$\sqrt{p^2+q^2}-\sqrt{p'^2+q'^2}$$

között. Egyszerűbb azonban, ha a' fölebbi lehozásokban.

p' helyett ezt $-p'$

q' „ „ $-q'$

irjuk, minél fogva a' végkövetkezet ez:

$$(a-\alpha)\,(\alpha-a')=4\,(p'q-pq')^2,$$

azaz ekkor is négyszög, tehát állító lesz, miáltal a' 21. §. tétel' második része is meg van mutatva. Mindezekből az is következik, hogy akar hány képzeleti mennyiség' öszvetének modulusa soha nagyobb nem lehet, mint az egyes képzeleti mennyiségek' modulusainak öszvete.

§. 23.

Ha fx (vagy átalában, vagy bizonyos határok között) folytonos *) és $f'x$ meghatározott véges mennyiség, melly $\gtrless 0$, akkor:

α) midőn $f'x > 0$, azaz állító, fx és x egy időn növekednek és kisebbednek;

β) midőn $f'x < 0$, azaz tagadó, fx nagyobbodik, midőn x kisebbedik, és megfordítva.

Az előbbi szerint:

$$f(x+k)=fx+f'x.k+\frac{f''x}{2}.k^2+\frac{f'''x}{2.3}.k^3+\ldots$$

fx növekedése tehát:

$$f(x+k)-fx=f'x.k+\frac{f''x}{2}.k^2+\frac{f'''x}{2.3}k^3+\ldots$$

Ha itt először $f'x>0$, minthogy k-nak olly csekély (végtelen kicsiny, vagy ahhoz közeledő) értéket adhatni, hogy az előjegyeket nem tekintve

$$f'xk>\frac{f''x}{2}.k^2+\frac{f'''x}{2.3}.k^3+\ldots$$

legyen, akkor magában világos, hogy

$$f(x+k)-fx \text{ és } f'xk$$

azaz tulajdonképen

$$f(x+k)-fx \text{ és } k$$

előjegyei egyenlők, minek következésében a' tétel' első

*) Folytonos függvénynek neveztetik az, melly úgy függ más mennyiségtől, hogy ennek végtelen kis változásával maga is csak végtelen kicsinynyel változzék.

része bebizonyúl. Másodszor, midőn $f'x < 0$, ugyan azon lépzeteknél fogva:

$$f(x+k)-fx \text{ és } f'xk$$

előjegyei egyenlők lévén;

$$k \gtrless 0,$$

midőn

$$f(x+k)-fx \lessgtr 0.$$

'S ez által a' tétel' második része bebizonyúl.

24. §.

Legyen fx és φx két függvénye x-nek, mellyek, midőn $x=\alpha$, megsemmisülnek, úgy hogy

$$f\alpha = 0$$
$$\varphi\alpha = 0$$

legyen, 's legyenek első származékaik folytonosak $x=\alpha$ és $x=\beta$ között, továbbá $\varphi' x$ a' mondott határok között jegyváltozást ne szenvedjen, végre legyenek m és μ azon értékei x-nek, ugyan azon határok között, mellyekre nézve e' kitétel:

$$\frac{f'x}{\varphi' x}$$

illetőleg legnagyobb és legkisebb értékü, azaz, hogy mindig

$$\frac{f'm}{\varphi' m} \geqq \frac{f'x}{\varphi' x}$$

$$\frac{f'\mu}{\varphi' \mu} \leqq \frac{f'x}{\varphi' x}$$

legyen, akkor megmutathatni, hogy

$$\frac{f\beta}{\varphi\beta} = M\left[\frac{f'm}{\varphi'm}, \frac{f'\mu}{\varphi'\mu}\right].$$

A' föltételek szerint, ha az egyenlőség' esetét, melly itt semmi különös nehézséget nem okoz, nem tekintve:

$$\frac{f'm}{\varphi'm} - \frac{f'x}{\varphi'x} > 0$$

$$\frac{f'\mu}{\varphi'\mu} - \frac{f'x}{\varphi'x} < 0$$

azaz:

$$\varphi'x.\frac{f'm}{\varphi'm} - f'x > 0$$

$$\varphi'x.\frac{f'\mu}{\varphi'\mu} - f'x < 0,$$

melly kitételek szemlátomást a' következőknek

$$\varphi x.\frac{f'm}{\varphi'm} - fx, \text{ és}$$

$$\varphi x.\frac{f'\mu}{\varphi'\mu} - fx,$$

minthogy

$$\frac{f'm}{\varphi'm} \text{ és } \frac{f'\mu}{\varphi'\mu}$$

állandók, első származékai. A' föltételeknél fogva:

$$\varphi\alpha.\frac{f'm}{\varphi'm} - f\alpha = 0$$

$$\varphi\alpha.\frac{f'\mu}{\varphi'\mu} - f\alpha = 0,$$

tehát az előbbi §' értelmében, minthogy:

$$\varphi x \cdot \frac{f'm}{\varphi' m} - f x \text{ és}$$

$$\varphi x \cdot \frac{f'\mu}{\varphi'\mu} - f x \text{ származékai}$$

α-tól β-ig, mindig illetőleg állítók és tagadók, következik, hogy ezen kitételek' egyike ezen értektől fogva:

$$\varphi \alpha \cdot \frac{f'm}{\varphi' m} - f\alpha = 0$$

$$\varphi \alpha \cdot \frac{f'\mu}{\varphi'\mu} - f\alpha = 0$$

mindig növekedik, a' másik ellenben mindig kisebbedik, azaz, hogy a' mondott kitételek'

$$\varphi x \cdot \frac{f'm}{\varphi' m} - f x$$

$$\varphi x \cdot \frac{f'\mu}{\varphi'\mu} - f x$$

egyike mindig állító, másika mindig tagadó. Egyjegyüek lesznek tehát a' következők:

$$\varphi x \cdot \frac{f'm}{\varphi' m} - f x, \text{ és}$$

$$f x - \varphi x \cdot \frac{f'\mu}{\varphi'\mu},$$

következőleg:

$$\left[\varphi x \cdot \frac{f'm}{\varphi' m} - f x\right] \left[f x - \varphi x \cdot \frac{f'\mu}{\varphi'\mu}\right] > 0$$

vagy is, ha φx — x-xel osztunk, és a' tagokat megfordítjuk:

$$\left[\frac{fx}{\varphi x}-\frac{f'm}{\varphi' m}\right]\left[\frac{f'\mu}{\varphi'\mu}-\frac{fx}{\varphi x}\right]>0,$$

mi akkor való, midőn

$$x>\alpha$$

ha tehát x helyett β-t írunk, lesz:

$$\left[\frac{f\beta}{\varphi\beta}-\frac{f'm}{\varphi' m}\right]\left[\frac{f'\mu}{\varphi'\mu}-\frac{f\beta}{\varphi\beta}\right]>0,$$

's végre:

$$\frac{f\beta}{\varphi\beta}=M\left[\frac{f'm}{\varphi' m},\frac{f'\mu}{\varphi'\mu}\right].$$

Minthogy pedig

$$\frac{f'm}{\varphi' m}>\frac{f\beta}{\varphi\beta}$$

$$\frac{f'\mu}{\varphi'\mu}<\frac{f\beta}{\varphi\beta}$$

nyilván találtathatik x-nek ollyatén értéke ξ, mellyre nézve:

$$\frac{f\beta}{\varphi\beta}=\frac{f'\xi}{\varphi'\xi}$$

azaz, minthogy mind β, mind ξ α-nál nagyobb, azon föltétel alatt, hogy:

$$\beta=\alpha+k$$

$$\xi=\alpha+k_1,$$

$$\frac{f(\alpha+k)}{\varphi(\alpha+k)}=\frac{f'(\alpha+k_1)}{\varphi'(\alpha+k_1)}.$$

A' mondottak' értelmében:

$$\beta>\xi.$$

tehát:

$$a + k > a + k_1$$

's ebből

$$k > k_1$$

$$1 > \frac{k_1}{k},$$

minthogy pedig másfelül k és k_1 egyjegyűek, és semmitől különbözők, kitetszik, hogy

$$\frac{k_1}{k}$$

állító nagyság, tehát:

$$1 > \frac{k_1}{k} > 0.$$

Legyen már most

$$\theta = \frac{k_1}{k_1}$$

lesz egyfelül:

$$1 > \theta > 0,$$

azaz, θ valóságos állító törtszám; másfelül pedig:

$$k_1 = \theta k,$$

minek következésében a' fölebbi egyenletek ezekké válnak:

$$\frac{f(a+k)}{\varphi(a+k)} = \frac{f'(a+\theta k)}{\varphi'(a+\theta k)}$$

25. §.

Ha a' függvények:

$$fx, f'x, f''x, f'''x \ldots f^{(n-1)}x;$$
$$\varphi x, \varphi' x, \varphi'' x, \varphi''' x \ldots \varphi^{(n-1)}x,$$

midőn $x = \alpha$, elenyésznek, és a' következőkkel

$$f^{(n)}x \text{ és } \varphi^{(n)}x$$

α és $\alpha + k$ között folytonosak, és a mondott közben

$$\varphi' x,\ \varphi'' x,\ \varphi''' x,\ \varphi'''' x, \ldots \varphi^{(n)} x$$

semmi jegyváltozást nem szenvednek, mindig lesz:

$$\frac{f(\alpha + k)}{\varphi(\alpha + k)} = \frac{f^{(n)}(\alpha + \theta k)}{\varphi^{(n)}(\alpha + \theta k)}.$$

A föltételekből, és az előbbi §' értelmében tehát lesz:

$$\frac{f(\alpha + k)}{\varphi(\alpha + k)} = \frac{f'(\alpha + \theta k)}{\varphi'(\alpha + \theta k)},$$

$$\frac{f'(\alpha + \theta k)}{\varphi'(\alpha + \theta k)} = \frac{f''(\alpha + \theta\theta' k)}{\varphi''(\alpha + \theta\theta' k)},$$

$$\frac{f''(\alpha + \theta\theta' k)}{\varphi''(\alpha + \theta\theta' k)} = \frac{f'''(\alpha + \theta\theta'\theta'' k)}{\varphi'''(\alpha + \theta\theta'\theta'' k)},$$

. . . . .

$$\frac{f^{(n-1)}(\alpha + \theta\theta' \ldots k)}{\varphi^{(n-1)}(\alpha + \theta\theta' \ldots k)} = \frac{f^{(n)}(\alpha + \theta\theta' \ldots k)}{\varphi^{(n)}(\alpha + \theta\theta' \ldots k)}$$

Ebből egybeadás által és egyenlő tagok' kihagyása után következik:

$$\frac{f(\alpha + k)}{\varphi(\alpha + k)} = \frac{f^{(n)}(\alpha + \theta\theta' \ldots k)}{\varphi^{(n)}(\alpha + \theta\theta' \ldots k)},$$

hol $\theta\theta' \ldots$ való 's állító törtszám, tehát, ha azt egyszerűbben θ alatt értjük, lesz:

$$\frac{f(\alpha + k)}{\varphi(\alpha + k)} = \frac{f^{(n)}(\alpha + \theta k)}{\varphi^{(n)}(\alpha + \theta k)}.$$

26. §.

A' mondottakból következik:

$$f(\alpha+k)=\frac{\varphi(\alpha+k)}{\varphi^{(n)}(\alpha+\theta k)}\cdot f^{(n)}(\alpha+\theta k)$$

avvagy azon esetben, midőn

$$\alpha=0,$$

$$fk=\frac{\varphi k}{\varphi^{(n)}(\theta k)}\cdot f^{(n)}(\theta k).$$

Legyen már most n' egész állító értékeire nézve:

$$\varphi x=x^n,$$

tehát:

$$\varphi' x=nx^{n-1},$$
$$\varphi'' x=n(n-1)x^{n-2},$$
$$\varphi''' x=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi^{(n)}x=1.2.3..n$$

azaz, minthogy

$$\varphi^{(n)}x$$

x-től többé nem függ, szemlátomást:

$$\varphi^{(n)}(\theta k)=1.2.3..n,$$

föltéve, hogy φx 0-tól k-ig semmi jegyváltozást nem szenved, és az előbbi §§-ban tett föltételeknek megfelel, miről szemünk' láttára meggyőződhetünk. Ennél fogva tehát: a' fölebbi egyenlet

$$fk=\frac{\varphi k}{\varphi^{(n)}(\theta k)}\cdot f^{(n)}(\theta k)$$

ezzé lesz:

$$fk=\frac{k^n}{1.2.3..n}\cdot f^{(n)}(\theta k);$$

avvagy h helyett x-et téve:

$$fx = \frac{x^n}{1.2.3..n} \cdot f^{(n)}(\theta x) \,.$$

27. §.

Legyen:

$$\varphi x = fx - f(0) - xf'(0) - \frac{x^2}{1.2} f''(0) - .. - \frac{x^{n-1}}{1.(n-1)} f^{(n-1)}(0)$$

hol

$$fx;\ f'x,\ f''x,\ f'''x, \ldots f^{(n)}x$$

folytonos függvények. Leszármasztatás által ered.

$$\varphi' x = f'x - f'(0) - xf''(0) - .. - \frac{x^{n-2}}{1..(n-2)} f^{(n-1)}(0),$$

$$\varphi'' x = f''x - f''(0) - xf'''(0) - .. - \frac{x^{n-3}}{1..(n-3)} f^{(n-1)}(0),$$

$$\varphi''' x = f'''x - f'''(0) - xf''''(0) - .. - \frac{x^{n-4}}{1..(n-4)} f^{(n-1)}(0),$$

. . . .

$$\varphi^{(n-1)}x = f^{(n-1)}x - f^{(n-1)}(0),$$
$$\varphi^{(n)}x = f^{(n)}x.$$

Ebből látni: α) hogy a' függvények

$$\varphi x,\ \varphi' x,\ \varphi'' x,\ \varphi''' x \ldots \varphi^{(n-1)}x$$

$x=0$ és $x=x$ között folytonosak; β) hogy azok, midőn $x=0$, megsemmisülnek; γ) minthogy pedig átalában:

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}x$$

lesz, x helyett θx-et téve,

$$\varphi^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(\theta x).$$

Ennél fogva tehát, az imént mondottak szerint:

$$fx-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)-\frac{x^3}{1.2.3}.f'''(0)..$$

$$\ldots-\frac{x^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(0)=\frac{x^n}{1.2..n}f^{(n)}(\theta x)$$

azaz:

$$fx=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2..n}f^{(n)}(\theta x).$$

28. §.

Legyen továbbá:

$$x=a+y$$

és:

$$fx=Fy;$$

tehát:

$$f'x=F'y,$$
$$f''x=F''y,$$
$$f'''x=F'''y,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$f^{(m)}x=F^{(m)}y.$$

Minthogy pedig, midőn

$$y=0,$$
$$x=a$$

lesz:

$$f^{(m)}a=F^{(m)}(0).$$

Aztán, mivel

$$y=x-a$$

lesz:

$$a+\theta y = a + \theta(x - a).$$

Ezt előre bocsátva, tudjuk, hogy a' többször ismételt föltételek alatt:

$$Fy = F(0) + y\,F'(0) + \frac{y^2}{1.2}\,F''(0) + \frac{y^3}{1.2.3}\,F'''(0) + .$$
$$.. + \frac{y^n}{1.2..n}\,F^{(n)}(\theta y).$$

Ennél fogva tehát:

$$fx = fa + (x-a)\,f'a + \frac{(x-a)^2}{1.2}\,f''a + ..$$
$$.. + \frac{(x-a)^n}{1.2..n}\,f^{(n)}\left(\theta(x-a)\right).$$

Legyen végre

$$x - a = k$$

tehát:

$$x = a + k,$$

leend:

$$f(a+k) = fa + kf'a + \frac{k^2}{1.2}f''a + ..$$
$$+ \frac{k^n}{1.2..n}.f^{(n)}(a+\theta k),$$

avvagy a helyett x-et téve:

$$f(x+k) = fx + kf'a + \frac{k^2}{1.2}f''x + ..$$
$$+ \frac{k^n}{1.2..n}.f^{(n)}(x+\theta k).$$

Ha e' sort összehasonlítjuk a' 8. §-ban találttal, észre kell vennünk, miképen:

$$\frac{k^n}{1.2..n} f^{(n)}(x+\theta k) = \frac{k^n}{1.2..n} f^{(n)} x$$

$$+\frac{k^{n+1}}{1.2..(n+1)} \cdot f^{(n+1)} x$$

$$+\frac{k^{n+2}}{1.2..(n+2)} \cdot f^{(n+2)} x$$

. . . . . .

’S e’ kitétel:

$$\frac{k^n}{1.2..n} \cdot f^{(n)}(x+\theta k)$$

tehát a’ mondott sor’ (Taylor’ sorának) egészítménye, melly szerint tehát mindig:

$$f(x+k) = fx + k \cdot f'(x+\theta k),$$

$$= fx + k \cdot f' x + \frac{k^2}{1.2} f''(x+\theta k),$$

$$= fx + k \cdot f' x + \frac{k^2}{1.2} f'' x + \frac{k^3}{1.2.3} f'''(x+\theta k)$$

ELSŐ SZAKASZ.

EGYENLETEK' KÖZÖNSÉGES TULAJDONSÁGAI.

1. §.

A' meghatározott egyenletek' legközönségesb alakja:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Mx + N = 0,$$

hol

$$A,\ B,\ C \ldots M,\ N$$

akármelly véges számok és m egész állító; mert a' többi előfordulható eseteket mind erre lehet visszavinni. Ugyan is

α) Legyen adva:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + mx = 0,$$

melly kifejezés x-től független tag' hiával vagyon; lesz, ha azt x-xel osztjuk:

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + \ldots + lx + m = 0.$$

β) Legyen adva:

$$ax^{n'} + bx^{n'-1} + cx^{n'-2} + \ldots + mx + n = 0,$$

lesz a-val osztva:

$$x^{n'} + \frac{b}{a}x^{n'-1} + \frac{c}{a}x^{n'-2} + \ldots + \frac{m}{a}x + \frac{n}{a} = 0.$$

γ) Legyen adva:

$$x^n + \ldots + dx^{-p} + \ldots + fx^{-q} + \ldots + m = 0,$$

hol n, p, q.. egész állító számok, és

$$p > q,$$

tehát:

$$p - q > 0$$

azaz állító, lesz, ha az egyenletet x^{p}-vel szorozzuk:

$$x^{p+n} + \ldots + d + \ldots + fx^{p-q} + \ldots + mx^{p} = 0$$

hol a' kitevők nyilván egészek és állítók.

Például legyen:

$$x^{3} + ax^{-2} + bx^{-3} + c = 0,$$

lesz, x^{3}-mal szorozva:

$$x^{6} + ax + b + cx^{3} = 0,$$

avvagy elrendelve:

$$x^{6} + cx^{3} + ax + b = 0.$$

δ) A' legnehezebb eset ez, midőn a' kitevők tört számok, mint a' következőben:

$$x^{\frac{m}{n}} + \alpha x^{\frac{m'}{n'}} + \beta x^{\frac{m''}{n''}} + \ldots + \mu = 0$$

hol

$$m,\ m',\ m'' \ldots$$
$$n,\ n',\ n'' \ldots$$

egész állítók. Itt átalában emelésekkel segíthetni. Legyen például:

$$n'' > n,\ n' \ldots$$

lesz:

$$\beta x^{\frac{m''}{n''}} = - x^{\frac{m}{n}} - \alpha x^{\frac{m'}{n'}} - \ldots - \mu$$

és

$$\beta x^{m''} = \left[- x^{\frac{m}{n}} - \alpha x^{\frac{m'}{n'}} - \ldots - \mu \right]^{n''}$$

mi más egyenletre vezet, mellyben a' kitevők' nevezői kisebbek, mint fölebb. Aztán itt is azon tagot, mellynek kitevője a' legnagyobb nevezővel bir, az egyenletjel' egyik oldalára tevén, ismét emelni kell, 's a' munkát ez uton addig ismételni, mig végre egy csupán egész állító kitevőkkel ellátott egyenlet támad. Például legyen:

$$x^{1/2} + ax^{2/3} + b = 0,$$

lesz:

$$ax^{2/3} = -x^{1/2} - b, \text{ és}$$

$$a^3x^2 = -x^{3/2} - 3xb - 3b^2x^{1/2} - b^3.$$

Továbbá:

$$x^{1/2}\left(x + 3b^2\right) = -a^3x^2 - 3bx - b^3$$

és

$$x(x^2 + 6b^2x + 9b^4)$$

$$= a^6x^4 + 6a^3bx^3 + 9b^2x^2 + 2(a^3x^2 - 3bx)b^3 + b^6,$$

hol csak még az elrendelés van hátra. Szembetünő, melly bajos ezen eset' megfejtése; szerencsénkre azonban az alkalmaztatásban ritkán fordul elő. Nagy könynyebbségünkre vagyon, midőn:

$$x^{\frac{m}{n}} + \alpha x^{\frac{m'}{n}} + \beta x^{\frac{m''}{n}} + \ldots + \mu = 0,$$

azaz midőn a' nevezők mind egyenlők, mert ekkor, ha

$$x^{\frac{1}{n}} = x',$$

lesz:

$$x'^{m} + \alpha x'^{m'} + \beta x'^{m''} + \ldots + \mu = 0.$$

Stb.

2. §.

Minden felsőbb egyenletet:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots Mx + N = 0$$

átalában fx által fogunk jelelni, melly jelelés-módnál fogva tehát:

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0;$$

Ebből leszármaztatás' utján következik;

$$f'x = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2}$$
$$+ (m-2)Bx^{m-3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ M;$$

$$f''x = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)Ax^{m-3}$$
$$+ (m-2)(m-3)Bx^{m-4}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ L;$$

$$f'''x = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$+ (m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4}$$
$$+ (m-2)(m-3)(m-4)Bx^{m-5}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ K;$$

melly kifejezésekből világos, hogy midőn

$$m, A, B, C..M, N$$

véges mennyiségek, x' minden véges értékére nézve

$$fx, f'x, f''x, f'''x \ldots$$

is végesek, következőleg hogy:

$$f(x+k) = fx + f'x \,.\, k + \frac{f''x}{1.2} \,.\, k^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x + \theta k)}{1.2..n} \,.\, k^n$$

is k' minden véges értékére nézve véges. Ennél fogva tehát minden felsőbb egyenlet folytonos mennyiség, melly állító értéktől tagadóra csak a' semmin mehet keresztül, és megfordítva.

3. §.

A' közönséges alakból:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$

ha azt x^m-mel osztjuk és szorozzuk, mi által az egyenleten semmi változás nem történik, egyszerűen következik:

$$x^m \left[1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots + \frac{M}{x^{m-1}} + \frac{N}{x^m}\right] = 0.$$

Minthogy pedig itt x' bizonyos állító értékeire nézve mindig lehető, hogy:

$$1 > \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots + \frac{M}{x^{m-1}} + \frac{N}{x^m},$$

azaz, ha mind két felül x^m-mel szorozunk:

$$x^m > Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N,$$

világos, hogy minden felsőbb egyenletben x-nek olly értéke lehető, mellynél fogva az első tag a' többiek' összetét meghaladja. Ez azon esetben, midőn

$$x = \frac{1}{0} \; *)$$

azaz állító végetlen, magában világos. De lehetnek x-nek véges értékei is, mellyek e' föltételnek megfelelnek, miről könnyen meggyőződhetünk ekképen. Legyen K, számértékére nézve az

$$A, B, C, \ldots M, N$$

előszámok' legnagyobbika, lesz:

$$K\,[x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1]$$

*) Mi itt $\frac{1}{0}$ által jeleljük a' végetlen nagyot, minek okát kiki láthatja.

azaz:

$$K\left[\frac{x^m-1}{x-1}\right] > Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Mx+N.$$

Legyen továbbá:

$$x \overset{=}{>} K+1$$

tehát:

$$x-1 \overset{=}{>} K$$

és:

$$(x-1)x^m \overset{=}{>} Kx^m,$$

avvagy a' jobb oldalt K-val kisebbítve:

$$(x-1)x^m \overset{=}{>} K(x^m-1)$$

's ebből végre:

$$x^m \overset{=}{>} K\left[\frac{x^m-1}{x-1}\right].$$

Minthogy pedig a' fölebbi szerint:

$$K\left[\frac{x^m-1}{x-1}\right] > Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Mx+N,$$

annál inkább lesz:

$$x^m > Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Mx+N,$$

azon föltétel alatt t. i. hogy:

$$x \overset{=}{>} K+1.$$

4. §.

Hasonlólag megmutathatni, hogy az:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Mx+N=0$$

egyenletlen x-nek olly csekély értéket adhatni, melly-nél fogva N előjegyére nem tekintve:

$$N > x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx.$$

Legyen e' végre:

$$x = \frac{1}{x'},$$

$$x^2 = \frac{1}{x'^2},$$

$$x^3 = \frac{1}{x'^3}.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

tehát az egyenlet:

$$\frac{1}{x'^m} + \frac{A}{x'^{m-1}} + \frac{B}{x'^{m-2}} + \ldots + \frac{M}{x'} + N = 0$$

és x'^m-mel szorozva:

$$Nx'^m + Mx'^{m-1} + Lx'^{m-2} + \ldots + Ax' + 1 = 0$$

azaz:

$$x'^m + \frac{M}{N}x'^{m-1} + \frac{L}{N}x'^{m-2} + \ldots + \frac{A}{N}x' + \frac{1}{N} = 0.$$

Az előbbi §. szerint:

$$x'^m > \frac{M}{N}x'^{m-1} + \frac{L}{N}x'^{m-2} + \ldots + \frac{A}{N}x' + \frac{1}{N}$$

midőn

$$x' \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \frac{K}{N} + 1$$

$$\begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \frac{K+N}{N}.$$

Minthogy pedig

$$x' = \frac{1}{x},$$

lesz a' föltétel:

$$x \;\substack{=\\<}\; \frac{N}{K+N}.$$

Például legyen:

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

hol a' legnagyobb előszám 3, az utolsó 1, 's legyen:

$$x = 4.$$

Ennél fogva lesz nyilván:

$$x^3 = 64$$
$$x^2 = 16$$

tehát:

$$64 - 3.16 + 2.4 - 1 = 59$$

és szemlátomást

$$64 > -3.16 + 2.4 - 1.$$

Továbbá legyen:

$$x = \frac{1}{5},$$

$$x^2 = \frac{1}{25},$$

$$x^3 = \frac{1}{125},$$

azaz:

$$x = 0,2,$$
$$x^2 = 0,04,$$
$$x^3 = 0,008,$$

tehát:

$$0,008 - 3.0,04 + 2.0,2 - 1 = -0,712$$

következőleg:

$$1 > 0,008 - 3.0,04 + 2.0,2.$$

Minthogy tehát x-nek olly értéket adhatunk, hogy

$$N > x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Lx^2 + Mx$$

$$> Mx + Lx^2 + \ldots + Ax^{m-1} + x^m$$

lesz egyszersmind:

$$Nx > Mx^2 + Lx^3 + \ldots + Ax^m + x^{m+1},$$

azaz: minden többtagú kitételben (*polynomium*)

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + kx^2 + lx$$

x-nek olly értéke lehető, hogy az utolsó tag az által a' többiek' összeténél nagyobb legyen.

5. §.

Minden szám, melly x helyett az egyenletbe téve azt megsemmisíti, a mondott egyenletnek gyökere; 's minden egyenletben, mellynek előszámai való mennyiségek, 's mellynek, ha benne x helyett a és a' tétetik, ellenkező előjegyű értékei vannak, a és a' között legalább egy olly való számra α akadunk, hogy

$$f\alpha = 0,$$

tehát α az egyenlet' gyökere legyen.

Oszszuk föl az

$$a - a'$$

közt (*intervallum*) n egyenlő részre 's legyen egy egy olly rész $= k$, úgy hogy legyen

$$a - a' = nk.$$

Látni való, hogy e' függvényekben

$$fa', f(a' + k), f(a' + 2k) \ldots f(a' + nk)$$

azaz:

$$fa', f(a' + k), f(a' + 2k) \ldots fa$$

a' szélső tagok ellenkező előjegygyel birnak, minek következésében minden esetre két egymásmelletti tag

$$f(a'+hk),\ f(a'+(h+1)k)$$

találtatik, melly, szinte mint

$$fa \text{ és } fa',$$

ellenkező előjegyű. Másfelül világos, hogy

$$a'+hk \text{ és } a'+(h+1)k$$

között a' köz

$$k=\frac{1}{n}(a-a').$$

Legyen továbbá:

$$a'+hk=a_1$$
$$a'+(h+1)k=a',$$

azaz, a' köz

$$=a_1-a_1',$$

's legyen:

$$a_1-a_1'=nk',$$

minthogy a' föltétel szerint:

$$fa_1 \text{ és } fa_1'$$

ellenkező előjegyűek, a'

$$fa_1',\ f(a'_1+k'),\ .f(a_1'+2k')...fa_1$$

függvények közt minden esetre kettő találtatik, melly között a' jegyváltozás történik. Ezek, mint feljebb, a' következők:

$$a_1'+h'k' \text{ és } a_1'+(h'+1)k',$$

's az új köz tehát ez:

$$k'=\frac{1}{n}(a_1-a_1').$$

Ezen okoskodást folytatván, találjuk, hogy

$$k=\frac{1}{n}(a-a')$$

$$k'=\frac{1}{n}(a_1-a_1')$$

$$k'' = \frac{1}{n}\,(a_2 - a'_2)$$

$$k''' = \frac{1}{n}\,(a_3 - a'_3)$$

. . . .

Minthogy pedig itt szembetűnőleg:

$$a_1 - a'_1 = \frac{1}{n}\,(a - a')$$

$$a_2 - a'_2 = \frac{1}{n}\,(a_1 - a'_1)$$

$$a_3 - a'_3 = \frac{1}{n}\,(a_2 - a'_2)$$

. . . . .

kitetszik, hogy

$$k = \frac{1}{n}\,(a - a')$$

$$k' = \frac{1}{n^2}\,(a - a')$$

$$k'' = \frac{1}{n^3}\,(a - a')$$

$$k''' = \frac{1}{n^4}\,(a - a')$$

. . . .

A'

$$k^{(m)} = \frac{1}{n^{m+1}}\,(a - a')$$

közt olly annyira össze lehet szorítani, hogy:

$$\frac{1}{n^{m+1}}\,(a - a')$$

a' semmihez kényünk szerint közelítsen. Légyen

$$k^{(m)} = \alpha - \alpha'$$

azaz:

$$\alpha = \alpha' + k^{(m)}$$

lesz:

$$f\alpha = f(\alpha' + k^{(m)})$$

$$= f\alpha' + k^{(m)} f'\alpha + \frac{k^{(m)2}}{1.2} . f''\alpha + \ldots\ldots$$

's legyen

$$f\alpha > 0$$
$$f\alpha' < 0,$$

minek jelentése tulajdonképen az, hogy $f\alpha$ semminél kisebb, $f\alpha'$ annál nagyobb nem lehet. Midőn itt a' köz végtelen kicsinynyé válik, vagy is elenyészik, akkor nyilvánvaló hogy:

$$f\alpha = f\alpha',$$

következőleg $f\alpha$ semminél sem nagyobb, sem kisebb nem lehetvén, világos, hogy az t. i.

$$f\alpha = 0.$$

A' lehozásból az is kitetszik, hogy mind ez akkor is áll, midőn

$$f\alpha < 0$$
$$f\alpha' > 0.$$

6. §.

Minden felsőbb egyenletnek:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$

mellynek előszámai akármelly meghatározott mennyiségek (tehát képzeletiek is), van legalább egy illyetén

$$p + q\sqrt{-1}$$

gyökere, melly, midőn

$$q = 0,$$

való, ellenben pedig képzeleti.

Az ösztevők itt ezek:

$$A,\ B,\ C,\ D\ \ldots\ M,\ N$$

's ezeknek modulusai legyenek:

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4\ \ldots\ \varrho_{m-1},\ \varrho_m.$$

Továbbá legyen:

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

tehát:

$$x^m = [p + q\sqrt{-1}]^m,$$
$$x^{m-1} = [p + q\sqrt{-1}]^{m-1}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

és $$r = \sqrt{p^2 + q^2}$$

azaz r x-nek modulusa, ennél fogva lesznek

$$r^m,\ r^{m-1}\ \ldots\ r^2,\ r$$

illetőleg ezeknek:

$$x^m,\ x^{m-1}\ \ldots\ x^2,\ x$$

modulusai. Aztán az is világos, hogy:

$$x^m;\ Ax^{m-1},\ Bx^{m-2}\ \ldots\ Mx,\ N$$

modulusai illetőleg:

$$r^m,\ \varrho_1 r^{m-1},\ \varrho_2 r^{m-2}\ \ldots\ \varrho_{m-1} r,\ \varrho_m.$$

Az előismeretek' 21. §-ánál fogva, ennek:

$$Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N$$

modulusa, melly

$$= R'$$

legyen, soha sem nagyobb ennél:

$$\varrho_1 r^{m-1} + \varrho_2 r^{m-2} + \ldots + \varrho_{m-1} r + \varrho_m,$$

azaz:

$$R' \leqq \varrho_1 r^{m-1} + \varrho_2 r^{m-2} + \ldots + \varrho_{m-1} r + \varrho_m.$$

Legyen továbbá:

$$Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\,.\,.\,+Mx+N=\Sigma,$$

tehát az egyenlet maga:

$$x^m+Ax^{m-1}+\,.\,.\,+Mx+N=\Sigma+x^m,$$

's legyen ennek modulusa R; lesz R, mint két képzeleti mennyiség' összetének modulusa középmennyiség

$$x^m \text{ és } \Sigma$$

modulusainak összete és különbözete között. Tudjuk, hogy x^m modulusa r^m, Σ-é pedig R', tehát:

$$R=M[r^m+R',\ r^m-R'].$$

Már pedig:

$$r^m+R' \underset{<}{=} r^m+\varrho_1 r^{m-1}+\,.\,.\,+\varrho_{m-1}r+\varrho_m$$

$$r^m-R' \underset{>}{=} r^m-\varrho_1 r^{m-1}-\,.\,.\,-\varrho_{m-1}r-\varrho_m,$$

miből következik, hogy R középmennyiség

$$r^m+\varrho_1 r^{m-1}+\,.\,.\,.\,+\varrho_{m-1}r+\varrho_m$$
$$r^m-\varrho_1 r^{m-1}-\,.\,.\,.\,-\varrho_{m-1}r-\varrho_m$$

között is.

Ha ezen utolsó egyenletet:

$$r^m-\varrho_1 r^{m-1}-\,.\,.\,.\,-\varrho_{m-1}r-\varrho_m,$$

mellyben r x-nek modulusa, és ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 . . . illetőleg A, B, C. . . -éi, vizsgáljuk, könnyen átlátjuk, hogy egyes tagjai, minthogy illy formák

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

mind való mennyiségek. Továbbá, minthogy r-nek olly értéket adhatunk, hogy

$$r^m > -\varrho_1 r^{m-1}-\,.\,.\,.\,-\varrho_{m-1}r-\varrho_m$$

legyen, lesz r' ezen értékére nézve, mellyet r' által jelelni fogunk:

$$r'^{m} - \varrho_1 r'^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r' - \varrho_m > 0,$$

azaz állító. Szintúgy más értéknél r'' fogva:

$$\varrho_m > r''^{m} - \varrho_1 r''^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r''$$

tehát:

$$r''^{m} - \varrho_1 r''^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r'' - \varrho_m < 0,$$

azaz tagadó. Az előbbi szerint tehát r-nek olly értéke lehet, mellyre nézve

$$r^{m} - \varrho_1 r^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r - \varrho_m = 0$$

legyen. Jeleljük ezt r'''-rel, lesz:

$$r'''^{m} - \varrho_1 r'''^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r''' - \varrho_m = 0.$$

A' közönséges kifejezés:

$$r^{m} - \varrho_1 r^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r - \varrho_m$$

szorzás és osztás által ezzé válik:

$$r^{m}\left[1 - \frac{\varrho_1}{r} - \ldots - \frac{\varrho_{m-1}}{r^{m-1}} - \frac{\varrho_m}{r^{m}}\right],$$

melly azon föltétel alatt, hogy

$$r = r'''$$

semmivé lesz, és állító marad, midőn

$$r > r'''.$$

Az előbbi szerint, minthogy R középmennyiség

$$r^{m} + \varrho_1 r^{m-1} + \ldots + \varrho_{m-1} r + \varrho_m$$

és

$$r^{m} - \varrho_1 r^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r - \varrho_m$$

között mindig:

$$R \overset{=}{>} r^{m} - \varrho_1 r^{m-1} - \ldots - \varrho_{m-1} r - \varrho_m,$$

's így R r-rel nagyobbúl $\frac{1}{0}$-ig, midőn

$$r > r''':$$

Ebből következtetjük, hogy R' legkisebbik értéke mindig r' valamelly véges értékének felel meg, következőlęg x' valamelly

$$p+q\sqrt{-1}$$

forma, csak véges és képes p-t és q-t magában foglaló értékének.

Megmutathatjuk továbbá, hogy $R=0$ azon legkisebbik érték, melly r''-nek megfelel. Mert tegyük a' közönséges egyenletbe

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Mx + N = 0$$

x helyett ezt: $p+q\sqrt{-1}$, lesz abból:

$$[p+q\sqrt{-1}]^m + A[p+q\sqrt{-1}]^{m-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ M[p+q\sqrt{-1}] + N = 0,$$

mi megfejtve, ha P a' való 's $Q\sqrt{-1}$ a' képzeleti tagok' összetét teszik, nyilván

$$= P + Q\sqrt{-1},$$

's ennek modulusa az előbbi határozat szerint R.

Aztán tegyünk ugyan azon egyenletbe más

$$[p+q\sqrt{-1}]\text{-tól}$$

különböző mennyiséget x helyett, például a' következőt:

$$p+q\sqrt{-1}+\alpha,$$

lesz abból:

$$[p+q\sqrt{-1}+\alpha]^m + A[p+q\sqrt{-1}+\alpha]^{m-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ M[p+q\sqrt{-1}+\alpha] + N,$$

mi nyilván következő formáju:

$$P+Q\sqrt{-1}+[P'+Q'\sqrt{-1}]\alpha$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+[P^{(m-1)}+Q^{(m-1)}\sqrt{-1}]\alpha^{m-1}+\alpha^{m}.$$

Legyen továbbá, minthogy α határozatlan:

$$[P'+Q'\sqrt{-1}]\alpha=-[P+Q\sqrt{-1}]\beta,$$

ennél fogva az utolsó egyenlet:

$$=[P+Q\sqrt{-1}](1-\beta)+[P''+Q''\sqrt{-1}]\alpha^{2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+[P^{(m-1)}+Q^{(m-1)}\sqrt{-1}]\alpha^{m-1}+\alpha^{m}$$

minthogy pedig másfelül

$$\alpha=-\frac{P+Q\sqrt{-1}}{P'+Q'\sqrt{-1}}\cdot\beta$$

kitetszik, hogy:

$$\alpha^{2}=+\left[\frac{P+Q\sqrt{-1}}{P'+Q'\sqrt{-1}}\right]^{2}\cdot\beta^{2}$$

$$\alpha^{3}=-\left[\frac{P+Q\sqrt{-1}}{P'+Q\sqrt{-1}}\right]^{3}\cdot\beta^{3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

hogy következőleg a' mondott egyenlet

$$=[P+Q\sqrt{-1}]\,(1-\beta+A'\beta^{2}+A''\beta^{3}+\ldots),$$

hol A', A''... akármelly véges mennyiségeket jelenthetnek. Itt a' második rekesz alatti mennyiség', t.i.

$$1-\beta+A'\beta^{2}+A''\beta^{3}+\ldots$$

modulusa legyen Θ. Ennél fogva, minthogy

α)

$$[p+q\sqrt{-1}+\alpha]^{m}+A[p+q\sqrt{-1}+\alpha]^{m-1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+M[p+q\sqrt{-1}+\alpha]+N$$

$$=[P+Q\sqrt{-1}]\ (1-\beta+A'\beta^2+A''\beta^3+\ldots);$$

β) pedig R e' következőnek:

$$P+Q\sqrt{-1}$$

modulusa, és Θ

$$1-\beta+A'\beta^2+A''\beta^3+\ldots$$

— e', nyilván a' következőnek

$$[p+q\sqrt{-1}+\alpha]^m+A[p+q\sqrt{-1}+\alpha]^{m-1}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+M[p+q\sqrt{-1}+\alpha]+N$$

modulusa

$$=\Theta R.$$

Θ' bővebb fejtegetésére legyenek továbbá:

$$a',\ a'',\ a'''\ \ldots$$

ezeknek

$$A',\ A'',\ A'''\ \ldots$$

illető modulusai, tehát:

$$\Theta \leqq 1-\beta+a\beta^2+a'\beta^3+\ldots$$

melly kifejezésben

$$a',\ a'',\ a'''\ \ldots$$

mert modulusok, való számok, és β-nak mindig olly csekély de véges értéket adhatni, hogy

$$\beta > a'\beta^2+a'\beta^3+\ldots$$

legyen, 's ezen értékre nézve:

$$\Theta < 1,\ \text{és}$$

$$\Theta R < R,$$

ha csak nem $R=0$. Legyen végre R' legkisebb értéke R', lesz egyszersmind:

$$\Theta R' < R',$$

's itt két eset fordul elő. T. i. vagy

$$R' > 0,$$

azaz állító, vagy

$$R' = 0,$$

azaz semmi.

$$R' > 0$$

nem lehet, különben β behozásával más kisebb modulust

$$R'' = \theta R'$$

nyernénk, 's ekkor

$$R'' < R'$$

volna, mi ellenmondás, minthogy R' legkisebb értéke R-nek. Következőleg

$$R' = 0,$$

azaz

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Mx + N$$

egyenletnek azon modulusa, melly ezen:

$$r^m + \varrho_1 r^{m-1} + \ldots + \varrho_{m-1} r + \varrho_m = 0$$

föltételnek tehát ennek:

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Mx + N = 0$$

is megfelel a' semmi. Ennek következésében legyen:

$$R' = \sqrt{P'^2 + Q'^2},$$

minthogy

$$R' = 0,$$

lesz:

$$P'^2 + Q'^2 = 0$$

's minthogy e' két négyszög' összete semmi nem lehet a' nélkül hogy egyenként:

$$P' = 0,$$
$$Q' = 0$$

legyen, lesz egyszersmind:

$$P' + Q' \sqrt{-1} \text{ is } = 0,$$

melly kifejezésből a' feljebbi lehozás' szellemében következtetjük, hogy:

$$[p'+q'\sqrt{-1}]^m + A[p'+q'\sqrt{-1}]^{m-1}$$

$$\ldots + M[p'+q'\sqrt{-1}] + N = 0,$$

's így végre látjuk, hogy valóban olly értékét x-nek, melly a' közönséges egyenletbe téve, azt elenyészteti, találhatjuk, hogy következőleg akármelly véges mennyiségek legyenek az:

$$A, B, C \ldots M, N$$

az egyenletnek legalább egy illyenforma

$$p+q\sqrt{-1}$$

gyökere ván.

7. §.

A' tárgy' fontossága miatt ime még egy megmutatás következik, szinte Cauchy-tól, mint az előbbi, 's melly hasonló elveken épül, 's mellyről maga Cauchy (Cours d' analyse de l' école royale polytechnique. I. Partie, pag. 339.) azt mondja: hogy, ámbár több ízben különbözik attól, mellyet Legendre (Théorie des Nombres I. Partie. §. XIV.) adott, mégis ugyan azon elveken alapszik.

Minthogy

$$p+q\sqrt{-1}$$

minden való és képzeleti mennyiségnek képviselője, legyen a' közönséges egyenletben:

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Mx + N = 0,$$

$$x = p+q\sqrt{-1}.$$

mi által az egyenlet szembetünőleg a' következő alakot nyeri:

$$\varphi(p, q) + \sqrt{-1}\, \chi(p, q) = 0,$$

melly kifejezésben

$$\begin{matrix} \varphi(p, q) \\ \chi(p, q) \end{matrix}$$

képes függvényei p-nek, és q-nak. Ha itt megmutathatjuk, hogy x' valamelly értékére nézve:

$$\begin{matrix} \varphi(p, q) = 0 \\ \chi(p, q) = 0, \end{matrix}$$

avagy, mi egyre megy ki, hogy

$$[\varphi(p, q)]^2 + [\chi(p, q)]^2 = 0,$$

a' tétel' helyessége azonnal meg lesz mutatva.

Legyen tehát, könnyebbség okáért:

$$F(p, q) = [\varphi(p, q)]^2 + [\chi(p, q)]^2,$$

's tegyük föl, hogy minden képzeleti mennyiség

$$p + q\sqrt{-1}$$

a' következő formában

$$\varrho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

foglaltatik, mi semmi nehézzéggel nem bír, minthogy ebből:

$$p + q\sqrt{-1} = \varrho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

következik:

$$\begin{matrix} p = \varrho\cos\theta \\ q = \varrho\sin\theta, \end{matrix}$$

és

$$p^2 + q^2 = \varrho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \varrho^2,$$

mi után:

$$\varrho = \sqrt{p^2 + q^2},$$

$$\cos\theta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$
$$\sin\theta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

'stb. (L. Cauchy Cours etc. pag. 182.) Ennek következésében, s minthogy

$$p+q\sqrt{-1}$$

alatt minden való mennyiség is értethetik,

$$x^m,\ x^{m-1},\ x^{m-2}\ .\ .\ .\ x^2,\ x^1,\ x^0$$

előszámait, azaz ezeket:

$$1,\ A,\ B\ .\ .\ .\ L,\ M,\ N$$

következőleg fogjuk irni:

$$1=\varrho_0\,(\cos\theta_0+\sqrt{-1}\sin\theta_0),$$
$$A=\varrho_1\,(\cos\theta_1+\sqrt{-1}\sin\theta_1),$$
$$B=\varrho_2\,(\cos\theta_2+\sqrt{-1}\sin\theta_2)$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$M=\varrho_{m-1}(\cos\theta_{m-1}+\sqrt{-1}\sin\theta_{m-1}),$$
$$N=\varrho_m\,(\cos\theta_m+\sqrt{-1}\sin\theta_m).$$

'S legyen végre

$$p+q\sqrt{-1}=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t).$$

Ezt előre bocsátva lesz (hat. i. az első értékeket az összetevők', az utolsót pedig x helyébe teszszük, és ha:

$$fx=x^m+Ax^{m-1}+\ .\ .+Mx+N)$$
$$f(p+q\sqrt{-1})$$
$$=\varrho_0(\cos\theta_0+\sqrt{-1}\sin\theta_0).\,r^m(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^m$$
$$+\varrho_1(\cos\theta_0+\sqrt{-1}\sin\theta_1).\,r^{m-1}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^{m-1}$$
$$+\varrho_2(\cos\theta_2+\sqrt{-1}\sin\theta_2).\,r^{m-2}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^{m-2}$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

$+\varrho_{m-1}(\cos\theta_{m-1}+\sqrt{-1}\sin\theta_{m-1}).\ r(\cos t+\sqrt{-1}\ \sin\ t$

$+\varrho_m(\cos\theta_m+\sqrt{-1}\sin\theta_m).$

avvagy, minthogy átalában

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^\mu=\cos\mu\alpha+\sqrt{-1}\sin\mu\alpha$$

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)\ (\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)$$

's ezekből továbbá:

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^\mu\ .\ (\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)$$
$$=\cos(\mu\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\mu\alpha+\beta);$$

lesz nyilván:

$$\begin{aligned}f(p+q\sqrt{-1})=\varrho_0 r^m\ &[\cos(mt+\theta_0)+\sqrt{-1}\sin(mt+\theta_0)\\&+\varrho_1 r^{m-1}[\cos((m-1)t+\theta_1)+\sqrt{-1}\sin((m-1)t+\theta_1)\\&+\varrho_2 r^{m-2}[\cos((m-2)t+\theta_2)+\sqrt{-1}\sin((m-2)t+\theta_2)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\varrho_{m-1}r[\cos(t+\theta_{m-1})+\sqrt{-1}\sin(t+\theta_{m-1})\\&+\varrho_m[\cos\theta_m+\sqrt{-1}\ \sin\ \theta_m];\end{aligned}$$

avvagy elrendelve:

$$f(p+q\sqrt{-1})$$
$$\begin{aligned}&=\varrho_0 r^m\cos(mt+\theta_0) &&+\varrho_0 r^m\sin(mt+\theta_0)\sqrt{-1}\\&+\varrho_1 r^{m-1}\cos((m-1)t+\theta_1) &&+\varrho_1 r^{m-1}\sin((m-1)t+\theta_1)\sqrt{-1}\\&+\varrho_2 r^{m-2}\cos((m-2)t+\theta_2) &&+\varrho_2 r^{m-2}\sin((m-2)t+\theta_2)\sqrt{-1}\\&\ldots\ldots &&\ldots\ldots\\&+\varrho_{m-1}r\cos(t+\theta_{m-1}) &&+\varrho_{m-1}r\sin(t+\theta_{m-1})\sqrt{+1}\\&+\varrho_m\cos\theta_m &&+\varrho_m\sin\theta_m\sqrt{-1},\end{aligned}$$

's ebből:

$$
\begin{aligned}
\varphi(p\,,q) = & \varrho_0 r^m \cos(mt+\theta_0) \\
& + \varrho_1 r^{m-1} \cos((m-1)\,t+\theta_1) \\
& + \varrho_2 r^{m-2} \cos((m-2)\,t+\theta_2) \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \varrho_{m-1} r \cos(t+\theta_{m-1}) \\
& + \varrho_m \cos\theta_m ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi(p\,,q) = & \varrho_0 r^m \sin(mt+\theta_0) \\
& + \varrho_1 r^{m-1} \sin((m-1)\,t+\theta_1) \\
& + \varrho_2 r^{m-2} \sin((m-2)\,t+\theta_2) \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \varrho_{m-1} r \sin(t+\theta_{m-1}) \\
& + \varrho_m \sin\theta_m
\end{aligned}
$$

következőleg

$$
\begin{aligned}
F(p,q) = & [\varphi(p\,,\,q)]^2 + [\chi(p\,,q)]^2 \\
= & [\varrho_0 r^m \cos(mt+\theta_0) \\
& + \varrho_1 r^{m-1} \cos((m-1)\,t+\theta_1) \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \varrho_{m-1} r \cos(t+\theta_{m-1}) \\
& + \varrho_m \cos\theta_m]^2 \\
& + [\varrho_0 r^m \sin(mt+\theta_0) \\
& + \varrho_1 r^{m-1} \sin((m-1)\,t+\theta_1) \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \varrho_{m-1} r \sin(t+\theta_{m-1}) \\
& + \varrho_m \sin\theta_m]^2 \\
= & r^{2m} [\varrho_0^2 \\
& \frac{+2\,\varrho_0\,\varrho_1 \cos(t+\theta_0-\theta_1)}{r} \\
& \frac{+\varrho_1^2 + 2\varrho_0\varrho_2 \cos(2t+\theta_0-\theta_2)}{r^2} \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad].
\end{aligned}
$$

Mind ezekből kiviláglik, hogy

$$F(p, q) > 0$$

azaz állító, mert két négyszögnek öszvete; aztán hogy a' legutóbb lehozott alak

$$r^{2n}$$

-nel nagyobbodik, azaz tulajdonképen p-vel és q-val, mert:

$$r^{2n} = (p^2 + q^2)^n,$$

de hogy ezen növekedés' határa ez:

$$r^{2m} \varrho_0^2.$$

Tehát a'

$$F(p, q)$$

függvénynek véges értéke van, midőn

$$p, q$$

végesek. Legyen ugyan azon

$$F(p, q)'$$

függvénynek alsó határa, mellyet például elér, midőn

$$p = p_0$$
$$q = q_0,$$

A' következőleg:

$$F(p_0, q_0) = A,$$

lesz átalában

$$F(p, q) \overset{=}{>} F(p_0, q_0)$$

tehát:

$$F(p, q) - F(p_0, q_0) \overset{=}{>} 0,$$

azaz e' különbözet soha nem tagadó; vagy is ha

$$p = p_0 + \alpha h,$$
$$q = q_0 + \alpha k,$$

a' kitétel

$$F(p_0+\alpha h\,,\ q_0+\alpha k)-F(p_0\,,\ q_0)$$

soha sem tagadó.

Továbbá, ha a'

$$f(p+q\sqrt{-1})$$

függvényben

$$\begin{array}{lll} p & \text{helyett} & p_0+\alpha h, \\ q & \text{,,} & q_0+\alpha k \end{array}$$

iratik, lesz:

$$f(p+q\sqrt{-1})=f[(p_0+\alpha h)+\sqrt{-1}(q_0+\alpha k)]$$
$$=f[(p_0+q_0\sqrt{-1})+\alpha(h+k\sqrt{-1})]$$

's ha itt

$$h+k\sqrt{-1}=\varrho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

továbbá

$$f[(p_0+q_0\sqrt{-1})+\alpha(h+k\sqrt{-1})]$$

kifejlődésének előszámai illetőleg ezek:

$$R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T),$$
$$R_1(\cos T_1+\sqrt{-1}\sin T_1),$$
$$R_2(\cos T_2+\sqrt{-1}\sin T_2),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$R_m(\cos T_m+\sqrt{-1}\sin T_m),$$

következik, hogy:

$$f[(p_0+q_0\sqrt{-1})+\alpha(h+k\sqrt{-1})]$$
$$=R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T)$$
$$+\alpha R_1\varrho[\cos(T_1+\theta)+\sqrt{-1}\sin(T_1+\theta)]$$
$$+\alpha^2R_2\varrho^2[\cos(T_2+\theta)+\sqrt{-1}\sin(T_2+\theta)]$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\alpha^mR_m\varrho^m[\cos(T_m+m\theta)+\sqrt{-1}\sin(T_m+m\theta)]$$

Minthogy pedig másfelül:

$$f[(p_0+q_0\sqrt{-1})+\alpha(h+k\sqrt{-1})]$$
$$=\varphi(p_0+\alpha h\,,\,q_0+\alpha k)$$
$$+\sqrt{-1}\,.\,\chi(p_0+\alpha h\,,\,q_0+\alpha k),$$

következik, mint feljebb, hogy:

$$\varphi(p_0+\alpha h\,,\,q_0+\alpha k)$$
$$=R\cos T+\alpha\ R_1\varrho\cos(T_1+\theta)$$
$$+\alpha^2R_2\varrho^2\cos(T_2+2\theta)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\alpha^m R_m\varrho^m\cos(T_m+m\theta),$$

és

$$\chi(p_0+\alpha h\,,\,q_0+\alpha k)$$
$$=R\sin T+\alpha R_1\varrho\sin(T_1+\theta)$$
$$+\alpha^2R_2\varrho^2\sin(T_2+2\theta)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\alpha^m R_m\varrho^m\sin(T_m+m\theta),$$

tehát:

$$F(p_0+\alpha h\,,\,q_0+\alpha k)$$
$$=[R\cos T+\alpha R_1\varrho\cos(T_1+\theta)$$
$$+\alpha^2R_2\varrho^2\cos(T_2+2\theta)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\alpha^m R_m\varrho^m\cos(T_m+m\theta)]^2$$
$$+[R\sin T+\alpha R_1\varrho\sin(T_1+\theta)$$
$$+\alpha^2R_2\varrho^2\sin(T_2+2\theta)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\alpha^m R_m\varrho^m\sin(T_m+m\theta)]^2.$$

Itt először, midőn $\alpha=0$,

$$F(p_0\,,\,q_0)=R^2,$$

tehát:

$$R^2 = A$$

$$R = A^{\frac{1}{2}}.$$

Aztán, kifejtés által:

$$F(p_0 + \alpha h, q_0 + \alpha k)$$

$$= A + 2A^{\frac{1}{2}} \alpha\varrho [R_1 \cos (T_1 - T + \theta)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha^{m-1} \varrho^{m-1} R_m \cos (T_m - T + n\theta)]$$

$$+ \alpha^2 \varrho^2 \{[R_1 \cos (T_1 + \theta)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \alpha^{m-1} \varrho^{m-1} R_m \cos (T_m + m\theta)]^2$$

$$+ [R_1 \sin (T_1 + \theta)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \alpha^{m-1} \varrho^{m-1} R_m \sin (T_m + m\theta)]^2 \},$$

avvagy, ha

$$A = F(p_0, q_0)$$

az egyenletjegy' bal oldalára tétetik:

$$F(p_0 + \alpha h, q_0 + \alpha k) - F(p_0, q_0)$$

$$= 2A^{\frac{1}{2}} \alpha \varrho [R_1 \cos (T_1 - T + \theta)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha^{m-1} \varrho^{m-1} R_m \cos (T_m - T + m\theta)]$$

$$+ \alpha^2 \varrho^2 \{[R_1 \cos (T_1 + \theta)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \alpha^{m-1} \varrho^{m-1} R_m \cos (T_m + m\theta)]^2$$

$$+ [R_1 \sin (T_1 + \theta)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \alpha^{m-1} \varrho^{m-1} R_m \sin (T_m + m\theta)]^2 \}.$$

Ezen függvény, mint már tudjuk, akár mit jelentsen α, soha tagadó nem lehet, mi α tagadó 's igen csekély értékeire nézve (minthogy ekkor az első α-t biró tag nagyobb a' másodiknál csak ugy lehet, ha:

$$2A^{1/2}\alpha\varrho\,[R_1\cos(T_1-T-\theta)$$

$$\ldots\ldots$$

$$\alpha^{m-1}\varrho^{m-1}_{m-1}R_m\cos(T_m-T+m\theta)\,]=0,$$

mi szembetünőleg fölteszi, hogy

$$A=0.$$

Ennek következésében, mint hogy

$$A=F(p_0\,,\,q_0),$$

lesz:

$$F(p_0\,,\,q_0)=0,$$

azaz, mindig találhatók olly való értékei p-nek és q-nak:

$$p=p_0$$
$$q=q_0,$$

hogy a':

$$F(p\,,\,q)=0$$

egyenlet fön álljon, hogy következőleg:

$$\varphi(p\,,\,q)=0$$
$$\chi(p\,,\,q)=0$$

legyen, mi által nyilván:

$$\varphi(p\,,\,q)+\sqrt{-1}\,.\,\chi(p\,,\,q)=0,$$

's végre hogy minden felsőbb egyenletnek:

$$x^m+Ax^{m-1}+\ldots+Mx+N=0$$

illyetén

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

gyökere van.

8. §.

Midőn m egész állító, akkor

$$a^m-b^m$$

mindig a' következő:

$$a - b$$

által osztható. Az osztás törvényei szerint:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + ba^{m-2} + b^2a^{m-3} + \dots$$
$$+ b^{m-2}a + b^m;$$

és a' hányas m tagból áll. Ezt előre bocsátva, legyen ismét:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Mx + N = 0,$$

és ezen egyenlet' valamelly gyökere

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

tehát:

$$[p + q\sqrt{-1}]^m + A[p + q\sqrt{-1}]^{m-1}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$+ M[p + q\sqrt{-1}]$$
$$+ N = 0.$$

Ezt a' közönséges alakból kihúzván, következik, hogy:

$$[x^m - (p + q\sqrt{-1})^m] + A[x^{m-1} - (p + q\sqrt{-1})^{m-1}]$$
$$\dots\dots\dots$$
$$+ M[x - (p + q\sqrt{-1})] = 0,$$

tehát:

$$x - (p + q\sqrt{-1})$$

által osztva, a' következmény vagy is hányas nyilván illyenforma:

$$x^{m-1} + A'x^{m-1} + \dots + L'x + M' = 0$$

tehát, ha ezt így irjuk

$$f_1x,$$

lesz:

$$fx = [x - (p + q\sqrt{-1})]\, f_1x.$$

Ugyan azon okoskodásnál fogva:

$$f_1x = [x-(p_1+q_1\sqrt{-1})]f_2x,$$
$$f_2x = [x-(p_2+q_2\sqrt{-1})]f_3x,$$
$$f_3x = [x-(p_3+q_3\sqrt{-1})]f_4x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

's az utóbbi értékeket az előző egyenlètekbe téve:

$$\begin{aligned} fx &= [x-(p+q\sqrt{-1})] \\ &\times [x-(p_1+q_1\sqrt{-1})] \\ &\times [x-(p_2+q_2\sqrt{-1})] \\ &\times [x-(p_3+q_3\sqrt{-1})] \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Azaz minden fölsőbb egyenlet

$$p+q\sqrt{-1}$$

forma szorzókra osztható. Minthogy pedig az előbbi szerint

$$\begin{array}{ll} f_1x & m-1 \\ f_2x & m-2 \\ f_3x & m-3 \\ \cdots & \cdots \\ f_{m-2}x & 2 \\ f_{m-1}x & 1 \end{array}$$

taggal birnak, aztán a' közönséges alak' természeténél fogva x' legfelsőbb rangjele (kitevője) egygyel kisebb, mint a' tagok' száma, látni való, hogy átalában:

$$f_1x = x^{m-1} + A' \ x^{m-2} + B' \ x^{m-3} + \ldots + M'$$
$$f_2x = x^{m-2} + A'' \ x^{m-3} + B'' \ x^{m-4} + \ldots + L'$$
$$f_3x = x^{m-3} + A''' \ x^{m-4} + B''' \ x^{m-5} + \ldots + K'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{m-2}x = x^2 + A^{(m-2)}x$$
$$f_{m-1}x = x + A^{(m-1)}$$
$$f_m x = 1.$$

Következőleg az egyenlet:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

annyi illyen forma

$$x - (p + q\sqrt{-1})$$

szorzókra osztható, valahány egység találtatik m-ben.

9. §.

Legyenek a' közönséges egyenletben

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N$$

a' szorzók

$$A, B, C \ldots M, N$$

való mennyiségek, és legyen

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

az egyenlet' gyökere. Minthogy képzeleti mennyiségeknek szorzata is képzeleti, lesz átalában:

$$x^2 = p_1 + q_1\sqrt{-1},$$
$$x^3 = p_2 + q_2\sqrt{-1},$$
$$x^4 = p_3 + q^3\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots$$
$$x^m = p_{m-1} + q_{m-1}\sqrt{-1},$$

és helyettezés által:

$$\begin{aligned}[p_{m-1} + q_{m-1}\sqrt{-1}] &+ A[p_{m-2} + q_{m-2}\sqrt{-1}] \\ &+ B[p_{m-3} + q_{m-3}\sqrt{-1}] \\ &\ldots\ldots \\ &+ M[p + q\sqrt{-1}] \\ &+ N = 0,\end{aligned}$$

azáz:

$$[p_{m-1} + Ap_{m-2} + \ldots + Mp + N]$$

$$+ [q_{m-1} + Aq_{m-2} + \ldots + Mq]\sqrt{-1} = 0,$$

avvagy, ha a' rekesz alatti mennyiségeket illetőleg:

$$P, Q,$$

által teszszük ki, lesz:

$$P + Q\sqrt{-1} = 0,$$

mi meg nem állhat, kivévén ha ugyan azon időben, azaz együtt:

$$P = 0,$$

$$Q = 0.$$

Ennek következésében lesz továbbá:

$$P - Q\sqrt{-1} = 0,$$

azaz:

$$[p_{m-1} + Ap_{m-2} + \ldots + Mp + N]$$

$$- [q_{m-1} + Aq_{m-2} + \ldots + Mq]\sqrt{-1} = 0$$

azaz:

$$x^m = p_{m-1} - q_{m-1}\sqrt{-1}$$

$$x^{m-1} = p_{m-2} - q_{m-2}\sqrt{-1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x^2 = p_1 - q_1\sqrt{-1}$$

$$x = p - q\sqrt{-1}.$$

Tehát közönségesen minden felsőbb egyenletben, mellynek egyik gyökere képzeleti és

$$= p + q\sqrt{-1},$$

másik gyökér gyanánt találtatik az öszrendelt kitétel, melly t. i.

$$= p - q\sqrt{-1}$$

azon föltétel alatt, hogy

$$A, B, C \ldots M, N$$

való mennyiségek. Ezen esetben tehát:

$fx = [x - (p + q\sqrt{-1})]\,[x - (p - q\sqrt{-1})]\,f_2x,$

azaz, minthogy:

$$[x - (p + q\sqrt{-1})]\,[x - (p - q\sqrt{-1})]$$
$$= (x - p)^2 + q^2,$$
$$fx = [(x - p)^2 + q^2] . f_2x.$$

Hogy

$$(x - p)^2 + q^2$$

való mennyiség, magában világos. Ha tehát valamelly felsőbb egyenletben, való előszámokkal képzeleti gyökerek vannak, azok csak párosan fordúlhatnak elő, 's az egyenlet mindig illyetén

$$(x - p)^2 + q^2$$

négyszögü szorzókra osztható.

10. §.

Minthogy az előbbi szerint

$fx = (x - a\ (x - b)\ (x - c)\ (x - d)\ .\ .\ .$

lesz, ha

$$A,\ B,\ C\ .\ .\ .\ M,\ N$$

előbbi jelentéseiket megtartják, a' szorzás törvényeinél fogva:

$$A = -\ C_1(a,\ b,\ c\ .\ .\ m,n)$$
$$B = +\ C_2(a,\ b,\ c\ .\ .\ m,n)$$
$$C = -\ C_3(a,\ b,\ c\ .\ .\ m,n)$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$M = \pm\ C_{m-1}(a, b, c\ .\ .\ m,n)$$
$$N = \mp\ C_m\ (a, b, c\ .\ .\ m,n)$$

Itt észrevehetjük, hogy ha m páros, hogy akkor M is páros helyen áll, N páratlanon; mi ellenkezőleg van, midőn m páratlan. Az első esetben tehát az utolsó kifejezésben az alsó, ellenben a' fölső előjegyeket kell venni, mind a' két esetet egybe foglalhatjuk így:

$$M = (-1)^{m-1}\, C_{m-1}(a, b, c \,.\,.\, m, n)$$
$$N = (-1)^{m}\, C_m\, (a, b, c \,.\,.\, m, n).$$

Felsőbb egyenletek' közönséges alakja tehát ez is:

$$\begin{array}{l} x^m - C_1(a, b, c \,.\,.\, m, n).x^{m-1} \\ \quad + C_2(a, b, c \,.\,.\, m, n).x^{m-2} \\ \quad - C_3(a, b, c \,.\,.\, m, n).x^{m-3} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad (-1)^{m-1} C_{m-1}(a, b, c \,.\,.\, m, n).x \\ \quad (-1)^{m}\, C_m\, (a, b, c \,.\,.\, m, n) = 0. \end{array}$$

Tudva van, hogy:

$$\begin{array}{l} C_1(a, b \,.\,.\, n) = a + b + \ldots + n. \\ C_2(a, b \,.\,.\, n) = ab + ac + \ldots + an \\ \qquad\qquad\qquad\quad + bc + \ldots + bn \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + mn. \\ C_3(a, b \,.\,.\, n) = abc + abd + \ldots + abn \\ \qquad\qquad\qquad\quad + bcd + \ldots + bcn \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad lmn \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C_m(a, b \,.\,.\, n) = abc \,.\,.\, n. \end{array}$$

11. §.

Legyen:

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Mx + N = 0,$$

tehát:

$$f'x = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots + M;$$

's legyen a valamelly gyökere fx-nek, következőleg:

$$fx = (x - a) f_1 x,$$

hol, mint tudjuk:

$$f_1 x = x^{m-1} + A' x^{m-2} + \ldots + L' x + M'.$$

Továbbá:

$$f_1' x = (m-1) x^{m-2} + (m-2) A' x^{m-3} + \ldots + L'.$$

Az:

$$fx = (x - a) f_1 x$$

egyenletből következik:

$$fx = x f_1 x - a f_1 x,$$

azaz:

$$\begin{aligned} x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N \\ = [(x^m + A' x^{m-1} + B' x^{m-2} + \ldots M' x) \\ - (a x^{m-1} + a A' x^{m-2} + \ldots + a L' x + a M)] \\ = x^m + (A' - a) x^{m-1} + (B' - a A') x^{m-2} + \ldots \\ + (M' - a L') x - a M'. \end{aligned}$$

Az előszámok' összvehasonlításából következik:

$$\begin{aligned} A &= A' - a; \\ B &= B' - aA'; \\ C &= C' - aB'; \\ &\;\;.\quad .\quad .\quad . \\ M &= M' - aL' \\ N &= - aM', \end{aligned}$$

és:

$$\begin{aligned} A + a &= A' \\ B + aA' &= B' \\ C + aB' &= C' \\ &\;\;.\quad .\quad .\quad . \\ N + aM' &= 0. \end{aligned}$$

Továbbá:

$$af'_1x = (m-1)\,ax^{m-2} + (m-2)\,aA'\,x^{m-3}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ aL' \quad ,$$

ehhez adva a' következőt:

$$f'x = mx^{m-1} + (m-1)\,Ax^{m-2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ M$$

lesz:

$$\begin{aligned} & f'x + af'_1x \\ = & mx^{m-1} + (m-1)\,(A+a)x^{m-2} \\ & + (m-2)\,(B+aA')x^{m-3} \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + (M+aL'), \end{aligned}$$

azaz, a' feljebbi egyenletek' segítségével:

$$\begin{aligned} & f'x + af'_1x \\ = & mx^{m-1} + (m-1)\,A'x^{m-2} \\ & + (m-2)\,B'x^{m-3} \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + M'. \end{aligned}$$

Már találtuk, hogy:

$$f_1x = x^{m-1} + A'x^{m-2} + \;.\;.\; + L'x + M'$$

és:

$$\begin{aligned} f'_1x = & (m-1)\,x^{m-2} + (m-2)\,A'x^{m-3} \\ & + (m-3)\,Bx^{m-4} \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + L' \;, \end{aligned}$$

avagy, ha ezt x-xel szorozzuk, hogy:

$$\begin{aligned} xf'_1x = & (m-1)\,x^{m-1} + (m-2)\,A'x^{m-2} \\ & + (m-3)\,B'x^{m-3} \\ & . \quad . \quad . \quad . \\ & + L'x, \end{aligned}$$

's most egybeadás által:

$$\begin{aligned} & f_1 x + x f'_1 x \\ = & m x^{m-1} + (m-1) A' x^{m-2} \\ & + (m-2) B' x^{m-3} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + M'; \end{aligned}$$

tehát átalában:

$$f' x + a f'_1 x = f_1 x + x f'_1 x ,$$

avagy:

$$f' x = f_1 x + (x-a) f'_1 x .$$

Hasonlólag lesz:

$$\begin{aligned} f'_1 x &= f_2 x + (x-b) f'_2 x \\ f'_2 x &= f_3 x + (x-c) f'_3 x \\ f'_3 x &= f_4 x + (x-d) f'_4 x \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

's itt, minthogy

$$f_m x = 1 ,$$

lesz:

$$f'_{m-1} x = 1$$

és

$$f'_m x = 0.$$

Másfelül pedig:

$$\begin{aligned} f x &= (x-a) f_1 x , \\ &= (x-a)(x-b) f_2 x , \\ &= (x-a)(x-b)(x-c) f_3 x \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

azaz:

$$f_1 x = \frac{f x}{x-a} ,$$

$$f_2 x = \frac{f x}{(x-a)(x-b)} ,$$

$$f_3 x = \frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

. . . .

$$f_{m-1} x = \frac{fx}{(x-a)(x-b)\,..\,(x-m)}$$

$$f_m x = \frac{fx}{(x-a)(x-b)\,..\,(x-n)}$$

$= 1$, mint feljebb.

Következőleg lesz helyettezés által:

$$f' x = \frac{fx}{x-a} + (x-a) f'_1 x,$$

$$f'_1 x = \frac{fx}{(x-a)\,(x-b)} + (x-b) f'_2 x,$$

$$f'_2 x = \frac{fx}{(x-a)\,..\,(x-c)} + (x+c) f'_3 x$$

. . . .

$$f'_{m-1} x = 1$$

$$f'_m x = 0.$$

Ebből szintúgy:

$$(x-a) f'_1 x = \frac{fx}{x-b} + (x-a)(x-b) f'_2 x$$

$$(x-a)(x-b) f'_2 x = \frac{fx}{x-c} + (x-a)\,..\,(x-c) f'_3 x$$

$$(x-a)..(x-c) f'_3 x = \frac{fx}{x-a} + (x-a)\,..\,(x-d) f'_4 x$$

. . . .

Egybeadás és a' következő egyenlet

$$f' x = \frac{fx}{x-a} + (x-a) f'_2 x$$

hozzáadásával végül következik:

$$f'x = \frac{fx}{x-a} + \frac{fx}{x-b} + \frac{fx}{x-c} + \ldots$$

azaz közönségesen:

$$f'x = fx\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \ldots + \frac{1}{x-n}\right]$$

$$= \Sigma\frac{fx}{x-a},$$

melly kifejezésben Σ annyi mint: *Summa*

$$\tau\tilde{\omega}\nu\ \frac{fx}{x-a}, \frac{fx}{x-b} \ldots \frac{fx}{x-n}.$$

Minthogy pedig:

$$\begin{aligned} f'x = mx^{m-1} &+ (m-1)\,Ax^{m-2} \\ &+ (m-2)\,Bx^{m-3} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ (Lx + M \end{aligned}$$

lesz egyszersmind:

$$\begin{aligned} \Sigma\frac{fx}{x-a} = mx^{m-1} &+ (m-1)\,Ax^{m-2} \\ &+ (m-2)\,Bx^{m-3} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ Lx + M. \end{aligned}$$

Továbbá legyen:

$$a^r + b^r + c^r + \ldots + n^r = S_r$$

azaz:

$$\begin{aligned} a + b + c + \ldots + n &= S, \\ a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + n^2 &= S_2, \\ a^3 + b^3 + c^3 + \ldots + n^3 &= S_3; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Végre ezekből:

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Mx + N$$

és

$$0 = a^m + Aa^{m-1} + \ldots + Ma + N$$
$$0 = b^m + Ab^{m-1} + \ldots + Mb + N$$
$$0 = c^m + Ac^{m-1} + \ldots + Mc + N$$

. . . .

ha az utóbbiakat az elsőből lehúzzuk:

$$fx = [x^m - a^m] + A[x^{m-1} - a^{m-1}] \;\ldots\; + M[x - a],$$
$$= [x^m - b^m] + A[x^{m-1} - b^{m-1}] \;\ldots\; + M[x - b],$$
$$= [x^m - c^m] + A[x^{m-1} - c^{m-1}] \;\ldots\; + M[x - c]$$

. . . . . .

's ezekből következik:

$$\frac{fx}{x-a} = \frac{[x^m - a^m]}{x-a} + A\frac{[x^{m-1} - a^{m-1}]}{x-a} \;\ldots\; + M,$$

$$\frac{fx}{x-b} = \frac{[x^m - b^m]}{x-b} + A\frac{[x^{m-1} - b^{m-1}]}{x-b} \;\ldots\; + M,$$

$$\frac{fx}{x-c} = \frac{[x^m - c^m]}{x-c} + A\frac{[x^{m-1} - c^{m-1}]}{x-c} \;\ldots\; + M.$$

Az osztás' szabályainál fogva, midőn m egész állító, mindig:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \ldots + a^{m-2} x + a^{m-1},$$

tehát:

$$\frac{fx}{x-a} = x^{m-1} + \left.\begin{matrix} a \\ +A \end{matrix}\right\} x^{m-2} + \left.\begin{matrix} a^2 \\ +Aa \\ +B \end{matrix}\right\} x^{m-3} + \ldots + \begin{matrix} a^{m-1} \\ +Aa^{m-2} \\ +Ba^{m-3} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +M, \end{matrix}$$

$$\frac{fx}{x-b} = x^{m-1} + \left.\begin{matrix} b \\ +A \end{matrix}\right\} x^{m-2} + \left.\begin{matrix} b^2 \\ +Ab \\ +B \end{matrix}\right\} x^{m-3} + \ldots + \begin{matrix} b^{m-1} \\ +Ab^{m-2} \\ +Bb^{m-3} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +M \end{matrix}$$

. . . .

Tehát:

$$\frac{fx}{x-a} + \frac{fx}{x-b} + \frac{fx}{x-c} + \ldots$$

azaz:

$$\Sigma \frac{fx}{x-a} = mx^{m-1}$$
$$+ [a + b + c + \ldots + n + mA] x^{m-2}$$
$$+ [a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + n^2$$
$$+ A(a + b + c + \ldots + n) + mB] x^{m-3}$$
$$+ [a^3 + b^3 + c^3 + \ldots + n^3$$
$$+ A(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + n^2)$$
$$+ B(a + b + c + \ldots + n) + mC] x^{m-4}$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
&+[a^{m-1}+b^{m-1}+\;.\;.\;+n^{m-1}\\
&+A(a^{m-2}+b^{m-2}+\;.\;.\;)\\
&+B(a^{m-3}+b^{m-3}+\;.\;.\;)\\
&\;.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\\
&+m\,M]
\end{aligned}
$$

azaz az előbbi egyezésnél fogva:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\frac{fx}{x-a}=mx^{m-1}&+[S+mA]x^{m-2}\\
&+[S_2+AS+mB]x^{m-3}\\
&+[S_3+AS_2+BS+mC]x^{m-4}\\
&\;.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\\
&+[S_{m-1}+AS_{m-2}+BS_{m-3}+\;.\;.\\
&\qquad+LS+mM],
\end{aligned}
$$

minthogy pedig másfelül:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\frac{fx}{x-a}=mx^{m-1}&+(m-1)Ax^{m-2}\\
&+(m-1)Bx^{m-3}\\
&+(m-3)\,Cx^{m-4}\\
&\;.\qquad.\qquad.\qquad.\\
&+Lx+M,
\end{aligned}
$$

e' két kifejezés' összehasonlításából lesz tehát:

$$
\begin{aligned}
(m-1)\,A&=S+mA,\\
(m-2)\,B&=S_2+AS+mB,\\
(m-3)\,C&=S_3+AS_2+BS+mC\\
.\qquad.\qquad.\qquad.&\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\\
M&=S_{m-1}+AS_{m-2}+BS_{m-3}+\;.\;.\\
&\qquad+LS+mM,
\end{aligned}
$$

azaz megfejtve, s helyesen elrendelve:

$$0 = S + A,$$
$$0 = S_2 + AS + 2B,$$
$$0 = S_3 + AS_2 + BS + 3C,$$
$$0 = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS + 4D$$

. . . .

$$0 = S_{m-1} + AS_{m-2} + BS_{m-3} + \ldots$$
$$+ LS + (m-1) M.$$

12. §.

Feljebb láttuk, hogy:

$$A = - C_1 (a, b \ldots n),$$
$$B = + C_2 (a, b \ldots n),$$
$$C = - C_3 (a, b \ldots n),$$
$$D = + C_4 (a, b \ldots n)$$

. . . . .

$$M = (-1)^m C_m (a, b \ldots n)$$

's ha ezen értékeket a' most talált közönséges alakba:

$$0 = S_{m-1} + AS_{m-2} + BS_{m-3} + \ldots$$
$$+ LS + (m-1) M$$

teszszük, minthogy átalában:

$$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots + n^m,$$

lesz:

$$0 = [a^{m-1} + b^{m-1} + \ldots + n^{m-1}]$$
$$- [a^{m-2} + b^{m-2} + \ldots + n^{m-2}]. C_1 (a, b \ldots n)$$
$$+ [a^{m-3} + b^{m-3} + \ldots + n^{m-3}]. C_2 (a, b \ldots n)$$

. . . .

$$(-1)^{m-1} [a + b + \ldots + n]. C_{m-1} (a, b \ldots n)$$
$$(-1)^m C_m (a, b \ldots n) (m-1);$$

avagy, ha egyes esetekre megyünk által:

$$0 = [a + b + \,.\,. + n] - C_1(a, b\,.\,.\,n)$$

$$\begin{aligned} 0 = & [a^2 + b^2 + \,.\,. + n^2] \\ & - [a + b + \,.\,. + n]\; C_1(a, b\,.\,.\,n) \\ & + 2C_2(a, b\,.\,.\,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & [a^3 + b^3 + \,.\,. + n^3] \\ & - [a^2 + b^2 + \,.\,. + n^2]\; C_1(a, b\,.\,.\,n) \\ & + [a + b + \,.\,. + n]\; C_2(a, b\,.\,.\,n) \\ & - 3C_3(a, b\,.\,.\,n) \end{aligned}$$

. . . .

's ezekből:

$$a + b + \,.\,. + n = C_1(a, b\,.\,.\,n)$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + \,.\,. + n^2 = & [a + b + \,.\,. + n]\; C_1(a, b\,.\,.\,n) \\ & - 2C_2(a, b\,.\,.\,n) \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} a^{m-1} + b^{m-1} + \,.\,. + n^{m-1} = & [a^{m-2} + b^{m-2} + \,.\,.]\; C_1(a, b\,.\,.\,n) \\ & - [a^{m-3} + b^{m-3} + \,.\,.]\; C_2(a, b\,.\,.\,n) \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & - (-1)^{m-1}[a + b + \,.\,.]\; C_{m-1}(a, b\,.\,.\,n) \\ & - (-1)^m \; C_m(a, b\,.\,.\,n)(m-1). \end{aligned}$$

Itt egymásutáni helyettezés által könnyen találjuk:

$$a + b + \,.\,. = C_1(a, b\,.\,.\,n),$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + \,.\,. = & [C(a, b\,.\,.\,n)]^2 \\ & - 2C_2(a, b\,.\,.\,n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + \,.\,. = & [C(a, b\,.\,.\,n)]^3 \\ & - 3C(a, b\,.\,.\,n).\; C_2(a, b\,.\,.\,n) \\ & + 3C_3(a, b\,.\,.\,n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + \,.\,. = & [C(a, b\,.\,.\,n)]^4 \\ & - 4[C(a, b\,.\,.\,n)]^2.\; C_2(a, b\,.\,.\,n) \\ & + 4C(a, b\,.\,.\,n).\; C_3(a, b\,.\,.\,n) \end{aligned}$$

$$+2[C_2(a,b..n)]^2$$
$$-4\,C_4(a,b..n)$$

. . . . . .

melly nevezetes kifejezések, ha

$$a+b+..+n$$
$$a^2+b^2+..+n^2$$

. . . . .

$$C_1(a,b\;.\;.\;n)$$
$$C_2(a,b\;.\;.\;n)$$

helyett értékeik

$$S,\ S_2,\ S_3\ .\ .\ .$$
$$-A,\ B,\ -C\ .\ .\ .$$

tétetnek, ezekké válnak:

$$S=-A,$$
$$S_2=A^2-2B,$$
$$S_3=-A^3+3AB-3C,$$
$$S_4=A^4-4A^2B+4AC+2B^2-4D$$

. . . .

miket helyettezés által egyenesen az:

$$0=S+A,$$
$$0=S_2+AS+2B$$
$$0=S_3+AS_2+BS+3C$$

. . . .

egyenletekből is lehetett volna lehozni.

13. §.

Továbbá az is világos, miképen az érdeklett egyenletekből még következik:

$$A=-S,$$
$$B=\frac{-S_2-AS}{2},$$

$$C = \frac{-S_3 - AS_2 - BS}{3},$$

$$D = \frac{-S_4 - AS_3 - BS_2 - CS}{4},$$

. . . .

$$M = \frac{-S_{m-1} - AS_{m-2} - \ldots - LS}{m-1},$$

'S ha most A' értékét az elsőből a' másodikba, harmadikba . . . B-ét a' másodikból a' harmadikba . . . teszszük, lesz:

$$A = -S,$$

$$B = -\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S \,.\, S,$$

$$C = -\frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{3} S_2\, S$$

$$-\frac{1}{3} S \left[-\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S \,.\, S\right],$$

. . . . . .

$$M = -\frac{1}{m-1} S_{m-1} + \frac{1}{m-1} S_{m-2} \,.\, S$$

$$-\frac{1}{m-1} S_{m-3} \left[-\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S \,.\, S\right]$$

$$-\frac{1}{m-1} S_{m-4} \left[-\frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{3} S_2 \,.\, S\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3} S\left(-\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S \,.\, S\right)\right]$$

. . . .

$$-\frac{1}{m-1}\left[-\frac{1}{m-2}S_{m-2}+\frac{1}{m-2}S_{m-3}.S\right.$$
$$\left. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \right]$$

14. §.

Ha az adott egyenletet:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots Mx + N = 0$$

$x^{n'}$-nel szorozzuk, lesz:

$$x^{m+n'} + Ax^{m+n'-1} + Bx^{m+n'-2} + \ldots + Mx^{n'+1} + Nx^{n'} = 0$$

következőleg, ha x helyett gyökereit

$$a,\ b,\ c\ \ldots\ n$$

teszszük:

$$a^{m+n'} + Aa^{m+n'-1} + \ldots + Ma^{n'+1} + Na^{n'} = 0$$
$$b^{m+n'} + Ab^{m+n'-1} + \ldots + Mb^{n'+1} + Nb^{n'} = 0$$
$$c^{m+n'} + Ac^{m+n'-1} + \ldots + Mc^{n'+1} + Nc^{n'} = 0$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$n^{m+n'} + An^{m+n'-1} + \ldots + Mn^{n'+1} + Nn^{n'} = 0$$

's egybeadva:

$$\begin{aligned} &[a^{m+n'} + b^{m+n'} + \ldots + n^{m+n'}] \\ + A&[a^{m+n'-1} + b^{m+n'-1} + \ldots + n^{m+n'-1}] \\ + B&[a^{m+n'-2} + b^{m+n'-2} + \ldots + n^{m+n'-2}] \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + N&[a^{n'} + b^{n'} + \ldots + n^{n'}] \\ = 0&, \end{aligned}$$

azaz, minthogy átalában:

$$a^r + b^r + c^r + \ldots + n^r = S_r,$$

lesz:

$$0 = S_{m+n'} + AS_{m+n'-1} + BS_{m+n'-2} + \ldots$$
$$+ MS_{n'+1} + NS_{n'}.$$

Legyen már most itt:

$$n' = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$

hol mindenek előtt észre kell vennünk, hogy:

$$\begin{aligned} S_0 &= a^0 + b^0 + \ldots + n^0 \\ &= 1 + 1 + \ldots + 1 \\ &= m, \end{aligned}$$

levén, egyszerüen lesz:

$$\begin{aligned} 0 &= S_m + AS_{m-1} + BS_{m-2} + \ldots \\ &\quad + MS + mN, \\ 0 &= S_{m+1} + AS_m + BS_{m-1} + \ldots \\ &\quad + MS_2 + NS, \\ 0 &= S_{m+2} + AS_{m+1} + BS_m + \ldots \\ &\quad + MS_3 + NS_2, \\ 0 &= S_{m+3} + AS_{m+2} + BS_{m+1} + \ldots \\ &\quad + MS_4 + NS_3 \end{aligned}$$

. . . .

melly egyenletek a' 11-ik §-ban találtakhoz adva, világosan megmutatják, hogy az ott látható képző törvény $(m-1)$-nél felsőbb rangokra nézve is ugyan azon marad, mi szerint, ha a' következeteket össze irjuk, leend:

$$\begin{aligned} 0 &= S + A, \\ 0 &= S_2 + AS + 2B, \\ 0 &= S_3 + AS_2 + BS + 3C, \\ 0 &= S_4 + AS_3 + BS_2 + CS + 4D \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} 0 &= S_{m-1} + AS_{m-2} + BS_{m-3} + \ldots \\ &\quad + LS + (m+1) M, \\ 0 &= S_m + AS_{m-1} + BS_{m-2} + \ldots \\ &\quad + MS + mN, \end{aligned}$$

$$0 = S_{m+1} + AS_m + BS_{m-1} + \dots$$
$$+ MS_2 + NS,$$
$$0 = S_{m+2} + AS_{m+1} + BS_m + \dots$$
$$+ MS_3 + NS_2,$$

. . . .

$$0 = S_{m+n'} + AS_{n-1} + BS_{m+n'-2} + \dots$$
$$+ MS'_{n+1} + NS'_n.$$

15. §.

Az egyenletek legnevezetesb alakváltoztatásai történnek:

α) ha x helyett

$$\alpha \pm y$$

tétetik. Legyen tehát:

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + \dots + Mx + N = 0$$

és:

$$x = \alpha \pm y$$
$$\alpha = x \mp y;$$

következőleg:

$$fx = f(\alpha \pm y)$$
$$= f\alpha \pm f'\alpha \,.\, y + \frac{f''\alpha}{1.2} \,.\, y^2 \pm \frac{f'''\alpha}{1.2.3} \,.\, y^3 +$$
$$\pm \dots$$

melly kitételben:

$$f\alpha = \alpha^m + A\alpha^{m-1} + \dots + M\alpha + N,$$
$$f'\alpha = m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + \dots + M,$$
$$f''\alpha = m(m-1)\alpha^{m-2} + (m-1)(m-2)A\alpha^{m-3} + \dots$$
$$+ L,$$

. . . .

$$f^{(m-1)}\alpha = m(m-1)\,..\,2\alpha + (m-2)\,..\,2A,$$
$$f^{(m)}\alpha \quad = m(m-1)\,..\,2\,.\,1\,,$$
$$f^{(m+1)}\alpha = 0.$$

Az eredmény egyenlet; avagy

$$f(\alpha \pm y)$$

tehát ez:

$$[\alpha^m + A\alpha^{m-1} + \ .\ .\ .\ + M\alpha + N]$$
$$\pm [m\alpha^{m-1} + (m-1)\,A\alpha^{m-2} + .\ .\ .\ + M]\,y$$
$$+ \left[\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\alpha^{m-2} + \ .\ .\ .\ + \frac{L}{1\,.\,2}\right].\,y^2$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$(\pm 1)^{m-1}\,[m\alpha + A]\,.\,y^{m-1}$$
$$(\pm 1)^m\,.\,y^m = 0,$$

tehát megfordítva:

$$(\pm 1)^m\,.\,y^m + (\pm)^{m-1}\,[m\alpha + A]\,.\,y^{m-1}$$
$$+ (\pm 1)^{m-2}\left[\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,\alpha^2 + \ .\ .\ \right].\,y^{m-2}$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$\pm [m\alpha^{m-1} + .\ .\ .\ .\ + M]\,.\,y$$
$$+ [\alpha^m + A\alpha^{m-1} + \ .\ .\ + N] = 0.$$

β) Legyen

$$x = ny\,,$$

következőleg:

$$x^2 = n^2y^2,$$
$$x^3 = n^3y^3\,,$$
$$x^4 = n^4y^4\,,$$
$$.\quad .\quad .\quad .$$
$$x^m = n^my^m.$$

Ennél fogva a' közönséges alak:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

ezzé lesz:

$$n^m y^m + n^{m-1} Ay^{m-1} + n^{m-2} By^{m-2} + \ldots$$
$$+ nMy + N = 0,$$

vagy is n^m által osztva:

$$y^m + \frac{A}{n} . y^{m-1} + \frac{B}{n^2} . y^{m-2} + \ldots + \frac{M}{n^{m-1}} . y + \frac{N}{n^m} = 0.$$

Melly kifejezés azon különös esetben, ha

$$n = \frac{1}{n'}$$

vagy is:

$$x = \frac{y}{n'}$$

ezzé lesz:

$$y^m + n' Ay^{m-1} + n'^2 By^{m-2} + \ldots .$$
$$+ n'^{m-1} My + n'^m N = 0.,$$

's ezen utolsó alakváltoztatás' különös esete, midőn

$$n = -1$$

tehát:

$$n^2 = +1,$$
$$n^3 = -1,$$
$$n^4 = +1$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$n^m = (-1)^m,$$

minek következésében az egyenlet:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

ezzé válik:

$$(-1)^m y^m + (-1)^{m-1} Ay^{m-1} + (-1)^{m-2} By^{m-2} + \ldots$$
$$- My + N = 0$$

'S itt két eset fordulhat elő. T. i. vagy m páros szám, 's ekkor egyenletünk ez:

$$y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - \ldots - My + N = 0,$$

vagy m páratlan, s ekkor:

$$-y^m + Ay^{m-1} - By^{m-2} + \ldots - My + N = 0,$$

avvagy az előjegyeket mind ellenkezőkké változtatván

$$y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - \ldots + My - N = 0.$$

E' két esetben észrevehetjük, hogy általában a'

$$m - 1$$
$$m - 3$$
$$m - 5$$
$$\ldots\ldots$$
$$m - (2m' + 1)$$

-dik tag tagadó. Miből átlátjuk, hogy valamelly egyenlet' állító és tagadó gyökereit illetőleg tagadókká és állítókká változtathatni, midőn a' páros számu tagok' előjegyei ellenkezőkké változtattatnak.

Második különös esete az, midőn

$$n = \frac{1}{y^2},$$

tehát:

$$n^2 = \frac{1}{y^4},$$

$$n^3 = \frac{1}{y^6}$$

$$\ldots\ldots$$

$$n^m = \frac{1}{y^{2m}},$$

minél fogva a' fenebb találtatott egyenlet

$$n^m y^m + n^{m-1} A y^{m-1} + n^{m-2} A y^{m-2} + \ldots$$
$$+ nMy + N = 0$$

helyettezés által ezzé válik:

$$\frac{1}{y^m} + \frac{A}{y^{m-1}} + \frac{B}{y^{m-2}} + \ldots + \frac{M}{y} + N = 0,$$

avvagy y^m által szorozva:

$$Ny^m + My^{m-1} + Ly^{m-2} + \ldots + Ay + 1 = 0$$

azaz:

$$y^m + \frac{M}{N} . y^{m-1} + \frac{L}{N} . y^{m-2} + \ldots + \frac{A}{N} . y + \frac{1}{N} = 0.$$

Minthogy pedig a' föltétel szerint:

$$x = ny$$

továbbá e' különös esetben

$$n = \frac{1}{y^2}$$

következőleg:

$$x = \frac{1}{y},$$

kitetszik, hogy midőn valamelly egyenletben:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

x helyett

$$\frac{1}{y}$$

tétetik, az eredmény egyenlet ez:

$$y^m + \frac{M}{N} . y^{m-1} + \frac{L}{N} . y^{m-2} + \ldots + \frac{A}{N} . y + \frac{1}{N} = 0,$$

's ennek gyökerei a' következők

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \ldots \frac{1}{n},$$

midőn a' fölebbinek gyökerei illetőleg ezek:

$$a, b, c \ldots n.$$

16. §.

Ebből következik, hogy midőn:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N$$
$$= (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-n),$$

szükségképen egyszersmind az is áll, hogy

$$y^m + \frac{M}{N}.y^{m-1} + \frac{L}{N}.y^{m-2} + \ldots + \frac{A}{N}.y + \frac{1}{N}$$
$$= \left(y-\frac{1}{a}\right)\left(y-\frac{1}{b}\right)\left(y-\frac{1}{c}\right)\ldots\left(y-\frac{1}{n}\right),$$

vagy is, ha y helyett x-et írunk:

$$x^m + \frac{M}{N}.x^{m-1} + \frac{L}{N}.x^{m-2} + \ldots + \frac{A}{N}.x + \frac{1}{N}$$
$$= \left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\ldots\left(x-\frac{1}{n}\right),$$

azaz más jelelés módnál fogva:

$$= (x-a^{-1})(x-b^{-1})(x-c^{-1})\ldots(x-n^{-1}).$$

Legyen már most:

$$a^{-1} + b^{-1} + \ldots + n^{-1} = S_{-1},$$
$$a^{-2} + b^{-2} + \ldots + n^{-2} = S_{-2},$$
$$a^{-3} + b^{-3} + \ldots + n^{-3} = S_{-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{-n'} + b^{-n'} + \ldots + n^{-n'} = S_{-n'},$$

továbbá:

$$\frac{M}{N} = A'$$
$$\frac{L}{N} = B'$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{N} = N'.$$

's ha már most a' 11. 's köv. §-ban

$$a^r + b^r + c^r + \ldots + n^r$$

helyett átalában a' következőt teszszük:

$$a^{-r} + b^{-r} + c^{-r} + \ldots + n^{-r},$$

lesz nyilván:

$$0 = S_{-1} + A',$$
$$0 = S_{-2} + A' S_{-1} + 2B',$$
$$0 = S_{-3} + A' S_{-2} + B' S_{-1} + 3C'$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$0 = S_{-m} + A' S_{-(m-1)} + B' S_{-(m-2)} + \ldots + nN',$$
$$0 = S_{-(m+1)} + A' S_{-m} + B' S_{-(m-1)} + \ldots + N' S_{-1},$$
$$0 = S_{-(m+2)} + A' S_{-(m+1)} + B' S_{-m} + \ldots + N' S_{-2}$$
$$\ldots \ldots \ldots$$

miből világos, hogy a' 14. §-ban lehozott alak:

$$0 = S_{m+n'} + A S_{m+n'-1} + B S_{m+n'-2} + \ldots + M S_{n'+1} + N S_{n'}$$

a' következő mennyiségeknek:

$$m + n'$$
$$m + n' - 1$$
$$m - n' - 2$$
$$\ldots$$

tagadó értékeire nézve is való, csak hogy ezen esetben az előszámok, t. i.

$$A,\ B,\ C \ldots M,\ N$$

illetőleg ezekké:

$$A',\ B',\ C' \ldots M',\ N'$$

azaz a' következőkké:

$$\frac{M}{N}, \frac{L}{N}, \frac{K}{N} \ldots \frac{A}{N}, \frac{1}{N}$$

válnak.

17. §.

Két egyenlő előjegy egymásutáni következése jegyfolyamnak, ellenben egyenetlen előjelek' egymásutáni állása jegyváltozásnak neveztetik. Igy például az:

$$x^6 - bx^5 - cx^4 + dx^3 - ex^2 - fx + g = 0$$

egyenletben, minthogy az első tag' előjegye, mint általában, állító, a' másodiké pedig tagadó, legelsőbb is jegyváltozás fordul elő. Továbbá a' második és harmadik tag előjegyei egyenlők (azaz mindketten tagadók) lévén, jegyfolyamot képeznek:

A' 3 tag a' 4-dikkel jegyvált. képez,
„ 4 „ „ 5 „ jegyvált. „
„ 5 „ „ 6 „ jegyfoly. „
„ 6 „ „ 7 „ jegyfoly. „

's így a' például fölhozott egyenletben három jegyváltozás és szint' annyi jegyfolyam találtatik.

Észre vehetjük itt azt is, hogy minden m-edik rangú egyenletben, ha csak valamelly tag vagy tagok előszámaik $= 0$ levén, nem hibáznak, szükségképen

$$m + 1$$

tag van. Igy tehát:

az 1. rangu egy.nek 2. tagja van
„ 2 „ „ „ 3 „ „
„ 3 „ „ „ 4 „ „
„ 4 „ „ „ 5 „ „
. . . .

Továbbá világos, hogy két tag csak egy jegyváltozással vagy — folyammal bírhat. Hozzá járulván egy harmadik tag, ennek előjegye a' volt első tag' előjegyével együtt ismét egy jegyváltozást vagy — folyamot képez 'stb. 'S általában, ha a' volt tagok' száma m, hozzájok járulván még egy tag, a' jegyváltozások' vagy — folyamok' számának is egygyel szaporodnia kell. Minthogy pedig, az előbbi szerint, ha a' jegyváltozásokat és — folyamokat közösen jegypároknak hívjuk, akkor világos, hogy:

2 tag 1 jelpárral bír,
3 „ 2 „ „
4 „ 2 „ „
. . . . .
m „ $m-1$ „ „
$m+1$ „ m „ „

Már pedig az $m+1$ tagból álló egyenlet (mindig föltéve, hogy minden tag' előszáma a' semmitől különböző) m-edik rangú — tehát az m-edik rangú egyenetnek m jegypárja van, azaz épen annyi, mint gyökere.

18. §.

Legyen való előszámokkal:

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$

továbbá:

$$Fx = fx(x - \alpha) = 0;$$

azon értékre nézve is, midőn

$$x - \alpha = 0,$$

azaz

$$x = \alpha,$$

következőleg α Fx-nek egyik állító gyökere.

Ha a' szorzást végbe viszszük, lesz:

$$x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Mx^2 + Nx$$
$$- \alpha x^m - \alpha Ax^{m-1} - \ldots - \alpha Lx^2 - \alpha Mx - \alpha N$$

azaz, a' föltétel szerint

$$x^{m+1} + \left.\begin{matrix}A\\-\alpha\end{matrix}\right\} x^m + \left.\begin{matrix}B\\-\alpha A\end{matrix}\right\} x^{m-1} + \ldots + \left.\begin{matrix}M\\-\alpha L\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}N\\-\alpha M\end{matrix}\right\} x - \alpha N = 0,$$

's legyen könnyebbség okáért:

$$A - \alpha = A',$$
$$B - \alpha A = B',$$
$$C - \alpha B = C',$$
$$\ldots$$
$$N - \alpha M = N'$$

lesz az eredmény ez:

$$x^{m+1} + A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + \ldots$$
$$+ N'x - \alpha N.$$

Már most akármelly föltételeket teszünk

$$A, B, C, \ldots M, N$$

előjegyeire és α' értékére nézve, mindig bizonyos, hogy Fx-ben, azaz ebben:

$$x^{m+1} + A'x^m + B'x^{m-1} + \ldots + N'x - \alpha N$$

egy jegyváltozással több fordul elő, mint fx-ben, azaz ebben:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N.$$

Mert tegyük föl, hogy D-é az első tagadó előjegy, tehát hogy

$$C > 0$$
$$0 > D.$$

Az előbbi szerint:

$$C - \alpha B = C',$$
$$D - \alpha C = D',$$

és legyen mármost, minthogy itt tulajdonképen két eset fordulhat elő:

α))

$$\alpha B > C,$$

azaz:

$$C' < 0,$$

tagadó. A' következő tag D' is tagadó, mert D tagadó levén, szembetünőleg

$$D - \alpha C < 0$$

azaz:

$$D' < 0;$$

miből kitetszik, hogy e' szerint Fx-ben is D'-ig (és pedig a' mondott föltétel alatt már C'-nél) jegyváltozás, de — mi figyelemre méltó — csak egy jegyváltozás van. Legyen:

β))

$$\alpha B < C$$

tehát:

$$C' > 0,$$

azaz állító. Minthogy itt is nyilván:

$$\alpha C > D$$

lesz:

$$D - \alpha C < 0$$

azaz:

$$D' < 0;$$

következőleg: e' második esetben is, tehát általában, D' D-vel ugyan azon előjegyet viseli. Ha tehát, a' mint föltettük, fx-ben D-ig jegyváltozás van, jegyváltozás lesz Fx-ben is D'-ig.

Következzék aztán akár hány tagadó tag, 's legyen az első állító G, tehát

$$0 > F$$
$$G > 0.$$

Más felül, tudjuk, hogy

$$F - \alpha E = F'$$

$$G - \alpha F = G';$$

's legyen, mint fölebb:

α))

$$\alpha E < F$$

tehát:

$$F' > 0$$

állító. Minthogy a' föltételnél fogva:

$$F < 0,$$

azaz tagadó szemlátomást:

$$G - \alpha F > 0$$

$$G' > 0$$

azaz G' is állító, miből kitetszik, hogy, midőn fx-ben G-nél ismét jegyváltozás van, Fx-ben is jegyváltozásra akadunk (ez különös esetben már F-nél) G'-ig. Ha pedig:

β))

$$\alpha E > F$$

tehát:

$$F' < 0,$$

minthogy

$$F < 0$$

és α állító, lesz annál inkább

$$\alpha F < 0$$

azaz:

$$-\alpha F > 0,$$

's az állító G-t hozzáadván:

$$G - \alpha F > 0$$

azaz:

$$G' > 0.$$

Tehát átalában G és G' ugyanazon előjegygyel birnak. Ha tehát fx-ben D-től G-ig ismét jegyváltozás van, jegyváltozás lesz D'-től G'-ig Fx-ben is. E' szerint meg kell győződnünk, hogy e' kitételben:

$$x^{m+1} + A'x^m + B'x^{m-1} + \ldots + N'x$$

annyi a' jegyváltozás, mint fx-ben, azaz e' következőben

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N.$$

A' mi

$$M, N$$

előjegyeit illeti, ezek vagy egyenlők, vagy nem. Az első esetben szembetűnő, hogy Fx' utolsó tagja, t. i.

$$-\alpha N$$

más előjellel bír, mint N, azaz fx' utolsó tagja, tehát ekkor Fx-nek egy jegyváltozással több van, mint fx-nek. A' második esetben, t. i. midőn

$$M, N$$

ellenkező előjegygyel bírnak, itt jegyváltozás van, következőleg az előbbi szerint

$$N \text{ és } N'$$

ugyan azon előjegyű. 'S ha most

$$N > 0$$
$$-\alpha N < 0;$$

ha pedig

$$N < 0$$
$$-\alpha N > 0,$$

tehát ez esetben Fx' utolsó tagjai között is jegyváltozás van.

E' vizsgálatnak igen fontos következése, hogy e' kitételben

$$fx(x-\alpha),$$

hol α állító, legalább egy jegyváltozással több van, mint ebben

$$fx.$$

Következőleg ezekben

$fx\ (x-\alpha)\ (x-\beta)$,

$fx\ (x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)$,

$fx\ (x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)\ (x-\delta)$

. . . .

illetőleg legalább két, három, négy . . . . jegyváltozással több, mint fx-ben.

19. §.

Midőn az:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = fx$$

egyenletben x helyett $-x$-et teszszünk, lesz a' 15. §. következésében:

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots + (-1)^{m-1} Mx + (-1)^m N$$
$$= f(-x),$$

's fx' állító gyökerei $f(-x)$-ben tagadókká válnak és megfordítva. Továbbá átalában, midőn valamelly többtagú kifejezésben minden páros helyű tag' előjegyét ellenkezőre változtatjuk, a' jegyfolyamok jelváltozásokká lesznek és megfordítva emezek amazokká. Minek bebizonyítására elég lesz a' következő több tagút vigyázattal megtekinteni:

$$x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \pm Dx^{m-4} \pm Ex^{m-5}$$

és ezt, mellyben a' páros tagok' előjegyei ellenkezők:

$$x^m \mp Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \mp Cx^{m-3} \pm Dx^{m-4} \mp Ex^{m-5}.$$

Ha itt akármelly két tagot veszünk egyenlő előjegygyel, például ezeket:

$$\pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3}$$

látjuk, hogy az alsó sorban azoknak

$$\pm Bx^{m-2} \mp Cx^{m-3};$$

felel meg, tehát midőn:

$$+ Bx^{m-2} + Cx^{m-3}$$

vagy

$$- Bx^{m-2} - Cx^{m-3}$$

vétetik, lesz illetőleg

$$+ Bx^{m-2} - Cx^{m-3}$$
$$- Bx^{m-2} + Cx^{m-3},$$

mi épen ellenkezőleg áll, ha a' sorokban a' Cx^{m-3} előjegyeit megfordítjuk. Minek következésében a' fölebb fölhozott tételt így is mondhatni ki. Hogy Fx-ben legalább annyi tagadó gyökérrel több van, mint fx-ben, mennyire több a' jegyfolyam Fx-ben mint fx-ben.

Legyen már most

$$fx = x + a$$
$$f_1x = x - a.$$

Itt mindjárt látjuk, hogy ezen egyszerű egyenletek is követik a' közönséges törvényt. Mert ezekből:

$$x + a = 0$$
$$x - a = 0$$

következik illetőleg:

$$x = - a$$
$$x = + a$$

's az első esetben jegyfolyam, az utóbbiban jegyváltozás van. Teljes inductio által meggyőződhetünk tehát, hogy minden egyenletben:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N,$$

mellynek előszámai való és semmitől különböző menynyiségek, annyi az állító és tagadó gyökér, valamenynyi a jegyváltozás vagy illetőleg jegyfolyam.

Ha a' mondott egyenletben némelly előszámok $= 0$, a' hibázó tagokat mind a' két előjegygyel és 0 előszámmal kell beiktatni. Minthogy itt az előjegyeket kényleg vehetni, ugy kell venni azokat, hogy a' jegyváltozások, és aztán úgy, hogy a' jegyfolyamok illetőleg legkisebb számmal legyenek. Mert világos, hogy legalább annyi állító és tagadó gyökere van az egyenletnek, a' mennyi illetőleg a' legkevesebb jegyváltozások' és jegyfolyamok' száma.

20. §.

Legyen valamelly fx egyenletben e egyenlő gyökér, tehát:

$$fx = (x-\alpha)^e . \varphi x,$$

hol, a' föltétel szerint, φx nyilván olly függvény, melly

$$x = \alpha$$

levén, nem enyészik el; azaz, hol

$$\varphi\alpha \lessgtr 0.$$

Vegyük az első származékokat, lesz:

$$\begin{aligned} f'x &= e(x-\alpha)^{e-1}.\varphi x \\ &+ (x-\alpha)^e . \varphi' x \\ &= (x-\alpha)^{e-1} . [(x-\alpha)\varphi' x + e . \varphi x]. \end{aligned}$$

Minthogy a' korlát alatti mennyiség, ha benne x helyett α tétetik, semmivé nem lesz, mit abból látni, hogy az ekkor

$$= e . \varphi\alpha,$$

melly az előbbi szerint semmivé nem lehet, kitetszik, hogy $f'x$-ben az α gyökér csak (e—1)-szer találtathatik. Tehát, ha:

$$fx = (x-\alpha)^e . \varphi x,$$

lesz:

$$f'x = (x-\alpha)^{e-1} . \varphi_1 x,$$

's ugyan azon módon:

$$f''x = (x-\alpha)^{e-2} . \varphi_2 x,$$
$$f'''x = (x-\alpha)^{e-3} . \varphi_3 x$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

azaz: Ha fx-nek e egyenlő gyökere van, a' származékokban

$$f'x, f''x, f'''x \;.\;.\;.\; f^{e-1}x.$$

illetőleg csak

$$e-1, e-2, e-3 \;.\;.\;.\; 1$$

egyenlő gyökér lehet. És viszont, ha x' valamelly értékére, péld. α-ra nézve, együtt:

$$fx = 0,$$
$$f'x = 0,$$
$$f''x = 0,$$
$$f'''x = 0$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f^{(n)}x = 0,$$

fx-nek $n+1$ egyenlő gyökere van. Mert ha ez így van, lesz:

$$f^{(n)}x = (x-\alpha).\psi x,$$
$$f^{(n-1)}x = (x-\alpha).\psi_1 x,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f''x = (x-\alpha).\psi_{n-2} x,$$
$$f'x = (x-\alpha).\psi_{n-1} x,$$
$$fx = (x-\alpha).\psi_n x.$$

A származékvetés' szabályainál fogva:

$$f'x = \psi_n x + (x-\alpha).\psi'_n x,$$
$$f''x = \psi_{n-1}x + (x-\alpha).\psi'_{n-1}x,$$
$$f'''x = \psi_{n-2}x + (x-\alpha).\psi'_{n-2}x$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$f^{(n)}x = \psi_1 x + (x-\alpha).\psi'_1 x;$$

tehát:

$$(x-\alpha).\psi_n x = (x-\alpha).\psi_n x,$$
$$(x-\alpha).\psi_{n-1} x = \psi_n x + (x-\alpha).\psi'_n x,$$
$$(x-\alpha).\psi_{n-2} x = \psi_{n-1}x + (x-\alpha).\psi'_{n-1}x,$$
$$(x-\alpha).\psi_{n-3} x = \psi_{n-2}x + (x-\alpha)\psi'_{n-2}x$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(x-\alpha).\psi x = \psi_1 x + (x-\alpha).\psi'_1 x;$$

és:

$$\psi_n x = (x-\alpha).[\psi'_n x - \psi_{n-1}x],$$
$$\psi_{n-1}x = (x-\alpha).[\psi'_{n-1}x - \psi_{n-2}x],$$
$$\psi_{n-2}x = (x-\alpha).[\psi'_{n-2}x - \psi_{n-3}x],$$
$$\psi_{n-3}x = (x-\alpha).[\psi'_{n-3}x - \psi_{n-4}x]$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\psi_1 x = (x-\alpha).[\varphi'_1 x - \psi x],$$

vagy ha:

$$\psi'_n x - \psi_{n-1}x = \varphi_1 x,$$
$$\psi'_{n-1}x - \psi_{n-2}x = \varphi_2 x,$$
$$\psi_{n-2}x - \psi_{n-3}x = \varphi_3 x,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

lesz:

$$\psi_n x = (x-\alpha).\varphi_1 x,$$
$$\psi_{n-1} x = (x-\alpha).\varphi_2 x,$$
$$\psi_{n-2} x = (x-\alpha).\varphi_3 x,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

minél fogva az előbbi egyenletek ezekké válnak:

$$f x = (x - \alpha)^2 . \varphi_1 x ,$$
$$f' x = (x - \alpha)^2 . \varphi_2 x ,$$
$$f'' x = (x - \alpha)^2 . \varphi_3 x ,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f^{(n-1)} x = (x - \alpha)^2 . \varphi_n x ,$$
$$f^{(n)} x = (x - \alpha) . \psi x .$$

Ha most ismét a' származékokat veszszük, lesz:

$$f' x = 2 (x - \alpha) . \varphi_1 x + (x - \alpha)^2 . \varphi'_1 x ,$$
$$f'' x = 2 (x - \alpha) . \varphi_2 x + (x - \alpha)^2 . \varphi'_2 x ,$$
$$f''' x = 2 (x - \alpha) . \varphi_3 x + (x - \alpha)^2 . \varphi'_3 x ,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f^{(n)} x = 2 (x - \alpha) . \varphi_n x + (x - \alpha) . \varphi'_n x ;$$

tehát, mint előbb:

$$(x - \alpha) . \varphi_2 x = 2 \varphi_1 x + (x - \alpha) . \varphi'_1 x ,$$
$$(x - \alpha) . \varphi_3 x = 2 \varphi_2 x + (x - \alpha) . \varphi'_2 x ,$$
$$(x - \alpha) . \varphi_3 x = 2 \varphi_3 x + (x - \alpha) . \varphi'_3 x$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\psi x = 2 \varphi_n x + (x - \alpha) . \varphi'_n x ,$$

következőleg:

$$\varphi_1 x = \frac{1}{2} (x - \alpha) . [\varphi'_1 x - \varphi_2 x] ,$$

$$\varphi_2 x = \frac{1}{2} (x - \alpha) . [\varphi'_2 x - \varphi_3 x] ,$$

$$\varphi_3 x = \frac{1}{2} (x - \alpha) . [\varphi'_3 x - \varphi_4 x]$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\varphi_n x = \frac{1}{2} [(x - \alpha) . \varphi'_n x - \psi x] ,$$

's végre, ha

$$\frac{1}{2}\,[\varphi_1'x - \varphi_2 x] = \Phi x\,,$$

$$\frac{1}{2}\,[\varphi_2'x - \varphi_3 x] = \Phi_1 x\,,$$

$$\frac{1}{2}\,[\varphi_3'x - \varphi_4 x] = \Phi_2 x$$

. . . . . .

tétetik, lesz:

$$f x \;=(x-\alpha)^3.\ \Phi x\,,$$
$$f' x \;=(x-\alpha)^3.\ \Phi_1 x\,,$$
$$f'' x \;=(x-\alpha)^3.\ \Phi_2 x$$

. . . . . .

$$f^{(n-1)} x = (x-\alpha)^2.\ \varphi_n x\,,$$
$$f^{(n)} x = (x-\alpha).\ \psi x.$$

Ezen okoskodást folytatván találjuk, hogy minden illyetén míveletben egy szorzóval többet találunk, de hogy ez, $f^{(n)}x$-től kezdve fx-ig, mindig egyegy mennyiséggel kevesebbre terjed. Minek következése az, hogy ha x valamelly értékére nézve, melly például α legyen:

$$fx = 0\,,$$
$$f'x = 0\,,$$
$$f''x = 0$$

. . . . . .

$$f^{(m)}x = 0\,,$$

mindig lesz:

$$fx \;=(x-\alpha)^{m+1}.\ Fx\,,$$
$$f'x = (x-\alpha)^{m}.\ F_1 x\,,$$

$$f''x = (x-\alpha)^{m-1}.\ F_2x\,,$$
$$f'''x = (x-\alpha)^{m-2}.\ F_3x$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$f^{(m)}x = (x-\alpha)..\ F_mx\,,$$

hol ezekben:

$$Fx,\ F_1x,\ F_2x,\ F_3x\ \ldots\ F_mx$$

a' szorzó $x-\alpha$ többé nem fordul elő.

21. §.

Legyen:

$$fx = (x-\alpha)^m.\ (x-\beta)^n.\ (x-\gamma)^p\ \ldots$$

azaz, tegyük fel, hogy az fx egyenletnek illetőleg m, n, p . . α—, β—, γ— . .-val egyenlő gyökere van. Leszármaztatás által következik:

$$\begin{aligned} f'x = & \ m\,(x-\alpha)^{m-1}.\ (x-\beta)^n.\ (x-\gamma)^p\ \ldots \\ & + n\,(x-\alpha)^m.\ (x-\beta)^{n-1}.\ (x-\gamma)^p\ \ldots \\ & + p\,(x-\alpha)^m.\ (x-\beta)^n.\ (x-\gamma)^p\ \ldots \\ & .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ = & \ (x-\alpha)^{m-1}.\ (x-\beta)^{n-1}.\ (x-\gamma)^{p-1}\ \ldots \\ & \times [m\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\ \ldots \\ & + n\,(x-\alpha)\,(x-\gamma)\ \ldots \\ & + p\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\ \ldots \\ & .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad] \end{aligned}$$

A' miből világos, hogy fx-nek és $f'x$-nek legnagyobb közosztója:

$$(x-\alpha)^{m-1}.\ (x-\beta)^{n-1}.\ (x-\gamma)^{p-1}\ \ldots,$$

mellyet tudva lévő tanítmányoknál fogva mindig találhatni. Továbbá ez is világos, hogy ha az adott egyenlet ezen közosztó által elosztatik, más egyenlet ered, melly az

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots$$

gyökereket csak egyszer foglalja magában, mert:

$$\frac{(x-\alpha)^m.\ (x-\beta)^n.\ (x-\gamma)^p\ \ldots}{(x-\alpha)^{m-1}.(x-\beta)^{n-1}.(x-\gamma)^{p-1}\ldots}$$
$$=(x-\alpha)\quad(x-\beta)\quad(x-\gamma)$$

Legyen tehát φx legnagyobb közosztója fx-nek és $f'x$-nek, akkor mindig:

$$\frac{fx}{\varphi x}=(x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)\ \ldots,$$

olly egyenlet lesz, mellyben az egyenetlen gyökerek csak egyszer fordúlnak elő.

22. §.

Legyen:

$$fx=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ \ldots\ +Mx+N,$$

tehát:

$$f'x=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}$$
$$+(m-2)Bx^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+M,$$
$$f''x=m(m-1)x^{m-2}+(m-1)(m-2)Ax^{m-3}$$
$$+(m-2)(m-3)Bx^{m-4}$$
$$\ldots\ldots$$
$$+L$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(m)}x=1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m,$$

's írjuk a' származékokat az alapfüggvénynyel együtt sorba, így:

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ f^{(m-2)}x\ \ldots\ f''x,f'x,fx$$

'S nevezzük e' sort, mellyben, a' mint látjuk a' függvények megfordított renden jelennek meg, függvénysornak. Ha most x-nek valamelly értéket adunk, p. o. ezt a, szembetünő, hogy az:

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ f^{(m-2)}x\ \ldots\ f''x,\ f'x,\ fx$$

mennyiségek illetőleg vagy állítók, vagy tagadók lesznek.

Legyen például:

$$f^{(m)}a > 0,$$
$$f^{(m-1)}a > 0,$$
$$f^{(m-2)}a < 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$f''\,a > 0,$$
$$f'\,a < 0,$$
$$f\,a < 0.$$

'S ha mármost itt csupán csak a' függvények előjegyeit tekintjük, 's ezeket rendesen összveírjuk, lesz

$$+\ +\ -\ \ldots\ +\ -\ -,$$

melly sor jegysornak neveztetik. Hogy a' mondottat számbeli példával is világosítsuk föl, legyen:

$$fx = x^3 - 4x + 1,$$

tehát:

$$f'x = 3x^2 - 4,$$
$$f''x = 6x,$$
$$f'''x = 6;$$

's legyen $x = -1$, tehát:

$$f'''x = +6,$$
$$f''x = -6,$$
$$f'x = -1,$$
$$fx = +4;$$

lesz tehát ennél fogva a' jegysor:

$$+\ -\ -\ +.$$

Ellenben, midőn $x = 1$, minthogy ekkor:

$$f'''x = +6,$$
$$f''x = +6,$$
$$f' = -1,$$
$$fx = -2,$$

lesz a' jegysor:

$$+\,+\,-\,-\,.$$

23. §.

Ezt előre bocsátván, találjuk:

α) hogy:

$$f^{(m)}x = 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m$$

és

$$1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m > 0,$$

levén, minden függvénysor' első tagja; tehát egyszersmind minden jegysor' első jegye is állító;

β) hogy midőn az:

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ f^{(m-2)}x\ \ldots\ f''x,\ f'x,\ fx$$

függvényekben:

$$x = \pm\frac{1}{0},$$

tétetik a' mondott függvények' első tagjai maradván meg csak, míg a' többiek elenyésznek, látható, hogy a' jegysorban

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x,\ f^{(m-2)}x\ \ldots\ f''x,\ f'x,\ fx$$

első előjegyei fordúlhatnak elő csak. Mi e' függvényeket illetőleg bizonyos véges értékekre nézve is való, mint a' 3. §-ból látható. Ekkor tehát a' függvényekben csak az első tagok maradván meg, lesz, midőn:

$$x = -\frac{1}{0}:$$

$$f^{(m)}x \quad = 1.2.3\,..m \qquad > 0,$$

$$f^{(m-1)}x = 2.3\,..m\left(-\frac{1}{0}\right) < 0,$$

$$f^{(m-2)}x = 3.4\,..m\left(-\frac{1}{0}\right)^2 > 0,$$

. . . .

$$f''x = (m-1)\; m\left(-\frac{1}{0}\right)^{m-2} \gtrless 0,$$

$$f'x = m\left(-\frac{1}{0}\right)^{m-1} \lessgtr 0,$$

$$fx = \left(-\frac{1}{0}\right)^{m} \gtrless 0,$$

hol a' felső vagy alsó előjegy veendő, a' mint m páros vagy páratlan szám.

Midőn pedig:

$$x = +\frac{1}{0}$$

lesz:

$$f^{(m)}x \quad = 1.2.3\,..m \qquad > 0,$$

$$f^{(m-1)}x = 2.3\,..m\left(+\frac{1}{0}\right) > 0,$$

$$f^{(m-2)}x = 3.4\,..m\left(+\frac{1}{0}\right)^2 > 0$$

. . . .

$$f''x = (m-1)\,m\left(+\frac{1}{0}\right)^{m-2} > 0,$$

$$f'x = m\left(+\frac{1}{0}\right)^{m-1} > 0,$$

$$fx = \left(+\frac{1}{0}\right)^{m} > 0.$$

Miből kitetszik, hogy midőn az

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x\ \ldots\ f''x,\ f'x,\ fx$$

függvénysorban

$$x = -\frac{1}{0}$$

és

$$x = +\frac{1}{0},$$

tétetik, a' jegysorok illetőleg ezek:

$$+\ -\ +\ -\ +\ -\ \ldots$$

$$+\ +\ +\ +\ +\ +\ \ldots$$

Azaz: az első esetben csupa jegyváltozás, — az utóbbiban pedig csupa jegyfolyam fordúl elő; az első jegy, a' mint már tudjuk, mindig állító levén.

A' 3. §-ból világos, hogy mind ez x' bizonyos véges értékeire nézve is való. Legyenek:

$$s_{m-1},\ s_{m-2}\ \ldots\ s_2,\ s_1,\ s$$

azon értekek, mellyek illetőleg az:

$$f^{(m-1)}x,\ f^{(m-2)}x\ \ldots\ f''x,\ f'x,\ fx$$

függvényekbe tétetve első tagjaikat a' reájok következők' összveténél nagyobbakká teszik, 's legyen s_n

$$s_{m-1},\ s_{m-2}\ \ldots\ s_2,\ s_1,\ s$$

közül a' legnagyobbik; akkor lesz ezen értékre nézve, ha a' függvénysor' első tagját, melly mindig állító, itt tekintetbe sem vesszük:

$$f^{(m-1)}(-s_n) < 0,$$
$$f^{(m-2)}(-s_n) > 0,$$
$$f^{(m-3)}(-s_n) < 0,$$
$$f^{(m-4)}(-s_n) > 0$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f^{(m-1)}(s_n) > 0,$$
$$f^{(m-2)}(s_n) > 0,$$
$$f^{(m-3)}(s_n) > 0,$$
$$f^{(m-4)}(s_n) > 0$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \,,$$

mint fölebb, tehát a' jegysorok, midőn

$$x = -s_n$$
$$x = +s_n$$

illetőleg ezek:

$$+ - + - + - + - \ldots$$
$$+ + + + + + + + \ldots$$

'S minthogy ez így van akkor is, midőn

$$x < -s_n$$
$$x > +s_n,$$

szembetünő, hogy ha $-s_n$ fogy $-\frac{1}{0}$-ig, és $+s_n$ növekedik $+\frac{1}{0}$-ig, a' jegysorok változatlanúl ugyan azok maradnak

$$-s_n \text{ és } -\frac{1}{0},$$

$$+s_n \text{ és } +\frac{1}{0}$$

között. Például legyen:

$$f x = x^4 - 2x^2 + x - 1,$$
$$f'x = 4x^3 - 4x + 1,$$
$$f''x = 12x^2 - 4.$$
$$f'''x = 24x,$$
$$f''''x = 24.$$

E' függvények a' 3. §. szerint, midőn x illetőleg:

$$\overline{>} 3, 5, 13, 25$$

a' többiek' összvetét fölülmúló első tagokkal birnak. Legyen tehát:

α)

$$x = 25,$$

következőleg:

$$\begin{array}{lll}
f\ (25) = 25^4 - 2.25^2 + 25 - 1 & = + & 77899 \\
f'\ (25) = 4.25^3 - 4.25 + 1 & = + & 12401 \\
f''\ (25) = 12.25^2 - 4 & = + & 1496 \\
f'''\ (25) = 24.25 & = + & 600 \\
f''''\ (25) = 24 & = + & 24
\end{array}$$

β)

$$x = -25,$$

tehát:

$$\begin{array}{lll}
f\ (-25) = 25^4 - 2.25^2 - 25 - 1 & = + & 77849 \\
f'\ (-25) = -4.25^3 + 4.25 + 1 & = - & 12399 \\
f''\ (-25) = 12.25^2 - 4 & = + & 1496 \\
f'''\ (-25) = -24.25 & = - & 600 \\
f''''\ (-25) = 25 & = + & 24.
\end{array}$$

Ebből látjuk, hogy a' jegysor az első esetben valóban ez:

$$+ + + + +$$

a' másikban pedig ez:

$$+ - + - +.$$

24. §.

Az előbbi előadásból az is világos, hogy, ha a' jegysorokban változás történik, az csak

$$s_n \text{ és } -s_n$$

között lehető. Növekedjék tehát x — s_n-től fogva $+s_n$-ig, minthogy az

$$fx,\ f'x,\ f''x,\ f'''x\ \ldots$$

függvények folytonos mennyiségek, szembetünő, hogy jegyváltozást nem szenvedhetnek a' nélkül, hogy semmin keresztül ne mennének. Lesznek tehát $-s_n$ és $+s_n$ között olly értékei x-nek, mellyek némellyeket (egyes vagy többes) a' mondott függvények közül elenyésztetnek.

Vizsgáljunk átalában egy illyetén függvényt például a' következőt

$$f^{(n)}x.$$

Leszen:

$$f^{(n)}(x \pm k) = f^{(n)}x \pm k\,.\,f^{(n+1)}x + \frac{k^2}{1\,.\,2}\,.\,f^{(n+2)}x \pm \ldots$$

azaz,

$$x = a$$

tétetvén:

$$f^{(n)}(a \pm k) = f^{(n)}a \pm k\,.\,f^{(n+1)}a + \frac{k^2}{1\,.\,2}\,.\,f^{(n+2)}a \pm \ldots$$

Ha már most e' sorban:

α) $f^n a$ nem semmi, k-nak (3. §.) mindig olly értéket lehet adni, hogy

$$f^{(n)}(a \pm k) \text{ és } f^{(n)}a$$

ugyan azon előjegygyel birjanak;

β) ha pediglen

$$f^{(n)} a = 0,$$

marad:

$$f^{(n)}(a \pm k) = \pm k \cdot f^{(n+1)} a + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot f^{(n+2)} a \pm \ldots$$

's az érdeklett §. szellemében k-nak olly értéket adhat-ni, hogy az első tag' t. i.

$$\pm k \cdot f^{(n+1)} a$$

előjegye az egész soré legyen.

Ha tehát az $f^{(n)} x$ függvény, midőn

$$x = a,$$

nem semmi, akkor a' legközelebbi értékek, mellyek az

$$x = a + k,$$
$$x = a - k,$$

feltételeknek, k eléggé, vagy végtelen kicsinynek vétetvén, megfelelnek, mindig $f^{(n)}$ a' előjegyével birnak. Ellenben pedig, midőn

$$f^{(n)} a = 0,$$

akkor a' legközelebbi értékek ellenkező előjegygyel bírnak, és pedig:

$f^{(n)}(a + k)$, $+ k f^{(n+1)} a$ előjegyével

$f^{(n)}(a - k)$ pedig $- k f^{(n+1)} a$ előjegyével;

következőleg, ha

$$f^{(n+1)} a > 0$$

állító, lesz:

$$f^{(n)}(a + k) \text{ is } > 0$$

azaz állító; és

$$f^{(n)}(a - k) < 0$$

tagadó; ellenben, ha

$$f^{(n+1)} a < 0$$

tagadó, lesz:

$$f^{(n)}(a+k) \text{ is } < 0$$

tagadó;

$$f^{(n)}(a-k) \text{ pedig} > 0$$

azaz állító.

25. §.

Megesik néha, hogy x' valamelly értékére nézve, több egymás melletti függvény elenyészik, 's legyenek illyen enyészők a' következők:

$$f^{(n)}a,\ f^{(n-1)}a,\ f^{(n-2)}a\ \ldots\ f^{(n-e)}a,$$

's legyen

$$f^{(n+1)}a \gtrless 0,$$

azaz, vagy állító, vagy tagadó; lesz nyilván a' jegysor' illető része:

$$\pm\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0.$$

Más felül tudjuk, hogy:

$$f^{(n)}(a\pm k)=f^{(n)}a\pm k.f^{(n+1)}a+\pm\ \ldots$$
$$f^{(n-1)}(a\pm k)=f^{(n-1)}a\pm k.f^{(n)}a+\pm\ \ldots$$
$$f^{(n-2)}(a\pm k)=f^{(n-2)}a\pm k.f^{(n-1)}a+\pm\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n-e)}(a\pm k)=f^{(n-e)}a\pm k.f^{(n-e+1)}a+\pm\ \ldots$$

avagy, minthogy a' föltétel' következésében:

$$f^{(n)}a=0,$$
$$f^{(n-1)}a=0,$$
$$f^{(n-2)}a=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n-e)}a=0;$$

hogy:

$$f^{(n)}(a \pm k) = \pm \; k \; . f^{(n+1)} a + \ldots$$

$$f^{(n-1)}(a \pm k) = + \frac{k^2}{1.2} . f^{(n+1)} a \mp \ldots$$

$$f^{(n-2)}(a \pm k) = \mp \frac{k^3}{1.2.3} . f^{(n+1)} a + \ldots$$

. . . .

$$f^{(n-e)}(a \pm k) = (\pm)^{e+1} . \frac{k^{e+1}}{1.2 \ldots (e+1)} . f^{(n+1)} a \ldots$$

azaz, ha itt úgy okoskodunk, mint feljebb, az e' függvényeknek

$$f^{(n)}(a+k),\; f^{(n-1)}(a+k) \ldots$$

megfelelő előjegyek közönségesen

$$f^{(n+1)} a,$$

előjegyével egyenlők; ellenben ezekéi

$$f^{(n)}(a-k),\; f^{(n-1)}(a-k) \ldots$$

$f^{(n+1)} a$-tól fogva szüntelen változnak. E' szerint tehát a' jegysor:

$$\pm \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \ldots\ldots$$

$$x = a \pm k$$

értékeire nézve illetőleg ezekké lesz:

$$\pm \; \pm \; \pm \; \pm \; \pm \; \pm \ldots$$

és

$$\pm \; \mp \; \pm \; \mp \; \pm \; \mp \ldots$$

Fourier x' azon értékét, mellyet a' függvénysorba helyeztet, rekesz alá a' jegysor' elébe írja, azaz minthogy

$$a + k > a$$

$$a - k < a,$$

ezen föltételeket így jelöli:

$$(> a),\; (< a).$$

E' szerint ha például:

(*a*) + — 0 0 0 + + 0 0 — 0 + —

lesz a' mondottak' következésében:

(>*a*) + — — — — + + + + — — + —
(*a*) + — 0 0 0 + + 0 0 — 0 + —
(<*a*) + — + — + + + — + — + + —.

'S legyen még, gyakorlás végett:

(*a*) + 0 0 0 0 — 0 0 0 — + 0 + 0 0 0 0 0 —

lesz tehát:

(>*a*) + + + + + — — — — — + + + + + + + + —
(*a*) + 0 0 0 0 — 0 0 0 — + 0 + 0 0 0 0 0 —
(<*a*) + — + — + — + — + — + — + — + — + — —

Harmadszor, legyen:

(*a*) + — + 0 0 0 0 — 0 0 0 + + 0 + 0 0 0 +

tehát:

(>*a*) + — + + + + + — — — — + + + + + + + +
(*a*) + — + 0 0 0 0 — 0 0 0 + + 0 + 0 0 0 +
(<*a*) + — + — + — + — + — + + + — + — + — +.

26. §.

Legyen adva

α) ezen csoport:

$$\pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ \pm$$

lesz átalában:

$$\begin{array}{ll}(>a) & \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \ldots\ \pm\ \pm\ \pm \\ (a) & \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ \pm \\ (<a) & \pm\ \mp\ \pm\ \mp\ \pm\ \ldots\ldots\ \pm\end{array}$$

Észre vehetjük itt, hogy midőn (*a*)-ban páros számú 0 van, hogy akkor az utolsó 0-nek megfelelő elöjegy (<*a*)-ban ez: ±, ha pedig páratlan, akkor ∓. Tehát, ha a' semmik' száma n, az első esetben a' jegy változások száma $(< a)$-ban is csak n, az utóbbiban pedig $n+1$;

β) a' következő csoport:

$$\pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ .\ .\ 0\ 0\ \pm$$

azaz ollyan, a' mellyben a' semmikre következő előjegy az azokat megelőzőtől különbözik. Tehát:

$$(a)\ \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ .\ .\ 0\ 0\ \mp,$$

's így az előbbiek szerint:

$$\begin{array}{ll} (> a) & \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm\ .\ .\ \pm\ \pm\ \mp \\ (a) & \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ .\ .\ 0\ 0\ \mp \\ (< a) & \pm\ \mp\ \pm\ \mp\ \pm\ .\ .\ .\ .\ \mp \end{array}$$

's a' melly utolsó kifejezésben az utolsó tagok határozatlanok. De tudjuk, hogy midőn a' semmik páros számmal vannak, hogy akkor az utolsó semmit illető előjegy $(< a)$-ban ez: $\pm$, következőleg ekkor itt a' jegyváltozások' száma $= n+1$. Ellenben, midőn a' semmik' száma páratlan, a' mondott utolsó előjegy: $\mp$, mi szerint ekkor $(< a)$-ban csak n jegyváltozás létezhet.

Ha a' két következetet együvé veszszük, látjuk, hogy $(< a)$-ban a' jelváltozások száma $n+1$, midőn n páratlan, n pedig midőn n páros, föltéve, hogy a' semmikre következő előjegyek az elsőkkel ugyan azok; mi épen megfordítva van, midőn a' mondott jegyek egymástól különbözők. Ez utolsó esetben $(> a)$-ban is egy jegyváltozás van; ha tehát csak azt keressük, hogy mennyivel több a' jegyváltozás $(< a)$-ban mint $(> a)$-ban, itt ezeknek számát átalában egygyel kevesíteni kell.

γ) Különös figyelemre méltó azon eset, midőn a' jegysor semmikkel végződik, azaz midőn:

$$(a) \quad \pm\, 0\; 0\; 0\; 0\; .\; .\; 0\; 0\; .$$

Itt:

$$\begin{array}{ll} (>a) & \pm\;\pm\;\pm\;\pm\;\pm\;.\;.\;\pm\;\pm \\ (a) & \pm\;0\;0\;0\;0\;.\;.\;0\;0 \\ (<a) & \pm\;\mp\;\pm\;\mp\;\pm\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

Ámbár itt az utolsó tagokat $(<a)$-ban minden esetre egyszerűen oda nem írhatjuk, mindazonáltal könnyen meg fogunk győződni, hogy $(<a)$-ban a' jegyváltozások folytatatván, átalában annyi jegyváltozással több lesz $(<a)$-ban, mint $(>a)$-ban, valahány semmivel végződik az (a). Másfelül (20. 21. §.) tudjuk, hogy ez esetben fx-nek annyi egyenlő gyökere,

$$x = a,$$

van, a' mennyi 0 találtatik (a)-ban, úgy hogy minden illyetén gyökérre nézve egy jegyváltozás jegyfolyammá váljék, avvagy elenyészszék.

δ) Midőn semmik a' jelsor' közepén (egy vagy több csoportban) és végén találtatnak, a' jegyváltozások számát átalában meghatározni nem lehet. Mindazonáltal bizonyos, akár hány semmi legyen (a)-ban, hogy:

1) $(<a)$' jegyváltozásainak száma vagy egyenlő $(>a)$-éval, vagy ennél nagyobb;

2) Midőn (a)' utolsó tagja nem 0, akkor $(<a)$' és $(>a)$' jegyváltozásaiknak különbsége, az épen előadottak szerint, vagy 0, vagy páros szám;

3) Midőn (a)' utolsó tagja semmi, azaz a' gyökere fx-nek, akkor $(<a)$-nak egy jegyváltozással több van, mint $(>a)$-nak. Azaz: minden való gyökérre

nézve, melly $= a$, $(< a)$-ban egy jegyváltozással több találtatik, mint $(> a)$-ban. 'S átalában, valahány utolsó tagja (a)-nak semmi, annyi jegyváltozással több van $(< a)$-ban, mint $(> a)$-ban, s annyi egyenlő $= a$ gyökere van fx-nek.

27. §.

E' tanítmányok' igen fontos következményei:

α) minden jegysor' első tagja állító;

β) hogy az

$$\left(\substack{=\\<} - s_n\right)$$

sorban közönségesen m jegyváltozás van;

γ) hogy ellenben az

$$\left(\substack{=\\>} + s_n\right)$$

sorban semmi jegyváltozás nincsen. Tehát amabban annyi jegyváltozással több van, mint ebben, valahány gyökere van fx-nek;

δ) hogy midőn x

$$- s_n\text{-től} + s_n\text{-ig}$$

növekedik a' jegyváltozások száma szüntelen fogy;

ε) hogy minden bizonyos a és b határok között fekvő való gyökérre nézve egy jegyváltozástól fosztatík meg a' jegysor. Ha tehát a és b között n való gyökér létez, ezek miatt legalább n jegyváltozás enyészik el, és ha (a)-ban és (b)-ben a' jegyváltozások' száma egyenlő, ezen határok között való gyökér nem lehet;

ζ) ellenben, ha (a)-ban n jegyváltozással több van, mint (b)-ben, n való gyökér e' határok között csak lehető, mert bizonyos értékekre nézve némellyek ezen

$$f'x,\ f''x,\ f'''x\ \ldots\ f^{(m-1)}x$$

függvények közűl elenyészhetnek, 's így jegyváltozást okozhatnak, a' nélkül, hogy egyidőn a' mondott határok között fx is elenyészszék, azaz fx' valamelly való gyökere létezzen;

η) az előbbi §. 2.) alatti észrevétele szerint, midőn a és b között fx el nem enyészik, azaz való gyökérrel az nem bir a' jegyváltozások' különbsége mindig:

$$= 0,\ 2,\ 4\ \ldots$$

azaz páros szám. Tehát, midőn a' jegyváltozások' különbsége (a) és (b) között páratlan szám, mindig egy, vagy több páratlan számú, való gyökérnek e' határok közötti lételét következtethetni. Nevezetesen, midőn a' mondott külömbség $= 1$, bizonyosak vagyunk egy, de csak egy, való gyökérnek ott létéről. És, midőn a' különbség páros szám, a' való gyökerek' száma

$$= 0,\ 2,\ 4\ \ldots$$

azaz páros szám.

28. §.

Hogy a' mondottakat *Fourier*rel példák által világosítsuk föl; legyen

I.

$$fx = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101,$$

tehát:

$$f'x = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46,$$

$$f''x = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190,$$

$$f'''x = 60x^2 - 72x - 144,$$

$$f''''x = 120x - 72,$$

$$f'''''x = 120.$$

Itt mindenek előtt, midőn

$$x = 0,$$

lesz:

$$\begin{aligned}
f'''''(0) &= +\ 120, \\
f''''(0) &= -\ \ 72, \\
f'''(0) &= -\ 144, \\
f''(0) &= +\ 190, \\
f'(0) &= -\ \ 46, \\
f(0) &= -\ 101;
\end{aligned}$$

ezen értékekre nézve tehát a' jegysor ez:

$$(0)\ +\ -\ -\ +\ -\ -\ .$$

Midőn pedig

$$x = 1,$$

lesz:

$$\begin{aligned}
f'''''(1) &= +120, \\
f''''(1) &= 120-72, \\
f'''(1) &= 60-72-144, \\
f''(1) &= 20-36-144+190, \\
f'(1) &= 5-12-72+190-46, \\
f(1) &= 1-3-24+95-46-101;
\end{aligned}$$

's itt minden egybeadás nélkül láthatni, hogy:

$$\begin{aligned}
f'''''(1) &> 0, \\
f''''(1) &> 0, \\
f'''(1) &< 0, \\
f''(1) &> 0, \\
f'(1) &> 0, \\
f(1) &< 0;
\end{aligned}$$

következőleg lesz:

$$(1)\ +\ +\ -\ +\ +\ -\ .$$

Ellenben, midőn

$$x = 10,$$

lesz:

$f'''''(10) = 120$,
$f''''(10) = 1200 - 72$,
$f'''(10) = 6000 - 720 - 144$,
$f''(10) = 20000 - 3600 - 1440 + 190$,
$f'(10) = 50000 - 12000 - 7200 + 1900 - 46$,
$f(10) = 100000 - 30000 - 24000 + 9500 - 460 - 101$

's itt is, minden további mivelet nélkül:

$$f'''''(10) > 0,$$
$$f''''(10) > 0,$$
$$f'''(10) > 0,$$
$$f''(10) > 0,$$
$$f'(10) > 0,$$
$$f(10) > 0;$$

azaz a' jegysor ez:

$$(10) + + + + + + .$$

Ha már most a' három következményt összve írjuk, lesz:

$$\begin{array}{cccccc} (10) & + & + & + & + & + & + \\ (1) & + & + & - & + & + & - \\ (0) & + & - & - & + & - & - . \end{array}$$

Minthogy itt (10)-ben csupa jegyfolyam találtatott, 's az előbbi szerint minden más szám

$$x > 10,$$

is csak jogyfolyamokat okozhat, világos, hogy sem 10, sem ennél nagyobb szám fx' gyökere nem lehet. Minek következésében 10 fx' gyökereinek egyik átalános határa.

Legyen további vizsgálat' okáért:

$$x = -1,$$

tehát:

$f^{VI}(-1)=120,$

$f^{V}(-1)=-120-72,$

$f^{IV}(-1)=60+72-144,$

$f'''(-1)=-20-36+144+190,$

$f''(-1)=5+12-72-190-46,$

$f(-1)=-1-3+24+95+46-101$

azaz:

$$f^{VI}(-1)>0,$$
$$f^{V}(-1)<0,$$
$$f^{IV}(-1)<0,$$
$$f''(-1)>0,$$
$$f'(-1)<0,$$
$$f(-1)>0;$$

és végűl:

$$(-1)\ +\ -\ -\ +\ -\ +\ .$$

Legyen végre

$$x=-10,$$

tehát:

$f^{VI}(-10)=120,$

$f^{V}(-10)=-1200-72,$

$f^{IV}(-10)=6000-720-144,$

$f''(-10)=-20000-3600+1440+190,$

$f'(-10)=50000+12000-7200-1900-46,$

$f(-10)=-100000-30000+24000+9500+460-101,$

azaz:

$$f^{VI}(-10)>0,$$
$$f^{V}(-10)<0,$$
$$f'''(-10)>0,$$
$$f''(-10)<0,$$
$$f'(-10)>0,$$
$$f(-10)<0;$$

azaz:

$$(-10)\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ ;$$

miből világos, mint fölebb, hogy itt, minthogy már csupa jegyváltozásra találtunk, tovább menni nem kell. Ha a' következményeket mind összveállítjuk, lesz:

(—10)	+	—	+	—	+	—
(—1)	+	—	—	+	—	+
(0)	+	—	—	+	—	—
(1)	+	+	—	+	+	—
(10)	+	+	+	+	+	+ .

29. §.

Az adott egyenlet legyen:

II.

$$fx = x^4 - 4x^3 - 3x + 23,$$

tehát:

$$f'x = 4x^3 - 12x^2 - 3,$$
$$f''x = 12x^2 - 24x,$$
$$f'''x = 24x - 24,$$
$$f''''x = 24,$$

Innen okvetetlenűl:

$$f''''(0) = 24,$$
$$f'''(0) = -24,$$
$$f''(0) = 0,$$
$$f'(0) = -3,$$
$$f(0) = 23;$$

tehát:

$$(0)\ +\ -\ 0\ -\ +,$$

's innen a' 24. §. következésében:

$$(<0)\ +\ -\ +\ -\ +$$
$$(>0)\ +\ -\ -\ -\ +\ .$$

Minthogy itt a' semmin alól gyökereket keresni nem kell, legyen továbbá:

$$x = 1,$$

azaz:

$$f''''(1) = 24,$$
$$f'''(1) = 0,$$
$$f''(1) = -12,$$
$$f'(1) = -11,$$
$$f(1) = 17$$

és:

$$(1) \; + \; 0 \; - \; - \; +,$$

's ugyan azon szabály után:

$$(<1) \; + \; - \; - \; - \; +$$
$$(>1) \; + \; + \; - \; - \; + \, .$$

Legyen végre

$$x = 10,$$

lesz:

$$f''''(10) = 24,$$
$$f'''(10) = 46,$$
$$f''(10) = 960,$$
$$f'(10) = 2797,$$
$$f(10) = 5997,$$

tehát, minthogy:

$$f''''(10), f'''(10), f''(10), f'(10), f(10) > 0,$$
$$(10) \; + \; + \; + \; + \; +,$$

's összveállítva:

$$(<0) \; + \; - \; + \; - \; +,$$
$$(0) \; + \; - \; 0 \; - \; +,$$
$$(>0) \; + \; - \; - \; - \; +,$$
$$(<1) \; + \; - \; - \; - \; +,$$
$$(1) \; + \; 0 \; - \; - \; +,$$
$$(>1) \; + \; + \; - \; - \; +,$$
$$(10) \; + \; + \; + \; + \; + \, .$$

Legyen gyakorlás végett továbbá:

III.

$$fx = x^3 + 2x^2 - 3x + 2,$$

miből következik:

$$f'x = 3x^2 + 4x - 3,$$
$$f''x = 6x + 4,$$
$$f'''x = 6.$$

Itt mindenek előtt:

$$f'''(0) > 0,$$
$$f''(0) > 0,$$
$$f'(0) < 0,$$
$$f(0) > 0;$$

azaz:

$$(0) + + - + .$$

Ha pedig

$$x = 1,$$

lesz:

$$f'''(1) > 0,$$
$$f''(1) > 0,$$
$$f'(1) > 0,$$
$$f(1) > 0;$$

tehát:

$$(1) + + + + .$$

Minthogy ez így van, legyen

$$x = -1:$$
$$f'''(-1) > 0,$$
$$f''(-1) < 0,$$
$$f'(-1) < 0,$$
$$f(-1) > 0$$

és

$$(-1) + - - +,$$

's végre

$$x = -10,$$

minek következésében:

$$f'''(-10) > 0,$$
$$f''(-10) < 0,$$
$$f'(-10) > 0,$$
$$f(-10) < 0;$$

és

$$(-10) + - + -$$

csupa jegyváltozás, mint feljebb (1)-ben csupa jegyfolyam. Összveállítva lesz tehát:

$$\begin{array}{lllll} (-10) & + & - & + & - \\ (-1) & + & - & - & + \\ (0) & + & + & - & + \\ (1) & + & + & + & + . \end{array}$$

Legyen ismét:

IV.

$$fx = x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36;$$

tehát:

$$f'x = 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25,$$
$$f''x = 20x^3 + 12x^2 + 2,$$
$$f'''x = 60x^2 + 24x,$$
$$f''''x = 120x + 24,$$
$$f'''''x = 120;$$

következőleg először:

$$f'''''(0) > 0,$$
$$f''''(0) > 0,$$
$$f'''(0) = 0,$$
$$f''(0) > 0,$$
$$f'(0) < 0,$$
$$f(0) < 0;$$

tehát:

$$(0)\ +\ +\ 0\ +\ -\ -;$$

következőleg:

$$(<0)\ +\ +\ -\ +\ -\ -$$
$$(>0)\ +\ +\ +\ +\ -\ -$$

's legyen már most

$$x = 1,$$

tehát:

$$f'''''(1) > 0,$$
$$f''''(1) > 0,$$
$$f'''(1) > 0,$$
$$f''(1) > 0,$$
$$f'(1) < 0,$$
$$f(1) < 0;$$

azaz:

$$(1)\ +\ +\ +\ +\ -\ -.$$

Tegyünk:

$$x = 10,$$

lesz:

$$f'''''(10) > 0,$$
$$f''''(10) > 0,$$
$$f'''(10) > 0,$$
$$f''(10) > 0,$$
$$f'(10) > 0,$$
$$f(10) > 0;$$

's így:

$$(10)\ +\ +\ +\ +\ +\ +.$$

Tehát 10-nél tovább menni nem kell. Legyen tehát:

$$x = -1,$$

lesz:

$$f'''''(-1) > 0,$$
$$f''''(-1) < 0,$$
$$f'''(-1) > 0,$$
$$f''(-1) < 0,$$
$$f'(-1) < 0,$$
$$f(-1) < 0,$$

és:

$$(-1) \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad - \;.$$

Legyen:

$$x = -10,$$

esz:

$$f'''''(-10) > 0,$$
$$f''''(-10) < 0,$$
$$f'''(-10) > 0,$$
$$f''(-10) < 0,$$
$$f'(-10) > 0,$$
$$f(-10) < 0;$$

és:

$$(-10) \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \;.$$

Összveállítva lesz:

(-10)	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
(-1)	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
(<0)	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
(0)	$+$	$+$	0	$+$	$-$	$-$
(>0)	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
(1)	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
(10)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$.

Legyen továbbá

V.

$$fx = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6;$$

tehát:

$$
\begin{aligned}
f'x &= 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5,\\
f''x &= 42x^5 - 40x^3 - 18x + 8,\\
f'''x &= 210x^4 - 120x^2 - 28,\\
f''''x &= 840x^3 - 240x,\\
f'''''x &= 2520x^2 - 240,\\
f''''''x &= 5040x,\\
f'''''''x &= 5040.
\end{aligned}
$$

Itt először:

$$
\begin{aligned}
f'''''''&(0) > 0,\\
f''''''&(0) = 0,\\
f'''''&(0) < 0,\\
f''''&(0) = 0,\\
f'''&(0) < 0,\\
f''&(0) > 0,\\
f'&(0) < 0,\\
f&(0) > 0;
\end{aligned}
$$

azaz:

$$(0) \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad - \quad + \quad - \quad +$$

tehát:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
(<0) & + & - & - & + & - & + & - & + \\
(>0) & + & + & - & - & - & + & - & + .
\end{array}
$$

Továbbá:

$$
\begin{aligned}
f'''''''&(1) > 0,\\
f''''''&(1) > 0,\\
f'''''&(1) > 0,\\
f''''&(1) > 0,\\
f'''&(1) > 0,\\
f''&(1) < 0,\\
f'&(1) < 0,\\
f&(1) > 0;
\end{aligned}
$$

tehát:

$$(1)\ + + + + + - - + .$$

Azután:

$$f'''''''(10) > 0,$$
$$f''''''(10) > 0,$$
$$f'''''(10) > 0,$$
$$f''''(10) > 0,$$
$$f'''(10) > 0,$$
$$f''(10) > 0,$$
$$f'(10) > 0,$$
$$f(10) > 0;$$

következőleg:

$$(10)\ + + + + + + + + .$$

Minthogy ez így van, legyen:

$$x = -1,$$

tehát:

$$f'''''''(-1) > 0,$$
$$f''''''(-1) < 0,$$
$$f'''''(-1) > 0,$$
$$f''''(-1) < 0,$$
$$f'''(-1) > 0,$$
$$f''(-1) > 0,$$
$$f'(-1) < 0,$$
$$f(-1) > 0;$$

's így:

$$(-1)\ + - + - + + - + .$$

Legyen szintúgy:

$$x = -10,$$

lesz:

$$f'''''''(-10) > 0,$$
$$f''''''(-10) < 0,$$

$$f''''' (-10) > 0,$$
$$f'''' (-10) < 0,$$
$$f''' (-10) > 0,$$
$$f'' (-10) < 0,$$
$$f' (-10) > 0,$$
$$f (-10) < 0;$$

azaz:

$$(-10) + - + - + - + - .$$

A' következményeket összveállítva lesz:

(—10)	+	—	+	—	+	—	+	—
(—1)	+	—	+	—	+	+	—	+
(<0)	+	—	—	+	—	+	—	+
(0)	+	0	—	0	—	+	—	+
(>0)	+	+	—	—	—	+	—	+
(1)	+	+	+	+	+	—	—	+
(10)	+	+	+	+	+	+	+	+ .

Legyen:

VI.

$$fx = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2,$$

a' miből:

$$f'x = 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 6x - 2,$$
$$f''x = 20x^3 + 36x^2 + 12x - 6,$$
$$f'''x = 60x^2 + 72x + 12,$$
$$f''''x = 120x + 72,$$
$$f'''''x = 120.$$

'S itt a' szokott mód szerint:

(<—1)	+	—	+	—	+	—
(—1)	+	—	0	—	+	—
(>—1)	+	—	—	—	+	—
(0)	+	+	+	—	—	—
(1)	+	+	+	+	+	—
(10)	+	+	+	+	+	+ .

Legyen:

VII.

$$fx \;= x^5 - 10x^3 + 6x + 1\,,$$

tehát:

$$f'x \;= 5x^4 - 60x^2 + 6\,,$$
$$f''x \;= 20x^3 - 120x\,,$$
$$f'''x \;= 60x^2 - 120\,,$$
$$f''''x = 120x\,,$$
$$f'''''x = 120$$

és:

(—10	+	—	+	—	+	—
(<—1)	+	—	+	+	—	+
(—1)	+	—	0	+	—	+
(>—1)	+	—	—	+	—	+
(<0)	+	—	—	+	+	+
(0)	+	0	—	0	+	+
(>0)	+	+	—	—	+	+
(<1)	+	+	—	—	—	—
(1)	+	+	0	—	—	—
(>1)	+	+	+	—	—	—
(10)	+	+	+	+	+	+ .

30. §.

Itt az első példában volt:

(—10)	+	—	+	—	+	—
(—1)	+	—	—	+	—	+
(0)	+	—	—	+	—	—
(1)	+	+	—	+	+	—
(10)	+	+	+	+	+	+

Az 1-ső jegysorban 5. jegyváltozás van
„ 2 „ „ 4 „ „
„ 3 „ „ 3 „ „
„ 4 „ „ 3 „ „
„ 5 „ „ 0 „ „

Következőleg a' 28. §. η) alatti észrevétele szerint — 10 és — 1, aztán — 1 és 0 között egy egy való gyökér létez. Továbbá 0 és + 1 között gyökér nincs, 1 és 10 között három van, 's ezek között tehát legalább egy való. E' szerint gyökereket csak — 10 és 0, aztán 1 és 10 között keresni kell, az — 1 és 0 közötti tér kizárva marad.

A' második példában a' jegysorok így következnek egymásra:

(<0)	+	−	+	−	+
(0)	+	−	0	−	+
(>0)	+	−	−	−	+
(<1)	+	−	−	−	+
(1)	+	0	−	−	+
(>1)	+	+	−	−	+
(10)	+	+	+	+	+ .

Itt az 1-ső jegysorban 4. jegyváltozás van,
„ 2 „ „ 2 „ „
„ 3 „ „ 2 „ „
„ 4 „ „ 2 „ „
„ 5 „ „ 2 „ „
„ 6 „ „ 2 „ „
„ 7 „ „ 0 „ „ .

Minthogy itt az első jegysorban 4, a' második — vagy inkább harmadikban kettő van, 's a' köz az első és harmadik között azaz

$$(<0)\ ..\ (>0)$$

azaz:

$$(0-k)\ ..\ (0+k),$$

midőn k szüntelen fogy; 's mi által a' következmények nem változnak, végtelen kicsinynyé, mellyben csak 0 létez, lesz, és 0 nem gyökere az egyenletnek, világos hogy itt az egyenletnek két képzeleti gyökere van. A' 4-dik, 5-dik és 6-dik jegysorban a' jegyváltozások száma ugyan azon. A' 6-dik sorban két jegyváltozás van, a' 7-dikben egy sincs következőleg az egyenletnek > 1 és 10 között két gyökere van, melly való vagy képzeleti lehet, miről még alább lesz szó.

A' harmadik példában:

(—10)	+	—	+	—
(—1)	+	—	—	+
(0)	+	+	—	+
(1)	+	+	+	+

Tehát az 1-ső jegysorban 3 jegyváltozás van,
„ 2 „ „ 2 „ „
„ 3 „ „ 2 „ „
„ 4 „ „ 0 „ „

következőleg — 10 és — 1 között egy való, 0 és 1 között két kérdéses gyökér van.

A' negyedik példában volt:

(—10)	+	—	+	—	+	—
(—1)	+	—	+	—	—	—
(<0)	+	+	—	+	—	—
(0)	+	+	0	+	—	—
(>0)	+	+	+	+	—	—
(1)	+	+	+	+	—	—
(10)	+	+	+	+	+	+ .

Az	1-ső	jegysorban	5.	jegyváltozás	van,
„	2 „	„	3	„	„
„	3 „	„	3	„	„
„	4 „	„	1	„	„
„	5 „	„	1	„	„
„	6 „	„	1	„	„
„	7 „	„	0	„	„

Azaz: -10 és -1 között két kérdéses gyökér; 1 és 10 között egy való gyökér van. Minthogy pedig <0 és >0 között, melly köz, a' mint tudjuk végtelen kicsinynyé is lehet, két gyökér létez, és 0 nem gyökere az egyenletnek, két képzeleti gyökérről bizonyosak vagyunk.

Az ötödik példában:

(-10)	+	—	+	—	+	—	+	—
(-1)	+	—	+	—	+	+	—	+
(<0)	+	—	—	+	—	+	—	+
(0)	+	0	—	0	—	+	—	+
(>0)	+	+	—	—	—	+	—	+
(1)	+	+	+	+	+	—	—	+
(10)	+	+	+	+	+	+	+	+ .

Az	1-ső	jegysorban	7.	jegyváltozás	van;
„	2 „	„	6	„	„
„	3 „	„	6	„	„
„	4 „	„	4	„	„
„	5 „	„	4	„	„
„	6 „	„	2	„	„
„	7 „	„	0	„	„ .

Minek következésében csak egy való gyökérről győződhetünk meg — 10 és — 1 között. Tovább két két gyökér van < 0 és > 0, és 1 és 10 között. Az elsők szemlátomást képzeletiek, az utolsókat további vizsgálatra kell hagynunk.

A hatodik példában:

(<—1)	+	—	+	—	+	—
(—1)	+	—	0	—	+	—
(>—1)	+	—	—	—	+	—
(0)	+	+	+	—	—	—
(1)	+	+	+	+	+	—
(10)	+	+	+	+	+	+ .

Itt az	1-sö	jegysorban	5.	jegyváltozás	van,	
„	2	„	„	3	„	„
„	3	„	„	3	„	„
„	4	„	„	1	„	„
„	5	„	„	1	„	„
„	6	„	„	0	„	„

Azaz: minthogy <—1 és >—1 között két jegyváltozásra akadunk, az egyenlet kétség kivül két képzeleti gyökérrel bir. Aztán > — 1 és 0 között két kérdéses; végre 1 és 10 között egy való gyökér van.

A' hetedik példában volt:

(—10)	+	—	+	—	+	—
(<—1)	+	—	+	+	—	+
(—1)	+	—	0	+	—	+
(>—1)	+	—	—	+	—	+
(<0)	+	—	—	+	+	+
(0)	+	0	—	0	+	+

(>0)	+	+	—	—	+	+
(<1)	+	+	—	—	—	—
(1)	+	+	0	—	—	—
(>1)	+	+	+	—	—	—
(10)	+	+	+	+	+	+.

Itt az 1-ső jegysorban 5. jegyváltozás van,

„ 2 „	„	4	„	„
„ 2 „	„	4	„	„
„ 4 „	„	4	„	„
„ 5 „	„	2	„	„
„ 6 „	„	2	„	„
„ 7 „	„	2	„	„
„ 8 „	„	1	„	„
„ 9 „	„	1	„	„
„10 „	„	1	„	„
„11 „	„	0	„	„

E' szerint tehát egy való gyökér van -10 és < -1 között. Továbbá két gyökér > -1 és < 0 között, mellyekről még nem tudni, valók-e vagy képzeletik azok. Végre egy egy való gyökér > 0 és < 1, és > 1 és 10 között.

31. §.

Az előhozott példákban többször azon eset fordult elő, hogy x' valamelly értékére, p. o. a-ra nézve, a' függvénysor' némelly tagjai elenyésztek, minek következésében a' $(< a)$ és $(> a)$-nak megfelelő jegysorokat kellett keresni, 's tudjuk:

α) Midőn fa is $= 0$, az adott egyenletben annyiszor fordúl elő a mint gyökér, valahány egymásutáni függvény:

$$fa, f'a, f''a \ldots = 0.$$

De minthogy ezen esetben, még más függvények is elenyészhetnek, például ez:

$$f^{(n)}a = 0,$$

a' nélkül, hogy $f^{(n-1)}a$, vagy minden megelőzői is semmik volnának. Ha e' szerint tehát $(< a)$-ban több a' jegyváltozás, mint $(> a)$-ban,

$$f^{(n)}a = 0$$

miatt is, látni való, hogy az egyenletnek, $< a$ és $> a$ között (melly köz végtelen kicsinynyé is lehet) még más a-tól különböző gyökerei is vannak, mellyek e' szerint szemlátomást képzeletiek. Legyen átalában $(< a)$ és $(> a)$ közűl a' jegyváltozások' különbsége $= \alpha$, továbbá legyen az elenyésző egymásutáni

$$fx, f'x, f''x \ldots$$

függvények' száma $= \beta$, lesz:

átalában a' gyökerek száma $= \alpha$;

való és egyenlő gyök. „ $= \beta$;

a' képzeleti gyökereké pedig $= \alpha - \beta$.

Ennél fogva tehát illy esetben mindig $\alpha - \beta$ képzeleti gyökér van;

β) Midőn pedig csak középső függvények enyésznek el, 's $(< a)$ és $(> a)$ között a' jegyváltozások különbsége α, minthogy ekkor a'

$$< a \ldots > a$$

köz végtelen kicsiny, 's csak a' való a-t foglalja magában, 's ez nem gyökere az egyenletnek, kitetszik, hogy $< a$ és $> a$ között a képzeleti gyökér keresendő.

32. §.

Figyelemre méltó:

α) Midőn a' jegysor állító előjegygyel végződik a' jegyváltozások mindig páros számuak. Az első jegy, mint tudjuk, mindig állító, innen tehát az első tagadóig, legyen az bár hányadik is, csak egy; 's ettől az első reá következő állítóig ismét csak egy jegyváltozás lehető; innen a' legelső tagadóig ismét csak egy, a' legelső állítóig is csak egy jegyváltozás van . . . . Miből kiviláglik, hogy midőn tagadó jegyről állítókra megyünk által, a' megelőző jegyváltozások mindig párosak; minthogy pedig, a' föltétel szerint, a' jegysor' utolsó tagja +, 's ez csak vagy közvetlenül, vagy más állító jegyek' társaságában következhetik tagadó jegyre, ez esetben a' jegyváltozások' száma mindig páros szám;

β) Ugyan azon okoskodás által meg kell győződnünk arról is, hogy, midőn a' jegysor' utolsó tagja —, jegyváltozások csak páratlan számban lehetők. És megfordítva:

α') Midőn a' jegysor' utolsó tagja +, a' jegyváltozások párosan vannak meg;

β') Midőn a' mondott tag —, a' jegyváltozások páratlan számban vannak.

Ha két jegysort összehasonlítunk egymással, 's azon számot, melly megmutatja, hogy hány jegyváltozással több van a' felsőben, mint az alsóban e' sorok' bizonyos tagjaikig — új sor ered, melly mutató sornak neveztetik 's a' jegysorok közé iratik. De itt tudni való, hogy a' b . . . a közt tekintve, hol

$$b > a,$$

tehát (a)-ban több jegyváltozás fordúl elő, mint (b)-ben, (a)-t mindig fölül, (b)-t pedig alul írjuk.

E' szerint tehát:

$$\begin{array}{cccccccccc} + & - & - & + & + & - & + & - & + & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ + & + & - & - & + & - & - & + & + & + \end{array}.$$

Itt az első jegypár között 0 áll, mert a' jegyek elsők levén még jegyváltozást nem is okozhattak, 's így az alsó sorban se nem több se nem kevesebb a' jegyváltozás, mint a' felsőben. A' második jegypár között 1 áll, 's valóban e' második tagokig a' felső sorban egy, az alsóban 0 jegyváltozás, tehát a' felsőben egygyel több van, mint alul. A' harmadik jegypár között 0 áll, mert ezen harmadik tagokig mind a' felső mind az alsó sorban csak egy jegyváltozás van, a' jegyváltozások' különbsége tehát $= 0$, 'stb.

A' mutató sor' eredetét figyelemmel kisérvén találjuk, hogy valamelly m tagjára nézve, a' közvetlenül megelőző, vagy reá következő tag, mindig:

$$= m \pm 1.$$

Mind ezekből az is következik:

α) hogy, ha két jegysor egyenlő tagokkal végződik, az utolsó tagok' mutatója mindig páros szám. T. i. az utolsó tagok' mutatója azt mutatván, hány jegyváltozással több legyen az egész felső sorban, mint az egész alsóban;

α') Midőn a' mondott jegysorok állító végtagokkal bírnak, mind a' felsőben, mind pediglen az alsóban jegyváltozások páros számmal léteznek, 's két páros szám' különbözete csak páros lehetvén, világos, hogy ekkor a' mutatósor' utolsó tagja csak páros szám;

β') midőn a' jegysorok tagadólag végződnek, a' jegyváltozások páratlanok, 's páratlan számok' különbözete páros; tehát ekkor is a' mutatósor' utolsó tagja páros.

β) Ha pedig a' jegysorok különböző végtagokkal birnak, minthogy akkor az egyik jegysor' jegyváltozásainak száma páros, a' másiké pedig páratlan, 's páros és páratlan szám között a' különbség mindig páratlan, kitetszik, hogy e' föltétel alatt, a' mutatósor' utolsó tagja csak páratlan szám lehet.

És megfordítva:

α) Ha a' mutatósor' utolsó tagja páros, a' jegysorok egyenlő utolsó tagokkal birnak,

β) Ha a' mutatósor' utolsó tagja páratlan, a' jegysorok különböző utolsó tagokkal birnak.

33. §.

Az előbbi szerint, nem tudhatjuk gyakran, valók-e vagy képzeletiek a' bizonyos határok között létező gyökerek. Hány való gyökérnek a' mondott határok között lennie kelljen, minden esetre a' következő tanítmányokból, mellyeket Sturmnak köszönünk, ítélhetni meg.

α) Nevezzük, mint közönségesen történik, az adott egyenletet, mellyben azonban egyenlő gyökerek nem lehetnek, fx-nek, 's legyen az első származék $f'x$, és mit mindig szem előtt kell tartani

$$f'x = f_1x;$$

továbbá legyen:

$$\frac{fx}{f_1x} = 9_1 - \frac{f_2x}{f_1x},$$

$$\frac{f_1x}{f_2x} = 9_2 - \frac{f_3x}{f_2x},$$

$$\frac{f_2x}{f_3x} = 9_3 - \frac{f_4x}{f_3x}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{f_{m-2}x}{f_{m-1}x} = 9_{m-1} - \frac{f_mx}{f_{m-1}x};$$

azaz:

$$fx = 9_1 . f_1x - f_2x,$$

$$f_1x = 9_2 . f_2x - f_3x,$$

$$f_2x = 9_3 . f_3x - f_4x$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$f_{m-2}x = 9_{m-1} . f_{m-1}x - f_mx,$$

melly kitételben f_mx-ben x többé nincsen. Mert itt mindenek előtt világos hogy

$$f'x = f_1x$$

$m - 1$ rangú kitétel, 's az osztás' törvényeinél fogva e' kifejezésben, melly tulajdonképen hányati maradvány; az osztóval elosztva,

$$\frac{f_2x}{f_1x},$$

f_2x egy ranggal alábbi kifejezés, mint f_1x, lesz tehát

f_2x $m - 2$ rangú kifejezés;

's szintúgy:

f_3x $m - 3$ rangú kifejezés
f_4x $m - 4$ „ „
. . . .
$f_{m-1}x$ 1 „ „
f_mx 0 „ „ ;

miből világos, hogy f_mx-ben a' szorzó x (kivévén 0 rangjegygyel) többé nem fordúl elő.

β) E' pároknak:

$$f x, f_1x$$
$$f_1x, f_2x$$
$$f_2x, f_3x$$
$$f_3x, f_4x$$
$$\dots\dots$$
$$f_{m-1}x, f_mx.$$

valamellyike x ugyan azon értékére nézve el nem enyészhetik.

Először:

$$fx, f_1x$$

avagy, minthogy

$$f_1x = f'x,$$
$$fx, \quad f'x$$

ugyan azon föltétel alatt semmivé nem lehet; mert az

fx egyenletnek több egyenlő gyökere nincsen, a' föltételnél fogva.

Másodszor, szintúgy nem enyészhetnek el:

$$f_1x\,,\ f_2x\,;$$

mert ha ez, például $x=\alpha$ értékére nézve lenne, következnék, hogy:

$$f_1x=(x-\alpha)\,.\,\varphi x\,,$$
$$f_2x=(x-\alpha)\,.\,\varphi_1 x\,;$$

minthogy pedig:

$$fx=9_1\,.\,f_1x-f_2x\,,$$

volna:

$$fx=9\,.\,(x-\alpha)\,.\,\varphi x-(x-\alpha)\,.\,\varphi_1 x$$
$$=(x-\alpha)\,[9\,.\,\varphi x-\varphi_1 x]\,,$$

következőleg α fx' és f_1x, avagy $f'x$' gyökere volna, mi a' föltétellel, hogy t. i. fx-ben egyenlő gyökerek nincsenek, ellenkezik.

Ezt szintúgy meg lehet mutatni

$$f_2x\,,\ f_3x$$

-re nézve is. Mert legyen

$$f_2x=(x-\alpha)\,.\,\psi x\,,$$
$$f_3x=(x-\alpha)\,.\,\psi_1 x\,;$$

lenne, minthogy:

$$f_1x=9_2\,.\,f_2x-f_3x\,,$$
$$f_1x=(x-\alpha)\ [9_2\,.\,\psi x-\psi_1 x]\,;$$

ekkor tehát f_1x is elenyésznék. Már pedig előbb láttuk, hogy

$$f_2x\,,\ f_2x$$

ugyan azon értékére nézve semmivé nem lehet, tehát:

$$f_2x\,,\ f_3x$$

's következőleg

$$f_3x\,,\ f_4x$$

. . . .

sem.

γ) Minthogy e' szerint két egymásmelletti tag x' ugyan értékére nézve semmivé nem lehet, ha a' közönséges kitételben:

$$f_{e-1}x = 9_e . f_e x - f_{e+1}x$$

x helyett α-t teszünk,

$$f_{e-1}\alpha = 9_e . f_e\alpha - f_{e+1}\alpha\,,$$

föltevén, hogy ezen értékre nézve

$$f_e\alpha = 0$$

lesz, mindig:

$$f_{e-1}\alpha = -f_{e+1}\alpha\,;$$

azaz: a' sor

$$fx\,,\ f_1x\,,\ f_2x\,,\ f_3x\ \ldots$$

$f_e\alpha$-hoz legközelebbi tagjai ellenkező előjegygyel birnak.

δ) Valamelly tag, például

$$f_e x\,,$$

x' minden értékeit tekintve semmivé nem lehet. Mert ezen esetben következnék:

$$f_{e-2}x = 9_{e-1} . f_{e-1}x\,,$$

és:

$$\frac{f_{e-2}x}{f_{e-1}x} = 9_{e-1}\,.$$

Minthogy pedig a' föltételeknél fogva:

$$\frac{f_{e-3}x}{f_{e-2}x} = 9_{e-2} - \frac{f_{e-1}x}{f_{e-2}x}\,,$$

lenne:

$$\frac{f_{e-3}x}{f_{e-2}x} = 9_{e-2} - \frac{1}{9_{e-1}},$$

azaz:

$$f_{e-3}x = [9_{e-2} - 1]\,\frac{1}{9_{e-1}}\,.\,f_{e-2}x\,.$$

Minthogy pedig az előbbi szerint:

$$\frac{1}{9_{e-1}}\,.\,f_{e-2}x = f_{e-1}x,$$

volna:

$$f_{e-3}x = [9_{e-2}\,.\,9_{e-1} - 1]\,.\,f_{e-1}x,$$

tehát:

$$\frac{f_{e-3}x}{f_{e-1}x} = 9_{e-2}\,.\,9_{e-1} - 1,$$

azaz

$$f_{e-3}x$$

is volna

$$f_{e-1}x$$

által maradvány nélkül osztható. Ezen okoskodást folytatva, találjuk, hogy e' föltétel alatt $f'x$-nek és fx-nek is osztathatónak kellene lenni

$$f_{e-1}x$$

által, minek következésében volna:

$$\frac{fx}{f_{e-1}x} = \alpha,$$

$$\frac{f'x}{f_{e-1}x} = \beta;$$

azaz:

$$fx = \alpha \,.\, f_{e-1}x\,,$$
$$f'x = \beta \,.\, f_{e-1}x\,.$$

Volna tehát közosztója fx-nek és $f'x$-nek, mi fx-ben egyenlő gyökerekre vezet, 's így a' föltételekkel ellenkezik.

34. §.

Valamint fölebb, Fourier szerint, sorba állítottuk a':

$$f^{(m)}x,\ f^{(m-1)}x\ \ldots\ f''x,\ f'x,\ fx,$$

származékokat, s ezeknek előjegyeit vizsgáltuk; szintúgy most is fogunk cselekedni az efféle mennyiségekkel:

$$fx,\ f_1x,\ f_2x\ \ldots\ f_{m-1}x,\ f_mx.$$

Az illető jegysort

$$\{\ldots\}$$

által fogjuk érteni.

Ezt előre bocsátva, megmutathatjuk:

α) Hogy midőn

$$f_e a \gtrless 0,$$

egyszersmind lesz:

$$f_e(a+k) \gtrless 0,$$

$$f_e(a-k) \gtrless 0;$$

azaz: midőn

$$f_e\,a$$

állító vagy tagadó, egyszersmind

$$f_e(a+k)$$
$$f_e(a-k)$$

is illetőleg állíták vagy tagadók. Mert:

$$f_e(a+k)=f_e a+k\,.\,f_e'\,a+\frac{k^2}{1.2.}\,.\,f_e''a+\,.\,.$$

$$f_e(a-k)=f_e a-k\,.\,f_e'a+\frac{k^2}{1.2}\,.\,f_e a'\,.\,-\,.\,.\,,$$

minthogy pedig e' sorokban k-t úgy vehetni, hogy

$$f_e(a+k)$$
$$f_e(a-k)$$

előjegyeik $f_e\,a$-étól függjenek, világos hogy a'

$$f_e(a-k)\,,$$
$$f_e\,a\,,$$
$$f_e(a+k)$$

függvények egy időben állítók vagy tagadók leendnek.

β) Midőn a' függvénysorban elenyésző tagok nincsenek, a' három jegysorban t. i. ezekben:

$$\{<a\}$$
$$\{a\}$$
$$\{>a\},$$

jegyváltozások egyenlő számmal vannak. Mert az előbbi szerint

$$f_e(a-k)\,,$$
$$f_e\,a\,,$$
$$f_e(a+k)$$

egyenlő előjegyekhel bírván, az illető jegysorok semmi változáson keresztül nem mehetnek. Ellenben:

γ) midőn:

$$f_e a = 0,$$

minthogy ekkor

$$f_e(a+k) = k \,.\, f_e' a + \frac{k^2}{1.2} \,.\, f_e'' a + \,.\,.$$

$$f_e(a-k) = -k \,.\, f_e' a + \frac{k^2}{1,2} \,.\, f_n'' \, a - \,.\,.\,,$$

hol k-t mindig úgy választani lehet, hogy

$$f_e(a+k)$$

$$f_e(a-k)$$

előjegyei, a' kifejlődések első tagjaitól függjenek, az:

$$\{< a\}$$

$$\{a\}$$

$$\{> a\},$$

jegysorokban 's jelesen az elsőben az

$$f_e a$$

-nak megfelelő tag, mindig

$$f_e' a'$$

előjegyét, az utolsóban pedig az ellenkezőt fogja viselni. Aztán, minthogy ezen esetben az

$$\{a\}$$

jegysorban

$$f_{e-1} a \text{ és } f_{e+1} a$$

ellenkező előjegygyel birnak (33. §.), ha az e' függvényeket

$$f_{c-1}(a-k),\ f_c(a-k),\ f_{c+1}(a-k)$$
$$f_{c-1}a\qquad,\ f_c a\qquad,\ f_{c+1}a$$
$$f_{c-1}(a+k),\ f_c(a+k),\ f_{c+1}(a+k)$$

illető eseteket összeállítjuk, lesz:

$$\begin{array}{cccc} \pm\pm\mp & \pm\mp\mp & \pm\pm\mp & \pm\mp\mp \\ \pm\ 0\ \mp & \pm\ 0\ \mp & \pm\ 0\ \mp & \pm\ 0\ \mp \\ \pm\pm\mp & \pm\mp\mp & \pm\mp\mp & \pm\pm\mp \end{array}$$

's itt akár ($\pm$) akár ($\mp$) által pótoljuk ki 0' helyét, mindig minden sorban egy, de csak egy jegyváltozás leszen.

δ) Minthogy a' szóban lévő függvények folytonos mennyiségek, kitetszik, hogy midőn az

$$a\ .\ .\ .\ b$$

közben x' semmi értékére nézve nem enyésznek, az

$$\{a\}\ \text{és}\ \{b\}$$

jegysorokban jegyváltozások mindig egyenlő számmal lesznek.

ε) Midőn pedig:

$$f\alpha = 0,$$

a' két jegysorok

$$\{<\alpha\}\ \text{és}\ \{>\alpha\}$$

mindig egy jegyváltozással különböznek egymástól. Mert ha

$$f\alpha = 0,$$

minthogy az egyenletnek egyenlő gyökerei nincsenek, lesz:

$$f_1\alpha \gtrless 0,$$

$$f_2\alpha \gtrless 0,$$

$$f_3\,\alpha \gtrless 0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$f_m\,\alpha \gtrless 0;$$

tehát:

$$f_1(\alpha \pm k) \gtrless 0,$$

$$f_2(\alpha \pm k) \gtrless 0,$$

$$f_3(\alpha \pm k) \gtrless 0$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$f_m(\alpha \pm k) \gtrless 0,$$

hol, mint tudjuk, átalában

$$f_e(\alpha + k)$$
$$f_e(\alpha - k)$$

ugyan azon előjegygyel birnak. Már pedig

$$f(\alpha + k)$$
$$f(\alpha - k)$$

ellenkező előjegyet viselnek; következőleg azon esetben, midőn

$$f\alpha = 0,$$

a' két jegysor:

$$\{<\alpha\} \text{ és } \{>\alpha\}$$

egy jegyváltozással különbözik egymástól.

ζ) Az

$$a \ldots b$$

közben, hol a és b nem gyökerei az egyenletnek, anynyi a' jegyváltozások' különbsége, valahány való gyökér van a és b között. Az előbbi szerint minden

$$a, a', a'' \ldots$$

gyökérre nézve, melly a' mondott közben található, a' jegyváltozások különbsége egygyel szaporodik. Ha tehát az egyik határtól a' másikig n a' jegyváltozások különbsége, jele hogy a' közben n való gyökér van.

Ez Sturm nevezetes tétele, mellyet 1829-ben a' fr. Academiának nyújtott be, 's melly legelőször Ferussac' Bulletin-jében jelent meg.

MÁSODIK SZAKASZ.

Fourier' feloldása.

1. §.

Az egyenletek részint képes azaz való, részint képtelen gyökerekkel birnak. E' szerint tehát föloldásuk kétfelé szakad, képes és képtelen gyökerek' keresésére. Képes gyökerekről bizonyosak vagyunk, midőn a' mutatósor utolsó tagja

$$= 1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots$$

azaz páratlan szám. Képtelenek ott létezhetnek, hol a' mondott utolsó tag

$$= 2,\ 4,\ 6\ \ldots$$

azaz páros száma. Mindenek előtt világos, hogy az $a \ldots b$ közben, mint mindenkor:

$$f^{(m)}x > 0,$$

holott a' függvények:

$$f^{(m-1)}x \gtrless 0$$

$$f^{(m-2)}x \gtrless 0$$

$$\cdots\cdots$$

lehetnek. Mindazonáltal, ha csak fx-nek a' mondott közben (képes vagy képtelen) gyökere van, a' mutató sor, melly mindig 0-vel kezdődik, balról jobbra, végre

$$\stackrel{=}{>} 1$$

leend. Azaz, a' mutatósor vagy így kezdődik

$$0\,1\,,$$

vagy így

$$0\,0\,1\,,$$

vagy általánosabban így

$$0\,..\,0\,1.$$

Az első esetben:

$$(a)\ +\ -$$
$$(b)\ +\ +$$

következőleg:

$$f^{(m)}\,a > 0,$$
$$f^{(m)}\,b > 0,$$
$$f^{(m-1)}\,a < 0,$$
$$f^{(m-1)}\,b > 0.$$

'S legyen már most

$$\alpha = b - \Theta$$

gyökere az

$$f^{(m-1)}\,x$$

egyenletnek a' mondott $a \ldots b$ közben, tehát

$$f^{(m-1)}(b-\Theta) = f^{(m-1)}\,b - \Theta f^{(m)}\,b = 0$$

's így:

$$\Theta = \frac{f^{(m-1)}\,b}{f^{(m)}\,b},$$

's végre:

$$\alpha = b - \frac{f^{(m-1)}\,b}{f^{(m)}\,b}.$$

Ennek következésében az $a \ldots b$ köz ketté szakad, lesz t. i.

$$(a)\ +\ -$$
$$(\alpha)\ +\ 0$$
$$(b)\ +\ +$$

avvagy világosabban:

$$\begin{array}{lll} (a) & + & - \\ (<\alpha) & + & - \end{array}$$

és:

$$\begin{array}{lll} (>\alpha) & + & + \\ (b) & + & + \end{array}$$

's e' két közben a' mutató sor szembetünőleg

0 0.

2. §.

Ha a' mutatósor' három első tagját tekintjük, lesz:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Az első esetben, midőn a' mutatósor' kezdete ez

0 1 2,

lesz szemlátomást:

$$\begin{array}{llll} (a) & + & - & + \\ (b) & + & + & + \end{array}$$

's midőn itt:

$$f^{(m-2)}\alpha > 0$$

azaz állító, lesz:

$$\begin{array}{llll} (a) & + & - & + \\ (<\alpha) & + & - & + \\ (>\alpha) & + & + & + \\ (b) & + & + & +, \end{array}$$

következőleg $f^{(m-n)}x$-nek $<\alpha$ és $>\alpha$ között két képzeleti gyökere létez. Midőn pediglen

$$f^{(m-2)}\alpha < 0$$

azaz tagadó, lesz:

$$\begin{array}{llll}(a) & + & - & + \\ (<\alpha) & + & - & - \\ (>\alpha) & + & + & - \\ (b) & + & + & +\end{array}$$

s' $f^{(m-2}x$-nek az a . . . α, α . . . b közökben egy egy való gyökere van.

A' második esetben a' mutatósor így kezdődik:

$$0\ 0\ 1,$$

's ekkor

$$\begin{array}{llll}(a) & + & - & - \\ (b) & + & + & +\end{array}$$

's midőn tehát:

$$f^{(m-2)}\alpha > 0$$

lesz:

$$\begin{array}{llll}(a) & + & - & - \\ (<\alpha) & + & - & + \\ (>\alpha) & + & + & + \\ (b) & + & + & +\end{array}$$

ellenben, midőn

$$f^{(m-2)}\alpha < 0$$

lesz:

$$\begin{array}{llll}(a) & + & - & - \\ (<\alpha) & + & - & - \\ (>\alpha) & + & + & - \\ (b) & + & + & +\end{array}$$

A' harmadik esetben a' mondott kezdet

$$0\,1\,0$$

ekkor tehát:

$$\begin{array}{llll}(a) & + & - & - \\ (b) & + & + & -,\end{array}$$

's minthogy ekkor

$$f^{(m-2)}x$$

az a . . . b közben gyökérrel nem bir kitetszik, hogy

$$f^{(m-2)}\alpha < 0,$$

azaz mindig tagadó. Ennek következtében lesz tehát:

$$\begin{array}{llll} (\alpha) & + & - & - \\ (<\alpha) & + & - & - \\ (>\alpha) & + & + & - \\ (b) & + & + & - \end{array}$$

3. §.

Ha a' talált következményeket figyelemmel vizsgáljuk, könnyen átlátjuk, hogy α által, melly $f^{(m-1)}x$', vizsgálat alá vett közbeni gyökere, a' mondott köz mindig két más a . . . α és α . . . b közre oszlik, melylyekben a' mutató sor' kezdete ez:

$$0\,0\,1$$

vagy ez:

$$0\,0\,0,$$

mi az előbbi §.' negyedik és ötödik esetével egybe esik. Legyen tehát a' mutató sor' kezdete

$$0\,0\,1,$$

azaz:

$$\begin{array}{llll} (a) & + & + & - \\ (b) & + & + & + \end{array}$$

vagy

$$\begin{array}{llll} (a) & + & - & + \\ (b) & + & - & - \,. \end{array}$$

Itt látni való, hogy sem $f^{(m)}x$ (melly x-et már nem foglal magában), sem pedig $f^{(m-1)}x$, az a . . . b

közben gyökérrel nem birnak, minek következése az, hogy azok mindig állítók vagy tagadók lesznek. Ezt előre bocsátva:

α) Legyen

$$\begin{array}{l} (a)\ +\ +\ - \\ (b)\ +\ +\ +\ . \end{array}$$

'S legyen $f^{(m-2)}x$' gyökere α (mint átalában a' gyökereket α által fogjuk kitenni), tehát:

$$\alpha = b - \vartheta,$$

és

$$\begin{aligned} f^{(m-2)}(b-\vartheta) &= f^{(m-2)}b - \vartheta f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta) \\ &= f^{(m-2)}\alpha = 0, \end{aligned}$$

következőleg:

$$0 = f^{(m-2)}b - \vartheta f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta)$$

és:

$$\vartheta = \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta)}.$$

Továbbá:

$$f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta) = f^{(m-1)}b - \theta\vartheta f^{(m)}(b-\theta\theta'\vartheta),$$

hol mint átalában

$$f^{(m)}(b-\theta\theta'\vartheta) > 0$$

mert, mint már fölebb is mondtuk:

$$f^{(m)}x$$

x-et kizáró állító mennyiség. Ennek következésében tehát:

$$f^{(m-1)}b > f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta),$$

és:

$$\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta)} > \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b};$$

következőleg:

$$\vartheta > \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b};$$

és

$$b-\vartheta < b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b},$$

azaz, minthogy

$$a = b-\vartheta,$$

$$a < b = \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b}.$$

Más felül,

$$f^{(m-2)}b > 0$$
$$f^{(m-1)}b > 0$$

lévén, szükségképen:

$$\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b} \text{ is } > 0,$$

következőleg:

$$b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b} < b.$$

Minthogy tehát b a' fölső határ, a a' gyökér, és

$$b > b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b},$$

$$a < b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b},$$

kitetszik, hogy ez esetben:

$$b' = b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b}$$

közelebbi felső határ, mint b.

Közelebbi alsó határ' keresése végett legyen:

$$a = a + \vartheta',$$

tehát:

$$f^{(m-2)}(a+\vartheta')=f^{(m-2)}a+\vartheta' f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta')$$
$$=f^{(m-2)}\alpha-0,$$

következőleg:

$$0=f^{(m-2)}a+\vartheta' f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta')$$

és

$$\vartheta'=-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta')}.$$

Legyen továbbá:

$$\alpha+\theta\vartheta'=b-\vartheta'',$$

lesz:

$$f^{(m-1)}(\alpha+\theta\vartheta')=f^{(m-1)}(b-\vartheta'')$$
$$=f^{(m-1)}(b-\vartheta'' f^{(m)}(b-\theta\vartheta''),$$

tehát minden esetre:

$$f^{(m-1)}b>f^{(m-1)}(\alpha+\theta\vartheta'),$$

következőleg, minthogy

$$f^{(m-2)}\alpha<0,$$

$$-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b}<-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}(\alpha+\theta\vartheta')}$$

és:

$$\vartheta'>-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b}$$

$$a+\vartheta'>a-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b}$$

$$\alpha>a-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b}.$$

Másfelül, minthogy:

$$f^{(mm2)}a<0$$
$$f^{(m-1)}b>0$$

lesz:

$$\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b} < 0,$$

következőleg:

$$a - \frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b} > a.$$

Összeállítva:

$$a < a - \frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b}$$

$$\alpha > a - \frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b}$$

miből világos, hogy

$$a' = a - \frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b}$$

közelebbi alsó határ mint a. Ha ezen okoskodást foly-tatjuk, lesznek egymásután:

$$a' = a - \frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}b},$$

$$a'' = a' - \frac{f^{(m-2)}a'}{f^{(m-1)}b'},$$

$$a''' = a'' - \frac{f^{(m-2)}a''}{f^{(m-1)}b''},$$

$$a'''' = a''' - \frac{f^{(m-2)}a'''}{f^{(m-1)}b'''}$$

. . . . . .

$$b' = b - \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}b},$$

$$b'' = b' - \frac{f^{(m-2)}b'}{f^{(m-1)}b'},$$

$$b''' = b'' - \frac{f^{(m-2)}b''}{f^{(m-1)}b''},$$

$$b'''' = b''' - \frac{f^{(m-2)}b'''}{f^{(m-1)}b'''}$$

. . . .

illetőleg közelebbi alsó és felső határok, mi által α' értékéhez tetszésünk szerint közeledhetünk.

4. §.

β) Legyen:

$$(a)\ + \ - \ +$$
$$(b)\ + \ - \ - \ .$$

Tétessék hasonlóul:

$$\alpha = b - \vartheta,$$

lesz:

$$f^{(m-2)}(b-\vartheta) = f^{(m-2)}b - \vartheta f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta)$$
$$= f^{(m-2)}\alpha = 0$$

következőleg:

$$\vartheta = \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta)}.$$

Légyen, mint fölebb,

$$b - \theta\vartheta = a + \vartheta'$$

tehát:

$$f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta)=f^{(m-1)}(a+\vartheta')$$
$$=f^{(m-1)}a+\vartheta' f^{(m)}(a+\theta\vartheta'),$$

minthogy pedig itt szemlátomást:

$$f^{(m-1)}a>0,$$
$$f^{(m)}(a+\theta\vartheta')>0,$$

lesz:

$$f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta')>f^{(m-1)}a$$

és:

$$\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}(b-\theta\vartheta')}>\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a},$$
$$f^{(m-2)}b<0$$

levén; következőleg:

$$\vartheta>\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a}$$

és

$$b-\vartheta<b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a},$$

$$a<b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a}.$$

Más felül

$$f^{(m-2)}b<0$$
$$f^{(m-1)}a<0$$

lévén, világos hogy

$$\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a}>0,$$

tehát:

$$b-\frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a}<b.$$

Minthogy tehát:

$$b > b - \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a}$$

$$a < b - \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a},$$

lesz:

$$b' = b - \frac{f^{(m-2)}b}{f^{(m-1)}a}$$

szemlátomást közelebbi felső határ mint b. Másodszor, legyen

$$\alpha = a + \vartheta'$$

következőleg:

$$f^{(m-2)}(a+\vartheta') = f^{(m-2)}a + \vartheta' f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta')$$
$$= f^{(m-2)}\alpha = 0$$

's ennek következésében:

$$\vartheta' = -\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta')}.$$

Aztán:

$$f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta') = f^{(m-1)}a + \theta\vartheta' f^{(m)}(a+\theta\theta'\vartheta'),$$

hol:

$$f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta') < 0$$
$$f^{(m-1)}a < 0$$
$$\theta\vartheta f^{(m)}(a+\theta\theta'\vartheta' > 0,$$

mi után:

$$f^{(m-1)}(a+\theta\vartheta') > f^{(m-1)}a.$$

Minthogy pedig:

$$f^{(m-2)}a > 0,$$

lesz:

$$-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-2)}(a+\theta\vartheta')} > -\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}a}$$

azaz:

$$a+\vartheta' > a-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}a}$$

$$a > a-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}a}.$$

Továbbá:

$$f^{(m-2)}a > 0$$
$$f^{(m-1)}a < 0$$

levén, lesz:

$$\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}a} < 0,$$

következőleg:

$$a < a-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}a};$$

's ennél fogva

$$a'=a-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}a}$$

közelebbi alsó határ.

Itt tehát a' közelebbi határok ekkint következnek egymásra:

$$a' = a-\frac{f^{(m-2)}a}{f^{(m-1)}a},$$

$$a'' = a'-\frac{f^{(m-2)}a'}{f^{(m-1)}a'},$$

$$a''' = a''-\frac{f^{(m-2)}a''}{f^{(m-1)}a''},$$

$$a''''=a'''-\frac{f^{(m-2)}a'''}{f^{(m-1)}a'''}$$

. . . . . .

$$b' = b - \frac{f^{(m-2)} b}{f^{(m-1)} a},$$

$$b'' = b' - \frac{f^{(m-2)} b'}{f^{(m-1)} a'},$$

$$b''' = b'' - \frac{f^{(m-2)} b''}{f^{(m-1)} a''},$$

$$b'''' = b''' - \frac{f^{(m-2)} b'''}{f^{(m-1)} a'''}$$

. . . .

5. §.

Ennek következésében tehát azon eset, midőn a' mutatósor' kezdete

001,

azaz, midőn:

(a) + + —
(b) + + +
vagy
(a) + — +
(b) + — —

$f^{(m-2)} x'$ gyökere által mindig ezzé lesz:

(a) + + —
(α) + + 0
(b) + + +
vagy ezzé:
(a) + — +
(α) + — 0
(b) + — —

azaz ezzé:

$$\begin{array}{llll} (a) & + & + & - \\ (<\alpha) & + & + & - \\ (>\alpha) & + & + & + \\ (b) & + & + & + \end{array}$$

vagy ezzé:

$$\begin{array}{llll} (a) & + & - & + \\ (<\alpha) & + & - & + \\ (>\alpha) & + & - & - \\ (b) & + & - & - . \end{array}$$

Az köz $a \ldots b$ köz tehát mindég olly két $a \ldots \alpha$, $\alpha \ldots b$ közre osztható, mellyekben a' mutatósor' kezdete

$$0\;0\;0,$$

minél fogva tehát minden előbbi esetet ezen utolsóra vihetni vissza. Minthogy pedig ekkor a' közvetlenűl következő mutató vagy 0 vagy 1, lesz vagy

$$0\,0\,0\,0 \ldots$$

vagy

$$0\,0\,0\,1 \ldots$$

's átalában, hacsak fx-nek a' talált közben gyökere van, balról jobbnak indulván végre olly mutatóra akadunk, melly $= 1$. Ez vagy az utolsó, vagy nem. Az első esetben e' két függvénynek felel meg:

$$fa, \; fb;$$

az utolsóban pediglen a' következő kettőnek

$$f^{(m-e)}a, \quad f^{(m-e)}b.$$

Hogy e' két esetet egy tekintet alá vehessük, legyen átalában

$$f^{(m-e)}x = \varphi x,$$

hol tehát azon esetben, midőn

$$f^{(m-e)}x = fx,$$

$\varphi\, x$ a' függvénysor' utolsó tagja, 's ennél fogva az alapfüggvény azaz az adott egyenlet maga. Világos, hogy ezen föltétel alatt:

$$\varphi\, x = f^{(m-e)}\, x,$$
$$\varphi'\, x = f^{(m-e+1)}\, x,$$
$$\varphi''\, x = f^{(m-e+2)}\, x$$

. . . . .

's azon különös esetben, midőn

$$\varphi\, x = f\, x;$$

lesz:

$$\varphi'\, x = f''\, x,$$
$$\varphi''\, x = f''\, x,$$

. . . .

6. §.

Midőn a' mutatósor' vizsgálat alá vett részének utolsó tagjai

$$0\,0\,1,$$

minthogy ekkor φx-nek az $a\,.\,.\,b$ közben egy gyökere van, világos, hogy

$$\varphi a \text{ és } \varphi b$$

ellenkező előjegygyel birnak. A'

$$\varphi' a \quad \text{és} \quad \varphi' b$$
$$\varphi'' a \quad \text{és} \quad \varphi'' b$$

függvények egyenlő előjegyekkel birnak, mert átalában két egyenlő számú függvénysor, mellyeknek utolsó tagjai különbözők, nem származtathat mutatósort, mellynek utolsó tagja

$$= 0,\ 2,\ 4,\ 6.$$

azaz páros szám volna. Ennél fogva csupán csak a' következő esetek fordúlhatnak elő:

1.	(a)	. .	+	+	—
	(b)	. .	+	+	+
2.	(a)	. .	+	—	+
	(b)	. .	+	—	—
3.	(a)	. .	—	+	—
	(b)	. .	—	+	+
4.	(a)	. .	—	—	+
	(b)	. .	—	—	—

Legyen tehát:

1.	(a)	. .	+	+	—
	(b)	. .	+	+	+

's legyen itt, hasonlólag mint fölebb, a' gyökér

$$a = b - \vartheta$$

tehát:

$$\varphi(b - \vartheta) = \varphi b - \vartheta\varphi'(b - \theta\vartheta)$$
$$= \varphi a = 0,$$

's ennek következésében:

$$\vartheta = \frac{\varphi b}{\varphi'(b - \theta\vartheta)} .$$

Ha itt a' nevezőt vizsgáljuk, lesz:

$$\varphi'(b - \theta\vartheta) = \varphi' b - \theta\vartheta \,.\, \varphi''(b - \theta\theta'\vartheta)$$

Minthogy pedig az $a \ldots b$ közben sem $\varphi' x$-nek, sem pediglen $\varphi'' x$-nek gyökere nincsen, és mind b, mind $b - \theta\theta'\vartheta$ a' mondott közben van, kitetszik, hogy

$$\varphi'(b - \theta\vartheta) > 0$$
$$\varphi''(b - \theta\theta'\vartheta) > 0,$$

következőleg hogy:

$$\varphi' b > \varphi'(b - \theta\vartheta),$$

minél fogva lesz:

$$\vartheta > \frac{\varphi b}{\varphi' b},$$

tehát:

$$b - \vartheta < b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

$$a < b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}.$$

Más felül pedig:

$$\varphi b > 0$$
$$\varphi' b > 0,$$

tehát:

$$\frac{\varphi b}{\varphi' b} > 0$$

azaz állító, 's így:

$$b - \frac{\varphi b}{\varphi' b} < b.$$

Minthogy tehát végre:

$$a < b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

$$b > b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

kitetszik, hogy

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

közelebbi felső határ, 's hogy a' következő alkatak által mindég közelebb meg közelebb értéket nyerhetünk:

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' b},$$

$$b'' = b' - \frac{\varphi b'}{\varphi' b'},$$

$$b''' = b'' - \frac{\varphi b''}{\varphi' b''},$$

$$b'''' = b''' - \frac{\varphi b'''}{\varphi' b'''}$$

. . . .

Az alsó határra nézve legyen

$$a = a + \vartheta'$$

tehát:

$$\varphi(a + \vartheta') = \varphi a + \vartheta' \varphi'(a + \theta\vartheta')$$
$$= \varphi a = 0 ,$$

's így:

$$\vartheta' = - \frac{\varphi a}{\varphi'(a - \theta\vartheta')} .$$

Legyen továbbá:

$$a + \theta\vartheta' = b - \vartheta''$$

lesz:

$$\varphi'(a + \theta\vartheta') = \varphi'(b - \vartheta'')$$
$$= \varphi' b - \vartheta'' \varphi''(b - \theta\vartheta''),$$

minthogy pedig:

$$\varphi' b > 0,$$

's az $a \ldots b$ közben, mellyben $a + \theta\vartheta'$ és $b - \vartheta''$ léteznek,

$$\varphi'(a + \theta\vartheta') > 0$$
$$\varphi''(b - \theta\vartheta'') > 0,$$

lesz:

$$\varphi' b > \varphi'(a + \theta\vartheta').$$

és mármost

$$\varphi a < 0$$

levén, lesz:

$$-\frac{\varphi a}{\varphi'(a + \theta\vartheta')} > -\frac{\varphi a}{\varphi' b},$$

következőleg:

$$\vartheta' > -\frac{\varphi a}{\varphi' b}.$$

$$a + \varphi' > a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

$$a > a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}.$$

Más felül, minthogy ez esetben:

$$\varphi a < 0$$
$$\varphi' b > 0$$

tehát:

$$\frac{\varphi a}{\varphi' b} < 0$$

lesz:

$$a - \frac{\varphi a}{\varphi' b} > a.$$

Minthogy pedig e' szerint:

$$a < a - \frac{\varphi a}{\varphi' b},$$

$$a > a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

szembetünőleg

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

közelebbi alsó hatás. Közeledhetünk tehát tetszésünk szerint a' következő alkatok' segítségével:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' b},$$

$$a'' = a' - \frac{\varphi a'}{\varphi' b'},$$

$$a''' = a'' - \frac{\varphi a''}{\varphi' b''},$$

$$a'''' = a''' - \frac{\varphi a'''}{\varphi' b'''}.$$

. . . . .

7. §.

Legyen:

2. $$\begin{array}{l} (a) \;.\;.\; + \; - \; + \\ (b) \;.\;.\; + \; - \; - \end{array}$$

és:

$$a = b - \vartheta,$$

tehát:

$$\varphi(b - \vartheta) = \varphi b - \vartheta\varphi'(b - \theta\vartheta)$$
$$= \varphi a = 0,$$

$$\vartheta = \frac{\varphi b}{\varphi'(b + \theta\vartheta)}.$$

Továbbá:

$$b - \theta\vartheta = a + \vartheta',$$

következőleg:

$$\varphi'(b-\theta\vartheta)=\varphi'(a+\vartheta')$$
$$=\varphi' a+\vartheta'\varphi''(a+\theta\vartheta').$$

Ezen esetben:

$$\varphi' a<0,$$
$$\varphi'(b-\theta\vartheta)<0,$$
$$\varphi''(a+\theta\vartheta')>0,$$

mintbogy mind $b-\theta\vartheta$, mind $a+\theta\vartheta'$ az $a\ .\ .\ .\ b$ közben van, mellyben

$$\varphi' x' \text{ és } \varphi'' x'$$

előjegyei nem változnak, kitetszik, hogy

$$\varphi'(b-\theta\vartheta)>\varphi' a.$$

Másfelül

$$\varphi b<0$$

azaz tagadó, tehát:

$$\frac{\varphi b}{\varphi'(b-\theta\vartheta)}>\frac{\varphi b}{\varphi' a},$$

$$\vartheta>\frac{\varphi b}{\varphi' a},$$

$$b-\vartheta<b-\frac{\varphi b}{\varphi' a}.$$

$$a<b-\frac{\varphi b}{\varphi' a}.$$

Látni való, hogy:

$$\frac{\varphi b}{\varphi' a}>0$$

mert:

$$\varphi b<0$$
$$\varphi' a<0,$$

's innen:

$$b - \frac{\varphi b}{\varphi' a} < b.$$

Minthogy tehát végre:

$$b > b - \frac{\varphi b}{\varphi' a}$$

$$a < b - \frac{\varphi b}{\varphi' a},$$

lesz:

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

közelebbi felső határ, 's közeledünk léptenkint a' következő alkatok által:

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' a},$$

$$b'' = b' - \frac{\varphi b'}{\varphi' a'},$$

$$b''' = b'' - \frac{\varphi b''}{\varphi' a''},$$

$$b'''' = b''' - \frac{\varphi b'''}{\varphi' a'''}$$

. . . . .

Legyen szintúgy:

$$\alpha = a + \vartheta''$$

tehát:

$$\varphi(a + \vartheta'') = \varphi a + \vartheta'' \varphi'(a + \theta\vartheta'')$$
$$= \varphi\alpha = 0$$

és:

$$\vartheta'' = -\frac{\varphi a}{\varphi'(a+\theta\vartheta'')};$$

$$\varphi'(a+\theta\vartheta'') = a + \theta\vartheta''\varphi''(a+\theta\theta'\vartheta'').$$

A' szóban lévő közben

$$\varphi' x < 0$$
$$\varphi'' x > 0$$

tehát:

$$\varphi'(a+\theta\vartheta'') < 0$$
$$\varphi' a < 0$$
$$\varphi''(a+\theta\theta'\vartheta) > 0,$$

következőleg:

$$\varphi'(a+\theta\vartheta'') > \varphi' a.$$

Minthogy pedig mind a' kettő tagadó, lesz:

$$-\frac{\varphi a}{\varphi'(a+\theta\vartheta'')} > -\frac{\varphi a}{\varphi' a};$$

$$\vartheta'' > -\frac{\varphi a}{\varphi' a},$$

$$a+\vartheta'' > a-\frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

$$a > a-\frac{\varphi a}{\varphi' a}.$$

φa és $\varphi' a$ ellenkező előjegyűek levén, lesz:

$$\frac{\varphi a}{\varphi' a} < 0,$$

következőleg:

$$a < a-\frac{\varphi a}{\varphi' a}.$$

Összveállítva tehát:

$$a < a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

$$a > a - \frac{\varphi a}{\varphi' a},$$

's így:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

közelebbi alsó határ, 's a' közeledés alkatjai,

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' a},$$

$$a'' = a' - \frac{\varphi a'}{\varphi' a'},$$

$$a''' = a'' - \frac{\varphi a''}{\varphi' a''},$$

$$a'''' = a''' - \frac{\varphi a'''}{\varphi' a'''}$$

. . . . . .

8. §.

3. $(a) \;.\;.\; - \;+\; -$

$(b) \;.\;.\; - \;+\; +\,.$

Legyen itt először:

$$a = b - \vartheta,$$

$$\varphi(b - \vartheta) = \varphi b - \vartheta\varphi'(\theta\vartheta')$$

$$-\varphi a = 0;$$

$$\vartheta = \frac{\varphi b}{\varphi'(b - \theta\vartheta)}.$$

$$\varphi'(-\theta\vartheta)=\varphi'(a+\vartheta')$$
$$=\varphi' a+\vartheta' \varphi''(a+\theta'\vartheta'),$$

s minthogy ez esetben

$$\varphi' x > 0,$$

tehát:

$$\varphi'(b-\theta\vartheta),\ \varphi' a > 0;$$
$$\varphi''(a+\theta'\vartheta') < 0$$

lesz:

$$\varphi'(b-\theta\vartheta) < \varphi' a,$$

és helyettezés által:

$$\vartheta > \frac{\varphi b}{\varphi' a}$$

$$b-\vartheta < b-\frac{\varphi b}{\varphi' a}$$

$$a < b-\frac{\varphi b}{\varphi' a}.$$

E' hányas

$$\frac{\varphi b}{\varphi' a} > 0$$

azaz állító, mert

$$\varphi b > 0$$
$$\varphi' a > 0,$$

következőleg:

$$b-\frac{\varphi b}{\varphi' a} < b.$$

Végkövetkezetink tehát:

$$b > b-\frac{\varphi b}{\varphi' a}$$

$$a < b-\frac{\varphi b}{\varphi' a}$$

tehát:

$$b' = b - \frac{\varphi b.}{\varphi' a}$$

közelebbi felső határ

Másodszor: legyen

$$\alpha = a + \vartheta'',$$

$$\varphi(a + \vartheta'') = \varphi a + \vartheta'' \varphi'(a + \theta\vartheta'')$$
$$= \varphi\alpha = 0;$$

$$\vartheta'' = -\frac{\varphi a}{\varphi'(a + \theta\vartheta'')};$$

$$\varphi'(a + \theta\vartheta'') = \varphi' a + \theta\vartheta'' \varphi''(a + \theta\theta' \vartheta'').$$

Minthogy ez harmadik esetben a' vett $a \ldots b$ határok között

$$\varphi' x > 0$$
$$\varphi'' x < 0;$$

lesz:

$$\varphi'(a + \theta\vartheta''), \ \varphi' a > 0;$$
$$\varphi''(a + \theta\theta'\vartheta'') < 0,$$

tehát:

$$\varphi'(a + \theta\vartheta'' < \varphi' a$$

és:

$$-\varphi' a < -\varphi'(a + \theta\vartheta'').$$

De

$$\varphi a < 0$$

is tagadó, tehát

$$-\frac{\varphi a}{\varphi'(a + \theta\vartheta'')} > -\frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

$$\vartheta'' > -\frac{\varphi a}{\varphi' a},$$

$$a + \vartheta'' > a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

$$\alpha > a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

Továbbá $\varphi\alpha$ és $\varphi'\alpha$ ellenkező előjegyüek levén, nyilván való, hogy

$$-\frac{\varphi a}{\varphi' a} > 0,$$

következőleg:

$$a - \frac{\varphi a}{\varphi' a} > a.$$

Találtatott tehát, hogy:

$$\alpha > a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

$$a < a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

's igy:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

közelebbi alsó határ. A' közelebbi határok tehát ezen harmadik esetben:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' a},$$

$$a'' = a' - \frac{\varphi a'}{\varphi' a},$$

$$a''' = a'' - \frac{\varphi a''}{\varphi' a''},$$

$$a'''' = a''' - \frac{\varphi a'''}{\varphi' a'''}$$

. . . . . .

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' a},$$

$$b'' = b' - \frac{\varphi b'}{\varphi' a'},$$

$$b''' = b'' - \frac{\varphi b''}{\varphi' a''},$$

$$b'''' = b''' - \frac{\varphi b'''}{\varphi' a'''}$$

. . . . . .

9. §.

4.

$$(a) \; . \; . \; - \; - \; +$$
$$(b) \; . \; . \; - \; - \; - \; .$$

Legyen itt hasonlólag:

$$a = b - \vartheta;$$
$$\varphi(b-\vartheta) = \varphi b - \vartheta \varphi'(b - \theta\vartheta)$$
$$= \varphi a = 0;$$
$$\vartheta = \frac{\varphi b}{\varphi'(b - \theta\vartheta)};$$
$$\varphi'(b-\theta\vartheta) = \varphi' b - \theta\vartheta \varphi''(b - \theta\theta'\vartheta),$$

's minthogy az $a \; . \; . \; . \; b$ közben az első és második származék tagadó, lesz:

$$\varphi'(b-\theta\vartheta), \; \varphi' b, \; \varphi''(b - \theta\theta'\vartheta) < 0$$

következőleg:

$$\varphi'(b - \theta\vartheta) > \varphi' b,$$

de mindketten tagadók levén:

$$\frac{\varphi b}{\varphi'(b-\theta\vartheta)} > \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

$$\vartheta > \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

$$b - \vartheta < b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

$$a < b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}.$$

Itt φb és $\varphi' b$ egyjegyüek levén, a' hányas

$$\frac{\varphi b}{\varphi' b} > 0,$$

következőleg:

$$b - \frac{\varphi b}{\varphi' b} < b.$$

Minthogy tehát:

$$b > b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

$$a < b - \frac{\varphi b}{\varphi' b},$$

lesz:

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

közelebbi felső határ.

Másodszor:

$$\alpha = a + \vartheta',$$

$$\varphi(a+\vartheta') = \varphi a + \vartheta' \varphi'(a+\theta\vartheta')$$
$$= \varphi\alpha = 0\,;$$

$$\vartheta' = -\frac{\varphi a}{\varphi'(a+\theta\vartheta')}\,;$$

's legyen:

$$a+\theta\vartheta' = b-\vartheta''$$

tehát:

$$\varphi'(a+\theta\vartheta') = \varphi'(b-\vartheta'')$$
$$= \varphi' b - \vartheta''\varphi''(b-\theta''\vartheta'')$$

miből, minthogy az első és második származékok tagadók:

$$\varphi'(a+\theta\vartheta') < \varphi' b$$
$$-\varphi'(a+\theta\vartheta') > -\varphi' b,$$

következőleg, minthogy

$$\varphi a > 0$$

állító, lesz:

$$-\frac{\varphi a}{\varphi'(a+\theta\vartheta')} > -\frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

$$\vartheta' > -\frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

$$a+\vartheta' > a-\frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

$$\alpha > a-\frac{\varphi a}{\varphi' b}\,.$$

Másfelül, φa és $\varphi' b$ ellenkező előjegygyel birván, lesz:

$$-\frac{\varphi a}{\varphi' b} > 0$$

$$a - \frac{\varphi a}{\varphi' b} > a\,.$$

A' következmények tehát:

$$a < a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

$$a > a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

's innen:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}$$

kökelebbi alsó határ. Szorosabb határokra mehetünk által a' következő alkatoknál fogva:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' b}\,,$$

$$a'' = a' - \frac{\varphi a'}{\varphi' b'}\,,$$

$$a''' = a'' - \frac{\varphi a''}{\varphi' b''}\,,$$

$$a'''' = a''' - \frac{\varphi a'''}{\varphi' b'''}$$

. . . .

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' b}\,,$$

$$b'' = b' - \frac{\varphi b'}{\varphi' b'}\,,$$

$$b''' = b'' - \frac{\varphi b''}{\varphi' b''},$$

$$b'''' = b''' - \frac{\varphi b'''}{\varphi' b'''}$$

. . . . . .

10. §.

Ha a' következményeket összeállítjuk lesz:

a) Midőn az első és második származék ugyan azon előjegyet viselik; tehát, midőn:

(*a*) . . + + −
(*b*) . . + + +

vagy:

(*a*) . . − − +
(*b*) . . − − −

lesz:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' b},$$

$$a'' = a' - \frac{\varphi a'}{\varphi' b'},$$

$$a''' = a'' - \frac{\varphi a''}{\varphi' b''},$$

$$a'''' = a''' - \frac{\varphi a'''}{\varphi' b'''}$$

. . . . . .

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' b},$$

$$b'' = b' - \frac{\varphi b'}{\varphi' b'}$$

$$b''' = b'' - \frac{\varphi b''}{\varphi' b''}$$

$$b'''' = b''' - \frac{\varphi b'''}{\varphi' b'''}$$

. . . .

β) Midőn a' mondott származékok külön előjegyekkel birnak, azaz, midőn:

(a) . . $+ - +$
(b) . . $+ - -$

vagy:

(a) . . $- + -$
(b) . . $- + +$

lesz:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' a},$$

$$a'' = a' - \frac{\varphi a'}{\varphi' a'},$$

$$a''' = a'' - \frac{\varphi a''}{\varphi' a''},$$

$$a'''' = a''' - \frac{\varphi a'''}{\varphi' a'''}$$

. . . . . .

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' a},$$

$$b'' = b' - \frac{\varphi b'}{\varphi' a'},$$

$$b''' = b'' - \frac{\varphi b''}{\varphi' a''},$$

$$b'''' = b''' - \frac{\varphi b'''}{\varphi' a'''}$$

. . . .

Azon esetben, midőn:

$$\varphi x = fx,$$

azaz midőn az egész mutatósor' utolsó tagjai ezek:

$$001,$$

minél fogva egy való gyökér rejtezéséről bizonyosak vagyunk, lesz szintúgy, midőn $f'x$, és $f''x$ ugyan azon előjegyet viselik:

$$a' = a - \frac{fa}{f'b},$$

$$a'' = a' - \frac{fa'}{f'b'}$$

. . . .

$$b' = b - \frac{fb}{f'b},$$

$$b'' = b' - \frac{fb'}{f'b'}$$

. . . .

midőn pediglen különbözőt:

$$a' = a - \frac{fa}{f'a},$$

$$a'' = a' - \frac{fa'}{f'a'}$$

. . . .

$$b' = b - \frac{fb}{f'a},$$

$$b'' = b' - \frac{fb'}{f'a'}$$

. . . .

minek következésében az a . . . b határokat mind inkább összeszoríthatni, mert

$$b - a > b' - a'$$
$$b' - a' > b'' - a''$$
$$b'' - a'' > b''' - a'''$$

. . . .

míg az alsó vagy felső határt, vagy azoknak közép értéküket vehetjük a' keresett gyökér helyett. Legegyszerűbb az első esetben a' felső határ által közelítени ezen alkat' segítségével:

$$b' = b - \frac{fb}{f'b},$$

a' második esetben pedig az alsó határ közeledését használni, mi

$$a' = a - \frac{fa}{f'a}$$

által történik.

11. §.

Feljebb (1. szak. §. 28.) az első példában

$$fx = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$$

ezeket találtuk:

(-10)	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
	0	0	1	1	1	1

(— 1)	+	—	—	+	—	+
	0	0	0	0	0	1
(0)	+	—	—	+	—	—
	0	1	0	0	1	0
(1)	+	+	—	+	+	—
	0	0	1	2	2	3
(10)	+	+	+	+	+	+

Alkalmazzuk már most az előbbi §§.' tanitmányait azon gyökér' kitalálására, melly

$$-1 \text{ és } 0$$

között lappang. Minthogy a' jegysorok végei ezek:

$$+ - +$$
$$+ - - ,$$

a' második esetbeni alkatot

$$a' = a - \frac{f a}{f' a} ,$$

használjuk, avvagy minthogy itt az alsó határ

$$'a = -1 ,$$

ezt:

$$a' = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} .$$

Mármost:

$$f(-1) = -1 - 3 + 24 + 95 + 46 - 101 ,$$
$$= + 60 ;$$
$$f'(-1) = 5 + 12 - 72 - 190 - 46$$
$$= -291 ;$$
$$\frac{f(-1)}{f'(-1)} = -\frac{60}{291}$$
$$= -0{,}206 ,$$

azaz:

$$a' = -0{,}794.$$

Ha a' közeledésben tovább menni akarunk, lesz:

$$a'' = -0{,}794 - \frac{f(-0{,}794)}{f'(-0{,}794)};$$

's ugyan azon módon:

$$\begin{aligned} f(-0{,}794) = & -0{,}3156 \\ & -3.0{,}3974 \\ & +24.0{,}5006 \\ & +95.0{,}6304 \\ & +46.0{,}794 \\ & -101, \\ = & +5{,}919; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-0{,}794) = & +5.0{,}3974 \\ & +12.0{,}5006 \\ & -72.0{,}630 \\ & -190.0{,}794 \\ & -46, \\ = & -234{,}255; \end{aligned}$$

$$\frac{f(-0{,}794)}{f'(-0{,}794)} = -\frac{5{,}919}{234{,}255},$$
$$= -0{,}0253;$$

azaz:

$$a'' = -0{,}769.$$

E' szerint világos, mi módon lehessen a' közeledést tovább vinni.

A' $-10\ \ldots -1$ közben a' jegy — és mutatósorok a' következők:

$$(-10) \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$$
$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$
$$(-1) \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \,;$$

minek következésében bizonyosak vagyunk az adott egyenlet' egyik gyökeréről

$$-10 \text{ és } -1$$

között; de a' mutatósor' vége nem

$$0\,0\,1$$

levén, fx' gyökerét közvetlenül keresni nem lehet. Azonban, minthogy a' függvénysor'

$$f''''x, \; f'''x, \; f''x$$

mutatói ezek: 0 0 1, keressük elsőbben $f''x$' gyökerét, mi után a' -10 . . . -1 köznek két más közre szakadnia kell, mellyekben, mint már tudjuk, kedvezőbb mutatósorokra találunk: A' veendő jegy — és mutatósorok ezek:

$$(-10) \quad + \quad - \quad +$$
$$0 \quad 0 \quad 1$$
$$(-1) \quad + \quad - \quad +$$

levén, alkalmazzuk a' következő alkatot:

$$a' = a - \frac{\varphi a}{\varphi' a},$$

mellyben:

$$\varphi a = f'' a$$
$$\varphi' a = f''' a.$$

Az 1. szak. 28. §.-ából tudjuk, hogy:

$$f''x = \varphi x = 60x^2 - 72x - 144,$$
$$f'''x = \varphi' x = 120x - 72.$$

Ennek következésében lesz tehát:

$$\varphi(-10) = 60 \,.\, 100 + 72 \,.\, 10 - 144,$$
$$= +6576;$$
$$\varphi'(-10) = -120 \,.\, 10 - 72,$$
$$= -1272;$$

következőleg:

$$\frac{\varphi(-10)}{\varphi'(-10)} = -5,2$$

és:

$$a' = -4,8.$$

Legyen egész számmal fx-ben

$$x = -5,$$

tehát:

$$x^2 = +25,$$
$$x^3 = +125,$$
$$x^4 = +625,$$
$$x^5 = -3125.$$

E' szerint leend:

$$f\ (-5) = -3125 - 3.625 + 24.125 + 95.25 + 46.5 - 101,$$
$$f'\ (-5) = 5.625 + 12.125 - 72.25 - 190.5 - 46,$$
$$f''\ (-5) = -20.125 - 36.25 + 144.5 + 190,$$
$$f'''\ (-5) = 60.25 + 72.5 - 144,$$
$$f''''\ (-5) = -120.5 - 72,$$
$$f'''''(-5) = 120;$$

tehát az illető függvények

$$f'''''\ (-5) > 0,$$
$$f''''\ (-5) < 0,$$
$$f'''\ (-5) > 0,$$
$$f''\ (-5) < 0,$$
$$f'\ (-5) > 0,$$
$$f\ (-5) > 0;$$

és a' jegysor:

$$(-5)\ +\ -\ +\ -\ +\ +\ .$$

Következőleg össze állítva:

$$\begin{array}{lcccccc}
(-10) & + & - & + & - & + & - \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(-5) & + & - & + & - & + & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
(-1) & + & - & - & + & - & +,
\end{array}$$

's íme a' $-10\ldots-1$ köz, két más közre szakadt

$$-10\ldots-5 \text{ és } -\ldots-1,$$

mellyeknek elsejében a' mutatósor a' megkivánt tulajdonokkal bír, 's mellyben a' gyökeret keresni kell.

Továbbá, minthogy a' jegysorok vége:

$$\begin{array}{lcccc}
(-10) & \ldots & - & + & - \\
(-5) & \ldots & - & + & +,
\end{array}$$

tehát a' származékok ellenkező előjegygyel birnak, az alsó határt használandjuk itt is e' formula' segítségével:

$$a' = a - \frac{fa}{f'a}.$$

Itt mindenek előtt:

$$\begin{aligned}
f(-10) &= -100000 \\
&\quad -3.10000 \\
&\quad +24.1000 \\
&\quad +95.100 \\
&\quad +46.10 \\
&\quad -101, \\
&= -96141, \\
f'(-10) &= +5.10000 \\
&\quad +12.1000
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-72.100\\
&-190.10\\
&-46,\\
&=+52854;
\end{aligned}
$$

következőleg:

$$\frac{f(-10)}{f'(-10)} = -0{,}54,$$

és:

$$d' = -9{,}46.$$

Ha a' közeledést még tovább vinni akarjuk: minthogy:

$$
\begin{aligned}
-9{,}46 &= -9{,}46,\\
(-9{,}46)^2 &= +89{,}5,\\
(-9{,}46)^3 &= -846{,}6,\\
(-9{,}46)^4 &= +8008{,}7,\\
(-9{,}46)^5 &= -7576{,}3
\end{aligned}
$$

lesz:

$$
\begin{aligned}
f(-9{,}46) = &-7576{,}3\\
&-3.8008{,}7\\
&+24.846{,}6\\
&+95.89{,}5\\
&+46.9{,}5\\
&-101\\
= &-2445{,}5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(-9{,}46) = &+5.8008{,}7\\
&+12.846{,}6\\
&-72.89{,}5\\
&-190.9{,}5\\
&-46,\\
= &+41707{,}7;
\end{aligned}
$$

$$\frac{f(-9{,}46)}{f'(-9{,}46)} = -0{,}058 ;$$

következőleg:

$$a'' = -9{,}402 \ . \ .$$

'stb.

12. §.

Példánkban még egy köz van hátra, t. i. ez:

$$\begin{array}{lcccccc} (1) & + & + & - & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ (10) & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

Keressük itt legelőször $f'''x$' gyökerét, 's legyen e' végett

$$f''' x = \varphi x$$
$$f'''' x = \varphi' x ,$$

minthogy itt a' jegysorokban

$$\begin{array}{lccc} (1) & + & + & - \\ (10) & + & + & + \end{array}$$

φx' származékai ugyan azon előjegyet viselik, lesz:

$$b' = b - \frac{\varphi b}{\varphi' b} .$$

Ugyan azon 1. szak. 28. §. a' szerint:

$$\varphi x = 60x^2 - 72x - 144 ,$$
$$\varphi' x = 120x - 72 ;$$

tehát:

$$\varphi(10) = 60.100 - 72.10 - 144 ,$$
$$= + 5136 ;$$
$$\varphi'(10) = 120\,10 - 72 ,$$
$$= + 1128 ;$$

következőleg:

$$\frac{\varphi(10)}{\varphi'(10)} = \frac{5136}{1128}.$$

Legyen kerék számban a' keresett gyökér 5, minthogy:

$$\begin{aligned} 5 &= 5, \\ 5^2 &= 25, \\ 5^3 &= 125, \\ 5^4 &= 625, \\ 5^5 &= 3125; \end{aligned}$$

lesz:

$$\begin{aligned} f\ (5) &= 3125 - 3.625 - 24.125 + 95.25 - 46.5 - 101, \\ f'\ (5) &= 5.625 - 12.125 - 72.25 + 190.5 - 46, \\ f''\ (5) &= 20.125 - 36.25 - 144.5 + 190, \\ f'''\ (5) &= 60.25 - 72.5 - 144, \\ f''''(5) &= 120.5 - 72, \\ f'''''(5) &= 120; \end{aligned}$$

's így:

$$\begin{aligned} f'''''(5) &> 0, \\ f''''(5) &> 0, \\ f'''\ (5) &> 0, \\ f''\ (5) &> 0, \\ f'\ (5) &> 0, \\ f\ (5) &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccc} (1) & + & + & - & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ (5) & + & + & + & + & + & + \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (10) & + & + & + & + & + & + \end{array},$$

miből látni, hogy a' gyökérnek 1 és 5 között kell lennie; 5 és 10 között gyökér nincs. Legyen tehát kerék számmal, miután tudjuk hogy 5 kelletinél nagyobb,

$$x = 4;$$

tehát:

$$x^2 = 16,$$
$$x^3 = 64,$$
$$x^4 = 256,$$
$$x^5 = 1024.$$

Ennél fogva:

$$f\ (4) = 1024 - 3.256 - 24.64 + 95.16 - 46.4 - 101,$$
$$f'\ (4) = 5.256 - 12.64 - 72.16 + 190.4 - 46,$$
$$f''\ (4) = 20.64 - 36.16 - 144.4 + 190,$$
$$f'''\ (4) = 60.16 - 72.4 - 144,$$
$$f''''\ (4) = 120.4 - 72,$$
$$f'''''\ (4) = 120;$$

$$f'''''\ (4) > 0,$$
$$f''''\ (4) > 0,$$
$$f'''\ (4) > 0,$$
$$f''\ (4) > 0,$$
$$f'\ (4) > 0,$$
$$f\ (4) < 0.$$

A' jegy- és mutatósorok tehát:

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & + & + & - & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ (4) & + & + & + & + & + & - \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (5) & + & + & + & + & + & + \end{array}.$$

Az fx egyenlet' való gyökere, melly 1 és 10 között van, 4 és 5 között a' szokott mód szerint keresendő. A' mi az 1...4 közt illeti, azt ugyan $f'''x'$ e' közbeni gyökerének keresése által ketté szakaszthatni, azonban, minthogy e' gyökér egész számban vagy 2, vagy 3, csak egyenesen e' számok' beiktatását próbálhatjuk. Az előbbi szabályok' és példák szerint következik:

$$\begin{array}{lcccccc}
(1) & + & + & - & + & + & - \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
(2) & + & + & - & - & + & - \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
(3) & + & + & + & - & - & - \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
(4) & + & + & + & + & + & - ,
\end{array}$$

minek további vizsgálatát még halasztanunk kell.

13. §.

Legyen a' függvénysor' utolsó három tagja:

$$\varphi''x, \ \varphi'x, \ \varphi x,$$

hol:

$$\varphi x = f^{(n-c)}x,$$

vagy

$$\varphi x = fx$$

lehet. A' különbség itt csupán csak abban van, hogy az első esetben a' vizsgálat alá vett sor

$$\varphi''x, \ \varphi'x, \ \varphi x$$

az átalános függvénysor'

$$f^{(m)}x, \ f^{(m-1)}x \ . \ . \ . \ f''x, \ f'x, \ fx$$

valamelly középső, az utolsóban pedig utolsó tagjával végződik. 'S legyen a' mutatósor:

α)

112.

Itt a' köznek összehúzásával nyilván két más közt nyerünk, mellyekben a' mutatósorok illetőleg:

100

012.

Legyen tehát:

β) a' mutatósor' vége:

012.

Minthogy e' szerint $\varphi''x$-nek a' vizsgálat alá vett közben gyökere nincs, kitetszik, hogy

$$\varphi''a \text{ és } \varphi''b$$

egyenlő előjegygyel birnak. Midőn tehát a' mutatósor' vége

012,

csak a' két következő eset lehető:

1.	(a)	. .	+	—	+
	(b)	. .	+	+	+
2.	(a)	. .	—	+	—
	(b)	. .	—	—	—.

Továbbá $\varphi'x$ az $a \ldots b$ közben egy való gyökérrel birván, melly például α legyen, lesz:

1.	(a)	. .	+	—	+
	(α)	. .	+	0	$\pm$
	(b)	. .	+	+	+
2.	(a)	. .	—	+	—
	(α)	. .	—	0	$\pm$
	(b)	. .	—	—	—,

mert $\varphi\alpha$ állító és tagadó lehet. Midőn $\varphi\alpha$ és $\varphi''\alpha$ ugyan azon előjegyűek, lesz:

$$\begin{array}{llcccc}
1. & (a) & \ldots & + & - & + \\
 & (<\alpha) & \ldots & + & - & + \\
 & (>\alpha) & \ldots & + & + & + \\
 & (b) & \ldots & + & + & + \\
2. & (a) & \ldots & - & + & - \\
 & (<a) & \ldots & - & + & - \\
 & (>\alpha) & \ldots & - & - & - \\
 & (b) & \ldots & - & - & -,
\end{array}$$

a' gyökerek tehát a' végtelen kis

$$<\alpha \ldots >\alpha$$

közben léteznek, azaz, képzeletiek. Ellenben midőn $\varphi\alpha$ és $\varphi''\alpha$ ellenkező előjegyüek:

$$\begin{array}{llcccc}
1. & (a) & \ldots & + & - & + \\
 & (<a) & \ldots & + & - & - \\
 & (>\alpha) & \ldots & + & + & - \\
 & (b) & \ldots & + & + & + \\
2. & (a) & \ldots & - & + & - \\
 & (<\alpha) & \ldots & - & + & + \\
 & (>\alpha) & \ldots & - & - & + \\
 & (b) & \ldots & - & - & -,
\end{array}$$

miből kitetszik, hogy ekkor, t. i. midőn $\varphi\alpha$ és $\varphi''\alpha$ különjegyüek, egyegy való gyökér keresendő az

$$a \ldots <\alpha,\ >\alpha \ldots b$$

közökben.

Ámbár e' szerint α' megtalálása következésében $\varphi\alpha$ és $\varphi''\alpha$ előjegyeiből mindig itélhetni meg, valljon képtelen-e a' két a és b közti gyökér, vagy nem; e' mód mindazonáltal az alkalmaztatásban némi bajjal jár. Miért is majdnem kirekesztőleg a' következőt használjuk. Minthogy, midőn φx való gyökerekkel bír, a mind a' két gyökérre nézve alsó, és b ugyan azokra nézve felső határ, továbbá minthogy:

$$\begin{array}{lll} 1. & (a) & \ldots + - + \\ & (<\alpha) & \ldots + - - \\ 2. & (>\alpha) & \ldots - - + \\ & (b) & \ldots - - - , \end{array}$$

ha a' keresendő gyökereket α' és α'' által értjük, 's azon föltétel alatt, hogy:

$$\alpha' < \alpha'',$$

lesz:

$$\alpha' > a - \frac{\varphi a}{\varphi' a}$$

$$\alpha'' < b - \frac{\varphi b}{\varphi' b},$$

's innen elvonás által:

$$\alpha'' - \alpha' < b - a + \frac{\varphi a}{\varphi' a} - \frac{\varphi b}{\varphi' b}$$

azaz:

$$\frac{\varphi b}{\varphi' b} - \frac{\varphi a}{\varphi' a} < b - a - (\alpha'' - \alpha'),$$

minthogy pedig:

$$\alpha'' - \alpha' > 0;$$

de akkor is midőn:

$$\alpha'' - \alpha' = 0$$

annál inkább lesz tehát:

$$\frac{\varphi b}{\varphi' b} - \frac{\varphi a}{\varphi' a} < b - a,$$

minek következésében tehát mindig, midőn:

$$\frac{\varphi b}{\varphi' b} - \frac{\varphi a}{\varphi' a} \begin{smallmatrix} = \\ > \end{smallmatrix} b - a$$

a' gyökerek' képzeleti létéről bizonyosak vagyunk.

Ellenben, midőn:

$$\frac{\varphi b}{\varphi' b} - \frac{\varphi a}{\varphi' a} < b - a$$

a' gyökerek valók csak lehetnek, mert a' köz összehúzásában:

$$\frac{\varphi b'}{\varphi' b'} - \frac{\varphi a'}{\varphi' a'} < b' - a',$$

$$\frac{\varphi b''}{\varphi' b''} - \frac{\varphi a''}{\varphi' a''} < b'' - a'',$$

$$\frac{\varphi b'''}{\varphi' b'''} - \frac{\varphi a'''}{\varphi' a'''} < b''' - a'''$$

. . . .

végre:

$$\frac{\varphi b^{(m)}}{\varphi' b^{(m)}} - \frac{\varphi a^{(m)}}{\varphi' a^{(m)}} \begin{smallmatrix} = \\ > \end{smallmatrix} b^{(m)} - a^{(m)}$$

lehet.

Hogy a' mondottak akkor is állanak, midőn

$$\varphi x = fx,$$

már fölebb említettük, 's ekkor a' föltételek alkatjai ezekké válnak:

$$\frac{fb}{f'b} - \frac{fa}{f'a} < b - a$$

$$\frac{fb'}{f'b'} - \frac{fa'}{f'a'} < b' - a'$$

. . . . .

14. §.

A' 12. §.-ban találtatott:

$$\begin{array}{cccccccc}
(2) & + & + & - & - & + & - \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
(3) & + & + & + & - & - & - ,
\end{array}$$

tehát két gyökér kérdéses maradt. Ha itt az innént mondottakat alkalmaztatjuk, lesz:

$$f(2) = -21, \; f'(2) = 30;$$
$$f(3) = -32, \; f'(3) = -43,$$

következőleg

$$\frac{f(3)}{f'(3)} - \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{32}{43} + \frac{21}{30} > 1,$$

azaz nagyobb, mint a' köz $2-1=1$, minél fogva a' gyökerek nyilván képzeletiek.

Ha már most első példánk' következményeit összeírjuk lesz:

(—10)	+	—	+	—	+	—	
	0	0	0	0	0	1	egy való gy.
(—1)	+	—	+	—	+	+	
	0	0	1	1	1	1	egy való gy.
(0)	+	—	—	+	—	—	
	0	1	0	0	1	0	
(1)	+	+	—	+	+	—	nincs gy.
	0	0	0	1	0	0	
(2)	+	+	—	—	+	—	
	0	0	1	0	1	2	két képz. gy.
(3)	+	+	+	—	—	—	
	0	0	0	1	1	1	egy való gy.
(10)	+	+	+	+	+	+	

A' II. példában 1. szak. §. 29. kérdéses maradt két gyökér' természete. Találtuk t. i. hogy:

$$\begin{array}{lccccc}
(>1) & + & + & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
(10) & + & + & + & + & + .
\end{array}$$

Itt beiktatás által:

$$\begin{array}{lccccc}
(2) & + & + & 0 & - & +
\end{array}$$

tehát:

$$\begin{array}{lccccc}
(<2) & + & + & - & - & + \\
(>2) & + & + & + & - & +
\end{array}$$

továbbá:

$$\begin{array}{lccccc}
(3) & + & + & + & - & - .
\end{array}$$

Ha a' következeteket összeírjuk, lesz:

$$\left.\begin{array}{lccccc}
(<0) & + & - & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
(>0) & + & - & - & - & +
\end{array}\right\}\text{két képz. gy.}$$

$$\left.\begin{array}{lccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(<1) & + & - & - & - & + \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
(>1) & + & + & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(<2) & + & + & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right\}\text{nincs gy.}$$

$$\left.\begin{array}{lccccc}
(>2) & + & + & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right\}\text{egy való gy.}$$

$$\begin{array}{lccccc}
(3) & + & + & + & - & -
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
(10) & + & + & + & + & +
\end{array}\right\}\text{egy való gy.}$$

A' III. példában is kérdéses maradt két gyökér 0 és 1 között, találtatott t. i.

$$\begin{array}{lcccc} (0) & + & + & - & + \\ & 0 & 0 & 1 & 2 \\ (1) & + & + & + & + . \end{array}$$

Minthogy itt:

$$f(0)=2, \quad f'(0)=-3;$$
$$f(1)=2, \quad f'(1)=4;$$

lesz:

$$\frac{f(1)}{f'(1)}-\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{2}{4}+\frac{2}{3}>1,$$

nagyobb, mint a' köz $1-0=1$. A' két gyökér tehát képzeleti.

Összeállítva tehát:

$$\begin{array}{lccccl} (-10) & + & - & + & - & \multirow{3}{*}{\Bigg\}\text{ egy való gyökér.}} \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ (-1) & + & - & - & + & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \Big\}\text{ nincs gyökér.} \\ (0) & + & + & - & + & \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & \Big\}\text{ két képzeleti gyökér.} \\ (1) & + & + & + & + & \end{array}$$

A' IV. példában fejtetlen maradt két gyökér -10 és -1 között. Beiktatás által azonban nyerjük:

(—10)	+	—	+	—	+	—	
	0	0	0	0	0	1	egy való gy.
(—2)	+	—	+	—	+	+	
	0	0	0	0	1	1	egy való gy.
(—1)	+	—	+	—	—	—	
	0	1	1	1	0	0	nincs gy.
(<0)	+	+	—	+	—	—	
	0	0	1	2	2	2	két képz. gy.
(>0)	+	+	+	+	—	—	
	0	0	0	0	1	1	egy való gy.
(10)	+	+	+	+	+	+	

Az V. példában két gyökér pár maradt kérdéses. Részint beiktatás, részint pedig az által, hogy:

$$\frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{f''\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{241}{300} + \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$$

melly esetet alább még bővebben fogjuk vizsgálni, találtatik:

(—10)	+	—	+	—	+	—	+	—	
	0	0	0	0	0	1	1	1	egy való gy.
(—1)	+	—	+	—	+	+	—	+	
	0	0	1	1	1	0	0	0	nincs gy.
(<0)	+	—	—	+	—	+	—	+	
	0	1	0	1	2	2	2	2	két képz. gy.
(>0)	+	+	—	—	—	+	—	—	
	0	0	1	0	0	1	2	2	két képz. gy.
$\left(\frac{1}{2}\right)$	+	+	+	—	—	—	—	+	
	0	0	0	1	1	0	0	0	gy. nincs.
(1)	+	+	+	+	+	—	—	+	
	0	0	0	0	0	1	1	1	egy való gy.
$\left(\frac{3}{2}\right)$	+	+	+	+	+	+	+	—	
	0	0	0	0	0	0	0	1	egy való gy.
(2)	+	+	+	+	+	+	+	+	

A' VI. példában két gyökér bizonytalan — 1 és 0 között. Azonban, minthogy itt:

$$f\,(0) = -2\,;\; f'\,(0) = -2\,;$$
$$f(-1) = -3\,,\; f'\,(-1) = +3$$

és:

$$\frac{f\,(0)}{f'\,(0)} - \frac{f\,(-1)}{f'(-1)} = \frac{2}{2} + \frac{3}{3} > 1\,,$$

azaz nagyobb mint a' köz 0 — (—1) = 1, a' két kérdéses gyökér nyilván képzeleti. Ha itt is a' következményeket összeállítjuk, lesz:

(<-1)	+	—	+	—	+	—	
	0	0	1	2	2	2	két képz. gy.
(>-1)	+	—	—	—	+	—	
	0	1	1	0	1	2	két képz. gy.
(0)	+	+	+	—	—	—	
	0	0	0	1	1	0	nincs gy..
(1)	+	+	+	+	+	—	
	0	0	0	0	0	1	egy való gy.
(10)	+	+	+	+	+	+	

A' VII. példában is fejtetlen maradt két gyökér — 1 és 0 között. A' szokott mód szerint:

$$f\,(0) = 1\,,\;\; f'\,(0) = 6\,;$$
$$f\,(-1) = 4\,,\;\; f'\,(-1) = -19$$

$$\frac{f\,(0)}{f'\,(0)} - \frac{f\,(-1)}{f\,(-1)} = \frac{1}{6} + \frac{4}{19} < 1$$

találtatik, minél fogva a' gyökerek természete még mindig ismeretlen. Próbálhatjuk a' beiktatást, 's legyen e' végett:

$$x = -\frac{1}{2},$$

$$x^2 = +\frac{1}{4},$$

$$x^3 = -\frac{1}{8},$$

$$x^4 = +\frac{1}{16},$$

$$x^5 = -\frac{1}{32};$$

minek következésében:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32} + \frac{10}{8} - \frac{6}{2} + 1,$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{5}{16} - \frac{30}{4} + 6,$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{20}{8} + \frac{60}{2},$$

$$f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{60}{4} - 60,$$

$$f''''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{120}{2},$$

$$f'''''\left(-\frac{1}{2}\right) = 120;$$

$$f''''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0,$$

$$f'''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$f'''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0,$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0.$$

A' következmények tehát ezek:

(—10)	+	—	+	—	+	—	
	0	0	0	1	1	1	egy való gy.
(<—1)	+	—	+	+	—	+	
	0	0	1	0	0	0	gyökér nincs.
(>—1)	+	—	—	+	—	+	
	0	0	0	0	0	1	egy való gy.
$\left(-\frac{1}{2}\right)$	+	—	—	+	—	—	
	0	0	0	0	1	1	egy való gy.
(<0)	+	—	—	+	+	+	
	0	1	0	1	0	0	gyökér nincs.
(>0)	+	+	—	—	+	+	
	0	0	0	0	1	1	egy való gy.
(<1)	+	+	—	—	—	—	
	0	0	1	0	0	0	gyökér nincs.
(>1)	+	+	+	—	—	—	
	0	0	0	1	1	1	egy való gy.
(10)	+	+	+	+	+	+	

15. §.

Láttuk, hogy midőn a' függvénysor' vizsgálat alá vett része:

$$\varphi'' x,\ \varphi' x,\ \varphi x$$

$a \ldots b$ között a' 0 1 2 mutatósort származtatja, és midőn $\varphi'' \alpha$ és $\varphi \alpha$ egyjegyűek, azaz, midőn:

$$\begin{array}{lll} 1. & (a) & \ldots + \; - \; + \\ & (b) & \ldots + \; + \; + \\ 2. & (a) & \ldots - \; + \; - \\ & (b) & \ldots - \; - \; - \end{array}$$

φx a' mondott közben két képzeleti gyökérrel birhat. Legyen már most a' függvénysorra

$$\varphi''' x,\ \varphi'' x,\ \varphi' x,\ \varphi x$$

nézve az illető mutatósor ez:

0122 vagy 0123,

és birjon $\varphi' x$ két képzeleti gyökérrel. E' szerint lesz tehát:

α) Midőn a' mutatósor vége ez:

0 1 2 2

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & 1.) & (a) & \ldots + \; - \; + \; + \\ & & (b) & \ldots + \; + \; + \; + \\ & & & \text{vagy} \\ & 2.) & (a) & \ldots + \; - \; + \; - \\ & & (b) & \ldots + \; + \; + \; - \\ \text{II.} & 1.) & (a) & \ldots - \; + \; - \; + \\ & & (b) & \ldots - \; - \; - \; + \\ & & & \text{vagy:} \\ & 2.) & (a) & \ldots - \; + \; - \; - \\ & & (b) & \ldots - \; - \; - \; - \end{array}$$

's legyen

$$\varphi''\alpha = 0,$$

azaz α gyökere $\varphi''x$-nek, lesz:

I.	1.)	(a)	. .	$+$	$-$	$+$	$+$
		$(<\alpha)$	. .	$+$	$-$	$+$	$\pm$
		(α)	. .	$+$	0	$+$	$\pm$
		$(>\alpha)$	. .	$+$	$+$	$+$	$\pm$
		(b)	. .	$+$	$+$	$+$	$+$
	2.)	(a)	. .	$+$	$-$	$+$	$-$
		$(<\alpha)$	. .	$+$	$-$	$+$	$\pm$
		(α)	. .	$+$	0	$+$	$\pm$
		$(>\alpha)$	. .	$+$	$+$	$+$	$\pm$
		(b)	. .	$+$	$+$	$+$	$-$
II.	1.)	(a)	. .	$-$	$+$	$-$	$+$
		$(<\alpha)$	. .	$-$	$+$	$-$	$\pm$
		(α)	. .	$-$	0	$-$	$\pm$
		$(>\alpha)$	. .	$-$	$-$	$-$	$\pm$
		(b)	. .	$-$	$-$	$-$	$+$
	2.)	(a)	. .	$-$	$+$	$-$	$-$
		$(<\alpha)$	. .	$-$	$+$	$-$	$\pm$
		(α)	. .	$-$	0	$-$	$\pm$
		$(>\alpha)$	. .	$-$	$-$	$-$	$\pm$
		(b)	. .	$-$	$-$	$-$	$-$

Vizsgáljuk itt különösen a'

$$<\alpha \; . \; . \; . > \alpha$$

közt, lesz:

I.	1.)	α').	$(<\alpha)$	. .	$+$	$-$	$+$	$+$
					0	1	2	2
			$(>\alpha)$	. .	$+$	$+$	$+$	$+$

		β'.)	$(<\alpha)$ . .	$+$	$-$	$+$	$-$
				0	1	2	2
			$(>\alpha)$ . .	$+$	$+$	$+$	$-$
	2.)	α'.)	$(<\alpha)$ . .	$+$	$-$	$+$	$+$
				0	1	2	2
			$(>\alpha)$ . .	$+$	$+$	$+$	$+$
		β'.)	$(<\alpha)$ . .	$+$	$-$	$+$	$-$
				0	1	2	2
			$(>\alpha)$ . .	$+$	$+$	$+$	$-$
II.	1.)	α.)	$(<\alpha)$ . .	$-$	$+$	$-$	$+$
				0	1	2	2
			$(>\alpha)$ . .	$-$	$-$	$-$	$+$
		β'.)	$(<\alpha)$ . .	$-$	$+$	$-$	$-$
				0	1	2	2
			$(>\alpha)$ . .	$-$	$-$	$-$	$-$
	2.)	α'.)	$(<\alpha)$ . .	$-$	$+$	$-$	$+$
				0	1	2	2
			$(>\alpha)$ . .	$-$	$-$	$-$	$+$
		β'.)	$(<\alpha)$ . .	$-$	$+$	$-$	$-$
				0	1	2	2
			$(>\alpha)$ . .	$-$	$-$	$-$	$-$.

Következőleg akár $+$ akár $-$ a' $\varphi\alpha$, midőn $\varphi' x$-nek $a \ldots b$ között képzeleti gyökerei vannak, a' végtelen kis

$$(<\alpha) \ldots (>a)$$

közben a' mutatósor' utolsó tagja $= 2$ levén, szükségképen φx-nek is ugyan azon közben és ugyan annyi képzeleti gyökerei lesznek. Ebből következik:

β.) Midőn a' mutatósor' vége ez:

$$0123,$$

és $\varphi' x$-nek két képzeleti gyökere van, hogy ekkor bizonyosak lehetünk két képzeleti és egy való gyökérről.

Átalában legyenek a' jegysorok

$$\begin{array}{lll} 1. & (a) & \ldots + - + \ldots \\ & (b) & \ldots + + + \ldots \\ 2. & (a) & \ldots - + - \ldots \\ & (b) & \ldots - - - \ldots \end{array}$$

a' függvénysorhoz

$$\ldots f^{(e+2)}x,\ f^{(e+1)}x,\ f^{e}x \ldots\ldots$$

's legyen:

$$f^{(e+1)}\alpha = 0,$$

és $f^{(e+2)}\alpha$ $f^{e}\alpha$-val egyjegyü, minek következésében bizonyosak vagyunk $f^{e}\alpha$' két képzeleti gyökeréről; legyenek továbbá

$$f^{e-1}\alpha,\ f^{e-2}\alpha\ \ldots\ f''\alpha,\ f'\alpha,\ f\alpha$$

akármelly előjegyűek. Annyi bizonyos, hogy ezen föltételek szerint, a'

$$f^{e-1}\alpha,\ f^{e-2}\alpha\ \ldots\ f''\alpha,\ f'\alpha,\ f\alpha$$

függvények a' végtelen kis:

$$< \alpha \ \ldots\ > \alpha$$

közben jegyváltozást nem szenvedhetnek; ha tehát e' közben a' jegysorok' azon része, melly e' három függvénynek

$$f^{(e+2)}x,\ f^{(e+1)}x,\ f^{e}x$$

megfelel, a' következő mutatósort származtatja

$$0\,1\,2,$$

minthogy ugyan azon közben, már semmi jegyváltozás nem következhetik, melly mind a' két jegysorban egyaránt nem volna, világos hogy illyenkor a' mutatósor ez:

$$. \; . \; 01222 \; . \; . \; 2.$$

Tehát közönségesen, ha $f^{e}x$ a . és . b között képzeleti gyökeret bir, képzeleti gyökerük lesz ugyan azon közben a' következő függvényeknek is, egészlen az alapfüggvényig:

$$f^{(e-1)}x, \; f^{(e-2)}x \; . \; . \; . \; f''x, \; f'x, \; fx.$$

Észre kell vennünk még, hogy mindeddig föltettük, hogy az adott egyenlet

$$fx$$

egyenlő gyökerekkel nem bir, millyenekkel ha birna, az 1. szak. 21. §. tanítmányai szerint, az egyenletet saját és első származéka' közosztójával: φx-xel kellene osztani; mert ha:

$$fx = (x-\alpha)^{m} . \; (x-\beta)^{n} . \; (x-\gamma)^{p} \; . \; . \; . \; .$$

mindig lesz:

$$\frac{fx}{\varphi x} = (x-\alpha) \; . \; (x-\beta) \; (x-\gamma) \; . \; . \; . \; .$$

Az imént mondottak e' fölül fölteszik, hogy a' végtelen kis

$$<\alpha \; . \; . \; . \; >\alpha$$

közben csak

$$f^{(e+1)}\alpha = 0,$$

a' többi függvények pedig:

$$f^{(e)}\alpha, \; f^{(e-1)}\alpha \; . \; . \; . \; f''\alpha, \; f'\alpha, \; f\alpha$$

mind semmitől különbözők legyenek. Mert ha

$$f\alpha = 0,$$

α gyökere volna az adott egyenletnek is, mi föltételünkkel ellenkezik; ha pedig:

$$f^{(e-h)}\alpha \text{ volna} = 0$$

e' miatt a' mutatósornak ismét két egységgel kellene szaporodnia, melly már most ez volna:

. . . 0122 . . 344 . . 4.

16. §.

Míg a' határokban a' mutatósor ez:

1001,

bizonyosak vagyunk, hogy az előbbi §§. értelmében, mindig szorosabb

$$b' - a',$$
$$b'' - a''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

közöket találhatunk, mellyben a' keresett gyökér létez, 's az is világos, hogy ekkor a' hiba azaz különbség

$$\alpha - a^{(n)}$$
$$b^{(n)} - \alpha$$

mindig kisebb mint a' köz maga, azaz mint

$$b^{(n)} - a^{(n)}.$$

De minthogy ez esetben, mind a' két új határt ki kellene számítani, kivánatos más módot birni, melly által a' mindenkori közeledést megitélhetni. Legyen e' végre a' mutatósor' vége ez:

0001,

mit a' köz' összehúzása által mindig eszközölhetni ki, és

α):

$$(a) \; . \quad + \; + \; -$$
$$(b) \; . \; . \; + \; + \; +,$$

vagy

$$(a) \; . \; . \; - \; - \; +$$
$$(b) \; . \; . \; - \; - \; -;$$

tehát a' közelebbi határok:

$$a' = a - \frac{f\,a}{f'b},$$

$$b' = b - \frac{f\,b}{f'b}$$

Elvonás által lesz:

$$b' - a' = b - a - \frac{f\,b - f\,a}{f'b},$$

's legyenek a' közök:

$$\begin{aligned} b - a &= k, \\ b' - a' &= k', \\ b'' - a'' &= k'' \\ \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot\,; \end{aligned}$$

következőleg:

$$k' = k - \frac{f\,b}{f'b} + \frac{f\,a}{f'b};$$

Minthogy pedig:

$$a = b - k$$

lesz:

$$\frac{f\,a}{f'b} = \frac{f\,b}{f'b} - \frac{k\,.f'b}{f'b} + \frac{\frac{k^2}{2}\,.f''(b - \theta k)}{f'b}.$$

tehát:

$$k' = \frac{k^2.f''(b - \theta k)}{f'b}.$$

Az $f''x$ függvény a' vizsgálat alá vett közben gyökérrel nem bir, tehát szüntelenül fogy vagy növekedik, valamint ugyan azon közben és ugyan azon oknál fogva $f'x$ is. Ha tehát itt csak az átalános értékekre figyelünk, kétség kivül lesz:

$$f'a > f'b \text{ vagy } f'b > f'a$$

továbbá:

$$f''a > f''(b-\theta k) \text{ vagy } f''b > f''(b-\theta k).$$

Akár mint legyen a' dolog, ha A'' alatt azon határértékét értjük $f''x$-nek, melly a' másiknál nagyobb, és szintúgy A' alatt $f'x$' kisebbik határértékét, lesz:

$$f'b \overset{=}{>} A'$$

$$f''(b-\theta k) < A''$$

következőleg:

$$\frac{f''(b-\theta k)}{f'b} < \frac{A''}{A'},$$

$$\frac{f''(b-\theta k)}{2f'b} < \frac{A''}{2A'};$$

's igy:

$$k' < k^2 \cdot \frac{A''}{2A'}.$$

Ugyan azon okoskodásnál fogva találjuk, hogy:

$$k'' < k'^2 \cdot \frac{A''}{2A'},$$

$$k''' < k''^2 \cdot \frac{A''}{2A'},$$

$$k'''' < k'''^2 \cdot \frac{A''}{2A'}$$

. . . .

és helyettezés által:

$$k' < k^2 \cdot \left(\frac{A''}{2A'}\right),$$

$$k'' < k^4 \cdot \left(\frac{A''}{2A'}\right)^3,$$

$$k''' < k^8 \cdot \left(\frac{A''}{2A'}\right)^7,$$

$$k'''' < k^{16} \cdot \left(\frac{A''}{2A'}\right)^{15}$$

. . . . .

Legyen:

β)

(a) . . $+ \; - \; +$
(b) . . $+ \; - \; -$

vagy:

(a) . . $- \; + \; -$
(b) . . $- \; + \; +$

tehát:

$$a' = a - \frac{f\,a}{f'a},$$

$$b' = b - \frac{f\,b}{f'a}$$

Itt is, mint fölebb:

$$b' - a' = b - a - \frac{f\,b}{f'a} + \frac{f\,a}{f'a},$$

minthogy pedig:

$$b = a + k$$
$$b' = a' + k'$$

. . . . .

lesz egy felül:

$$k' = k - \frac{f b}{f' a} + \frac{f a}{f' a};$$

más felül:

$$\frac{f b}{f' a} = \frac{f(a+k)}{f' a} = \frac{f a}{f' a} + \frac{k f' a}{f a} + \frac{\frac{k^2}{2} \cdot f''(a+\theta k)}{f' a},$$

's ennek következésében:

$$k' = -k^2 \cdot \frac{f''(a+\theta k)}{2 f' a},$$

's ha most, csak a' számbeli értékeket tekintve, A'' $f''x$' legnagyobb, A' pedig $f'x$' legkisebb határértéke, lesz:

$$f''(a+\theta k) < A''$$

$$2 f' a \overset{=}{>} 2 A'$$

tehát:

$$k^2 \cdot \frac{f''(a+\theta k)}{2 f' a} < k^2 \cdot \frac{A''}{2 A'};$$

következőleg:

$$k' < k^2 \cdot \frac{A''}{2 A'};$$

tehát:

$$k'' < k'^2 \cdot \frac{A''}{2 A'};$$

$$k''' < k''^2 \cdot \frac{A''}{2 A'};$$

$$k'''' < k'''^2 \cdot \frac{A''}{2 A'},$$

. . . .

's már most helyettezés által szintúgy, mint fölebb:

$$k' < k^2 \cdot \left(\frac{A''}{2A'}\right),$$

$$k'' < k^4 \cdot \left(\frac{A''}{2A'}\right)^3,$$

$$k''' < k^8 \cdot \left(\frac{A'}{2A'}\right)^7,$$

$$k'''' < k^{16} \cdot \left(\frac{A'}{2A'}\right)^{15}$$

. . . . . .

17. §.

Legyen már most:

$$k \overset{=}{<} \left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

$$\frac{A'}{2A'} \overset{=}{<} \left(\frac{1}{10}\right)^e;$$

tehát:

$$k^2 \overset{=}{<} \left(\frac{1}{10}\right)^{2n},$$

$$k^4 \overset{=}{<} \left(\frac{1}{10}\right)^{4n},$$

$$k^8 \overset{=}{<} \left(\frac{1}{10}\right)^{8n}$$

. . . . .

$$\left(\frac{A''}{2A'}\right)^3 \underset{<}{=} \left(\frac{1}{10}\right)^{3e}$$

$$\left(\frac{A''}{2A'}\right)^7 \underset{<}{=} \left(\frac{1}{10}\right)^{7e}$$

. . . .

következőleg:

$$k^2.\ \frac{A''}{2A'} \underset{<}{=} \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+e},$$

$$k^4.\ \left(\frac{A''}{2A'}\right)^3 \underset{<}{=} \left(\frac{1}{10}\right)^{4n+3e},$$

$$k^8.\ \left(\frac{A''}{2A'}\right)^7 \underset{<}{=} \left(\frac{1}{10}\right)^{8n+7e}$$

. . . .

Ha itt a' rangjeleket vizsgáljuk, találjuk, hogy:

$$\begin{aligned} n &= n \\ 2n+e &= n+(n+e), \\ 4n+3e &= 2n+e+2(n+e), \\ 8n+7e &= 4n+3e+2^2(n+e), \\ 16n+15e &= 8n+7e+2^3(n+e), \\ 32n+31e &= 16n+15e+2^4(n+e) \end{aligned}$$

. . . .

és a' sor:

$$n,\ 2n+e,\ 4n+3e,\ 8n+7e,\ 16n+15e\ldots$$

midőn

$$2n+e > n,$$

azaz:

$$n+e > 0$$

állító, szembetünőleg növekedő. E' föltétel' következésében tehát:

$$n + e \geqq 1$$

és:

$$n \geqq 1 - e.$$

Tehát növekedő a' rangjegysor és fogyó a' közök' sora, melly ez

$$k' < k^2 . \left(\frac{A''}{2A'}\right),$$

$$k'' < k^4 . \left(\frac{A''}{2A'}\right)^3,$$

$$k''' < k^8 . \left(\frac{A''}{2A'}\right)^7$$

. . . .

azaz:

$$k' < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+e},$$

$$k'' < \left(\frac{1}{10}\right)^{4n+3e},$$

$$k''' < \left(\frac{1}{10}\right)^{8n+7e}$$

. . . . .

az előhozott alkatok értelmében, mihelyt

$$n \geqq 1 - e.$$

Minthogy pedig a' hiba, mellyet elkövetünk midőn valamelly határértéket veszünk gyökér helyett, mindig kisebb a' köznél; ha

$$\delta,\ \delta',\ \delta'',\ \delta''',\ \delta'''' \ldots$$

alatt az illyetén hibákat értjük, lesz:

$$\delta < k,$$
$$\delta' < k',$$
$$\delta'' < k'',$$
$$\delta''' < k''',$$
$$\delta'''' < k''''$$

. . . . .

tehát annál inkább:

$$\delta' < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+e},$$

$$\delta'' < \left(\frac{1}{10}\right)^{4n+3e},$$

$$\delta''' < \left(\frac{1}{10}\right)^{6n+7e},$$

$$\delta'''' < \left(\frac{1}{10}\right)^{16n+15e}$$

. . . . . .

Minek előtte a' mondottakat alkalmaztatnók mi által talán világosabbakká leendnek azok, észrevennünk nem lesz helytelen, miképen, ha az:

$$fc,\ f'c,\ f''c,\ f'''c\ \ldots\ f^{(m)}c$$

függvények advák, az,

$$fc',\ f'c',\ f''c',\ f'''c'\ \ldots\ f^{(m)}c',$$

függvényeket, mellyekben

$$c' = c + \gamma,$$

könnyen számíthatni ki. Átalában t. i.

$$fc' = f(c + \gamma),$$
$$f'c' = f'(c + \gamma),$$

$$f'c' = f''(c+\gamma),$$
$$f''c' = f''(c+\gamma)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f^{(m)}c' = f^{(m)}c,$$
$$= f^{(m)}(0).$$

Már pedig:

$$f\ (c+\gamma) = f\ c + \gamma f'\ c + \frac{\gamma^2}{2}.f''c + .. + \frac{\gamma^m}{1.2.m} f^{(m)}c$$

$$f'\ (c+\gamma) = f'\ c + \gamma f'' c + \frac{\gamma^2}{2} f''' c + .. + \frac{\gamma(m-1}{1.2..(m-1)} .f^{(m)}c$$

$$f''(c+\gamma) = f' c + \gamma f''' c + \frac{\gamma^2}{2} f'''' c + .. + \frac{\gamma(m-2)}{1.2..(m-2)} .f^{(m)}c$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Miből látni, hogy minden egyes

$$fc,\ f'c,\ f''c,\ f'''c\ .\ .\ .\ f^{(m)}c$$

függvényt az elsőt kivéve, γ által kell szorozni, mi által erednek

$$\gamma f'c,\ \gamma f''c,\ \gamma f'''c\ .\ .\ .\ \gamma f^{(m)}c;$$

's most itt az első tagot kihagyva, a' többieket pedig ismét γ-val szorozva és 2-vel elosztva, lesz:

$$\frac{\gamma^2}{2} f''c,\ \frac{\gamma^2}{2} f'''c,\ \frac{\gamma^2}{2} f''''c\ .\ .\ \frac{\gamma^2}{2} f^{(m)}c;$$

's ismét az első tagot elhagyva, továbbá γ-val szorozva és 3-mal osztva, leend:

$$\frac{\gamma^3}{2\text{-}3} f'''c,\ \frac{\gamma^3}{2.3} f''''c,\ .\ .\ .\ \frac{\gamma^3}{2.3} f^{(m)}c;$$

és hasonló munkálatok' következésében:

$$\frac{\gamma^4}{2.3.4}f''''c, \quad \frac{\gamma^4}{2.3.4}f'''''c \;\ldots\; \frac{\gamma^4}{2.3.4}f^{(m)}c$$

$$\frac{\gamma^5}{2.3.4.5}f'''''c, \quad \frac{\gamma^5}{2.3.4.5}f''''''c \;\ldots\; \frac{\gamma^5}{2.3.4.5}f^{(m)}c$$

. . . .

Ha a' következetekèt összveírjuk, lesznek azok:

$$fc, \quad f'c, \quad f''c, \quad f'''c \;\ldots$$

$$\gamma f'c, \quad \gamma f''c, \quad \gamma f'''c, \quad \gamma f''''c \;\ldots$$

$$\frac{\gamma^2}{2}f''c, \quad \frac{\gamma^2}{2}f'''c, \quad \frac{\gamma^2}{2}f''''c, \quad \frac{\gamma^2}{2}f'''''c \;\ldots$$

$$\frac{\gamma^3}{2.3}f'''c, \quad \frac{\gamma^3}{2.3}f''''c, \quad \frac{\gamma^3}{2.3}f'''''c, \quad \frac{\gamma^3}{2.3}f''''''c \;\ldots$$

. . . .

'S a' függősorok itt illetőleg:

$$f\,(c+\gamma)$$
$$f'(c+\gamma)$$
$$f''(c+\gamma)$$

. . . . . .

kifejtései.

18. §.

Legyen például adva az egyenlet:

$$fx = x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 1.$$

Itt mindenek előtt:

$$f'x = 4x^3 - 12x^2 + 2x - 1,$$
$$f''x = 12x^2 - 24x + 2,$$
$$f'''x = 24x - 24,$$
$$f''''x = 24;$$

Midőn itt $x=0$, lesz:

$$f\ (0)=1,$$
$$f'\ (0)=-1,$$
$$f''\ (0)=2,$$
$$f'''(0)=-24,$$
$$f''''(0)=24;$$

lesz a' jegysor, szokás szerint $f^{(m)}x$' előjegyétől kezdve fx' előjegyéig:

$$(0)\ +\ -\ +\ -\ +\ .$$

Minthogy csupa jegyváltozások fordúlnak elő, bizonyosak vagyunk, hogy a'

$$0\ .\ .\ .\ -\frac{1}{0},$$

közben azaz 0 alatt gyökeret keresni nem kell. Legyen tehát másodszor $x=1$, következőleg:

$$f\ (1)=1-4+1-1+1=-2,$$
$$f'\ (1)=4-12+2-1=-7,$$
$$f''\ (1)=12-24+2=-10,$$
$$f'''(1)=24-24=0,$$
$$f''''(1)=24=24;$$

az illető jegysor tehát ez:

$$(1)\ +\ 0\ -\ -\ -,$$

következőleg:

$$(<1)\ +\ -\ -\ -\ -$$
$$(>1)\ +\ +\ -\ -\ -\ .$$

Harmadszor legyen $x=10$, lesz:

$$f\ (10)=10000-4000+100-10+1=6091,$$
$$f'\ (10)=4000-1200+20-1=2819,$$
$$f''\ (10)=1200-240+2=962,$$
$$f'''(10)=240-24=216,$$
$$f''''(10)=24=24,$$

a' jegysor tehát a' következő:

$$(10)\quad + \; + \; + \; + \; +$$

minthogy itt csupa jegyfolyam találtatott,

$$10 \text{ és } + \frac{1}{0}$$

között, azaz 10-en fölül gyökér szinte nincs. Összeállítva mármost, lesz:

$$\begin{array}{cccccc} (0) & + & - & + & - & + \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ (<1) & + & - & - & - & - \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (>1) & + & + & - & - & - \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ (10) & + & + & + & + & + \end{array}$$

Itt mindenek előtt a'

$$0 \ldots < 1$$

közre nézve, tudnunk illik, valljon $f'x$ két gyökere képzeleti-e, vagy nem. Nem lesznek képzeletiek, midőn

$$\frac{f'b}{f''b} - \frac{f'a}{f''a} < 1$$

azaz midőn:

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(0)}{f''(0)} < 1.$$

Fölebb találtatott:

$$f'(1) = -7, \quad f''(1) = -10;$$
$$f'(0) = -1, \quad f''(0) = 2;$$

tehát:

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{7}{10} + \frac{1}{2}$$
$$> 1.$$

Ennek következésében, az egyenletnek két képzeleti és egy való gyökere van 0 és 1 között, továbbá még egy való gyökere 1 és 10 között. Hogy a' való gyökeret a' képzeletiektől külön válaszszuk, keressük $f''x'$ gyökerét 0 és 1 között. Minthogy erre nézve:

$$\begin{array}{ll}(0) & \ldots + - + \\ (<1) & \ldots + - -\end{array}$$

az alsó határt fogjuk használni ez alkatban:

$$a' = a - \frac{f'' a}{f''' a},$$

azaz e' különös esetben:

$$a' = 0 - \frac{f''(0)}{f'''(0)}$$

$$= 0 + \frac{2}{24}$$

$$= 0,1,$$

körülbelül. Ha ezt veszszük gyökér gyanánt, lesz:

$$\begin{array}{lll}
f\;(0,1) = & 0,0001 - 0,004 + 0,01 - 0,1 + 1 & = 0,8061, \\
f'\;(0,1) = & 0,004 - 0,12 + 0,2 - 1 & = -0,916, \\
f''\;(0,1) = & 0,12 - 2,4 + 2 & = -0,28, \\
f'''\;(0,1) = & 2,4 - 24 & = -21,6, \\
f''''(0,1) = & 24 & = 24,
\end{array}$$

és mármost:

$$\begin{array}{llllll}
(0) & + & - & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
(0,1) & + & - & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(<1) & + & - & - & - & - .
\end{array}$$

Ha mármost könnyebb áttekintés végett a' következeteket összveírjuk, lesz:

(0)	+	—	+	—	+	
	0	0	1	2	2	két képz. gyökér.
(0,1)	+	—	—	—	+	
	0	0	0	0	1	egy való gyökér.
(<1)	+	—	—	—	—	
	0	1	0	0	0	nincs gyökér.
(>1)	+	+	—	—	—	
	0	0	1	1	1	egy való gyökér.
(10)	+	+	+	+	+	

Keressük itt azon való gyökeret, melly az

$$1 - 0{,}1 = 0{,}9 = b - a$$

közben van. Minthogy itt a' jegysorok' vége:

$$(0{,}1)\ \ldots\ - \ - \ +$$
$$(<1)\ \ldots\ - \ - \ - \ ,$$

a' felső határral $= 1$ fogunk élni, következőleg ezen alkattal:

$$b' = b - \frac{f\,b}{f'b}$$

$$= 1 - \frac{f\,(1)}{f'\,(1)}$$

$$= 1 - \frac{2}{7}\ .$$

Itt a'

$$b - a = k$$

köz 1-nél kisebb és $\frac{1}{10}$-nél nagyobb levén a' felebbiek' értelmében lesz:

$$k < \left(\frac{1}{10}\right)^{0},$$

tehát $n = 0$; továbbá $f''x'$ legnagyobb és $f'x'$ legkisebb értéke itt illetőleg:

$$10 \text{ és } 0,916,$$

következőleg:

$$\frac{10}{2.0,916} = \frac{A''}{2A'} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1},$$

tehát $e = -1$. E' szerint:

$$n + e$$

még nem $\overset{=}{>}$ 1, minél fogva a' hányas $\frac{2}{7}$ kifejtésében az első egyszerű tizedes tört jegynél tovább menni nem kell. Legyen tehát:

$$\frac{2}{7} = 0,3;$$

következőleg:

$$b' = 1 - 0,3,$$
$$= 0,7.$$

Egyszerü és könnyü kiszámítás által találtatik:

$$f(0,7) = 0,0781; \; f'(0,7) = -4,108;$$
$$f''(0,7) = -8,92.$$

Minthogy itt:

$$f''(0,7) < 0,$$
$$f'(0,7) < 0,$$
$$f(0,7) > 0;$$

azaz:

$$(0,7) \; . \; . \; - \; - \; +,$$

kitetszik hogy a' gyökér

$$1 - \frac{2}{7} \text{ és } 0,7$$

között van, azaz ha a' második tizedes tört jegyig megyünk

$$0{,}72 \text{ és } 0{,}70$$

között. Részint már találtatott, részint pedig könnyen találtathatik, hogy:

$$f(0{,}7)=0{,}0781;\ f'(0{,}7)=-4{,}108;\ f''(0{,}7)=-8{,}92$$
$$f'''(0{,}7)=-7{,}2;\ f''''(0{,}7)=24.$$

Hogy ezen értékekről a' következőkre mehessünk által t. i. ezekre

$$f(0{,}72),\ f'(0{,}72),\ f''(0{,}72)\ \ldots$$

legyen a' kifejtésekben

$$f(c+\gamma)=fc+\gamma f'c+\frac{\gamma^2}{1\,.\,2}f''c+\ldots$$
$$\gamma=0{,}02.$$

Már most:

$$\begin{array}{r l}
f'(0{,}7)= & -4{,}108 \\
 & 0{,}02 \\ \hline
 & -0{,}08216=0{,}02f'(0{,}7)
\end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
f''(0{,}7)= & -8{,}92 \\
 & 0{,}02 \\ \hline
 & -0{,}1784=0{,}02\ f''(0{,}7) \\
 & 0{,}02 \\ \hline
 & -0{,}003568 \\ \hline
 & -0{,}001784=\dfrac{0{,}02^2}{2}f''(0{,}7)
\end{array}$$

$$f'''(0,7) = -7,2$$

$$0,02$$

$$-0,144 = 0,02\, f'''(0,7)$$

$$0,02$$

$$-0,00288$$

$$-0,00144 = \frac{0,02^2}{2} f'''(0,7)$$

$$0,02$$

$$-0,0000288$$

$$-0,0000096 = \frac{0,02^3}{2.3} f'''(0,7)$$

$$f''''(0,7) = 24$$

$$0,02$$

$$0,48 = 0,02\, f''''(0,7)$$

$$0,02$$

$$0,0096$$

$$0,0048 = \frac{0,02^2}{2} f''''(0,7)$$

$$0,02$$

$$0,000096$$

$$0,000032 = \frac{0,02^3}{2.3} f''''(0,7)$$

$$0,000032$$

$$0,02$$

$$0,00000064$$

$$0,00000016 = \frac{0,02^4}{2.3.4} f''''(0,7)$$

Minthogy pedig:

$$f(0,7+0,02)=f(0,7)+0,02f'(0,7)+\frac{0,02^2}{2}f''(0,7)$$

$$+\frac{0,02^3}{2.3}f'''(0,7+\frac{0,02^4}{2.3.4}f''''(0,7),$$

$$f'(0,7+0,02)=f'(0,7)+0,02f''(0,7)+\frac{0,02^2}{2}f'''(0,7)$$

$$+\frac{0,02^3}{2.3}f''''(0,7),$$

$$f''(0,7+0,02)=f''(0,7)+0,02f'''(0,7)+\frac{0,02^2}{2}f''''(0,7),$$

. . . .

lesz:

$$\begin{array}{rl} f(0,7) = & 0,0781 \\ & +0,00000016 \\ \hline & +0,07810016 \\ & -0,08216 \\ & -0,001784 \\ & -0,0000096 \\ \hline & +0,07810016 \\ & -0,0839536 \\ \hline & -0,00585344=f(0,72) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f'(0,7) = & -4,108 \\ & -0,1784 \\ & -0,00144 \\ \hline & -4,28784 \\ & +0,000032 \\ \hline & -4,287808=f'(0,72) \end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
f''(0,7) = & -8,92 \\
& -0,144 \\
\hline
& -9,064 \\
& +0,0048 \\
\hline
& -9,0592 = f''(0,72)
\end{array}
$$

A' következmények itt tehát a' következők:

$$f(0,7)=0,0781, \; f'(0,7)=-4,108,$$
$$f''(0,7)=-8,92;$$

$$f(0,72)=-0,00585344,$$
$$f'(0,72)=-4,287808,$$
$$f''(0,72)=-9,0592;$$

tehát:

$$
\begin{array}{lccc}
(0,7) \; . \; . & - & - & + \\
(0,72) \; . \; . & - & - & - \; .
\end{array}
$$

A' köz itt:

$$0,72-0,7=0,02=6-a$$

tehát:

$$k < \frac{1}{10};$$

továbbá $f''x'$ legnagyobbik és $f'x'$ legkisebbik értékei ezek:

$$9,0592 \text{ és } 4,108,$$

azaz:

$$\frac{A''}{2A'} = \frac{9,06}{2.4,11} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

következőleg

$$n+e=0,$$

minél fogva az új kiszámításban százados tört jegyeknél tovább nem mehetünk.

$$b' = b - \frac{fb}{f'b}$$

$$= 0{,}72 - \frac{0{,}00585344}{4{,}287808}$$

$$= 0{,}71$$

könyebbség okáért: Ezt előre bocsátva levettük a'

$$f(0{,}71),\ f'(0{,}71),\ f''(0{,}71)\ \ldots$$

függvényeket, lesz minthogy:

$$f\ (0{,}7) = 0{,}0781\ ,\ f'\ (0{,}7) = -4{,}108,$$
$$f''(0{,}7) = -8{,}92,\ f'''(0{,}7) = -7{,}2$$
$$f''''\ (0{,}7) = 24,$$

tehát:

$$\gamma = 0{,}01$$

$$\begin{array}{r} f'\ (0{,}7) = -4{,}108 \\ 0{,}01 \\ \hline -0{,}04107 = 0{,}01\, f'\ (0{,}7), \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f''(0{,}7) = -8{,}92 \\ 0{,}01 \\ \hline -0{,}0892 = 0{,}01\ f''\ (0{,}7) \\ 0{,}01 \\ \hline -0{,}000892 \\ \hline -0{,}000446 = \dfrac{0{,}01^2}{2}\ f''(0{,}7) \end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
f'''(0,7) = -7,2 & \\
0,01 & \\
\hline
-0,072 & = 0,01\, f'''(0,7) \\
0,01 & \\
\hline
-0,00072 & \\
\hline
-0,00036 & = \dfrac{0,01^2}{2} f'''(0,7) \\
0,01 & \\
\hline
-0,0000036 & \\
\hline
-0,0000012 & = \dfrac{0,01^3}{2.3} f'''(0,7)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f''''(0,7) = 24 & \\
0,01 & \\
\hline
0,24 & = 0,01\, f''''(0,7) \\
0,01 & \\
\hline
0,0024 & \\
\hline
0,0012 & = \dfrac{0,01^2}{2} f''''(0,7) \\
0,01 & \\
\hline
0,000012 & \\
\hline
0,000004 & = \dfrac{0,01^3}{2.3} f''''(0,7) \\
0,01 & \\
\hline
0,00000004 & \\
\hline
0,00000001 & = \dfrac{0,01^4}{2.3.4} f''''(0,7)
\end{array}
$$

'S a' következő alkatok szerint:

$$f(0,7+0,01)=f(0,7)+0,01f'(0,7)+\frac{0,01^2}{2}f''(0,7)$$
$$+\frac{0,01^3}{2.3}f'''(0,7)+\frac{0,01^4}{2.3.4}f''''(0,7)$$

$$f'(0,7+0,01)=f'(0,7)+0,01f''(0,7)+\frac{0,01^2}{2}f'''(0,7)$$
$$+\frac{0,01^3}{2.3}f''''(0,7),$$

$$f''(0,7+0,01)=f''(0,7)+0,01f'''(0,7)+\frac{0,01^2}{2}f''''(0,7),$$

. . . .

$$
\begin{array}{rl}
f(0,7)= & 0,0781 \\
 & 0,00000001 \\
\hline
 & 0,07810001 \\
- & 0,04108 \\
- & 0,000446 \\
- & 0,0000012 \\
\hline
 & 0,07810001 \\
- & 00415272 \\
\hline
+ & 0,03657281 = f(0,71)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f'(0,7)= & -\ 4,108 \\
 & -\ 0,0892 \\
 & -\ 0,00036 \\
\hline
 & -\ 4,19756 \\
 & +\ 0,000004 \\
\hline
 & -\ 4,197556 = f'(0,71)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f''(0,7) = & -\ 8,92 \\
 & -\ 0,072 \\
\hline
 & -\ 8,992 \\
 & +\ 0,0012 \\
\hline
 & -\ 8,9908 = f''(0,71)
\end{array}
$$

. . . . . .

Az új következmények tehát ezek:

$$
\begin{aligned}
f\,(0,71) &= 0,03657281\,, \\
f'\,(0,71) &= -4,197556\,, \\
f''(0,71) &= -8,9908\,;
\end{aligned}
$$

fölebb pedig találtatott:

$$
\begin{aligned}
f\,(0,72) &= -0,00585344\,, \\
f'\,(0,72) &= -4,287808\,, \\
f''(0,72) &= -9,0502\,;
\end{aligned}
$$

tehát:

$$
\begin{array}{lccc}
(0,71)\ .\ . & - & - & + \\
(0,72)\ .\ . & - & - & -
\end{array}
$$

A' köz itt:

$$k = \left(\frac{1}{10}\right)^2;$$

továbbá $f''x$' legnagyobb és $f'x$ legkisebb értékei illetőleg:

$$9,059 \text{ és } 4,1976\,;$$

következőleg:

$$\frac{A''}{2A'} = \frac{9,06}{2.4.2} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1},$$

tehát az új köz:

$$k' < k \cdot \frac{A''}{2A}$$

$$< \frac{1}{10},$$

hol azonban az előbbi számolásokból tudjuk, hogy a' köz épen $=0{,}01$ levén az új köznek $<0{,}01$ kell lennie.

Keressünk közelebbi felső határt, lesz az:

$$= 0{,}72 - \frac{f(0{,}72)}{f'(0{,}72)}$$

$$= 0{,}72 - \frac{0{,}00585344}{4{,}287808}$$

különösen a' harmadik tizedes törtig, lesz:

$$0{,}72 - \frac{0{,}00585344}{4{,}287808} = 0{,}719.$$

Keressük mármost:

$$0{,}719$$

függvényeit a' tudottakból:

$$f(0{,}72) = -\ 0{,}00585344,$$
$$f'(0{,}72) = -\ 4{,}287808,$$
$$f''(0{,}72) = -\ 9{,}0592,$$

mellyekhez hozzá kell adni még a' következőket:

$$f'''(0{,}7 + 0{,}02) = f'''(0{,}7) + 0{,}002\, f''''(0{,}7)$$

$$f'''(0{,}7) = -\ 7{,}2$$
$$\underline{\quad 0{,}48}$$
$$-6{,}72,$$

$$f'''(0{,}72) = -6{,}72,$$
$$f''''(0{,}72) = 24.$$

Itt először:

$$f'(0,72) = -4,287808$$
$$-0,001$$

$$+0,004287808 = -0,001\, f'(0,72)$$

$$f''(0,72) = -9,0592$$
$$-0,001$$

$$+0,0090592 = -0,001\, f''(0,72)$$
$$-0,001$$

$$-0.0000090592$$

$$-0,0000045296 = +\frac{0,001^2}{2} f''(0,72)$$

$$f'''(0,72) = -6,72$$
$$-0,001$$

$$+0,00672 = -0,001\, f'''(0,72)$$
$$-0,001$$

$$-0,00000672$$

$$-0,00000336 = +\frac{0,001^2}{2} f'''(0,72)$$
$$-0,001$$

$$+0,00000000336$$

$$+0,00000000112 = -\frac{0,001^3}{2.3} f'''(0,72)$$

$$f''''\;(0{,}72) = 24$$
$$\underline{-0{,}001}$$
$$-0{,}024 = -0{,}001\, f''''(0{,}72)$$
$$\underline{-0{,}001}$$
$$\underline{+0{,}000024}$$
$$+0{,}000012 = +\frac{0{,}001^2}{2} f''''(0{,}72)$$
$$\underline{-0{,}001}$$
$$\underline{-0{,}000000012}$$
$$-0{,}000000004 = -\frac{0{,}001^3}{2.3} f''''(0{,}72)$$
$$\underline{-0{,}001}$$
$$\underline{+0{,}000000000004}$$
$$+0{,}000000000001 = +\frac{0{,}001^4}{2.3.4} f''''(0{,}72)$$

E' szerint tehát:

$$f(0{,}72) = -0{,}00585344$$
$$\underline{-0{,}0000045296}$$
$$-0{,}0058579696$$
$$+0{,}004287808$$
$$+0{,}00000000112$$
$$\underline{+0{,}000000000001}$$
$$-0{,}001570160479$$

$$f'(0{,}72) = -4{,}287808$$
$$-0{,}00000336$$
$$\underline{-0{,}000000004}$$
$$-4{,}287811364$$
$$\underline{+0{,}0090592}$$
$$-4{,}278752164$$

$$f''(0,72) = -9,0592$$
$$+0,00672$$
$$+0,000012$$
$$\overline{-9,052468}\;.$$

$$f'''(0,72) = -6,72$$
$$-0,024$$
$$\overline{-6,744}$$

következőleg:

$$f\;(0,719) = -0,001570160479,$$
$$f'\;(0,719) = -4,278752164,$$
$$f''\;(0,719) = -9,052468,$$
$$f'''\;(0,719) = -6,744,$$
$$f''''(0,719) = 24$$

azaz:

$$(0,719)\;.\;.\;-\;-\;-\;,$$

miből látni hogy ez még felső határ, hogy egy alsót nyerjünk, legyen

$$x = 0,718;$$

lesz tehát:

$$f'\;(0,72) = -4,287808$$
$$-0,002$$
$$\overline{+0,008575616} = -0,002 f'\;(072)$$

$$f''(0,72) = -9,0592$$
$$-0,002$$
$$\overline{+0,0181184} = -0,002 f''\;(0,72)$$
$$-0,002$$
$$\overline{-0,0000362368}$$
$$\overline{-0,0000181184} = +\frac{0,002^2}{2} f''\;(0,72)$$

$$f'''(0{,}72) = -6{,}72$$
$$-0{,}002$$
$$+0{,}01344 = -0{,}001 f'''(0{,}72)$$
$$-0{,}002$$
$$-0{,}00002688$$
$$-0{,}00001344 = +\frac{0{,}001^2}{2} f'''(0{,}72)$$
$$-0{,}002$$
$$+0{,}0000002688$$
$$+0{,}00000000896 = -\frac{0{,}001^3}{2.2} f'''(0{,}72)$$

$$f''''(0{,}72) = 24$$
$$-0{,}002$$
$$-0{,}048 = -0{,}001 f''''(0{,}72)$$
$$-0{,}002$$
$$+0{,}000096$$
$$+0{,}000048 = +\frac{0{,}001^2}{2} f''''(0{,}72)$$
$$-0{,}002$$
$$-0{,}000000096$$
$$-0{,}000000032 = -\frac{0{,}001^3}{2.3} f''''(0{,}72)$$
$$-0{,}002$$
$$+0{,}000000000064$$
$$+0{,}000000000016 = +\frac{0{,}001^4}{2.3.4} f''''(0{,}72)$$

tehát:

$$
\begin{array}{rl}
f(0{,}72)= & -0{,}00585344 \\
 & -0{,}0000281184 \\
\hline
 & -0{,}0058715584 \\
 & +0{,}008575616 \\
 & +0{,}00000000896 \\
 & +0{,}000000000016 \\
\hline
 & +0.002704066576
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f'(0{,}72)= & -4{,}287808 \\
 & -0{,}00001344 \\
 & -0{,}000000032 \\
 & +0{,}0181184 \\
\hline
 & -4{,}268703072
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f''(0{,}72)= & -9{,}0592 \\
 & +0{,}01344 \\
 & +0.000048 \\
\hline
 & -9{,}045712\,;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f'''(0{,}72)= & -6{,}72 \\
 & -0{,}048 \\
\hline
 & -6{,}768
\end{array}
$$

következőleg:

$$
\begin{aligned}
f\ (0{,}718) &= +0{,}002704066576\,, \\
f'\ (0{,}718) &= -4{,}269703072\,, \\
f''\ (0{,}718) &= -9{,}045712\,, \\
f'''\ (0{,}718) &= -6.768\,, \\
f''''(0{,}718) &= 24.
\end{aligned}
$$

A' jegysor tehát ez:

$$(0,718)\;.\;.\;-\;-\;+,$$

minthogy pedig fölebb találtatott:

$$(0,719)\;.\;.\;-\;-\;-$$

világos, hogy a' gyökér

$$0,718 \text{ és } 0,719$$

között fekszik.

Minekelőtte új közeledést próbálnánk, meg kell vizsgálnunk, meddig kelljen mennünk az eredendő hányas kifejtésében. Itt szemlátomást a' köz

$$0,719 - 0,718$$

azaz:

$$k = \left(\frac{1}{10}\right)^3,$$

továbbá $f''x$' legnagyobb és $f'x$' legkisebb értéke

$$9,05 \;.\;.\; \text{és } 4,28$$

következőleg:

$$\frac{A''}{2A'} = \frac{9,05}{2.4,28} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1},$$

tehát:

$$n + e = 3 - 1 = 2$$

és:

$$2n + e = 6 - 1 = 5,$$

minek következésében az új hányas' kifejtésében az ötödik tört jegyig mehetünk. Lesz tehát:

$$0,719 - \frac{0,001570160479}{4,278752164}$$

$$0,719 - 0,00036$$

azaz:

$$a = 0,71864.$$

Ezen értéke a' gyökérnek még az ötödik tizesben helyes levén, a' szokott módon a'

$$f(0{,}71864)\ ,$$
$$f'(0{,}71864)\ ,$$
$$f''(0{,}71864)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

függvényeket kell leszármaztatni, és valamint

$$f(0{,}71864)$$

állító vagy tagadó, úgy x-et itt egy százezereddel kisebbíteni, vagy megtoldani, azután pedig a'

$$f\ (0{,}71864 \pm 0{,}00001)\ ,$$
$$f'\ (0{,}71864 \pm 0{,}00001),$$
$$f''(0{,}71864 \pm 0{,}00001)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

függvényeket hozni le. Világos, hogy itt az új köz

$$= \left(\frac{1}{10}\right)^5,$$

továbbá:

$$\frac{A''}{2A'} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

leend, minek következésében, minthogy

$$n = 5$$
$$e = -1\ ,$$

tehát:

$$n + e = 5 - 1 = 4$$

és

$$2n + e = 10 - 1 = 9\ ,$$

a' hányas' kifejtésében 9 tizedes helynek kell hibátalannak lenni. A' folytatott munkálat' következményei illetőleg:

$$4n + 3e = 20 - 3 = 17,$$
$$8n + 7e = 40 - 7 = 33,$$
$$16n + 15e = 80 - 15 = 65,$$
$$32n + 31e = 160 - 31 = 129$$

. . . .

tizedesekre nézve helyesek.

19. §.

Az adott egyenlet' második gyökere 1 és 10 között van. Az illető jegy- és mutatósorok ezek:

$$\begin{array}{llllll} (>1) & + & + & - & - & - \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ (10) & + & + & + & + & + . \end{array}$$

Itt mindenek előtt $f''x$' gyökere által a' közt ketté kell szakasztanunk kedvezőbb mutatósorok' nyerése végett. A'

$$f^{IV}x, f'''x, f''x$$

függvényekre nézve a' jegy- és mutatósorok ezek:

$$\begin{array}{llll} (>1) & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 \\ (10) & + & + & + , \end{array}$$

tehát a' közelebbi felső határ:

$$= 10 - \frac{f''(10)}{f'''(10)}$$

$$= 10 - \frac{962}{216}$$

$$= 5$$

körülbelül; a' közelebbi alsó határ pedig:

$$= 1 - \frac{f''(1)}{f'''(10)}$$

$$= 1 + \frac{10}{216}$$

$$= 1,1$$

körülbelül. Mindezekből látni, hogy a' keresett gyökér 1-hez sokkal közelebb áll, mint 10-hez, és 5-höz is. Legyen e' végre:

$$x = 2,$$
$$x^2 = 4,$$
$$x^3 = 8,$$
$$x^4 = 16;$$

lesz:

$$f\ (2) = 16 - 4.8 + 4 - 2 + 1 = -13,$$
$$f'\ (2) = 4.8 - 12.4 + 2.2 - 1 = +11,$$
$$f''\ (2) = 12.4 - 24.2 + 2 = +\ 2,$$
$$f'''\ (2) = 24.2 - 24 = +24,$$
$$f^{IV}(2) = 24 = +24$$

Már most a' jegy- és mutatósorok ezek:

(>1)	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
	0	0	1	1	0
(2)	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
	0	0	0	0	1
(10)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$,

's ezen egyszerű munkálatok által egyszerre nyertünk kedvező sorokat. A' köz itt még

$$10 - 2 = 8 = k < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

tehát $n = -1$; az $f''x$-ek' legnagyobbika és $f'x$-ek' legkisebbike illetőleg

962 és 11,

következőleg

$$\frac{A''}{2A'} = \frac{962}{2.11} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$$

azaz $e = -2$, tehát a' közeledés' megitéléséről még szó nem lehet, miért a' közt még tovább kell eldarabolnunk. Keressünk azonban közelebbi felső és alsó határokat, lesz először, mint fölebb:

$$\begin{aligned} b' &= 10 - \frac{f\ (10)}{f'(10)} \\ &= 10 - \frac{6091}{2819} \\ &= 8 \end{aligned}$$

körülbelül; másodszor;

$$\begin{aligned} a' &= 2 - \frac{f(2)}{f'(10)} \\ &= 2 + \frac{13}{2819} \\ &= 2 \end{aligned}$$

körülbelül, 's világos hogy az alsó határ sokkal közelebb a' gyökérhez mint a' felső. Legyen tehát

$$\begin{aligned} x &= 3, \\ x^2 &= 9, \\ x^3 &= 27, \\ x^4 &= 81; \end{aligned}$$

lesz:

$$\begin{aligned} f\ (3) &= 81 - 4.27 + 9 - 3 + 1 &&= -20, \\ f'\ (3) &= 4.27 - 12.\ 9 + 2.3 - 1 &&= +\ 5, \\ f''\ (3) &= 12.9 - 24.3 + 2 &&= +38, \\ f'''(3) &= 24.3 - 24 &&= +48, \\ f^{IV}(3) &= 24 &&= +24; \end{aligned}$$

Legyen tovább:

$$x = 4,$$
$$x^2 = 16,$$
$$x^3 = 64,$$
$$x^4 = 256;$$

lesz:

$$f\ (4) = 256 - 4.64 + 16 - 4 + 1 = +13,$$
$$f'\ (4) = 4.64 - 12.16 + 2.4 - 1 = +71,$$
$$f''\ (4) = 12.16 - 24.4 + 2 = +98,$$
$$f'''\ (4) = 24.4 - 24 = +72,$$
$$f^{\text{IV}}(4) = 24 = +24.$$

A' sorok már most ezek:

$$\begin{array}{cccccc} (3) & + & + & + & + & - \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (4) & + & + & + & + & + \end{array},$$

a' köz pedig:

$$k = \left(\frac{1}{10}\right)^0,$$

tehát $n = 0$; $f''x$' legnagyobb 's $f'x$' legkisebb értékei pedig ezek:

98 és 5,

tehát:

$$\frac{A''}{2A'} = \frac{98}{2.5} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1},$$

azaz $e = -1$, tehát még nem

$$n + e \overset{=}{>} 1.$$

Keressünk még közelebbi határokat, lesz a' felső:

$$= 4 - \frac{f(4)}{f'(4)}$$

$$= 4 - \frac{13}{71};$$

az alsó:

$$= 3 - \frac{f(3)}{f'(4)}$$

$$= 3 + \frac{20}{71}.$$

Ezekből kitetszik, hogy α körülbelül 3,6 leend. Fölebb találtuk, hogy:

$$f(3) = -20, \qquad f'(3) = 5.$$
$$f''(3) = 38, \qquad f'''(3) = 48$$
$$f^{IV}(3) = 24.$$

Tehát lesz:

$$\begin{array}{r} f'(3) = 5 \\ 0,6 \\ \hline 3 = 0,6\, f'(3). \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f''(3) = 38 \\ 0,6 \\ \hline 22,8 = 0,6 f''(3); \\ 0,6 \\ \hline 13,68 \\ \hline 6,84 = \frac{0,6^2}{2} f''(3). \end{array}$$

$$f'''(3) = 48$$
$$0,6$$
$$28,8 = 0,6\, f'''(3);$$
$$0,6$$
$$17,28$$
$$8,64 = \frac{0,6^2}{2} f'''(3);$$
$$0,6$$
$$5,184$$
$$1,728 = \frac{0,6^3}{2.3} f'''(3).$$

$$f^{\text{IV}}(3) = 24$$
$$0,6$$
$$14,4 = 0,6\, f^{\text{IV}}(3),$$
$$0,6$$
$$8,64$$
$$4,32 = \frac{0,6^2}{2} f^{\text{IV}}(3),$$
$$0,6$$
$$2,592$$
$$0,364 = \frac{0,6^3}{2.3} f^{\text{IV}}(3),$$
$$0,6$$
$$0,2184$$
$$0,0546 = \frac{0,6^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(3).$$

$$f(3) = -20 + 3 + 6{,}84 + 1{,}728 + 0{,}0646 = -9{,}3774$$

$$f'(3) = +5 + 22{,}8 + 8{,}64 + 0{,}364 = +37{,}804$$

$$f''(3) = +38 + 28{,}8 + 4{,}32 = +71{,}12$$

$$f'''(3) = +48 + 14{,}4 = +62{,}4$$

a' következmények tehát ezek:

$$f(3{,}6) = -9{,}3774, \quad f'(3{,}6) = 37{,}804,$$
$$f''(3{,}6) = +71{,}12, \quad f'''(3{,}6) = 62{,}4$$
$$f^{\text{IV}}(3{,}6) = 24.$$

Itt a' mutatósor:

$$(3{,}6) \; + \; + \; + \; + \; -$$

lévén, keressük még a' következő függvényeket:

$$f(3{,}7), \quad f'(3{,}7), \quad f''(3{,}7) \;.\;.$$

$$f'(3) = 5$$
$$0{,}7$$
$$3{,}5 = 0{,}7\, f'(3).$$

$$f''(3) = 38$$
$$0{,}7$$
$$26{,}6 = 0{,}7\, f'(3),$$
$$0{,}7$$
$$28{,}62$$

$$9{,}31 = \frac{0{,}7^2}{2} f''(3).$$

$$
\begin{array}{rl}
f'''(3) = & 48 \\
 & 0{,}7 \\
\hline
 & 33{,}6 = 0{,}7\, f'''(3), \\
 & 0{,}7 \\
\hline
 & 23{,}52 \\
\hline
 & 11{,}76 = \dfrac{0{,}7^2}{2} f'''(3), \\
 & 0{,}7 \\
\hline
 & 8{,}232 \\
\hline
 & 2{,}744 = \dfrac{0{,}7^3}{2.3} f'''(3).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f^{\mathrm{IV}}(3) = & 24 \\
 & 0{,}7 \\
\hline
 & 16{,}8 = 0{,}7\, f^{\mathrm{IV}}(3), \\
 & 0{,}7 \\
\hline
 & 11{,}76 \\
\hline
 & 5{,}88 = \dfrac{0{,}7^2}{2} f^{\mathrm{IV}}(3), \\
 & 0{,}7 \\
\hline
 & 4{,}116 \\
\hline
 & 1{,}372 = \dfrac{0{,}7^3}{2.3} f^{\mathrm{IV}}(3), \\
 & 0{,}7 \\
\hline
 & 0{,}9604 \\
\hline
 & 0{,}2401 = \dfrac{0{,}7^4}{2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(3).
\end{array}
$$

$$f(3) = -20 \quad +3{,}5 \quad +9{,}31 \quad +2{,}744 \quad +0{,}2401 \quad \overline{+4{,}1259}$$

$$f'(3) = +5 \quad +26{,}6 \quad +11{,}76 \quad +1{,}372 \quad \overline{+44{,}732}$$

$$f''(3) = +38 \quad +33{,}6 \quad +5{,}88 \quad \overline{+77{,}48}$$

$$f'''(3) = +48 \quad +16.8 \quad \overline{+64{,}8.}$$

A' függvények tehát:

$f(3{,}7) = -4{,}1259$, $\quad f(3{,}7) = 44{,}732$

$f''(3{,}7) = 77{,}48$, $\quad f'''(3{,}7) = 64{,}8$

$$f^{IV}(3{,}7) = 24.$$

A' mutatósor még mindig:

$$(3{,}7) \; + \; + \; + \; + \; - \, .$$

Származtassuk le tehát a' következőket:

$$f(3{,}8), \quad f'(3{,}8), \quad f''(3{,}8) \; . \; . \; .$$

lesz:

$$f'(3) = 5$$
$$\underline{\quad 0{,}8}$$
$$4 = 0{,}8 \, f'(3).$$

$$f''(3) = 38$$
$$\underline{\quad 0{,}8}$$
$$30{,}4 = 0{,}8 \, f''(3),$$
$$\underline{\quad 0{,}8}$$
$$\underline{24{,}32}$$
$$12{,}16 = \frac{0{,}8^2}{2} f''(3).$$

$$f'''(3) = 48$$

$$0{,}8$$

$$38{,}4 = 0{,}8\, f'''(3),$$

$$08$$

$$30{,}72$$

$$15{,}36 = \frac{0{,}8^2}{2} f'''(3),$$

$$0{,}8$$

$$12{,}288$$

$$4{,}096 = \frac{0{,}8^3}{2.3} f'''(3).$$

$$f^{\mathrm{IV}}(3) = 24$$

$$0{,}8$$

$$19{,}2 = 0{,}8\, f^{\mathrm{IV}}(3),$$

$$0{,}8$$

$$15{,}36$$

$$7{,}68 = \frac{0{,}8^2}{2} f^{\mathrm{IV}}(3),$$

$$0{,}8$$

$$6{,}144$$

$$2{,}048 = \frac{0{,}8^3}{2.3} f^{\mathrm{IV}}(3),$$

$$0{,}8$$

$$1{,}6384$$

$$0{,}4096 = \frac{0{,}8^4}{2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(3).$$

$$f(3) = -20 \quad +4 \quad +12{,}16 \quad +4{,}096 \quad +0{,}4096 \quad \overline{+0{,}6656}$$

$$f'(3) = +5 \quad +30{,}4 \quad +15{,}36 \quad +2{,}048 \quad \overline{+52{,}808}$$

$$f''(3) = +38 \quad +38{,}4 \quad +7{,}68 \quad \overline{+84{,}08}$$

$$f'''(3) = +48 \quad +19{,}2 \quad \overline{+67{,}2}$$

A' keresett függvények tehát:

$$f(3{,}8) = +\;0{,}6656, \qquad f'(3{,}8) = +52{,}808,$$
$$f''(3{,}8) = +84{,}08, \qquad f'''(3{,}8) = +67{,}2$$
$$f^{IV}(3{,}8) = 24.$$

Összeállítva már most:

$$\begin{array}{lccccc} (3{,}7) & + & + & + & + & - \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (3{,}8) & + & + & + & + & + . \end{array}$$

Itt a' köz

$$k = \left(\frac{1}{10}\right)^1,$$

$f''x$ legnagyobb és $f'x$ legkisebb értéke:

$$84{,}08 \quad \text{és} \quad 44{,}732,$$

tehát:

$$\frac{A'}{2A} = \frac{84{,}08}{2{,}44{,}732} < \left(\frac{1}{10}\right)^0$$

tehát:

$$n + e = 1,$$

minél fogva a' hányas' kifejtésében

$$2n + e = 2$$

tizedes jegy lesz pontos. Ezt szem előtt tartván, lesz a' keresett gyökér:

$$= 3,8 - \frac{f(3,8)}{f'(3,8)}$$

$$= 3,8 - \frac{0,6656}{52,808}$$

$$= 3,79.$$

Keressük már most a'

$$f(3,79),\ f'(3,79),\ f''(3,79) \ldots$$

függvényeket, mi után ezek

$$f(3,8),\ f'(3,8),\ f'(3,8) \ldots$$

tudvák, lesz:

$$\begin{array}{r l} f'(3,8) = + 52,808 & \\ -0,01 & \\ \hline -0,52808 & = -0,01\, f'(3,8). \end{array}$$

$$\begin{array}{r l} f''(3,8) = + 84,08 & \\ -0,01 & \\ \hline -0,8408 & = -0,01\, f''(3,8), \\ -0,01 & \\ \hline +0,008408 & \\ \hline +0,004204 & = + \dfrac{0,01^2}{2} f''(3,8), \end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
f'''(3{,}8) = & +67{,}2 \\
& -0{,}01 \\
\hline
& -0{,}672 = -0{,}01 f'''(3{,}8), \\
& -0{,}01 \\
\hline
& +0{,}00672 \\
\hline
& +0{,}00336 = +\dfrac{0{,}01^2}{2} f'''(3{,}8), \\
& -0.01 \\
\hline
& -0{,}0000336 \\
\hline
& -0{,}0000112 = -\dfrac{0{,}01^3}{2.3} f'''(3{,}8)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
f^{IV}(3{,}8) = & +24 \\
& -0{,}01 \\
\hline
& -0{,}24 = -0{,}01 f^{IV}(3{,}8), \\
& -0{,}01 \\
\hline
& +0{,}0024 \\
\hline
& +0{,}0012 = +\dfrac{0{,}01^2}{2} f^{IV}(3{,}8), \\
& -0{,}01 \\
\hline
& -0{,}000012 \\
\hline
& -0{,}000004 = -\dfrac{0{,}01^3}{2.3} f^{IV}(3{,}8), \\
& -0{,}01 \\
\hline
& +0{,}00000004 \\
\hline
& +0{,}00000001 = +\dfrac{0{,}01^4}{2.3.4} f^{IV}(3{,}8).
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
f(3,8) &= +0,6656 \\
&\quad +0,004204 \\
&\quad +0,00000001 \\
\hline
&\quad +0,66980401 \\
&\quad -0,52808 \\
&\quad -0,0000112 \\
\hline
&\quad +0,14171281.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(3,8) &= +52,808 \\
&\quad +\ \ 0,00336 \\
\hline
&\quad +52,81136 \\
&\quad -\ \ 0,8408 \\
&\quad -\ \ 0,000004 \\
\hline
&\quad +51,970556
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(3,8) &= +84,08 \\
&\quad +\ \ 0,0012 \\
\hline
&\quad +84,0812 \\
&\quad -\ \ 0,672 \\
\hline
&\quad +83,4092
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'''(3,8) &= +67,2 \\
&\quad -\ \ 0,24 \\
\hline
&\quad +66,96
\end{aligned}
$$

Tehát:

$$
\begin{aligned}
f\ (3,79) &= +\ 0,14171281\,, \\
f'\ (3,79) &= +51,970556\,, \\
f''\ (3,79) &= +83,4092\,, \\
f'''\ (3,79) &= +66,96\,, \\
f^{\mathrm{IV}}(3,79) &= +24.
\end{aligned}
$$

A' jegysor tehát:

$$(3{,}79)\ +\ +\ +\ +\ +$$

levén, keressük továbbá a'

$$f(3{,}78),\ f'(3{,}78),\ f''(3{,}78)\ \ldots$$

függvényeket, lesz:

$$
\begin{array}{rl}
f(3{,}8) = +52{,}808 & \\
-0{,}02 & \\
\hline
-1{,}05616 & = -0{,}02\, f'(3{,}8),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f'(3{,}8) = +84{,}08 & \\
-0{,}02 & \\
\hline
-1{,}6816 & = -0{,}02\, f''(3{,}8), \\
-0{,}02 & \\
\hline
+0{,}033632 & \\
\hline
+0{,}016816 & = +\dfrac{0{,}02^2}{2} f''(3{,}8).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f''(3{,}8) = +67{,}2 & \\
-0{,}02 & \\
\hline
-1{,}344 & = -0{,}02\, f'''(3{,}8), \\
-0{,}02 & \\
\hline
+0{,}02688 & \\
\hline
+0{,}01344 & = +\dfrac{0{,}02^2}{2} f'''(3{,}8), \\
-0{,}02 & \\
\hline
-0{,}0002688 & \\
\hline
-0{,}0000896 & = -\dfrac{0{,}02^3}{2.3} f'''(3{,}8).
\end{array}
$$

$$f''''(3,8) = +24$$
$$-0,02$$
$$\overline{-0,48} = -0,02\, f''''(3,8),$$
$$-0,02$$
$$\overline{+0,0096}$$
$$\overline{+0,0048} = +\frac{0,02^2}{2} f^{\text{iv}}(3,8),$$
$$-0,02$$
$$\overline{-0,000096}$$
$$\overline{-0,000032} = -\frac{0,02^3}{2.3} f''''(3,8),$$
$$-0,02$$
$$\overline{+0,00000064}$$
$$\overline{+0,00000016} = +\frac{0,02^4}{2.3.4} f''''(3,8).$$

$$f(3,8) = +0,6656$$
$$+0,016816$$
$$+0,00000016$$
$$\overline{+0,68241616}$$
$$-1,05616$$
$$-0,0000896$$
$$\overline{-1,0562496}$$
$$+0,68241616$$
$$\overline{-0,37383344}$$

$$
\begin{array}{rl}
f'(3,8) = & +52,808 \\
 & +\ \ 0,01344 \\
\hline
 & +52,82144 \\
 & -\ \ 1,6816 \\
 & -\ \ 0,000032 \\
\hline
 & +51,139808
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f''(3,8) = & +84,08 \\
 & +\ \ 0,0048 \\
\hline
 & +84,0848 \\
 & -\ \ 1,344 \\
\hline
 & +82,7408
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f'''(3,8) = & +67,2 \\
 & -\ \ 0,48 \\
\hline
 & +66,72
\end{array}
$$

Összeállítva:

$$
\begin{aligned}
f\ (3,78) &= -\ \ 0,37383344, \\
f'\ (3,78) &= +51,139808, \\
f''\ (3,78) &= +82,7408, \\
f'''(3,78) &= +66,72, \\
f''''(3,78) &= +24.
\end{aligned}
$$

A' jegysor pedig:

$$(3,78)\ +\ +\ +\ +\ +\ .$$

Itt a' köz:

$$k = \left(\frac{1}{10}\right)^2,$$

$f''x$ legnagyobb és $f'x$ legkisebb értéke pedig:

83,492 és 510,1398

következőleg:

$$\frac{A''}{2A'} = \frac{83,41}{2.51,14} < \left(\frac{1}{10}\right)^0,$$

azaz $n = 2$; $e = 0$, 's minthogy

$$n + e > 1$$

a' hányas a'

$$2n + e = 4$$

-dik tizedes jegyig kiszámítandó.

Az új közelítés tehát:

$$3,79 - \frac{f(3,79)}{f'(3,79)}$$

$$= 3,79 - \frac{0,14171281}{51,970556}$$

és:

$$a = 3,7873.$$

Mint lehessen e' szerint tovább menni, magában világos. A' következő hányasokat illetőleg a'

$$\begin{aligned} 4n + 3e &= 8, \\ 8n + 7e &= 16, \\ 16n + 15e &= 32, \\ 32n + 31e &= 64, \\ 64n + 63e &= 128 \end{aligned}$$

. . . . . .

-dik jegyig kell kiszámítani.

Ha már most viszszatekintünk egyenletünkre, melly ez:

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

ennek két képzeleti gyökerét találtuk

0 és 0.1

között, és két valót:

$$\alpha = 0,71864,$$
$$\alpha' = 3,7873.$$

20. §.

Legyen még egy példa:

$$\begin{aligned}
f\ x &= x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0.\\
f'\ x &= 4x^3 + 3x^2 + 4x - 3,\\
f''\ x &= 12x^2 + 6x + 4,\\
f'''\ x &= 24x + 6,\\
f''''\ x &= 24.
\end{aligned}$$

következőleg:

$$\begin{aligned}
f\ (0) &= +\ 4,\\
f'\ (0) &= -\ 3,\\
f''\ (0) &= +\ 4,\\
f'''\ (0) &= +\ 6,\\
f''''(0) &= +\ 24.
\end{aligned}$$

$$(0)\ +\ +\ +\ -\ +.$$

Másodszor:

$$\begin{aligned}
f\ (-1) &= 1 - 1 + 2 + 3 + 4 &&= +\ 9,\\
f'\ (-1) &= -4 + 3 - 4 - 3 &&= -\ 8,\\
f''\ (-1) &= +12 - 6 + 4 &&= +\ 10,\\
f'''\ (-1) &= -\ 24 + 6 &&= -\ 18,\\
f''''(-1) &= 24 &&= +\ 24.
\end{aligned}$$

$$(-1)\ +\ -\ +\ -\ +,$$

Harmadszor:

$$\begin{aligned}
f\ (1) &= 1 + 1 + 2 - 3 + 4 &&= 5,\\
f'\ (1) &= 4 + 3 + 4 - 3 &&= +\ 8,\\
f''\ (1) &= 12 + 6 + 4 &&= +\ 22,\\
f'''\ (1) &= 24 + 6 &&= +\ 30,\\
f''''(1) &= 24 &&= +\ 24.
\end{aligned}$$

$$(1)\ +\ +\ +\ +\ +.$$

Öszszeállítva :

$$\begin{array}{llllll}
(-1) & + & - & + & - & + \\
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
(0) & + & + & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
(1) & + & + & + & + & +
\end{array}$$

Vizsgáljuk a' gyökerek' természetét, először a' $-1 \ldots 0$ közben. Itt az

$$f''''x, f'''x, f''x,$$

függvényekre nézve a' mutatósor 012 lévén, találjuk, hogy, minekutána

$$\frac{f''(0)}{f'''(0)} - \frac{f''(-1)}{f'''(-1)} = \frac{4}{6} + \frac{10}{18}$$
$$> 1,$$

azaz nagyobb, mint a' köz $0 - (-1) = 1$, a' mondott közben két képzeleti gyökér van. A' második $0 \ldots 1$ közre nézve a' mutatósor' átalános vége 012, és

$$\frac{f(1)}{f'(1)} - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{5}{8} + \frac{4}{3}$$
$$> 1,$$

tehát nagyobb mint a' köz, 's ennél fogva a' második közben is képzeleti gyökerek vannak.

Lesz tehát:

$$\begin{array}{llllll l}
(-1) & + & - & + & - & + & \multirow{3}{*}{\Big\} \text{két képz. gyökér.}} \\
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \\
(0) & + & + & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \Big\} \text{két képz. gyökér.} \\
(1) & + & + & + & + & + &
\end{array}$$

Sajtóhibák.

1	*lap*	12	*s.* *al.* úgy *h.* *olv.* így.
„	„	3	„ „ x-el „ „ xel
9	„	8	„ *fel.* 2. 3. (m — 1) *h.* olv. 2. 3.. (m—1).
20	„	6	„ „ értékére h. olv. állító értékére.
22	„	4	„ „ 9el h. olv. 9-t el.
24	„	6	„ „ seu h. olv. scil.
30	„	1	„ al. felesleg áll.
35	„	4	„ fel. tekintve h. olv. tekintjük.
37	„	1	„ „ x-xel h. olv. xel.
40	„	5	„ „ θ h. olv. *o*.
43	„	4	„ al. α h. olv. x.
46	„	14	„ fel. ez h. olv. az,
51	„	1	„ „ egyenletlen h. olv. egyenletben
52	„	1	„ al. $=$ h. olv. —.
54	„	10	„ fel. a' h. olv. a',
58	„	2	„ „ α h. olv. x.
59	„	4	„ al. között mindég h. olv. között, mindég.
60	„	10	„ fel. α h. olv. x.
65	„	10 és 12	s. fel. x. h. olv. x.
66	„	7	s. al. összetevők h. olv. össztevők
67	„	11, 12, 13, 15	s. fel. a' sorok végén hibázik a'] 's e' lapon többször áll apró betű nagyobb helyett.
69	„	5 és 7	s. fel. n h. olv. m.

VÁLLAS.

69 lap 10 s. al. A' helyett olvasd A

70 „ 3 „ „ θ h. olv. mind a' kétszer 2 θ.

73 „ 5 „ fel. ς^{m-1}_{m-1} h. olv. ς^{m-1}

76 „ 9 „ al. θ^{s} h. olv. 9_3.

78 „ 13 „ „ (x—a h. olv. (x — a).

79 „ 10 „ „ mind a' kétszer b h. olv. a.

80 „ 11, 12 és 16 s. al. x hely. olv. a.

82 „ 14 „ fel. — h. olv. =.

83 „ 11 „ al. + h. olv. —.

84 „ 13 „ „ (Lx h. olv. Lx.

86 „ 2 „ „ mc h. olv. m C.

89 „ 7 „ fel. α h. olv. a.

„ „ 15 „ al. [= h. olv. = [és többször C h. C,.

111 „ 12 „ „ φ'_1 h. olv. ψ'_1.

114 „ 3 „ „ ez h. olv. az.

122 „ 11 „ fel. egyes h. olv. egyet.

„ „ 12 „ „ többes h. olv. többet.

123 „ 15 „ al. $f^{(n)}$ a' h. olv. $f^{(n)}$ a.

127 „ 5 „ fel. ± h. olv. ∓.

128 „ 3 „ al. a' h. olv. q

130 „ 10 „ fel. bir a' h. olv. bir, a'.

144 „ 11 „ „ — h. olv. +.

145 „ 4 „ „ fogy; 's h. olv. fogy, a'.

153 és köv. ll. 9_1, 9_2 . . . h. olv. 9_1, 9_2 . . .

154 „ 2 „ fel. hányati h. olv. hányasi.

155 „ 3 „ al. $f_2 x$ h. olv. $f_1 x$.

159 „ 6 „ fel. állíták h. olv. állítók.

160 „ 1 „ „ előjegyekhel h. olv. előjegyekkel.

„ „ 7 „ „ f''n h. olv. f'' e.

161 „ 8 „ al. a h. olv. α.

164 „ 13 „ fel. száma h. olv. szám.

166	lap	3	s.	al. $f^{(m-n)}x$ helyett olvasd $f^{(m-2)}x$.
167	"	9	"	fel. 001 h. olv. 011.
"	"	2	"	al α h. olv. a.
168	"	12	"	fel. $f^{(m-1)}x$ h. olv. $f^{(m-2)}x$.
170	"	6	"	" $=$ h. olv. $-$.
171	"	3	"	" $-$ h. olv. $=$.
"	"	12	"	" $f^{(m-1)}(b$ h. olv. $^{(m-1)}b$.
"	"	10	"	al. α h. olv. a.
"	"	3	"	" mn2 h. olv. m—2.
173	"	12	"	" α h. olv. a.
175	"	7	"	" ϑ' h. olv. $\vartheta')$
178	"	11	"	fel. Az köz h. olv. Az
180	"	9	"	" α h. olv. a.
182	"	14	"	al. $\varphi\ a$ h. olv. $\varphi\alpha$.
"	"	12	"	" $-$ h. olv. $+$.
183	"	9	"	fel. φ' h. olv. ϑ'
184	"	3	"	" hatás h. olv. határ.
"	"	7	"	al. a h. olv. α
"	"	3	"	" $-$ h. olv. $=$, $+$ h. olv. $-$
185	"	4	"	al. $\begin{matrix}\varphi b\\ \varphi' a\end{matrix}$ h. olv. $\dfrac{\varphi b}{\varphi' a}$
186	"	7	"	fel. $\varphi' b$ h. olv. $\varphi' a$.
187	"	3	"	" α h. olv. φ'a.
188	"	2	"	al. $-$ h. olv. $=$.
"	"	3	"	" $(\theta\vartheta')$ h. olv. $(b-\theta\vartheta')$
189	"	1	"	fel. $\varphi'\ (-\theta\,\delta)$ h. olv. $\varphi'\ (b-\theta\,\delta)$.
190	"	8	"	al. $\theta\,\vartheta''$ h. olv. $\theta\,\vartheta'')$
"	"	1	"	" $\varphi'\alpha$ h. olv. $\varphi' a$.
191	"	2	"	" φ'a h. olv. $\varphi a''$.
203	"	14	"	fel. $+$ h. olv. $-$.
204	"	10	"	" $-\ldots$ h. olv. $-\varsigma\ldots$

209	lap	12	s,	al. ω' helyett olvasd φ''.
211	„	6	„	fel. a h. olv. α.
„	„	14	„	„ a h. olv. α.
225	„	14	„	„ : h. olv. , .
235	„	8	„	„ $^{(m-1}$ h. olv. $^{(m-1)}$.
236	„	6	„	al. α h. olv x.
244	„	3	„	fel. (0,7 + h. olv. (0,7) +.
245	„	12	„	al 6 h. olv. b,
246	„	4	„	fel. levettük h. olv. lehozzuk.

$$f'''' (3,8) = + 24$$
$$- 0,02$$
$$- 0,48 = - 0,02\, f'''' (3,8),$$
$$- 0,02$$
$$+ 0,0096$$
$$+ 0,0048 = + \frac{0,02^2}{2} f'''' (3,8),$$
$$- 0,02$$
$$- 0,000096$$
$$- 0,000032 = - \frac{0,02^3}{2.3} f'''' (3,8),$$
$$- 0,02$$
$$+ 0,00000064$$
$$+ 0,00000016 = + \frac{0,02^4}{2.3.4} f'''' (3,8).$$

$$f (3,8) = + 0,6656$$
$$+ 0,016816$$
$$+ 0,00000016$$
$$+ 0,68241616$$
$$- 1,05616$$
$$- 0,0000896$$
$$- 1,0562496$$
$$+ 0,68241616$$
$$- 0,37383344$$

$$f'(3{,}8) = +52{,}808$$
$$+\;0{,}01344$$
$$+52{,}82144$$
$$-\;1{,}6816$$
$$-\;0{,}000032$$
$$+51{,}139808$$

$$f''(3{,}8) = +84{,}08$$
$$+\;0{,}0048$$
$$+84{,}0848$$
$$-\;1{,}344$$
$$+82{,}7408$$

$$f'''(3{,}8) = +67{,}2$$
$$-\;0{,}48$$
$$+66{,}72$$

Összeállítva:

$$f\;(3{,}78) = -\;0{,}37383344,$$
$$f'\;(3{,}78) = +51{,}139808,$$
$$f''\;(3{,}78) = +82{,}7408,$$
$$f'''\;(3{,}78) = +66{,}72,$$
$$f''''\;(3{,}78) = +24.$$

A' jegysor pedig:

$$(3{,}79)\; + + + + +.$$

Itt a' köz:

$$k = \left(\frac{1}{10}\right)^2,$$

$f''\,x$ legnagyobb és $f'\,x$ legkisebb értéke pedig:

83,492 és 510,1398

következőleg:

$$\frac{A''}{2A'} = \frac{83,41}{2.51,14} < \left(\frac{1}{10}\right)^{0},$$

azaz $n = 2$; $e = 0$, 's minthogy

$$n + e > 1$$

a' hiányas a'

$$2n + e = 4$$

-dik tizedes jegyig kiszámítandó.

Az új közelítés tehát:

$$3,79 - \frac{f(3,79)}{f'(3,79)}$$

$$= 3,79 - \frac{0,14171281}{51,970556}$$

és:

$$a = 3,7873$$

Mint lehessen e' szerint tovább menni, magában világos. A' következő hiányasokat illetőleg a'

$$\begin{aligned} 4n &+ 3e = 8, \\ 8n &+ 7e = 16, \\ 16n &+ 15e = 32, \\ 32n &+ 31e = 64, \\ 64n &+ 63e = 128, \end{aligned}$$

. . . .

-dik jegyig kell kiszámítani.

Ha már most viszszatekintünk egyenletünkre, melly ez:

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

ennek két képzeleti gyökerét találtuk

0 és 0.1

között, és két valót:

$$\alpha = 0,71864,$$
$$\alpha' = 3,7873.$$

20. §.

Legyen még egy példa:

$$f\ x = x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0.$$
$$f'\ x = 4x^3 + 3x^2 + 4x - 3,$$
$$f''\ x = 12x^2 + 6x + 4,$$
$$f'''\ x = 24x + 6,$$
$$f''''\ x = 24.$$

következőleg:

$$f\ (0) = +\ 4,$$
$$f'\ (0) = -\ 3,$$
$$f''\ (0) = +\ 4,$$
$$f'''\ (0) = +\ 6,$$
$$f''''\ (0) = +\ 24.$$
$$(0)\ + + + - +.$$

Másodszor:

$$f\ (-1) = 1 - 1 + 2 + 3 + 4 = +\ 9,$$
$$f'\ (-1) = -4 + 3 - 4 - 3 = -\ 8,$$
$$f''\ (-1) = +12 - 6 + 4 = +10,$$
$$f'''\ (-1) = -24 + 6 = -18,$$
$$f''''\ (-1) = 24 = +24.$$
$$(-1)\ + - + - +,$$

Harmadszor:

$$f\ (1) = 1 + 1 + 2 - 3 + 4 = 5,$$
$$f'\ (1) = 4 + 3 + 4 - 3 = +\ 8,$$
$$f''\ (1) = 12 + 6 + 4 = +12,$$
$$f'''\ (1) = 24 + 6 = +30,$$
$$f''''\ (1) = 24 = +24.$$
$$(1)\ + + + + +.$$

Öszszeállítva:

$$\begin{array}{lccccc}
(-1) & + & - & + & - & + \\
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
(0) & + & + & + & - & + . \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
(1) & + & + & + & + & + .
\end{array}$$

Vizsgáljuk a' gyökerek' természetét, először a' — 1 . . . 0 közben. Itt az

$$f''''x,\ f'''x,\ f''x,$$

függvényekre nézve a' mutatósor 012 lévén, találjuk, hogy, minekutána

$$\frac{f''(0)}{f'''(0)}-\frac{f''(-1)}{f'''(-1)}=\frac{4}{6}+\frac{10}{18}$$
$$>1,$$

azaz nagyobb, mint a' köz $0-(-1)=1$, a' mondott közben két képzeleti gyökér van. A' második 0 . . . 1 közre nézve a' mutatósor' átalános vége 012, és

$$\frac{f(1)}{f'(1)}-\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{5}{8}+\frac{4}{3}$$
$$>1,$$

tehát nagyobb mint a' köz, 's ennél fogva a' második közben is képzeleti gyökerek vannak.

Lesz tehát:

$$\begin{array}{lccccc l}
(-1) & + & - & + & - & + & \\
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \Big\}\ \text{két képz. gyökér.} \\
(0) & + & + & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \Big\}\ \text{két képz. gyökér.} \\
(1) & + & + & + & + & + &
\end{array}$$

HARMADIK SZAKASZ.

Horner' feloldásmódja.

1. §.

A' felsőbb egyenletek' általános alakja ez:

$$fx = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_1 x + A_o;$$

s legyen mármost:

$$\begin{aligned} A_m x + A_{m-1} &= B_{m-1} \\ B_{m-1} x + A_{m-2} &= B_{m-2} \\ B_{m-2} x + A_{m-3} &= B_{m-3} \\ \ldots \quad & \ldots \\ B_1 x + A_o &= B_o \end{aligned}$$

(l. feljebb 80. l.) mellyhez, egyformaság végett, még ezt is lehet tenni:

$$A_m = B_m,$$

úgy, hogy tulajdonképen legyen:

$$\begin{aligned} B_m x + A_{m-1} &= B_{m-1} \\ B_{m-1} x + A_{m-2} &= B_{m-2} \\ B_{m-2} x + A_{m-3} &= B_{m-3} \\ \ldots \quad & \ldots \\ B_2 x + A_1 &= B_1 \\ B_1 x + A_o &= B_o \end{aligned}$$

Ezeket föltéve, lesz:

$$\begin{aligned} B_o &= B_1 x + A_o \\ &= B_2 x^2 + A_1 x + A_o \end{aligned}$$

$$= B_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

. . . . . .

$$= A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots$$
$$+ A_1 x + A_0$$

's igy B_0 tulajdonképen az egyenlet maga.

Minthogy az:

$$A_m = B_m$$
$$B_m x + A_{m-1} = B_{m-1}$$
$$B_{m-1} x + A_{m-2} = B_{m-2}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$B_1 x + A_0 = B_0$$

mennyiségek' egymásból folyásának törvénye felette egyszerű, azt fogjuk használni, valahányszor x helyébe az fx egyenletbe valamelly számbeli értéket iktatandunk.

Például legyen adva:

$$fx = 2x^5 - 6x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x - 8 \;,$$

hol tehát

$$A_5 = 2$$
$$A_4 = -6$$
$$A_3 = 3$$
$$A_2 = 1$$
$$A_1 = -5$$
$$A_0 = -8.$$

A mondottak' következtében lesz tehát, ha x helyébe például 2 tétetik:

$$2 = 2$$
$$2 . 2 - 6 = -2$$
$$-2 . 2 + 3 = -1$$
$$-1 . 2 + 1 = -1$$
$$-1 . 2 - 5 = -7$$
$$-7 . 2 - 3 = -22 \,,$$

a miből látható, hogy

$$B_0 = f(2) = -22.$$

Könnyebb számolás és áttekintés végett sorba iratnak az A_m, A_{m-1} .... előszámok 's alájok egy második sorban a B_m, B_{m-1} .... mennyiségek, így:

$$\begin{array}{cccccc} A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & \ldots & A_1 & B_0 \\ B_m & B_{m-1} & B_{m-2} & \ldots & B_1 & B_0 \end{array}$$

hol mindég

$$\begin{aligned} B_m &= A_m \\ B_{m-1} &= B_m x + A_{m-1} \\ B_{m-2} &= B_{m-1} x + A_{m-2} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

azaz, hol minden B_{m-1}, B_{m-2} ... mennyiség az előtte valónak x értékével való sokszorzása 's a' felette levő A_{m-1} A_{m-2} hozzáadása által ered.

Előbbi példánkra vonatkozólag lesz:

$$\begin{array}{rrrrrr} +2 & -6 & +3 & +1 & -5 & -8 \\ & +4 & -4 & -2 & -2 & -14 \\ \hline +2 & -2 & -1 & -1 & -7 & -22 \end{array}$$

's az utolsó szám itt az, melly a' 2 beiktatásának megfelel, úgy hogy

$$f(2) = -22$$

legyen, mint feljebb.

2. §.

Osszuk ármost az

$$fx = A_m x_m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_1 x + A_0$$

egyenletet $x-a$ által. Ha ezt megtesszük, lesz nyilván:

$$\frac{fx}{x-a}=\frac{A_m x^m}{x-a}+\frac{A_{m-1}x^{m-1}}{x-a}+\frac{A_{m-2}x^{m-2}}{x-a}+\ldots$$

$$+\frac{A_1 x}{x-a}+\frac{A_0}{x-a}$$

mármost valódi osztás által könnyen meg lehet győződni, hogy:

$$A_m.\frac{x^m}{x-a}=A_m.\left\{x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}x+\ldots\right.$$

$$\left.+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{a^m}{x-a}\right\}$$

$$A_{m-1}.\frac{x^{m-1}}{x-a}=A_{m-1}.\left\{x^{m-2}+ax^{m-3}+a^2x^{m-4}x\ldots\right.$$

$$\left.+a^{m-3}x+a^{m-2}+\frac{a^{m-1}}{x-a}\right\}$$

$$A_{m-1}.\frac{x^{m-2}}{x-a}=A_{m-1}.\left\{x^{m-3}+ax^{m-4}+a^2x^{m-5}x\ldots\right.$$

$$\left.+a^{m-4}x+a^{m-3}+\frac{a^{m-2}}{x-a}\right\}$$

. . . .

$$A_2.\frac{x^2}{x-a}=A_2\left\{x+a+\frac{a^2}{x-a}\right\}$$

$$A_1.\frac{x}{x-a}=A_1\left\{1+\frac{a}{x-a}\right\}$$

$$A_0.\frac{1}{x-a}=A_0.\frac{1}{x-a}.$$

Következőleg lesz:

$$\frac{fx}{x-a}=A_m x^{m-1}$$

$$+\left\{A_m a+A_{m-1}\right\}.\ x^{m-2}$$

$$+\{A_m a^2 + A_{m-1} a + A_{m-2}\} . x^{m-3}$$
$$+\{A_m a^3 + A_{m-1} a^2 + A_{m-2} a + A_{m-3}\} . x^{m-4}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+\{A_m a^{m-2} + A_{m-1} a^{m-3} + A_{m-2} a^{m-4} + \ldots$$
$$+ A_3 a + A_2\} . x$$
$$+\{A_m a^{m-1} + A_{m-1} a^{m-2} + A_{m-2} a^{m-3} + \ldots$$
$$+ A_2 a + A_1\}$$
$$+ \left\{\frac{A_m a^m}{x-a} + \frac{A_{m-1} a^{m-1}}{x-a} + \frac{A_{m-2} a^{m-2}}{x-a} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{A_1 a}{x-a} + \frac{A_0}{x-a}\right\},$$

's legyen itt is, mint az előbbi §ban,

$$A_m + B_m$$

továbbá

$$B_m a + A_{m-1} = B_{m-1}$$
$$B_{m-1} a + A_{m-2} = B_{m-2}$$
$$B_{m-2} a + A_{m-3} = B_{m-3}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$B_2 a + A_1 = B_1$$
$$B_1 a + A_0 = B_0,$$

hol tehát a' B_m, B_{m-1}, B_{m-2} . . . mennyiségek ugyanazon módon erednek, mint az előbbi §ban; ezt fölté-ve lesz:

$$B_{m-1} = A_m a + A_{m-1}$$
$$B_{m-2} = A_m a^2 + A_{m-1} a + A_{m-2}$$
$$B_{m-3} = A_m a^3 + A_{m-1} a^2 + A_{m-2} a + A_{m-3}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$B_2 = A_m a^{m-2} + A_{m-1} a^{m-3} + A_{m-2} a^{m-4} + \ldots$$
$$+ A_3 a + A_2$$

$$B_1 = A_m a^{m-1} + A_{m-1} a^{m-2} + A_{m-2} a^{m-3} + \dots$$
$$+ A_2 a + A_1$$
$$B_0 = A_m a^m + A_{m-1} a^{m-1} + A_{m-2} a^{m-2} + \dots$$
$$+ A_2 a^2 + A_1 a + A_0 \;;$$

és ennek következésében:

$$\frac{fx}{x-a} = B_m x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + B_{m-2} x^{m-3} + \dots$$
$$+ B_2 x + B_1 + \frac{B_0}{x-a} \;;$$

melly kifejezésben a'

$$B_m,\; B_{m-1},\; B_{m-2},\; B_{m-3} \;\dots\;.$$

mennyiségek ugyanazon egyszerű módon erednek, mint az előbbi §ban.

Előbbi példánkra vonatkozólag lesz tehát, ha fx-et $x-2$ által osztjuk:

$$\frac{fx}{x-2} = 2x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 7 - \frac{22}{x-a}$$

Második például szolgáljon a' 116 l. egyenlete

$$fx = x^3 - 4x + 1$$

's osszuk ezt először $x-1$ által; a mondattak' következtében lesz:

$$\begin{array}{rrrr} +1 & 0 & -4 & +1 \\ & +1 & +1 & -3 \\ \hline +1 & +1 & -3 & -2 \end{array}$$

következőleg

$$\frac{fx}{x-1} = x^2 + x - 3 - \frac{2}{x-1}\,.$$

Ha ugyanazt $x-2$ által osztjuk, lesz:

$$\begin{array}{rrrr} +1 & 0 & -4 & +1 \\ & +2 & +4 & 0 \\ \hline +1 & +2 & 0 & +1 \end{array} \;;$$

azaz

$$\frac{fx}{x-2} = x^2 + x + \frac{1}{x-2}$$

Az előbbi §. értelmében látjuk egyszersmind, hogy itt:

$$f(1) = -2$$
$$f(2) = +1$$

a' honnan látható, hogy fx-nek 1 és 2 között egy képes gyökere van.

'S itt jegyezzük meg magunknak, hogy

1) $B_0 = fa = 0$, midőn a gyökere az fx egyenletnek; a miért is tehát lesz

$$\frac{fx}{x-a} = B_m x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + B_{m-2} x^{m-3} + \ldots$$
$$+ B_3 x^2 + B_2 x + B_1$$

melly kifejezés a kizárásával a' többi gyökereket foglalja magában.

2) Midőn

$$B_0 = fa$$
$$B_0 = fb$$

x-nek a b értékeire nézve, 's B_0 és B'_0 ellenkező előjegyűek, akkor az egyenletnek a és b között 1, 3, 5... 's általában páratlan számú képes gyökerei lesznek. Midőn azok ellenben ugyanazon előjegyűek, a és b között csak páros számú, úgymint 0, 2, 4 ... gyökerek lehetnek. Második példánkban $B_0 = f(1) = -2$, továbbá $B'_0 = +1$; következőleg az

$$fx = x^3 - 4x + 1$$

egyenletnek legalább egy való gyökere van 1 és 2 között.

3. §.

Midőn

$$fx = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_2 x^2 + A_1 x + A_0 ;$$

tudjuk, hogy egyáltalában

$$\frac{fx}{x-a} = B_m x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + B_{m-2} x^{m-3} + \ldots$$
$$+ B_2 x + B_1 + \frac{B_0}{x-a}$$

azaz, ha

$$B_m x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + \ldots B_2 x + B_1 = f_1 x$$

tétetik, hogy

$$\frac{fx}{x-a} = f_1 x + \frac{B_0}{x-a} .$$

Osszuk mármost $f_1 x$-et $x-b$ által, és legyen ugyanazon módon, mint az előbbi §§ban:

$$\begin{aligned} C_m &= B_m \\ C_{m-1} &= C_m b + B_{m-1} \\ C_{m-2} &= C_{m-1} b + B_{m-2} \\ &\ldots\ldots \\ B_2 &= C_3 b + B_2 \\ C_1 &= C_2 b + B_1 , \end{aligned}$$

lesz nyilván

$$\frac{f_1 x}{x-b} = \frac{B_m x^{m-1}}{x-b} + \frac{B_{m-1} x^{m-2}}{x-b} + \frac{B_{m-2} x^{m-3}}{x-b} + \ldots$$
$$= C_m x^{m-2} + C_{m-1} x^{m-3} + C_{m-2} x^{m-4} + \ldots$$
$$+ C_3 x + C_2 + \frac{C_1}{x-b} ,$$

melly uj egyenletnek előszámai ugyanazon módon erednek a'

$$B_m , B_{m-1} , B_{m-2} \ldots$$

mennyiségekből, mint ezek az

$$A_m,\ A_{m-1},\ A_{m-1}\ \ldots.$$

coefficiensekből.

'S minthogy itt

$$C_1 = B_m b^{m-1} + B_{m-1} b^{m-2} + B_{m-2} b^{m-3} + \ldots + B_2 b + B_1,$$

látni való, hogy

$$C_1 = 0,$$

midőn b gyökere az $f_1 x$ egyenletnek.

Legyen:

$$C_m x^{m-2} + C_{m-1} x^{m-3} + C_{m-2} x^{m-4} + \ldots + C_3 x + C_2 = f_2 x,$$

következőleg lesz:

$$\frac{f_1 x}{x-b} = f_2 x + \frac{C_1}{x-b}.$$

Hasonló módon okoskodva, könnyen meggyőződünk, hogy egyáltalában;

$$\frac{fx}{x-a} = f_1 x + \frac{B_0}{x-a}$$

$$\frac{f_1 x}{x-b} = f_2 x + \frac{C_1}{x-b}$$

$$\frac{f_2 x}{x-c} = f_3 x + \frac{D_2}{x-c}$$

$$\frac{f_3 x}{x-d} = f_4 x + \frac{C_3}{x-d}$$

. . . . .

$$\frac{f_{m-2} x}{x-k} = f_{m-1} x + \frac{L_{m-2}}{x-k}$$

$$\frac{f_{m-1} x}{x-l} = f_m x + \frac{M_{m-1}}{x-l},$$

hol mint tudjuk:

$$f_1 x = B_m x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + B_{m-2} x^{m-3} + B_{m-3} x^{m-4} + \ldots$$
$$+ B_2 x + B_1$$

$$f_2 x = C_m x^{m-2} + C_{m-1} x^{m-3} + C_{m-2} x^{m-4} + C_{m-3} x^{m-5} + \ldots$$
$$+ C_3 x + C_2$$

$$f_3 x = D_m x^{m-3} + D_{m-1} x^{m-4} + D_{m-2} x^{m-5} + D_{m-3} x^{m-6} + \ldots$$
$$+ D_4 x + D_3$$

$$f_4 x = E_m x^{m-4} + E_{m-1} x^{m-5} + E_{m-2} x^{m-6} + E_{m-3} x^{m-7} + \ldots$$
$$+ E_5 x + E_4$$

. . . .

$$f_{m-1} x = L_m x + L_{m-1}$$
$$f_m x = M_m$$

továbbá

$$A_m = B_m = C_m = E_m = \ldots L_m = M_m ,$$

úgy, hogy

$$M_m = A_m$$

legyen; 's ezen kivűl:

$$B_{m-1} = B_m a + A_{m-1}$$
$$B_{m-2} = B_{m-1} a + A_{m-2}$$
$$B_{m-3} = B_{m-2} a + A_{m-3}$$

. . . . .

$$C_{m-1} = C_m b + B_{m-1}$$
$$C_{m-2} = C_{m-1} b + B_{m-2}$$
$$C_{m-3} = C_{m-2} b + B_{m-3}$$

. . . . .

$$D_{m-1} = D_m c + C_{m-1}$$
$$D_{m-2} = D_{m-1} c + C_{m-2}$$
$$D_{m-3} = D_{m-2} c + C_{m-3}$$

. . . . .

stb, stb, és végre

$$B_0 = fa$$

$$C_1 = f_1 b$$
$$D_2 = f_2 c$$
$$E_3 = f_3 d$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$L_{m-2} = f_{m-2} k$$
$$M_{m-1} = f_{m-1} l\,.$$

4. §.

Ezen lehozásból láthatni, milly összefüggésben legyenek a' következő mennyiségek:

$$\begin{array}{llllllll}
 & A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \dots A_2 & A_1 & A_0 \\
a) & B_m & B_{m-1} & B_{m-2} & B_{m-3} & \dots B_2 & B_1 & B_0 \\
b) & C_m & C_{m-1} & C_{m-2} & C_{m-3} & \dots C_2 & C_1 & \\
c) & D_m & D_{m-1} & D_{m-2} & D_{m-3} & \dots D_2 & & \\
\cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
i) & K_m & K_{m-1} & K_{m-2} & & & & \\
k) & L_m & L_{m-1} & & & & & \\
l) & M_m & & & & & &
\end{array}$$

Először is t. i. az

$$A_m \quad A_{m-1} \quad A_{m-2} \quad A_{m-3} \dots.$$

mennyiségek az adott egyenletnek coefficiensei. Azután pedig $B_m = A_m$. És a' második

$$B_{m-1}\,,\ B_{m-2}\,,\ B_{m-3} \dots$$

sornak tagjai ekkép erednek: 1) sokszoroztassék ugyanazon sornak közvetlenűl bal felől levő tagja a-val, 2) adassék a' sokszorozmányhoz az

$$A_m\,,\ A_{m-1}\,,\ A_{m-2} \dots$$

sornak függönyösen a' keresett tag fölött álló tagja. Ez lesz a' keresett tag' értéke. Például ha B_{m-3} értéke kerestetnék, akkor B_{m-2} — t a-val kellene sokszorozni és az aB_{m-2} sokszorozmányhoz A_{m-3} — t hozzáadni. És valóban

$$B_{m-3} = B_{m-2}\, a + A_{m-3}$$

mint az előbbiekből tudatik. A harmadik, negyedik ... sorok' tagjai szintúgy erednek b, c ... 's a' második, harmadik sorok' tagjaiból, mint ezt a' második sor' tagjaira nézve találtuk.

Legyen például adva

$$fx = x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - x - 2$$

's keressük itt a' B_m, B_{m-1} .... C_m, C_{m-1} .... értékeit föltevén, hogy $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$.

Ezt föltéve lesz tehát:

$$\begin{array}{lllllll}
 & +1 & -4 & +6 & +2 & -1 & -2 \\
1) & +1 & -3 & +3 & +5 & +4\,(+2) & \\
2) & +1 & -1 & +1 & +7\,(+18) & & \\
3) & +1 & +2 & +7\,(+28) & & & \\
4) & +1 & +6\,(+31) & & & & \\
5) & +1\,(+11) & & & & &
\end{array}$$

melly összeállításban a' rekeszbe foglalt számok a'

$$B_0,\ C_1,\ D_2,\ E_3\ \ldots.$$

mennyiségeknek felelnek meg.

A' mondattaknál fogva lesz tehát:

$$fx = x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\frac{f_1 x}{x-1} = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 5x + 4 + \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{f_2 x}{x-2} = x^3 - x^2 + x + 7 + \frac{18}{x-2}$$

$$\frac{f_3 x}{x-3} = x^2 + 2x + 7 + \frac{28}{x-3}$$

$$\frac{f_4 x}{x-4} = x + 6 + \frac{31}{x-4}$$

$$\frac{f_5 x}{x-4} = 1 + \frac{11}{x-4}$$

5. §.

A' 3. §ból következik:

$$f x = f_1 x \ (x-a) + B_0$$
$$f_1 x = f_2 x \ (x-b) + C_1$$
$$f_2 x = f_3 x \ (x-c) + D_2$$
$$f_3 x = f_4 x \ (x-d) + E_3$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_{m-2} = f_{m-1} x \ (x-k) + L_{m-2}$$
$$f_{m-1} = f_m \ x \ (x-l) + M_{m-1}$$

avvagy minthogy:

$$B_0 = f a$$
$$C_1 = f_1 b$$
$$D_2 = f_2 c$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$L_{m-2} = f_{m-2} k$$
$$M_{m-1} = f_{m-1} l$$

lesz tulajdonképen:

$$f x = f_1 x \ (x-a) + f a$$
$$f_1 x = f_2 x \ (x-b) + f_1 b$$
$$f_2 x = f_3 x \ (x-c) + f_2 c$$
$$f_3 x = f_4 x \ (x-d) + f_3 d$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_{m-2} x = f_{m-1} (x-k) + f_{m-1} k$$
$$f_{m-1} x = f_m (x-l) + f_{m-1} l$$

és ebből helyettezés által:

$$fx = f_1 x (x-a) + fa$$
$$= f_2 x (x-a)(x-b) + f_1 b (x-a) + fa$$
$$= f_3 x (x-a)(x-b)(x-c) + f_2 c (x-a)(x-b)$$
$$+ f_1 b (x-a) + fa$$

. . . .

$$= A_m (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-k)(x-l)$$
$$+ f_{m-1} l (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-i)(x-k)$$
$$+ f_{m-1} k (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-i)$$

. . . .

$$+ f_3 d (x-a)(x-b)(x-c)$$
$$+ f_2 c (x-a)(x-b)$$
$$+ f_1 b (x-a)$$
$$+ fa;$$

hol $f_m x$ helyébe A_m tétetett, a' mellyel az egyenlő; minthogy

$$A_m = B_m = C_m = D_m = \dots M_m$$

és

$$f_m x = M_m.$$

6. §.

A' mondattakból következik, ha t. i. az előbbi § egyenleteiben

$$x = a, b, c \dots$$

tétetik:

$$fa = fa$$
$$fb = f_1 b (b-a) + fa$$
$$fc = f_2 c (c-a)(c-b) + f_1 b (c-a) + fa$$
$$fd = f_3 d (d-a)(d-b)(d-c) + f_2 c (d-a)(d-b)$$
$$+ f_1 b (d-a) + fa$$

. . . .

$$f k = f_{m-2} k\,(k-a)\,(k-b)\,(k-c)\,\ldots\,(k-i)$$
$$+ f_{m-3} i\,(k-a)\,(k-b)\,(k-c)\,\ldots\,(k-h)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ f_1 b\,(k-a) + f a$$
$$f l = f_{m-1} l\,(l-a)\,(l-b)\,(l-c)\,\ldots\,(l-k)$$
$$+ f_{m-2} k\,(l-a)\,(l-b)\,(l-c)\,\ldots\,(l-i)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ f_1 b\,(l-a) + f a$$

és ha ezekben

$$\begin{aligned} b &= a + r \\ c &= a + 2r \\ d &= a + 3r \\ e &= a + 4r \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ k &= a + (m-2)\,r \\ l &= a + (m-1)\,r \end{aligned}$$

tétetik, lesz:

$$f a = f a$$
$$f(a+r) = f_1(a+r)\,.\,r + f a$$
$$f(a+2r) = 1.2 f_2(a+2r).\,r^2 + 2 f_1(a+r).\,r + f a$$
$$f(a+3r) = 1.2.3 f_3(a+3r).\,r^3 + 2.3 f_2(a+2r).\,r^2 + 3 f_1(a+r).\,r + f a$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\begin{aligned} f\{a+(m-2)r\} = {} & 1.2.3..(m-2) f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.\,r^{m-2} \\ & + 2.3..(m-2) f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.\,r^{m-3} \\ & + 3.4..(m-2) f_{m-4}\{a+(m-4)r\}.\,r^{m-4} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + (m-3)(m-2) f_2(a+2r).\,r^2 \\ & + (m-2) f_1(a+r).\,r \\ & + f a \end{aligned}$$

$$f\{a+(m-1)r\}=1.2.3\ldots(m-1)f_{m-1}\{a+(m-1)r\}\,r^{m-1}$$
$$+\quad 2.3\ldots(m-1)f_{m-1}\{a+(m-2)r\}.r^{m-2}$$
$$+\quad 3.4\ldots(m-1)f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.r^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(m-2)(m-1)f_2(a+2r).r^2$$
$$+(m-1)f_1(a+r).r$$
$$+fa$$

7. §.

Legyen mármost

$$f(a+r)-fa=\triangle_1$$
$$f(a+2r)-f(a+r)=\triangle_2$$
$$f(a+3r)-f(a+2r)=\triangle_3$$
$$f(a+4r)-f(a+3r)=\triangle_4$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f\{a+(m-1)r\}-f\{a+(m-2)r\}=\triangle_{m-1}$$

Ezt föltéve nyilván való, hogy:

$$\triangle_1=f_1(a+r).r$$
$$\triangle_2=1.2f_2(a+2r).r^2+f_1(a+r).r$$
$$\triangle_3=1.2.3f_3(a+3r).r^3+2.2f_2(a+2r).r^2$$
$$+f_1(a+r).r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\triangle_{m-1}=1.2.3\ldots(m-1)f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.r^{m-1}$$
$$+(m-2).2.3..(m-2)f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.r^{m-2}$$
$$+(m-3).3.4..(m-3)f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.r^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+2(m-2)f_2(a+2r).r^2$$
$$+f_1(a+r).r$$

Legyen továbbá:

$$\triangle_2-\triangle_1=\triangle_1^{(2)}$$
$$\triangle_3-\triangle_2=\triangle_2^{(2)}$$

$$\triangle_4 - \triangle_1 = \triangle_3^{(2)}$$
$$\triangle_5 - \triangle_4 = \triangle_4^{(2)}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\triangle_{m-1} - \triangle_{m-2}\, \triangle_{m-2}^{(2)},$$

tehát lesz az előbbiekből:

$\triangle_1^{(2)} = \quad 1.\,2 f_2 (a + 2r).\, r^2$

$\triangle_2^{(2)} = 1.\,2.\,3 f_3 (a + 3r).\, r_3 + 1.\,2.\, f_2 (a + 2r).\, r^2$

$\triangle_3^{(2)} = 1.\,2.\,3.\,4\, f_4\, (a + 4r).\, r^4 + 2.\,2.\,3\, f_3\, (a + 3r).\, r^3$
$\qquad + 1.\,2 f_2 (a + 2r).\, r^2$

. . . .

$\triangle_{m-1}^{(2)} = \quad 1.\,2.\,3 \ldots (m-1) f_{m-1} \{a + (m-1)\, r\}.\, r^{m-1}$
$\quad + (m-3)\, 2.\,3 \ldots (m-2) f_{m-2} \{a + (m-2)\, r\}.\, r^{m-2}$
$\quad + (m-4)\,(m-3).\,3.\,4 \ldots (m-3)$
$\qquad \times f_{m-3} \{a + (m-3) r\}.\, r^{m-3}$
$\quad (m-5)\,(m-4).\,4.\,5 \ldots (m-3)$
$\qquad \times f_{m-4} \{a + (m-4) r\}.\, r^{m-4}$

. . . .

$\quad + 2 f_2 (a + 2r)\, r^2$

Legyen hasonlólag:

$$\triangle_2^{(2)} - \triangle_1^{(2)} = \triangle_1^{(3)}$$
$$\triangle_3^{(2)} - \triangle_2^{(2)} = \triangle_2^{(3)}$$
$$\triangle_4^{(2)} - \triangle_3^{(2)} = \triangle_3^{(3)}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\triangle_{m-2}^{(2)} - \triangle_{m-3}^{(2)} = \triangle_{m-3}^{(3)},$$

következőleg:

$\triangle_1^{(3)} = \quad 1.\,2.\,3 f_3 (a + 3r).\, r^3$

$\triangle_2^{(3)} = \quad 1.\,2.\,3.\,4\, f_4\, (a + 4r).\, r^4 + 1.\,2.\,3 f_3 (a + 3r).\, r^3$

$\triangle_3^{(3)} = 1.\,2.\,3.\,4.\,5 f_5 (a + 5r).\, r^5 + 2.\,2.\,3.\,4 f_4 (a + 4r).\, r^4$
$\qquad + 1.\,2.\,3\, f_3\, (a + 2r).\, r^3$

. . . .

$\triangle_{m-3}^{(3)} = \quad 1.\,2.\,3 \ldots (m-1) f_{m-1} \{a + (m-1) r\}.\, r^{m-1}$

$$+(m-4)\,2.3..(m-2)$$
$$\times f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.\,r^{m-2}$$
$$+(m-5)(m-4).\,3.4..(m-3)$$
$$\times f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.\,r^{m-3}$$
$$+(m-6)(m-5)(m-4).\,4.5..(m-4)$$
$$\times f_{m-4}\{a+(m-4)r\}.\,r^{m-4}$$
$$+(m-7)(m-6)(m-5)\,5.6..(m-4)$$
$$\times f_{m-5}\{a+(m-5)r\}.\,r^{m-5}$$

. . . .

$$+1.2.3\,f_3(a+3r).\,r^3$$

És ha

$$\Delta_2^{(3)}-\Delta_1^{(3)}=\Delta_1^{(4)}$$
$$\Delta_3^{(3)}-\Delta_2^{(3)}=\Delta_2^{(4)}$$
$$\Delta_4^{(3)}-\Delta_3^{(3)}=\Delta_3^{(4)}$$

. . . . .

$$\Delta_{m-3}^{(3)}-\Delta_{m-4}^{(3)}=\Delta_{m-4}^{(4)}$$

tétetik lesz:

$$\Delta_1^{(4)}=\quad 1.2.3.4\,f_4(a+4r).\,r^4$$
$$\Delta_2^{(4)}=\quad 1.2.3.4.5\,f_5(a+5r)\,r^5+1.2.3.4\,f_4(a+4r).\,r^4$$
$$\Delta_3^{(4)}=1.2.3.4.5.6\,f_6(a+6r).\,r^6$$
$$+2.2.3.4.5\,f_5(a+5r).\,r^5$$
$$+1.2.3.4\,f_4(a+4r).\,r^4$$

. . . .

$$\Delta_{m-4}^{(4)}=\quad 1.2.3\ldots(m-1)\,f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.\,r^{m-1}$$
$$+(m-5).\,2.3..(m-2)\,f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.\,r^{m-2}$$
$$+(m-6)(m-5).\,3.4..(m-3)$$
$$\times f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.\,r^{m-3}$$
$$+(m-7)(m-6)(m-5).\,4.5..(m-4)$$
$$\times f_{m-4}\{a+(m-4)r\}.\,r^{m-4}$$
$$+(m-8)(m-7)(m-6)(m-5).\,5.6..(m-5)$$
$$\times f_{m-5}\{a+(m-5)r\}.\,r^{m-5}$$

$$+(m-9)(m-8)(m-7)(m-6).6.7..(m-5)$$
$$\times f_{m-6}\{a+(m-6)r\}.r^{m-6}$$

. . . .

$$+1.2.3.4\,f_4\,(a+4r).r^4$$

8. §.

A' $\triangle_{m-1}$, $\triangle^{(2)}_{m-2}$, $\triangle^{(3)}_{m-3}$, $\triangle^{(4)}_{m-4}$ ... különbségek összeállítva a' következők:

$$\triangle_{m-1} =$$
$$1.2.3..,(m-1)\,f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.r^{m-1}$$
$$+(m-2).2.3...(m-2)\,f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.r^{m-2}$$
$$+(m-3).3.4...(m-2)\,f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.r^{m-3}$$
$$+(m-4).4.5...(m-2)\,f_{m-4}\{a+(m-4)r\}.r^{m-4}$$

. . . .

$$+f_1\,(a+r).r$$

$$\triangle^{(2)}_{m-2} =$$
$$1.2.3...(m-1)\,f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.r^{m-1}$$
$$+(m-3).2.3..(m-2)\,f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.r^{m-2}$$
$$+(m-4)(m-3).3.4..(m-3)\,f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.r^{m-3}$$
$$+(m-5)(m-4).4.5..(m-3)\,f_{m-4}\{a+(m-4)r\}.r^{m-4}$$
$$+(m-6)(m-5).5.6..(m-3)\,f_{m-5}\{a+(m-5)r\}.r^{m-5}$$

. . . .

$$+2f_2\,(a+2r).r^2$$

$$\triangle^{(3)}_{m-3} =$$
$$1.2.3...(m-1)\,f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.r^{m-1}$$
$$+(m-4).2.3...(m-2)\,f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.r^{m-2}$$
$$+(m-5)(m-4).3.4..(m-3)\,f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.r^{m-3}$$
$$+(m-6)(m-5)(m-4).4.5..(m-4)$$
$$\times f_{m-4}\{a+(m-5)r\}.r^{m-4}$$

$+ (m-7)(m-6)(m-5).\,5.\,6\,..\,(m-4)$

$\times f_{m-5}\{a+(m-5)r\}.\,r^{m-5}$

. . . .

$+ 1.\,2.\,3 f_3\,(a+3r).^{5}$

$$\triangle^{(4)}_{m-4} =$$

$1.\,2.\,3\ldots(m-1) f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.\,r^{m-1}$

$+(m-5).\,2.\,3\ldots(m-2) f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.\,r^{m-2}$

$+(m-6)(m-5).\,3.\,4\ldots(m-3) f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.\,r^{m-3}$

$+(m-7)(m-6)(m-5)\;4.\,5\ldots(m-4)$

$\times f_{m-4}\{a+(m-4)r\}\;r^{m-4}$

$+(m-8)(m-7)(m-6)(m-5).\,5.\,6\,..\,(m-5)$

$\times f_{m-5}\{a+(m-5)r\}.\,r^{m-5}$

$+(m-9)(m-8)(m-7)(m-6).\,6.\,7\,..\,(m-5)$

$\times f_{m-6}\{a+(m-6)r\}.\,r^{m-6}$

. . . .

$+ 1.\,2\;3.\,4\,f_4\,(a+4r).\,r^4$

A' melly összeállításból, ha rövidség' okáért

$$f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.\,r^{m-1}=\varphi_1$$
$$f_{m-2}\{a+(m-2)r\}.\,r^{m-2}=\varphi_2$$
$$f_{m-3}\{a+(m-3)r\}.\,r^{m-3}=\varphi_3$$

. . . .

$$f_{m-n}\{a+(m-n)r\}.\,r^{m-n}=\varphi_n$$

tétetik, az általános tag ez látszik lenni:

$$\triangle^{(n)}_{m-n} =$$

$1.\,2.\,3\ldots(m-1).\,\varphi_1$

$+\{m-(n+1)\}.\,2.\,3\ldots(m-2).\,\varphi_2$

$+\{m-(n+2)\}.\,\{m-(n+1)\}.\,3.\,4\ldots(m-3).\,\varphi_3$

$+\{m-(n+3)\}.\,\{m-(n+2)\}.\,\{m-(n+1)\}.\,4.\,5\ldots$

$\times(m-4).\,\varphi_4$

. . . .

$$+\{m-2n\}.\{m-(2n-1)\}\ldots\{m-(n+2)\}.\{m-(n+1)\}$$
$$\times(n+1)(n+2)\ldots\{m-(n+1)\}.\varphi_{n+1}$$
$$+\{m-(2n+1)\}.\{m-2n\}\ldots\{m-(n+3)\}.\{m-(n+2)\}$$
$$\times(n+2)(n+3)\ldots\{m-(n+1)\}.\varphi_{n+2}$$
$$+\{m-(2n+2)\}.\{m-(2n+1)\}\ldots\{m-(n+4)\}.$$
$$\times\{m-(n+3)\}(n+3)(n+4)\ldots\{m-(n+1)\}.\varphi_{n+3}$$

. . . .

$$+1.2.3.4\ldots(n-1)\,n\,f_n(a+nr).r^n.$$

9. §.

Hogy ez pedig a' különbségek' általános alakja, azt meglehet mutatni a' következő módon.

Tétessék t. i. ugyanazon alakban m helyébe $m-1$ lesz:

$$\Delta^{(n)}_{m-1-n}=$$
$$1.2.3\ldots(m-2).\varphi_2$$
$$+\{m-(n+2)\}\,2.3\ldots(m-3).\varphi_3$$
$$+\{m-(n+3)\}.\{m-(n+2)\}.3.4\ldots(m-4).\varphi_4$$
$$+\{m-(n+4)\}.\{m-(n+4)\}.\{m-(n+2)\}.4.5\ldots$$
$$\times(m-5).\varphi_5$$

. . . .

$$+\{m-(2n+1)\}.\{m-2n\}\ldots\{m-(n+3)\}.\{m-(n+2)\}.$$
$$\times(n+1)(n+2)\ldots\{m-(n+2)\}.\varphi_{n+2}$$
$$+\{m-(2n+2)\}.\{m-(2n+1)\}\ldots\{m-(n+4)\}.$$
$$\times\{m-(n+3)\}(n+2)(n+3)\ldots\{m-n+2)\}.\varphi_{n+3}$$

. . . .

$$+1.2.3\ldots(n-1)\,n\,f_n(a+nr).r^n;$$

és ennek következésében:

$$\Delta^{(n+1)}_{m-(n+1)}=\Delta^{(n)}_{m-n}-\Delta^{(n)}_{m-(n+1)}=$$
$$1.2.3\ldots(m-1).\varphi_1$$

$+\{m-(n+2)\}.2.3\ldots(m-2).\varphi_2$
$+\{m-(n+3)\}.\{m-(n+2)\}.3.4\ldots(m-3).\varphi_3$
$+\{m-(n+4)\}.\{m-(n+3)\}.\{m-(n+2)\}.4.5\ldots$
$\times(m-4).\varphi_4$
$+\{m-(n+5)\}.\{m-(n+4)\}.\{m-(n+3)\}.$
$\times\{m-(n+2)\}.5.6\ldots(m-5).\varphi_5$

. . . .

$+\{m-(2n+2)\}.\{m+(2n+1)\}\ldots\{m-(n+3)\}.$
$\times\{m-(n+2)\}.(n+2)(n+3)\ldots\{m-(n+2)\}.\varphi_{n+2}$
$+\{m-(2n+3)\}.\{m+(2n+2)\}\ldots\{m-(n+3)\}.$
$\times\{m-(n+2)\}.(n+3)(n+4)\ldots\{m-(n+2)\}.\varphi_{n+3}$

. . . .

$+1.2.3\ldots n(n-1)f_{n+1}\{m+(n+1)r\}.r^{n+1}$
mi egyébiránt az előbbi §' kérdéses végalakjából is következik, ha benne n helyébe $n+1$ tétetik. Azon kérdéses alak tehát általában áll, úgy, valamint akkor, midőn $n=1, 2, 3, 4$.

10. §.

Tétessék a' 8 § végalakjában, mellyet épen most általánosnak bizonyítottunk, m helyett $m+1$, lesz:

$$\Delta^{(n)}_{m+1-n}{}^{r}=$$
$$1.2.3\ldots mA_m.r^m$$
$$+\{m-n\}.2.3\ldots(m-1).\varphi_1$$
$$+\{m-(n+1)\}.\{m-n\}.3.4\ldots(m-2).\varphi_2$$
$$+\{m-(n+2)\}.\{m-(n+1)\}.\{m-n\}.4.5\ldots(m-3).\varphi_3$$
$$+\{m-(n+3)\}.\{m-(n+2)\}.\{m-\{n+1)\}.\{m-n\}.$$
$$\times 5.6\ldots(m-4).\varphi_4$$

. . . .

$$+\{m-(2n-1)\}.\{m-(2n-2)\}\ldots\{m-(n+1)\}.\{m-n\}$$
$$\times(n+1)(n+2)\ldots\{m-n\}.\varphi_n$$
$$+\{m-2n\}.\{m-(2n-1)\}\ldots\{m-(n+2)\}.\{m-(n+1)\}$$
$$\times(n+2)(n+3)\ldots\{m-n\}.\varphi_{n+1}$$

. . . .

$$+1.2.3\ldots(n-1)\,nf_n(a+nr).\,r^n.$$

Mármost ugyanazon általános 's nem különben a' most lehozott alakból, ha azokban

$$m-n=1,$$

tétetik, lesz:

$$\triangle_1^{(m-1)}=1.2.3\ldots(m-1)f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.\,r^{m-1}$$
$$\triangle_2^{(m)}=1.2.3\ldots m A_m r^m$$
$$+1.2.3\ldots(m-1)f_{m-1}\{a+(m-1)r\}.\,r^{m-1}.$$

A' mellyből következik:

$$\triangle_1^{(m)}=\triangle_2^{(m-1)}-\triangle_1^{(m-1)}=1.2.3\ldots m A_m r^m;$$

mi állandó mennyiség levén, nyilvánvaló, hogy az $(m+1)$, $(m+2)$.. -dik különbségek mind elenyésznek.

Meg kell jegyeznem, hogy itt $f_m(a+mr)$ helyébe az 5 § szerint A_m tétetett.

11. §.

Ezekből láthatni, hogy a'

$$fa,\ f(a+r),\ f(a+2r),\ f(a+3r)\ldots$$

mennyiségek, mellyek itt minél egyszerübb módon kerestetnek, egy m-dik fokú arithmeticai sort képeznek, mellynek egyes tagjait könnyű lesz találni.

Nevezzük el az épen most idézett mennyiségeket, minthogy $fa=B_0$, hasonlóságuk miatt, a' következő módon:

$$f(a+r) = C_0$$
$$f(a+2r) = D_0$$
$$f(a+3r) = E_0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(a+mr) = M_0.$$

Továbbá a' 7, 8, 9 §§. kitételeiből okvetlenűl következik:

$$\frac{\triangle_1}{r} = f_1(a+r) = C_1$$

$$\frac{\triangle_1^{(2)}}{1.2\,r^2} = f_2(a+2r) = D_2$$

$$\frac{\triangle_1^{(3)}}{1.2.3\,r^3} = f_3(a+3r) = E_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\triangle_1^{(m)}}{1.2\ldots mr^m} = f_m(a+mr)$$
$$= M_m = A_m;$$

melly mennyiségeket mi a' 4 §. schemájában rekeszbe foglaltunk.

Legyen mármost egyformaság végett

$$\frac{\triangle_2}{r} = D_1 \qquad \frac{\triangle_2^{(2)}}{1.2\,r^2} = E_2$$

$$\frac{\triangle_3}{r} = E_1 \qquad \frac{\triangle_3^{(2)}}{1.2.\,r^2} = F_2$$

$$\frac{\triangle_4}{r} = F_1 \qquad \frac{\triangle_4^{(2)}}{1.2\,r^2} = G_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\triangle_{m-1}}{r} = M_1 \qquad \frac{\triangle_{m-2}^{(2)}}{1.2\,r^2} = M_2$$

$$\frac{\Delta_2^{(3)}}{1.2.3\,r^3} = F_3 \qquad \frac{\Delta_2^{(4)}}{1.2.3.4\,r^4} = G_4$$

$$\frac{\Delta_3^{(3)}}{1.2.3\,r^3} = G_3 \qquad \frac{\Delta_3^{(4)}}{1.2.3.4\,r^4} = H_4$$

$$\frac{\Delta_4^{(3)}}{1.2.3\,r^3} = H_3 \qquad \frac{\Delta_4^{(4)}}{1.2.3.4\,r^4} = J_4$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \qquad\qquad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{\Delta_{m-3}^{(3)}}{1.2.3\,r^3} = M_3 \qquad \frac{\Delta_{m-5}^{(4)}}{1.2.3.4\,r^4} = M_4$$

stb, stb.

Ezeket föltéve, minthogy a' 7 §. értelmében

$$C_0 = \Delta_1 + B_0$$
$$D_0 = \Delta_2 + C_0$$
$$E_0 = \Delta_3 + D_0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$M_0 = \Delta_{m-1} + L_0$$

lesz nyilván:

$$C_0 = C_1 r + B_0$$
$$D_0 = D_1 r + C_0$$
$$E_0 = E_1 r + D_0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$M_0 = M_1 r + L_0 \,.$$

A' miből látható, hogy a' 4. §. folytatott schemájában, melly ezzé lesz:

	A_m	A_{m-1}	A_{m-2}	A_{m-3}	..	A_2	A_1	A_0
a)	B	B_{m-1}	B_{m-2}	B_{m-3}	..	B_2	B_1	(B_0)
$a+r$)	C_m	C_{m-1}	C_{m-2}	C_{m-3}	..	C_2	(C_1)	C_0
$a+2r$)	D_m	D_{m-1}	D_{m-2}	D_{m-3}	..	(D_2)	D_1	D_0
.	.	.	.	.	.	.	.	.

$$\begin{array}{llllllllll} a+(m-2)r) & K_m & K_{m-1} & (K_{m-2}) & K_{m-3} & \ldots & K_2 & K_1 & K_0 \\ a+(m-1)r) & L_m & (L_{m-1}) & L_{m-2} & L_{m-3} & \ldots & L_2 & L_1 & L_0 \\ a+mr\quad) & (M_m) & M_{m-1} & M_{m-2} & M_{m-3} & \ldots & M_2 & M_1 & M_0 \end{array}$$

a' rekeszbe foglalt tagoktól bal felé esők és pedig az utolsó függő soréi ugyanazon egyszerü módon folynak a' második függőéiből 's a' fölöttök állókból, mint a' 4. §ban tanítatott, csakhogy itt a' sokszorozas r által történik.

12. §.

Ugyanazon 7. §ból következik, hogy

$$\frac{\triangle_2}{r} = \frac{\triangle_1^{(2)}}{r} + \frac{\triangle_1}{r}$$

$$\frac{\triangle_3}{r} = \frac{\triangle_2^{(2)}}{r} + \frac{\triangle_2}{r}$$

$$\frac{\triangle_4}{r} = \frac{\triangle_3^{(2)}}{r} + \frac{\triangle_3}{r}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\triangle_{m-1}}{r} = \frac{\triangle_{m-2}^{(2)}}{r} + \frac{\triangle_{m-2}}{r}$$

azaz, hogy:

$$D_1 = 2D_2r + C_1$$
$$E_1 = 2E_2r + D_1$$
$$F_1 = 2F_2r + E_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M_1 = 2M_2r + L_1$$

a' honnan látható, hogy a' bal felé számított második függő sor' tagjai hasonlóképen erednek a' 3dik és saját soruk' tagjaiból, csakhogy itt $2r$-rel kell sokszorozni.

Ugyanazon módon lesz:

$$\frac{\triangle_2^{(2)}}{1.2\,r^2} = \frac{\triangle_1^{(3)}}{1.2\,r^2} + \frac{\triangle_1^{(2)}}{1.2\,r^2}$$

$$\frac{\triangle_3^{(2)}}{1.2\,r^2} = \frac{\triangle_2^{(3)}}{1.2\,r^2} + \frac{\triangle_2^{(2)}}{1.2\,r^2}$$

$$\frac{\triangle_4^{(2)}}{1.2\,r^2} = \frac{\triangle_3^{(3)}}{1.2\,r^2} + \frac{\triangle_3^{(2)}}{1.2\,r^2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\triangle_{m-2}^{(2)}}{1.2\,r^2} = \frac{\triangle_{m-3}^{(3)}}{1.2\,r^2} + \frac{\triangle_{m-3}^{(2)}}{1.2\,r^2}$$

azaz:

$$E_2 = 3E_3 r + D_2$$
$$F_2 = 3F_3 r + E_2$$
$$G_2 = 3G_3 r + F_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M_2 = 3M_3 r + L_2$$

Hasonló okoskodásoknál fogva találtatik:

$$F_3 = 4F_4 r + E_3$$
$$G_3 = 4G_4 r + F_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M_3 = 4M_4 r + L_3$$

$$G_4 = 5G_5 r + F_4$$
$$H_4 = 5H_5 r + G_4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M_4 = 5M_5 r + L_4$$

stb, stb. És végül

$$M_{m-1} = mM_m r + L_{m-1}$$

Sőt minthogy a'

$$B_0 \quad C_0 \quad D_0 \quad E_0 \quad F_0 \quad G_0 \quad \ldots$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & \ldots \\
B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

mennyiségek arithmeticai sorokat képeznek, nyilván való, hogy azokat az

$$M_0 \ M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4 \ . \ . \ M_m$$

határokon túl is folytathatni, és pedig ugyanazon módon, mellyen a' rekeszen túli és rekeszbe foglalt tagok egyáltalában találtatnak.

13. §.

Schemánknak tehát a' következő alakja lesz:

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & mr & (m-1)r & (m-2)r & (m-3)r \, .. & 3r & 3r & r & \\
 & A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} \, .. & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\
a\ ) & B_m & B_{m-1} & B_{m-2} & B_{m-3} \, .. & B_3 & B_2 & B_1 & (B_0) \\
a+r\ ) & C_m & C_{m-1} & C_{m-2} & C_{m-3} \, .. & C_3 & C_2 & (C_1) & C_0 \\
a+2r) & D_m & D_{m-1} & D_{m-2} & D_{m-3} \, .. & D_3 & (D_2) & D_1 & D_0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a+(m-2)r) & K_m & K_{m-1} & (K_{m-2}) & K_{m-3} \, .. & K_3 & K_2 & K_1 & K \\
a+(m-1)r) & L_m & (L_{m-1}) & L_{m-2} & L_{m-3} \, .. & L_3 & L_2 & L_1 & L_0 \\
a+\ \ mr\ ) & (M_m) & M_{m-1} & M_{m-2} & M_{m-3} \, .. & M_3 & M_2 & M_1 & M_0 \\
a+(m+1)r) & N_m & N_{m-1} & N_{m-2} & N_{m-3} \, .. & N_3 & N_2 & N_1 & N_0 \\
a+(m+2)r) & O_m & O_{m-1} & O_{m-2} & O_{m-3} \, .. & O_3 & O_2 & O_1 & O_0 \\
a+(m+3)r) & P_m & P_{m-1} & P_{m-2} & P_{m-3} \, .. & P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

'S ezen schemának valamelly rekeszen inneni 's rekeszbe foglalt tagja találtatik, ha előzője ugyanazon vizirányos sorban, az ugyanazon sor' elején álló mennyiséggel sokszoroztatik, 's a' közvetlenűl fölötte álló tag a' sokszorozmányhoz hozzá adatik. Így tehát, hogy példák által világosítsuk fel a' szabályt: D_{m-3} találtatik, ha D_{m-2}-et először $(a+2r)$ által sokszorzom, és az $(a+2r)\ D_{m-2}$ sokszorozmányhoz a' D_{m-3} fölött álló C_{m-3} tagot hozzáadom, mi által nyilván

$$D_{m-3} = (a+2r)\ D_{m-2} + C_{m-3}\,.$$

Hasonlókép találtatnak a' következők:

$$C_{m-2} = (a+r)\ C_{m-1} + B_{m-2}$$
$$B_1 = aB_2 + A_1$$
$$C_1 = (a+r)\ C_2 + B_1$$

stb, stb. A' schemának valamelly rekeszen túli tagja pedig találtatik, ha előzője a' vizirányos sorban azon

$$r,\ 2r,\ 3r,\ 4r\ .\ .\ (m-1)r,\ mr$$

mennyiséggel sokszoroztatik, melly épen az előzőnek függő sora fölött áll (a' miből ki is tetszik, miért irtuk mi e' mennyiségeket a' schema fölibe), és a' sokszorozmányhoz a' keresett tag fölött álló mennyiség hozzáadatik. Így például L_2 találtatik, ha előbb L_3 $3r$ által sokszoroztatik, és a' $3L_3r$ sokszorozmányhoz K_2 hozzáadatik, ugy hogy

$$L_2 = 3L_3r + K_2$$

legyen. Hasonlókép találtatik:

$$M_3 = 4M_4r + L_3$$
$$O_{m-2} = (m-1)r\ O_{m-1} + N_{m-2}$$

stb, stb.

Legyen adva például a' következő egyenlet

$$fx = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x - 6$$

's keressük a'

$$f(1),\ f(2),\ f(3)\ \ldots\ldots f(6)$$

értékeket, hol tehát $a = r = 1$. Lesz:

	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	
	1	+ 3	— 2	— 1	+ 5	— 5
1)	1	+ 4	+ 2	+ 1	+ 6	(+ 1)
2)	1	+ 6	+ 14	+ 29	(+ 64)	+ 65
3)	1	+ 9	+ 41	(+ 152)	+ 368	+ 433
4)	1	+ 13	(+ 93)	+ 431	+ 1230	+ 1663
5)	1	(+ 18)	+ 165	+ 926	+ 3082	+ 4745
6)	1	+ 23	+ 257	+ 1697	+ 6476	+ 11221

a' mellyet ugyanazon módon folytatni lehet. Ezen példából, mellyben

$$\begin{aligned} f(1) &= \quad + 1 \\ f(2) &= \quad + 65 \\ f(3) &= \quad + 433 \\ f(4) &= \quad + 1663 \\ f(5) &= \quad + 4697 \\ f(6) &= + 11029\,, \end{aligned}$$

azt is lehet látni, hogy az fx egyenletnek legalább egy képes állító gyökere van 0 és 1 között, de hogy 1-en fölül, minthogy az utolsó függő sornak minden tagjai állítók lesznek, gyökeret keresni felesleges munka volna.

A' közönséges számolási mód által könnyen meggyőződhetünk, hogy:

$$f(6) = 6^5 + 3.\,6^4 - 2.\,6^3 - 6^2 + 5.\,6 - 5$$
$$= 11221\,;$$

mint feljebb találtatott.

Második például legyen

$$fx = x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 39x^2 + 31x - 101\,;$$

tehát lesz:

	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	
	1	— 8	+ 11	— 39	+ 31	— 101
1)	1	— 7	+ 4	— 35	— 4	(— 105)
2)	1	— 5	— 6	— 47	(— 98)	— 203
3)	1	— 2	— 12	(— 83)	— 264	— 467
4)	1	+ 2	(— 4)	— 95	— 454	— 921
5)	1	(+ 7)	+ 24	— 23	— 500	— 1421
6)	(1)	+ 12	+ 72	+ 193	— 114	— 1535
7)	1	+ 17	+ 140	+ 613	+ 1112	— 423
8)	1	+ 22	+ 228	+ 1297	+ 3706	+ 3283

a' honnan:

$$f(1) = -\ 105$$
$$f(2) = -\ 203$$
$$f(3) = -\ 467$$
$$f(4) = -\ 921$$
$$f(5) = -1421$$
$$f(6) = -1535$$
$$f(7) = -\ 423$$
$$f(8) = +3283;$$

miből látható, hogy az egyenletnek legalább egy gyökere van 7 és 8 között, és hogy 8-czon fölül gyökereket keresni nem kell. Mert valamint az utolsó 8-nak megfelelő viziranyos sor minden tagja, úgy minden nagyobb számnak megfelelő víizirányos sor minden tagja is állító lesz. Az utolsó tagok tehát 0-n már nem mehetnek keresztűl.

14. §.

Az 5. §. szerint:

$$fx = f_1x\,(x-a) + B_0$$
$$f_1x = f_2x\,(x-b) + C_1$$

$$f_2x = f_3x\,(x-c) + D_2$$
$$f_3x = f_4x\,(x-d) + E_3$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_{m-2}x = f_{m-1}x\,(x-k) + L_{m-2}$$
$$f_{m-1}x = f_mx\,(x-l) + M_{m-1}$$

a' hol

$$B_o = fa$$
$$C_1 = f_1b$$
$$D_2 = f_2c$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$L_{m-2} = f_{m-2}k$$
$$M_{m-1} = f_{m-1}l$$

úgy, hogy

$$fx = f_1x\,(x-a) + fa$$
$$f_1x = f_2x\,(x-b) + f_1b$$
$$f_2x = f_3x\,(x-c) + f_2c$$
$$f_3x = f_4x\,(x-d) + f_3d$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_{m-2}x = f_{m-1}\,(x-k) + f_{m-2}k$$
$$f_{m-1}x = f_m x\,(x-l) + f_{m-1}l$$

legyen. És legyenek mármost a, b, $c\ldots$ gyökerei az fx egyenletnek, azaz

$$fa = fb = fc = \ldots = o.$$

és szintúgy

$$x-a = x-b = x-c = x-d = \ldots = o.$$

Ezt föltéve lesz az utolsó egyenletek' elsejéből, ha benne x helyébe b. tétetik

$$fb = f_1b\,(b-a) + fa$$

azaz

$$f_1b\,(b-a) = o,$$

a' mellyből azon esetre, midon b a-val nem egyenlő, szemlátomást következik, hogy:

$$f_1b = C_1 \text{ is } = o.$$

Hasonló módon találtatik, hogy egyáltalában

$$f_1b = f_1c = f_1d \ldots = o,$$

midőn a, b, c, d.. gyökerei az egyenletnek. Mármost tétessék az utolsó egyenletek másodikába x helyébe c, lesz:

$$f_1c = f_2c\,(c - b) + f_1b$$

azaz

$$f_2c = D_2 = o,$$

azon föltétel alatt t. i. hogy c és b egymástól különbözők. Hasonló eredmény találtatott volna, ha x helyébe $a, b, c, d \ldots$ tétetett volna; a' miből kiviláglik, hogy egyáltalán

$$f_2a = f_2b = f_2c = f_2d \ldots = o,$$

midőn $a, b, c \ldots$ gyökerei az egyenletnek.

Ezen okoskodásmód által egész általánosságban találtatik: hogy

$$fa = B_0 = o,$$

midőn a gyökere az egyenletnek; 's hogy másodszor

$$f_1b = C_1 \text{ is } = o,$$

midőn a—n kivül b is gyökere ugyanazon egyenletnek; továbbá, hogy

$$f_2c = D_2 = o$$

$$f_3d = E_3 = o$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

midőn c, d.. is gyökerei az egyenletnek. Ez azonban csak akkor áll, mit jól meg kell jegyezni, ha az $a, b, c, d \ldots$ mennyiségek egymásután véve, minden kivétel nélkül gyökerei az egyenletnek.

'S e' lehozás' szelleméből kiviláglik, hogy ha a' schema' leszármaztatásában több

$$B_o,\ C_1,\ D_2,\ E_3\ldots$$

rekeszbe foglalt egymásutáni mennyiség $=o$, hogy akkor az illető

$$B_o,\ C_o,\ D_o,\ E_3\ldots$$

mennyiségek is $=o$ lesznek; avvagy mi egyre megy ki, hogy akkor $a,\ b,\ c,\ d\ldots$ gyökerei az egyenletnek. Nem is kell ekkor a' $C_o,\ D_o,\ E_o\ldots$ mennyiségeket keresni.

Például legyen adva

$$fx = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$$

's legyen itt $x=1,\ 2,\ 3\ldots$, lesz

$$\begin{array}{llllll} & 1 & -5 & +9 & -7 & +2 \\ (1) & 1 & -4 & +5 & -2 & (0) \\ (2) & 1 & -2 & +1 & (0) & \\ (3) & 1 & +1 & (+4) & & \\ & . & . & . & . & \end{array}$$

már ebből kitetszik, hogy 1, 2 gyökerei az fx egyenletnek; mellyet mármost

$$(x-1)\ (x-2)$$

által osztani 's ez által a' második fokra leszállítani lehet.

15. §.

Az 5. §ban továbbá találtatott, hogy:

$$\begin{aligned} fx = {} & A_m\ (x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ldots(x-k)\ (x-l) \\ & + f_{m-1}\, l\ (x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ldots(x-k) \\ & + f_{m-2}\, k\ (x-a)\ (x-b)\ldots(x-i). \end{aligned}$$

. . . .

$$+f_3 d\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)$$
$$+f_2 c\,(x-a)\,(x-b)$$
$$+f_1 b\,(x-a)$$
$$+fa$$

avvagy A_m, $f_{m-1} l$, $f_{m-2} k \ldots f_3 d$, $f_2 c$, $f_1 b$, fa helyébe azoknak

$$M_m,\ L_{m-1},\ K_{m-2} \ldots D_2,\ C_1,\ B_0$$

értékeiket téve, hogy

$$\begin{aligned} fx = M_m & (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots(x-k)(x-l) \\ &+L_{m-1}\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots(x-k) \\ &+K_{m-2}\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots(x-i) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+E_3\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c) \\ &+D_2\,(x-a)\,(x-b) \\ &+C_1\,(x-a) \\ &+B_0. \end{aligned}$$

És legyen mármost

$$a=b=c=\ldots k=l;$$

ennél fogva lesz:

$$fx=M_m(x-a)^m+L_{m-1}(x-a)^{m-1}+K_{m-2}(x-a)^{m-2}$$
$$+\ldots+D_2(x-a)^2+C_1(x-a)+B_0.$$

'S ha mármost ebben

$$x-a=y$$

tétetik, nyilvánvaló hogy

$$M_m y^m + L_{m-1} y^{m-1} + K_{m-2} y^{m-2} + \ldots$$
$$+D_2 y^2 + C_1 y + B_0 \quad = Fy$$

egy uj egyenlet, mellynek gyökerei az fx egyenletéinél a-val kisebbek. 'S ez a' rekeszbe foglalt számoknak uj nevezetes tulajdonsága, hogy azok előszámai egy másik egyenletnek, mellynek gyökerei a-val kisebbek. Ez azonban csak azon föltétel alatt áll, ha leszármaztatásában a' mondott mennyiségeknek

$$a = b = c = d \ldots = k = l$$

vétetett.

Vegyük például az előbbi §nak

$$fx = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$$

egyenletét, és foggyasszuk gyökereit 2-vel; lesz:

	1	-5	$+9$	-7	$+2$
2)	1	-3	$+3$	-1	(0)
2)	1	-1	$+1$	$(+1)$	
2)	1	$+1$	$(+3)$		
2)	(1)				

következőleg az uj egyenlet

$$Fy = y^4 + 3y^3 + 3y^2 + y = o,$$

azaz y-nal osztva

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = o;$$

mellynek gyökerei nyilván $= -1$, minthogy az egyenlet maga $= (y + 1)^3 = o$.

Innét látható, hogy az

$$fx = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$$

egyenletnek a' 2-ön kivül, még 1 is gyökere, és pedig ezen utóbbi háromszor, úgy hogy

$$x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = (x - 1)^3 . (x - 2)$$

legyen; miután a' tőle leszármazott egyenlet

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (y + 1)^3 ..$$

Legyen második például:

$$fx = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

és szállitsuk le ennnek gyökereit 1-gyel, lesz

	1	-2	$+3$	-2
1)	1	-1	$+2$	(0)
1)	1	0	$(+2)$	

1) 1 (1)

1) (1)

és innét:

$$Fy = y^3 + y^2 + 2y = o$$

avvagy y-nal osztva:

$$Fy = y^2 + y + 2 = o$$

's ennek gyökerei

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7} \text{ és } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}$$

's minthogy az fx egyenlet' gyökerei 1-gyel ezeknél nagyobbak, lesz

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7},$$

's ezenkivül $x = 1$, minthogy $B_0 = o$.

16. §.

A' 98. lapon találtatott, hogy midőn

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = o$$

és ebbe x helyébe $\frac{1}{y}$ tétetik, az eredményegyenlet ez:

$$y^m + \frac{M}{N}\cdot y^{m-1} + \frac{L}{N}\cdot y^{m-2} + \ldots + \frac{A}{N}\cdot y + \frac{1}{N} = o,$$

avvagy N által sokszorozva:

$$Ny^m + My^{m-1} + Ly^{m-2} + \ldots + Ay + 1 = o.$$

Még általánosabban, midőn

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$+ A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = o,$$

lesz:

$$A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_{m-2} y^2 + A_{m-1} y + A_m = o$$

a' hol $\frac{1}{y} = x$,

mint feljebb; melly utolsó egyenlet az előbbi viszonlagosának (*reciprocus*) neveztetik.

Néha megkivántatik, hogy olly egyenlet hozassék le, mellynek gyökerei a' viszonlagos gyökereinél valamivel, közönségesen 1-gyel kisebbek. Irassanak tehát az adott egyenlet' előszámai megfordított renden 's hozassék le a' kivánt egyenlet az előbbi §. tanításai szerint.

Példaúl legyen adva:

$$fx = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

mellynek gyökerei 1, 2, 3. A' viszonlagos egyenlet' előszámai ezek lesznek:

$$-6 \quad +11 \quad -6 \quad +1$$

avvagy az előjegyeket ellenkezőkké változtatva, 's az előbbi §. szerint, lesz:

$$\begin{array}{llllll} & 6 & -11 & +6 & 1 & \\ 1) & 6 & -5 & +1 & (0) & \\ 1) & 6 & +1 & (+2) & & \\ 1) & 6 & (+7) & & & \\ 1) & (6) & & & & \end{array}$$

következőleg:

$$6z^3 + 7z^2 + 2z = o$$

avvagy z-vel osztva

$$6z^2 + 7z + 2 = o$$

olly egyenlet, mellynek gyökerei a' viszonlagoséinél 1-gyel kisebbek, következőleg ezek:

$$\frac{1}{1} - 1 \,;\, \frac{1}{2} - 1 \,;\, \frac{1}{3} - 1 \,,$$

azaz o, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$; minek valóságáról sokszorozás által könnyen meg lehet győződni.

17. §.

Ritkábban lesz szükségünk egyéb alakváltoztatásokra. Azok' sorából, mellyeknek néha hasznát vehetni, emlékeztetjük az olvasót a' következőkre:

1) Midőn

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = o$$

akkor lesz a' 96. l. szerint

$$A_m y^m + n A_{m-1} y^{m-1} + n^2 A_{m-2} y^{m-2} + \ldots$$
$$+ n^{m-2} A_2 y^2 + n^{m-1} A_1 y + n^m A_0 = o$$

olly egyenlet, mellynek gyökerei n-szerte x-nél nagyobbak. 'S néha megesik itten, hogy az

$$A_m,\ nA_{m-1},\ n^2 A_{m-1} \ldots$$

előszámokat valamelly közszorzójok által oszthatni is.

Ezen alakváltoztatást akkor fogjuk használni, midőn több gyökér igen közel esik egymáshoz. Illyen például az

$$6x^2 + 7x + 2 = o$$

egyenlet, mellynek gyökerei, mint épen az imént láttuk, ezek: $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$. Ha azon egyenletet keresnők, mellynek gyökerei 6-szorta nagyobbak, lenne

$$\begin{array}{ccccc} 6 & + & 7 & + & 2 \\ 1 & & 6 & & 36 \\ \hline 6 & + & 42 & + & 72 \end{array}$$

's igy a' keresett egyenlet

$$6y^2 + 42y + 72 = o,$$

avvagy 6-tal, mint közszorzóval elosztva

$$y^2 + 7y + 12 = o,$$

mellynek gyökerei tehát: $-3, -4$.

2) Midőn

$$A_m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_2x^2 + A_1x + A_0 = o$$

lesz ugyan is a' 96. l. szerint

$$n^m A_m y^m + n^{m-1}A_{m-1}y^{m-1} + n^{m-2}A_{m-2}y^{m-2} + \ldots$$
$$+ n^2A_2y^2 + nA_1y + A_0 = o$$

uj egyenlet, mellynek gyökerei x-nél n-szerte kisebbek. Az utóbbi egyenlet n^m által osztva ezzé lesz

$$A_m y^m + \frac{A_{m-1}}{n}.y^{m-1} + \frac{A_{m-2}}{n^2}.y^{m-2} + \ldots$$

$$+ \frac{A_2}{n^{m-2}}.y^2 + \frac{A_1}{n^{m-1}}.y + \frac{A_0}{n^m} = o$$

'S ezen alakváltoztatást akkor lehet használni, midőn az előszámok felette nagyok, kivált ha azokat maradvány nélkül osztható n, n^2, $n^3 \ldots$ által.

Példaul legyen adva

$$x^3 + 8x^2 - 64x - 384 = o,$$

a' miből, a' gyökereket 4-szerte kisebbítve lesz:

$$x^3 + \frac{8}{4}.x^2 - \frac{64}{4^2}.x - \frac{384}{4^3} = o,$$

avvagy:

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 6 = o.$$

18. §.

Feljebb a' 109. l. találtatott, hogy valamelly fx egyenletben annyi az állító és tagadó gyökér, valamenynyi a' jegyváltozás vagy illetőleg jegyfolyam. E' tétel azonban csak azon megszorítás alatt áll, ha valamennyi gyökér képes. Képes és képtelen gyökerekre nézve így áll az: hogy legfeljebb annyi az állító vagy tagadó gyökér, valamennyi a' jegyváltozás vagy jegyfolyam; mert ezen utóbbiak képtelen gyökerek által is eredhetnek. Hogy ez megeshetik, a' következőkből fog kiviláglani. 'S mi itt is, mint eddigelő egyáltalában, föltesszük, hogy az adott egyenleteknél csak képes előszámok fordúlnak elő.

A' képtelen gyökereknek általános alakja ez:

$$x = p + q\sqrt{-1};$$

's azt is tudjuk, hogy két összrendelt illyen gyökérből képes előszámú háromtagú egyenlet származik. Sokszorozzunk t. i. két illyen összrendelt gyökérszorzót egymással, nyilván lesz:

$$\{x - p - q\sqrt{-1}\}.\{x - p + q\sqrt{-1}\}$$
$$= x^2 - 2px + p^2 + q^2 = o,$$

azaz

$$x^2 - \alpha x + \beta = o,$$

hol $\alpha = 2p$; $\beta = p^2 + q^2$; melly utolsó kifejezés tehát mindég állító. Az

$$x^2 - \alpha x + \beta = o$$

egyenletből világos, hogy benne két jegyváltozás van, mikor p következőleg α is állító; ellenben pedig két jegyfolyam, midőn p tagadó.

Sokszorozzunk mármost két illyen

$$x^2 - \alpha x + \beta = o$$
$$x^2 - \alpha' x + \beta' = o$$

háromtagút egymással. Az eredmény, mint könnyen találtatik, ez:

$$x^4 - \{\alpha + \alpha'\}x^3 + \{\beta + \alpha\alpha' + \beta'\}x^2$$
$$- \{\alpha\beta' + \alpha'\beta\}x + \beta\beta' = o.$$

'S midőn itt mind α mind pedig α' állítók, nyilvánvaló, hogy 4 jegyváltozás lesz, úgy mintha 4 állító képes gyökér lenne. Másodszor, midőn mind α mind α' tagadók csupa jegyfolyam lesz, mintha az egyenletnek csupa tagadó képes gyökere volna. A' harmadik még hátra levő eset még nevezetesebb, az t. i. midőn α állító α' pedig tagadó. Ekkor t. i. vagy csupa azaz 4 jegyváltozás lehet, vagy csak kettő, vagy pedig csupa jegyfolyam. Csupa jegyváltozás lesz, midőn a' rekeszbe foglalt előszámok mind állítók; csupa jegyfolyam, midőn a' második és negyedik tagadók, a' harmadik állító; két jegyváltozás és szintannyi jegyfolyam többféleképp, mint midőn a' rekeszbe foglalt mennyiségek mind tagadók.

Példák. Arra, hogy négy jegyváltozás lesz, midőn mind α mind α' állítók, szolgálhatnak a' következő háromtagúak:

$$x^2 - 2x + 2 = o$$
$$x^2 - 2x + 3 = o,$$

mellyeknek gyökerei

$$1 \pm \sqrt{-1}\ ;\ \ 1 \pm \sqrt{-2}\ ;$$

's a' keletkező egyenlet, mellynek gyökerei ugyanazok, a' következendő:

$$x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 6 = o.$$

Második például szolgálhatnak ezek:

$$x^2 + 2x + 2$$
$$x^2 + 2x + 3$$

(gyökereik $-1 \pm \sqrt{-1}$; $-1 \pm \sqrt{-2}$) a' mellyekből lesz csupa jegyfolyammal:

$$x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x + 6 = o.$$

Harmadik például ('s ebben valamint a' következőkben egyáltalában α állító, α' tagadó) szolgálhat ez:

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 16 = o\ ;$$

mellynek gyökerei

$$\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7}\,; \quad 1 \pm \sqrt{-3}$$

's melly ezekből

$$x^2 - 3x + 4 = o$$
$$x^2 - 2x + 4 = o$$

ered.

Negyedik például legyen:

$$x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10 = o,$$

melly az

$$x^2 - 2x + 2 = o$$
$$x^2 + 3x + 5 = o$$

háromtaguakból ered 's mellynek gyökerei:

$$1 \pm \sqrt{-1}\,; \quad -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-11}.$$

Ötödik például lesz:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x + 10 = o,$$

mellynek gyökerei

$$\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-11}\,; \quad -1 \pm \sqrt{-1}$$

's melly az

$$x^2 - 3x + 5 = o$$
$$x^2 + 2x + 2 = o$$

háromtagúaktól ered.

Hatodik és utolsó például szolgálhat:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 12 = o,$$

mellynek háromtagúi:

$$x^2 - 2x + 3 = o$$
$$x^2 + 3x + 4 = o,$$

's mellynek gyökerei:

$$1 \pm \sqrt{-2}\,; \quad -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

19. §.

Legyen az illyen, képtelelen gyökerektől származó, négytagú egyenlet általában ez:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o$$

mellynek szélső tagjai (azaz az első és utolsó) mindég állítók, a' többiek állítók vagy tagadók, és sokszorozzuk ezen egyletet:

1) $$x^2 + \alpha x + \beta = o$$

által, lesz az eredmény

$$\begin{array}{llllll} x^6 + A \\ \;\; + \alpha \end{array}\Big\} x^5 \begin{array}{l} + B \\ + \alpha A \\ + \beta \end{array}\Big\} x^4 \begin{array}{l} + C \\ + \alpha B \\ + \beta A \end{array}\Big\} x^3 \begin{array}{l} + D \\ + \alpha C \\ + \beta B \end{array}\Big\} x^2 \begin{array}{l} + \alpha D \\ + \beta C \end{array}\Big\} x + \beta D = o$$

mellynek szélső tagjai szinte állítók. Midőn itt mint A, B, C mind pedig α állítók, látni való, hogy az eredvény-egyenletben csupa jegyfolyam lesz. Midőn pedig jegyváltozások is vannak az

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o$$

egyenletben, akkor jegyváltozások lehetnek az eredvény-egyenletben is.

Legyen például:

$$x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10 = o,$$

hol tehát $A = 1$; $B = 1$; $C = -4$. Ezt

$$x + \alpha x + \beta = o$$

által sokszorozván, csupa jegyfolyam lesz, mihelyt

$$1 + \alpha > o$$
$$1 + \alpha + \beta > o$$
$$-4 + \alpha + \beta > o$$
$$10 - 4\alpha + \beta > o$$
$$10\,\alpha - 4\,\beta > o$$

mint midőn például $\alpha = 2$, $\beta = 4$; a' miből lesz:

$$x^6 + 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4x + 40 = o.$$

Jegyvaltozások lesznek ellenben, ha ugyanazon

$$x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10 = o$$

egyenlet például

$$x^2 + x + 1 = o$$

által sokszoroztatik. A' miből nyilván lesz:

$$x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x + 10 = o,$$

vagy pedig ha az

$$x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = o,$$

avvagy, mi vele egyenlő:

$$2x^2 + x + 4 = o$$

által sokszoroztatik; mint a' midőn lesz:

$$2x^6 + 3x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 20x^2 - 6x + 40 = o,$$

hol csak két jegyfolyam van, jegyváltozás ellenben négy.

Az olvasó maga fogja tudni, hogy az itt használt

$$x^2 + x + 1 = o$$

$$2x^2 + x + 4 = o$$

kéttagúaknak gyökerei ezek:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

$$-\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-31}.$$

2) Midőn ellenben a' sokszorzás

$$x^2 - \alpha x + \beta = o$$

által történik (hol α magában véve állító mennyiség); mellynek eredvény-egyenlete ez:

$$x^6 + \left.\begin{matrix} A \\ -\alpha \end{matrix}\right\} x^5 + \left.\begin{matrix} B \\ -\alpha A \\ +\beta \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} C \\ -\alpha B \\ +\beta A \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} D \\ -\alpha C \\ +\beta B \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} -\alpha D \\ +\beta C \end{matrix}\right\} x + \beta D = o$$

ez utolsóban vagy csupa vagy csak néhány (4 vagy 2) jegyváltozás, vagy csupa jegyfolyam lehet, az A, B, C, D, α, β különös számbeli értékeik szerint.

Első példaul szolgáljon az:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 12 = o$$

egyenlet, melly

$$x^2 - 2x + 3 = o$$

által sokszorozva 4 jegyváltozást ad. Az eredmény tudniillik ez:

$$x^6 - x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 13x^2 - 21x + 36 = o.$$

Ha pedig az

$$x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10 = o$$

egyenlet sokszoroztatik

$$x^2 - 2x + 3 = o$$

által, az

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 21x^2 - 32x + 30 = o$$

eredvényegyenletben csupa jegyváltozás lesz. Csupa jegyfolyam lesz példaul, ha az

$$x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 24x + 20 = o$$

egyenlet sokszoroztatik

$$x^2 - 2x + 3 = o$$

által. A' sokszorozásból

$$x^6 + 2x^5 + 11x^4 + 4x^3 + 20x^2 + 32x + 60 = o$$

keletkezik.

20. §.

Ezen okoskodást folytatva látjuk, hogy képtelen gyökerek is származtatnak jegyváltozásokat valamint jegyfolyamokat is, és hogy a' jegyváltozások- valamint jegyfolyamokból csak úgy lehet a' képes gyökerek' állító vagy tagadó voltukra következtetést húzni, ha a' képtelen gyökerek e' következtetésből kihagyatnak.

Különös eset az, midőn az adott egyenletnek némelly előszámai $=o$. Legyen először az fx egyenletnek csak egy előszáma $=o$, tehát

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Ex^{m-r} + Fx^{m-(r+2)} \ldots + Mx + N = o.$$

Itt

$$Ex^{m-r} \text{ és } Fx^{m-(r+2)}$$

között egy tag hibázik, mellyet o előszámmal és $\pm$ jegygyel beiktatva, lesz az egyenletnek e' része:

$$Ex^{m-r} \pm ox^{m-(r+1)} + Fx^{m-(r+2)}$$

's ha mármost E és F különböző előjegyüek, szembetünő dolog, hogy a' jegyváltozások' száma nem szaporodik, akár állítónak, akár tagadónak vegyük a' hibázó tagot. Ellenben midőn E és F ugyanazon előjegyüek, akkor a' jegyzáltozások vagy jegyfolyamok' száma kettővel szaporodik, a' mint különböző vagy hasonló előjegyűnek veszszük a' hibázó tagot.

Még nagyobb változatosság ered, midőn

$$Ex^{m-r} \text{ és } Fx^{m-(r+r')}$$

között több tagok hibáznak 's iktattatnak be $\pm$ előjegygyel, így:

$$Ex^{m-r} \pm ox^{m-(r+1)} \pm ox^{m-(r+2)} \pm \ldots \pm ox^{m-(r+r'-1)} + Fx^{m-(r+r')}$$

De akkor a' hibázó tagok előjegyeit mindég úgy lehet combinálni egymással, hogy a' jegyváltozásoknak vagy jegyfolyamoknak száma maximum vagy minimum legyen.

Például legyen

$$x^3 + 1 = o$$

azaz

$$x^3 \pm ox^2 \pm ox + 1 = o$$

Itt a' jegyváltozások' maximuma $=2$; minimuma $=o$, a' jegyfolyamok' maximuma $=3$; minimuma $=1$.

21. §.

Minthegy a' hibázó tagokat az fx egyenletbe szintúgy $+$ mint $-$ előjegygyel és o előszámmal lehet iktatni, világos, hogy az fx egyenletnek legfeljebb annyi állító és képes gyökere leend, valamennyi (a' beiktatás megtörténvén) a' jegyváltozásoknak minimuma; és hasonlólag, hogy ugyanazon fx egyenletnek legfeljebb annyi tagadó képes gyökere lehet, a' mennyi ugyanazon beiktasásnál fogva a' jegyfolyamoknak minimuma Legyen az fx egyenletnek foka $=m$; lehető jegyváltozásainak minimuma $=m'$; lehető jegyfolyamainak minimuma $=m''$; ezt föltéve, minthogy az fx egyenletnek minden bizonynyal m gyökere van, világos, hogy legalább

$$m-(m'+m'')$$

gyökerének képtelennek kell lenni.

Ezt előre bocsátva, menjünk át most egyes esetekre.

Midőn csak egy tag hibázik, és ennek szomszéd tagjai ugyanazon előjegyűek, akkor az egyenletnek legalább két képtelen gyökere van. Ha pedig a' szomszéd tagok különböző jegyűek, képtelen gyökerekre következtetést nem húzhatni.

Midőn az adott egyenlet ez

$$fx=x^m+1=o,$$

lesz a' jegyváltozásoknak minimuma, a' hibázó tagokat mind $+$ előjegygyel iktatván be, $=o$; a' jegyfolyamoknak minimuma, midőn m páros szám, szinte $=o$; midőn ellenben m páratlan, $=1$; a' honnan következik, hogy az első esetben minden gyökér képtelen; a' másikban egy, de csak egy képes leend.

Midőn ellenben

$$fx = x^m - 1 = o,$$

lesz a' lehető jegyváltozásoknak minimuma $= 1$; a' jegyfolyamoké $= o$, midőn m páratlan, ellenben pedig $= 1$; az első esetben tehát az egyenletnek 1, a' másodikban 2 képes gyökere leend.

Például az

$$x^3 + 1 = o$$

egyenletnek csak egy képes gyökere lesz, és ez $= -1$; ha mármost az $x + 1 = o$ által osztatik, lesz

$$x^2 - x + 1 = o;$$

következőleg az

$$x^3 + 1 = o$$

gyökerei: $-1; + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Második például szolgáljon:

$$x^4 - 1 = o;$$

mellynek két képes gyökere van. Ezek, mint az első pillantásra láthatni, $= +1$ és -1. Mármost

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

által osztva, keletkezik:

$$x^2 + 1 = o$$

mellynek gyökerei: $\pm\sqrt{-1}$; a' négy gyökér tehát: $+1$; -1; $+\sqrt{-1}$; $-\sqrt{-1}$

22. §.

Midőn a' gyökerek a' 15 §. értelmében leszállíttatnak, megeshetik, hogy az állító gyökerek tagadókká lesznek. Ez akkor fog történni, midőn az állító (képes) gyökerek kisebbek, mint azon szám, melly által a' leszállítás történik. 'S ekkor a' jegyváltozásokból jegyfolyamok is lesznek egyszersmind.

Szállítsuk le az fx egyenletben a' gyökereket a-val és b-val, hol $a < b$ és mind a' kettő állító mennyiség, 's legyen az $f(x+a)$ egyenletnek m' jegyváltozása, az $f(x+b)$ egyenletnek pedig m'' (hol m'' soha nagyobb mint m nem lehet) akkor azt fogjuk következtetni, hogy az fx egyenletnek a és b között legfeljebb $m' - m''$ állító gyökere lehet. Lehet mondom, mert a' jegyfolyamok a' képtelen gyökerektől is eredhetnek.

De hogy erről minél világosabb fogalmunk legyen, vizsgáljuk a' következő kifejezést:

$$fx + (x - A)\ (x - A_1)\ (x - A_2)\ (x - A_3) \dots$$
$$\times\ (x^2 - \alpha x + \beta)\ (x^2 - \alpha_1 x + \beta_1) \dots \times\ \varphi x;$$

hol A, A_1, A_2 . . α, α_1 . . β, β_1 . . magokban mind állító mennyiségek, és hol φx az

$$x + B = o$$
$$x^2 + \alpha x + \beta = o$$

formájú factoroknak sokszorozmánya; úgy hogy fx képviselője legyen minden felsőbb egyenletnek.

Ha mi ezt a' kifejezést közelebbről vizsgáljuk, azt fogjuk találni, hogy φx kivétel nélkül állító tagokból áll; melly midőn

$$x^2 - \alpha x + \beta = o$$

formájú szorzóval sokszoroztatik, jegyváltozást vagy épen nem vagy kettőt kap; míg az

$$x - A = o$$

formájú szorzók egyenként csak egygyel szaporítják a' jegyváltozások' számát. — Azt mondtam az imént, hogy az

$$x^2 - \alpha x + \beta = o$$

féle szorzók a' jegyváltozásokat vagy épen nem vagy kettővel szaporítják, mi onnét látható, hogy e' sokszorozás által φx utolsó tagjának előszáma változást, minthogy β mindég állító, nem szenvedhet.

23. §.

Midőn mármost fx-ből más egyenlet formáltatik, mellynek gyökerei a-val kisebbek, lesz x helyébe $y+a$ tétetvén

$$f(y+a)=\{y+(a-A)\}.\{y+(a-A_1)\}\ldots$$
$$\times\{y+(2a-\alpha)y+(a^2-\alpha a+\beta)\}..\varphi_1 y$$

És most hasonlólag bánva fx-xel, azaz $x=y+b$ tétetvén lesz:

$$f(y+b)=\{y+(b-A)\}.\{y+(b-A_1)\}\ldots$$
$$\times\{y^2+(2b-\alpha)y+(b^2-\alpha b+\beta)\}..\varphi_2 y$$

Itt először $\varphi_1 y$ és $\varphi_2 y$-ban csupa jegyfolyamok vannak, 's ezen jegyfolyamokat szaporítják az

$$y+(a-A)$$
$$y^2+(2a-\alpha)y+(a^2-\alpha a+\beta)$$

féle sokszorzók is, az elsők, midőn

$$a>A,$$

az utolsók, midőn

$$2a\overset{=}{>}\alpha,$$

a' midőn tehát

$$y^2+(2a-\alpha)y+(a^2-\alpha a+\beta)$$

csupa állító tagokkal bir; mi azonban előbb is már történik, mintsem

$$2a\overset{=}{>}\alpha$$

lenne. De mi itt figyelemre méltó: az

$$y+(a-A)$$

féle sokszorzók csak egyegyel egygyel, az

$$y^2+(2a-\alpha)y+(a^2-\alpha a+\beta)$$

félék ellenben kettővel kettővel szaporítják a' jegyfolyamok számát.

Hasonlóúl okoskodván az $f(y+b)$ kifejezésre nézve, hol $b>a$, át fogjuk látni, hogy midőn az $f(x+b)$ kifejezésben csak egy, vagy három, öt stb, azaz általában páratlan számú jegyfolyamokkal több van mint az $f(y+a)$ kifejezésben, akkor az fx egyenletnek a és b között legalább egy való gyökere lesz. De meglehet, hogy három, öt 's általában páratlan számmal van.

Midőn ellenben a' jegyfolyamok páros számmal szaporodnak, akkor meglehet, hogy a' való gyökerek páros számmal legyenek a és b között; de meglehet az is, hogy a' jegyfolyamok' szaporodása ez esetben csupa

$$y^2+(2b-\alpha)y+(b^2-\alpha b+\beta)$$

féle szorzóktól, tehát képtelen gyökerektől veszi eredetét.

Példaúl szolgáljon a' következő egyenlet:

$$x^6-7x^5+13x^4-2x^3-2x^2-36x+48=o;$$

mellynek négy jegyváltozása van, tehát szintannyi állító képes gyökere lehet. Szálítsuk le gyökereit 1-gyel, lesz

$$\begin{array}{llllllll}
 & 1 & -7 & +13 & -2 & -2 & -36 & +48 \\
1) & 1 & -6 & +7 & +5 & +3 & -33 & (+15) \\
1) & 1 & -5 & +2 & +7 & +10 & (-23) & \\
1) & 1 & -4 & -2 & +5 & (+15) & & \\
1) & 1 & -3 & -5 & (0) & & & \\
1) & 1 & -2 & (-7) & & & & \\
1) & 1 & (-1) & & & & & \\
1) & (1) & & & & & &
\end{array}$$

az eredő egyenlet ez:

$$y^6-y^5-7y^4+15y^2-23y+15=o;$$

mellynek szinte négy jegyváltozása van. Szálítsuk le továbbá ennek gyökereit 2-vel, azaz fx-éit 3-mal, lesz:

	1	-1	-7	0	$+15$	-23	$+15$
2)	1	$+1$	-5	-10	-5	-33	(-51)
2)	1	$+3$	$+1$	-8	-21	(-75)	
2)	1	$+5$	$+11$	$+14$	$(+7)$		
2)	1	$+7$	$+25$	$(+64)$			
2)	1	$+9$	$(+43)$				
2)	1	$(+11)$					
2)	(1)						

Az eredő egyenlet ez

$$y'^6 + 11y'^5 + 43y'^4 + 64y'^3 + 7y'^2 + 75y' - 51 = o;$$

mellynek csak egy jegyváltozása van. 'S ebből következik, hogy fx, 1 és 3 között, vagy 1 vagy 3 való gyökérrel bir.

24. §.

Az egyenleteknek megfejtésében sok bajt szoktak okozni a) az ismételt és képes; b) a' képtelen gyökerek.

Minthogy Horner' megfejtésmódja lényegesen abban áll, hogy a' gyökerek addig leszálítatnak, míg az eredő egyenletnek utolsó tagja elenyészik; látni való, hogy az ismételt gyökerek magok fognak kitűnni és pedig az által, hogy midőn két, három stb gyökér egymással egyenlő a' két, három stb utolsó tagnak el kell enyésznie.

Ennek megértésére emlékeztetjük az olvasót, hogy az eredő egyenletnek utolsó tagjai ezek (3. §):

$$B_0 = fa$$
$$C_1 = f_1 b$$
$$D_2 = f_2 c$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

mellyek elenyésznek, midőn $a, b, c \ldots$ gyökerei az egyenletnek; 's mellyek szükségképen elenyésznek akkor is, midőn

$$a = b = c \ldots$$

's a gyökere az egyenletnek.

Még világosabb lesz a' tárgy a' következő okoskodás által. Legyen a ismételt gyökere az fx egyenletnek, mi azonban rend szerint előre nem tudatik. Horner' megfejtésmódja abban állván, hogy fx-ben a' gyökerek a-val leszállítatnak azaz benne x helyébe $x+a$ tétetik, szükségképen az $f(x+a)$ egyenlet ered, mellyben anynyiszor találtatik $x=o$, valahány gyökere az fx-nek $=a$. Legyen fx, tehát $f(x+a)$ is m-dik fokú, 's amannak n gyökere $=a$, tehát emennek ugyanannyi $=o$. Ezt föltéve lesz:

$$f(x+a) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-o)^n;$$

melly kifejezésben α, β .. az egyes a-tól különböző gyökerek, mellyeknek száma $=m-n$. Az

$$x-\alpha$$
$$x-\beta$$
$$\ldots.$$

szorzóknak eredvénye, az $x-o$ szorzók' kirekesztésével, egy $m-n$ fokú egyenlet

$$x^{m-n} + Ax^{m-n-1} + Bx^{m-n-2} + \ldots$$
$$+ Ex + F = o.$$

'S ez $(x-o)^n = x^n$ által sokszorozva ezzé lesz:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + + \ldots$$
$$+ Ex^{n+1} + Fx^n = o;$$

mi összehasonlítatván az általános

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots$$
$$+ Ex^{n+1} + Fx^n + \ldots$$
$$+ Mx + N = o$$

kifejezéssel, kitetszik, hogy $f(x+a)$ egyenletben az F utáni valamennyi, tehát n, tag hibázik.

Példaúl szolgálhat az

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 = o$$

egyenlet, 's probáljuk meg, valljon 1 gyökere-e az egyenletnek. Szálítsuk le tehát gyökereit 1-gyel, lesz:

$$\begin{array}{lllll} & 1 & -2 & +4 & -6 & +3 \\ 1) & 1 & -1 & +3 & -3 & (0) \\ 1) & 1 & (0) & +3 & (0) & \\ 1) & 1 & +1 & (+4) & & \\ 1) & 1 & (+2) & & & \\ 1) & 1 & & & & \end{array}$$

a' miből látható, hogy 1 kettős gyökere az egyenletnek, mert az eredő egyenlet ez:

$$y^4 + 2y^3 + 4y^2 + oy + o = o,$$

azaz

$$y^2 + 2y + 4 = o;$$

's minthogy ezen utolsónak két gyökere ez

$$-1 + \sqrt{-3}; \; -1 - \sqrt{-3};$$

lesz egygyel megtoldva (a' leszállítás miatt) az

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 = o$$

egyenletnek többbi két gyökere $= \pm\sqrt{-3}$, következőleg az egyenlet maga

$$= (x-1)^2 \, (x+\sqrt{-3}) \, (x-\sqrt{-3}).$$

25. §.

Felette fontosok a' képtelen gyökereknek ismertető jelei.

I. Legyen az adott egyenlet ez:

$$fx = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = o$$

és szálítsuk le gyökereit $(a - \varepsilon)$val, a-val és $(a + \varepsilon)$val; ekkor a' következő egyenletek fognak eredni:

$$f(x + a - \varepsilon) = L_m x^m + L_{m-1} x^{m-1} + L_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ L_2 x^2 + L_1 x + L_0$$
$$f(x + a) \quad = M_m x^m + M_{m-1} x^{m-1} + M_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ M_2 x^2 + M_1 x + M_0$$
$$f(x + a + \varepsilon) = N_m x^m + N_{m-1} x^{m-1} + N_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ N_2 x^2 + N_1 x + N_0$$

mellyeknek előszámai nevezetes összefüggésben állanak.

És pedig szálítsuk le az fx egyenlet' gyökereit először a-val, azaz keressük az

$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots.$$

előszámokat a' 17. §. értelmében. A' schemát lehozva találni fogjuk, hogy az első függő sor' tagjai mind $= A_m$, a' honnan következik:

$$M_m = A_m$$

A többi függő sorok tagjai egymásután a' következők:

$$A_{m-1} + A_m a$$
$$A_{m-1} + 2A_m a$$
$$A_{m-1} + 3A_m a$$
$$A_{m-1} + 4A_m a$$
$$A_{m-1} + 5A_m a$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_{m-2} + A_{m-1} a + A_m a^2$$
$$A_{m-2} + 2A_{m-1} a + 3A_m a^2$$
$$A_{m-2} + 3A_{m-1} a + 6A_m a^2$$
$$A_{m-2} + 4A_{m-1} a + 10A_m a^2$$
$$A_{m-2} + 5A_{m-1} a + 15A_m a^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_{m-3} + A_{m-2} a + A_{m-1} a^2 + A_m a^3$$
$$A_{m-3} + 2A_{m-2} a + 3A_{m-1} a^2 + 4A_m a^3$$

$$A_{m-3} + 3A_{m-2}a + 6A_{m-1}a^2 + 10A_m a^3$$
$$A_{m-3} + 4A_{m-2}a + 10A_{m-1}a^2 + 20A_m a^3$$
$$A_{m-3} + 5A_{m-2}a + 15A_{m-1}a^2 + 35A_m a^3$$

. . . .

's a' rekesz alatti tagok, mellyek itt kerestetnek, egyáltalában a' következők:

$$M_m = A_m$$
$$M_{m-1} = A_{m-1} + mA_m a$$
$$M_{m-2} = A_{m-2} + (m-1)A_{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.2}A_m a^2$$
$$M_{m-3} = A_{m-3} + (m-2)A_{m-2}a + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A_{m-1}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}A_m a^3$$

. . . .

$$M_1 = A_1 + 2A_2 a + 3A_3 a^2 + 4A_4 a^3 + \ldots + mA_m a^{m-1}$$
$$M_0 = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots + A_m a^m.$$

26. §.

Ezen előszámokból igen egyszerű mívelet által következnek az

$$L_m \quad L_{m-1} \quad L_{m-2} \ldots$$
$$N_m \quad N_{m-1} \quad N_{m-2} \ldots$$

kifejezések; midőn t. i. az

$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots$$

kifejezésekben a helyébe $a \pm \varepsilon$ tétetik.

E' szerint lesz tehát:

$$L_m = A_m$$
$$L_{m-1} = A_{m-1} + mA_m(a - \varepsilon)$$

$$L_{m-2} = A_{m-2} + (m-1)\,A_{m-1}\,(a-\varepsilon)$$
$$+ \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,A_m\,(a-\varepsilon)^2$$

$$L_{m-3} = A_{m-3} + (m-2)\,A_{m-2}\,(a-\varepsilon)$$
$$+ \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2}\,A_{m-1}\,(a-\varepsilon)^2$$
$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,A_m\,(a-\varepsilon)^3$$

. . . .

$$L_1 = A_1 + 2A_2\,(a-\varepsilon) + 3A_3\,(a-\varepsilon)^2 + \dots$$
$$+ mA_m\,(a-\varepsilon)^{m-1}$$
$$L_0 = A_0 + A_1\,(a-\varepsilon) + A_2\,(a-\varepsilon)^2 + \dots$$
$$+ A_m\,(a-\varepsilon)^m$$

azaz:

$$L_m \;= M_m$$
$$L_{m-1} = M_{m-1} - mM_m\,\varepsilon$$
$$L_{m-2} = M_{m-2} - (m-1)\,M_{m-1}\,\varepsilon + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,M_m\,\varepsilon^2$$
$$L_{m-3} = M_{m-3} - (m-2)\,M_{m-2}\,\varepsilon$$
$$+ \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2}\,M_{m-1}\,\varepsilon^2$$
$$- \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,M_m\,\varepsilon^3$$

. . . .

$$L_1 = M_1 - 2M_2\,\varepsilon + 3M_3\,\varepsilon^2 - 4M_4\,\varepsilon^3 + - \dots$$
$$\pm\, mM_m\,\varepsilon^{m-1}$$
$$L_0 = M_0 - M_1\,\varepsilon + M_2\,\varepsilon^2 - M_3\,\varepsilon^3 + - \dots$$
$$\pm\, M_m\,\varepsilon^m$$

és hasonló módon fog találtatni:

$$N_m \;= M_m$$
$$N_{m-1} = M_{m-1} + m\,M_m\,\varepsilon\,.$$

$$N_{m-2} = M_{m-2} + (m-1)\, M_{m-1}\, \varepsilon + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\, M_m\, \varepsilon^2$$

$$N_{m-3} = M_{m-3} + (m-2)\, M_{m-2}\, \varepsilon + \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2}\, M_{m-1}\, \varepsilon^2$$
$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, M_m\, \varepsilon^3$$

. . . .

$$N_1 = M_1 + 2M_2\,\varepsilon + 3M_3\,\varepsilon^2 + 4M_4\,\varepsilon^3 + \ldots$$
$$+ mM_m\,\varepsilon^{m-1}$$
$$N_0 = M_0 + M_1\,\varepsilon + M_2\,\varepsilon^2 + M_3\,\varepsilon^3 + \ldots$$
$$+ M_m\,\varepsilon^m$$

A' mellyekből kitetszik, hogy az

$$L_m \quad L_{m-1} \quad L_{m-2} \ldots$$

és

$$N_m \quad N_{m-1} \quad N_{m-2} \ldots$$

mennyiségek közti különbség csupán csak az ε páratlan hatványainak előjegyeiben fekszik, melly előjegyek

$$f\,(x + a - \varepsilon)$$

kifejtésében tagadók;

$$f\,(x + a + \varepsilon)$$

előszámaiban ellenben állítók.

27. §.

Láttuk az I. Szak. 4. §ában, hogy

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N$$

kifejezésre nézve, N-nek általános számbeli értékét tekintve csak,

$$N > x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx,$$

mihelyt

$$x \overset{=}{<} \frac{N}{K+N},$$

melly kifejezésben K az

$$A \quad B \quad C \quad D \quad E \ldots$$

előszámoknak legnagyobbika 's K-ban szinte csak az általános számérték vétetik tekintetbe.

Ezt jelen esetünkre alkalmazva, azt fogjuk mondani, hogy az

$$L_m \quad L_{m-1} \quad L_{m-2} \ldots$$
$$N_m \quad N_{m-1} \quad N_{m-2} \ldots$$

kifejtéseiben, az első tagoknak, tehát illetőleg az

$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots$$

mennyiségeknek előszámai fognak uralkodni, mihelyt

$$\varepsilon \overset{=}{<} \frac{M_{m-r}}{p M_{m-s} + M_{m-r}},$$

hol M_{m-r} a' kifejtésnek első tagja, $p M_{m-s}$ pedig a' legnagyobbik előszám — jegyére, mint általában, nem tekintve.

'S nem csak egy vagy más, hanem valamennyi kifejtésben lesz az

$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots$$

azaz az első tag' jegye uralkodó, mihelyt x az előbbi feltételnek megfelelő legkisebbik értékét érte el. Legyen t. i.

$$\varepsilon \overset{=}{<} \frac{M'_{m-r}}{p' M'_{m-s} + M'_{m-r}}$$

az

$$\varepsilon \overset{=}{<} \frac{M_{m-r}}{p M_{m-s} + M_{m-r}}$$

kifejezéseknek legkisebbike, akkor az

$$L_m \quad M_m \quad N_m$$
$$L_{m-1} \quad M_{m-1} \quad N_{m-1}$$
$$L_{m-2} \quad M_{m-2} \quad N_{m-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$L_1 \quad M_1 \quad N_1$$
$$L_0 \quad M_0 \quad N_0$$

kifejezéseknek ugyanazon jegyei lesznek; 's ennél fogva az

$$f(x+a-\varepsilon)$$
$$f(x+a)$$
$$f(x+a+\varepsilon)$$

egyenletekben ugyanazon jegyek és pedig egyazon sorban fordúlandnak elő — föltéve, hogy az

$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots$$

számok közül egy sem $=o$.

Minekelőtte ezt egy példa által felvilágosítanók, észre kell vennünk, hogy az

$$\varepsilon \overset{=}{<} \frac{M_{m-r}}{p M_{m-s} + M_{m-r}}$$

föltétel tulajdonképen erre

$$\varepsilon \overset{=}{<} \frac{1}{\frac{p M_{m-s}}{M_{m-r}} + 1}$$

megy ki, melly annál kisebb levén, minél nagyobb

$$\frac{p M_{m-s}}{M_{m-r}};$$

azt fogjuk mondani: hogy az

$$L_m \quad L_{m-1} \quad L_{m-2} \ldots.$$
$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots.$$
$$N_m \quad N_{m-1} \quad N_{m-2} \ldots.$$

előszámok ugyanazon jegyekkel birandnak, mihelyt

$$\varepsilon \overset{=}{<} \frac{M_{m-r}}{p M_{m-s} + M_{m-r}}$$

M_{m-r} és M_{m-s} alatt az

$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots$$

számoknak legkisebbike és illetőleg legnagyobbika értetvén; és p

$$=\frac{m(m-1)\ldots(\frac{1}{2}m+1)}{1\,.\;2\ldots\frac{1}{2}m}$$

vagy

$$=\frac{m(m-1)\ldots(\frac{1}{2}m\pm 1)}{1\,.\;2\ldots\frac{1}{2}(m\mp 1)}$$

lévén, a' mint m páros vagy páratlan szám.

28. §.

A' 23. §ban találtatott, hogy midőn

$$fx=x^6-7x^5+13x^4-2x^3-2x^2-36x+48,$$

hogy akkor, a' gyökereket 2-vel kisebbítve

$$f(x+2)=x^6+11x^5+43x^4+64x^3+7x^2-75x-51.$$

Midőn tehát itt

$$\varepsilon \overline{\overline{<}} \frac{1}{20\,.\;75+1}$$

$$\overline{\overline{<}} \frac{1}{1501},$$

az előjegyek semmiféle változást nem szenvedendnek, úgy hogy ezen előjegyek

$$f\left(x+2-\frac{1}{1501}\right) \quad + + + + + - -$$

$$f\left(x+2-\frac{1}{1502}\right) \quad + + + + + - -$$

$$f\left(x+1-\frac{1}{1503}\right) \quad + + + + + - -$$

. . . .

$$f(x+2) \qquad + + + + + - -$$

. . . .

$$f\left(x+2+\frac{1}{1503}\right) \quad + + + + + - -$$

$$f\left(x+2+\frac{1}{1502}\right) \quad + + + + + - -$$

$$f\left(x+2+\frac{1}{1501}\right) \quad + + + + + - -$$

legyenek.

Legyen második példaul:

$$fx = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5\,.$$

Ezt föltéve lesz:

$$f(x+1) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5$$

mihelyt tehát itt

$$\varepsilon \overset{=}{<} \frac{1}{6\,.\,5+1}$$

$$\overset{=}{<} \frac{1}{31}$$

az előjegyek nem változnak. Következőleg lesz:

$$f\left(x+1-\frac{1}{31}\right) \quad + + - - -$$

$$f\left(x+1-\frac{1}{32}\right) \quad + + - - -$$

$$f\left(x+1-\frac{1}{33}\right) \quad + + - - -$$

. . . .

$$f(x+1) \quad + + - - -$$

. . . .

$$f\left(x+1+\frac{1}{33}\right) \quad + + - - -$$

$$f\left(x+1+\frac{1}{32}\right) \quad + + - - -$$

$$f\left(x+1+\frac{1}{31}\right) \quad + + - - -$$

29. §.

Másként áll a' dolog, midőn az

$$M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots M_2 \quad M_1$$

kifejezéseknek valamellyike $=o$, két ugyanazon jegyű szomszéd mellett. Minthogy ekkor az elenyésző M_{m-q}-nak megfelelő L_{m-q} és N_{m-q} különböző előjegyűek, mint kifejezéseikből a' 26. §ban láthatni, a' 2ε közben két jegyváltozás elenyészik. Minthogy továbbá a 2ε közt akarmelly kicsinynek, tehát végtelen kicsinynek is vehetni, nyilván való, hogy a nem lehetvén (a' föltétel szerint) az egyenletnek gyökere, ugyanazon egyenletnek két képzeleti gyökere lesz, *'s ez a' képzeleti gyökereknek első ismertető jele.*

Legyen bővebb felvilágosítás végett

$$M_{m-q}=o\,;$$

tehát a' 26. §. értelmében:

$$L_{m-q}=-\{m-q+1\}\,M_{m-q+1}\,\varepsilon$$
$$+\frac{\{m-q+2\}.\{m-q+1\}}{1\,.\,2}\,M_{m-q+2}\,.\,\varepsilon^2$$

. . . .

$$N_{m-q}=+\{m-q+1\}.\,M_{m-q+1}\,.\,\varepsilon$$
$$+\frac{\{m-q+2\}.\{m-q+1\}}{1\,.\,2}\,.\,M_{m-q+2}\,.\,\varepsilon^2$$

. . . .

's minthogy ε mindég olly kicsiny lehet, hogy az első tag' előjegye uralkodó legyen, kitetszik, hogy L_{m-q} tagadó, midőn M_{m-q+1} állító, és állító, midőn ez tagadó; és hogy másfelül N_{m-q} az M_{m-q+1} mennyiséggel ugyanazon előjegyű. Ha tehát az

$$\ldots L_{m-q+1}, \quad L_{m-q}, \quad L_{m-q-1} \quad \ldots$$
$$\ldots M_{m-q+1}, \quad M_{m-q}, \quad M_{m-q-1} \quad \ldots$$
$$\ldots N_{m-q+1}, \quad N_{m-q}, \quad N_{m-q-1} \quad \ldots$$

sorokat vizsgáljuk, azt fogjuk találni, hogy előjegyeik csak ezek lehetnek:

$$\ldots\ldots + \; - \; + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \; o \; + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \; + \; + \ldots$$

vagy pedig ezek:

$$\ldots\ldots - \; + \; - \ldots$$
$$\ldots\ldots - \; o \; - \ldots$$
$$\ldots\ldots - \; - \; - \ldots$$

's ez így lesz bármilly kicsinnyé váljék is ε. Végtelen kicsinynek vevén ε-t, minthogy ezen végtelen kis 2ε közben két jegyváltozás enyészik el, és a nem gyökere az egyenletnek, nyilvánvaló, hogy az adott egyenletnek két képzeleti gyökere van.

Általában tehát, midőn valamelly

$$M_{m-1} \quad M_{m-2} \ldots M_2 \quad M_1$$

mennyiség elenyészik és szomszédjai ugyanazon előjegygyel birnak, az adott egyenletnek két képzeleti gyökerének kell lennie.

Például szolgáljon az

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$$

egyenlet, mellyből lesz

$$f(x+1) = x^4 + 4x^2 + 3$$

bizonyságául annak, hogy az egyenletnek két pár képzeleti gyökere van.

Ezen első ismertető jele a' képtelen gyökereknek megegyez avval, mit feljebb a' 20. §ban tanúltunk. Ha tudniillik áll: hogy minden egyenletnek, mellynek valamelly tagja hibázik két ugyanazon előjegyű szomszéd között, két képzeleti gyökere van; akkor abból, hogy valamelly átalakított $f(x+a)$ egyenletnek két képzeleti gyökere van (mint a' mellynek valamelly tagja két hasonjegyű között elenyészett), méltán következtethetni, hogy az adott fx egyenletnek is, mint a' mellynek gyökerei csupán csak a-val nagyobbak, szinte két képzeleti gyökerének kell lennie.

30. §.

II. De nem mindég akadhatni olly a számra, mellyel leszállítván az fx egyenletnek gyökereit, az

$$M_m \quad M_{m-1} \quad M_{m-2} \; \ldots \ldots$$

előszámoknak valamellyike ugyanazon jegyű szomszédok között $=o$ legyen. Azért is szükséges a' dolgot magosabb szempontból vizsgálni.

Legyen tehát ennek okáért az, mi a' 25. §ban $(a-\varepsilon)$nak neveztetett $=p$, 's az mi ott $(a+\varepsilon)$nak neveztetett $=q$, azaz:

$$f(x+p)=L_m x^m + L_{m-1} x^{m-1} + L_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ L_2 x^2 + L_1 x + L_0$$
$$f(x+q)=N_m x^m + N_{m-1} x^{m-1} + N_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ N_2 x^2 + N_1 x + N_0$$

's legyen az $f(x+p)$ kifejtésében két jegyváltozással több, mint az $f(x+q)$ében, de úgy hogy azt lehessen következtetni, hogy valamelly ismeretlen, de p és q között fekvő, számmal leszállítatván a' gyökerek, az előszámok' valamellyikének két maradóan hasonjegyű szomszéd között el kelljen enyésznie; akkor a' nélkül, hogy azon közép számot (melly feljebb a által tétetett ki) ismernők, azt fogjuk következtetni, hogy az adott fx egyenletnek két képzeleti gyökere van.

Nagyobb világosság' okáért legyenek az $f(x+p)$ kifejtésének azon tagjai, mellyekből a' két jegyváltozás elenyészik, ezek:

$$L_{r+1}\, x^{r+1}, \quad L_r\, x^r, \quad L_{r-1}\, x^{r-1};$$

's azok, mellyek az $f(x+q)$ kifejtéséből nekik megfelelnek, ezek:

$$N_{r+1}\, x^{r+1}, \quad N_r\, x^r, \quad N_{r-1}\, x^{r-1}.$$

Ezt föltéve, a' kifejteseknek illető részei ezek:

$$\ldots + L_{r+1}\, x^{r+1} - L_r\, x^r + L_{r-1}\, x^{r-1} \ldots$$
$$\ldots + N_{r+1}\, x^{r+1} + N_r\, x^r + N_{r-1}\, x^{r-1} \ldots$$

vagy pedig ezek:

$$\ldots - L_{r+1}\, x^{r+1} + L_r\, x^r - L_{r-1}\, x^{r-1} \ldots$$
$$\ldots - N_{r+1}\, x^{r+1} - N_r\, x^r - N_{r-1}\, x^{r-1} \ldots$$

Ha itt az x^{r+1} és x^{r-1} előszámai, minden p és q között fekvő értékre nézve ugyanazon jegyűek, míg x^r előszámának jegye a' mondatt közben változást szenved; akkor nyilvánvaló, hogy van valamelly $M_r = o$ középértéke az x^r előszámának, melly két képzeleti gyökeret tesz fel.

Ugyanezt lehetne mondani, ha az x^{r-1} előszáma a' $q-p$ közben a' o-t elérné, a' nélkül, hogy tagadóvá legyen; mi csak akkor történhetik, ha x^r előszámával ugyanazon egy időben enyészik el.

31. §.

Másként áll a' dolog, ha az x^{r-1} előszáma a' mondott közben előjegyét kétszer változtatja, mi a' két következő módon történik; vagy így:

. . . + — + . . .
. . . + — o . . .
. . . + — — . . .
. . . + o — . . .
. . . + + — . . .
. . . + + o . . .
. . . + + + . . .

vagy pedig így:

. . . — + — . . .
. . . — + o . . .
. . . — + + . . .
. . . — o + . . .
. . . — — + . . .
. . . — — o . . .
. . . — — — . . .

mert ekkor két való gyökérre következtethetni.

Az első esetre nézve legyen α az, mit p-hez hozzá kell adni, hogy x^{r-1} előszáma tagadó kezdjen lenni; 's β az, mit q-ból ki kell vonni, hogy ugyanazon előszám tagadó legyen ugyan még, de már nagyon közel a' o-hez. Miből következik, hogy $(p+\alpha)$nak kisebbnek kell lenni, mint a' $(q-\beta)$nak.

Származtassuk le mármost a' 26. §. szellemében x^{r-1} azon előszámait, mellyek a' $p+\alpha$ és $q-\beta$ értékeknek megfelelnek. Az első nyilván a' következő lesz:

$$L_{r-1}-rL_r\alpha+\frac{(r+1)r}{1\,.\,2}L_{r+1}\alpha^2\,\ldots\,.$$

a' másik pedig ez:

$$N_{r-1}-rN_r\beta+\frac{(r+1)r}{1\,.\,2}N_{r+1}\beta^2\,\ldots\,.$$

melly két értéknek a' föltételnél fogva tagadónak kell lenni; mi nyilván úgy fog történni, ha számbeli értékeiket tekintve

$$L_{r-1} < rL_r\alpha \cdot$$
$$N_{r-1} < rN_r\beta\,,$$

azaz

$$\alpha < \frac{L_{r-1}}{rL_r}$$

$$\beta < \frac{N_{r-1}}{rN_r}$$

leend. Miből következik, hogy ezen egyenetlenségnek

$$\alpha + \beta > \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{L_{r-1}}{L_r} + \frac{N_{r-1}}{N_r} \right\}$$

kell állani. Minthogy pedig a' föltétel szerint:

$$p + \alpha < q - \beta$$

azaz:

$$\alpha + \beta < q - p\,,$$

még inkább fog állani, hogy

$$\frac{L_{r-1}}{L_r} + \frac{N_{r-1}}{N_r} < r.\{q - p\}$$

legyen. Mi ha másként van, ha t. i.

$$\frac{L_{r-1}}{L_r} + \frac{N_{r-1}}{N_r} \overline{\overline{>}}\; r.\{q - p\}$$

x^{r-1} előszáma nem mehet kétszer p és q között a' o-n keresztűl, 's így az fx egyenlet két képzeleti gyökérrel bir.

Minthogy a' második esetre nézve az egész különbség abban áll, hogy a'

$$- L_{r-1} + rL_r\alpha - \frac{(r+1).r}{1\,.\,2} L_{r+1}\alpha^2 \ldots .$$

$$- N_{r-1} + rN_r\beta - \frac{(r+1).r}{1\,.\,2} N_{r+1}\beta^2 \ldots .$$

kifejtésekben ellenkező jegyek vannak, de a' mellyekből számbeli értékökre nézve szintén

$$L_{r-1} < rL_r\alpha$$
$$N_{r-1} < rN_r\beta$$

következik, látni való, hogy a' képzeleti gyökerekre nézve az

$$\frac{L_{r-1}}{L_r} + \frac{N_{r-1}}{N_r} \overline{\overline{>}}\, r.\{q-p\}$$

föltétel e' második esetben is, tehát általában áll.

Minthogy tehát akkor, midőn

$$\frac{L_{r-1}}{L_r} + \frac{N_{r-1}}{N_r} \overline{\overline{>}}\, r.\{q-p\},$$

x^{r-1} előszáma a' 0-n kétszer nem mehet keresztűl, sőt az o-t is csak egyszer érheti el, a' 30. §. következtében az fx egyenletnek két képzeleti gyökerének kell lennie; azon föltétel alatt t. i., hogy az x^{r+1} és x^{r-1} elő-jegyei $f(x+p)$ és $f(x+q)$ kifejtéseiben ugyanazok, x^r-éi ellenben ellenkezők. 'S ez a' képzeleti gyökereknek második megismertető jele.

32. §.

Különös eset az, midőn $r=1$; ekkor t. i. a' mondott ismertető jel ezzé lesz:

$$\frac{L_o}{L_1} + \frac{N_o}{N_1} \overline{\overline{>}}\, q-p;$$

's a' tétel így hangzik: midőn $f(x+p)$ kifejtésében két jegyváltozással több van, mint az $f(x+q)$ében, és a' mondott kifejtések így végződnek:

$$\ldots\ldots + L_2x^2 - L_1x + L_o$$
$$\ldots\ldots + N_2x^2 + N_1x + N_o$$

vagy pedig így:

$$\ldots . - L_2 x^2 + L_1 x - L_0$$
$$\ldots . - N_2 x^2 - N_1 x - N_0$$

az egyenletnek a' mondott föltétel alatt két képzeleti gyökekének kell lennie.

Első például szolgálhat a' következő egyenlet:

$$fx = x^3 - 2x^2 + 4x + 3$$
$$f(x+1) = x^3 + x^2 + 3x + 6$$

's minthogy itt

$$\frac{4}{2} + \frac{3}{1} > 2.\ 1$$

az egyenletnek két képzeleti gyökere van.

Második például szolgáljon:

$$fx = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$$
$$f(x+1) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 5x + 9$$

mellynek, minthogy

$$\frac{10}{4} + \frac{9}{5} > 1,$$

szintén két képzeleti gyökere van.

Harmadik például álljon:

$$fx = x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 5$$
$$f(x+1) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 10x + 10$$

's minthogy itt

$$\frac{4}{1} + \frac{7}{3} > 3.\ 1$$

az adott egyenletnek hasonlólag két képzeleti gyökere van.

Negyedik például legyen:

$$fx = x^4 - x^3 + x^2 - x + 12$$
$$f(x+0{\cdot}5) = x^4 + x^3 + x^2 - 0{\cdot}25x + 11{\cdot}6875$$
$$f(x+1) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + 12$$

's ebből láthatni, hogy mivel

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}>3.\ 0\cdot5$$

és hasonlólag:

$$\frac{11\cdot6875}{0\cdot25}+\frac{12}{1}>0\cdot5$$

az adott egyenletnek négy képzeleti gyökere lesz; a' melly gyökerek (18. §.) a' következők:

$$1\pm\sqrt{-2}\,;\ -\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7}\ .$$

Ötödik és utolsó példaul szolgáljon:

$$fx=x^4-x^3+4x^2+x-4$$

$$f(x+0\cdot5)=x^4+x^3+4x^2+2\cdot75x-3\cdot5625$$

a' mellynek,

$$\frac{4}{1}+\frac{4}{1}>3.0\cdot5$$

levén, nyilván két képzeleti gyökere van. 'S ezen egyenletnek, minthogy három jegyváltozással bir, a' két képzeleti gyökeren kivül egy képes állító, 's ugyan ennél fogva egy képes tagadó gyökere lesz.

33. §.

III. Feljebb a' 29. §ban azon esetet vizsgáltuk, midőn az

$$M_m\quad M_{m-1}\quad M_{m-2}\ \ldots$$

mennyiségek közül valamellyik két hasonjegyű szomszéd között elenyészik. Most azon kérdés fordúl elő, valljon mit lehet következtetni, ha ugyanazon mennyiségek közül nem egy, hanem több egymás melletti, és pedig akár ugyanazon akár ellenkező jegyű szomszédok között elenyészik.

Ezt az esetet tulajdonképen már feljebb 20 és 21. §§. vizsgáltuk. 'S ott azt találtuk, hogy az fx egyenletnek legalább

$$m - (m' + m'')$$

képtelen gyökerének kell lennie; m az adott egyenlet' fokát, m' a' lehető jegyváltozásoknak és m'' a' lehető jegyfolyamoknak minimumát jegyezvén; azon föltétel alatt, hogy a' hibázó tagok $+$ vagy $-$ jegygyel iktattatnak az egyenletbe, azon módon, a' mint ezt a' megkivánt minimumok föltételezik.

Mi a' beiktatást illeti, két esetet kell megkülönböztetni; vagy t. i. ugyanazon jegyűek a' szomszéd tagok, vagy nem.

1) Midőn a' szomszéd tagok ugyanazon jegyűek, tehát a' jegysor ez:

$$\begin{array}{c} \ldots + 0\ 0 \ldots 0\ 0 + \ldots \\ \ldots - 0\ 0 \ldots 0\ 0 - \ldots, \end{array}$$

akkor a' jegyváltozások' minimumát úgy kapjuk, hogyha az első 0 előtti jegyet valamennyi 0 helyébe tesszük; a' lehető jegyfolyamoknak minimumát ellenben, hogyha az első 0 helyébe előzője' jegyével ellenkezőt, a' második 0 helyébe az első 0 jegyével ellenkezőt, 's így az utolsó 0-ig váltva állító és tagadó jegyeket teszünk a' 0-k' helyébe. Példák fogják ezt legjobban felvilágosítani; 's ezekben a' jegyfolyamoknak minimuma fölül, a' jegyváltozásoké ellenben alul lesz kitéve:

a)
$$\begin{array}{cccc} + & - & + & + \\ + & 0 & 0 & + \\ + & + & + & + \\ \\ - & + & - & - \\ - & 0 & 0 & - \\ - & - & - & - \end{array}$$

b)

+	—	+	—	+
+	0	0	0	+
+	+	+	+	+

—	+	—	+	—
—	0	0	0	—
—	—	—	—	—

c)

+	—	+	—	+	+
+	0	0	0	0	+
+	+	+	+	+	+

—	+	—	+	—	—
—	0	0	0	0	—
—	—	—	—	—	—

stb.

34. §.

2) Midőn a' szomszéd tagok ellenkező jegyűek, tehát a' jegysor ez:

. . + 0 0 . . . 0 0 — . .

vagy ez:

. . — 0 0 . . . 0 0 + . .

akkor szinte kapjuk a' jegyváltozásoknak minimumát, ha az első szomszéd' jegyét folytatjuk; 's a' jegyfolyamoknak minimumát, ha az első szomszéd' jegyével ellenkezőt 's aztán váltva vagy állítót és tagadót, vagy tagadót és állítót teszünk a' 0-k' helyébe, épen úgy mint feljebb. Bővebb felvilágosítás helyett álljanak itt is példák:

a)

+	—	+	—
+	0	0	—
+	+	+	—

$$\begin{array}{cccc} - & + & - & + \\ - & 0 & 0 & + \\ - & - & - & + \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} + & - & + & - & - \\ + & 0 & 0 & 0 & - \\ + & + & + & + & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & + & - & + & + \\ - & 0 & 0 & 0 & + \\ - & - & - & - & + \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & - \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ + & + & + & + & + & - \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} - & + & - & + & - & + \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ - & - & - & - & - & + \end{array}$$

stb.

35. §.

Midőn az egyenlet m-dik fokú és n tag hibázik, lesz jegypárainak száma $m-n$; 's legyen jegyváltozásainak száma v, jegyfolyamaié ellenben f. Ezt föltéve lesz nyilván:

$$v+f=m-n.$$

Mármost midőn tagok páros számmal hibáznak, a' beiktatás után a' jegyváltozásoknak minimuma, avvagy

$$m'=v;$$

's a' jegyfolyamoké, avvagy

$$m''=f.$$

Minthogy pedig az egyenletnek illyenkor legalább

$$m - (m' + m'')$$

azaz:

$$m - (v + f) = n$$

képtelen gyökere van, világos, hogy ekkor (a' hibázó tagok páros számmal lévén) legalább annyi a' képzeleti gyökér, a' hány tag hibázik.

Midőn tagok páratlan számmal hibáznak, és

α) a' szomszédok ugyanazon jegyűek, lesz beiktatás után a' lehető jegyváltozásoknak minimuma

$$m' = v,$$

mint feljebb; a' jegyfolyamoké ellenben:

$$m'' = f - 1;$$

a' honnan következik, hogy az illy esetben az egyenletnek legalább

$$m - (m' + m'')$$

azaz:

$$m - (v + f - 1) = n + 1$$

képtelen gyökere van. Midőn végre, föltévén ugyanis, hogy tagok páratlan számmal hibáznak,

β) a' szomszédok különböző jegyűek, lesz szinte beiktatás után, a' lehető jegyváltozásoknak minimuma

$$m' = v;$$

's a' jegyfolyamoké, avvagy

$$m'' = f + 1;$$

a' honnana hasonló módon, mint feljebb, következik, hogy az egyenletnek legalább $n - 1$ képtelen gyökere lesz.

Valamelly adott egyenletnek tehát annyi (azaz legalább annyi) képtelen gyökere lesz, a' hány tag hibázik, midőn a' hibázó tagok' száma páros; 1-gyel több, midőn a' hibázó tagoknak száma páratlan 's a' szomszédok egyjegyűek; 1-gyel pedig kevesebb, midőn ugyanis a' hibázók' száma páratlan, de a' szomszédok külön jegyűek.

Igy például az

$$x^8 - 4x^7 + x^5 - 2x^2 + x + 6 = o$$

egyenletnek 2 képzeleti gyökere lesz; az

$$x^4 + 1 = o$$

ellenben 4 képzeleti gyökere van.

36. §.

IV. Midőn az egyenlet csak két egymás mellett levő jegyváltozással bir, igen könnyen meg lehet ismerni, valjon egy pár képzeleti gyökere van-e.

Legyen t. i. φx az állító gyökereknek sommája, a' tagadó tagnak szomszédjain kivűl, úgy hogy az adott egyenlet

$$fx = \varphi x + A_{r+1}\, x^{r+1} - A_r\, x^r + A_{r-1}\, x^{r-1}$$
$$= \varphi x + x^{r-1} . \{A_{r+1}\, x^2 - A_r\, x + A_{r-1}\}$$

legyen. A' rekesz alatti mennyiségnek gyökerei ezek:

$$\frac{1}{2} . \frac{A_r}{A_{r+1}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} . \left(\frac{A_r}{A_{r+1}}\right)^2 - \frac{A_{r-1}}{A_{r+1}}},$$

's ennél fogva képzeletiek, midőn

$$\frac{1}{4} . \left\{\frac{A_r}{A_{r+1}}\right\}^2 - \frac{A_{r-1}}{A_{r+1}} < o$$

azaz

$$A_r^2 < 4 A_{r-1}\, A_{r+1} .$$

's minthogy ekkor az

$$x^{r-1} . \{A_{r+1}\, x^2 - A_r\, x + A_{r-1}\}$$

mennyiség x-nek semmiféle állító értékére nézve 0-n keresztűl nem mehet, látni való, hogy a' két jegyváltozás két való gyökérnek jele nem lehet.

'S innen következik a' képzeleti gyökereknek negyedik ismertető jele: midőn az egyenlet csak két jegyváltozással bir, 's a' közép tag' előszámának négyszöge kisebb, mint a' szomszéd tagoknak sokszorozmánya 4-szer véve, akkor az egyenletnek minden bizonynyal két képzeleti gyökere van.

Vizsgáljuk e' tekintetben, gyakorlás végett, a' 32. §. első, második és harmadik példáit.

Az első példa ez volt:

$$fx = x^3 - 2x^2 + 4x + 3$$

's minthogy itt

$$4 < 4 . 4$$

ebből is következik, hogy ezen egyenletnek két képzeleti gyökere van.

A' második példa volt:

$$fx = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$$

a' hol hasonlólag, minthogy

$$16 < 4 . 10$$

két képzeleti gyökérre akadunk.

Ugyanott harmadik példaúl szolgált:

$$fx = x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 5$$

a' hol szinte az

$$1 < 4 . 4$$

egyenetlenség két képzeleti gyökérre utal.

Meg kell jegyezni azt is, hogy midőn

$$A_r^2 = 4A_{r-1}\,A_{r+1}\,,$$

hogy ekkor sem mehet x-nek akármelly állító értékére nézve, az

$$x^{r-1} . \{A_{r+1}\,x^2 - A_r\,x + A_{r-1}\}$$

mennyiség 0-n keresztűl, mert ez akkor tulajdonképen ezzé lesz:

$$x^{r-1} \cdot \{x\sqrt{A_{r+1}} - \sqrt{A_{r-1}}\}^2,$$

's négyszeg tagadó nem lehet.

Ennél fogva tehát az

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x + 2$$

egyenletnek, minthogy

$$16 = 4 \cdot 4$$

két képzeleti gyökerének kell lennie.

37. §.

V. Utolsó ismertető jelre vezet a' következő okoskodás.

Legyen fx valamelly egyenlet csupa képes gyökérrel, 's legyen neki μ gyökere < 1, de még is állító; és ν gyökere > 1; 's formáljuk belőle egymásután az

$$f(x+1), \ f\left(\frac{1}{x}\right), \ f\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

egyenleteket: azaz először azt, mellynek gyökerei 1-gyel kisebbek, azután azt, mellynek gyökerei viszonlagosak (16. §), az adott fx egyenletre nézve t. i., és végűl azt, mellynek gyökerei 1-gyel a' viszonlagos gyökereinél kisebbek. És nevezzük az

$$f(x+1), \ f\left(\frac{1}{x}\right), \ f\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

egyenleteket rend szerint első, második és harmadik formált egyenletnek.

Az fx egyenletnek tehát $\mu + \nu$ állító gyökere van;

α) az első formáltnak csak ν állító gyöke lész, mert μ gyökér, melly < 1, tagadóvá lett;

β) a' második formált egyenletnek szintannyi állító gyökere lesz, mint az fx-nek, csak hogy μ gyökér > 1, ν pedig < 1;

γ) a' harmadik formált egyenletnek csak μ állító gyökere lesz, mert ν, melly az előbbiben < 1 volt, ebben tagadóvá lett.

Azon föltétel alatt tehát, hogy fx csupa képes gyökérrel bir, a' második formált egyenletnek ugyanannyi jegyváltozása lesz, mint fx-nek; az elsőben pedig annyi elvész, mint a' harmadikban marad (t. i. μ). Ha tehát a' harmadik formált egyenletben kevesebb maradna, mint az elsőben elveszett, ez csak képzeleti gyökerek által történhetnék, 's ugyanannyi képzeleti gyökérre utalna, a' hány jegyváltozással kevesebb találtatnék a' harmadikban, mint a' mennyi az elsőben elveszett.

Legyen fx-ben a' jegyváltozások' száma $= v$; az $f(x+1)$ avvagy első formált egyenletben ellenben csak v'; 's végűl az $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ avvagy harmadik formált egyenletben v''. Ezen jelölést elfogadva, látjuk, hogy az első formált egyenletben az elenyésző jegyváltozások' száma $= v - v'$; 's hogy a'

$$v - (v' + v'')$$

különbség fogja adni a' képzeleti gyökerek' számát.

Például szolgálhat az

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$$

egyenlet, mellyből lesz:

$$f(x+1) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$$

és

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 7x^4 + 22x^3 + 27x^2 + 14x + 3\;;$$

itt tehát $v = 4$; $v' = 2$; $v'' = o$; következőleg a' képzeleti gyökerek' száma $= 2$.

Második például szolgáljon:

$$fx = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$$

a' mellyből következik:

$$f(x+1) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 10x + 1$$

és

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 4x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 6x - 1$$

a' mellynek tehát szinte két képzeleti gyökere van.

38. §.

Megesik néha, hogy az $f(x+1)$ egyenletnek szintannyi jegyváltozása van, mint az fx-nek, mi annak a' jele, hogy az fx állító való gyökerei, ha vannak, mind > 1. Ekkor tehát még az

$$f(x+2),\ f(x+3)\ \ldots f(x+n)$$

egyenleteket kell lehozni, $f(x+n)$ jelölvén azt, mellynek jegyváltozásai kevesebbek mint az fx-éi; 's ekkor egyáltalában az

$$f\{x+(n-1)\}$$

egyenlettel kell bánni mintha adatott volna; 's nagyon is világos, hogy midőn az

$$f\{x+(n-1)\}$$

egyenletnek találtatnának képzeleti gyökerei, az fx-nek is kell hogy legyenek; magában értetvén, mit alig kell említenem, hogy n itt állító egész számokat jelent.

Például legyen:

$$fx = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 24x + 14$$

a' mellyből lesz:

$$f(x+1) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 3$$
$$f(x+2) = x^4 + x^3 + x^2 + 2$$

a' hol tehát $n = 2$'s mármost az

$$f(x+1) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 3$$

egyenlettel bánván úgy mint adottal, lesz ennek viszonlagosa

$$3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$$

's az mellynek gyökerei a' viszonlagos' gyökereinél 1-gyel nagyobbak

$$3x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 8x + 2$$

's innen

$$v - (v' + v''') = 4;$$

a' miből következik, hogy az $f(x+1)$, tehát az fx egyenletnek is, gyökerei mind képzeletiek.

Második például legyen:

$$fx = x^3 - 7x^2 + 24x - 39$$

a' mellyből lesz:

$$f(x+1) = x^3 - 4x^2 + 13x - 21$$
$$f(x+2) = x^3 - x^2 + 8x - 11$$
$$f(x+3) = x^3 - 2x^2 + 9x - 3$$

's mármost az $f(x+2)$ tekintetvén, mint adott, minthogy azon egyenlet, mellynek gyökerei a' viszonlagoséinál 1-gyel nagyobbak, ez:

$$11x^3 + 25x^2 + 18x + 3,$$

lesz az $f(x+2)$, 's ennél fogva az fx egyenletnek is, $3 - 1 = 2$ képzeleti gyökere.

Egyébiránt kiviláglik az egész okoskodásmódból, hogy megfordítva, midőn $v - (v' + v''') = 0$ t. i., a' képzeleti gyökerek' hiányára következtetést huzni nem szabad.

39. §.

Mi mármost a' feloldást magát illeti, azaz az állító képes gyökerek' kikeresését; először tudni kell, hány állító képes gyökere lehet az egyenletnek, 's általában tudva van, hogy csak annyi lehet, azaz legfeljebb annyi, a' hány a' jegyváltozás. Azután pedig kerestetnek a' 13 § szerint az

$$f(1),\ f(2),\ f(3)\ \dots\ f(9)$$
$$f(10),\ f(20),\ f(30)\ \dots\ f(90)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

értékei, míg ezeknek valamellyike olly módon állító, hogy előre lehessen látni, hogy a' reá következőknek mind szinte állítóknak kell lenni. 'S ezekben vagy annyi ellenkező előjegy találtatik, a' hány a' jegyváltozás, azaz a' hány képes állító gyökere lehet az egyenletnek, vagy nem. Ha igen, akkor a' munkát folytatni kell, mint alább fog tanítatni. Ha pedig nem, akkor a' közöket még kisebbeknek lehet venni, tehát az

$$f(0\cdot1),\ f(0\cdot2),\ f(0\cdot2)\ \dots\ f(0\cdot9)$$
$$f(11),\ f(12),\ f(13)\ \dots\ f(19)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

értékeket is keresni, a' feljebb kijelölt határig; de ez felette nagy munkát kivánna, 's így az alkalmazásból leggyakrabban kimaradhat.

Első például szolgálhat az

$$fx = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$$

egyenlet, mellynek 3 jegyváltozása levén, ugyanis három állító képes gyökere lehet. A' 13 §. schemája szerint lesz:

(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	
1	— 3	— 24	+ 95	— 46	— 101
1) 1	— 2	— 26	+ 69	+ 23	(— 78)
2) 1	0	— 26	+ 17	(+ 57)	— 21
3) 1	+ 3	— 17	(— 34)	— 11	— 32
4) 1	+ 7	(+ 11)	— 1	— 13	— 45
5) 1	(+ 12)	+ 59	+ 176	+ 339	+ 294

ezentúl már minden utolsó szám állító maradván, itt megállapodunk. Az eredvények ezek:

$$f(0) = -101$$
$$f(1) = -78$$
$$f(2) = -21$$
$$f(3) = -32$$
$$f(4) = -45$$
$$f(5) = +294\,,$$

a' honnan kitetszik, hogy az egyenletnek 4 és 5 között egy állító képes gyökere van.

Második például legyen:

$$fx = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4\;;$$

mellynek 3 állító képes gyökere lehet. A' schema ez:

(4)	(3)	(2)	(1)	
1	— 1	+ 4	+ 1	— 4
1) 1	0	+ 4	+ 5	(+ 1);

mellynek tehát bizonyosan egy állító képes gyökere lesz 0 és 1 között, minthogy

$$f(0) = -4\,;\; f(1) = +1\,.$$

A' schemát pedig nem folytatjuk tovább, minthogy azontúl már minden utolsó tagja állító leend.

40. §.

A' tagadó gyökereket az egyenletben állítókká kell változtatni, mi I. Sz. 17 §. az által történik, hogy a' páros számú tagok' előjegyei ellenkezőkké változtattatnak, 's azután, mint állítók kerestetnek a' tagadó gyökerek.

Az első példa az előbbi §ban ez volt:

$$fx = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101;$$

mellynek két jegyfolyamánál fogva, két tagadó gyökere lehet. Azokat állítókká változtattatván, lesz:

$$\varphi x = x^5 + 3x^4 - 24x^3 - 95x^2 - 46x + 101;$$

és mármost a' schema:

	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	
	1	+3	−24	−95	−46	+101
1)	1	+4	−20	−115	−161	(−60)
2)	1	+6	−8	−131	(−423)	−483
3)	1	+9	+19	(−74)	−571	−1054
4)	1	+13	(+71)	+139	−293	−1347
5)	1	(+18)	+143	+568	+843	−504
6)	(1)	+23	+235	+1273	+3389	+2885

a' schemát tovább folytatni nem kell. Minthogy tehát:

$$\varphi(0) = +101$$
$$\varphi(1) = -60$$
$$\varphi(2) = -483$$
$$\varphi(3) = -1054$$
$$\varphi(4) = -1347$$
$$\varphi(5) = -504$$
$$\varphi(6) = +2885$$

látni való, hogy az φx egyenletnek valóban két állító képes gyökere van, és pedig az egyik 0 és 1, a' másik 5 és 6 között; a' mellyből azt fogjuk következtetni, hogy az fx egyenletnek ugyanannyi tagadó képes gyökere van, az egyik 0 és -1, a' másik -5 és -6 között. — Az fx egyenletnek tehát 3 képes gyökere' határait ime találtuk, és pedig felette egyszerű míveletek által. Hátra vagyon még kettő, mellynek természetét és határait még nem találtuk.

Az előbbi §. második példája ez volt:

$$fx = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$$

tehát lesz a' gyökereket tagadókká változtatva:

$$\varphi x = x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 4$$

és a' schema

	(4)	(3)	(2)	(1)	
	1	+1	+4	−1	−4
1)	1	+2	+6	+5	(+1)

mellyen túl képes gyökér nem lehet. 'S ebből láthatni, hogy ezen egyenletnek egy tagadó képes gyökere van 0 és -1 között, valamint egy állítója volt 0 és 1 között.

41. §.

Egyszerűbb sokszor 's a' gyökerek' természetét is kimutató, ha az

$$f(x+1),\ f(x+2),\ f(x+3)\ \ldots\ f(x+9)$$
$$f(x+10),\ f(x+20),\ f(x+30)\ \ldots\ f(x+90)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

egyenletek kerestetnek; vagy ha szükséges az:

$$f(x+0{\cdot}1),\ f(x+0{\cdot}2)\ \ldots\ f(x+0{\cdot}9)$$
$$f(x+11),\ f(x+12)\ \ldots\ f(x+19)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

egyenletek is. Egyszerűbb azért, mert az

$$f(1),\ f(2),\ f(3)\ \ldots\ f(9)$$
$$f(10),\ f(20),\ f(30)\ \ldots\ f(90)$$
$$\ldots\ldots$$

$$f(0\cdot1),\quad f(0\cdot2),\quad f(0.3)\ \ldots\ f(0\cdot9)$$
$$f(11),\quad f(12),\quad f(13)\ \ldots\ f(19)$$

értékek egyszerzerűen következnek a' feljebbiekből, x bennök $= 0$ tétetvén; 's mert mi itt a' fődolog, a' gyökerek' természetére is lehet következtetést húzni.

Vegyük e' szerint ismét elő a' 39 §. első példáját, melly ez:

$$fx = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$$

és szállítsuk le gyökereit a' 15 § értelmében 1-gyel, 2-vel stb, addig folytatva a' leszállítást, míg az

$$f(x+n)$$

egyenletnek csupa jegyfolyama lesz; mi, mint már tudatik, az állító képes gyökereknek határát jelöli ki.

Lesz tehát:

	1	-3	-24	$+95$	-46	-101
1)	1	-2	-26	$+69$	$+23$	(-78)
1)	1	-1	-27	$+42$	$(+65)$	
1)	1	0	-27	$(+15)$		
1)	1	$+1$	(-26)			
1)	1	$(+2)$				
1)	(1)					

	1	$+2$	-26	$+15$	$+65$	-78
1)	1	$+3$	-23	-8	$+57$	(-21)
1)	1	$+4$	-19	-27	$(+30)$	
1)	1	$+5$	-14	(-41)		
1)	1	$+6$	(-8)			
1)	1	$(+7)$				
1)	(1)					

	1	$+7$	-8	-41	$+30$	-21
1)	1	$+8$	0	-41	-11	(-32)

1) 1 + 9 + 9 − 32 (− 43)

1) 1 + 10 + 19 (− 13)

1) 1 + 11 (+ 30)

1) 1 (+ 12)

1) (1)

1 + 12 + 30 − 13 − 43 − 32

1) 1 + 13 + 43 + 30 − 13 (− 45)

1) 1 + 14 + 57 + 87 (+ 74)

1) 1 + 15 + 72 (+ 159)

1) 1 + 16 (+ 88)

1) 1 (+ 17)

1) (1)

1 + 17 + 88 + 159 + 74 − 45

1) 1 + 18 + 106 + 265 + 339 + 294

1) 1 + 19 + 125 + 390 (+ 729)

1) 1 + 20 + 145 (+ 535)

1) 1 + 21 (+ 166)

1) 1 (+ 22)

1) (1).

Ezen utolsónál, minthogy már minden rekesz alatti mennyiségek állítók, tovább menni nem kell. Lesz tehát:

$$f(x+1) = x^5 + 2x^4 - 26x^3 + 15x^2 + 65x - 78$$
$$f(x+2) = x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 30x - 21$$
$$f(x+3) = x^5 + 12x^4 + 30x^3 - 13x^2 - 43x - 32$$
$$f(x+4) = x^5 + 17x^4 + 88x^4 + 159x^2 + 74x - 45$$
$$f(x+5) = x^5 + 22x^4 + 166x^3 + 535x^2 + 729x + 294$$

és:

$$f(0) = -101$$
$$f(1) = -78$$

$$f(2) = -\ \ 21$$
$$f(3) = -\ \ 32$$
$$f(4) = -\ \ 45$$
$$f(5) = +\ 294$$

mint feljebb.

	1	+3	−24	−95	−46	+101
1)	1	+4	−20	−115	−161	(−60)
1)	1	+5	−15	−130	(−291)	
1)	1	+6	−9	(−139)		
1)	1	+7	(−2)			
1)	1	(+8)				
1)	(1)					

	1	+8	−2	−139	−291	−60
1)	1	+9	+7	−132	−423	(−483)
1)	1	+10	+17	−115	(−538)	
1)	1	+11	+28	(−87)		
1)	1	+12	(+40)			
1)	1	(+13)				
1)	(1)					

	1	+13	+40	−87	−538	−483
1)	1	+14	+54	−33	−571	(−1054)
1)	1	+15	+69	+36	(−535)	
1)	1	+16	+85	(+121)		
1)	1	+17	(+102)			
1)	1	(+18)				
1)	(1)					

	1	+18	+102	+121	−535	−1054
1)	1	+19	+121	+242	−293	(−1347)
1)	1	+20	+141	+383	(+90)	

1)	1	+ 21	+ 162	(+ 545)
1)	1	+ 22	(+ 284)	
1)	1	(+ 23)		
1)	(1)			

	1	+ 23	+ 184	+ 545	+ 90	— 1347
1)	1	+ 24	+ 208	+ 753	+ 843	(— 504)
1)	1	+ 25	+ 233	+ 986	(+ 1839)	
1)	1	+ 26	+ 259	(+ 1245)		
1)	1	+ 27	(+ 286)			
1)	1	(+ 28)				
1)	(1)					

	1	+ 28	+ 286	+ 1245	+ 1839	— 504
1)	1	+ 29	+ 315	+ 1560	+ 3399	(+ 2885)
1)	1	+ 30	+ 345	+ 2005	(+ 5404)	
1)	1	+ 31	+ 376	(+ 2381)		
1)	1	+ 32	(+ 408)			
1)	1	(+ 33)				
1)	(1)					

Innen tehát:

$$\varphi(x+1) = x^5 + 8x^4 - 2x^3 - 139x^2 - 291x - 60$$
$$\varphi(x+2) = x^5 + 13x^4 + 40x^3 - 87x^2 - 538x - 483$$
$$\varphi(x+3) = x^5 + 18x^4 + 102x^3 + 121x^2 - 535x - 1054$$
$$\varphi(x+4) = x^5 + 23x^4 + 184x^3 + 545x^2 + 90x - 1347$$
$$\varphi(x+5) = x^5 + 28x^4 + 286x^3 + 1245x^2 + 1839x - 504$$
$$\varphi(x+6) = x^5 + 33x^4 + 408x^3 + 2381x^2 + 5404x - 2835$$

és ebből, mint feljebb;

$$\varphi(0) = - \;\; 101$$
$$\varphi(1) = - \;\; 60$$
$$\varphi(2) = - \;\; 483$$

$$\varphi(3) = -1054$$
$$\varphi(4) = -1347$$
$$\varphi(5) = -\ 504$$
$$\varphi(6) = -2885.$$

A' mivelet alatt levő egyenletnek tehát két tagadó képes gyökere is van: egyik 0 és -1 között, a' másik -5 és -6 között.

Második példánk a' 39 §. ez volt:

$$fx = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$$

mellynek tehát három állító képes gyökere lehet. Leszállítván a' gyökereket, lesz:

	1	-1	$+4$	$+1$	-4
1)	1	0	$+4$	$+5$	$(+1)$
1)	1	$+1$	$+5$	$(+10)$	
1)	1	$+2$	$(+7)$		
1)	1	$(+3)$			
1)	(1)				

azaz:

$$f(x+1) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 10x + 1$$

és:

$$f(0) = -4$$
$$f(1) = -1$$

levén, látni való, hogy fx-nek legalább egy állító képes gyökere van 0 és 1 között. Továbbá itt:

$$\varphi x = x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 4$$

tehát:

	1	$+1$	$+4$	-1	-4
1)	1	$+2$	$+6$	$+5$	$(+1)$
1)	1	$+3$	$+9$	$(+14)$	
1)	1	$+4$	$(+13)$		
1)	1	$(+5)$			
1)	(1)				

azaz:

$$\varphi(x+1) = x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 14x + 1$$

és innét:

$$\varphi(0) = -4$$
$$\varphi(1) = +1$$

tehát az egyenletnek egy tagadó gyökere is van 0 és — 1 között.

42. §.

A' képes gyökerek' határainak kikeresése után, ha netán kevesebb képes gyökér találtatott volna, mint a' mennyi gyökere egyáltalában van az egyenletnek; következik annak vizsgálata, valljon van-e képzeleti gyökere az egyenletnek, és hány. 'S e' vizsgálatnál a' következő rendet fogjuk tartani:

α) Ha az

$$fx,\ f(x+1),\ f(x+2)\ \ldots\ f(x+n)$$

vagy

$$\varphi(x+1),\ \varphi(x+2)\ \ldots\ \varphi(x+n)$$

egyenletekből egy vagy több tag hibáznék, és pedig egy hasonjegyű, vagy több akármelly jegyű szomszédok között, akkor a' 29 és 35 §. szerint képzeleti gyökereket következtethetni.

β) Midőn az egyenletnek csak két jegyváltozása van egymás mellett, akkor a' 36 §. adja a' képzeleti gyökereket, 's ez áll nem csak az adott fx és φx, hanem az átalakított

$$f(x+1),\ f(x+2)\ \ldots\ f(x+n)$$
$$\varphi(x+1),\ \varphi(x+2)\ \ldots\ \varphi(x+n)$$

egyenletekről is.

γ) Midőn valamelly $f(x+q)$ átalakított egyenletben, az fx vagy valamelly $f(x+p)$ egyenletre nézve ('s itt $q > p$), két hasonjegyűen maradott szomszéd között két jegyváltozás elenyészett, a' 31 §ban tanított:

$$\frac{L_{r-1}}{L_r} + \frac{N_{r-1}}{N_r} \overline{\overline{>}}\, r.\{q-p\}$$

mutatandja sokszor, hogy a' jegyváltozások' elenyészte egy pár képzeleti gyökér által okoztatott. Hogyha képzeleti gyökerek által okoztatott a' jegyváltozások' elenyészte, akkor csak összébb és összébb kell húzni a' $q-p$ közt 's minden bizonynyal lesz:

$$\frac{L_{r-1}}{L_r} + \frac{N_{r-1}}{N_r} \overline{\overline{>}}\, r.\{q-p\}.$$

δ) Midőn egyáltalában valamelly

$$f(x+1),\quad f(x+2),\ \ldots\ f(x+n)$$

egyenletnek két vagy több jegyváltozással kevesebb volva, mint előzőinek, a' képzeleti gyökerek' jelenlétét a' 37 és 38 §. szerint lehet keresni, 's kiváltképen ajánlható ezen keresési mód, midőn több, mint két jegyváltozás enyészett el. 'S így fogunk bánni az

$$\varphi x,\quad \varphi(x+1),\quad \varphi(x+2)\ \ldots\ \varphi(x+n)$$

egyenletekkel is. Itt azonban észre kell vennünk, hogy ezen ismertető jel' elégtelensége' esetében, a' γ) szerint kell keresni a' képzeleti gyökereket, felosztván azaz összébb húzván a' $q-p$ közt, mellyben két vagy több jegyváltozás elenyészett.

'S itt kitetszik legvilágosabban, miért egyszerűbb és ajánlhatóbb a'

$$f(x+1),\ f(x+2)\ \ldots\ f(x+n)$$

egyenletek' leszármaztatása; mint a' mellyek nem csak a' képes gyökerek' határait adják, hanem egyszersmind ismertető jeleket is, a' képzeleti gyökerek' kutatására.

43. §.

Alkalmazzuk ezen ismertető jeleket először az:

$$fx = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95^2 - 46x - 101$$

egyenletre, mellyre nézve találtuk:

$$f(x+1) = x^5 + 2x^4 - 26x^3 + 15x^2 + 65x - 78$$
$$f(x+2) = x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 30x - 21$$
$$f(x+3) = x^5 + 12x^4 + 30x^3 - 13x^2 - 43x - 32$$
$$f(x+4) = x^5 + 17x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 74x - 45$$
$$f(x+5) = x^5 + 22x^4 + 166x^3 + 535x^2 + 729x + 294$$

Itt a' $f(x+2)$ és $f(x+3)$ között két jegyváltozás esett ki, hasonjegyű 's hasonjegyűn maradó két szomszéd között, az utolsó tagok t. i. ezek:

$$-41x^2 + 30x - 21$$
$$-13x^2 - 43x - 32$$

tehát γ) szerint vizsgáljuk az egyenletet, és minthogy

$$\frac{21}{30} + \frac{32}{43} > 1,$$

nyilvánvaló, hogy az fx egyenletnek két képzeleti gyökere van.

Találtuk volna ezt δ) szerint is. Legyen t. i.

$$f(x+2) = \psi x$$
$$= x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 30x - 21$$

lesz:

	21	-30	$+41$	$+8$	-7	-1
1)	21	-9	$+32$	$+40$	$+33$	$(+32)$
1)	21	$+12$	$+44$	$+84$	$(+117)$	
1)	21	$+33$	$+77$	$(+161)$		

1) 21 $+54$ $(+131)$
1) 21 $(+75)$
1) (21)

és innen:

$$\psi\left(\frac{1}{x+1}\right)=21x^5+75x^4+131x^3+161x^2+117x+32$$

's minthogy $v=3$, $v'=1$ és $v'''=0$ lesz a' képzeleti gyökerek' száma a' 37 és 38 §. szerint kettő.

Visszatekintvén most ezen átvizsgált

$$fx=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101$$

egyenletre, látjuk hogy neki

1 képes gyökere van -5 és -6 között
1 „ „ „ 0 „ -1 „
2 képtelen „ „ 2 „ 3 „
1 képes „ „ 4 „ 5 „.

Második példáúl szolgált az utóbbi §§ban az:

$$fx=x^4-x^3+4x^2+x-4$$

mellyre nézve találtatott;

$$f(x+1)=x^4+3x^3+7x^2+10x+1,$$

mellyre, minthogy kezdete az fx és $f(x+1)$ egyenleteknek ez:

$$x^4-x^3+4x^3$$
$$x^4+3x^3+7x^2$$

szintén alkalmazható a' γ) szabály, mellynél fogva lesz:

$$\frac{4}{1}+\frac{7}{3}>3\cdot1\ ;$$

's így ezen egyenletnek is lesz két képzeleti gyökere 0 és 1 között.

Alkalmazhattuk volna a' δ) szabályt is, mert ebből:

4 -1 -4 $+1$ -1
1) 4 $+3$ -1 0 (-1)

1) 4 +7 +6 (+6)
1) 4 +11 (+17)
1) 4 (+15)
1) (4)

lesz:

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 4x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 6x - 1$$

's minthogy $v = 3$; $v' = 0$; $v''' = 1$, nyilvánvaló, hogy neki két képzeleti gyökere van.

Összeállítva tehát az eredményeket, mondhatjuk, hogy az

$$fx = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$$

egyenletnek

1 képes gyökere van 0 és — 1 között
1 „ „ „ „ „ + 1 „
2 képtelen „ „ „ „ „ „

44. §.

Így egyáltalában annyi képes és képtelen gyökér fog találtatni, hogy azoknak száma az egyenlet fokával egyenlő legyen. Ha azonban megesnék, hogy kevesebb találtatik, meglehet, hogy az egyenletnek ismételt gyökerei vannak; de mellyekre nézve nem kell külön ismertető jel, minthogy azokat a' megfejtés maga adja a' 24 §. szerint, több utolsó tag $=0$ levén.

Mi mármost az egyes állító képes gyökerek' keresését illeti ('s tudjuk hogy a' tagadóknak kivonása is erre megy ki φx-nek leszármaztatása által), a' mellyhez a' gyökerek' határainak kitűzése 's a' képteleneknek netáni kimutatása után hozzá kell fogni: annak főbb szabályai a' következőkből folynak.

Legyen $f(x+p)$ és $f(x+q)$ két átalakított egyenlet és pedig ollyan, hogy p és q között az fx egyenletnek egy állító képes gyökere legyen; akkor ezen átalakított egyenletek' végei ezek lesznek:

$$\ldots + L_2 x^2 + L_1 x + L_0$$
$$\ldots + N_2 x^2 + N_1 x + N_0$$

L_m, L_{m-1} ... az $f(x+p)$; N_m, N_{m-1} ... pedig az $f(x+q)$ egyenlethez tartozván, 's $q > p$, azaz p alsó határ levén. 'S minthogy p és q között a' föltétel szerint csak egy képes gyökér található, világos, hogy

$$L_0 \text{ és } N_0$$

egymástól jegyeikben különböznek. Az egész mesterség, mármost abban áll, hogy szorosabb két határt találjunk, mellyekre nézve az új

$$L'_0 \text{ és } N'_0$$

mennyiségek jegyeikben szinte egymástól különbözők 'S ebben legczélirányosabban a' következő rendet fogjuk tartani. Azt láttuk feljebb, hogy a' határok, mellyek közé a' gyökerek szoríttatnak, átaljában

$$= 0{\cdot}1;\ 1;\ 10 \ldots$$

azaz, hogy $q-p$ átalában

$$= 0{\cdot}1;\ 1;\ 10 \ldots$$

's mármost szorosabb két határt kell találni, úgy hogy az új $q'-p'$ közt

$$= 0{\cdot}01;\ 0{\cdot}1;\ 1 \ldots$$

azaz a' $q-p$ köznél tizszerte vagy százszorta 'stb. kisebb legyen. Legyen ezen közelebbi alsó határra nézve

$$q' = q + \varepsilon;$$

akkor lesz a' 26 §. kifejtéseinél fogva:

$$L'_0 = L_0 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \ldots$$

's minthogy itt a' föltételnél fogva L'_0 még inkább közeledik a' 0-hez mint L_0, és ε csak kis mennyiség lehet, lesz nyilván közelítéssel

$$0 = L_0 + L_1 \varepsilon;$$

a' mellyből következik:

$$\varepsilon = - \frac{L_0}{L_1}.$$

45. §.

A' talált

$$\varepsilon = - \frac{L_0}{L_1}$$

értéknek első jelentő számjegyével leszállítván az $f(x+p)$ egyenletet, új

$$f(x+p') = L'_m x^m + L'_{m-1} x^{m-1} + \ldots$$
$$+ L'_2 x^2 + L'_1 x + L'_0$$

egyenletet kapunk; de ennek ollyannak kell lennie, hogy L'_0 az L_0 mennyiséggel ugyanazon előjegyű legyen, és ezenfelűl ugyanazon L'_0 ellenkező jegyűvé váljék, hogyha ε egy saját rende szerint levő egységgel megtoldatik, miről számolás által meg kell győződni. Saját rendje alatt pedig az értetik, hogy a' toldaléknak tizesnek kell lenni, midőn $100 > \varepsilon \overline{\overline{>}} 10$; egyesnek midőn $10 > \varepsilon \overline{\overline{>}} 1$; tizedrésznek midőn $1 > \varepsilon \overline{\overline{>}} \frac{1}{10}$ 'stb.

Ez által nyilvánvaló, hogy közelebbi

$$p' = p + \varepsilon$$

határt, és pedig szinte alsót nyerünk. Még közelebbit pedig az

$$\varepsilon' = - \frac{L'_0}{L'_1}$$

mennyiségnek leszármaztatása által: a' mellyel epen úgy kell bánni, mint a' feljebbi ε-nal.

A' munkát így folylatván, azaz

$$s = -\frac{L_0}{L_1}$$

$$s' = -\frac{L'_0}{L'_1}$$

$$s'' = -\frac{L''_0}{L''_1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

mennyiségekkel leszállítván az $f(x+p)$ egyenletet, az utolsó $L_0^{(n)}$ tagot a' 0-hez kényünk szerint közel vihetjük, és a'

$$p + s + s' + s'' \ldots$$

lesz a' keresett képes gyökérnek közelítő értéke.

A' gyökérkivonás előtt mindég meg kell határozni, hány tizedes jegyig akarunk menni benne. Legyen e' végett a' köz, mellyből kiindúlunk, azaz:

$$q - p = 1,$$

következőleg az

$$s, \; s', \; s'' \ldots$$

első, második, harmadik 'stb. rendű tizedes törött számok; és legyen az $f(x+p)$ egyenletnek utolsó tagja, mint feljebb $= L_0$. Ezt föltéve tehát, hogyha n tizedes jegyet kivánunk a' gyökérben, mindenek előtt az L_0 utolsó tagot 10^n által kell osztani, 's legyen a' hányasnak utolsó tagja $= \frac{\alpha}{10^r}$. Ez meglevén szabályúl szolgálhat, hogy az

$$L'_0, \; L''_0, \; L'''_0, \; L_0^{IV} \ldots$$

mennyiségek' lehozásában mindazt ki lehet hagyni, mi ugyanazoknak r-dik tizedes törött jegyére be nem folyhat.

46. §.

Példák fogják legjobban a' mondottakat felvilágosítani. Legyen tehát:

$$fx = x^3 - 7x + 7$$

lesz:

	1	0	-7	$+7$
1)	1	$+1$	-6	$(+1)$
1)	1	$+2$	(-4)	
1)	1	$(+3)$		
1)	(1)			

	1	$+3$	-4	$+1$
1)	1	$+4$	0	$(+1)$
1)	1	$+5$	$(+5$	
1)	1	$(+6)$		
1)	(1)			

Továbbá

$$\varphi x = x^3 - 7x - 7$$

tehát:

	1	0	-7	-7
1)	1	$+1$	-6	(-13)
1)	1	$+2$	(-4)	
1)	1	$(+3)$		
1)	(1)			

	1	$+3$	-4	-13
1)	1	$+4$	0	(-13)
1)	1	$+5$	$(+5)$	
1)	1	$(+6)$		
1)	(1)			

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & +6 & +5 & -13 \\
1) & 1 & +7 & +12 & (-1) \\
1) & 1 & +8 & (+20) & \\
1) & 1 & (+9) & & \\
1) & (1) & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & +9 & +20 & -1 \\
1) & 1 & +10 & +30 & (+29) \\
1) & 1 & +11 & (+41) & \\
1) & 1 & (+12) & & \\
1) & (1) & & &
\end{array}$$

azaz:

$$f(x+1) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$
$$f(x+2) = x^3 + 6x^2 + 5x + 1$$

$$\varphi(x+1) = x^3 + 3x^2 - 4x - 13$$
$$\varphi(x+2) = x^3 + 6x^2 + 5x - 13$$
$$\varphi(x+3) = x^3 + 9x^2 + 20x - 1$$
$$\varphi(x+4) = x^3 + 12x^2 + 41x + 29$$

'S itt az

$$f(x+1) \text{ és } f(x+2)$$

között két jegyváltozás enyészett el. Lássuk valljon képtelen gyökerektől jő-e ez. A' β) szabály szerint (32 §.) minthogy itt az $f(x+1)$ egyenletnek csak 2 jegyváltozása van,

$$4^2 > 3.4$$

levén, képzeleti gyökereket következtetni nem lehet. A' γ) szabály szerint hasonlólag nem találtatik képzeleti gyökér, mert

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1.$$

Keressük tehát azokat a' δ) szerint; de csupán csak gyakorlás végett, mert alkalmazásban ismételt és többféle keresgélésre szükség nincs; lesz:

	1	−4	+3	+1
1)	1	−3	0	(+1)
1)	1	−2	(−2)	
1)	1	(−1)		
1)	(1)			

következőleg $v=2$; $v'=0$; $v'''=2$'s így ismét képzeleti gyökérre nem akadunk. Nincs tehát más hátra, mint a' $2\,.\,.-1$ közt, mellyből a' két jegyváltozás elenyészett, ketté szakasztani. Lesz tehát:

	1	+3	−4	+1
0·5)	1	+3·5	−2·25	(−0·125)
0·5)	1	+4·0	(−0·25)	
0·5)	1	(+4·5)		
0·5)	(1)			

azaz:

$$f(x+1{\cdot}5)=x^3+4{\cdot}5x^2-0{\cdot}25x-0{\cdot}125\,.$$

Mindezekből látni, hogy az adott egyenletnek:

1 képes gyökere van −3 és −4 között;
1 „ „ „ 1 „ 1·5 „
1 „ „ „ 1·5 „ 2 „

Keressük itt először azon állító gyökeret, melly 1 és 1·5 között fekszik, és pedig 8 tizedes jegyben. A' miveleteknél tehát mindent ki fogunk hagyni, mi az utolsó tag' tizedik tizedes kelyére már nem folyhat be. Itt tehát

$$\varepsilon=-\frac{L_0}{L_1}=0{\cdot}25\,,$$

a' hol nem tudjuk, valljon 0·2 veendő-e vagy 0·3. Az első sorok' kiszámolása az illető schemákból meggyőz bennünket, hogy itt 0·3 veendő; mert:

	1	+ 3	− 4	+ 1
0·2)	1	+ 3·2	− 3.36	+ 0·328

	1	+ 3	− 4	+ 1
0·3)	1	+ 3·3	− 3·01	(+ 0·097)
0·3)	1	+ 3·6	(− 1·93)	
0·3)	1	(+ 3·9)		
0·3)	(1)			

Ezen utóbbit mindjárt egészen származtattuk le, mert a' rekesz alatti számokra szükségünk lesz. Egyébiránt látható, hogy

	1	+ 3	− 4	+ 1
0·4)	1	+ 3·4	− 2·64	− 0·054

tehát 0·4 nagy lenne. A' keresett ε tehát $= 0·3$, és

$$f(x + 1·3) = x^3 + 3·9x^2 - 1·93x + 0·097$$

Ennél fogva lesz az új

$$\varepsilon' = -\frac{L'_0}{L'_1} = 0·05\,;$$

mi helyes. Mert az első sorokból mindjárt lesz:

	1	+ 3·9	− 1·93	+ 0·097
0·05	1	+ 3·95	− 1·7325	+ 0·010375

	1	+ 3·9	− 1·93	+ 0·097
0·06)	1	+ 3·96	− 1.6924	− 0·004004.

Az elsőt, mint helyest, folytatván, lesz:

	1	+ 3·9	− 1·93	+ 0·097
0·05)	1	+ 3·95	− 1·7325	(+ 0·010375)
0·05)	1	+ 4·00	(− 1·5325)	
0·05)	1	(+ 4·05)		
0·05)	(1)			

'S ebből továbbá következik:

$$\varepsilon'' = -\frac{L_0''}{L_1''} = 0{\cdot}006,$$

mi ismét helyes, mint kiki meggyőződhetik. Leszállítván lesz:

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & +4{\cdot}05 & -1{\cdot}5325 & +0{\cdot}010375 \\
0{\cdot}006) & 1 & +4{\cdot}056 & -1{\cdot}508164 & (+0{\cdot}001326016) \\
0{\cdot}006) & 1 & +4{\cdot}062 & (-1{\cdot}483792) & \\
0{\cdot}006) & 1 & (+4{\cdot}068) & & \\
0{\cdot}006) & (1) & & &
\end{array}$$

és mármost:

$$\varepsilon''' = -\frac{L_0'''}{L_1'''} = 0{\cdot}0008,$$

mi szinte helyes. De most már, minthogy az utolsó tagban csak a' 10-dik jegyet tartjuk meg, és egy 4dik tizedes jegygyel sokszorzunk, tehát az utolsó előtti függő sorban csupán csak a' hatodikra, a' harmadik függő sorban ellenben (bal felől számítva) csupán csak a' 2dik tizedes jegyre szorúlunk. Tehát ezen harmadik függő sorban a' harmadik tizedest el fogjuk egy vonással rekeszteni, 's csupán csak igazításra használni. Ezt megtéve lesz:

$$\begin{array}{llll}
0{\cdot}0008) & & & \\
1 + 4{\cdot}06,8 & -1{\cdot}483792 & +0{\cdot}001326016 \\
1 + 4{\cdot}07 & -1{\cdot}480538 & (+0{\cdot}0001415856 \\
1 + 4{\cdot}07 & (-1{\cdot}477284) & \\
1\,(+4{\cdot}07) & & \\
(1) & &
\end{array}$$

és innen ismét

$$\varepsilon^{IV} = -\frac{L_0^{IV}}{L_1^{IV}} = 0{\cdot}00009;$$

tehát

0·00009)
1 + 4 — 1·47728,4 + 0·0001415856
1 + 4 — 1·47691 (+ 0·0000086637)
1 + 4 (— 1·47654)
1(+ 4)
(1)

És most az új

$$\varepsilon^{V} = -\frac{L_0^{V}}{L_1^{V}} = 0{\cdot}00000\ 5$$

lesz, mellynél fogva:

0·00000 5)
1 + 4 — 1·4765,4 + 0·0000086637
1 + 4 — 1·4766 (+ 0.0000012809)
1 + 4 (— 1·4766)
(1)

a' mellyből ujolag

$$\varepsilon^{VI} = -\frac{L_0^{VI}}{L_1^{VI}} = 0{\cdot}00000\ 08;$$

tehát

0·00000 08)
1 + 4 — 1·476,6 + 0·00000 12809
1 + 4 — 1·777 + 0·00000 00993

(többet irni felesleges volna, minthogy a' második, harmadik és negyedik függő soron, bal felé számítva, változás nem történik), és ebből végűl:

$$L^{VII} = -\frac{L_0^{VII}}{L_1^{VII}} = 0{\cdot}00000\ 00672.$$

'S itt megállapodván, minthogy

$$-1{\cdot}477 \times 0{\cdot}0000000672$$

épen annyit tesz, mint 0·0000000993, csakhogy ellenkező jegygyel (a' honnét látható, hogy az új utolsó tag $< \frac{1}{10^{10}}$ lenne) lesz a' keresett gyökér 9 tizedes jegyben helyesen:

$$+1{\cdot}35689\ 5867\ (2)\ \ldots$$

A' tizedik jegy, melly nem biztos, rekeszbe foglaltatott.

Keressük mármost a' második állító gyökeret és pedig szinte 9 tizedes jegyben. Ezen gyökér, mint már tudjuk, 1·5 és 2 között van. Az egyenlet, mellyből itt kiindúlunk, ez:

$$f(x+1{\cdot}5) = x^3 + 4{\cdot}5x^2 - 0{\cdot}25x - 0{\cdot}125.$$

Szállítsuk ezt le egymásután 0·1 és 0·2-szel, lesz:

	1	+4·5	−0·25	−0·125
0·1)	1	+4·6	+0·21	(−0·104)
0·1)	1	+4·7	(+0·68)	
0·1)	1	(+4·8)		

	1	+4·8	+0·68	−0·104
0·1)	1	+4·9	+1·17	+0·013

a' honnét látható, hogy a' keresett gyökér tulajdonképen 1·6 és 1·7 között fekszik. Az ε tehát minden esetre kisebb, mint 0·1. Ha azt a' szokott mód szerint keressük, lesz:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1} = 0{\cdot}15,$$

mi felette nagy. Kisértsük tehát a' 0·09 számot, lesz:

	1	+4·8	+0·68	−0·104
0·09)	1	+4·89	+0·3201	(−0·003191)
0·09)	1	+4·98	(+1·5683)	
0·09)	1	(+5·07)		

Ebből következik:

$$\varepsilon' = -\frac{L_0'}{L_1'} = 0{\cdot}002$$

's ennél fogva:

	1	+ 5·07	+ 1·5683	— 0·003191
0·002)	1	+ 5·072	+ 1·578444	(— 0·000034112)
0·002)	1	+ 5·074	(+ 1·588592)	
0·002)	1	(+ 5·076)		

'S ebből ujolag:

$$\varepsilon'' = -\frac{L_0''}{L_1''} = 0{\cdot}00002$$

tehát:

0·00002)

1	+ 5·1	+ 1·58859	— 0·000034112
1	+ 5·1	+ 1·58869	(— 0·0000023382)
1	+ 5·1	(+ 1·58879)	

És ebből végűl

$$\varepsilon''' = -\frac{L_0'''}{L_1'''} = 0{\cdot}00000\ 1470\ (3)$$

A' második állító képes gyökér tehát:

$$+ 1{\cdot}69202\ 1470\ (3) \ldots$$

A' harmadik gyökér, mint feljebb találtatott, — 3 és — 4 között fekszik; 's erre nézve a'

$$\varphi(x + 3) = x^3 + 9x^2 + 20x - 1$$

egyenletből foly:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1} = 0{\cdot}05\,.$$

A' szokott módon találtatik:

	1	+ 9	+ 20	+ 1
0·05	1	+ 9·05	+ 20·4525	+ 0·022625

Minthogy tehát itt az utolsó tag állító lenne, 0·05 nagy. Legyen tehát

$$\varepsilon = 0{\cdot}4\,.$$

Hasonló módon találtatik

	1	+ 9	+ 20	— 1
0.04)	1	+ 9·04	+ 20·3616	(— 0·185539)
0·04)	1	+ 9·08	(+ 20·7248)	
0·04)	1	(+ 9·12)		

'S mármost az uj

$$\varepsilon' = -\frac{L_0'}{L_1'} = 0{\cdot}008,$$

mi helyes; és

0·008)

1	+ 9·12	+ 20·7248	— 0·185539)
1	+ 9·128	+ 20·797824	(— 0·019156408)
1	+ 9·136	(+ 20·870912)	
1	(+ 9·144)		

Ebből mármost

$$\varepsilon'' = -\frac{L_0''}{L_0''} = 0{\cdot}0009;$$

0·0009)

1	+ 9·144	+ 20·870912	— 0·019156408
1	+ 9·145	+ 20·8794425	(— 0·0003649098)
1	+ 9·145	(+ 20·8879730)	
1	(+ 9·145)		

's ebből:

$$\varepsilon''' = -\frac{L_0'''}{L_1'''} = 0{\cdot}00001$$

tehát a' szokott módon:

0·00001)

1	+ 9·1	+ 20·88797	— 0·0003649098
1	+ 9·1	+ 20·83806	(— 0 0001560292)
1	+ 9·1	(+ 20·88815)	
1	(+ 9·1)		

És most végűl:

$$\varepsilon^{IV} = -\frac{L_0^{IV}}{L_1^{IV}} = 0{\cdot}00000 \quad 7469\ (7)\ .$$

Mind ezeknek következésében, a' szóban forgó

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

egyenletnek három képes gyökere ez:

$$+ 1{\cdot}69202 \quad 1470\ (3) \ldots$$
$$+ 1{\cdot}35689 \quad 5867\ (2) \ldots$$
$$- 3{\cdot}04891 \quad 7469\ (7) \ldots$$

47. §.

Midőn egyenlő gyökerei vannak valamelly egyenletnek, nem csak L_0, hanem L_1 is közeledik a' 0-hez 's ez mint már tudjuk a' két egyenlő gyökérnek legjobb ismertető jele. Hogy ezt is egy kis példában lássuk, legyen

$$fx = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1\ .$$

Itt mindenek előtt:

	1	−2	−1	+2	+1
1)	1	−1	−2	0	(+1)
1)	1	0	−2	(−2)	
1)	1	+1	(−1)		
1)	1	(+2)			

és hasonló módon:

	1	+2	−1	−2	+1
1)	1	+3	+2	0	(+1)
1)	1	+4	+6	(+6)	
1)	1	+5	(+11)		
1)	1	(+6)			

És mármost a' tagadó gyökerekre nézve, minthogy

$$\varphi x = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

hasonlólag lesz:

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & +2 & -1 & -2 & +1 \\
1) & 1 & +3 & +2 & 0 & (+1) \\
1) & 1 & +4 & +6 & (+6) & \\
1) & 1 & +5 & (+11) & & \\
1) & 1 & (+6) & & &
\end{array}$$

Következőleg összeállítva:

$$\begin{aligned}
fx &= x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \\
f(x+1) &= x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\
f(x+2) &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 \\
\\
\varphi x &= x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\
\varphi(x+1) &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1
\end{aligned}$$

Tehát 2 állító képes gyökér, ha van, 1 és 2 között, és szintannyi tagadó, ha van 0 és -1 között keresendő.

Az ismertető jelek képzeleti gyökeret nem mutatván ki: keressük az állító gyökereket, de csak az ötödik tizedes helyig. Az

$$f(x+1) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

egyenletből indulván ki, lesz mindenek elótt:

$$z = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$$

következőleg:

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & +2 & -1 & -2 & +1 \\
0{\cdot}5) & 1 & +2{\cdot}5 & +0{\cdot}25 & -1{\cdot}876 & (+0{\cdot}0625) \\
0{\cdot}5) & 1 & +3{\cdot}0 & +1{\cdot}75 & (-1) & \\
0{\cdot}5) & 1 & +3{\cdot}5 & (+3{\cdot}5) & & \\
0{\cdot}5) & 1 & (+4{\cdot}0) & & &
\end{array}$$

nem tudván bizonyosan, helyes-e az 0·5; szálitsuk le az egyenletet még 0·1-szel, lesz:

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & +4 & +3{\cdot}5 & -1 & +0{\cdot}0625 \\
0{\cdot}1) & 1 & +4{\cdot}1 & +3{\cdot}91 & -0{\cdot}609 & (+0{\cdot}0016)
\end{array}$$

0·1) 1 + 4·2 + 4·33 (— 0·176)

0·1) 1 + 4·3 (+ 4·76)

0·1) 1 (+ 44)

és még egy 0·1-szel, lesz:

1 + 4·4 + 4·76 — 0·176 + 0·0016

0·1) 1 + 4·5 + 5·21 + 0·345 + 0·3466

már ebből látható, hogy csak 0·6 helyes. Folytatván a' munkát, lesz

$$\varepsilon'' = 0·01$$

és mármost

0·01)

1 + 4 + 4·76 — 0·176 + 0·0016

1 + 4 + 4·80 — 0·1286 (+ 0·00031)

1 + 4 + 4·84 (— 0·0796)

1 + 4 (+ 4·88)

'S ebből

$$\varepsilon''' = 0·004;$$

de ez felette kicsiny, mert egymásután találtatik:

0·004)

1 + 4 + 4·9 — 0·079 + 0·00032

. . . . . . — 0·0594 (+ 0·0000824

. . . . . . (— 0·0398)

0·005)

1 + 4 + 4·9 — 0·079 + 0·00032

. . . . . . — 0·0545 (+ 0·0000475)

. . . . . . (— 0·0300)

0·006)

1 + 4 + 4·9 — 0·079 + 0·00032

. . . . . . — 0·0496 (+ 0·0000224)

. . . . . . (— 0·0202)

0·007)

$$
\begin{array}{llllll}
1 + 4 + 4{\cdot}9 & -0{\cdot}079 & +0{\cdot}00032 \\
\ldots\ldots & -0{\cdot}0447 & (+0{\cdot}0000071) \\
\ldots\ldots & (-0{\cdot}0104) &
\end{array}
$$

0·008)

$$
\begin{array}{llllll}
1 + 4 + 4{\cdot}9 & -0{\cdot}079 & +0{\cdot}00032 \\
\ldots\ldots & -0{\cdot}0398 & (+0{\cdot}00000016) \\
\ldots\ldots & (-0{\cdot}0006) &
\end{array}
$$

mi helyes. Ennek okáért lesz tehát

$$\varepsilon''' = 0{\cdot}008;$$

és már most az uj

$$\varepsilon^{IV}_{*} = 0{\cdot}0003$$

de mi nagy, mint könnyen találtatik, mert:

0·0003)

$$
\begin{array}{llll}
\ldots & 4{\cdot}9 & -0{\cdot}0006 & +0{\cdot}0000016 \\
\ldots\ldots & & +0{\cdot}00087 & \ldots\ldots
\end{array}
$$

0·0002)

$$
\begin{array}{llll}
\ldots & 4{\cdot}9 & -0{\cdot}0006 & +0{\cdot}0000016 \\
\ldots\ldots & & +0{\cdot}00038 & \ldots\ldots
\end{array}
$$

0·0001)

$$
\begin{array}{llll}
\ldots & 4{\cdot}9 & -0{\cdot}0006 & +0{\cdot}0000016 \\
\ldots\ldots & & -0{\cdot}00011 & \ldots\ldots
\end{array}
$$

's csak ez helyes t. i.

$$\varepsilon^{IV} = 0{\cdot}0001$$

minthogy itt mind L_0, mind pedig L_1 közelít a' 0-hez, nyilvánvaló, hogy az adott egyenletnek két egyenlő vagy közel gyökere van 's ez négy tizedes jegyben

$$+ 1{\cdot}618\,(1) \ldots$$

hol azonban már a' negyedik jegy is hibás. Ezen példából már látni, hogy ezen gyökérkivonási mód, midőn egyenlő gyökerei vannak az egyenletnek, felette bajos. A' két gyökér a' tizedik jegyig ez:

$$+1{\cdot}61803 \quad 3988\,(7)\ \ldots$$

Az adott egyenletnek ezen fölül két tagadó egyenlő gyökere is van, melly

$$= -0{\cdot}61803 \quad 3988\,(7)\ \ldots$$

48. §.

E' példákból kitetszik, hogy az

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1}$$

hányas nem mindég adja pontosan a' kivánt számjegyet, kivált a' gyökérkivonás' elején; de hogy minél tovább megy az ember a' kivonásban, annál több jegyébe bizhatik ugyanazon hányasnak. Pontosabb eredményt következtethetni, ha

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_1}{L_0}}$$

tétetik. Ennek lehozására tartsunk meg három tagot az

$$L_0' = L_0 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + \ldots$$

kifejtésből 's legyen

$$L_2\varepsilon^2 + L_1\varepsilon + L_0 = 0.$$

Ebből lesz:

$$\varepsilon\,(L_1 + L_2\varepsilon) = -L_0;$$

vagy is ε helyébe közelítésűl $-\frac{L_0}{L_1}$ téve,

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1 - \frac{L_0 L_2}{L_1}},$$

a' honnan:

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_1}{L_0}},$$

mint feljebb.

A' 46 §. példájában, az

$$f(x+1) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

egyenletből

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1} = 0{\cdot}25$$

lett, 's nem tudtuk előleges számolás nélkül, valljon 0·2 veendő-e vagy 0·3. Az

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_1}{L_0}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{4} + \frac{4}{1}}$$

mindjárt mutatja, hogy a' keresett szám $= 0{\cdot}3$. Azután a'

$$f(x + 1{\cdot}3) = x^3 + 3{\cdot}9x^2 - 1{\cdot}93x + 0{\cdot}097$$

egyenletből keletkezett

$$\varepsilon' = -\frac{L'_0}{L'_1} = 0{\cdot}05;$$

mi ugyan helyes; de az

$$\varepsilon' = \frac{1}{\frac{L'_2}{L'_1} - \frac{L'_1}{L'_0}}$$

kifejezésből két jegy is helyes; lesz t. i.

$$\varepsilon' = 0{\cdot}056$$

és mármost:

0·056)

1 + 3·9 — 1·93 + 0·097

1 + 3·956 — 1·708464 (+ 0·001326016)

1 + 4·012 (— 1·483792)

1 (+ 4·068)

's az uj

$$\varepsilon'' = \frac{1}{\frac{L_2''}{L_1''} - \frac{L_1''}{L_0''}}$$

$$= 0·00089 \quad 58,$$

mellynek mind a' négy jegye helyes. Vigyük a' közelítést az utolsó tagnak 12-dik tizedes jegyéig. A' második sorban tehát csak 9, a' harmadikban csak 5 tizedes jegyre levén szükségünk, lesz:

0·00089 58)

1 + 4·068 — 1·483792 + 0·001326016

1 + 4·06889 — 1·480147088 (+ 0·000000100238)

1 + 4·07779 (— 1·477295004)

1 (+ 4·08668)

És ebből végűl:

$$\varepsilon''' = \frac{1}{\frac{L_2'''}{L_1'''} - \frac{L_1'''}{L_0'''}}$$

$$= 0·00000 \quad 00678 \quad 58 \ldots,$$

'S mármost mind ebből a' keresett gyökér:

$$+ 1·35689 \quad 58678 \quad 58 \ldots.$$

49. §.

Már ezen példából is láthatni, melly igen használható az

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_1}{L_0}}$$

formula. Sokszor azonban könnyítetik a' számolás, ha neki a' következő alakokat adjuk; ezt t. i.

$$\varepsilon = \frac{L_0 L_1}{L_0 L_2 - L_1^2}$$

vagy ezt:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right) + \left(\frac{L_0 L_2}{L_2^2}\right)^2 + \ldots \right\}$$

a' hol a' haladás' törvénye magában világos.

A' czélba vett közelítés még biztosabb a' következő formula által. Az

$$L_2 \varepsilon^2 + L_1 \varepsilon + L_0 = 0$$

kifejezésből t. i. lesz:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1 + L_2 \varepsilon}$$

$$= -\frac{L_0}{L_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L_2}{L_1} \cdot \varepsilon}$$

$$= -\frac{L_0}{L_1} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{L_2}{L_1} \cdot \varepsilon\right) + \left(\frac{L_2}{L_1} \cdot \varepsilon\right)^2 - \left(\frac{L_2}{L_1} \cdot \varepsilon\right)^3 + - \ldots \right\}$$

's ha mármost itt a' rekeszbe ε értéke, mint előbb találtatott:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1} . \left\{ 1 + \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right) + \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^2 + \ldots \right\}$$

beiktattatik, lesz:

$$-\left(\frac{L_2}{L_1} . \varepsilon\right) = \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right) + \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^2 + \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^3 + \left(\frac{L_0 L_2}{L_1}\right)^4 + \ldots$$

$$+\left(\frac{L_2}{L_1} . \varepsilon\right)^2 = \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^3 + 3\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^4 + 4\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^5 + \ldots$$

$$-\left(\frac{L_2}{L_1} . \varepsilon\right)^3 = \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^3 + 3\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^4 + 6\left(\frac{L_0 L_2}{L_1}\right)^5 + 10\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^6$$

$$+\left(\frac{L_2}{L_1} . \varepsilon\right)^4 = \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^4 + 4\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^5 + 10\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^6 + 20\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^7 + \ldots$$

és mármost mindennek következtében:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1} . \left\{ 1 + \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right) + 2\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^2 + 4\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^3 \right.$$

$$+8\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^4$$

$$+16\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^5$$

$$+\ldots\ldots\Big\}$$

'S ha ezt tesszük a' feljebbi rekeszekbe, lesz:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1}.\Big\{1+\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)$$

$$+2\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^2$$

$$+5\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^3$$

$$+13\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^4$$

$$+34\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^5$$

$$+89\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^6$$

$$+\ldots\ldots\Big\}$$

Egyébiránt itt a' rekesz alatt az 5dik és 6dik tagok pontosan ezek:

$$+14\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^4$$

$$+39\left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2}\right)^5$$

mint az

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1}.\Big\{1-\left(\frac{L_2}{L_1}.\varepsilon\right)+\left(\frac{L_2}{L_1}.\varepsilon\right)^2-+\ldots\Big\}$$

sor' visszafordításából következik.

50. §.

Más fontos kérdések támadnak itt: hány tizedes jegyét kelljen t. i. az ε-nak megtartani (föltéve, hogy ε a' legszigorúbb pontossággal találtatott) és másodszor, hány tagjával kelljen élni az épen most talált kifejtésnek.

Az első kérdés' feloldására nézve, tegyük fel, hogy $\varepsilon^{(u)}$ találtatott. Mindenek előtt mármost származtassuk le az $L_3^{(u)}\,\varepsilon^{(u)3}$ mennyiséget, melly az uj $L_0^{(u+1)}$ mennyiségnek közelítő értéke lesz, 's osztassék ez $L_1^{(u)}$ által ($L_1^{(u)}$ tudniillik ismét közelítő értéke az $L_1^{(u+1)}$ mennyiségnek); a' hányas ellenkező jegygyel véve lesz az uj $\varepsilon^{(u+1)}$ közelítő értéke; lesz t. i.

$$\varepsilon^{(u+1)} = -\frac{L_3^{(u)}\,\varepsilon^{(u)3}}{L_1^{(u)}}$$

közelítőleg; 's legyen mármost

$$\frac{L_3^{(u)}}{L_1^{(u)}} \overset{=}{<} \frac{1}{10^{\mu}}$$

μ alatt a' lehető legnagyobb egész számot értvén; és hasonlólag:

$$\varepsilon^{(u)} \overset{=}{<} \frac{1}{10^{\nu}};$$

akkor lesz

$$\varepsilon^{(u+1)} \overset{=}{<} \frac{1}{10^{\mu+3\nu}};$$

következőleg legalább:

$$\mu + 3\nu - 1$$

tizedes jegy helyes.

A második kérdést illetőleg, vizsgáljuk a' talált kifejtésnek egyes tagjait, mellyeket így is lehet irni:

$$\left(\frac{L_0}{L_1}\right)$$

$$\left(\frac{L_0}{L_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right)$$

$$2\left(\frac{L_0}{L_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2$$

$$5\left(\frac{L_0}{L_1}\right)^4 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3$$

$$14\left(\frac{L_0}{L_1}\right)^5 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^4$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

a' hol közelítőleg mindég:

$$\varepsilon = -\frac{L_0}{L_1} \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^\nu}$$

következőleg, midőn

$$\frac{L_2}{L_1} \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^r},$$

lesz a' második tag, t. i.

$$\left(\frac{L_0}{L_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right) \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^{r+2\nu}}$$

a' harmadik, avvagy

$$2\left(\frac{L_0}{L_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^{2r+3\nu-1}};$$

a' negyedik, avvagy

$$5\left(\frac{L}{L_1}\right)^4 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3 \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^{3r+4\nu-1}}$$

'stb. A' negyedik tagot tehát mindég ki lehet hagyni, mikor

$$\mu + 3\nu - 1 \overline{\overline{<}} 3r + 4\nu - 1$$

azaz:

$$\mu \overline{\overline{<}} 3r + \nu$$

A' harmadik tagot is ki lehet már hagyni, mihelyest

$$\mu + 3\nu - 1 \overset{=}{<} 2r + 3\nu - 1$$

azaz:

$$\mu \overset{=}{<} 2r$$

Sőt a' második tagot is ki lehet hagyni, hogyha

$$\mu \overset{=}{<} r - \nu.$$

Összeállítva: a' második, harmadik, negyedik, ötödik 'stb tagot ki lehet hagyni, mihelyt

$$\mu \overset{=}{<} r - \nu$$

$$\mu \overset{=}{<} 2r$$

$$\mu \overset{=}{<} 3r + \nu$$

$$\mu \overset{=}{<} 4r + 2\nu$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

'S ebből egy új megszorítása következik az első feleletnek. Ha a' 49 §. végkifejtéseit figyelemmel tekintjük, látni fogjuk, hogy a' kettőben csupán csak a' három első tag egyez meg egymással. Ezt megtartva a' feljebb említett

$$\mu + 3\nu - 1$$

tizedes jegy csak akkor lesz helyes, hogyha egyszersmind

$$\mu \overset{=}{<} 3r + \nu;$$

mi ha másként volna, csak

$$3r + 4\nu - 2$$

jegy lenne helyes.

51. §.

Legyen például adva az

$$fx = x^3 - 2x - 5$$

egyenlet. Minthogy itt

$$\begin{array}{lllll}
 & 1 & 0 & -2 & -5 \\
1) & 1 & +1 & -1 & (-6) \\
1) & 1 & +2 & (+1) & \\
1) & 1 & (+3) & & \\
 & & & & \\
 & 1 & +3 & +1 & -6 \\
1) & 1 & +4 & +5 & (-1) \\
1) & 1 & +5 & (+10) & \\
1) & 1 & (+6) & & \\
 & & & & \\
 & 1 & +6 & +10 & -1 \\
1) & 1 & +7 & +17 & +16
\end{array}$$

tehát lesz:

$$\begin{array}{l}
f(x+1) = x^3 + 3x^2 + x \quad - 6 \\
f(x+2) = x^3 + 6x^2 + 10x - 1 \\
f(x+3) = + + \quad + \quad +
\end{array}$$

Ebből kitetszik, hogy az egyenletnek egy állító képes gyökere van 2 és 3 között. Ezt keresve lesz:

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{6}{10} + \frac{10}{1}}$$

$$= 0{\cdot}094\,;$$

's minthogy itt $\mu = 1$ és $\nu = 1$, lesz legalább a' két első tizedes jegy helyes. Ezt megtartva lesz mármost:

$$\begin{array}{lllll}
 & 1 & +6 & +10 & -1 \\
0{\cdot}09) & 1 & +6{\cdot}09 & +10{\cdot}5481 & (-0{\cdot}050671) \\
0{\cdot}09) & 1 & +6{\cdot}18 & (+11{\cdot}1043) & \\
0{\cdot}09) & 1 & (+6{\cdot}27) & &
\end{array}$$

's ebből $\mu = 1$; $\nu = 2$ levén a' 6 első jegy helyesen:

$$\varepsilon' = 0{\cdot}00455\ 1\,.$$

De minekelőtte tovább mennénk, lássuk hány tizedes jegyig mehetni az uj ε'' keresésében. Erre nézve szinte $\mu = 1$; ν pedig $= 6$, tehát

$$\mu + 3\nu - 1 = 18$$

's így a' 18 tizedes jegy még helyes lesz. 'S minthogy itt

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{6 \cdot 27}{11 \cdot 104}$$

$$< \frac{1}{10^0},$$

azaz $r = 0$, következőleg

$$\mu < 3r + \nu$$

a' kifejtésből a' negyedik tagot ki lehet hagyni. Ezt előleg vizsgálva, legyen most

0·004551

1	+6·27	+11·1043	−0·050671
1	+6·274551	+11·132855481601	
			(−0·0000053747033233849)
1	+6·279102	(+11·161431674803)	
1	(+6·283653)		

És ebből mármost:

$$\varepsilon'' = 0{\cdot}00000\ 04815\ 42326\ 591\ \ldots$$

'S mind ezekből a' keresett gyökér:

$$+2{\cdot}09455\ 14815\ 42326\ 591\ \ldots$$

52. §.

További gyakorlás végett legyen a' következő példa:

$$fx = x^3 - 10x^2 - 130x + 850.$$

A' számolás így álland:

	1	−10	−130	+850
10)	1	0	−130	(−450)
10)	1	+10	(−30)	
10)	1	(+20)		

$$\begin{array}{lrrrr} & 1 & +20 & -30 & -450 \\ 10) & 1 & +30 & +270 & +2240 \end{array}$$

Innen látni való, hogy az adott egyenletnek két állító képes gyökere van, az egyik 0 és 10, a' másik 10 és 20 között. Már ezekből is látni, hogy az egyenletnek egy tagadó képes gyökere is lesz. 'S arra nézve, mint már tudatik

$$\varphi x = x^3 + 10x^2 - 130x - 850$$

Tehát lesz:

$$\begin{array}{lrrrr} & 1 & +10 & -130 & -850 \\ 10) & 1 & +20 & +70 & (-150) \\ 10) & 1 & +30 & (+370) & \\ 10) & 1 & (+40) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr} & 1 & +40 & +370 & -150 \\ 10) & 1 & +50 & +870 & +8550 \end{array}$$

's innét a' tagadó gyökér 10 és 20 között.

Összeállítva lesz tehát:

$$\begin{array}{rcrrrr} fx & = & +\,x^3 & -10x^2 & -130x & +850 \\ f(x+10) & = & +\,x^3 & +20x^2 & -30x & -450 \\ f(x+20) & = & + & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrrr} \varphi x & = & x^3 & +10x^2 & -130x & -850 \\ \varphi(x+10) & = & x^3 & +40x^2 & +370x & -150 \\ \varphi(x+20) & = & + & + & + & + \end{array}$$

Keressük itt először azon gyökeret, melly 0 és 10 között fekszik az

$$fx = x^3 - 10x^2 - 130x + 850$$

egyenletből. Szakasszuk ketté a' közt 5 által lesz:

$$\begin{array}{lrrrr} & 1 & -10 & -130 & +850 \\ 5) & 1 & -5 & -155 & (+75) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 5) & 1 & 0 & (-155) \\ 5) & 1 & (+5) & \end{array}$$

minthogy másfelől

$$\begin{array}{lllll} & 1 & +5 & -155 & +75 \\ 1) & 1 & +6 & -149 & -74 \end{array}$$

látni való, hogy a' gyökér 5 és 6 között fekszik. Ennél fogva lesz tehát:

$$\varepsilon = \cfrac{1}{\cfrac{155}{75} - \cfrac{5}{155}}$$

$$= 0\cdot49$$

'S minthogy itt $\mu = 2$; $\nu = 0$, tehát legalább az első tizedes jegy mindenesetre biztos. Ezt megtartva lesz:

$$\begin{array}{lllll} & 1 & +5 & -155 & +75 \\ 0\cdot4) & 1 & +5\cdot4 & -152\cdot84 & (+13\cdot864) \\ 0\cdot4) & 1 & +5\cdot8 & (-150\cdot52) & \\ 0\cdot4) & 1 & (+6\cdot2) & & \end{array}$$

és ebből

$$\varepsilon' = 0\cdot0924,$$

a' hol, minthogy

$$\mu = 2; \ \nu = 1;$$

legalább 4 tizedes jegy helyes. Tartsunk meg azonban csak kettőt, lesz:

$$\begin{array}{lllll} & 1 & +6\cdot2 & -150\cdot52 & +13\cdot864 \\ 0\cdot09) & 1 & +6\cdot29 & -149\cdot9539 & (+0\cdot368149) \\ 0\cdot09) & 1 & +6.38 & (-149\cdot3797) & \\ 0\cdot09) & 1 & (+6\cdot47) & & \end{array}$$

és ebből legalább 8 tizedes jegy helyesen:

$$\varepsilon'' = 0\cdot00246\ 478\ (1) \ldots$$

tehát a' keresett gyökér:

$$+ 5\cdot49246\ 478\ (1) \ldots$$

Az egyenletnek második állító gyökere, mint már tudjuk, 10 és 20 között keresendő, 's arra nézve a' következő

$$f(x+10) = x^3 + 20x^2 - 30x - 450$$

egyenletből indúlunk ki. Vágjuk a' közt ketté 5 által, lesz:

$$\begin{array}{lllll} & 1 & +20 & -30 & -450 \\ 5) & 1 & +25 & +95 & +25 \end{array}$$

a' miből látható, hogy 5 sok, és hogy a' helyes szám hihetőleg 4 lesz; tehát:

$$\begin{array}{lllll} & 1 & +20 & -30 & -450 \\ 4) & 1 & +24 & +66 & (-186) \\ 4) & 1 & +28 & (+178) & \\ 4) & 1 & (+32) & & \end{array}$$

a' gyökér tehát 14 és 15 között keresendő, 's az

$$f(x+14) = x^3 + 32x^2 + 178x - 186$$

egyenletből kell kiindúlni. 'S mármost lesz

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{32}{178} + \frac{178}{186}},$$

$$= 0{\cdot}87$$

's minthogy itt $\mu = 2$; $\nu = 0$, lesz legalább az első tizedes törött jegy helyes. Ezt megtartva lesz továbbá:

$$\begin{array}{lllll} & 1 & +32 & +178 & -186 \\ 0{\cdot}8) & 1 & +32{\cdot}8 & +204{\cdot}24 & (-22{\cdot}608) \\ 0{\cdot}8) & 1 & +33{\cdot}6 & (+231{\cdot}12) & \\ 0{\cdot}8) & 1 & (+34{\cdot}4) & & \end{array}$$

'S ebből lesz a' negyedik tizedes helyig legalább pontosan

$$\varepsilon' = 0{\cdot}0964 .$$

Megtartván azonban csak a' két első helyet, lesz:

$$\begin{array}{lllll} & 1 & +34{\cdot}4 & +231{\cdot}12 & -22{\cdot}608 \\ 0{\cdot}09) & 1 & +34{\cdot}49 & +234{\cdot}2241 & (-1{\cdot}527831) \end{array}$$

$$
\begin{array}{lllll}
0{\cdot}09) & 1 & +34{\cdot}58 & (+237{\cdot}3363) & \\
0{\cdot}09) & 1 & (+34{\cdot}67) & &
\end{array}
$$

a' mellyből

$$\varepsilon'' = 0{\cdot}00643\ 136\ (8)\ \ldots$$

's a' második állító gyökér

$$+\ 13{\cdot}89643\ 136\ (8)\ \ldots$$

nyolcz helyes tizedes törött jegygyel, minthogy $\nu = 2$.

A' tagadó gyökérre nézve találtatott:

$$\varphi(x+10) = x^3 + 40x^2 + 370x - 150;$$

's könnyen található, hogy

$$\varepsilon = 0{\cdot}3$$

és ennek következésében:

$$
\begin{array}{lllll}
 & 1 & +40 & +370 & -150 \\
0{\cdot}3) & 1 & +40{\cdot}3 & +382{\cdot}09 & (-35{\cdot}373) \\
0{\cdot}3) & 1 & +40{\cdot}6 & (+394{\cdot}27) & \\
0{\cdot}3) & 1 & (+40{\cdot}9) & &
\end{array}
$$

's ebből ismét könnyű módon találtatik:

$$\varepsilon' = 0{\cdot}08$$

$$
\begin{array}{lllll}
 & 1 & +40{\cdot}9 & +394{\cdot}27 & -35{\cdot}373 \\
0{\cdot}08) & 1 & +40{\cdot}98 & +397{\cdot}5484 & (-3{\cdot}569128) \\
0{\cdot}08) & 1 & +41{\cdot}06 & (+400{\cdot}8332) & \\
0{\cdot}08) & 1 & (+41{\cdot}14) & &
\end{array}
$$

's innen végre:

$$\varepsilon'' = 0{\cdot}00889\ 614\ (9)\ \ldots$$

tehát a' tagadó gyökér:

$$-\ 10{\cdot}38889\ 614\ (9)\ \ldots$$

A' három képes gyökér tehát összeállítva ez:

$$
\begin{array}{l}
+\ \ 5{\cdot}49246\ 478\ (1)\ \ldots \\
+14{\cdot}89643\ 136\ (8)\ \ldots \\
-10{\cdot}38889\ 614\ (9)\ \ldots
\end{array}
$$

53 §.

Vizsgáljuk az

$$fx = x^3 - 4x^2 - 7x + 4$$

egyenletet.

	1	— 4	— 7	+ 4
1)	1	— 3	— 10	(— 6)
1)	1	— 2	(— 12)	
1)	1	(— 1)		

	1	— 1	— 12	— 6
1)	1	0	— 12	(— 18)
1)	1	+ 1	(+ 11)	
1)	1	(+ 2)		

	1	+ 2	— 11	— 18
1)	1	+ 3	— 8	(— 26)
1)	1	+ 4	(— 4)	
1)	1	(+ 5)		

	1	+ 5	— 4	— 26
1)	1	+ 6	+ 2	(— 24)
1)	1	+ 7	(+ 9)	
1)	1	(+ 8)		

	1	+ 8	+ 9	— 24
1)	1	+ 9	+ 18	(— 6)
1)	1	+ 10	(+ 28)	
1)	1	(+ 11)		

	1	+ 11	+ 28	— 6
1)	1	+ 12	+ 40	(+ 34)

Továbbá:

$$\varphi x = x^3 + 4x^2 - 7x - 4$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & +4 & -7 & -4 \\
1) & 1 & +5 & -2 & (-6) \\
1) & 1 & +6 & (+4) & \\
1) & 1 & (+7) & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & +7 & +4 & -6 \\
1) & 1 & +8 & +12 & (+6) \\
\end{array}$$

Mindezen előleges vizsgálatokból következik, hogy az egyenletnek két állító képes gyökere van, az egyik 0 és 1 között; a' másik 5 és 6 között, és egy tagadó -1 és -2 között. Az első állító gyökérre nézve lesz

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{4}{7} + \frac{7}{4}}$$

$$= 0{\cdot}4$$

következőleg:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -4 & -7 & +4 \\
0{\cdot}4) & 1 & -3{\cdot}6 & -8{\cdot}44 & (+0{\cdot}624) \\
0{\cdot}4) & 1 & -3{\cdot}2 & (-9{\cdot}72) & \\
0{\cdot}4) & 1 & (-2{\cdot}8) & & \\
\end{array}$$

Hogy 0·5 már nagy, kitetszik mindjárt a' következő két sorból:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -2{\cdot}8 & -9{\cdot}72 & +0{\cdot}624 \\
0{\cdot}1) & 1 & -2{\cdot}7 & -9{\cdot}99 & -0{\cdot}375 \\
\end{array}$$

Ezekből lesz továbbá:

$$\varepsilon' = 0{\cdot}06$$

és mármost

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -2{\cdot}8 & -9{\cdot}72 & +0{\cdot}624 \\
0{\cdot}06) & 1 & -2{\cdot}74 & -9{\cdot}8844 & (+0{\cdot}030936) \\
0{\cdot}06) & 1 & -2{\cdot}68 & (-10{\cdot}0452) & \\
0{\cdot}06) & 1 & (-2{\cdot}62) & & \\
\end{array}$$

tehát:

$$\varepsilon'' = 0{\cdot}003$$

következőleg

	1	$-2{\cdot}62$	$-10{\cdot}0452$	$+0{\cdot}030936$
$0{\cdot}003)$	1	$-2{\cdot}617$	$-10{\cdot}053051$	$(+0{\cdot}000776847)$
$0{\cdot}003)$	1	$-2{\cdot}614$	$(-10{\cdot}060893)$	
$0{\cdot}003)$	1	$(-2{\cdot}611)$		

's innen végűl

$$\varepsilon''' = 0{\cdot}00007\ 7213\ (0)\ \ldots$$

mellyben még a' 9dik jegy (minthogy $\mu = 1$; $\nu = 3$) pontos. Az első állító gyökér tehát ez:

$$+0{\cdot}46307\ 7213\ (0)\ \ldots$$

A' második állító gyökérre nézve ezen

$$f(x+5) = x^3 + 11x^2 + 28x - 6$$

egyenletből indúlunk ki. Mindenek előtt itt

$$\varepsilon = 0{\cdot}1$$

tehát:	1	$+11$	$+28$	-6
$0{\cdot}1)$	1	$+11{\cdot}1$	$+29{\cdot}11$	$(-3{\cdot}089)$
$0{\cdot}1)$	1	$+11{\cdot}2$	$(+30{\cdot}23)$	
$0{\cdot}1)$	1	$(+11{\cdot}3)$		

Ebből mármost

$$\varepsilon' = 0{\cdot}09$$

és:

	1	$+11{\cdot}3$	$+30{\cdot}23$	$-3{\cdot}089$
$0{\cdot}09)$	1	$+11{\cdot}39$	$+31{\cdot}2551$	$(-0{\cdot}276041)$
$0{\cdot}09)$	1	$+11{\cdot}48$	$(+32{\cdot}2883)$	
$0{\cdot}09)$	1	$(+11{\cdot}57)$		

'S az uj

$$\varepsilon'' = 0{\cdot}008$$

tehát:

	1	$+11{\cdot}57$	$+32{\cdot}2883$	$-0{\cdot}276041$
$0{\cdot}008)$	1	$+11{\cdot}578$	$+32{\cdot}380924$	$(-0{\cdot}016993608)$

0 008) 1 + 11·586 (+ 32·473612)
0·008) 1 (+ 11·594)

's ebből végűl

$$\varepsilon''' = 0{\cdot}00052\ 3207\ (4) \ldots$$

tehát a' második állító gyökér:

$$+ 5{\cdot}19852\ 3207\ (4) \ldots$$

mellyben a' 9dik tizedes jegy még helyes.

A' tagadó gyökérre nézve, melly — 1 és — 2 között fekszik, lesz:

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{7}{4} + \frac{4}{6}}$$

$$= 0{\cdot}6$$

	1	+ 7	+ 4	— 6
0·6)	1	+ 7·6	+ 8·56	(— 0·864)
0·6)	1	+ 8·2	(+ 13·48)	
0·6)	1	(+ 8·8)		

tehát

$$\varepsilon' = 0{\cdot}06$$

	1	+ 8·8	+ 13·48	— 0·864
0.06)	1	+ 8·86	+ 14·0116	(— 0·023304)
0·06)	1	+ 8·92	(+ 14·5468)	
0·06)	1	(+ 8·98)		

az uj

$$\varepsilon'' = 0{\cdot}001,$$

tehát

	1	+ 8·98	+ 14·5468	— 0·023304
0·001)	1	+ 8·981	+ 14 555781	(— 0·008748219)
0·001)	1	+ 8·982	(+ 14·564763)	
0·001)	1	(+ 8·983)		

és ebből

$$\varepsilon''' = 0{\cdot}00060\ \ 0420\ (0)\ \ldots$$

'S mármost a' három gyökér összeállítva:

$$+\ 0{\cdot}46307\ \ 7213\ (0)\ldots$$
$$+\ 5{\cdot}19852\ \ 3207\ (4)\ldots$$
$$-\ 1{\cdot}66160\ \ 0420\ (0)\ldots$$

54. §.

Különös esetet képeznek az

$$x^m + A_0 = 0$$

egyenletek, mellyekben

$$A_m = 1\,;$$
$$A_{m-1},\ A_{m-2},\ A_{m-2}\ \ldots\ A_2,\ A_1 = 0\,.$$

Tétessék ugyan is az

$$fx = x^m + A_0$$

egyenletben $x+n$, x helyébe, mi által a' gyökerek n-nel leszállítatnak, lesz:

$$\begin{aligned} f(x+n) &= (x+n)^m + A_0 \\ &= x^m + m_1 nx^{m-1} + m_2 n^2 x^{m-2} \\ &\quad \ldots\ldots \\ &\quad + m_2 n^{m-2} x^2 + m_1 n^{m-1} x + (n^m + A_0) \end{aligned}$$

azaz itt:

$$L_0 = n^m + A_0$$
$$L_1 = mn^{m-1}$$
$$L_2 = \tfrac{1}{2}\,.\,m(m-1)\,n^{m-2}$$

tehát

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{n^m + A_0}{mn^{m-1}}$$
$$= \frac{1}{m}\,.\,\left\{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \right\}$$

$$\frac{L_0 L_2}{L_1^2} = \frac{(n^m + A_0) \cdot \frac{1}{2} m (m-1) n^{m-2}}{m^2 n^{2m-2}}$$

$$= \frac{(m-1)}{2n} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left\{ n + \frac{A_0}{n^{m-2}} \right\}$$

$$= \frac{(m-1)}{2n} \cdot \frac{L_0}{L_1}$$

$$2 \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2} \right)^2 = \frac{(m-1)^2}{2n^2} \cdot \left\{ \frac{1}{m} \cdot \{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \} \right\}^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

következőleg

$$= \frac{L_0}{L_1} - \frac{L_0}{L_1} \cdot \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2} \right) - 2 \frac{L_0}{L_1} \cdot \left(\frac{L_0 L_2}{L_1^2} \right)^2 - \ldots$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot \left\{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \right\} - \frac{(m-1)}{2n} \cdot \left\{ \frac{1}{m} \cdot \{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \} \right\}^2$$

$$- \frac{(m-1)^2}{2n^2} \cdot \left\{ \frac{1}{m} \cdot \{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \} \right\}^3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot \left\{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{(m-1)}{2n} \cdot \left\{ \frac{1}{m} \cdot \{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \} \right\} + \frac{(m-1)^2}{2n^2} \cdot \left\{ \frac{1}{m} \cdot \{ n + \frac{A_0}{n^{m-1}} \} \right\}^2 + \ldots \right\}$$

Minthogy itt

$$\frac{L_3}{L_1} = \frac{(m-1)(m-2)}{6n};$$

legyen n-nek ν helyes tizedes jegye és

$$\frac{(m-1)(m-2)}{6n} \overset{=}{<} \frac{1}{10^{\mu}};$$

akkor a' kifejezésből legalább

$$\mu + 3\nu - 1$$

tizedes törött jegy lesz pontos.

Midőn $m = 2$; a' kereset gyökér ez:

$$n - \frac{1}{2}.\left(n + \frac{A_0}{n}\right) - \frac{1}{8n}.\left(n + \frac{A_0}{n}\right)^2$$

$$- \frac{1}{16n^2}.\left(n + \frac{A_0}{n}\right)^3 - \quad . \quad . \quad . \quad .$$

'S az egyes tagok' kifejtése annyi tizedes törött jegyre terjedhet, hogy a' kifejtésnek harmadik tagjánál megállapodván, ezen utolsó jegy még

$$> \frac{1}{25n^3}\left(n + \frac{A_0}{n}\right)^4$$

legyen, számbeli értékére nézve tudniillik.

Például legyen adva:

$$x^2 - 12 = 0,$$

hol tehát $A_0 = - 12$; 's legyen $n = 3$, tehát

$$n + \frac{A_0}{n} = - 1$$

ennél fogva lesz a' keresett gyökér:

$$3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{144} \quad . \quad . \quad .$$

tehát $= 3{\cdot}46$. Legyen mármost $n = 3{\cdot}46$, tehát

$$n + \frac{A_0}{n} = - 0{\cdot}00820\ 80924\ 855 \ . \ . \ .$$

következőleg:

$$- \frac{1}{2}.\left\{n + \frac{A_0}{n}\right\} = + 0{\cdot}00410\ 40462\ 4 \ . \ . \ .$$

$$- \frac{1}{8n}.\left\{n + \frac{A_0}{n}\right\}^2 = - 0{\cdot}00000\ 24339\ 8 \ . \ . \ .$$

$$-\frac{1}{16n^2}.\Big\{n+\frac{A_0}{n}\Big\}^3 = +0{\cdot}00000\ 00028\ 8\ \dots$$

$$+0{\cdot}00410\ 16151\ (4)\dots$$

'S innét a' keresett gyökér a' tizenegyedik jegyig helyesen:

$$\pm\ 3{\cdot}46410\ 16151\ (4)\ \dots$$

Midőn $m=3$; lesz a' keresett gyökér;

$$n-\frac{1}{3}.\left(n+\frac{A_0}{n^2}\right)-\frac{1}{9n}.\left(n+\frac{A_0}{n^2}\right)^2$$

$$-\frac{2}{27n^2}.\left(n+\frac{A_0}{n^2}\right)^3-\ \dots\dots$$

'S midőn n-nek ν tizedes jegye pontos, és

$$\frac{1}{3n} \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^\mu}$$

lesz, mint már tudjuk,

$$\mu+3\nu-1$$

tizedes jegy helyes.

Legyen adva példaút:

$$x^3-2=0$$

azaz kerestessék 2-nek köbgyökere. Itt tehát, első közelítéséül legyen $n=1$, következőleg

$$n+\frac{A_0}{n^2}=-1,$$

és a' gyökér:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\ \dots=1{\cdot}29\ \dots$$

hol azonban legfeljebb az első tizedes jegy lehet helyes. Legyen tehát másodszor:

$$n=1{\cdot}2$$

$$n^2=1{\cdot}44$$

$$\frac{A_0}{n}=-1{\cdot}388\ \dots$$

lesz:

$$-\frac{1}{3}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^2}\right\} = +0{\cdot}0629\ \ldots$$

$$-\frac{1}{9n}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^2}\right\}^2 = -0{\cdot}0033\ \ldots$$

$$-\frac{2}{27n^2}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^2}\right\}^3 = +0{\cdot}0003\ \ldots$$

$$= +0{\cdot}0599\ \ldots$$

'S abből a' gyökérnek közelítő értéke:

$$1{\cdot}2599\ \ldots$$

mellyet $= n$ tevén, lesz ujolag:

$$-\frac{1}{3}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^2}\right\} = +0{\cdot}00002\ 10502\ 44447\ldots$$

$$-\frac{1}{9n}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^2}\right\}^2 = -0{\cdot}00000\ 00003\ 82902\ldots$$

$$-\frac{2}{27n^2}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^2}\right\}^3 = +0{\cdot}00000\ 00000\ 00013\ldots$$

$$= +0{\cdot}00002\ 10498\ 6155\,(8).$$

tehát a' keresett gyökér:

$$1{\cdot}25992\ 10498\ 6155\ (8)\ \ldots$$

Midőn $m = 4$, lesz a' gyökér:

$$-\frac{1}{4}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^3}\right\} - \frac{3}{32n}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^3}\right\}^2$$

$$-\frac{9}{128n^2}\cdot\left\{n+\frac{A_0}{n^3}\right\}^3 - \ \ldots\ldots$$

Kerestessék például 10-nek negyedik gyökere, azaz kerestessék az

$$x^4 - 10 = 0$$

egyenletnek gyökere. Minthogy

$$\text{Log}\ v\ 10 = 1\ ,$$

lesz:

$$\text{Log}\ v\ \sqrt[4]{10} = 0{\cdot}25\,;$$

's igy a' keresett gyökérnek első jegyei ezek: 1·77 . . .
Legyen tehát:

$$n = 1{\cdot}77$$

következőleg:

$$n^5 = 5{\cdot}545233$$

$$n + \frac{A_0}{n^5} = -\ 0{\cdot}03335\ 073\ \ldots$$

és mármost

$$-\frac{1}{4}\cdot\left\{n + \frac{A_0}{n^5}\right\} = +\,0{\cdot}00835\ 01\ \ldots$$

$$-\frac{3}{32n}\cdot\left\{n + \frac{A_0}{n^5}\right\}^2 = -\,0{\cdot}00003\ 69\ \ldots$$

$$-\frac{9}{128n^2}\cdot\left\{n + \frac{A_0}{n^5}\right\}^3 = -\ \ldots\ldots$$

$$+\,0{\cdot}00831\ 32\ \ldots$$

's így a' keresett gyökér

$$\pm\ 1{\cdot}77831\ \ldots$$

Mint lehessen ez uton tovább menni, 's a' megkezdett okoskodásokat folytatni, magában világos dolog. Többet l. illy czímű német munkámban: Beitrag zur Auflösung der höheren Gleichungen. Wien, 1843.

NEGYEDIK SZAKASZ.

Graeffe' feloldásmódja.

1. §.

Legyen adva véges és való előszámokkal:

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0.$$

Az I. Szak. 10 §. szerint tudva van, hogy:

$$A = - C_1 \ (a, b \ldots n)$$
$$B = + C_2 \ (a, b \ldots n)$$
$$C = - C_3 \ (a, b \ldots n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M = (-)^{m-1} \ C_{m-1} \ (a, b \ldots n)$$
$$N = (-)^m \ C_m \ (a, b \ldots n)$$

a' hol

$$a, b, c \ldots m, n$$

az adott fx egyenlet' gyökereit jelentik;

$$C_1 \ (a, b \ldots n)$$
$$C_2 \ (a, b \ldots n)$$
$$C_3 \ (a, b \ldots n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

pedig ugyanezen gyökereknek egyes, kettős, hármas . . . . csoportjait, úgy hogy

$$C_1 \ (a, b \ldots n) = a + b + c + \ldots + n$$
$$C_2 \ (a, b \ldots n) = ab + ac + ad + \ldots + an$$
$$+ bc + bd + \ldots + bn$$

$$+ cd + \ldots + cn$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ mn$$

$$\begin{aligned} C_3\ (a,\ b\ \ldots n) = abc &+ abd + \ldots + abn \\ &+ acd + \ldots + acn \\ &+ bcd + \ldots + bcn \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\qquad\qquad + lmn \end{aligned}$$

'stb legyen.

Származtassunk le új egyenletet, mellynek ugyanazon

$$a,\ b,\ c\ \ldots m,\ n$$

gyökerei, csakhogy az r-dik fokra emelve, legyenek, azaz mellynek gyökerei ezek:

$$a^r,\ b^r,\ c^r\ \ldots m^r,\ n^r$$

's jelöljük ezen új egyenletet φx által, lesz:

$$\begin{aligned} \varphi x = x^m &- C_1\ (a^r,\ b^r\ \ldots n^r).\ x^{m-1} \\ &+ C_2\ (a^r,\ b^r\ \ldots n^r).\ x^{m-2} \\ &- C_3\ (a^r,\ b^r\ \ldots n^r).\ x^{m-3} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (-)^{m-1}\ &C_{m-1}\ (a^r,\ b^r\ \ldots n^r).\ x \\ (-)^m\ &C_m\ (a^r,\ b^r\ \ldots n^r). = 0, \end{aligned}$$

miképen kelljen ezen r-dik fokrai emelést véghezvinni, alább fog előadatni.

2. §.

Hogy a' Graeffe' feloldásmódjáról minélelőbb egy kis fogalmunk legyen, tegyük fel mindenek előtt, hogy az

$$a,\ b,\ c\ \ldots m,\ n$$

gyökerek mind valók és egymástól különbözők, és másodszor, hogy egyáltalában

$$C_q\,(a,\ b\ldots n) = a\,C_{q-1}\,(b,\ c\ldots n) + C_q\,(b,\ c\ldots n)$$

mi a' csoportok' általános eredeténél fogva tudott dolog.

Ezt a' két dolgot feltéve, az φx egyenletet nyilván így is fejezhetni ki:

$$\begin{aligned}\varphi x = x^m &- \{a^r + C_1\,(b^d,\ c^r\ldots n^r)\}.\,x^{m-1}\\ &+ \{a^r\,C_1\,(b^r, c^r\ldots n^r) + C_2\,(b^r\,c^r\ldots n^r)\}.\,x^{m-2}\\ &- \{a^r\,C_2\,(b^r, c^r\ldots n^r) + C_3\,(b^r\,c^r\ldots n^r)\}.\,x^{m-3}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(-)^{m-1}\{a^r\,C_{m-2}\,(b^r, c^r\ldots n^r)\\ &\qquad + C_{m-1}\,(b^r, c^r\ldots n^r)\}.\,x\\ &(-)^m\,C_m\,(a^r, b^r\ldots n^r) = 0.\end{aligned}$$

Ha már most a a' gyökereknek legnagyobbikát jelenti és a' fok, mellyre a' gyökerek emeltettek, eléggé nagy, akkor az a^r-hez, és az a^r-rel sokszorzott tagokhoz képest a' többi nagy rekesz alatti csoportozatok felette kicsinyek levén, közelítésűl lesz:

$$\begin{aligned}\varphi x = x^m &- a^r\,x^{m-1}\\ &+ a^r\,C_1\,(b^r,\ c^r\ldots n^r),\ x^{m-2}\\ &- a^r\,C_2\,(b^r,\ c^r\ldots n^r).\ x^{m-3}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(-)^{m-2}\,a^r\,C_{m-2}\,(b^r,\ c^r\ldots n^r).\ x\\ &(-)^m\quad C_m\,(a^r,\ b^r\ldots n^r) = 0.\end{aligned}$$

'S ezen kifejezés' második tagjából az a gyökeret könnyen meg lehet határozni, minthogy annak előszáma a^r. Ha tudniillik ezen előszámból az r-dik gyökér kivonatik, ezen gyökér nem egyéb, mint a' keresett a maga.

Egyébiránt itt

$$C_0\,(b^r,\ c^r\ldots n^r) = 1$$

tétetett, mi közönségesen tudott dolog. Általában tudniillik:

$$C_0\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots\ ) = 1.$$

Mi ezen tételt a' következőkben is fogjuk használni.

3. §.

Az imént talált egyenletet a'

$$C_q\ (a,\ b\ ..\ n) = a\ C_{q-1}\ (b\ ..\ n) + C_q\ (b\ ..\ n)$$

kifejezésnél fogva, így is lehet irni:

$$\begin{aligned} \varphi x = x^m &- a^r x^{m-1} \\ &+ \{a^r b^r + a^r C_1 (c^r\ ..\ n^r)\}.\ x^{m-2} \\ &- \{a^r b^r C_1 (c^r ..\ n^r) + a^r C_2 (c^r ..\ n^r)\}.\ x^{m-3} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &(-)^{m-1} \{a^r b^r C_{m-3} (c^r ..\ n^r) + a^r C_{m-2}) c^r ..\ n^r)\}.\ x \\ &(-)^m C_m (a^r,\ b^r ..\ n^r) = 0; \end{aligned}$$

's ha itt a után b jelöli a' legnagyobbik gyökeret, 's ha a' fok, mellyre a' gyökerek emeltettek, az r tudniillik, eléggé nagy; akkor a' ragy rekeszekben az $a^r b^r$-hez 's az evvel sokszorzott tagokhoz kepest a' többieket felette kicsinyeknek lehet tekinteni, úgy hogy

$$\begin{aligned} \varphi x = x^m &- a^r x^{m-1} + a^r b^r x^{m-2} \\ &- a^r b^r C_1\ (c^r,\ d^r\ ..\ n^r).\ x^{m-3} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &(-)^{m-1}\ a^r b^r\ C_{m-3}\ (c^r,\ d^r\ ..\ n^r).\ x \\ &(-)^m\ \ C_m\ \ (a^r,\ b^r\ ...\ n^r) = 0 \end{aligned}$$

legyen. Melly egyenletből nyilvánvaló, hogy a' legnagyobbik a gyökeren kivül, az utána következő b-t is találhatni. A' második tag' előszáma tudniillik a^r, tehát a' harmadik tag' előszámának a^r általi osztásából lesz:

$$\frac{a^r\ b^r}{a^r} = b^r;$$

mellynek r-dik gyökere nyilván $= b$.

Hasonló okoskodás által találtatni fog:

$$\varphi x = x^m - a^r x^{m-1} + a^r b^r x^{m-2} - a^r b^r c^r x^{m-3}$$
$$- a^r b^r c^r C_1 (d^r \ldots n^r) . x^{m-4}$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$(-)^{m-1} a^r b^r c^r C_{m-4} (d^r \ldots n^r) . x$$
$$(-)^m C_m (a^r, b^r, c^r \ldots n^r) = 0;$$

föltéve tudniillik, hogy b után c a' legnagyobbik gyökér, és hogy r eléggé nagy. Ezen okoskodást folytatva, általában találtatni fog:

$$\varphi x = x^m - a^r x^{m-1} + a^r b^r x^{m-2} - a^r b^r c^r x^{m-3} + \ldots$$
$$(-)^{m-1} a^r b^r c^r \ldots m^r x \; (-)^m a^r b^r c^r \ldots n^r = 0$$

azon soha el nem felejtendő föltételek alatt tudniillik, hogy előözör

$$a > b > c > \ldots m > n;$$

hol egyébiránt az

$$a, b, c \ldots m, n$$

gyökerek állítók vagy tagadók lehetnek, és hogy r, a' fok tudniillik, mellyre ezen gyökerek emeltettek, eléggé nagy.

4. §.

Miként lehessen a' mondott föltételek alatt az

$$a, b, c \ldots m, n$$

gyökereket meghatározni, magában világos dolog.

Az $\varphi x = x^m - a^r x^{m-1} + a^r b^r x^{m-2} - \ldots$

$$(-)^{m-1} a^r \ldots m^r x \; (-)^m a^r \ldots m^r n^r = 0$$

egyenlet' előszámainak összehasonlításából kiviláglik, hogy ezen egyenlet' második tagjának előszáma, a' jegyet nem tekintve, $= a^r$; a' mellyel ha a' harmadik tag' előszámát osztjuk, lesz

$$\frac{a^r b^r}{a^r} = b^r;$$

's ha mármost a' harmadik tag' előszámával a' negyedikét osztjuk, lesz

$$\frac{a^{r}\, b^{r}\, c^{r}}{a^{r}\, b^{r}} = c^{r}$$

'stb, 'stb. Igy találtatnak az

$$a^{r},\ b^{r},\ c^{r}\ \ldots\ m^{r},\ n^{r}$$

számok, mellyeknek r-dik gyökerei a' keresett

$$a,\ b,\ c\ \ldots\ m,\ n$$

számok, azaz az adott fx egyenlet' gyökerei.

Némi nehézségeket támaszthat a' többször kimondott föltétel: hogy r eléggé nagy legyen. Mikoron éri el az emelés azon polczot, melly a' föltételnek megfelel, gyakorlatilag meghatározni igen könnyű dolog. Emeltessenek tudniillik az φx egyenlet' gyökerei az n'-dik fokra, lesz az új egyenlet, a' mondott föltétel alatt (ha ez tudniillik teljesítve van) ez:

$$\psi x = x^{m} - a^{n'r}\, x^{m-1} + a^{n'r}\, b^{n'r}\, x^{m-2} - \ldots$$

$$(-)^{m-1}\, a^{n'r}\ .\, m^{n'r}\, x\ (-)^{m}\, a^{n'r} \ldots m^{n'r}\, n^{n'r} = 0$$

következőleg az egymásnak megfelelő előszámoknak arányai ezek:

$$\frac{a^{n'r}}{a^{r}},\ \frac{a^{n'r}\, b^{n'r}}{a^{r}\, b^{r}}\ \ldots\ \frac{a^{n'r} \ldots m^{n'r}\, n^{n'r}}{a^{r} \ldots m^{r}\, n^{r}},$$

azaz ezek:

$$\frac{(a^{r})^{n'}}{a^{r}},\ \frac{(a^{r}\, b^{r})^{n'}}{a^{r}\, b^{a}}\ \ldots\ \frac{(a^{r} \ldots m^{r}\, n^{r})^{n'}}{a^{r} \ldots m^{r}\, n^{r}}.$$

Legyen általában φx-nek valamelly előszáma F, 's a' neki megfelelő a' φx egyenletben $= F'$. Ha a' föltétel teljesítve van, lesz mindég

$$\frac{F'}{F} = \frac{F^{n'}}{F};$$

tehát

$$\text{Log } F' = n' \text{ Log } F.$$

Alább fog mondatni, hogy könnyűség' tekintetéből r mindég $= 2^\mu$ és $n' = 2$ tétetik (μ alatt egész állító számot vevén), és hogy az előszámoknak, ugyan is nagyobb könnyűség végett, logarithmusai kerestetnek. A' föltétel tehát teljesítve lesz, mihelyt állandóan

$$\text{Log } F' = 2 \text{ Log } F,$$

F alatt minden egyes előszámát értvén az φx egyenletnek.

5. §.

Hátra van annak kimutatása, mikép lehessen az adott fx egyenlet' előszámaiból olly φx egyenletet leszármaztatni, mellynek gyökerei

$$= a^r,\ b^r,\ c^r \ldots m^r,\ n^r;$$

midőn az fx-éi ezek:

$$a,\ b,\ c \ldots m,\ n.$$

A' legegyszerűbb eset az, midőn az fx egyenlet' gyökerei négyszögre emeltetnek, mi az által történik, hogy benne x helyébe $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ tétetik. Legyen az adott egyenlet ez:

$$fx = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

's tétessék benne x helyébe $x^{\frac{1}{2}}$, lesz:

$$A_m x^{\frac{m}{2}} + A_{m-1} x^{\frac{m-1}{2}} + A_{m-2} x^{\frac{m-2}{2}} + \ldots$$
$$+ A_2 x + A_1 x^{\frac{1}{2}} + A_0 = 0$$

avvagy

$$A_m x^{\frac{m}{2}} + A_{m-1} x^{\frac{m-1}{2}} + A_{m-2} x^{\frac{m-2}{2}} + \ldots$$

$$= -\left\{A_{m-1}x^{\frac{m-2}{2}} + A_{m-3}x^{\frac{m-4}{2}} + \ldots + A_1\right\}.x^{\frac{1}{2}}$$

midőn m páros szám; vagy pedig

$$\left\{A_m x^{\frac{m-1}{2}} + A_{m-2}x^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + A_1\right\}.x^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\left\{A_{m-1}x^{\frac{m-1}{2}} + A_{m-3}x^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + A_0\right\}.x^{\frac{1}{2}}$$

midőn m páratlan szám.

Az első esetben, midőn tudniillik m páros szám, ha mind a' két része az egyenletnek második fokra emeltetik, lesz:

$$\left\{A_m x^{\frac{m}{2}} + A_{m-2}x^{\frac{m-2}{2}} + A_{m-4}x^{\frac{m-4}{2}} + \ldots A_0\right\}^2$$

$$= \left\{A_{m-1}x^{\frac{m-2}{2}} + A_{m-3}x^{\frac{m-4}{2}} + \ldots + A_1\right\}^2.$$

azaz mind két oldaláról az egyenlőségjegynek kifejtve:

$$A_m^2 x^m + 2A_m A_{m-2}x^{m-1} + \left.\begin{matrix}A_{m-2}^2 \\ +2A_m A_{m-4}\end{matrix}\right\}x^{m-2} + \left.\begin{matrix}A_{m-2}A_{m-4} \\ +A_m A_{m-6}\end{matrix}\right\}x^{m-3}$$

$$+\left.\begin{matrix}A_{m-4}^2 \\ +2A_{m-2}A_{m-6} \\ +2A_m A_{m-8}\end{matrix}\right\}x^{m-4} + \left.\begin{matrix}2A_{m-4}A_{m-6} \\ +2A_{m-2}A_{m-8} \\ +2A_m A_{m-10}\end{matrix}\right\}x^{m-5} + \ldots$$

$$= A_{m-1}^2 x^{m-1} + 2A_{m-1}A_{m-3}x^{m-2} + \left.\begin{matrix}A_{m-3}^2 \\ +2A_{m-1}A_{m-5}\end{matrix}\right\}x^{m-3}$$

$$+\left.\begin{matrix}2A_{m-3}A_{m-5} \\ +2A_{m-1}A_{m-7}\end{matrix}\right\}x^{m-4} + \left.\begin{matrix}A_{m-5}^2 \\ +2A_{m-3}A_{m-7} \\ +2A_{m-1}A_{m-9}\end{matrix}\right\}x^{m-5} + \ldots$$

a' miből áttétel által következik:

$$A_m^2 x^m \left.\begin{matrix}-A_{m-1}^2 \\ +A_m A_{m-2}\end{matrix}\right\}x^{m-1} + \left.\begin{matrix}A_{m-2}^2 \\ -2A_{m-1}A_{m-3} \\ +2A_m A_{m-4}\end{matrix}\right\}x^{m-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} - A^2_{m-3} \\ + 2A_{m-2}A_{m-4} \\ - 2A_{m-1}A_{m-5} \\ + 2A_m A_{m-6} \end{array}\right\} x^{m-3} + \left.\begin{array}{l} A^2_{m-4} \\ - 2A_{m-3}A_{m-5} \\ + 2A_{m-2}A_{m-6} \\ - 2A_{m-1}A_{m-7} \\ + 2A_m A_{m-8} \end{array}\right\} x^{m-4} + \ldots = 0.$$

6. §.

A' második esetben, midőn tudniillik m páratlan szám, lesz a' két része az egyenletnek négszögre emelve:

$$\left\{A_m x^{\frac{m-1}{2}} + A_{m-2} x^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + A_1\right\}^2 \cdot x$$

$$= \left\{A_{m-1} x^{\frac{m-1}{2}} + A_{m-3} x^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + A_0\right\}^2$$

és mármost mind a' két részt egyenként kifejtve:

$$A^2_m x^m + 2A_m A_{m-2} x^{m-1} + \left.\begin{array}{l} A^2_{m-2} \\ + 2A_m A_{m-4} \end{array}\right\} x^{m-2} \left.\begin{array}{l} + 2A_{m-2}A_{m-4} \\ + 2A_m A_{m-6} \end{array}\right\} x^{m-3} + \ldots$$

$$= A^2_{m-1} x^{m-1} + 2A_{m-1}A_{m-3} x^{m-2} + \left.\begin{array}{l} A^2_{m-3} \\ + 2A_{m-1}A_{m-5} \end{array}\right\} x^{m-3} + \ldots$$

'S ebből szintúgy, mint a' feljebbi §ban

$$A^2_m x^m - \left.\begin{array}{l} A^2_{m-1} \\ + 2A_m A_{m-2} \end{array}\right\} x^{m-1} + \left.\begin{array}{l} A^2_{m-2} \\ - 2A_{m-1}A_{m-3} \\ + 2A_m A_{m-4} \end{array}\right\} x^{m-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} - A^2_{m-3} \\ + 2A_{m-2}A_{m-4} \\ - 2A_{m-1}A_{m-5} \\ + 2A_m A_{m-6} \end{array}\right\} x^{m-3} + \left.\begin{array}{l} A^2_{m-4} \\ - 2A_{m-3}A_{m-5} \\ + 2A_{m-2}A_{m-6} \\ - 2A_{m-1}A_{m-7} \\ + 2A_m A_{m-8} \end{array}\right\} x^{m-4} - + \ldots = 0.$$

Ezt nyilván így is irhatni:

$$A_m^2 x^m - (A_{m-1}^2 - 2A_m A_{m-2}) . x^{m-1}$$
$$+ (A_{m-2}^2 - 2A_{m-1} A_{m-3} + 2A_m A_{m-4}) . x^{m-2}$$
$$- (A_{m-3}^2 - 2A_{m-2} A_{m-4} + 2A_{m-1} A_{m-5}$$
$$- 2A_m A_{m-6}) . x^{m-3} + \quad - \dots\dots = 0$$

Az egyformaság minden egyes előszám' leszármaztatásában, 's a' jegyek' változása szembetünő. A' szabály, melly szerint az előszámok találtatnak, szóval kimondva ez:

Ha A_p az adott fx egyenletnek valamelly előszáma, akkor az φx egyenletnek megfelelő előszám ekkép találtatik. Emeltessék először A_p négyszögre; másodszor vétessenek az A_p előszámnak legközelebbi szomszédjai A_{p-1} és A_{p+1}, sokszoroztassanak azok egymással és 2-vel és adassanak a' már talált négyszöghez tagadó előjegygyel; harmadszor sokszoroztassanak az A_p-nek egy helylyel tovább eső szomszédjai, A_{p-2} és A_{p+2} egymással és kettővel 's adassanak azok a' már talált sommához állító előjegygyel . . . 's folytattassék a' mindég egy helylyel tovább eső szomszédoknak egymássali és 2-veli sokszorozása 's a' már talált sommához váltva tagadó és állító előjegygyeli hozzáadása mind addig, míg a' nevezett szomszédoknak valamellyike $= 0$ leend. Végül azután csak a' talált A_p előszámnak jegyét kell meghatározni, melly általában állító, midőn A_p páratlan helyen áll, különben tagadó.

7. §.

Ezen egyszerű míveletek által tehát könnyen találtatik egy ollyan egyenlet, mellynek gyökerei

$$a^2,\ b^2,\ c^2 \ . \ . \ . \ m^2,\ n^2 .$$

Ha mármost ezen míveletek a' talált egyenlet' előszámaival folytattatnak, egy új egyenlet fog származni, mellynek gyökerei:

$$a^4,\ b^4,\ c^4 \ . \ . \ . \ m^4,\ n^4 .$$

’S ha ennek előszámaival hasonlólag bánunk, lesznek a’ következő egyenletnek gyökerei:

$$a^8, \ b^8, \ c^8 \ . \ . \ . \ m^8, \ n^8$$

’stb, ’stb. Az ezen míveletek által talált egyenleteknek gyökerei egyáltalában ezek:

$$a^{2^r}, \ b^{2^r}, \ c^{2^r} \ . \ . \ . \ m^{2^r}, \ n^{2^r};$$

hol r nyilván a’ míveletek’ fokát jelenti.

Számokkal ezen míveletek sok bajt okoznak, kivált ha azoknak foka már nagyobb. Azért is tanácsosabb logarithmusokkal élni és pedig 5 jegyűekkel. Miért logarithmusokkal, könnyen át lehet látni. Öt jegyűekkel pedig a’ számolás’ rövidsége’ tekintetéből, főleg pedig azért, mert Gauss’ tábláinak segítségével (L. Zach, Mon. Corresp. XXVI. 498, és Lalande’s logarithmisch-trig. Tafeln, durch die Tafel der Gauss’schen Logarithmen u. s. w. vermehrt. Leipzig, 1833.) a’ nélkül, hogy számokra kelljen átmenni, egyenesen a’ keresett előszámoknak logarithmusait találhatni.

A’ további emelésekkel fel kell hagyni, mihelyt a’ keletkező előszámok’ logarithmusai, kettősei az előbbieknek, mint feljebb a’ 4 §. végén mondatott, mert ekkor a’ fok már eléggé nagy.

8. §.

Minekelőtte e’ tárgyat tovább fejtegetnők, alkalmaztassuk a’ mondottakat az ismert

$$fx = x^3 - 7x + 7 = 0$$

egyenletre, mellynek mind a’ három gyökere való. Ezen egyenletnek előszámai ezek:

$$1, \ 0, \ -7 \ +7.$$

Az új egyenletnek előszámai tehát lesznek

$$1\,,\quad \left.\begin{matrix}0\\+14\end{matrix}\right\}\,,\quad \left.\begin{matrix}49\\0\end{matrix}\right\}\,,\quad 49$$

azaz jegyeikkel:

$$1\,,\quad -14\,,\quad +49\,,\quad -49\,.$$

'S ha a' míveleteket folytatjuk

$$1\,,\quad \left.\begin{matrix}14^2\\-2.49\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}49^2\\-2.14.49\end{matrix}\right\}\quad 49^2$$

mit a' gaussféle logarithmusokkal kiszámítni könnyebb. Ugyanis lesz

$$\begin{aligned} \text{Log } 14^2 &= 2\cdot29226\\ \text{Log } 2.49 &= 1\cdot99123\ -\\ \hline \triangle &= 0\cdot30103\,, \end{aligned}$$

a' honnan

$$\text{Log } (14^2 - 2.49) = 1\cdot99123\,.$$

Másodszor

$$\begin{aligned} \text{Log } 49^2 &= 3\cdot38040\\ \text{Log } 2.24.49 &= 3\cdot13736\ -\\ \hline \triangle &= 0\cdot24304\,, \end{aligned}$$

a' miből következik

$$\text{Log } (49^2 - 2.14.49) = 3\cdot01243\,.$$

Ha mármost az előszámoknak logarithmusait összerakjuk, lesz:

$$0,\quad 1\cdot99123 -,\quad 3\cdot01243\,,\quad 3\cdot38040 -.$$

'S itt a' gyökerek a' 4-dik fokra vannak emelve. Folytatván mármost ezen logarithmusokkal a' míveleteket, lesz:

$$\begin{array}{lll} 3\cdot98246 & 6\cdot02486 & 6\cdot76080\ - \\ 3\cdot31346\ - & 5\cdot67266\ - & \\ \hline 0\cdot66900 & 0\cdot35220 & \end{array}$$

's ezekből az új logarithmusok:

$$0,\quad 3\cdot87772 -,\quad 5\cdot76966,\quad 6\cdot76080 - \quad (8.\ \text{fok});$$

a' mikből ujra

7·75544	11·53933	13·52160
6·07069 —	10·93955 —	
1·68475	0·59977	

's az új logarithmusok:

0, 7·74637 —, 11·41362, 13·52160 — (16. fok).

És most ujolag

15·49274	22·82724	27·04320
11·41362 —	21·56900 —	
4·07912	1·25824	

tehát az új logarithmusok:

0, 15·49270 —, 22·80259, 27·04320 — (32. fok).

Mármost a' munkát berekesztvén, minthogy a' logarithmusok csak kettőztettetnek (§. 4), lesz

$$15{\cdot}49270 = \text{Log } a^{32},$$

$$\begin{array}{r} 22{\cdot}80259 \\ 15{\cdot}49270 \\ \hline 7{\cdot}30989 \end{array} = \text{Log } b^{32},$$

$$\begin{array}{r} 27{\cdot}04320 \\ 22{\cdot}80259 \\ \hline 4{\cdot}24061 \end{array} = \text{Log } c^{32};$$

a' mikből

$$\text{Log } a = 0{\cdot}48415, \quad a = 3{\cdot}0490,$$
$$\text{Log } b = 0{\cdot}22843, \quad b = 1{\cdot}6921,$$
$$\text{Log } c = 0{\cdot}13252, \quad c = 1{\cdot}3570,$$

mik eléggé közelített értékek. Az igazi értékek négy tizedes jegyben ezek:

$$-\ 3{\cdot}0489, \quad +\ 1{\cdot}6920, \quad +\ 1{\cdot}3568.$$

9. §.

Legyen második peldaul adva az

$$fx = x^3 + 6x^2 + 5x - 2 = 0$$

egyenlet, mellynek szintén csak való gyökerei vannak. Az előszámok ezek:

$$1, 6, 5, -2$$

tehát lesznek azon egyenletnek előszámai, melly ugyanazon gyökereket fx-xel birja, csakhogy négyszögre emelve, a' következők:

$$1, \quad \left.\begin{matrix} +6^2 \\ -2.5 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} +5^2 \\ +2.2.6 \end{matrix}\right\}, \quad +4^2$$

azaz:

$$1, -26, +49, -16;$$

mellyeknek logarithmusai a' következők:

0, 1·41497 —, 1·69020, 1·20412 — (2d. fok)

és ezekből lesz:

2·82994	3·38040	2·40824
1·99123 —	2·92012 —	
0·83871	0·46028	

következőleg az új előszámok' logarithmusai:

0, 2·76192 —, 3·19551, 3·40824 — (4d. fok)

És mármost ezekből:

5·52384	6·39102	4·81648
3·49654 —	5.47119 —	
2·02730	0·91983	

tehát az új előszámok (logarithmusokban t. i.):

0, 5·51974 —, 6·33537, 4·81648 — (8d. fok)

tehát ezekből

11·03948	12·67074	9·63296
6·63640 —	10·63725 —	
4·40308	2·03349	

következőleg az új előszámok:

0, 11·03946 —, 12·66662, 9·63296 — (16d. fok),

mellyek ezután csak kettőztetve fordúlnak elő.

Ennek következésében lesz:

$$11{\cdot}03946 = \log a^{16}$$

$$\begin{array}{r} 12{\cdot}66662 \\ 11{\cdot}03946 \\ \hline 1{\cdot}62716 \end{array} = \log b^{16}$$

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}63296 \\ 12{\cdot}66662 \\ \hline 6{\cdot}96634 \end{array} = \log c^{16}$$

tehát

$$\log a = 0{\cdot}68997\,;\quad a = 4{\cdot}8974$$
$$\log b = 0{\cdot}10170\,;\quad b = 1{\cdot}2639$$
$$\log c = 9{\cdot}81040\,;\quad c = 0{\cdot}6461$$

a' két első gyökér, tudniillik a és b tagadó, a' harmadik állító, mint alább fogjuk látni.

10. §.

Minthogy az fx egyenletnek gyökerei ezen míveletek által csak páros hatványokra vagy is fokokra emeltetnek, 's a' tagadó mennyiségeknek páros hatványai szintén állítók, látni való, hogy az φx egyenlet' gyökereitől az

$$a,\ b,\ c\ .\ .\ m,\ n$$

gyökereknek állító vagy tagadó voltára semmiféle következtetést húzni nem lehet.

Az előjegyeket azonban könnyen meg lehet határozni a' III. Szak. schemája szerint, kiváltképen, ha némi segédtételeket használunk. Legyen az adott fx egyenletnek, való gyökerekkel, általában v jegyváltozása, tehát v állító gyökere, 's legyen

$$n < m < \ldots < c < b < a;$$

akkor olly, ha lehet egész, n' m' . . c' . . számokkal fogjuk az fx egyenlet' gyökereit kisebbíteni, hogy n' n és m; m' m és l . . . c' c és b, b' b és a közé essenek. Melly leszálítását a' gyökereknek azonban csak addig kell folytatni, míg v állító gyökér találtatik. Hogy a' többi aztán tagadó lesz, magában érthető dolog.

Jelen példánkban az

$$fx = x^3 + 6x^2 + 5x - 2 = 0$$

egyenletnek csak egy jegyváltozása 's így csak egy állító gyökere van. Hogy meghatározhassuk, mellyik az az állító gyökér, elég lesz a' gyökereket 1-gyel, vagy ha ez czélra nem vezetne még 2-vel leszálítani. A' III. Szak. szabályai szerint könnyen találtatik:

$$\begin{array}{llllll} 1) & 1 & +6 & +5 & -2 & \\ & 1 & +7 & +12 & (+10) & \end{array}$$

mi már mutatja, hogy az állító gyökér 0 és 1 közé esik. Az adott fx gyökerei tehát előjegyeikkel együtt ezek:

$$+0\cdot6461, \quad -1\cdot2639, \quad -4\cdot8974.$$

11. §.

A' mondottaknál fogva tehát a' gyökereket mindég négy pontos jegyben, előjegyeikkel együtt; ugyanazon gyökereknek logarithmusait pedig legalább négy pontos tizedes jegyben találhatni. Ha nagyobb pontosság kivántatik, vagy a' gyökerekben magokban vagy ezeknek logarithmusaiban, úgy (az első esetben tudniillik) vagy a' III. Szak. szabályei szerint folytatjuk a' számítást; vagy, a' logarithmusok' keresése' esetében a' következők' nyomán indúlandunk.

Egyetemes Számtudományomban (Pest, 1838), a' 146 l. találtatott, hogy

$$\text{Log}\,(u+k) = \text{Log}\,u + \frac{1}{c}.\frac{k}{u} - \frac{1}{c}.\frac{k^2}{2u^2} + - \ldots$$

azaz, ha u helyébe például a, k helyébe pedig $\triangle a$ iratik:

$$\text{Log}\,(a+\triangle a = \text{Log}\,a + \frac{1}{c}.\frac{\triangle a}{a} - \frac{1}{c}\,\frac{\triangle a^2}{2a^2} + - \ldots$$

hol

$$\frac{1}{c} = M = 0{\cdot}43429\ 44819\ \ldots\ ^{*})$$

és

$$\text{Logvulg}\,M = 9{\cdot}63778\ 43114\ \ldots$$

Ezen utolsó formulából következik, midőn $\triangle a$ nagyon kicsiny,

$$\text{Log}\,(a+\triangle a) = \text{Log}\,a + M.\,\frac{\triangle a}{a}$$

következőleg:

$$M.\,\frac{\triangle a}{a} = \text{Log}\,(a+\triangle a) - \text{Log}\,a.$$

Legyen mármost a egy közelített értéke az fx egyenlet' valamelly gyökerének, tehát

$$x = a + \triangle a,$$

hol $\triangle a$ azt teszi, a' mit a-hoz még hozzá kell adni, hogy $a+\triangle a$ gyökere legyen az fx egyenletnek, és legyen $\triangle a$ már csak egy apró törött szám. Ezeket föltéve lesz

$$\begin{aligned} fx &= f(a+\triangle a) \\ &= fa + f'a.\,\triangle a + \ldots\ldots = 0 \end{aligned}$$

*) Egyet. Számtudom. 148 l. helytelenül áll e' szám helyett 0·69314 71806 ..., melly = lognat 2.

(L. Előism 8 és 28 §.) 'S ha itt két taggal, mivelhogy $\triangle a$ már nagyon kicsiny, megelégszünk

$$fa + f'a.\triangle a = 0,$$

azaz:

$$\triangle a = -\frac{fa}{f'a};$$

's ha mármost mind a' két részét ezen egyenletnek M-mel sokszorozzuk és a-val osztjuk:

$$M.\frac{\triangle a}{a} = -\frac{M\,fa}{a\,f'a},$$

következőleg a' fentebbiek szerint:

$$\text{Log}\,(a + \triangle a) - \text{Log}\,a = -\frac{M\,fa}{a\,f'a}$$

és végűl:

$$\text{Log}\,(a + \triangle a) = \text{Log}\,a - \frac{M\,fa}{a\,f'a};$$

mi által $(a + \triangle a)$, azaz egy pontosabb érték' logarithmusa találtatik, midőn Log a már tudva van. Egyébiránt itt a nem a' legnagyobbik, hanem akármellyik gyökeret képviseli.

12. §.

Lássuk mind a' kettőt példákban. A' 9 §. példája ez: $fx = x^3 + 6x^2 + 5x - 2 = 0$; 's ennek legnagyobb tagadó gyökere $-4{\cdot}8974$. Ezen gyökérnek három első tizedes jegyét megtartván; lesz ez $-4{\cdot}897$. Hogy ugyanezt a' gyökeret több tizedesekben találhassuk, változtassuk először az fx egyenletet ollyanná, mellynek állító gyökerei amannak tagadóival, általános számértékre nézve, ugyanazok; mi mint tudatik, a' 2dik és 4dik tag' előjegyének ellenkezővé változtatása által történik; és szállítsuk le ezen új egyenletnek gyökereit 4·897-tel, lesz:

$$\begin{array}{lllll}
4{\cdot}897) & & & & \\
1 & -6 & +5 & +2 & \\
1 & -1{\cdot}103 & -0{\cdot}401391 & (+0{\cdot}114388279) & \\
1 & +3{\cdot}794 & (+18{\cdot}579218) & & \\
1 & (+8{\cdot}691) & & &
\end{array}$$

Ebből ugyanazon tagadó gyökér a' III. Szak. szabályai szerint hat tizedes jegyben ez: — 4·890825.

Ha pedig a' szóban levő tagadó gyökér' logarithmusa kerestetnék, lenne először

$$\text{Log } a = \text{Log } 4{\cdot}897 = 0{\cdot}6899301$$

továbbá:

$$\begin{array}{rl}
\text{Log } fa = & 9{\cdot}0583817 \\
\text{Log } M = & 9{\cdot}6377943 \\
\hline
 & 8{\cdot}6961660 \\
\text{Log } a = & 0{\cdot}6899301 \\
\hline
 & 8{\cdot}0062359 \\
\text{Log } f'a = & 1{\cdot}2690449 \\
\hline
 & 6{\cdot}7371910
\end{array}$$

következőleg

$$\frac{M\,fa}{a\,f'a} = 0{\cdot}0005460$$

és így:

$$\begin{array}{rr}
\text{Log } a = & 0{\cdot}6899301 \\
-\dfrac{M\,fa}{a\,f'a} = & -\quad 5460 \\
\hline
\text{Log } (a+\triangle a) = & 0{\cdot}6893841
\end{array}$$

's ebből a' keresett gyökér négy tizedes jegyben pontosan: — 4·8908 (4) . . .

13. §.

Ha ezen számolás' menetelét figyelemmel kisérjük, azt fogjuk találni, hogy ezen megfejtésmód mind Fourier, mind pedig Hornerénél sokkal hosszadalmasabb és nehezebb, mi a' való gyökerek' kiszámítását illeti tudniillik. De ha más felől meggondoljuk, hogy sem Fourier sem pedig Horner' módja nem képes a' képzeleti gyökereket egyenes uton, minden mesterkélés nélkül adni 's hogy ez a' Graeffe' feloldása szerint lehetséges, úgy érdekesnek fogjuk találni, legalább a' képzeleti gyökerek' tekintetéből, ezen feloldásmóddal közelebbről megismerkedni.

Legyen tehát másodszor fx-nek csupa képzeleti gyökere. Ez esetben lesz tehát

$$x - p_1 \quad q_1\sqrt{-1} = 0, \quad x - p_1 + q_1\sqrt{-1} = 0$$
$$x - p_2 - q_2\sqrt{-1} = 0, \quad x - p_2 + q_2\sqrt{-1} = 0$$
$$x - p_3 - q_3\sqrt{-1} = 0, \quad x - p_3 + q_3\sqrt{-1} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

azaz, ha két összrendelt kifejezést egymással sokszorzunk:

$$x^2 - 2p_1 x + p_1^2 + q_1^2 = 0$$
$$x^2 - 2p_2 x + p_2^2 + q_2^2 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

azaz:

$$x^3 + \alpha_1 x + \beta_1 = 0$$
$$x^2 + \alpha_2 x + \beta_2 = 0$$
$$x^2 + \alpha_3 x + \beta_3 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ha tudniillik feltesszük, hogy

$$\alpha_1 = -2p_1; \quad \alpha_2 = -2p_2; \quad \alpha_3 = -2p_3 \; \ldots\ldots$$

és

$$\beta_1 = p_1^2 + q_1^2; \quad \beta_2 = p_2^2 + q_2^2 \; \ldots\ldots$$

Itt tehát a' β_1, β_2, β_3 . . . tagok mindég állítók, minthogy négyszögek' sommái 's négyszögek' mindég állítók, másodszor pedig, minthogy

$$\alpha_n = -2p_n$$
$$\beta_n = p_n^2 + q_n^2,$$

lesz mindég

$$\beta_n \pm \alpha_n q_n = p_n^2 \mp 2p_n q_n + q_n^2$$

azaz:

$$\beta_n \pm \alpha_n q_n > 0$$

tehát mindég állító, legalább nem tagadó.

14. §.

A' mondottak' következésében tehát az fx egyenletet, csupa képzeleti gyökerekkel, úgy lehet tekinteni, mintha az csupa illy

$$x^2 + \alpha_1 x + \beta_1 = 0,$$
$$x^2 + \alpha_2 x + \beta_2 = 0,$$
$$x^2 + \alpha_3 x + \beta_3 = 0,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

háromtagú sokszorzókból eredett volna. Hogy az illy egyenletnek előszámairól minél világosabb fogalmunk legyen, sokszorozzunk először két illyetén háromtagút egymással, lesz:

$$(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1).(x_2 + \alpha_1 x + \beta_2)$$
$$= x^4 + (\alpha_1 + \alpha_2). + \{\alpha_1\alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2)\}.x^2$$
$$+ (\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).x + \beta_1\beta_2 = 0$$

és ha hármat sokszorzunk egymással:

$$(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1).(x^2 + \alpha_2 x + \beta_2).(x^2 + \alpha_3 x + \beta_3)$$
$$= x^6 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).x^5 + \{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)$$
$$+ (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\}.x^4$$

$$+\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3+(\alpha_1\beta_2+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_1$$
$$+\alpha_3\beta_2)\}.\,x^3$$
$$+\{(\alpha_1\alpha_2\beta_3+\alpha_1\alpha_3\beta_2+\alpha_2\alpha_3\beta_1)+(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3$$
$$+\beta_2\beta_3)\}.\,x^2$$
$$+(\alpha_1\beta_2\beta_3+\alpha_2\beta_1\beta_3+\alpha_3\beta_1\beta_2).\,x+\beta_1\beta_2\beta_3=0;$$

végűl ha négyet, lesz:

$$(x^2+\alpha_1x+\beta_1).\,(x^2+\alpha_2x+\beta_2).\,(x^2+\alpha_3x+\beta_3).$$
$$\times\,(x^2+\alpha_4x+\beta_4)$$
$$=x^8+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4).\,x^7$$
$$+\{(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)$$
$$+(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)\}.\,x^6$$
$$+\{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$
$$+(\alpha_1\beta_2+\alpha_1\beta_3+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1$$
$$+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_4\beta_2+\alpha_4\beta_3)\}.\,x^5$$
$$+\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+(\alpha_1\alpha_2\beta_3+\alpha_1\alpha_2\beta_4+\alpha_1\alpha_3\beta_2+\alpha_1\alpha_3\beta_4$$
$$+\alpha_1\alpha_4\beta_2+\alpha_1\alpha_4\beta_3+\alpha_2\alpha_3\beta_1+\alpha_2\alpha_3\beta_4$$
$$+\alpha_2\alpha_4\beta_1+\alpha_2\alpha_4\beta_3+\alpha_3\alpha_4\beta_1+\alpha_3\alpha_4\beta_2)$$
$$+(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_1\beta_4+\beta_2\beta_3+\beta_2\beta_4+\beta_3\beta_4)\}.\,x^4$$
$$+\{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4\beta_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_2+\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_1)$$
$$+(\alpha_1\beta_2\beta_3+\alpha_1\beta_2\beta_4+\alpha_1\beta_3\beta_4+\alpha_2\beta_1\beta_3+\alpha_2\beta_1\beta_4$$
$$+\alpha_2\beta_3\beta_4+\alpha_3\beta_1\beta_2+\alpha_3\beta_1\beta_4+\alpha_3\beta_2\beta_4$$
$$+\alpha_4\beta_1\beta_2+\alpha_4\beta_1\beta_3+\alpha_4\beta_2\beta_3)\}.\,x^3$$
$$+\{(\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4+\alpha_1\alpha_3\beta_2\beta_4+\alpha_1\alpha_4\beta_2\beta_3+\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_4$$
$$+\alpha_2\alpha_4\beta_1\beta_3+\alpha_3\alpha_4\beta_1\beta_2)$$
$$+(\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\beta_1\beta_3\beta_4+\beta_2\beta_3\beta_4)\}.\,x^2$$
$$+\{\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4+\alpha_2\beta_1\beta_3\beta_4+\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_4+\alpha_4\beta_1\beta_2\beta_3\}.\,x$$
$$+\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4=0$$

'stb, 'stb.

15. §.

Ha ezen kifejtéseket figyelemmel vizsgáljuk, azt találjuk, hogy itt az α_1. α_2, α_3, α_4 . . . és β_1, β_2, β_3,

β_4 . . . csoportozatin kivül, ezen elemek még egymással vegyesen is rakatnak együvé. Ha tehát az α_1, α_2, α_3, α_4 . . . és β_1, β_2, β_3, β_4 . . . elemek' csoportjait, szokásunk szerint,

$$C_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots), \; C_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots) \ldots .$$

$$C_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots), \; C_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots) \ldots .$$

által jelöljük, és azokat az összerakásokat, mellyekben ezen elemek vegyesen fordúlnak elő,

$$K_2(\alpha, \beta), \; K_3(2\alpha, \beta), \; K_3(\alpha, 2\beta)$$

$$K_4(3\alpha, \beta), \; K_4(2\alpha, 2\beta), \; K_4(\alpha, 3\beta)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

által, hol az előszám mutatja, hány α- vagy β-féle elem fordúl elő illy összerakásokban: úgy nyilvánvaló, hogy az illyetén csupán képzeleti gyökereket biró egyenleteket így is irhatni:

$$x^2 + C_1(\alpha_1).x + C_1(\beta_1) = 0,$$

$$x^4 + C_1(\alpha_1, \alpha_2)x^3 + \{C_2(\alpha_1, \alpha_2) + C_1(\beta_1, \beta_2)\}.x^2$$
$$+ K(\alpha, \beta).x + C_2(\beta_1, \beta_2) = 0,$$

$$x^6 + C_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).x^5 + \{C_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
$$+ C_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\}.x^4$$
$$+ \{C_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + K_2(\alpha, \beta)\}.x^3$$
$$+ \{K_3(2\alpha, \beta) + C_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\}.x^2$$
$$+ K_3(\alpha, 2\beta).x + C_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 0$$

$$x^8 + C_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).x^7$$
$$+ \{C_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) + C_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\}.x^6$$
$$+ \{C_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) + K_2(\alpha, \beta)\} x^5$$
$$+ \{C_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) + K_3(2\alpha, \beta)$$
$$+ C_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\}.x^4$$
$$+ \{K_4(3\alpha, \beta) + K_3(\alpha, 2\beta)\}.x^3$$
$$+ \{K_4(2\alpha, 2\beta) + C_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\}.x^2$$
$$+ K_4(\alpha, 3\beta).x + C_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 0.$$

16. §.

'S általában, ha m az adott háromtagú szorzó, a' keletkező egyenlet ez látszik lenni:

$$\begin{aligned}
&x^{2m} + C_1(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) . x^{2m-1} \\
&\quad + \{C_2(\alpha, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + C_1(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)\} . x^{2m-2} \\
&\quad + \{C_3(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + K_2(\alpha, \beta)\} . x^{2m-3} \\
&\quad + \{C_4(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + K_3(2\alpha, \beta) \\
&\qquad\qquad + C_2(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)\} . x^{2m-4} \\
&\quad + \{C_5(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha^m) + K_4(3\alpha, \beta) + K_3(\alpha, 2\beta)\} . x^{2m-5} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \{K_m\left(2\alpha, (m-2)\beta\right) + C_{m-1}(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)\} . x^2 \\
&\quad + \{K_m\left(\alpha, (m-1)\beta\right) . x + C_m(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m) = 0
\end{aligned}$$

Mi hogy valóban az általános kifejezés, könnyen meg lehet mutatni. Sokszoroztassék az tudniillik

$$x^2 + \alpha_{m+1} x + \beta_{m+1} = 0$$

által, lesz:

$$\begin{aligned}
&x^{2m+2} + \left.\begin{matrix} C_1(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \\ + \alpha_{m+1} \end{matrix}\right\} x^{2m+1} \\
&\quad + \left.\begin{matrix} \{C_2(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + C_1(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)\} \\ + \alpha_{m+1} C_1(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \\ + \beta_{m+1} \end{matrix}\right\} x^{2m} \\
&\quad + \left.\begin{matrix} \{C_3(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + K_2(\alpha, \beta)\} \\ + \alpha_{m+1}\{C_2(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + C_1(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)\} \\ + \beta_{m+1} C_1(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \end{matrix}\right\} x^{2m-1} \\
&\quad + \left.\begin{matrix} \{C_4(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + K_3(2\alpha, \beta) \\ + C_2(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)\} \\ + \alpha_{m+1}\{C_3(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + K_2(\alpha, \beta)\} \\ + \beta_{m+1}\{C_2(\alpha, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + C_1(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)\} \end{matrix}\right\} x^{2m-2} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$+\alpha_{m+1}\, C_m\,(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_m)\Big\}\, x$$
$$+\beta_{m+1}\, K_m\big(\alpha,\, (m-1)\,\beta\big)\Big\}$$
$$+\beta_{m+1}\, C_m\,(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_m) = 0$$

Mármost itt, a' második tag' előszámára nézve, nyilván lesz:

$$C_1\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_m) + \alpha_{m+1} = C_1\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_{m+1})$$

a' harmadik tag' előszámára nézve pedig

$$C_2\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_m) + \alpha_{m+1}\, C_1\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_m) = C_1\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_{m+1})$$
$$C_1\,(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_m) + \beta_{m+1} = C_1(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_{m+1});$$

a' negyedik tag' előszámára nézve:

$$C_3\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_m) + \alpha_{m+1}\, C_2\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_m) = C_3(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_{m+1})$$

a' többbi egyes részek nyilván csak a' $K_2\,(\alpha,\, \beta)$ egyes öszszerakásait nevelik.

Folytatván a' kijelölt reductiókat, könnyen meg fogunk győződni, hogy a' lehozott sokszorozmány' formája ez:

$$x^{2m+2} + C_1\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_{m+1}).\, x^{2m+1}$$
$$+\{C_2\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_{m+1}) + C_1\,(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_{m+1})\}.\, x^{2m}$$
$$+\{C_3\,(\alpha_1,\, \alpha_3\,..\,\alpha_{m+1}) + K_2\,(\alpha,\, \beta)\}.\, x^{2m-1}$$
$$+\{C_4\,(\alpha_1,\, \alpha_2\,..\,\alpha_{m+1}) + K_3\,(2\alpha,\, \beta)$$
$$+ C_2\,(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_{m+1})\}.\, x^{2m-2}$$

. . . .

$$+\{K_{m+1}\big(2\alpha,\, (m-1)\,\beta\big) + C_{m+1}\,(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_{m+1})\}.\, x^2$$
$$+ K_{m+1}\,(\alpha,\, m\beta)\, x + C_{m+1}\,(\beta_1,\, \beta_2\,..\,\beta_{m+1}) = 0$$

Minthogy ez abból is következik, ha az e' §. elején felállított egyenletben m helyébe $m+1$ tétetik, nyilvánvaló, hogy ezen egyenlet általában áll, akárhány

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

alakú szorzóból származzék a' képtelen gyökerű fx egyenlet.

17. §.

Ha mi ezen általános formulát figyelemmel megtekintjük, azt találjuk, hogy a' 2dik, 4dik ... $2m$dik tag előszámai csak az α_1, α_2 ... elemek' csoportozatit és a' K által jelölt összerakásokat foglalják magokban. A' β, β_2 ... elemek' csoportjai itt teljességgel hiányzanak, 's ezen otolsók csak a' 3dik, 5dik .... és $(2m+1)$dik azaz utolsó tag' előszámaiban fordúlnak elő, és pedig, mit jól meg kell jegyezni, az egyes

$$C_1(\beta_1, \beta_2 .. \beta_m)$$

csoportozattól fogva az m-es

$$C_m(\beta_1, \beta_2 ... \beta_m) = \beta_1 . \beta_2 .. \beta_m$$

csoportozatig. Minél fogva tehát a' szóban levő fx egyenletet így is írhatni:

$$\begin{aligned} x^{2m} + Ax^{2m-1} &+ \{C_1(\beta_1, \beta_2 .. \beta_m) + B\}. x^{2m-2} \\ + Cx^{2m-3} &+ \{C_2(\beta_1, \beta_2 .. \beta_m) + D\}. x^{2m-4} \\ + Ex^{2m-5} &+ \{C_3(\beta_1, \beta_2 .. \beta_m) + F\}. x^{2m-6} \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + Kx^3 &+ \{C_{m-1}(\beta_1, \beta_2 .. \beta_m) + L\}. x^2 \\ + Mx &+ C_m(\beta_1, \beta_2 .. \beta_m) = 0 ; \end{aligned}$$

hol

$$A, B, C .... K, L, M$$

az α_1, α_2 .. α_m elemeknek csoportozatit, vagy az α_1, α_2 .. α_m és β_1, β_2 .. β_m elemeknek vegyes összerakásit teszik.

Miért választottuk el ezeket az β_1, β_2 .. β_m elemeknek csoportozatitól, mindjárt ki fog sűlni.

18. §.

Feljebb a' 65 l. láttuk, hogy minden

$$p + q\sqrt{-1}$$

alakú képzeleti mennyiség a'

$$\varrho\,(\mathrm{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\ \mathrm{Sin}\,\theta)$$

formában benfoglaltatik. A' melly tételből mindjárt következik, hogy

$$p = \varrho \cos\theta$$
$$q = \varrho \sin\theta\,,$$

továbbá

$$p^2 + q^2 = \varrho^2;$$

és ennél fogva:

$$\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

$$\mathrm{Sin}\,\theta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\,.$$

Ha mármost két összrendelt képzeleti mennyiséget egymással sokszorzunk, lesz:

$$\begin{aligned}(p+q\sqrt{-1}).\,(p-q\sqrt{-1}) &= \varrho^2\ (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\\ &\quad\times(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)\\ &= \varrho^2\\ &= p^2+q^2\,.\end{aligned}$$

Ha pedig két illyetén

$$x - p - q\sqrt{-1} = 0$$
$$x - p + q\sqrt{-1} = 0;$$

factort sokszorzunk egymással, lesz:

$$(x-p-q\sqrt{-1}).\,(x-p+q\sqrt{-1}) = (x-p)^2 + q^2 = 0$$

azaz:

$$x^2 - 2px + p^2 + q^2 = 0;$$

mi az előbbiek' folytában ezzé lesz:

$$x^2 - 2\varrho\cos\theta x + \varrho^2 = 0\,.$$

Összehasonlítván ezt a' feljebbi

$$x^2 + \alpha_1 x + \beta_1 = 0,$$
$$x^2 + \alpha_2 x + \beta_2 = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x^2 + \alpha_m x + \beta_m = 0$$

alakokkal, könnyen találjuk, hogy

$$\alpha_1 = -2\varrho_1 \cos\theta_1$$
$$\alpha_2 = -2\varrho_2 \cos\theta_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_m = -2\varrho_m \cos\theta_m .$$

Szintúgy lesz:

$$\beta_1 = \varrho_1^2 ; \ \beta_2 = \varrho_2^2 , \ . \ . \ . \ \beta_m = \beta_m^2 .$$

'S itt jól meg kell jegyezni, hogy soha általános számértékre nézve $\alpha > \beta$ nem lehet, mert ha $\alpha > \beta$ lenne, akkor szükségképen lenne

$$2\cos\theta > \varrho$$

is, mi lehetetlen. Cosθ legnagyobb értékét akkor éri el, midőn $\theta = 0, \pm 180 \ldots$, 's ekkor általános számértéke $= 1$, 's ekkor

$$2\cos\theta = \varrho,$$

azaz:

$$2\varrho\cos\theta = \varrho^2 ; \ \alpha = \beta .$$

'S a' mint a' mondott értékektől elüt a' θ, mindég lesz:

$$2\varrho\cos\theta < \varrho^2, \ \text{azaz:} \ \alpha < \beta .$$

19. §.

Képzeljük magunknak mármost az fx egyenlet' gyökereit az r-dik fokra emelve, ekkor lesznek az előbbiek' következésében a' keletkező egyenletnek gyökerei (előjegyeiket nem tekintve)

$$(p_1 \pm q_1\sqrt{-1})^r$$

$$(p_2 \pm q_2 \sqrt{-1})^r$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(p_m \pm q_m \sqrt{-1})^r$$

azaz a' 21 l. tanítása szerint:

$$\varrho_1^r (\cos r\varrho_1 \pm \sqrt{-1} \sin r\theta_1)$$
$$\varrho_2^r (\mathrm{cor}\, r\theta_2 \pm \sqrt{-1} \sin r\theta_2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varrho_m^r (\cos r\theta_m \pm \sqrt{-1} \sin r\theta_m);$$

's ha mármost a' keletkező egyenlet' háromtagú factorait így jelöljük:

$$x^2 + \mu_1 x + \nu_1 = 0,$$
$$x^2 + \mu_2 x + \nu_2 = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x^2 + \mu_m x + \nu_m = 0;$$

nyilvánvaló, hogy

$$\mu_1 = - 2\varrho_1^r \cos r\theta_1,$$
$$\mu_2 = - 2\varrho_2^r \cos r\theta_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mu_m = - 2\varrho_m^r \cos r\theta_m;$$

és másfelől, hogy

$$\nu_1 = \varrho_1^{2r};\ \nu_2 = \varrho_2^{2r}\ \ldots\ \nu_m = \varrho_m^{2r}$$

's hogy itt is mindég

$$2\varrho^r \cos r\theta \overset{=}{<} \varrho^{2r} \text{ azaz } \mu \overset{=}{<} \nu.$$

A' keletkező egyenlet tehát illy alakú lesz:

$$\begin{aligned} x^{2m} &+ A' x^{2m-1} + \{C_1(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m) + B'\}. x^{2m-2} \\ &+ C' x^{2m-3} + \{C_2(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m) + D'\}. x^{2m-4} \\ &+ E' x^{2m-5} + \{C_3(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m) + F'\}. x^{2m-6} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ K' x^3 \quad + \{C_{m-1}(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m) + L'\}. x^2 \\ &+ M' x \quad + \{C_m \quad (\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m) = 0. \end{aligned}$$

20 §.

Ezen keletkező egyenletnek előszámai különös tulajdonságokkal birnak. A'

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3\ \ldots\ \mu_m$$

elemekből összeállók, minthogy a'

$$\mu_1 = -\ 2\varrho_1^r \cos r\theta_1$$
$$\mu_2 = -\ 2\varrho_2^r \cos r\theta_2$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\mu_m = -\ 2\varrho_m^r \cos r\theta_m$$

értékei a'

$$\cos r\theta_1,\ \cos r\theta_2\ \ldots\ \cos r\theta_m$$

értékeitől is függnek, nyilván ezekkel nőnek vagy fogynak 's jegyeiket is változtatják, a' nélkül, hogy valaha a'

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3\ \ldots\ \nu_m$$

értékeit túlhaladhatnák. Ha tehát $\nu_1 = \varrho^{2r}$ az ν-féle elemeknek legragyobbika , akkor a'

$$C_1\ (\nu_1,\ \nu_2\ ..\ \nu_m)$$
$$C_2\ (\nu_1,\ \nu_2\ ..\ \nu_m)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

mellett a' B', D' . . . , föltéve hogy ν eléggé nagy, el fog enyészni, 's a' keletkező egyenletnek hasonló okoskodásnál fogva, mint feljebb a' 3 §ban, ez az alakja lesz:

$$x^{2m} + A' x^{2m1} + \nu_1\, x^{2m-2} + C' x^{2m-3} + \nu_1\, \nu_2\, x^{2m-4} + \ldots$$
$$+ K' x^3 + \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{m-1} + M' x + \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m = 0$$

a' hol, mint a' mondott §ban,

$$\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 \ldots\ldots > \nu_m.$$

Beiktatván

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3\ \ldots\ \nu_m$$

helyeibe

$$\varrho_1^{2r},\ \varrho_2^{2r},\ \varrho_3^{2r}\ \dots\ \varrho_m^{2r}$$

értékeit, a' keletkező egyenletnek végalakja ez lesz:

$$x^{2m} + A' x^{2m-1} + \varrho_1^{2r} x^{2m-2} + C' x^{2m-3} + \varrho_1^{2r} \varrho_2^{2r} x^{2m-4} + \dots$$
$$+ K' x^3 + \varrho_1^{2r} \varrho_2^{2r} \dots \varrho_{m-1}^{2r} x^2 + M' x + \varrho_1^{2r} \varrho_2^{2r} \dots \varrho_m^{2r} = 0;$$

melly egyenletnek sajátságai közé tartozik, hogy midőn ν eléggé nagy, csak a' 3dik, 5dik . . . $(m+1)$dik tagok' előszámai nőnek úgy, mint a' 4 §ban mondatott; a' 2-dik, 4dik . . . $m$dik tagok' előszámai pedig, vagy is az

$$A',\ C',\ E'\ \dots\ K',\ M'$$

mennyiségek haboznak 's majd állítók, majd meg tagadók.

'S ezen tulajdonságainál fogva a' keletkező egyenletnek, reá is ösmerhetni a' képzeleti gyökerekre; mert mind ez, a' mi mondatott, csak akkor történik, ha mint föltettük, az fx adott egyenletnek csupa képzeleti gyökere van.

21. §.

A' keletkező egyenlet' 3dik, 5dik . . . $(m+1)$dik előszámaiból tehát könnyű lesz a'

$$\varrho_1^{2r},\ \varrho_2^{2r},\ \varrho_3^{2r}\ \dots\ \varrho_m^{2r}$$

mennyiségeket, következőleg az adott fx egyenlet' gyökereinek modulusait is (L. 23. l.), vagy is a'

$$\varrho_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$$
$$\varrho_2 = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}$$
$$\dots\dots$$
$$\varrho_m = \sqrt{p_m^2 + q_m^2}$$

mennyiségeket meghatározni.

Miként lehessen minden esetben az

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \dots\ \alpha_m$$

azaz

$$-2p_1,\ -2p_2,\ -2p_3\ \ldots\ -2p_m$$

mennyiségeket meghatározni, alább fogjuk látni. Most, minek előtt illy hosszasabb okoskodásokba bocsátkoznánk, lássuk a' modulusok, vagy is inkább a' modulusok' négyszögeinek keresését egy pár példában.

Legyen első példaúl adva az:

$$fx = x^4 - x + 1 = 0$$

egyenlet. A' míveleteket eleintén az előszámokkal magokkal, minthogy ez rövidebb, vivén végbe, lesz:

$$1,\quad 0,\quad 0,\quad -1,\quad +1$$

(1ső fok); és ebből

$$1,\quad 0,\quad \left.\begin{matrix}0\\+2\end{matrix}\right\},\quad 1,\quad 1$$

azaz:

$$1,\quad 0,\quad 2,\quad -1,\quad 1$$

(2dik fok); következőleg:

$$1,\quad \left.\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}4\\+2\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right\},\quad 1$$

vagy mi egyre megy ki:

$$1,\quad 4,\quad 6,\quad 3,\quad 1$$

(4dik fok); és mármost szintúgy:

$$1,\quad \left.\begin{matrix}16\\-12\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}36\\-24\\+\ 2\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}9\\-12\end{matrix}\right\},\quad 1$$

avvagy:

$$1,\quad -4,\quad 14,\quad 3,\quad 1$$

(8dik fok); 's ebből:

$$1,\quad \left.\begin{matrix}16\\-28\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}196\\+\ 24\\+\ 2\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}9\\-28\end{matrix}\right\},\quad 1$$

vagy is:

$$1\,,\quad 12\,,\quad 222\,,\quad 19\,,\quad 1$$

(16 fok); a' miből következik:

$$1\,,\quad \left.\begin{array}{r}144\\-444\end{array}\right\}\,,\quad \left.\begin{array}{r}49284\\-\ 456\\+\ \ 2\end{array}\right\}\,,\quad \left.\begin{array}{r}361\\-444\end{array}\right\}\,,\quad 1$$

vagy is:

$$1\,,\quad 300\,,\quad 48830\,,\quad 83\,,\quad 1$$

avvagy mármost logarithmusokra menvén által,

$$0,\quad 2{\cdot}47712,\quad 4{\cdot}68869,\quad 1{\cdot}91908,\quad 0$$

(32dik fok); mellynél fogva végűl:

$$0,\quad \left.\begin{array}{r}4{\cdot}95424\\4{\cdot}98972-\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r}9{\cdot}37738\\4{\cdot}69723-\\2{\cdot}77815-\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r}3{\cdot}83816\\4{\cdot}98972-\end{array}\right\},\quad 0$$

azaz:

$$0,\quad 3{\cdot}88423\,,\quad 9{\cdot}37737\,,\quad 4{\cdot}95794\,,\quad 0$$

(64dik fok). Megállapodhatunk itten, minthogy már elég világosan látjuk, hogy csak a' 3dik és 5dik tag' előszámai nőnek négyszögként és hogy a' 2dik és 4dik tagéi haboznak. 'S azt fogjuk tehát ezeknél fogva következtetni, hogy az adott

$$fx = x^4 - x + 1 = 0$$

egyenletnek két pár képzeleti gyökere van. Keresvén a' modulusokat lesz:

$$\log \varrho_1^{2\cdot 64} = 9{\cdot}37737\,;\ \log \varrho_1^2 = 0{\cdot}14652\,;$$
$$\log \varrho_2^{2\cdot 64} = -\,9{\cdot}37737\,;\ \log \varrho_2^2 = 9{\cdot}85348\,;$$

a' mellyekből

$$\varrho_1^2 = 1{\cdot}4013\ ;\quad \varrho_2^2 = 0{\cdot}71365\,;$$

mik csak az utolsó tizedes jegyekben hibásak.

22. §.

Legyen második például:

$$fx = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 = 0,$$

tehát:

$$1, \quad -4, \quad 7, \quad -6, \quad 3$$

és

$$1, \quad \left.\begin{matrix} 16 \\ -14 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} 49 \\ -48 \\ +6 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} 36 \\ -42 \end{matrix}\right\}, \quad 9$$

azaz:

$$1, \quad -2, \quad 7, \quad 6, \quad 9$$

(2dik fok), és innen

$$1, \quad \left.\begin{matrix} 4 \\ -14 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} 49 \\ +24 \\ +18 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} 36 \\ -126 \end{matrix}\right\}, \quad 81$$

azaz:

$$1, \quad 10, \quad 91, \quad 90, \quad 81$$

(4dik fok). Mármost logarithmusokra menvén által, lesznek ugyanezen számoknak logorithmusai:

$$0, \quad 1{\cdot}00000, \quad 1{\cdot}95904, \quad 1{\cdot}95424, \quad 1{\cdot}90849$$

következőleg:

$$0, \quad \left.\begin{matrix} 2{\cdot}00000 \\ 3{\cdot}26007 - \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 3{\cdot}91808 \\ 3{\cdot}25527 - \\ 2{\cdot}20972 - \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} 3{\cdot}90848 \\ 4{\cdot}16856 - \end{matrix}\right\} \quad 3{\cdot}81698$$

és ebből:

$$0, \quad 1{\cdot}91381, \quad 3{\cdot}80065, \quad 3{\cdot}82230, \quad 3{\cdot}81698$$

(8dik fok); honnét e' míveleteket folytatván, végűl:

$$\ldots\ldots\ldots \quad 15{\cdot}26792 \quad \ldots \quad 15{\cdot}26792$$

(32dik fok). Itt megszüntetvén a' míveleteket, lesz:

$$\log \varrho_1^{2\cdot 32} = 15{\cdot}26792; \quad \log \varrho_1^2 = 0{\cdot}47712$$

$$\log \varrho_2^{2\cdot 32} = 0{\cdot}00000; \quad \log \varrho_2^2 = 0{\cdot}00000$$

és ennek folytában;

$$\varrho_1^2 = 3\,; \quad \varrho_2^2 = 1\,.$$

23. §.

Ezen pár példa után, melly a' számolás' folyamatját elég világosan mutatja, térjünk vissza az általános theoriához, és keressük azon módokat, mellyeknél fogva az

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ .\ .\ .\ \alpha_m$$

azaz a'

$$-2\varrho_1 \cos\theta_1,\ -2\varrho_2 \cos\theta_2\ .\ .\ .\ -2\varrho_m \cos\theta_m$$

mennyiségeket találhatni.

A' csupa képtelen gyökerű felsőbb egyenletnek általános alakja ez:

$$A_{2m}x^{2m} + A_{2m-1}x^{2m-1} + A_{2m-2}x^{2m-2} + \ldots$$
$$+ A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0.$$

Tétessék ez általános alakban

$$x = \varrho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$x^2 = \varrho^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta)$$
$$x^3 = \varrho^3(\cos 3\theta + \sqrt{-1}\sin 3\theta)$$
$$x^{2m-1} = \varrho^{2m-1}\{\cos(2m-1)\theta + \sqrt{-2}\sin(2m-1)\theta\}$$
$$x^{2m} = \varrho^{2m}\{\cos 2m\theta + \sqrt{-1}\sin 2m\theta\};$$

és szakasztassék ki a' $\sqrt{-1}$ által sokszorzott rész, minthogy ennek külön kell $=0$ lennie, és osztassék ezen utolsó mindjárt $\sqrt{-1}$ által; akkor lesz:

$$A_{2m}\varrho^{2m}\cos 2m\theta + A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\cos(2m-1)\theta$$
$$+ A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\cos(2m-2)\theta$$
$$+ A_{2m-3}\varrho^{2m-3}\cos(2m-3)\theta$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+ A_1 x\cos\theta + A_0 = 0;$$

$$
\begin{aligned}
A_{2m}\varrho^{2m}\sin 2m\theta &+ A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\sin(2m-1)\theta \\
&+ A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\sin(2m-2)\theta \\
&+ A_{2m-3}\varrho^{2m-3}\sin(2m-3)\theta \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&+ A_1\varrho\sin\theta \qquad\qquad = 0.
\end{aligned}
$$

Sokszorozzuk mármost ezen két egyenletnek elsejét $\cos m\theta$, másikát pedig $\sin m\theta$ által, lesz:

$$
\begin{aligned}
A_{2m}\varrho^{2m}\cos 2m\theta\cos m\theta &+ A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\cos(2m-1)\theta\cos m\theta \\
&+ A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\cos(2m-2)\theta\cos m\theta \\
&+ A_{2m-3}\varrho^{2m-3}\cos(2m-3)\theta\cos m\theta \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&+ A_1\varrho\cos\theta\cos m\theta + A_0\cos m\theta = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{2m}\varrho^{2m}\sin 2m\theta\sin m\theta &+ A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\sin(2m-1)\theta\sin m\theta \\
&+ A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\sin(2m-2)\theta\sin m\theta \\
&+ A_{2m-3}\varrho^{2m-3}\sin(2m-3)\theta\sin m\theta \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&+ A_1\varrho\sin\theta\sin m\theta \qquad\qquad = 0.
\end{aligned}
$$

Ezen két egyenletnek sommája ez:

$$
\begin{aligned}
& A_{2m}\varrho^{2m}\{\cos 2m\theta\cos m\theta + \sin 2m\theta\sin m\theta\} \\
& + A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\{\cos(2m-1)\theta\cos m\theta + \sin(2m-1)\theta\sin m\theta\} \\
& + A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\{\cos(2m-2)\theta\cos m\theta + \sin(2m-2)\theta\sin m\theta\} \\
& \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& + A_1\{\cos\theta\cos m\theta + \sin\theta\sin m\theta\} \\
& + A_0\cos m\theta = 0
\end{aligned}
$$

azaz, ismert reductiók után, minthogy általában:

$$\operatorname{Cos}\mu\theta\cos\nu\theta + \sin\mu\theta\sin\nu\theta = \cos(\mu-\nu)\theta;$$

lesz:

$$
\begin{aligned}
A_{2m}\varrho^{2m}\cos m\theta &+ A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\cos(m-1)\theta \\
&+ A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\cos(m-2)\theta \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&+ A_2\varrho^2\cos(m-2)\theta
\end{aligned}
$$

$$+ A_1 \varrho \cos(m-1)\theta$$
$$+ A_0 \cos m\theta \qquad = 0.$$

24. §.

Hasonlólag fog találtatni, ha ugyanazon egyenleteknek elseje $\sin m\theta$, másika pedig $\cos m\theta$ által sokszoroztatik:

$$\begin{aligned} A_{2m}\varrho^{2m}\cos 2m\theta \sin m\theta &+ A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\cos(2m-1)\theta \sin m\theta \\ &+ A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\cos(2m-2)\theta \sin m\theta \\ &+ A_{2m-3}\varrho^{2m-3}\cos(2m-3)\theta \sin m\theta \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &+ A_1\varrho\cos\theta\sin m\theta + A_0 \sin m\theta = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2m}\varrho^{2m}\sin 2m\theta \cos m\theta &+ A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\sin(2m-1)\theta \cos m\theta \\ &+ A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\sin(2m-2)\theta \cos m\theta \\ &+ A_{2m-3}\varrho^{2m-3}\sin(2m-3)\theta \cos m\theta \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &+ A_1\varrho\sin\theta\cos m\theta \qquad = 0; \end{aligned}$$

's ha mármost az utóbbi kifejezés az elsőből kivonatik:

$$\begin{aligned} & A_{2m}\varrho^{2m} \{\cos 2m\theta \sin m\theta - \sin 2m\theta \cos m\theta\} \\ + & A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\{\cos(2m-1)\theta \sin m\theta - \sin(2m-1)\theta \cos m\theta\} \\ + & A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\{\cos(2m-2)\theta \sin m\theta - \sin(2m-2)\theta \cos m\theta\} \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ + & A_1\varrho\{\cos\theta\sin m\theta - \sin\theta\cos m\theta\} + A_0\sin m\theta \quad = 0. \end{aligned}$$

Tudván mármost, hogy egyáltalában:

$$\text{Cos}\,\mu\theta \sin\nu\theta - \sin\mu\theta\cos\nu\theta = -\sin(\mu-\nu)\theta;$$

nyilvánvaló, hogy lesz:

$$\begin{aligned} -A_{2m}\varrho^{2m}\sin m\theta &- A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\sin(m-1)\theta \\ &- A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\sin(m-2)\theta \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &+ A_2\varrho^2\sin(m-2)\theta \end{aligned}$$

$$+A_1\varrho\sin(m-1)\theta$$
$$+A_0\sin m\theta \qquad =0$$

avvagy az előjegyeket ellenkezőkké változtatva:

$$\begin{aligned}A_{2m}\varrho^{2m}\sin m\theta &+A_{2m-1}\varrho^{2m-1}\sin(m-1)\theta\\ &+A_{2m-2}\varrho^{2m-2}\sin(m-2)\theta\\ &\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &-A_2\varrho^2\sin(m-2)\theta\\ &-A_1\varrho\sin(m-1)\theta\\ &-A_0\sin m\theta \qquad =0.\end{aligned}$$

25. §.

A' 23 §nak végegyenletét így is lehet irni:

$$\begin{aligned}&\left(A_{2m}\varrho^{2m}+A_0\right)\cos m\theta\\ +&\left(A_{2m-1}\varrho^{2m-1}+A_1\varrho^1\right)\cos(m-1)\theta\\ +&\left(A_{2m-2}\varrho^{2m-2}+A_2\varrho^2\right)\cos(m-2)\theta\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ +&\left(A_m\varrho^m+A_m\varrho^m\right)=0;\end{aligned}$$

vagy is ϱ^m által osztva:

$$\begin{aligned}&\left(A_{2m}\varrho^m+\frac{A_0}{\varrho^m}\right)\cos m\theta\\ +&\left(A_{2m-1}\varrho^{m-1}+\frac{A_1}{\varrho^{m-1}}\right)\cos(m-1)\theta\\ +&\left(A_{2m-2}\varrho^{m-2}+\frac{A_1}{\varrho^{m-2}}\right)\cos(m-2)\theta\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ +&\left(A_m+A_m\right)=0;\end{aligned}$$

vagy is, ha

$$A_{2m}\varrho^m+\frac{A_0}{\varrho^m}=B_m$$

$$A_{2m-1}\varrho^{m-1}+\frac{A_1}{\varrho^{m-1}}=B_{m-1}$$

$$A_{2m-2}\,\varrho^{m-2} + \frac{A_2}{\varrho^{m-2}} = B_{m-2}$$

. . . .

$$A_m \quad + A_m \quad = B_0$$

tétetik, nyilván így is:

$$B_m \cos m\theta + B_{m-1} \cos(m-1)\theta + B_{m-2} \cos(m-2)\theta + ..$$
$$+ B_2 \cos 2\theta + B_1 \cos\theta + B_0 \quad = 0.$$

Hasonlólag lehet a' 24 §. végegyenletét illy alakba önteni:

$$\left(A_{2m}\,\varrho^{2m} \quad - A_0\right) \sin m\theta$$
$$+ \left(A_{2m-1}\,\varrho^{2m-1} - A_1\,\varrho\right) \sin(m-1)\theta$$
$$+ \left(A_{2m-2}\,\varrho^{2m-2} - A_2\,\varrho^2\right) \sin(m-2)\theta$$

. . . .

$$+ \left(A_{m+1}\,\varrho^{m+1} - A_{m-1}\,\varrho^{m-1}\right) \sin\theta = 0.$$

'S ha mármost ezen egyenlet ϱ^m által osztatik, és

$$A_{2m}\,\varrho^m \quad - \frac{A_0}{\varrho^m} = B'_m$$

$$A_{2m-1}\,\varrho^{m-1} - \frac{A_1}{\varrho^{m-1}} = B'_{m-1}$$

$$A_{2m-2}\,\varrho^{m-2} - \frac{A_2}{\varrho^{m-2}} = B'_{m-2}$$

. . . .

$$A_{m+1}\,\varrho \quad - \frac{A_{m-1}}{\varrho} = B'_1$$

tétetik, lesz hasonlólag:

$$B'_m \sin m\theta + B'_{m-1} \sin(m-1)\theta + B'_{m-2} \sin(m-2)\theta + ..$$
$$+ B'_2 \sin 2\theta + B'_1 \sin\theta \quad = 0.$$

26. §.

A' számolás könnyíttetik, hogyha

$$\frac{B_m}{\varrho^m} = C_m \;;\; \frac{B'_m}{\varrho^m} = C'_m$$

$$\frac{B_{m-1}}{\varrho^{m-1}} = C_{m-1}\,;\ \frac{B'_{m-1}}{\varrho^{m-1}} = C'_{m-1}$$

$$\frac{B_{m-2}}{\varrho^{m-2}} = C_{m-2}\,;\ \frac{B'_{m-2}}{\varrho^{m-2}} = C'_{m-2}$$

. . . .

$$\frac{B_1}{\varrho} = C_1\ ;\ \frac{B'_1}{\varrho} = C'_1$$

és vegűl $B_o = C_o$ tétetik. Ez által lesz tudniillik:

$$A_m + \frac{A_o}{\varrho^{2m}} = C_m\ ,$$

$$A_{2m-1} + \frac{A_1}{\varrho^{2m-2}} = C_{m-1}\ ,$$

$$A_{2m-2} + \frac{A_2}{\varrho^{2m-4}} = C_{m-2}\ ,$$

. . . .

$$2A_m = C_o\,;$$

és hasonlólag:

$$A_{2m} - \frac{A_o}{\varrho^{2m}} = C'_m\ ,$$

$$A_{2m-1} - \frac{A_1}{\varrho^{2m-2}} = C'_{m-1}\ ,$$

$$A_{2m-2} - \frac{A_2}{\varrho^{2m-4}} = C'_{m-2}\ ,$$

. . . .

$$A_{m+1} - \frac{A_{m-1}}{\varrho^2} = C'_1\ ;$$

a' mikből következik:

$$C_m\,\varrho^m \cos m\theta + C_{m-1}\,\varrho^{m-1} \cos (m-1)\theta$$

$$
\begin{aligned}
&+ C_{m-2}\,\varrho^{m-2}\cos(m-2)\theta \\
&+ C_{m-3}\,\varrho^{m-3}\cos(m-3)\theta \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
&+ C_1\,\varrho\cos\theta \quad + C_0 \quad = 0; \\
C'_m\,\varrho^m \sin m\theta &+ C'_{m-1}\,\varrho^{m-1}\sin(m-1)\theta \\
&+ C'_{m-2}\,\varrho^{m-2}\sin(m-2)\theta \\
&+ C'_{m-3}\,\varrho^{m-3}\sin(m-3)\theta \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
&+ C'_1\,\varrho\sin\theta \quad = 0.
\end{aligned}
$$

Melly két kifejezést még ϱ^m által oszthatni.

27. §.

Minthogy azonban itt tulajdonképen

$\alpha_1 = -2\varrho_1\cos\theta_1$, $\alpha_2 = -2\varrho_2\cos\theta_2$ . . . .

kerestetnek, tehát az imént talált egyenleteknek olly alakot kell adni, melly csak $\cos\theta$ különböző katványait foglalja magában. Mi a' következő segédtételeknél fogva, mint látni fogjuk, könnyen történhetik.

Legyen

$$u = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta,$$

tehát:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u} &= \frac{1}{\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta}, \\
&= \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta \qquad (20.\ l.).
\end{aligned}
$$

Ezt föltéve, lesz:

$$u^r + \frac{1}{u^r} = 2\cos r\theta,$$

$$u^r - \frac{1}{u^r} = 2\sqrt{-1}\sin r\theta;$$

a' miből könnyen meg lehet győződni, minthogy

$$u^r = \cos r\theta + \sqrt{-1}\sin r\theta,$$

$$\frac{1}{u^r} = \cos r\theta - \sqrt{-1}\sin r\theta.$$

Az egész mesterség mármost abban áll, az

$$u^r + \frac{1}{u^r} = 2\cos r\theta$$

kifejezést, az

$$u + \frac{1}{u} = 2\cos\theta$$

fogyó hatványaiban kifejteni, mire a' határozatlan össztevők' (előszám, coëfficiens) tételét lehetne használni.

Mi általánosabb szempontból indúlván ki, és u alatt minden képtelen és való mennyiséget értvén, azt állítjuk először, hogy mindég

$$u^r + \frac{1}{u^r} = \left(u + \frac{1}{u}\right).\left(u^{r-1} + \frac{1}{u^{r-1}}\right) - \left(u^{r-2} + \frac{1}{u^{r-2}}\right)$$

$$u^r - \frac{1}{u^r} = \left(u + \frac{1}{u}\right).\left(u^{r-1} - \frac{1}{u^{r-1}}\right) - \left(u^{r-2} - \frac{1}{u^{r-2}}\right);$$

melly tételeknek valódiságáról sokszorozás által könnyen meg lehet győződni.

28. §.

Legyen mármost

$$u + \frac{1}{u} = z.$$

Ennél fogva, $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ tétetvén, könnyen találtatik:

$$u^0 + \frac{1}{u^0} = 2,$$

$$u + \frac{1}{u} = z,$$

$$u^2 + \frac{1}{u^2} = z^2 - 2,$$

$$u^3 + \frac{1}{u^3} = z^3 - 3z,$$

$$u^4 + \frac{1}{u^4} = z^4 - 4z^2 + 2,$$

$$u^5 + \frac{1}{u^5} = z^5 - 5z^3 + 5z,$$

$$u^6 + \frac{1}{u^6} = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2,$$

$$u^7 + \frac{1}{u^7} = z^7 - 7z^5 + 14z^3 - 7z,$$

. . . .

Az előjegyeknek és a' z hatványainak törvénye itt szembetünő, nem úgy ellenben az előszámoké; kivált a' harmadik, negyedik 'stb függő sorban.

Irjuk ezen előszámokat egymás alá, és pedig fekmentes sorokban, lesz:

2,	3,	4,	5,	6,	7	. . .
2,	5,	9,	14,	20,	27	. . .
2,	7,	16,	30,	50,	77	. . .
2,	9,	25,	55,	105,	182	. . .
2,	11,	36,	91,	196	. . .	. . .
2,	13,	49,	140	. . .	. . .	. . .
2,	15,	64	. . .	. . .	. . .	. . .
2,	17	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

ha tudniillik a' kitételeket a' feljebbi határon túl folytatjuk. E' fekmentes sorok nevezetes tulajdonságokkal birnak. Az első, mint első tekintetre látszik, a' természetes számok' sora, 2től fogva. A' második az első sor' tagjainak sommáit adja, és pedig ezen második sornak 2dik tagja az első sor' két tagjáét, a' harmadik az első sor' három első tagjáét, 's egyáltalában ezen második sor n-dik tagja az első sor' n tagjának sommáját. 'S egyáltalában a' r-dik sor n-dik tagja az (r—1)dik sor' első n tagjának sommáját adja. Ezen tulajdonságánál fogva a' nevezett soroknak, könnyen láthatni, hogy minden tagot az előtte és fölötte állóknak összeadásából eredettnek is tekinthetni. És megfordítva szinte kaphatni minden tagot, ha az alatta lévőből ennek előzője kivonatik. Miből kiviláglik, hogy az első sor 1ső, a' második 2dik . . . 's általában az r-dik $r$dik fokú arithmeticai sort képez.

29. §.

Minthogy az első fekmentes sor' általános tagja nehézséget nem okozhat, kezdjük a' dolgot a' második fekmentes sor' általános tagjának meghatározásánál; 's irjuk a' két első sort, mint szokás az arithmeticai soroknál, így:

	1	1	1	1	1	. . .	
	2	3	4	5	6	7	. . .
0	2	5	9	14	20	27	. . .

Itt tehát (L. Egyet. Számtud. 231 l.)

$$a = 0;\ \triangle a = 2;\ \triangle^2 a = 1\ ;$$

következőleg az általános tag:

$$a^{(n)} = 2n + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$= n\left(2 + \frac{n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+3)n}{1.2}$$

Minthogy azonban ezen fekmentes sor

$$0,\ 2,\ 5,\ 9,\ 14,\ 20\ \ldots$$

az $u^r + \frac{1}{u^r}$ kifejezéseinek csak negyedik sorában kezdődik, lesz $n = r-3$, következésképen a' keresett előszám' általános alakja ez: $\frac{r(r-3)}{1 \,.\, 2}$.

Szintúgy bánván a' karmadik fekmentes sorral, lesz:

			1		1		1		. . .		
		3		4		5		6		. . . .	
	2		5		9		14		20		. . .
0		2		7		16		30		50	. . .

következéskép:

$$a = 0;\ \triangle a = 2;\ \triangle^2 a = 3;\ \triangle^3 a = 1;$$

tehát a' keresett általános tag:

$$a^{(n)} = 2n + 3.\ \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$= n \left\{ 2 + 3.\ \frac{n-1}{1 \,.\, 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \right\}$$

$$= n \left\{ 2 + \frac{(n-1)}{2} \left(3 + \frac{n-2}{3}\right) \right\}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{r(r-4)(r-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

midthogy itten $n = r-5$.

Hasonlólag bánván a' negyedik, ötödik . . . fekmentes sorokkal, általános tagként találtatni fog

$$\frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.}$$

$$\frac{r(r-6)(r-7)(r-8)(r-9)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.}$$

. . . .

's általában k akármelly állító egész számot jelentvén:

$$\frac{r\,\{r-(k+1)\}.\,\{r-(k+2)\}\ldots\{r-(2k-1)\}}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;k}.$$

30. §.

Ezeknél fogva tehát hihetővé lesz, hogy:

$$u^r+\frac{1}{u^r}=z^r-rz^{r-2}+\frac{r(r-3)}{1\,.\,2}\,.\,z^{r-4}$$
$$-\frac{r(r-4)(r-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,z^{r-6}$$
$$+\frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,z^{r-8}$$
$$-\frac{r(r-6)(r-7)(r-8)(r-9)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,z^{r-10}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

hol rövidség okáért

$$u+\frac{1}{u}=z$$

tétetett. Hogy ez valóban így van, arról meggyőződhetünk, ha e' kitételt

$$u+\frac{1}{u}=z$$

által sokszorozzuk; mi által lesz:

$$u^{r+1}+\frac{1}{u^{r+1}}=-\left(u^{r-1}+\frac{1}{u^{r+1}}\right)$$
$$-z^{r+1}-rz^{r-1}+\frac{r(r-3)}{1\,.\,2}\,z^{r-3}$$
$$-\frac{r(r-4)(r-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,z^{r-5}$$

$$- \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^{r-7}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \;,$$

hol

$$u^{r-1} + \frac{1}{u^{r-1}} = z^{r-1} - (r-1)\, z^{r-3} + \frac{(r-1)(r-4)}{1\,.\,2} z^{r-5}$$

$$- \frac{(r-1)(r-5)(r-6)}{1\,.\,2\,.\,3} z^{r-7}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

úgy hogy tulajdonképen legyen

$$u^{r+1} + \frac{1}{u^{r+1}} = z^{r+1} \begin{matrix} -r \\ -1 \end{matrix} z^{r-1} \begin{matrix} + \dfrac{r(r-3)}{1\,.\,2} \\ + (r-1) \end{matrix} r^{r-3}$$

$$\begin{matrix} - \dfrac{r(r-4)(r-5)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ - \dfrac{(r-1)(r-4)}{1\,.\,2} \end{matrix} z^{r-5}$$

$$\begin{matrix} + \dfrac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \\ + \dfrac{(r-1)(r-5)(r-6)}{1\,.\,2\,.\,3} \end{matrix} z^{r-7}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$= z^{r+1} - (r+1)\, z^{r-1} + \frac{(r+1)(r-2)}{1\,.\,1} z^{r-3}$$

$$- \frac{(r+1)(r-3)(r-4)}{1\,.\,2\,.\,3} r^{r-5}$$

$$+ \frac{(r+1)(r-4)(r-5\,(r-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^{r-7}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Minthogy

$$+r+1=+(r+1);\ \frac{r(r-3)}{1\,.\,2}+(r-1)=\frac{(r+1)(r-2)}{1\,.\,2}$$

$$\frac{r(r-4)(r-5)}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{(r-1)(r-4)}{1\,.\,2}=\frac{(r+1)(r-3)(r-4)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

. . . .

miről a' kijelölt reductiók által meg lehet győződni.

Minthogy pedig az .

$$u^{r+1}+\frac{1}{u^{r+1}}=z^{r+1}-(r+1)z^{r-1}+\frac{(r+1)(r-2)}{1\,.\,2}z^{r-3}$$

$$-\frac{(r+1)(r-3)(r-4)}{1\,.\,2\,.\,3}z^{r-5}$$

$$+\frac{(r+1)(r-4)(r-5)(r-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^{r-7}$$

. . . .

abból is foly, hogyha az $u^r+\frac{1}{u^r}$ hihetőnek fölvett kifejtésében r helyébe $r+1$ tétetik, nyilvánvaló, hogy ezen kifejtés r-nek akármelly állító egész értékére nézve megáll.

31. §.

Menjünk mármost által az:

$$u^r-\frac{1}{u^r}=\left(u+\frac{1}{u}\right).\left(u^{r-1}-\frac{1}{u^{r-1}}\right)-\left(u^{r-2}-\frac{1}{u^{r-2}}\right)$$

kifejezésre, és legyen itt is

$$u+\frac{1}{u}=z$$

Ebből következik:

$$\frac{u^r - \frac{1}{u^r}}{u - \frac{1}{u}} = z.\left\{\frac{u^{r-1} - \frac{1}{u^{r-1}}}{u - \frac{1}{u}}\right\} - \left\{\frac{u^{r-2} - \frac{1}{u^{r-2}}}{u - \frac{1}{u}}\right\}.$$

és ha mármost $r = 0;\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ tétetik:

$$\frac{u^0 - \frac{1}{u^0}}{u - \frac{1}{u}} = 0\,,$$

$$\frac{u - \frac{1}{u}}{u - \frac{1}{u}} = 1\,,$$

$$\frac{u^2 - \frac{1}{u^2}}{u - \frac{1}{u}} = z\,,$$

$$\frac{u^3 - \frac{1}{u^3}}{u - \frac{1}{u}} = z^2 - 1\,,$$

$$\frac{u^4 - \frac{1}{u^4}}{u - \frac{1}{u}} = z^3 - 2z\,,$$

$$\frac{u^5 - \frac{1}{u^5}}{u - \frac{1}{u}} = z^4 - 3z^2 + 1\,;$$

$$\frac{u^6 - \frac{1}{u^6}}{u - \frac{1}{u}} = z^5 - 4z^3 + 3z\,,$$

$$\frac{u^7 - \frac{1}{u^7}}{u - \frac{1}{u}} = z^6 - 5z^4 + 6z^2 - 1\,,$$

$$\frac{u^8 - \frac{1}{u^8}}{u - \frac{1}{u}} = z^7 - 6z^5 + 10z^3 - 4z\,,$$

$$\frac{u^9 - \frac{1}{u^9}}{u - \frac{1}{u}} = z^8 - 7z^6 + 15z^4 - 10z^2 + 1\,.$$

. . . .

's a' függő sorok' előszámai itt

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	. . .
1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36	. . .
1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120	. . .
1,	5,	15,	35,	70,	126,	210	. . . . . .	
1,	6,	21,	56,	126,	252	. . . .		
1,	7,	28,	84,	210	. . . .			
1,	8,	36,	120	. . . .				

. . . .

32. §.

Minthogy itt is az első fekmentes sor' általános tagja világosan $r = n + 2$; keressük mindjárt a' második sorát. Úgy irván itt is a' számba veendő sorokat, mint feljebb (29 §.), lesz:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \end{array}$$

Itt tehát

$$a = 0\,;\ \Delta a = 1\,;\ \Delta^2 a = 1\,;$$

's ennél fogva a' keresett általános tag:

$$a^{(n)} = n + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2},$$

$$= n\left(1 + \frac{n-1}{1\,.\,2}\right)$$

$$= \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2} = \frac{(r-3)\,(r-4)}{1\,.\,2},$$

minthogy itt $r = n + 4$.

A' harmadik fekmentes sor' általános tagjára nézve lesz:

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & 1 & \dots \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \ \dots \end{array}$$

következőleg:

$$a = 0\,;\ \Delta a = 1\,;\ \Delta^2 a = 2\,;\ \Delta^3 a = 1\,;$$

's így az általános tag:

$$a^{(n)} = n + 2.\ \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{(r-4)\,(r-5)\,(r-6)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

itt már $r = n + 6$ levén.

Hasonló okoskodások által fog általánosan találtatni:

$$\frac{\{r-(k+1)\}.\{r-(k+2)\}\ldots\{r-2k\}}{1\;.\;2\;\ldots\;k}.$$

k egész állító szám levén, mi egyébiránt magában érthető.

Hihető már ebből, hogy:

$$\frac{u^r-\frac{1}{u^r}}{u-\frac{1}{u}}=z^{r-1}-(r-2)z^{r-3}+\frac{(r-3)(r-4)}{1\;.\;2}z^{r-5}$$

$$-\frac{(r-4)(r-5)(r-6)}{1\;.\;2\;.\;3}z^{r-7}$$

$$+\frac{(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}z^{r-9}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

'S ezen tétel' valóságáról ugyanazon módon meg lehet győződni, mint feljebb 30 §. Sokszoroztassék tudniillik ezen kifejezés

$$u+\frac{1}{u}=z$$

által 's reducáltassanak az előszámok; mi megtörténvén találtatni fog:

$$\frac{u^{r+1}-\frac{1}{u^{r+1}}}{u-\frac{1}{u}}=z^r-(r-1)z^{r-2}+\frac{(r-2)(r-3)}{1\;.\;2}z^{r-4}$$

$$-\frac{(r-3)(r-4)(r-5)}{1\;.\;2\;.\;3}r^{r-6}$$

$$+\frac{(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}z^{r-8}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

épen az, mi találtatik, midőn ama' hihetőnek mondott kifejezésben r helyébe $r+1$ tétetik.

33. §.

A' talált tételek (30 és 32 §), azaz

$$u^r + \frac{1}{u^r} \quad \text{és} \quad \frac{u^r - \frac{1}{u^r}}{u - \frac{1}{u}}$$

kifejtései, mellyekben, mit el nem kell felejteni,

$$u + \frac{1}{u} = z$$

állanak, akár képes akár képtelen mennyiséget jelentsen u.

Midőn u képtelen mennyiség' képviselője, akkor a' 27 §. szerint:

$$u + \frac{1}{u} = z$$

$$= 2\cos\theta,$$

$$u - \frac{1}{u} = 2\sqrt{-1}\,\sin\theta,$$

$$u^r + \frac{1}{u^r} = 2\cos r\theta,$$

$$u^r - \frac{1}{u^r} = 2\sqrt{-1}\,\sin r\theta.$$

Ez esetben lesz tehát:

$$\operatorname{Cos} r\theta = 2^{r-1}\cos^r\theta - 2^{r-3}\,r\cos^{r-2}\theta$$

$$+ 2^{r-5}.\frac{r(r-3)}{1\,.\,2}\cos^{r-4}\theta$$

$$- 2^{r-7} . \frac{r(r-4)(r-5)}{1 . 2 . 3} \cos^{r-6}\theta$$

$$+ 2^{r-9} . \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{1 . 2 . 3 . 4} \cos^{r-8}\theta$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{\operatorname{Sin} r\theta}{\operatorname{Sin}\theta} = 2^{r-1} \cos^{r-1}\theta - 2^{r-3} . (r-2) \cos^{r-3}\theta$$

$$+ 2^{r-5} \frac{(r-3)(r-4)}{1 . 2} \cos^{r-5}\theta$$

$$- 2^{r-7} \frac{(r-4)(r-5)(r-6)}{1 . 2 . 3} \cos^{r-7}\theta$$

$$+ 2^{r-9} . \frac{(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)}{1 . 2 . 3 . 4} \cos^{r-9}\theta$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Ezek azon egyenletek, mellyeket keresnünk kellett, hogy a' 26 §. végegyenleteit $\cos\theta$ hatványai által kifejezhessük.

34. §.

Ha tehát a' 26 §. utolsó egyenletét $\sin\theta$ által osztjuk, és mind abba, mind az előtte valóba

$$\operatorname{Cos} m\theta , \quad \cos(m-1)\theta , \quad \cos(m-2)\theta \; . \; . \; . \; .$$

$$\frac{\operatorname{Sin} m\theta}{\operatorname{Sin}\theta} , \quad \frac{\sin(m-1)\theta}{\sin\theta} , \quad \frac{\sin(m-2)\theta}{\sin\theta} \; . \; . \; . \; .$$

értékeit az épen most talált kifejezésekből substitualgatjuk, lesz:

$$2^{m-1} C_m \varrho_m \cos^m\theta + 2^{m-2} . C_{m-1} \varrho_{m-1} \cos^{m-1}\theta$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 2^{m-3} . C_{m-2} \varrho_{m-2} \\ - 2^{m-3} . m C_m \varrho_m \end{array} \right\} \cos^{m-2}\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2^{m-4}\, C_{m-3}\, \varrho_{m-3} \\ - 2^{m-4}\, (m-1)\, C_{m-1}\, \varrho_{m-1} \end{array}\right\} \cos^{m-3}\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2^{m-5}\, C_{m-4}\, \varrho_{m-4} \\ - 2^{m-5}\, (m-2)\, C_{m-2}\, \varrho_{m-2} \\ + 2^{m-5}\, \dfrac{m\,(m-3)}{1\,.\,2}\, C_m\, \varrho_m \end{array}\right\} \cos^{m-4}\theta$$

$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \qquad = 0$$

$$2^{m-1}\, C'_m\, \varrho_m \cos^{m-1}\theta + 2^{m-2}\, C'_{m-1}\, \varrho_{m-1} \cos^{m-2}\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2^{m-3}\, C'_{m-2}\, \varrho_{m-2} \\ + 2^{m-3}\, (m-2)\, C'_m\, \varrho_m \end{array}\right\} \cos^{m-3}\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2^{m-4}\, C'_{m-3}\, \varrho_{m-3} \\ - 2^{m-4}\, (m-3)\, C'_{m-1}\, \varrho_{m-1} \end{array}\right\} \cos^{m-4}\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2^{m-5}\, C'_{m-4}\, \varrho_{m-4} \\ - 2^{m-5}\, (m-4)\, C'_{m-2}\, \varrho_{m-2} \\ + 2^{m-5}\, \dfrac{(m-3)\,(m-4)}{1\,.\,2}\, C'_m\, \varrho_m \end{array}\right\} \cos^{m-5}\theta \,.$$

$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \qquad = 0$$

Ámde még sem tulajdonképen $\cos\theta$ kerestetik, hanem

$$\alpha = -2\varrho \cos\theta \qquad (23\ \S.).$$

Ha tehát az épen most talált kifejezésekben

$$\cos\theta = -\frac{\alpha}{2\varrho}$$

$$\cos^2\theta = +\left(\frac{\alpha}{2\varrho}\right)^2$$

$$\cos^3\theta = -\left(\frac{\alpha}{2\varrho}\right)^3$$

$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

$$\cos^{m-1}\theta = (-1)^{m-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{2\varrho}\right)^{m-1}$$

$$\cos^{m}\theta = (-1)^{m} \cdot \left(\frac{\alpha}{2\varrho}\right)^{m}$$

tétetik, lesz végűl:

$$\begin{aligned}
C_m \alpha^m &- C_{m-1}\alpha^{m-1} \\
&+ \{C_{m-2} - m\, C_m \varrho^2\} \cdot \alpha^{m-2} \\
&- \{C_{m-3} - (m-1)\, C_{m-1}\varrho^2\} \cdot \alpha^{m-3} \\
&+ \left\{C_{m-4} - (m-2)\, C_{m-2}\varrho^2 + \frac{m(m-3)}{1\,.\,2} C_m \varrho^4\right\} \cdot \alpha^{m-4} \\
&- \left\{C_{m-5} - (m-3)\, C_{m-3}\varrho^2 \right. \\
&\qquad \left. + \frac{(m-1)(m-4)}{1\,.\,2} C_{m-1}\varrho^4\right\} \cdot \alpha^{m-5} \\
&+ \left\{C_{m-6} - (m-4)\, C_{m-4}\varrho^2 + \frac{(m-2)(m-5)}{1\,.\,2} C_{m-2}\varrho^4 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{m(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3} C_m \varrho^6\right\} \cdot \alpha^{m-6} \\
&- \left\{C_{m-7} - (m-5)\, C_{m-5}\varrho^2 + \frac{(m-3)(m-6)}{1\,.\,2} C_{m-3}\varrho^4 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(m-1)(m-5)(m-6)}{1\,.\,2\,.\,3} C_{m-1}\varrho^6\right\} \cdot \alpha^{m-7} \\
&+ \left\{C_{m-8} - (m-6)\, C_{m-6}\varrho^2 + \frac{(m-4)(m-7)}{1\,.\,2} C_{m-4}\varrho^4 \right. \\
&\qquad - \frac{(m-2)(m-6)(m-7)}{1\,.\,2\,.\,3} C_{m-2}\varrho^6 \\
&\qquad \left. + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} C_m \varrho^8\right\} \cdot \alpha^{m-8}
\end{aligned}$$

$$-\left\{C_{m-9}-(m-7)\,C_{m-7}\,\varrho^2+\frac{(m-5)(m-8)}{1\,.\,2}\,C_{m-5}\,\varrho^4\right.$$

$$-\frac{(m-3)\,(m-7)\,(m-8)}{1\,.\,2\,.\,3}\,C_{m-3}\,\varrho^6$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-6)(m-7)\,(m-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,C_{m-1}\,\varrho^8\right\}.\,\alpha^{m-9}$$

. . . .

$$(-1)^m.\left\{C_0-2C_2\,\varrho^2+2C_4\,\varrho^4-+\ldots(-)^m.\,2C_m\,\varrho^m\right\}=0;$$

melly utolsó sornak utolsó tagja azonban

$$=(-1)^{m-1}.\;2C_{m-1}\,\varrho^{m-1},$$

midőn m páratlan szám. És hasonlólag lesz:

$$C'_m\,\alpha^{m-1}-C'_{m-1}\,\alpha^{m-2}$$

$$+\{C'_{m-2}-(m-2)\,C'_m\,\varrho^2\}.\,\alpha^{m-3}$$

$$-\{C'_{m-3}-(m-3)\,C'_{m-1}\,\varrho^2\}.\,\alpha^{m-4}$$

$$+\left\{C'_{m-4}-(m-4)\,C'_{m-2}\,\varrho^2\right.$$

$$\left.+\frac{(m-3)\,(m-4)}{1\,.\,2}\,C'_m\,\varrho^4\right\}.\,\alpha^{m-5}$$

$$-\left\{C'_{m-5}-(m-5)\,C'_{m-3}\,\varrho^2\right.$$

$$\left.+\frac{(m-4)\,(m-5)}{1\,.\,2}\,C'_{m-1}\,\varrho^4\right\}.\,\alpha^{m-6}$$

$$+\left\{C'_{m-6}-(m-6)\,C'_{m-4}\,\varrho^2+\frac{(m-5)(m-6)}{1\,.\,2}\,C'_{m-2}\,\varrho^4\right.$$

$$\left.-\frac{(m-4)\,(m-5)\,(m-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\,C'_m\,\varrho^6\right\}.\,\alpha^{m-7}$$

$$-\Big\{C'_{m-7}-(m-7)\,C'_{m-5}\varrho^2+\frac{(m-6)(m-7)}{1\;.\;2}C'_{m-3}\varrho^4$$

$$+\frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1\;.\;2\;.\;3}C'_{m-1}\varrho^6\Big\}.\,\alpha^{m-8}$$

$$+\Big\{C'_{m-8}-(m-8)C'_{m-6}\varrho^2+\frac{(m-7)(m-8)}{1\;.\;2}C'_{m-4}\varrho^4$$

$$-\frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{1\;.\;2\;.\;3}C'_{-2}\varrho^6$$

$$+\frac{(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}C'_m\varrho^8\Big\}.\,\alpha^{m-9}$$

$$-\Big\{C'_{m-9}-(m-9)\,C'_{m-7}\varrho^2+\frac{(m-8)(m-9)}{1\;.\;2}C'_{m-5}\varrho^4$$

$$-\frac{(m-7)(m-8)(m-9)}{1\;.\;2\;.\;3}C'_{m-3}\varrho^6$$

$$+\frac{(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}C'_{m-1}\varrho^8\Big\}.\,\alpha^{m-10}$$

. . . .

$$(-1)^{m-1}.\Big\{C'_1-C'_3\varrho^2+C'_5\varrho^4-+\ldots(-)^{m-1}\,C'_{m-1}\varrho^{m-2}\Big\}=0,$$

's itt is az utolsó sor' utolsó tagja csak akkor áll, midőn m páros, ellenben ugyanazon utolsó tag:

$$=(-1)^m\,.\;C'_m\varrho^{m-1}.$$

35. §.

Egyes esetekben 1) midőn $m=2$, azaz az adott fx egyenletnek

két pár képzeleti gyökere van, lesz:

$$A_4+\frac{A_0}{\varrho^4}=C_2,$$

$$A_3 + \frac{A_1}{\varrho^2} = C_1 ,$$

$$2A_2 = C_0 ,$$

$$A_4 - \frac{A_0}{\varrho^4} = C'_2 ,$$

$$A_3 - \frac{A_1}{\varrho^2} = C'_1 ;$$

's ennél fogva

$$C_2 \alpha^2 - C_1 \alpha + (C_0 - 2 C_2 \varrho^2) = 0 ,$$
$$C'_2 \alpha - C'_1 = 0 ;$$

itt tehát α meghatározására az utolsó kifejezés elegendő, a' mellyből következik:

$$\alpha = \frac{C'_1}{C'_2} = \frac{\varrho^2 . (A_3 \varrho^2 - A_1)}{A_4 \varrho^4 - A_0} ;$$

's ez az eset szokott legtöbbször előfordúlni.

2) Midőn $m = 3$, tehát az adott egyenletnek **három pár képzeleti gyökere van**, lesz:

$$A_6 + \frac{A_0}{\varrho_6} = C_3 ,$$

$$A_5 + \frac{A_1}{\varrho^4} = C_2 ,$$

$$A_4 + \frac{A_2}{\varrho^2} = C_1 ,$$

$$2A_3 = C_0 ;$$

$$A_6 - \frac{A_0}{\varrho^6} = C'_3 ,$$

$$A_5 - \frac{A_1}{\varrho^4} = C'_2 ,$$

$$A_4 - \frac{A_2}{\varrho^2} = C'_1 ;$$

következőleg:

$$C_3\alpha^3 - C_2\alpha^2 + (C_1 - 3C_3\varrho^2)\alpha - (C_0 - 2C_2\varrho^2) = 0,$$
$$C'_3\alpha^2 - C'_2\alpha + (C'_1 - C'_3\varrho^2) = 0.$$

3) Midőn $m = 4$, azaz midőn az adott egyenletnek

négy pár képzeleti gyökere van, lesz:

$$A_8 + \frac{A_0}{\varrho^8} = C_4 ,$$

$$A_7 + \frac{A_1}{\varrho^6} = C_3 ,$$

$$A_6 + \frac{A_2}{\varrho^4} = C_2 ,$$

$$A_5 + \frac{A_3}{\varrho^2} = C_1 ,$$

$$2A_4 = C_0 ;$$

$$A_8 - \frac{A_0}{\varrho^8} = C'_4 ,$$

$$A_7 - \frac{A_1}{\varrho^6} = C'_3 ,$$

$$A_6 - \frac{A_2}{\varrho^1} = C'_2 ,$$

$$A_5 - \frac{A_3}{\varrho^2} = C'_1 ;$$

tehát:

$$C_4\alpha^4 - C_3\alpha^3 + (C_2 - 4C_4\varrho^2).\alpha^2$$

$$-(C_1 - 3C_3\varrho^2).\alpha + (C_0 - 2C_2\varrho^2 + 2C_4\varrho^4) = 0,$$
$$C'_4\alpha^3 - C'_3\alpha^2 + (C'_2 - 2C'_4\varrho^2).\alpha - (C'_1 \quad C'_3\varrho^2) = 0.$$
'stb, 'stb.

Ha mármost a'

$$C_m, \quad C_{m-1}, \quad C_{m-2} \ldots C_1, \quad C_0$$
$$C'_m, \quad C'_{m-1}, \quad C'_{m-2} \ldots C'_1$$

értékeibe és a' talált egyenletekbe ϱ-nek bizonyos értéke iktattatik, akkor az ϱ-hez tartozó, azaz a' neki megfelelő α a' talált két egyenletnek közös gyökere lesz, melylyet többféleképen találhatni.

36. §.

A' 21 §ban nekünk például szolgált az

$$fx = x^4 - x + 1 = 0$$

egyenlet, mellynek két pár képzeleti gyökere van, 's mellyre nézve

$$\begin{aligned} A_4 &= +1, \\ A_3 = A_2 &= \quad 0, \\ A_1 &= -1, \\ A_0 &= +1, \end{aligned}$$

továbbá

$$\varrho_1^2 = 1{\cdot}4013; \; \varrho_2^2 = 0{\cdot}7136.$$

Behelyezvén tehát ϱ^2 értékeit a' két pár képzeleti gyökeres kifejezésbe, lesz:

$$\alpha_1 = \frac{1{\cdot}4013}{(1{\cdot}4013)^2 - 1},$$

$$\alpha_2 = \frac{0\,7136}{(0{\cdot}7136)^2 - 1},$$

kifejtve

$$\alpha_1 = +1{\cdot}454; \; \alpha_2 = -1{\cdot}454$$

a' miből látható, hogy az adott

$$fx = x^4 - x + 1 = 0$$

egyenlet az

$$x^2 + 1{\cdot}454\,x + 1{\cdot}4013 = 0,$$
$$x^2 - 1{\cdot}454\,x + 0{\cdot}7136 = 0$$

factorokból áll.

A' következő 22. §ban az

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 = 0$$

egyenlet' ϱ-eit találtuk és volt:

$$\varrho_1^2 = 3\,;\quad \varrho_2^2 = 1\,.$$

Itt tehát

$$A_4 = +1,$$
$$A_3 = -4,$$
$$A_2 = +7,$$
$$A_1 = -6,$$
$$A_0 = +3,$$

's ezeknél fogva lesz:

$$\alpha_1 = \frac{3.(-3.4+6)}{9-3},$$
$$= -3;$$
$$\alpha_2 = \frac{-4+6}{1-3}$$
$$= -1;$$

következőleg a' két háromtagú factor ez:

$$x^2 - 3x + 3 = 0,$$
$$x^2 - x + 1 = 0.$$

37. §.

Moddottam feljebb a' 35 §. végén, hogy a' talált két egyenletből, mellynek általános alakja ez:

$$E_m a^m + E_{m-1} a^{m-1} + E_{m-2} a^{m-2} + \ldots = 0,$$
$$F_m a^{m-1} + F_{m-1} a^{m-2} + F_{m-2} a^{m-3} + \ldots = 0,$$

's mellynek elôszámai az fx adott egyenlet' elôszámaitól, és az ϱ^2 értékeitől függnek, 's mellynek közös gyökere az ϱ^2-nek megfelelő a, a-nak kivánt értékét többféleképen találhatni.

Nekem legegyszerűbb módnak látszik lenni, mind a' két egyenlet' való gyökereinek határait a' III. Szak. tanításai szerint kikeresni, 's a' közös gyökeret ugyanazon Szak. szerint fejteni meg. Encke osztást javasol, mellynek bővebb tárgyaltatását azonban feleslegesnek tartjuk.

Találtatván ekkép α és β első része, Encke következőleg viszi tovább a' közelítést. Alapúl az

$$fa + f'a \,.\, \triangle a = 0,$$
$$fb + f'b \,.\, \triangle b = 0$$

(L. feljebb 11 §.) egyenletek vétetnek, mellyekben

$$a = \varrho\,(\cos\theta + \sin\theta\,\sqrt{-1})$$
$$b = \varrho\,(\cos\theta - \sin\theta\,\sqrt{-1}).$$

Ezeknél fogva:

$$a^m = \varrho^m \left(\cos m\theta + \sin m\theta\,\sqrt{-1}\right)$$
$$a^{m-1} = \varrho^{m-1} \left(\cos(m-1) + \sin(m-1)\theta\,\sqrt{-1}\right)$$
$$a^{m-2} = \varrho^{m-2} \left(\cos(m-2) + \sin(m-2)\theta\,\sqrt{-1}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b^m = \varrho^m \left(\cos m\theta - \sin m\theta\,\sqrt{-1}\right)$$
$$b^{m-1} = \varrho^{m-1} \left(\cos(m-1)\theta - \sin(m-1)\theta\,\sqrt{-1}\right)$$
$$b^{m-2} = \varrho^{m-2} \left(\cos(m-2)\theta - \sin(m-2)\theta\,\sqrt{-1}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ha ezen értékek mármost az

$$fa\,,\quad fb$$
$$af'a,\quad bf'b$$

kifejezésekbe iktattatnak, nyilván illy alakú egyenleteink lesznek:

$$\begin{aligned} fa = \varrho^m \cos m\theta &+ A\varrho^{m-1} \cos(m-1)\theta \\ &+ B\varrho^{m-2} \cos(m-2)\theta \\ &+ C\varrho^{m-3} \cos(m-3)\theta \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ M\varrho \cos\theta + N, \\ + \{\varrho^m \sin m\theta &+ A\varrho^{m-1} \sin(m-1)\theta \\ &+ B\varrho^{m-2} \sin(m-2)\theta \\ &+ C\varrho^{m-3} \sin(m-3)\theta \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ M\varrho \sin\theta\}. \sqrt{-1}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fb = \varrho^m \cos m\theta &+ A\varrho^{m-1} \cos(m-1)\theta \\ &+ B\varrho^{m-2} \cos(m-2)\theta \\ &+ C\varrho^{m-3} \cos(m-3)\theta \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ M\varrho \cos\theta + N, \\ - \{\varrho^m \sin m\theta &+ A\varrho^{m-1} \sin(m-1)\theta \\ &+ B\varrho^{m-2} \sin(m-2)\theta \\ &+ C\varrho^{m-3} \sin(m-3)\theta \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ M\varrho \sin\theta\}. \sqrt{-1} \end{aligned}$$

azaz, ha

$$\begin{aligned} \varrho^m \cos m\theta &+ A\varrho^{m-1} \cos(m-1)\theta \\ &+ B\varrho^{m-2} \cos(m-2)\theta \\ &+ C\varrho^{m-3} \cos(m-3)\theta \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ M\varrho \cos\theta + N = R\cos\varepsilon, \\ \varrho^m \sin m\theta &+ A\varrho^{m-1} \sin(m-1)\theta \\ &+ B\varrho^{m-2} \sin(m-2)\theta \end{aligned}$$

$$+ C\varrho^{m-3} \sin (m-3)\theta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ M\varrho \sin \theta \quad = R \sin \varepsilon$$

tétetik, lesz tulajdonképen:

$$fa = R (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sqrt{-1})$$
$$fb = R (\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \sqrt{-1}) .$$

Másfelől

$$\begin{aligned} af'a = ma^m & + (m-1) Aa^{m-1} \\ & + (m-2) Ba^{m-2} \\ & + (m-3) Ca^{m-3} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + 2La^2 + Ma \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} af'a = m\varrho^m \cos m\theta & + (m-1) A\varrho^{m-1} \cos (m-1)\theta \\ & + (m-2) B\varrho^{m-2} \cos (m-2)\theta \\ & + (m-3) C\varrho^{m-3} \cos (m-3)\theta \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + 2L\varrho^2 \cos 2\theta + M\varrho \cos \theta \\ + \{m\varrho^m \sin m\theta & + (m-1) A\varrho^{m-1} \sin (m-1)\theta \\ & + (m-2) B\varrho^{m-2} \sin (m-2)\theta \\ & + (m-3) C\varrho^{m-3} \sin (m-3)\theta \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + 2L\varrho^2 \sin 2\theta + M\varrho \sin \theta\}. \sqrt{-1} ; \end{aligned}$$

és hasonlólag:

$$\begin{aligned} bf'b = m\varrho^m \cos m\theta & + (m-1) A\varrho^{m-1} \cos (m-1)\theta \\ & + (m-2) B\varrho^{m-2} \cos (m-2)\theta \\ & + (m-3) C\varrho^{m-3} \cos (m-3)\theta \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + 2L\varrho^2 \cos 2\theta + M\varrho \cos \theta \\ - \{m\varrho^m \sin m\theta & + (m-1) A\varrho^{m-1} \sin (m-1)\theta \\ & + (m-2) B\varrho^{m-2} \sin (m-2)\theta \end{aligned}$$

$$+ (m-3)\, C\varrho^{m-3} \sin(m-3)\theta$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ 2L\varrho^2 \sin 2\theta + M\varrho \sin\theta \} . \sqrt{-1}.$$

Ha tehát

$$\begin{aligned} m\varrho^m \cos m\theta &+ (m-1)\,\varrho^{m-1} A \cos(m-1)\theta \\ &+ (m-2)\,\varrho^{m-2} B \cos(m-2)\theta \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ 2L\varrho^2 \cos 2\theta + M\varrho\cos\theta = T\cos\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\varrho^m \sin m\theta &+ (m-1)\,\varrho^{m-1} A \sin(m-1)\theta \\ &+ (m-2)\,\varrho^{m-2} B \sin(m-2)\theta \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ 2L\varrho^2 \sin 2\theta + M\varrho\sin\theta = T\sin\psi \end{aligned}$$

tétetik, lesz hasonlolag:

$$a f'a = T(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})$$
$$b f'b = T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1}).$$

38. §.

Minthogy tehát

$$fa + f'a\,.\, \triangle a = 0,$$
$$fb + f'b\,.\, \triangle b = 0;$$

azaz:

$$fa + a f'a\,.\,\frac{\triangle a}{a} = 0,$$

$$fb = b f'b\,.\,\frac{\triangle b}{b} = 0;$$

lesz nyilván

$$R.(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sqrt{-1}) + T(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}).\frac{\triangle a}{a} = 0,$$

$$R.(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\sqrt{-1}) + T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1}).\frac{\triangle b}{b} = 0.$$

Egyetemes Számtudományom (146 l.) szerint

$$\text{Log}\,(a+k) = \text{Log}\,a + \frac{k}{ca} - \frac{k^2}{2ca^2} + - \ldots$$

hol

$$\frac{1}{c} = 0{\cdot}43429\ 44819\ \ldots$$

's innét, ha k helyébe $\triangle a$ és

$$\text{Log}\,(a+\triangle a) - \text{Log}\,a = \triangle\,\text{Log}\,a$$

tétetik, lesz:

$$\triangle\,\text{Log}\,a = \frac{1}{c}.\ \frac{\triangle a}{a},$$

honnan következik, hogy

$$\frac{\triangle a}{a} = c.\triangle\,\text{Log}\,a$$

$$\frac{\triangle b}{b} = c.\triangle\,\text{Log}\,b.$$

Helyettezvén ezen értékeket az előbbi egyenletekbe, következik:

$$R\,(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sqrt{-1}) + c\,T\,(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}).\ \times \triangle\,\text{Log}\,a = 0$$

$$R\,(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\sqrt{-1}) + c\,T\,(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1}).\ \times \triangle\,\text{Log}\,b = 0.$$

Minthogy továbbá

$$a = \varrho\,(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})$$
$$b = \varrho\,(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})$$

lesz:

$$\text{Log}\,a = \text{Log}\,\varrho + \text{Log}\,e.\,\theta\sqrt{-1}\ ^{*)}$$
$$\text{Log}\,b = \text{Log}\,\varrho - \text{Log}\,e.\,\theta\sqrt{-1}\ ;$$

*) Az olvasó tudni fogja (Egy. Számtud. 161. l.), hogy

$$\text{Cos}\,\theta + \sin\theta\sqrt{-1} = e^{\theta\sqrt{-1}},$$

$$\text{Cos}\,\theta - \sin\theta\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}},$$

hol e a' természetes logarithmusok' alapja, azaz:

$$e = 2{\cdot}71828\ 18285\ldots,$$

következőleg, midőn közönséges logarithmusok értetnek:

$$\mathrm{Log}\, e = \frac{1}{c} = 0{\cdot}43429\ 44819\ldots$$

mellynél fogva tehát

$$\triangle\,\mathrm{Log}\, a = \triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho + \frac{1}{c}.\triangle\theta\sqrt{-1}\ ^{*})$$

$$\triangle\,\mathrm{Log}\, b = \triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho - \frac{1}{c}.\triangle\theta\sqrt{-1};$$

és ennek következtében:

$$R.(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sqrt{-1})$$

$$+ cT.(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}).(\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho + \frac{1}{c}.\triangle\theta\sqrt{-1}) = 0,$$

$$R.(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\sqrt{-1})$$

$$+ cT.(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1}).(\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho - \frac{1}{c}.\triangle\theta\sqrt{-1}) = 0;$$

mikből, a' jelölt sokszorzások' véghez vitele után, összeadás és kivonás' következtében lesz:

---

a' honnan

$$\mathrm{Log}\,(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}\,\mathrm{Log}\, e$$
$$\mathrm{Log}\,(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1}) = -\theta\sqrt{-1}\,\mathrm{Log}\, e.$$

*) A'

$$\mathrm{Log}\, a = \mathrm{Log}\,\varrho + \frac{1}{c}.\theta\sqrt{-1}$$

egyenletből lesz tudniillik

$$\mathrm{Log}\,(a + \triangle a) = \mathrm{Log}\,(\varrho + \triangle\varrho) + \frac{1}{c}.(\theta + \triangle\theta).\sqrt{-1}$$

következőleg:

$$\mathrm{Log}\,(a + \triangle a) - \mathrm{Log}\, a = \mathrm{Log}\,(\varrho + \triangle\varrho) - \mathrm{Log}\,\varrho$$
$$+ \frac{1}{c}.(\theta + \triangle\theta)\sqrt{-1} - \frac{1}{c}.\theta\sqrt{-1}\text{ 'stb.}$$

$$R\cos\varepsilon + cT\cos\psi\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho - T\sin\psi\,\triangle\theta = 0,$$
$$R\sin\varepsilon + cT\sin\psi\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho + T\cos\psi\,\triangle\theta = 0.$$

Ha mármost ezen egyenleteket egymásután $\sin\psi$, és $\cos\psi$ által sokszorozzuk, keletkezik:

$$R\sin\psi\cos\varepsilon + cT\sin\psi\cos\psi\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho - T\sin^2\psi\,\triangle\theta = 0,$$
$$R\sin\varepsilon\cos\psi + cT\sin\psi\cos\psi\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho + T\cos^2\psi\,\triangle\theta = 0,$$
$$R\cos\varepsilon\cos\psi + cT\cos^2\psi\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho - T\sin\psi\cos\psi\,\triangle\theta = 0,$$
$$R\sin\psi\sin\varepsilon + cT\sin^2\psi\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho + T\sin\psi\cos\psi\,\triangle\theta = 0.$$

Melly egyenleteknek két utolsóját összeadván, két elsejét pedig egymásból kivonván, lesz:

$$R(\cos\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon\sin\psi) + cT\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho = 0$$
$$R(\sin\varepsilon\cos\psi - \cos\varepsilon\sin\psi) + T\,\triangle\theta = 0;$$

azaz:

$$R\cos(\varepsilon-\psi) + cT\,\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho = 0,$$
$$R\sin(\varepsilon-\psi) + T\,\triangle\theta = 0;$$

a' mikből végűl a' keresett igazítások, tudniillik a' ϱ modulus' és a' θ szög' igazításai folynak:

$$\triangle\,\mathrm{Log}\,\varrho = -\frac{1}{c}\cdot\frac{R\cos(\varepsilon-\psi)}{T},$$
$$\triangle\theta = -\frac{R\sin(\varepsilon-\psi)}{T}.$$

'S itt megjegyzendő, hogy $\triangle\theta$ nem fokokban vagy fokok' részeiben, hanem egyedűl a' sugár ($=1$) részeiben értendő. Ezen részeket fokok és fokok' részeire igen könnyen változtathatni, tudván hogy fokokra, perczekre és másodperczekre nézve

$$\triangle\theta : \pi = \triangle f : 180,$$
$$\triangle\theta : \pi = \triangle p : 60.\,160,$$
$$\triangle\theta : \pi = \triangle m : 60^2.\,180;$$

melly aránylatban $\pi = 3{\cdot}14159\ \ldots$ és $\triangle f$, $\triangle p$, $\triangle m$ a' kivánt igazítások fokokban, perczekben és másodperczekben.

39. §.

Alkalmazzuk a' mondottakat a' 36 §. egyenletére, melly ez:

$$fx = x^4 - x + 1 = 0,$$

mellyre nézve találtatott egyik háromtagú factorúl:

$$x^2 + 1{\cdot}454\,x + 1{\cdot}4013 = 0;$$

hol tehát

$$\alpha = 1{\cdot}454\,;\ \varrho^2 = 1{\cdot}4013.$$

Itt először

$$-2\varrho\cos\theta = 1{\cdot}454$$

$$\varrho = +\sqrt{1{\cdot}4012}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\,\varrho^2 &= 0{\cdot}1465311\\
\mathrm{Log}\,\varrho &= 0{\cdot}0732655\\
\mathrm{Log}\,\alpha &= 0{\cdot}1625642\\
\mathrm{Log}\,2\varrho &= 0{\cdot}3742955\\
\hline
\mathrm{Log}\cos\theta &= 9{\cdot}7882683\,n\,;\\
\theta &= \pi - 52^\circ\ 6'\ 36''.\ 6\\
\mathrm{Log}\sin\theta &= 9{\cdot}8971832\\
4\theta &= 3\pi - 28^\circ\ 26'\ 26''.\ 4\\
\mathrm{Log}\cos 4\theta &= 9{\cdot}9441424\ n\\
\mathrm{Log}\sin 4\theta &= 9{\cdot}6778336.
\end{aligned}$$

Ezen értékekből lesz:

$$\begin{aligned}
R\cos\varepsilon = \varrho^4\cos 4\theta &+ A\varrho^3\cos 3\theta\\
&+ B\varrho^2\cos 2\theta\\
&+ C\varrho\cos\theta + D;\\
R\sin\varepsilon = \varrho^4\sin 4\theta &+ A\varrho^3\sin 3\theta\\
&+ B\varrho^2\sin 2\theta\\
&+ C\varrho\sin\theta;
\end{aligned}$$

avvagy minthogy itt

$$A = 0\,,\ B = 0\,,$$
$$C = -1\,; D = +1\,;$$

$$R \cos \varepsilon = \varrho^4 \cos 4\theta - \varrho \cos \theta + 1\,,$$
$$R \sin \varepsilon = \varrho^4 \sin 4\theta - \varrho \sin \theta$$

és hasonlólag:

$$T \cos \psi = 4\varrho^4 \cos 4\theta - \varrho \cos \theta\,,$$
$$T \sin \psi = 4\varrho^4 \sin 4\theta - \varrho \sin \theta.$$

Mármost

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\,\varrho^4 = & 0{\cdot}2930622 \\ \text{Log}\cos 4\theta = & 9{\cdot}9441424\ n \\ \hline & 0{\cdot}2372046\ n \\ \text{Log}\,4 = & 0{\cdot}6020600 \\ \hline & 0{\cdot}8392646\ n \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\,\varrho = & 0{\cdot}0732655 \\ \text{Log}\cos\theta = & 9{\cdot}7882689\ n \\ \hline & 6{\cdot}8615344\ n \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\,\varrho^4 = & 0{\cdot}2930622 \\ \text{Log}\sin 4\theta = & 9{\cdot}6778336 \\ \hline & 9{\cdot}9708958 \\ \text{Log}\,4 = & 0{\cdot}6020600 \\ \hline & 0{\cdot}5729558 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\,\varrho = & 0{\cdot}0732655 \\ \text{Log}\sin\theta = & 9{\cdot}8971832 \\ \hline & 9{\cdot}9704487 \end{array}$$

és ezekből

$$\begin{array}{rl} \varrho^4 \cos 4\theta = & -\ 1{\cdot}726651 \\ -\ \varrho \cos\theta = & +\ 0{\cdot}727000 \\ \hline R \cos \varepsilon = & +\ 0{\cdot}000349 \end{array}$$

$$\varrho^4 \sin 4\theta = + 0{\cdot}935181$$
$$-\varrho \sin \theta = - 0{\cdot}934219$$
$$R \sin \varepsilon = + 0{\cdot}000962$$

és hasonlólag fog találtatni:

$$T \cos \psi = - 6{\cdot}179604$$
$$T \sin \psi = + 2{\cdot}806505 .$$

Ezekből következik:

$$\text{Tang}\, \varepsilon = \frac{R \sin \varepsilon}{R \cos \varepsilon} = \frac{0{\cdot}000962}{0{\cdot}000349},$$

$$\text{Tang}\, \psi = \frac{T \sin \psi}{T \cos \psi} = -\frac{2{\cdot}806505}{0{\cdot}179604};$$

$$\text{Log } 962 = 2{\cdot}9831751$$
$$\text{Log } 349 = 2{\cdot}5428254$$
$$\text{Log Tang}\, \varepsilon = 0{\cdot}4403497$$

$$\varepsilon = 70^\circ\ 3'\ 34''$$

$$\text{Log} \sin \varepsilon = 9{\cdot}9731495\ ;$$
$$\text{Log } 2{\cdot}806505 = 0{\cdot}4481658$$
$$\text{Log } 6{\cdot}179604 = 0{\cdot}7909607$$
$$\text{Log Tang}\, \psi = 9{\cdot}6572051\ n$$

$$\psi = -\ 24^\circ\ 25'\ 31''7$$
$$\text{Log} \sin \psi = 9{\cdot}6164849\ n$$

$$\varepsilon - \psi = \frac{\pi}{2} + 4^\circ\ 29'\ 6''$$

$$\text{Log} \sin (\varepsilon - \psi) = 9{\cdot}9986686$$
$$\text{Log} \cos (\varepsilon - \psi) = 8{\cdot}8931862\ n$$

És ármost lesz:

$$\frac{R}{T} = \frac{0{\cdot}000962 .\ \sin \psi}{2{\cdot}806505\ \sin \varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } 0{\cdot}0009612 &= 6{\cdot}9831751 \\
\text{Log sin } \psi &= 9{\cdot}6164849\ n \\
\hline
&\ 6{\cdot}5996600\ n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } 2{\cdot}806505 &= 0{\cdot}4481658 \\
\text{Log sin } \varepsilon &= 9{\cdot}9731495 \\
\hline
&\ 0{\cdot}4213123
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } \frac{R}{T} &= 6{\cdot}1783447\ n \\
\text{Log } \frac{1}{c} &= 9{\cdot}6377843 \\
\text{Log cos } (\varepsilon - \psi) &= 8{\cdot}8931962\ n \\
\hline
&\ 4{\cdot}7093252
\end{aligned}$$

's innen

$$\triangle \text{Log } \varrho = -\ 0{\cdot}0000051\,;$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } \frac{R}{T} &= 6{\cdot}1783447\ n \\
\text{Log sin } (\varepsilon - \psi) &= 9{\cdot}9986686 \\
\hline
&\ 6{\cdot}1770133\ n
\end{aligned}$$

a' honnét a' sugár' részeiben

$$\triangle \theta = +\ 0{\cdot}00015032$$

azaz ívben:

$$\triangle \theta = +\ 31''$$

úgy hogy a' kiigazított

$$\text{Log } \varrho = 0{\cdot}0732604$$

és

$$\theta = \pi - 52^\circ\ 6'\ 5''{\cdot}6$$

legyen.

Ezen kiigazított értékeknél lesz:

$$\begin{aligned}
\text{Log } 2 &= 0{\cdot}3010300 \\
\text{Log } \varrho &= 0{\cdot}0732604 \\
\text{Log cos } \theta &= 9{\cdot}7883549\ n \\
\hline
&\ 0{\cdot}1626453\ n
\end{aligned}$$

következőleg a' kiigazított

$$\alpha = 1{\cdot}454272\ ; \quad \varrho^2 = 1{\cdot}401268$$

úgy hogy az adott egyenlet' szóban forgó háromtagú factora a' hatodik tizedesig helyesen ez:

$$x^2 + 1{\cdot}454272\,x + 1{\cdot}401263 = 0.$$

40 §.

Minthogy az igazitások' kiszámításánál az előbbi mód szerint logarithmusok használtatnak, magában érthető, hogy azon mód folytatása a' logarithmai táblák' terjedelmétől függ.

Veleményem szerint egyszerűen így lehetne az igazításokat keresni. — Legyen ismét

$$a = p + q\sqrt{-1}\,,$$
$$b = p - q\sqrt{-1}$$

és tétessék

$$fa + f'a\,.\,\triangle a = 0$$
$$fb + f'b\,.\,\triangle b = 0.$$

A' feladat mármost az, logarithmusok' használat nélkül a' $\triangle p$ és $\triangle q$ igazításokat találni. Ennekokáért iktassunk az adott fx és ennek $f'x$ első származékába x helyéhe $(p - q\sqrt{-1})$-t egyfelől, másfelől pedig $(p - q\sqrt{-1})$-t. Ezt téve lesz:

$$fa = fp + f'p\,.\,q\sqrt{-1} - \frac{f''p}{1\,.\,2}\,.\,q^2 - \frac{f'''p}{1.2.3}\,.\,q^3\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{f^{\mathrm{IV}}p}{1.2.3.4}\,.\,q^4 + \frac{f^{\mathrm{V}}}{1.2.3.4.5}\,.\,q^5\sqrt{-1}$$

. . . .

$$fb = fp - f'p.q\sqrt{-1} - \frac{f''p}{1.2}.q^2 + \frac{f'''p}{1.2.3}.q^3\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{f^{IV}p}{1.2.3.4}.q^4 - \frac{f^{V}p}{1.2.3.4.5}.q^5\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

'S ha mármost

$$fp - \frac{f''p}{1.2}.q^2 + \frac{f^{IV}p}{1.2.3.3}.q^4$$
$$- \frac{f^{VI}p}{1.2\ldots6}.q^6 + - \ldots = M$$
$$f'p.q - \frac{f'''p}{1.2.3}.p^3 + \frac{f^{V}p}{1.2.3.4.5}.q^5$$
$$- \frac{f^{VII}p}{1.2\ldots7}, q^7 + - \ldots = N$$

tétetik, lesz nyilván:

$$fa = M + N\sqrt{-1},$$
$$fb = M - N\sqrt{-1}.$$

És másfelől

$$f'a = f'p + f''p.q\sqrt{-1} - \frac{f'''p}{1.2}.q^2 - \frac{f^{IV}p}{1.2.3}.q^3\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{f^{V}p}{1.2.3.4}.q^4 + \frac{f^{VI}p}{1.2\ldots5}.q^5\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f'b = f'p - f''p.q\sqrt{-1} - \frac{f'''p}{1.2}.q^2 + \frac{f^{IV}p}{1.2.3}.q^3\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{f^{V}p}{1.2.3.4}.q^4 - \frac{f^{VI}p}{1.2\ldots5}.q^5\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

azaz, ha

$$f'p - \frac{f'''p}{1.2}.q^2 + \frac{f^{V}p}{1.2.3.4}.q^4 - + \ldots = m$$

$$f''p.q - \frac{f^{IV}p}{1.2.3}.q^3 + \frac{f^{VI}p}{1.2.3.4.5}.q^5 - + \ldots = n$$

tétetik:

$$f'a = m + n\sqrt{-1},$$
$$f'b = m - n\sqrt{-1}.$$

Mindezeknél fogva lesz tehát:

$$fa + f'a.\Delta a$$
$$= M + N\sqrt{-1} + (m + n\sqrt{-1}).\Delta a = 0$$
$$fb + f'b.\Delta b$$
$$= M - N\sqrt{-1} + (m - n\sqrt{-1}).\Delta b = 0$$

avvagy minthogy

$$\Delta a = \Delta p + \Delta q.\sqrt{-1}$$
$$\Delta b = \Delta p - \Delta q.\sqrt{-1};$$

lesz tulajdonképen

$$M + N\sqrt{-1} + (m + n\sqrt{-1}).(\Delta p + \Delta q\sqrt{-1}) = 0,$$
$$M - N\sqrt{-1} + (m - n\sqrt{-1}).(\Delta p - \Delta q\sqrt{-1}) = 0$$

azaz;

$$M + N\sqrt{-1}$$
$$+ m\Delta p - n\Delta q + m\Delta q\sqrt{-1} + n\Delta p\sqrt{-1} = 0$$
$$M - N\sqrt{-1}$$
$$+ m\Delta p - n\Delta q - m\Delta q\sqrt{-1} - n\Delta p\sqrt{-1} = 0$$

a' mikből összeadás és kivonás következtében

$$M + m\Delta p - n\Delta q = 0$$
$$N + m\Delta q + n\Delta p = 0.$$

Ha mármost ezen kitételeket egymásután m és n által sokszorozzuk, lesz:

$$mM + m^2\Delta p - mn\Delta q = 0,$$
$$nN + mn\Delta q + n^2\Delta p = 0,$$

$$nM + mn\,\triangle p - n^2\,\triangle q = 0,$$
$$mN + m^2\,\triangle q + mn\,\triangle p = 0.$$

Mellyeknek két elsejéből összeadás' segítségével, két utolsójából pedig kivonás' következtében lesz:

$$mM + nN + (m^2 + n^2).\ \triangle p = 0,$$
$$mN - nM + (m^2 + n^2).\ \triangle q = 0;$$

azaz:

$$\triangle p = -\frac{mM + nN}{m^2 + n^2}$$

$$\triangle q = -\frac{mN - nM}{m^2 + n^2}.$$

41. §.

A' fődolog mármost az M, N és m, n számoknak könnyű leszármaztatására megy ki.

Tudván hogy

$$M = fp - \frac{f''p}{1\cdot 2}.q^2 + \frac{f^{IV}p}{1.2.3.4}.q^4 - + \ldots.$$

$$N = f'p.q - \frac{f'''p}{1.2.3}.q^3 + \frac{f^{V}p}{1.2.3.4\ 5}.q^5 - + \ldots.$$

$$m = f'p - \frac{f'''p}{1.2}.q^2 + \frac{f^{V}p}{1.2.3.4}.q^4 - + \ldots.$$

$$n = f''p.q - \frac{f^{IV}p}{1.2.3}.q^3 + \frac{f^{VI}p}{1.2.3.4.5}.q^5 - + \ldots.$$

azaz:

$$M = fp - \frac{f''p}{1.2}.q^2 + \frac{f^{IV}p}{1.2.3.4}.q^4 - + \ldots.$$

$$\frac{N}{q} = f'p - \frac{f'''p}{1.2.3}.q^2 + \frac{f^{V}p}{1.2.3.4.5}.q^4 - + \ldots.$$

$$m = f'p - \frac{3f'''p}{1.2.3}.q^2 + \frac{5f^{V}p}{1.2.3.4.5}.q^4 - + \ldots.$$

$$\frac{n}{q} = \frac{2f''p}{2} - \frac{4f^{IV}p}{1.2.3.4}.q^2 + \frac{6f^{VI}p}{1.2..6}.q^4 - + \ldots.$$

elölegesen az

$$fp, \quad f'p, \frac{f''p}{1.2}, \frac{f'''p}{1.2.3}, \frac{f^{IV}p}{1.2.3.4} \ldots.$$

függvényeket fogjuk leszármaztatni, mi a' III. Szak. szabályai szerint igen könnyű.

Midőn tudniillik valamelly fx egyenletben a' gyökerek p-vel leszállíttatnak, azaz benne

$$x - p = y, \text{ tehát}$$
$$x = p + y$$

tétetnek, lesz:

$$fx = f(p + y)$$
$$= fp + f'p.y + \frac{f''p}{1.2}.y^2 + \ldots.$$
$$+ \frac{f^{(m-1)}p}{1.2..(m-1)}.y^{m-1} + \frac{f^{(m)}p}{1.2\ldots m}.y^m$$
$$= \frac{f^{(m)}p}{1.2\ldots m}.y^m + \frac{f^{(m-1)}p}{1.2..(m-1)}.y^{m-1} + \ldots$$
$$+ f'p.y + fp;$$

a' miből kitetszik, hogy azon egyenlet' előszámai, mellynek gyökerei az fx-einél p-vel kisebbek, épen a' keresett

$$fp, \quad f'p, \frac{f''p}{1.2}, \frac{f'''p}{1.2.3} \ldots.$$

számok. *) 'S ha mármost

$$M = Fq$$

$$\frac{N}{q} = F_1 q$$

$$m = \psi q$$

$$\frac{n}{q} = \psi_1 q$$

tétetik, 's ezen egyenletekben a' gyökerek' q^2-val leszállíttatnak, már az első sor' utolsó tagja adandja az

$$M, \frac{N}{p}, m, \frac{n}{p}$$

keresett értékeit.

42. §.

Vizsgáljuk mármost a' legáltalánosabb esetet, midőn az adott

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots$$
$$+ Lx^2 + Mx + N = 0$$

egyenletnek akárminemű való vagy képzeleti, egyenlő vagy egymástól különböző gyökerei vannak. Egyenlők pedig nemcsak a' szónak mindennapi értelmében, hanem úgyis, hogyha csak a' számbeli értékek, jegyrei tekintet nélkül, egymással megegyeznek.

Minthogy azonban e' vizsgálat egy segédtételt kíván, mellyet eddig le nem származtattunk, legyen először, mint már feljebb is

$$C_q(a, b \dots n) = a\, C_{q-1}(b \dots n) + C_q(b \dots n).$$

---

*) L. egyébiránt illy czímű munkámat is: Beitrag zur Auflösung der höheren Gleichungen. Wien, 1843.

Ha itt az egyenlőségjegy' jobb oldalán a' b-t kiválasztjuk, lesz:

$$\begin{aligned} C_q(a, b..n) &= ab\, C_{q-2}(c....n) \\ &+ (a+b)\, C_{q-1}(c...n) \\ &+ C_q(c....n); \end{aligned}$$

mivelhogy

$$a\, C_{q-1}(b...n) = a\{b\, C_{q-2}(c...n) + C_q(c...n)\}$$

és

$$C_q(b...n) = b\, C_{q-1}(c...n) + C_q(c...n).$$

Ha mármost a' c-t is kiválasztjuk, lesz ugyanezen módon

$$\begin{aligned} C_q(a, b...n) &= abc\, C_{q-3}(d...n) \\ &+ (ab + ac + bc)\, C_{q-2}(d...n) \\ &+ (a + b + c)\, C_{q-1}(d...n) \\ &+ C_q(d...n) \end{aligned}$$

. . . .

A' $C_q(a, b...n)$ kifejtéseit egymással összehasonlítván, az látszik valószínűnek lenni, hogy ezen kifejtésnek akármellyik tagja általában

$$C_r(a..g)\, C_{q-r}(h...n)$$

által kifejezhető, úgy hogy

$$\begin{aligned} C_q(a, b...n) &= C_s(a...h)\, C_{q-s}(i...n) \\ &+ C_{s-1}(a...h)\, C_{q-s+1}(i...n) \\ &+ C_{s-2}(a...h)\, C_{q-s+2}(i...n) \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ C_2(a...h)\, C_{q-2}(i...n) \\ &+ C_1(a...h)\, C_{q-1}(i...n) \\ &+ C_q(i...n) \end{aligned}$$

legyen, s a' kiválasztott $a, b, c..h$ elemek' számát jelentvén. Hogy ez nemcsak valószínű, hanem igazán így van, bizonyítjuk következő módon. Válaszszuk ki tudniillik még a' h elemet, lesz nyilván

$$
\begin{aligned}
C_q(a,\ b\ldots n) = C_{s+1}(a\ldots i).\ & C_{q-(s+1)}(k\ldots n)\\
& +\{i\,C_{s-1}(a\ldots h)+C_s(a\ldots h)\}.\ C_{q-s}(h\ldots n)\\
& +\{i\,C_{s-2}(a\ldots h)+C_{s-1}(a\ldots h)\}.\ C_{q-s+1}(k\ldots n)\\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
& +\{i\,C_2(a\ldots h)+C_3(a\ldots h)\}.\ C_{q-3}(k\ldots n)\\
& +\{i\,C_1(a\ldots h)+C_2(a\ldots h)\}.\ C_{q-2}(k\ldots n)\\
& +\{i\qquad\qquad\quad +C_1(a\ldots h)\}.\ C_{q-1}(k\ldots n)\\
& +C_q(k\ldots n)
\end{aligned}
$$

avvagy a' nagy rekeszbe zárt tagokat együvé foglalván:

$$
\begin{aligned}
C_q(a,\ b\ldots n) = & \ C_{s+1}(a\ldots i)\ C_{q-(s+1)}(k\ldots n)\\
& + C_s\ (a\ldots i)\ C_{q-s}\ (k\ldots n)\\
& + C_{s-1}(a\ldots i)\ C_{q-(s-1)}(k\ldots n)\\
& + C_{s-2}(a\ldots i)\ C_{p-(s-2)}(k\ldots n)\\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
& + C_2\ (a\ldots i)\ C_{q-2}\ (k\ldots n)\\
& + C_1\ (a,\ldots i)\ C_{q-1}\ (k\ldots n)\\
& + C_q\ (k\ldots n);
\end{aligned}
$$

épen úgy. mint találtatott volna, ha a' feljebbi kifejezésben s helyébe $(s+1)$-et tettünk volna. Minthogy a' tétel tehát akkor áll, midőn $s=1,\ 2,\ 3$.. szükségképen kell annak mindazon esetekben állania, midőn s a' kiválasztott elemek' számát jelöli és s természetesen $< q$.

Könnyebb áttekinthetés végett legyen s egymásután $=1,\ 2,\ 3$.. és hagyjuk el a' rekesz alatti elemek' kitételét, mellyeket hozzá érteni igen könnyű, ha az egyenlet' bal oldala' kitételét C_q; a' másik oldaléit ellenben C' és C'' által jelöljük, tehát lesz:

$$
\begin{aligned}
C_q & = C'_1.\ C''_{q-1} + C''_q\ ;\\
& = C'_2.\ C''_{q-2} + C'_1.\ C''_{q-1} + C''_q\ ;\\
& = C'_3.\ C''_{q-3} + C'_2.\ C''_{q-2} + C'_1.\ C''_{q-1} + C''_q\ ;\\
& = C'_4.\ C''_{q-4} + C'_3.\ C''_{q-3} + C'_2.\ C''_{q-2} + C'_1.\ C''_{q-1} + C''_q\\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}
$$

43. §.

Tudjuk, hogy az adott

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots$$
$$+ Lx^2 + Mx + N = 0$$

egyenletnek olőszámait így is fejezhetni ki:

$$A = - C_1(a, b, c \dots n)$$
$$B = + C_2(a, b, c \dots n)$$
$$C = - C_3(a, b, c \dots n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M = (-)^{m-1} C_{m-1}(a, b, c \dots n)$$
$$N = (-)^m C_m (a, b, c \dots n)$$

tehát általában

$$\pm C_q(a, b, c \dots n)$$

által. Hasonlólag fogjuk, midőn az

$$a, b, c \dots n$$

gyökerek az r-dik fokra emeltetnek, az eredő

$$\varphi x = x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \dots$$
$$+ L'x^2 + M'x + N' = 0$$

egyenletnek előszámait így fejezhetni ki:

$$A' = - C_1(a^r, b^r, c^r \dots n^r)$$
$$B' = + C_2(a^r, b^r, c^r \dots n^r)$$
$$C' = - C_3(a^r, b^r, c^r \dots n^r)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M' = (-)^{m-1} C_{m-1}(a^r, b^r, c^r \dots n^r)$$
$$N' = (-)^m C^m(a^r, b^r, c^r \dots n^r)$$

tehát általában

$$\pm C_q(a^r, b^r, a^r \dots n^r)$$

által.

Jövendőben rövidség' okáért

$$a^r, b^r, c^r \dots n^r$$

helyett mindég

$$a\,,\;b'\,,\;c'\,\ldots\,n'$$

fog iratni.

44. §.

Legyenek mármost az adott fx egyenlet' gyökerei az r-dik fokra emelve, tehát

$$\varphi x = x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \ldots$$
$$+ L'x^2 \quad + M'x \quad + N' = 0$$

's tegyük fel:

1) hogy egy való gyökér a nagyobb valamennyi más való gyökérnél vagy öszrendelt képzeletiek' modulusánál;

2) hogy két vagy több való gyökér $a, b..h$ egymással egyenlő és nagyobb akármelly más való gyökérnél, vagy modulusnál;

3) hogy valamelly modulus nagyobb valamennyi való gyökérnél 's egyéb modulusnál;

4) hogy két vagy több modulus nagyobb valamennyi való gyökérnél vagy egyéb modulusnál;

5) hogy két vagy több való gyökér $a, b...h$ és modulus $\varrho_1, \varrho_2 .. \varrho_i$ egymással egyenlő és nagyobb minden más való gyökérnél és modulusnál; 's lássuk ezen föltételek alatt, milly tulajdonságokkal kelljen az A', B', C' ... előszámoknak, ezen föltételekhez képest birniok. Az egyenlőség egyébiránt itt is, mint e' szakaszban általában, csak a' számértékre nézve veendő.

Mármost az 1) föltétel alatt, midőn tudniillik valamelly a való gyökér nagyobb valamennyi más gyökérnél vagy modulusnál, válasszuk ki az

$$A' = - C_1\,(a', b', c' \ldots n')$$

kifejezésből az $a^r = a'$ elemet. Ezt megtéve lesz:

$$A' = -a' - C_1(b', c' \ldots n');$$

'S ha mármost r eléggé nagy, mindég lesz, általános számértékre nézve

$$A' = a' = a^r,$$

a' honnan

$$\pm a = \sqrt[r]{A'}.$$

A' fok pedig eléggé nagy lesz, mihelyt A' logarithmusai, midőn az

$$a, b, c \ldots n$$

gyökerek négyszögről négyszögre emeltetnek, csak kettöztettetnek, ugyanazon módon, mint feljebb, midőn feltettük, hogy az adott fx egyenletnek csupa egymástól különböző való gyökerei vannak. Hogy ez akkor is áll, midőn az adott fx egyenletnek az $a, b, c \ldots$ való gyökereken kivül, némelly

$$\begin{array}{l}
\varrho_1 (\cos\theta_1 + \sin\theta_1 \sqrt{-1}) \\
\varrho_1 (\cos\theta_1 - \sin\theta_1 \sqrt{-1}) \\
\varrho_2 (\cos\theta_2 + \sin\theta_2 \sqrt{-1}) \\
\varrho_2 (\cos\theta_2 - \sin\theta_2 \sqrt{-1}) \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

kepzeleti gyökerei is vannak, de úgy hogy a modulusaiknál nagyobb legyen, mindjárt ki fog világlani. A' dolog' természeténél fogva tudniillik, ha a'-t kiválasztjuk, lesz:

$$\begin{array}{l}
A' = -a' - C_1 [b', c' \ldots \\
\quad \varrho_1^r (\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\
\quad \varrho_1^r (\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\
\quad \varrho_2^r (\cos r\theta_2 + \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\
\quad \varrho_2^r (\cos r\theta_2 - \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\
\quad \ldots\ldots\ldots n']
\end{array}$$

azaz:

$$A' = -a' - C_1(b', c' \ldots 2\varrho_1^r \cos r\theta_1, \\ 2\varrho_2^r \cos r\theta_2 \ldots n').$$

Ha tehát a' túlnyomó

$$C_1 (b', c' \ldots 2\varrho_1^r, 2\varrho_2^r \ldots n')$$

felett, mint állíttatott, a a' modulusoknál nagyobb levén, akkor még inkább túlnyomó lesz az

$$C_1 (b', c' \ldots 2\varrho_1^r \cos r\theta_1, 2\varrho_2^r \cos r\theta_2 \ldots n')$$

felett,

$$2\varrho_1^r \cos r\theta_1, 2\varrho_2^r \cos r\theta_2 \ldots$$

rendszerint a' $2\varrho_1^r$, $2\varrho_2^r \ldots$ kifejezéseknél kisebbek, 's ezeknél semmi esetre nagyobbak nem levén.

45. §.

A' 2) föltétel alatt, midőn tudniillik két vagy több való gyökér a, $b \ldots h$ egymással egyenlő és nagyobb akármelly más való gyökérnél vagy modulusnál, lesz

$$A' = - C_1 (sa', i', k' \ldots n')$$

s az $a$val egyenlő gyökerek' számát jelölvén. Kiválasztás által lesz:

$$A' = - sa' - C_1 (i', k' \ldots n')$$

tehát számbeli értékre nézve

$$A' = sa'$$

és

$$\pm a = \sqrt[r]{\frac{A'}{s}}.$$

Midőn

$$s = 2, 3, 4 \ldots$$

azaz a' legnagyobb ('s minden modulusnál is nagyobb) való gyökér kétszer, háromszor, négyszer .... fordúl elő, lesz illetőleg:

$$\pm a = \sqrt[r]{\frac{A'}{2}}, \sqrt[r]{\frac{A'}{3}}, \sqrt[r]{\frac{A'}{4}} \ldots$$

További taglalásaúl ezen esetnek, tegyük fel, hogy r azon fok, mellynél fogva

$$C_1 (i', k' \ldots n')$$

A' értékére már nem folyhat be; 's emeljük a' gyökereket még egyszer négyszögre 's nevezzük az illető előszámot A_1-nak. Ennél fogva lesz tehát

$$A' = sa'$$
$$A_1 = sa'^2$$

azaz:

$$\frac{A'}{s} = a'$$

$$\frac{A_1}{s} = a'^2;$$

miből látható, hogy ez esetben a' szóban forgó előszámnak csak s-dik része növekszik négyszög arányában.

Midőn tehát az A', A_1 előszámok olly természetűek, hogy azok valamelly s egész és m-nél természetesen kisebb szám által osztva nem történetesen, hanem állandóan négyszög arányában nőnek, akkor az fx adott egyenletnek mindenesetre s a' közelítés' pontosságához képest egyenlő való gyökere vagyon, mellynek mindegyike, általános számértékre nézve

$$= \sqrt[r]{\frac{A'}{s}}.$$

Midőn A' és A_1 logarithmusai advák 2, 3, 4 ... logarithmusait kell kivonni A' és A_1 logarithmusaiból; melly kivonás után ha a' második maradvány az elsőnek épen kettőse lenne, hasonló módon $s = 2, 3, 4$ . . egyenlő való gyökeret fogunk következtetni; mellyek' logarithmusa

$$= \frac{1}{r} \cdot \left\{ \text{Log}\, A' - \text{Log}\, s \right\}.$$

'S itt észre lehet vennünk, mikép mi az 1) föltétel alatt az A' előszám által csak egy, itt ellenben a' 2) föltétel állván tudniillik, mindjárt s gyökeret nyertünk.

46. §.

Vizsgáljuk mármost a' 3dik esetet, midőn valamelly modulus nagyobb valamennyi gyökérnél 's egyébb modulusnál. Ez esetben lesz:

$$\begin{aligned} A' = - C_1 [& a', b', c' \ldots n', \\ & \varrho_1^r (\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1 \sqrt{-1}), \\ & \varrho_1^r (\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1 \sqrt{-1}), \\ & \varrho_2^r (\cos r\theta_2 + \sin r\theta_2 \sqrt{-1}), \\ & \varrho_2^r (\cos r\theta_2 - \sin r\theta_2 \sqrt{-1}), \\ & \ldots \ldots \ldots] \end{aligned}$$

avvagy ha a' képzeleti mennyiségeket kiválasztjuk:

$$\begin{aligned} A' = & - \varrho_1^r (\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\ & - \varrho_1^r (\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\ & - \varrho_2^r (\cos r\theta_2 + \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\ & - \varrho_2^r (\cos r\theta_2 - \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\ & \ldots \ldots \ldots \\ & - C_1 (a', b', c' \ldots n') \end{aligned}$$

avvagy

$$\begin{aligned} A' = & - 2\varrho_1^r \cos r\theta_1 - 2\varrho_2^r \cos r\theta_2 - \ldots \\ & - C_1 (a', b', c' \ldots n'), \end{aligned}$$

hol a' ϱ_1 modulus' számértéke nagyobb akármellyik ϱ_2, ϱ_3 . . . modulusnál, vagy

$$a, \; b, \; c \ldots n$$

való gyökér' számbeli értékénél. Midőn itt r növekszik, a' való gyökerek' legnagyobbika, teszem a olly túlnyomó lesz, hogy végtére

$$C_1 (a', \; b', \; c' \ldots n') = a^r$$

legyen. A' föltételnél fogva

$$\begin{aligned} \varrho_1 &> \varrho_2 \ldots \\ &> a \ldots \end{aligned}$$

levén, világos, hogy mindég lesz

$$\begin{aligned} 2\varrho_1^r &> 2\varrho_2^r \ldots \\ &> a^r \ldots \end{aligned}$$

Mármost az A' értéke nemcsak az a^r-tól függ, mi könynyen látható, hanem még inkább az

$$2\varrho_1^r \cos r\theta_1, \quad 2\varrho_2^r \cos r\theta_2 \ldots$$

tagoktól is, mellyeknek általános számértéke

$$\begin{aligned} &+ 2\varrho_1^r \text{ és } - 2\varrho_1^r \\ &+ 2\varrho_2^r \text{ és } - 2\varrho_2^r \\ &\ldots \qquad \ldots \end{aligned}$$

határok között ingadoz. Miből látható, hogy A'-nak ez esetben, r növekedtével, majd állítónak majd tagadónak, majd nagynak majd kicsinynek kell lennie, ugyanazon módon mint feljebb, midőn föltettük, hogy az adott fx egyenletnek csupa képzeleti gyökerei vannak.

Hasonló ingadozást fogunk tapasztalni, akár $\varrho_2 > a$, akár nála kisebb, miért is a' 4dik esetnek meghányását e' helyütt mellőzzük. Szinte ezt fogjuk tapasztalni az 5dik esetben is, minek részletesebb feszegetésével itt szinte felhagyunk.

Visszatekintvén mármost a' talált eredményekre, világos, hogy azokat a' következő szabályokba foglalhatni:

a) Midőn r növekedtével az A' előszám négyszögesen növekszik, akkor az adott fx egyenletnek mindenesetre egy de csak egy való gyökere van, akármelly más való gyökérnél vagy modulusnál nagyobb. Melly a-nak nevezhető gyökeret az A' előszámból könnyen találhatni, minthogy mindég

$$\pm a = \sqrt[r]{A'}$$

b) Midőn r növekedtével nem az A' előszám, hanem annak bizonyos része, tudniillik $\frac{A'}{s}$ növekszik négyszögek' módjára; akkor az adott fx egyenlet a' közelítés' pontosságához képest s egymással (számbeli értékre nézve egyenlő) való gyökérrel bír, melly akármelly más való gyökérnél vagy modulusnál nagyobb, 's mellynek mindegyike

$$\pm a = \sqrt[r]{\frac{A'}{s}}.$$

'S itt megjegyzendő, hogy s m-nél nagyobb nem lehet, különben pedig $= 2, 3, 4 \ldots$

c) Midőn r növekedtével A' ingadoz, majd állító majd tagadó, majd nagy majd meg kicsiny; akkor az adott egyenlet egy vagy több modulussal bír, melly a' való gyökereknél és többi modulusoknál, ezeket egyenként véve, nagyobb. Ez esetben tehát az A' előszámból értéket húzni nem lehet.

47 §.

Vizsgáljuk mármost a' második

$$B' = C_2\,(a', b', c' \ldots n')$$

előszámot, a feljebb specificált egyes esetekben. 'S ugyan is az elsőre nézve, midőn föltettük, hogy a való gyökér 's minden más való gyökérnél és modulusnál nagyobb, válaszszuk ki a'-t, lesz:

$$B' = a' C_1 (b', c' \ldots n') + C_2 (b', c' \ldots n')$$

's osszuk ármost e' kifejezést a'-val lesz:

$$\frac{B'}{a'} = C_1 (b', c' \ldots n') + \frac{1}{a'} \cdot C_2 (b', c' \ldots n').$$

A' b, $c \ldots n$ gyökerek valók és képzeletiek lehetvén

$$C_2 (b', c' \ldots n')$$

egyes tagjai nyilván vagy $k' l' \ldots$ idomúak lesznek, vagy pedig illyenek

$$k' \varrho_1^r (\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1 \sqrt{-1})$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

Minthogy azonban ez utóbbi esetben mindég egy

$$k' \varrho_1^r (\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1 \sqrt{-1})$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

alakú kitétel is fordúl elő, látni való, hogy két tagja a'

$$C_2 (b', c' \ldots n')$$

kifejezésnek, együtt véve mindég $= 2k' \varrho_1^r \cos r\theta_1$ alakú. Minthogy tehát a' föltételnél fogva a minden b, c.. való gyökérnél és modulusnál nagyobb, kitetszik, hogy r-nek növekedtével, minden tagja a'

$$C_2 (b', c' \ldots n')$$

kifejezésnek, ha a'-val osztatik, szükségképen fogy, úgy hogy végtére, r eléggé nagy levén,

$$\frac{B'}{a'} = C_1 (b', c' \ldots n')$$

legyen; mi által ezen második előszám vizsgálata az elsőéra van visszavive. A' mint tehát $\frac{B'}{a'}$'s illetőleg B', vagy annak bizonyos része négyszögesen növekedik, vagy pedig haboz, úgy azt fogjuk következtetni, hogy a után b vagy több $b = c = d$ .. gyökerek és pedig való gyökerek legnagyobbak, vagy pedig hogy egy vagy több modulus valamennyinél nagyobb, 'stb.

48. §.

A' második esetben, midőn két vagy több a, b .. h gyökér egymással egyenlő és nagyobb akármelly más való gyökérnél és modulusnál, lesz:

$$
\begin{aligned}
B' &= C_2(a', b', c' \ldots n') \\
&= a' C_1(b', c' \ldots n') + C_2(b', c' \ldots n') \\
&= a' C_1(b', c' \ldots n') + b' C_1(c', d' \ldots n') \\
&\qquad + C_2(c', d' \ldots n') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= a' C_1(b', c' \ldots n') + b' C_1(c', d' \ldots n') \\
&\qquad + c' C_1(d', e' \ldots n') \\
&\qquad + d' C_1(e', f' \ldots n') \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + g' C_1(h', i' \ldots n') \\
&\qquad + h' C_1(i', k' \ldots n') \\
&\qquad + i' C_1(k', l' \ldots n') \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

azaz minthogy

$$
\begin{aligned}
a' C_1(b', c' \ldots n') &= (s-1)\, a'^2 \\
b' C_1(c', d' \ldots n') &= (s-2)\, a'^2 \\
c' C_1(d', e' \ldots n') &= (s-3)\, a'^2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
g' C_1(h', i' \ldots n') &= a'^2
\end{aligned}
$$

's a' többi tagok, r eléggé nagy levén, hasonlólag enyésznek, kitetszik, hogy

$$B' = a'^2 . \left\{ 1 + 2 + 3 + .. + (s-1) \right\}$$

avvagy minthogy a' nagy rekesz alatti sor arithmeticai haladás:

$$B' = \frac{s\,(s-1)}{2} . a'^2 .$$

A' konnan kitetszik, hogy ez esetben a' B' előszám is csupán a-tól függ 's hogy belőle mind a-t mind pedig s-et találhatnók, ha az A' előszámból még nem találtuk volna.

49. §.

A' harmadik esetben, midőn valamelly modulus nagyobb valamennyi való gyökérnél 's egyéb modulusnál, válaszszunk ki a'

$$B' = C_2\,(a', b', c' \,..\, n')$$

kifejezésből két elemet, lesz a' 42 §. értelmében

$$B' = a'b' + (a'+b')\, C_1\,(c', d' \,..\, n') \\ + C_2\,(c', d' \,..\, n')$$

's legyen mármost

$$a = \varrho_1 (\cos\theta + \sin\theta \sqrt{-1})$$
$$b = \varrho_1 (\cos\theta - \sin\theta \sqrt{-1})$$

következőleg:

$$a' = \varrho_1^r (\cos r\theta + \sin r\theta \sqrt{-1})$$
$$b' = \varrho_1^r (\cos r\theta - \sin r\theta \sqrt{-1})$$

és innen:

$$a' + b' = 2\varrho_1^r \cos r\theta ,$$
$$a'b' = \varrho_1^{2r} .$$

Mindezekből lesz:

$$B' = \varrho_1^{2r} + 2\varrho_1^r \cos r\theta .\, C_1 (c', d' \ldots n')$$
$$+ C_2 (c', d' \ldots n') .$$

Legyenek mármost a' többi gyökerek valók vagy képzeletiek, csakhogy az első esetben ϱ_1-nél kisebbek, a' másodikban ϱ_1-nél kisebb modulussal ellátva 's kiviláglik mindjárt, hogy r növekedtével

$$B' = \varrho_1^{2r}$$

's innen

$$\varrho_1^2 = \sqrt[r]{B'} ;$$

mint feljebb találtatott azon esetben, midőn az fx adott egyenletnek csupán csak képzeleti gyökerei vannak. Ez esetben tehát az A' előszám ingadoz; de a' B' növekszik négyszögesen; mi ennél fogva arra mutat, hogy az adott fx egyenlet' valamelly modulusa nagyobb minden egyéb modulusnál vagy ugyanazon egyenlet' való gyökerénél, sőt útmutatásúl szolgál, a' szóban levő modulusok' kiszámítására.

50. §.

A' negyedik esetben két vagy több egyenlő modulus nagyobb valamennyi való gyökérnél vagy egyéb modulusnál.

Legyen tehát ismét

$$B' = C_2 (a', b', c' \ldots n')$$

's legyen csak négy a, b, c, d képzeleti gyökér, mellynek modulusa $= \varrho$; minél fogva tehát

$$a' = \varrho^r (\cos r\theta + \sin r\theta \sqrt{-1}) ,$$
$$b' = \varrho^r (\cos r\theta - \sin r\theta \sqrt{-1}) ,$$
$$c' = \varrho^r (\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) ,$$
$$d' = \varrho^r (\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) .$$

Ha mármost B'-ből két elemet kiválasztunk, lesz:

$$B' = a'b' + (a'+b').\ C_1(c',\ d' \ldots n') + C_2(c',\ d' \ldots n')$$

's a' kiválasztást c', d'-re kiterjesztve:

$$\begin{aligned} B' = a'b' &+ (a'+b').\ (c'+d') \\ &+ (a'+b').\ C_1(e',\ f' \ldots n') \\ +c'd' &+ (c'+d').\ C_1(e',\ f' \ldots n') \\ &+ C_2(e',\ f' \ldots n') \end{aligned}$$

azaz:

$$\begin{aligned} B' = a'b' + a'c' + a'd' + b'c' + b'd' + c'd' \\ + (a'+b'+c'+d').\ C_1(e',\ f' \ldots n') \\ + C_2(e',\ f' \ldots n') \end{aligned}$$

's végűl hacsak az első sort tartjuk meg, melly egyedűl túlnyomó, midőn r eléggé nagy:

$$B' = a'b' + a'c' + a'd' + b'c' + b'd'\ c'd'\ .$$

Mármost az előbbiből könnyen találtatik, hogy

$$\begin{aligned} a'b' &= \varrho^{2r} \\ a'c' &= \varrho^{2r}.\ \left(\cos r\ (\theta - \theta_1) + \sin r\ (\theta + \theta_1)\sqrt{-1}\right) \\ a'd' &= \varrho^{2r}.\ \left(\cos r\ (\theta + \theta_1) - \sin r\ (\theta - \theta_1)\sqrt{-1}\right) \\ b'c' &= \varrho^{2r}\ \left(\cos r\ (\theta + \theta_1) + \sin r\ (\theta - \theta).\sqrt{-1}\right) \\ b'd' &= \varrho^{2r}\ \left(\cos r\ (\theta - \theta_1) - \sin r\ (\theta + \theta_1).\sqrt{-1}\right) \\ c'd' &= \varrho^{2r}\ ; \end{aligned}$$

mellyeknek sommája tehát ez:

$$\begin{aligned} B' = 2\varrho^{2r} &+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta - \theta_1) \\ &+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta + \theta_1)\ . \end{aligned}$$

Ezen negyedik esetben tehát nemcsak A' hanem B' is ingadoz. Mert mi itt, egyes esetben négy egyenlő modulusra nézve bebizonyodott, az áll akkor is, midőn az egyenlő modulusok' száma egyáltalában $= 4$, 6, $8 \ldots 2n$

Nagyobb világosság' okáért származtassuk le azon esetet is, a' midőn az egyenlő modulusok' száma hat. Ekkor tehát lesz:

$$\begin{aligned} B' = a'b' &+ a'c' + a'd' + a'e' + a'f' \\ &+ b'c' + b'd' + b'e' + b'f' \\ &\qquad + c'd' + c'e' + c'f' \\ &\qquad\qquad + d'e' + d'f' \\ &\qquad\qquad\qquad + e'f'\,; \end{aligned}$$

's ha mármost

$$\begin{aligned} a' &= \varrho^r (\cos r\theta + \sin r\theta\sqrt{-1}), \\ b' &= \varrho^r (\cos r\theta - \sin r\theta\sqrt{-1}), \\ c' &= \varrho^r (\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1\sqrt{-1}), \\ d' &= \varrho^r (\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1\sqrt{-1}), \\ e' &= \varrho^r (\cos r\theta_2 + \sin r\theta_2\sqrt{-1}), \\ f' &= \varrho^r (\cos r\theta_2 - \sin r\theta_2\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

tétetik, lesz az előbbieken kivűl:

$$\begin{aligned} a'e' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta - \theta_2) + \sin r\,(\theta + \theta_2)\sqrt{-1}\right) \\ a'f' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta + \theta_2) - \sin r\,(\theta - \theta_2)\sqrt{-1}\right) \\ b'e' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta + \theta_2) + \sin r\,(\theta - \theta_2)\sqrt{-1}\right) \\ b'f' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta - \theta_2) - \sin r\,(\theta + \theta_2)\sqrt{-1}\right) \\ c'e' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta_1 - \theta_2) + \sin r\,(\theta_1 + \theta_2)\sqrt{-1}\right) \\ c'f' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta_1 + \theta_2) - \sin r\,(\theta_1 - \theta_2)\sqrt{-1}\right) \\ d'e' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta_1 + \theta_2) + \sin r\,(\theta_1 - \theta_2)\sqrt{-1}\right) \\ d'f' &= \varrho^{2r}\left(\cos r\,(\theta_1 - \theta_2) - \sin r\,(\theta_1 + \theta_2)\sqrt{-1}\right). \\ e'f' &= \varrho^{2r} \end{aligned}$$

mellyeknek sommája nyilván

$$\begin{aligned} \varrho^{2r} &+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta - \theta_1) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta + \theta_2) \\ &+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Miből kiviláglik, hogy hat egyenlő modulus' esetében

$$\begin{aligned} B' = 3\varrho^{2r} &+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta - \theta_1) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta + \theta_1) \\ &+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta - \theta_2) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta + \theta_2) \\ &+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Folytatván e' lehozást az olvasó könnyen meggyőződhetik, hogy t levén az egyenlő modulusok' száma, B' értéke mindég ez lesz:

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{2}\cdot\varrho^{2r} + 2\varrho^{2r}\cos(\theta-\theta_1) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta+\theta_1)\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta-\theta_2) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta+\theta_2)\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta-\theta_3) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta+\theta_3)\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta-\theta_{\frac{t}{2}-1}) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta+\theta_{\frac{t}{2}-1})\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1-\theta_2) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1+\theta_2)\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1-\theta_3) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1+\theta_3)\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1-\theta_{\frac{t}{2}-1}) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1+\theta_{\frac{t}{2}-1})\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_2-\theta_3) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_2+\theta_3)\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_2-\theta_{\frac{t}{2}-1}) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_2+\theta_{\frac{t}{2}-1})\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+ 2\varrho^{2r}\cos(\theta_{\frac{t}{2}-2}-\theta_{\frac{t}{2}-1}) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_{\frac{t}{2}-2}+\theta_{\frac{t}{2}-1}).
\end{aligned}$$

Melly kifejezésnek ingadozása szembetünő.

51. §.

Az ötödik eset az, midőn két vagy több gyökér a, b . . h és modulus ϱ_1, ϱ_2 . . ϱ_i egymással egyenlő és nagyobb minden más gyökérnél vagy modulusnál. Legyenek a' képzeleti gyökerek, mellyeknek modulusai ϱ_1, $\varrho_2 \ldots \varrho_i = \varrho$ ezek: $\alpha, \beta \ldots \zeta$. Ennél fogva lesz tehát

$$B' = C_2 (a', b' \ldots h', \alpha', \beta' \ldots \zeta', \\ i', k' \ldots n', \eta', \theta' \ldots \lambda')$$

hol $i, k \ldots n$ a' kisebb való gyökereket és $\eta, \theta \ldots \lambda$ a' kisebb modulusokat jelentik. Ezeket föltéve látjuk a' 42. §. tanításai szerint, hogy

$$B' = C_2 (a', b' \ldots h', \alpha', \beta' \ldots \zeta') \\ + C_1 (a', b' \ldots h', \alpha', \beta' \ldots \zeta'). C_1 (i', k' \ldots n', \eta', \theta' \ldots \lambda') \\ + C_2 (i', k' \ldots n', \eta', \theta' \ldots \lambda')$$

avvagy hacsak a' túlnyomó tagot tartjuk meg, hogy

$$B' = C_2 (a', b' \ldots h', \alpha', \beta' \ldots \zeta')$$

avvagy ugyanazon 42 §. tanításai szerint:

$$B' = C_2 (a', b' \ldots h') \\ + C_1 (a', b' \ldots h'). C_1 (\alpha', b' \ldots \zeta') \\ + C_2 (\alpha', \beta' \ldots \zeta).$$

Legyen u az

$$a', b' \ldots h' = \varrho^r$$

elemek' száma; akkor könnyen látható, hogy

$$C_2 (a', b' \ldots h') = \frac{u(u-1)}{2} . \varrho^{2r}.$$

Hasonlólag fog találtatni:

$$C_1 (a', b' \ldots h') = u . \varrho^{2r}$$

és ha t az $\alpha, \beta \ldots \zeta$ képzeleti gyökerek' száma, lesz

$$C_1 (\alpha', \beta' \ldots \zeta') = 2\varrho^{2r} \cos \theta_1 \\ + 2\varrho^{2r} \cos \theta_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + 2\varrho^{2r} \cos \theta_t ;$$

$C_2(\alpha', \beta' \ldots \zeta')$ értéke már az előbbi §ban találtatott. A' talált eredményeket együvé foglalván látható, hogy ez esetben

$$
\begin{aligned}
B' = {} & \frac{u(u-1)}{2} \cdot \varrho^{2r} \\
& + 2u\varrho^{4r} \cdot \cos\theta_1 \\
& + 2u\varrho^{4r} \cdot \cos\theta_2 \\
& + 2u\varrho^{4r} \cdot \cos\theta_3 \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + 2u\varrho^{4r} \cdot \cos\theta_{\frac{t}{2}} \\
& + \frac{t}{2} \cdot \varrho^{2r} \\
& + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 + \theta_2) \\
& + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 - \theta_3) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 + \theta_3) \\
& + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 - \theta_4) + 2\varrho^{2r}\cos(\theta_1 + \theta_4) \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
$$

mit az 50 §. utmutatása szerint folytatni lehet. Hogy ezen kifejezés hasonlólag ingadoz, magában világos.

52. §.

Mi eddig mondatott, mintegy bevezetésűl szolgálhat azoknak, miket most általánosabb szempontból mondandok, megérthetésére. Nem lehet tudniillik minden előszámot, a' felállított föltételekhez képest, külön vizsgálni 's mivoltából a' gyökerekre következtetéseket húzni; minthogy az esetek' bonyadalma sokkal nagyobb, mintsem hogy azt hasonló módon megfejteni lehetne.

Azért is tegyük fel, hogy mi az n első előszámból n gyökeret azaz vagy való gyökeret vagy modulust találtunk, 's vizsgáljuk ármost a' következő

$$C_{n+1}\,(a', b', c' \ldots n')$$
$$C_{n+2}\,(a', b', c' \ldots n')$$
$$C_{n+3}\,(a', b', c' \ldots n')$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$C_{p}\,(a', b', c' \ldots n')$$
$$C_{p+1}\,(a', b', c' \ldots n')$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

előszámokat; 's válaszszuk ki belőlök az n talált gyökeret vagy modulust, 's nevezzük ezeknek r-dik fokát a', b', $c' \ldots h'$-nak. Ezt föltéve lesz:

$$\begin{aligned} C_{n+1}\,(a', b', c' \ldots n') \\ = C_n\,(a', b', c' \ldots h').\ C_1\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-1}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_2\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-2}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_3\,(i', k', l' \ldots n') \end{aligned}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\begin{aligned} C_{n+2}\,(a', b', c' \ldots n') \\ = C_n\,(a', b', c' \ldots h').\ C_2\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-1}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_3\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-2}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_4\,(i', k', l' \ldots n') \end{aligned}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\begin{aligned} C_{n+3}\,(a', b', c' \ldots n') \\ = C_n\,(a', b', c' \ldots h').\ C_3\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-1}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_4\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-2}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_5\,(i', k', l' \ldots n') \end{aligned}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\begin{aligned} C_{p}\,(a', b', c' \ldots n') \\ = C_n\,(a', b', c' \ldots h').\ C_{p-n}\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-1}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_{p-n+1}\,(i', k', l' \ldots n') \\ + C_{n-2}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_{p-n+2}\,(i', k', l' \ldots n') \end{aligned}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$
\begin{aligned}
C_{p+1}\,&(a', b', c' \ldots n') \\
&= C_n\,(a', b', c' \ldots h').\ C_{p-n+1}\,(i', k', l' \ldots n') \\
&+ C_{n-1}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_{p-n+2}\,(i', k', l' \ldots n') \\
&+ C_{n-2}\,(a', b', c' \ldots h').\ C_{p-n+3}\,(i', k', l' \ldots n') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ha mármost az előszámokat és azoknak kifejtéseit a' talált $i, k \ldots n$-nél nagyobb gyökerek és modulusok' illető hatványaiknak sokszorozmányával, azaz

$$C_n\,(a', b', c' \ldots h') = a'b'c' \ldots h'$$

által osztjuk, 's csak a' befolyható tagokat tartjuk meg, magában világos, hogy lesz:

$$
\begin{aligned}
\frac{C_{n+1}\,(a', b' \ldots n')}{a'b'c' \ldots h'} &= C_1\,(i', k' \ldots n') \\
\frac{C_{n+2}\,(a', b' \ldots n')}{a'b'c' \ldots h'} &= C_2\,(i', k' \ldots n') \\
\frac{C_{n+3}\,(a', b' \ldots n')}{a'b'c' \ldots h'} &= C_3\,(i', k' \ldots n') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{C_p\,(a', b' \ldots n')}{a'b'c' \ldots h'} &= C_{p-n}\,(i', k' \ldots n') \\
\frac{C_{p+1}\,(a', b' \ldots n')}{a'b'c' \ldots h'} &= C_{p-n+1}\,(i', k' \ldots n');
\end{aligned}
$$

melly

$$
\begin{gathered}
C_1\,(i', k' \ldots n') \\
C_2\,(i', k' \ldots n') \\
C_3\,(i', k' \ldots n') \\
\ldots\ldots \\
C_{p-n}\,(i', k' \ldots n') \\
C_{p-n+1}\,(i', k' \ldots n')
\end{gathered}
$$

előszámokba, új előszámokba, miket $a'b'c' \ldots h'$ általi osztás' segítségével származtattunk le, mint magában világos, az a, b, c . . h gyökerek és modulusok nem folynak be, 's mellyekkel úgy lehet és kell bánni, mint az első

$$A' = - C_1 (a', b' \dots n')$$
$$B' = + C_2 (a', b' \dots n')$$
$$C' = - C_3 (a', b' \dots n')$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

előszámokkal.

Ezen általános vizsgálatból következik röviden az, hogy a' gyökérkivonás illy osztásak által egyes, alkatra nézve egymástól semmiben nem különböző cyclusokra oszlik, 's hogy minden gyökeret vagy modulust találhatni, mihelyt csak egy cyclust fejthetni meg; azaz mihelyest az első n előszámból álló cyclusnak valamennyi gyökereit és modulusait találhatni. Hogy pedig ezt lehet, akármilly gyökerei legyenek az első cyclusnak, a' következő §§. mutatandják meg.

53. §.

Első eset. Midőn az első cyclusnak egy való gyökere van, melly általános számértékre nézve akármelly más való gyökérnél vagy képzeletiek' modulusánál nagyobb.

Ez esetben azt találtuk feljebb a' 44 §-ban, hogy A, tudniillik a' cyclus' első előszáma négyszögesen növekszik; másodszor, hogy

$$a^r = A$$

(következőleg

$$\pm a = \sqrt[r]{A}\ );$$

és harmadszor, hogy a' cyclusnak ez esetben A'-nál vége is szakad (47 §.); minthogy

$$\frac{B'}{a'} = C_1 (b', c' \ldots n')$$

$$\frac{C'}{a'} = C_2 (b', c' \ldots n')$$

$$\frac{D'}{a'} = C_3 (b', c' \ldots n')$$

. . . .

általános számértékre tudniillik.

54. §.

Második eset. Nem olly egyszerű a' második eset' vizsgálata, midőn két vagy több $a, b \ldots h$ való gyökér egymással egyenlő és nagyobb akármelly más való gyökérnél vagy modulusnál.

Ez esetben, ha s jelöli az egyenlő $a, b \ldots h$ való gyökerek' számát, azt találtuk feljebb a' 45 §ban, hogy

$$A' = s a^r$$

a' honnan

$$\frac{A'}{s} = a^r$$

Ismertető jele ezen esetnek, hogy nem A', hanem ennek s-dik része növekszik négyszögesen; fele tehát, vagy harmad, negyed ... része, midőn $s = 2, 3, 4 \ldots$ Itt azonban el ne felejtsük soha, hogy s-nek okvetlenűl egész és $< m$ számnak kell lennie. Rendszerint nem az

$$A', B', C' \ldots N'$$

előszámok, hanem ezeknek logarithmusai kerestetvén, nyilvánvaló, hogy ez esetben Log A'-ból

$$\text{Log } 2, \ \text{Log } 3, \ \text{Log } 4 \ldots$$

kivonandók; mi megtörténvén A' egymásutáni logarithmusai kettőztettetni fognak. 'S valamint e' kettőztetés

$$\text{Log } 2, \ \text{Log } 3, \ \text{Log } 4 \ldots$$

kivonása után vétetik észre, úgy az egyenletnek 2, 3, 4 . . illy egymással egyenlő gyökere van.

A' cyclus ez esetben s tagra avvagy előszámra terjed, mit a' következőkből láthatni, hol azonban ismét csak a' számbeli értékekre leszünk tekintettel. Ugyanis

$$\begin{aligned} A' &= C_1 (a', b', c' \ldots n') \\ B' &= C_2 (a', b', c' \ldots n') \\ C' &= C_3 (a', b', c' \ldots n') \\ &\ldots\ldots\ldots \\ H' &= C_s (a', b', c' \ldots n') . \end{aligned}$$

Mármost ha ezekből mindenütt az s egyenlő elemet kiválasztjuk, lesz:

$$\begin{aligned} A' &= sa' + C_1 (i', k' \ldots n') \\ B' &= C_2 (a', b' \ldots h') + C_1 (a', b' \ldots h') . C_1 (i', k' \ldots n') \\ &\quad + C_2 (i', k' \ldots n') \\ C' &= C_3 (a', b' \ldots h') + C_2 (a', b' \ldots h') . C_1 (i', k' \ldots n') \\ &\quad + C_1 (a', b' \ldots h') . C_2 (i', k' \ldots n') \\ &\quad + C_3 (i', k' \ldots n') \\ H' &= C_s (a', b' \ldots h') + C_{s-1} (a', b' \ldots h') . C_1 (i', k' \ldots n') \\ &\quad + C_{s-2} (a', b' \ldots h') . C_2 (i', k' \ldots n') \\ &\quad + C_{s-3} (a', b' \ldots h') . C_3 (i', k' \ldots n') \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

'S ha itt csak az első, túlnyomó tagokra figyelünk és észrevesszük, mikép föltételünkhöz képest

$$C_2\,(a', b' \ldots h') = \frac{s(s-1)}{1\,.\,2}\,.\,a^{2r},$$

$$C_3\,(a', b' \ldots h') = \frac{s(s-1)(s-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,a^{3r},$$

$$C_4\,(a', b' \ldots h') = \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,a^{4r},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$C_s\,(a', b', \ldots h') = a^{sr}:$$

könnyű lesz átlátnunk, miszerint az egész s tagból álló cyclus' előszámai a-tól függnek; miután találtatott

$$A' = \binom{s}{1}.\,a^r,$$

$$B' = \binom{s}{2}.\,a^{2r},$$

$$C' = \binom{s}{3}.\,a^{3r}.$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$H' = \qquad a^{sr};$$

hol rövidség okáért

$$s = \binom{s}{1},$$

$$\frac{s(s-1)}{1\,.\,2} = \binom{s}{2},$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \binom{s}{3}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

sétetett.

A' cyclusnak előszámai ez esetben nem haboznak, hanem folyvást növekednek. Az a egyenlő gyökeret szint-olly könnyű a' cyclusnak első, mint utolsó tagjából találni. Tanácsos ellenőrségűl mind a' két módot követni. Az utóbbi szerint lesz:

$$\pm a = \sqrt[sr]{H'} .$$

Minthogy e' szerint tehát H'-nál a' cyclusnak vége van, nyilvánvaló, hogy épen ez a'

$$H' = a^{sr}$$

az, mivel a' következő előszámokat osztani kell, hogy az 52 §: értelmében új cyclusok keletkezzenek. Figyelemre méltó az is, hogy az egész cyclusban csak az utolsó H' előszám az, melly négyszögesen növekszik; mı alatt a' többi előszámoknak csak bizonyos részei és pedig nevezet szerint csak

$$\binom{s}{1},\ \binom{s}{2},\ \binom{s}{3},\ \binom{s}{4} \ldots$$

részei növekednek így.

Ha tehát valamelly egyenletben latjuk, hogy ingadozás (azaz más más előjegybe áttérés) nélkül az első A', B'.. előszámok ugyan nem, de valamelly H' előszám, melly az előszámok' sorában az s-dik, növekszik négyszögesen; akkor felfogjuk tenni, hogy az adott egyenletnek egy s egyenlő való gyökérből álló cyclusa van. Melly cyclust az előbbiek' nyomán részletesben vizsgálni, mint láttuk, igen könnyű.

55 §.

Harmadik eset, ha valamelly modulus nagyobb valamennyi való gyökérnél vagy egyéb modulusnál.

Ez esetben láttuk a' 46 §ban, hogy az első A' előszámnak ingadozni kell; a' 49 §ban ellenben kihoztuk, hogy a' második B' előszámból a' modulust magát igen könnyen le származtathatni. Minthogy tudniillik

$$B' = \varrho^{2r}$$

lesz:

$$\varrho = \sqrt[2r]{B'};$$

avvagy ha inkább a' modulus' négyszöge kerestetik, mi czélirányosabb, lesz:

$$\varrho^2 = \sqrt[r]{B'}.$$

A' cyclus ez esetben két tagból áll, mi onnan ered, hogy tulajdonkép nem egy modulus, hanem kettő, egymással egyenlő 's két összrendelt

$$\varrho\,(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})$$
$$\varrho\,(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})$$

kifejezéshez tartozó találtatik. A' cyclusnak ezen két tagjával vége szakad 's a' következő előszámokat, új cyclusok' keletkezése végett, B'-vel, azaz ismét a' cyclus' utóljával kell osztani. Már feljebb láttuk, hogy ezen második B' előszám négyszögesen növekszik. Ha tehát az első előszám ingadoz, a' második ellenben rendesen négszögek' módjára növekszik, mindég azt fogjuk következtetni, hogy e' cyclus' második előszámából (két) modulust találhatni, melly a' következő cyclusok' való gyökereinél vagy modulusainál számbeli értékre nézve nagyobb.

56. §.

Negyedik eset. Ez esetben két vagy több (pár) modulus nagyobb akármelly való gyökérnél vagy egyéb modulusnál.

Legyen $\frac{t}{2}$ pár illy modulusa az adott fx egyenletnek; akkor a' cyclus t tagból fog állani, a' $t-1$ első tag folyvást ingadozni, az utolsó t-dik pedig négyszögesen fog növekedni; melly utolsó egyszersmind

$$= \varrho^{tr}$$

lesz.

Mi az első és második tag' ingadozását illeti, ezekről már feljebb a' 46 és 50 §§ban szóllottunk. Legyen e' cyclusnak valamelly előszáma

$$= C_p\,(a', b', c' \ldots n')$$

's legyen először $p > t$; 's legyenek $a, b \ldots h$ képzeleti gyökerek és pedig ollyanok, mellyek a' feltételnek megfelelnek. Ezt föltéve lesz:

$$\begin{aligned} & C_p\,(a', b', c' \ldots n') \\ = & \; C_p\,(a', b', c' \ldots h') \\ & + C_{p-1}\,(a', b', c' \ldots h') .\; C_1\,(i', k', l' \ldots n') \\ & + C_{p-2}\,(a', b', c' \ldots h') .\; C_2\,(i', k', l' \ldots n') \\ & + C_{p-3}\,(a', b', c' \ldots h') .\; C_3\,(i', k', l' \ldots n') \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + C_p\,(i', k', l' \ldots n') \end{aligned}$$

avvagy kihagyván a' kisebb tagokat

$$C_p\,(a', b', c' \ldots n') = C_p\,(a', b', c' \ldots h') \,.$$

Minthogy mármost

$$\begin{aligned} a' &= \varrho_1^r . (\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\ b' &= \varrho_1^r . (\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\ c' &= \varrho_2^r . (\cos r\theta_2 + \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\ d' &= \varrho_2^r . (\cos r\theta_2 - \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

könnyen át lehet látni, hogy a' szóban levő előszámnak, midőn $p > t$ kivétel nélkül olly tagjai is lesznek, mellyek

$$\operatorname{Cos} r\zeta_1 , \quad \cos r\zeta_2 , \quad \cos r\zeta_r \ldots$$

kifejezésekkel sokszorozva az ingadozást nyilván mutatják.

Ellenben midőn $p = t$, lesz

$$C_p (a', b', c' \ldots n') = C_t (a', b', c' \ldots h')$$
$$= \varrho^{2r} \cdot \varrho^{2r} \cdot \varrho^{2r} \ldots .$$

melly sokszorozmányban ϱ^{2r} annyiszor fordúl elő, mint mondott tulajdonságú pár képzeleti gyökere van a' cyclusnak: a' honnan látható, hogy

$$C_t (a', b', c' \ldots) = \varrho^{tr};$$

mint feljebb állíttatott. Legyen tehát egy illyen t tagból álló cyclusnak utolsó előszáma H', lesz nyilván

$$H' = \varrho^{tr}$$

és innen

$$\varrho = \sqrt[tr]{H'},$$

vagy ha kivánatosabbnak találtatnék:

$$\varrho^2 = \sqrt[\frac{tr}{2}]{H'}.$$

Hogyha tehát valamelly cyclusnak valamennyi tagja, az utolsót kivéve, ingadoz; ha továbbá ezen cyclus páros számú tagokból áll, 's utolsó tagja négyszögesen növekszik: akkor föl lehet tenni, hogy ezen cyclusnak $\frac{t}{2}$ pár olly képzeleti gyökere van, mellyeknek modulusai egymással egyenlők. Föl lehet tenni, mondom, mert a' következő §ban mindjárt látni fogjuk, hogy egy vagy több pár való gyökerei is lehetnek az egyenletnek, olylyanok, mellyeknek számbeli értéke a' szóban forgó modulusokkal megegyez. De erről alább.

Az előhozottakból kiviláglik az is, hogy ismét az utolsó H' előszámmal kell a' következő előszámokat osztani, a' végett, hogy új cyclusok támadjanak.

Ezen negyedik eset kivált az ingadozás által különbözteti meg magát a' második esettől.

57. §.

Ötödik eset. Ez esetben több (egy vagy több) való gyökere van az adott egyenletnek több (egy vagy több pár) modulussal egyenlő 's valamennyi más való gyökérnél vagy modulusnál nagyobb.

Legyen a' mondott tulajdonságú való gyökereknek és modulusoknak (ezeket egyenként véve) száma t; akkor hasonló okoskodásnál fogva, mint az előbbi §ban meg lehet mutatni, hogy a' cyclusnak szinte t tagja van, hogy ennek valamennyi tagja, az utolsót kivéve ingadoz és hogy csak ezen utolsó növekszik négyszögesen. A'

$$C_p\,(a', \; b', \; c' \ldots n') = C_p\,(a', \; b', \; c' \; . \; . \; h')$$

egyenlet itt is áll, csakhogy az

$$\begin{array}{l} \varrho_1^r\,(\cos r\theta_1 + \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\ \varrho_1^r\,(\cos r\theta_1 - \sin r\theta_1 \sqrt{-1}) \\ \varrho_2^r\,(\cos r\theta_2 + \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\ \varrho_2^r\,(\cos r\theta_2 - \sin r\theta_2 \sqrt{-1}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

kifejezéseken kivül itt következő alakúakat

$$\begin{array}{l} \varrho_i^r\,(\cos r\theta_i + \sin \theta \sqrt{-1}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

is kell felvenni, mellyeknek összrendelt

$$\begin{array}{l} \varrho_i^r\,(\cos r\theta_i - \sin r\theta_i \sqrt{-1}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array}$$

kifejezéseik nincsenek, 's mellyekben $\theta_i \ldots = 0$. Magában világos dolog, hogy ezen utolsók a' való gyökerekeknek képviselői.

Ezeket előre bocsátván, hasonló okoskodás által, mint az előbbi §ban, könnyen meg lehet győződni, hogy ez esetben is, valamig $p < t$, a'

$$C_p\ (a', b', c' \ldots h')$$

kifejtésében hasonlag olly tagoknak kell lenni, mellyek cosinusokkal sokszorozva, az előszámokat ingadozóvá teszik. Valamint más részről látható az is, hogy az utolsó előszám

$$H' = \varrho^{tr}$$

épen úgy, mint a' mondott §ban.

Mindezeket szem előtt tartva meg kell győződnünk, hogy a' jelen ötödik és a' negyedik §. között lényeges különbség csak annyiban létez, mennyiben t mint páratlan szám okvetlenűl legalább egy való gyökérre utal, melly több modulussal e' cyclusban egyenlő.

Ha tehát az első, második ... előszámok ingadoznak, és csak a' t-dik növekszik a' már többször érintett négyszöges módon; akkor legalább egy pár képzeleti gyökeret, 's ha t páratlan szám, legalább egy való gyökérre húzhatni következtetést. A' többieket természetökre nézve a' cyclus' mivolta szerint meghatározni teljes lehetetlen; de e' helyütt nem is szükséges. Modulusoknak fogjuk tehát azokat minden különbség nélkül tekinteni, míg alkalmunk lesz a' képzeletieket a' valóktól igen könnyű szerrel elválasztani.

A' cyclus' utulsó előszáma ismét adja a' közös

$$\varrho = \sqrt[tr]{H'},$$

vagy

$$\varrho^2 = \sqrt[\frac{tr}{2}]{H'}$$

nagyságot, mellyben t a' czclus' tagjainak számát jelenti; és világos, hogy új cyclusok' keletkezte végett, ugyanezen, tehát ismét a' cyclusi utólsó H' előszámmal kell a' következő előszámokat osztani.

58 §.

Ha tehát első cyclusnak nevezzük azon előszámok' sorát, mellynek utolsója négyszögesen növekszik, a' többiek más törvényt követvén —— valamint egyáltalában cyclusnak nevezendjük azon egymásra következő előszámok' összeségét, melly egy négyszögesen növekedő előszám után kezdődvén a' legelső hasonlag növekedő számban határozódik —; akkor az előbbiek' nyomán a' szóban forgó első cyclusra nézve a' következő szabályokat állíthatni fel:

A) Midőn a' cyclus csupán egy tagból áll, azaz mindjárt az első előszám, ingadozók vagy rendetlenűl növekedők' megelőzése nélkül, követi a' négyszöges növekvés' törvényét —; ekkor a' cyclusból és pedig ennek egyetlen (tehát utolsónak is tekinthető) tagjából az r-dik gyökeret kell kivonni, hogy e' cyclusnak egyetlen való gyökerét megkaphassuk; azaz U'-nak nevezvén e' cyclus' egyetlen (utolsó) tagját, lesz a' keresett gyökér

$$\pm a = \sqrt[r]{U'} \, .$$

B) Midőn a' cyclus több ágból áll. Ekkor az utolsó előtti tagok vagy ingadoznak vagy nem.

α) Különösen midőn az előszámok, az utolsót kivéve ingadozás nélkül csak rendetlenűl nőnek, a' cyclus' utolsó előszámából az r-dik gyökeret kivonván kapjuk az egyenlő való gyökérnek azon fokát, melly a' cyclus' tagjai' számának megfelelvén egyszersmind mutatja, hányszor fordúl elő a' mondott egyenlő gyökér. Nevezzük ismét az utolsó tagot U'-nak 's legyen a' többször előfordúló gyökér a 's a' cyclus' tagjainak száma t, lesz:

$$\pm a^t = \sqrt[r]{U'} ;$$

miből

$$\pm a = \sqrt[tr]{U'} .$$

Ellenőrségűl azonban a' cyclus' első tagját is kell taglalat alá venni, mellynek, mint a' fennebbiekből tudjuk ta^r-nek kell lenni.

β) Midőn az előszámok, a' cyclus' utolsóját természetesen kivéve, nyilván ingadoznak, a' cyclusnak mindenesetre legalább két egyenlő modulusa van, egy pár összrendelt képzeleti gyökérhez tartozó; 's ezen kivűl, midőn a' cyclus' tagjainak száma páratlan, legalább egy való gyökere is, a' mondott modulussal számértékben egyenlő. Ezeket betudva, általában annyi egymással egyenlő modulusa 's részint való gyökere lesz a' cyclusnak, a' hány tagja. Nevezvén tehát az utolsó tagot ismét U'-nak, a' cyclus' tagjainak számát t-nek, lesz a' keresett (többször azaz épen t-szer előfordúló) modulus' vagy való gyökér' értéke

$$\pm a = \sqrt[tr]{U'} ,$$

épen úgy mint feljebb az egyenlő való gyökereknél; csakhogy itt tudni való, hogy a, mennyiben modulust jelöl, tagadó nem lehet.

59 §.

Legyen valamelly φx egyenletnek (ollyannak t. i. melly az fx' gyökereit az r-dik fokra emelve birja) n cyclusa 's legyenek ezen cyclusok' utolsó tagjai egymásután ezek:

$$U'_1,\ U'_2,\ U'_3\ \ldots\ U'_{n-1},\ U'_n$$

's legyenek az φx egyenlet' elöszámai, mellyek ezen tagoknak megfelelnek:

$$H'_1,\ H'_2,\ H'_3\ \ldots\ H'_{n-1},\ H'_n;$$

akkor a' cyclus' értelmezése szerint:

$$U'_1 = H'_1,$$

$$U'_2 = \frac{H'_2}{H'_1},$$

$$U'_3 = \frac{H'_3}{H'_1\ U'_2}$$

$$U'_4 = \frac{H'_4}{H_1\ U'_2\ U'_3}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$U'_{n-1} = \frac{H'_{n-1}}{H'_1\ U'_2\ U'_3 \ldots U'_{n-2}}$$

$$U'_n = \frac{H'_n}{H_1\ U'_2\ U_3 \ldots U_{n-1}}$$

azaz:

$$U'_1 = H'_1,$$

$$U'_2 = \frac{H'_2}{H'_1},$$

$$U_3 = \frac{H'_3}{H'_2},$$

$$U_4 = \frac{H'_4}{H'_3},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$U'_{n-1} = \frac{H'_{n-1}}{H'_{n-2}},$$

$$U'_n = \frac{H_n}{H'_{n-1}}.$$

Az első összeállításból következik:

$$U'_1 = H'_1,$$
$$U'_1\ U'_2 = H'_2,$$
$$U'_1\ U'_2\ U'_3 = H'_3,$$
$$U'_1\ U'_2\ U'_3\ U'_4 = H'_4,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$U'_1\ U'_2\ U'_3\ .\ U'_{n-1} = H'_{n-1},$$
$$U'_1\ U'_2\ U'_3 \ldots U'_n = H'_n;$$

a' miből látható, hogy az

$$U'_1,\ U'_2,\ U'_3 \ldots U'_{n-1},\ U'_n$$

cyclusi utolsó tagoknak megfelelő

$$H'_1,\ H'_2,\ H'_3 \ldots H'_{n-1},\ H'_n$$

előszámok is nőnek szükségképen négyszögesen, miután amazok nőnek így. Nem szükséges tehát osztás által határozni meg az egyes cyclusok' tagjainak számát, sőt ezt minden előleges változtatás nélkül mindjárt a'

$$H'_1,\ H'_2,\ H'_3 \ldots H'_{n-1},\ H'_n$$

előszámok' mivolta mutatja. A' második összeállítás pedig világosan mutatja, hogy a' cyclusi utolsó tagot egyszerűen a' hozzájok tartozó H'-nak az ezelőtt álló H' általi osztása segítségével kapni 's hogy így minden cyclust, akár a' középsők' egyikét akár az utolsót, a' többiektől függetlenűl vizsgálhatni. Sőt a' gyökereket is, egymástól függetlenűl húzhatni ki. Ha például valamelly egyenlet' legnagyobb vagy legkisebb gyökere kivántatnék, úgy az első vagy utolsó cyclust kellene vizsgálni.

Mindez reménylem világosabb lesz a' következő példa által.

Legyen

$$fx = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

tehát:

2-dik fok:

$$x^7 + 4x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 29x^3 - 14x^2 - 23x + 36$$

4-dik fok:

$$x^7 + 20x^6 + 78x^5 + 54x^4 + 589x^3$$
$$+ 1386x^2 + 1537x + 1296$$

8-dik fok (az előszámok' logarithmusokban):

$$x^7 + 2{\cdot}38739\,x^6 + 3{\cdot}70774\,x^5 - 4{\cdot}56350\,x^4$$
$$+ 5{\cdot}58565\,x^3 + 5{\cdot}39859\,x^2 - 6{\cdot}08996\,x + 6{\cdot}22522;$$

16-dik fok:

$$x^7 + 4{\cdot}69313\,x^6 + 7{\cdot}64995\,x^5 - 9{\cdot}39198\,x^4$$
$$+ 11{\cdot}18557x^3 + 11{\cdot}94810x^2 + 11{\cdot}82750x + 12{\cdot}45044;$$

32-dik fok:

$$x^7 + 9{\cdot}37002\,x^6 + 15{\cdot}34998\,x^5 - 18{\cdot}87658\,x^4$$
$$+ 22{\cdot}44623x^3 + 23{\cdot}75387x^2 - 24{\cdot}65849x + 24{\cdot}90088$$

64-dik fok:

$$x^7 + 18{\cdot}73971\,x^6 + 30{\cdot}70300\,x^5 - 37{\cdot}83535\,x^4$$
$$+ 44{\cdot}89718x^3 + 47{\cdot}76037x^2 + 49{\cdot}06887x + 49{\cdot}80176$$

128-dik fok:

$$x^7 + 37{\cdot}47942\,x^6 + 61{\cdot}40601\,x^5 - 75{\cdot}51594\,x^4 + 89{\cdot}79441\,x^3 + 95{\cdot}49582\,x^2 + 97{\cdot}80854\,x + 99{\cdot}60352$$

256-dik fok:

$$x^7 + 74{\cdot}95884\,x^6 + 122{\cdot}81202\,x^5 - 151{\cdot}32153\,x^4 + 179{\cdot}58882\,x^3 + 190{\cdot}99129\,x^2 + 195{\cdot}21132\,x + 199{\cdot}20704\,.$$

Ezentúl valamennyi előszám az x^4 és x-én kivűl négyszögesen nő, a' honnan kitetszik, hogy az adott egyenlet öt cyclusra szakad, mellyeknek megfelelőleg azt függönyös vonásokkal illy részekre oszthatni:

$$x^7 + 74{\cdot}95884\,x^6 \,|\, + 122{\cdot}81202\,x^5 \,|\, - 151{\cdot}32153\,x^4 + 179{\cdot}58882\,x^3 \,|\, + 190{\cdot}99129\,x^2 \,|\, + 195{\cdot}21132\,x + 199{\cdot}20704 \,|\, = 0.$$

Az első, második és negyedik cyclusból nyilván csak egyegy való gyökér fog következni; a' harmadik és utolsóból, minthogy x^4 és x előszámai ingadoznak egyegy pár képzeleti gyökerek' modulusa. Itt a' mondottak következtében

$$\begin{aligned} \text{Log}\,H_1' &= 74{\cdot}95884\,; \\ \text{Log}\,H_2' &= 122{\cdot}81202\,; \\ \text{Log}\,H_3' &= 179{\cdot}58882\,; \\ \text{Log}\,H_4' &= 190{\cdot}99129\,; \\ \text{Log}\,H_5' &= 199{\cdot}20704\,. \end{aligned}$$

Ha mármost például a' 3dik cyclusból folyó nagyobb modulus kivántatnék csak, lenne

$$U_3' = \frac{H_3'}{H_2'}$$

következőleg

$$\text{Log}\,U_3' = 56{\cdot}77680$$

's U_3'-ból a' $tr = 2 \times 256 = 512$-dik gyökeret kivonván: $\text{Log}\, a = 0{\cdot}110892$
azaz:

$$a = 1{\cdot}2909$$

avvagy ha inkább a' modulusnak négyszöge tetszenék

$$a^2 = 1{\cdot}6664\,.$$

Ha például a' negyedik cyclusból a' való gyökerek' legkisebbike tetsz nék, lenne:

$$U_4' = \frac{H_4'}{H_3}\,.$$

következőleg

$$\text{Log}\, U_4' = 11{\cdot}40247\,;$$

és ebből

$$\text{Log} \pm a = 0{\cdot}044541$$

következőleg a' keresett gyökér maga

$$a = \pm\, 1{\cdot}10800\,.$$

60. §.

Az egyenlő való gyökerekre nézve meg kell jegyeznünk, hogy néha egyenlőknek mutatkoznak ollyanok is, mellyek csak a' használt logarithmusok' határai között azok. Midőn például az:

$$A',\ B',\ C' \ldots M',\ N'$$

előszámok' lehozásában 5 jegyű logarithmusok használtatnak, akkor mind azon való gyökerek, mellyek csak a' 6-dik vagy 7-dik 'stb jegyekben különböznek egymástól, egyenlőknek fognak tetszeni. 'S nincs is criteriumunk, melly az egyenlő- vagy egyenetlenséget illy esetben kimutassa. Illyenkor tehát tanácsosabb volna nem logarithmusokkal, hanem számokkal vinni véghez az

$$A', \; B', \; C' \; . \; . \; . \; M', \; N'$$

meghatározásához megkivántató számolásokat, miben természetesen a' rövidített sokszorozással kellene élnünk és pedig úgy, mikép azt a' végeredmény' pontossága megkivánja.

Ha például a' következő egyenletet

$$fx = x^5 - 82x^4 + 2404x^3 - 26394x^2 + 6132x - 360$$

fejtegetjük 5 jegyű logarithmusokkal, két egyenlő való gyökeret találunk, melly azonban, mint kiki számolás által meggyőződhetik, nem egészen egyenlő, az egyik 0·11805 64402; a' másik 0·11805 69839 levén *)

Minthogy azonban előre rendszerint nem tudjuk, valljon egyenlő való gyökerei lesznek-e az egyenletnek 's bajos lenne a' munkát elől kezdeni, és pedig logarithmusok' segítsége nélkül, igen kivánatos olly számolási móddal birnunk, melly a' már meglevő

$$A', \; B', \; C' \; . \; . \; . \; M', \; N'$$

logarithmusaiból származtatja le az igazításokat, egyet, midőn a' gyökerek az igazítás' határain belől is egyenlők, különbözőket pedig, midőn azok a' mondott határokon belől egymástól különböznek.

61. §.

Tudjuk hogy

$$fx = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - n) = 0$$

azon föltétel alatt, hogy $a, b, c \ldots n$ gyökerei az adott fx egyenletnek. Tétessék mármost ezen egyenletbe x helyébe $\alpha + \Delta\alpha_1$ lesz:

*) L. Beitrag zur Auflösung der höheren Gleichungen. 116 's köv. II.

$$f(\alpha + \triangle\alpha) = \begin{array}{l} (\alpha - a + \triangle\alpha) \\ \times (\alpha - b + \triangle\alpha) \\ \times (\alpha - c + \triangle\alpha) \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \times (\alpha - n + \triangle\alpha) \end{array}$$

Ha mármost az egyes sokszorzókat itt

$$\begin{array}{c} \alpha - a \\ \alpha - b \\ \alpha - c \\ . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha - n \end{array}$$

által sokszorozzuk és osztjuk, minthogy ez által értékök nem változik lesz

$$(\alpha - a + \triangle\alpha) = (\alpha - a).\left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}\right\},$$

$$(\alpha - b + \triangle\alpha) = (\alpha - b).\left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b}\right\},$$

$$(\alpha - c + \triangle\alpha) = (\alpha - c).\left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - c}\right\},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(\alpha - n + \triangle\alpha) = (\alpha - n).\left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right\}$$

következőleg lesz:

$$f(\alpha + \triangle\alpha) = (\alpha - a).(\alpha - b)\ .\ .\ .\ (\alpha - n)$$

$$\times \left(1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}\right).\left(1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b}\right) \ .\ .\ .\ .$$

$$\times \left(1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right)$$

avvagy minthogy

$$(\alpha - a).\ (\alpha - b).\ (\alpha - c)\ \ldots\ (\alpha - n) = f\alpha\,,$$

miről könnyen meg lehet győződni az

$$fx = (x - a)\ (x - b)\ (x - c)\ \ldots\ (x - n)$$

kitételbe x helyébe α-t tevén, világoz hogy lesz

$$f(\alpha + \triangle\alpha) = f\alpha. \left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}\right\}. \left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b}\right\} \ldots$$

$$\times \left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right\}.$$

Mármost a' sokszorozás' törvényeinél fogva könnyen találtatik:

$$\left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}\right\}. \left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b}\right\} \ldots \times \left\{1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right\}$$

$$= 1 + C_1 \left\{\frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}, \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b} \ldots \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right\}$$

$$+ C_2 \left\{\frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}, \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b} \ldots \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right\}$$

$$+ C_3 \left\{\frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}, \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b} \ldots \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ C_m \left\{\frac{\triangle\alpha}{\alpha - a}, \frac{\triangle\alpha}{\alpha - b} \ldots \frac{\triangle\alpha}{\alpha - n}\right\}$$

$$= 1 + C_1 \left\{\frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \ldots \frac{1}{\alpha - n}\right\}. \triangle\alpha$$

$$+ C_2 \left\{\frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \ldots \frac{1}{\alpha - n}\right\}. \triangle\alpha^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ C_m \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdots \frac{1}{\alpha - n} \right\} . \Delta\alpha^m$$

Minthogy tehát egyfelől

$$f(\alpha + \Delta\alpha) = f\alpha + f\alpha . C_1 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} . \Delta\alpha$$

$$+ f\alpha . C_2 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} . \Delta\alpha^2$$

$$+ f\alpha . C_3 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} . \Delta\alpha^3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ f\alpha . C_m \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} . \Delta\alpha^m ;$$

másfelől meg Taylor' tétele szerint

$$f(\alpha + \Delta\alpha) = f\alpha + f'\alpha . \Delta\alpha + \frac{f''\alpha}{1.2} . \Delta\alpha^2$$

$$+ \frac{f'''\alpha}{1.2.3} . \Delta\alpha^3 + \ldots + \frac{f^{(m)}\alpha}{1.2..m} . \Delta\alpha^m ;$$

lesz:

$$f\alpha . C_1 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} = f'\alpha ,$$

$$f\alpha . C_2 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} = \frac{f''\alpha}{1.2} ,$$

$$f\alpha . C_3 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} = \frac{f'''\alpha}{1.2.3} ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f\alpha . C_m \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \cdot\cdot \frac{1}{\alpha - n} \right\} = \frac{f^{(m)}\alpha}{1.2.3..m} ;$$

a' honnan:

$$C_1\left\{\frac{1}{\alpha-a},\ \frac{1}{\alpha-b}\cdots\frac{1}{\alpha-n}\right\}=\frac{f'\alpha}{f\alpha},$$

$$C_2\left\{\frac{1}{\alpha-a},\ \frac{1}{\alpha-b}\cdots\frac{1}{\alpha-n}\right\}=\frac{f''\alpha}{1.2\,f\alpha},$$

$$C_3\left\{\frac{1}{\alpha-a},\ \frac{1}{\alpha-b}\cdots\frac{1}{\alpha-n}\right\}=\frac{f'''\alpha}{1.2.3\,f\alpha},$$

. . . .

$$C_m\left\{\frac{1}{\alpha-a},\ \frac{1}{\alpha-b}\cdots\frac{1}{\alpha-n}\right\}=\frac{f^{(m)}\alpha}{1.2..m\,f\alpha}.$$

62. §.

Mármost midőn α egy közel értéke például a-nak, de csak a-nak, nyilvánvaló, hogy ekkor $\alpha - a$ egy csekély mennyiség lesz, mig a' többiek

$$\alpha - b,\ \alpha - c,\ \alpha - d\ .\ .\ \alpha - n$$

mind nagyok lesznek, és megfordítva

$$\frac{1}{\alpha - a}$$

nagy lesz, a' többiek, úgymint

$$\frac{1}{\alpha-b},\ \frac{1}{\alpha-c},\ \frac{1}{\alpha-d}\cdots\frac{1}{\alpha-n}$$

kicsinyek. E' föltétel alatt látható, hogy csak az

$$\frac{f'\alpha}{f\alpha}=C_1\left\{\frac{1}{\alpha-a},\ \frac{1}{\alpha-b}\cdots\frac{1}{\alpha-n}\right\}$$

mennyiség bir nyomatékkal, a' többiek, úgymint

$$\frac{f''\alpha}{1.3\,f\alpha},\ \frac{f'''\alpha}{1.2.3\,f\alpha}\cdots\frac{f^{(m)}\alpha}{1.2..m\,f\alpha}$$

ellenben nem. Miből látható, hogy $\triangle\alpha$ is apró levén, az

$$f(\alpha + \triangle\alpha) = f\alpha + f'\alpha . \triangle\alpha + \frac{f''\alpha}{1.2} . \triangle\alpha^2 + \ldots$$

kifejezésnek két első tagjából valódi igazítást kaphatni. Melly alkalommal tehát

$$f\alpha - f'\alpha . \triangle\alpha = 0$$

tétetvén, az igazítás, mint tudatik

$$\triangle\alpha = -\frac{f\alpha}{f'\alpha},$$

(L. feljebb 11 §).

Másként áll a' dolog, midőn α nemcsak a-hoz, hanem b-hez is közelít; midőn tehát vagy két ismételt vagy egymáshoz ugyan közel eső, de még is egyenetlen gyökere van az egyenletnek. Ez esetben

$$\frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b}$$

nagyok,

$$\frac{1}{\alpha - c}, \frac{1}{\alpha - d} \ldots \frac{1}{\alpha - n}$$

ellenben kicsinyek levén, nyilvánvaló, hogy nyomatékossággal nemcsak

$$\frac{f'\alpha}{f\alpha} = C_1 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \ldots \frac{1}{\alpha - n} \right\}$$

hanem

$$\frac{f''\alpha}{1.2 f\alpha} = C_2 \left\{ \frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b} \ldots \frac{1}{\alpha - n} \right\}$$

is fog birni. Ekkor tehát az $f(\alpha + \triangle\alpha)$ kifejtéséből három tagot veendünk, mellynél fogva lesz:

$$f\alpha + f'\alpha . \triangle\alpha + \frac{f''\alpha}{1.2} . \triangle\alpha^2 = 0;$$

miből igazításul következik:

$$\Delta\alpha = -\frac{f'\alpha}{f''\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{f'\alpha}{f''\alpha}\right)^2 - \frac{2f\alpha}{f''\alpha}}.$$

Midőn itt 1) a' gyökérjegy alatti mennyiség $= 0$, kitetszik, hogy a' $\Delta\alpha$ igazításnak csak egy értéke lesz. Ekkor tehát az a, b gyökerek ezen igazítás' pontosságának határai között is egyenlők lesznek. De 2) midőn a' gyökérjegy alatti mennyiség > 0, azaz állító, ekkor nyilvánvaló, hogy a' $\Delta\alpha$ igazításnak két egymástól különböző értéke lesz; 's egyike ezen értékeknek a-hoz, másika b-hez tartozik. Ha tehát a és b egyenlőkűl tüntek volna fel, az igazítás által el volnának azok választva egymástól. Sőt 3) meglehet, hogy a' gyökérjegy alatti mennyiség < 0, azaz tagadó, mi annak a' jele, hogy a' kérdéses két gyökér valóban képzeleti, hanem olly képzeleti részszel, hogy ezt csak most vehetni észre.

63. §.

Folytatván ezen okoskodást, legyen α három a, b, c gyökérhez közel, tehát

$$\frac{1}{\alpha - a}, \frac{1}{\alpha - b}, \frac{1}{\alpha - c}$$

nagyok, a' többi

$$\frac{1}{\alpha - d}, \frac{1}{\alpha - e} \cdots \frac{1}{\alpha - n}$$

ellenben kicsinyek. Ekkor tehát $f(\alpha + \Delta\alpha)$ kifejezésének négy tagját kell vennünk, mihez képest lesz:

$$f\alpha + f'\alpha.\Delta\alpha + \frac{f''\alpha}{1.2}.\Delta\alpha^2 + \frac{f'''\alpha}{1.2.3}.\Delta\alpha^3 = 0;$$

melly egyenlet' megfejtéséből következnek az igazítások. 'S midőn itt mind a' három $\triangle\alpha$ egymással egyenlő (tehát való is), kitetszik, hogy az a, b, c gyökerek ezen igazítás' határai között is egyenlők. Midőn ellenben a' $\triangle\alpha$ három való értéke eltér egymástól, a' közel eső gyökerek ezen igazítások által elválasztatnak egymástól. Meglehet, hogy csak két való $\triangle\alpha$ egyenlő egymással. Ekkor tehát két gyökér az igazítás' határai között is egyenlő marad. Meglehet, hogy két $\triangle\alpha$ képzeleti; mi arra mutat, hogy az egyenlőknek hitt való gyökerek között két (összrendelt) képzeleti vala, természetesen csekély képzeleti részszel.

És általában, midőn az adott fx megfejtése n egyenlő való gyökérre vezet, e' gyökerek igazításait az

$$fa + f'a.\ \triangle\alpha + \frac{f''a}{1.2}.\ \triangle\alpha^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}a}{1.2..(n-1)}.\ \triangle\alpha^{n-1} + \frac{f^{(n)}a}{1.2..n}.\ \triangle\alpha^n = 0$$

egyenletből kell keresni; mi hogy néha képzeleti igazításokra vezet, magában világos dolog. Történni fog ez akkor, midőn a' képzeleti gyökerek' képzeleti része felette csekély.

64. §.

Hasonlólag fogunk okoskodni, midőn több képzeleti gyökér egyenlő egymással. Midőn az egyenlet két pár egyenlő képzeleti gyökérre vezet, az

$$f(a + \triangle a) \text{ és } f(b + \triangle b)$$

kifejtéseiből három tagot kell megtartani. Ennél fogva tehát lesz ez esetben

$$fa + f'a.\Delta a + \frac{f''a}{1.2}.\Delta a^2 = 0,$$

$$fb + f'b.\Delta b + \frac{f''a}{1.2}.\Delta b^2 = 0.$$

Avvagy

$$fa + af'a.\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \frac{a^2 f''a}{1.2}.\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 = 0$$

$$fb + bf'b.\left(\frac{\Delta b}{b}\right) + \frac{b^2 f''a}{1.2}.\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 = 0.$$

Legyen mármost

$$a = \varrho\,(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})$$
$$b = \varrho\,(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})$$

lesz, mint feljebb

$$\begin{aligned} fa = {} & \varrho^m\,[\cos m\theta + \sin m\theta\sqrt{-1}] \\ & + A\varrho^{m-1}\,[\cos(m-1)\theta + \sin(m-1)\theta\sqrt{-1}] \\ & + B\varrho^{m-2}\,[\cos(m-2)\theta + \sin(m-2)\theta\sqrt{-1}] \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + M\varrho\,[\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}] \\ & + N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fb = {} & \varrho^m\,[\cos m\theta - \sin m\theta\sqrt{-1}] \\ & + A\varrho^{m-1}\,[\cos(m-1)\theta - \sin(m-1)\theta\sqrt{-1}] \\ & + B\varrho^{m-2}\,[\cos(m-2)\theta - \sin(m-2)\theta\sqrt{-1}] \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + M\varrho\,[\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1}] \\ & + N \end{aligned}$$

következőleg:

$$fa = R\,(\cos\lambda + \sin\lambda\sqrt{-1})$$
$$fb = R\,(\cos\lambda - \sin\lambda\sqrt{-1});$$

ha tudniillik

$$R \cos \lambda = \varrho^m \cos m\theta + A\varrho^{m-1} \cos (m-1)\theta$$
$$+ B\varrho^{m-2} \cos (m-2)\theta$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ M\varrho \cos \theta + N;$$
$$R \sin \lambda = \varrho^m \sin m\theta + A\varrho^{m-1} \sin (m-1)\theta$$
$$+ B\varrho^{m-2} \sin (m-2)\theta$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ M\varrho \sin \theta$$

tétetnek.

65 §.

Minthogy továbbá

$$f'x = mx^{m-1} + (m-1) Ax^{m-2}$$
$$+ (m-2) Bx^{m-3}$$
$$+ (m-3) Cx^{m-4}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ 2Lx + M$$

azaz

$$xf'x = mx^m + (m-1) Ax^{m-1}$$
$$+ (m-2) Bx^{m-2}$$
$$+ (m-3) Cx^{m-3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ 2Lx^2 + Mx;$$

lesz a' kijelölt módot folytatva:

$$af'a = m\varrho^m [\cos m\theta + \sin m\theta \sqrt{-1}]$$
$$+ (m-1) A\varrho^{m-1} [\cos (m-1)\theta + \sin (m-1)\theta \sqrt{-1}]$$
$$+ (m-2) B\varrho^{m-2} [\cos (m-2)\theta + \sin (m-2)\theta \sqrt{-1}]$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ 2L\varrho^2 [\cos 2\theta + \sin 2\theta \sqrt{-1}]$$
$$+ M\varrho [\cos \theta + \sin \theta \sqrt{-1}]$$

$$bf'b = m\varrho^m \, [\cos m\theta - \sin m\theta \sqrt{-1}]$$
$$+ (m-1) A\varrho^{m-1} \, [\cos (m-1)\theta - \sin (m-1)\theta \sqrt{-1}]$$
$$+ (m-2) B\varrho^{m-2} \, [\cos (m-2)\theta - \sin (m-2)\theta \sqrt{-1}]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ 2 L\varrho^2 \, [\cos 2\theta - \sin 2\theta \sqrt{-1}]$$
$$+ M\varrho \, [\cos \theta - \sin \theta \sqrt{-1}];$$

's ennél fogva

$$af'a = S (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})$$
$$bf'b = S (\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})$$

ha tudniillik

$$S \cos \varphi = m\varrho^m \cos m\theta$$
$$+ (m-1) A\varrho^{m-1} \cos (m-1)\theta$$
$$+ (m-2) B\varrho^{m-2} \cos (m-2)\theta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ 2 L\varrho^2 \cos 2\theta + M\varrho \cos \theta;$$

$$S \sin \varphi = m\varrho^m \sin m\theta$$
$$+ (m-1) A\varrho^{m-1} \sin (m-1)\theta$$
$$+ (m-2) B\varrho^{m-2} \sin (m-2)\theta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ 2 L\varrho^2 \sin 2\theta + M\varrho \sin \theta$$

tétetik.

66. §.

Hasonlólag fog találtatni:

$$\frac{f''x}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} Ax^{m-3}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} Bx^{m-4}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ 3 kx + K,$$

azaz:

$$\frac{x^2 f''x}{1\,.\,2} = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,.\,x^m + \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2} Ax^{m-1}$$

$$+ \frac{(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2} Bx^{m-2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \; 3\,kx^3 + Lx^2\,;$$

mellynek következésében tehát:

$$\frac{a^2 f''a}{1\,.\,2} = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \varrho^m \,[\cos m\theta + \sin m\theta \sqrt{-1}]$$

$$+ \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2} A\varrho^{m-1} \,[\cos (m-1)\theta + \sin (m-1)\theta \sqrt{-1}]$$

$$+ \frac{(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2} B\varrho^{m-2} \,[\cos (m-1)\theta + \sin (m-2)\theta \sqrt{-1}]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \; 3\,k\varrho^3 \,[\cos 3\theta + \sin 3\theta \sqrt{-1}]$$

$$+ \; L\varrho^2 \,[\cos 2\theta + \sin 2\theta \sqrt{-1}]$$

$$\frac{b^2 f''b}{1\,.\,2} = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \varrho^m \,[\cos m\theta - \sin m\theta \sqrt{-1}]$$

$$+ \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2} A\varrho^{m-1} \,[\cos (m-1)\theta - \sin (m-1)\theta \sqrt{-1}]$$

$$+ \frac{(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2} B\varrho^{m-2} \,[\cos (m-2)\theta - \sin (m-2)\theta \sqrt{-1}]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \; 3\,k\varrho^3 \,[\cos 3\theta - \sin 3\theta \sqrt{-1}]$$

$$+ \; L\varrho^2 \,[\cos 2\theta - \sin 2\theta \sqrt{-1}]$$

avvagy

$$\frac{a^2 f'' a}{1.2} = T(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}),$$

$$\frac{b^2 f'' b}{1.2} = T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1});$$

ha ugyanazon módon, mint feljebb:

$$T\cos\psi = \frac{m(m-1)}{1.2}\varrho^m \cos m\theta$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} A\varrho^{m-1}\cos(m-1)\theta$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} B\varrho^{m-2}\cos(m-2)\theta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ 3k\varrho^3\cos 3\theta + L\varrho^2\cos 2\theta,$$

$$T\sin\psi = \frac{m(m-1)}{1.2}\varrho^m \sin m\theta$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} A\varrho^{m-1}\sin(m-1)\theta$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} B\varrho^{m-2}\sin(m-2)\theta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ 3k\varrho^3\sin 3\theta + L\varrho^2\sin 2\theta$$

tétetik.

67 §.

Végtére minthogy

$$a = -\alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$b = -\alpha - \beta\sqrt{-1},$$

lesz:

$$\Delta a = \Delta\alpha + \Delta\beta\sqrt{-1}\,,$$
$$\Delta b = \Delta\alpha - \Delta\beta\sqrt{-1}\,;$$

avvagy ha

$$\Delta\alpha = r\cos u\,,$$
$$\Delta\beta = r\sin u\,;$$

tételik:

$$\Delta a = r(\cos u + \sin u\sqrt{-1})\,,$$
$$\Delta b = r(\cos u - \sin u\sqrt{-1})\,;$$

következőleg

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{r(\cos u + \sin u\sqrt{-1})}{\varrho(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})}\,,$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{r(\cos u - \sin u\sqrt{-1})}{\varrho(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})}\,;$$

azaz

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{r}{\varrho}.(\cos u + \sin u\sqrt{-1}).(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{-1}$$

$$= \frac{r}{\varrho}.(\cos u + \sin u\sqrt{-1}).(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})$$

$$= \frac{r}{\varrho}.[\cos(\theta - u) + \sin(\theta - u)\sqrt{-1}]$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{r}{\varrho}.(\cos u - \sin u\sqrt{-1}).(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})^{-1}$$

$$= \frac{r}{\varrho}.(\cos u - \sin u\sqrt{-1}).(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})$$

$$= \frac{u}{\varrho}.[\cos(\theta - u) - \sin(\theta - u)\sqrt{-1}]$$

mikből okvetlenűl következik:

$$\frac{\triangle a}{a} + \frac{\triangle b}{b} = \frac{2r}{\varrho} \, . \, \cos(\theta - u)\, ;$$

$$\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b} = \frac{2r}{\varrho} \, . \, \sin(\theta - u)\sqrt{-1}$$

és hasonlólag fog találtatni:

$$\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 = \frac{r^2}{\varrho^2} \, . \, [\cos 2\,(\theta - u) + \sin 2\,(\theta - u)\sqrt{-1}]\, ,$$

$$\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 = \frac{r^2}{\varrho^2} \, . \, [\cos 2\,(\theta - u) - \sin 2\,(\theta - u)\sqrt{-1}]$$

a' mikből

$$\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 = \frac{2r^2}{\varrho^2} \, . \, \cos 2\,(\theta - u)\, ,$$

viszonyok, miknek közvetlen hasznát nem veendjük.

68. §.

Térjünk mármost vissza a' 64. §. alakjaihoz, melylyekből kiindúltunk:

$$fa + af'a \, . \left(\frac{\triangle a}{a}\right) + \frac{a^2 f'' a}{1\,.\,2} \, . \left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 = 0\, ,$$

$$fb + bf'' b \, . \left(\frac{\triangle b}{b}\right) + \frac{b^2 f'' b}{1\,.\,2} \, . \left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 = 0\, ;$$

's iktassuk beléjök

$$fa\, ,\; fb\, ,\; af'a\, ,\; bf'b\; \ldots .$$

helyébe a' talált értékeket, lesz:

$$R\,(\cos\lambda + \sin\lambda\sqrt{-1}) + S\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) \, . \left(\frac{\triangle a}{a}\right)$$
$$+ T\,(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}) \, . \left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 = 0\, ,$$

$$R(\cos\lambda - \sin\lambda\sqrt{-1}) + S(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}).\left(\frac{\triangle b}{b}\right)$$
$$+ T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1}).\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 = 0\,;$$

azaz:

$$\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 + \frac{S(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})}{T(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})}.\left(\frac{\triangle a}{a}\right)$$
$$+ \frac{R(\cos\lambda + \sin\lambda\sqrt{-1})}{T(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})} = 0$$

$$\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 + \frac{S(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})}{T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1})}.\left(\frac{\triangle b}{b}\right)$$
$$+ \frac{R(\cos\lambda - \sin\lambda\sqrt{-1})}{T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1})} = 0,$$

minthogy pedig ugyanazon módon, mint a' 67 §ban,

$$\frac{S(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})}{T(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})} = \frac{S}{T}.[\cos(\varphi - \psi)$$
$$+ \sin(\varphi - \psi)\sqrt{-1}],$$

$$\frac{R(\cos\lambda + \sin\lambda\sqrt{-1})}{T(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})} = \frac{R}{T}.[\cos(\lambda - \psi)$$
$$+ \sin(\lambda - \psi)\sqrt{-1}],$$

$$\frac{S(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})}{T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1})} = \frac{S}{T}.[\cos(\varphi - \psi)$$
$$- \sin(\varphi - \psi)\sqrt{-1}],$$

$$\frac{R(\cos\lambda - \sin\lambda\sqrt{-1})}{T(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1})} = \frac{R}{T}.[\cos(\lambda - \psi)$$
$$- \sin(\lambda - \psi)\sqrt{-1}],$$

lesz nyilván:

$$\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 + \frac{S}{T}.\,[\cos(\varphi-\psi)+\sin(\varphi-\psi)\sqrt{-1}].\left(\frac{\triangle a}{a}\right)$$
$$+\frac{R}{T}.\,[\cos(\lambda-\psi)+\sin(\lambda-\psi)\sqrt{-1}] \quad = 0$$

$$\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 + \frac{S}{T}.\,[\cos(\varphi-\psi)-\sin(\varphi-\psi)\sqrt{-1}].\left(\frac{\triangle b}{b}\right)$$
$$+\frac{R}{T}.\,[\cos(\lambda-\psi)-\sin(\lambda-\psi)\sqrt{-1}]. \quad = 0.$$

69. §.

A' talált két egyenletet föloldva, lesz:

$$\frac{\triangle a}{a} = -\frac{\frac{1}{2}S}{T}.\,[\cos(\varphi-\psi)+\sin(\varphi-\psi)\sqrt{-1}]$$
$$\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{4}S^2}{T^2}.\,[\cos 2(\varphi-\psi)+\sin 2(\varphi-\psi)\sqrt{-1}] - \frac{RT}{T^2}.\,[\cos(\lambda-\psi)+\sin(\lambda-\psi)\sqrt{-1}]\Big\}}$$

$$\frac{\triangle b}{b} = -\frac{\frac{1}{2}S}{T}.\,[\cos(\varphi-\psi)-\sin(\varphi-\psi)\sqrt{-1}]$$
$$\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{4}S^2}{T^2}.\,[\cos 2(\varphi-\psi)-\sin 2(\varphi-\psi)\sqrt{-1}] - \frac{RT}{T^2}.\,[\cos(\lambda-\psi)-\sin(\lambda-\psi)\sqrt{-1}]\Big\}}$$

avvagy ha

$$\tfrac{1}{4}S^2.\ \cos 2\,(\varphi-\psi) - RT\cos(\lambda-\psi) = U^2\cos 2\delta$$

$$\tfrac{1}{4}S^2.\ \sin 2\,(\varphi-\psi) - RT\sin(\lambda-\psi) = U^2\sin 2\delta$$

tétetik, lesz nyilván:

$$U(\cos\delta+\sin\delta\sqrt{-1}) = \sqrt{U^2(\cos 2\delta+\sin 2\delta\sqrt{-1})}$$

$$= \Big\{\tfrac{1}{4}S^2.\ [\cos 2\,(\varphi-\psi) + \sin 2\,(\varphi-\psi)\sqrt{-1}]$$

$$- RT.\,[\cos(\lambda-\psi) + \sin(\lambda-\psi)\sqrt{-1}]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

és hasonlólag:

$$U(\cos\delta-\sin\delta\sqrt{-1}) = \sqrt{U^2(\cos 2\delta-\sin 2\delta\sqrt{-1})}$$

$$= \Big\{\tfrac{1}{4}S^2.\ [\cos 2\,(\varphi-\psi) - \sin 2(\varphi-\psi)\sqrt{-1}]$$

$$- RT.\,[\cos(\lambda-\psi) - \sin(\lambda-\psi)\sqrt{-1}]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

és mindezekből

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\frac{1}{2}S}{T}.\ [\cos(\varphi-\psi) + \sin(\varphi-\psi)\sqrt{-1}]$$

$$\pm\frac{U}{T}.\ (\cos\delta+\sin\delta\sqrt{-1});$$

$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{\frac{1}{2}S}{T}.\ [\cos(\varphi-\psi) - \sin(\varphi-\psi)\sqrt{-1}]$$

$$\pm\frac{U}{T}.\ (\cos\delta-\sin\delta\sqrt{-1});$$

tehát

$$\frac{2r}{\varrho}.\ \cos(\theta-u) = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b},$$

$$= -\frac{S}{T}.\ \cos(\varphi-\psi) \pm \frac{2U}{T}.\ \cos\delta,$$

$$\frac{2r}{\varrho} \cdot \sin(\theta - u) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \left\{ \frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b} \right\},$$

$$= -\frac{S}{T} \cdot \sin(\varphi - \psi) \pm \frac{2U}{T} \cdot \sin\delta;$$

és végűl:

$$r\cos(\theta - u) = -\frac{\frac{1}{2}S\varrho}{T} \cdot \cos(\varphi - \psi) \pm \frac{U\varrho}{T} \cdot \cos\delta,$$

$$r\sin(\theta - u) = -\frac{\frac{1}{2}S\varrho}{T} \cdot \sin(\varphi - \psi) \pm \frac{U\varrho}{T} \cdot \sin\delta,$$

miből könnyű lesz, mind az u-t, mind az r-et találni. Mert legyen példaul

$$r\sin(\theta - u) = X,$$
$$r\cos(\theta - u) = Y;$$

akkor lesz nyilván

$$\text{Tang}\,(\theta - u) = \frac{X}{Y},$$

a' miből nemcsak példaul $\sin(\theta - u)$, következőleg

$$r = \frac{X}{\sin(\theta - u)},$$

hanem egyszersmind $\theta - u$ is, azaz minthogy θ úgy is tudva van, u is fog következni. Ismervén u-t és r-et, lesznek a' 67 §. szerint az igazítások

$$r\cos u = \triangle\alpha,$$
$$r\sin u = \triangle\beta.$$

Az egész lehozásból kitetszik, hogy r-nek és u-nak két két értéke lesz, midőn az

$$\frac{U\varrho}{T} \cdot \cos\delta, \quad \frac{U\varrho}{T} \cdot \sin\delta$$

kifejezések el nem enyésznek; ellenkező esetben pedig csak egy egy. Az első esetben tehát a' két pár képzeleti gyökér egymástól el van választva; a' másodikban ellenben e' közelítés' határai között is egyenlők maradnak azok.

70 §.

Midőn több mint két, tehát r pár egyenlőnek tetsző képzeleti gyökere vagyon az fx adott egyenletnek; akkor az első közelítés után, három, négy .... egyáltalában $r+1$ tagját kell számba venni az

$$f(a+\triangle a) \quad \text{és} \quad f(b+\triangle b)$$

kifejtéseknek. Ekkor tehát lesz:

$$0 = fa + f'a.\triangle a + \frac{f''a}{1.2}.\triangle a^2 + \dots .$$

$$0 = fb + f'b.\triangle b + \frac{f''b}{1.2}.\triangle b^2 + \dots .$$

vagy

$$0 = fa + af'a.\left(\frac{\triangle a}{a}\right) + \frac{a^2 f''a}{1.2}.\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 + \dots$$

$$+ \frac{a^{r-1} f^{(r-1)}a}{1.2..(r-1)}.\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^{r-1} + \frac{a^r f^{(r)}a}{1.2..r}.\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^r,$$

$$0 = fb + bf'b.\left(\frac{\triangle b}{b}\right) + \frac{b^2.f''b}{1.2}.\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 + \dots$$

$$+ \frac{b^{r-1} f^{(r-1)}b}{1.2..(r-1)}.\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^{r-1} + \frac{b^r f^{(r)}b}{1.2..r}.\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^r.$$

Melly egyenletekből helyettesítés által lesz

$$fa = R'(\cos\psi' + \sin\psi'\sqrt{-1}),$$
$$fb = R'(\cos\psi' - \sin\psi'\sqrt{-1}),$$

$$af'a = R'(\cos\psi' + \sin\psi'\sqrt{-1}),$$
$$bf'b = R'(\cos\psi' - \sin\psi'\sqrt{-1}),$$
$$\frac{a^2f''a}{1.\ 2} = R''(\cos\psi'' + \sin\psi''\sqrt{-1}),$$
$$\frac{b^2f''b}{1.\ 2} = R''(\cos\psi'' - \sin\psi''\sqrt{-1})$$

. . . .

következőleg

$$0 = \Big\{R\cos\psi + R'\cos\psi'.\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + R''\cos\psi''.\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \ldots$$
$$+ R^{(r+1)}\cos\psi^{(r+1)}.\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^r\Big\}$$
$$+ \Big\{R\sin\psi + R'\sin\psi'.\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + R''\cos\psi''.\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \ldots$$
$$+ R^{(r+1)}\cos\psi^{(r+1)}.\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^r\Big\}.\sqrt{-1}$$

$$0 = \Big\{R\cos\psi + R'\cos\varphi'.\left(\frac{\Delta b}{b}\right) + R''\cos\psi''.\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \ldots$$
$$+ R^{(r+1)}\cos\psi^{(r+1)}.\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^r\Big\}$$
$$- \Big\{R\sin\psi + R'\sin\psi'.\left(\frac{\Delta b}{b}\right) + R''\sin\psi''.\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \ldots$$
$$+ R^{(r+1)}\sin\psi^{(r+1)}.\left(\frac{\Delta b}{b}\right)\Big\}.\sqrt{-1}.$$

Mármost

$$\Delta a = n(\cos u + \sin u\sqrt{-1}),$$
$$\Delta b = n(\cos u - \sin u\sqrt{-1}),$$

tétetvén, lesz azon módon, mint feljebb:

$$\frac{\triangle a}{a} = \frac{n}{\varrho} . [\cos(\theta - u) + \sin(\theta - u)\sqrt{-1}],$$

$$\frac{\triangle b}{b} = \frac{n}{\varrho} . [\cos(\theta - u) - \sin(\theta - u)\sqrt{-1}],$$

következőleg:

$$\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 = \frac{n^2}{\varrho^2} . [\cos 2(\theta - u) + \sin 2(\theta - u)\sqrt{-1}],$$

$$\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^2 = \frac{n^2}{\varrho^2} . [\cos 2(\theta - u) - \sin 2(\theta - u)\sqrt{-1}],$$

. . . .

és egyáltalában:

$$\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^r = \frac{n^r}{\varrho^r} . [\cos r(\theta - u) + \sin r(\theta - u)\sqrt{-1}],$$

$$\left(\frac{\triangle b}{b}\right)^r = \frac{n^r}{\varrho^r} . [\cos r(\theta - u) - \sin r(\theta - u)\sqrt{-1}],$$

miket az előbbi kitételekbe helyettezvén, végűl következő alakú egyenletek folynak:

$$0 = A_0 + A_1 . \frac{n}{\varrho} . \cos(\theta - u) + A_1 \frac{n^2}{\varrho^2} . \cos 2(\theta - u)$$

$$+ \dots\dots + A_r . \frac{n^r}{\varrho^r} . \cos r(\theta - u),$$

$$0 = B_0 + B_1 . \frac{n}{\varrho} . \sin(\theta - u) + B_2 . \frac{n^2}{\varrho^2} . \sin 2(\theta - u),$$

$$+ \dots\dots + B_r . \frac{n^r}{\varrho^r} . \sin r(\theta - u);$$

mikből

$$\cos 2(\theta - u),\ \cos 3(\theta - u) \dots$$
$$\sin 2(\theta - u),\ \sin 3(\theta - u) \dots$$

helyeibe értékeiket

$$\cos(\theta - u) \quad \text{és} \quad \sin(\theta - u)$$

hatványaiban iktatván,

$$\frac{n}{\varrho} \cdot \cos(\theta - u)$$

$$\frac{n}{\varrho} \cdot \sin(\theta - u)$$

értékei 's ezekből mind n mind u különböző értékei következnek. 'S nyilvánvaló, hogy belőlök a'

$$\Delta a = n(\cos u + \sin u\sqrt{-1})$$
$$\Delta b = n(\cos u - \sin u\sqrt{-1})$$

azaz inkább a' keresett

$$\Delta\alpha = n \cos u,$$
$$\Delta\beta = n \sin u$$

különböző igazítások is következendnek. Kivevén azon esetet, ha a' szóban lévő képzeleti gyökerek ezen igazítások' határain belöl még egymással egyenlők volnának; mint a' melly esetben az igazításoknak is egyenlőknek kell lenniök.

71. §.

Mielőtt példákra mennénk által azon nem igen ritkán előforduló esetről kell még egy pár szót mondanunk, midőn az adott fx egyenletnek csak egy vagy két pár képzeleti gyökere van. Ezekben azonban föltesszük, hogy az illető modulusok megtaláltattak.

Midőn az egyenletnek csak egy pár képzeleti gyökere van, felette könnyű a' $\cos\theta$ és $\sin\theta$ mennyiségeket kiszámolni. Legyen tudniillik A az adott fx egyenletnek első előszáma, következőleg

$$-A = C_1(a, b, c \dots n)$$

's legyen itt

$$a = \varrho(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}),$$
$$b = \varrho(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1}).$$

Ennél fogva lesz:

$$-A = 2\varrho\cos\theta + C_1(c, d \dots n)$$

hol c, $d \dots n$ a' többi, tehát való gyökereket jelentik, és

$$C_1(c, d \dots n)$$

azoknak összegét teszi. Neveztessék ezen összeg saját jegyével véve Σ-nak, akkor lesz nyilván

$$-A = 2\varrho\cos\theta + \Sigma,$$

következőleg

$$\cos\theta = -\frac{\Sigma + A}{2\varrho}.$$

Meghatároztatván így θ, könnyű $\sin\theta$-t is találni, 's ez által a' két összrendelt

$$\varrho(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}),$$
$$\varrho(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})$$

képzeleti kifejezést is.

Midőn az adott egyenletnek két pár képzeleti gyökere vagyon az adott

$$fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots$$
$$+ Lx^2 + Mx + N = 0$$

egyenlethez annak viszonosát

$$y^m + \frac{M}{N}\cdot y^{m-1} + \frac{L}{N}\cdot y^{m-2} + \dots$$
$$+ \frac{B}{N}\cdot y^2 + \frac{A}{N}\cdot y + \frac{1}{N} = 0$$

(L. 98 és 99 l.) is gondoljuk hozzá. Ezekben nyilván

$$-A = C_1(a, b, c \ldots n),$$

$$-\frac{M}{N} = C_1\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \ldots \frac{1}{n}\right).$$

Midőn tehát

$$a = \varrho(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}),$$
$$b = \varrho(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1}),$$
$$c = \varrho'(\cos\theta' + \sin\theta'\sqrt{-1}),$$
$$d = \varrho'(\cos\theta' - \sin\theta'\sqrt{-1});$$

lesz mindenek előtt

$$-A = 2\varrho\cos\theta + 2\varrho'\cos\theta' + \Sigma,$$

hol ismét Σ a' való gyökerek' sommáját teszi. Más részről

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}},$$
$$= \frac{1}{\varrho}\cdot(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1});$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{1}{\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{1}{\varrho}\cdot(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1});$$

és hasonlólag:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\varrho'}\cdot(\cos\theta' - \sin\theta'\sqrt{-1}),$$

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\varrho'}\cdot(\cos\theta'' + \sin\theta''\sqrt{-1});$$

és mindezekből ha a' viszonyos való gyökerek' sommáját Ξ által jelöljük:

$$-\frac{M}{N} = \frac{2}{\varrho}\cdot\cos\theta + \frac{2}{\varrho'}\cdot\cos\theta' + \Xi;$$

melly talált két egyenletből lesz:

$$\cos\theta = \frac{A + \Sigma - \left(\frac{M}{N} + \Xi\right) . \varrho'^2}{2\left(\frac{\varrho'^2}{\varrho} - \varrho\right)} ,$$

$$\cos\theta' = \frac{A + \Sigma - \left(\frac{M}{N} + \Xi\right) . \varrho^2}{2\left(\frac{\varrho^2}{\varrho'} - \varrho'\right)} ;$$

mellyekből könnyű a'

$$\sin\theta \ , \quad \sin\theta'$$

tehát az egész képzeleti kifejezéseket meghatározni.

72 §.

Hogy mármost példák által világosítsuk fel az előadott szabályokat, legyen az adott egyenlet

$$fx = x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10 = 0 .$$

Négyszögre emelvén a' gyökereket, lesz:

2-dik fok:

$$x^4 + x^3 - x^2 - 101x + 100 ;$$

4-dik fok:

$$x^4 - 3x^3 + 403x^2 - 10401x + 10000 ;$$

's mármost logarithmusokban értvén az előszámokat, lesz:

8-dik fok:

$$x^4 + 2{\cdot}90146x^3 + 5{\cdot}07919x^2 + 8{\cdot}00052x + 8{\cdot}00000 ;$$

16-dik fok:

$$x^4 - 5{\cdot}59682x^3 + 11{\cdot}24103x^2 - 16{\cdot}00001x + 16{\cdot}00000 ;$$

32-dik fok:

$$x^4+11{\cdot}28376x^3+22{\cdot}35101x^2-32{\cdot}00000x+32{\cdot}00000,$$

64-dik fok:

$$x^4+21{\cdot}89965x^3+44{\cdot}73396x^2-64{\cdot}00000x+64{\cdot}00000;$$

128-dik fok:

$$x^4+45{\cdot}00899\,x^3+89{\cdot}46816\,x^2-128{\cdot}00000\,x \\ +128{\cdot}00000\,.$$

Ezentúl a' második, harmadik, negyedik előszámok négyszögesen növekedvén, az eredvényegyenletet illy cyclusokra oszthatni:

$$x^4+45{\cdot}00899\,x^3+89{\cdot}46816\,x^2\;| \\ -128{\cdot}00000\,x\;|\;+128{\cdot}00000\,;$$

mellyeknek elsejéből mindenesetre egy modulus fog keletkezni, minthogy az x^3 előszáma nemcsak rendetlenűl növekszik, hanem egyúttal ingadoz is.

A' szabályok szerint tehát fog találtatni:

$$\frac{89{\cdot}46816}{128}=0{\cdot}69897\,, \\ =\operatorname{Log}\varrho^2\,;$$

következőleg

$$\varrho^2=5\,, \\ \operatorname{Log}\varrho=0{\cdot}349485\,.$$

A' való gyökerek ekként fognak következni egymásra:

$$\begin{array}{r} 128{\cdot}00000 \\ 89{\cdot}46816 \\ \hline 38{\cdot}53184\,; \end{array}$$

és mármost

$$\frac{38{\cdot}53184}{128}=0{\cdot}30103\,, \\ =\operatorname{Log}a\,,$$

következőleg a' legnagyobb való gyökér, avvagy

$$a = \pm 2 .$$

A' kisebbik való gyökér $= \pm 1$, minthogy logarithmusa $= 0$. Nem tudjuk még valljon állítók-e ezen való gyökerek vagy sem. Azért is azokat substituálni kell az adott fx egyenletbe, vagy is inkább ezen egyenlet' gyökereit egymásután a' III. Szak. szabályai szerint kisebbíteni. Ezt tevén lesz:

$$\begin{array}{llllll}
1 & -5 & +13 & -19 & +10 \\
1 & -4 & +9 & -10 & (0) \\
1 & -3 & +6 & (-4) & \\
1 & -2 & (+4) & & \\
1 & (-1) & & & \\
(1) & & & &
\end{array}$$

Miből már kitetszik, hogy $+1$ értetendő itt. A' rekeszbe foglalt számokból támadó egyenlet' gyökereit újra 1-gyel leszállítván lesz:

$$\begin{array}{lllll}
1 & -1 & +4 & -4 & (0) \\
1 & (0) & +4 & (0) & (0)
\end{array}$$

. . . .

miből már kitetszik, hogy $+2$ a' másik való gyökér. E' két való gyökérnek sommája $+3$ levén lesz

$$\Sigma = +3 ,$$

következőleg az előbbi §. értelmében, minthogy

$$A = -5 ,$$

lesz:

$$\cos\theta = -\frac{3-5}{2\varrho} ,$$

$$= +\frac{1}{\varrho} ;$$

's így

$$\text{Log}\cos\theta = -\text{Log}\,\varrho,$$
$$= 9{\cdot}650515,$$
$$\text{Log}\sin\theta = 9{\cdot}951544;$$

miből

$$\text{Log}\,\varrho\cos\theta = 0,$$
$$\text{Log}\,\varrho\sin\theta = 0{\cdot}30103;$$

levén, lesz a' két képzeleti gyökér

$$x = 1 + 2\sqrt{-1},$$
$$x = 1 - 2\sqrt{-1}.$$

Vagy ha inkább a' kéttagú factort kerestük volna, mellynek általános alakja, mint tudatik ez:

$$x^2 - 2\varrho\cos\theta x + \varrho^2 = 0,$$

lenne ez alkalommal

$$2\varrho\cos\theta = 2;$$
$$\varrho^2 = 5;$$

's így

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Minthogy a' többi kéttagú factor ez:

$$x - 2 = 0,$$
$$x - 1 = 0;$$

nyilvánvaló, hogy az adott egyenletet így is lehet irni

$$fx = (x^2 - 2x + 5)(x - 2)(x - 1) = 0.$$

73. §.

Második példaúl szolgáljon a' már feljebb 59 §. vizsgált

$$fx = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0;$$

egyenlet, mellyre nézve ugyanott találtatott:

$$x^7 + 74{\cdot}95884\,x^6 + 122\,81202\,x^5 - 151{\cdot}32153\,x^4$$
$$+ 179\,58882\,x^3 + 190{\cdot}99129\,x^2 + 195{\cdot}21132\,x$$
$$+ 199{\cdot}20704,$$

az előszámokat logarithmusokban értve és pedig a' 256-dik fokhoz tartozókban. Ugyanott továbbá azt is láttuk, mikép ez egyenletnek 5 cyclusa van, és ezen cyclusokból találtatik:

α) a' legnagyobbik való gyökér

$$a = \pm 1{\cdot}9625\,;$$
$$\mathrm{Log} \pm a = 0{\cdot}29281\,;$$

β) a' második való gyökér

$$b = \pm 1\ 5379\,;$$
$$\mathrm{Log} \pm b = 0{\cdot}18693\,;$$

γ) a' harmadik való gyökér

$$c = \pm 1{\cdot}1080\,;$$
$$\mathrm{Log} \pm c = 0{\cdot}04454\,.$$

Továbbá:

a) a' nagyobbik modulusra nézve:

$$\mathrm{Log}\,\varrho^2 = 0{\cdot}22178\,,$$
$$\mathrm{Log}\,\varrho = 0{\cdot}11069\,;$$

b) a' kisebbikre nézve:

$$\mathrm{Log}\,\varrho_1^2 = 0\ 03209\,,$$
$$\mathrm{Log}\,\varrho_1 = 0{\cdot}01604\,.$$

A' való gyökerek' előjegyeire nézve, szállítsuk le az adott egyenlet' gyökereit, és pedig úgy, hogy a' közök ezek

$$1{\cdot}0\ .\ .\ 1{\cdot}2$$
$$1{\cdot}2\ .\ .\ 1{\cdot}6$$
$$1{\cdot}6\ .\ .\ 2{\cdot}0$$

legyenek, minthogy csak ezek között fekhetnek a' való gyökerek, föltéve hogy állítók. Ennél fogva tehát lesz:

1)

$$\begin{array}{llllllll} 1 & 0 & -2 & 0 & -3 & +4 & -5 & +6 \\ 1 & +1 & -1 & -1 & -4 & 0 & -5 & (+1) \end{array}$$

$1 + 2 + 1 \quad 0 - 4 - 4(-9)$

$1 + 3 + 4 + 4 \quad 0(-4)$

$1 + 4 + 8 + 12(+12)$

$1 + 5 + 13(+25)$

$1 + 6(+19)$

$1(+7)$

(1)

0·2)

1	+ 7	+ 19	+ 25	+ 12	− 4	− 9	+ 1
	0·2	1·44	0·288	0·05	2·4	− 0·32	− 1·9
1	+ 7·2	+ 20·44	+ 25·288	+ 12·05	− 1·6	− 9·32	(− 0·9)

. . . .

0·6)

1	+ 7	+ 19	+ 25	+ 12	− 4	− 9	+ 1
	0·6	4·6	14·2	23·5	21·3	+ 10·4	+ 0·8
1	+ 7·6	+ 23·6	+ 39·2	+ 35·5	+ 17·3	+ 1·4	(+ 1·8)

. . . .

a' miből következik, hogy egy való gyökere van az adott egyenletnek 1·0 és 1·2 között és szinte egy 1·2 és 1·6 között, de itt egyszersmind vége az állító való gyökereknek; melly gyökerek tehát ezek:

$$x = 1{\cdot}1080,$$
$$x = 1{\cdot}5379,$$
$$x = -1{\cdot}9625;$$

's ezeknek sommája, avvagy

$$\Sigma = +0{\cdot}6834:$$

Viszonosaik ezeknek, avvagy:

$$\frac{1}{x} = 0{\cdot}90253,$$

$$\frac{1}{x} = 0{\cdot}65024,$$

$$\frac{1}{x} = -0{\cdot}50957;$$

és ma̋rmost ezeknek sommája, avvagy

$$\Xi = +1{\cdot}0432.$$

Cos θ és cos θ' keresése végett továbbá

$$A = 0,$$

$$\frac{M}{N} = -0{\cdot}83333;$$

$$A + \Sigma = 0{\cdot}6834,$$

$$\frac{M}{N} + \Xi = 0{\cdot}2099;$$

következőleg:

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{0{\cdot}6834 - 0{\cdot}2099.\ \varrho'^2}{2\left(\frac{\varrho'^2}{\varrho} - \varrho\right)},$$

$$\text{Cos}\,\theta' = \frac{0{\cdot}6834 - 0{\cdot}2099.\ \varrho^2}{2\left(\frac{\varrho^2}{\varrho'} - \varrho'\right)};$$

ma̋rmost

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\ 0{\cdot}2099 &= 9{\cdot}32201 \\ \text{Log}\ \varrho'^2 &= 0{\cdot}03209 \\ \hline & \ 9{\cdot}35410 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\ 0{\cdot}2099 &= 9{\cdot}32201 \\ \text{Log}\ \varrho^2 &= 0{\cdot}22178 \\ \hline & \ 9{\cdot}54379 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log } \varrho'^2 & = 0{\cdot}03209 \\ \text{Log } \varrho & = 0{\cdot}11069 \\ \hline & \ 9{\cdot}92140 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log } \varrho^2 & = 0{\cdot}22178 \\ \text{Log } \varrho' & = 0{\cdot}01604 \\ \hline & \ 0{\cdot}20574\ ; \end{array}$$

's mindezekből

$$\text{Log}\cos\theta = 9{\cdot}70040 -$$
$$\text{Log}\cos\theta' = 9{\cdot}46755\ .$$

Ha mármost az egyes képzeleti gyökerek kerestetnek, lesz:

$$\begin{array}{rl} \text{Log } \varrho & = 0{\cdot}11969 \\ \text{Log}\cos\theta & = 9{\cdot}70040 - \\ \hline & \ 9{\cdot}81109 - \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log } \varrho & = 0{\cdot}11069 \\ \text{Log}\sin\theta & = 9{\cdot}88210 \\ \hline & \ 9{\cdot}99279 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log } \varrho' & = 0{\cdot}01604 \\ \text{Log}\cos\theta' & = 9{\cdot}46755 \\ \hline & \ 9{\cdot}48359 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log } \varrho' & = 0{\cdot}01604 \\ \text{Log}\sin\theta' & = 9{\cdot}97887 \\ \hline & \ 9{\cdot}99491 \end{array}$$

következőleg a' gyökerek magok:

$$x = -\,0{\cdot}6472 + 0{\cdot}9835\sqrt{-1}\,,$$
$$x = -\,0{\cdot}6472 - 0{\cdot}9835\sqrt{-1}\,,$$
$$x = +\,0{\cdot}3045 + 0{\cdot}9883\sqrt{-1}\,,$$
$$x = -\,0{\cdot}3045 - 0{\cdot}9883\sqrt{-1}\,;$$

vagy pedig ha a' háromtagú factorok kivántatnának:

$$x^2 + 1{\cdot}2944\,x + 1{\cdot}6664 = 0,$$

$$x^2 - 0{\cdot}6090\,x + 1{\cdot}0767 = 0$$

's végűl az adott egyenlet maga két és háromtagú factoraira oszlatva:

$$fx = (x^2 + 1{\cdot}2944\,x + 1{\cdot}6664) \times (x^2 - 0{\cdot}6090\,x - 1{\cdot}0767) \times (x + 1{\cdot}9625)(x - 1{\cdot}5379)(x - 1{\cdot}1080) = 0.$$

Ha pedig ezen értékeknek igazításai kerestetnek a' 11, 37 's kövv. §§. értelmében lesz végűl:

$$x^2 + 1{\cdot}2926302\,x + 1{\cdot}6664238 = 0,$$

$$x^2 - 0{\cdot}6092132\,x + 1{\cdot}0766801 = 0,$$

$$x + 1{\cdot}9624901 = 0,$$

$$x - 1{\cdot}5378905 = 0,$$

$$x - 1{\cdot}1080166 = 0.$$

74. §.

Harmadik és utolsó példaúl szolgálhat az

$$fx = x^7 + 3x^4 + 6 = 0$$

egyenlet. A' gyökereket négyszögítve lesz:

2-dik fok:

$$x^7 + 9x^4 + 36x^2 + 36;$$

4-dik fok:

$$x^7 + 81x^4 - 648x^3 + 1944x^2 - 2592x + 1296;$$

8-dik fok:

$$x^7 - 1296x^5 + 11745x^4 + 104976x^3 + 629856x^2 + 1689616x + 1679616;$$

16-dik fok (de itt már logarithmusokkal):

$$x^7 + 3{\cdot}41364x^6 + 6{\cdot}27636x^5 + 8{\cdot}60926x^4 - 9{\cdot}91005x^3 + 10{\cdot}92186x^2 + 11{\cdot}84836x + 12{\cdot}45042;$$

32-dik fok:

$$x^7+6{\cdot}46828x^6+12{\cdot}16012x^5+17{\cdot}29346x^4$$
$$+17{\cdot}89851x^3+22{\cdot}31679x^2+22{\cdot}41671x+24{\cdot}90084;$$

64-dik fok:

$$x^7+12{\cdot}75961x^6+23{\cdot}97079x^5+34{\cdot}58689x^4$$
$$-39{\cdot}91125x^3+44{\cdot}63668x^2-47{\cdot}51776x+49{\cdot}80168;$$

128-dik fok:

$$x^7+25{\cdot}49393x^6+47{\cdot}63345x^5+69{\cdot}17378x^4$$
$$+79{\cdot}51832x^3+89{\cdot}26074x^2+94{\cdot}72953x+99{\cdot}60336;$$

256-dik fok:

$$x^7+50{\cdot}98747x^6\,|+94{\cdot}96298x^5+138{\cdot}34756x^4\,|$$
$$+158{\cdot}73567x^3+178{\cdot}52144x^2\,|+189{\cdot}15081x$$
$$+199{\cdot}20672;$$

melly utolsó egyenlet mindjárt cyclusaira el van osztva.

Az első cyclusból egy való gyökér találtatik:

$$\frac{50{\cdot}98747}{256}=0{\cdot}199170,$$
$$=\operatorname{Log} a;$$

's innen

$$a=\pm 1{\cdot}5818.$$

A' második cyclusból egy modulus' találtatik:

$$\frac{138{\cdot}34756-50{\cdot}98747}{256}=0{\cdot}341250$$
$$=\operatorname{Log}\varrho^2;$$

következőleg

$$\operatorname{Log}\varrho=0{\cdot}170625.$$

A' harmadik cyclusból szinte egy modulus találtatik:

$$\frac{178{\cdot}52144-138{\cdot}34756}{256}=0{\cdot}156929,$$
$$=\operatorname{Log}\varrho'^2,$$

es innen

$$\text{Log}\,\varrho' = 0{\cdot}078464.$$

A' harmadikból szinte egy modulus találtatik:

$$\frac{199{\cdot}20672 - 178{\cdot}52144}{256} = 0{\cdot}080802,$$

$$= \text{Log}\,\varrho''^2,$$

tehát

$$\text{Log}\,\varrho'' = 0{\cdot}040401.$$

Minthogy az adott egyenletnek három pár képzeleti gyökere van, következőleg a' 71. §. tanításai itt közvetlen nem alkalmazhatók, keressük az

$$\alpha = 2\varrho\cos\theta$$

menuyiséget a' 35. §. szabályai szerint. Mit mielőtt tennénk sokszorozzuk az adott

$$fx = x^7 + 3x^4 + 6 = 0$$

egyenletet

$$x = 0$$

által, hogy foka páros legyen:

$$fx = x^8 + 3x^5 + 6x = 0.$$

Mi megtörténvén, látjuk, hogy

$$A_8 = 1,$$
$$A_7 = 0,$$
$$A_6 = 0,$$
$$A_5 = 3,$$
$$A_4 = 0,$$
$$A_3 = 0,$$
$$A_2 = 0,$$
$$A_1 = 6,$$
$$A_0 = 0$$

továbbá

$$\begin{aligned} \text{Log}\,A_1 &= 0{\cdot}778151, \\ \text{Log}\,\varrho^6 &= 1{\cdot}023750 \\ \hline &\ 9{\cdot}754401 \end{aligned}$$

következőleg

$$\frac{A_1}{\varrho^6} = 0{\cdot}56807 ,$$

és ennél fogva:

$$C_4 = A_8 + \frac{A_0}{\varrho^8} = 1 ,$$

$$C_3 = A_7 + \frac{A_1}{\varrho^6} = 0{\cdot}56807 ,$$

$$C_2 = A_6 + \frac{A_2}{\varrho^4} = 0 ,$$

$$C_1 = A_5 + \frac{A_3}{\varrho^2} = 3 ,$$

$$C_0 = \quad 2A_4 \quad = 0$$

továbbá

$$C_4' = A_8 - \frac{A_0}{\varrho^8} = 1 ,$$

$$C_3' = A_7 - \frac{A_1}{\varrho^6} = -0{\cdot}56807 ,$$

$$C_2' = A_6 - \frac{A_2}{\varrho^4} = 0 ,$$

$$C_1' = A_5 - \frac{A_3}{\varrho^2} = 3 ;$$

$$\begin{aligned} \text{Log } 4 &= 0{\cdot}602060 \\ \text{Log } \varrho^2 &= \underline{0{\cdot}341250} \\ & \ 0{\cdot}943310 ; \end{aligned}$$

$$\text{Num} = 8{\cdot}77626 ;$$

$$C_2 - 4\,C_4\,\varrho^2 = -\,8{\cdot}77626 .$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } 3 &= 0{\cdot}477121\\
\text{Log } C_3 &= 9{\cdot}754401\\
\text{Log } \varrho^2 &= 0{\cdot}341250\\
\hline
&\ 0{\cdot}572772,\\
\text{Num} &= 3{\cdot}73914;\\
C_1 - 3\,C_3\varrho^2 &= -0{\cdot}73914.\\
\text{Log } 2 &= 0{\cdot}301030\\
\text{Log } \varrho^4 &= 0{\cdot}682500\\
\hline
&\ 0{\cdot}983530,\\
\text{Num} &= 9{\cdot}62786;\\
C_0 - 2\,C_2\varrho^2 + 2\,C_4\varrho^4 &= 9{\cdot}62787.\\
\text{Log } 2 &= 0{\cdot}301030\\
\text{Log } \varrho^2 &= 0{\cdot}341250\\
\hline
&\ 0{\cdot}642280,\\
\text{Num} &= 4{\cdot}38813;\\
C_2' - 2\,C_4'\varrho^2 &= -\ 4{\cdot}38813.\\
\text{Log } C_3' &= 9{\cdot}754401\ n\\
\text{Log } \varrho^2 &= 0{\cdot}341250\\
\hline
&\ 0{\cdot}095651\ n\\
\text{Num} &= -\ 1{\cdot}24639,\\
C_1' - C_3'\varrho^2 &= 4{\cdot}24639.
\end{aligned}$$

’S mind ennek következésében:

$$\alpha^4 - 0{\cdot}56807\alpha^3 - 8{\cdot}77626\alpha^2 + 0{\cdot}73914\alpha + 9{\cdot}62787 = 0,$$

$$\alpha^3 + 0{\cdot}56807\alpha^2 - 4{\cdot}38813\alpha + 4{\cdot}24639 = 0.$$

Vizsgáljuk e’ két egyenletet határaira nézve és pedig kezdjünk a’ harmadik fokúnál:

1)

1	+ 0·568	— 4·388	+ 4·246
	+ 1	+ 1·568	— 2·820
1	+ 1·568	— 2·820	(+ 1·424)

2)

1	+ 0·568	— 4·388	+ 4·246
	+ 2	+ 5·136	— 1·496
1	+ 2·568	+ 0·748	+ 5·742

. . . .

Két gyökér tehát 1 és 2 között fekszik. A' nélkül, hogy ezt pontosabban meghatároznók, menjünk által a' tagadó gyökérre, mellyre nézve lesz:

1)

1	— 0·568	— 4·388	— 4·246
	+ 1	+ 0·432	— 3·956
1	+ 0·432	— 3·956	(— 8·202)

. . . .

2)

1	— 0·568	— 4·388	— 4·246
	+ 2	+ 2·864	— 3·048
1	+ 1·432	— 1·524	(— 7·294)

. . . .

3)

1	— 0·568	— 4·388	— 4·246
	+ 3	+ 7·296	+ 8·724
1	+ 2·432	+ 2·908	(+ 4·478)

. . . .

A' tagadó gyökér tehát 2 és 3 (azaz — 2 és — 3) között fekszik.

Szintúgy bánván az

$$\alpha^4 - 0{\cdot}56807\alpha^3 - 8{\cdot}77626\alpha^2 + 0{\cdot}73914\alpha + 9{\cdot}62787$$

egyenlettel, lesz:

1)

1	— 0·568	— 8·776	+ 0·739	+ 9·628
	+ 1	+ 0·432	— 8·344	— 7·605
1	+ 0·432	+ 8·344	— 7·605	(+ 2·023)

. . . .

2)

1	— 0·568	— 8·776	+ 0·739	+ 9·628
	+ 2	+ 2·864	— 11·824	— 22·170
1	+ 1·432	— 5·912	— 11·085	(— 12·542)

. . . .

Itt tehát egy gyökér fekszik 1 és 2 között; a' másik állító gyökér > 2 itt számba nem jőhet. Menjünk által a' tagadó gyökerekre:

1)

1	+ 0·568	— 8·776	— 0·739	+ 9·628
	+ 1	+ 1·568	— 7·208	— 7·947
1	+ 1·568	— 7·208	— 7·947	(+ 1·681)

. . . .

2)

1	+ 0·568	— 8·776	— 0·739	+ 9·628
	+ 2	+ 5·136	— 7·380	— 16·238
1	+ 2·568	— 3·640	— 8·119	(— 6·610)

. . . .

3)

1	+ 0·568	— 8·776	— 0·739	+ 9·628
	+ 3	+ 10·704	+ 5·784	+ 15·135
1	+ 3·568	+ 1·928	+ 5·045	(+ 24·763

. . . .

miből kitetszik, hogy egy tagadó gyökér fekszik — 1 és — 2, és ismét egy — 2 és — 3 között.

E' különös esetben, minthogy a' közös gyökér vagy 1 és 2 vagy — 2 és — 3 között fekhetik, e' közöket még pontosabban kell vizsgálni. Szakaszszuk ketté tehát az elsőt, lesz:

1·5)

1	+ 0·568	— 4·388	+ 4·246
	+ 1·5	+ 3·102	— 1·929
1	+ 2·068	— 1·286	(+ 1·317)

. . . .

1·5)

1	— 0·568	— 8·776	+ 0·739	+ 9·628
	+ 1·5	+ 1·398	— 11·378	— 15·958
1	+ 0·932	— 7·378	— 10·639	(— 6·330)

. . . .

A' közös gyökér ennélfogva 1 és 1·5 között fekhetik. Szakaszszuk ketté szintúgy a' — 2 és — 3 közt, lesz.

2·5)

1	— 0·568	— 4·388	— 4·246
	+ 2·5	+ 4·830	+ 1·105
1	+ 1·932	+ 0·442	(— 3·141)

. . . .

2·5)

1	+ 0·568	— 8·776	— 0·739	+ 9·628
	+ 2·5	+ 7·670	— 2·765	— 8·760
1	+ 3·068	— 1·106	— 3·504	(+ 0·868)

. . . .

A' közök tehát itt sincsenek egymastól elválasztva. Legalább úgy látszik. De ha meggondoljuk, hogy a' 3-dik fokú egyenletre nézve 2·5 alsó, a' 4-dik fokúra nézve pedig felső határ, minthogy folytatva az utóbbi számolást

2·5)

$$\begin{array}{rrrrr}
1 & +\ 0{\cdot}568 & -\ 8{\cdot}776 & -\ 0{\cdot}739 & +\ 9{\cdot}628 \\
 & +\ 2{\cdot}5 & +\ 7{\cdot}670 & -\ 2{\cdot}765 & -\ 8{\cdot}760 \\
\hline
1 & +\ 3{\cdot}068 & -\ 1{\cdot}106 & -\ 3{\cdot}504 & (+\ 0{\cdot}868) \\
 & +\ 2{\cdot}5 & +\ 14{\cdot}020 & +\ 32{\cdot}285 & \\
\hline
1 & +\ 5{\cdot}568 & +\ 12{\cdot}914 & (+\ 28{\cdot}781) &
\end{array}$$

. . . .

minden rekesz alatti számnak állítónak kell lenni, e' köz nem lehet az, mellyet keresünk. 'S így marad csak az 1 és 1·5 közötti. Erre nézve:

1·1)

$$\begin{array}{rrrr}
1 & +\ 0{\cdot}568 & -\ 4{\cdot}388 & +\ 4{\cdot}246 \\
 & +\ 1{\cdot}1 & +\ 1{\cdot}835 & -\ 2{\cdot}808 \\
\hline
1 & +\ 1{\cdot}668 & -\ 2{\cdot}553 & (+\ 1{\cdot}438)
\end{array}$$

. . . .

1·2)

$$\begin{array}{rrrr}
1 & +\ 0{\cdot}568 & -\ 4{\cdot}388 & +\ 4{\cdot}246 \\
 & +\ 1{\cdot}2 & +\ 2{\cdot}122 & -\ 2{\cdot}719 \\
\hline
1 & +\ 1{\cdot}768 & -\ 2{\cdot}266 & (+\ 1{\cdot}527) \\
 & +\ 1{\cdot}2 & +\ 3{\cdot}562 & \\
\hline
1 & +\ 2{\cdot}968 & (+\ 1{\cdot}296) &
\end{array}$$

. . . .

miből kitetszik, hogy 1·2 felső határ. Szintúgy lesz a' másik, 4-dik fokú egyenletre nézve:

$$
\begin{array}{llll}
1\cdot1) & & & \\
1 - 0\cdot568 & - 8\cdot776 & + 0\cdot739 & + 9\,628 \\
\underline{+ 1\cdot1} & \underline{+ 0\cdot585} & \underline{- 9\cdot010} & \underline{- 9\cdot099} \\
1 + 0\cdot532 & - 8\cdot191 & - 8\cdot271 & (+ 0\cdot529) \\
\underline{+ 1\cdot1} & \underline{+ 1\cdot795} & \underline{- 7\cdot036} & \\
1 + 1\cdot632 & - 6\cdot396 & (-15\cdot307) & \\
\underline{+ 1\cdot1} & \underline{+ 3\cdot005} & & \\
1 + 2\cdot732 & (- 3\cdot391) & & \\
\underline{+ 1\cdot1} & & & \\
1 (+ 3\cdot832) & & &
\end{array}
$$

Itt leszármaztattuk mindjárt valamennyi rekesz alatti számokat, mert nyilván való, hogy 1·1 és 1·2 között egy állító való gyökérnek kell lennie, melly nem lehet más, mint a' keresett α. Folytatván a' gyökérkivonást lesz a' legközelebbi szám 0·03 'stb. 'S egyáltalában fog találtatni:

$$\alpha = 1\cdot1328;$$

következőleg a' keresett háromtagú factor:

$$x^2 - 1\cdot1328x + 2.1940 = 0.$$

Folytatván e' munkálatokat még találtatni fog:

$$x^2 - 1\cdot9246x + 1\cdot4352 = 0,$$

$$x^2 + 1\cdot4756x + 1\cdot2044 = 0;$$

's az adott egyenlet maga lesz:

$$
\begin{aligned}
fx = & \{x^2 - 1\cdot1328x + 2\cdot1940\} \\
& \times \{x^2 - 1\cdot9246x + 1\cdot4352\} \\
& \times \{x^2 + 1\cdot4756x + 1\cdot2044\} \\
& \times (x + 1\cdot5818) = 0.
\end{aligned}
$$