DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

A M. KIR. VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSI MINISZTÉRIUM MEGBIZÁSÁBÓL

IRTA

Dr BEKE MANÓ

MÁSODIK KÖTET

BUDAPEST, 1916
FRANKLIN-TÁRSULAT
MAGYAR IROD. INTÉZET ÉS KÖNYVNYOMDA
KIADÁSA

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

II.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY. TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁL. NUMERIKUS VÉGTELEN SOROK. VÉGTELEN FÜGGVÉNYSOR.

I. FEJEZET.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK.

1. A többváltozós függvény. Eddigelé főként olyan mennyiségekkel foglalkoztunk, melyek számértéke egyetlen mennyiség számértékétől függött. Ezt az utóbbit, melynek rendszerint egészen szabadon tulajdoníthattunk különböző értékeket, független változónak neveztük; azt a mennyiséget pedig, amelynek értéke e független változó mindenkori értékétől függött, mely tehát ehhez a független változóhoz valamiképpen hozzá volt rendelve, ezen változó függvényének neveztük. Ezeket a most már jól ismert fogalmakat akarjuk tágítani.

Képzeljük az x és y független változókat; vagyis képzeljünk olyan két mennyiséget, melyeknek szabadon tulajdoníthatunk számértékeket (egyelőre reálisakat). Az x és y változóknak tulajdonítható értékek összessége e változók értékrendszerét alkotja. Ez a legkülönfélébb lehet. Megeshetik, hogy úgy az x, mint az y *minden* számértéket felvehetnek; megeshetik, hogy csak pozitiv számértékeket tulajdoníthatunk nekik, vagy csak egész számértékeket, vagy pl.: x-nek minden számértéket tulajdoníthatunk, mely a $0 \ldots 1$ közben van (pl.: a határokat is beleértve) és y-nak azokat, amelyek -1 és $+1$ között vannak s í. t. Az x és y egy-egy értékpárját az x és y rendszer *helyének* fogjuk nevezni; például, ha x-nek ezt a számértéket tulajdonítjuk: 3, y-nak pedig ezt: 5, akkor azt mondjuk: az $x=3$, $y=5$ a változók értékrendszerének egy megadott helye.

Szemléletessé válik az itt előadott, ha geometriai ábrázolásra gondolunk. Ugyanis az $x=a$, $y=b$ értékeket a sík azon pontjával ábrázoljuk, amelynek abscissája: a, ordinátája: b. Innen vettük a hely elnevezést is. Az x és y által felvehető számértékek összességét a sík *tartományának* is fogjuk nevezni. E tartomány meghatározása a legkülönfélébb módokon történhetik. Ha x és y csak egész számú értékeket vesznek fel, akkor egy rácsot létesíthetünk a síkon oly módon, hogy a $0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots$ távolságokban az x és y tengelyekkel párhuzamosakat vonunk; ezek metszéspontjai: a rácspontok ábrázolják a változók értékrendszereit. Sokszor meg éppen geometriai szemlélettel határozzuk meg a változók tartományát, azt mondva pl.: hogy x és y vegyék fel mindazon értékeket, melyeket egy C középpontú, r sugarú kör kerületén és belsejében levő pontok ábrázolnak s í. t.

Bár egyszerűnek látszik, különösen geometriai szempontból, a tartomány értelmezése, de rendkívül komplikálttá lesz, ha a geometriai szemlélettől függetlenül értelmezni és a szemléletet elemezni akarjuk. Így pl.: ha a szemlélettől függetlenül akarjuk megállapítani a tartomány belső és határhelyeinek, a tartományt határoló görbének, a tartomány összefüggőségének (hogy t. i.: egyik helyétől a másik helyéhez, mindig belül haladva, eljuthatunk) stb. definicióját. Ezekkel, részben a mathematikai analizisbe, részben az analizis situsba, a helyzet analizisébe vágó kérdésekkel nem akarunk foglalkozni és ezúttal főként a geometriai szemlélet nyújtotta fogalmakat fogjuk felhasználni.

Ha már most egy tartományt jelölünk ki (pl.: az $x=a$, $x=b$; $y=c$, $y=d$ egyenesek közé foglalt derékszögű négyszög belsejét) és ennek minden helyéhez a z mennyiség valamely értékét rendeljük, akkor a z az x, y változóknak a szóban forgó tartományban adott függvénye. Ennek a jelölésére a $z=f(x, y)$ jelet használjuk. A hozzárendelés különféle módon történhetik; a legtöbbször formula segítségével, vagyis bizonyos meghatározott mathematikai operációkkal számítható ki az x, y értékekhez tartozó z érték. Például, ha azt mondjuk, hogy $z=(x+y)^2$, $z=\dfrac{x-y}{x+y}$, $z=\dfrac{(2x+3y)^2}{(x^2-y^2)^3}$, akkor a megadott x és y számértékekből a négy alapművelettel számítható ki a hozzájuk tartozó z érték, ha e műveletek egyáltalában elvégezhetők. Sokszor táblázat segítségével rendeljük a z értékeket az x, y értékrendszeréhez vagy pedig geometriai eljárással. Ez utóbbi igen gyakori és szemléletes képét nyújtja a hozzárendelésnek. Ha három egymásra egy O pontban merőleges egyenest képzelünk: a koordináta tengelyeket, melyek közül az X és Y a vízszintes síkban vannak és Z erre merőleges és (x, y) azon P pontot jelenti, melynek abscissája az XY síkban x, ordinátája: y, továbbá az (x, y) pontokban az XY síkra emelt merőlegesekre az illető (x, y)-hoz rendelt z értékeket rámérjük, akkor ezzel egy felületet állapítottunk meg, mely a $z=f(x, y)$ függvény grafikus előállítására szolgál.

Közelfekvő gondolat a függvényfogalom további általánosítása. Ha n mennyiség: $x_1, x_2, \ldots x_n$ akár bizonyos korlátok között, akár korlátlanul szabadon változtathatja az értékét, akkor ezeket *független változóknak* nevezzük. Így pl.: ha $b_1<x_1<a_1$, $b_2<x_2<a_2, \ldots$ $b_n<x_n<a_n$, vagy ha $x_1, x_2, \ldots x_n$ olyan értékeket vesznek fel, amelyekre nézve:

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2\leq r^2.$$

Az $x_1, x_2, \ldots x_n$ által fölvehető értékcsoportok, értékrendszerek összessége itt is *tartományt* alkot, a független változók *értéktartományát*. Az $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, \ldots x_n=\alpha_n$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ meghatározott számértékek, e tartomány egyik *helye*.

Ha már most az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók értéktartományának minden egyes helyéhez a z-nek meghatározott értékét rendeljük, akkor a z-t az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók e tartományban meghatározott *függvényének* nevezzük és ezt az n változós függvényt például így jelöljük:

$$z=f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

2. A többváltozós függvény határértéke. A legegyszerűbb esetekben is előfordulhat, hogy a $z=f(x, y)$ kétváltozós függvény, bár ismeretes a z kiszámítására szolgáló formula, egyes helyeken mégsem számítható ki, mert a műveletek végrehajthatatlanok. Így pl. az $\frac{x-y}{x+y}$ az $x=0$, $y=0$ helyen nem számítható ki, mert $\frac{0}{0}$ alakra vezet a helyettesítés, ami értelmetlen; vagy $\frac{\sin(x-y)}{x-y}$ értéke az $x=y$ esetében, tehát a kezdőponton átmenő és az x tengelyhez 45° alatt hajló egyenes egyetlen pontjában sem állapítható meg. Ilyenkor behelyettesítésről, az x és y számértékeinek a formulába való helyettesítéséről nem lehet szó, tehát megint, éppen úgy, mint az egyváltozós függvény esetében, a függvényre nézve egy új fogalmat, a *határérték* fogalmát vezetjük be és ezt a fontos fogalmat a kiszámíthatóságtól teljesen függetlenül állapítjuk meg.

Hogy ezt a fogalmat értelmezhessük, megmondjuk előbb, hogy mit értsünk az (a, b) hely *környezetén*. Ha az (a, b) körül, mint középpont körül ϱ sugárral kört rajzolunk, akkor e kör belsejében levő pontok, vagyis azok, melyekre nézve

$$(x-a)^2+(y-b)^2<\varrho^2$$

az (a, b) hely ϱ sugarú *környezetét* alkotják. Ha már most bármely kis pozitiv ε számhoz található olyan ϱ, hogy a ϱ sugarú környezetben, vagyis mindazon (x, y) helyeken, melyekre nézve:

$$(x-a)^2+(y-b)^2<\varrho^2$$

az

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

akkor definicióképpen azt mondjuk, hogy $f(x, y)$ függvénynek az (a, b) helyen a határértéke: A. Ezt így írjuk:

$$\lim_{x=a,\, y=b} f(x, y)=A.$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy mindazon (x, y) helyeken, melyek az $(x-a)^2+(y-b)^2=\varrho^2$ körön belül vannak,

$$A-\varepsilon<f(x, y)<A+\varepsilon.$$

[Geometriai interpretálása ennek a következő: Ha az (a, b) körül ϱ sugarú kört rajzolunk és e körre, mint alapra, körhengert állítunk, akkor ez a henger a $z=f(x, y)$ felületből olyan görbét vág ki, amelyen belül levő pontjai a felületnek az (x, y) sík fölött $A+\varepsilon$-nál alacsonyabban és $A-\varepsilon$-nál magasabban vannak.]

Némelykor a környezet fogalmát másképpen állapítjuk meg és ennek megfelelően a határérték definiciója is formailag kissé eltérő lesz. Azt mondjuk például, hogy az $x=a-\delta$, $x=a+\delta$; $y=b-\delta$, $y=b+\delta$ egyenesek által bezárt négyzeten belül levő pontokat tekintjük az (a, b) környezetének; tehát azon pontokat, melyekre nézve:

$$|x-a|<\delta, \quad |y-b|<\delta.$$

A környezet ezen megállapítása után: $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y)=A$ még így is értelmezhető: Minden pozitiv ε-hoz tartozik δ küszöb, olymódon, hogy az

$$|x-a|<\delta, \quad |y-b|<\delta$$

egyenlőtlenségek által meghatározott tartomány belsejében levő helyekre nézve:

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon.$$

Nyilván a két értelmezés identikus; mert ha az (a, b) helyet körülvehetjük ilyen négyzettel, akkor körülvehetjük egy — e négyzetbe írható — körrel is és fordítva, ha körülvehetjük körrel, akkor körülvehetjük ebbe beírható négyzettel is.

Könnyű lesz most már e fogalmat átvinni n változós függvény esetére is. Az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ hely környezetének nevezzük pl. a második értelmezés szerint azon $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ helyeket, melyekre nézve:

$$|x_1-a_1|<\delta, \; |x_2-a_2|<\delta, \ldots |x_n-a_n|<\delta;$$

(síkon négyzet, térben kocka, n változó esetében sokszor összefoglalóan e helyek összességét n dimenziós kockának mondjuk).

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ről akkor mondjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ helyen A a határértéke, ha bármely kis pozitiv ε adatik, megjelölhető az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helynek olyan

$$|x_1-a_1|<\delta, \; |x_2-a_2|<\delta, \ldots |x_n-a_n|<\delta$$

környezete, melyen belül levő helyeken

$$|f(x_1, x_2, \ldots x_n)-A|<\varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{x_1=a_1, \ldots x_n=a_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)=A.$$

Ha a $\lim\limits_{x=a,\, x=b} f(x, y)$ létezik (azaz véges és meghatározott A szám), akkor, miként láttuk, az (a, b) hely egy kis környezetében tetszés szerinti kevéssel tér el az $f(x, y)$ az A-tól. Ebből következik, hogy ha e környezetnek két tetszés szerinti helyét kiszemeljük, e helyeken levő függvényértékek egymástól is tetszés szerinti kevéssel különböznek. Ezen állítás pontosabb igazolása a következőképpen történhetik. Adatik egy tetszés szerinti kis pozitiv ε. Vegyük ennek a felét és határozzuk meg a ϱ poz. számot úgy, hogy az (a, b) hely $(x-a)^2+(y-b)^2<\varrho^2$ környezetének minden (x, y) helyén $|f(x, y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$ legyen. Eszerint tehát, ha (x_1, y_1) és (x_2, y_2) e környezet két, tetszés szerinti helye, akkor:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_1, y_1)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_2, y_2)<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

tehát e két egyenlőtlenségből:

$$-\varepsilon<f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)<\varepsilon,$$

vagyis $$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<\varepsilon.$$

Látjuk tehát, hogy ha $\lim\limits_{x=a, y=b} f(x, y)$ véges és meghatározott szám, akkor van olyan környezete az (a, b) helynek, melyen belül bármely két helyen vett függvényértékek egymástól a tetszés szerinti megadott ε-nál kevesebbel különböznek. Azonnal látni fogjuk, hogy viszont, ha bármely kis pozitiv ε-hoz tartozik olyan környezet, amelyen belül akárhol vett függvényértékek különbsége abszolut értékre ε-nál kisebb, akkor a $\lim\limits_{x=a, y=b} f(x, y)$ létezik.

Az imént bizonyított tétel n változós függvény esetében is éppen így állapitható meg. Elég lesz, ha megfogalmazzuk.

Ha $\lim\limits_{x_1=a_1, \ldots x_n=a_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ véges és meghatározott szám, akkor minden ε-hoz tartozik az $a_1, \ldots, a_n$ helynek olyan környezete, amely környezetből vett tetszés szerinti két: $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ és $x''_1, x''_2, \ldots x''_n$ helyen

$$|f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)-f(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)|<\varepsilon.$$

3. A határérték létezésének kritériuma. Mielőtt az előbbi tételnek megfordításával foglalkoznánk, mely a határérték létezésének kritériumát szolgáltatja, előbb röviden rekapituláljuk az alsó és felső határ fogalmára vonatkozó ismereteinket, alkalmazva a kétváltozós függvény értékkészletének halmazára. Ha adatik az (x, y) valamely tartománya és e tartomány helyeihez hozzárendeljük a z értékeket, vagyis értelmezzük e tartományban a $z=f(x, y)$ függvényt, akkor e függvény által felvett számértékek egy számhalmazt alkotnak. E számhalmazt *korlátos*nak mondjuk, ha van olyan M szám, mely a halmaz minden számánál nagyobb és olyan m, mely mindegyiknél kisebb. E számhalmaz felső határát jelöljük H-val, alsó határát h-val. Akkor tudjuk, hogy a halmaz egy száma sem nagyobb H-nál, ellenben, ha ε tetszés szerinti kis pozitiv szám, akkor a halmazban van $H-\varepsilon$-nál nagyobb szám is. Éppen így: a halmaz egy száma sem nyúlik a h alá, ellenben ha ε tetszés szerinti kis poz. szám, akkor $h+\varepsilon$-nál kisebb szám van a halmazban. Az $f(x, y)$ tehát H-nál nagyobbá nem lesz, de $H-\varepsilon$-nál nagyobbá igen; h-nál kisebbé nem lesz, de $h+\varepsilon$-nál kisebbé igen.

Ha az adott tartománynak egy részét tekintjük és (x, y) e részben levő helyeket jelenti, akkor az $f(x, y)$ értékei az előbbi halmaznak csak egy részét alkotják; tehát nyilván ezen részhalmaz felső határa csak H vagy H-nál kisebb, alsó határa pedig h vagy h-nál nagyobb lehet.

Ezek előrebocsátása után áttérünk a jelzett kritérium megállapítására. *Ha minden pozitiv ε-hoz tartozik az (a, b) helynek olyan környezete, amelyen belül akármely (x_1, y_1) és (x_2, y_2) helyeken vett függvényértékekre nézve:*

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

akkor $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y)$ véges és meghatározott számérték.

Ugyanis: Válasszuk az ε-t akárhogyan. Tartozik hozzá az (a, b) helynek egy ϱ sugarú környezete, melyben mindenütt $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Vegyük most az előbbi ε felét, vagy az ennél kisebb: ε_1-et. Ehhez egy ϱ_1 sugarú környezet tartozik, amely nyilván az előbbiben benne van. Vegyük ε_1 felét, vagy ennél is kisebb ε_2-t. Ehhez meg ϱ_2 sugarú, az előbbiben foglalt környezet tartozik s í. t. Így jutunk a $\varrho \geq \varrho_1 \geq \varrho_2, \ldots$ sugarú, (a, b) középpontú koncentrikus körökre. Jelöljük a ϱ sugarú környezetben felvett $f(x, y)$ értékek felső határát H-val, alsó határát h-val. A ϱ_1 sugarú környezetben legyen a felső határ H_1, az alsó h_1, s í. t. Így jutunk a $H, H_1, H_2, \ldots$ számokhoz, melyek nyilván csökkenő korlátos sorozatot alkotnak. Az általuk értelmezett számot jelöljük Φ-vel. Hasonlóképpen az $h, h_1, h_2, \ldots$ alsó határok növekedő korlátos sort alkotnak. Jelöljük e sorozat értelmezte számot Ψ-vel.

Azt állítjuk, hogy $\Psi = \Phi$. Ugyanis a ϱ sugarú körben felvett $f(x, y)$ értékek eltérése ε-nál kisebb. De ezen értékek felső határa H. Ez azt jelenti, hogy egyetlen $f(x, y)$ sem nagyobb a H-nál, ellenben $H - \frac{\varepsilon}{2}$ és H között mindenesetre van az $f(x, y)$-nak értéke. Éppen így: egyetlen $f(x, y)$ sem kisebb a h-nál, ellenben $h + \frac{\varepsilon}{2}$ és h között van $f(x, y)$ érték. Így tehát van olyan két (x', y') és (x'', y'') hely, melyekre nézve:

$$f(x', y') - f(x'', y'') > H - \frac{\varepsilon}{2} - \left(h + \frac{\varepsilon}{2}\right) = H - h - \varepsilon,$$

[ha t. i.: (x', y'), gyanánt olyan helyet választunk, melyen $f(x', y') > H - \frac{\varepsilon}{2}$; és (x'', y'') gyanánt olyant, melyen $f(x'', y'') < h + \frac{\varepsilon}{2}$]. De minthogy bármely két helyre nézve az $f(x, y)$ értékeinek eltérése ε-nál kisebb, tehát ezen egyenlőtlenségből következik, hogy:

$$\varepsilon > H - h - \varepsilon,$$

azaz $H-h<2\varepsilon$. Éppen így mutathatjuk meg, hogy a ϱ_1-re nézve: $H_1-h_1<2\varepsilon_1$, ϱ_2-re: $H_2-h_2<2\varepsilon_2$, s í. t., szóval, minthogy $\lim \varepsilon_n=0$, tehát $\lim (H_n-h_n)=0$, vagyis a $H, H_1, H_2, \ldots$ és $h, h_1, h_2, \ldots$ szabályos sorozatok ugyanazt a számot értelmezik: $\Phi = \Psi$.

Azt állítjuk már most, hogy ez a közös határérték egyúttal $\lim\limits_{x=a\; y=b} f(x, y)$.

Ugyanis, ha egy tetszés szerinti poz. ε adatik, akkor elmegyünk a $H, H_1, H_2, \ldots$ és $h, h_1, h_2, \ldots$ szabályos sorozatban olyan messze, hogy azon túl az összes H, illetőleg h számok az ő közös Φ határértéküktől ε-nál kevesebbel különböznek. Mondjuk, hogy ez az N-ik tagtól kezdve bekövetkezik; válaszszuk az N-hez tartozó ϱ_N-et; jelöljük ezt r-el. Ezen r sugarú körön belül

$$h_N \leq f(x, y) \leq H_N,$$

de

$$h_N \leq \Phi \leq H_N,$$

tehát:

$$|f(x, y) - \Phi| \leq H_N - h_N < 2\varepsilon.$$

És ez éppen azt mondja, hogy $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y) = \Phi$. Ezzel tehát kimutattuk, hogy *ha bármely kis pozitiv ε-hoz található olyan környezet, amelyen belül bármely két helyen az $f(x, y)$ ingadozása:* $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$, akkor létezik a $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y)$.

Egészen hasonlóan fejezhetjük ki a határérték létezésének kritériumát n változós függvény esetében is a következőképpen: Ha bármely kis ε-hoz található az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helynek olyan környezete, amelyre nézve minden két helyen:

$$|f(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) - f(x''_1, x''_2, \ldots x''_n)| < \varepsilon,$$

akkor létezik a

$$\lim_{x_1=a_1,\, x_2=a_2, \ldots x_n=a_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

A határérték létezésére az imént a függvénynek az illető hely egész környezetében való viselkedéséből következtettünk; közelfekvő gondolat már most az, hogy az (a, b) helyhez görbék mentén (és pedig például véges hosszúságú görbék mentén) közeledjünk, azaz x-nek és y-nak olyan értékeket tulajdonítsunk, amelyek egy-egy görbe pontjainak felelnek meg. Azonnal beláthatjuk, hogy ha $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y)$ véges és meghatározott A szám, akkor bárminő folytonos görbén közeledjünk is az $(a, b) = P$ helyhez, mindig azt találjuk, hogy $\lim f(x, y) = A$. Mert ha $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ folytonos függvények és $a = \varphi(t_0)$, $b = \psi(t_0)$, akkor ha t elég közel van t_0-hoz, azaz elég közel jutunk a görbén a P helyhez, már olyan ϱ környezetbe jutottunk, amelyben $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Ha tehát $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y) = A$, akkor bármely folytonos görbén haladva is a P-hez, ugyanarra a határértékre jutunk.

Hát ha az (a, b) helyen az $f(x, y)$-nak nincs határértéke, hogyan áll a dolog az (a, b) helynek a görbéken való megközelítésével?

Ha $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen nincs határértéke, akkor a határérték létezésére szóló kritérium ellenkezője áll fenn. Vagyis: van olyan véges e szám, hogy az (a, b) akárminő kis ϱ környezetében még mindig akad két olyan (x_1, y_1) és (x_2, y_2) hely, melyekre nézve $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| > e$.

Szemeljük ki a ϱ környezetet és benne két ilyen P_1, P_2 helyet. Vegyük most ϱ_1 radiust akkorának, hogy úgy a P_1, mint a P_2 a ϱ_1 sugarú körön kívül legyen, vagyis $\varrho_1 < PP_1$ és $\varrho_1 < PP_2$ és legyen még $\varrho_1 < \frac{\varrho}{2}$. Ezen a ϱ_1 körön belül ismét lesz olyan két pont, amelyekre nézve $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| > e$. Jelöljük ezeket P'_1, P'_2-el. Ezeken belül ismét lesz két ilyen pont s í. t. Így jutunk a $P_1, P_2, P'_1, P'_2, P''_1, P''_2, \ldots$ pontokhoz. A P_1 és P_2 a ϱ sugarú körön belül vannak, tehát $P_1 P_2 < 2\varrho$, éppen így $P'_1 P'_2 < 2\varrho_1$, tehát minthogy $\varrho_1 < \frac{\varrho}{2}$: $P'_1 P'_2 < \varrho$. Éppen így $P''_1 P''_2 < \frac{\varrho}{2}$, $P'''_1 P'''_2 < \frac{\varrho}{4}, \ldots$ s így tovább. Hasonló meggondolás mutatja, hogy $P_2 P'_1 < 2\varrho$, $P'_2 P''_1 < 2\varrho_1 < \varrho$, $P''_2 P'''_1 < 2\varrho_2 < \frac{\varrho}{2}$ s í. t. Kössük már most össze a $P_1 P_2 P_1' P_2' P_1'' P_2'' \ldots$ pontokat egy tört vonallal.* E törtvonal hossza véges, $2.\left(2\varrho + \varrho + \frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho}{4} \cdots\right)$-nél kisebb és a P pontba tart. Ezen görbe mentén haladva az x, y-nal, az $f(x, y)$-nak nincs limese, mert hiszen akármilyen messzire haladjunk is e görbén, még mindig akadunk két olyan helyre, amelyekben a függvény eltérése e-nél nagyobb.

Így tehát az előbbi eredményt a mostanival kibővítve, látjuk, hogy ha $\lim\limits_{x=a,\,y=b} f(x, y) = A$ *létezik, akkor bármely folytonos görbén haladjunk is a P-be, az* $f(x, y)$*-nak mindig van limese és pedig: A. Ha pedig* $\lim\limits_{x=a,\,y=b} f(x, y)$ *nem létezik, akkor van olyan folytonos görbe, amelyen a P-be haladva,* $f(x, y)$*-nak nincs limese.*

Ebből a kettős állításból már most következik, hogy ha minden folytonos görbén haladva az (a, b) ponthoz, létezik $\lim f(x, y)$, akkor létezik a $\lim\limits_{x=a,\,y=b} f(x, y)$ is. Ugyanis, ha $\lim\limits_{x=a,\,y=b} f(x, y)$ nem léteznék, akkor az előbbi szerint volna legalább egy olyan görbe, amelyen nem volna limes, ami feltevésünkkel ellenkezik. De ezzel egyúttal arra is jutottunk, hogy ha minden folytonos görbén, mely a P felé tart, van az $f(x, y)$-nak limese, ez a limes közös, mindenik görbén csak ugyanaz lehet; mert hiszen ha minden görbén van limes, akkor létezik az igazi $\lim\limits_{x=a,\,y=b} f(x, y)$ is és akkor minden görbén ugyanekkora a limes.

Néhány példán megmutatjuk, hogy azon esetben, midőn határérték nincsen, különböző görbéken haladva, más-más határértékhez juthatunk.

1. Példa. Legyen például $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Vizsgáljuk e függvényt az $x=0$, $y=0$ helyen. Ha az x tengely mentén haladunk a kezdőponthoz, akkor minden pontban $y=0$; tehát az $f(x, y)$ értéke az x tengely minden helyén: 1 és így a határértéke is 1. Ha pedig az y tengely mentén haladunk a kezdőpontba, akkor mindig $x=0$, $f(x, y)$ tehát mindig: -1 és így limese is: -1. Ha például egy olyan egyenes mentén haladunk a kezdőpontba, amelynek irányhatározója: m, vagyis, melyre nézve $y = mx$, akkor

$$f(x, y) = \frac{x^2 (1 - m^2)}{x^2 (1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2},$$

tehát limese is $\frac{1 - m^2}{1 + m^2}$. A $\lim\limits_{x=0,\,y=0} f(x, y)$, tehát nem létezhetik.

2. Példa. Ha $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, akkor az x tengely mentén haladva a kezdőpontba, minden egyes helyen $y=0$, tehát (x, y) minden ilyen helyen: 0, a limese is 0. Éppen így az y tengely mentén haladva szintén 0-ra jutunk, mint állandó értékre, tehát a $\lim f(x, y)$ is 0. Itt tehát az x és y tengelymenti határértékek megegyeznek; de ha az $y = mx$ egyenes mentén megyünk a kezdőpontba, akkor $f(x, y)$ értéke: $\frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$, tehát a limese is ez.

3. Példa. Még különösebben viselkedik ez a függvény: $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

* Ha e görbe valamelyik szakasza a P ponton menne keresztül, akkor e szakasz helyett mindig huzhatunk olyan, a P pontot elkerülő törtvonalat, mely kisebb a szakasz kétszeresénél (benne van a szakaszra épített egyenoldalú háromszögben). Az új görbe hossza is véges.

Ha az x tengely mentén haladunk a kezdőpontba, azaz, ha $y=0$ tesszük, akkor $f(x, y)=0$. Mindig 0, tehát a limese is: 0. Ha az y mentén haladunk, akkor $x=0$, tehát $\lim f(x, y)=0$, sőt ha az $y=mx$ egyenes mentén haladunk, akkor

$$f(x, y)=\frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4}=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}$$

és így ha $x=0$-sá válik, akkor $f(x, y)=0$; tehát bármely egyenes mentén menjünk is a kezdőpontba, a $\lim f(x, y)$ ezen egyenesek mentén mindig 0. És $\lim\limits_{x=0,\, y=0} f(x, y)$ még sem létezik. Ha ugyanis egy más görbét szemelünk ki, pl. $x=y^2$ parabolát, akkor ezen a parabolán fekvő pontokra nézve:

$$f(x, y)=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2},$$

mindig $\frac{1}{2}$, tehát limese is $\frac{1}{2}$. E parabola mentén haladva tehát más határértékhez jutottunk, mint az egyenesek mentén.

4. Folytonos függvény. A legtöbbször csak azon esetben szólunk az $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen való határértékéről, ha ezen a helyen az $f(x, y)$ eredeti értelmezése (formula, vagy másnemű értelmezés) felmondja a szolgálatot. Ilyenkor rendszerint a határértékkel kiegészítjük az $f(x, y)$ definicióját. De szólhatunk az (a, b) helyen való határértékről akkor is, ha e helyen van a függvénynek az eredeti értelmezése szerint elrendelt értéke: helyettesítési értéke. Ha ezen helyettesítési értéke a határértékével megegyezik, akkor azt fogjuk mondani, hogy ezen a helyen az $f(x, y)$ *folytonos*. Általában az n változós $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ függvénynek az $x_1=a_1$, $x_2=a_2, \ldots$ $x_n=a_n$ helyhez tartozó, az eredeti értelmezése szerint e helyhez rendelt értékét így jelöljük:

$$f(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

és e helyhez tartozó határértékét, miként már tudjuk, így:

$$\lim_{x_1=a_1,\, x_2=a_2, \ldots\, x_n=a_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ha már most

$$\lim_{x_1=a_1, \ldots\, x_n=a_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)=f(a_1, a_2, \ldots a_n),$$

akkor az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ függvényt az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyen *folytonosnak* mondjuk.

Ha az $f(x, y)$ függvény az (a, b) helyen folytonos, akkor a határértéke ezen a helyen az $f(a, b)$ számérték; vagyis, ha egy tetszés szerinti kis poz. ε adatik, található ehhez az (a, b)-nek olyan környezete, amelyen belül fekvő (x, y) helyeken

$$|f(x, y)-f(a, b)|<\varepsilon,$$

ha x, y ezen környezetből vétetik, például ha $|x-a|$ és $|y-b|$ kisebbek a négyzetalakú környezet félszélességénél: δ-nál. Éppen így az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyen folytonos, ha bármely poz. ε-hoz található δ küszöb úgy, hogy:

$$|f(x_1, x_2, \ldots x_n) - f(a_1, a_2, \ldots a_n)| < \varepsilon,$$

ha $|x_1-a_1| < \delta$, $|x_2-a_2| < \delta, \ldots |x_n-a_n| < \delta$.

Ha az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$-ben $x_1=a_1+h_1$, $x_2=a_2+h_2, \ldots x_n=a_n+h_n$ tesszük, akkor még úgy is mondhatjuk, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyen folytonos, ha bármely pozitiv ε-hoz található olyan δ, hogy

$$|f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots a_n)| < \varepsilon,$$

ha

$$|h_1| < \delta, |h_2| < \delta, \ldots |h_n| < \delta.$$

5. **Egyenletes folytonosság.** Megmondottuk, hogy mit értsünk ezen a kifejezésen: a többváltozós függvény valamely *helyen* folytonos. Ez, amint láttuk, egyszerűen azt fejezi ki, hogy ha a független változókat végtelen csekéllyel változtatjuk, akkor a függvény értéke is végtelen csekéllyel változik.

A legtöbbször olyan esetekkel lesz dolgunk, midőn a függvény egy bizonyos tartomány *minden helyén* folytonos. Ilyenkor nagy súlyt helyezünk arra, hogy a tartomány határhelyein is folytonos-e a függvény, vagy csak a belső helyeken, vagy a határnak csak egyes részeiben?

Ha az $f(x, y)$ egy bizonyos T tartománynak (pl. egy egyszerűen zárt görbe által határolt tartománynak) minden belső helyén és minden határhelyén folytonos, akkor $f(x, y)$ e tartományban *egyenletesen folytonos*. Hogy ezen mit értünk, az a következő fejtegetésekből derül ki.

Ha az $f(x, y)$ az (a, b) helyen folytonos, akkor, miként tudjuk, minden ε-hoz található oly δ küszöb, hogy $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$, ha $|x-a| < \delta$, $|y-b| < \delta$. Válasszuk az ε felét és jelöljük a hozzátartozó küszöböt δ-val. Akkor tehát, ha az (a, b) centrum körül megrajzoljuk a 2δ oldalú négyzetet — az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó küszöbnégyzetet, — akkor e négyzetből választott két (x_1, y_1) és (x_2, y_2) helyre nézve:

$$f(a, b) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_1, y_1) < f(a, b) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$f(a, b) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_2, y_2) < f(a, b) + \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$; vagyis, ha az $f(x, y)$ az (a, b) helyen folytonos, akkor van olyan környezete az (a, b)-nek, amelyben akármely két helyen vett függvényértékek eltérése a tetszés szerint megadott ε-nál kisebb. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a függvény *ingadozása* e környezetben ε-nál kisebb.

Ha az $f(x, y)$ a T tartomány minden helyén, a határhelyeket is beszámítva, folytonos, akkor eszerint, akárminő (a, b) helyét szemeljük is ki e tartománynak, a megadott ε-hoz mindig tartozik olyan, 2δ szélességü négyzetalakú környezet, melyen belül az ingadozás ε-nál kisebb (a határhelyeken és azok közelében a környezet a négyzetnek egy csonka része, mely egészen beleesik a tartományba). De a δ az (a, b) hellyel változik. Azt lehetne gondolni, hogy e végtelen sok δ-nak az alsó határa csakis 0 lehetne és akkor, bár minden helyhez tartozik négyzetalakú környezet, még sem mondhatnánk *egy* olyan δ-t, amely *valamennyi* helyhez tartozhatik. Kimutatjuk, hogy ez nem így van. Vagyis bebizonyítjuk, hogy *ha $f(x, y)$ a T tartomány minden helyén (a határát is beleértve) folytonos, akkor a tetszés szerint megadott ε-hoz tartozik egy véges δ úgy, hogy a tartomány bármelyik helyének 2δ szélességű (négyzetalakú) környezetében az $f(x, y)$ ingadozása ε-nál kisebb.* Vagyis, ha a T tartományban *akárhol* rajzoljuk is meg a 2δ szélességű négyzetet, a bele (és a T-be) eső bármely két (x, y) helyhez tartozó függvényértékek különbsége ε-nál kisebb; tehát az ε-hoz egy *közös* küszöbkörnyezet tartozik az egész T tartományban.

A bizonyítás indirekt úton történik. Tegyük fel az ellenkezőt. Az ellenkező állítás ez: Nem igaz, hogy minden ε-hoz tartozik olyan véges küszöbnégyzet, amelyen belül az ingadozás ε-nál kisebb; azaz van legalább egy olyan ε, amelyre ez nem áll. Jelöljük ezt az ε értéket: e-vel. Az e-hez tehát nem tartozik egy véges küszöbnégyzet, ami úgy értendő, hogy bárminő kis δ-t képzeljünk is, még mindig van a T tartományban olyan hely, amelynek környezetében rajzolt 2δ szélességű négyzetben az ingadozás e-nél nagyobb.

Vegyük fel tetszés szerint a d számot. A T-ben van tehát olyan hely, amely körül rajzolt $2d$ szélességű négyzetben az ingadozás e-nél nagyobb; vagyis van e négyzetben a T tartománynak két, (x_1, y_1) és (x_2, y_2) helye, melyekre nézve:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| > e.$$

Vegyük most az előbbi d felét. A T-ben van tehát olyan hely, melynek környezetéül rajzolt $2 \cdot \frac{d}{2}$ szélességű négyzetben megint van 2 hely, mondjuk x'_1, y'_1 és x'_2, y'_2, melyekre nézve:

$$|f(x'_1, y'_1) - f(x'_2, y'_2)| > e.$$

Most pedig $\frac{d}{4}$-et vesszük. Megint lesz valahol olyan $2 \cdot \frac{d}{4}$ szélességű négyzet, melyben a T-nek két x''_1, y''_1; x''_2, y''_2 helyén:

$$|f(x''_1, y''_1) - f(x''_2, y''_2)| > e$$

s í. t. Ilyenformán végtelen sok helyhez jutunk a T-ben. Az (x_1, y_1), (x'_1, y'_1), $(x''_1, y''_1), \ldots$ helyek legalább egy (ξ, η) helyen összesürüsödnek,* mely (ξ, η) vagy a T belsejében, vagy a határán van. E (ξ, η) hely bármely kis környe-

* Ha a T tartományban végtelen sok $P, P_1, P_2, \ldots$ pontot jelölünk meg, akkor a tartománynak van legalább egy olyan helye: R, amelynek tetszés szerinti kis környezetében végtelen sok P pont van. Ugyanis rajzoljunk a síkon egy négyzetes hálót $2d$ szélességű négyzetekkel. Ezen négyzetes hálónak azon négyzeteit, amelyekben a T tartomány legalább egy pontja van, árnyékoljuk be. A beárnyékolt négyzetek száma véges. E véges számú négyzetben tehát végtelen sok P pont van; tehát legalább egyik négyzetben kell végtelen soknak lenni. Most osszuk fel e négyzetet 4 egyenlő négyzetre. Legalább egyikben végtelen sok pont van az adott pontok közül. Ezt újból osszuk fel 4 egyenlő részre. Ezek közül megint legalább egyikben végtelen sok pont van s így tovább eljutunk olyan kis négyzethez, amint csak akarjuk, amelyben végtelen sok pontja lesz a $P, P_1, P_2, \ldots$ ponthalmaznak. Jelöljük már most az első négyzet középpontjának koordinátáit x_1, y_1-el, a másodikét x_2, y_2-vel s í. t., akkor nyilván $\lim x_n$ és $\lim y_n$ létezik és az általuk értelmezett R pont tetszés szerinti kis környezetében a $P, P_1, P_2, \ldots$-nek végtelen sok pontja van. Ez az R az adott halmaz egyik *sűrüsödő* helye.

zetében végtelen sok pontja van az (x_1, y_1), (x_1', y_1'), (x_1'', y_1''), ... ponthalmaznak. De ebből egyúttal az is következik, hogy e helyen az (x_2, y_2), (x_2', y_2'), (x_2'', y_2''), ... pontok is összesűrüsödnek, mert hiszen ezen pontok távolsága az (x_1, y_1), (x_1', y_1'), (x_1'', y_1''), .. pontoktól elenyésző csekéllyé válik [kisebb e távolság rendre a $2d$, $2 \cdot \frac{d}{2}$, $2 \cdot \frac{d}{4}$, ... szélességű négyzetek átlóinál]. Tehát úgy az (x_1, y_1), (x_1', y_1'), (x_1'', y_1''), ... mint az (x_2, y_2), (x_2', y_2'), (x_2'', y_2''), ... sorozatokból végtelen sok hely választható ki úgy, hogy e helyek a (ξ, η)-hoz konvergáljanak. Azt állítjuk már most, hogy az $f(x, y)$ ezen a (ξ, η) helyen nem lehet folytonos. Ugyanis akárminő kis környezetét vegyük is a (ξ, η)-nak, abban lesz olyan két pont, melyekben a függvényértékek ε-nél többel térnek el egymástól; már pedig, ha $f(x, y)$ a (ξ, η) helyen folytonos lenne, ilyen eltérés nem volna lehetséges.

Arra jutottunk tehát, hogy $f(x, y)$ a (ξ, η) helyen nem folytonos; de (ξ, η) vagy a T-ben, vagy ennek a határán van; feltételünk szerint tehát az $f(x, y)$ a (ξ, η) helyen is folytonos. Eredményünk tehát a feltételünkkel ellenkezik; vagyis indirekt bebizonyítottuk állításunk igazságát; bebizonyítottuk tehát, hogy ha $f(x, y)$ a T-ben és a határán minden helyen folytonos, akkor *bármely kis ε-hoz tartozik olyan közös δ küszöb, hogy a 2δ szélességű négyzetben az $f(x, y)$ ingadozása mindig kisebb az ε-nál, akármelyik pont körül rajzoljuk is a 2δ szélességű négyzetet.* Az $f(x, y)$ függvénynek ezt a tulajdonságát nevezzük *egyenletes folytonosságnak.*

Ez az állítás többváltozójú függvényre is érvényes. Így például, ha $f(x, y, z)$ egy bizonyos T tartomány (pl. egy gömb) belsejében és határán minden helyen folytonos, akkor bármely ε-hoz található egy közös δ olymódon, hogy, ha bármely pont körül egy 2δ élű kockát képzelünk, akkor a T tartománynak e kockába eső bármely két x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2 helyén

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| < \varepsilon.$$

6. Többváltozós függvény alsó és felső határai. Maximuma, minimuma. Ha az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók bizonyos T tartományban vannak, például úgy, hogy

$$b_1 < x_1 < a_1,\ b_2 < x_2 < a_2,\ \ldots\ b_n < x_n < a_n,$$

ahol esetleg a $<$ jel mellett még az egyenlőség jele is fönnállhat és e tartományban az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ egyértékű függvény, mely minden helyen véges értéket vesz fel oly módon, hogy megadható két szám A és B, melyek közé esik az $f(x_1, \ldots x_n)$ függvény minden értéke, akkor azt fogjuk mondani, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e T tartományban *korlátos* függvény. Ellenkező esetben az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ a T-ben korlátlan.

Jelöljük a korlátos függvény felső határát F-el, alsó határát A-val. Ha F' az F-nél kisebb szám, akkor a felső határ értelmezése szerint az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ függvény által felvett értékek között F'-nél nagyobb is van. Vagyis, ha ε egy tetszés szerinti kis pozitiv szám, akkor az $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ valahol a T-ben oly értéket is felvesz, mely $F-\varepsilon$ és F közé esik (esetleg maga az F). A felső határnak ebben van a nevezetes tulajdonsága: az *f függvény az F felső határnál nagyobbá sehol sem válik a T-ben, de bárminő kis szám legyen is az ε, $F-\varepsilon$-nél nagyobbá lesz. Éppen így az alsó határ nevezetes tulajdonsága, hogy az f függvény az A-nál kisebbé nem lesz, de van olyan hely a T-ben, ahol $A+\varepsilon$ és A közé eső értéket kap, bárminő kis szám legyen is az ε.*

De nem biztos, hogy van-e a T tartományban olyan hely, ahol az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ éppen az F értéket venné fel. Így például, ha ezt a kétváltozós függvényt tekintjük: $\sin(x+y)$, abban a körben, melynek középpontja az origo és rádiusa: r (tehát a T tartomány az $x^2+y^2=r^2$ kör belseje) és r olyan nagy, hogy e kört az $x+y=\frac{\pi}{2}$ egyenes metszi, de az $x+y=\frac{5\pi}{2}$ már nem metszi, azaz $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<r<\frac{5\pi}{2\sqrt{2}}$ és megállapítjuk, hogy $f(x, y)$ e tartományban így legyen értelmezve: minden helyen akkora legyen, mint $\sin(x+y)$, kivéve azokat a helyeket, melyek az $x+y=\frac{\pi}{2}$ egyenesen vannak; ezeken a helyeken $f(x, y)=0$ legyen. Ilyen módon az $f(x, y)$ teljesen meg van határozva a T-ben. A felső határa, miként rögtön látjuk: 1. Ehhez végtelen közel jut; de az 1 értéket sehol sem veszi fel; mert $\sin(x+y)$ e tartományban csakis akkor lehet 1, ha $x+y=\frac{\pi}{2}$ és e helyeken az $f(x, y)$ elrendelt értéke nem 1, hanem 0. Ez az egyszerű példa is mutatja, hogy a függvény a felső határához tetszés szerint közel juthat; de nem okvetlenül szükséges, hogy föl is vegye ezt az értéket. Éppen igy áll a dolog az alsó határral. *De megjegyezzük, hogy ez a sajátságos eset folytonos függvénnyel nem eshetik meg. Bebizonyítjuk, hogy ha $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ a T tartományban és a határán is folytonos, akkor van a tartományban (vagy a határán) olyan hely, amelyen a függvény értéke pontosan egyenlő a felső határával.*

Elég lesz a tételt kétváltozós függvényre bizonyítani; abból a bizonyítás menete többváltozós függvényre is világossá lesz. Legyen a T tartomány körülvéve egy négyzettel, melynek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak, [három változós függvény esetében kockával; n változós függvény esetében tekintsük azon helyek összességét, amelyekre nézve $-a<x_1<a$, $-a<x_2<a, \ldots$ $-a<x_n<a$ ahol a oly nagy, hogy e tartomány egészen magában foglalja a T-t]. A négyzetet osszuk 4 egyenlő négyzetre, akkor legalább egyikbe (a határokat is beleértve) esik a T-nek olyan része, amelyben az $f(x, y)$ felső határa szintén F. Mert hiszen, ha mindenik részben F-nél kisebb volna a felső határ és ezek közül a legnagyobb: F_1, akkor a T-ben nem volna olyan hely, melyen az $f(x, y)$ F_1-nél nagyobb értékű volna: a felső határ a T-ben nem lehetne F. Szemeljük most ki a négy négyzet közül azt, amelyben a felső határ: F. Ezt megint 4 egyenlő négyzetre osztjuk. Ezek között is van legalább egy, melyben a felső határ: F s í. t.

Az első, tekintetbe vett négyzetben szemeljük ki a T tartomány valamelyik pontját: (x_1, y_1)-et; a második négyzetben (x_2, y_2), a harmadikban (x_3, y_3) és i. t. pontjait a T-nek. Ezeknek a pontoknak legalább egy sűrüsödési helyük van; azaz van legalább egy olyan $R=(\xi, \eta)$ pont, melynek tetszés szerinti kis környezetében is van a kiszemelt pontok közé tartozó. Megjegyezzük, hogy ez az R hely nyilván szintén a T-be vagy T határához tartozik. Azt állítjuk már most, hogy ezen a (ξ, η) helyen az f értéke: F.

Ugyanis, ha $f(\xi, \eta)$ nem volna egyenlő F-el, akkor csakis kisebb lehetne nála. Mondjuk: F_1 és legyen $F-F_1=e$. De az $f(x, y)$ mindenütt, tehát az R helyen is folytonos és így az R helynek van olyan t környezete, (ha R a T határán fekszik, akkor csak a T belsejébe eső része a kör vagy négyzet alakú környezetnek jön számba) melyben minden (x, y) helyen a függvény értékére nézve:

$$|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\frac{e}{2},$$

tehát e környezetben $f(x, y)$ az $f(\xi, \eta)+\frac{e}{2}$-nél nagyobb nem lesz, vagyis mindig $F-\frac{e}{2}$-en alul marad. De nincs olyan kis környezete R-nek, amelyben az előbbi négyzetek közül valamelyik, legalább részben, benne ne lenne, mert hiszen a négyzetek szélessége végtelen kicsinnyé válik; már pedig minden ilyen négyzetben az $f(x, y)$ felső határa éppen F, tehát t-ben kell olyan helynek lenni, amelyen a függvény értéke az $F-\frac{e}{2}$-nél nagyobb. Így tehát az az állítás, hogy $f(\xi, \eta)$ az F felső határtól különbözik, ellenmondásra vezetett, vagyis bebizonyítottuk, hogy a (ξ, η) helyen a függvény valóban felveszi a felső határát.

Éppen így áll a dolog az alsó határral; vagyis összefoglalva kimondhatjuk, *hogy ha* $f(x, y)$ *a* T *tartományban, melyhez a határát is hozzászámítjuk, folytonos, akkor van e tartományban olyan hely, melyen a függvény a felső határával és olyan is, melyen az alsó határával egyenlő.* Ilyenkor a felső határt a függvény *maximális* értékének, az alsó határt pedig *minimális* értékének nevezzük.

7. A folytonos függvény jeltartása. Ha az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ helyen folytonos és $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ pozitiv (negativ), akkor megállapítható e helynek olyan környezete, amelyen belül függvényünk mindenütt pozitiv (negativ). Ugyanis, ha $f(a_1, a_2, \ldots a_n)=P$ és $P>0$, akkor tegyük $\varepsilon=\frac{P}{2}$. A folytonosság értelmezéséből következik, hogy létezik az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$-nek olyan környezete: $|x_1-a_1|<\delta$, $|x_2-a_2|<\delta, \ldots |x_n-a_n|<\delta$, amelyen belül:

$$|f(x_1, x_2, \ldots x_n)-f(a_1, a_2, \ldots a_n)|<\varepsilon,$$

tehát e környezetben:

$$P-\frac{P}{2}<f(x_1, x_2, \ldots x_n)<P+\frac{P}{2},$$

és így $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mindenesetre pozitiv. Ugyanígy áll a dolog, ha $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ negativ.

Ebből egyúttal azt is látjuk, hogy ha $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ bármely kis környezetében pozitiv és negativ értékeket egyaránt fölvesz és tudjuk, hogy az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ helyen folytonos, akkor biztosak vagyunk abban, hogy az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ helyen a függvény értéke: 0.

8. Folytonos függvények folytonos függvénye. Ha $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, akkor x és y az r és t függvényei és pedig r és t folytonos függvényei. Ha r-nek egy meghatározott értéket tulajdonítunk és t változik 0-tól 2π-ig, akkor az (x, y) pont leírja az r sugarú kört. Ha r-et változtatjuk és t változatlanul marad, akkor pedig az (x, y) pont leírja azt az egyenest, amely a kezdőponton át halad és az X tengelyhez t szöggel hajlik. Ha r változik 0-tól ϱ-ig bezárólag és t 0-tól 2π-ig, akkor (x, y) a ϱ sugarú, 0 középpontú körnek és e kör kerületének összes pontjait befutja. Ha az r és t ábrázolására koordináta-rendszert képzelünk, melynek abcissatengelye a t tengely, ordinátatengelye az r tengely, akkor a (t, r) pontok, melyekre nézve $0\leq t\leq 2\pi$, $0\leq r\leq\varrho$, egy derékszögű négyszög belsejében vannak. Ha a (t, r) pont ezen négyszög valamelyik pontját ábrázolja, akkor az $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ az (x, y) koordinátarendszerben a ϱ sugarú körlap valamely pontját állítja elő. Ha a (t, r) pont a t tengellyel párhuzamos egyenesnek a négyszögbe eső részét futja be, akkor az (x, y) pont a megfelelő körvonalat írja le és ha a (t, r) pont az r tengellyel párhuzamosan mozog, akkor az (x, y) pont egy megfelelő rádius mentén halad. Ilyenkor azt szoktuk mondani, hogy az $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ formulák a (t, r) sík ezen derékszögű négyszögét »leképezik« az (x, y) sík egyik körére; a t tengellyel párhuzamos egyeneseket koncentrikus körökre stb.

Sokszor előfordul, hogy ilyenformán a (ξ, η) változók valamely tartományát leképezzük az (x, y) valamely tartományára. Ezt akkor mondjuk, ha

$$x=\varphi(\xi, \eta), \qquad y=\psi(\xi, \eta)$$

a (ξ, η) változóknak olyan függvényei, hogy ha (ξ, η) valamely τ tartomány helyeit jelölik, akkor (x, y) egy T tartomány összes helyei.

Némelykor a τ tartománynak csak egyes vonalait vesszük tekintetbe, úgy miként az illusztrációul szolgáló egyszerű esetünkben a t, vagy az r tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel tettük. Ha például,

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

és a t változó az $a \ldots b$ szakaszban mozog, akkor az (x, y) pontok rendszerint egy görbét futnak be.

Ha (ξ, η) egy bizonyos τ tartomány összes helyei és

$$x=\varphi(\xi, \eta), \qquad y=\psi(\xi, \eta)$$

a T tartomány helyei úgy, hogy a τ tartomány minden egyes (ξ, η) helyének e T tartomány egy-egy helye felel meg (tehát x és y a ξ, η egyértékű függvényei) és $f(x, y)$ az x, y-nak a T tartományban egyértékű függvénye, akkor tehát a τ tartomány minden (ξ, η) helyének a T tartomány egy (x, y) helye felel meg és ennek a helynek egy f érték. Így tehát a τ tartomány minden (ξ, η) helyének az f függő változó egy-egy értéke felel meg, vagyis az f voltaképpen a (ξ, η) egyértékű függvényének is tekinthető a τ tartományban. Megkülönböztetésül ismét azt fogjuk mondani, hogy f a ξ, η közvetett függvénye, amit így jelölünk:

$$f(x, y) = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)].$$

Vagy, ha $x=\varphi(t)$ és $y=\psi(t)$ egyváltozós, egyértékű függvények és ha t az $a \ldots b$ szakaszból való, akkor a megfelelő (x, y) helyek a T tartományban vannak, melyben az $f(x, y)$ értelmezve van: akkor tehát az $a \ldots b$ szakasz minden t helyének egyetlen f érték felel meg, az $f(x, y)$ tehát voltaképpen mint a t változó függvénye szerepel:

$$f(x, y) = f[\varphi(t), \psi(t)].$$

Könnyű lesz most már az általános esetet is figyelembe venni. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ m számú változóval jellemzett helyek bizonyos τ tartomány helyei és az n számú $x_1, x_2, \ldots x_n$ az előbbiek függvényei:

$$x_1=\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \; x_2=\varphi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \ldots \; x_n=\varphi_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m),$$

melyek a τ tartomány minden egyes $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ helyéhez a T tartomány egy-egy $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ helyét rendelik és ha az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n változós függvény e T tartományban egyértelmüleg van értelmezve, akkor a τ tartomány minden egyes $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ helyéhez az f függő változó egy-egy értéke tartozik, vagyis az f a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ közvetett függvénye. Ezt így írhatjuk:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f[\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \ldots \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)].$$

E közvetett (vagy összetett) függvényekre vonatkozólag a következő nevezetes tételt ismertetjük: Ha a

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \; \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \ldots \; \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$$

a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$-nek az $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ helyen folytonos függvényei, továbbá

$$b_1=\varphi_1(a_1, a_2, \ldots a_m), \; b_2=\varphi_2(a_1, a_2, \ldots a_m), \ldots \; b_n=\varphi_n(a_1, a_2, \ldots a_m)$$

és $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ a T tartomány olyan helye, melyen az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ folytonos, akkor az f mint a ξ változók függvénye is folytonos az $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ helyen. A tétel plauzibilis. Egyszerűen azt mondja, hogy ha az $(a_1, a_2, \ldots a_m)$-től végtelen csekéllyel tér el $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$, akkor az f értékében is végtelen csekély lesz az eltérés, mert a φ függvények is végtelen csekéllyel változnak. A tétel így bizonyítható: Azt kell kimutatnunk, hogy adott ε-hoz található olyan δ küszöbszám, hogy

$$|f[\varphi_1(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_m+h_m), \ldots, \varphi_n(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_m+h_m)] -$$
$$- f[\varphi_1(a_1, a_2, \ldots a_m), \ldots, \varphi_n(a_1, a_2, \ldots a_m)]| < \varepsilon,$$

ha $$|h_1| < \delta, \ |h_2| < \delta, \ldots |h_n| < \delta.$$

Az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ helyen folytonos; tehát van olyan pozitiv d, hogy

$$|f(b_1+k_1, b_2+k_2, \ldots b_n+k_n) - f(b_1, b_2, \ldots b_n)| < \varepsilon,$$

ha $$|k_1| < d, \ |k_2| < d, \ldots |k_n| < d.$$

A φ függvények folytonosak az $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ helyen. Válasszuk a δ-t úgy, hogy mindegyik φ-re nézve

$$|\varphi(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_m+h_m) - \varphi(a_1, a_2, \ldots a_m)| < d,$$

ha $$|h_1| < \delta, \ |h_2| < \delta, \ldots |h_m| < \delta.$$

Ez a δ az ε-hoz tartozó keresett küszöb. Ugyanis, ha teljesítve van, hogy $|h_1| < \delta, |h_2| < \delta, \ldots |h_m| < \delta$, akkor teljesül, hogy a φ függvények növekedései, vagyis $k_1, k_2, \ldots k_n$ abszolut értékben d-nél kisebbek és akkor f növekedése kisebb ε-nál. Ezzel kimutattuk hogy ha az f az x változók folytonos függvénye az említett $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ helyen és az x változók a ξ-k folytonos függvényei az $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ helyen, akkor f a ξ változóknak is folytonos függvénye e helyen.

Itt a τ tartomány egyetlen helyéről volt szó. Ha a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ közvetítő függvények a τ minden helyén folytonosak és f az egész T tartományban folytonos, akkor az f közvetett függvény is τ minden helyén folytonos.

9. **Többváltozós függvény jelváltása.** Ha az $f(x, y)$ kétváltozós folytonos függvény az összefüggő T tartományban az (a_1, b_1) helyen pozitiv, e tartomány (a_2, b_2) helyén pedig negativ, akkor a tartományban van olyan hely (és pedig rendszerint számtalan sok), amelyen az $f(x, y)$ eltünik. Ha ugyanis lehetséges, akkor az (a_1, b_1) és (a_2, b_2) pontokat a T tartományban haladó egyenessel összekötjük; ha egyenessel nem tehetjük, akkor egy tört vonallal, vagy általában valamely folytonos görbével. (Hogy a T tartomány *összefüggő*, az éppen ennek lehetőségét jelenti). Legyen e folytonos görbe egyenlete:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

és t_1-nek az $a_1 = \varphi(t_1)$, $b_1 = \psi(t_1)$ és t_2-nek az $a_2 = \varphi(t_2)$, $b_2 = \psi(t_2)$ pont feleljen meg és ha t a t_1-től t_2-ig halad, akkor az (x, y) pont a T tartományban haladjon az (a_1, b_1)-től (a_2, b_2)-ig [tört vonal esetében a $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ egyes szakaszokban a t lineáris függvényei]; ekkor

$$f(x, y) = f[\varphi(t), \psi(t)]$$

a t közvetett függvénye és pedig, minthogy φ és ψ a t folytonos függvényei, tehát f is a t folytonos függvénye. Jelöljük annak a feltüntetésére, hogy f a t-nek függvénye, az $f(x, y)$ függvényt így: $F(t)$. Eszerint tehát $F(t_1) > 0$, $F(t_2) < 0$, tehát, ha t a $t_1 \ldots t_2$ intervallumban halad [azaz (x, y) az összekötő görbén megy végig], kell egy közbenső τ helynek lenni, ahol $F(\tau) = 0$. Ha e τ helynek megfelel az összekötő görbének

$$\alpha = \varphi(\tau), \qquad \beta = \psi(\tau)$$

pontja, akkor tehát $f(\alpha, \beta) = 0$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A bizonyítás ugyanígy végezhető kettőnél több változó esetében is.

E tételből egy fontos következtetést vonhatunk a folytonos függvény értékrendszerére nézve. Ha ugyanis az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n változós függvény a T tartomány minden helyén folytonos és az egyik helyen A, a másikon pedig B értéket veszi fel és C tetszés szerinti szám az A és B között, akkor kell olyan helynek is lenni a T tartományban, amelyen a függvény értéke éppen: C. Ugyanis tekintsük ezt a függvényt:

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) - C,$$

mely a tartomány egyik helyén az $A - C$ negativ értéket, a másik helyen pedig a $B - C$ pozitiv értéket veszi fel, tehát van egy olyan közbenső hely, melyen e függvény értéke éppen: 0, vagyis van olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ hely, melyen:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = C.$$

II. FEJEZET.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY DIFFERENCIÁLHÁNYADOSAI. IMPLICIT FÜGGVÉNY.

1. Parciális differenciálhányados. Az egyváltozós függvény változásának mérésére bevezettük a differenciálhányados fogalmát. Ezt a fogalmat akarjuk most a többváltozós függvényre is értelmezni. Legyen adva az $f(x, y)$ függvény és legyen (a, b) a T értelmezési tartomány valamely belső helye.

Változtassuk meg az (a, b) helyet oly módon, hogy T-ben az X tengely irányában h-val eltoljuk; azaz vegyük az (a, b) pont helyett az $(a+h, b)$ pontot. A függvény értéke ezen a helyen: $f(a+h, b)$ és

$$f(a+h, b) - f(a, b)$$

a függvény növekménye. E növekményt a változó növekményéhez, a h-hoz viszonyítjuk. Így kapjuk az

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

hányadost. Ha e hányadosnak van meghatározott véges határértéke, midőn h a 0 felé konvergál, azaz

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

létezik és véges, akkor ezt a határértéket az $f(x, y)$ függvény (a, b) helyhez tartozó, x szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük és így jelöljük: $\frac{\partial f}{\partial x}$. Ha szükséges, azt is megjelöljük, hogy ez a differenciálhányados az (a, b) helyhez tartozik, pl. ilyen módon: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a,\, y=b}$. Sokszor ezt a jelet használjuk: $f'_x(a, b)$, vagy ezt: $(D_x f)_{x=a, y=b}$.

Éppen így, ha

$$\lim_{k=0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

véges és meghatározott számérték, akkor ezt az $f(x, y)$ függvény y

szerinti differenciálhányadosának nevezzük az $x=a$, $y=b$ helyen és így jelöljük: $\frac{\partial f}{\partial y}$, f'_y, $D_y f$, vagy, ha szükséges, még kiírjuk, hogy e differenciálhányados az (a, b) helyhez tartozik ilyen módon:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=a,\, y=b}; \quad f'_y(a, b); \quad (D_y f)_{x=a,\, y=b}.$$

Nem okoz most már semmi nehézséget a fogalom kiterjesztése többváltozós függvény esetére. Ha az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n változós függvény bizonyos T tartományban van értelmezve és $(x_1+h_1, x_2, \ldots x_n)$ hely is mindig benne van e tartományban, ha $|h_1|$ elég kicsiny és megalkotjuk az

$$\frac{f(x_1+h_1, x_2, x_3, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{h_1}$$

hányadost, akkor azon esetben, ha ezen hányadosnak $h_1=0$ helyen van véges és meghatározott határértéke, ezt a határértéket az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ függvény x_1 szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük és így jelöljük: $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, vagy f'_{x_1}, $D_{x_1} f$. Egészen hasonlóan értelmezzük a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\ldots$ $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ számértékeket.

Így például, ha az adott függvény: x^2-y^2, akkor $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$; vagy ha $f(x, y)=\sin(x-y)$, akkor $f'_x=\cos(x-y)$ és $f'_y=-\cos(x-y)$. Vagy ha $f(x, y)=e^{x^2-y^2}$, akkor $\frac{\partial f}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}$. Ha

$$f(x, y, z)=(xy+yz+zx)^n, \text{ akkor: } \frac{\partial f}{\partial x}=n(xy+yz+zx)^{n-1}(y+z);$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=n(xy+yz+zx)^{n-1}(z+x); \quad \frac{\partial f}{\partial z}=n(xy+yz+zx)^{n-1}(x+y).$$

2. A véges növekmény. Az egyváltozós $f(x)$ függvényről tudjuk, hogy ha valamely x helyen differenciálható, akkor

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

-ből következik, hogy $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\eta$, ahol $\lim\limits_{h=0} \eta=0$. Ezt a tételt akarjuk kiterjeszteni a többváltozós függvényre. Legyen adva $f(x, y)$ függvény, mely a T tartomány minden helyén úgy az x, mint az y szerint differenciálható [azaz a T minden helyén van véges parciális differenciálhányadosa úgy az x, mint az y szerint]. És legyen (a, b) e T tartomány valamely *belső* helye, amin azt értjük, hogy van olyan két szám h és k, hogy az (a, b), $(a+h, b)$, $(a+h, b+k)$, $(a, b+k)$ pontok által alkotott derékszögű négyszög egészen benne van a T tartományban. Készítsük el ezt a különbséget:

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a, b),$$

vagyis az $f(x, y)$ függvény növekményét az előbb említett derékszögű négyszög (a, b) és $(a+h, b+k)$ csúcsaira vonatkozólag. Ezt a növekményt $f(a, b+k)$ közbeiktatásával így írhatjuk:

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b).$$

Ha az eredeti $f(x, y)$ függvényben $y=b+k$ konstans értéket tesszük, akkor az $f(x, b+k)$ egyváltozós függvény lesz belőle. Geometriai szemléletben ez azt jelenti, hogy a $z=f(x, y)$ által ábrázolt felületet az (x, z) síkkal párhuzamos s tőle $b+k$ távolságban levő $y=b+k$ síkkal metszettük. A metszésvonal vetületét az (x, z) síkon a $z = f(x, b+k)$ egyenlet állítja elő. Az $f(x, b+k)$ egyváltozós függvény mindazon x értékekre nézve, melyek a $b+k$-val, mint másik koordinátával együtt a T tartományba eső pontot ábrázolnak [tehát az (x, y) síkon az $y=b+k$ egyenes azon szakaszában, mely a T-be esik] differenciálható és így erre az $f(x, b+k)$ egyváltozós függvényre ez a középértéktétel alkalmazható:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = f'_x(a+\vartheta h, b+k)\, h \quad 0<\vartheta<1.$$

A jobboldalon álló kifejezés azt jelenti, hogy az $f(x, b+k)$ az x szerint differenciálandó és a differenciálhányados az $a+\vartheta h$ helyen veendő; vagyis az $f(x, y)$ az x szerint differenciálandó és ez a differenciálhányados az $x=a+\vartheta h$, $y=b+k$ helyen veendő. Éppen így az $f(a, y)$ egyváltozós függvény is differenciálható a $b \ldots b+k$ közben tehát alkalmazható a középértéktétel, minek alapján:

$$f(a, b+k) - f(a, b) = k f'_y(a, b+\vartheta_1 k) \quad 0<\vartheta_1<1.$$

Így tehát az előbbi Δ növekmény:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f'_x(a+\vartheta h, b+k)\,.\,h + f'_y(a, b+\vartheta_1 k)\,.\,k. \qquad A)$$

Ezt tekinthetjük a középértéktétel általánosításának. Ezen alak helyett azonnal egyszerűbbet és könnyebben áttekinthetőt írunk; de már a középértéktétel jelenlegi alakjából is fontos következtetést vonhatunk a függvényre. És pedig: *Ha az $f(x, y)$ parciális diff. hányadosai az (a, b) helyen és e helynek egy kis környezetében is egy megadható M véges számnál kisebb abszolut értéküek, akkor az $f(x, y)$ ezen az (a, b) helyen folytonos.* Ennek a bizonyítása végett csak arra van szükségünk, hogy megmutassuk, hogy egy tetszés szerinti kis ε számhoz található az (a, b) olyan környezete, melyen belül fekvő $(a+h, b+k)$ pontokon $|f(a+h, b+k) - f(a, b)| < \varepsilon$. Evégből legyen δ olyan kicsiny, hogy $2M\delta<\varepsilon$, azaz $\delta < \frac{\varepsilon}{2M}\cdot$ Ha már most $|h|<\delta$, $|k|<\delta$, és az $(a-\delta, b-\delta)$; $(a-\delta, b+\delta)$; $(a+\delta, b+\delta)$;

$(a+\delta, b-\delta)$ négyzetben teljesítve van az, hogy az $|f'_x|$ és $|f'_y|$ kisebbek M-nél, akkor az $A)$ alatt a jobboldalon álló kifejezés absz. értékre kisebb az ε-nál, tehát $|f(a+h, b+k) - f(a, b)| < \varepsilon$, ha $(a+h, b+k)$ az előbb említett 2δ szélességű négyzet bármelyik helye. Ezzel kimutattuk, hogy az $f(x, y)$ az (a, b) helyen folytonos.

[Ha visszaemlékszünk az egyváltozós függvénynél e tekintetben mondottakra, (I. 106. l.) észre vesszük, hogy jelentékeny különbség van a mostani és az akkori állításunk között. Az egyváltozós $f(x)$ függvényre abból, hogy az a helyen differenciálható, már következett, hogy folytonos. Most ez nem volt elég; mert még arra is szükségünk volt, hogy a differenciálhányadosok absz. értékei az (a, b) hely elég kis környezetében korlátosak legyenek.]

A középértéktételt kissé más alakra hozzuk. Ugyanis azon esetben, midőn a differenciálhányadosok az (a, b) helyen folytonosak, az $f'_x(a+\vartheta h, b+k)$ az $f'_x(a, b)$-től elenyésző csekéllyel különbözik, ha h és k végtelen csekélyekké válnak, vagyis:

$$\lim_{h=0,\, k=0} f'_x(a+\vartheta h, b+k) = f'_x(a, b).$$

Hasonlóképpen: $$\lim_{k=0} f'_y(a, b+\vartheta_1 k) = f'_y(a, b).$$

Írjunk tehát $f'_x(a+\vartheta h, b+k)$ helyett $f'_x(a, b)+\eta_1$-t és $f'_y(a, b+\vartheta_1 k)$ helyett $f'_y(a, b)+\eta_2$-t, akkor η_1 és η_2 zérussá válnak, ha h és k zérushoz konvergálnak. Az η_1 és η_2 bevezetésével tehát az $A)$ alatti középértéktétel ilyen alakra jut:

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=f'_x(a, b)\, h+f'_y(a, b)\, k+\eta_1 h+\eta_2 k$$

$$\lim_{h=0,\, k=0} \eta_1=0 \quad \lim_{h=0,\, k=0} \eta_2=0.$$

Ha (a, b) helyett (x, y)-t írunk és annak a feltüntetésére, hogy h az x növekménye, helyette Δx-et, k helyett pedig, amely az y növekménye, Δy-t írunk és az $f(x, y)$-t röviden z-vel, az $f(x+h, y+k)-f(x, y)$ növekményt pedig Δz-vel jelöljük, erre az alakra jutunk:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y+\eta_1 \Delta x+\eta_2 \Delta y$$

$$\lim_{h=0,\, k=0} \eta_1 = 0, \quad \lim_{h=0,\, k=0} \eta_2 = 0.$$

A Δz növekményt a z függvény teljes (totális) növekményének is szoktuk mondani, annak a megjelöléseül, hogy nemcsak az x-et, hanem az y-t is megnöveszteltük. Ha Δx és Δy végtelen csekélyekké válnak, akkor η_1 és η_2 is eltünnek. Ennek a feltüntetésére a következő szimbolikus jelölést használjuk, amivel egyúttal, ha a jelölés igazi jelentését nem tévesztjük szem elől, sokszor könnyen operálhatunk is. Az x végtelen kis növekményét dx-szel és megfelelően a többi növekményeket dy és dz-vel jelölve, írhatjuk, hogy:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

amivel azonban nem akarunk egyebet kifejezni, mint azt, hogy az előbbi η_1 és η_2 elenyésznek, ha a változók végtelen csekéllyel változnak. E formulában a dx, dy, dz *differenciálok* és pedig a dz a *totális differenciál*.

A véges növekményre vonatkozó tételt két változós függvényre állapítottuk meg. Egészen hasonló gondolatmenettel vezethető le a megfelelő tétel n változós függvény esetében is. Hogy lássuk a gondolatmenet alkalmazását, nézzük a háromváltozós: $u = f(x, y, z)$ függvényt, melyről feltesszük, hogy az (a, b, c) hely környezetében mind a három parciális differenciálhányadosa létezik.

Az $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$ növekmény így alakítható át:

$$f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b+k, c+l) + f(a, b+k, c+l) - f(a, b, c).$$

De az $\qquad f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b+k, c+l)$

úgy tekinthető, mint az $f(x, b+k, c+l)$ egyváltozós függvény növekménye az $x=a$ helyen; tehát a középértéktétel szerint:

$$f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b+k, c+l) = hf'_x(a+\vartheta h, b+k, c+l)$$

és a következő két tag: $f(a, b+k, c+l) - f(a, b, c)$ pedig úgy tekinthető, mint az $f(a, y, z)$ kétváltozós függvény növekménye a b, c helyen, tehát a kétváltozós függvényre vonatkozó középértéktétel szerint:

$$f(a, b+k, c+l) - f(a, b, c) = f'_y(a, b+\vartheta_1 k, c+l)\, k + f'_z(a, b, c+\vartheta_2 l)\, l$$

és így:
$$\Delta u = f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c) =$$
$$= hf'_x(a+\vartheta h, b+k, c+l) + kf'_y(a, b+\vartheta_1 k, c+l) + lf'_z(a, b, c+\vartheta_2 l)$$

és ha a differenciálhányadosok az (a, b, c) helyen folytonosak, ez megint átalakítható:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y + \eta_3 \Delta z$$

alakra, ahol $\lim \eta_1 = 0$, $\lim \eta_2 = 0$, $\lim \eta_3 = 0$, ha Δx, Δy, Δz limesze $= 0$.

n változós függvény esetében is, ha $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ és x_i növekménye: Δx_i,

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + \eta_1 \Delta x_1 + \eta_2 \Delta x_2 + \cdots + \eta_n \Delta x_n,$$

vagy pedig szimbolikus alakban az y totális differenciálja:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Így például, ha $u = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, akkor:

$$du = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}[x\,dx + y\,dy + z\,dz].$$

3. Közvetett differenciálás. Általános differenciálási szabály. Legyenek $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a t változónak egy bizonyos $\alpha \ldots \beta$ közben differenciálható függvényei, továbbá a $z=f(x, y)$ az x és y változóknak egy T tartományban folytonos differenciálhányadossal bíró függvénye. Ha (x, y) mindig a T-ben marad, amidőn t az $\alpha \ldots \beta$ közben mozog, akkor, mint már láttuk, a z voltaképpen a t függvénye e közben:

$$z=f[\varphi(t), \psi(t)].$$

Feladatul tűzzük ki, hogy e z függvénynek a t változó szerinti differenciálhányadosát állítsuk elő. Hogy jobban föltüntessük, hogy a z voltaképpen a t változó függvénye, írjuk így: $z=F(t)$.

[Így például, ha $z=x^2-y^2$ és $x=\cos t$, $y=\sin t$, akkor $z=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t$.]

Az $F(t)$ differenciálhányadosának előállítása végett megnöveszt-jük a t-t Δt-vel és megalkotjuk az

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}$$

hányadost, azután pedig ennek a határértékét vesszük $\Delta t=0$-ra. Ha a t értékét Δt-vel növeljük, akkor az x megváltozik Δx-el, az y pedig Δy-al, tehát az $f(x, y)$-ból $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ lesz.

Így tehát a z növekménye a t-nek Δt-vel való változtatása folytán:

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x+\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y+\eta_1 \Delta x+\eta_2 \Delta y$$

és ebből: $$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t}+\eta_1 \frac{\Delta x}{\Delta t}+\eta_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Ha már most Δt zérussá lesz, akkor Δx és Δy szintén zérussá lesznek, mert $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ folytonosak, továbbá $\frac{\Delta x}{\Delta t}$-ből az $x=\varphi(t)$-nek a t helyhez tartozó differenciálhányadosa válik, amit $\frac{dx}{dt}$-vel jelölünk; éppen így $\lim\limits_{\Delta t=0} \frac{\Delta y}{dt}=\frac{dy}{dt}$ lesz. Minthogy pedig $\lim \eta_1=\lim \eta_2=0$, $\frac{dx}{dt}$, meg $\frac{dy}{dt}$ végesek, tehát az utolsó két tag limese: 0, vagyis:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Az a gondolatmenet, amelyet most követtünk, azonnal alkalmazható n változó esetében is. Ha $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n változós függvény minden változó szerint parciálisan differenciálható és mindenik parciális differenciálhányados folytonos, továbbá:

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t), \ldots\ x_n=\varphi_n(t)$$

a t változónak az $\alpha \ldots \beta$ szakaszban differenciálható függvényei, akkor az $y=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ voltaképpen a t változó függvénye és

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Azok a differenciálási szabályok, amelyek összeg, szorzat stb. differenciálására vonatkoztak, tulajdonképen mind e tételnek speciális esetei.

Itt azzal az esettel foglalkoztunk, midőn az $x_1, x_2, \dots x_n$ egyetlen változótól függöttek. Sokszor megesik, hogy az n változó: $x_1, x_2, \dots x_n$ más k számú változónak, pl. $y_1, y_2, \dots y_k$-nak függvényei. Ha már most az f függvény az $x_1, x_2, \dots x_n$ változók szerint egy bizonyos T tartományban differenciálható és a differenciálhányadosok folytonosak, továbbá $x_1, x_2, \dots x_n$ az $y_1, y_2, \dots y_k$ változók bizonyos τ tartományában differenciálhatók mindenik k változó szerint, végre ha, amidőn az $(y_1, y_2, \dots y_k)$ a τ-ban mozog, az $(x_1, x_2, \dots x_n)$ a T-ben marad, akkor az f függvény voltaképpen az $y_1, y_2, \dots y_k$ függvényének tekinthető és az f-nek ezen k változó szerinti parciális differenciálhányadosai:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_k}.$$

Ez a differenciálási eljárás az általános differenciálási szabály. Nagyon könnyen észben tartható. Hogy először csak a legegyszerűbb esetet tartsuk szem előtt, azt látjuk, hogy ha az n változó mindegyike a t függvénye, akkor az f függvénynek a t szerinti differenciálhányadosát megkapjuk, ha az f-et egyenkint minden változó szerint differenciáljuk, e differenciálhányadosokat az illető változó t szerinti differenciálhányadosával megszorozzuk és az így nyert n szorzat összegét vesszük. Ugyanígy teszünk akkor is, ha az n változó nem egyetlen t változó függvénye, hanem több változótól függ és az f-nek e változók egyike szerinti parciális differenciálhányadosát keressük. Egy-két példa megvilágosítja ezt az eljárást.

1. Példa. Legyen adva $f(x, y)$ és tegyük $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, vagyis az x, y helyébe vezessük be az r és t változókat, vagyis az orthogonális koordináták helyett az ú. n. poláris koordinátákat. Határozzuk meg az így átalakított (x, y)-nak r, azután t szerinti differenciálhányadosait:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos t + \frac{\partial}{\partial y}\sin t,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -r\frac{\partial f}{\partial x}\sin t + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos t.$$

Így például, ha $f(x, y) = x^2 - y^2$; akkor az r és t szerinti differenciálhányadosok mindjárt r és t-ben kifejezve:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=2x\cos t-2y\sin t=2r\cos^2 t-2r\sin^2 t=2r\cos 2t.$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-2rx\sin t-2ry\cos t=-4r^2\sin t\cos t=-2r^2\sin 2t.$$

2. *Példa.* Az $f(x,y,z)$ háromváltozós függvényben gömbi koordinátákat vezetünk be oly módon, hogy a tér valamely $P(x,y,z)$ pontját az $OP=r$ távolsággal és az egységsugarú gömb azon pontjával jellemezzük, amelyben az OP vektor e gömböt metszi. Jelöljük e metszéspontot P_1-gyel, továbbá az OP_1-nek a z tengellyel alkotott szögét φ-vel és a z tengelyen meg a P ponton átmenő síknak az xz síkhoz való hajlásszögét ψ-vel, akkor P koordinátái:

$$z=r\cos\varphi;\quad x=r\sin\varphi\cos\psi;\quad y=r\sin\varphi\sin\psi.$$

Fejezzük ki az $f(x,y,z)$-nek az r, φ és ψ szerinti diff. hányadosait:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi\cos\psi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\sin\psi+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=$$

$$=r\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi\cos\psi+r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\sin\psi-r\frac{\partial f}{\partial z}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \psi}=-r\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi\sin\psi+r\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\cos\psi,$$

mert $\frac{\partial z}{\partial \psi}=0$. [$z$ nem függ a ψ-től!]

4. A középértéktétel egyszerűbb alakja. Legyen adva az $f(x,y)$ kétváltozós függvény, melyről feltesszük, hogy a T tartomány minden helyén úgy az x, mint az y szerint differenciálható és hogy e parciális differenciálhányadosok még folytonosak is. Szemeljük ki a tartomány (a,b) helyét és legyen h és k két megadott számérték úgy, hogy az $(a+h, b+k)$ hely is a T tartományba essék, sőt az (a,b) és $(a+h, b+k)$ összekötő egyenese is egészen benne legyen e tartományban. Ezen összekötő egyenes minden közbenső pontjának koordinátái így írhatók: $a+ht$, $b+kt$ és ha t a $0\ldots1$ szakaszt futja be, akkor ezen az egyenesen az (a,b)-től $(a+h, b+k)$-ig haladunk. Tegyük most $f(x,y)$-ban $x=a+ht$, $y=b+kt$ és jelöljük a t változó ezen $f[a+ht, b+kt]$ függvényét röviden $F(t)$-vel. Előbbi megjegyzésünk szerint: $F(0)=f(a,b)$; $F(1)=f(a+h, b+k)$. Az $F(t)$ függvény, mely az (a,b), $(a+h, b+k)$ egyenes mentén megegyezik az $f(x,y)$-al, a t változónak $0\ldots1$ szakaszában mindenütt differenciálható, tehát az egyváltozós függvényre vonatkozó középértéktétel szerint:

$$F(1)-F(0)=F'(\vartheta),$$

ahol ϑ egy, a $0\ldots1$ szakaszban levő közbenső hely. Állítsuk elő az $F'(\vartheta)$-t. Evégből először az $F'(t)$ számítandó ki, mint a t közvetett függvényének differenciálhányadosa.

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

De $x=a+ht$, $y=b+kt$, tehát $\frac{dx}{dt}=h$, $\frac{dy}{dt}=k$ és így:

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k.$$

Megjegyezzük, hogy itt az x helyébe $a+ht$, az y helyébe: $b+kt$ irandó. Most már $F'(\vartheta)$-t ebből úgy nyerjük, hogy t helyébe a ϑ közbenső értéket, azaz $x=a+h\vartheta$, $y=b+k\vartheta$-t tesszük.

$$F'(\vartheta)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=a+h\vartheta\\ y=b+k\vartheta}}h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=a+h\vartheta\\ y=b+k\vartheta}}k,$$

tehát, ha $F(1)$ helyébe megint visszatesszük az $f(a+h,b+k)$ és $F(0)$ helyébe az $f(a,b)$ értéket, akkor:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f'_x(a+h\vartheta,b+k\vartheta)\,h+f'_y(a+h\vartheta,b+k\vartheta)\,k.$$

Ez a középértéktétel új alakja, amely teljesen szimmetrikus, amennyiben úgy az x, mint az y szerinti differenciálhányados ugyanazon ϑ-val veendő.

Ennél a tételnél az egyváltozós függvényre vonatkozó középértéktételt használtuk, amelynél nem volt egyébre szükségünk, mint arra, hogy ezen egyváltozós függvény az egész szakaszban differenciálható legyen. Látszólag tehát nem használtuk fel azt, amit a tétel bevezetésében feltettünk, hogy t. i. a parciális differenciálhányadosok folytonosak. De valóságban felhasználtuk, mert hiszen a közvetett differenciálás szabályának megállapításánál is fel kellett tennünk a differenciálhányadosok folytonosságát és a t szerinti differenciálásnál a közvetett differenciálást alkalmaztuk.

Ha általában $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ egy bizonyos T tartományban minden helyen parciálisan differenciálható és e differenciálhányadosok folytonosak, továbbá úgy az $(a_1, a_2, \dots a_n)$, mint az $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots a_n+h_n)$ hely benne van a T-ben, sőt minden $(a_1+h_1t, a_2+h_2t, \dots a_n+h_nt)$ is benne van a T-ben, ha $0\leq t\leq 1$, akkor $x_1=a_1+h_1t$, $x_2=a_2+h_2t, \dots x_n=a_n+h_nt$ téve:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)=f(a_1+h_1t, a_2+h_2t, \dots a_n+h_nt)=F(t)$$

és $F(1)=f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots a_n+h_n)$, $F(0)=f(a_1, a_2, \dots a_n)$;

továbbá az egyváltozós függvény középértéktétele szerint:

$$F(1)-F(0)=F'(\vartheta).$$

De: $$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n$$

és így: $$F'(\vartheta)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)_{\substack{x_1=a_1+\vartheta h_1\\ x_2=a_2+\vartheta h_2\ldots}}$$

tehát: $$\begin{aligned}f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n)-f(a_1, a_2, \ldots a_n)&=\\ =f'_{x_1}(a_1+\vartheta h_1, a_2+\vartheta h_2, \ldots a_n+\vartheta h_n)\,h_1+\cdots&+\\ +f'_{x_n}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n)\,h_n&\end{aligned}$$

a középértéktétel általános alakja.

A középértéktétel ezen alakjából azonnal következtethetjük, hogy ha *valamely összefüggő tartomány minden helyén az összes parciális differenciálhányadosok értéke:* 0, *akkor e tartományban az illető függvény konstans értékű.* Ha a függvény konstans, azonnal látjuk a differenciálhányados értelmezéséből, hogy a differenciálhányadosok minden helyen eltünnek. Most e tétel megfordításáról van szó. Tegyük fel, hogy a T tartományban mindenütt: $f'_x(x, y)=0$, $f'_y(x, y)=0$. Szemeljük ki e tartománynak két tetszés szerinti helyét: (a, b)-t és (a_1, b_1)-et. Azt kell megmutatni, hogy $f(a, b)=f(a_1, b_1)$. Ha az (a, b) az $(a_1\, b_1)$-el egy, a tartományban vonuló egyenessel összeköthető, akkor $a_1=a+h, b_1=b+k$ téve, az előbbi tételt alkalmazhatjuk:

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=hf'_x(a+\vartheta h, b+\vartheta k)+kf'_y(a+\vartheta h, b+\vartheta k).$$

De a jobboldalon álló differenciálhányadosok eltünnek, tehát $f(a+h, b+k)=f(a, b)$. Ha pedig (a_1, b_1) az (a, b)-vel a tartományban vonuló egyenessel nem köthető össze (pl. U alakú a tartomány), akkor véges számú pontot iktatunk a két szélső pont közé úgy, hogy mindegyik az előzővel e tartományban vonuló egyenessel összeköthető legyen. Ha az így közbeiktatott pontok (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_i, \beta_i)$, akkor az előbbi szerint kimutatjuk, hogy

$$f(a, b)=f(\alpha_1, \beta_1);\; f(\alpha_1, \beta_1)=f(\alpha_2, \beta_2)\ldots\; f(\alpha_i, \beta_i)=f(a_1, b_1),$$

tehát megint igazoltuk, hogy a tartomány tetszés szerinti két helyén vett függvényértékek egyenlők: $f(a, b)=f(a_1, b_1)$.

5. Implicit függvény. Implicit függvényről korán kellett már beszélnünk; de általános fogalmát nem adhattuk. A most tárgyalandók tehát némiképpen a régiek kiegészítésére is szolgálnak. Legyen adva az $f(x, y)$ kétváltozós függvény, mely az (a, b) helyen: 0. Ezt úgy is képzelhetjük, hogy az $x=a$ értékhez az $y=b$ értéket, vagyis azt az értéket rendeljük hozzá, amely az a-val együtt az $f(x, y)$-t zérussá teszi.

A kérdés az, megoldhatjuk-e az

$$f(x, y)=0$$

egyenletet y-ra nézve, azaz *adott* (a-hoz közeli) x értékhez tartozik-e y-nak olyan értéke, hogy $f(x, y)=0$ legyen?

Tegyük fel, hogy úgy a $\frac{\partial f}{\partial x}$, mint a $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális differenciálhányadosok az (a, b) hely valamely környezetében, mondjuk például az $|x-a|<d$, $|y-b|<d$ környezetben, folytonos függvények és tegyük fel továbbá, hogy $\frac{\partial f}{\partial y}$ az (a, b) helyen a 0-tól *különböző* C szám. Ha C pozitiv és B a C-nél valamivel kisebb pozitiv szám, akkor a $\frac{\partial f}{\partial y}$ folytonosságából következik, hogy az (a, b) helynek van olyan környezete, amelyen belül $\frac{\partial f}{\partial y}$ mindenütt nagyobb ennél a B pozitiv számnál. Ha pedig C negativ volna és B valamivel nagyobb negativ szám mint C, akkor az (a, b)-nek van olyan környezete, amelyen belül $\frac{\partial f}{\partial y}$ mindig kisebb a B negativ számnál. Akár az egyik, akár a másik eset forog fenn, az (a, b)-nek van olyan környezete, amelyen belül az $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ egy pozitiv $|B|$-nél nagyobb, tehát $\frac{\partial f}{\partial y}$ zérussá nem válik, a jelét nem változtatja. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy az (a, b) helyen $\frac{\partial f}{\partial y}$ pozitiv, tehát az imént említett B szám pozitiv és olyan tartomány, amelyen belül $\frac{\partial f}{\partial y}>B$: az $|x-a|\leq\delta$, $|y-b|\leq\delta$ (és $\delta<d$). E tartományban $\frac{\partial f}{\partial x}$ véges és folytonos és így egy bizonyos A pozitiv számnál kisebb absz. értékű és $\frac{\partial f}{\partial y}>B>0$.

Ha $|h|\leq\delta$, $|k|\leq\delta$, akkor a középértéktétel szerint, minthogy $f(a, b)=0$,

$$f(a+h, b+k)=f'_x(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\, h+f'_y(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\, k.$$

Válasszuk most a $|h|$-t egyrészt a δ-nál kisebbre, másrészt azonban úgy, hogy még ezen felül:

$$|Ah|<B\delta$$

legyen. Minthogy az $|f'_x(x, y)|$ az egész $|x-a|\leq\delta$, $|y-b|\leq\delta$ tartományban kisebb az A-nál és $f'_y(a+\vartheta h, b+\vartheta k)>B$, tehát ha $k=\pm\delta$ tesszük, akkor az $f(a+h, b+k)$ kifejezésében a jobboldalon álló első tag absz. értékre nézve kisebb a második tag absz. értékénél és így $f(a+h, b+k)$ olyan jelű, mint e második tag. Minthogy f'_y pozitiv a megjelölt tartományban, tehát ha $k=\delta$ tesszük, akkor $f(a+h, b+\delta)$ pozitiv, ha pedig $k=-\delta$ tesszük, $f(a+h, b-\delta)$ negativ.

Arra jutottunk tehát, hogy ha h egy meghatározott számérték, amelyről csak annyit tettünk fel, hogy

$$|h|<\delta \quad \text{és} \quad |Ah|<B\delta,$$

akkor $f(a+h, b+\delta)>0$ és $f(a+h, b-\delta)<0$; vagy más jelöléssel:

$$f(x, b+\delta) > 0,$$
$$f(x, b-\delta) < 0,$$

ha
$$|x-a| \leq \delta \text{ és } |A(x-a)| < B\delta.$$

Minthogy pedig $f(x, y)$ az y folytonos függvénye és $f_y(x, y)>0$, azaz $f(x, y)$ növekszik, amint (x állandó lévén) y a $b-\delta$-tól $b+\delta$-ig halad, tehát a $-\delta \cdots +\delta$ közben van egyetlenegy olyan k érték, amelyre nézve:

$$f(x, b+k) = 0.$$

Látjuk tehát, hogy nem csak az a számértékhez tartozik olyan b számérték, amely az a-val együtt az $f(a, b)=0$-ra vezet, vagyis nemcsak az (a, b) helyen tűnik el az $f(x, y)$, hanem egy bizonyos szakaszban minden x számértékhez is tartozik olyan $b+k$ számérték, amelyre nézve $f(x, b+k)=0$. Így tehát ha x az a körül egy bizonyos utat tesz meg, akkor mindig tartozik hozzá egyetlen olyan y a $b-\delta \ldots b+\delta$ szakaszban, amellyel együtt $f(x, y)=0$. Legyen δ' a δ és $\left|\frac{B\delta}{A}\right|$ számok közül a kisebbik. Az $(a-\delta' \ldots a+\delta')$ közben tehát y az x-nek egyértékű függvénye, mert az $a-\delta' \ldots a+\delta'$ szakasz minden x helyéhez az $f(x, y)=0$ reláció által a $(b-\delta \ldots b+\delta)$ szakaszból egy meghatározott y érték rendeltetett. Legyen $y=\varphi(x)$. Az $f(x, y)=0$ által az előbb jellemzett módon értelmezett $y=\varphi(x)$ függvényt implicit függvénynek nevezzük. A $\varphi(x)$ a szóban forgó $a-\delta' \ldots a+\delta'$ szakaszban x-nek egyértékű függvénye.

Azonnal beláthatjuk, hogy a $\varphi(x)$ implicit függvény egyúttal folytonos is. Ugyanis, ha az $a+h$-hoz tartozó y érték: $b+k$, akkor

$$f(a+h, b+k) = 0 = f'_x(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\, h + f'_y(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\, k,$$

tehát:
$$k = -\frac{f'_x(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\, h}{f'_y(a+\vartheta h, b+\vartheta k)} \qquad B)$$

és minthogy a számlálóban álló f'_x a szóban forgó szakaszban véges, a nevező pedig feltételünk szerint B-nél nagyobb, tehát $|k| < m|h|$ (m véges pozitiv szám), amiből látjuk, hogy k a h-val együtt elenyészik, vagyis az $y=\varphi(x)$ az a helyen folytonos. De ha nem az (a, b) helytől, hanem az (a, b) környezetének egy más (belső) helyéről indultunk volna ki, akkor ugyanígy következett volna, hogy $\varphi(x)$ azon a helyen folytonos; tehát az egész $a-\delta' \ldots a+\delta'$ szakaszban folytonos.

Sőt tovább is mehetünk és kimutathatjuk, hogy a $\varphi(x)$ implicit függvény differenciálható az egész $a-\delta' \ldots a+\delta'$ szakaszban. Ugyanis az előbbi *B)* alatt álló egyenletből következik, hogy:

$$\frac{k}{h} = -\frac{f'_x(a+\vartheta h, b+\vartheta k)}{f'_y(a+\vartheta h, b+\vartheta k)}$$

és minthogy f'_x-ról és f'_y-ról föltettük, hogy az (a, b) helyen folytonosak és a nevező egy bizonyos B-nél nagyobb, tehát:

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = -\frac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)}.$$

Minthogy k az y növekménye, ha h az x növekménye, tehát $\lim\limits_{h=0} \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx}$ az (a, b) helyen. Ugyanígy következtethetünk az $a-\delta' \ldots a+\delta'$ köz minden x helyére nézve.

Ezzel egy igen egyszerű szabályt kaptunk az implicit függvény differenciálására: Az $f(x, y)=0$ által az y mint az x függvénye van értelmezve oly módon, hogy y-nak x szerinti diff. hányadosa:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

A jobboldalon álló kifejezésben $y = \varphi(x)$ helyettesítendő. Ez a formula csakis akkor alkalmazható, ha a nevező nem 0. Ezen nevezetes differenciálási szabályra az előbbi meggondolások nélkül is eljuthattunk volna, ha az implicit függvény *létezését* föltételezzük. Ekkor ugyanis így okoskodhatunk. Az $f(x, y)=0$ az x és y minden összetartozó értékénél; tehát ha ezen egyenlet által értelmezett $y=\varphi(x)$ implicit függvényt képzeljük az y helyébe téve, akkor:

$$f[x, \varphi(x)] = 0$$

minden x értékre nézve. Minthogy ez a függvény állandóan: 0, tehát a differenciálhányadosa is 0. Az általános differenciálási szabályt alkalmazva:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

miből ismét:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

6. **Többváltozós implicit függvény.** Előbb láttuk, hogy az $f(x, y)=0$ az y-t mint az x függvényét értelmezte. Ha már most adatik az $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$ $n+1$ változós függvény, (melyben az utolsó változót az előzőktől jól megkülönböztettük), és $f(a_1, a_2, \ldots a_n, b) = 0$ akkor az

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0$$

reláció által y mint az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók függvénye van értelmezve az $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\ldots$ $x_n=a_n$; $y=b$ hely környezetében, ha az $(a_1, a_2, \ldots a_n, b)$ hely környezetében:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

folytonosak és az utolsó az $(a_1, a_2, \ldots a_n, b)$ helyen a 0-tól különböző.

Minthogy e parciális differenciálhányadosok folytonosak, tehát megállapítható az $(a_1, a_2, \ldots a_n, b)$ olyan környezete, pl.

$$|x_1-a_1| \leq \delta, \ |x_2-a_2| \leq \delta, \ldots \ |x-a_n| \leq \delta, \ |y-b| \leq \delta,$$

amelyen belül mindenütt a $\frac{\partial f}{\partial y}$, mely az $(a_1, a_2, \ldots a_n, b)$ helyen nem 0, egy bizonyos B pozitiv számnál absz. értékre nézve nagyobb. Ugyancsak ezen környezetben a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ differenciálhányadosok pedig egy bizonyos A számnál absz. értékre nézve kisebbek.

A középértéktétel szerint (minthogy $f(a_1, a_2, \ldots a_n, b)=0$)

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n, b+k) = \qquad A)$$
$$=f'_{x_1}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, h_1 + f'_{x_2}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, h_2+\cdots+$$
$$+f'_{x_n}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, h_n + f'_y\,(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, k.$$

Válasszuk a $h_1, h_2, \ldots h_n$ mennyiségeket úgy, hogy egyrészt mindegyik kisebb legyen absz. értékre nézve δ-nál, másrészt azonban, a legnagyobbik absz. értékét h-val jelölve:

$$nAh < B\delta$$

legyen. Ekkor az $A)$ alatti jobboldalán álló első n tag összegének absz. értéke:

$$|f'_{x_1} h_1+f'_{x_2} h_2+\cdots+f'_{x_n} h_n| < nAh < B\delta.$$

Az $A)$ alatt álló utolsó tagban pedig k helyett $\pm\delta$-t téve:

$$|f'_y(a_1+\vartheta h_1, a_2+\vartheta h_2, \ldots a_n+\vartheta h_n, b\pm\vartheta\delta)\,\delta| > B\delta,$$

tehát az $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n, b+\delta)$ olyan jelű, mint az $A)$ alatti egyenlőség jobboldalának utolsó tagja. De ez a kifejezés a δ-val együtt a jelét változtatja

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n, b+k)$$

$k=+\delta$-nál pozitiv (ha t. i. $\frac{\partial f}{\partial y}>0$, ellenkező esetben negativ), $k=-\delta$-nál negativ (pozitiv), tehát az

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n, y)$$

egyváltozós függvény a $b-\delta \ldots b+\delta$ szakaszban legalább egy helyen zérussá lesz. Két vagy több helyen nem lehet 0, mert akkor e helyek között kellene olyan közbenső helynek is lenni, amelyen $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, ami feltételünkkel ellenkezik. Így tehát minden: $x_1, x_2, \ldots x_n$ értékhez, ha ez az*

$$|x_1-a_1| < \delta', \ |x_2-a_2| < \delta', \ldots \ |x_n-a_n| < \delta'$$

tartományban van: tartozik egy meghatározott y érték, amely a $b-\delta \ldots b+\delta$ szakaszba esik, úgy, hogy: $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y)=0$.

Az y tehát e tartományban mint az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók egyértékű függvénye van értelmezve az $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y)=0$ reláció által. y így írható:

* δ'-al jelöltük a δ és a $\frac{B\delta}{nA}$ közül a kisebbiket.

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

és $f[x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)]$ minden, az illető tartományba eső $x_1, x_2, \ldots x_n$-re nézve: 0.

Azonnal beláthatjuk, hogy ez a most értelmezett y függvény az $x_1, x_2, \ldots x_n$ folytonos, sőt mindenik változó szerint differenciálható függvénye. Ugyanis ha az $a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n$ értékekhez tartozó y érték: $b+k$, akkor

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_n+h_n, b+k) = 0 =$$

$$= f'_{x_1}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, h_1 + \cdots + f'_{x_n}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, h_n +$$

$$+ f'_y(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, k,$$

miből:

$$k = -\frac{f'_{x_1}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)\, h_1 + \cdots + f'_{x_n}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b_n+\vartheta k)\, h_n}{f'_y(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n+\vartheta h_n, b+\vartheta k)} \qquad B)$$

és minthogy a nevező absz. értéke nagyobb B-nél, tehát e tört zérussá lesz, ha $h_1, h_2, \ldots h_n$ zérussá válnak; vagyis ha az $x_1, x_2, \ldots x_n$ az $a_1, a_2, \ldots a_n$-től elenyésző csekéllyel különböznek, akkor y is a b-től végtelen kicsinnyel tér el. Az y tehát az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ helyen folytonos. Ha $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ helyett más helyet választanánk az $a_1-\delta' \ldots a_1+\delta', \ldots, a_n-\delta' \ldots a_n+\delta'$ tartományban, azt találnók, hogy azon a helyen is folytonos az y; tehát az egész értelmezési tartományban folytonos.

Ha $h_2 = h_3 = \cdots = h_n = 0$ tesszük, akkor a $B)$ alattiból:

$$\frac{k}{h_1} = -\frac{f'_{x_1}(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n, b+\vartheta k)}{f'_y(a_1+\vartheta h_1, \ldots a_n, b+\vartheta k)};$$

minthogy pedig feltételünk szerint az f parciális differenciálhányadosai az $(a_1, a_2, \ldots a_n, b)$ helyen folytonosak, ebből következik, hogy

$$\lim_{h_1=0} \frac{k}{h_1} = -\frac{f'_{x_1}(a_1, a_2, \ldots a_n, b)}{f'_y(a_1, a_2, \ldots a_n, b)},$$

vagyis (az $a_1, a_2, \ldots a_n, b$) helyen:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Éppen így kapjuk sorban az y implicit függvénynek az $x_2, \ldots x_n$ szerinti differenciálhányadosait; vagyis:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}, \ldots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ugyanerre az eredményre juthatunk, ha meggondoljuk, hogy

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

téve az f függvényben:

$$f[x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)] = 0$$

minden, az y értelmezési tartományába tartozó $x_1, x_2, \ldots x_n$ értéknél; tehát a baloldalon álló függvénynek az $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerinti differenciálhányadosai is eltűnnek. Differenciáljuk ezt az identitást pl. x_1 szerint. x_1 két helyen szerepel: az első helyen és az $y = \varphi(x_1 \ldots x_n)$-ben; a többi változó az x_1-től független. Az általános differenciálási szabály szerint tehát:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \text{miből:} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

miként előbb találtuk. Éppen így kapjuk a többi differenciálhányadost.

7. **Két egyenletből álló rendszer megoldása.** Az előzőkben azt láttuk, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0$ reláció által azon esetben, midőn valamely helyen $f=0$, de $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, az illető hely környezetében egy meghatározott y függvény van értelmezve. Ezt a relációt tehát a függvény egy értelmezési módjának tekinthetjük. Más szóval ez annyit jelent, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0$ egyenletet az y-ra nézve megoldottuk, midőn y-t az első n változónak olyan $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ függvénye gyanánt állítottuk elő, amelyre nézve identikusan érvényes az

$$f[x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)] = 0$$

egyenlőség.

Most ezen az úton tovább megyünk. Legyen adva két függvény:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, y, z), \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, y, z),$$

melyekben az utolsó két változót az első n változótól megkülönböztetésül y-nal és z-vel jelöltük.

Tegyük fel, hogy $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n, y = b, z = c$ kielégítik ezt a két egyenletet:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, y, z) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, y, z) = 0$$

és tegyük fel továbbá még azt is, hogy úgy az f, mint a φ, valamint az összes elsőrendű differenciálhányadosok e hely környezetében folytonosak és azon kívül még ez a determináns:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ezen a helyen a 0-tól különböző. Ekkor tehát megállapítható e helynek olyan környezete, amelyen belül ezen determináns egy bizonyos B pozitiv számnál nagyobb absz. értékű. Az $a_1, a_2, \ldots a_n, b, c$ helyen $\frac{\partial f}{\partial y}$ és $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ nem lehetnek mindketten 0-sal egyenlők, mert hiszen akkor a fölírt determináns is zérus lenne; tegyük fel, hogy az első: $\frac{\partial f}{\partial y}$ a 0-tól különböző. [Az f és φ betűk felcserélésével ezt mindig tehetjük.] Ekkor tehát az előbbiek szerint az első egyenletből y mint az $x_1, x_2, \ldots x_n, z$ változók egyértékű, folytonos és minden változó szerint differenciálható függvénye számítható ki, mely az $(a_1, a_2, \ldots a_n, c)$ hely bizonyos környezetében van értelmezve és az y is, miként előbb láttuk, egy bizonyos $b-\delta \ldots b+\delta$ szakaszban marad. Legyen az így meghatározott

$$y = \psi(x_1, x_2, \ldots x_n, z).$$

Helyettesítsük y ezen értékét a $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, y, z) = 0$ egyenletbe. Feladatunk most a z-nek meghatározása a

$$\varphi[x_1, x_2, \ldots x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots x_n, z), z] = 0$$

egyenletből. Ez az egyenlet a z-re nézve akkor oldható meg, ha az $(a_1, a_2, \dots a_n, b, c)$ helyen a φ függvénynek z szerinti differenciálhányadosa a 0-tól különböző. Számítsuk ki ezt a differenciálhányadost.

A φ függvényben z két helyen szerepel: a $\psi(x_1, \dots x_n, z)$-ben és az utolsó helyen. Hogy zavar ne legyen, jelöljük a φ-nek a z szerinti differenciálhányadosát, melyet a z-nek mindkét helyen való tekintetbevételével nyertünk, $\frac{d\varphi}{dz}$-vel, ellenben a z-nek csakis az utolsó helyen való tekintetbe vételével nyert diff. hányadost: $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$-vel. Eszerint tehát: [$\psi$ helyett y-t írva]

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

De az $f(x_1, x_2, \dots x_n, y, z) = 0$-ból:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

tehát:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right].$$

Minthogy feltettük, hogy a zárójelben álló determináns az $(a_1, a_2, \dots a_n, b, c)$ helyen nem 0, tehát e helyen $\frac{d\varphi}{dz}$ 0-tól különböző véges szám és így a

$$\varphi[x_1, x_2, \dots x_n, \psi(x_1, x_2, \dots x_n, z), z] = 0$$

egyenlettel z mint az $x_1, x_2, \dots x_n$ függvénye van értelmezve. Ha z-nek ezen értelmezését tekintetbe vesszük az $y = \psi(x_1, x_2, \dots x_n, z)$-nél, akkor az y is voltaképpen mint az $x_1, x_2, \dots x_n$ függvénye értelmeztetett, vagyis az $(a_1, a_2, \dots a_n)$ hely valamely környezetében minden $x_1, x_2, \dots x_n$ értékhez egyetlen egy (y, z) értékrendszer tartozik. E szerint tehát, ha

$$(x_1, x_2, \dots x_n, y, z) \quad \text{és} \quad \varphi(x_1, x_2, \dots x_n, y, z)$$

az $(a_1, a_2, \dots a_n, b, c)$ helyen eltűnnek és e hely környezetében egyértékűek, folytonosak és folytonos differenciálhányadosokkal rendelkeznek, továbbá a $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ determináns a 0-tól különböző, akkor az

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, y, z) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots x_n, y, z) = 0$$

egyenletek az y és z mennyiségeket e környezetben mint az $x_1, x_2, \dots x_n$ változók egyértékű függvényeit értelmezik. Minthogy pedig csak az előbbi pontban követett eljárás kétszeres alkalmazásával jutottunk ehhez az eredményhez, azt is hozzátehetjük, hogy az y és z függvények az $x_1, x_2, \dots x_n$ szerint differenciálhatók. E differenciálhányadosok meghatározása most már nagyon egyszerű. Ha ugyanis az $f=0$, $\varphi=0$ egyenletekben y és z helyett a most értelmezett differenciálható függvényeket képzeljük helyettesítve, akkor tehát a szóban forgó környezet minden $x_1, x_2, \dots x_n$ helyén:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, y, z) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots x_n, y, z) = 0$$

identitások állanak fenn; tehát a baloldalon álló kifejezések differenciálhányadosai is eltűnnek. Differenciáljunk x_i szerint. Az általános differenciálási szabály szerint:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}=0;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}=0$$

és minthogy a $\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$, tehát ezen egyenletek $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $\frac{\partial z}{\partial x_i}$-re megoldhatók.

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix}};\quad \frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x_i}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix}}.$$

8. **Több egyenletből álló rendszer megoldása.** Végül ugyanezzel a feladattal egész általánosságban is foglalkozunk. Legyen adva a következő n függvény:

$$f_1(x_1, x_2, \dots x_p, y_1, y_2, \dots y_n),\ f_2(x_1, x_2, \dots x_p, y_1, y_2, \dots y_n), \dots,$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots x_p, y_1, y_2, \dots y_n),$$

ahol az első p változót az utolsó n-től jól megkülönböztettük. És tegyük fel, hogy ha $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots x_p=a_p$; $y_1=b_1, y_2=b_2, \dots y_n=b_n$, akkor

$$f_1(a_1, a_2, \dots a_p, b_1, \dots b_n)=0,\ f_2(a_1, a_2, \dots a_p, b_1, \dots b_n)=0, \dots$$
$$f_n(a_1, a_2, \dots a_p, b_1, b_2, \dots b_n)=0,$$

továbbá a megadott n függvény az $(a_1, a_2, \dots a_p, b_1, \dots b_n)$ valamely környezetében, például:

$$|x_1-a_1|<\delta,\ |x_2-a_2|<\delta, \dots |x_p-a_p|<\delta,\ |y_1-b_1|<\delta, \dots |y_n-b_n|<\delta$$

tartományban mindenütt egyértékű, véges, folytonos, sőt az összes parciális differenciálhányadosok is folytonosak és amit külön hangsúlyozunk, a $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ differenciálhányadosokból alkotott determináns:

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}, & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

az $a_1, a_2, \dots a_p, b_1, \dots b_n$ helyen 0-tól különböző. Ezen esetben a δ úgy választható, hogy a D determináns az egész tartományban egy bizonyos pozitív B számnál nagyobb absz. értékű.

Azt állítjuk már most és ebben van az eddigiek általánosítása, hogy megállapítható az $(a_1, a_2, \dots a_p)$ olyan környezete, amelyen belül fekvő minden $x_1, x_2, \dots x_p$ helyhez az $y_1, y_2, \dots y_n$ változóknak egyetlen egy meghatározott értékrendszere tartozik a $(b_1, b_2, \dots b_n)$ hely bizonyos környezetében, amely $y_1, y_2, \dots y_n$ értékek az $x_1, x_2, \dots x_p$-vel együtt az

$$f_1(x_1, \dots x_p, y_1, \dots y_n)=0,\ f_2(x_1, \dots x_p, y_1, \dots y_n)=0, \dots f_n(x_1, \dots x_p, y_1, \dots y_n)=0$$

egyenleteket kielégítik, vagyis ezen egyenletek által az $y_1, y_2, \dots y_n$ az

$(a_1, a_2, \dots a_p)$ környezetében mint az $x_1, x_2, \dots x_p$ változók egyértékű függvényei értelmeztetnek. Ezek az implicit függvények az $(a_1, a_2, \dots a_p)$ környezetében egyértékűek, folytonosak és a p számú $x_1, \dots x_p$ változó szerint differenciálhatók és ha $x_1=a_1, \dots x_p=a_p$, akkor: $y_1=b_1, \dots y_n=b_n$. A D determinánst az $f_1, f_2, \dots f_n$ függvények $y_1, y_2, \dots y_n$ szerinti *függvény-determinánsának* nevezzük és sokszor így is jelöljük:

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \dots f_n}{y_1, y_2, \dots y_n}\right). \qquad A)$$

Ha tehát $D\left(\frac{f_1, f_2, \dots f_n}{y_1, y_2, \dots y_n}\right) \neq 0$ az $(a_1, a_2, \dots a_p, b_1, \dots b_n)$ helyen és az

$$f_1=0, f_2=0, \dots f_n=0$$

egyenleteket az $x_1=a_1 \dots x_p=a_p$, $y_1=b_1 \dots y_n=b_n$ kielégítik, akkor meghatározhatók az $y_1, y_2, \dots y_n$ mint az $x_1, x_2, \dots x_p$ olyan egyértékű differenciálható függvényei, amelyek az $a_1, a_2, \dots a_p$ környezetében minden $x_1, x_2, \dots x_p$-re nézve az

$$f_1(x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_n)=0, \dots f_n(x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_n)=0$$

egyenleteket kielégítik. Ezek az $y_1 \dots y_n$ függvények e megadott egyenletek megoldásai.

A tételt, mely az implicit függvények létezését kimondja, teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Tegyük fel ugyanis, hogy ez a tétel érvényes $n-1$ egyenlet esetében, amint hogy 2 egyenlet esetében már bebizonyítottuk az érvényességét. Ebből fogjuk következtetni, hogy n egyenlet esetében is érvényes.

A D determináns nem 0; tehát legalább egyik aldeterminánsa nem 0. A jelölés esetleges változtatásával mindig elérhetjük, hogy az utolsó elemhez tartozó aldetermináns, vagyis a

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \dots f_{n-1}}{y_1, y_2, \dots y_{n-1}}\right)$$

az $(a_1, a_2, \dots a_p, b_1, b_2, \dots b_n)$ helyen a 0-tól különböző legyen. Akkor tehát feltételünk szerint az $y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ meghatározhatók az $x_1, x_2, \dots x_p$ és y_n olyan egyértékű, differenciálható függvényei gyanánt, amelyek az $(a_1, a_2, \dots a_p, b_n)$ bizonyos környezetében fekvő minden $x_1, x_2, \dots x_p, y_n$ helyen kielégítik az

$$f_1=0, f_2=0, \dots f_{n-1}=0$$

egyenleteket. Legyenek ezek az így értelmezett függvények:

$$y_1=\varphi_1(x_1 \dots x_p, y_n);\ y_2=\varphi_2(x_1 \dots x_p, y_n), \dots\ y_{n-1}=\varphi_{n-1}(x_1 \dots x_p, y_n), \qquad \alpha)$$

vagyis fönnállanak minden $x_1 \dots x_p, y_n$-re nézve (melyek a szóban forgó tartományban vannak) ezek az identitások:

$$f_1[x_1 \dots x_p, \varphi_1(x_1 \dots x_p, y_n), \dots \varphi_{n-1}(x_1 \dots x_p, y_n), y_n]=0; \dots$$
$$f_{n-1}[x_1 \dots x_p, \varphi_1(x_1 \dots x_p, y_n), \dots \varphi_{n-1}(x_1 \dots x_p, y_n), y_n]=0.$$

Minthogy ez egyenletek baloldalain csakis $x_1 \dots x_p, y_n$ fordulnak elő, rövidség kedveért írjuk a föntebbi egyenleteket így:

$$F_1(x_1 \dots x_p, y_n)=0,\ F_2(x_1 \dots x_p, y_n)=0, \dots\ F_{n-1}(x_1 \dots x_p, y_n)=0.$$

Ezek identikusan, azaz minden, a szóban forgó tartományhoz tartozó $x_1 \dots x_p, y_n$ értékre nézve fennállanak. Nézzük most az utolsó

$$f_n(x_1 \ldots x_p, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n)$$

függvényt, melyet eddigelé még nem vettünk tekintetbe.

Ha figyelembe vesszük, hogy az itt szereplő $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ az előbbiek szerint már az $x_1 \ldots x_p, y_n$ függvényei (egyértékű, differenciálható függvények), akkor voltaképpen ez az f_n is csak az $x_1 \ldots x_p, y_n$ függvénye. Ennek feltüntetésére megint így írjuk:

$$f_n(x_1 \ldots x_p, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, y_n) \equiv F_n(x_1 \ldots x_p, y_n).$$

Keressük most az y_n-et, mint az $x_1 \ldots x_p$ olyan függvényét, mely az $f_n=0$, vagy $F_n=0$ egyenletnek eleget tesz, ha $x_1 \ldots x_p$ az $a_1 \ldots a_p$ elég kis környezetében vannak. Nyilvánvaló, hogy ha $x_1 = a_1, \ldots x_p = a_p$ és $y_n = b_n$ tesszük, akkor $F_n(a_1, \ldots a_p, b_n)$ eltűnik; mert hiszen a vele megegyező $f_n(a_1 \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_n)$ feltételünk szerint 0. Hogy tehát az említett környezetben az $F_n=0$ egyenlet y_n-re megoldható legyen, azaz y_n mint az $x_1 \ldots x_p$ egyértékű, differenciálható függvénye legyen előállítható, ahhoz elégséges, hogy az $(a_1 \ldots a_p, b)$ helyen

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$$

a 0-tól különböző legyen. Ezt kell tehát kiszámítanunk. Minthogy az y_n az $f_n(x_1, x_2, \ldots x_p, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, y_n)$-ben n helyen szerepel: a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$-ben és y_n-ben, tehát az általános differenciálási szabály szerint (áttekinthetőség végett a $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ helyett megint $y_1 \ldots y_{n-1}$-et írunk)

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_n} = \frac{\partial f_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_n} + \frac{\partial f_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_n} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}. \qquad \beta)$$

Az itt szereplő $\frac{\partial y_i}{\partial y_n}$ $(i=1, 2, \ldots n-1)$ parciális differenciálhányadosokat már ismerjük mint az $x_1 \ldots x_p, y_n$ függvényeit, ugyanis az $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$-et már az első $n-1$ egyenletből meghatároztuk. E differenciálhányadosok kiszámítására tekintetbe vesszük, hogy fönnáll identikusan ez az $n-1$ egyenlet:

$$f_1(x_1 \ldots x_p, y_1 \ldots y_{n-1}, y_n) = 0, \ldots, f_{n-1}(x_1 \ldots x_p, y_1 \ldots y_{n-1}, y_n) = 0,$$

Differenciáljuk ezt az $n-1$ identitást y_n szerint:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_n} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_n} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_n} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_n} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial f_2}{\partial y_n} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_n} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_n} + \cdots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_n} = 0.$$

Ebből az $n-1$ egyenletből kell az $n-1$ számú $\frac{\partial y_i}{\partial y_n}$ mennyiséget kiszámítani [ami lehetséges, mert a rendszer determinánsa föltételünk szerint nem 0] és a $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$ $\beta)$ alatti kifejezésébe helyettesíteni.

Még egyszerűbb lesz a dolog, ha ehhez az $n-1$ egyenlethez n-iknek írjuk a $\beta)$ alattit és az így nyert n egyenletből a $\frac{\partial y_1}{\partial y_n}, \frac{\partial y_2}{\partial y_n}, \ldots \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_n}$ $n-1$ mennyiséget elimináljuk. Az elimináció eredménye:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}, \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} - \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis
$$D\left(\frac{f_1 \dots f_{n-1}}{y_1 \dots y_{n-1}}\right) \cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = D\left(\frac{f_1 \dots f_n}{y_1 \dots y_n}\right)$$

és minthogy az itt szereplő függvénydeterminánsok föltételünk szerint a szóban forgó helyen nem tűnnek el és folytonosak, tehát a $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$ az $(a_1, a_2, \dots a_p, b_n)$ helyen nem 0 és e hely környezetében folytonos, tehát az $F_n=0$ egyenletből y_n mint az $a_1 \dots a_p$ hely környezetében levő $x_1 \dots x_p$ egyértékű, differenciálható függvénye adódik:

$$y_n = \psi_n(x_1, x_2, \dots x_p).$$

Helyettesítsük be y_n most nyert értékét az *a)* alatti $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$-be. $\varphi_i(x_1 \dots x_p, y_n)$-ből $x_1, x_2, \dots x_p$ függvénye: $\psi_i(x_1 \dots x_p)$ lesz és így:

$y_1=\psi_1(x_1 \dots x_p)$; $y_2=\psi_2(x_1 \dots x_p)$; ... $y_{n-1}=\psi_{n-1}(x_1 \dots x_p)$ és az $y_n=\psi_n(x_1 \dots x_p)$

az $(a_1 \dots a_p)$ környezetében olyan egyértékű differenciálható függvények, amelyek az

$$f_1=0, f_2=0, \dots f_n=0$$

egyenleteket kielégítik. Ezzel tehát az implicit függvények létezésének bebizonyítása n egyenlet esetében is megtörtént.

Minthogy most már tudjuk, hogy ha az *A)* alatti függvénydetermináns nem 0, akkor $y_1 \dots y_n$ differenciálhatók az $x_1 \dots x_p$ szerint, e differenciálhányadosokat az adott egyenletekből közvetlenül ki is számíthatjuk. Ugyanis ha az

$$f_1=0, f_2=0, \dots f_n=0$$

identitásokat [melyekben már az $y_1 \dots y_n$ változókat mint az $x_1 \dots x_p$ függvényeit képzeljük] az x_i szerint differenciáljuk, akkor a

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0 \quad (k=1, 2, \dots n)$$

rendszerre jutunk és ebből a rendszerből $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_i}$ kiszámíthatók. Így kapjuk a

$$D\left(\frac{f_1 \dots f_n}{y_1 \dots y_n}\right)\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = -D\left(\frac{f_1 \dots n}{y_1 \dots y_{j-1}\, x_i\, y_{j+1} \dots y_n}\right) \quad (j=1, 2, \dots n)$$

megoldásokat.

9. Inverz függvények. Már régebben megállapítottuk az inverz függvény fogalmát és az inverz függvény differenciálási szabályát; de inkább a szemléleten alapuló eljárással, a monoton emelkedő görbéből kiindulva. Most már az implicit függvény általános értelmezésével kapcsolatban az inverz függvényt is általánosabban értelmezhetjük.

Ha ugyanis adva van y mint az x függvénye: $y=f(x)$ és $f(a)=b$, továbbá $f'(x)$ az a helyen nem zérus és e hely környezetében folytonos, akkor megállapítható e helynek olyan környezete, amelyen belül $f'(x)$ sehol sem 0. Tekintsük most az

$$y-f(x)$$

kétváltozós függvényt, mely az $x=a$ és $y=f(a)=b$ helyen eltűnik és melynek x szerinti parciális differenciálhányadosa nem tűnik el, akkor az implicit függvényre vonatkozó tárgyalásból kifolyólag az $y-f(x)=0$ egyenlet x-re megoldható, vagyis x előállítható az y egyértékű, differenciálható függvénye gyanánt úgy, hogy b valamely környezetébe eső minden y értékhez egyetlen egy x érték tartozik és az

$$y-f(x)=0$$

egyenletet minden összetartozó (x, y) értékpár kielégíti. Az így értelmezett x függvény az $f(x)$-nek inverz függvénye. [$y=\sin x$ inverz függvénye $x=\arcsin y$. A $\sin x$ invertálható mindazon szakaszokban, melyeken belül $(\sin x)'$, azaz $\cos x \neq 0$; tehát pl. a $-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$ szakaszban, amit már régebben láttunk.]

Általánosabban is értelmezhető az inverz függvény. Ha ugyanis:

$$y_1=f_1(x_1, \ldots x_n),\ y_2=f_2(x_1, \ldots x_n), \ldots\ y_n=f_n(x_1, \ldots x_n)$$

n egyértékű, differenciálható függvény adatik és az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyen az $y_1, y_2, \ldots y_n$ a $b_1, b_2, \ldots b_n$ értékeket veszik fel, azaz:

$$b_1=f_1(a_1, \ldots a_n),\ b_2=f_2(a_1, \ldots a_n), \ldots\ b_n=f_n(a_1, \ldots a_n)$$

továbbá az $f_1, f_2, \ldots f_n$ függvények függvénydeterminánsa, $D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots f_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right)$ az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyen nem 0 és az első parciális differenciálhányadosok e hely környezetében folytonosak, akkor az $f_1, f_2, \ldots f_n$ függvényrendszer invertálható, azaz $x_1, x_2, \ldots x_n$ értelmezve vannak ezen egyenletrendszer által a $b_1, b_2, \ldots b_n$ környezetében mint az $y_1, y_2, \ldots y_n$ egyértékű, differenciálható függvényei:

$$x_1=\varphi_1(y_1, \ldots y_n),\ x_2=\varphi_2(y_1, \ldots y_n), \ldots\ x_n=\varphi_n(y_1, \ldots y_n).$$

Ezt az állítást az implicit függvényekre vonatkozó tárgyalásaink alapján azonnal bebizonyíthatjuk. Ugyanis az előbbi egyenletek így írhatók:

$$y_1-f_1(x_1, \ldots x_n)=0,\ y_2-f_2(x_1, \ldots x_n)=0, \ldots\ y_n-f_n(x_1, \ldots x_n)=0$$

és a baloldalon álló kifejezéseket az $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ változók függvényeinek tekinthetjük. Ezen függvényeknek $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerinti funkcionális determinánsa nem más, mint az $f_1 \ldots f_n$ függvények funkcionális determinánsa (esetleg ellenkező jellel), tehát föltételünk szerint nem 0, tehát az egyenletrendszer az $x_1, x_2, \ldots x_n$-re megoldható és az így értelmezett $x_1, x_2, \ldots x_n$ függvények az $y_1=b_1$, $y_2=b_2, \ldots y_n=b_n$ környezetében a jelzett tulajdonságokkal birnak.

Az inverz függvény differenciálhányadosai is most már könnyen megállapíthatók az implicit függvényre vonatkozó differenciálási szabállyal, vagy közvetlenül is. Ha ugyanis az

$$y_1=f_1(x_1 \ldots x_n),\ y_2=f_2(x_1 \ldots x_n), \ldots\ y_n=f_n(x_1 \ldots x_n)$$

jobboldalain az $x_1, \ldots x_n$ helyébe a $\varphi_1(y_1 \ldots y_n)$, $\varphi_2(y_1 \ldots y_n), \ldots \varphi_n(y_1 \ldots y_n)$ inverz függvényeket képzeljük, akkor

$$y_1 = f_1[\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n],\ y_2 = f_2[\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n], \dots\ y_n = f_n[\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n]$$

identitásokra jutunk és ha ezen identitásokat pl. y_1 szerint differenciáljuk, akkor $[\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ helyett $x_1, x_2, \dots x_n$-et írva]

$$1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}$$

$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}$$

egyenletrendszerre jutunk, melyből, minthogy a rendszer determinánsa 0-tól különböző, a $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots \frac{\partial x_n}{\partial y_1}$ parciális differenciálhányadosok kiszámíthatók. Ha a

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \dots f_n}{x_1, x_2, \dots x_n}\right)$$

determináns első sorához tartozó aldeterminánsokat röviden $D_1, D_2, \dots D_n$-el jelöljük, akkor:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \frac{D_i}{D}$$

egyenletekre jutunk. Hasonlóan állítjuk elő az $y_2, y_3, \dots y_n$ szerinti parciális differenciálhányadosokat.

A legegyszerűbb esetben, midőn $n=1$, tehát $y=f(x)$ inverziója esetében: $D=f'(x)$, tehát

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)},$$

amint már régebbről tudjuk.

10. A függvénydetermináns egy nevezetes tulajdonsága. Az implicit függvények tárgyalásában fontos szerepe volt a függvénydeterminánsnak, melyet *Jacobi*-féle determinánsnak is nevezünk (Jacobian). Az

$$f_1(x_1, x_2, \dots x_n),\ f_2(x_1, x_2, \dots x_n), \dots,\ f_n(x_1, x_2, \dots x_n)$$

n függvény függvénydeterminánsa, mint láttuk, a következő determináns:

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \dots f_n}{x_1, x_2, \dots x_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Látjuk, hogy n függvény esetében ez a determináns vitte ugyanazt a szerepet, amelyet egy függvény esetében a differenciálhányados töltött be. Minthogy még gyakran lesz alkalmunk e függvénydeterminánssal találkozni, már most megismerkedünk egyik-másik tulajdonságával.

Ha $y=f(x)$ egyváltozós függvény adatik és $x=\varphi(z)$ tesszük, akkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz}.$$

Megmutatjuk, hogy a differenciálhányados ezen tulajdonságával analog tulajdonsága van a függvénydeterminánsnak is. Legyen tehát adva az előbb felírt n függvény: $f_1, f_2, \ldots f_n$ és tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \ldots x_n$ a $z_1, z_2, \ldots z_n$ új változók differenciálható függvényei (a differenciálhányadosok folytonosak); akkor tehát az általános differenciálási szabály szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial z_i} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_i} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z_i} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial z_i} \\
\frac{\partial f_2}{\partial z_i} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_i} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z_i} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial z_i} \qquad (i=1, 2, \ldots n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial f_n}{\partial z_i} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_i} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z_i} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial z_i}.
\end{aligned}$$

Ezen egyenletekből a determinánsok szorzási tételével következik, hogy:

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots f_n}{z_1, z_2, \ldots z_n}\right) = D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots f_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right) D\left(\frac{x_1, x_2, \ldots x_n}{z_1, z_2, \ldots z_n}\right)$$

és ez az a tétel, amelyet a közvetett differenciálás általánosításának tekinthetünk.

Ha ebben az általános egyenletben $f_1, f_2, \ldots f_n$ betűk helyett $y_1, y_2, \ldots y_n$-et írunk és $z_1, z_2, \ldots z_n$ helyett is $y_1, y_2, \ldots y_n$-et teszünk, vagyis egyrészt az $y_1, y_2, \ldots y_n$-et az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók függvényeinek, másrészt pedig $x_1, x_2, \ldots x_n$-et az $y_1, y_2, \ldots y_n$ függvényeinek tekintjük, (tehát az inverz függvényeket vezetjük be), akkor ez az egyenlet a következő speciális alakú egyenlőséggé válik:

$$D\left(\frac{y_1, y_2, \ldots y_n}{y_1, y_2, \ldots y_n}\right) = D\left(\frac{y_1, y_2, \ldots y_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right) D\left(\frac{x_1, x_2, \ldots x_n}{y_1, y_2, \ldots y_n}\right)$$

és minthogy a baloldalon álló kifejezés: 1, tehát az inverz függvények funkcionális determinánsai között ez a reláció áll fönn:

$$D\left(\frac{y_1, y_2, \ldots y_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right) D\left(\frac{x_1, x_2, \ldots x_n}{y_1, y_2, \ldots y_n}\right) = 1.$$

11. Függvények közötti összefüggés. Ha x és y változóknak ezen egyszerű függvényeit tekintjük:

$$u = x + y, \quad v = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

akkor minden (x, y) értékpárhoz egy u és egy v érték tartozik; de minthogy $v = u^3$, tehát a v kiszámításához nincs is szükségünk az x és az y értékekre, elég ha ismerjük az x és y u függvényét. Azt látjuk, hogy itt v az u függvénye, a két függvény között a $v = u^3$ összefüggés áll fenn. Ez természetesen csak kivételes eset. Ha például

$$u = x - y, \quad v = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

akkor $$v = (u + 2y)^3 = -(u - 2x)^3,$$

tehát a v meghatározásához az u ismerete nem elégséges, ehhez vagy az x és y, vagy u és y, vagy u és x szükséges.

Ha $u = \varphi(x, y)$ és $v = \psi(x, y)$ függvények az (x, y) bizonyos közös tartományában vannak értelmezve és közöttük $v = f(u)$ reláció, vagy $F(u, v) = 0$ reláció áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy u és v függvények egymástól *nem függetlenek*; ellenkező esetben, vagyis ha u értékkészletéből a v értékeit meghatározni nem lehet, vagyis x és y-tól független $F(u, v) = 0$ alakú reláció az u és v között nem áll fönn, akkor azt mondjuk, hogy u és v egymástól *függetlenek*.

Általában, ha

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_p);\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_p);\ \ldots\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_p)\ (n \leq p)$$

és az $u_1, u_2, \ldots u_n$ között az $F(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0$ reláció áll fenn, melyben az $x_1, x_2, \ldots x_p$ elő sem fordul, akkor az $u_1, u_2, \ldots u_n$ függvények egymástól nem függetlenek.

Mi a kritériuma az ilyen összefüggésnek? Legyen egyszerűség kedveért n változó n (differenciálható) függvénye:

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n),\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n),\ \ldots\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

és ezek között álljon fenn ez a reláció:

$$F(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0$$

az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók valamely összefüggő tartományában; azaz, ha $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e tartomány bármely helyét jelenti, a hozzá tartozó $u_1, u_2, \ldots u_n$ értékek kielégítik az $F=0$ egyenletet, vagyis ha $u_1, u_2, \ldots u_n$ helyébe a megfelelő $\varphi_1(x_1 \ldots x_n)$, $\varphi_2(x_1 \ldots x_n)$, $\ldots$ $\varphi_n(x_1 \ldots x_n)$ függvényeket képzelnők, az $F=0$ identikusan állna fenn. Minthogy tehát az F mint az $x_1, x_2, \ldots x_n$ függvénye identikusan 0, tehát $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerinti differenciálhányadosai is eltünnek, vagyis fennállanak ezek az egyenletek:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0
\end{gathered}$$

és minthogy nem lehet, hogy minden $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial u_n}$ identikusan 0 legyen, mert ez azt jelentené, hogy F az $u_1, u_2, \ldots u_n$-et egyáltalában nem is tartalmazza, tehát kell, hogy e rendszer determinánsa 0 legyen, vagyis:

Ha az $u_1, u_2, \ldots u_n$ függvények egymástól nem függetlenek, akkor az $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerinti függvénydeterminánsuk egyenlő zérussal:

$$D\left(\frac{u_1, u_2, u_3, \ldots u_n}{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n}\right) = 0.$$

Így például az előbb példaképpen említett esetben:

$$u_1 = x_1 + x_2;\quad u_2 = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3.$$

$$D\left(\frac{u_1, u_2}{x_1, x_2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 \\ 1 & 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Még ennél is fontosabb a most kimondott tétel következő megfordítása: *Ha e függvények*

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n),\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n),\ \ldots\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

egy bizonyos tartományban vannak értelmezve és

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right) = 0$$

a tartomány minden helyén (identikusan 0), akkor az $u_1, u_2, \dots u_n$ nem függetlenek egymástól, közöttük legalább egy $F(u_1, u_2, \dots u_n)=0$ reláció áll fenn minden, e tartományba eső $x_1, x_2, \dots x_n$-re. A differenciálható függvények determinánsának eltűnése a tartomány minden helyén a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy e tartományban értelmezett $u_1, u_2, \dots u_n$ függvények között reláció legyen.

Tegyük fel először, hogy a D determináns valamelyik aldeterminánsa nem tűnik el identikusan, vagyis van a tartománynak olyan $a_1, a_2, \dots a_n$ helye, amelyen ez az aldetermináns nem 0; akkor, minthogy a differenciálhányadosokat folytonosaknak képzeljük, e helynek van olyan környezete, amelyen belül ez az aldetermináns nem 0. A betűk némi változtatásával elérhetjük, hogy ez az el nem tűnő aldetermináns a D determináns utolsó sorának utolsó eleméhez tartozó aldetermináns legyen. Ez az aldetermináns

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \dots u_{n-1}}{x_1, x_2, \dots x_{n-1}}\right)$$

egyúttal az $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ függvényeknek az $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$-szerinti függvénydeterminánsa.

Az implicit függvényekre vonatkozó eredményeink szerint az $n-1$ számú:

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n),\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n), \dots$$
$$u_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n) \qquad \alpha)$$

egyenlet $(a_1, a_2, \dots a_{n-1})$ hely környezetében az $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ változókra megoldható, mert a rendszernek az $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ szerinti függvénydeterminánsa nem 0; tehát:

$$x_1 = \psi_1(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, x_n),\ x_2 = \psi_2(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, x_n), \dots$$
$$x_{n-1} = \psi_{n-1}(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, x_n) \qquad \beta)$$

és így az utolsó u_n függvény, mely eredetileg az $x_1, x_2, \dots x_n$ függvénye volt, az $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ és x_n függvényének tekinthető, azaz:

$$u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots x_n) =$$
$$= \varphi_n[\psi_1(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, x_n), \psi_2(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, x_n), \dots, \psi_{n-1}(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, x_n), x_n].$$

Azt állítjuk már most, hogy az u_n az x_n-től nem függ, vagyis, hogy a jobboldalon az x_n csak látszólag szerepel. Hogy ezt belássuk, csak azt kell megmutatni, hogy a jobboldalon álló függvénynek x_n szerinti differenciálhányadosa minden, a tartományban tekintetbe jövő x_n értékre nézve: 0, vagyis az x_n szerinti differenciálhányados identikusan: 0. A $\psi_1, \psi_2, \dots$ helyett megint $x_1, x_2, \dots$-t írva:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}, \qquad \gamma)$$

ahol a jobboldali $\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \frac{\partial x_2}{\partial x_n}, \dots$ kifejezéseken a $\beta)$ alatti $\psi_1, \psi_2, \dots$ függvények x_n szerinti differenciálhányadosai, vagyis az $\alpha)$ alatti $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ inverz függvényeinek x_n szerinti differenciálhányadosai értendők. Ezek kiszámítása végett állítsuk elő az $\alpha)$ alatti egyenletekből az x_n szerinti differenciálhányadosokat, figyelembe véve, hogy most $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ és x_n a független változók, tehát $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ az x_n-től függetlenek, vagyis

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_n} = \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}.$$

Ha most még ezen egyenletrendszerhez utolsónak hozzáírjuk a *γ)* alatti

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

egyenletet és ezen n egyenletből az $n-1$ számú $\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \frac{\partial x_2}{\partial x_n}, \ldots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$ mennyiséget elimináljuk, akkor a következő egyenletre jutunk:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis:
$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \cdot D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}}{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}}\right) = D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right)$$

és minthogy a jobboldali függvénydetermináns feltevésünk szerint 0, a baloldali pedig nem 0, tehát

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0,$$

amivel kimutattuk, hogy $u_n = \varphi_n(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-1}, x_n)$ az x_n-től független, vagyis $u_n = \overline{\varphi}_n(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$, azaz $u_1, u_2, \ldots u_n$ függvények között az

$$u_n - \overline{\varphi}_n(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}) = 0$$

reláció áll fenn.

E bizonyításnál szükséges volt annak a feltevése, hogy a D függvénydetermináns valamelyik aldeterminánsa nem 0, mert különben nem következtethettük volna, hogy $\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0$.

Ha azonban minden elsőrendű aldetermináns identikusan 0 és a másodrendű aldeterminánsok nem tűnnek el mindannyian, akkor is hasonlóan következtetünk. Tegyük fel ugyanis, hogy minden elsőrendű aldetermináns identikusan 0; de a másodrendű aldeterminánsok nem mindannyian zérusok. Az indexek némi változtatásával elérhetjük, hogy

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_{n-2}}{x_1, x_2, \ldots x_{n-2}}\right) \neq 0$$

és minthogy mindenik $n-1$ függvény Jacobi-féle determinánsa feltételünk szerint 0, tehát:

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_{n-1}}{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}}\right) = 0.$$

Ha x_n et egészen tekinteten kívül hagyjuk (nem soroljuk a változók közé, hanem parameternek tekintjük), akkor az előbbi tétel szerint következik, hogy az $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ nem független egymástól, hanem közöttük

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}) = 0$$

reláció áll fenn, melyben az $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ változók nem fordulnak elő, de x_n esetleg előfordulhat. Megmutatjuk, hogy x_n explicite ebben a relációban nem szerepelhet. Ugyanis ha ezt az identitást rendre $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerint differenciáljuk, akkor:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} = 0\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}$$

n egyenletre jutunk. Ha ezek közül az utolsóelőttit kihagyjuk és a megmaradt egyenleteket rendre a rendszer determinánsának, a

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{\partial u_1}{\partial x_{n-2}} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-2}}\\
\frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}
\end{vmatrix}$$

vagyis $D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_{n-1}}{x_1, x_2, \ldots x_{n-2}, x_n}\right)$ függvénydeterminánsnak az utolsó oszlophoz tartozó aldeterminánsaival szorozzuk és az így nyert egyenleteket összeadjuk, akkor $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}$ együtthatói mindannyian zérusok lesznek, mert föltételünk szerint minden $n-1$-edrendű függvénydetermináns 0, ellenben $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ szorzója a $\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}$ aldeterminánsa, vagyis az eredeti determináns $n-2$-edfokú aldeterminánsa, a $D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_{n-2}}{x_1, x_2, \ldots x_{n-2}}\right)$ lesz, mely föltételünk szerint nem 0. Tehát

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0,$$

vagyis a φ függvény x_n-et külön nem tartalmazza, tehát $\varphi = 0$ valóban az $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ közötti összefüggés. A $\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}$ kiszámítása igazolja, hogy e reláció az u_{n-1}-et okvetlenül tartalmazza. Így tehát ez esetben már az első $n-1$ függvény sem független egymástól; azaz fennáll $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}$ között egy identikus reláció. Hasonlóképen bizonyíthatjuk be egy reláció létezését $u_1, \ldots u_{n-2}, u_n$ között.

Ebből már azt is láthatjuk, hogyan kell tovább haladnunk. Ha minden $k<n$ függvénynek összes függvénydeterminánsai eltünnek, de már $k-1$ függvénynek nem mindenik függvénydeterminánsa zérus, akkor k függvény között van reláció és pontosabban: $n-k+1$ függvény a többi $k-1$ által kifejezhető. Így például (amit az indexek kellő választásával mindig elérhetünk), ha

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_{k-1}}{x_1, x_2, \ldots x_{k-1}}\right) \neq 0,$$

ellenben minden k-adrendű függvénydetermináns 0, akkor tehát

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \dots u_k}{x_1, x_2, \dots x_k}\right) = 0.$$

És ha $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$-re nem tekintünk, akkor főtételünk szerint következik, hogy az $u_1, u_2, \dots u_k$ nem függetlenek egymástól, vagyis közöttük

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_k) = 0$$

identikus reláció áll fenn. De ebben a relációban még az $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$ külön is előfordulhatnának. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. Tekintsük ezek közül egyiket, pl. az x_i változót $(i > k)$. Meg kell mutatnunk, hogy $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0$ minden x_i értékre nézve, tehát φ az x_i-től független. Evégből alkossuk meg a φ differenciálhányadosait $x_1, x_2, \dots x_{k-1}$ és x_i szerint:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_{k-1}} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_{k-1}} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Ha az egyenleteket a rendszer determinánsának utolsó oszlopa szerinti aldeterminánsaival szorozzuk, akkor ezt kapjuk:

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \dots u_{k-1}}{x_1, x_2, \dots x_{k-1}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0,$$

amiből feltételünk szerint következik, hogy $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0$. Ismét bebizonyíthatjuk, hogy $\frac{\partial\varphi}{\partial u_k} \neq 0$ és ilyen módon meg van állapítva, hogy $u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ kiszámíthatók $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$-ből.

12. Másodrendű parciális differenciálhányadosok. Ha az $f(x, y)$ két változós függvény egy bizonyos T tartomány minden helyén differenciálható, akkor tehát a $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális differenciálhányadosok e T tartomány minden helyén értelmezve vannak: tehát e tartományban az (x, y) függvényei. Tegyük fel, hogy e függvények úgy az x, mint az y szerint ismét differenciálhatók; akkor a differenciálás értelmezése szerint 4 új differenciálhányadoshoz jutunk: az f'_x-nek x és y szerinti és az f'_y-nak x és y szerinti differenciálhányadosaihoz. Ezek a következők:

$$\lim_{h=0}\frac{f'_x(x+h, y) - f'_x(x, y)}{h} \quad \text{és} \quad \lim_{k=0}\frac{f'_x(x, y+k) - f'_x(x, y)}{k},$$

valamint:

$$\lim_{h=0}\frac{f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)}{h} \quad \text{és} \quad \lim_{k=0}\frac{f'_y(x, y+k) - f'_y(x, y)}{k},$$

Ezeket a differenciálhányadosokat az eredeti $f(x, y)$ függvény második differenciálhányadosainak nevezzük és sorban így jelöljük:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

vagy rövidebben: $\quad f''_{xx}, \ f''_{xy}, \ f''_{yx}, \ f''_{yy},$

ahol a felső vonást némelykor el is hagyjuk, ha félreértés nem támadhat.

Így például, ha $f(x, y) = x^2 - y^2$, akkor

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y; \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yx} = 0, \quad f_{yy} = -2.$$

Vagy ha:
$$f(x, y) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$$

akkor:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - \frac{y^3}{x^2+y^2} = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y$$

és
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2x^2}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

és
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Már ezeknél a példáknál is észrevesszük, hogy $f_{xy} = f_{yx}$. Bebizonyítjuk egész általánosságban, hogy mindazokon a helyeken, amelyeken f_{xy} és f_{yx} az (x, y)-nak *folytonos* függvényei, e két parciális differenciálhányados tényleg megegyezik.

Legyen a (ξ, η) a T tartománynak olyan helye, amelyen f''_{xy} és f''_{yx} folytonosak. Legyen h és k két olyan számérték, hogy az a derékszögű négyszög, amelynek átellenes csúcsai (ξ, η) és $(\xi+h, \eta+k)$, a T tartományba tartozzék. Alkossuk meg ezt a kifejezést:

$$V = f(\xi+h, \eta+k) - f(\xi+h, \eta) - f(\xi, \eta+k) + f(\xi, \eta).$$

V-t kétféle alakban fogjuk írni; először így:

$$V = f(\xi+h, \eta+k) - f(\xi, \eta+k) - [f(\xi+h, \eta) - f(\xi, \eta)].$$

Vezessük be ezt a függvényt:*

$$\varphi(y) = f(\xi+h, y) - f(\xi, y), \tag{α}$$

akkor nyilván a V-ben szereplő $f(\xi+h, \eta) - f(\xi, \eta) = \varphi(\eta)$ és $f(\xi+h, \eta+k) - f(\xi, \eta+k) = \varphi(\eta+k)$ tehát:

$$V = \varphi(\eta+k) - \varphi(\eta) \tag{β}$$

és ha erre a középértéktételt alkalmazzuk:

$$V = \varphi(\eta+k) - \varphi(\eta) = k\varphi'(\eta+\vartheta k). \quad 0 < \vartheta < 1. \tag{γ}$$

* $\varphi(y)$ egyváltozós függvény, mert ξ és h meghatározott számértékek.

Az $\alpha)$ egyenlet két oldalát y szerint differenciáljuk:

$$\varphi'(y) = f'_y(\xi+h, y) - f'_y(\xi, y)$$

és minthogy az f'_y differenciálható x szerint, a jobboldalon a középértéktétel újból alkalmazható [most y változatlan!], tehát folytatólag:

$$\varphi'(y) = h f''_{yx}(\xi+\vartheta_1 h, y) \quad 0<\vartheta_1<1$$

és ha most y helyébe $\eta+\vartheta k$-t írunk és a $\varphi'(\eta+\vartheta k)$ ezen kifejezését $\gamma)$ alattiban helyettesítjük, akkor V ezen alakjára jutunk:

$$V = hk f''_{yx}(\xi+\vartheta_1 h, \eta+\vartheta k). \qquad A)$$

De a V még így is írható:

$$V = f(\xi+h, \eta+k) - f(\xi+h, \eta) - [f(\xi, \eta+k) - f(\xi, \eta)]$$

és ha most bevezetjük a

$$\psi(x) = f(x, \eta+k) - f(x, \eta)$$

egyváltozós függvényt, akkor azt látjuk, hogy:

$$V = \psi(\xi+h) - \psi(\xi).$$

Erre a középértéktételt alkalmazva:

$$V = h\psi'(\xi+\vartheta_2 h) \quad 0<\vartheta_2<1.$$

De a $\psi(x)$ értelmezése szerint:

$$\psi'(x) = f'_x(x, \eta+k) - f'_x(x, \eta)$$

és a jobboldalra ismét a középértéktételt alkalmazva:

$$\psi'(x) = k f''_{xy}(x, \eta+\vartheta_3 k), \quad 0<\vartheta_3<1,$$

miből: $$\psi'(\xi+\vartheta_2 h) = k f''_{xy}(\xi+\vartheta_2 h, \eta+\vartheta_3 k)$$

és innen végül: $$V = hk f''_{xy}(\xi+\vartheta_2 h, \eta+\vartheta_3 k). \qquad B)$$

A V $A)$ és $B)$ alatti alakjából következik, hogy:

$$f''_{yx}(\xi+\vartheta_1 h, \eta+\vartheta k) = f''_{xy}(\xi+\vartheta_2 h, \eta+\vartheta_3 k).$$

Azt látjuk ebből, hogy ha e második differenciálhányadosok léteznek, akkor a (ξ, η) hely bárminő kis környezetében van legalább két olyan hely (x', y') és (x'', y''), hogy $f_{yx}(x', y') = f_{xy}(x'', y'')$; de nem biztos, hogy a ξ, η helyen is megegyezik e két differenciálhányados. De ha mindkettő folytonos a ξ, η helyen, akkor a fönti egyenletben egyszerűen $h=0$, $k=0$ helyettesítésével kapjuk meg a ξ, η helyen való differenciálhányadosok értékeit; tehát ekkor:

$$f''_{yx}(\xi, \eta) = f''_{xy}(\xi, \eta).$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha (ξ, η) helyen úgy az f''_{xy}, mint az f''_{yx} folytonosak, akkor e két differenciálhányados megegyezik, vagyis akkor mindegy, akár a $\frac{\partial f}{\partial x}$-nek állítjuk elő az y szerinti differenciálhányadosát, akár pedig fordítva, a $\frac{\partial f}{\partial y}$-nak az x szerinti differenciálhányadosát vesszük.

13. Magasabb differenciálhányadosok. Most már nem okoz semmi nehézséget a magasabbrendű differenciálhányadosok értelmezése. Ha a másodrendű differenciálhányadosokat ismét differenciálhatjuk, akkor a harmadrendű differenciálhányadosokat kapjuk és ha e differenciálhányadosok folytonosak és megint tekintetbe vesszük, hogy folytonos differenciálhányadosok esetében a differenciálások sorrendje felcserélhető, akkor a következő különböző differenciálhányadosokra jutunk:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

vagy más jelöléssel:

$$f_{xxx}, \quad f_{xxy}, \quad f_{xyy}, \quad f_{yyy}$$

és általában a kétváltozós függvény n-ik differenciálhányadosai ezek:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^k},$$

ahol $i+k=n$. Az első: $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ jelölésünk szerint akkor keletkezik, ha $k=0$ tesszük, az utolsó: $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ pedig, ha $i=0$.

E differenciálhányadosok kiszámítása úgy, mint $n=2$ esetében, egymásutáni lépésekben történik. Ha már az n-ik differenciálhányadosok megállapíttattak, akkor ezeket x vagy y szerint differenciálva, megkapjuk az $n+1$-ik differenciálhányadosokat és pedig a $\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^k}$-ból, ha ezt x szerint differenciáljuk, keletkezik a $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{i+1} \partial y^k}$; vagy ha y szerint differenciáljuk, akkor a $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{k+1}}$ áll elő.

A többváltozós függvény differenciálhányadosai is ezen a módon értelmezhetők. Ha $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ parciális differenciálhányadosait, a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

-et rendre $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerint differenciáljuk és a sorrendre nem tekintünk, akkor az $\binom{n+1}{2}$ számú

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

második differenciálhányados keletkezik. Ha ezeket újból differenciáljuk, akkor az $\binom{n+2}{3}$ [n elemből alkotható 3-ad osztályú ismétléses kombinációk számával megegyező] számú

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}$$

differenciálhányados s í. t. keletkezik.

Így például legyen:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^n;$$

akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{n-1};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = n(n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{n-2};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} = n(n-1)(n-2)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{n-3} \text{ s í. t.}$$

14. Homogén függvényekre vonatkozó Euler-tétel. Az $ax^2 + 2bxy + cy^2$ kétváltozós függvény minden tagjában a változók exponenseinek összege: 2. Az $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ szorzat exponenseinek összegét, az $i_1 + i_2 + \cdots + i_n$-et, a tag rendszámának nevezzük. Ha az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók valamely racionális egész függvénye olyan, hogy a tagjai mind egyenlő rendszámúak, akkor azt mondjuk, hogy ez a racionális egész függvény *homogén* és pedig ha e közös rendszám: k, akkor k-adfokú homogén. Így például: $5x^3 - 3x^2y + 6xy^2 - 2y^3$ az x és y változók harmadfokú homogén egész függvénye. E homogén egész függvényeknek egy igen egyszerű és jellemző tulajdonságuk van. Ha ugyanis $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ k-adfokú homogén egész függvény és $x_1, x_2, \ldots x_n$ helyett $tx_1, tx_2, \ldots tx_n$-et tesszük, vagyis minden változót t-vel szorzunk, akkor

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

A változóknak t-vel szorzása által tehát magát a függvényt t^k-val szoroztuk, akárminő számot, vagy kifejezést jelentsen is a t.

Fordítva is áll a dolog. Ha ugyanis az $x_1, x_2, \ldots x_n$ valamely racionális egész függvényének minden t értékre nézve [bármilyen értékűek is $x_1, x_2, \ldots x_n$] ez a tulajdonsága van, azaz

$$f(tx_1\; tx_2 \ldots tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

akkor az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ csakis k-adfokú homogén egész függvény lehet. Ha ugyanis $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ racionális egész függvény, akkor a tagjait úgy sorozhatjuk, hogy az egyenlő rendszámúak együvé kerüljenek, vagyis f-et az

$$f=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots+\varphi_m$$

alakban írhatjuk, ahol $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ homogén egész függvények. Ha φ_1 k-adfokú és a következők mind k-tól különböző fokúak, akkor feltételünk szerint

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^k\varphi_1+t^l\varphi_2+\cdots=t^k[\varphi_1+\varphi_2+\cdots].$$

Minden t értékre nézve e két kifejezés csakis akkor egyezhetik meg, ha $t^k, t^l, \ldots$ együtthatói külön-külön megegyeznek, azaz

$$\varphi_1=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots \quad \text{és} \quad \varphi_2=0,\ \varphi_3=0, \ldots$$

Így tehát az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ csakis a φ_1 k-adrendű homogén részből áll.

A tárgyalt tulajdonság tehát a racionális egész függvények homogeneitásának jellemző tulajdonsága. És ezért ezt a tulajdonságot fogjuk a homogeneitás definiciójának tekinteni, amivel a homogén függvény fogalmát a racionális egész függvények körén túl is kiterjesztjük. Ezentúl tehát k-adrendű* homogén függvénynek mondjuk az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n változós függvényt, ha minden t-re nézve fennáll ez az identitás:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Így például az $\frac{x}{y}$ 0-adrendű homogén függvény, az $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ elsőrendű homogén függvény, $\sqrt{x^2+y^2}$ is elsőrendű, ellenben $\sqrt{x+y}$ $\frac{1}{2}$-rendű homogén függvény.

Az $$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

identitás alapján a homogén függvények nevezetes tulajdonságait mutathatjuk ki. Ugyanis differenciáljunk mindkét oldalon t szerint. A baloldalon a differenciálást közvetve kell végeznünk. Ha ugyanis egy pillanatra $tx_1, tx_2, \ldots tx_n$ helyébe $y_1, y_2, \ldots y_n$ betűket képzelünk, akkor a baloldal t szerinti differenciálhányadosa:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n} x_n.$$

Az $y_1, y_2, \ldots y_n$ helyébe vissza kell tennünk a $tx_1, tx_2, \ldots tx_n$ értékeket. A jobboldal t szerinti differenciálhányadosa: $kt^{k-1}f(x_1, x_2, \ldots x_n)$; tehát az y-okra vonatkozó megjegyzés figyelembe vételével:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n} x_n = kt^{k-1}f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

* k tetszés szerinti reális szám.

Ez az egyenlet minden t értékre nézve fönnáll; tehát akkor is, ha $t=1$. Ez esetben $y_1, y_2, \ldots y_n$ helyébe egyszerűen $x_1, x_2, \ldots x_n$ kerül, amit már a felírásban is egyszerűen úgy akarunk jelezni, hogy a differenciálást nem $y_1, y_2, \ldots y_n$, hanem $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerint végezzük [f függvény differenciálhányadosainak folytonosságát feltesszük]. *Eszerint tehát k-ad rendű homogén függvényekre vonatkozólag ez az Euler-féle reláció áll fenn:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = kf.$$

Így például, ha

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}xz,$$

akkor:
$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = 2f.$$

A
$$\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n} x_n = kt^{k-1} f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

identitást t szerint újból differenciálva, a következőre jutunk:

$$\sum_{\substack{i=1,2,\ldots n \\ k=1,2,\ldots n}} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} x_i x_k = k(k-1)\, t^{k-2} f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

és ha megint $t=1$ tesszük, akkor ez az identitás átmegy ebbe:

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} x_i x_k = k(k-1)\, f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor r-szer differenciálván egymásután a fönti identitást, azt az általános Euler-tételt kapjuk, mely szerint, ha az f homogén függvény összes r-ik differenciálhányadosait szorozzuk a megfelelő változókkal és e szorzatokat összeadjuk, összegül $k(k-1)(k-2)\ldots(k-r+1)\, f(x_1, x_2, \ldots x_n)$-et kapjuk:

$$\sum \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} = k(k-1)\ldots(k-r+1)\, f.$$

Végül megjegyezzük a következőt. Ha $f(x_1, \ldots x_n)$ k-ad rendű homogén függvény: akkor $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ is homogén és rendje $k-1$. Ugyanis a

$$t^k f(x_1, \ldots x_n) = f(tx_1, \ldots tx_n);$$

identitást differenciáljuk x_i szerint mind a két oldalon (ismét $tx_i = y_i$ téve), akkor:

$$t^k f'_{x_i}(x_1, \ldots x_n) = t f'_{y_i}(tx_1, \ldots tx_n),$$

azaz*
$$t^{k-1} f'_{y_i}(x_1, \ldots x_n) = f'_{y_i}(tx_1, \ldots tx_n).$$

* $f'_{y_i}(tx_1 \ldots tx_n)$ azt jelenti, hogy $f(y_1 \ldots y_n)$ y_i szerint differenciálandó és $y_1 = tx_1, \ldots y_n = tx_n$ teendő. A baloldal igy is írható: $f'_{y_i}(x_1 \ldots x_n)$, ami úgy értendő, hogy f az $y_1 \ldots y_n$ szerint differenciálandó és $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2, \ldots y_n = x_n$ teendő.

Ez azt fejezi ki, hogy f'_{x_i} az $x_1, x_2, \dots x_n$ k—1-edfokú homogén függvénye.

15. **Függvények közötti homogén relációk.** Láttuk, hogy az

$$u_1(x_1, x_2, \dots x_n),\ u_2(x_1, x_2, \dots x_n), \dots\ u_n(x_1, x_2, \dots x_n)$$

differenciálható függvények egymástól akkor és csakis akkor függnek, ha a függvénydeterminánsuk eltűnik. Ha a függvények száma több, mint a változóké, akkor nem függetlenek egymástól a megadott függvények. Így például, ha az n változónak $n+1$ függvénye ugyanazon tartományban van értelmezve és folytonos differenciálhányadosokkal birnak:

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \dots x_n),\ u_2 = \varphi_2(x_1, \dots x_n), \dots\ u_{n+1} = \varphi_{n+1}(x_1, \dots x_n),$$

és közülük n-et kiszemelünk, például az első n függvényt, akkor vagy identikusan eltűnik ezen n függvény funkcionális determinánsa, vagy nem tűnik el identikusan. Ha eltűnik, akkor már ezen n függvény között egy $\varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = 0$ reláció áll fenn, tehát az adott függvények nem függetlenek. Ha nem tűnik el ez a funkcionális determináns identikusan, akkor van olyan $a_1, a_2, \dots a_n$ hely, amelyen és amelynek környezetében nem tűnik el; tehát az

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n), \dots\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots x_n)$$

egyenletek $x_1, x_2, \dots x_n$-re megoldhatók e környezetben, vagyis

$$x_1 = \psi_1(u_1, u_2, \dots u_n), \dots\ x_n = \psi_n(u_1, u_2, \dots u_n)$$

inverz függvények egyértékű, folytonos, differenciálható függvények és így az $n+1$-ik függvény:

$$u_{n+1} = \varphi_{n+1}(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n)$$

előállíttatott az $u_1, u_2, \dots u_n$ függvénye gyanánt. Ezzel tehát kimutattuk, hogy n változó $n+1$ függvénye között mindig van legalább egy reláció. Kérdés most az, hogy mikor van n változó $n+1$ függvénye között homogén reláció?

Ha az $u_1 = \varphi_1(x_1 \dots x_n)$, $u_2 = \varphi_2(x_1 \dots x_n), \dots$ $u_{n+1} = \varphi_{n+1}(x_1 \dots x_n)$ függvények között egy

$$\Phi(u_1, u_2, \dots u_{n+1}) = 0$$

homogén (k-adrendű) reláció áll fenn, akkor az Euler-tétel szerint:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} u_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n+1}} u_{n+1} = k\Phi = 0.$$

Ha a $\Phi = 0$ identitást sorban az $x_1, x_2, \dots x_n$ szerint differenciáljuk, akkor a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n+1}} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1} = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n+1}} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_n} = 0$$

egyenletekre jutunk; és ha az így nyert $n+1$ homogén lineáris egyenletből a $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \dots \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n+1}}$-et elimináljuk, a

$$K=\begin{vmatrix} u_1, & u_2, \ldots & u_{n+1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \ldots & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}, \ldots & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0$$

relációra jutunk. Ha tehát az $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ között homogén reláció áll fenn, akkor $K=0$ identikusan.

Megmutatjuk, hogy — fordítva — ha $K=0$ identikusan, akkor az $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ között homogén reláció áll fenn.

Tegyük fel, hogy $K=0$ és tegyük a K determinánsban $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ helyett $uz_1, uz_2, \ldots uz_{n+1}$-et, ahol u az $x_1, x_2, \ldots x_n$ tetszés szerinti el nem tűnő, differenciálható függvénye. A K determináns átmegy a következőbe:

$$K\equiv\begin{vmatrix} uz_1, & uz_2, & \ldots & uz_{n+1} \\ z_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+u\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & z_2\frac{\partial u}{\partial x_1}+u\frac{\partial z_2}{\partial x_1}, & \ldots & z_{n+1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+u\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1\frac{\partial u}{\partial x_n}+u\frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & z_2\frac{\partial u}{\partial x_n}+u\frac{\partial z_2}{\partial x_n}, & \ldots & z_{n+1}\frac{\partial u}{\partial x_n}+u\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Ha az első sort rendre $\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_n}$-el szorozzuk és rendre a többi sorokból kivonjuk, azt kapjuk, hogy:

$$K\equiv u^{n+1}\begin{vmatrix} z_1, & z_2, \ldots & z_{n+1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_2}{\partial x_1}, \ldots & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial z_2}{\partial x_n}, \ldots & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Az u fölött szabadon rendelkezünk. Feltéve, hogy u_1 nem azonosan zérus, legyen $u=u_1$; akkor, minthogy $u_1=uz_1, u_2=uz_2, \ldots u_{n+1}=uz_{n+1}$ tettük, tehát

$$z_1=1, \quad z_2=\frac{u_2}{u_1}, \quad z_3=\frac{u_3}{u_1}, \ldots \quad z_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_1}$$

és így:

$$K\equiv u_1^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & \frac{u_2}{u_1}, & \frac{u_3}{u_1}, \ldots & \frac{u_{n+1}}{u_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2}{u_1}\right), & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_3}{u_1}\right), \ldots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_{n+1}}{u_1}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{u_2}{u_1}\right), & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{u_3}{u_1}\right), \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{u_{n+1}}{u_1}\right) \end{vmatrix}=$$

$$=u_1^{n+1}D\left(\frac{\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}, \ldots \frac{u_{n+1}}{u_1}}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right).$$

Így tehát a $K=0$ identitásból következik (minthogy u_1 nem 0 identikusan), hogy:

$$D\left(\frac{\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}, \ldots \frac{u_{n+1}}{u_1}}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right)=0,$$

vagyis, hogy az $\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}, \ldots \frac{u_{n+1}}{u_1}$ között reláció áll fönn:

$$\Phi\left(\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}, \ldots \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 0.$$

Ez a reláció nyilván az $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$-ben homogén és pedig 0-adrendű, mert ha $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ helyett $tu_1, tu_2, \ldots tu_{n+1}$-et tesszük, akkor Φ egyáltalában nem változik. *Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha $K=0$, akkor az $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ között homogén reláció áll fenn.*

16. Közvetett magasabb differenciálhányadosok. Ha x és y a t változó függvényei, akkor $f(x, y)$ voltaképpen a t változótól függ, tehát csak látszólag két változós függvény. Igen sokszor kell az ilyen függvénynek a t szerinti differenciálhányadosait kiszámítanunk. Az általános differenciálási eljárást alkalmazva, tudjuk, hogy:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

vagy, ha $\frac{dx}{dt}$ helyett a rövidebb x' és megfelelően $\frac{dy}{dt}$ helyett y' jelet használjuk:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'.$$

Ha most t szerint újból differenciálhatunk, akkor az f függvénynek t szerinti második differenciálhányadosát kapjuk. Differenciáljuk a jobboldali kifejezést t szerint. A $\frac{\partial f}{\partial x}x'$ szorzatot differenciáljuk először; ebből lesz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot x' + \frac{\partial f}{\partial x}x''.$$

De a $\frac{\partial f}{\partial x}$-nek t szerinti differenciálása ismét az általános differenciálási szabály szerint végzendő, azaz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}y'.$$

Ha a második taggal is így bánunk el, akkor végül erre az eredményre jutunk:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x')^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}x'y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y''.$$

Így haladhatunk tovább a magasabbrendű differenciálhányadosok megalkotásában.

A legegyszerűbb eset, amellyel foglalkoznunk kell, az, midőn x és y a t-nek lineáris függvényei; pl. $x=ht+\alpha$, $y=kt+\beta$.

Ezen esetben x'' és y'' már nem szerepelnek; tehát

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k;\quad \frac{d^2f}{dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2.$$

Tovább haladva, vagyis az általános differenciálási szabályt újból alkalmazva:

$$\frac{d^3f}{dt^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3$$

-ra jutunk és ebben a formában a szabály már szembeötlő. Azt állítjuk, hogy:

$$\frac{d^nf}{dt^n}=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}h^n+\binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}h^{n-1}k+$$
$$+\binom{n}{2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}h^{n-2}k^2+\cdots+\frac{\partial^n f}{\partial y^n}k^n.$$

Ezen állítás helyességéről teljes indukcióval győződhetünk meg. A szabály áttekinthetőbbé lesz, ha bizonyos szimbolikus jelölés bevezetésével a binomiális tétellel még jobban megegyezővé tesszük. Vezessük be ugyanis ezt a szimbolikus kifejezést:

$$h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$$

és állítsuk elő ennek az n-ik hatványát, mintha a $\frac{\partial}{\partial x}$ és $\frac{\partial}{\partial y}$ tényleg mennyiségek volnának és jegyezzük meg, hogy $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r f$ alatt a szóban forgó f függvénynek x szerinti r-ik differenciálhányadosát értjük, a $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f$ alatt pedig azon $r+s$-ik differenciálhányadost, melyben x szerint r-szer, y szerint s-szer differenciáltunk. Ezen jelöléssel:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

tehát e szimbolikus jelöléssel:

$$\frac{d^nf}{dt^n}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

alakban írható. Sokszor használjuk ezt a rövidítést, hogy az $n+1$ tag kiírását elkerüljük.

Ha x és y más változóknak, például az u és v-nek függvényei, akkor $f(x, y)$ voltaképpen az u és v függvénye; tehát az általános differenciálási szabály szerint f-nek u szerinti parciális differenciálhányadosa:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Éppen így: $$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ha az elsőt ismét u szerint differenciáljuk, akkor:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

alakra jutunk, mely az f függvénynek az új u változó szerinti második differenciálhányadosát szolgáltatja. Ha pedig az első egyenlet mindkét oldalán v szerint, vagy a másodikban u szerint differenciálunk, akkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}$$

-re jutunk és végül, ha a második egyenlet mindkét oldalán újból v szerint differenciálunk, akkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

parciális differenciálhányadost kapjuk.

Most már nem okoz nehézséget az itt tárgyalt képleteknek általánosítása. Ha $x_1, x_2, \dots x_n$ a t változó függvényei, akkor az $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ voltaképpen csupán t-től függ; tehát:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

és t szerint ismét differenciálva:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=\sum_{\substack{i=1\dots n\\ k=1\dots n}}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dx_k}{dt}+\sum_{i=1\dots n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{d^2 x_i}{dt^2}.$$

Ha megint $x_1, \dots x_n$ a t változó lineáris függvénye és pedig:

$$x_1=h_1 t+\alpha_1,\ x_2=h_2 t+\alpha_2, \dots x_n=h_n t+\alpha_n,$$

akkor egyszerűen:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ k=1,\dots,n}}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}h_i h_k$$

és ha ezt újból differenciáljuk t szerint:

$$\frac{d^3 f}{dt^3}=\sum_{i,k,l=1,\dots,n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dx_k}{dt}\cdot\frac{dx_l}{dt}=\sum_{i,k,l=1,2,\dots,n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}h_i h_k h_l.$$

s így tovább.

Ha ismét bevezetjük ezt a szimbolumot:

$$h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

akkor könnyen érthető jelöléssel:

$$\frac{d^r f}{dt^r}=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f.$$

Általában, ha az n változó: $x_1, x_2, \dots x_n$ más m változónak $y_1, y_2, \dots y_m$-nek függvényei, akkor $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ voltaképpen az $y_1, y_2, \dots y_m$-től függ és

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

és ha ezt pl. y_k szerint differenciáljuk az általános differenciálási szabály szerint, akkor:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = \sum_1^n {}_{r,s} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}\frac{\partial x_r}{\partial y_i}\frac{\partial x_s}{\partial y_k} + \sum_1^n {}_r \frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{\partial^2 x_r}{\partial y_i \partial y_k}.$$

Példák. Példaképpen legyen $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Számítsuk ki a $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ differenciálhányadosokat. Az új változók most r és t és

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos t,\quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin t,\quad \frac{\partial x}{\partial t} = -r\sin t,\quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\cos t,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r \partial t} = -\sin t,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -r\cos t,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial t} = \cos t,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -r\sin t$$

és így az előbbi formula szerint:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2 t + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos t \sin t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2 t + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2 t - 2r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos t \,.\, \sin t +$$

$$+ r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2 t - r\frac{\partial f}{\partial x}\cos t - r\frac{\partial f}{\partial y}\sin t.$$

Vagy fordítva, ha φ az r és t függvénye és $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ helyettesítést végezzük és meg akarjuk határozni $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$-et és $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$-et, akkor az $x = r\cos t$, $y = r\sin t$-ből $r = \sqrt{x^2+y^2}$ és $t = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; tehát

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r};\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r};\quad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{y}{r^2};\quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{x}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3};\quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3};\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{2xy}{r^4};\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4}$$

és így:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t}\frac{xy}{r^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\frac{y^2}{r^4} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{y^2}{r^3} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{xy}{r^4}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t}\frac{xy}{r^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\frac{x^2}{r^4} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{x^2}{r^3} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{xy}{r^4}.$$

Ebből azt az egyszerű relációt kapjuk, hogy: [$r^2 = x^2 + y^2$ téve]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

III. FEJEZET.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY TAYLOR SORA. MAXIMUM, MINIMUM.

1. Kétváltozós függvény véges Taylor sora. Az egyváltozós függvény tárgyalásánál láttuk, hogy miképpen lehet az $f(x)$ függvénynek egy adott helyen való értékéből és differenciálhányadosainak ezen helyen való értékeiből bizonyos pontossággal megállapítani e függvénynek más helyen való értékét. Erre szolgált a függvénynek véges Taylor sora, mely összes eddigi tárgyalásainknak egyik legfontosabb eredménye volt. Ezt akarjuk most a többváltozós függvényre is kiterjeszteni.

Legyen az $f(x, y)$ valamely T tartományban mindenütt egyértékű és minden helyen az x, vagy az y szerint legalább n-szer differenciálható. Legyen minden differenciálhányadosa a T (a, b) helyén az n-ik differenciálhányadosokig megadva. Tegyük fel, hogy az n-ik differenciálhányadosok is folytonosak az (a, b) helyen. Határozzuk meg ezen adatokból, tehát az

$$f(a, b),\ f'_x(a, b),\ f'_y(a, b),\ f''_{xx}(a, b),\ f''_{xy}(a, b),\ f''_{yy}(a, b), \ldots$$
$$f^{(n)}_{xx\ldots x}(a, b),\ f^{(n)}_{xx\ldots y}(a, b), \ldots\ f^{(n)}_{yy\ldots y}(a, b)$$

-ből az $f(x, y)$ értékét az (a, b) helytől különböző, a T tartományba beleeső $(a+h, b+k)$ helyen.

Ezt a feladatot visszavezetjük az egyváltozós függvény Taylor sorára. Ugyanis legyen t egy új változó és tegyük $x=a+ht$, $y=b+kt$, [vagyis kössük össze az (a, b) helyet egyenes vonallal az $(a+h, b+k)$ hellyel és a függvényt ezen egyenes mentén vizsgáljuk, föltéve természetesen, hogy ez az egyenes egészen beleesik a T tartományba], akkor $f(x, y)$-ból az $f(a+ht, b+kt)$ egyváltozós függvény válik. Jelöljük ezt az egyváltozós függvényt egyszerűség kedveért $F(t)$-vel. Azonnal látjuk, hogy:

$$f(a, b) = F(0) \quad \text{és} \quad f(a+h, b+k) = F(1),$$

továbbá azt is látjuk, hogy ha t a 0-tól 1-ig halad, vagyis a $0\ldots1$ közt futja be, akkor az $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ minden t helyen legalább n-szer differenciálható; mert az $F(t)$ differenciálhányadosai, $x=a+ht$, $y=b+kt$ téve:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \\ F''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \qquad \alpha) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n)}(t) &= \frac{\partial^n f}{\partial x^n} h^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} h^{n-1} k + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} k^n, \end{aligned}$$

mindannyian az $f(x, y)$ függvénynek $(a+ht, b+kt)$ helyen vett parciális differenciálhányadosaiból keletkeznek szorzással és összeadással. Az $F(t)$ egyváltozós függvény tehát a $0 \ldots 1$ közben legalább n-szer differenciálható, az n-ik differenciálhányadosa is folytonos, tehát rá a Taylor-sorba fejtés alkalmazható. Tudjuk, hogy e sorfejtés szerint a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$F(t) = F(0) + F'(0)\, t + \frac{F''(0) \,.\, t^2}{2} + \\ + \frac{F'''(0)\, t^3}{3!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)\, t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\vartheta t)}{n!} t^n,$$

ahol $0<\vartheta<1$.

A jelen esetben $f(a+h, b+k)$-ra van szükségünk, vagyis $F(1)$-re. Ebben az általános formulában tehát t helyébe 1-et tegyünk:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\vartheta)}{n!}.$$

Az utolsó tagot itt is maradéktagnak tekintjük. Az $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0), \ldots$-t kell tehát az adott $f(a, b)$, $f'_x(a, b)$, $f'_y(a, b), \ldots$ stb. által kifejeznünk. Ezeket az $\alpha)$ alatti egyenletekből azonnal megkapjuk, ha t helyébe 0-t, vagyis x helyébe a-t és y helyébe b-t teszünk. Eszerint tehát:

$$F(0) = f(a, b); \quad F'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)_{\substack{x=a \\ y=b}},$$

ahol a melléírt $x=a$, $y=b$-vel azt akarjuk jelölni, hogy a differenciálás elvégzése után x helyett a, y helyett b teendő; továbbá

$$F''(0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2\right)_{\substack{x=a \\ y=b}};$$

$$F'''(0) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} k^3\right)_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

s í. t.; vagy a már ismert szimbolikus jelöléssel:

$$F^{(r)}(0)=\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f\right]_{\substack{x=a\\y=b}}$$

és a maradéktag:

$$\frac{1}{n!}F^{(n)}(\vartheta)=\frac{1}{n!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\right]_{\substack{x=a+\vartheta h\\y=b+\vartheta k}}.$$

A maradéktag tehát, amint észrevesszük, csak abban különbözik a többitől, hogy x helyébe nem a, hanem $a+\vartheta h$ és y helyébe nem b, hanem $b+\vartheta k$ teendő. Eszerint tehát *a kétválltozós függvény véges Taylor-sora:*

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)_{\substack{x=a\\y=b}}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)_{\substack{x=a\\y=b}}+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3\right)_{\substack{x=a\\y=b}}+\cdots+R_n,$$

ahol az R_n maradéktag:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}h^n+\binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}h^{n-1}k+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}h^{n-2}k^2+\cdots+\frac{\partial^n f}{\partial y^n}k^n\right]_{\substack{x=a+\vartheta h\\y=b+\vartheta k}}.$$

2. Többváltozós függvény Taylor-sora. Könnyű lesz most már a kétváltozós függvény Taylor-sorának megállapításánál követett eljárást többváltozós függvényre is alkalmazni. Legyen adva az $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ m változós függvény, mely a T tartomány minden helyén egyértékű, véges és legalább n-szer minden módon differenciálható és e differenciálhányadosok folytonosak is. Ki akarjuk számítani az $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_m+h_m)$-et, az $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$-nek és differenciálhányadosainak $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ helyen adott értékeiből ha minden hely, melynek $x_1, x_2, \ldots x_m$ koordinátái az $a_i \leq x_i \leq a_i+h_i$ relációkat kielégítik, $(i=1, 2, \ldots m)$, a T-ben van.

Tegyük megint $x_1=a_1+h_1t$, $x_2=a_2+h_2t$, $\ldots$ $x_m=a_m+h_mt$, akkor:

$$F(t)=f(a_1+h_1t,\ a_2+h_2t,\ \ldots\ a_m+h_mt)$$

a $t=1$ helyen így állítható elő:

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\frac{F'''(0)}{3!}+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{F^{(n)}(\vartheta)}{n!}$$

ahol:

$$F(0)=f(a_1, a_2, \ldots a_m).$$

$$F'(0)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}h_m\right]_{x_1=a_1,\ldots x_m=a_m}$$

$$F''(0)=\left[\sum_1^m{}^{i,k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}h_ih_k\right]_{x_1=a_1,\ldots x_m=a_m}$$

. . . .

$$F^{(n)}(\vartheta)=\left[\sum\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_n}}h_{i_1}\,h_{i_2}\ldots h_{i_n}\right]_{x_1=a_1+h_1\vartheta,\ldots x_m=a_m+h_m\vartheta}.$$

ahol $i_1, i_2, \ldots i_n$ az $1, 2, \ldots m$ számok közül minden lehető módon kiválasztható n számot jelentenek (ismétléses variációk) és így, *ha az* $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ *a* T *tartomány helye és az* $(a_1+h_1t, a_2+h_2t, \ldots a_m+h_mt)$ *a* $0 \leq t \leq 1$ *értékeinél mindig a* T *helyei és az* $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$*-nek minden* r*-rendű differenciálhányadosai léteznek ezeken a helyeken, ha* $1 \leq r \leq n$, *akkor:*

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_m+h_m) = f(a_1, a_2, \ldots a_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial a_i} h_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} h_i h_k + \frac{1}{3!} \sum \frac{\partial^3 f}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l} h_i h_k h_l + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n!} \sum \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}} h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_n} \right)_{x_1 = a_1 + \vartheta h_1 \ldots x_m = a_m + \vartheta h_m},$$

ahol rövidség kedvéért pl. $\frac{\partial f}{\partial a_i}$-t írtunk a $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_1 = a_1 \ldots x_m = a_m}$ helyett s í. t.

3. Kétváltozós függvény maximuma, minimuma. Valamely egyváltozós $f(x)$ függvényről akkor mondtuk, hogy az a helyen maximuma van, ha ennek az a helynek volt olyan környezete, melyen belül fekvő x értékekhez tartozó $f(x)$ függvényértékek az $f(a)$-nál nem nagyobbak; azaz, ha volt olyan δ küszöbintervallum, hogy $f(x) \leq f(a)$, ha $|x-a| < \delta$. Hasonló módon értelmeztük a minimumot. Ehhez analog módon fogjuk most értelmezni a két- és többváltozós függvény maximumát és minimumát. Az $f(x, y)$ függvénynek az (a, b) helyen maximuma van, ha az (a, b) hely valamely környezetében mindenütt $f(x, y) \leq f(a, b)$ és minimuma van, ha az (a, b) hely valamely környezetében mindenütt $f(x, y) \geq f(a, b)$; vagyis van olyan pozitiv δ, hogy mindazon (x, y) helyeken, melyekre nézve $|x-a| < \delta$, $|y-b| < \delta$ (tehát egy négyzetalakú tartományban) az első esetben $f(x, y) \leq f(a, b)$ és a második esetben $f(x, y) \geq f(a, b)$.

Abban az esetben, midőn az (a, b) bármely kis környezetében van olyan (a, b)-tól különböző (x, y) hely is, melyen $f(x, y) = f(a, b)$, a többi helyen pedig $f(x, y) < f(a, b) [f(x, y) > f(a, b)]$, a maximumot (minimumot) *nem igazinak,* azon esetben pedig, amidőn $f(x, y) < f(a, b)$ [illetőleg $f(x, y) > f(a, b)$] az (a, b) kellő kis környezetének minden (x, y) helyén, a maximumot (minimumot) *igazi*nak fogjuk mondani. Ha külön meg nem mondjuk, mindig az igazi maximummal (minimummal) foglalkozunk.

Csak olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek az (a, b) hely bizonyos környezetében differenciálhatók (esetleg többször) és e differenciálhányadosok végesek és folytonosak.

Az $f(x, y)$ függvénynek csakis olyan (a, b) helyen lehet szélső értéke, amelyen úgy a $\frac{\partial f}{\partial x}$, mint a $\frac{\partial f}{\partial y}$ eltünnek. Ezt az állítást egyszerűen igazolhatjuk. Ugyanis, ha maximuma van $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen, akkor az (a, b) hely említett környezetében mindenütt $f(x, y) < f(a, b)$; tehát az x tengellyel párhuzamos egyenes mentén is fönnáll ez az egyenlőtlenség, vagyis $f(x, b) < f(a, b)$, ha $|x-a| < \delta$ és így az $x=a$ helyen az $f(x, b)$ egyváltozós függvénynek is maximuma van. Ennek pedig, miként már tudjuk, szükséges feltétele, hogy $f(x, b)$ x szerinti differenciálhányadosa az $x=a$ helyen 0 legyen, vagyis éppen az, hogy $\frac{\partial f}{\partial x}$ az $x=a$, $y=b$ helyen eltűnjék. Ugyanígy következtetjük, hogy a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ az (a, b) helyen. Éppen így áll a dolog a minimumra nézve.

Ezzel tehát kimutattuk: annak, hogy az $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen szélső értéke legyen, *szükséges* feltételei, hogy ezen az (a, b) helyen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

legyenek. De ezek a feltételek még nem elégségesek. Hogy elégséges feltételeket kapjunk bizonyos esetekben, tegyük fel először is, hogy a második differenciálhányadosok az (a, b) helyen léteznek, folytonosak és legalább egyikük 0-tól különbözik. Az ilyen függvényre nézve a Taylor-sor segítségével próbálunk következtetni a szélső érték létezésére vagy nem létezésére.

Ugyanis fejtsük ki az (a, b) környezetében az $f(x, y)$-t Taylor-sorba, e sort a második tagnál berekesztve: $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right.$ az (a, b) helyen!$\left.\right)$

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2\right]_{\substack{x=a+\vartheta h \\ y=b+\vartheta k}}.$$

Ha a jobboldalon álló második tag, vagyis a

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2\right]_{\substack{x=a+\vartheta h \\ y=b+\vartheta k}}$$

minden h, k *értékre nézve pozitiv, ha csak* $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, *akkor* $f(a+h, b+k) > f(a, b)$ *az egész* (δ) *környezetben, tehát* $f(x, y)$-*nak az* (a, b) *helyen minimuma van; ha pedig ez a kifejezés minden ilyen* (h, k) *értékpárra nézve negativ, akkor* $f(a+h, b+k) < f(a, b)$ *az egész* (δ) *négyzetben, tehát az* $f(x, y)$-*nak az* (a, b) *helyen maximuma van.*

Ha ez a kifejezés nem mindig pozitiv (negativ), akkor két eset lehetséges. 1°. Meglehet, hogy mindig pozitiv (negativ), csak bizonyos (h, k) értékeknél lesz zérussá. Ekkor a szélső érték nem igazi, mert az említett környezetben vannak olyan $(a+h, b+k)$ helyek, amelyeken $f(a+h, b+k)$ nem kisebb (nagyobb) $f(a, b)$-nél, hanem egyenlő vele. 2°. Ha pedig akárminő kicsiny legyen is a δ és $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, még a jelét is változtatja e kifejezés, vagyis bizonyos (h, k) értékeknél pozitiv, másoknál pedig negativ, akkor szélső értékről az (a, b)

helyen egyáltalában nem lehet szó, mert ekkor bármely kis környezetben vannak olyan $(a+h, b+k)$ helyek, melyeken $f(a+h, b+k) < < f(a, b)$ és olyanok is, melyeken $f(a+h, b+k) > f(a, b)$.

A most felállított kriteriumnak az a hátránya, hogy a felírt kifejezésben a második differenciálhányadosok az $a+\vartheta h, b+\vartheta k$ helyeken szerepelnek, holott a ϑ ismeretlen. De föltettük, hogy e differenciálhányadosok folytonosak; ebből pedig következik, hogy ha csak a (δ) környezet elég kicsiny, akkor a differenciálhányadosok az $a+\vartheta h, b+\vartheta k$ helyen nagyon kevéssel térnek el az (a, b) helyen való differenciálhányadosok értékeitől. Jelöljük a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ differenciálhányadosokat az (a, b) helyen: A, B, C-vel, akkor e differenciálhányadosok az $a+\vartheta h$, $b+\vartheta k$ helyen így írhatók: $A+\varepsilon$, $B+\varepsilon'$, $C+\varepsilon''$, ahol ε, ε', ε'' a δ-val együtt elenyésznek. Így tehát:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2}[Ah^2+2Bhk+Ch^2] + \frac{1}{2}[\varepsilon h^2+2\varepsilon' hk+\varepsilon'' k^2]. \quad \alpha)$$

Vizsgáljuk most az $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ másodrendű alakot. Tegyük fel először, hogy ezen alak determinánsa, az $AC-B^2$ nem 0; akkor tehát $AC-B^2$ pozitiv, vagy negativ. Ha pozitiv, akkor sem A, sem C nem lehet 0. Nézzük ezt az esetet. Ekkor tehát $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ így írható:

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2]$$

és a jobboldali kifejezésen látjuk, hogy *a)* csakis akkor lehet 0, ha $h=0$, $k=0$; és *b) minden*, a $h=0$, $k=0$-tól különböző (h, k) értékpárnál állandó előjelű és pedig ugyanolyan jelű, mint az A. A h és k ilyen alakját, mely tehát e két tulajdonsággal bir, hogy állandó előjelű és csakis $h=0$, $k=0$ helyen válik zérussá, *definit alaknak* nevezzük.

Azt állítjuk hogy ha $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ definit alak, akkor az $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen van szélső értéke és pedig ha A negativ, akkor maximuma van, ha A pozitiv, akkor minimuma van.

E célból azt fogjuk megmutatni, hogy az

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2) + \frac{1}{2}[\varepsilon h^2+2\varepsilon' hk+\varepsilon'' k^2]$$

jobboldalán álló kifejezés az (a, b) hely elég kis környezetében mindig olyan előjelű, mint az első tag, vagyis, hogy megállapítható az (a, b) helynek olyan környezete, amelyen belül a második tag olyan kicsiny, hogy az összeg olyan jelű marad, mint az első tag; de az első tag definit lévén, előjelét nem változtatja, $f(x, y) - f(a, b)$ az (a, b) ezen környezetében olyan jelű, mint az A, tehát $f(a, b)$ minimum, ha A pozitiv és maximum, ha A negativ.

A jobboldali kifejezésben tegyük $h=r\cos\alpha$, $k=r\sin\alpha$ és jelöljük az $\frac{r^2}{2}(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)$ kifejezést L-el, akkor ez a jobboldal így is írható:

$$L.\left[1+\frac{\varepsilon\cos^2\alpha+2\varepsilon'\cos\alpha\sin\alpha+\varepsilon''\sin^2\alpha}{A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha}\right]. \tag{1}$$

A szögletes zárójelben álló kifejezésről megmutatjuk, hogy kellő kicsinynek véve az (a, b) hely (kör alakú) környezetét, ez a kifejezés mindig pozitiv. Ugyanis a nevezőben álló $A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$ az $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ érték az egységsugarú kör valamely helyén; ha tehát α-nak a 0-tól 2π-ig terjedő értékeket tulajdonítjuk, vagyis a (h, k) az egységsugarú körön halad végig, az $|A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha|$-nak, mely α folytonos függvénye, bizonyos m pozitiv minimális értéke lesz. (Az m 0 nem lehet, mert az $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ definit lévén, csakis a $h=0$, $k=0$ helyen válik zérussá). A számlálóban álló $\varepsilon\cos^2\alpha + 2\varepsilon'\cos\alpha\sin\alpha + \varepsilon''\sin^2\alpha$-ról pedig tudjuk, hogy együtthatói: $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ zérussá válnak, ha δ zérussá válik, tehát akkor is, ha r zérussá lesz. Így tehát, ha r elég kicsiny, akkor a szóban forgó $\frac{\varepsilon\cos^2\alpha+2\varepsilon'\cos\alpha\sin\alpha+\varepsilon''\sin^2\alpha}{A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha}$ tetszés szerinti kicsinnyé, tehát például absz. értékre nézve $\frac{1}{2}$-nél kisebbé tehető és így a szögletes zárójelben álló kifejezés $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{2}$ közé esik, vagyis mindenesetre pozitiv, miként állítottuk. Látjuk, hogy az 1) alatti kifejezés olyan jelű, mint e szögletes zárójel előtt álló $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$. Ez pedig föltételünk szerint definit alak, előjele minden $h=0, k=0$-tól különböző (h, k) értékpárra nézve ugyanaz, mint az A-é.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ definit pozitiv alak [vagyis definit alak és A pozitiv], akkor $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen minimuma van, ha pedig definit negativ alak, akkor $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen maximuma van.

Láttuk, hogy az $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ definit alak, ha $AC - B^2$ pozitiv és pedig definit pozitiv, ha ezenkívül még A pozitiv, (ekkor C is pozitiv), definit negativ, ha $AC - B^2$ pozitiv és A negativ (ekkor C is negativ). Figyelembe véve az A, B, C jelentését, eredményeinket így fogalmazhatjuk:

Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ *az* (a, b) *helyen pozitiv és* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}$ *pozitiv, akkor az* $f(x, y)$*-nak az* (a, b) *helyen minimuma van; ha pedig* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ *az* (a, b) *helyen pozitiv, de* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}$ *negativ, akkor maximuma van.*

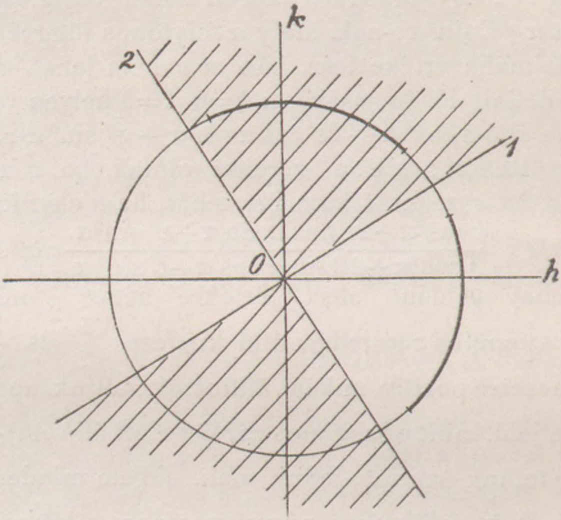
Folytassuk az $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ alak vizsgálatát. Előbb föltettük, hogy $AC - B^2$ pozitiv. Most tegyük fel, hogy $AC - B^2$ negativ és azt is tegyük fel, hogy pl.: C nem 0. Ha pl. $\frac{k}{h}=l$ tesszük, akkor az

$$A+2Bl+Cl^2=0$$

egyenletnek két különböző valós gyöke van: l_1 és l_2; vagyis:

$$A+2Bl+Cl^2=C(l-l_1)(l-l_2)$$

és ha pl. $l_1<l_2$, akkor a jobboldalon levő $(l-l_1)(l-l_2)$ szorzat előjele pozitiv, ha $l<l_1$ vagy ha $l>l_2$ ellenben negativ, ha $l_1<l<l_2$; tehát azt látjuk, hogy az $A+2Bl+Cl^2$ előjele ugyanolyan, mint a C-é, ha l az l_1 előtt, vagy l_2 után van, ellenben a C-vel ellenkező jelű, ha l_1 és l_2 között van az l. Visszatérve az eredeti $Ah^2+2Bhk+Ck^2$



1. ábra.

alakra, azt látjuk, hogy ha a 01 egyenes irányhatározója l_1 és 02-é l_2, és ha (h, k) a besraffozott területben levő pontot jelent, akkor $\operatorname{sgn}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)=-\operatorname{sgn} C$ és a másik területrészben $\operatorname{sgn}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)=\operatorname{sgn} C$. Ilyenkor, mikor tehát egyes (h, k) értékekre az alak pozitiv, másokra negativ, az $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ quadratikus alakot *indefinit* alaknak nevezzük. Ha $C=0$ és A nem 0, akkor nem $\frac{k}{h}$-t hanem $\frac{h}{k}$-t jelöljük l-lel és az előbbi okoskodást ismételhetjük. Ha pedig $A=0$ és $C=0$ akkor a quadratikus alak: Bhk, tehát előjelei az első és harmadik síknegyedben $\operatorname{sgn} B$, a második és negyedik negyedben pedig $-\operatorname{sgn} B$.

Ha megint az

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}(\varepsilon h^2+2\varepsilon' hk+\varepsilon'' k^2)$$

jobboldalán $h=r\cos\alpha$, $k=r\sin\alpha$ tesszük, akkor a jobboldal ismét így írható:

$$\frac{r^2}{2}(A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)$$

$$\left[1+\frac{\varepsilon\cos^2\alpha+2\varepsilon'\cos\alpha\sin\alpha+\varepsilon''\sin^2\alpha}{A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha}\right].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezésben $A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+$ $+C\sin^2\alpha$ ismét az $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ értékeit jelenti az egységsugarú körön. Ha e körön olyan szakaszt jelölünk meg, amely nem ér a 01, illetőleg 02 sugarakig, akkor az ilyen szakaszban az $|Ah^2+2Bhk+Ck^2|$-nak 0-tól különböző alsó határa van, tehát ha (h, k) ilyen szakaszban van, akkor éppen úgy okoskodva, mint az előbbi esetben, következtetjük, hogy a szögletes zárójelben álló kifejezés ezen szakaszokban pozitiv; az egész szorzatnak, tehát ha r és így $|\varepsilon|$, $|\varepsilon'|$, $|\varepsilon''|$ elég kicsinyek, olyan az előjele, mint az elül álló

$$A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha$$

-nak. Ez pedig a sraffozott területbe eső kiszemelt szakaszon $-\operatorname{sgn} C$, a másikban pedig $+\operatorname{sgn} C$.

De az $Ah^2+2Bhk+Ck^2=r^2(A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)$, tehát ebből következik, hogy $[x=a+h,\ y=b+k$ téve$]$

$$f(a+h, b+k)\quad -f(a, b)$$

a besraffozott területrészbe eső kijelölt íveken más előjelű, mint a másik területrészbe eső íveken.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy az $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen szélső értéke nem lehet, mert bármely kis környezetét tekintsük is az (a, b)-nek, a környezet egyik részében $f(x, y)$ az $f(a, b)$-nél nagyobb, másik részében pedig kisebb. *Ha tehát* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$ *az* (a, b) *helyen negativ, akkor az* $f(x, y)$*-nak e helyen nincs szélső értéke.*

Eddigelé csak olyan esettel foglalkoztunk, midőn $AC-B^2$ nem 0. Ha azonban $AC-B^2$ eltűnik, akkor ismét $\frac{k}{h}=l$ téve:

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=h^2[A+2Bl+Cl^2] \quad \text{és az} \quad A+2Bl+Cl^2=0$$

egyenletnek két megegyező valós gyöke van: l_1, vagyis

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=Ch^2(l-l_1)^2$$

és $l=\frac{k}{h}$ visszatéve:*

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=C(k-l_1h)^2.$$

Ilyenkor tehát az $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ quadratikus alak nem változtatja ugyan az előjelét, mert egy lineáris alak négyzete; de mégis abban különbözik a

* Ha $C=0$ volna, akkor az A és C, valamint h és k betűket felcseréljük. A és C egyszerre nem lehet 0, mert akkor az $AC-B^2=0$-ból egyúttal $B=0$ is következnék, amit egyelőre kizárunk.

definit alaktól, hogy nem csak akkor lesz zérussá, ha $h=0$ és $k=0$, hanem akkor is, ha $k=l_1 h$, [vagyis egy egyenes mentén]. Az ilyen alakot féldefinitnek (semidefinit) nevezzük. Ha ez az eset forog fenn, akkor pusztán a második differenciálhányadosok alapján nem dönthetjük el, hogy az $f(x, y)$-nak van-e szélső értéke az (a, b) helyen, vagy nincs.

Két példát mutatunk erre a féldefinit esetre; az egyik esetben nincs szélső érték, a másikban van.

1. Példa. Legyen $f(x, y)$ a következő egyszerű negyedfokú függvény:

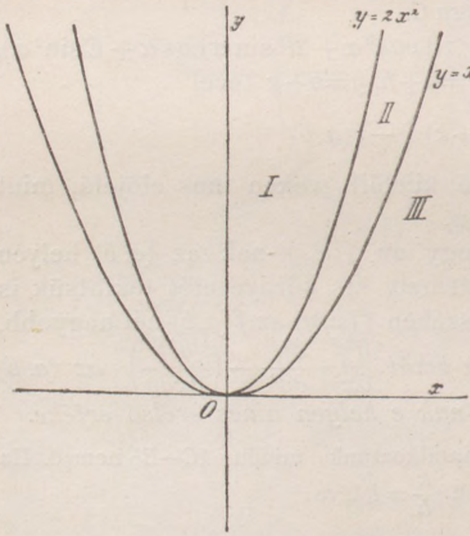
$$(x, y)=(y-x^2)(y-2x^2)=y^2-3x^2y+2x^4$$

és vizsgáljuk meg a függvényt az $x=0$, $y=0$ helyen. $x=0+h$, $y=0+k$ téve:

$$(x, y) = f(0, 0) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \cdots,$$

vagyis: $$f(x, y) = k^2 + \cdots$$

A tekintetbe veendő $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ a jelen esetben tehát egyszerűen k^2, mely mindenütt pozitiv, de a $k=0$ egyenes mentén 0; tehát semidefinit. Az $f(x, y)$-nak nincs szélső értéke. Erről a következő egyszerű geometriai szemlélettel győződhetünk meg: Rajzoljuk meg az $y=x^2$ és az $y=2x^2$ parabolákat. Ezek egymást a kezdőpontban érintik. Ha (x, y) az $y=x^2$ parabola belsejében levő pont koordinátái, akkor $y-x^2$ pozitiv; ha (x, y) a parabola külsejében levő pontot jelent, akkor $y-x^2$ negativ. Ugyanígy áll a dolog a másik parabolával. Eszerint, tehát, ha (x, y) az I területrész valamelyik pontját jelenti, akkor úgy az $y-x^2$, mint az $y-2x^2$ is pozitiv, tehát az $f(x, y)>0$. Ha az (x, y) a III területrész valamelyik pontja, akkor $y-x^2$ és $y-2x^2$ is negativ, tehát $f(x, y)$ ismét pozitiv; ellenben, ha (x, y) a két parabola között levő $II.$ rész valamely pontja, akkor $y-x^2$ pozitiv és $y-2x^2$ negativ, tehát $f(x, y)$ is negativ. Vagyis, ha a kezdőpont körül akárminő kis területet állapítunk is meg, e terület belsejében lesznek olyan helyek, (sőt egész sík-részek) amelyeken $f(x, y)$ pozitiv és olyanok, amelyeken negativ és így a kezdőpontban, ahol a függvény értéke 0, szélső értéke nem lehet.



2. ábra.

2. Példa. Nézzük most az $f(x, y)=y^2+x^4$ függvényt a kezdőpont környezetében. Az $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ a jelen esetben is: k^2, tehát semidefinit; de az $f(x, y)$ az x és y minden zérustól különböző értékénél pozitiv, tehát az $x=0$, $y=0$ helyen minimuma van.

E két példán látjuk, hogy azon esetben, midőn $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ semidefinit, a szélső érték létezése fölött pusztán az A, B, C értékek segítségével nem dönthetünk.

Eddigi eredményeinket összefoglalva, azt mondhatjuk, hogy a (folytonos első és második differenciálhányadosokkal biró) $f(x,y)$-nak az (a,b) helyen szélső értéke csak akkor lehet, ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

az (a,b) helyen. Szélső értéke tényleg van is, ha az (a,b) helyen a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$$

determinans pozitiv és pedig maximuma van, ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ negativ, minimuma van, ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ pozitiv. Ellenben szélső értéke nincs, ha ez a determinans negativ és kétes a dolog, ha ez a determinans 0.

4. A második differenciálhányadosok eltünnek. A szóban forgó determinans eltünése esetében nem tudtunk dönteni; de ha ez a determinans úgy tünik el, hogy minden eleme 0, vagyis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

az (a, b) helyen és léteznek a függvény magasabb rendű differenciálhányadosai, akkor esetleg dönthetünk a szélső érték felől. Vizsgáljuk az $f(x, y)$ függvényt az (a, b) környezetében, midőn e helyen nemcsak minden elsőrendű, hanem minden másodrendű differenciálhányadosa is eltünik. Sőt, hogy tárgyalásunk mindjárt a kellő módon általánosíttassék, tegyük fel, hogy ezen a helyen az összes differenciálhányadosok az m-edrendűekig mindannyian eltünnek, vagyis az első el nem tünő differenciálhányados $m+1$-edrendű.

Az $f(a+h, b+k)$ Taylor-sorát az $m+1$-ik tagnál rekesztjük be:

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b)+\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{m+1} f_{x=a+\vartheta h,\, y=b+\vartheta k}\,.$$

A maradéktag részletesebben írva ilyen alakú:

$$R=\frac{1}{(m+1)!}\Big[\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}h^{m+1}+\binom{m+1}{1}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^m\partial y}h^m k+$$
$$+\binom{m+1}{2}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m-1}\partial y^2}h^{m-1}k^2+\cdots+\frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}}k^{m+1}\Big]_{x=a+\vartheta h,\ y=b+\vartheta k}.$$

Föltesszük, hogy az itt szereplő $m+1$-ik differenciálhányadosok az (a, b) hely környezetében folytonosak.

Az egyes differenciálhányadosokat az $a+\vartheta h$, $b+\vartheta k$ helyen igy írhatjuk:

$$\left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right)_{\substack{a+\vartheta h\\ b+\vartheta k}}=\left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right)_{a,b}+\varepsilon_0;\qquad \left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^m\partial y}\right)_{\substack{a+\vartheta h\\ b+\vartheta k}}=\left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^m\partial y}\right)_{a,b}+\varepsilon_1,\ \ldots$$

Az $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ a differenciálhányadosok folytonossága miatt zérusokká lesznek, ha h, k elenyésznek. Így tehát az R maradéktag:

$$R=(A_0h^{m+1}+A_1h^mk+A_2h^{m-1}k^2+\cdots+A_{m+1}k^{m+1})+$$
$$+(\varepsilon_0h^{m+1}+\varepsilon_1h^mk+\cdots+\varepsilon_{m+1}k^{m+1}),$$

ahol $A_0, A_1, A_2, \ldots$ jelentik az R-ben szereplő differenciálhányadosokat az (a, b) helyen a megfelelő számbeli tényezőkkel ellátva.

Vizsgáljuk az első tagot. Ismét háromféle eset lehetséges. 1. Ez a kifejezés, melyet $r(h, k)$-val jelölünk, állandó előjelű a $h=0$, $k=0$ kivételével, amidőn 0. Ekkor azt mondjuk, hogy ez az $m+1$-edrendű alak definit alak és pedig, ha mindig pozitiv, akkor definit pozitiv, ha mindig negativ, akkor definit negativ alak. [Ez az eset páratlan $m+1$ esetében nem lehetséges]. 2. Változtatja előjelét, azaz bizonyos (h, k) értékpárnál pozitiv, másnál pedig negativ, ilyenkor az $r(h, k)$ alakot indefinitnek mondjuk. 3. Az $r(h, k)$ a jelét nem változtatja ugyan, de nemcsak akkor válik zérussá, ha $h=0$ $k=0$, hanem más esetben is [pl., ha $h=\alpha$, $k=\beta$; de ekkor $h=t\alpha$, $k=t\alpha$ helyettesítésénél is zérussá lesz, vagyis a $h=t\alpha$, $k=t\alpha$ egyenes mentén]. Ilyenkor $r(h, k)$-ról megint azt mondjuk, hogy semidefinit.

Azt állítjuk már most, hogy *ha $r(h, k)$ definit pozitiv, akkor az $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen minimuma van; ha definit negatív, akkor maximuma van; ha indefinit, akkor szélső értéke nincsen.* Azon esetben, midőn $r(h, k)$ semidefinit, csupán az $r(h, k)$-ból nem dönthetünk a szélső érték felől.

Tegyük fel tehát, hogy $r(h, k)$ definit pozitiv. Az R ismét így írható:

$$R=r(h,k)\left[1+\frac{\varepsilon_0h^{m+1}+\varepsilon_1h^mk+\cdots+\varepsilon_{m+1}k^{m+1}}{r(h,k)}\right]$$

és tegyük $h=\varrho\cos\alpha$, $k=\varrho\sin\alpha$; akkor a zárójelben álló második tag:

$$\frac{\varepsilon_0\cos^{m+1}\alpha+\varepsilon_1\cos^m\alpha\sin\alpha+\cdots+\varepsilon_{m+1}\sin^{m+1}\alpha}{A_0\cos^{m+1}\alpha+A_1\cos^m\alpha\sin\alpha+\cdots+A_{m+1}\sin^{m+1}\alpha}.$$

A nevező jelenti az $r(h, k)$ alak értékét az egységsugarú kör valamely helyén. De az egységsugarú körön ez a definit alak sehol sem 0, sőt az abszolut értékének alsó határa sem lehet 0, mert hiszen a folytonosságából következnék, hogy akkor a 0 értéket fel is venné valahol e körön. Jelöljük az alsó határát μ-vel. Válasszuk már most a ϱ-t oly kicsinynek, hogy ha $|h|\leq\varrho$, $|k|\leq\varrho$, mindegyik ε kisebb legyen pl. $\frac{\mu}{2(m+1)}$ -nél, amit mindig tehetünk, mert feltételünk szerint $\lim\limits_{\varrho=0}\varepsilon=0$. Ekkor tehát a felírt kifejezés számlálója kisebb absz. értékű $\frac{\mu}{2}$ -nél és így maga a tört kisebb absz. értékű $\frac{1}{2}$ -nél és igy a szögletes zárójelben álló kifejezés mindenesetre pozitiv. R olyan jelű, mint az $r(h, k)$, vagyis minden (h, k)-nál pozitiv; tehát az (a, b) hely ezen ϱ sugarú környezetében mindenütt:

$$f(x, y)>f(a, b),$$

vagyis az $f(x, y)$-nak az (a, b) helyen minimuma van. Ugyanígy mutatjuk meg, hogy maximum van, ha $r(h, k)$ definit negativ alak.

Ha azonban $r(h, k)$ indefinit alak, akkor az egységsugarú körön van olyan ív, amelyen pozitiv (azaz, ha $\alpha_1<\omega<\alpha_2$, akkor $h=\cos\omega$, $k=\sin\omega$ értékeket téve, $r(h, k)$ pozitiv) és van olyan ív, amelyen negativ. Ha a pozitiv szakaszon megjelölünk egy belső ívdarabot, akkor ezen nemcsak hogy pozitiv, de az alsó határa nem 0, tehát az előbbi okoskodást újból elvégezve, megmutathatjuk, hogy egy bizonyos kis ϱ sugarú körnek egy körcikkében R olyan jelű, mint $r(h, k)$, tehát pozitiv és éppen így egy másik cikkben negativ. Akárminő kis körrel vegyük is tehát körül az (a, b) pontot, e körben mindig lesznek olyan helyek, amelyeken $f(x, y) > f(a, b)$ és olyanok, amelyeken $f(x, y) < f(a, b)$, tehát az (a, b) helyen nem lehet szélső értéke.

5. Többváltozós függvény szélső értéke. Most már nem okoz különös nehézséget a szélső érték vizsgálata kettőnél több változó esetében sem. Legyen tehát adva az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n változós függvény. Ennek az $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ helyen maximuma van, ha e helynek van olyan környezete, amelyben mindenütt:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) < f(a_1, a_2, \ldots a_n),$$

minimuma pedig akkor van, ha valamely környezetben mindenütt

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) > f(a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Környezet alatt azokat az $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ helyeket értjük, melyekre nézve teljesül, hogy $|x_1 - a_1|$, $|x_2 - a_2|$, $\ldots$ $|x_n - a_n|$ mindannyian kisebbek egy bizonyos pozitiv δ-nál, vagy pedig hogy az

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2$$

kisebb egy bizonyos pozitiv ϱ^2 számnál.

Ezt még úgy is mondhatjuk, hogy maximum esetében

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots a_n + h_n) < f(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

minimum esetében pedig

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots a_n + h_n) > f(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

a $h_1, h_2, \ldots h_n$ mindazon értékeinél, amelyek absz. értékre nézve bizonyos δ-nál kisebbek.

Ezen egyenlőtlenségnek szélső érték esetében akkor is fenn kell állania, ha mindenik h növekményt — egynek kivételével — zérusnak választjuk, vagyis pl. maximum esetében

$$f(a_1, a_2, \ldots a_i + h_i, \ldots a_n) < f(a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots a_n), \quad \text{ha} \quad |h_i| < \delta.$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy az $f(a_1, a_2, \ldots x_i, \ldots a_n)$ egyváltozós függvénynek [x_i az egyetlen változó] az $x_i = a_i$ helyen szélső értéke van. De hogy ezen egyváltozós függvénynek szélső értéke legyen, annak szükséges feltétele, [ha a függvény differenciálható] hogy a differenciálhányadosa ezen a helyen eltünjék. Ebből tehát látjuk, hogy ahhoz, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$-nek az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyen szélső értéke legyen (ha egyáltalában $f(x_1, \ldots x_n)$ differenciálható) szükséges, hogy ezen a helyen az összes elsőrendű parciális differenciálhányadosok eltünjenek. *Szélső érték tehát csak azon a helyen lehetséges, ahol:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

De ez még nem elégséges. Bizonyos esetekben elégséges feltételeket kapunk ismét a Taylor-sor vizsgálatából. Ugyanis:

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots a_n + h_n) = f(a_1, a_2, \ldots a_n) +$$
$$+ \left[\frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} h_i h_k\right]_{x_j = a_j + \vartheta h_j} \quad (j = 1, 2, \ldots n).$$

Ha ismét $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{x_j = a_j + \vartheta h_j} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{x_j = a_j} + \varepsilon_{ik}$ tesszük és föltesszük, hogy a második differenciálhányadosok folytonosak, akkor az ε_{ik} számok zérusokká válnak, ha a h növekmények eltünnek. Jelöljük röviden a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$-et az $(a_1 \dots a_n)$ helyen A_{ik}-val, akkor tehát:

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots a_n+h_n) = f(a_1, a_2, \dots a_n) + \frac{1}{2}\Sigma A_{ik} h_i h_k + \frac{1}{2}\Sigma \varepsilon_{ik} h_i h_k.$$

Ha a $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ a $h_1, h_2, \dots h_n$ minden értékére pozitiv (negativ) az egyetlen $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots h_n = 0$ helyet kivéve, amelyen 0, akkor ezt a $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ quadratikus alakot pozitiv (negativ) definit alaknak mondjuk; ha a $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ a jelét változtatja, akkor indefinit és ha a jelét nem változtatja ugyan, de nemcsak a $h_1=0, \dots h_n=0$ értékrendszernél válik zérussá, akkor semidefinit.

Megint azt állítjuk, hogy ha $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ definit alak, akkor az $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ függvénynek az $(a_1, a_2, \dots a_n)$ helyen van szélső értéke és pedig maximuma, ha $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ definit negativ, minimuma, ha definit pozitiv; ha pedig $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ indefinit, akkor az $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ függvénynek az $(a_1, a_2, \dots a_n)$ helyen nincs szélső értéke. Ha $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ semidefinit, akkor e tagok alapján nem dönthetünk.

A bizonyítás egészen úgy végezhető, mint az előbbi esetekben. Ugyanis ha $h_1 = r\alpha_1, h_2 = r\alpha_2, \dots h_n = r\alpha_n$ tesszük, ahol $h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2 = r^2$, akkor $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$ és

$$\Sigma A_{ik} h_i h_k + \Sigma \varepsilon_{ik} h_i h_k = \Sigma A_{ik} h_i h_k \left[1 + \frac{\Sigma \varepsilon_{ik} \alpha_i \alpha_k}{\Sigma A_{ik} \alpha_i \alpha_k}\right].$$

Abban az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ zárt [sürüsödő helyeit is tartalmazó. (L. a jegyzetet a 90. lapon.)] számhalmazban, amely az $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$ egyenletnek eleget tesz, az $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \dots \alpha_n=0$ nem foglaltatik, tehát ha $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ az összes értékrendszereket fölveszik, amelyek az $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$ egyenletet kielégítik, akkor a hozzájuk tartozó $\Sigma A_{ik} \alpha_i \alpha_k$ értékeknek 0-tól különböző alsó határuk lesz (mert ha 0 volna a $\Sigma A_{ik} \alpha_i \alpha_k$ alsó határa, ezt a folytonosság következtében a szóban forgó számhalmazban fel is venné). Minthogy a számláló végtelen kis ϱ esetében végtelen kicsinnyé lesz, tehát a $\Sigma A_{ik} h_i h_k + \Sigma \varepsilon_{ik} h_i h_k$ előjele megint ugyanaz, mint az első tagé. Ezzel már kimutattuk, hogy ha $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ definit pozitiv (negativ), akkor az $f(x_1, x_2, \dots x_n)$-nek az $(a_1, a_2, \dots a_n)$ helyen minimuma (maximuma) van. Ugyancsak ezzel az eljárással mutathatjuk meg, hogy ha $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ indefinit, akkor vannak akárminő kis környezetben olyan helyek, amelyeken

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots a_n+h_n) > f(a_1, a_2, \dots a_n),$$

valamint olyanok is, ahol az ellenkező egyenlőtlenség áll, vagyis az $(a_1, a_2, \dots a_n)$ helyen a függvénynek szélső értéke nem lehet. Végül, ha a $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ semidefinit, akkor további vizsgálatra van szükség.

Ha az $(a_1, a_2, \dots a_n)$ helyen az összes második differenciálhányadosok eltünnek, akkor a Taylor-sort tovább folytatjuk és akkor a szélső érték vizsgálata a magasabbrendű differenciálhányadosokkal alkotott alakok definit voltával kapcsolatos.

6. A másodrendű alak vizsgálata három változó esetében. A szélső érték vizsgálata, miként láttuk, rendszerint arra a kérdésre redukálódik, hogy egy másodrendű alak mikor definit? Két változó esetében ennek eldöntése igen könnyen végezhető. Láttuk, hogy az $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ definit alak, ha $AC-B^2$ pozitiv szám és pedig, ha A pozitiv, akkor az alak definit pozitiv, ha A negativ, akkor pedig definit negativ. Ha $AC-B^2$ negativ, akkor az alak indefinit, ha $AC-B^2=0$, akkor pedig semidefinit.

Nézzük most, hogy

$$A_{11}h^2+A_{22}k^2+A_{33}l^2+2A_{12}hk+2A_{23}kl+2A_{31}hl$$

másodrendű háromváltozós (ternär) alak, mikor lesz definit pozitiv? Ezt az alakot így írhatjuk: $[A_{ik}=A_{ki}$ tesszük és föltesszük, hogy $A_{11}\neq 0$*]

$$A_{11}h^2+2h[A_{12}k+A_{13}l]+[A_{22}k^2+A_{33}l^2+2A_{23}kl]. \qquad A)$$

Ez ilyen alakú: $\alpha h^2+2\beta h+\gamma$, ahol α, β, γ a h-tól függetlenek (és $\alpha\neq 0$), vagyis ilyen alakú: $h^2\left[\alpha+\frac{2\beta}{h}+\frac{\gamma}{h^2}\right]$. Hogy ez mindig pozitiv legyen, először is kell, hogy α pozitiv legyen, mert hiszen a k és l-nek oly kis és h-nak oly nagy értékeket adhatunk, hogy a $\frac{2\beta}{h}+\frac{\gamma}{h^2}$ az $\frac{\alpha}{2}$-nél kisebb absz. értékű legyen és akkor a zárójelben álló kifejezés olyan jelű, mint az α. Ha még

$$\alpha h^2+2\beta h+\gamma=\frac{1}{\alpha}[(\alpha h+\beta)^2+\alpha\gamma-\beta^2]$$

tesszük, akkor pedig látjuk, hogy ez a kifejezés minden h értéknél akkor és csak akkor lehet pozitiv, ha $\alpha\gamma-\beta^2>0$; mert ha negativ volna, h-nak $-\frac{\beta}{\alpha}$ értéket adván, a jobboldali kifejezés $\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha}$ tehát negativ lenne, ha pedig $\alpha\gamma-\beta^2$ 0 volna, akkor semidefinit esettel volna dolgunk, mert az alak eltünnék $h=\frac{-\beta}{\alpha}$ értéknél is.

Az $\alpha h^2+2\beta h+\gamma$ tehát mindig pozitiv, ha: 1) $\alpha>0$ 2) $\alpha\gamma-\beta^2>0$.

Alkalmazva ezt a szóban forgó A) alakra, azt látjuk, hogy ez pozitiv definit lesz, ha

$$1)\quad A_{11}>0; \qquad 2)\quad A_{11}(A_{22}k^2+2A_{23}kl+A_{33}l^2)-(A_{12}k+A_{13}l)^2>0.$$

A 2) alatti feltétel részletezve azt fejezi ki, hogy a

$$k^2[A_{11}A_{22}-A_{12}^2]+2kl[A_{11}A_{23}-A_{12}A_{13}]+l^2[A_{11}A_{33}-A_{13}^2]$$

quadratikus alak definit pozitiv legyen. De azt már tudjuk, hogy ennek feltétele:

$$\alpha)\quad A_{11}A_{22}-A_{12}^2>0;$$

$$\beta)\quad (A_{11}A_{22}-A_{12}^2)(A_{11}A_{33}-A_{13}^2)-(A_{11}A_{23}-A_{12}A_{13})^2>0$$

legyen. A $\beta)$ alatti feltétel (az $A_{11}>0$ tényezőt elhagyva) így is írható:

* Mert ha $A_{11}=0$ volna, akkor a $k=0$, $l=0$ értékekre, vagyis az egész h tengely mentén az alak 0 lenne, tehát definit nem lehetne.

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

tehát a szükséges 3 feltétel igen egyszerűen fogalmazható : 1) $D>0$, 2) D determinans felső sarokaldeterminansa :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0$$

és 3) ennek sarokaldeterminansa: $A_{11}>0$ legyen. A tárgyalásból egyúttal kitünik, hogy ezek egyúttal elégséges feltételek is.

Ha azt kivánjuk, hogy $A_{11}h^2+A_{22}k^2+\cdots$ alak definit negativ legyen, akkor az előbbiek alapján ennek a feltételeit már azonnal felírhatjuk; t. i. e helyett azt kérdezzük, hogy az ellenkező előjellel vett:

$$-A_{11}h^2-A_{22}k^2-A_{33}l^2-2A_{12}hk-2A_{13}hl-2A_{23}kl$$

alak mikor lesz definit pozitiv? Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$-A_{11}>0, \quad A_{11}A_{22}-A_{12}^2>0, \quad -D>0$$

legyen, vagyis $\qquad D<0, \quad A_{11}A_{22}-A_{12}^2>0, \quad A_{11}<0.$

Megjegyezzük azt a könnyen észben tartható eredményt, hogy általában arra, hogy az n változós $\Sigma A_{ik}h_i h_k$ quadratikus alak definit pozitiv legyen, szükséges és elégséges, hogy a

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}, & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23}, & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}, & \dots & A_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3}, & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns, valamint ennek felső baloldali sarokaldeterminánsa, továbbá ennek a sarokaldeterminánsa és i. t., tehát

$$A_{11}, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

mindannyian pozitivok legyenek. Ebből pedig azonnal következik, hogy a $\Sigma A_{ik}h_i h_k$ definit negativ, ha a páratlan rendű determinánsok negativok, a páros rendűek pedig pozitivok.

7. Példák a szélső értékek számítására. Nehány példán mutassuk meg a szélsőérték kikeresésének módját.

1. *Példa.* Vizsgáljuk meg, hogy a

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

paraboloidnak melyik a legalacsonyabb (legmagasabb) pontja. Először is kell, hogy:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

azaz:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0 \qquad \alpha)$$

legyen. Ha $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ determináns nem 0, akkor ez az egyenletrendszer megoldható [A megoldás az $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ kúpszelet középpontja]. Van-e ezen a helyen szélső érték, annak eldöntésére a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial g^2}k^2$$

alak vizsgálandó. Ez az: $a_{11}h^2+2a_{12}hk+a_{22}k^2$ definit alak, ha $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$. Szélső érték ez esetben tehát csakis akkor van, ha az $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\cdots=0$ kúpszelet ellipszis. Ha hyperbola, vagyis $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, akkor nem lehet legmélyebb, vagy legmagasabb pontról szólni.

Ha $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ és $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$, akkor a_{12} sem 0. Ez esetben az α) alatti egyenletrendszernek csakis akkor lesz megoldása, ha:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

Jelöljük e közös számértéket k-val, akkor tehát

$$z=a_{22}\left[kx+y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right]^2+\frac{a_{33}a_{22}-a_{23}^2}{a_{22}},$$

melynek a $kx+y+\frac{a_{23}}{a_{22}}=0$ egyenes mentén van szélső értéke. Ha ezen egyenes valamely (a, b) pontját kiszemeljük, akkor látjuk, hogy ezen az (a, b) helyen aszerint, amint a_{22} negativ, vagy pozitiv, a z-nek nagyobb, vagy kisebb értéke van, mint e hely környezetében, kivéve az egyenesmenti pontokat, amelyeken a függvény értéke egyenlő az (a, b) helyen felvett értékkel. A szélső érték tehát *nem igazi.*

Ha pedig $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, $a_{11}=0$ és $a_{22}\neq 0$, akkor egyúttal a_{12} is 0; tehát még a_{13} is 0. Az α) alatti második egyenletből:

$$y=-\frac{a_{23}}{a_{22}}$$

tehát

$$z=a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}$$

hengernek az $y=-\frac{a_{23}}{a_{22}}$ mentén ismét nem igazi szélső értéke van. Ugyanez áll arra az esetre, midőn $a_{11}\neq 0$, de $a_{22}=0$ és ezzel együtt $a_{12}=0$ és még $a_{23}=0$.

2. *Példa.* Határozzunk meg olyan pontot a térben, melynek megadott n ponttól való távolságainak négyzetösszege minimum legyen. [Adott n pontba helyezett egységnyi tömegek tehetetlenségi nyomatéka melyik pontra nézve minimális?] Legyenek az adott pontok koordinátái:

$$(a_1, b_1, c_1),\ (a_2, b_2, c_2),\ (a_3, b_3, c_3)\ldots(a_n, b_n, c_n).$$

A keresett pont: (x, y, z).

Kell tehát, hogy:

$$u=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2+(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2+\cdots+$$
$$+(x-a_n)^2+(y-b_n)^2+(z-c_n)^2$$

minimum legyen. Ehhez kell, hogy:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = (x-a_1) + (x-a_2) + \cdots + (x-a_n) = nx - (a_1+a_2+\cdots+a_n) = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = (y-b_1) + (y-b_2) + \cdots + (y-b_n) = ny - (b_1+b_2+\cdots+b_n) = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = (z-c_1) + (z-c_2) + \cdots + (z-c_n) = nz - (c_1+c_2+\cdots+c_n) = 0$$

legyen, vagyis: $\quad x = \frac{\Sigma a_i}{n}, \quad y = \frac{\Sigma b_i}{n}, \quad z = \frac{\Sigma c_i}{n}$

(a tömegközéppont). Hogy van-e ezen a helyen szélső érték, annak eldöntésére a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} k^2 + \cdots$ quadratikus alak vizsgálandó. Ez az alak a jelen esetben egyszerűen:

$$2n\,(h^2+k^2+l^2)$$

definit pozitiv alak, tehát minimummal van dolgunk.

3. *Példa.* Tudjuk, hogy két ismeretlen rendszerint két egyenletből határozható meg; ha azt kívánjuk, hogy x és y eleget tegyenek több egyenletnek, például e lineáris egyenleteknek:

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad a_2 x + b_2 y = c_2, \quad a_3 x + b_3 y = c_3, \ldots \quad a_n x + b_n y = c_n,$$

akkor az együtthatók között bizonyos relációknak kell fennállaniok, úgy, hogy voltaképpen csak két független egyenletünk legyen. De a gyakorlati mérés igen sokszor állít fel ilyen problemákat, hogy t. i. különböző mérésekkel az a, b és c mennyiségeket $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots a_n, b_n, c_n$-nek találtuk és kellene olyan x és y mennyiségeknek lenniök, amelyek a felírt egyenleteket kielégítsék. Ilyen x, y értékpár természetesen rendszerint nem létezik; tehát akárminő (x, y) értékpárt helyettesítsünk is be, az $a_i x + b_i y$ nem lesz c_i, (minden i-re) hanem $a_i x + b_i y - c_i$ hibákat követünk el, midőn a meghatározandó számok helyébe ezt az értékpárt tesszük.

A gyakorlati számításban legvalóbbszínűnek azon (x, y) értékpárt tekintik, amelyre nézve e hibák négyzetösszege minimalis.

Határozzuk meg tehát azon (x, y) értékpárt, amely az

$$f(x, y) = (a_1 x + b_1 y - c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y - c_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n y - c_n)^2$$

hibanégyzet-összeget minimummá teszi. Ehhez kell, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

legyen, azaz:

$$a_1(a_1 x + b_1 y - c_1) + a_2(a_2 x + b_2 y - c_2) + \cdots + a_n(a_n x + b_n y - c_n) = 0$$
$$b_1(a_1 x + b_1 y - c_1) + b_2(a_2 x + b_2 y - c_2) + \cdots + a_n(a_n x + b_n y - c_n) = 0$$

legyen. Ez az (x, y) értékpárra két egyenletet szolgáltat:

$$x(a_1 a_1 + a_2 a_2 + \cdots + a_n a_n) + y(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) -$$
$$-(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n) = 0$$
$$x(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) + y(b_1 b_1 + b_2 b_2 + \cdots + b_n b_n) -$$
$$-(b_1 c_1 + b_2 c_2 + \cdots + b_n c_n) = 0.$$

Ha ezt a jelölést használjuk: $k_1 l_1 + k_2 l_2 + \cdots + k_n l_n = [kl]$, akkor e két egyenlet rövidebb alakban:

$$[aa]\,x + [ab]\,y = [ac]$$
$$ab]\,x + [bb]\,y = [bc].$$

E rendszer determinánsáról könnyen megmutathatjuk, hogy értéke: $\Sigma(a_i b_k - a_k b_i)^2$, ahol (i, k) az $1, 2, \ldots n$-ből alkotható különböző értékpárok; tehát (ha csak $a_k : a_1$ nem egyenlő $b_k : b_1$-gyel minden k-nál) e determináns nem 0, és így a rendszer megoldható.

Hogy az így talált (x, y) értékpár az $f(x, y)$-t tényleg minimummá teszi, arról egyszerűen győződhetünk meg.

4. *Példa.* Adva van két kitérő egyenes. Határozzuk meg ezeken azt a két pontot, melyek egymáshoz legközelebb vannak; vagyis keressük meg a kitérő egyenesek legrövidebb távolságát. Legyen az egyik egyenes valamely pontja (a, b, c) és az egyenes iránytényezői: α, β, γ, a másik egyenes egyik pontja: (a_1, b_1, c_1) és iránytényezői: α_1, β_1, γ_1; tehát a két egyenes egyenletei:

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = u, \quad \frac{x-a_1}{\alpha_1} = \frac{y-b_1}{\beta_1} = \frac{z-c_1}{\gamma_1} = v. \tag{1}$$

Az egyiken felvett (x, y, z) pontnak a másikon felvett (ξ, η, ζ)-tól való távolságának négyzete:

$$t^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = (a-a_1+\alpha u-\alpha_1 v)^2 +$$
$$+ (b-b_1+\beta u-\beta_1 v)^2 + (c-c_1+\gamma u-\gamma_1 v)^2.$$

E távolságnégyzet az u és v független változóktól függ. Szélső értéke akkor lehet, ha $\frac{\partial t^2}{\partial u} = 0$ és $\frac{\partial t^2}{\partial v} = 0$, azaz, ha u és v kielégítik ezeket az egyenleteket:

$$\alpha\,(a-a_1+\alpha u-\alpha_1 v) + \beta\,(b-b_1+\beta u-\beta_1 v) + \gamma\,(c-c_1+\gamma u-\gamma_1 v) = 0$$
$$\alpha_1(a-a_1+\alpha u-\alpha_1 v) + \beta_1(b-b_1+\beta u-\beta_1 v) + \gamma_1(c-c_1+\gamma u-\gamma_1 v) = 0.$$

Ezen egyenletekből:*

$$(a-a_1+\alpha u-\alpha_1 v) : (b-b_1+\beta u-\beta_1 v) : (c-c_1+\gamma u-\gamma_1 v) =$$
$$= (\beta\gamma_1-\beta_1\gamma) : (\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1) : (\alpha\beta_1-\alpha_1\beta),$$

vagy, ha a jobboldali determinánsokat rendre A, B, C-vel jelöljük:

$$\frac{a-a_1+\alpha u-\alpha_1 v}{A} = \frac{b-b_1+\beta u-\beta_1 v}{B} = \frac{c-c_1+\gamma u-\gamma_1 v}{C}$$

és ha még e közös értéket $-h$-val jelöljük:

$$\begin{aligned} Ah + \alpha u - \alpha_1 v &= a_1 - a \\ Bh + \beta u - \beta_1 v &= b_1 - b \\ Ch + \gamma u - \gamma_1 v &= c_1 - c \end{aligned} \tag{2}$$

Használjuk e jelöléseket:

$$-D = \begin{vmatrix} A & \alpha & -\alpha_1 \\ B & \beta & -\beta_1 \\ C & \gamma & -\gamma_1 \end{vmatrix}, \quad -L = \begin{vmatrix} a_1-a & \alpha & -\alpha_1 \\ b_1-b & \beta & -\beta_1 \\ c_1-c & \gamma & -\gamma_1 \end{vmatrix},$$

* Megemlítjük, hogy ezen egyenletek, vagyis

$$(x-\xi) : (y-\eta) : (z-\zeta) = (\beta\gamma_1-\gamma\beta_1) : (\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1) : (\alpha\beta_1-\beta\alpha_1),$$

egyúttal azt a geometriai tényt is kifejezik, hogy az egymáshoz legközelebb eső (x, y, z) és (ξ, η, ζ) pontokat összekötő egyenes (a kitérő egyenesek tengelye) mindkét egyenesre merőleges.

$$-M=\begin{vmatrix} A & a_1-a & -\alpha_1 \\ B & b_1-b & -\beta_1 \\ C & c_1-c & -\gamma_1 \end{vmatrix}, \quad -N=\begin{vmatrix} A & \alpha & a_1-a \\ B & \beta & b_1-b \\ C & \gamma & c_1-c \end{vmatrix},$$

akkor:
$$h=\frac{L}{D}, \quad u=\frac{M}{D}, \quad v=\frac{N}{D}.$$

Most már ismerjük u és v értékeit, tehát egyúttal egyértelműen meghatározhatók az egymáshoz legközelebb levő (x, y, z) és (ξ, η, ζ) pontok is az 1) alatti egyenletekből.

A 2) alatti egyenletekből tehát:

$$a-a_1+\alpha u-\alpha_1 v=-\frac{AL}{D}, \quad b-b_1+\beta u-\beta_1 v=-\frac{BL}{D}, \quad c-c_1+\gamma u-\gamma_1 v=-\frac{CL}{D}.$$

Még megjegyezzük, hogy

$$D=A(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)+B(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)+C(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)=A^2+B^2+C^2.$$

és igy:
$$t^2=\frac{L^2(A^2+B^2+C^2)}{D^2}=\frac{L^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

A feladat természetéből következik, hogy ez a minimális távolság négyzete.

IV. FEJEZET.

A QUADRATIKUS ALAK VIZSGÁLATA.

Az előbbi fejezetben (78. lapon) kimondott eredmények megállapítása végett, kissé bővebben kell foglalkoznunk a quadratikus alakok elméletével, ami ugyan némileg elterel bennünket a tulajdonképpeni tárgyunktól, de érdekességénél és fontosságánál fogva megérdemli a vele való tüzetesebb foglalkozást.

1. n változó quadratikus alakja. Lineáris transzformáció. Az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók quadratikus alakja a következő tipusú kifejezés:

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots +$$
$$+ 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n,$$

vagy rövidebben írva:

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i,k=1,2,\ldots n} a_{ik}x_ix_k \qquad (a_{ik}=a_{ki}).$$

A főkérdés, ami bennünket foglalkoztat, az, hogy ez a quadratikus alak mikor definit pozitiv (negativ), vagyis, hogy az együtthatókból hogyan lehet felismerni az alak definit voltát?

Evégből kissé foglalkoznunk kell ezen quadratikus alak «transzformációjával». Ha ugyanis az $x_1 \ldots x_n$ helyett új változókat vezetünk be ezzel a «lineáris transzformációval»:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdots + \alpha_{1n}y_n, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \cdots + \alpha_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \cdots + \alpha_{nn}y_n, \end{aligned}$$

akkor a $\varphi(x_1 \ldots x_n)$ quadratikus alak a

$$\psi(y_1 \ldots y_n) = \Sigma a'_{ik}y_iy_k$$

quadratikus alakba megy át, melyben:

$$\begin{aligned} a'_{ik} = {} & a_{11}\alpha_{1i}\alpha_{1k} + a_{12}\alpha_{1i}\alpha_{2k} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1i}\alpha_{nk} + \\ & + a_{21}\alpha_{2i}\alpha_{1k} + a_{22}\alpha_{2i}\alpha_{2k} + \cdots + a_{2n}\alpha_{2i}\alpha_{nk} + \\ & + \cdots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}\alpha_{ni}\alpha_{1k} + \cdots \qquad\qquad + a_{nn}\alpha_{ni}\alpha_{nk}, \end{aligned}$$

vagy rövidebben:

$$a'_{ik} = \sum_{r,s=1,2,\ldots,n} a_{rs}\alpha_{si}\alpha_{rk}.$$

Ezt még így is írhatjuk, ha α_{rk} szerint rendezzük:

$$a'_{ik} = \alpha_{1k}\sum_s a_{1s}\alpha_{si} + \alpha_{2k}\sum_s a_{2s}\alpha_{si} + \cdots + \alpha_{nk}\sum_s a_{ns}\alpha_{si},$$

ahol az s szerinti összegezésben s értéke 1-től n-ig veendő. Ebből az alakból egy igen nevezetes determináns-reláció következik. Ugyanis*:

$$|a'_{ik}| = |\alpha_{ik}|\,|\sum_s a_{rs}\alpha_{si}|.$$

De a második tényező két determináns: $|a_{ik}|$ és $|\alpha_{ik}|$ szorzata, tehát:

$$|a'_{ik}| = |\alpha_{ik}|^2\,|a_{ik}|.$$

Az $|a_{ik}|$ determinánst a φ alak, az $|\alpha_{ik}|$-t pedig a transzformáció determinánsának nevezzük. Arra jutottunk, hogy: a *transzformált quadratikus alak determinánsa egyenlő az eredeti alak determinánsának a transzformációdetermináns négyzetével való szorzatával.*

Ha megállapodunk abban, hogy az alkalmazott lineáris transzformáció determinánsa ne legyen 0, akkor ennek a tételnek igen fontos folyománya az, hogy ha a quadratikus alak determinánsa 0-tól különböző, akkor a transzformált alaké is különbözik a 0-tól.

2. Quadratikus alak, melynek determinansa: 0. Itt mindjárt megjegyezzük, hogy a 0 determinánsú quadratikus alak voltaképen kevesebb változó quadratikus alakjának tekinthető. Már az $ax^2+2bxy+cy^2$ quadratikus alaknál is láttuk, hogy ha determinánsa, az $ac-b^2$ eltünik, akkor

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \frac{1}{a}(ax+by)^2,$$

tehát ha $ax+by=u$ tesszük, akkor az adott quadratikus alak $\dfrac{u^2}{a}$, csak egy változó alakja. Az általános tételt a következőképpen mutathatjuk meg. Ha $|a_{ik}|=0$, akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n &= 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek van olyan megoldás-rendszere, melynek nem minden eleme 0. Jelöljük ezt: $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$-el. Tegyük már most a $\varphi(x_1\ldots x_n)=\Sigma a_{ik}x_ix_k$ quadratikus alakban $x_1, x_2, \ldots x_n$ helyébe rendre $x_1+\lambda\xi_1$, $x_2+\lambda\xi_2, \ldots x_n+\lambda\xi_n$-et. Ekkor [Taylor sorba fejtve a $\varphi(x_1+\lambda\xi_1, \ldots x_n+\lambda\xi_n)$-et]:

$$\varphi(x_1+\lambda\xi_1, \ldots x_n+\lambda\xi_n) = \varphi(x_1\ldots x_n) + \lambda\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\xi_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\xi_n\right] +$$
$$+\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\xi_1^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\xi_i\xi_k + \cdots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}\xi_n^2\right].$$

A középső tag egyszerűen átalakítható. Ugyanis

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{ni}x_n,$$

tehát $x_1, x_2, \ldots x_n$ szerint rendezve:

$$\frac{1}{2}\Sigma\xi_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = x_1(a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\cdots+a_{1n}\xi_n)+\cdots+x_n(a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\cdots+a_{nn}\xi_n)$$

és ez feltételünk szerint: 0. A λ^2 együtthatója pedig, mint azonnal látjuk (mert $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}=2a_{ik}$) nem egyéb, mint $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Ez pedig így írható:

* $|e_{i,k}|$ olyan determinanst jelöl, melynek i-ik sorában a k-ik elem e_{ik}.

$$\Sigma\xi_i(a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\cdots+a_{in}\xi_n),$$

tehát szintén : 0, vagyis :

$$\varphi(x_1+\lambda\xi_1, x_2+\lambda\xi_2, \ldots x_n+\lambda\xi_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

identitás fennáll $x_1, x_2, \ldots x_n$ és λ minden értékénél. Fennáll tehát akkor is, ha λ gyanánt, amely egészen tetszőleges, ezt választjuk : $\lambda = -\frac{x_n}{\xi_n}$, ahol ξ_n, amit a betűk változtatásával mindig elérhetünk, nem 0. Ekkor tehát :

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi\left(x_1 - \frac{\xi_1 x_n}{\xi_n}, x_2 - \frac{\xi_2 x_n}{\xi_n}, \ldots x_{n-1} - \frac{\xi_{n-1} x_n}{\xi_n}, 0\right).$$

A jobboldalon álló kifejezés nem más, mint az

$$x_1 - \frac{\xi_1 x_n}{\xi_n}, x_2 - \frac{\xi_2 x_n}{\xi_n}, \ldots x_{n-1} - \frac{\xi_{n-1} x_n}{\xi_n}$$

$n-1$ változó quadratikus alakja. *Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha a quadratikus alak determinánsa : 0, akkor n-nél kevesebb változó quadratikus alakjára redukálható a változók egyszerű lineáris transzformációjával.*

Alig szükséges mondanunk, hogy fordítva, ha az n változós quadratikus alak valamely el nem tűnő determinánsú lineáris transzformációval n-nél kevesebb változót tartalmazó quadratikus alakra transzformálható, akkor a determinánsa 0. Ha ugyanis a transzformált alak $\Sigma a'_{ik} y_i y_k$ az y_n-et nem tartalmazza, azaz $a'_{1n}=a'_{2n}=\cdots=a'_{nn}=0$, akkor $|a'_{ik}|=0$, tehát $|a_{ik}|$ is eltünik.

Az olyan alak, melynek determinánsa 0, nem lehet definit alak ; mert hiszen a belőle az előbbi transzformációval nyerhető $\Sigma a'_{ik} y_i y_k$ alak [$n-1$ változós] eltünik, ha

$$y_1=0, y_2=0, \ldots y_{n-1}=0,$$

vagyis az $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ eltünik, ha az x-ek között ez az $n-1$ egyenlet áll fenn :

$$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n=0$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\alpha_{n-1,1}x_1+\alpha_{n-1,2}x_2+\cdots+\alpha_{n-1,n}x_n=0.$$

E rendszernek mindenesetre van a 0-tól különböző megoldásrendszere, vagyis a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alak nemcsak akkor tünik el, ha $x_1=0, x_2=0, \ldots x_n=0$, ami a definit alaknál nem fordulhat elő.

A $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alak definit voltának egyik szükséges kellékét tehát már meg is kaptuk ; azt, hogy az alak determinánsa ne legyen 0.

3. **A quadratikus alak transzformációja kanonikus alakra.** Most azzal a fontos kérdéssel foglalkozunk, hogy miként lehet a quadratikus alakot «kanonikus» alakra transzformálni, vagyis olyanra, melyben csakis a változók négyzeteit tartalmazó tagok szerepeljenek ; mert ebből a kanonikus alakból közvetlenül következtethetünk majd arra, hogy az alak definit-e vagy nem. Kimutatjuk, hogy minden quadratikus alakot lehet ilyen módon transzformálni és hogy ha a quadratikus alak együtthatói valósak voltak, a transzformáció koefficiensei is valósak. Az eljárás a következő : Ha a quadratikus alakban a_{11} nem 0, akkor így írható : [x_1 szerint rendezve].

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = a_{11}x_1^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) + \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n),$$

ahol a $\varphi(x_2 \ldots x_n)$ az $x_2 \ldots x_n$ változók quadratikus alakja. A jobboldalt átalakítjuk :

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = \frac{1}{a_{11}}[(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n)^2+ \\ +a_{11}\varphi(x_2\ldots x_n) - (a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)^2],$$

vagyis, ha

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1$$

tesszük:

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = \frac{y_1^2}{a_{11}} + \psi(x_2, x_3, \ldots x_n),$$

tehát a quadratikus alakot átalakítottuk egy igen egyszerű lineáris transzformációval az $y_1, x_2, \ldots x_n$ olyan quadratikus alakjára, amelyben y_1 csakis egy helyen, mint négyzetes tag szerepel.

Ha $a_{11}=0$, de az $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ számok között van 0-tól különböző, pl. $a_{ii}\neq 0$, akkor x_i viheti az x_1 előbbi szerepét, az átalakitás az előbbi módon elvégezhető. Ha azonban $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$, akkor az átalakítás így nem végezhető. Ez esetben, ha x_1 egyáltalában szerepel a quadratikus alakban, az indexek megváltoztatásával mindig elérhetjük, hogy a_{12} ne legyen 0, vagyis a quadratikus alakban előfordul ilyen tag: $2a_{12}x_1x_2$.

Ekkor tehát a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ quadratikus alakot így rendezhetjük:

$$2a_{12}x_1x_2 + x_1\varphi_1(x_3, x_4, \ldots x_n) + x_2\varphi_2(x_3, x_4, \ldots x_n) + \psi(x_3 \ldots x_n),$$

ahol φ_1 és φ_2 az $x_3, x_4, \ldots x_n$ lineáris alakjai és $\psi(x_3\ldots x_n)$ a quadratikus alak azon tagjai, amelyekben x_1 és x_2 már nem fordulnak elő.

Az első három tag helyett ezt írhatjuk:

$$2a_{12}\left[x_1 + \frac{\varphi_2}{2a_{12}}\right]\left[x_2 + \frac{\varphi_1}{2a_{12}}\right] - \frac{\varphi_1\varphi_2}{2a_{12}}.$$

Jelöljük az $x_1 + \frac{\varphi_2}{2a_{12}}$ lineáris alakot y_1-el, az $x_2 + \frac{\varphi_1}{2a_{12}}$-t pedig y_2-vel, és a $\frac{\varphi_1\varphi_2}{2a_{12}}$ quadratikus alakot, mely csak az $x_3, \ldots x_n$ változókat tartalmazza, vonjuk össze az előbbi ψ-vel (és az így keletkező alakot megint ψ-vel jelöljük); akkor tehát

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = 2a_{12}y_1y_2 + \psi(x_3, x_4, \ldots x_n)$$

és tekintettel az

$$y_1y_2 = \frac{1}{4}[(y_1+y_2)^2 - (y_1-y_2)^2]$$

egyenlőségre:

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = \frac{a_{12}}{2}(y_1+y_2)^2 - \frac{a_{12}}{2}(y_1-y_2)^2 + \psi(x_3, \ldots x_n),$$

vagy ha még $y_1+y_2=z_1$ és $y_1-y_2=z_2$ tesszük, akkor

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = \frac{a_{12}}{2}z_1^2 - \frac{a_{12}}{2}z_2^2 + \psi(x_3, \ldots x_n).$$

Megjegyezzük, hogy

$$z_1=y_1+y_2=x_1+x_2+\cdots, \quad z_2=y_1-y_2=x_1-x_2+\cdots$$

A quadratikus alakot tehát lineáris transzformációval, (melyben $x_3, \ldots x_n$ nem változtak,) átalakítottuk úgy, hogy az első két változó: z_1 és z_2 csakis négyzetes tagokban szerepelnek.

Már ebből is láthatjuk, hogy az ilyen alak nem lehet definit alak; mert például, ha $x_3, \ldots x_n$ mindannyian 0-sá tétetnek és $x_1=x_2\neq 0$, akkor $z_2=0$ és $z_1=2x_1$, tehát sgn $\Sigma a_{ik}x_ix_k=$ sgn a_{12}. Ha pedig $x_1=-x_2\neq 0$, akkor $z_1=0$ és

$z_2=2x_1$, tehát $\operatorname{sgn} \Sigma a_{ik} x_i x_k = -\operatorname{sgn} a_{12}$, tehát a szóban forgó alak nem lehet definit.

Menjünk tovább a tárgyalásunkban. Ha valamelyik négyzetes tag együtthatója nem 0, akkor (ezt a_{11}-nek véve) a quadratikus alakot az

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\,; \quad x_2=x_2, \ldots x_n=x_n$$

transzformációval átalakítottuk az

$$\frac{y_1^2}{a_{11}}+\psi(x_2, x_3, \ldots x_n)$$

-be, ha pedig mindegyik négyzetes tag együtthatója eltünik, akkor a

$$z_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\,; \quad z_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n\,; \quad x_3=x_3, \ldots x_n=x_n$$

transzformációval, (ahol, mint említettük, $z_1=x_1+x_2+\cdots$, $z_2=x_1-x_2+\cdots$ alakú) átalakítottuk a quadratikus alakot az

$$\frac{a_{12}z_1^2}{2}-\frac{a_{12}}{2}z_2^2+\psi(x_3, x_4, \ldots x_n)$$

-be, ahol az első esetben $\psi(x_2, x_3, \ldots x_n)$ az $x_2, x_3, \ldots x_n$ és a második esetben $\psi(x_3, x_4, \ldots x_n)$ az $x_3, \ldots x_n$ quadratikus alakja. Akár az első, akár a második esettel legyen dolgunk, a ψ quadratikus alakon, mely kevesebb változót tartalmaz, mint az eredeti, folytatjuk ezt az eljárást, míg végül az adott quadratikus alak a következőbe megy át

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k=A_1z_1^2+A_2z_2^2+\cdots+A_nz_n^2, \qquad A)$$

ahol a

$$z_i=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\cdots+\alpha_{in}x_n. \qquad B)$$
$$i=1,2,\ldots n$$

Az $|\alpha_{ik}|$ determinánsról, a lineáris transzformáció determinánsáról, megjegyezzük, hogy a most végbevitt fokozatos átalakításból következőleg ez a determináns nem lehet 0. Nagyon egyszerűen beláthatjuk ezen magában is fontos állítás helyességét: Ha egymásután két lineáris transzformációt végezünk, pl. az

$$y_i=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\cdots+\alpha_{in}x_n$$
$$i=1,2,\ldots n$$

és azután a

$$z_k=\beta_{k1}y_1+\beta_{k2}y_2+\cdots+\beta_{kn}y_n,$$
$$k=1,2,\ldots n$$

transzformációt, akkor ez egy lépésben is elvégezhető, ha

$$z_k=(\beta_{k1}\alpha_{11}+\beta_{k2}\alpha_{21}+\cdots+\beta_{kn}\alpha_{n1})x_1+$$
$$+(\beta_{k1}\alpha_{12}+\beta_{k2}\alpha_{22}+\cdots\beta_{kn}\alpha_{n2})x_2+\cdots+(\beta_{k1}\alpha_{1n}+\cdots+\beta_{kn}\alpha_{nn})x_n$$

tesszük, vagyis olyan transzformációt végzünk, melynek együtthatói az $|\alpha_{ik}|$ és $|\beta_{ik}|$ matrixok «összetételéből» származnak; ha az egyes transzformációk determinánsa nem zérus, akkor a komponált transzformáció determinánsa sem lehet 0. De az általunk végzett lépésenkinti transzformációknál csak kétféle szerepelt; olyan, amelynél

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\,; \quad y_2=x_2, y_3=x_3, \ldots y_n=x_n, \quad \text{hol} \quad a_{11}\neq 0$$

és olyan, amelynél:

$$z_1=x_1+x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n\,;$$
$$z_2=x_1-x_2+\beta_3x_3+\cdots+\beta_nx_n\,; \quad z_3=x_3, z_4=x_4, \ldots z_n=x_n.$$

Azonnal látjuk, hogy az ilyen transzformációk determinánsa nem 0, tehát ezek kompoziciójából eredő transzformáció determinánsa sem lehet 0.

Ezt az állítást még úgy is kifejezhetjük, hogy a $z_1, z_2, \dots z_n$ változók *egymástól függetlenek,* azaz

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n = 0$$

alakú reláció minden $x_1, x_2, \dots x_n$-re nézve (azaz z_i helyett *B)* szerint $\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n$-t téve) csakis úgy állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Ugyanis, hogy ez a reláció fönnállhasson, ahhoz kell, hogy $x_1, x_2, \dots x_n$ együtthatói mind eltünjenek, vagyis a $c_1, c_2, \dots c_n$ eleget tegyenek ezen egyenletrendszernek:

$$c_1 \alpha_{1i} + c_2 \alpha_{2i} + \cdots + c_n \alpha_{ni} = 0, \quad i=1,2,\dots n.$$

De minthogy a rendszer determinánsa nem 0, tehát ezen egyenletrendszernek csakis a $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots c_n = 0$ értékek tesznek eleget. Így tehát eddigi eredményeink ezen most bevezetett fogalom felhasználásával így fejezhetők ki:

A $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alak bizonyos

$$z_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n, \quad i=1,2,\dots n$$

0-tól különböző determinánsu lineáris transzformációval mindig átalakítható

$$A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + \cdots + A_n z_n^2$$

alakká, ahol a $z_1, z_2, \dots z_n$ az $x_1, x_2, \dots x_n$ változók független lineáris alakjai.

Ez az új quadratikus alak sokkal egyszerűbb, mint az eredeti volt, csakis négyzetes tagokat tartalmaz. Ezt az alakot a quadratikus alak *kanonikus alakjának* nevezzük. Determinánsa: $A_1 A_2 \dots A_n$. Megeshetik, hogy az $A_1, A_2, \dots A_n$ együtthatók közül valamelyik 0, de akkor az előbbiekből következik, hogy az eredeti alak determinánsa is 0. Ha tehát $|a_{ik}| \neq 0$, akkor az $A_1, A_2, \dots A_n$ között egyik sem lehet 0.

Ezen a kanonikus alakon rögtön látjuk, hogy ha az $A_1, A_2, \dots A_n$ mindannyian pozitivok (negativok), akkor a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alak definit pozitiv (negativ). Ugyanis mindig pozitiv (negativ) és csakis akkor 0, ha külön:

$$z_1 = 0,\ z_2 = 0, \dots z_n = 0,$$

vagyis ha

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n = 0, \quad i=1,2,\dots n$$

ami csak akkor lehetséges, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, mert $|\alpha_{ik}| \neq 0$.

Ha azonban az $A_1, A_2, \dots A_n$ között pozitivok és negativok is vannak, akkor az alak nem lehet definit. Ugyanis ha például:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = A_1 z_1^2 + \cdots + A_k z_k^2 - B_1 z_{k+1}^2 - \cdots - B_{n-k} z_n^2,$$

ahol $A_1, A_2, \dots A_k, B_1, \dots B_{n-k}$ pozitivok, akkor, ha $z_1 = z_2 = \cdots = z_k = 0$ tesszük és $z_{k+1}, \dots z_n$ nem mindannyian zérusok, a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ negativ, ha pedig fordítva

$$z_{k+1} = 0, \dots z_n = 0$$

és $z_1, z_2, \dots z_k$ nem mindannyian zérusok, akkor pedig $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ pozitiv értékű; a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ alak jelét változtatja, tehát nem lehet definit alak.* Ebből már tehát arra a fontos eredményre jutottunk, *hogy $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ akkor és csakis akkor definit, ha kanonikus alakjában az együtthatók mind egyenlő jelűek.*

* Még felmerülhet az a kérdés, hogy nem követelünk-e lehetetlent akkor, midőn azt kívánjuk, hogy $z_1 = z_2 = \cdots = z_k = 0$ legyen és $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots z_n$ ne legyenek mindannyian zérusok. Nyilván nem, mert a $z_1, z_2, \dots z_n$ függetlenek egymástól, tehát $x_1, x_2, \dots x_n$ úgy határozhatók meg, hogy a $z_1 = 0$, $z_2 = 0, \dots z_k = 0$, $z_{k+1} = l_{k+1}, \dots z_n = l_n$ egyenletek kielégíttessenek tetszés szerinti (nem 0) $l_{k+1}, l_{k+2}, \dots l_n$ esetében.

Ha tehát a kanonikus alak együtthatói mind pozitivok, akkor a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alak definit pozitiv; ha mindannyian negativok, akkor az alak definit negativ; ha pozitivok és negativok is vannak az együtthatók között, akkor a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ indefinit alak. Végül pedig, ha minden együttható pozitiv, de egyesek 0-ok, ami csakis akkor állhat elő, ha $|a_{ik}|=0$, akkor az alak semidefinit. Ugyanis ez esetben csak pozitiv vagy 0 értékeket vehet fel az alak; de 0 lehet máskor is, mint ha mindenik $x_i=0$. Mert ha

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = A_1 z_1^2 + \cdots + A_m z_m^2, \quad m < n,$$

akkor a

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n = 0 \\ z_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{2n} x_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m &= \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \cdots + \alpha_{mn} x_n = 0 \end{aligned}$$

egyenleteknek mindig van zérustól különböző megoldásuk.

4. **A jelek állandósága.** A kanonikus alakról mondottakkal kapcsolatban önként felmerül egy fontos kérdés. A $\Sigma a_{ik} x_i x_k$-nak a kanonikus alakra transzformációjánál még igen nagy szabadsággal járhattunk el, úgy hogy sokféle módon történhetik ez az átalakítás. Kell tehát, hogy az iránt biztosítva legyünk, hogy ha $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ például definit pozitiv alak, akkor minden valós transzformáció olyan kanonikus quadratikus alakra vezet, amelyben az együtthatók pozitivok. Hogy így van a dolog, következik a mondottakból, sőt egy többet mondó, igen szép és a quadratikus alakok elméletében alapvető fontosságú tételünk van: az ú. n. *tehetetlenségi tétel,* amely szerint *akármiképpen történjék is a quadratikus alak átalakítása kanonikus alakra, ennek a kanonikus alaknak mindig ugyanannyi együtthatója lesz pozitiv.* Ezt a *Sylvester-től* eredő érdekes tételt így bizonyíthatjuk be. Ha a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alakot átvittük egyszer az

$$A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \cdots + A_n y_n^2$$

kanonikus alakba, azután pedig a

$$B_1 z_1^2 + B_2 z_2^2 + \cdots + B_n z_n^2$$

alakba és pedig az elsőbe az

$$y_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n, \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

valós lineáris transzformációval, a másodikba pedig a valós

$$z_i = \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2 + \cdots + \beta_{in} x_n, \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

által, ahol sem az $|\alpha_{ik}|$, sem a $|\beta_{ik}|$ nem zérus, akkor, mint a determinánselméletben kissé járatos olvasó azonnal beláthatja, azt is mondhatjuk, hogy az $A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \cdots + A_n y_n^2$ átmegy egy bizonyos

$$z_i = \gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \cdots + \gamma_{in} y_n, \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

transzformációval, melynek determinánsa szintén nem 0, a

$$B_1 z_1^2 + B_2 z_2^2 + \cdots + B_n z_n^2$$

alakba; tehát:

$$A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \cdots + A_n y_n^2 = B_1 z_1^2 + B_2 z_2^2 + \cdots + B_n z_n^2, \qquad \alpha)$$

ahol:

$$z_i = \gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \cdots + \gamma_{in} y_n, \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

Tegyük fel már most az állításunk ellenkezőjét, pl. azt, hogy a baloldalon k számú pozitiv tag van, a jobboldalon pedig l számú, ahol $l > k$.

Legyen például a baloldalon az első k, a jobboldalon az első l tag pozitiv. Válasszuk már most az $y_1, y_2, \ldots y_n$ értékeket úgy, hogy egyrészt

másrészt pedig, hogy
$$y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0,$$
$$z_{l+1} = z_{l+2} = \cdots = z_n = 0$$
legyen ($z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, \ldots, z_l \neq 0$). Az utóbbi egyenletek az elsők tekintetbe vételével ilyen alakúak:
$$\gamma_{l+j,\,k+1}\, y_{k+1} + \gamma_{l+j,\,k+2}\, y_{k+2} + \cdots + \gamma_{l+j,\,n}\, y_n = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots n-l)$$
az $n-k$ számú y-ra nézve $n-l$ számú egyenlet, de föltételünk szerint $k<l$, az az $n-l<n-k$, tehát ezen egyenletrendszernek mindig van 0-tól különböző megoldásrendszere. Ha $y_1, y_2, \ldots y_n$ ezen így meghatározott értékeit helyettesítjük az α)-ba, akkor a baloldal negativ vagy zérus lesz, a jobboldal pedig pozitiv, tehát képtelenségre jutottunk. Vagyis $l>k$ nem lehetséges. Ugyanígy mutathatjuk ki, hogy $l<k$ sem lehetséges és ezzel a tehetetlenségi törvény be van bizonyítva. Ezzel egyúttal az az a priori belátható tény is el van intézve, hogy ha a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ valamelyik kanonikus alakja csupa pozitiv (negativ) együtthatót tartalmaz, akkor minden kanonikus alakja is ilyen.

Még egyszer kimondjuk, hogy *a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ akkor és csakis akkor definit, ha* a) *a determinánsa nem zérus és* b) *kanonikus alakjában minden együtthatója ugyanolyan előjelű.*

5. **Orthogonális transzformáció.** Most azzal a kérdéssel akarunk foglalkozni, hogy miképpen lehet ezen együtthatók előjelére nézve döntenünk a nélkül, hogy a kanonikus alakra való transzformációt elvégeznők; mert nyilván $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ együtthatóiból e döntésnek elvégezhetőnek kell lennie. Evégből majd egy speciális valós transzformációt tekintünk, mert hiszen már tudjuk, hogy akárminő valós transzformációval vigyük is át az alakot a kanonikus alakba, a pozitiv együtthatók száma nem változik.

Azt állítjuk, hogy létezik olyan valós együtthatójú lineáris transzformáció:
$$x_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \cdots + \alpha_{in} y_n, \quad i = 1, 2, \ldots n$$
mely nemcsak a
$$\Sigma a_{ik} x_i x_k$$
quadratikus alakot viszi át az
$$A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \cdots + A_n y_n^2$$
kanonikus alakba, hanem egyúttal az
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$
négyzetösszeget is átviszi az
$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$
négyzetösszegbe.

Képzeljük azon valós $x_1, x_2, \ldots x_n$ értékek halmazát, amelyekre nézve:
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1.$$

Nyilván mindegyik x_i a -1 és $+1$ között van. Ha a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alakban az x változóknak e halmazbeli értékrendszert tulajdonítunk, akkor $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ abszolut értéke által fölvett értékhalmaz korlátos lesz, tehát van felső határa és minthogy $|\Sigma a_{ik} x_i x_k|$ folytonos, továbbá a tekintetbe jövő $(x_1 \ldots, x_n)$ értékrendszerek halmaza zárt*, tehát e felső határt fel is veszi,

* Ha adatik a valós számoknak egy halmaza és a olyan valós szám, melynek tetszés szerinti kis környezetében (azaz $a-\varepsilon$ és $a+\varepsilon$ között — bárminő kicsiny legyen is ε) van a halmaznak eleme, akkor azt mondjuk, hogy a a halmaz *sűrüsödő* helye. Ha a halmaz olyan, hogy *minden sűrüsödő* helye is bele tartozik, akkor *zárt*. Az $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$, egyenlőtlenséget kielégítő

vagyis van maximuma. Legyenek azok az x értékek, amelyek e maximális értéket létesítik:

$$x_1=\alpha_{11},\ x_2=\alpha_{12},\ \dots\ x_n=\alpha_{1n}.$$

és legyen
$$\Sigma a_{ik}\alpha_{1i}\alpha_{1k}=A_1.$$

Először is azt állítjuk, hogy:

$$\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\cdots+\alpha_{1n}^2=1,\ ;$$

mert ha e négyzetösszeg kisebb volna 1-nél, (nagyobb nem lehet, mert hiszen $x_1^2+\cdots+x_n^2\leqq 1$), például értéke $\lambda^2<1$ volna, akkor, ha

$$x_1=\frac{\alpha_{11}}{\lambda},\ x_2=\frac{\alpha_{12}}{\lambda},\dots\ x_n=\frac{\alpha_{1n}}{\lambda}$$

helyettesítést végeznők, a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ absz. értéke növekednék.

Ha $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ pozitiv definit vagy pozitiv semidefinit alak, akkor A_1 pozitiv és ez az alak maximális értéke az $x_1^2+\cdots+x_n^2\leqq 1$ tartományban; ha negativ definit vagy semidefinit az alak, akkor A_1 negativ és ez az alak minimális értéke az $x_1^2+\cdots+x_n^2\leqq 1$ tartományban.

Alkossuk meg az $\alpha_{11},\dots\alpha_{1n}$ maximizáló (maximummá tevő) értékekkel ezt a lineáris alakot:

$$L_1(x)=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n,$$

akkor azon valós $x_1,x_2,\dots x_n$ értékek, melyek az előbbi $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqq 1$ és azonfelül az

$$L_1(x)=0$$

feltételt is kielégítik, az $x_1\dots x_n$ számrendszernek egy, az előbbi halmazban foglalt részhalmazát alkotják. A változóknak amaz értékrendszerei között, melyeken $|\Sigma a_{ik}x_ix_k|$ a most definiált tartománybeli maximumát felveszi, megint van legalább egy olyan $x_1=\alpha_{21},\dots x_n=\alpha_{2n}$ rendszer, hogy fennáll az

$$\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2+\cdots+\alpha_{2n}^2=1$$

egyenlet és amely másrészt az $L_1(x)=0$ egyenletet kielégíti, azaz:

$$\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{1n}\alpha_{2n}=0.$$

$\Sigma a_{ik}\alpha_{2i}\alpha_{2k}$ legyen A_2. $|A_2|$ a $|\Sigma a_{ik}x_ix_k|$ maximuma a szóban forgó tartományban. Készítsük el az $\alpha_{21},\alpha_{22},\dots\alpha_{2n}$ maximizáló értékekkel ezt a lineáris alakot:

$$L_2(x)=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n\ .$$

és tekintsük azon $x_1,x_2,\dots x_n$ értékrendszert, amely az

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqq 1\quad \text{és az}\quad L_1(x)=0,\ L_2(x)=0$$

feltételeket kielégíti és a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ quadratikus alak abszolut értékét maximummá teszi. Legyen ez a következő:

$$x_1=\alpha_{31},\ x_2=\alpha_{32},\ \dots\ x_n=\alpha_{3n},$$

Akkor fennáll egyrészt:

$$\alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\cdots+\alpha_{3n}^2=1,$$

másrészt pedig:

$x_1,x_2,\dots x_n$ számok halmazai zártak (vagyis maga az $x_1,x_2,\dots x_n$ n dimenziós számhalmaz zárt); mert ha pl. $(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)$ a halmaz sűrüsödő helye, mely nem tartoznék bele a halmazba, akkor $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2>1$ volna és akkor meghatározható volna a $(\xi_1\cdots\xi_n)$ pontnak olyan környezete, melyen belül a halmaznak egy pontja sem volna, vagyis $(\xi_1\cdots\xi_n)$ nem volna sürüsödő hely.

$$\alpha_{11}\alpha_{31}+\alpha_{12}\alpha_{32}+\cdots+\alpha_{1n}\alpha_{3n}=0,\quad \alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}+\cdots+\alpha_{2n}\alpha_{3n}=0,$$

Így folytatva az eljárást, n lépés után az $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots \alpha_{nn}$ értékrendszerhez jutunk, mely az $|\Sigma a_{ik}x_ix_k|$ értékét maximummá teszi és e mellett az

$$L_1(x)=0,\ L_2(x)=0, \ldots L_{n-1}(x)=0$$

egyenleteket kielégíti; (feltételes maximum, melyről később tüzetesebben is szólunk). Legyen $\Sigma a_{ik}\alpha_{ni}\alpha_{nk}=A_n$. $|A_n|$ a $|\Sigma a_{ik}x_ix_k|$ alaknak maximuma az ily módon redukálódott tartományban,

Az α_{ik} számok olyan tulajdonságúak, hogy:

$$\alpha_{i1}\alpha_{k1}+\alpha_{i2}\alpha_{k2}+\cdots+\alpha_{in}\alpha_{kn}$$

0, vagy 1 a szerint, amint $i \neq k$, vagy $i=k$. Azt mondjuk, hogy az α_{ik} számok *orthogonális* rendszert alkotnak.

Könnyen megmutathatjuk, hogy az α_{ik} rendszernek az a tulajdonsága is megvan, hogy

$$\alpha_{1i}\alpha_{1k}+\alpha_{2i}\alpha_{2k}+\cdots+\alpha_{ni}\alpha_{nk}$$

0 vagy 1, aszerint, amint $i \neq k$, vagy $i=k$.*

Vezessük most be az

$$x'_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n$$
$$x'_2=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x'_n=\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\cdots+\alpha_{nn}x_n$$

lineáris orthogonális transzformációt. Azt állítjuk, hogy ez olyan transzformáció, mely a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$-t négyzetösszeggé transzformálja és emellett az $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$-et átviszi $x_1'^2+x_2'^2+\cdots+x_n'^2$-be.

Az utóbbi állítás azonnal következik az α_{ik} együtthatók orthogonálitásának figyelembevételével, ha előállítjuk az $x_1'^2+x_2'^2+\cdots+x_n'^2$ négyzetösszeget.

Az első állítás pedig így bizonyítható be: A szóban forgó transzformáció átviszi a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ quadratikus alakot a $\Sigma a'_{ik}x'_ix'_k$-ba. Azt állítjuk, hogy $x_1'^2$ együtthatója az előbb említett A_1 érték. Ugyanis, ha $x_1=\alpha_{11}$, $x_2=\alpha_{12}, \ldots$

* Ugyanis az α_{ik} elemek előbbi tulajdonságából következik, hogy $|\alpha_{ik}|^2=1$, vagyis az $|\alpha_{ik}|$ determináns vagy $+1$, vagy -1. Az α_{ik} számok között fönnáll n^2 egyenlet, melyek közül egyik rendszer ez:

$$\alpha_{11}\alpha_{11}+\alpha_{12}\alpha_{12}+\cdots+\alpha_{1n}\alpha_{1n}=1$$
$$\alpha_{21}\alpha_{11}+\alpha_{22}\alpha_{12}+\cdots+\alpha_{2n}\alpha_{1n}=0$$
$$\alpha_{31}\alpha_{11}+\alpha_{32}\alpha_{12}+\cdots+\alpha_{3n}\alpha_{1n}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n1}\alpha_{11}+\alpha_{n2}\alpha_{12}+\cdots+\alpha_{nn}\alpha_{1n}=0$$

ami az $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n}$-re vonatkozó lineáris egyenletrendszernek tekinthető, melyből ezek, minthogy a rendszer determinánsa nem 0, egyértékűen határozhatók meg és pedig ha A_{ik}-val jelöljük az $|\alpha_{ik}|$ determinánsban az α_{ik}-hoz tartozó aldeterminánst, akkor azonnal kiadódik, hogy

$$\alpha_{11}=\pm A_{11},\ \alpha_{12}=\pm A_{12}, \ldots \alpha_{1n}=\pm A_{1n},$$

hol a felső vagy alsó előjel érvényes aszerint, amint $|\alpha_{ik}|=+1$ vagy -1. Ha megfelelően a többi n rendszert írjuk fel, akkor általában azt kapjuk, hogy ez az $|\alpha_{ik}|$ determináns azon nevezetes tulajdonsággal bir, hogy $\alpha_{ik}=\pm A_{ik}$; minthogy pedig $|\alpha_{ik}|=\pm 1$, tehát ha e determinánst az i-ik oszlopa szerint kifejtjük, azt kapjuk, hogy

$$\alpha_{1i}\alpha_{1k}+\alpha_{2i}\alpha_{2k}+\cdots+\alpha_{ni}\alpha_{nk}$$

0 vagy 1, aszerint, amint $i \neq k$, vagy $i=k$.

$x_n=\alpha_{1n}$ tesszük, akkor $x'_2=0, x'_3=0, \dots x'_n=0$ lesz és $x'_1=1$. De a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ ezen értékrendszernél éppen az A_1 értéket veszi fel; a $\Sigma a'_{ik}x'_ix'_k$-ból pedig ezen helyettesítéssel a'_{11} lesz, tehát $a'_{11}=A_1$. Éppen így mutathatjuk meg, hogy $x_i'^2$ együtthatója A_i, vagyis a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$-nak az

$$x_1=\alpha_{i1},\ x_2=\alpha_{i2},\ \dots\ x_n=\alpha_{in}$$

-hez tartozó értéke. Így tehát a szóban forgó orthogonális transzformáció a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$-t átviszi ebbe az x'_1 szerint rendezett quadratikus alakba:

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k=A_1x_1'^2+2Bx'_1+C,$$

ahol B az $x'_2, x'_3, \dots x'_n$ lineáris alakja és C ugyanezek quadratikus alakja. Minthogy pedig $\Sigma x_i^2=\Sigma x_i'^2$; tehát:

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k-A_1(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)=A_1x_1'^2+2Bx'_1+C-A_1(x_1'^2+x_2'^2+\dots+x_n'^2),$$

vagyis:
$$\Sigma a_{ik}x_ix_k-A_1(x_1^2+\dots+x_n^2)=2Bx'_1+D,$$

ahol D az $x'_2\dots x'_n$ quadratikus alakja. A baloldal mindazon $x_1, x_2, \dots x_n$ értékeknél, melyeknek négyzetösszege: 1, nem pozitiv, illetőleg nem negativ, aszerint, amint A_1 pozitiv, vagy negativ, mert $|A_1|$ a $|\Sigma a_{ik}x_ix_k|$ maximuma; a jobboldalon, ha B nem volna 0, az x'_1 nyilván úgy volna választható, hogy a jobboldal pozitiv (illetőleg negativ) legyen. Ezzel kimutattuk, hogy $B=0$, vagyis, hogy a szóban forgó transzformáció a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ quadratikus alakot átviszi olyan $\Sigma a'_{ik}x'_i x'_k$-ba, amelyben x'_1 csak egy helyen szerepel: az $A_1x_1'^2$ tagban. Éppen így mutatjuk ki az $x'_2, x'_3, \dots x'_n$-ről ugyanezt, vagyis azt látjuk, *hogy az*

$$x'_i=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\dots+\alpha_{in}x_n \quad (i=1,2,\dots n)$$

orthogonális transzformáció átviszi a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ alakot a következőbe:

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k=A_1x_1'^2+A_2x_2'^2+\dots+A_nx_n'^2.$$

6. **A karakterisztikus egyenlet.** A kanonikus alakban szereplő $A_1, A_2, \dots A_n$ kœfficienseknek egy nevezetes tulajdonságát mutatjuk ki; azt, hogy ezek az együtthatók a

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. Ugyanis próbáljuk alkalmazni az előbbi

$$x'_i=\alpha_{i1}x+\dots+\alpha_{in}x_n \quad (i=1,2,\dots n)$$

orthogonális transzformációt erre a quadratikus alakra:

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k-A_i(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2),$$

akkor ez átmegy a következőbe:

$$(A_1-A_i)x_1'^2+(A_2-A_i)x_2'^2+\dots+$$
$$+(A_{i-1}-A_i)x_{i-1}'^2+(A_{i+1}-A_i)x_{i+1}'^2+\dots+(A_n-A_i)x_n'^2, \qquad \beta)$$

vagyis $n-1$ változó quadratikus alakjába; tehát kell, hogy a

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k - A_i (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

determinánsa 0 legyen; vagyis

$$\begin{vmatrix} a_{11}-A_i, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-A_i, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn}-A_i \end{vmatrix} = 0,$$

tehát az A_i valóban eleget tesz a $D(\lambda)=0$ egyenletnek. Megmutathatnók, hogy ha az $A_1 x_1'^2 + A_2 x_2'^2 + \cdots + A_n x_n'^2$ alakban egyenlő együtthatók is vannak, pl. $A_i = A_k$, vagyis ha a *β)* alatti kifejezésből nemcsak x_i', hanem x_k' is hiányzik, akkor az A_i a $D(\lambda)=0$ egyenletnek kétszeres gyöke, s általában, ha A_i együttható r-szer fordul elő, akkor A_i a $D(\lambda)=0$ egyenletnek r-szeres gyöke. Így tehát arra jutottunk, hogy az $A_1, A_2, \dots A_n$ a $D(\lambda)=0$ egyenlet gyökei. *E szerint a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ quadratikus alakot egy orthogonális transzformációval mindig átvihetjük az $A_1 x_1'^2 + A_2 x_2'^2 + \cdots + A_n x_n'^2$* kanonikus alakba, ahol *$A_1, A_2, \dots A_n$ koefficiensek a $D(\lambda)=0$ egyenlet gyökei.*

7. **A quadratikus alak definit voltának szükséges és elégséges kriteriumai.** Most már felelhetünk arra a kérdésre is, hogy miként lehet eldönteni az adott quadratikus alak együtthatóiból, hogy az illető alak definit-e, vagy nem?

A $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ akkor és csakis akkor definit, amint már említettük, ha az $A_1, A_2, \dots A_n$ mind egyforma jelűek; e szerint tehát definit pozitiv az alak, ha a $D(\lambda)=0$ egyenlet gyökei mind pozitivok.

Ha a $D(\lambda)$ determinánst λ hatványai szerint rendezzük, akkor

$$(-1)^n D(\lambda) = \lambda^n - K_1 \lambda^{n-1} + K_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n K_n,$$

ahol

$$K_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

és K_i a D determináns i-edrendű főaldeterminánsainak összege, főaldeterminánsnak nevezve azokat az aldeterminánsokat, amelyeknek a fődiagonálisban levő elemei az eredeti determináns fődiagonálisának elemei közé tartoznak.

A $D(\lambda)=0$ egyenletnek összes gyökei valósak. A Descartes-féle jelszabályból következik, hogy ezen egyenletnek akkor és csakis akkor lesz minden gyöke pozitiv, ha a $K_1, K_2, \dots K_n$ összegek mindannyian pozitivok.

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ *akkor és csakis akkor lesz definit pozitiv alak, ha az $|a_{ik}|$ determináns, továbbá e determináns minden i-edrendű ($i=1, 2, \dots n-1$) főminorainak összege pozitiv.*

Ezt a kritériumot még egy kissé átalakítjuk; t. i. kimutatjuk, hogy nem is kell a főminorok összegét venni, hanem elégséges, ha a $D=|a_{ik}|$ determináns, továbbá ennek az a_{nn}-hez tartozó aldeterminánsa: D_1, ennek az $a_{n-1,n-1}$-hez tartozó aldeterminánsa: D_2, ennek az $a_{n-2,n-2}$-hez tartozó aldeterminánsa D_3 s í. t., szóval az egymásba illesztett fősarokaldeterminánsok pozitivok; vagyis megmutatjuk, hogy a D determinánsnak az a nevezetes tulajdonsága van, hogy ha a $D, D_1, D_2, \dots D_n = a_{11}$ aldeterminánsok pozitivok, akkor a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ definit pozitiv alak és fordítva, ha ez az alak definit pozitiv, akkor $D, D_1, D_2, \dots D_n$ mindannyian pozitivok.

Tegyük fel, hogy a $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ definit pozitiv alak; akkor $D=|a_{ik}|$ determinans pozitiv, mert $|a_{ik}|$ determinans a $D(\lambda)=0$ gyökeinek szorzata. Igy tehát most már *tudjuk, hogy definit pozitiv quadratikus alak determinansa pozitiv.* Tegyük most $x_n=0$, akkor a keletkező új $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ alak (melyből x_n hiányzik) szintén definit pozitiv, tehát a *determinansa*, mely nem más, mint D_1, *pozitiv*. Ha $x_n=0$, $x_{n-1}=0$ tesszük, akkor az új $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ alak, melyből x_{n-1} és x_n hiányzik, szintén definit pozitiv, tehát a determinansa, mely nem más, mint D_2, szintén pozitiv s. i. t. Ezzel kimutattuk, hogy a $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ pozitiv *definit voltának szükséges feltétele, hogy $D, D_1, D_2, \ldots$ determinansok mind pozitivok legyenek.*

Most megmutatjuk, hogy fordítva, ha D, D_1, $D_2, \ldots$ vagyis az $|a_{ik}|$ minden fősarokaldeterminánsa, azaz sorban:

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

mindannyian pozitivok, akkor a $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ definit pozitiv. Evégből csak azt kell megmutatnunk, hogy ha e fölírt determinánsok pozitivok, akkor a $D(\lambda)=0$ egyenlet minden gyöke pozitiv, vagyis az előbb $K_1, K_2, \ldots K_n$-nel jelölt együtthatók mind pozitivok. Mi ennél többet mutatunk meg: azt, hogy ha a felírt fősarokaldeterminánsok mind pozitivok, akkor *minden* főaldetermináns pozitiv. Ezen állítás bizonyítására hivatkozunk a determinánselmélet azon közismert tételére, hogy ha a $B=|b_{ik}|$ determináns b_{ik} elemének aldeterminánsát β_{ik}-val jelöljük, akkor

$$\begin{vmatrix} \beta_{rs} & \beta_{rt} \\ \beta_{us} & \beta_{ut} \end{vmatrix} = B \,.\, C,$$

ahol C-vel jelöltük a B determinánsból az r-ik és u-ik sor, valamint az s-ik és t-ik oszlop kitörlésével keletkező n—2-edfokú determinánst.*

Alkalmazzuk ezt a tételt a következő módon: Tegyük fel, hogy az $|a_{ik}|$ determináns valamelyik ϱ-adfokú [ϱ sorból és oszlopból álló] főaldeterminánsa pozitiv, például az, amely az $i_1, i_2, \ldots i_\varrho$-ik diagonális elemeket tartalmazza és ezt rövidség kedveért $(i_1, i_2, \ldots i_\varrho)$-val jelöljük; és tegyük fel, hogy ennek ϱ—1-edfokú fősarokaldeterminánsa pozitiv (az, amely az utolsó sor utolsó eleméhez tartozik) és ennek minden főaldeterminánsa is pozitiv. Kimutatjuk, hogy mindegyik ϱ—1-edfokú főaldetermináns, például az $(i_1, i_2, \ldots i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots i_\varrho)$ pozitiv. Ugyanis az előbbi tétel szerint $r=i_\varrho$, $s=i_\varrho$, $t=i_k$, $u=i_k$ téve:

$$(i_1, i_2, \ldots i_{\varrho-1})\,(i_1, \ldots i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots i_\varrho) - \beta^2 = (i_1, i_2, \ldots i_\varrho)\,(i_1, \ldots i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots i_{\varrho-1}),$$

ahol β-val jelöltük rövidség kedveért az $(i_1, i_2, \ldots i_\varrho)$-nak k-ik sorában és ϱ-ik oszlopában levő elemhez tartozó aldeterminánsát. Minthogy feltételünk szerint a jobboldal és a baloldalon álló első tag első tényezője is pozitiv, tehát a második tényezőnek, vagyis az i_k-ik sor és oszlop kihagyásával keletkező ϱ—1-edfokú főaldeterminánsnak is pozitivnak kell lennie.

Eszerint abból, hogy a_{11} pozitiv és $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ pozitiv, következik, hogy a_{22} is pozitiv, vagyis az $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ minden főaldeterminánsa pozitiv. Abból, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

és ennek sarokaldeterminánsa, az $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, valamint ennek főaldetermi-

* L. például Baltzer: Determinanten IV. kiadás 58. lap.

nánsai a_{11} és a_{22} pozitivek, következik, hogy minden másodfokú főaldeterminánsa pozitiv, vagyis az $(13)=a_{11}a_{33}-a_{13}^2$, a $(23)=a_{22}a_{33}-a_{23}^2$ is pozitivok és ebből megint, hogy a_{33} is pozitiv.

Ha most tovább haladunk, abból, hogy az (1234) főaldetermináns és az (123), valamint ennek összes főaldeterminánsai [a (12), (23), (13)] pozitivek, következik, hogy egyúttal a (234), (134), (124) is pozitivok, de ebből megint az, hogy az (1234)-ben levő összes másodrendű főaldeterminánsok is pozitivok, vagyis az előbbi (12), (13), (23) másodrendű aldeterminánsokon kívül még a (14), (24), (34) is pozitiv és ebből tovább, hogy az a_{11}, a_{22}, a_{33}-n kívül még az a_{44} is pozitiv. Így haladva tovább, következik, hogy általában minden főaldetermináns pozitiv. Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha az $|a_{ik}|$ determináns sarokaldeterminánsai pozitivok, akkor minden főaldetermináns pozitiv és így az egyenlőrangú főaldeterminánsok összegei, a $D(\lambda)$-ban szereplő $K_1, K_2, \ldots K_n$ együtthatók is mind pozitivok, a $D(\lambda)=0$ egyenlet gyökei is mindannyian pozitivok, tehát a $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ definit pozitiv.

Most már tehát véglegesen kimondhatjuk, *hogy a* $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ *quadratikus alak akkor és csakis akkor definit pozitiv, ha az* $|a_{ik}|$ *determináns sarokaldeterminánsai, a*

$$\Delta_1=a_{11},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\cdots$$

mindannyian pozitivok.

A $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ *definit negativ, ha a* $\Sigma-(a_{ik}x_ix_k)$ *definit pozitiv, vagyis, ha*

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ldots \Delta_{2k-1}<0,\ \Delta_{2k}>0,\ldots$$

V. FEJEZET.

FELTÉTELES SZÉLSŐ ÉRTÉK.

1. Feltételes szélső érték. Sokszor fordul elő az ilyen feladat: Adva van $z=f(x, y)$ függvény, de az x és y változók között a $\varphi(x, y)=0$ reláció áll fenn (tehát a z voltaképpen egyváltozós függvény); határozzuk meg azon x, y értékeket, amelyek a z függvényt maximummá (minimummá) teszik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy *feltételes szélső értéket* keresünk.

Tegyük fel, hogy a $\varphi(x, y)=0$, meg a $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$ egyenletek közös gyökeinek valamelyike (ξ, η). Legyenek $\varphi(x, y)$ első differenciálhányadosai a (ξ, η) környezetében folytonosak és $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ az $x=\xi$, $y=\eta$ helyen 0-tól különböző, akkor az y előállítható a ξ környezetében az x differenciálható függvénye gyanánt $y=\psi(x)$ alakban és az x, meg a $\psi(x)$ a $\varphi[x, \psi(x)]=0$ egyenletet az említett környezetben identikusan kielégítik. Ha y-t az x függvénye gyanánt így előállítva képzeljük, akkor voltaképpen az a kérdés, hogy a

$$z=f[x, \psi(x)]$$

egyváltozós függvénynek minő x helyen van szélső értéke? Kell, hogy e helyen $\frac{dz}{dx}=0$ legyen, vagyis:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

legyen; másrészt azonban a $\varphi(x, y)=0$-ból ered:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

tehát szélső érték csak olyan (x, y) helyen lehet, amely a

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \quad \text{és} \quad \varphi(x, y)=0$$

egyenleteket kielégíti. Ilyen hely az említett (ξ, η).

Ezt az eredményt még másképen is fogalmazhatjuk. Ha ugyanis valamely $x=\xi$, $y=\eta$ helyen a

$$\varphi(x, y)=0 \text{ és } \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

akkor van olyan λ szám, mely e két egyenletet kielégíti: ($x=\xi$, $y=\eta$ téve)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right\}\quad 1)$$

Fordítva, ha λ ezen két egyenletet kielégíti, akkor a $D\left(\frac{f,\varphi}{x,y}\right)$ determináns 0; tehát a szélső érték helyének megállapítása végett e két egyenletből és a $\varphi(x, y)=0$-ból az x, y és λ számokat kell meghatároznunk.

Az 1) alatti egyenletek éppen olyanok, mint aminőkre akkor jutunk, ha azt kérdezzük, hogy az $f+\lambda\varphi$ függvénynek hol van szélső értéke (tekintet nélkül az x és y között fennálló relációra). Az eljárás tehát, amely a feltételes szélső érték meghatározására vezet, a következő:

Egy határozatlan λ (állandó) multiplikátorral megalkotjuk az

$$F=f+\lambda\varphi$$

függvényt, megkeressük azon (x, y) értékpárokat, amelyek ezt maximummá (minimummá) tehetik. Az x és y mint a λ függvénye adódik. Az így meghatározott x és y a $\varphi(x, y)=0$-ba helyettesítendő, miáltal a λ számértékét kapjuk meg és ezzel az x és y numerikus értékei is meglesznek.

Hogy az így meghatározott (x, y) értékpár az $f(x, y)$-t valóban maximummá vagy minimummá teszi-e, annak eldöntésére a $z=f(x, y)$ x szerinti második differenciálhányadosának megvizsgálására van szükségünk:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

és ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

identikusan ki van elégítve, akkor ebből az is következik, hogy a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

x szerinti differenciálhányadosa is 0, azaz:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

és ha ezt az előbb meghatározott λ-val szorozva a $\frac{d^2z}{dx^2}$ kifejezéshez adjuk és $f+\lambda\varphi=F$ tesszük, arra jutunk, hogy:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ha $x=\xi$, $y=\eta$ az a hely, amelyen $f(x, y)$ a $\varphi(x, y)=0$ feltétel tekintetbe vételével szélső értékű (a feltételes szélső érték helye), akkor $x=\xi$, $y=\eta$-t helyettesítve, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, tehát:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Ebben a kifejezésben a $\varphi(x, y)=0$ egyenletből:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

és $x=\xi$, $y=\eta$ teendő. Ha $\frac{d^2z}{dx^2}$ pozitiv, akkor $f(x, y)$-nak minimuma van a (ξ, η) helyen, ha pedig negativ, akkor maximuma van. Ha pedig $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, akkor a magasabb differenciálhányadosokat kell kiszámítanunk. Ha az első el nem tűnő differenciálhányados páratlan rendű, akkor szélső érték nincsen, ha páros rendű, akkor maximum vagy minimum van a (ξ, η) helyen a szerint, amint ez a differenciálhányados negativ, vagy pozitiv.

2. Példák kétváltozós függvény feltételes szélső értékének számítására. *1. Példa.* Legyen adva a $z = f(x, y)$ függvény és legyen $ux+vy+1=0$; az a kérdés, hogy a $z = f(x, y)$ felületnek az $ux+vy+1=0$ egyenesen át az (x, y) síkra merőlegesen helyezett síkkal való metszésvonalában melyik az (x, y) sík fölött legmagasabban (legalacsonyabban) fekvő pontja. A jelen esetben $\varphi(x, y)$ igen egyszerű: $ux+vy+1$ lineáris függvény. Megalkotjuk az

$$F = f(x, y) + \lambda(ux+vy+1)$$

függvényt. A kérdéses pont (x, y) koordinátái kielégítik ezeket az egyenleteket:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda u = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda v = 0; \quad ux + vy + 1 = 0.$$

E három egyenletből meghatározzuk az x, y és λ értékeket.

Ha például $f(x, y)$ a következő másodfokú függvény:

$$z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + k,$$

akkor az előbbi egyenletek:

$$2\alpha x + 2\beta y + 2\delta + \lambda u = 0; \quad 2\beta x + 2\gamma y + 2\varepsilon + \lambda v = 0; \quad ux + vy + 1 = 0.$$

Ebből a három egyenletből meghatározzuk az x, y, λ értékeket. Hogy az így nyert (x, y) maximumot, vagy minimumot szolgáltat-e, annak megállapítása végett az

$$F = f(x, y) + \lambda(ux+vy+1)$$

második differenciálhányadosait számítjuk ki: $F_{xx} = 2\alpha$, $F_{xy} = 2\beta$, $F_{yy}=2\gamma$; minthogy továbbá $\frac{dy}{dx}$ a jelen esetben az állandó: $m = -\frac{u}{v}$, tehát ha

$$\alpha + 2\beta m + \gamma m^2,$$

pozitív, akkor minimummal, ha negatív, akkor maximummal van dolgunk.

Ennek a feladatnak speciális esete a következő: $z=(x-a)^2+(y-b)^2$ minimum legyen az $ux+vy+1=0$ feltétel mellett. Ez esetben a geometriai feladatunk az (a, b) pontnak az $ux+vy+1=0$ egyenestől való legrövidebb távolságának a meghatározása. Ekkor a feladatban szereplő

$$\lambda = 2\frac{au+bv+1}{u^2+v^2}$$

és $x = a - \frac{u\lambda}{2}$, $y = b - \frac{\lambda v}{2}$ és minthogy $1+m^2$ pozitív, tehát minimummal van dolgunk. E minimum (a legrövidebb távolság négyzete):

$$z = \frac{(au+bv+1)^2}{u^2+v^2}.$$

2. *Példa. A kúpszeletek főtengelyei.* Ha a koordinátarendszer kezdőpontja a kúpszelet középpontjában van, akkor a kúpszelet egyenlete:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-1=0.$$

Kössük össze a kúpszelet (x, y) pontját a kezdőponttal. Ezen egyenes köz hossza legyen r; akkor

$$r^2=x^2+y^2.$$

Kérdés, *hogyan kell az (x, y) pontot választanunk, hogy az r távolságnak szélső értéke legyen.* A kérdés tehát az, hogy minő (x, y) értékrendszer teszi az x^2+y^2 kifejezést maximummá (minimummá), ha egyúttal az

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1$$

feltétel is ki van elégítve. *(Főtengely-probléma.)* Alkossuk meg $\left[\lambda=-\frac{1}{\omega}\text{ téve}\right]$ az

$$F(x, y)=x^2+y^2-\frac{1}{\omega}(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^{2-1})$$

függvényt. Az x és y, valamint ω úgy határozandók meg, hogy:

$$\frac{1}{2}F_x=x-\frac{1}{\omega}(a_{11}x+a_{12}y)=0\,;\quad \frac{1}{2}F_y=y-\frac{1}{\omega}(a_{21}x+a_{22}y)=0\,;$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1$$

legyen. $[a_{12}=a_{21}$ a számítás szimmetriája céljából.] Az első két egyenlet:

$$(a_{11}-\omega)\,x+a_{12}y=0\,;\quad a_{21}x+(a_{22}-\omega)\,y=0. \qquad \alpha)$$

Ezen egyenletrendszernek csak akkor lehet $x=0$, $y=0$-tól különböző megoldása, ($x=0$, $y=0$ értékrendszer nem felelne meg az $a_{11}x^2+2a_{12}xy+$ $+a_{22}y^2=1$ feltételi egyenletnek), ha

$$D(\omega)=\begin{vmatrix} a_{11}-\omega, & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\omega \end{vmatrix}=0,$$

vagyis:

$$\omega^2-\omega\,(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, de általános tételekből is következik, hogy ha a_{11}, a_{12}, a_{22} valósak, akkor ezen egyenlet gyökei valósak; továbbá egyszerű számítással arról is meggyőződhetünk, hogy ezen egyenlet gyökei csakis akkor lehetnek egyenlők, ha $a_{11}=a_{22}$ és $a_{12}=0$, azaz, ha a szóban forgó kúpszelet: kör. Ebben az esetben szélső értékről nem lehet szó. Zárjuk ki ezt az esetet, valamint azt is, midőn $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, (mely utóbbi esetben a végesben nincs középpont), akkor a két gyök különböző és egyik sem 0. Jelöljük az egyenlet gyökeit ω_1 és ω_2-vel. Ha ω helyett ω_1-et és (x, y) helyett (x_1, y_1)-et tesszük, akkor az $\alpha)$ alatti egyenletek:

$$(a_{11}-\omega_1)\,x_1+a_{12}y_1=0\,;\quad a_{21}x_1+(a_{22}-\omega_1)\,y_1=0. \qquad \beta)$$

Ezek az egyenletek nem függetlenek egymástól, mert $D(\omega_1)=0$; tehát az elsőből, illetőleg a másodikból (ha $a_{12}=0$ volna, akkor a $D(\omega)=0$ gyökei a_{11}, a_{22} volnának; ezt az esetet, mely $\beta)$ és az ω_2-re vonatkozó megfelelő egyenlet alapján könnyen elintézhető, kizárjuk):

$$\frac{x_1}{y_1}=-\frac{a_{12}}{a_{11}-\omega_1}=-\frac{a_{22}-\omega_1}{a_{21}}$$

és ha $x_1=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}-\omega_1}y_1$-et az $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1$ egyenletbe helyettesítjük, akkor y_1 kiszámítható és pedig, ha az egyik értéke y_1, a másik: $-y_1$ és így a hozzá tartozó x értékek: x_1 és $-x_1$. Ilyenformán tehát az ω_1-hez tartozó (x, y) pontok: (x_1, y_1) és $(-x_1, -y_1)$ szimmetrikus pontok, egy átmérő végpontjai. Éppen így ω_2 értékhez tartozik:

$$\frac{x_2}{y_2}=-\frac{a_{12}}{a_{11}-\omega_2}=-\frac{a_{22}-\omega_2}{a_{21}}$$

és az előbbi módon megkapjuk az ω_2 gyökhöz tartozó átmérő végpontjait: (x_2, y_2) és $(-x_2, -y_2)$-t.

E két átmérőről mellékesen megjegyezzük, hogy egymásra merőlegesek; ugyanis az egyiknek irányhatározója: $\frac{y_1}{x_1}=-\frac{a_{12}}{a_{22}-\omega_1}$, a másiké pedig: $\frac{y_2}{x_2}=-\frac{a_{12}}{a_{22}-\omega_2}$ és ezek szorzata: $\frac{a_{12}^2}{a_{22}^2-a_{22}(\omega_1+\omega_2)+\omega_1\omega_2}$. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\omega_1+\omega_2=a_{11}+a_{22}$ és $\omega_1\omega_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, akkor azt látjuk, hogy az irányhatározók szorzata: -1, ami arra vall, hogy a két átmérő egymásra merőleges.

Az r^2 most már könnyen meghatározható. Ugyanis, ha a *β)* alatti egyenleteket x_1 és y_1-gyel szorozzuk és összeadjuk és $x_1^2+y_1^2=r_1^2$ tesszük, akkor a kúpszelet egyenletére tekintettel:

$$\omega_1 r_1^2=(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2)=1,$$

vagyis $r_1^2=\frac{1}{\omega_1}\cdot$ Éppen így: $r_2^2=x_2^2+y_2^2=\frac{1}{\omega_2}\cdot$

Kérdés, hogy $\frac{1}{\omega_1}$ és $\frac{1}{\omega_2}$ az r^2-nek valóban szélső értékei-e? Evégből a második differenciálhányadost kell tekintetbe vennünk. Láttuk, hogy ha $F=f+\lambda\varphi$, akkor azt kell megvizsgálnunk, hogy a szóban forgó helyen:

$$F_{xx}+2F_{xy}\frac{dy}{dx}+F_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad \gamma)$$

pozitív-e, vagy negatív. Jelen esetben

$$F(x, y)=x^2+y^2-\frac{1}{\omega}(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-1),$$

tehát: $F_{xx}=2\left(1-\frac{a_{11}}{\omega}\right)$, $F_{xy}=-\frac{2a_{12}}{\omega}$, $F_{yy}=2\left(1-\frac{a_{22}}{\omega}\right)$,

továbbá $\frac{dy}{dx}$ az $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1$ feltételből:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a_{11}x+a_{12}y}{a_{21}x+a_{22}y}.$$

Minthogy pedig *β)* szerint $a_{11}x_1+a_{12}y_1=\omega_1x_1$ és $a_{21}x_1+a_{22}y_1=\omega_1y_1$, tehát: $\frac{dy}{dx}$ az (x, y) helyen: $-\frac{x_1}{y_1}$ és így a *γ)* alatti kifejezés a következő:

$$\frac{2}{y_1^2}\left[\left(1-\frac{a_{11}}{\omega_1}\right)y_1^2+\frac{2a_{12}}{\omega_1}x_1y_1+\left(1-\frac{a_{22}}{\omega_1}\right)x_1^2\right]\cdot \qquad \gamma)$$

E kifejezés előjelének megállapításához elég lesz a zárójelben levő kifejezés vizsgálata. Tudjuk, hogy

$$\frac{x_1}{y_1}=-\frac{a_{12}}{a_{11}-\omega_1}=-\frac{a_{22}-\omega_1}{a_{21}},$$

tehát: $\frac{x_1^2}{x_1y_1}=-\frac{a_{22}-\omega_1}{a_{12}}$ és $\frac{x_1y_1}{y_1^2}=-\frac{a_{12}}{a_{11}-\omega_1}$, vagyis : $x_1^2 : x_1 y_1 : y_1^2 = a_{22} - \omega_1 : -a_{12} : a_{11} - \omega_1$,

azaz : $x_1^2 = k(a_{22} - \omega_1), \quad x_1 y_1 = -ka_{12}, \quad y_1^2 = k(a_{11} - \omega_1)$.

A k arányossági faktort az

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 = 1$$

egyenletből határozzuk meg, melynek az (x_1, y_1) eleget tesz. Innen:

$$k[2a_{11} a_{22} - 2a_{12}^2 - \omega_1 (a_{11} + a_{22})] = 1,$$

vagy a $D(\omega_1) = 0$-ból $-\omega_1 (a_{11} + a_{22}) = -\omega_1^2 - a_{11} a_{22} + a_{12}^2$ téve:

$$k[-\omega_1^2 + a_{11} a_{22} - a_{12}^2] = 1$$

és így: $$x_1^2 = \frac{a_{22} - \omega_1}{-\omega_1^2 + a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad x_1 y_1 = \frac{-a_{12}}{-\omega_1^2 + a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

$$y_1^2 = \frac{a_{11} - \omega_1}{-\omega_1^2 + a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

tehát a szóban forgó *γ)* alatti kifejezés, melynek előjelét meg kell határoznunk, a következő:

$$\frac{(a_{11} - \omega_1)^2 + 2a_{12}^2 + (a_{22} - \omega_1)^2}{\omega_1 [\omega_1^2 - (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)]}.$$

Ha még $a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ helyébe a $D(\omega) = 0$ egyenletből a gyökök szorzatát tesszük, ez a kifejezés átmegy a következőbe:

$$\frac{(a_{11} - \omega_1)^2 + 2a_{12}^2 + (a_{22} - \omega_1)^2}{\omega_1^2 (\omega_1 - \omega_2)}.$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy e kifejezés számlálója mindenesetre pozitiv, akkor arra az eredményre jutunk, hogy az $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ minimum vagy maximum, aszerint, amint az $\omega_1 - \omega_2$ pozitiv vagy negativ. Ha nem az $(x_1 y_1)$, hanem az $(x_2 y_2)$ helyen ejtjük meg ugyanezt a vizsgálatot, akkor ugyanilyen kifejezésre jutunk, amelyben ω_1 helyett ω_2 áll. Ebből következik, hogy a nagyobbik ω gyöknek megfelelő r^2 minimum, a kisebbiknek megfelelő pedig maximum.

Geometriai szempontból nem az r^2, hanem az r vizsgálandó és csak azon esetben lehet szélső értékről szó, ha r valós, azaz r^2 pozitiv. Ha az

$$(a_{11} - \omega_1) x_1 + a_{12} y_1 = 0, \quad a_{12} x_1 + (a_{22} - \omega_1) y_1 = 0$$

egyenleteket rendre x_1 és y_1-gyel szorozva összeadjuk, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\omega_1 (x_1^2 + y_1^2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 y_1 + a_{22} y_1^2 = 1,$$

vagyis r_1^2 pozitiv, ha ω_1 pozitiv és éppen így r_2 akkor pozitiv, ha ω_2 pozitiv; vagyis az előbbiekkel egybevetve, már most arra az eredményre jutunk, hogy:

1. ha ω_1 és ω_2 pozitivok, akkor r_1 és r_2 félátmérők közül az egyik maximum, a másik minimum.

2. ha ω_1 pozitiv és ω_2 negativ, akkor, minthogy $\omega_1 - \omega_2$ pozitiv, tehát r_1 minimális (r_2 képzetes). Ugyanez áll r_2-re, ha ω_1 negativ és ω_2 pozitiv.

3. ha ω_1 és ω_2 negativok, akkor r_1 és r_2 képzetesek és maximumról vagy minimumról nem lehet szó.

Az 1. esetben $\omega_1 \omega_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ pozitiv; $a_{11} + a_{22}$ is pozitiv, tehát külön a_{11} és a_{22} is pozitivek: a másodrendű görbe valós ellipszis. A 2. esetben

$a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ negativ, a görbe hyperbola, végre a 3. esetben $\omega_1\omega_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ pozitiv, de $a_{11}+a_{22}$, tehát külön a_{11} és a_{12} is negativok, a görbe képzetes ellipszis.

3. Több változó esete. Nem időzünk tovább most e számításoknál, amelyek a legtöbbször nem sokkal egyszerűbbek, mint ha az y-t mint az x függvényét a $\varphi(x, y) = 0$ egyenletből előbb explicit alakban előállítjuk (ha lehetséges) és a $z = f(x, y)$-ba helyettesítjük; célunk inkább csak az volt, hogy a feltételes szélső érték keresésének kérdését ezzel az általános esetre előkészítsük. Legyen adva pl. i egyenlet $i+k$ változó között.

$$\varphi_1(y_1, \ldots y_i, x_1, \ldots x_k) = 0, \ldots, \varphi_i(y_1, \ldots y_i, x_1, \ldots x_k) = 0.$$

Ha $x_1, x_2, \ldots x_k, y_1, \ldots y_i$ a felírt egyenleteket kielégítő számértékek és ezen értékek bizonyos környezetében a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i$ függvényeknek $y_1, y_2, \ldots y_i$ szerinti függvénydeterminánsa nem 0, akkor ezen egyenletrendszer — föltéve, hogy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i$ folytonos differenciálhányadosokkal biró függvények — az $y_1, y_2, \ldots y_i$ függő változókra nézve megoldható és az $y_1, y_2, \ldots y_i$ a szóban forgó környezetben mint az $x_1, x_2, \ldots x_k$ változók egyértékű, differenciálható függvényei értelmeztetnek.

Ha már most adva van a

$$z = f(y_1, y_2, \ldots y_i, x_1, x_2, \ldots x_k)$$

mint az összes változók: $x_1, x_2, \ldots x_k, y_1, \ldots y_i$ függvénye, akkor voltaképpen z csakis az $x_1, x_2, \ldots x_k$ független változók függvényének tekinthető, mert hiszen föltételünk szerint az első i változó a $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0, \ldots \varphi_i=0$ egyenletekből mint a következő k változó függvénye állítható elő. Kérdés már most, hogy a független x_1, $x_2, \ldots x_k$ változók minő értékrendszerénél válik a z függvény maximummá vagy minimummá?

Hogy a z-nek szélső értéke legyen, ahhoz szükséges, hogy az $x_1, x_2, \ldots x_k$ független változók szerinti differenciálhányadosai zérusok legyenek; (legyen egy ilyen változó x_ϱ; ez az x_ϱ a z kifejezésében több helyen szerepel; először szabadon a független $x_1, x_2, \ldots x_k$ változók között, azután lekötve az $y_1, y_2, \ldots y_i$ függvényekben, amelyeket az $x_1, x_2, \ldots x_k$ függvényeinek tekintünk; a z-nek az x_ϱ szerinti diff. hányadosát éppen ezért a szabadon álló x_ϱ szerinti diff. hányadostól megkülönböztetésül $\frac{dz}{dx_\varrho}$-val jelöljük;) tehát kell, hogy:

$$\frac{dz}{dx_\varrho} = \frac{\partial z}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_\varrho} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_\varrho} = 0 \ldots \quad \alpha)$$

legyen, ha ϱ az $1, 2, \ldots k$ értékeket veszi fel.

Az itt szereplő

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}, \frac{\partial y_2}{\partial x_\varrho}, \dots \frac{\partial y_i}{\partial x_\varrho}$$

a $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0, \dots \varphi_i=0$ egyenletekből határozandók meg. a köv. módon

Az $y_1, y_2, \dots y_i$ függvényeket a $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i$ függvényekbe helyettesítve képzeljük és az így keletkezett identitásokat x_ϱ szerint differenciáljuk. Ekkor a következő egyenletekre jutunk:

K. i.

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_\varrho}+\dots+\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}\dfrac{\partial y_i}{\partial x_\varrho}=0, \\
\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_\varrho}+\dots+\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}\dfrac{\partial y_i}{\partial x_\varrho}=0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_\varrho}+\dots+\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}\dfrac{\partial y_i}{\partial x_\varrho}=0.
\end{array}\right.$$

Ezekből az egyenletekből ki kellene számítanunk a

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}, \frac{\partial y_2}{\partial x_\varrho}, \dots \frac{\partial y_i}{\partial x_\varrho}$$

(K. i.)

differenciálhányadosokat és az így meghatározott kifejezéseket az *α)* alatti egyenletbe kellene helyettesítenünk. A szóban forgó differenciálhányadosok ezen egyenletrendszerből tényleg kiszámíthatók, mert ez a $\frac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}, \frac{\partial y_2}{\partial x_\varrho}, \dots \frac{\partial y_i}{\partial x_\varrho}$-ra nézve lineáris egyenletrendszer, melynek determinánsa éppen a $D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i}{y_1, y_2, \dots y_i}\right)$ függvénydetermináns, mely föltételünk szerint nem 0.*

E számítás helyett egyszerűbb lesz, ha ehhez a i egyenlethez $i+1$-iknek hozzáírjuk az *α)* alatti egyenletet és ezen $i+1$ egyenletből elimináljuk a $\frac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}, \dots \frac{\partial y_i}{\partial x_\varrho}$ mennyiségeket. Így jutunk arra, hogy a z-nek csak olyan helyen lehet szélső értéke, amelyre nézve ez a determináns:

* Azt mondottuk, hogy $D\left(\frac{\varphi_1, \dots \varphi_i}{y_1, \dots y_i}\right)$ függvénydetermináns ne legyen 0. Elég azt feltennünk, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k, \eta_1, \dots \eta_i$ olyan számértékek, melyek a $\varphi_1=0, \dots \varphi_i=0$, valamint az alább következő *β)* egyenleteket kielégítik, akkor ezen a $\xi_1, \dots \xi_k, \eta_1, \dots \eta_i$ helyen a D függvénydetermináns ne legyen 0, ha csak a differenciálhányadosok folytonosak.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_\varrho} & \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial z}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial z}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\varrho} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\varrho} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varrho} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \end{vmatrix} = 0, \qquad \beta)$$

vagyis:

$$D\left(\frac{z, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i}{x_\varrho, y_1, y_2, \ldots y_i}\right) = 0.$$

Itt ϱ az 1, 2,... k számok bármelyikét jelenti; tehát arra jutottunk, hogy ezen k determinánsnak:

$$D\left(\frac{z, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i}{x_1, y_1, y_2, \ldots y_i}\right), \quad D\left(\frac{z, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i}{x_2, y_1, y_2, \ldots y_i}\right), \ldots, \quad D\left(\frac{z, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i}{x_k, y_1, y_2, \ldots y_i}\right)$$

el kell tünnie azon a helyen, ahol az

$$f(y_1, y_2, \ldots y_i, x_1, x_2, \ldots x_k)$$

-nak szélső értéke van. Ha az így nyert k egyenlethez hozzávesszük még az adott i egyenletet: $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0, \ldots$ $\varphi_i=0$-t, akkor azt látjuk, hogy az $f(y_1, \ldots y_i, x_1, \ldots x_k)$ függvénynek csakis olyan $x_1, x_2, \ldots x_k$ helyen lehet szélső értéke, amelyen az így keletkező $i+k$ egyenlet ki van elégítve. Az eredmény tehát, amire jutottunk, elég egyszerű:

1. Kiválasztunk az f-ben szereplő argumentumok közül tetszés szerint olyan i változót, amelyekre nézve a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i$ függvények determinánsa nem identikusan 0. Legyenek ezek az $y_1, y_2, \ldots y_i$; a megmaradók: $x_1, x_2, \ldots x_k$.

2. Megalkotjuk ezen k függvénydeterminánst:

$$D\left(\frac{z, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i}{x_\varrho, y_1, y_2, \ldots y_i}\right),$$

ahol ϱ egymásután 1, 2,... k-t jelent és megoldjuk a

$$D\left(\frac{z, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i}{x_\varrho, y_1, y_2, \ldots y_i}\right) = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots \varphi_i = 0 \qquad \text{I.}$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots k)$$

$i+k$ számú egyenletet az $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_i$-re. Szélső értéke a z-nek csakis ilyen helyen lehet.* E föltételeket még teljesen szimmetrikus

* E föltételekben látszólag az $y_1, y_2, \ldots y_i$ változóknak kiváltságos helyzetük van, mert a felírt függvénydeterminánsok mindegyikében szerepelnek ezek a variabilisek; de megjegyezzük, hogy ez csak látszólagos kiváltság, mert ha az I) alatt szereplő k számú függvénydetermináns eltünik, akkor bármelyik $i+1$ változó szerinti függvénydetermináns is 0.

alakban is megfogalmazhatjuk. Ugyanis, ha az $y_1, \dots y_i, x_1, x_2, \dots x_k$, változókat sorban: $x_1, x_2, \dots x_n$-nel jelöljük $(i+k=n)$ és ha a fölírt I. alatti egyenletek valamelyik megoldása $x_1 = a_1, \dots x_n = a_n$, akkor meghatározható olyan i számú $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ állandó, amelyek kielégítik ezeket az egyenleteket:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{II.} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}
$$

(ahol $x_1, x_2, \dots x_n$ helyett az $a_1, a_2, \dots a_n$ teendők); mert a λ állandók meghatározhatóságához elégséges, hogy a $D\left(\frac{z, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i}{x_\varrho, x_1, x_2, \dots x_i}\right) = 0$ egyenletek az $a_1, a_2, \dots a_n$ által ki legyenek elégítve és fordítva is, ha vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ számok, melyek a II) alatti egyenleteket kielégítik, akkor a

$$
D\left(\frac{z, \varphi_1, \dots \varphi_i}{x_\varrho, x_1, \dots x_i}\right) = 0
$$
$$
(\varrho = i+1, i+2, \dots n)
$$

egyenletek is fönnállanak.

Igy tehát az I. feltételek helyett azt is mondhatjuk, hogy szélső érték csak olyan helyen lehetséges, amelyre nézve a II. alatti és a $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots \varphi_i = 0$ egyenletek ki vannak elégítve, vagyis hogy *a szélső értékek helyét megkaphassuk, meg kell határoznunk azon $x_1, x_2, \dots x_n$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$, tehát számra nézve $n+i$ mennyiséget, amelyek a II. alatti egyenleteket és a $\varphi_1 = 0, \dots \varphi_i = 0$, tehát összesen $n+i$ egyenletet kielégítik.*

Ezt az eredményt még másként is értelmezhetjük. A II. alatti egyenletek ugyanis éppen olyanok, mint azok, amelyekre akkor jutnánk, ha azt kérdeznők, hogy az $x_1, x_2, \dots x_n$ változók ezen függvényének:

$$
\Phi = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_i \varphi_i
$$

-nek, az $x_1, x_2, \dots x_n$ minő értékeinél van szélső értéke; tehát úgy is mondhatjuk, hogy a feltételes szélső érték meghatározása úgy történik, mintha a Φ függvény közönséges szélső értékét keresnők. A $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ konstans multiplicatorok meghatározása végett a II. alatti egyenleteket az $x_1, x_2, \dots x_n$-re megoldjuk, ezeket mint a $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ függvényeit a $\varphi_1 = 0, \dots \varphi_i = 0$ egyenletekbe helyettesítjük és végül ezen egyenleteket a $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$-re megoldjuk vagyis az $n+i$ egyenletet az $x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_i$ mennyiségekre megoldjuk).

A tétel ezen fogalmazásában az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók mindannyian egyformán szerepelnek.

Szélső érték csak az így megtalált helyen lehetséges. Hogy e helyen van-e valóban szélső érték, annak eldöntése ismét quadratikus alak vizsgálatára vezet. Az alább tárgyalandó példákban foglalkozunk ezzel a kérdéssel is.

4. Példák a feltételes szélső érték számítására. Egy-két újabb példa megvilágosítja a feltételes szélső érték meghatározási módját.

1. példa. Határozzuk meg egy adott (a, b, c) pont minimális távolságát egy adott $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ síktól. Az adott sík (x, y, z) pontja és az (a, b, c) pont közti távolság négyzete:

$$t^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2.$$

Ennek kell minimumnak lennie, föltéve, hogy x, y, z kielégítik ezt az egyenletet:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

Megalkotjuk a λ állandóval az

$$F=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)$$

függvényt. Ebből:

$$F_x=2(x-a)+\lambda\alpha, \quad F_y=2(y-b)+\lambda\beta, \quad F_z=2(z-c)+\lambda\gamma.$$

Az x, y, z és λ tehát ebből a 4 egyenletből határozandó meg:

$$2(x-a)+\lambda\alpha=0; \quad 2(y-b)+\lambda\beta=0; \quad 2(z-c)+\lambda\gamma=0; \quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

Innen:
$$x=-\frac{\lambda\alpha}{2}+a; \quad y=-\frac{\lambda\beta}{2}+b; \quad z=-\frac{\lambda\gamma}{2}+c,$$

$$\frac{1}{2}\lambda=\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

tehát a t^2 szélső értéke csak a következő lehet:

$$\frac{(\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Most meg kell vizsgálnunk, hogy t^2 ezen kifejezése valóban szélső érték-e.

E kérdés eldöntésére kissé általánosabb vizsgálatokkal foglalkozunk. Azt kérdezzük, hogyan kell eldönteni, hogy az $f(x, y, z)$ háromváltozós függvénynek, ha a változók között a $\varphi(x, y, z)=0$ reláció áll fenn, az előbbi tárgyalásban meghatározott helyen van-e szélső értéke és ha igen, e feltételes szélső érték maximum, vagy minimum-e?

Az $f(x, y, z)$ voltaképpen csak két változónak, mondjuk x és y-nak függvénye, mert $\varphi(x, y, z)=0$-ból z mint e két változó függvénye meghatározhatónak tétetett fel. Maximuma vagy minimuma van az $f(x, y, z)$-nek az (x_1, y_1, z_1) helyen, ha* $\frac{df}{dx_1}=0$, $\frac{df}{dy_1}=0$ az x_1, y_1 helyen és ha a

$$\frac{d^2f}{dx^2}h^2+2\frac{d^2f}{dx\,dy}hk+\frac{d^2f}{dy^2}k^2$$

quadratikus alak definit. Az x_1, y_1 hely meghatározására szolgált azon eljárás, amelyet ismertettünk. Megalkottuk az $F=f+\lambda\varphi$ függvényt és a

* Egyenes d betűt írtunk annak a jelölésére, hogy z is függvénye az x-nek, azaz $\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{\partial x}$.

$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0$ és a $\varphi(x, y, z)=0$ egyenletekből meghatároztuk az x_1, y_1, z_1 és λ értékeket.

Számítsuk ki az itt szereplő $\frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^2f}{dx\,dy}, \frac{d^2f}{dy^2}$ kifejezéseket. A

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x},\qquad \frac{df}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

identitásokat kell x, illetőleg y szerint differenciálnunk. Így kapjuk a következőket:

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ha a $\varphi(x, y, z)=0$ identitással is ugyanígy járunk el, akkor éppen így kapjuk a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2},\quad \frac{d^2\varphi}{dx\,dy},\quad \frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

kifejezéseit, melyek azonban 0-sal egyenlők. A $\frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^2f}{dx\,dy}, \frac{d^2f}{dy^2}$-hoz ezeket λ-val szorozva hozzá is adhatjuk és akkor $f+\lambda\varphi=F$ téve, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,$$

mert $\frac{\partial F}{\partial z}=0$. Éppen így:

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

E kifejezésekben z helyett a $\varphi(x, y, z)=0$-ból teendő a z és $\frac{\partial z}{\partial x}$ meg $\frac{\partial z}{\partial y}$ a $\varphi_x+\varphi_z\,\frac{\partial z}{\partial x}=0$ és $\varphi_y+\varphi_z\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$-ból helyettesítendő. Az ilyen módon elkészített kifejezésekkel megalkotandó a szóban forgó quadratikus alak. E quadratikus alak vizsgálata rendszerint igen körülményes. A mi példánk esetében azonban nagyon egyszerű. A jelen esetben ugyanis:

$$F_{xx}=2,\quad F_{xy}=0,\quad F_{yy}=2,\quad F_{xz}=0,\quad F_{yz}=0,\quad F_{zz}=2 \text{ és } \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\alpha}{\gamma},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\beta}{\gamma},$$

tehát: $$\frac{d^2f}{dx^2}=2+2\frac{\alpha^2}{\gamma^2};\quad \frac{d^2f}{dx\,dy}=2\frac{\alpha\beta}{\gamma^2};\quad \frac{d^2f}{dy^2}=2+2\frac{\beta^2}{\gamma^2}.$$

A szóban forgó quadratikus alak tehát egyszerűen:

$$2\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)h^2+\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}\,hk+\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)k^2\right],$$

melynek diszkriminánsa: $8\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)$, tehát az alak definit pozitív és így valóban minimummal van dolgunk.

2. *példa.* Legyen adva a

$$\varphi(x, y, z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}xz-1=0$$

centrikus másodrendű felület, melynek középpontja a kezdőpontban van és amelynek determinánsa $|a_{ik}| \neq 0$. E felület (x, y, z) pontjának a középponttól való távolságának négyzete: $r^2=x^2+y^2+z^2$. Melyek a felület azon (x, y, z) pontjai, amelyek r^2-ot maximummá, ill. minimummá teszik? *(Főtengely-probléma.)*

Feladatunk az $x^2+y^2+z^2$ szélső értékeinek meghatározása a $\varphi(x, y, z)=0$ feltétel mellett; tehát feltételes szélső értéket keresünk. Megalkotjuk az

$$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-\lambda\varphi(x, y, z)$$

függvényt. Kell, hogy x, y, z és λ-ra fennálljanak a

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=0 \quad \text{és} \quad \varphi(x, y, z)=0$$

egyenletek. Az első három egyenlet részletesen írva:

$$\begin{aligned} x-\lambda(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)&=0; \\ y-\lambda(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)&=0; \\ z-\lambda(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)&=0. \end{aligned} \qquad \alpha)$$

E három egyenlet együttesen csak úgy állhat fenn [$x=0$, $y=0$, $z=0$ nem lehet, mert $\varphi=0$], ha

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11}, & -\lambda a_{12}, & -\lambda a_{13} \\ -\lambda a_{21}, & 1-\lambda a_{22}, & -\lambda a_{23} \\ -\lambda a_{31}, & -\lambda a_{32}, & 1-\lambda a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Tegyük $\lambda=\frac{1}{\omega}$. Minthogy föltettük, hogy az $|a_{ik}|$ determináns nem 0, az előbbi egyenlettel teljesen egyenlő értékű a

$$D(\omega)=\begin{vmatrix} a_{11}-\omega, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\omega, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Ezen egyenlet gyökeiről tudjuk, hogy valósak. Tegyük fel még azt is, hogy mind különbözőek, vagyis hogyha ω a $D(\omega)=0$ gyökét jelenti, akkor $D'(\omega)\neq 0$. Részletesebben írva, e föltevésünk azt jelenti, hogy

$$D_{11}(\omega)+D_{22}(\omega)+D_{33}(\omega)\neq 0,$$

ahol $D_{ik}(\omega)$ alatt a $D(\omega)$ determináns i-ik sorának k-ik eleméhez tartozó aldeterminánsát értjük. Jelöljük a $D(\omega)=0$ egyenlet gyökeit ω_1, ω_2, ω_3-al. Ha az $\alpha)$ alatti egyenletekben $\lambda=\frac{1}{\omega}$-t és ω helyett rendre ω_1, ω_2, ω_3-at tesszük, akkor 3 egyenletrendszert kapunk. Az első:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\omega_1)x+a_{12}y+a_{13}z&=0, \\ a_{21}x+(a_{22}-\omega_1)y+a_{23}z&=0, \\ a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-\omega_1)z&=0. \end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszerből $x:y:z$ arány meghatározható. Jelöljük az x, y, z értékeket, minthogy ezek az ω_1 gyökhöz tartoznak, x_1, y_1, z_1-gyel; tehát:

$$x_1 : y_1 : z_1 = D_{11}(\omega_1) : D_{12}(\omega_1) : D_{13}(\omega_1),$$

ha az $x:y:z$ viszonyt a fölírt rendszer második és harmadik egyenletéből határozzuk meg.

A $D(\omega_1)=0$ folytán ugyanerre az eredményre jutunk, ha a három egyenletből nem az elsőt, hanem a másodikat vagy a harmadikat hagyjuk ki, vagyis:

$$x_1 : y_1 : z_1 = D_{11}(\omega_1) : D_{12}(\omega_1) : D_{13}(\omega_1),$$
$$x_1 : y_1 : z_1 = D_{21}(\omega_1) : D_{22}(\omega_1) : D_{23}(\omega_1),$$
$$x_1 : y_1 : z_1 = D_{31}(\omega_1) : D_{32}(\omega_1) : D_{33}(\omega_1),$$

megjegyezve, hogy a $D(\omega)$ determináns szimmetrikus volta miatt

$$D_{12}(\omega_1) = D_{21}(\omega_1), \quad D_{13}(\omega_1) = D_{31}(\omega_1), \quad D_{23}(\omega_1) = D_{32}(\omega_1).$$

Az első sor baloldalán x_1-gyel szorzunk, (ω betűt rövidség végett elhagyva):

$$x_1^2 : x_1 y_1 : x_1 z_1 = D_{11} : D_{12} : D_{13}.$$

Ha a második sor baloldalán y_1-gyel szorzunk:

$$x_1 y_1 : y_1^2 : y_1 z_1 = D_{21} : D_{22} : D_{23},$$

éppen így:
$$x_1 z_1 : y_1 z_1 : z_1^2 = D_{31} : D_{32} : D_{33}.$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $D_{12} = D_{21}$ stb., akkor tehát:

$$x_1^2 : y_1^2 : z_1^2 : x_1 y_1 : y_1 z_1 : z_1 x_1 = D_{11} : D_{22} : D_{33} : D_{12} : D_{23} : D_{31},$$

vagyis k arányossági factort bevezetve:

$$x_1^2 = kD_{11}, \quad y_1^2 = kD_{22}, \quad z_1^2 = kD_{33}, \quad x_1 y_1 = kD_{12}, \quad y_1 z_1 = kD_{23}, \quad z_1 x_1 = kD_{31}$$

és ha x_1^2, y_1^2, ... ezen értékeit a $\varphi(x, y, z) = 0$ egyenletbe helyettesítjük,

$$k[a_{11}D_{11}+a_{22}D_{22}+a_{33}D_{33}+2a_{12}D_{12}+2a_{23}D_{23}+2a_{31}D_{31}] = 1.$$

A zárójelben álló kifejezés az

$$(a_{11}-\omega_1)D_{11}+a_{12}D_{12}+a_{13}D_{13}=D(\omega_1)=0, \quad a_{21}D_{21}+(a_{22}-\omega_1)D_{22}+a_{23}D_{23}=0$$
$$a_{31}D_{31}+a_{32}D_{32}+(a_{33}-\omega_1)D_{33}=0$$

figyelembevételével ilyen alakú

$$\omega_1[D_{11}(\omega_1)+D_{22}(\omega_1)+D_{33}(\omega_1)].$$

Így tehát:

$$x_1^2 = \frac{D_{11}(\omega_1)}{\omega_1[D_{11}(\omega_1)+D_{22}(\omega_1)+D_{33}(\omega_1)]},$$
$$y_1^2 = \frac{D_{22}(\omega_1)}{\omega_1[D_{11}(\omega_1)+D_{22}(\omega_1)+D_{33}(\omega_1)]},$$
$$z_1^2 = \frac{D_{33}(\omega_1)}{\omega_1[D_{11}(\omega_1)+D_{22}(\omega_1)+D_{33}(\omega_1)]},$$
$$y_1 z_1 = \frac{D_{23}}{\omega_1[D_{11}+D_{22}+D_{33}]}, \quad z_1 x_1 = \frac{D_{31}}{\omega_1[D_{11}+D_{22}+D_{33}]},$$
$$x_1 y_1 = \frac{D_{12}}{\omega_1[D_{11}+D_{22}+D_{33}]}.$$

Az első 3 egyenlet összeadásából keletkezik:

$$r_1^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2 = \frac{1}{\omega_1}, \qquad \beta)$$

tehát az ω_1 gyökhöz tartozó félátmérő négyzete: $\frac{1}{\omega_1}$. Ha már most ugyanezt a számítást az ω_2 és ω_3 gyökökkel ismételjük, megfelelően a felületnek az ω_2-höz tartozó pontját x_2, y_2, z_2 és az ω_3-hoz tartozót x_3, y_3, z_3-mal jelölve, azt kapjuk, hogy:

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{1}{\omega_2}, \qquad r_3^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = \frac{1}{\omega_3}. \tag{β}$$

Meghatároztuk tehát azon x^2, y^2, z^2 értékeket, amelyek az $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ kifejezést a $\varphi = 0$ feltétel esetében maximummá vagy minimummá tehetik. Meghatároztuk magukat az esetleges szélső értékeket is, amennyiben ezen x^2, y^2, z^2 értékeknek megfelelő r^2 értékek rendre: $\frac{1}{\omega_1}$, $\frac{1}{\omega_2}$, $\frac{1}{\omega_3}$.

A geometriai alkalmazás szempontjából magának az r-nek az értékére, nem pedig r^2-ére van szükségünk. Minthogy ω_1, ω_2, ω_3 valósak, tehát x^2, y^2, z^2 is valósak és így x, y, z csak vagy valósak, vagy tiszta képzetesek lehetnek és pedig minthogy xy, xz, yz valósak, tehát x, y és z egyidejűleg vagy valósak, vagy képzetesek. Ebből azonnal következik a $\beta)$ egyenletek szerint, hogy ha az ω pozitiv, akkor a hozzá tartozó r^2 pozitiv és így az x, y, z valósak; ha pedig ω negativ, x, y, z tiszta képzetesek. Geometriai szempontból tehát csakis a $D(\omega) = 0$ pozitiv gyökeihez tartozik maximális vagy minimális átmérő.

Eszerint tehát a főtengelyprobléma szempontjából csak három esetet kell megkülönböztetnünk. 1. Ha mind a három gyöke a $D(\omega) = 0$ egyenletnek pozitiv. 2. Ha két gyöke pozitiv. 3. Ha csak egyik gyöke pozitiv.

Nagyság szerint rendezve a gyököket, az indexeket válasszuk úgy, hogy $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ legyen.

Kérdés már most, hogy az egyes gyökökhöz tartozó r vagy r^2 értékek maximálisak vagy minimálisak-e?

Ezen kérdés eldöntése végett a következőképpen járunk el. A $D(\omega) = 0$ egyenlet gyökei: ω_1, ω_2, ω_3. Mindhárom valós. A nekik megfelelő félátmérők négyzetei: $r_1^2 = \frac{1}{\omega_1}$, $r_2^2 = \frac{1}{\omega_2}$, $r_3^2 = \frac{1}{\omega_3}$ és a félátmérők végpontjai: x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 eleget tesznek ezen egyenletrendszernek:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= \omega x, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= \omega y, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= \omega z \quad \text{hol } D(\omega) = 0. \end{aligned} \tag{γ}$$

Ha ezen egyenletekben x, y, z helyébe x_1, y_1, z_1-et és ω helyébe ω_1-et tesszük és az első egyenletet x_2-vel, a másodikat y_2-vel, a harmadikat z_2-vel szorozzuk és összeadjuk, akkor nyerjük, hogy:

$$\omega_1 [x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2] =$$
$$= (a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1) x_2 + (a_{21} x_1 + a_{22} y_1 + a_{23} z_1) y_2 + (a_{31} x_1 + a_{32} y_1 + a_{33} z_1) z_2$$

és ha a fönti egyenletrendszerben ω helyett ω_2-t és megfelelően x, y, z helyett x_2, y_2, z_2-t tesszük és az egyenleteket rendre x_1, y_1, z_1-gyel szorozva összeadjuk, akkor:

$$\omega_2 [x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2] =$$
$$= (a_{11} x_2 + a_{12} y_2 + a_{13} z_2) x_1 + (a_{21} x_2 + a_{22} y_2 + a_{23} z_2) y_1 + (a_{31} x_2 + a_{32} y_2 + a_{33} z_2) z_1.$$

A jobboldal az előbbi egyenlőség jobboldalával megegyezik, tehát:

$$(\omega_1 - \omega_2)(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = 0 \tag{δ}$$

és minthogy $\omega_1 \neq \omega_2$, tehát: $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$. Éppen így kapjuk, hogy $x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = 0$, $x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 = 0$. Ezen egyenletek geometriai jelentése az, hogy az ω_1, ω_2, ω_3-hoz tartozó átmérők egymásra merőlegesen állnak.

Tudjuk, hogy ha ω_1 pozitiv, akkor x_1, y_1, z_1 reálisak. Ha pedig ω_1 negativ, akkor x_1, y_1, z_1 tiszta imagináriusak, tehát $\sqrt{\omega_1}\, x_1$, $\sqrt{\omega_1}\, y_1$, $\sqrt{\omega_1}\, z_1$ mindig reálisak. Éppen így áll a dolog a $\sqrt{\omega_2}x_2$, $\sqrt{\omega_2}y_2$, $\sqrt{\omega_2}z_2$-re és a $\sqrt{\omega_3}x_3$, $\sqrt{\omega_3}y_3$, $\sqrt{\omega_3}z_3$-ra, nézve. Ezzel a 9 reális számmal megalkotjuk a következő lineáris transzformációt:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\omega_1}x_1\xi+\sqrt{\omega_2}x_2\eta+\sqrt{\omega_3}x_3\zeta, \\ y &= \sqrt{\omega_1}y_1\xi+\sqrt{\omega_2}y_2\eta+\sqrt{\omega_3}y_3\zeta, \\ z &= \sqrt{\omega_1}z_1\xi+\sqrt{\omega_2}z_2\eta+\sqrt{\omega_3}z_3\zeta. \end{aligned} \tag{ε}$$

Azonnal meggyőződhetünk róla, hogy ez a transzformáció orthogonális. Ugyanis az első oszlopban levő együtthatók négyzetösszege: $\omega_1(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$. Ez pedig, minthogy $r_1^2=\frac{1}{\omega_1}$, éppen: 1. Ugyanígy a második és harmadik oszlopban álló együtthatók négyzetösszege: 1, továbbá két különböző oszlopban levő együtthatók szorzatösszege az átmérők előbb kimutatott merőlegessége folytán: 0. Ezen orthogonális transzformáció az $x^2+y^2+z^2$ alakot átviszi a $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ alakba. A $\varphi(x, y, z)$ alakot pedig átviszi a következőbe:

$$a_{11}[\sqrt{\omega_1}x_1\xi+\sqrt{\omega_2}x_2\eta+\sqrt{\omega_3}x_3\zeta]^2+a_{22}[\sqrt{\omega_1}y_1\xi+\sqrt{\omega_2}y_2\eta+\sqrt{\omega_3}y_3\zeta]^2+\cdots,$$

melyet ξ, η, ζ szerint rendezve és tekintetbe véve, hogy $\varphi(x_1, y_1, z_1)=0$, azt találjuk, hogy ξ^2 együtthatója ω_1, η^2-é ω_2 és ζ^2 együtthatója ω_3. A $\xi\eta$ együtthatója pedig a következő kifejezés kétszerese:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\omega_1\omega_2}[a_{11}x_1x_2+a_{22}y_1y_2+a_{33}z_1z_2+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+ \\ &\qquad +a_{23}(x_2y_3+x_3y_2)+a_{31}(x_1y_3+x_3y_1)], \\ &=\sqrt{\omega_1\omega_2}[x_2(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1)+y_2(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1)+ \\ &\qquad +z_2(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1)]. \end{aligned}$$

De a *γ)* tekintetbevételével $a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1=\omega_1x_1$ stb. és így a *δ)* tekintetbevételével ez a kifejezés: 0.

A $\xi\eta$ együtthatója tehát: 0. Éppen így az $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ együtthatói is eltünnek, vagyis a $\varphi(x, y, z)$ az új variabilisekben erre a kanonikus alakra redukálódik:

$$\omega_1\xi^2+\omega_2\eta^2+\omega_3\zeta^2-1.^*$$

A fölírt reális orthogonális transzformáció tehát a $\varphi(x, y, z)$-t a kanonikus alakjára: $\omega_1\xi^2+\omega_2\eta^2+\omega_3\zeta^2$-ra transzformálja.

Feladatunk most már jelentékenyen egyszerűsödött. Az (x_1, y_1, z_1) pont koordinátái jelenleg $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}$, $\eta_1=0$, $\zeta_1=0$, mert valóban ha *ε)*-ban ξ_1, η_1, ζ_1 helyett ezen értékrendszert tesszük, akkor $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ lesz. Az (x_2, y_2, z_2) pont koordinátái az új rendszerben: $\xi_2=0$, $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{\omega_2}}$, $\zeta_2=0$; és az (x_3, y_3, z_3) ponté: $\xi_3=0$, $\eta_3=0$, $\zeta_3=\frac{1}{\sqrt{\omega_3}}$.

Kérdés, hogy ezek az értékek az $r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ kifejezést minimummá vagy maximummá teszik-e?

E kérdésre legegyszerűbben és legtermészetesebben úgy felelhetünk, ha a ξ, η, ζ helyett $\xi+h$, $\eta+k$, $\zeta+l$ koordinátákat tesszük és megvizsgáljuk, hogy az $r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ miképpen változik ezen helyettesítéssel, ha a h, k, l egyúttal a $\varphi(\xi+h, \eta+k, \zeta+l)=0$ egyenletet is kielégítik. Nézzük először a

* Most látjuk, miért nem kell azzal az esettel foglalkoznunk, midőn $\omega_1<0$ $\omega_2<0$, $\omega_3<0$. Ekkor ugyanis az $\omega_1\xi^2+\omega_2\eta^2+\omega_3\zeta^2=1$ felületnek egyetlen valós pontja sem volna.

$(\xi_1+h,\ \eta_1+k,\ \zeta_1+l)$, azaz $\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}+h,\ k,\ l\right)$ helyettesítését. Az

$$\omega_1\xi^2+\omega_2\eta^2+\omega_3\zeta^2=\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}+h\right)^2+\omega_2k^2+\omega_3l^2=1,$$

azaz:

$$2\sqrt{\omega_1}h+\omega_1h^2+\omega_2k^2+\omega_3l^2=0$$

és

$$r^2=\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}+h\right)^2+k^2+l^2=\frac{1}{\omega_1}+\frac{2h}{\sqrt{\omega_1}}+h^2+k^2+l^2.$$

Innen:

$$\omega_1r^2=1+2h\sqrt{\omega_1}+\omega_1(h^2+k^2+l^2),$$

vagy a $2\sqrt{\omega_1}h+\omega_1h^2+\omega_2k^2+\omega_3l^2=0$-t kivonva:

$$\omega_1r^2=1+(\omega_1-\omega_2)k^2+(\omega_1-\omega_3)l^2,$$

tehát a felület $(\xi_1+h,\ \eta_1+k,\ \zeta_1+l)$ pontjához húzott félátmérő négyzete:

$$r^2=\frac{1}{\omega_1}+\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1}k^2+\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_1}l^2,$$

vagyis $\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1}k^2+\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_1}l^2$-tel különbözik a ξ_1, η_1, ζ_1 ponthoz húzott félátmérő négyzetétől, r_1^2-től. Éppen így kapjuk, hogy a ξ_2, η_2, ζ_2 ponthoz tartozó félátmérő négyzete r_2^2 megváltozik a megfelelő elmozdulásnál:

$$\frac{(\omega_2-\omega_1)h^2}{\omega_2}+\frac{(\omega_2-\omega_3)l^2}{\omega_2}$$

-vel és végre a harmadik, a (ξ_3, η_3, ζ_3)-hoz tartozó félátmérő négyzete r_3^2

$$\frac{(\omega_3-\omega_1)h^2}{\omega_3}+\frac{(\omega_3-\omega_2)k^2}{\omega_3}$$

-mal változik. Nézzük már most az előbb felsorolt három esetet. 1. A $D(\omega)=0$ egyenletnek mind a három gyöke pozitiv. Legyen $0<\omega_3<\omega_2<\omega_1$. Ez esetben $\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1}$ és $\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_1}$ pozitivok, tehát az r_1^2 növekedése pozitiv, akárminő számok legyenek is h és k, vagyis az ω_1-hez tartozó félátmérő minimális; az ω_3-hoz tartozó félátmérő négyzetének változása pedig (minthogy $\omega_3<\omega_1$ és $\omega_3<\omega_2$) negativ, vagyis r_3^2 és így r_3 is maximális; végre az ω_2-höz tartozó r_2^2 változása: $\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}h^2+\frac{\omega_2-\omega_3}{\omega_2}l^2$ indefinit alak, tehát r_2 sem maximum, sem minimum nem lehet. A felület, amelyre nézve ez az eset áll fenn, vagyis mind a három gyök pozitiv: ellipszoid.

A 2. esetben $\omega_3<0<\omega_2<\omega_1$. Ez esetben r_3 imaginárius; r_2 és r_1 reálisak és az r_1^2 növekedése $\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1}k^2+\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_1}l^2$ definit pozitiv, vagyis r_1 minimális; az r_2^2 növekedése: $\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}h^2+\frac{\omega_2-\omega_3}{\omega_2}l^2$ indefinit alak, tehát r_2 nem szélső érték. Ez a felület az egyköpenyű hyperboloid.

A 3. esetben $\omega_3<\omega_2<0<\omega_1$, r_3 és r_2 képzetesek, az ω_1-nek megfelelő r_1^2 változása: $\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1}k^2+\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_1}l^2$ megint definit pozitiv, vagyis r_1 minimális. A felület a kétköpenyű hyperboloid.

Feladatok és gyakorlatok az I—V. fejezethez.

I. Határértékek. 1. Mutassuk meg, hogy e kétváltozós függvénynek:

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

az $x=0$, $y=0$ helyen nincsen határértéke. Mutassuk meg, hogy ha a kezdőpontba akárminő $y=mx$ egyenesen, vagy az x, vagy az y tengelyen át haladunk, vagy tetszésszerinti $y=ax+bx^2$, vagy $x=\alpha y+\beta y^2$ parabolán, mindig 0 határértékhez jutunk; de ha pl: $x=y^3$ harmadrendű parabolán haladunk a kezdőpontba, a határték: $\frac{1}{2}$.

2. Mutassuk meg az előbbi példa általánosításaképpen, hogy az

$$f(x, y) = \frac{xy^n}{x^2+y^{2n}}$$

függvénynek, (n 1-nél nagyobb egész szám) a kezdőpontban a határértéke 0, ha $y=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ parabolán haladunk a kezdőpontba; ellenben a határérték $\frac{1}{2}$, ha $x=y^n$ n-edrendű parabolán haladunk a kezdőpontba.

II. Differenciálási gyakorlatok. 3. Határozzuk meg ezen függvények parciális differenciálhányadosait:

a) $z=x^2+y^2$, *b)* $z=\sqrt{x^2+y^2}$, *c)* $z=\sin(x+y)$, *d)* $z=\cos xy$,

e) $u=\arcsin\frac{x}{y}$, *f)* $u=x^2e^{x+y}$, *g)* $u=\log(x\sin y)$, *h)* $\log(x\log y)$.

4. Ha $u=e^{2x+3yz}\sin(x-y)+e^{2x-3yz}\sin(x+y)$, határozzuk meg

$$u_x, \quad u_y, \quad u_z$$

parciális differenciálhányadosokat.

5. Határozzuk meg *a)* $v=\log(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ *b)* $v=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ parciális differenciálhányadosait!

6. Határozzuk meg e függvények elsőrendű parciális diff.-hányadosait:

a) $\operatorname{tg}\frac{x}{y}$, *b)* $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, *c)* $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1-y}$, *d)* $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$, *e)* $e^{\frac{x}{y}}$,

f) $(1-x)\sin\frac{x}{y}+(1-y)\sin\frac{y}{x}$, *g)* x^y, *h)* $\operatorname{arc\,tg}(x+y)+\operatorname{arc\,tg}(x-y)$,

i) $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$, *j)* $\frac{\log y}{\log x}+\frac{\log x}{\log y}$, *k)* x^y+y^x.

7. Ha $v=e^{x-2yz}+\sin(x-y)\cos z+y^2z^3$, határozzuk meg a v_x, v_y, v_z, v_{xx}, v_{yy}, v_{zz}, v_{xy}, v_{yz}, v_{zx} differenciálhányadosokat!

8. Számítsuk ki a $w=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ második differenciálhányadosait!

9. Legyen

$$v=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mutassuk meg, hogy:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$$

10. Legyen

$$v=\log\sqrt{x^2+y^2}.$$

Mutassuk meg, hogy:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

11. Határozzuk meg a 9. alatti v függvényhez tartozó v_{xy}, v_{yz}, v_{zx} másodrendű parciális differenciálhányadosokat!

12. Legyen: $u=\sin(x^2y)$. Számítsuk ki: u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} differenciálhányadosokat!

13. Ha $$u=f(y+ax)+\varphi(y-ax),$$
ahol $f(z)$ és $\varphi(z)$ függvények tetszésszerinti, legalább kétszer differenciálható függvényei a z-nek és a állandó, mutassuk meg, hogy u parciális differenciálhányadosai között ez a reláció áll fenn:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

14. Ha $u=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, mutassuk meg, hogy u eleget tesz ennek a parciális differenciálegyenletnek: (parciális differenciálhányadosai között ez a reláció áll fenn)

$$x^2r+2xys+y^2t=0$$

ahol $r=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $t=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

15. Ha $u=(x^3+y^3)^{\frac{1}{2}}$, mutassuk meg, hogy u eleget tesz ennek a parciális differenciálegyenletnek:

$$x^2r+2xys+y^2t=\frac{3}{4}u.$$

16. Ha $u=xf\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ahol $f(z)$ és $\varphi(z)$ a z-nek legalább kétszer differenciálható függvényei, akkor mutassuk meg, hogy u eleget tesz ennek a parciális differenciálegyenletnek:

$$x^2r+2xys+y^2t=0.$$

Mutassuk meg, hogy a 14. alatti feladat ennek speciális esete.

17. Mutassuk meg, hogy az $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ — akárminő, legalább kétszer differenciálható függvények a φ és ψ — eleget tesz ennek a differenciál-egyenletnek (r, s, t jelentését lásd a 14. feladatban):

$$r-2s+t=0.$$

18. Ez a függvény: $u=f[x+\varphi(y)]$ eleget tesz ennek a relációnak:

$$ps=qr,\quad \left[p=\frac{\partial u}{\partial x},\ q=\frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

19. Ez a függvény: $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ kielégíti ezt a parciális differenciálegyenletet:

$$x^2r+2xys+y^2t+px+qy=n^2u.$$

20. Számítsuk ki az
$$y=x\varphi(z)+\psi(z)$$
egyenletből $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ parciális diff.-hányadosokat (például: x-szerint differenciálva: $0=\varphi(z)+x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\psi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}$, y szerint differenciálva: $1=x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\psi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}$ s. i. t.) és mutassuk meg, hogy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0.$$

21. Mutassuk meg, hogy ez a differenciálalak:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

ahol a, b és c az x és y függvényei, a következő alakban írható:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\frac{\partial z}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x}\right)z, \quad \text{vagy:} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + bz\right) + a\frac{\partial z}{\partial x} + \left(c - \frac{\partial b}{\partial y}\right)z.$$

22. Vezessünk be a 21. alatti példában új változót a $z = \lambda z'$ egyenlettel, ahol λ az (x, y) függvénye; mutassuk meg, hogy λ faktortól eltekintve, az ottani differenciálalak átmegy a hasonló alakú:

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + a'\frac{\partial z'}{\partial x} + b'\frac{\partial z'}{\partial y} + c'z'$$

differenciálalakba, ahol:

$$a' = a + \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}, \quad b' = b + \frac{\partial \log \lambda}{\partial x}, \quad c' = c + a\frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + b\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}.$$

23. Számítsuk ki a 22. feladatban szereplő a', b', c' függvényekből a

$$h = \frac{\partial a'}{\partial x} + a'b' - c', \qquad k = \frac{\partial b'}{\partial y} + a'b' - c'$$

függvényeket!

24. Ha $u = e^{xyz}$, határozzuk meg $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ parciális differenciálhányadost!

25. Ha $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$, számítsuk ki e parciális differenciálhányadosokat:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

26. Ha $u = x(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}} + y(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + z(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}} - xyz$ mutassuk meg, hogy:

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x} = (a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = (a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial z} = -(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}.$$

27. *A differenciálás sorrendje:* Legyen:

$$f(x, y) = -x^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + y^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y},$$

ahol arc tg z alatt mindig a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti arcus értendő. Állítsuk elő f_x és f_y parciális diff.-hányadosokat. Azt találjuk, hogy:

$$f_x = y - 2x \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \qquad f_y = -x + 2y \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}.$$

Tegyünk az $f_x(x, y)$-ban x és az f_y-ban y helyébe 0-t, akkor azt találjuk, hogy $f_x(x, y)$-nak y szerinti differenciálhányadosa az $x=0$ helyen: $+1$, akárminő értéke legyen is az y-nak, tehát $f_{xy}(0, 0) = +1$ és éppen így $f_y(x, y)$-nak x szerinti differenciálhányadosa az $y=0$ helyen minden x-nél: -1, vagyis $f_{yx}(0, 0) = -1$. Látjuk tehát, hogy az $x=0$, $y=0$ helyen az f_{xy} nem egyenlő az f_{yx}-el. Általában:

$$f_{xy} = \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} \qquad f_{yx} = \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2},$$

tehát minden más helyen a két differenciálhányados megegyezik. Ez a differenciálhányados az $x=0$, $y=0$ helyen nem folytonos. A bemutatott függvény tehát példa annak az illusztrálására, hogy ha az f_{xy} (vagy f_{yx}) valamely helyen nem folytonos, akkor az f_{xy} esetleg különbözik az f_{yx}-től.*

28. Legyen $f(x, y)$ az x, y független változók olyan függvénye, mely az $x=0$, $y=0$ helyen: 0, minden más helyen pedig:

$$f(x, y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

(Miért kellett külön megmondani, hogy $f(0, 0)=0$?) Mutassuk meg, hogy ennél a függvénynél is az előbbi példában tárgyalt eset áll be, vagyis az $x=0$, $y=0$ helyen $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ és minden más helyen $f_{xy}=f_{yx}$.

III. Homogén függvény. 29. Ha $f(x, y, z)$ az x, y, z-nek m-edrendű homogén függvénye, azaz $f(tx, ty, tz)=t^m f(x, y, z)$ minden t-re, akkor, mint tudjuk:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=mf.$$

Alkalmazzuk ezt az EULER-féle tételt erre a homogén függvényre:

$$u=(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(x-y+z)^3-(y+z-x)^3.$$

30. Mutassuk meg, hogy ha $u(x, y, z)$ m-edrendű homogén függvénye az x, y, z-nek, akkor a k-ik parciális differenciálhányadosai $[k\leq m]$ $m-k$-adfokú homogén függvényei az (x, y, z)-nek!

31. Ha u az x, y, z m-edrendű homogén függvénye, akkor

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \frac{(m-1)^2}{z^2} \begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

[Ha a baloldali determinánsban a harmadik oszlopot z-vel szorozzuk és az x-szel szorzott első és y-nal szorzott második oszlopot hozzáadjuk, akkor az új harmadik oszlop elemei az Euler-tétel szerint $(m-1)u_x$, $(m-1)u_y$, $(m-1)u_z$ lesznek és ha az így kapott determinánsban a harmadik sort z-vel szorozzuk és az x-szel szorzott első és y-nal szorzott második sort hozzáadjuk, akkor $(m-1)^2$ kiemelése és z^2-tal való osztás után a jobboldali alakra jutunk.] Állítsuk fel a megfelelő tételt 4 változós homogén függvényre!

IV. Általános differenciálási szabály. Implicit függvény differenciálása.

32. Határozzuk meg $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányadost az

$$ax+by+xy=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

egyenletből.

33. Határozzuk meg a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányadosokat ezekből az összefüggésekből:

a) $y^n=\frac{x+y}{x-y}$, *b)* $1+xy=\log(e^{xy}+e^{-xy})$, *c)* $\frac{y\log x}{x\log y}=\frac{x\log y}{y\log x}$,

d) $y=1+xe^y$, *e)* $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$, *f)* $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

34. Határozzuk meg az

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

másodrendű görbe valamely (x, y) pontjában az érintő irányhatározóját!

* Schwarz: Ges. Werke II. p. 281.

35. Ha $f(x, y) = 0$, akkor y-nak x-szerinti differenciálhányadosait sorra megkapjuk, ha $f(x, y)$-nak x-szerinti totalis differenciálhányadosait vesszük (azaz tekintettel vagyunk arra. hogy $f(x, y)$ x-től y közvetítésével is függ) és ezeket 0-sal egyenlővé téve, az így nyert egyenletekből y', y'', y'''... kiszámítjuk. Így lesz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0.$$

Folytassuk ezt az eljárást az y''' és y^{IV} meghatározására.

36. Alkalmazzuk ezt az eljárást az $y=\varphi(x)$-re, hogy x-nek y-szerinti differenciálhányadosait kiszámitsuk (inverz függvény differenciálása). Számítsuk ki eszerint $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$ differenciálhányadosokat.

37. Határozzuk meg a derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott,

$$x^3+2y^3-3xy^2-8y=0$$

egyenlet által jellemzett harmadrendű görbe azon pontjait, amelyekben az érintő az x tengellyel párhuzamos.

38. Számítsuk ki az

$$y^3+z^3=3xyz$$

összefüggésből $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ parciális differenciálhányadosokat!

39. Ha adva vannak u és v mint az x és y függvényei és ezzel ismeretesek u_x, u_y, v_x, v_y, számítsuk ki x és y-nak u és v-szerinti differenciálhányadosait: x_u, x_v, y_u, y_v-t! [Ilyenkor legcélszerűbb az u és v függvényeket ilyen alakban írni $u=u\,(x, y)$, $v=v\,(x, y)$, ahol a jobboldali u és v függvényjelek. Ha $u=u\,(x, y)$-t u szerint differenciáljuk, a baloldalon 1-et kapunk:

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

és ha ugyanazt v szerint differenciáljuk és tekintetbe vesszük, hogy most u és v a független változók, akkor a baloldalon 0-t kapunk:

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ha a $v=v\,(x, y)$-nal ugyanezt tesszük, akkor ismét két egyenletre jutunk. Számítsuk ki e négy egyenletből x_u, x_v, y_u, y_v differenciálhányadosokat.]

40. Legyenek ismét u és v függvények adva, mint x és y függvényei. Tekintsük most u-t és x-et független változóknak és számítsuk ki u_x, u_y, v_x, v_y differenciálhányadosokat a v_u, v_x, y_u, y_x új differenciálhányadosok által. Mibe megy át az $u_xv_y-u_yv_x$ függvénydetermináns, ha a parciális differenciálhányadosokat a most kiszámított értékeikkel helyettesítjük?

V. *Legendre-féle transzformáció.* 41. Legyen $z=f\,(x, y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$-et jelöljük, mint rendesen, p-vel, $\frac{\partial z}{\partial y}$-t pedig q-val. Eszerint tehát p és q az x és y függvényei. Tekintsük x, y helyett független változókul az egymástól függetlennek föltételezett p és q-t és a z függvény helyett ezt az u függvényt:

$$u=px+qy-z.$$

Fejezzük ki u-nak p és q-szerinti első és második differenciálhányadosait! x-et, y-t és így z-t is képzeljük p és q független változók által kifejezve; akkor tehát p szerint differenciálva:

$$\frac{\partial u}{\partial p}=x+p\frac{\partial x}{\partial p}+q\frac{\partial y}{\partial p}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}$$

és tekintetbe véve, hogy $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, következik: $\frac{\partial u}{\partial p}=x$. Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial u}{\partial q}=y$. Az elsőből:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=\frac{\partial x}{\partial p},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}=\frac{\partial x}{\partial q}\quad \text{és éppen így:}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}=\frac{\partial y}{\partial q},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial q\partial p}=\frac{\partial y}{\partial p}.$$

$\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial x}{\partial q}$, ... kiszámítása a következőképen történik: állítsuk elő p-nek p-szerinti differenciálhányadosát, de tekintetbe véve, hogy p az x és y függvénye és ezek p és q függvényei:

$$1=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p};$$

továbbá állítsuk elő p-nek q-szerinti differenciálhányadosát, mely 0:

$$0=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}.$$

Éppen így q-nak p és q-szerinti diff.-hányadosai

$$0=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p},\qquad 1=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}.$$

Mutassuk meg, hogy e négy egyenletből az ismeretes r, s, t jelölést használva ered:

$$r=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2},\qquad s=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q},\qquad t=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$$

ahol:

$$\Delta=\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}\right)^2.$$

VI. Más transzformációk. 42. Mi lesz ebből a kifejezésből:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z$$

ha x és y független változók helyett $u=xy$, $v=\frac{1}{y}$ helyettesítéssel az u és v változókat hozzuk be.

43. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

nem változik meg, ha x, y, z helyett u, v, w változókat hozzuk be, ahol:

$$x=a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w$$
$$y=a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w$$
$$z=a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w.$$

állandó együtthatóju orthogonális transzformáció.

VII. Determináns differenciálása. 44. A $D=|a_{ik}|$ n-edrendű determináns elemei legyenek egymástól független; tudjuk, hogy

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

ahol A_{ik} az a_{ik}-hoz tartozó aldetermináns. Számítsuk ki: $\frac{\partial D}{\partial a_{ik}}$ parciális differenciálhányadost.

45. Legyenek az a_{ik} elemek egy t változó differenciálható függvényei. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{dD}{dt}=\sum_1^n D_i$$

ahol D_i a D determinánsból úgy keletkezik, hogy a D i-ik sorában

$$\frac{da_{i1}}{dt},\ \frac{da_{i2}}{dt},\dots\ \frac{da_{in}}{dt}$$

elemek állnak az eredeti a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in} helyett, a többi sora pedig megegyezik a D soraival (vagyis röviden kifejezve: a D sorait egyenkint differenciáljuk). A sorok helyett oszlopokat is mondhatunk.

46. Legyen D a következő (Wronski-féle) determináns:

$$D=\begin{vmatrix} y_1, & y_1', & y_1'', & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2, & y_2', & y_2'', & \dots & y_2^{(n-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ y_n, & y_n', & y_n'', & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ahol y_1, y_2, ... y_n az x független változónak legalább n-szer differenciálható függvényei és $y^{(i)}$-vel az i-ik differenciálhányadost jelöltük. Számítsuk ki $\frac{dD}{dx}$-et!

VIII. A görbületi sugár. 47. Legyen a görbe egyenlete $y=f(x)$ és $x=a$, $y=b$ e görbe pontja, azaz $b=f(a)$. Határozzuk meg azt a kört, mely e görbét az (a, b) pontban legalább másodrendűen érinti.

Ha a keresett kör középpontjának koordinátái: (α, β) és rádiusa: r, akkor egyenlete:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0. \qquad A)$$

Kell, hogy 1. az (a, b) pont e körön legyen, 2., hogy e pontban a kör egyenletéből meghatározott $\frac{dy}{dx}$ megyezzék az $f'(x)$-el és 3., hogy e pontban a kör egyenletéből meghatározott $\frac{d^2y}{dx^2}$ megegyezzék $f''(x)$-szel. (L. I. kötet 165. lap)

Az 1. követelés:

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2-r^2=0. \qquad 1)$$

Az $A)$ alatti egyenletből, ha x-szerint differenciálunk, ez lesz:

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0 \qquad B)$$

tehát a 2. követelés:

$$a-\alpha+(b-\beta)f'(a)=0. \qquad 2)$$

A $B)$ alatti egyenletből, ha még egyszer differenciálunk x-szerint:

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

lesz, tehát a 3. követelés:

$$1+[f'(a)]^2+(b-\beta)f''(a)=0.$$

Innen (ha $f''(a)\neq 0$)

$$b-\beta=-\frac{1+[f'(a)]^2}{f''(a)}$$

és a 2. alatti egyenletből:

$$a-\alpha=f'(a)\frac{1+[f'(a)]^2}{f''(a)}$$

és végül az 1.-ből:

$$r^2=\frac{[1+[f'(a)]^2]^3}{[f''(a)]^2}$$

miből, a jelre tekintet nélkül, a görbületi sugár, amely az $y=f(x)$ görbének a, $f(a)$ pontjához tartozik

$$r = \left| \frac{\{1+[f'(a)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(a)} \right| \tag{3}$$

vagy az x abscisszájú pontban: a görbületi sugár (L. I. kötet 166. lap).

$$r = \left| \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right|.$$

48. Ha a görbe az $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ parameteres alakban van megadva, akkor az előbbi formulába $\frac{dy}{dx}$ és $\frac{d^2y}{dx^2}$ helyett a t-szerinti differenciálhányadosokat vezetjük be:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

és így:

$$r = \left| \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} \right|.$$

49. Határozzuk meg az $y=ax^2$ görbületi sugarát, *α)* az x abscisszájú pontban, *β)* a kezdőpontban!

50. Határozzuk meg az $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ láncgörbe (I. kötet 483. lap) x abscisszájú pontjában a görbületi sugarat.

51. Határozzuk meg az

$$x = \frac{t+t^3}{1+t^4}, \qquad y = \frac{t-t^3}{1+t^4}$$

lemniscata (l. I. kötet 470. lap) t parameterértékhez tartozó pontjában a görbületi sugarat!

52. Határozzuk meg az $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (l. I. kötet 485. lap) ellipszis görbületi sugarát, *α)* a nagy tengely, *β)* a kis tengely végpontjaiban!

53. Határozzuk meg az $x=\varrho(t-\sin t)$, $y=\varrho(1-\cos t)$ egyenletek által adott cyclois (I. kötet 472. lap) görbületi sugarát a t parameterhez tartozó pontban!

$$\frac{dx}{dt} = \varrho(1-\cos t), \quad \frac{dy}{dt} = \varrho\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \varrho\sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varrho\cos t$$

$$r = \frac{8\sin^3\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\varrho = 4\varrho\sin\frac{t}{2}.$$

Ha az I. kötet 472. lapján levő ábrában A pontot B-vel összekötjük, az összekötő húr hossza $2\varrho\sin\frac{t}{2}$ lesz; tehát a görbületi sugár AB kétszerese, vagyis a cyclois valamely pontjában a görbületi sugár kétszer akkora, mint az illető pontot a rajta átmenő gördülő kör legalsó pontjával összekötő húr.

54. A tractrix egyenlete derékszögű koordinátarendszerben:

$$y = a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2};$$

a pozitiv szám; a $\sqrt{a^2-x^2}$ kétértékű, úgy, hogy adott x-hez két y érték tartozik. Mutassuk meg, hogy e két y érték csak előjelben különbözik (az x tengelyre nézve szimmetrikus a tractrix). Határozzuk meg az x abscisszájú pontban vont érintő egyenletét! Mutassuk meg, hogy az érintési ponttól az ordináta tengelyig terjedő része ennek az érintőnek állandó! Határozzuk meg a normális egyenletét és számítsuk ki a normálisnak az érintési ponttól az ordináta tengelyig terjedő részét; legyen ez n. Számítsuk ki a görbületi sugarát. (r). Mekkora az $n \,.\, r$?

55. Ha a görbe egyenlete $F(x, y) = 0$ alakban van adva, mutassuk meg, hogy a görbületi sugár:

$$r = \left| \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2} \right|$$

és vezessük le ebből a 47. példában levő alakot!

IX. Evoluta. 56. Az $y = f(x)$ görbe pontjaihoz tartozó görbületi körök középpontjainak geometriai helye általánosságban szintén görbe vonal. Ez a görbe az $y = f(x)$ görbéhez tartozó *evoluta*. A 47.-ik feladat 1. és 2. alatti egyenleteiből, ha még a helyett x-et, b helyett megfelelően $f(x)$-et írunk, a görbületi kör középpontjának koordinátái:

$$\alpha = x - f'(x) \cdot \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)},$$

$$\beta = f(x) + \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)},$$

tehát α és β az x parameter által vannak előállítva; megkaptuk az evoluta egyenletét parameteres alakjában.

X. *A kúpszelet görbületi körei.* 57. A kúpszelet egyenlete mindig erre az alakra hozható:

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Innen:

$$yy' = p + qx; \qquad yy'' + (y')^2 = q;$$

miből egyszerű számítással:

$$y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

és így, a görbületi sugár:

$$r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{[y^2+(yy')^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

A számlálóban szereplő kifejezésnek egyszerű geometriai értelme van. Ugyanis az (x, y) ponton átmenő normális egyenlete:

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x),$$

ahol ξ és η e normális pontjainak koordinátái. E normális az x tengelyt metszi a

$$\xi = x + yy'$$

abscisszájú pontban. Az (x, y) pontnak e $(\xi, 0)$ ponttól való távolsága, vagyis a normálisnak a görbe és az x tengely közé eső darabja legyen N; akkor:

$$N^2=(\xi-x)^2+y^2=y^2+(yy')^2,$$

tehát épen a szóban forgó kifejezés. Így tehát a görbületi sugár abszolut értéke:

$$r=\frac{N^3}{p^2}.$$

A kúpszelet valamely pontjához tartozó görbületi sugár arányos a normális köbével (normális alatt értve az illető ponthoz tartozó normálisnak e ponttól az x tengelyig érő darabját).

58. Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellipszis valamely (x, y) pontjához tartozó görbületi kör középpontjának koordinátáit (α, β)-t és mutassuk meg, hogy ezek között fennáll az

$$\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\beta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}}=1 \qquad m)$$

egyenlet, ahol [ha $a>b$], $a_1=\frac{a^2-b^2}{a}$, $b_1=\frac{a^2-b^2}{b}$. Az $m)$ alatti egyenlet az ellipszis evolutája. Készítsük el milliméter papiroson az evoluta képét.

59. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis görbületi sugarait a tengelyek végpontjaiban. (V. ö. 52. feladatot!)

60. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hyperbola evolutáját!

61. Határozzuk meg az $y^2=2px$ parabola evolutáját!

XI. Poláris koordináták. 62. Ha a görbe egyenlete poláris koordinátákban van megadva oly módon, hogy r és φ [r a P pontnak a fix O ponttól való távolsága és φ az OP-nek az O–n átmenő x tengellyel alkotott szöge] meg vannak adva egy t parameter függvényei gyanánt: $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, határozzuk meg a görbületi sugarat! A 48. feladatban kifejeztük a görbületi sugarat, ha a görbe egyenlete parameteres alakban van megadva. Tegyük most: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ és számítsuk ki $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ differenciálhányadosokat és ebből a 48. feladatban közölt képlet szerint a ϱ görbületi sugarat ebben az alakban kapjuk meg:

$$\varrho=\frac{\left\{r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3+2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{d\varphi}{dt}-r\frac{d^2r}{dt^2}\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{dr}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}}.$$

Határozzuk meg ebből a görbületi sugarat, ha t parameter megegyezik a φ szöggel!

$$\varrho=\frac{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

63. Számítsuk ki az $r=a\varphi$ egyenlet által adott archimedesi spirális görbületi sugarát valamely pontjában!

$$\varrho=\left[a\,\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\varphi^2}\right].$$

64. Számítsuk ki az $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ egyenlet által adott lemniskáta görbületi sugarát!

$$\left[\frac{a^2}{3r}\right].$$

65. Határozzuk meg az $r = e^{a\varphi}$ egyenlet által adott logarithmikus spirális görbületi sugarát!

$$[r\sqrt{1+a^2}].$$

XII. Érintő egyenlete. 66. Legyen adva az $f(x, y) = 0$ sík görbe. (x, y) pontján átmenő egyenes pontjainak koordinátái ilyen alakban írhatók:

$$\xi = x + t\cos\alpha, \qquad \eta = y + t\sin\alpha$$

ha t jelenti a (ξ, η) pontnak az (x, y)-tól való távolságát és α az illető egyenesnek az abscissza-tengellyel alkotott szöge. Határozzuk meg ezen egyenesnek az adott síkgörbével való metszéspontját. Evégből az $f(x + t\cos\alpha,\ y + t\sin\alpha) = 0$ egyenletet kell t-re megoldanunk. Az egyik metszéspont nyilván: (x, y) vagyis $t=0$-nak megfelelő pontja az egyenesnek. Kérdezzük: $t = 0$ mikor lesz az $f(x + t\cos\alpha,\ y + t\sin\alpha) = 0$ egyenletnek kétszeres gyöke? Ehhez szükséges, hogy $\frac{df}{dt} = 0$ legyen.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha = 0.$$

Ha $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ közül legalább egyik 0-tól különböző, akkor ez az egyenlet az α meghatározására szolgál, vagyis meghatározható az (x, y) ponton átmenő egyenes, melynek a görbével való metszéspontjai közül az (x, y) pontba legalább kettő esik [az (x, y) pontban és a hozzá végtelen közel levő pontban metszi a görbét]. Ez az egyenes a görbének (x, y) pontban *érintője*. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ arányosak $\xi - x$, illetőleg $\eta - y$-nal, akkor tehát az érintő egyenlete ilyen alakban írható:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0. \qquad 1)$$

Mi lesz az érintő egyenlete, ha a görbe $y = \varphi(x)$ alakban van megadva. Hogyan lehetne a már ismeretes $\eta - y = \varphi'(x)(\xi - x)$ alakból az általánosabb 1. alattit előállítani.

67. *Algebrai görbe érintője.* Legyen $f(x, y)$ az (x, y) n-edfokú racionális egész függvénye, akkor $f(x, y)=0$ n-edrendű algebrai görbe egyenlete. Ha összefoglaljuk azokat a tagokat, melyekben (x, y) exponenseinek összege k, ahol $0 \leq k \leq n$, akkor $f(x, y)$ ilyen alakban írható:

$$f(x, y) = U_n + U_{n-1} + \cdots + U_1 + U_0,$$

ahol U_k jelenti a k-adfokú tagok összegét. Az (x, y) pontban vonható érintő egyenlete az előbbiek szerint:

$$(\xi - x)\sum_1^n \frac{\partial U_k}{\partial x} + (\eta - y)\sum_1^n \frac{\partial U_k}{\partial y} = 0,$$

de az EULER-tétel szerint (54. lap):

$$x\frac{\partial U_k}{\partial x} + y\frac{\partial U_k}{\partial y} = kU_k$$

tehát az érintő egyenlete:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} - [nU_n + (n-1)U_{n-1} + \cdots + U_1] = 0.$$

Ha $nf = nU_n + nU_{n-1} + nU_{n-2} + \cdots + nU_0$-t, mely a görbén levő (x, y) pontokban 0-sal egyenlő, hozzáadjuk ezen egyenlet baloldalához, arra jutunk, hogy az érintő egyenlete:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + U_{n-1} + 2U_{n-2} + 3U_{n-3} + \cdots + nU_0 = 0.$$

Alkalmazzuk ezt a formulát a másodrendű görbe érintőjének meghatározására.

XIII. Érintő sík. 68. Legyen $f(x, y, z) = 0$ egy felület egyenlete. Szemeljük ki (x, y, z) pontját. Ezen átvonjuk azt az egyenest, mely az X, Y, Z tengelyekkel rendre α, β, γ szögeket alkot. Ha (ξ, η, ζ) ezen egyenes valamelyik pontja, amely az (x, y, z)-től t távolságra van, akkor:

$$\xi = x + t\cos\alpha, \qquad \eta = y + t\cos\beta, \qquad \zeta = z + t\cos\gamma.$$

Ezen egyenesnek az $F(x, y, z) = 0$ felülettel való metszéspontját megkapjuk, ha a t értékét az

$$F[x + t\cos\alpha, \quad y + t\cos\beta, \quad z + t\cos\gamma] = 0$$

egyenletből meghatározzuk. Egyik metszéspont (x, y, z), vagyis $t = 0$-nak megfelelő pont. Kérdés, az iránycosinusok között minő összefüggésnek kell fennállania, hogy $t = 0$ legalább kétszeres gyöke legyen ezen egyenletnek? Ehhez szükséges, hogy

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

legyen, vagyis:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = 0.$$

és minthogy $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ arányosak $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$-vel, tehát:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0$$

vagyis (ξ, η, ζ) pontok egy *síkon* vannak. E sík az (x, y, z) pontban az $F(x, y, z) = 0$ felülethez vont érintő sík. Ennek tehát az a tulajdonsága, hogy bármely (ξ, η, ζ) pontját az (x, y, z) ponttal összekötő egyenese a felületet az (x, y, z)-ben duplán metszi (két, egymáshoz végtelen közel fekvő pontban metszi).

69. Irjuk fel az (x, y, z) pontban az $F(x, y, z) = 0$ felület normálisának [az érintő-síkra merőleges egyenesnek] egyenleteit.

70. Fejezzük ki az érintő sík egyenletét, ha a felület $z = \varphi(x, y)$ alakban van megadva.

71. Mekkorák a normális iránycosinusai, ha a felület $F(x, y, z) = 0$ és ha $z = \varphi(x, y)$ alakban van megadva. [Jelöljük $\frac{\partial z}{\partial x}$-et p-vel, $\frac{\partial z}{\partial y}$-t q-val].

72. Ha a felület úgy adatik, hogy pontjainak (x, y, z) koordinátái mint az (u, v) parameterek függvényei vannak előállítva:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

akkor e három egyenletből (u, v) kiküszöbölésével keletkezik

$$F(x, y, z) = 0$$

egyenlet: a felület egyenlete az előbbi alakban. Nyilván az

$$F[f(u, v), \quad \varphi(u, v), \quad \psi(u, v)]$$

az (u, v)-ben identikusan: 0; tehát úgy az u, mint v-szerinti differenciálhányadosa is 0.

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

és innen:

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

vagy a függvénydetermináns jelét használva, a jobboldali kifejezések rendre:

$$D\left(\frac{y,z}{u,v}\right),\quad D\left(\frac{z,x}{u,v}\right),\quad D\left(\frac{x,y}{u,v}\right).$$

Irjuk fel ezen jelöléssel az érintő-sík egyenletét, a normális egyenleteit és mutassuk meg, hogy a normális iránycosinusai:

$$\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}D\left(\frac{y,z}{u,v}\right),\quad \frac{1}{\sqrt{\varDelta}}D\left(\frac{z,x}{u,v}\right),\quad \frac{1}{\sqrt{\varDelta}}D\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$$

ahol

$$\varDelta=EG-F^2,$$

ha

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\qquad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

73 Határozzuk meg az $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ gömb (x, y, z) pontjában vont érintő-síkjának egyenletét!

74. Határozzuk meg az

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=f(u)$$

forgási felület valamely (u, v) pontjában az érintő-sík egyenletét! Határozzuk meg a normálist, mutassuk meg, hogy ez a forgási tengelyt (z tengelyt) metszi és határozzuk meg e normálisnak a felülettől a forgási tengelyig eső darabját.

75. Határozzuk meg az

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=av+b$$

csavarfelület valamely pontjához tartozó érintő-síkot és a normálist.

76. *Algebrai felület érintősíkja.* Legyen $f(x, y, z)$ az x, y, z n-edfokú racionális egész függvénye; ekkor $f(x, y, z)=0$ n-edrendű *algebrai felület* egyenlete. Jelöljük az i-edrendű tagok összegét U_i-vel, vagyis $f(x, y, z)=U_n+$ $+U_{n-1}+\cdots+U_1+U_0$. Határozzuk meg az (x, y, z) pontban vont érintősík egyenletét olyan alakban, mint a 67. feladatban láttuk (124. lapon). Alkalmazzuk a képletet a másodrendű felület érintősíkja egyenletének megállapítására.

XIV. A burkoló görbe és a burkoló felület. 77. Az $f(x, y, \alpha)=0$ egyenlet, ha α-nak meghatározott számértékét tulajdonítunk: görbe egyenlete. Ha α értékét változtatjuk és pl. az $a\ldots b$ köz az értéktartománya, akkor az $a\ldots b$ köz minden α helyéhez egy görbe tartozik; az, melynek egyenlete: $f(x, y, \alpha)=0$. E görbék egy *görbesereget* alkotnak. Az α parameterértékhez tartozó görbét jelöljük C_α-val. Szemeljük ki e sereg valamelyik egyénét; azt, amely az α parameterértékhez tartozik. Az $f(x, y, \alpha)=0$ görbének az $f(x, y, \alpha+h)=0$ görbével való egyik metszéspontja legyen P_h. E metszéspont (x, y) koordinátái kielégítik az

$$f(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{és} \quad f(x, y, \alpha + h) = 0$$

egyenleteket. Az utóbbit így írhatjuk:

$$f(x, y, \alpha) + h\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) = 0$$

ahol $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)$ a $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ értéke egy, az α és $\alpha + h$ közötti helyen. tehát mondhatjuk, hogy P_h pont koordinátái kielégítik ezt a két egyenletet:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) = 0.$$

Ha már most h 0-hoz konvergál, akkor rendszerint lesz a P_h-nak az $f(x, y, \alpha) = 0$ görbén határhelyzete. Ezt jelöljük P_α-val. Ennek koordinátái kielégítik e két egyenletet:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \qquad 1)$$

Ha már most α-t változtatjuk (pl. az $a \ldots b$ közön végig), akkor rendszerint α folytonos változásának a P_α pontok folytonos változása felel meg. Mindenik $f(x, y, \alpha) = 0$ görbén lesz egy P_α pont. Ezek általánosságban egy görbét alkotnak, melyet C-vel jelöljünk. C a C_α görbék *burkolója* (enveloppe); a C_α görbék a C burkoltjai (enveloppée). A C görbe pontjai az 1) alatti egyenleteket elégítik ki, tehát a burkoló görbe egyenlete előállítható akár úgy, hogy ezen egyenletekből (x, y)-t mint α parameter függvényeit állítjuk elő, akár úgy, hogy az 1) alatti egyenletekből α-t elimináljuk és ezzel a C görbe egyenletét

$$F(x, y) = 0$$

alakban állítjuk elő. Ehhez pl. úgy juthatunk, ha a $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$-ból α-t kiszámítjuk mint x, y függvényét és az $f(x, y, \alpha)$-ba helyettesítjük; úgy, hogy tehát $F(x, y)$ így is írható:

$$f[x, y, \alpha(x, y)] = 0$$

ahol $\alpha(x, y)$ jelenti az α-nak a $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ egyenletből kifejezett alakját.

Határozzuk meg a C burkoló valamely (x, y) pontjában vont érintőjét. Az érintő egyenlete:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

De

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

és minthogy $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ [1) egyenlet], tehát: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, vagyis a burkoló görbe (x, y) pontjában vont érintő megegyezik az (x, y) ponton átmenő burkolt görbe érintőjével. A burkoló tehát érinti a burkolt görbéket.

78. Határozzuk meg — az előbbi gondolatmenetet követve — az $F(x, y, z, \alpha) = 0$ felületsereg burkoló felületét és mutassuk meg, hogy a burkoló felület minden pontjában érinti az illető ponton átmenő burkolt felületet!

XV. Függvénydeterminánс. 79. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2$, $x + y + z$, $xy + yz + zx$ függvények x, y, z szerint vett függvénydeterminánsát!

80. Számítsuk ki az

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

függvények x, y, z szerint vett függvénydeterminánsát!

81. Legyen: $x=f(u, v, w)$, $y=\varphi(u, v, w)$ $z=\psi(u, v, w)$ és P, Q, R az (x, y, z) megadott függvényei. Legyen továbbá:

$$P_1=P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}+R\frac{\partial z}{\partial u}, \quad Q_1=P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}+R\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$R_1=P\frac{\partial x}{\partial w}+Q\frac{\partial y}{\partial w}+R\frac{\partial z}{\partial w}$$

továbbá:

$$H=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

és

$$H_1=P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w}-\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u}-\frac{\partial P_1}{\partial w}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}-\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right).$$

Mutassuk meg, hogy:

$$H_1=D\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)H.$$

82. Határozzuk meg e függvényeknek

$$u=xy, \qquad v=\log x+\log y$$

függvénydeterminánsát. Minthogy ez identikusan 0, tehát v és u között fennáll ilyen reláció:

$$v=\varphi(u)$$

vagyis:

$$\log x+\log y=\varphi[xy].$$

A φ függvény meghatározása céljából tegyük a formulában: $y=1$, ekkor:

$$\log x=\varphi(x).$$

A $\varphi(x)$ az x minden értékénél megegyezik $\log x$-szel, tehát $\varphi(xy)$ is $\log(xy)$ és így az előbbi függvényrelácio:

$$\log x+\log y=\log(xy)$$

a logarithmus additio-tétele.

83. Mutassuk meg, hogy $x+y$ és $\sin x\cos y+\cos x\sin y$ függvények Jacobi-féle determinánsa (azaz függvénydeterminánsa) identikusan 0 és állapítsuk meg ebből az előbbi feladatban tárgyalt módon a $\sin(x+y)$ additio-tételét.

84. Mutassuk meg, hogy $x+y$ és $\cos x\cos y-\sin x\sin y$ Jacobi-féle determinánsa, valamint $x+y$ és $\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$ Jacobi-féle determinánsa identikusan 0 és állapítsuk meg a $\cos(x+y)$ és $\operatorname{tg}(x+y)$-ra vonatkozó additio-tételeket.

XVI. Szélső érték. 85. A tetraedernek egy csúcsból kiinduló három éle adva van. Mekkora szögeket kell egymással alkotniok, hogy a köbtartalomnak szélső értéke legyen?

Legyen a tetraeder szóban forgó csúcsa a kezdőpont, az élek hossza: l_1, l_2, l_3. Ezen élek végpontjainak koordinatái: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Akkor tehát fennállanak ezek az egyenletek:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=l_1^2, \qquad x_2^2+y_2^2+z_2^2=l_2^2, \qquad x_3^2+y_3^2+z_3^2=l_3^2. \tag{1}$$

A tetraeder köbtartalmának 6-szorosa:

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

A kérdés tehát az, hogy mikor lesz az $x_1, y_1, \dots y_3, z_3$ kilenc változó ezen függvényének szélső értéke, ha a változók között az 1. alatti relációk állnak fenn. Ehhez szükséges, hogy fennálljanak ezek az egyenletek:

$$\frac{\partial D}{\partial x_1} - \lambda x_1 = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial x_2} - \mu x_2 = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial x_3} - \nu x_3 = 0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial y_1} - \lambda y_1 = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial y_2} - \mu y_2 = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial y_3} - \nu y_3 = 0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial z_1} - \lambda z_1 = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial z_2} - \mu z_2 = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial z_3} - \nu z_3 = 0,$$

ahol λ, μ, ν konstáns faktorok. $\frac{\partial D}{\partial x_1}$ a determinánsnak az x_1 elemhez tartozó aldeterminánsa s. i. t. Ha az $x_1, y_1 \dots$-hez tartozó aldeterminánsokat rendre $X_1, Y_1 \dots$-el jelöljük, akkor tehát a

$$0=x_1X_2+y_1Y_2+z_1Z_2, \quad 0=x_1X_3+y_1Y_3+z_1Z_3, \quad 0=x_2X_3+y_2Y_3+z_2Z_3,$$

stb. relaciókból:

$$0=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \quad 0=x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, \quad 0=x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3.$$

De ha l_1-nek a tengelyekkel alkotott szögei $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, akkor $x_1=l_1 \cos\alpha_1$, $y_1=l_1\cos\beta_1$, $z_1=l_1\cos\gamma_1$ s. i. t., tehát a fenti egyenletekből:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0 \quad \text{s. i. t.},$$

vagyis a szélső érték feltétele, hogy az élek egymásra merőlegesek legyenek. Hogy e szélső érték maximum, az geometriai megfontolásból közvetlenül világos.

86. Mutassuk meg általában, hogy ha egy n-edrendű determináns egyes soraiban levő elemek négyzeteinek összegei adottak, (és rendre egyenlők $l_1^2, l_2^2, \dots l_n^2$-tel) a determinánsnak maximuma csak akkor lehet, ha két különböző sorában levő megfelelő elemek szorzatainak összege: 0 [orthogonalitás feltételei].

87. Mutassuk meg, hogy e determináns absz. értékének maximuma: $l_1l_2\dots l_n$. —

88. Ha a determináns elemeinek abszolut értékei közül a legnagyobb M, akkor (az előbbi jelölést használva)

$$l_1 < M\sqrt{n}, \quad l_2 < M\sqrt{n}, \quad \dots \quad l_n < M\sqrt{n},$$

tehát:

$$|D| < M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

89. Határozzuk meg $z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ szélső értékeit, ha $x^2+y^2=1$ feltétel is érvényes.

Legyen $F(x, y) = a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$. A $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ feltételekből következik, hogy λ ezen egyenlet gyöke:

$$\lambda^2 - \lambda[a_{11}+a_{22}] + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \qquad \alpha)$$

90. Ha az előbbi $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ alak definit pozitiv, akkor az α) alatti egyenlet gyökei pozitivok és különbözők. Legyen a nagyobbik λ_1, a kisebbik: λ_2. Számítsuk ki a 98. lapon tárgyalt eljárás szerint a $\frac{d^2z}{dx^2}$-et és mutassuk meg, hogy az adott feltétel mellett $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ maximuma

λ_1, minimuma λ_2. [Ugyanis a jelen esetben $\frac{d^2z}{dx^2} = a_{11}y^2 - 2a_{12}xy + a_{22}x^2 - \lambda$, melyet a $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ és $x^2 + y^2 = 1$ figyelembevételével átalakíthatunk ebbe az egyszerű kifejezésbe: $a_{11}+a_{22}-2\lambda$. Erről pedig az α) egyenlet segítségével azonnal megmutatjuk, hogy negativ, ha λ helyett λ_1-et teszünk és pozitiv, ha λ helyett λ_2-t teszünk.]

Ha a_{11}, a_{12}, a_{22} nem állandók, de a változás egész tartományában $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ minimuma a pozitiv H és maximuma H' és $a_{11}+a_{22}$ minimuma a pozitiv K, maximuma K', akkor $\lambda_1\lambda_2 > H$, $\lambda_1+\lambda_2 < K'$-ból ered, hogy a $\lambda_2 > \frac{H}{K'}$ és épen így: $\lambda_1 < \frac{H'}{K}$.

91. Határozzuk meg az

$$f(x, y) = x^3y^2(1-x-y)$$

szélső értékeit! [$f_x = x^2y^2(3-4x-3y)$, $f_y = x^3y(2-2x-3y)$; tehát szélső érték lehet *a*) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ helyen, továbbá *b*) $x=0$ sik és *c*) $y=0$ sik bármely pontjában. Vizsgáljuk meg egyenkint az eseteket!

92. Adott számot olyan három részre bontsunk, melyek köbeinek összege minimális legyen.

93. Adott számot olyan három összeadandóra, (x, y, z) kell bontani, hogy $x^my^nz^p$ maximum legyen [m, n, p pozitiv számok].

94. Határozzuk meg az adott felülettel bir egyenes körhengerek közt azt, melynek minimális köbtartalma van.

95. Adott köbtartalommal biró parallelepipedonok közül határozzuk meg azt, melynek minimális felülete van.

96. Adott ellipszoidba írható parallelepipedonok közül határozzuk meg azt, melynek maximális köbtartalma van!

97. Határozzuk meg x-et úgy, hogy az $y^2+2yx^2+4x-3=0$ egyenlettel hozzá rendelt y maximum (minimum) legyen.

98. Határozzuk meg x-et úgy, hogy az $y^3+x^3-3axy=0$ egyenlettel hozzá rendelt y maximum (minimum) legyen.

99. Ugyanezek a feladatok az *a*) $y^4+x^4-4xy+2=0$, *b*) $y^2-2mxy+x^2-a^2=0$ egyenlettel adott y-ra nézve.

100. x és y minő értékei teszik maximummá (minimummá) az $u=x^4+$ $+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ függvényt!

101. Határozzuk meg e függvények szélső értékeit: *a*) $x^3y^2(a-x-y)$, *b*) $\frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$.

102. Határozzuk meg $a\cos^2 x + b\cos^2 y$ szélső értékeit, ha $y = x + \frac{\pi}{4}$.

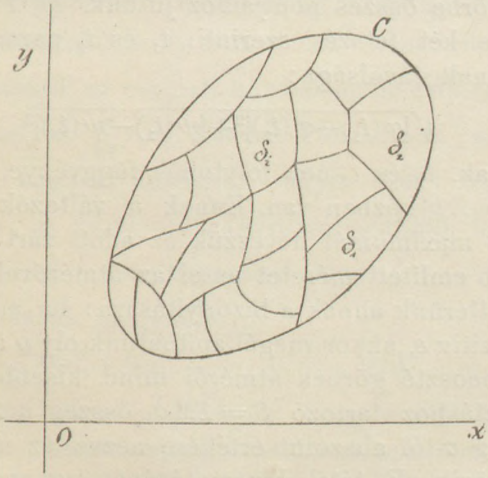
103. Határozzuk meg $(x+1)(y+1)(z+1)$ szélső értékeit, ha $a^xb^yc^z=A$.

104. Határozzuk meg egy adott egyenes azon pontját, melynek két adott ponttól való távolságainak összege minimum (L. I. kötet 39., 40. feladatokat a 200. lapon).

VI. FEJEZET.

A KETTŐS INTEGRÁL.

1. A kettős integrál értelmezése. Legyen adva egy egyszerűen zárt, folytonos, rektifikálható C görbével határolt összefüggő terület. Derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott pontjainak koordinátáit szokás szerint (x, y)-nal jelöljük. Jelöljük e területet T-vel. A T minden belső és határpontján legyen értelmezve az $f(x, y)$ függvény és legyen egyértékű s az egész T zárt területben korlátos; M számnál kisebb és m-nél nagyobb. Húzzunk tetszés szerinti módon folytonos, rektifikálható vonalakat a C-ben, melyek a T területet $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ területrészekre bontják, úgy, hogy e részek a T területet hézag nélkül egyszerűen (egymást el nem fedve) kitöltsék.



3. ábra.

Jelöljük a δ_i részben az $f(x, y)$ felső határát M_i-vel, alsó határát m_i-vel és képezzük ezeket az összegeket:

$$S = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + M_3\delta_3 + \cdots, \quad s = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3 + \cdots$$

Az S-ről azonnal látjuk, hogy MT-nél nem nagyobb, viszont s mT-nél nem kisebb. Ha a T területet minden képzelhető módon beosztva képzeljük és mindenik beosztáshoz hozzárendelve gondoljuk az S és s összegeket, akkor úgy az S, mint az s számoknak végtelen halmazait kapjuk. Mindkét halmaz korlátos. Az S számok halmazának alsó határát jelöljük Σ-val, az s számok halmazának felső határát pedig σ-val.

A Σ számot az $f(x, y)$ függvény T tartományra vonatkozó *felső integráljának*, a σ számot pedig *alsó integráljának* nevezzük. Az elsőt így jelöljük: $\iint\limits_{(s)T} f(x,y)\,dT$, a másodikat pedig így: $\iint\limits_{(i)T} f(x,y)\,dT$. (Az elsőnél levő s betű a superior, a másodiknál az i betű inferior szó kezdő betűje.)

Éppen úgy, mint az egyszerű integrálnál tettük, most is meg akarjuk mutatni, hogy a Σ és σ bizonyos tekintetben a S, illetőleg s összegek határértékei: a részeket oly kis méretűeknek választhatjuk, hogy — akárminő alakúak legyenek is e részek — a Σ-tól, illetőleg a σ-tól tetszés szerinti kevéssel különböző S, illetőleg s számokhoz jussunk. Ezen állítás pontosabb fogalmazása végett megállapítjuk, hogy mit értsünk a beosztás méretén. Ha adva van egy folytonos zárt görbe, vagyis olyan görbe, mely a következő egyenletekkel jellemezhető:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

ahol $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ a t parameter folytonos függvényei az $a \ldots b$ közben és a görbe összes pontjaihoz jutunk, ha t a-tól b-ig halad, akkor a görbe két tetszés szerinti, t_1 és t_2 parameter-értékekhez tartozó pontjának távolsága:

$$\sqrt{[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)]^2+[\psi(t_1)-\psi(t_2)]^2}$$

a két változónak, t_1 és t_2-nek folytonos függvénye, midőn úgy a t_1, mint a t_2 az $a \ldots b$ közben van. Ennek a változók jelzett tartományában fellépő maximumát nevezzük az adott zárt görbe átmérőjének és az előbb említett méretet ezzel az átmérővel jellemezzük.

És most áttérünk annak a bizonyítására: ha adatik egy tetszés szerinti kis pozitiv ε, akkor megállapíthatunk oly ϱ átmérőt, hogy ha a T területet beosztó görbék átmérői mind kisebbek ϱ-nál, akkor az illető beosztáshoz tartozó $S = \Sigma M_i \delta_i$ összeg a Σ-tól, valamint a $s = \Sigma m_i \delta_i$ összeg σ-tól abszolut értékére nézve az adott ε-nál kevesebbel különbözik. E tétel bizonyításánál ugyanazt a gondolatmenetet követjük, mint az egyszerű integrál tárgyalásánál (I. kötet 263. lap).

Minthogy Σ az S összegek alsó határa, tehát van olyan beosztás, melyhez tartozó S_1 összeg Σ és $\Sigma + \frac{\varepsilon}{2}$ közé esik. Legyenek ezen beosztásnál T részei: $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, tehát

$$\Sigma + \frac{\varepsilon}{2} > S_1 = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots + M_n\delta_n > \Sigma.$$

És most osszuk be a T-t újból úgy, hogy a részek maximális átmérője kisebb legyen, mint a $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ átmérői közül a legkisebb, melyet r-rel jelölünk.

Az új részek kétfélék lesznek: olyanok, melyek egészen benne vannak valamelyik $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ részben és olyanok, melyek legalább két részben terülnek el; ez utóbbiakat átugró részeknek nevezzük.

Jelöljük a belső részeket $\delta_1', \delta_2', \ldots$-al és az átugrókat $\delta_1'', \delta_2'', \ldots$-al és megfelelően az $f(x, y)$-nak az egyes részekhez tartozó felső határait: $M_1', M_2', \ldots$ és $M_1'', M_2'', \ldots$-vel.

Minthogy minden $M_i'' \leq M$, ahol M az $f(x, y)$ felső határa az egész T tartományban, tehát az átugró részekhez tartozó $M_1''\delta_1'' + M_2''\delta_2'' + \cdots$ összeg kisebb $M\triangle$-nél, ha $\triangle$ az átugró részek összes területe.

Geometriai szemlélettel belátható, hogy a méret elég kis választásával $\triangle$ tetszés szerinti kicsinnyé tehető, mert hiszen e részek a $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ részek határvonalait, vagy azok egy részét, tehát egy véges, mondjuk L hosszúságú vonalat vesznek körül és tetszés szerinti keskenyekké tehetők. [Ezt a geometriai szemlélettel közvetlenül világos tényt még pontosabban így is beláthatóvá tesszük: a $\delta_1, \delta_2, \ldots$ határvonalai egy L hosszúságú vonalat alkotnak. Osszuk fel ezt m egyenlő részre és ha egy ilyen ívrész kezdőpontjában $2\frac{L}{m}$ sugarú kört rajzolunk, akkor világos, hogy olyan $\frac{L}{m}$-nél nem nagyobb átmérőjű területrészecske, mely ezen ívrész valamelyik pontját magában foglalja, okvetlenül az említett kör belsejébe esik és így az összes átugró részek, melyek $\frac{L}{m}$-nél kisebb átmérőjűek, mind beleesnek az m számú $\frac{2L}{m}$ sugarú körökbe, vagyis ezek összes területe $\frac{4L^2}{m}\pi$-nél kisebb; m tehát oly nagyra választható, hogy az átugró részek területe tetszés szerinti kicsiny legyen.]

Az új beosztásnak megfelelő

$$S = M_1'\delta_1' + M_2'\delta_2' + \cdots + M_1''\delta_1'' + M_2''\delta_2'' + \cdots$$

összeget most még kissé preparáljuk, hogy a régi $M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots$ összeggel könnyen összehasonlíthassuk. A második részben minden M_i'' helyett M-et tegyünk, miáltal az összeget nagyobbítjuk. Szemeljünk ki egy δ részt (az eredeti beosztásból), például δ_1-et és tegyük fel, hogy ebbe teljesen beleesik az új beosztásnak $\delta_1', \delta_2', \ldots \delta_k'$ része és az átugró részekből összesen u_1 nagyságu terület: akkor tehát:

$$\delta_1 = \delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_k' + u_1$$

és így, ha $M_1'\delta_1' + M_2'\delta_2' + \cdots + M_k'\delta_k'$ kifejezésben mindenik M' helyett M_1-et teszünk (mely az egész δ_1 részben a felső határ) és az így nyert összeghez még M_1u_1-t hozzáadunk és egyúttal M_1u_1-t levonunk és rendre a δ_2, $\delta_3,\ldots$-hoz tartozó részösszegekkel is ugyan így járunk el, akkor az új beosztásnak megfelelő összeget nagyobbítottuk és a következő lett belőle:

$$M_1\delta_1+M_2\delta_2+\cdots+M_n\delta_n+(M-M_1)u_1+(M-M_2)u_2+\cdots,$$

vagy ha $M-M_1$, $M-M_2,\ldots$ helyett $M-m$-et tesszük, akkor megint nagyobbítjuk e kifejezést és így az $u_1+u_2+\cdots$ helyett Δ-t írva:

$$S<S_1+(M-m)\Delta.$$

Már most a részeket olyan kicsinyekre választjuk, hogy $(M-m)\Delta<\frac{\varepsilon}{2}$ legyen. Az ehhez szükséges méret felső határa legyen ϱ, vagyis, ha ϱ-nál kisebb átmérőjűek a részek, akkor már $(M-m)\Delta<\frac{\varepsilon}{2}$. (Megjegyezzük, hogy ha ϱ nagyobb volna az előbb említett r-nél, akkor a részek méreteit r-nél kisebbre választjuk.) Minthogy pedig $S_1<\Sigma+\frac{\varepsilon}{2}$; tehát

$$S<\Sigma+\varepsilon$$

és ezzel bebizonyítottuk azt az állítást, *hogy ha a részek átmérői mindannyian ϱ-nál* (illetőleg r-nél) *kisebbek, akkor minden S összeg Σ és $\Sigma+\varepsilon$ közé esik.*

Éppen így mutathatjuk meg, hogy ha *a részek átmérői mind egy bizonyos ϱ'-nál kisebbek, akkor minden*

$$s=m_1\delta_1+m_2\delta_2+\cdots$$

összeg σ és $\sigma-\varepsilon$ közé esik; tehát ha ϱ és ϱ' közül a kisebbiket választjuk, akkor minden S a Σ és $\Sigma+\varepsilon$ és minden s a σ és $\sigma-\varepsilon$ közé esik.

Minthogy $M_i\geq m_i$, tehát $S\geq s$, vagyis:

$$S=\Sigma+\varepsilon'\geq\sigma-\varepsilon''=s,$$

ahol $\varepsilon'<\varepsilon$, $\varepsilon''<\varepsilon$; tehát:

$$\Sigma>\sigma-2\varepsilon$$

és minthogy ez tetszés szerinti pozitiv ε-ra érvényes, tehát $\Sigma\geq\sigma$.

Ha $\Sigma=\sigma$, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x, y)$ a T tartományban integrálható. A közös $\Sigma=\sigma$ számértéket így jelöljük:

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy.$$

(Az integrál jele alatt álló T betűt, — ha ebből félreértés nem támadhat — el is hagyjuk.)

Minthogy a Σ és σ a mondott értelemben a beosztástól függetlenek, sokszor a legcélszerűbb lesz, ha az X és Y tengelyekkel húzott párhuzamosakkal: egy derékszögű hálóval bontjuk fel részekre a T területet. Ekkor az egyes részek — a határon levőktől eltekintve — mindannyian derékszögű négyszögek lesznek.

Ha a $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ részekben tetszés szerinti $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots (\xi_n, \eta_n)$ helyeket jelölünk meg, akkor nyilván $f(\xi_i, \eta_i)$ az M_i és m_i közé esik, tehát:

$$M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots + M_n\delta_n \geq f(\xi_1, \eta_1)\delta_1 + f(\xi_2, \eta_2)\delta_2 + \cdots + \\ + f(\xi_n, \eta_n)\delta_n \geq m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \cdots + m_n\delta_n.$$

Ha az $f(x, y)$ integrálható, akkor a beosztások átmérőinek határtalan csökkentésével úgy a jobboldali, mint a baloldali kifejezés az

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrálhoz konvergál, tehát a középső kifejezés is oda konvergál. Vagyis az

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

számértéket még úgy is értelmezhetjük — ha t. i. tudjuk, hogy létezik — hogy az a

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\delta_i$$

összegnek a δ_i méreteinek határtalan csökkentésével létesülő határértéke, ha (ξ_i, η_i) a δ_i bármelyik belső, vagy a határán levő helye. Ezt az állítást rövid jelöléssel így írjuk:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \lim \Sigma f(\xi_i, \eta_i)\delta_i,$$

2. Az integrálhatóság feltételei. Láttuk, hogyha az $f(x, y)$ a T-ben korlátos, akkor e T-hez és $f(x, y)$-hoz mindig két szám a Σ és σ tartozik az imént megállapitott módon. A Σ a Darboux-féle felső integrál, σ pedig az alsó integrál. Kérdés, mi a feltétele annak, hogy az $f(x, y)$ integrálható legyen, vagyis hogy $\Sigma = \sigma$ legyen.

E feltételek megállapitása teljesen analog az egyváltozós függvényre vonatkozó tárgyalással (l. I. kötet 274. lap), miért is itt csak az eredményeket közöljük. Ha az $M_i - m_i$ különbséget, vagyis a δ_i síkrészben az $f(x, y)$ felső és alsó határai közötti különbséget, az ingadozást, ω_i-vel jelöljük, akkor az integrálhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy a tetszés szerinti pozitiv ε-hoz tartozzék olyan ϱ, hogy ha a beosztások átmérői mind kisebbek ϱ-nál, akkor

$$\Sigma\omega_i\delta_i < \varepsilon$$

legyen.

Ezt a kritériumot még kissé átalakítjuk. Ehelyett ugyanis azt is mondhatjuk, hogy az integrálhatóság szükséges és elégséges feltétele a következő: Ha adatik egy tetszés szerinti pozitiv ω és egy tetszés szerinti kis ε pozitiv szám, akkor azon részek összes terjedelme, amelyekben az ingadozás ω-nál nagyobb, az adott

ε-nál kisebbé legyen tehető. Ennek a bizonyítását is mellőzzük, mert teljesen azonos az I. kötet 275. lapján közölttel.

Ezekből a kritériumokból rögtön következik, hogy ha $f(x, y)$ a T tartományban integrálható, akkor a T egy részében is integrálható.

Következik továbbá, hogy, éppen úgy, mint az egyváltozós függvények esetében, ha *$f(x, y)$ a T tartományban folytonos, akkor integrálható.* De integrálható az $f(x, y)$ akkor is, ha a T-ben véges számú pontban van szakadása és még akkor is, *ha véges hosszúságú rektifikálható görbék mentén van véges szakadása, egyebütt pedig folytonos.* Ez esetben ugyanis azon részek terjedelme, melyekben az említett szakadó helyek foglaltatnak, tetszés szerinti kicsinyekké tehető; mert a véges hosszúságú rektifikálható görbeív bezárható olyan tartományba, amelynek területe tetszés szerint kicsiny.

Teljesség kedvéért még megemlítjük, hogy *véges számú integrálható függvény összege, különbsége, szorzata és két integrálható függvény hányadosa — ha a nevező a T-ben nem lesz zérussá — integrálható.* Mindezeket az állításokat az olvasó az egyváltozós függvényről tanultak alapján könnyen bebizonyíthatja.

Ha a T területet több részre bontjuk: $T_1, T_2, \dots T_k$-ra, akkor a T-re vonatkozó felső (alsó) integrál egyenlő a $T_1, T_2, \dots T_k$-ra vonatkozó felső (alsó) integrálok összegével. Elég, ha ezt az állítást a felső integrálokra vonatkozólag igazoljuk. Jelöljük az $f(x, y)$ korlátos függvénynek a $T_1, T_2, \dots$-re vonatkozó felső integráljait: $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots \Sigma_k$-val és a T-re vonatkozó felső integrált Σ-val. Ezek a számok a beosztástól függetlenek; az $f(x, y)$ függvény és a $T_1, T_2, \dots T_k$, T területek által teljesen meghatározottak. Csak azt kell megmutatnunk, hogy Σ a $\Sigma_1+\Sigma_2+\dots+\Sigma_k$-tól a tetszés szerinti kis pozitiv ε-nál kevesebbel különbözik. Határozzuk meg a ϱ_1 számot úgy, hogy ha a T_1 beosztásainak átmérői ϱ_1-nél kisebbek, akkor az $S_1 = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots$ összeg a Σ_1-től $\frac{\varepsilon}{k}$-nál kevesebbel térjen el. Éppen így a $\varrho_2, \varrho_3, \dots \varrho_k$ átmérőket, valamint a ϱ-t úgy, hogy a T-re vonatkozó $S = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots$ összeg a Σ-tól ε-nál kevesebbel térjen el és válasszuk ezen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_k$, ϱ átmérők közül a legkisebbiket. Legyen ez ϱ'. Ha már most a $T_1, T_2, \dots T_k$-t úgy osztjuk be, hogy az osztórészek átmérői mind kisebbek a ϱ'-nál, akkor

$$S_1 = \Sigma_1 + \varepsilon', \quad S_2 = \Sigma_2 + \varepsilon'', \dots, \quad S_k = \Sigma_k + \varepsilon^{(k)},$$

ahol $\varepsilon', \varepsilon'', \dots \varepsilon^{(k)}$ nem negativ számok kisebbek $\frac{\varepsilon}{k}$-nál és

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_k = \Sigma + \varepsilon_1,$$

ahol $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ és így:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_k = \Sigma + \varepsilon_2,$$

ahol $|\varepsilon_2| < \varepsilon$, ami bebizonyítandó volt.

Ebből természetesen az is következik, hogyha $f(x, y)$ a T-ben integrálható, akkor:

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{T_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{T_2} f(x, y)\,dx\,dy + \cdots + \\ + \iint_{T_k} f(x, y)\,dx\,dy,$$

ahol az integrál jele alá helyeztük azon tartomány jelét, melyre az integrálás vonatkozik.

[Megjegyezzük, hogy ha a T tartományban az $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, létezik.* (értéke legyen A) akkor $f(x, y)$ korlátos. Ugyanis a T tartományt beosztjuk a $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ részekre. Akárminők legyenek is ezek a részek, ha csak egy bizonyos ϱ-nál kisebb méretűek, ez az összeg:

$$f(\xi_1, \eta_1)\delta_1 + f(\xi_2, \eta_2)\delta_2 + \cdots + f(\xi_n, \eta_n)\delta_n \qquad \alpha)$$

ahol ξ_i, η_i a δ_i részbe eső tetszés szerinti hely, a véges A-tól a megadott tetszésszerinti kis ε-nál kevesebbel különbözik és így a felírt összeg $A-\varepsilon$ és $A+\varepsilon$ közé esik. De az előbb tett és könnyen belátható megjegyzésünk szerint $f(x, y)$-nak abban a T' tartományban is megvan a feltételezett tulajdonsága, mely T-ből a δ_1 elhagyásával keletkezik; tehát T'-nek van olyan beosztása, melyre nézve

$$\Sigma f(\xi_i', \eta_i')\delta_i'$$

ahol (ξ_i', η_i') a δ_i' rész tetszésszerinti helye a $B-\varepsilon'$ és $B+\varepsilon'$ közé esik. A δ' beosztások ϱ-nál kisebb méretűeknek tekinthetők, tehát fennáll ez a két egyenlőtlenség:

$$B - \varepsilon' < \Sigma f(\xi_i', \eta_i')\delta_i' < B + \varepsilon'$$

$$A - \varepsilon < f(\xi_1, \eta_1)\delta_1 + \Sigma f(\xi_i', \eta_i')\delta_i' < A + \varepsilon$$

(mert a föntebbi α) alatti összegben a második taggal kezdődő rész helyett ez a T'-re vonatkozó összeg is tehető) és így e két egyenlőtlenségből következik, hogy (az $|A-B-\varepsilon-\varepsilon'|$ és $|A-B+\varepsilon+\varepsilon'|$ számok nagyobbikát m-mel jelölve):

$$|f(\xi_1, \eta_1)\delta_1| < m,$$

miből

$$|f(\xi_1, \eta_1)| < \frac{m}{\delta_1},$$

akárhol van is (ξ_1, η_1) a δ_1 részben, tehát $f(\xi, \eta)$ a δ_1-ben korlátos. Éppen így mutatható meg, hogy a $\delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ részekben is korlátos, tehát az egész T-ben korlátos.]

* Ezen most az integrál előbbi értelmezésétől eltérően azt értjük, hogy az alábbi α) alatti kifejezés határértéke, ha a δ részek maximális mérete 0-hoz konvergál, véges és meghatározott szám.

3. Középértéktétel. Tudjuk, hogy ha a beosztások mérete már elég kicsiny, akkor (az előbbi jelöléssel)

$$\Sigma \leq S = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots + M_n\delta_n = \Sigma + \varepsilon',$$

Minthogy M, amely az egész T tartományban az $f(x, y)$ felső határa, nem kisebb, mint M_1 vagy $M_2, \ldots$, tehát:

$$\Sigma \leq M(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n),$$

vagyis:

$$\Sigma \leq MT.$$

Éppen így mutathatjuk meg, hogy a *Darboux*-féle alsó integrál:

$$\sigma \geq mT.$$

Ebből következik, hogyha $f(x, y)$ a T-ben integrálható, akkor:

$$mT \leq \iint f(x, y)\, dx\, dy \leq MT.$$

Ez az egyenlőtlenség azt *a középértéktételt fejezi ki, hogy a*

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

integrál mindig MT és mT közé eső számérték. Ebből az egyenlőtlenségből azt látjuk, hogy

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \mu T,$$

ahol μ egy az m és M közé eső számérték.

Ha $f(x, y)$ a T tartományban folytonos, akkor van ebben (vagy a határon) olyan (ξ, η) hely, amelyen $f(\xi, \eta) = \mu$, tehát akkor:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta)\, T.$$

Az előbbinél általánosabb középértéktételt is megállapitunk. Legyen ugyanis $g(x, y)$ a T tartományban értelmezett egyértékű, korlátos függvény és $f(x, y)$ ugyanezen tartományban szintén korlátos és mindenütt pozitiv (illetőleg nem negativ) függvény és mindkettő integrálható. Ekkor egyúttal az $f(x, y)\, g(x, y)$ is integrálható és az $\iint f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy$ az ismeretes módon, mint a

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\, g(\xi_i, \eta_i)\, \delta_i$$

határértéke van értelmezve. Ha $g(x, y)$ felső határa a T tartományban M és alsó határa m, akkor:

$$m\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\delta_i \leq \Sigma f(\xi_i, \eta_i)\, g(\xi_i, \eta_i)\delta_i \leq M\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\delta_i,$$

mert az $f(x, y)$ pozitiv az egész T-ben. Ha már most a δ_i beosztások átmérői 0-hoz konvergálnak, akkor ezen egyenlőtlenségekből a következők lesznek:

$$m\iint f(x, y)\, dx\, dy \leq \iint f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy \leq M\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

vagy egyenlőség alakjában írva:

$$\iint f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = \mu \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

ahol $M \geq \mu \geq m$. Ha a $g(x, y)$ a T-ben folytonos, akkor T-ben (vagy a határán) van olyan (ξ, η) hely, amelyen $g(\xi, \eta) = \mu$, tehát a középértéktétel általánosabb alakja:

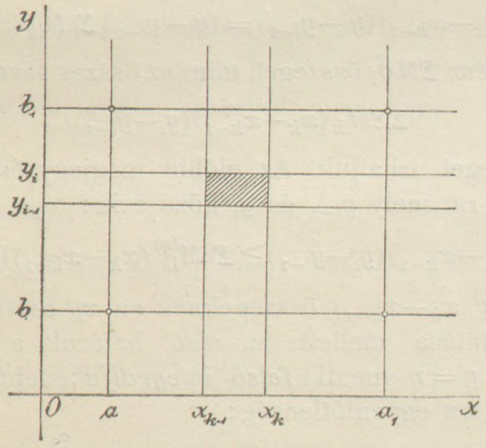
$$\iint f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = g(\xi, \eta) \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

mely egyenlet levezetésénél feltettük, hogy $f(x, y)$ a T-ben pozitiv és integrálható, $g(x, y)$ pedig folytonos. Ha $f(x, y)$ mindenütt: 1, akkor: $\iint dx\, dy$, mely a $\Sigma\delta_i$ határértéke: T, tehát

$$\iint g(x, y)\, dx\, dy = g(\xi, \eta)\, T$$

az előbbi egyszerűbb esetet adja.

4. A kettős integrál, mint kétszeres integrál. Válasszuk egyszerűség kedvéért T tartomány gyanánt azt a derékszögű négyszöget, mely négyszög csúcspontjainak koordinátái: (a, b), (a_1, b), (a, b_1), (a_1, b_1).



4. ábra.

Húzzuk az X tengellyel párhuzamos $y = \eta$ egyenest. Ezen egyenes mentén az $f(x, y)$ értékkészletét az $f(x, \eta)$ egyváltozós függvény szolgáltatja. Ha az $f(x, y)$ a T-ben korlátos, nyilván az $f(x, \eta)$ is az $y = \eta$ egyenesnek a T-be eső része mentén korlátos és így létezik ezen egyváltozós függvénynek Darboux-féle felső és alsó integrálja. Ezek az integrálok az η számértéktől függnek, azért a felső integrált jelöljük $\varphi(\eta)$-val, az alsót pedig $\alpha(\eta)$-val.

Képzeljük a T tartomány beosztását már annyira sűrítve, hogy a $\Sigma M_i \delta_i$ a Σ és $\Sigma + \varepsilon$ közé, a $\Sigma m_i \delta_i$ pedig a σ és $\sigma - \varepsilon$ közé essék, ahol Σ az $f(x, y)$ felső integrálja, σ pedig az alsó integrálja a T-ben. A beosztást a T derékszögű négyszög oldalaival párhuzamosan vont egyenesekkel végezzük. Evégből az X tengellyel párhuzamos oldalon megjelöljük az $a, x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots a_1$ abscisszáju pontokat és az Y tengellyel párhuzamos oldalon a $b, y_1, y_2, \ldots y_i, \ldots b_1$, ordinátákkal bíró pontokat és az így megjelölt pontokon át az Y, illetőleg X tengelyekkel párhuzamosakat vonunk.

Szemeljük ki azt a sávot, melyet az $y=y_i$ és $y=y_{i-1}$ egyenesek határolnak. Az $y=\eta$ egyenes ebbe a sávba essék. Ezt a sávot az $x=a$, $x=x_1$, $x=x_2, \ldots$ $x=a_1$ egyenesek derékszögű négyszögekre osztják fel. Egy ilyen derékszögű négyszög csúcsainak koordinátái:

$$(x_{k-1}, y_{i-1}), \quad (x_k, y_{i-1}), \quad (x_k, y_i), \quad (x_{k-1}, y_i)$$

területe pedig: $$(x_k-x_{k-1})(y_i-y_{i-1}).$$

A $\Sigma M_i\delta_i$ összegnek e sávhoz tartozó részét vegyük szemügyre. A most említett kis négyszögben az $f(x,y)$ felső határa legyen M_{ik} és az $y=\eta$ egyenesnek ebbe a kis derékszögű négyszögbe eső szakaszán az $f(x, y)$ felső határa: $M_{ik}^{(\eta)}$ legyen. Nyilván, akárhol vonul is a kiszemelt sávban az η vonal, mindig $M_{ik}^{(\eta)} \leq M_{ik}$.

A $\Sigma M_i\delta_i$ összegnek e sávba tartozó részét jelöljük így:

$$\Sigma^k M_{ik}(x_k-x_{k-1})(y_i-y_{i-1}) = (y_i-y_{i-1})\Sigma^k M_{ik}(x_k-x_{k-1}),$$

úgy, hogy az egész $\Sigma M_i\delta_i$ összeget, mint az összes sávokra kiterjesztett

$$\Sigma\Sigma M_{ik}(x_k-x_{k-1})(y_i-y_{i-1})$$

kétszeres összeget írhatjuk. Az előbbi megjegyzésből következik, hogy minden η-ra, mely y_{i-1} és y_i közé esik:

$$\Sigma^k M_{ik}(x_k-x_{k-1})(y_i-y_{i-1}) \geq \Sigma^k M_{ik}^{(\eta)}(x_k-x_{k-1})(y_i-y_{i-1}).$$

De a $\Sigma^k M_{ik}^{(\eta)}(x_k-x_{k-1})$ összegeknek az x_k osztópontok tetszés szerinti változtatása mellett, az alsó határuk a $\varphi(\eta)$, mely az $f(x, \eta)$-nak az $y=\eta$ menti *felső integrálja*; tehát arra jutunk, hogy fennáll ez az egyenlőtlenség:

$$\Sigma^k M_{ik}(x_k-x_{k-1})(y_i-y_{i-1}) \geq (y_i-y_{i-1})\int_{(s)a}^{a_1} f(x, \eta)\,dx.*$$

* Az s betű a superior szó kezdőbetűje és

$$\int_{(s)a}^{a_1} F(x)\,dx$$

az $F(x)$ függvény *Darboux*-féle felső integrálja;

$$\int_{(i)a}^{a_1} F(x)\,dx$$

az alsó integrál jele (inferior). Ezt a jelölést felváltva használjuk a régebben bevezetett $\overline{\int}$ és $\underline{\int}$ jelölések helyett, melyek különösen, midőn a határokat is meg akarjuk jelölni, kissé nehézkesek.

A $\varphi(\eta)=\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x,\eta)\,dx$ az η-val változik. Ha η az y_{i-1}-től y_i-ig halad, akkor a $\varphi(\eta)$ értékhalmazának felső határát jelöljük $\mathfrak{M}_i$-vel és minthogy a fenti egyenlőtlenség minden η-ra fennáll, tehát a felső határra is érvényes ez az egyenlőtlenség:

$$\Sigma M_{ik}(x_k-x_{k-1})(y_i-y_{i-1})\geq \mathfrak{M}_i(y_i-y_{i-1}).$$

Ha már most ezt az egyenlőtlenséget mindenik sávra felírjuk és összegezünk, akkor a baloldalon az összes részekre kiterjesztett $\Sigma M_i\delta_i$ összeget kapjuk, melyről tudjuk, hogy Σ és $\Sigma+\varepsilon$ közé esik, a jobboldalon pedig oly összegre jutunk, mely a $\varphi(\eta)$-nak a $b\ldots b_1$ közre vonatkozó felső integráljánál nem kisebb; tehát

$$\Sigma+\varepsilon>\int\limits_{(s)b}^{b_1} dy\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x,y)\,dx$$

és minthogy ez bármely kis ε-ra érvényes, tehát:

$$\iint\limits_{(s)T} f(x,y)\,dx\,dy\geq\int\limits_{(s)b}^{b_1} dy\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x,y)\,dx.$$

Egészen hasonló módon mutatjuk meg, hogy

$$\iint\limits_{(i)T} f(x,y)\,dx\,dy\leq\int\limits_{(i)b}^{b_1} dy\int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x,y)\,dx,$$

tehát, ha $f(x,y)$ a T-ben integrálható, akkor e két egyenlőtlenségből következik, hogy:

$$\int\limits_{(i)b}^{b_1} dy\int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x,y)\,dx\geq\iint f(x,y)\,dx\,dy\geq\int\limits_{(s)b}^{b_1} dy\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x,y)\,dx. \qquad \alpha)$$

De nyilvánvaló, hogy ha $f_1(y)\geq f_2(y)$ minden y értéknél, mely a $b\ldots b_1$ közbe esik, akkor egyúttal a közre vonatkozó integrálokra nézve

$$\int\limits_{(i)b}^{b_1} f_1(y)\,dy\geq\int\limits_{(i)b}^{b_1} f_2(y)\,dy \quad \text{és} \quad \int\limits_{(s)b}^{b_1} f_1(y)\,dy\geq\int\limits_{(s)b}^{b_1} f_2(y)\,dy.$$

Minthogy pedig a jelen esetben az $\alpha)$ jobboldalán levő $\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x,y)\,dx$ nem kisebb a baloldalon levő $\int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x,y)\,dx$-nél egyetlen y-ra nézve sem, tehát:

$$\int\limits_{(s)b}^{b_1} dy\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x,y)\,dx\geq\int\limits_{(s)b}^{b_1} dy\int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x,y)\,dx\geq\int\limits_{(i)b}^{b_1} dy\int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x,y)\,dx$$

és így a fönti egyenlőtlenség csak úgy állhat meg, ha:

$$\int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx = \iint f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx.$$

Így tehát arra az eredményre jutottunk, hogy ha $f(x, y)$ *a T-ben integrálható, akkor egyúttal az* $a \ldots a_1$, *illetve* $b \ldots b_1$ *közökre vonatkozó*

$$\int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx, \quad \int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx$$

integrálok is egyenlők és közös értékük a T tartományra vonatkozó $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ *kettős integrál.*

Az $\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx \geq \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx$ minden y értéknél, tehát:

$$\int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx \geq \int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx \geq \int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx. \qquad \beta)$$

Éppen így következik, hogy:

$$\int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx \geq \int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx \geq \int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx. \qquad \gamma)$$

Ha $\iint f(x, y)\, dx\, dy = I$ létezik, akkor, miként láttuk:

$$I = \int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx = \int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx;$$

tehát a $\beta)$ és $\gamma)$ alatti egyenlőtlenségekből következik, hogy:

$$I = \int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx = \int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx;$$

$$I = \int\limits_{(s)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx = \int\limits_{(i)b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx,$$

vagyis azt látjuk, hogy úgy az $\int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx$, mint az $\int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx$ integrálható a $b \ldots b_1$ közben y szerint és egyúttal:

$$\int\limits_{b}^{b_1} dy \int\limits_{(s)a}^{a_1} f(x, y)\, dx = \int\limits_{b}^{b_1} dy \int\limits_{(i)a}^{a_1} f(x, y)\, dx.$$

Így tehát, *ha* $f(x, y)$ *a T-ben korlátos, integrálható függvény, akkor úgy az x szerinti alsó integrálja mint a felső integrálja az y szerint a* $b \ldots b_1$ *közben integrálható és e két integrál egymással és a T-re vonatkozó kettős integrállal egyenlő.*

Tegyük fel most, hogy minden a $b \ldots b_1$ közbe eső y értéknél, az $\int\limits_a^{a_1} f(x, y)\,dx$ integrál is létezik; akkor tehát ez a $b \ldots b_1$ közben integrálható és:

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_b^{b_1} dy \int\limits_a^{a_1} f(x, y)\,dx.$$

Ha a föntebbi tárgyalást úgy végezzük, hogy az x és y szerepét felcseréljük és feltesszük, hogy az $\int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy$ integrál létezik minden x értéknél, akkor pedig arra jutunk, hogy

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^{a_1} dx \int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy.$$

És ezzel arra az eredményre jutottunk. hogy ha a *T tartományban $f(x, y)$ korlátos függvény integrálható, továbbá az $f(x, y)$ integrálható az egyik változó szerint, bármi legyen is a másik változó értéke (a megfelelő közben), akkor a kettős integrál kiszámítása két egymásután végzendő integrálásra vezethető vissza.*

Ha az $f(x, y)$ a T tartományban folytonos, akkor, miként láttuk (l. I. kötet 427. lap) az $\int\limits_a^{a_1} f(x, y)\,dx$, valamint az $\int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy$ az y, illetőleg az x folytonos függvényei, tehát ez esetben az integrálás imént megállapított módja alkalmazható. Az előbbiekből egyúttal azt is látjuk, hogy ha $f(x, y)$ a T-ben folytonos vagy ha nem folytonos, de korlátos és $\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy$, továbbá $\int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy$ és $\int\limits_a^{a_1} f(x, y)\,dx$ léteznek, akkor

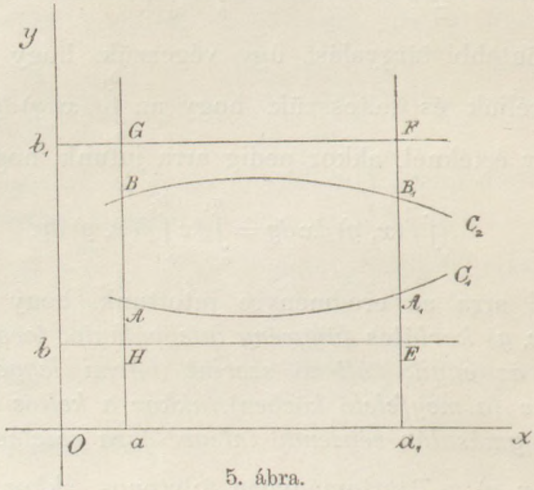
$$\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^{a_1} dx \int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy = \int\limits_b^{b_1} dy \int\limits_a^{a_1} f(x, y)\,dx,$$

vagyis *az integrálás sorrendje felcserélhető.*

5. Az integráció tartományának általánosítása. Eddigelé a T tartomány derékszögű négyszög volt. Könnyű lesz kiterjeszteni a nyert eredményeket arra az esetre, midőn az integráció tartományának határa olyan görbékből áll, amelyek $y=\varphi(x)$ vagy $x=\varrho(y)$ alakú egyenletekkel megadhatók.

Legyen például az integráció tartománya a túloldali ábrában feltüntetett tartomány, mely a C_1 és C_2 görbékkel és az AB, A_1B_1 egyenesekkel határoltatik. Azt is megengedjük, hogy A és B pontok vagy még A_1 és B_1 is összeessenek, mely utóbbi esetben a tartomány határvonala olyan egyszerűen zárt görbe, mint az 5. ábrában.

Legyen a C_1 görbe egyenlete: $y=\varphi(x)$, a C_2-é pedig $y=\psi(x)$, ahol $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ az $a \dots a_1$ közben x egyértékű függvényei. A feladatot az előbbire vezetjük vissza. Ugyanis beleillesztjük a T tartományt az $EFGH$ derékszögű négyszögbe, melynek csúcspontjainak koordinátái: H-é: (a, b) és F-é: (a_1, b_1). Az $f(x, y)$ függvény



5. ábra.

helyett olyan $f_1(x, y)$ függvényt választunk, mely a T tartományban mindenütt megegyezik az $f(x, y)$-al és a derékszögű négyszög többi részében $f_1(x, y) = 0$. Ez az $f_1(x, y)$ a T_1 derékszögű négyszögben integrálható, ha $f(x, y)$ a T tartományban integrálható volt és nyilván:

$$\iint_{T_1} f_1(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f(x, y)\, dx\, dy.$$

De egyúttal azt is látjuk, hogyha x-et fix értéknek választjuk, akkor a létezőnek feltételezett

$$\int_b^{b_1} f_1(x, y)\, dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy,$$

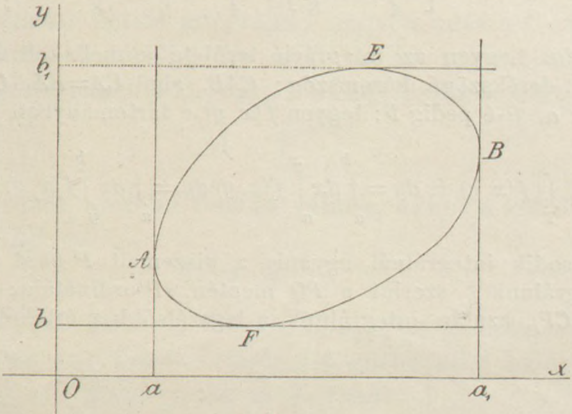
tehát
$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a_1} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Ha a tartományt az egyszerű C zárt görbe határolja, mint a 11. ábrában, akkor is az előbbihez hasonló módon kaphatjuk a kettős integrállal egyenlő kétszeres integrált. Megrajzoljuk az Y tengellyel párhuzamos egyeneseket, melyek elválasztják a sík azon részét, melyben a C görbének nincs pontja, attól, amelyben a C görbének van pontja (és egyúttal az X tengellyel párhuzamosan is meghúzzuk a két határegyenest). A legegyszerűbb esetekben ezek a görbének az Y, illetőleg X tengelyekkel párhuzamos legszélsőbb érintői lesznek. A abszcisszája legyen a, B-é: a_1. A görbe AEB

részének egyenlete legyen: $y=\psi(x)$, az AFB részé pedig $y=\varphi(x)$. Ekkor tehát:

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^{a_1} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

Az eljárás tehát a következő: *először integrálunk y szerint az x abszcisszához tartozó két szélső ordináta: $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ között, azután pedig x szerint a legszélsőbb abszcisszák, az a és a_1 között.*



6. ábra.

Ha pedig E ordinátája: b_1, F-é pedig b és az EAF egyenlete: $x=\varrho(y)$, EBF-é pedig $x=\sigma(y)$, ahol $\varrho(y)$ és $\sigma(y)$ a $b \ldots b_1$ közben egyértékűek, x és y szerepének felcserélésével erre jutunk:

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy = \int_b^{b_1} dy \int_{\varrho(y)}^{\sigma(y)} f(x, y)\,dx.$$

6. Példák a kettős integrál kiszámítására. Néhány példán megvilágítjuk a kettős integrál kiszámításának ezen módját.

1. Példa. Számítsuk ki ezt az (a, b), (a_1, b), (a_1, b_1), (a, b_1) derékszögű négyszögre vonatkozó integrált:

$$\iint_T xy\,dx\,dy.$$

Az imént tárgyalt eljárás szerint:

$$\iint_T xy\,dx\,dy = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} xy\,dy = \frac{1}{2}\int_a^{a_1} dx\,.\,x\,(b_1^2-b^2) = \frac{1}{4}\,(b_1^2-b^2)\,(a_1^2-a^2).$$

2. Példa. Számítsuk ki ugyanezt az integrált a 0 centrumu, r sugarú negyedkörre vonatkozólag. A határgörbe egyenlete

$$y = \sqrt{r^2-x^2},$$

ahol a négyzetgyök pozitivnak veendő. Az x abszcisszához tartozó ordináták 0 és $\sqrt{r^2-x^2}$, tehát:

$$\iint\limits_T xy\,dx\,dy = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} xy\,dy.$$

A belső integrál:

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} xy\,dy = \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{xr^2-x^3}{2},$$

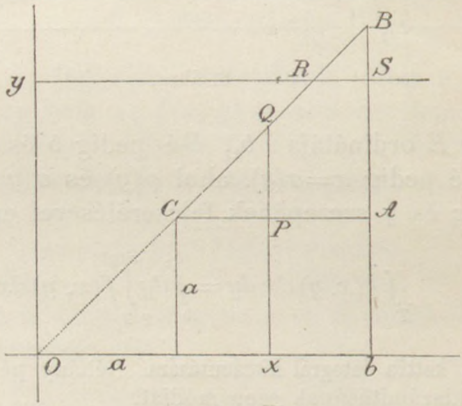
tehát a keresett kettős integrál:

$$\left[\frac{r^2x^2}{4}-\frac{x^4}{8}\right]_0^r = \frac{r^4}{4}-\frac{r^4}{8}=\frac{r^4}{8}.$$

3. Példa. Legyen az integráció területe a mellékelt ábrán feltüntetett egyenszárú derékszögű háromszög: CAB, ahol $CA=BA$. C abszcisszája és ordinátája: a, B-é pedig b; legyen $f(x, y)$ e tartományban folytonos, akkor:

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\,dx.$$

A második integrálnál ugyanis a kiszemelt P pont abszcisszája x és előbb integrálunk y szerint a PQ mentén. (P ordinátája: a, Q-é pedig: x, mert $PQ=CP$), azután integrálunk a legszélsőbb x értékek, vagyis: a és b



7. ábra.

között. A harmadik integrálnál a kiszemelt R ordinátája: y és előbb integrálunk x szerint R-től S-ig. (R abszcisszája: y, S-é: b); azután pedig integrálunk a legszélsőbb y ériékek között, vagyis a-tól b-ig. Ezzel erre a nevezetes, DIRICHLET-től származó egyenletre jutottunk:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\,dx$$

ha $f(x, y)$ a szóban forgó háromszögben folytonos.

4. Példa. Legyen az integrandus

$$f(x, y)=\varphi(x)\,.\,\psi(y)$$

két folytonos függvény szorzata, melyek egyike csakis x-től, másika csakis y-tól függ. Az integráció területe derékszögű négyszög, melynek csúcsai: (a, b),

(a_1, b), (a, b_1), (a_1, b_1).

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} \varphi(x)\,\psi(y)\,dy = \int_a^{a_1} \varphi(x)\,dx \,.\int_b^{b_1} \psi(y)\,dy.$$

Legyen $\int_b^{b_1} \psi(y)\,dy = B$ és $\int_a^{a_1} \varphi(x)\,dx = A$, akkor tehát:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} \varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = A\,.\,B.$$

7. Területszámítás kettős integrállal. Legyen adva a C zárt görbe, mely a T területet határolja. Ha e T-t a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesekkel a $\delta_1, \delta_2, \ldots$ területrészekre osztjuk, akkor

$$\Sigma\delta_i = T.$$

Ha a δ területrészek méretei 0-okká válnak, akkor a kettős integrál értelmezése szerint az

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\,\delta_i$$

határértéke az $\iint f(x,y)\,dx\,dy$, feltéve, hogy $f(x,y)$ integrálható. Ha $f(x,y) = 1$ minden x, y értékre, mely a C görbe által határolt T-ben van, akkor a $\Sigma\delta_i = T$ határértéke is T, tehát:

$$\iint_T dx\,dy = T.$$

Így tehát a T területet a $\iint dx\,dy$ kettős integrál szolgáltatja.

Példaképpen határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területét. A $\iint dx\,dy$ kettős integrált így számítjuk ki: Ha x fix érték, akkor y-nak hozzá tartozó értékei: $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ és $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; az x legszélsőbb értékei: $-a$ és $+a$; tehát:

$$T = \iint dx\,dy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ (I. kötet 324. l.), tehát:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin 1 - \frac{a^2}{2}\arcsin(-1) = \frac{a^2\pi}{2}$$

és így:

$$T = ab\pi.$$

A terület meghatározása mindig visszavezethető arra az esetre, melyet az I. kötet 463. lapján (98. ábra) tárgyaltunk. Az ilyen trapézszerű terület, a

$$T = \iint dx\,dy$$

kiszámítása végett, először integrálunk y szerint: A fix x értékhez tartozó szélső y értékek: 0 és $f(x)$, tehát:

$$T = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx$$

formulára jutunk, amelyet eddig a terület számítására használtunk.

8. Köbtartalom számítása kettős integrállal. Legyen adva a

$$z = f(x, y)$$

felület, ahol $f(x, y)$ az (x, y) egyértéűk, integrálható, pozitiv függvénye. E felületen legyen húzható egy egyszerűen zárt C görbe úgy, hogy az (x, y) síkon levő vetülete: C' is egyszerűen zárt, önmagát nem metsző, rektifikálható görbe legyen. A C' által bezárt tartomány legyen T. Tekintsük azt a hengerszerű testet, melyet a T, továbbá a felületnek a C által határolt része és a C'-re alapított hengerpalást határolnak. Ezen test köbtartalmát, V-t akarjuk értelmezni. Az értelmezés alapjául azon két postulatum szolgál, hogy 1) minden köbtartalom pozitiv szám, 2) ha az A testet a B és C testek alkotják, akkor A köbtartalma egyenlő B és C köbtartalmainak összegével. E postulatumok alapján kapjuk a prizma köbtartalmára az ismert szabályt, ha egységül az 1 élű kockát választjuk.

Húzzunk az x, illetőleg az y tengelyekkel párhuzamosakat egyenlő távolságokban. Az így keletkezett négyzetek között vannak olyan $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \ldots$ négyzetek, melyeknek legalább egy pontjuk beleesik a T-be és közöttük olyan $\delta_1, \delta_2, \ldots$ négyzetek, melyek egészen beleesnek a T-be. A δ_i-ben az $f(x, y)$ alsó határa legyen m_i. Az $m_i\delta_i$ szorzat azon négyzetes prizma köbtartalma, amelynek alapja δ_i, magassága m_i.

Minthogy minden $m_i\delta_i$ köbtartalmú oszlop benne van a szóban forgó geometriai testben, tehát a 2) postulatum szerint:

$$V \geq \Sigma m_i \delta_i.$$

A δ'_i-ben legyen az $f(x, y)$ felső határa M_i, tehát az $M_i\delta'_i$ azon négyoldalú oszlop köbtartalma, melynek alapja a δ'_i négyzet, magassága M_i és így ugyancsak a 2) postulatum szerint:

$$V \leq \Sigma M_i \delta'_i.$$

A δ'_i négyzetek kétfélék: olyanok, melyek egészen benne vannak a T-ben; ezek az előbbi δ_i-k; és olyanok, melyeknek a C'-el legalább egy közös pontjuk van; ezeket jelöljük: $\delta''_1, \delta''_2 \ldots$-vel; a δ''_i-ben az $f(x, y)$ felső határa legyen M''_i; tehát az előbbi egyenlőtlenség ilyen alakú:

$$V \leq \Sigma M_i \delta_i + \Sigma M''_i \delta''_i.$$

Ha már most a négyzetes háló szélességét csökkentjük, akkor elérhetjük, hogy a $\Sigma M''_i \delta''_i$ a tetszés szerinti ε felénél kisebb lesz,

(lásd 133. lap), a $\Sigma M_i \delta_i$, valamint a $\Sigma m_i \delta_i$ pedig az

$$\iint\limits_T f(x, y)\, dx\, dy$$

integráltól $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kevesebbel különböznek és így:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy - \frac{\varepsilon}{2} < \Sigma m_i \delta_i \leqq \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy \leqq \Sigma M_i \delta_i < \iint f(x, y)\, dx\, dy + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Sigma M_i'' \delta_i'' < \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát: $$\iint f(x, y)\, dx\, dy - \frac{\varepsilon}{2} < V < \iint f(x, y)\, dx\, dy + \varepsilon,$$

és így, minthogy ε tetszés szerinti kicsiny:

$$V = \iint\limits_T f(x, y)\, dx\, dy.$$

A szóban forgó test köbtartalmát tehát ez a kettős integrál adja meg.

Ha $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ mindketten egyértékű, integrálható pozitiv függvények T-ben és $f_1(x, y) > f_2(x, y)$, akkor a $z = f_1(x, y)$ és $z = f_2(x, y)$ felületek, valamint az (x, y) síkon vont, a T-t határoló C görbében emelt merőleges hengerpalást által határolt geometriai test köbtartalma az előbbiekből folyólag:

$$V = \iint\limits_T [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\, dx\, dy.$$

Ha az (x, y) síkot önmagával párhuzamosan c-vel eltoljuk, akkor az $f_1(x, y) - f_2(x, y)$ különbség nem változik meg. Az $f_1(x, y)$-ból $f_1(x, y) + c$, az $f_2(x, y)$-ból $f_2(x, y) + c$ lesz, de ha a c-t alkalmasan választjuk, az $f_1(x, y) + c$ és $f_2(x, y) + c$ pozitivok akkor is, ha egyik, vagy másik, vagy mindkettő negativ volt a T tartomány egy részében és így az f_1 és f_2 függvényekre vonatkozó azon megszorítás, hogy pozitivok legyenek, feleslegessé vált.

A $z = f_1(x, y)$ és $z = f_2(x, y)$ felületek a C-re emelt hengerpalástot a C_1 és C_2 görbékben metszik, melyek közös vetülete a C. Az imént megállapított képlet a V-re vonatkozólag akkor is érvényes, ha a C_1 és C_2 görbék egybeesnek, vagyis ha $z = f_1(x, y)$ és $z = f_2(x, y)$ egy zárt felületet alkotnak.

9. **Példák a köbtartalom számítására.** 1. *Példa.* Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipszoid köbtartalmát. A jelen esetben a felső felület, az előbbi $z = f_1(x, y)$:

$$z = \frac{c}{ab} \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2},$$

az alsó pedig, az előbbi $z=f_2(x, y)$:

$$z=-\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2},$$

ahol a négyzetgyök mindkét esetben pozitivnak veendő.

A C határgörbe pedig az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis, az (x, y) síknak az ellipszoiddal való metszésgörbéje.

A keresett köbtartalom tehát:

$$V=\frac{2c}{ab}\iint_T\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}\,dx\,dy$$

ahol T a C görbe által határolt tartomány.

Két lépésben integrálunk. Egy kiszemelt x-hez tartozó y értékek: $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ és $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; a legszélsőbb x értékek: $-a$ és $+a$; tehát:

$$V=\frac{2c}{ab}\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}\,dy=\frac{2c}{b}\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}-y^2}\,dy.$$

A belső integrál az I. kötet 324. lapján közölt formula szerint: (Az ottani $c=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$):

$$\left[\frac{1}{2}y\sqrt{\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}-y^2}+\frac{a^2b^2-b^2x^2}{2a^2}\arcsin\frac{ay}{\sqrt{a^2b^2-b^2x^2}}\right]_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

és innen: $$V=\frac{c\pi}{b}\int_{-a}^{a}\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}\,dx=\frac{c\pi}{b}\cdot\frac{4b^2a}{3}=\frac{4abc\pi}{3}.$$

2. *Példa.* Legyen adva egy a sugarú egyenes körhenger. Fektessünk át a tengelyén egy s síkot. Vegyük fel a tengelyen az A pontot. E pontban emeljünk merőlegest az s síkra. Ez a merőleges a henger palástját B pontban messe. Az AB egyenesen át fektetünk két síkot, s' és s''-t, melyek az s síkot e' és e'' egyenesekben metszik, melyek közül e' merőleges legyen a tengelyre; az e' és e'' a hengert (a tengely ugyanazon oldalán) C és D-ben metszik. Az s', s'' és s síkok közötti hengerrész köbtartalmát akarjuk kiszámítani.

A henger tengelyét y tengelynek, az s síkot (xy) síknak választjuk, a kezdőpont legyen A-ban. A henger felületéből az s' és s'' síkok egy (BCD) szegmentumot vágnak ki, melynek vetülete az (xy) síkon az ACD derékszögű háromszög; e háromszög egyik befogója $AC=a$ a henger radiusa, másik befogója $CD=b$.

Az ACD háromszög belsejében (vagy a határán) vegyünk fel egy tetszés szerinti (xy) pontot. Ez a hengerfelület azon P pontjának a vetülete, melynek magassága $z=\sqrt{a^2-x^2}$, tehát a keresett köbtartalmat ez a kettős integrál adja meg:

$$V=\iint_T\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy,$$

ahol T az ACD háromszög. Integráljunk először y szerint. Evégből kiszemelünk az AC egyenesen egy tetszés szerinti M pontot, melynek abscisszája: x. Ezen át az y tengellyel párhuzamosat vonunk, míg ez az AD egyenest metszi N pontban. Az MN mentén kell integrálnunk. M ordinátája: 0, N-é pedig, mint könnyen beláthatjuk: $\frac{bx}{a}$; tehát a kétszeres integrál:

$$\int_0^a dx \int_0^{\frac{bx}{a}} \sqrt{a^2-x^2}\, dy.$$

A belső integrál:

$$\frac{bx}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

és így a keresett köbtartalom:

$$V=\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{b}{3a}\left[(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{a^2b}{3},$$

vagyis ugyanakkora a szóban forgó szelet köbtartalma, mint egy olyan gúláé, melynek alapja a oldalú négyzet és magassága CD egyenes.

3. Példa. Egy elliptikus egyenes hengert a tengelyéhez ferde síkkal messünk. Határozzuk meg azon test köbtartalmát, melyet a henger alapja, továbbá a ferde sík [melyről feltesszük, hogy az alapsíkot oly egyenesben metszi, mely a henger alapját nem szeli át] és a hengerpalást határolnak. Legyen a henger alapja az (xy) síkon és egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

A metsző sík egyenletét írjuk ebben az alakban:

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma,$$

ahol γ jelenti a henger tengelyéből levágott darabot. A keresett köbtartalom:

$$V=\iint_T(\alpha x+\beta y+\gamma)\,dxdy,$$

ahol T az adott ellipszistartomány. Célszerű lesz az integrált három részben előállítani:

$$\alpha\iint x\,dxdy+\beta\iint y\,dx\,dy+\gamma\iint dx\,dy$$

alakban. Az elsőnél integráljunk először x szerint. Ha y fix érték, akkor x-nek szélső értékei ezek:

$$x_1=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\quad x_2=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}=-x_1,$$

tehát

$$\int_{x_1}^{-x_1} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{-x_1}=0$$

és így az első integrál: 0. Éppen így a második integrál is 0. A harmadik integrál nem más, mint az ellipszis területe: $ab\pi$, tehát a ferdén levágott henger köbtartalma:

$$ab\gamma\pi.$$

Látjuk, hogy a köbtartalom nem függ a sík helyzetétől, csakis a tengelyből levágott darab nagyságától.

10. A köbtartalom, mint egyszeres integrál. A köbtartalom számítására előbb talált:

$$V = \iint_T [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\, dx\, dy$$

formulát még egyszerűbb geometriai módon is értelmezhetjük. Ugyanis két lépésben (először y, azután x szerint) integrálunk. Evégből kiszemelünk például egy x értéket. A C görbén ezen x értékhez tartozik — a legegyszerűbb esetet tételezve fel — y két értéke: y_1 és y_2; tehát először kiszámítjuk az

$$\int_{y_1}^{y_2} [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\, dy$$

integrált. Ez azonban nem más, mint az x távolságban az (y, z) síkkal párhuzamosan vont sík s a szóban forgó geometriai test metszésidomának a területe. Jelöljük ezt $F(x)$-el. Igy tehát:

$$V = \int_a^{a_1} F(x)\, dx,$$

ahol a és a_1 x legszélsőbb értékeit jelölik, melyek a C görbéhez tartoznak.

Eszerint tehát a köbtartalmat egyszerű integrállal is kiszámíthatjuk. Evégből meghatározzuk az (y, z) síkkal párhuzamosan az x távolságban vont síknak a testtel való metszetének a területét, $F(x)$-et és ezt integráljuk a legszélsőbb x értékek között. Egészen hasonló meggondolással jutunk arra, hogy így is eljárhatunk: meghatározzuk az y távolságban az (x, z) síkkal vont párhuzamos sík metszetének területét: $\Phi(y)$-t és kiszámítjuk a legszélsőbb y értékek között vett

$$\int_b^{b_1} \Phi(y)\, dy$$

integrált.

Példaképpen számítsuk ki $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipszoidnak az (y, z) síkkal párhuzamos $x = x_1$, $x = x_2 > x_1$ síkok közé eső rétegének köbtartalmát. Az x távolságban az (y, z)-vel párhuzamos síkmetszet ellipszis, melynek vetülete az (y, z) síkon ilyen alakban írható (a folyó koordinátákat Y és Z-vel jelölve):

$$\frac{Y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{Z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1,$$

tehát a területe:

$$bc\pi\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

és így a szóban forgó réteg köbtartalma:

$$V = bc\pi \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = bc\pi\left[x_2 - x_1 - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3a^2}\right].$$

Ha $x_2=a$ és $x_2-x_1=d$; vagyis a réteg vastagsága: d, akkor a rétegből d magasságú süveg válik, melynek köbtartalma az előbbiből könnyen nyerhető:

$$V=\pi\cdot\frac{bcd^2}{3a^2}(3a-d).$$

Ebből a gömbsüveg köbtartalmát kapjuk, ha $a=b=c=r$ tesszük: $\frac{\pi d^2}{3}(3r-d)$.

11. Forgási test köbtartalma. Ha az (x, z) síkon felvesszük a

$$z=f(x)$$

görbét (ahol $f(x)$ az argumentumának egyértékű, folytonos függvénye) és az XZ síkot az X tengely körül körülforgatjuk, akkor az adott görbének az $x=x_1$ és $x=x_2$ egyenesek között levő íve forgási felületet ír le. Határozzuk meg e forgási test $x=x_1$ és $x=x_2$ síkok között levő rétegének köbtartalmát! Az X tengelyre merőlegesen a kezdőponttól x távolságban húzott síknak a forgási felülettel való metszete a $z=f(x)$ sugárral leírt kör területe, vagyis: $[f(x)]^2\pi$ és így a keresett köbtartalom:

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2dx.$$

Igy például, ha a

$$z=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

egyenletű láncgörbét forgatjuk az X tengely körül, akkor a forgási testnek az $x=x_1$ és $x=x_2$ síkok közé foglalt rétege:

$$V=\frac{a^2\pi}{4}\int_{x_1}^{x_2}\left[e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right]dx=$$

$$=\frac{a^2\pi}{4}\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x_2}{a}}-e^{\frac{2x_1}{a}}\right)-\frac{a}{2}\left(e^{-\frac{2x_2}{a}}-e^{-\frac{2x_1}{a}}\right)+2(x_2-x_1)\right].$$

12. A kettős integrál differenciálhányadosa. Legyen az $f(x, y)$ az (a, b), (x, b), (x, y), (a, y) csúcsokkal biró T derékszögű négyszögben és a határán is folytonos. Ekkor létezik a következő integrál (az integráció betűit a határpontoktól megkülönböztetésül ξ, η-val jelölve):

$$I=\iint_T f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\int_a^x d\xi\int_b^y f(\xi,\eta)\,d\eta.$$

Az $\int_b^y f(\xi,\eta)\,d\eta$ a ξ parameter és a változónak képzelt y folytonos függvénye, melyet egy pillanatra $F(\xi, y)$-nal jelölünk, tehát:

$$I=\int_a^x F(\xi, y)\,d\xi$$

és így (L. I. kötet 291. l.):

$$\frac{\partial I}{\partial x} = F(x, y) = \int_b^y f(x, \eta)\, d\eta$$

és ha ismét differenciálunk y szerint:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x\, \partial y} = f(x, y).$$

Vagyis arra az eredményre jutottunk, hogy ha (x, y) az integrálás területét alkotó derékszögű négyszög egyik, változónak képzelt csúcspontja, akkor:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \iint_T f(x, y)\, dx\, dy = f(x, y),$$

ha $f(x, y)$ az integráció tartományának belsejében és határán folytonos. Ezt a differenciálási szabályt azon feltevésből kiindulva vezettük le, hogy az $f(x, y)$ az integráció tartományát alkotó derékszögű négyszögben folytonos. De ha a derékszögű négyszögből az (a, b) és (x, b) csúcsokon átmenő oldallal párhuzamosat vonunk és ezzel a derékszögű négyszöget keskenyebbé tesszük, nyilván a tétel akkor is érvényes. Éppen így, ha a másik oldallal huzott párhuzamossal újból kisebbre szorítjuk a tartományt, akkor is áll a tétel; tehát arra jutottunk, hogy $f(x, y)$ folytonosságát csakis az (x, y) hely tetszés szerinti kis környezetében kell feltételeznünk, egyébként pedig $f(x, y)$-nak csak integrálhatónak kell lennie.

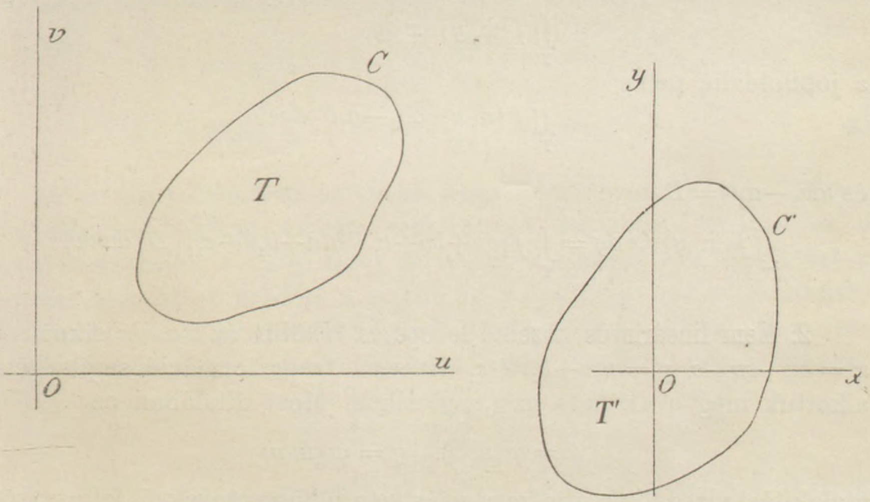
VII. FEJEZET.

A KETTŐS INTEGRÁL ÁTALAKÍTÁSA.

1. A kettős integrál átalakítása. Lineáris átalakítás. Az (u, v) sík (u, v) pontjának feleljen meg az (x, y) sík azon pontja, melynek koordinátái:

$$x = au + bv + c\,; \quad y = a_1u + b_1v + c_1,$$

ahol az $a, b, \ldots c_1$ együtthatók állandók és $ab_1 - a_1b \neq 0$. Ha az (u, v) síkon 3 pontot szemelünk ki, A, B, C-t, akkor, minthogy az (u, v) sík minden egyenesének az (x, y) síkon egyenes felel meg, e három pont által meghatározott háromszögnek az (x, y) síkon három-



8. ábra.

szög fog megfelelni, melynek területe, mint könnyen belátható, $|ab_1 - a_1b|$-szerese az ABC háromszög területének. Ebből következik, hogy az (u, v) sík bármely sokszögének az (x, y) síkon is sokszög felel meg, melynek területe szintén $|ab_1 - a_1b|$-szerese az (u, v) síkon felvett sokszög területének és így, ha az (u, v) síkon egy tetszés szerinti rektifikálható C zárt görbével határolt T területet szemelünk ki, akkor ennek az (x, y) síkon egy, a C-nek megfelelő C' zárt görbével határolt T' terület felel meg és

$$T' = |ab_1 - a_1 b|\, T.$$

A T' területre vonatkozó

$$I = \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrált akarjuk most transzformálni. Ezen integrál a $\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\delta_i'$ határértéke, ha a T' hézag nélkül osztatott fel a δ_i' területekre, (ξ_i, η_i) a δ_i'-ben levő pont és a δ_i' területrészek méretei zérussá válnak. Ha a C által határolt T tartományt úgy osztjuk be δ_i részekre, hogy a δ_i-nek az $x = au + bv + c$, $y = a_1 u + b_1 v + c_1$ transzformációval a δ_i' feleljen meg, akkor $\delta_i' = |ab_1 - a_1 b|\, \delta_i$ és így

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\delta_i' = \Sigma f(\xi_i, \eta_i)\, |ab_1 - a_1 b|\, \delta_i.$$

Ha a (ξ_i, η_i)-nek megfelelő pont az (u_i, v_i) és ezt a jelölést vezetjük be:

$$f(x, y) = f[au + bv + c, \quad a_1 u + b_1 v + c_1] = F(u, v),$$

akkor:
$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\delta_i' = \Sigma F(u_i, v_i)\, |ab_1 - a_1 b|\, \delta_i.$$

Ha a δ_i beosztások méretei 0-sá lesznek, akkor a δ_i' méretei is zérussá válnak és így a baloldali összeg határértéke:

$$\iint_{T'} f(x, y)\, dx\, dy,$$

a jobboldalié pedig

$$\iint_{T} F(u, v)\, |ab_1 - a_1 b|\, du\, dv$$

és $ab_1 - a_1 b = D$ téve:

$$\iint_{T'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T} f[au + bv + c, \quad a_1 u + b_1 v + c_1]\, |D|\, du\, dv.$$

2. Nem lineáris és közelítő leképezés. Előbb az (u, v) síknak az $x = au + bv + c$, $y = a_1 u + b_1 v + c_1$ linearis transzformáció segítségével alkottuk meg a «képét» az (x, y) síkon. Most általában az

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

átalakítást vizsgáljuk, ahol $\varphi(u, v)$ és $\psi(u, v)$ függvényekről felteszszük, hogy az (u, v) sík egy véges tartományában egyértékűek, u és v szerinti differenciálhányadosaik folytonosak, absz. értékre egy M poz. számnál kisebbek, hogy a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

függvénydeterminans az egész tartományban abszolut értékre nézve a pozitiv $\mathfrak{M}$-nél nagyobb és hogy az egész tartományban különböző (u, v) pontoknak különböző (x, y) pontok felelnek meg és viszont.

Egy kiszemelt (u_0, v_0) pontnak megfelel az $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$ pont. Az (u_0, v_0) hely környezetében levő (u, v) helynek megfelel az

$$x = \varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + (v-v_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v}; \qquad A)$$

$$y = \psi(u, v) = \psi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial\psi}{\partial u} + (v-v_0)\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

hely. Itt a $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$ az $u_0 \ldots u$, $v_0 \ldots v$ közök valamely közbenső helyén vett differenciálhányadosok. Ha adatik egy tetszés szerinti pozitiv ε, ehhez megállapítható δ úgy, hogy, ha $|u-u_0| < \delta$, $|v-v_0| < \delta$, akkor:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_0} + \varepsilon', \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial v_0} + \varepsilon'',$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial u_0} + \varepsilon''', \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{\partial\psi}{\partial v_0} + \varepsilon^{\mathrm{IV}},$$

ahol $\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}, \cdots \frac{\partial\psi}{\partial v_0}$ a differenciálhányadosok az (u_0, v_0) helyen és az $\varepsilon', \ldots \varepsilon^{\mathrm{IV}}$ az u és v-től függnek ugyan, de absz. értékre ε-nál kisebbek.

Az $A)$ alatti egyenletekből az $\varepsilon', \ldots \varepsilon^{\mathrm{IV}}$-hez tartozó részeket elhagyva, a következő lineáris átalakításra jutunk:

$$\xi = \varphi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0} + (v-v_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v_0};$$

$$\eta = \psi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial\psi}{\partial u_0} + (v-v_0)\frac{\partial\psi}{\partial v_0}. \qquad B)$$

Ez a transzformáció az (u, v) síknak [az (u_0, v_0) környezetében levő részének] képét alkotja meg az (x, y) síkon. Nyilván az ε kicsinysége miatt a (ξ, η) pont az (x, y)-hoz közel van. Ezért ezt a transzformációt az eredeti $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ «közelítő transzformációjának», e leképezést az eredeti leképezés közelítőjének nevezhetjük. E közelítő leképezés, miként látjuk, lineáris, determinánsa:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial\psi}{\partial v_0} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_0}\frac{\partial\psi}{\partial u_0}$$

(ahol, mint az imént jeleztük, az u és v mellé írt 0-sal azt akarjuk jelölni, hogy az u és v szerinti differenciálhányadosok az u_0, v_0 helyre vonatkoznak). Eszerint tehát a valódi leképezés így is írható:

$$x = \xi + \varepsilon'\,(u-u_0) + \varepsilon''\,(v-v_0);$$
$$y = \eta + \varepsilon'''(u-u_0) + \varepsilon^{\mathrm{IV}}(v-v_0).$$

És így a valódi képnek a közelítőtől való eltérése:

$$d = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} < |x-\xi| + |y-\eta| < 2\varepsilon(|u-u_0| + |v-v_0|),$$

ahol ε tetszés szerinti kis szám, $|u-u_0|$ és $|v-v_0|$ pedig kisebbek az ehhez tartozó előbb említett δ-nál. Vagyis: $d < 4\varepsilon\delta$. Arra jutottunk tehát, hogy, ha az (u_0, v_0) környezetében az $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ leképezés helyett a közelítő lineáris

$$\xi = \varphi(u_0, v_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial u_0}(u - u_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial v_0}(v - v_0),$$

$$\eta = \psi(u_0, v_0) + \frac{\partial\psi}{\partial u_0}(u - u_0) + \frac{\partial\psi}{\partial v_0}(v - v_0)$$

leképezést vesszük, akkor e környezetben levő tetszés szerinti (u, v) pont igazi képe a közelítő képétől $4\varepsilon\delta$-nál kisebb távolságra van, ahol ε tetszés szerinti kis szám, δ pedig úgy van választva, hogy ha $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, akkor az előbb ε', ε'', ε''', ε^{IV}-gyel jelölt számok absz. értékre kisebbek ε-nál. (Vagyis $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right|, \ldots \left|\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v_0}\right|$ kisebbek ε-nál.)

3. Vonal képe. Ha az (u, v) síkon folytonos vonalat képzelünk, mely például a t parameter

$$u = f_1(t), \quad v = f_2(t)$$

folytonos függvényei által van értelmezve, akkor nyilván az

$$x = \varphi[f_1(t), f_2(t)], \quad y = \psi[f_1(t), f_2(t)]$$

egyenletek is az (x, y) síkon folytonos görbét definiálnak. Ha az (u, v) görbe egyszerűen zárt, akkor az (x, y) síkon neki megfelelő görbe is ilyen: mert hiszen ha a t parameter t_1-től t_2-ig halad és t_2 parameterértéknek (elöszörre) ugyanazon (u, v) értékek felelnek meg, mint t_1-nek, akkor (x, y) is visszatér a t_1 parameternek megfelelő kiindulási pontba; előbb nem térhetett vissza, mert akkor két, egymástól különböző (u, v) pontnak ugyanazon (x, y) felelt volna meg, vagyis egyazon (x, y)-nak két különböző (u, v) pont felelne meg, ami a feltevéssel ellenkeznék.

Ha az (u, v) síkon felvett vonal rektifikálható, akkor a képe is ilyen. Ennek a megmutatása végett vizsgáljuk meg két, egymásnak megfelelő végpontokkal bíró távolság viszonyát. Ha két pont (u_1, v_1), (u_2, v_2) és a megfelelő pontok (x_1, y_1), (x_2, y_2), akkor:

$$x_2 - x_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_2 - u_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(v_2 - v_1), \qquad \alpha)$$

$$y_2 - y_1 = \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_2 - u_1) + \frac{\partial\psi}{\partial v}(v_2 - v_1),$$

ahol $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial v}$ a φ és ψ differenciálhányadosai az $u_1, \ldots u_2$, $v_1, \ldots v_2$ közök bizonyos közbenső helyein. Minthogy feltevés szerint $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial v}$ abszolut értékre nézve az egész tartományban kisebbek

M-nél, tehát:

$$|y_2-y_1| < M(|u_2-u_1|+|v_2-v_1|).$$
$$|x_2-x_1| < M(|u_2-u_1|+|v_2-v_1|).$$

Éppen így általában, ha a $t_1 \ldots t_2$ közt felosztjuk szakaszokra és az i-ik szakasz végpontjai τ_{i-1}, τ_i, melyeknek megfelelő (u, v) értékek (u_{i-1}, v_{i-1}) és (u_i, v_i) és a hozzátartozó (x, y) értékek (x_{i-1}, y_{i-1}) és (x_i, y_i) akkor:

$$|x_i-x_{i-1}| < M(|u_i-u_{i-1}|+|v_i-v_{i-1}|) \qquad \beta)$$
$$|y_i-y_{i-1}| < M(|u_i-u_{i-1}|+|v_i-v_{i-1}|)$$

és az összes osztópontokra kiterjesztett:

$$\Sigma|x_i-x_{i-1}| < M(\Sigma|u_i-u_{i-1}|+\Sigma|v_i-v_{i-1}|),$$
$$\Sigma|y_i-y_{i-1}| < M(\Sigma|u_i-u_{i-1}|+\Sigma|v_i-v_{i-1}|).$$

Ha már most a szóban forgó (u, v) görbe rektifikálható volt, akkor u és v mint a t függvényei korlátosan változók (fonction à variation bornée l. I. kötet 476. lapon) és így úgy a $\Sigma|u_i-u_{i-1}|$, mint a $\Sigma|v_i-v_{i-1}|$ a $t_1 \ldots t_2$ közbeli osztáspontok tetszés szerinti sűrítésével egy véges korláton alul maradnak, amiből következik, hogy $\Sigma|x_i-x_{i-1}|$ és éppen így $\Sigma|y_i-y_{i-1}|$ is egy véges korláton alul marad, tehát egyúttal x (és éppen így y) is a t parameter korlátosan változó függvénye, vagyis az (x, y) síkon levő kép is rektifikálható.

Jelöljük az (u, v) görbe ívhosszúságát l-lel, a megfelelő (x, y) görbéét L-lel. A kettő viszonyát is közelítően meghatározhatjuk. Ugyanis a $t_1 \ldots t_2$ közt a τ_i osztópontokkal úgy oszthatjuk részekre, hogy az (u, v) görbén keletkezett húrok összege az l-től a tetszés szerinti kis ε-nál kevesebbel különbözzék. Ehhez csak az kell, hogy úgy az $|u_i-u_{i-1}|$, valamint a $|v_i-v_{i-1}|$ különbségek egy bizonyos ϱ-nál kisebbek legyenek. Éppen így az L rektifikálhatóságából következik, hogy ha $|x_i-x_{i-1}|$ és $|y_i-y_{i-1}|$ különbségek egy bizonyos ϱ'-nál kisebbek, akkor már az (x, y) görbébe írt törtvonal az L ívhosszúságtól szintén ε-nál kevesebbel különbözik. A $\beta)$ alatti egyenlőtlenségekből következik, hogy ha a ϱ-t oly kicsinynek választjuk, hogy $2M\varrho < \varrho'$ legyen, akkor elértük, hogy úgy az (u, v), mint az (x, y) görbébe írt egymásnak megfelelő törtvonalak az l-től, illetőleg L-től ε-nál kevesebbel különböznek. Tegyük fel, hogy a $t_1 \ldots t_2$ köznek ehhez szükséges osztásrészeinek száma: n. Szemeljük ki az (u, v) görbe egyik húrját, pl. azt, melynek végpontjai: (u_1, v_1), (u_2, v_2); ennek az (x, y) görbén megfelel az (x_1, y_1), (x_2, y_2) végpontokkal biró húr. Az első hossza legyen δ, a másodiké d, akkor tehát az előbbi $\alpha)$ alatti egyenletekből:

$$d^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = E(u_2-u_1)^2+2F(u_2-u_1)(v_2-v_1)+G(v_2-v_1)^2,$$

$$E = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2; \quad F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}; \quad G = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2$$

(megjegyezve, hogy a differenciálhányadosok az $u_1 \ldots u_2$, illetve $v_1 \ldots v_2$ közben bizonyos helyeken veendők) és

$$\delta^2 = (u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2$$

$$\frac{d^2}{\delta^2} = \frac{E(u_2-u_1)^2+2F(u_2-u_1)(v_2-v_1)+G(v_2-v_1)^2}{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}.$$

Ha $u_2-u_1 = \delta \cos\alpha$, $v_2-v_1 = \delta \sin\alpha$ tesszük, ahol α a szóban forgó δ hosszúságu húr irányszöge, akkor a fenti viszonyból:

$$\frac{d^2}{\delta^2} = E\cos^2\alpha + 2F\sin\alpha\cos\alpha + G\sin^2\alpha \qquad \gamma)$$

lesz. E négyzetes alak: $Er^2+2Frs+Gs^2$ determinánsa a ϱ kellő választásával tetszés szerinti kicsiny mennyiséggel tér el

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

el nem tünő függvénydeterminans (u, v) helyen vett négyzetétől és E is pozitiv, tehát ez az alak definit pozitiv alak az (u, v) szóban forgó értéktartományában. A $\gamma)$ alatti kifejezésben E, F, G az (u, v)-vel változnak, tehát e kifejezésnek az α változásából eredő maximuma és minimuma is változik; de (u, v) egy megadott értéktartományában $E+G$, valamint $EG-F^2$ felül és alul korlátosak, vagyis léteznek olyan H, H', K, K' pozitiv számok, melyekre nézve

$$0 < H < EG-F^2 < H', \quad 0 < K < E+G < K'$$

tehát a 129. lap 90-ik gyakorlatában tárgyalt szerint, ha $\varphi(u,v)$ és $\psi(u, v)$ adva vannak, a $\gamma)$ alatti kifejezés az (u, v) szóban forgó értéktartományában minden α-ra nézve m^2 és μ^2 közé esik, ahol

$$m^2 = \frac{H}{K'}, \quad \mu^2 = \frac{H'}{K}.$$

De feltételünk szerint a két törtvonal tetszés szerinti kevéssel tér el az l, illetőleg L ívhosszúságoktól, tehát ha m' egy az m-nél kisebb poz. szám és μ' nagyobb μ-nél, akkor az ε alkalmas választásával elérhetjük, hogy az (u, v) megadott értéktartományában bármely két megfelelő rektifikálható vonaldarab viszonyára nézve:

$$m' < \frac{L}{l} < \mu'.$$

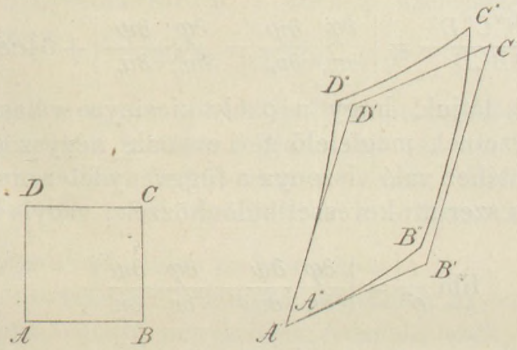
Így tehát egy adott (u, v) tartományban bármely rektifikálható vonaldarab és a $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ által keletkezett képe hosszúságainak viszonyáról megmutattuk, hogy az két poz. szám, m' és μ' közé esik.

4. Területek viszonya. Legyen adva az (u, v) síkon az $ABCD$ ϱ oldalú négyzet, melynek csúcsai rendre: (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3).

Területe: ϱ^2. Ennek a 2. pontban tárgyalt közelítő leképezéssel megfelel az (x, y) síkon az $A'B'C'D'$ parallelogramm, melynek csúcsai rendre (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3). A területe pedig:

$$t = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial\psi}{\partial v_0} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_0}\frac{\partial\psi}{\partial u_0} \right| \varrho^2.$$

Az $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ transzformáció szerint az $ABCD$ négyszögnek megfelel az $A''B''C''D''$ görbevonalú négyszög. Tegyük fel, hogy ϱ már olyan kicsiny, hogy teljesítve van a 2. pontbeli azon



9. ábra.

kívánság, hogy ε', ε'', ε''', ε^{IV} kisebb absz. értékűek a megadott ε-nál, ha $|u-u_0| < \varrho$, $|v-v_0| < \varrho$. Ekkor tehát akárminő két (u', v') és (u'', v'') helyet szemeljünk is ki az adott négyzetben, ezekre nézve teljesítve van, hogy az említett $\varepsilon', \ldots \varepsilon^{IV}$ kisebbek ε-nál, ha (u_0, v_0) helyett (u', v') és (u, v) helyett (u'', v'') tétetik. Ekkor tehát azt is tudjuk, hogy az $A''B''C''D''$ görbevonalú négyszög határvonalának pontjai a közelítő leképezésben szereplő parallelogramm oldalainak megfelelő pontjaitól $8\varepsilon\varrho$-nál kisebb távolságra vannak (a 2. pontban szereplő δ helyett most ϱ áll).

Ezen megjegyzés alapján a görbevonalú $A''B''C''D''$ területének az $A'B'C'D'$ parallelogramm területétől való eltérését megbecsülhetjük.

Ugyanis, az $A'B'C'D'$ oldalaitól $8\varepsilon\varrho$ távolságban húzzunk a parallelogrammon kívül és belül párhuzamosakat. Akkor nyilván az $A''B''C''D''$ egyetlen pontja sem lehet a most rajzolt külső parallelogrammon kívül vagy a belső parallelogrammon belül és így az $A''B''C''D''$ határvonala csakis ebbe a képkeretszerű területbe eshetik; tehát az $A''B''C''D''$ területe az $A'B'C'D'$ területétől kevesebbel különbözhetik, mint amekkora ennek a keretszerű idomnak a területe. Ez azonban könnyen kiszámítható. Ugyanis ez az idom 4 trapézből áll, melyek középvonalai a parallelogramm oldalai és magasságuk $16\varepsilon\varrho$; tehát ezen idom területe: $16\varepsilon\varrho \,.\, k$, ahol k a parallelogramm kerülete. Ez a kerület azonban az ívhosszúságok összehasonlításánál mondottakból következően $4\varrho\mu''$, ahol μ'' egy, az m' és μ' közötti szám; tehát arra az eredményre jutottunk, hogy az $A''B''C''D''$ területe:

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial\psi}{\partial v_0}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_0}\frac{\partial\psi}{\partial u_0}\right|\varrho^2+64\alpha\varepsilon\varrho^2,$$

ahol α egy abszolut értékre μ''-nál, és így a fix μ'-nél kisebb szám. Így tehát az $A''B''C''D''$ görbevonalú négyszög és az $ABCD$ eredeti négyzet területeinek viszonya:

$$\frac{A''B''C''D''}{ABCD}=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial\psi}{\partial v_0}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_0}\frac{\partial\psi}{\partial u_0}\right|+64\alpha\varepsilon.$$

Ebből tehát azt látjuk, hogy a ϱ oly kicsinyre választható, hogy a ϱ oldalu négyzetnek megfelelő görbevonalú négyszög területének a négyzet területéhez való viszonya a függvénydeterminláns abszolut értékétől tetszés szerinti kevéssel különbözzék; vagyis ha $A''B''C''D''$ területe: t

$$\lim_{\varrho=0}\frac{t}{\varrho^2}=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|.$$

5. Az integrál transzformációjának képlete. Most már megállapíthatjuk a kettős integrál transzformációjának képletét. Legyen adva az (u, v) síkon egy egyszerűen zárt rektifikálható C görbével határolt T terület. $\varphi(u, v)$ és $\psi(u, v)$ a C görbén és a belsejében egyértékű folytonos és folytonos differenciálhányadosokkal bíró függvények legyenek. Az $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ transzformáció szerint T az (x, y) sík T' tartományának feleljen meg, melyet — mint tudjuk — a szintén rektifikálható C' görbe határol. A leképezés egyértelműsége folytán akár a C-t tekintjük adottnak, akár a C'-t, egyre megy.

Legyen adva a T'-ben folytonos, egyértékű $f(x, y)$ függvény. Kiszámítandó az $I=\iint\limits_{T'} f(x, y)\,dx\,dy$ kettős integrál.

Meg akarjuk mutatni, hogy éppen úgy, mint a lineáris transzformációnál, ebben az általános esetben is:

$$\iint\limits_{T'} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{T} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,D\,du\,dv=\iint\limits_{T} F(u, v)\,D(u, v)\,du\,dv,$$

ahol D-vel, vagy $D(u, v)$-vel jelöljük a φ és ψ (u, v) szerinti függvénydeterminánsának abszolut értékét az (u, v) helyen, vagyis:

$$D=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right| \quad \text{és} \quad F(u, v)=f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Legyen σ egy tetszés szerinti kis pozitiv szám, M' az $F(u, v)$ felső határa a T-ben (a C-t is beleértve). M a D felső határa a T-ben és M'' valamivel nagyobb, mint M.

1. Válasszuk az ε poz. számot oly kicsinyre, hogy $64\mu'\varepsilon M'T < \sigma$ legyen [μ' az előbbi 3. pontban szereplő állandó, mely a megfelelő ívhosszúságok közötti viszony felső határa, M' az $f(x, y)$ felső korlátja a T'-ben].

2. Legyen ϱ oly kicsiny, hogy egy ϱ oldalu négyzet bármely két helyén vett $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial v}$ differenciálhányadosok különbségei ε-nál kisebbek legyenek.

3. Osszuk fel az (u, v) síkot a tengelyekkel párhuzamos egyenesek által négyzetes rácsra, e rács ϱ szélességét oly kicsinyre választva, hogy a

$$\Sigma F(u_i, v_i) D(u_i, v_i)\varrho^2$$

összeg azokra a négyzetekre kiterjesztve, amelyekben a T tartomány és a C görbe összes pontjai foglaltatnak (és amelyek mindegyike legalább egy pontját tartalmazza a T-nek, illetőleg C-nek), az $\iint\limits_T F(u, v)D\,du\,dv$-től σ-nál kevesebbel különbözzék. [Az $F(u, v)D$ függvény integrálható, tehát ez lehetséges.]

4. E rácsbeosztásnál keletkező négyzetek képei az (x, y) síkon δ-val jelölt görbevonalú négyszögek lesznek; ezek részben a T'-be beleesnek, részben pedig a C'-el közös pontjuk lesz. Mindegyik δ területe mindenesetre kisebb $M''\varrho^2$-nél, hiszen a δ_i és ϱ^2 viszonya a D_i-től tetszés szerinti kevéssel különbözik, ha ϱ elég kicsiny. Azokat a δ részeket, melyek a T'-n belül vannak, jelöljük δ'-vel, azokat pedig, melyeknek C'-al is van közös pontjuk, δ''-al. Válaszszuk a ϱ-t oly kicsinyre, hogy ha az (x, y) síkon a T' területet $M''\varrho^2$-nél kisebb részekre osztjuk, akkor a belső részekre kiterjesztett

$$\Sigma f(x_i, y_i)\delta_i'$$

összeg az $\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy$-tól σ-nál kevesebbel különbözzék és

5. válasszuk a ϱ-t még olyan kicsinyre is, hogy azon δ''-kra nézve, melyeknek a C' görbével közös pontjuk van (melyek tehát a C'-től $\mu'\varrho\sqrt{2}$-nél kisebb távolságban levő pontok alkotta sávban vannak), a $\Sigma f(x_k, y_k)\delta_k''$ összeg szintén kisebb legyen σ-nál.

Már most alkossuk meg a

$$\Sigma f(x_i, y_i)\delta_i$$

összeget, kiterjesztve mindazokra a δ_i részekre, amelyek a 3. alatt említett négyzetek képei. Minthogy az előző pont szerint:

$$\delta_i = D_i\varrho^2 + 64\alpha_i\varepsilon\varrho^2,$$

tehát: $$\Sigma f(x_i y_i)\delta_i = \Sigma f(x_i y_i) D_i\varrho^2 + \Sigma 64 f(x_i, y_i)\alpha_i\varepsilon\varrho^2.$$

A jobboldalon álló második tag absz. értéke kisebb, mint $64M'\mu'\varepsilon T$, vagyis az 1) feltétel szerint kisebb σ-nál. Jelöljük σ'-sal. A baloldalon levő összegben vannak már olyan részek is, melyek a C'-al közös ponttal biró δ-kra vonatkoznak; ezért ezt az összeget válasszuk két részre. Az első részbe tegyük azokat, melyek az összes belső δ-kra vonatkoznak, a másodikba a többit. Ez a második rész, a $\Sigma f(x_i y_i)\delta_i''$ összeg, az 5. alatt említett sávba tartozó δ-kra vonatkozik, tehát az 5) szerint ez a második rész kisebb, mint σ. Jelöljük σ''-vel. Igy tehát:

$$\Sigma f(x_i, y_i)\delta_i' + \sigma'' = \Sigma f(x_i, y_i) D_i \varrho^2 + \sigma'.$$

A baloldali első összeg és a jobboldali első összeg helyett a 4), illetőleg a 3) pont alatti megállapodás szerint a megfelelő integrálokat téve:

$$\iint\limits_{T'} f(x, y)\, dx\, dy + \sigma''' + \sigma'' = \iint\limits_{T} F(u, v)\, D\, du\, dv + \sigma^{\mathrm{IV}} + \sigma',$$

ahol σ', σ'', σ''', σ^{IV} kisebbek az előre tetszés szerint választott σ-nál; tehát:

$$\iint\limits_{T'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{T} F(u, v)\, D\, du\, dv + \eta,$$

ahol $|\eta| < 4\sigma$. Minthogy ez az egyenlőség bárminő kis σ-nál érvényes, tehát:

$$\iint\limits_{T'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{T} F(u, v)\, D\, du\, dv.$$

Vagyis:

$$\iint\limits_{T'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{T} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} \right| du\, dv.$$

Ezzel megmutattuk, hogy a T' tartományra vonatkozó

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrált miképen lehet új változók bevezetésével átalakítani. Az eljárás a következő: Az $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ transzformáció átviszi a T' tartomány C' zárt határvonalát az (u, v) sík C zárt görbéjébe, mely a T'-nek megfelelő T tartományt határolja. Ez lesz az új integráció tartománya. Az $f(x, y)$-ba bevezetjük az x helyébe a $\varphi(u, v)$ és y helyébe a $\psi(u, v)$ függvényeket. Az így keletkezett $f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$-t jelöljük $F(u, v)$-vel. Megalkotjuk a φ és ψ függvények függvénydeterminánsát és ennek abszolut értékével $F(u, v)$-t megszorozzuk. Az új integrandus: $F(u, v)$. $|D(u, v)|$ lesz.

Megjegyezzük azonban, hogy φ és ψ függvények u és v szerinti függvénydeterminánsa a tartományban sehol sem válik zérussá és hogy T és T' tartományok között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás volt.

6. **Az integrál transzformációjának egyszerűbb megállapítása.** Kevésbbé szemléletesen, de az előbbinél egyszerűbb módon is megállapítjuk a transzformáció fontos képletét. Legyen a transzformálandó integrál:

$$I = \iint\limits_T f(x, y)\, dx\, dy,$$

ahol a T tartomány olyan egyszerűen zárt C görbével határoltatik, melyet úgy az X, mint az Y tengelyekkel párhuzamos egyenesek legfölebb két pontban metszenek és legyen $f(x, y)$ a T-ben folytonos.

Az I integrált mint kétszeres integrált írhatjuk:

$$I = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx,$$

ahol x_1 és x_2 jelentik az y magasságban az x tengellyel párhuzamosan vont egyenesnek a C-vel való (P_1, P_2) metszéspontjainak abscisszáit és b_1, b_2 a legszélsőbb y ordinátákat. Transzformáljuk a belső integrált. Vezessük be x helyett az $x = \varphi(u)$ transzformációval az u változót. $\varphi(u)$ az u-nak egyértékű, monoton, folytonos és folytonos differenciálhányadossal biró függvénye legyen és φ'_u a szóban levő tartományban pozitiv. A C görbe ezen transzformációval átmegy a C'-be, amely a C-től [az (u, v) síkon] csak abban különbözik, hogy az x tengely irányában a pontjai eltolódnak (dilatatiót szenvedett), de az y irányában eltolódás nem állott be, vagyis mondhatjuk, hogy $y = v$. Az egyszerű integrál transzformációjára vonatkozó eljárás szerint először meghatározzuk azokat az u_1 és u_2 értékeket, amelyek az x_1 és x_2-nek megfelelnek. Evégből megoldjuk az

$$x_1 = \varphi(u_1) \quad \text{és} \quad x_2 = \varphi(u_2)$$

egyenleteket u_1, illetőleg u_2-re. Az u_1 és u_2 számértékek a C' görbe (P'_1, P'_2) pontjainak abscisszái, amelyek a P_1 és P_2 pontokból az említett dilatatióval keletkeznek. A belső integrál tehát:

$$\int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u), y]\, \varphi'_u\, du$$

és így:

$$I = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u)\, y]\, \varphi'_u\, du$$

és azonnal látjuk, hogy ez nem egyéb, mint a C' által határolt T' területre vonatkozó

$$\iint\limits_{T'} f[\varphi(u), y]\, \varphi'_u\, du\, dy$$

kettős integrál.

Ha most még a C' görbét az y tengely irányában is dilatatiónak vetjük alá azáltal, hogy

$$y = \psi(v)$$

transzformációt végezzük, a $\psi(v)$-t ugyanazon feltételeknek vetve alá, mint az előbb a $\varphi(u)$-t, akkor az előbbi lépés ismétlésével azt kapjuk, hogy:

$$I = \iint\limits_{T''} f[\varphi(u), \psi(v)]\, \varphi'_u \psi'_v\, du\, dv,$$

ahol T'' az $x = \varphi(u)$, $y = \psi(v)$ transzformációval a T-ből keletkezett tartomány. Ezzel a kettős integrál transzformáció-képletére jutottunk olyan esetekben, midőn az (x, y) helyett az $x = \varphi(u)$, $y = \psi(v)$ speciális alakú transzformációval vezettük be az uj (u, v) változókat.

Most az x és y-ra ezt a transzformációt alkalmazzuk:

$$x = u, \quad y = \varrho(u, v),$$

vagyis az (x, y) sík minden P pontjának olyan P' felel meg az (u, v) síkon, melynek abscisszája megegyezik a P abscisszájával, de ordinátája (v) általánosságban különböző és pedig úgy az $x=u$-tól, mint az y-tól függő; tehát ismét az Y tengely irányában való változást szenved a T tartomány. Feltesszük, hogy ϱ'_v a szóban forgó tartományban nem tűnik el.

Ha u-ra az x betűt megtartjuk, akkor tehát $y = \varrho(x, v)$ és így az előbbi gondolatmenet követhető, mert hiszen az y szerint történő integrációnál x változatlan. Eszerint tehát:

$$I = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{v_1}^{v_2} f[x, \varrho(x, v)] \varrho'_v \, dv,$$

ahol v_1 és v_2 a C görbe x abscisszájú pontjainak dilatatiójából keletkező pontok ordinátái, vagyis ez az integrál mint kettős integrál így írható:

$$I = \iint_{T'} f[x, \varrho(x, v)] \varrho'_v \, dx \, dv,$$

ahol T' a T-ből az $x = u$, $y = \varrho(u, v)$ által keletkező terület. Erre az integrálra újból ugyanilyen transzformációt alkalmazunk, v-t változatlanul tartva és

$$x = \varphi(u, v)$$

téve. Feltesszük, hogy $\operatorname{sgn} \varphi'_u = \operatorname{sgn} \varrho'_v$. Az imént mondottak szerint I-ből lesz:

$$I = \iint_{T''} f\{\varphi(u, v), \varrho[\varphi(u, v), v]\} \varrho'_v \varphi'_u \, du \, dv,$$

ahol T'' a T-ből az $y = \varrho(x, v)$, $x = \varphi(u, v)$ által keletkezett terület. A ϱ függvény komplikált alakját egyszerűsítsük. Tegyük:

$$\varrho[\varphi(u, v), v] = \psi(u, v).$$

Ebből u, azután v szerint differenciálva:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Ha $\dfrac{\partial \varrho}{\partial \varphi}$-t e két egyenletből elimináljuk:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varrho}{\partial v} = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right|$$

egyenletre jutunk és így ha az I-ben levő $\varphi'_u \varrho'_v$-t a jobboldali kifejezéssel helyettesítjük és $f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$ helyett $F(u, v)$-t írunk:

$$I = \iint_{T''} F(u, v) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| du \, dv$$

relációra jutunk és ezzel a transzformáció képletét megállapítottuk az $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ helyettesítés esetében.

7. Példák a kettős integrál transzformációjára. *1. Példa. Transzformáció poláris koordináták bevezetésével.* A kettős integrál transzformációját felhasználjuk egy igen nevezetes egyszerű integrál, az ú. n. LAPLACE-féle, vagy másképpen: *valószínűségi* integrál kiszámítására. Legyen adva az $ABCD$ négyzet, melynek csúcspontjai rendre: $(a, -a)$, $(a, +a)$, $(-a, a)$ $(-a, -a)$. Erre a négyzetre vonatkozzék ez az integrál:

$$I' = \iint_T e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Ez az integrál kétszeres integrálással kifejezve:

$$I' = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)} dy = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\, dy = [\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx]^2$$

[ami a 146. lapon közöltből is következik, mert itt az integrandus $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$].

A kettős integrál kiszámítását felhasználjuk a $\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx$ integrál kiszámítására abban az esetben, ha a minden határon túl nő, vagyis ki akarjuk számítani az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

egyszerű integrált. Ezen integrál konvergenciájáról az I. kötetben a 405. lapon közölt kritériumokkal könnyen meggyőződhetünk.

Még némi kis egyszerűsítést végzünk; ugyanis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

De ha az első integrálban $x = -y$ tesszük, akkor:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = -\int_{\infty}^{0} e^{-y^2} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

és az integráció betűjéül megint x-et téve,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Jelöljük az $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$ integrált, az ú. n. LAPLACE-féle, vagy *valószínűségi* integrált I-vel, akkor tehát:

$$I = \lim_{a=\infty} \int_{0}^{a} e^{-x^2}\, dx.$$

Igy tehát csak a $\int_{0}^{a} e^{-x^2} dx$ számítandó. Előbb arra jutottunk, hogy:

$$I' = \iint_T e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = [\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx]^2.$$

De $\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx = \int_{-a}^{0} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{a} e^{-x^2} dx$ és az első integrálban megint a fönti átalakitással:

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = 2 \int_{0}^{a} e^{-x^2}\, dx,$$

tehát:

$$I' = \iint_T e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = 4\, [\int_{0}^{a} e^{-x^2}\, dx]^2.$$

A baloldali integrált átalakítjuk poláris koordináták bevezetésével, vagyis:

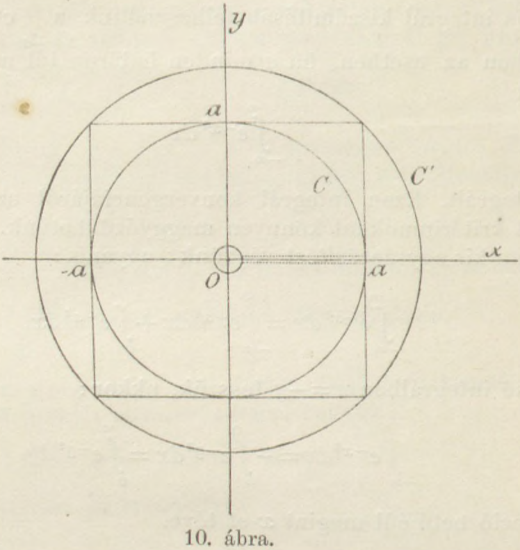
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

tesszük. A transzformáció függvénydeterminánsa:

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r$$

és így $|D| = r$.

Az $x=0$, $y=0$ pontnak az $r=0$ felel meg; de ezen r érték a függvénydeterminánst zérussá teszi; tehát nincs teljesítve az a követelés, amit a transzformációra vonatkozólag felállítottunk, vagyis poláris koordinátákkal közvetlenűl nem transzformálhatjuk az integrált, ha az integráció területe a



10. ábra.

kezdőpontot is tartalmazza. Ezen a bajon úgy segíthetünk, hogy az integráció területéből a kezdőpontot kirekesztjük. Evégből a kezdőpont körül egy tetszés szerinti kis kört rajzolunk és integráció-terület gyanánt a négyzetből e kör kivágásával megmaradt gyűrűszerű részt választjuk. Az

$$\iint_T e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

-ből ezzel elhagytunk egy részt: a kis körre vonatkozót. Minthogy azonban $e^{-(x^2+y^2)}$ integrandus a kezdőpontban: 1 és az integráció-terület (a kis kör) tetszés szerinti kicsinynek vehető, tehát az elhagyott rész tetszés szerinti kicsiny.*

* A kis kör kivágásával azonban az integráció területe már nem olyan, aminőre általános tárgyalásunk vonatkozott; t. i. határvonala nem egyetlen C egyszerű görbe, hanem gyűrűforma területtel van dolgunk. Ezen azonban megint könnyen segíthetünk; u. i., ha az x tengely mentén, e tengelyhez elég közel két párhuzamosat húzunk (a pontozott vonalakat) és a közéjük foglalt területet is kirekesztjük, akkor az $\iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ integrálból megint csak tetszés szerinti keveset hagytunk el (akármekkora is legyen az a) és ezzel az integráció területe egyszerűen összefüggővé vált; a határgörbéje egyszerű görbe.

Megjegyezzük, hogy hasonló gondolatmenettel, mint amelyet itt végeztünk, mindig megmutathatjuk, hogy ha a transzformáció függvénydeterminánsa véges számú helyen 0 és e helyeken az integrandus egyértékű és véges, akkor az átalakítás elvégezhető. Csak e véges számú helyet kell kirekesztenünk elég kis görbékkel az integráció területéből. Az adott integrálnak a kirekesztett területekre vonatkozó része tetszés szerinti kicsinnyé tehető, a megmaradó integrációs terület pedig a jegyzetben ismertetett módon egyszerűen összefüggővé tehető.

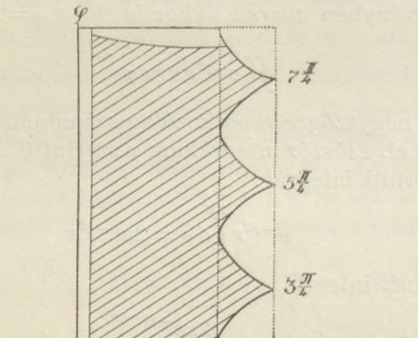
A poláris koordinátákkal való transzformáció geometriai jelentését is feltüntetjük. Képzeljünk egy új síkot és ezen a merőleges tengelyrendszert, az r és φ tengelyeket. A négyzet minden pontjának (az átalakított négyzetet értve) e síkon egy pont felel meg. Igy például a csúcspontoknak megfelelő pontok ezek:

$$\left(a\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right),\quad \left(a\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right),\quad \left(a\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{4}\right),\quad \left(a\sqrt{2},\ \frac{7\pi}{4}\right).$$

A négyzet oldalainak megfelelnek a fentebbi pontok között vonuló:

$$r\sin\varphi=a,\quad r\cos\varphi=-a,\quad r\sin\varphi=-a,\quad r\cos\varphi=a$$

transzcendens görbék. A ϱ sugarú kis körnek, melynek belsejét kirekesztettük, megfelel az $r=\varrho$ egyenes, mely az r tengelyre merőleges. A felső pontozott



11. ábra.

vonalnak, mely δ távolságban van az x tengelytől, megfelel a $\delta=r\sin\varphi$ transzcendens görbe, az alsónak: $\delta=-r\sin\varphi$. E két görbe közül az első $\varphi=0$ és $\varphi=\alpha$ egyenesek között vonul, ahol α igen kicsiny ($\alpha<\arcsin\frac{\delta}{\varrho}$ főértéke és így a δ választásával tetszés szerinti kicsinnyé tehető); a másik pedig $\varphi=2\pi$ és $2\pi-\alpha$ közé esik, tehát a $\varphi=2\pi$-től tetszés szerinti kevéssel tér el. A négyzet képét az $(r,\ \varphi)$ síkon a mellékelt ábrában tüntettük fel hozzávetőlegesen. Az átalakított integrál eszerint:

$$\iint\limits_{T'} e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi.$$

T' jelenti az ábrában szereplő területet. E területre vonatkozó integrál I' kiszámítása nem könnyebb feladat, mint az eredeti integrál értékének meghatározása. De nekünk nincs szükségünk erre az integrálra, mert hiszen a valószínűségi integrál meghatározására törekszünk.

Evégből tekintetbe vesszük, hogy az integrandus pozitiv, amiből rögtön következik, hogy ha (L. a 10. ábrát) a négyzetbe a C érintő kört rajzoljuk, melynek rádiusa : a, akkor e körre vonatkozó $\iint\limits_C e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ kisebb I'-nél; ellenben, ha a négyzet köré az $a\sqrt{2}$ sugarú C' kört rajzoljuk, akkor azt találjuk, hogy az erre vonatkozó $\iint\limits_{C'} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ nagyobb I'-nél; tehát:

$$\iint\limits_C e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < I' < \iint\limits_{C'} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

A C kör által határolt területnek, illetőleg a C kör és a ϱ sugarú kis kör által határolt gyűrűnek (l. 10. ábra) az (r, φ) síkon megfelelő idom könnyen meghatározható. Ugyanis a ϱ sugarú körnek az $r=\varrho$ egyenes, az a sugarú körnek az $r=a$ egyenes, a pontozott vonalaknak pedig, melyeket az x tengely tetszés szerinti közelségében húzhatunk, a $\varphi=0$ és $\varphi=2\pi$ egyenesekhez közeli vonalak felelnek meg. Ha $\varrho=0$, akkor a körgyűrűből az a sugarú (az x tengely mentén felvágott) kör válik és így ennek képe az a derékszögű négyszög, melynek csúcsai: $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, 2\pi)$, $(0, 2\pi)$. A fenti egyenlőtlenség érvényben marad akkor is, ha a $\varrho=0$ határesetre térünk át. Eszerint tehát a

$$\iint e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi$$

erre a derékszögű négyszögre vonatkozólag számítandó ki. Az integrációt két lépésben végezzük el. Először integrálunk φ szerint $0\ldots 2\pi$-ig, azután r szerint $0\ldots a$-ig. A φ szerinti integrál:

$$e^{-r^2} r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi e^{-r^2} r$$

és most az r szerinti integrál:

$$2\pi \int_0^a e^{-r^2} r\,dr = -\frac{2\pi e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^a = \pi\,(1-e^{-a^2}).$$

Eszerint tehát a C körre vonatkozó integrál számértéke: $\pi\,(1-e^{-a^2})$.

A C'-re vonatkozó integrál ettől csak abban különbözik, hogy a helyett $a\sqrt{2}$ teendő. És így

$$\pi(1-e^{-a^2}) < I' < \pi(1-e^{-2a^2}).$$

Vagy I' fenti értékét figyelembe véve:

$$\pi(1-e^{-a^2}) < 4\,[\int_0^a e^{-x^2}\,dx]^2 < \pi\,(1-e^{-2a^2})$$

és innen:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1-e^{-a^2})^{\frac{1}{2}} < \int_0^a e^{-x^2}\,dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1-e^{-2a^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Ha már most a végtelenné válik, akkor úgy a jobboldali, mint a baloldali kifejezés határértéke $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ lesz; tehát:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. *Példa. Az Ivory-féle transzformáció.* Ellipszisre (és ellipszoidra) vonatkozó integrálásoknál igen célszerűen használható az IVORY-féle transzformáció. Legyen például az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellipszis területe kiszámítandó kettős integrállal. A keresett terület:

$$T=\iint dx\,dy.$$

A szóban forgó transzformáció a következő:

$$x=a\varrho\cos\varphi,\quad y=b\,\varrho\sin\varphi.$$

A függvénydeterminans:

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho}\,\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\,\frac{\partial y}{\partial\varrho}=ab\varrho.$$

Itt is áll az, amit előbb már megjegyeztünk, hogy a $\varrho=0$ helyen a függvénydeterminans 0; az ellipszisből most is kirekesztünk egy igen kis, εa, εb tengelyekkel biró ellipszist és az X tengellyel δ távolságban húzott párhuzamosak közé foglalt részt. Az így kirekesztett terület határértéke, ha ε, illetőleg δ 0-sá válnak: 0. Képzeljük megint a (ϱ, φ) síkot és ezen a ϱ, illetőleg φ tengelyt. A külső ellipszist futja be az (x, y) pont, ha $\varrho=1$; a belsőt, ha $\varrho=\varepsilon$. A párhuzamosaknak, melyek egyenletei $y=\delta$ és $y=-\delta$, $\delta=b\varrho\sin\varphi$, $\delta=-b\varrho\sin\varphi$ transzcendens görbék felelnek meg, melyek közül az első a $\varphi=0$ és $\varphi=\arc\sin\frac{\delta}{b\varepsilon}$ között van, a második $\varphi=0$ és $\varphi=\arc\sin\left(-\frac{\delta}{b\varepsilon}\right)$ között; vagyis ha $\frac{\delta}{b\varepsilon}=\varepsilon'$, akkor az első $\varphi=0$ és $\varphi=\varepsilon'$, a második $\varphi=2\pi$ és $\varphi=2\pi-\varepsilon'$ között vonul; tehát, ha δ úgy válik 0-sá, hogy ε' is zérussá lesz, akkor ezen határvonalaknak $\varphi=0$ és $\varphi=2\pi$ egyenesek felelnek meg, vagyis, ha a belső ellipszis ponttá, a két párhuzamos határvonal a fél nagytengellyé zsugorodik össze, akkor az így preparált ellipszis képe a (ϱ, φ) síkon a $\varrho=0$, $\varrho=1$, $\varphi=0$ $\varphi=2\pi$ egyenesek által határolt derékszögű négyszög; tehát:

$$T=\int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\,\varrho\,d\varphi\,d\varrho=2ab\pi\int_0^1\varrho\,d\varrho=ab\pi.$$

8. **A felületrész területe.** A görbe felület területének meghatározása a görbe vonal ívhosszúságának méréséhez analog feladat. Közelfekvő gondolat volt tehát a felület területét oly módon definiálni, amint a görbe vonal ívhosszúsága definiáltatott: Képzeljük el a görbe felületnek egy, a görbe felületen vonuló C egyszerűen zárt görbével határolt darabját (süveg). Helyezzünk e felületrészbe háromszögű lapokból álló polyederrészt. Nevezzük e polyederrész területét P-nek. Ha már most a polyeder oldalélei végtelen kicsinyekké válnak és a polyedersüveg határvonala a C-hez konvergál, akkor a P határértéke volna a görbe felületrész területe. Tudjuk, hogy a megfelelő definició a görbevonal ívhosszúságát szolgáltatta mindazon esetekben, midőn a görbét értelmező függvények korlátosan változók voltak. A felületre vonatkozó definició azonban ebben az alakjában nem alkalmas a terület meghatározására. Schwarz H. A. mutatta ki* egy igen egyszerű, szellemes példán e definició helytelen voltát. A definició t. i. helytelen azért, mert ha csak annyit mondunk, hogy a polyeder élei zérus felé tartanak, a polyeder felszíne általában nem közeledik meghatározott (véges vagy végtelen) számérték felé.

* H. A. Schwarz, Gesammelte Werke II. p. 309.

Schwarz példája a következő: Jelöljék x, y, z a pont derékszögű koordinátáit és legyenek u és v független változók, r és h konstansok,

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u, \quad z = v$$
$$0 \leq u \leq 2\pi\,; \quad 0 \leq v \leq h.$$

Ezen egyenletek egy, az (xy) síkra merőleges h magasságú körhenger palást felületét értelmezik; az alapkör centruma a kezdőpont, sugara: r.

Erre a körhengerre alkalmazzuk a definiciót a következő módon: Osszuk fel az alapkört $2m$ egyenlő részre. A páros rendű osztópontok argumentumai:

$$u = 0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{2.2\pi}{m}, \quad \frac{3.2\pi}{m}, \ldots \frac{(m-1).2\pi}{m}.$$

A páratlan rendű osztópontok argumentumai pedig:

$$u = \frac{2\pi}{2m}, \quad \frac{3.2\pi}{2m}, \quad \frac{5.2\pi}{2m}, \ldots \frac{(2m-1).2\pi}{2m}.$$

Az osztópontokban emeljünk az (xy) síkra merőlegesen alkotókat; a páros rendű alkotók $p_0, p_2, p_4, \ldots p_{2m-2}$, a páratlan rendűek: $p_1, p_3, \ldots p_{2m-1}$.

Legyen n szintén pozitiv egész szám és osszuk fel a h magasságot $2n$ egyenlő részre és mindenik osztóponton át helyezzünk a magasságra merőleges síkot. Ezzel a hengerpaláston $2n$ kört kapunk, melyek közül a páros rendűek: $k_0, k_2, k_4, \ldots k_{2n}$ (ahol k_0 az alsó alapkör és k_{2n} a felső alapkör), a páratlan rendűek pedig: $k_1, k_3, \ldots k_{2n-1}$. A hengerpalástba írt polyeder csúcspontjaiúl válasszuk a páros rendű alkotóknak a páros rendű körökkel és a páratlan rendű alkotóknak a páratlan rendű körökkel való metszéspontjait. Ha a k_r körnek a p_t egyenessel való metszéspontját $(k_r p_t)$-vel jelöljük, akkor tehát az első rétegbe eső háromszögek rendre:

$$[(k_0p_0),(k_0p_2),(k_1p_1)],\ [(k_1p_1),(k_1p_3),(k_0p_2)],\ [(k_0p_2),(k_0p_4),(k_1p_3)],\ [(k_1p_3),(k_1p_5),(k_0p_4)],$$

s í. t. A háromszögek mind egybevágók, számuk minden övben $2m$, tehát összesen: $4mn$. Egy-egy háromszög területét számítsuk ki: alapjuk a $\frac{2\pi}{m}$ középponti szöghöz tartozó húr: $2r\sin\frac{\pi}{m}$, a magasság pedig olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója: $\frac{h}{2n}$, a másik befogója pedig $r - r\cos\frac{\pi}{m}$; tehát a háromszög területe:

$$r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2 + \frac{h^2}{4n^2}}$$

és igy az egész polyeder területe:

$$t = 4mn\, r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{4r^2\sin^4\frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{4n^2}}.$$

Ebből például következik, hogy 1. ha $\frac{n}{m}$ viszony állandóan: c, akkor

$$t = \frac{4}{c}n^2 r\sin\frac{c\pi}{n}\sqrt{4r^2\sin^4\frac{c\pi}{2n} + \frac{h^2}{4n^2}} =$$
$$= \frac{4}{c}r.n\sin\frac{c\pi}{n}\sqrt{4r^2n^2\sin^4\frac{c\pi}{2n} + \frac{h^2}{4}}.$$

Ha már most n végtelenné válik, akkor:

$$\lim_{n=\infty} n \sin \frac{c\pi}{n} = c\pi\,; \quad \lim_{n=\infty} n^2 \sin^4 \frac{c\pi}{2n} = 0,$$

tehát:

$$\lim_{n=\infty} t = 2r\pi h.$$

és így megkaptuk a hengerpalást felületének az elemekből ismert mérőszámát, ha n és m úgy válnak végtelenné, hogy $\frac{n}{m}$ viszony állandó, 0-tól különböző, véges szám. (E mérőszám szokásos levezetésének az elemi geometriában az a hibája van, hogy nem lehet bebizonyítani a hengerpalást és a kiterítéssel nyert négyszög területének egyenlőségét, mert a hengerpalást területe nincs definiálva.)

2. Ha $\frac{n}{m^2} = c$, akkor:

$$t = 4m^3 cr \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{4c^2 m^4}} =$$

$$= 4cr\, m \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{4r^2 m^4 \sin^4 \frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{4c^2}}$$

és minthogy

$$\lim m \sin \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim m \sin \frac{\pi}{m} = \pi,$$

tehát:

$$\lim t = 4rc\pi \sqrt{\frac{r^2}{4}\pi^4 + \frac{h^2}{4c^2}} = 2r\pi \sqrt{r^2\pi^4 c^2 + h^2}.$$

A terület határértéke tehát a c tetszés szerinti számtól függ, ha n és m úgy válnak végtelenné, hogy $\frac{n}{m^2} = c$ viszony állandó maradjon.

3. Ha $\frac{n}{m^3} = c$, akkor

$$t = 4rm^4 c \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{4m^6 c^2}},$$

vagyis:

$$t > 4rcm \sin \frac{\pi}{m} \cdot 2r \left(m \sin \frac{\pi}{2m}\right)^2 \cdot m^2$$

és így t m-mel korlátlanul nő, a terület határértéke végtelenné válik.

7. A felületrész területének értelmezése. Érintősík. Ez az egyszerű példa világosan mutatja, hogy a görbe felület területének előbb említett értelmezése nem állhat meg, ha csak a polyedert alkotó háromszögek alkotórészeire vonatkozólag bizonyos megszorítást nem teszünk. Épen ezért másképen kell a felület területét értelmezni. A kérdés általános tárgyalása e kézikönyv keretén túl esik,* itt csak a felület fogalmának kellő korlátozása mellett tárgyaljuk a terület meghatározását.

Legyen az (u, v) síkon egy egyszerűen zárt, rektifikálható C görbe megadva. A C-vel határolt T-ben levő (u, v) pontokhoz rendeljük az (x, y, z) pontokat a következő módon:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v), \qquad \alpha)$$

* A kérdésnek a felület általános értelmezésére vonatkozó tüzetes tárgyalásával több értekezésben foglalkozott Geőcze Zoárd, akinek munkálataira utalok. (L. az Irodalmat a IX. fejezet végén.)

ahol feltesszük, hogy különböző (u, v) értékpárokhoz különböző (x, y, z) pontok tartoznak, továbbá, hogy az f_1, f_2, f_3 függvényeknek (u, v) szerinti differenciálhányadosai a T-ben folytonosak és végül, hogy e három függvénydetermináns:

$$A = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_3}{\partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial f_3}{\partial u};$$

$$B = \frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial f_3}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u};$$

$$C = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial u}$$

egyszerre nem tünik el, amit úgy is mondhatunk, hogy

$$A^2+B^2+C^2$$

a T tartományban és a határán is egy pozitiv M számnál mindig nagyobb. Az (x, y, z) értékrendszerek összességéről azt mondjuk, hogy: felületet alkotnak; vagyis a T tartományhoz az α) alatti egyenletek által rendelt pontok egy F felületrészen vannak. Az α) alatti egyenletek az F felület parameteres egyenletei. A C görbének megfelel egy C' térbeli görbe, az F felületrész határvonala. A felületnek C' görbe által határolt területrészét akarjuk meghatározni. Előbb azonban megismerkedünk az érintősík fogalmával.

Szemeljünk ki T-ben egy (u_0, v_0) pontot. Az F felületnek ehhez tartozó pontja legyen: (a, b, c), ahol

$$a=f_1(u_0, v_0),\quad b=f_2(u_0, v_0),\quad c=f_3(u_0, v_0).$$

Az (a, b, c) ponton át vonjunk egy

$$P(\xi-a)+Q(\eta-b)+R(\zeta-c)=0 \tag{β}$$

síkot. Az (u_0, v_0) szomszédságában vegyünk fel egy tetszés szerinti u_0+h, v_0+k pontot. Ennek megfelel az F felületen az

$$x=f_1(u_0+h, v_0+k),\quad y=f_2(u_0+h, v_0+k),\quad z=f_3(u_0+h, v_0+k)$$

pont. Részletesebben írva, illetőleg az f függvényeket Taylor-sorba fejtve:

$$x = f_1(u_0, v_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_0} + \varepsilon_1\right)h + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_0} + \varepsilon_2\right)k =$$

$$= a + \frac{\partial f_1}{\partial u_0}h + \frac{\partial f_1}{\partial v_0}k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

$$y = b + \frac{\partial f_2}{\partial u_0}h + \frac{\partial f_2}{\partial v_0}k + \varepsilon_3 h + \varepsilon_4 k$$

$$z = c + \frac{\partial f_3}{\partial u_0}h + \frac{\partial f_3}{\partial v_0}k + \varepsilon_5 h + \varepsilon_6 k,$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ a h-val, illetőleg k-val zérussá válnak; vagyis, ha h és k abszolut értékre egy ϱ számnál kisebbek, akkor $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots$ a tetszés szerint adott pozitiv ε-nál kisebbekké válnak.

Határozzuk meg az (a, b, c) közelében levő (x, y, z) felületi pontnak a $\beta)$ alatti síktól való távolságát. Ez a távolság: [ξ, η, ζ folyó koordináták helyett x, y, z-t téve]

$$d=\frac{\left(P\frac{\partial f_1}{\partial u_0}+Q\frac{\partial f_2}{\partial u_0}+R\frac{\partial f_3}{\partial u_0}\right)h+\left(P\frac{\partial f_1}{\partial v_0}+Q\frac{\partial f_2}{\partial v_0}+R\frac{\partial f_3}{\partial v_0}\right)k+h\mu+\nu k}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

ahol $\mu=P\varepsilon_1+Q\varepsilon_3+R\varepsilon_5,\quad \nu=P\varepsilon_2+Q\varepsilon_4+R\varepsilon_6,$

tehát, ha $|h|<\varrho,\ |k|<\varrho,$ akkor: $|\mu|<3K\varepsilon,\ |\nu|<3K\varepsilon,$

ha K a $|P|, |Q|, |R|$ számok közül a legnagyobb.

A d távolság, miként látjuk, (ha $P^2+Q^2+R^2$ nem 0) általában olyan rendű kis mennyiség, mint h és k. Ha azonban P, Q, R-et úgy választjuk, hogy az első két tag 0 legyen, azaz

$$P\frac{\partial f_1}{\partial u_0}+Q\frac{\partial f_2}{\partial u_0}+R\frac{\partial f_3}{\partial u_0}=0;\quad P\frac{\partial f_1}{\partial v_0}+Q\frac{\partial f_2}{\partial v_0}+R\frac{\partial f_3}{\partial v_0}=0,$$

vagyis:

$$P:Q:R=\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_0}\frac{\partial f_3}{\partial v_0}-\frac{\partial f_2}{\partial v_0}\frac{\partial f_3}{\partial u_0}\right):\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_0}\frac{\partial f_1}{\partial v_0}-\frac{\partial f_3}{\partial v_0}\frac{\partial f_1}{\partial u_0}\right):$$
$$:\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_0}\frac{\partial f_2}{\partial v_0}-\frac{\partial f_1}{\partial v_0}\frac{\partial f_2}{\partial u_0}\right),$$

akkor a d távolság alacsonyabb rendű kicsiny lesz, mint $|h|$ és $|k|$, vagyis, ha $|h|<\varrho$, $|k|<\varrho$, akkor

$$d<\frac{6K\varepsilon\varrho}{M'},$$

ha $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}>M'$. Ha ε és ϱ végtelen kicsinyek, akkor d másodrendű végtelen kicsiny. Azt látjuk tehát, hogy — röviden szólva — az (a, b, c) ponton átmenő síktól az (a, b, c)-hez végtelen közel levő felületi pontok rendszerint elsőrendű végtelen kis távolságban vannak, ha azonban $P:Q:R=A:B:C$, vagyis az (a, b, c) ponton át az

$$A(\xi-a)+B(\eta-b)+C(\zeta-c)=0$$

síkot helyezzük, ettől a síktól a felületnek az (a, b, c)-hez végtelen közel levő pontjai másodrendű végtelen kicsiny távolságra lesznek. Ezt a síkot az (a, b, c) *ponton átmenő érintő síknak nevezzük.*

Most áttérünk a felületrész területének meghatározásához.

Az (u, v) síkon képzeljünk egy kis négyzetet, melynek oldala ϱ nagyságú, csúcsai rendre:

$$(u_0, v_0),\ (u_0+\varrho, v_0),\ (u_0+\varrho, v_0+\varrho),\ (u_0, v_0+\varrho).$$

A négyzet egy tetszés szerinti más pontja (u, v), ahol

$$|u-u_0| \leq \varrho, \quad |v-v_0| \leq \varrho.$$

Ennek a pontnak megfelel a felületen az előbb (x, y, z)-vel jelölt pont. Ha az (x, y, z) kifejezéséből csak az első három tagot hagyjuk meg, akkor mondhatjuk, hogy az (u, v) pontnak megfelel a térnek (x', y', z') pontja, ahol:

$$x' = a + \frac{\partial f_1}{\partial u_0}(u-u_0) + \frac{\partial f_1}{\partial v_0}(v-v_0),$$
$$y' = b + \frac{\partial f_2}{\partial u_0}(u-u_0) + \frac{\partial f_2}{\partial v_0}(v-v_0),$$
$$z' = c + \frac{\partial f_3}{\partial u_0}(u-u_0) + \frac{\partial f_3}{\partial v_0}(v-v_0).$$

Erről az (x', y', z') pontról azonnal látjuk, hogy az (a, b, c)-ben vont érintősíkon van. (Az érintő sík egyenletét az (x', y', z') kielégíti.) (Arról is könnyen meggyőződhetünk, hogy a felület (x, y, z) pontjától, ha $u-u_0$ és $v-v_0$ végtelen kicsinyek, legalább másodrendű végtelen kis távolságban van.)

Ha az (u, v) pont befutja a ϱ oldalu négyzetet, akkor az (x', y', z') az érintő síkon egy parallelogrammát fut be, mert például $u=u_0$ egyenesnek megfelel az

$$\frac{x-a}{\frac{\partial f_1}{\partial v_0}} = \frac{y-b}{\frac{\partial f_2}{\partial v_0}} = \frac{z-c}{\frac{\partial f_3}{\partial v_0}}$$

egyenes, az $u=u_0+\varrho$ egyenesnek pedig

$$\frac{x-a-\frac{\partial f_1}{\partial u_0}\varrho}{\frac{\partial f_1}{\partial v_0}} = \frac{y-b-\frac{\partial f_2}{\partial u_0}\varrho}{\frac{\partial f_2}{\partial v_0}} = \frac{z-c-\frac{\partial f_3}{\partial u_0}\varrho}{\frac{\partial f_3}{\partial v_0}};$$

felel meg, tehát az iránycosinusok egyenlők s i. t.

Ennek a parallelogrammának a területét határozzuk meg. A síkidom területét az általánosított Pythagoras-tétellel számitjuk ki. Ha valamely t területű síkidomnak a koordinátasíkokon való orthogonális vetületei: t_1, t_2, t_3, akkor $t^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$. A jelen esetben a parallelogramma vetülete az (x, y) síkra azon parallelogramm, melyet az

$$x' = a + \frac{\partial f_1}{\partial u_0}(u-u_0) + \frac{\partial f_1}{\partial v_0}(v-v_0),$$
$$y' = b + \frac{\partial f_2}{\partial u_0}(u-u_0) + \frac{\partial f_2}{\partial v_0}(v-v_0)$$

egyenletek által meghatározott (x', y') pontok befödnek, ha az (u, v) pontok a szóban forgó ϱ-oldalú négyzetet belepik. Így tehát az (x, y)

síkon levő kérdéses vetület nem más, mint az (u, v) síkon levő négyzetnek e felírt lineáris transzformációval keletkező képe. De azt már tudjuk, hogy e kép területe

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial u_0}\frac{\partial f_2}{\partial v_0}-\frac{\partial f_2}{\partial u_0}\frac{\partial f_1}{\partial v_0}\right|\varrho^2,$$

vagyis: $|C|\varrho^2$. Éppen így az (y, z) síkon levő vetület területe: $|A|\varrho^2$ és a harmadik vetület: $|B|\varrho^2$, tehát, ha az érintő síkon levő parallelogramma területe: t, akkor:

$$t=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,\varrho^2.$$

Az A, B, C függvénydeterminánsok az (u_0, v_0) helyen veendők.

Ha már most a T területet négyzetes ráccsal felbontjuk csupa négyzetekre (a határon levők csonkák) és mindegyikhez megszerkesztjük ilyen módon a megfelelő érintő síkon a parallelogrammát, akkor e parallelogrammák összes területe:

$$\Sigma\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,\varrho^2$$

lesz. Ha ϱ végtelen kicsinnyé válik, akkor ez az összeg átmegy az

$$\iint\limits_T\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

kettős integrálba. Ezt tekintjük a görbe vonalú felület mértékszámának. *Eszerint tehát az* $x=f_1(u, v)$, $y=f_2(u, v)$, $z=f_3(u, v)$ *parameteres alakban adott felületnek az* (u, v) *síkon megjelölt* T *tartományhoz tartozó felületrésze*

$$S=\iint\limits_T\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv,$$

ahol

$$A=\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_3}{\partial v}-\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial f_3}{\partial u};$$

$$B=\frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v}-\frac{\partial f_3}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u};$$

$$C=\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v}-\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Az $A^2+B^2+C^2$ még egy kissé átalakítható. Ugyanis, mint könnyen igazolható, fennáll ez a nevezetes identitás:

$$(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2+(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2.$$

Ha ebben α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 helyett rendre

$$\frac{\partial f_1}{\partial u},\ \frac{\partial f_2}{\partial u},\ \frac{\partial f_3}{\partial u},\ \frac{\partial f_1}{\partial v},\ \frac{\partial f_2}{\partial v},\ \frac{\partial f_3}{\partial v},$$

vagy még áttekinthetőbben:

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

tétetik, akkor

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2,$$

ahol:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Ezen, már ismeretes E, F, G, úgynevezett Gauss-féle főmennyiségek bevezetésével tehát a felületrész területe:

$$\iint_T \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

ahol a négyzetgyök pozitivnak veendő.

Ha e kettős integrálra a középértéktételt alkalmazzuk, akkor:

$$S=\sqrt{EG-F^2}\,T$$

-re jutunk, ahol E, F, G a T terület valamely (u, v) helyén veendők. Legyen (u, v) a T területű idom egy meghatározott P pontja, akkor

$$\frac{S}{T}=\sqrt{EG-F^2}+\eta$$

alakban írható, ahol E, G, F ezen (u, v) helyen veendők. Ha a T területü idom a P pontba zsugorodik össze, akkor η is zérussá lesz, vagyis

$$\lim\frac{S}{T}=\sqrt{EG-F^2},$$

amit így is szoktunk írni:

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dT$$

és dS-et a felület elemének nevezzük, mely az (u, v) sík dT területeleméhez tartozik.

10. A terület független a parameterek választásától. Ha az (u, v) parameterek helyett a (λ, μ) parametereket vezetjük be ezen transzformációval:

$$u=\varphi(\lambda, \mu); \quad v=\psi(\lambda, \mu), \qquad \gamma)$$

melynél a φ és ψ differenciálhányadosai folytonosak és a $D\left(\frac{\varphi, \psi}{\lambda, \mu}\right)$ függvénydetermináns nem 0, amely transzformáció az (u, v) sík szóban forgó része és a (λ, μ) sík T' területe között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást állapít meg, akkor a felületnek az (u, v) sík T tartományához tartozó részét egyúttal a T-nek (λ, μ) síkon megfelelő T'-hez tartozó területnek is tekinthetjük. A felületnek a (λ, μ) paraméterekre vonatkozó egyenletei:

$$x=f_1[\varphi(\lambda,\mu),\psi(\lambda,\mu)];\; y=f_2[\varphi(\lambda,\mu),\psi(\lambda,\mu)],\; z=f_3[\varphi(\lambda,\mu),\psi(\lambda,\mu)]$$

és így a T'-hez tartozó terület:

$$\iint_{T'}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\,d\lambda\,d\mu,$$

ahol

$$A'=\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu}-\frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{\partial z}{\partial\lambda},$$

$$B'=\frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda},$$

$$C'=\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu}-\frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\lambda}.$$

De

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\lambda}$$

s í. t.; tehát, ha

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}\frac{\partial v}{\partial\mu}-\frac{\partial u}{\partial\mu}\frac{\partial v}{\partial\lambda}=D,$$

akkor:

$$A'=D.A,\quad B'=D.B,\quad C'=D.C$$

és így:

$$S'=\iint_{T'}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,|D|\,d\lambda\,d\mu.$$

Ha azonban az

$$S=\iint_{T}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

kettős integrált a *γ)* alatti egyenletekkel transzformáljuk, akkor arra jutunk, hogy:

$$S=\iint_{T'}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,|D|\,d\lambda\,d\mu,$$

vagyis $S'=S$ és ezzel kimutattuk, hogy a terület a parameteres alak választásától független.

11. A felület $z=f(x,y)$ alakban. Igen gyakran használjuk a felület jellemzésére a

$$z=f(x,y)$$

alakot. Ezt is voltaképen parameteres alaknak tekinthetjük; u. i.: parameterek az x, y és a felület egyenletei most: $x=x$, $y=y$, $z=f(x,y)$ alakban írhatók. Ha az (x,y) síkon megjelölünk egy, az egyszerűen zárt, folytonos C görbével határolt T tartományt és a folytonos és folytonos differenciálhányadosokkal bíró $f(x,y)$ által e tartomány minden (x,y) helyéhez egy z értéket rendelünk, akkor ezzel egy folytonos, zárt C' görbével határolt felületrészt kaptunk. Ezen felületrész minden pontja a T terület (x,y) pontjaihoz geometriai módon úgy van hozzárendelve, hogy az (x,y) az illető pont vetülete. A jelen esetben:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=1,\;\frac{\partial x}{\partial v}=0,\;\frac{\partial y}{\partial u}=0,\;\frac{\partial y}{\partial v}=1,\;\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}=p;\;\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial y}=q,$$

tehát $$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+p^2+q^2}$$

és így a szóban forgó felületrésznek a területe:

$$S=\iint\limits_T \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Így például, ha az illető felület a

$$z=ax+by+c$$

sík, akkor $$S=\iint\limits_T \sqrt{1+a^2+b^2}\,dx\,dy.$$

De $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$ nem más, mint a sík normálisa és a z tengely hajlásszögének cosinusa, vagyis a síknak az (x, y) síkhoz való hajlásszögének, mondjuk φ-nek cosinusa és így:

$$S=\frac{1}{\cos\varphi}\iint\limits_T dx\,dy=\frac{T}{\cos\varphi},$$

tehát arra az ismeretes eredményre jutottunk, hogy valamely síkrésznek egy s síkon való derékszögű vetületét úgy kapjuk meg, hogy az illető síkrész területét az illető sík és az s hajlásszögének cosinusával szorozzuk. Ezzel egyúttal azt is igazoltuk, hogy a terület meghatározásának új definiciója a síkrészek területére vonatkozó eddigi eredményeket magában foglalja.

12. Forgási felület területe. Legyen adva az (x, z) síkon egy C görbe; P pontjának a z tengelytől való távolságát nevezzük r-nek, a görbe egyenlete legyen:

$$z=f(r),$$

ahol $f(r)$ az r-nek egyértékű, folytonos, differenciálható függvénye. Ha az (x, z) síkot a z tengely körül körülforgatjuk, akkor a C görbe leír egy forgási felületet. E forgási felület egyenlete parameteres alakban könnyen meghatározható. Ha ugyanis az (x, z) síkot már az y tengely felé u szöggel elforgattuk, akkor a P pontnak az (x, z) síktól való távolsága:

$$y=r\sin u$$

és az (y, z) síktól való távolsága:

$$x=r\cos u.$$

Eszerint a forgási felület egyenletei az (r, u) parameterekben:

$$x=r\cos u,\quad y=r\sin u,\quad z=f(r),$$

vagy pedig $r=\sqrt{x^2+y^2}$ téve, egyszerűen: $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$, vagy még egyszerűbben: $z=\varphi(x^2+y^2)$.

Határozzuk meg a forgási felület két párhuzamos kör, például a z_1 és z_2 magasságokban húzott párhuzamos körök közé eső övének területét. Tegyük fel, hogy e szakaszban $f(r)$ az r-nek monoton függvénye (ilyen szakaszokra felbonthatónak gondoljuk a C görbét) és legyen $z_1 = f(r_1)$, $z_2 = f(r_2)$, $r_2 > r_1$, akkor tehát e felületrészt a P pontok belepik, amidőn $r_1 \leq r \leq r_2$ és $0 \leq u < 2\pi$; vagyis a szóban forgó felületrész az (r, u) síkon olyan derékszögű négyszögű T területnek felel meg, amelyet az $r = r_1$, $r = r_2$, $u = 0$, $u = 2\pi$ egyenesek által határolnak. A főmennyiségek:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1 + [f'(r)]^2;$$

$$F = 0; \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = r^2,$$

tehát:
$$S = \iint_T r\sqrt{1 + [f'(r)]^2}\, dr\, du.$$

Ha lépésenkint integrálunk és pedig először az u szerint a $0 \ldots 2\pi$ közben, akkor tehát:

$$S = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sqrt{1 + [f'(r)]^2}\, dr.$$

Ez a keresett terület. Még valamivel egyszerűbben fejezzük ki ezt az integrált, ha r helyett új változót hozunk be. Uj változóul bevezetjük a C görbe ívhosszúságát a legmélyebb ponttól számítva; az ívhosszúság ezen ponttól egészen a P-ig, melynek a tengelytől való távolsága r:

$$s = \int_{r_1}^{r} \sqrt{1 + [f'(r)]^2}\, dr$$

és így:
$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + [f'(r)]^2},$$

vagyis:
$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(r)]^2}},$$

tehát, ha r helyett az s-et vezetjük be a területet kifejező egyszerű integrálba, akkor abból a következő lesz:

$$S = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r\, ds = \int_{s_1}^{s_2} k\, ds,$$

ahol k az s ívhosszúságnak megfelelő ponton átmenő szélességi kör kerülete. [Ezen eredmény geometriai jelentése közvetlenül világos. Ugyanis $k ds$ jelenti azon végtelen keskeny csonka körkúp palástját, melynek középmetszete a k kerületü kör és oldaléle ds. Ezen végtelen kis kúppalástokból épül fel a forgási felület.]

13. A csavarfelület területe. Legyen adva az (x, z) síkon ez a görbe:

$$\xi = \varphi(u), \quad \zeta = \psi(u)$$

és forgassuk el e síkot a z tengely körül v szöggel, de közben mozgassuk is a z tengely irányában mv-vel (m állandó). A (ξ, ζ) koordinátáju pont elmozdulásával nyert P pont térbeli koordinátái ezek lesznek:

$$x = \varphi(u)\cos v; \quad y = \varphi(u)\sin v; \quad z = \psi(u) + mv.$$

Ez a csavarfelület egyenlete az (u, v) parameterekkel kifejezve. Innen:

$$E = [\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2$$
$$F = m\psi'(u)$$
$$G = [\varphi(u)]^2 + m^2$$
$$S = \iint \sqrt{m^2[\varphi'(u)]^2 + [\varphi'(u)\varphi(u)]^2 + [\psi'(u)\varphi(u)]^2}\, du\, dv.$$

Az integráció az (u, v) síknak az $u = a$, $u = b$, és pl. $v = 0$, $v = 2\pi$ egyenesek alkotta derékszögű négyszög által határolt tartományára terjesztendő ki. Minthogy az integrandusban v nem szerepel, tehát:

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{m^2[\varphi'(u)]^2 + [\varphi(u)\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)\varphi(u)]^2}\, du.$$

Ha a csavarodó görbe gyanánt az x tengelynek $0 \ldots a$ közötti szakaszát választjuk, akkor:

$$\varphi(u) = u, \quad \psi(u) = 0$$

teendő, tehát

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{m^2 + u^2}\, du = \left(\frac{1}{2} a\sqrt{m^2 + a^2} + \frac{m^2}{2}\log\left[a + \sqrt{m^2 + a^2}\right] - \frac{m^2}{2}\log m\right) 2\pi.$$

(L. I. kötet 324. lap).

Ha a csavarfelület egyenleteiben $m = 0$ tesszük, akkor forgási felület válik belőle; az S föntebbi kifejezése megadja tehát ismét a forgási felület területét.

14. A vonalfelület területe. A vonalfelület parameteres egyenlete a következő:

$$x = a(v) + b(v) \,.\, u; \quad y = a_1(v) + b_1(v) \,.\, u; \quad z = a_2(v) + b_2(v) \,.\, u,$$

ahol $a(v), \ldots b_2(v)$ a v parameter függvényei. Ha $v =$ konstans, akkor a felület alkotóit kapjuk. A Gauss-féle főmennyiségek:

$$E = b^2 + b_1^2 + b_2^2$$
$$F = b(v)\,[a'(v) + b'(v)\,u] + b_1(v)\,[a_1'(v) + b_1'(v)\,u] + b_2(v)\,[a_2'(v) + b_2'(v)\,u]$$
$$G = [a'(v) + b'(v)\,u]^2 + [a_1'(v) + b_1'(v)\,u]^2 + [a_2'(v) + b_2'(v)\,u]^2.$$

Ebből láthatjuk, hogy $EG - F^2$ az u másodfokú egész függvénye:

$$ku^2 + lu + m,$$

ahol k, l és m a v függvényei. Így tehát az

$$S = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

az u szerint közvetlenül integrálható.

15. **Példák.** 1. Példa. Legyen adva az (x, z) síkon a $z = ax^2$ parabola. Határozzuk meg e parabolának a z tengely körüli forgása által keletkező felület valamely övének területét! Ha az előbbi r helyett x-et teszünk, akkor:

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, .\, x\, dx = \frac{\pi}{6a^2}(1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{\pi}{6a^2}\left[(1 + 4a^2x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + 4a^2x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

2. Példa. Határozzuk meg a forgási ellipszoid övének területét! Legyen adva az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ellipszis az (x, z) síkon. Forgassuk ezt az ellipszist a z tengely körül. Ezáltal forgási ellipszoid keletkezik. E forgási ellipszoidnak tekintsük az (x, y) sík fölött levő övét, melyet a z_1 és z_2 magasságokban vont párhuzamos körök határolnak.

Minthogy
$$z = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

ahol a négyzetgyök pozitiv,

$$f'(x) = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

és így:
$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Áttekinthetőbbé válik a kifejezés, ha az integrált transzformáljuk, az x helyett z-t vezetve be; az ellipszis egyenletéből rögtön következik, hogy:

$$\frac{x\, dx}{a^2} + \frac{z\, dz}{b^2} = 0; \quad x\, dx = -\frac{a^2}{b^2} z\, dz,$$

továbbá:
$$\frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2 - z^2}{z^2}.$$

A határok: z_1 és z_2 legyenek; tehát:

$$S = \frac{2\pi a}{b^2} \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)z^2}\, dz.$$

Ha $a < b$, vagyis a nagy tengely körül történik a forgatás, S-et így írjuk:

$$S = \frac{2\pi a}{b^2} \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{b^4 - (b^2 - a^2)z^2}\, dz.$$

Ez az integrál ismeretes (L. I. kötet 324. lapon). (Az ottani formulából ezt kapjuk, ha tekintetbe vesszük, hogy $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$)

$$S = \frac{\pi a z}{b^2}\sqrt{b^4 - (b^2 - a^2)z^2} + \frac{b^2\pi a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arccos \frac{\sqrt{b^4 - (b^2 - a^2)z^2}}{b^2}\Bigg|_{z_2}^{z_1}.$$

Ha $z_1=b$, $z_2=0$, akkor a fél ellipszoid területét kapjuk; tehát az egész forgási ellipszoid felületének területe:

$$F=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arc\cos\frac{a}{b}.$$

Ha pedig $a>b$, vagyis a kis tengely körül forgatjuk az ellipszist, akkor

$$S=\frac{2\pi a}{b^2}\int_{z_2}^{z_1}\sqrt{b^4+(a^2-b^2)z^2}\,dz,$$

vagyis:

$$S=\frac{\pi az\sqrt{b^4+(a^2-b^2)z^2}}{b^2}+\frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{z\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^4+(a^2-b^2)z^2}}{b^2}\Bigg|_{z_2}^{z_1}$$

és az egész ellipszoid felületének területe:

$$F=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Ha $a=b$, a forgási ellipszoidból gömb lesz; az öv területe

$$S=\frac{2\pi a}{b^2}\int_{z_2}^{z_1}b^2\,dz=2\pi a\,(z_1-z_2)$$

és az egész gömb felülete: $4\pi a^2$, ami mindkét végformulából is következik.

3. Példa. Legyen az (x, z) síkon adva az $(a, 0)$ középpontú, ϱ sugarú kör $(a>\varrho)$. Ha ezt a Z tengely körül körülforgatjuk, akkor az ú. n. *gyűrűfelület* keletkezik. Határozzuk meg e gyűrűfelület területét!

A kör egyenlete ilyen alakban írható: (r-el jelöljük a pontnak a Z tengelytől való távolságát és u-val a radius és az X tengely szögét)

$$r=a+\varrho\cos u,\quad z=\varrho\sin u.$$

Ha az (x, z) síkot a Z tengely körül v szöggel elforgatjuk, akkor a kör valamely u szöghöz tartozó P pontjának a koordinátái lesznek:

$$x=r\cos v=[a+\varrho\cos u]\cos v\,;\quad y=[a+\varrho\cos u]\sin v\,;\quad z=\varrho\sin u$$

és így:

$$E=\varrho^2\sin^2 u\cos^2 v+\varrho^2\sin^2 u\sin^2 v+\varrho^2\cos^2 u=\varrho^2$$
$$F=0$$
$$G=a^2+2\varrho a\cos u+\varrho^2\cos^2 u,$$

tehát a keresett felület:

$$S=\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\iint\varrho\,(a+\varrho\cos u)\,du\,dv,$$

az integrációt az (u, v) sík azon derékszögű négyszögére kiterjesztve, melyet az $u=0$ és $u=2\pi$, valamint a $v=0$ és $v=2\pi$ egyenesek határolnak. Az integráció közvetlenül elvégezhető. Először v szerint, azután u szerint integrálva:

$$S=2\pi\varrho\int_0^{2\pi}(a+\varrho\cos u)\,du=2\pi\varrho\,.\,2\pi a.$$

16. **A kettős integrál számítása egyszerű integrállal.** Az $\iint_T f(x, y)\,dx\,dy$ kettős integrált némelykor a következő meggondolással egyszerű integrállá alakíthatjuk át. Legyen az $f(x, y)$ folytonos függvény és az integráció területében minimuma m, maximuma M; akkor tudvalevőleg m és M között minden értéket felvesz. Ha $f(x, y)$-nak valamely értéke: A, akkor az

$$f(x, y)=A$$

az (x, y) síkon egy görbét ábrázol, egy ú. n. *niveau*-görbét. Ez a niveau-görbe nem más, mint a $z=A$ síknak a $z=f(x, y)$ felülettel való metszetének vetülete az (x, y) sikon.

Ha az (x, y)-nal párhuzamos síkok a felületet mindannyian egyszerűen zárt görbében metszik, akkor a niveau-görbék mindannyian (azaz minden A-nak megfelelő $f(x, y)=A$ görbék) egyszerűen zárt görbék és ha a T-ben $f(x, y)$ a maximumát vagy minimumát csak egy pontban veszi fel, akkor az $f(x, y)=M$, vagy az $f(x, y)=m$ görbe ponttá zsugorodik össze.

Tegyük fel még azt is, hogy a T tartomány határvonala is niveau-görbe, akkor a szóban forgó kettős integrált egyszerű integrállá alakíthatjuk át. Az $f(x, y)$ a maximumát egy pontban vegye fel a T belsejében. Legyen ez a pont O; akkor az $f(x, y)=M-\varepsilon$ niveau-görbe, ahol ε elég kis poz. szám, feltételünk szerint zárt görbe és az O pontot magába zárja. [Ez abból következik, hogy minden félsugáron, mely az O ponttól a kerületig vonul, minthogy a kerület is niveau-görbe, melyen $f(x, y)<M$, kell olyan pontnak lenni, amelyen $f(x, y)=M-\varepsilon$.] Két niveau-görbe egymást nem metszheti; mert hiszen akkor a metszéspontban $f(x, y)$ kétértékű volna. Az $f(x, y)=A'$ niveau-görbe teljesen körülzárja az $f(x, y)=A$ görbét, ha $A'<A<M$ [mert ha volna olyan $f(x, y)=A'$ niveau-görbe, mely az $f(x, y)=A$ belsejében lenne, dacára annak, hogy $A'<A$, akkor az O pontból a belső görbéhez vont félsugarakon kellene olyan (x, y) pontnak lenni, amelyen $f(x, y)=A$, mert az O pontban $f(x, y)=M$ és a félsugár végpontjában $f(x, y)=A'<A$; tehát az $f(x, y)=A'$ görbén belül volna még egy $f(x, y)=A$ niveau-görbe, ami ellenkezik azzal a feltevésünkkel, hogy a $z=A$ síkok a felületet egyszerűen zárt görbékben metszik.] Ebből egyúttal következik, hogy a T határvonala, melyről feltettük, hogy szintén niveau-görbe: az $f(x, y)=m$-nek felel meg. [Egészen hasonlóan következtetünk, ha abból indulunk ki, hogy nem a maximumát, hanem a minimumát veszi fel egy pontban az $f(x, y)$].

Ha A' az A-tól végtelen csekéllyel különbözik, akkor a két niveau-görbe is végtelen közel vonul egymáshoz, a közéjük foglalt gyűrű területe végtelen kicsiny.

Legyen valamelyik niveau-görbe neve: C görbe és jelöljük a C zárt görbe által határolt területet t-vel; akkor nyilván ez a terület 0-tól T-ig változik a C niveau-görbékkel; minden niveau-görbéhez a t-nek egy meghatározott értéke tartozik és fordítva a niveau-görbék elhelyezkedése folytán, minden $0<t<T$ értékhez egy meghatározott niveau-görbe és ezzel egy meghatározott $f(x, y)$ érték tartozik. Eszerint tehát az $f(x, y)$ a $0 \ldots T$ közben a t változó egyértékű, folytonos függvénye; jelöljük így: $F(t)$.

Képzeljük már most az M és m közé iktatva e fogyó számokat:

$$M, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, m$$

és alkossuk meg a hozzájuk tartozó niveau-görbéket, a

$$C_0, C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$$

-et, melyekhez rendre a $t_0=0, t_1, t_2, \ldots t_{n+1}=T$ területértékek tartoznak. A T területre vonatkozó $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ integrált részekre bontjuk a niveau-görbék közé zárt gyűrűterületeknek megfelelően. Igy például a C_k és C_{k+1} közé zárt területre vonatkozó részt így jelölhetjük:

$$I_k=\iint\limits_{C_{k+1}-C_k} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Ez az integrál a középértéktétel szerint:

$$I_k = F(t'_k) \iint\limits_{C_{k+1}-C_k} dx\,dy = F(t'_k)\,(t_{k+1}-t_k),$$

ahol t'_k, t_k és t_{k+1} közötti érték. Igy tehát:

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{k=0}^{n} F(t'_k)\,(t_{k+1}-t_k).$$

Minthogy pedig $F(t)$ a t folytonos függvénye, a közbeiktatást annyira sűríthetjük, hogy a jobboldali kifejezés, ha a t'_k bármilyen érték t_k és t_{k+1}, között, az $\int_0^T F(t)\,dt$ integráltól tetszés szerinti kevéssel térjen el, tehát:

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^T F(t)\,dt.$$

És ezzel kimutattuk, hogy azon esetben, midőn a niveau-görbék az említett módon helyezkednek el, a kettős integrál egyszerű integrállá alakítható át, mely a szóban forgó *felületsüveg* területe. Könnyen belátható, hogy ha C niveau-görbe a T_1 és C' a $T_2 > T_1$ területet határolja, akkor a felület azon *övének* területe, mely a két niveau-görbe közötti gyűrűhöz tartozik: $\int_{T_1}^{T_2} T(t)\,dt$.

Igy például, ha adva van az

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad A)$$

gömb és meg akarjuk határozni két párhuzamos kör közé foglalt öv területét, akkor tudvalevően az

$$S = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

számítandó, ahol a fenti $A)$ egyenletből x, illetőleg y szerinti differenciálással:

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}$$

és így az integrandus: $\quad \frac{1}{z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{r}{z},$

tehát az $f(x, y) = u$ niveau-görbe jelenleg:

$$\frac{r}{z} = u$$

vagy z helyett az $A)$-ban $z = \frac{r}{u}$ -t helyettesítve, az u-hoz tartozó niveau-görbe egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2\left(1 - \frac{1}{u^2}\right).$$

Ez a niveau-görbe kör, melynek rádiusa: $r\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}$, tehát területe: $t = r^2\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\pi$. Az integrandus értéke ezen a niveau-görbén: u, tehát

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \int_{t_1}^{t_2} u\,dt,$$

ha t_1 és t_2 jelölik az öv szélső párhuzamos köreinek területeit; és ha t helyett az u-t vezetjük be, akkor

$$dt = \frac{2r^2\pi}{u^3}\,du,$$

tehát
$$S = 2r^2\pi\int_{\frac{r}{z_1}}^{\frac{r}{z_2}}\frac{du}{u^2} = -\frac{2r^2\pi}{u}\Bigg|_{\frac{r}{z_1}}^{\frac{r}{z_2}} = 2r\pi\,(z_1 - z_2).$$

17. **Az ellipszoid területe.** A most tárgyalt eljárással határozzuk meg a fél ellipszoid területét. Legyen az ellipszoid egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c. \qquad A)$$

A keresett terület:

$$S = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

kiterjesztve az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területére. p és q az $A)$ differenciálásából:

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{c^2}{b^2}\,\frac{y}{z}.$$

Az integrandus:

$$\sqrt{1 + \frac{c^4}{a^4}\,\frac{x^2}{z^2} + \frac{c^4}{b^4}\,\frac{y^2}{z^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{z^2 + \frac{c^4}{a^4}x^2 + \frac{c^4}{b^4}y^2},$$

ahol z még az $A)$ alatti egyenletből helyettesítendő és így az integrandus

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

vagy az $a^2 - c^2 = a^2\alpha^2$; $b^2 - c^2 = b^2\beta^2$ bevezetésével:

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{x^2\alpha^2}{a^2} - \frac{y^2\beta^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Az $\frac{1}{u}$-nak megfelelő niveau-görbe:

$$\frac{x^2}{a^2}\,\frac{1-\alpha^2u^2}{1-u^2} + \frac{y^2}{b^2}\,\frac{1-\beta^2u^2}{1-u^2} = 1$$

ellipszis. [Közbevetően megemlítjük, hogy az

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{u}$$

geometriai jelentése nyilvánvaló. Ugyanis az (x, y, z) pontban a $z = f(x, y)$ felülethez vont érintő sík egyenlete (L. 175. lapon, ahol u, v helyett x, y teendők)

$$\zeta - z = p\,(\xi - x) + q\,(\eta - y),$$

ahol ξ, η, ζ a folyó koordináták. Igy tehát az érintősíknak a z tengellyel való hajlásszögének cosinusa:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

tehát:
$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{\cos\gamma}$$

és így a niveau-vonalak a felület azon görbéinek vetületei, amelyek mentén az érintő sík a z tengellyel az állandó γ szöget alkotja; az u jelentése: $\cos\gamma$]. Az u-hoz tartozó niveau-görbe tehát ellipszis, melynek centruma a kezdőpont, tengelyei pedig:*

$$a\sqrt{\frac{1-u^2}{1-\alpha^2u^2}}\,;\quad b\sqrt{\frac{1-u^2}{1-\beta^2u^2}}.$$

E niveau-görbe által határolt terület:

$$t=\pi ab\frac{1-u^2}{\Delta\,.\,\Delta_1},\quad \text{ahol}\quad \Delta^2=1-\alpha^2u^2,\ \Delta_1^2=1-\beta^2u^2.$$

Az ellipszoidnak az (x, y) sík fölé eső felének a területe eszerint:

$$\int_0^T\frac{dt}{u}.$$

Parciálisan integrálva:

$$S=\frac{t}{u}+\int\frac{t}{u^2}du\,\Big|_0^T.$$

A függélyes vonal mellé tett T és 0 azt jelentik, hogy a t helyébe teendő T és 0 és az első helyettesítés értékéből a második kivonandó. Ha azonban u-t tekintjük független változónak, akkor, minthogy $u=0$-nak megfelel $t=T$, $u=1$-nek pedig $t=0$, tehát:

$$S=-\frac{t}{u}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t}{u^2}du. \qquad B)$$

Számítsuk ki a $\int\frac{t}{u^2}du$ határozatlan integrált, ahol $t=\pi ab\,\frac{1-u^2}{\Delta\Delta_1}$.

$$\frac{t}{u^2}=\pi ab\left[\frac{1}{u^2\Delta\Delta_1}-\frac{1}{\Delta\Delta_1}\right].$$

A zárójelben álló kifejezést átalakítjuk a következő differenciálhányados segítségével;

$$\frac{d}{du}\,\frac{\Delta\Delta_1}{u}=-\frac{\Delta\Delta_1}{u^2}+\frac{\Delta}{u}\,\frac{d\Delta_1}{du}+\frac{\Delta_1}{u}\,\frac{d\Delta}{du}=-\frac{\Delta\Delta_1}{u^2}-\frac{\beta^2\Delta}{\Delta_1}-\frac{\alpha^2\Delta_1}{\Delta},$$

(mert $\Delta=\sqrt{1-\alpha^2u^2}$, $\Delta_1=\sqrt{1-\beta^2u^2}$); és ha például az első és második tagot összevonjuk: akkor folytatólagosan:

$$\frac{d}{du}\,\frac{\Delta\Delta_1}{u}=-\frac{\Delta}{u^2\Delta_1}-\frac{\alpha^2\Delta_1}{\Delta}$$

és ha az első tag számlálóját és nevezőjét Δ-val szorozzuk és $\Delta^2=1-\alpha^2u^2$ tesszük:

* Minthogy $\alpha<1$ és $\beta<1$, tehát úgy az $\frac{1-\alpha^2u^2}{1-u^2}$, mint az $\frac{1-\beta^2u^2}{1-u^2}$ u szerinti differenciálhányadosa pozitiv, vagyis a tengelyek $\frac{1}{u}$-val együtt nőnek és így a niveau-görbék elhelyezkedése olyan, amint az előző pontban kívántuk; az $u=0$-nak megfelelő niveau-görbe az ellipszoidnak az (x, y) síkkal való metszete.

$$\frac{d}{du}\frac{\Delta\Delta_1}{u} = -\frac{1}{u^2\Delta\Delta_1} + \frac{\alpha^2}{\Delta\Delta_1} - \frac{\alpha^2\Delta_1}{\Delta}$$

és így:

$$\frac{1}{u^2\Delta\Delta_1} = -\frac{d}{du}\frac{\Delta\Delta_1}{u} + \frac{\alpha^2}{\Delta\Delta_1} - \frac{\alpha^2\Delta_1}{\Delta},$$

tehát a keresett:

$$\frac{l}{u^2} = \pi ab\left[-\frac{d}{du}\frac{\Delta\Delta_1}{u} + \frac{\alpha^2}{\Delta\Delta_1} - \frac{\alpha^2\Delta_1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta\Delta_1}\right] =$$

$$= \pi ab\left[-\frac{d}{du}\frac{\Delta_1\Delta}{u} - \frac{\alpha^2\Delta_1}{\Delta} - \frac{(1-\alpha^2)}{\Delta\Delta_1}\right]$$

és így a határozatlan integrál:

$$\int\frac{l}{u^2}du = -\pi ab\int\frac{d}{du}\frac{\Delta\Delta_1}{u}du - \alpha^2\pi ab\int\frac{\Delta_1}{\Delta}du - \pi ab(1-\alpha^2)\int\frac{du}{\Delta\Delta_1} =$$

$$= -\pi ab\left[+\frac{\Delta\Delta_1}{u} + \alpha^2\int\frac{\Delta_1}{\Delta}du + (1-\alpha^2)\int\frac{du}{\Delta\Delta_1}\right].$$

A fél ellipszoid területe tehát *B)* szerint:

$$S = \pi ab\left\{\left[-\frac{1-u^2}{u\Delta\Delta_1} + \frac{\Delta\Delta_1}{u}\right]_0^1 + \alpha^2\int_0^1\frac{\Delta_1}{\Delta}du + (1-\alpha^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta_1}\right\}.$$

Az első tag összevonva:

$$\frac{u(1-\alpha^2-\beta^2+\alpha^2\beta^2u^2)}{\Delta\Delta_1}\Bigg|_0^1 = \frac{1-\alpha^2-\beta^2+\alpha^2\beta^2}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}} = \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} = \frac{c^2}{ab}.$$

A két utolsó tagot transzformáljuk az $\alpha u = \sin\varphi$ transzformációval. Az $u=0$-nak $\varphi = 0$ felel meg, az $u = 1$-nek pedig $\varphi = \arcsin\alpha$ főértéke. $du = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\alpha}$ tesszük és ha még $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ -et k^2-el jelöljük [$k^2<1$, mert $a^2>b^2>c^2$], akkor:

$$\int_0^1\frac{\Delta_1}{\Delta}du = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\arcsin\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi;\quad \int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta_1} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\arcsin\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

tehát:

$$S = c^2\pi + \pi ab\alpha\int_0^{\arcsin\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + \pi ab\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\int_0^{\arcsin\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Még egyszer megemlítjük, hogy az ellipszoid féltengelyei $a>b>c$, továbbá az α és β számok a következők:

$$\alpha = \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}};\quad \beta = \sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}\ \text{ és } k \text{ poz. 1-nél kisebb szám: } \frac{\beta}{\alpha}.$$

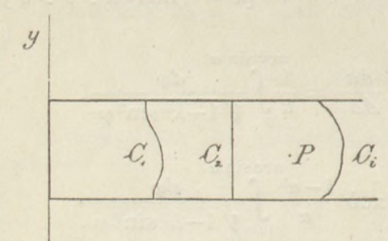
A felület területét az ú. n. Legendre-féle első- és másodfajú elliptikus integrálok segítségével fejeztük ki. (L. I. kötet 462. l.)

VIII. FEJEZET.

A KETTŐS INTEGRÁL ÉRTELMEZÉSÉNEK KITERJESZTÉSE.

1. Az integráció területe végtelenné válik. Eddigelé mindig korlátos függvények integráljairól volt szó és pedig véges kiterjedésű területre vonatkozólag. Most két irányban akarjuk a kettős integrál értelmezését kiterjeszteni: először olyan kettős integrálokról akarunk szólni, amelyek végtelen kiterjedésű területre vonatkoznak, azután pedig olyanokról, amelyek nem korlátos függvényekre vonatkoznak.

Legyen például a végtelen kiterjedésű terület az Y tengely két pontján (A-n és B-n) át az x tengellyel párhuzamosan vont egyenesek és az y tengely AB darabja által határolt sáv. Az $f(x, y)$ egyértékű korlátos függvény e sáv minden helyén legyen értelmezve. Ha $C_1, C_2, C_3, \ldots$ vonalakat úgy húzzuk meg, hogy ezek a sáv határvonalaival együtt a sávnak véges területrészét határolják el: a C_i a T_i területet, és az így keletkező területrészek mindegyike az előzőket magában foglalja, továbbá a sáv akármelyik P pontját jelöljük is meg, megadható a T sorozatban olyan T_n, amely a P pontot már magában foglalja, akkor azt fogjuk mondani, hogy a $T_1, T_2, T_3, \ldots$ területek sorozatával a szóban forgó sáv területét approximáljuk. Ha nem ilyen sávról, hanem pl. egy szög belsejéről volna szó, vagy a félsíkról, vagy akár az egész síkról, akkor is alkothatunk ilyen approximáló görbe sorozatot. Az utóbbi esetben e görbék zártak lesznek, például végtelenig növekedő sugarú körök sorozata, melyek középpontja a kezdőpont vagy végtelenig növekedő oldalú négyzetek sorozata, szintén a kezdőponttal, mint középponttal stb.



12. ábra.

Ha már most a véges T_i területekre vonatkozólag az integrálok ezen sorozatát alkotjuk:

$$I_1 = \iint\limits_{T_1} f(x, y)\,dx\,dy,\ I_2 = \iint\limits_{T_2} f(x, y)\,dx\,dy, \ldots\ I_n = \iint\limits_{T_n} f(x, y)\,dx\,dy, \ldots$$

és ha ezek az integrálok véges és meghatározott számértékek (vagyis az $f(x, y)$ mindezen véges területekben integrálható) és az $I_1, I_2, I_3, \ldots$ számsorozat szabályos sorozat, akkor definicióképpen azt mondjuk, hogy a szóban forgó sávban az $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ *ezen* approximációval létezik és értéke a fönti szabályos sorozat limese. Ha pedig bárminő C görbe sorozatra vonatkozóan létezik ilyen határérték, amikor aztán ez a határérték (mint alább látjuk) mindig ugyanaz, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó területre vonatkozó integrál létezik és értéke ez, az approximációtól független határérték. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ a szóban forgó területre konvergens integrál. Ellenkező esetben divergens integrál. Látjuk, hogy az integrálfogalom ezen kiterjesztése analog az egyváltozós függvényekre vonatkozó integrálfogalom kiterjesztésével.

2. A végtelen területre vonatkozó integrál létezésének kritériuma. Egy meghatározott approximáció mellett az integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az $I_1, I_2, I_3, \ldots$ sorozat szabályos legyen, vagyis, hogy bármely ε-hoz tartozzék olyan N küszöbszám, melyen túl levő n indexekre

$$|I_{n+k} - I_n| < \varepsilon.$$

De $I_{n+k} - I_n$ nem más, mint a C_{n+k} és C_n görbék közé zárt ($C_{n+k} - C_n$-nel jelölt) területre vonatkozó integrál; tehát az integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a tetszés szerinti kis ε-hoz tartozzék olyan N küszöb, melyen túl levő n indexekre nézve, bármekkora poz. egész szám is a k:

$$\Big|\iint\limits_{C_{n+k}-C_n} f(x, y)\,dx\,dy\Big| < \varepsilon.$$

Az $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ konvergens integrált abszolut konvergensnek mondjuk, ha a

$$\iint |f(x, y)|\,dx\,dy$$

létezik a T területre vonatkozólag. Az abszolut konvergenciának a kritériuma egyszerűbb, mint a puszta konvergenciáé. Általában, ha $\varphi(x, y)$ soha sem válik negativvá, akkor a konvergencia-kritérium egyszerüsödik. Ekkor ugyanis az

$$\iint \varphi(x, y)\,dx\,dy$$

minden területre vonatkozólag pozitiv és az integráció területével együtt nő. Ez esetben az integrál létezik, ha egyetlen egy $C_1, C_2, \ldots$ approximáció mellett létezik. Ha ugyanis egy más: $C_1', C_2', C_3', \ldots$ görbe sorozatot képzelünk, akkor az adott ε-hoz megállapítjuk az N-et, amelyen túl

$$\iint\limits_{C_{n+k}-C_n} \varphi(x, y)\, dx dy < \varepsilon$$

bárminő poz. egész szám legyen is n és k, ha csak $n>N$. A C' sorozatban elmehetünk olyan messzire, hogy azon túl akármelyik C' magába zárja a C_N-et (mert hiszen a C'-ek végtelenig húzódnak). Ha az ennek megfelelő küszöbszám M és $m>M$, és kiszemeljük a tetszés szerinti $C'_{m+k'}$-t, akkor viszont a C sorozatban keresünk egy olyan C_{n+k}-t, mely ezt a $C'_{m+k'}$-t magába zárja; minthogy pedig a C_{n+k} és C_n közé foglalt terület tartalmazza a $C'_{m+k'}$ és C'_m között levőt, tehát

$$\iint\limits_{C'_{m+k'}-C'_m} \varphi(x, y)\, dx\, dy < \varepsilon,$$

ha csak $m>M$. Ezzel kimutattuk, hogy a C' sorozatra vonatkozó integrálok is konvergens sorozatot alkotnak. Azt állítjuk már most, hogy ha $\varphi(x, y)$ nem negativ és egy approximáló görbe sorozatra vonatkozóan konvergens a $\iint \varphi(x, y)\, dx dy$, akkor általában konvergens. Ugyanis az előbbiekből nemcsak az következik, hogy minden C görbe sorozatra nézve van meghatározott véges határérték, hanem az is, hogy csak egy ilyen határérték létezik. Ennek a bizonyítására felhasználjuk azt a megjegyzést, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ és $b_1, b_2, b_3, \ldots$ szabályos sorozatok és a két sorozatból a tagok valaminő (akármilyen) elhelyezésével alkotott vegyes sorozat $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ahol a c számok az a és b számokat mind kimerítik, is szabályos sorozat: akkor a két sorozat ugyanazt a számot értelmezi, vagyis $\lim a_n = \lim b_n$. Ha ugyanis a c sorozat szabályos sorozat, akkor menjünk el olyan messzire, hogy bármely két tag különbsége ε-nál kisebb legyen. Ha ez az N-iken túl bekövetkezik és az első N szám között az a, illetőleg b számok maximális indexe M, akkor nyilván M indexen túl levő bármely a számnak ezen indexen túl levő bármelyik b számtól való különbsége ε-nál kisebb; de ebből már következik, hogy a két sorozat limese egyenlő. (Ha $c_1, c_2, c_3, \ldots$ nem merítik ki az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ és $b_1, b_2, b_3, \ldots$ összes számait, hanem mindkettőből végtelen sokat tartalmaznak, akkor is áll e tétel, mert hiszen, ha az a és b sorozatokból mindazokat kihagyjuk, melyek a c sorozatban nem fordulnak elő, akkor új a és b sorozatokat kapunk, melyek azonban nyilván ugyanazokat a számokat értelmezik, mint az eredeti a és b sorozatok.) Ha már most a C és C' görbékből egy vegyes approximáló görbe sorozatot alkotunk (pl. úgy, hogy megkeressük a C' görbét, mely

C_1-et magában foglalja, azután a C görbét, mely C'-t foglalja magában s í. t., akkor ezen görbéknek megfelelő integrálsorozat is szabályos lévén, a most tett megjegyzésünk értelmében a két határérték megegyezik.

Ezzel kimutattuk, hogy ha $\varphi(x, y)$ nem negativ és a C approximáló görbesorozatra vonatkozó

$$\iint_{C_i} \varphi(x, y)\, dx dy$$

integrálok konvergens sorozatot alkotnak, melynek határértéke I, akkor minden más approximáló görbesorozatra vonatkozó határérték is I. [Alig szükséges mondanunk, hogy ugyanez áll arra az esetre is, midőn $\varphi(x, y)$ soha sem pozitiv.] Ha tehát valamely $f(x, y)$ abszolut értékével, az $|f(x, y)|$-al alkotott integrál: $\iint |f(x, y)|\, dx\, dy$ bizonyos approximáló görbékre vonatkozólag konvergens, akkor általában konvergens. Ebből egyúttal az is következik, hogy az $\iint f(x, y)\, dx dy$ is konvergens bárminő approximálás mellett; mert

$$\left|\iint_{C_{n+k}-C_n} f(x, y)\, dx\, dy\right| \leq \iint_{C_{n+k}-C_n} |f(x, y)|\, dx\, dy$$

és úgy, mint előbb, következik, hogy a $\lim \iint f dx dy$ független az approximálás módjától. Ha tehát $\iint |f(x, y)|\, dx dy$ konvergens integrál, akkor $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ is konvergens. Ekkor, mint már föntebb jeleztük, azt mondjuk, hogy az *utóbbi integrál abszolut konvergens.*

Ha az $\iint f(x, y) dx dy$ az egész síkon abszolut konvergens integrál, akkor nyilván a sík egy (véges, vagy végtelen) részében is abszolut konvergens; mert hiszen ha például a $C_1, C_2, C_3, \ldots$ koncentrikus körökkel approximálunk, akkor az integrál abszolut konvergens lévén, bizonyos N-en túl:

$$\iint_{C_{n+k}-C_n} |f(x, y)|\, dx\, dy < \varepsilon,$$

tehát a köröknek a sík szóban forgó részébe eső gyűrűszerű területeire nézve is

$$\iint_{c_{n+k}-c_n} |f(x, y)|\, dx\, dy < \varepsilon,$$

ha c-vel jelöljük a C körnek az illető síkrészbe eső részét.

Ebből a megjegyzésből a konvergenciának egy igen gyakran használatos elégséges feltételét állapíthatjuk meg. Ugyanis, ha $|f(x, y)|$ az egész síkon kisebb, mint $\frac{A}{r^\alpha}$, ahol r az (x, y) pontnak egy fix ponttól (például a kezdőponttól) való távolsága, $\alpha > 2$ és A állandó, továbbá $f(x, y)$ minden véges területre vonatkozólag integrálható, akkor az egész síkra kiterjesztett

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy|$$

integrál abszolut konvergens. Ugyanis, ha az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ transzformációval áttérünk poláris koordinátákra, akkor, minthogy a transzformáció függvénydeterminánsa: r, a ϱ_1, illetőleg ϱ_2 sugarú, 0 középű C_1, C_2 körök közé foglalt gyűrűre vonatkozó integrál:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} |f[r\cos\varphi, r\sin\varphi]|\, r dr <$$

$$< 2\pi \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{A}{r^{\alpha-1}}\, dr = \frac{2\pi A}{-\alpha+2} \cdot \left[\frac{1}{\varrho_2^{\alpha-2}} - \frac{1}{\varrho_1^{\alpha-2}}\right] < \frac{2\pi A}{\alpha-2} \frac{1}{\varrho_1^{\alpha-2}};$$

ámde ha adatik a tetszés szerinti kis pozitiv ε, ϱ-t oly nagyra választhatjuk, hogy

$$\frac{2\pi A}{\alpha-2} \cdot \frac{1}{\varrho^{\alpha-2}} < \varepsilon$$

és így a ϱ-nál nagyobb sugaru, bármely két C_1 és C_2 közé foglalt területre vonatkozó $\iint |f(x, y)|\, dx dy < \varepsilon$, tehát a szóban forgó integrál (abszolut) konvergens.

Ha a kezdőpont helyett a tetszés szerinti (x_0, y_0)-t választjuk, akkor tehát ez az eredmény így fejezhető ki:

Ha $f(x, y)$ minden véges területben integrálható és az

$$[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^\alpha\, |f(x, y)|$$

az egész sikon korlátos és $\alpha > 1$, akkor az

$$\iint f(x, y)\, dx dy$$

az egész sikon abszolut konvergens.

3. **Az integrálás sorrendje.** Húzzunk az x tengellyel párhuzamos két egyenest. Az y tengellyel párhuzamos e egyenes ezeket A és B pontokban messe. Legyen az integráció területe a két párhuzamos közé zárt sávnak az e-től jobbra eső része, melyet T-vel jelölünk. A pont koordinátái: (a, b), B ponté pedig (a, b_1). Az $f(x, y)$ integrandusról feltesszük, hogy 1) a T sávban integrálható, 2) a $\int_b^{b_1} f(x, y)\, dy = F(x)$ egyszerű integrál minden, a-nál nem kisebb x-re létezik és 3) az $f(x, y)$ az $a \ldots \infty$ szakaszban x szerint, az y-ban egyenletesen integrálható, $(b \leqq y \leqq b_1)$.* Az 1) és 2) feltételekből következik, hogy a T sávnak az $x = a$, $x = x_1$ egyenesek között levő T_1 részében (x_1 tetszőleges, a-nál nagyobb szám)

* Az egyenletes integrálhatóság fogalmát l. I. kötet 430. lapján.

$$\iint\limits_{T_1} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^{x_1} dx \int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy$$

[L. 143. lapon] és így, minthogy az 1) szerint a baloldali kettős integrálnak véges és meghatározott határértéke van, ha x_1 végtelenné válik, $F(x) = \int\limits_b^{b_1} f(x, y)dy$ az $a \ldots \infty$ szakaszban x szerint integrálható és

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy. \qquad A)$$

A 3) alatti feltétel azt jelenti, hogy adott poz. ε-hoz megválaszthatjuk N-et úgy hogy, ha $b \leqq y \leqq b_1$, akkor

$$\left| \int\limits_{x_1}^{\infty} f(x, y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(b_1 - b)}$$

hacsak $x_1 > N$. Válasszuk az N-et úgy, hogy még ez az összefüggés is fönnálljon:

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{T_1} f(x, y)\,dxdy + \eta$$

ahol $|\eta| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $x_1 > N$. Minthogy pedig a jobboldalon álló kettős integrál e kétszeres integrál alakban állítható elő:

$$\iint\limits_{T_1} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_b^{b_1} dy \int\limits_a^{x_1} f(x, y)\,dx$$

és $\int\limits_a^{x_1} f(x, y)\,dx$ helyett $\int\limits_a^{\infty} f(x, y)\,dx + \eta'$ tehető, ahol $|\eta'| < \frac{\varepsilon}{2(b_1 - b)}$,

tehát: $$\iint\limits_T f(x,y)\,dxdy - \eta = \int\limits_b^{b_1} dy \int\limits_a^{\infty} f(x, y)\,dx + \eta'(b_1 - b)$$

ahol $|\eta| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\eta'(b_1 - b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ és így:

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy = \int\limits_b^{b_1} dy \int\limits_a^{\infty} f(x, y)\,dx. \qquad B)$$

Az *A)* és *B)* alatti egyenlőségekből tehát az következik, hogy ha a T sávra vonatkozó $\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy$ *kettős integrál létezik és az* $f(x, y)$ *minden* x*-re a* $b \ldots b_1$ *közben* y *szerint integrálható, továbbá az* x *szerint az* $a \ldots \infty$ *szakaszban* y*-ra nézve egyenletesen integrálható, akkor a* T *sávra vonatkozó kettős integrál mint kétszeres integrál állítható elő és az integrálás sorrendje felcserélhető, azaz:*

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy = \int\limits_b^{b_1} dy \int\limits_a^{\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_b^{b_1} f(x, y)\,dy.$$

4. Ujabb elégséges feltételek a felcserélhetőségre. Előbb feltettük, hogy a T sávra vonatkozó kettős integrál létezik; most ettől függetlenül állapítunk meg elégséges feltételt az integrálás sorrendjének felcserélhetőségére. Ugyanis, ha $f(x, y)$ a T minden véges részében folytonos, továbbá az $a \dots \infty$ közben x szerint y-ban egyenletesen integrálható, akkor a T-re vonatkozó kettős és kétszeres integrálok is léteznek és az integrálás sorrendje felcserélhető.

Ekkor ugyanis, miként már megmutattuk (Lásd I. k. 430. l.), az

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

az y folytonos függvénye, ha $b \leqq y \leqq b_1$ és így a $b \dots b_1$ közben integrálható, vagyis az

$$I = \int_b^{b_1} dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

kétszeres integrál véges és meghatározott számérték. Ha adatik tetszés szerint a pozitiv ε, akkor elmehetünk az x-szel olyan messzire, hogy azontúl minden $x_1 \dots x_2$ közben:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{b_1 - b}$$

ha $b \leqq y \leqq b_1$ és így

$$I = \int_b^{b_1} dy \int_a^{x_1} f(x, y)\,dx + \eta,$$

ahol $|\eta| \leqq \varepsilon$; de a jobboldali integrál nem egyéb, mint a T_1-re vonatkozó $\iint\limits_{T_1} f(x, y)\,dxdy$ kettős integrál, tehát

$$I = \iint\limits_{T_1} f(x, y)\,dxdy + \eta = \int_a^{x_1} dx \int_b^{b_1} f(x, y)\,dy + \eta.$$

Ha x_1 végtelenné válik, η zérussá lesz, tehát:

$$I = \int_b^{b_1} dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \iint\limits_T f(x, y)\,dxdy = \int_a^\infty dx \int_b^{b_1} f(x, y)\,dy,$$

amiből azt látjuk, hogy *ha $f(x, y)$ T-ben folytonos és az $a \dots \infty$ szakaszon x szerint, y-ban egyenletesen integrálható, akkor a T-re vonatkozó kettős integrál is létezik és az integrálás sorrendje felcserélhető.* (Megjegyezzük, hogy ez az állítás akkor is igaz, ha $f(x, y)$ nem folytonos mindenütt, hanem véges számú, monoton szakaszokból álló görbék mentén szakadásos.)

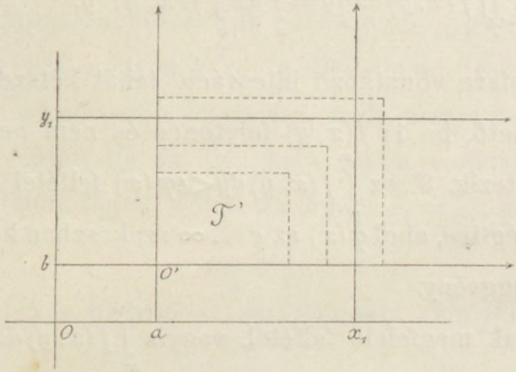
5. Az integráció területe a negyedsík. Ha az integráció területe az $x = a$ és $y = b$ egyenesek által határolt negyedsík, akkor az

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

kiszámítása végett az integráció területét például az ábrában feltüntetett, T'-el jelölendő derékszögű négyszögekkel approximáljuk. Ha $f(x, y)$ folytonos és nem negativ és a negyedsíkra vonatkozó kettős integrál

$$I = \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

létezik, akkor elmehetünk olyan messzire, hogy a T'-re vonatkozó kettős integrál az I-től tetszés szerinti kevéssel különbözzék. Válasz-



13. ábra.

szuk az integráció területéül azt a T_1 derékszögű négyszöget, melyet az $x=a$, $x=x_1$, $y=b$, $y=y_1$ egyenesek alkotnak. Ebben az integráció kétszeres integrálással is végezhető, tehát:

$$\iint\limits_{T_1} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^{x_1} dx \int\limits_b^{y_1} f(x, y)\, dy.$$

Ha x_1 végtelenné válik, a baloldali integrálnak véges és meghatározott határértéke lesz, mert ez az integrál x_1-gyel nő és nem lépheti túl a negyedsíkra vonatkozó, létezőnek feltételezett integrál értékét, tehát

$$\int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_b^{y_1} f(x, y)\, dy$$

integrál is létezik. Tegyük fel, hogy a $\int\limits_b^{\infty} f(x, y)\, dy$ integrál létezik és pedig úgy, hogy minden ε-hoz tartozik olyan y_0 küszöb, melyen túl levő y-ra nézve $\int\limits_y^{\infty} f(x, y)\, dy < \varepsilon\varphi(x)$, ahol $\varphi(x)$ az x-nek az $a \ldots \infty$ szakaszban korlátos és integrálható függvénye. Ekkor az előbbi formulában

$$\int_b^{y_1} f(x, y)\,dy = \int_b^{\infty} f(x, y)\,dy - \int_{y_1}^{\infty} f(x, y)\,dy$$

tehető és így a kétszeres integrálból:

$$\int_a^{\infty} dx \int_b^{\infty} f(x, y)\,dy + \eta$$

lesz, ahol $\lim \eta = 0$, ha y_1 végtelenné válik; tehát a szóban forgó kettős integrál:

$$\iint_T f(x, y)\,dxdy = \int_a^{\infty} dx \int_b^{\infty} f(x, y)\,dy.$$

A negyedsíkra vonatkozó integráció tehát kétszeres integrálással is elvégezhető, ha 1) $f(x, y)$ folytonos és nem negativ, 2) a kettős integrál létezik, 3) az $\int_y^{\infty} f(x, y)\,dy < \varepsilon\varphi(x)$ feltétel elég nagy y-ra nézve ki van elégítve, ahol $\varphi(x)$ az $a \ldots \infty$ szakaszban korlátos, pozitiv, integrálható függvény.

Ha a 3)-nak megfelelő feltétel, vagyis $\int_x^{\infty} f(x, y)\,dx < \varepsilon\psi(y)$ is teljesítve van, mihelyt x elég nagy, ahol $\psi(y)$ a $b \ldots \infty$ szakaszban korlátos, pozitiv és integrálható, akkor egyúttal

$$\iint_T f(x, y)\,dxdy = \int_b^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$$

és az integrálás sorrendje felcserélhető. Ha $f(x, y)$ nem mindenütt pozitiv, akkor bevezetjük az $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ függvényeket úgy, hogy $f_1(x, y)$ [illetőleg $f_2(x, y)$] mindazokon a helyeken, amelyeken $f(x, y)$ pozitiv [illetőleg negativ], az $f(x, y)$-nal megegyezzék, a többi helyen pedig 0 legyen; akkor mindenütt $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$. Ha az előbbi feltételek az $f_1(x, y)$-ra és az $f_2(x, y)$-ra teljesítve vannak, akkor az $f(x, y)$-ra is érvényes a felcserélhetőség.

Ha tehát $f(x, y)$ folytonos, sehol sem negativ (legalább is bizonyos tartományon kívül) és $\iint f(x, y)\,dxdy$ a negyedsíkra vonatkozóan létezik, továbbá $\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ és $\int_b^{\infty} f(x, y)\,dy$ a fent részletezett feltételeknek megfelelnek, akkor az integrálás részletenkint is elvégezhető és az integrálás sorrendje felcserélhető.

Ugyanaz áll, ha $f(x, y)$ sehol sem pozitiv és akkor is, ha az $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$-ra a feltételek külön-külön érvényesek ahol $f_1(x, y)$ [$f_2(x, y)$] mindazokon a helyeken, amelyeken $f(x, y)$ pozitiv (negativ), ezzel megegyezik, minden más helyen pedig 0. Ekkor

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

Ha az $\iint f(x, y)\, dxdy$-ról tudjuk, hogy létezik, akkor a kiszámítását legcélszerűbben poláris koordinátákkal végezhetjük. Ugyanis az integrál értéke a terület approximálásának módjától független, tehát a negyedsík az (a, b) középpontú koncentrikus negyedkörökkel is approximálható, vagyis

$$\iint f(x, y)\, dxdy = \lim_{\varrho=\infty} \iint_C f(x, y)\, dxdy,$$

ha C ilyen negyed kör, melynek sugara ϱ. A C negyed körre vonatkozó integrál kiszámítására bevezetjük az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ transzformációt, amely a C negyed kört (a 169. lapon ismertetett módon) leképezi az (r, φ) sík azon félsávjára, mely a $\varphi = 0$ és $\varphi = \frac{\pi}{2}$ egyenesek között foglaltatik és így: ha e sávra vonatkozóan teljesítve vannak a 194. lapon foglalt feltételek $[b = 0,\ b_1 = \frac{\pi}{2},\ a = 0$ téve,$]$ akkor

$$\lim_{\varrho=\infty} \iint_C f(x, y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty f[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi]\, r\, dr =$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi]\, r\, d\varphi.$$

Abból indultunk ki, hogy a negyedsíkra vonatkozó kettős integrál létezik; most ettől függetlenül állapítsunk meg elégséges feltételeket az integrálás sorrendjének felcserélhetőségére. Tegyük fel, hogy $f(x, y)$ folytonos, nem negativ és az $a \ldots \infty$ közben x szerint integrálható, még pedig úgy, hogy a tetszésszerinti pozitiv ε-hoz tartozzék olyan küszöb, melyen túl levő minden x_1-re nézve

$$\int_{x_1}^\infty f(x, y)\, dx < \varepsilon\psi(y),$$

ahol $\psi(y)$, miként előbb, korlátos és a $b \ldots \infty$ szakaszban integrálható pozitiv függvény. Legyen továbbá minden véges $a \ldots x$ közre vonatkozó $\int_a^x f(x, y)\, dx$ integrál a $b \cdots \infty$ közben y-szerint integrálható. Ekkor, mint könnyen belátható, az

$$I_1 = \int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

kétszeres integrál létezik. Ha a megfelelő értelmezéssel egyúttal

$$\int_y^\infty f(x, y)\, dy < \varepsilon\varphi(x)$$

is teljesítve van és minden véges $b \ldots y$ közre vonatkozó $\int_b^y f(x, y)\, dy$ az $a \cdots \infty$ közben x-szerint integrálható, akkor az

$$I_2 = \int_a^\infty dx \int_b^\infty f(x, y)\, dy$$

is létezik. Most azt mutatjuk meg, hogy a kettő megegyezik. Ugyanis:

$$I_1 = \lim_{y_1 = \infty} \int_b^{y_1} dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx.$$

De:

$$\int_b^{y_1} dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_b^{y_1} dy \int_a^{x_1} f(x, y)\, dx + \eta$$

ahol $\lim \eta = 0$, ha x_1 végtelen naggyá lesz. A jobboldali kétszeres integrál mint az $x = a$, $x = x_1$, $y = b$, $y = y_1$ egyenesek által határolt, T_1-gyel jelölt derékszögű négyszögre vonatkozó kettős integrál állítható elő, vagyis:

$$\int_b^{y_1} dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \iint_{T_1} f(x, y)\, dx dy + \eta$$

ahol η zérussá lesz, ha x_1 végtelenné válik. Ha előbb x_1, azután y_1 válik végtelenné, akkor a baloldali kétszeres integrálból I_1 lesz, tehát a jobboldali kettős integrálnak is van (ezen határátmenetnél) véges és meghatározott határértéke: ugyancsak I_1. De abból, hogy $f(x, y)$ nem negativ, könnyen következtethetjük, hogy ha *ezen* határátmenetnél létezik a kettős integrálnak határértéke, akkor létezik az esetben is, ha előbb y_1, azután x_1 válik végtelenné, és létezik a negyedsíkra vonatkozó integrál.

Ha nem az I_1-ből, hanem az I_2-ből kiindulva végezzük el ezt az okoskodást, akkor pedig arra jutunk, hogy a T_1-re vonatkozó kettős integrálból a határátmenetnél I_2 lesz, és így bebizonyítottuk, hogy $I_1 = I_2$.

6. A kettős integrál értelmezése, ha a függvény nem korlátos. Eddigelé csak olyan függvények integrálásáról volt szó, amelyek az integráció területében mindenütt korlátosak voltak. Tegyük fel most, hogy az $f(x, y)$ a C görbe által határolt, (véges) integrálási tartományban az A helyen végtelenné válik, egyéb helyen azonban folytonos. Ebben az esetben az

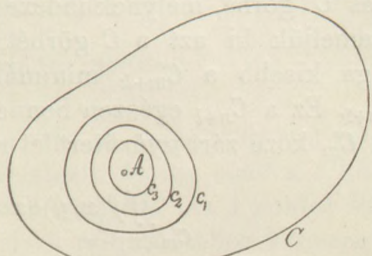
$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

új értelmezésére van szükségünk, mely analog az egyszerű integrálokra vonatkozó értelmezéssel, ha az integrandus végtelenné vált. Az A pontot körülvesszük egy tetszés szerinti c görbével, melynek az A-tól való maximális távolsága legyen ϱ. Alkossuk meg az integrált a c és C közé foglalt gyűrűtartományra és jelöljük ezt a szokott módon így:

$$I = \iint\limits_{C-c} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Ha a c görbe úgy zsugorodik össze tetszés szerinti módon, minden új helyzetében az előző belsejében maradva, hogy $\lim \varrho = 0$ lesz és I az összezsugorodás módjától függetlenül I' határértékkel bir, akkor definicióképpen azt mondjuk, hogy:

$$I' = \iint\limits_{C} f(x, y)\,dx\,dy.$$



14. ábra.

Ha a c görbéknek egy meghatározott sorozatával: c_1, c_2, c_3, . . .-el approximáljuk az A pontot, melyek közül mindenik a következőt magában foglalja és

$$I_n = \iint\limits_{C-c_n} f(x, y)\,dx\,dy,$$

akkor az integrál létezéséhez kell, hogy az $I_1, I_2, I_3, \ldots$ sorozat szabályos sorozat legyen; vagyis, ha adatik a tetszés szerinti pozitiv ε, az N küszöbszámon túl levő n-ekre $|I_{n+k} - I_n| < \varepsilon$. De $I_{n+k} - I_n$, miként azonnal látjuk, nem más, mint a c_{n+k} és c_n görbék közé foglalt területre vonatkozó integrál; tehát kell, hogy a N-en túl levő minden n-re és minden poz. k-ra:

$$\left| \iint\limits_{c_n - c_{n+k}} f(x, y)\,dx\,dy \right| < \varepsilon$$

legyen; tehát ezen approximáció mellett a határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy egy tetszés szerinti kis ε-hoz tartozzék olyan N, melyen túl levő indexű két, tetszés szerinti görbe közé foglalt területre vonatkozó $\left|\iint f(x, y)\,dx\,dy\right|$ kisebb legyen a megadott tetszés-szerinti pozitiv ε-nál.

Ha $f(x, y)$ a C-ben vagy legalább az A pont elég kis környezetében nem negativ, akkor többet is mondhatunk. Ugyanis ez esetben, ha egy bizonyos approximálásnál az I_n integrálok sorozata szabályos, akkor minden approximálásnál szabályos és ugyanazon határértékkel bir, vagyis akkor az $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ létezik. Ugyanis, ha a görbék egyik sorozata. $C_1, C_2, C_3, \ldots$ a másik sorozata pedig $C'_1, C'_2, C'_3 \ldots$ és mindegyik olyan görbékből áll, hogy a következő az előzőben benne van és a görbéknek az A ponttól való maximális távolsága zérussá válik, akkor először elmegyünk a C sorban olyan messzire, hogy azon túl minden

$$\iint\limits_{C_n - C_{n+k}} f(x, y)\, dx\, dy < \varepsilon$$

legyen. Ezután kiszemeljük azt a C' görbét, melynek maximális távolsága az A-tól kisebb, mint C_n minimális távolsága. Ilyen mindenesetre van, mert hiszen $\lim \varrho' = 0$. Legyen ilyen görbe a C'_m. Ez egészen benne van a C_n-ben. Ha már most egy tetszés szerinti más C' görbe, melynek indexe m-nél nagyobb, a C'_{m+k}, akkor viszont szemeljük ki azt a C görbét, melynek A-tól való maximális távolsága kisebb a C'_{m+k} minimális távolságánál. Ez legyen például: C_{n+l}. Ez a C_{n+l} egészen benne van a C'_{m+k}-ban. Ekkor tehát a C'_{m+k} és C'_m közé zárt gyűrűterület része a C_{n+l} és C_n közé zártnak, tehát

$$\iint\limits_{C'_{m+k} - C'_m} f(x, y)\, dx\, dy \leq \iint\limits_{C_{n+l} - C_n} f(x, y)\, dx\, dy < \varepsilon$$

és így a C' görbékre alkotott sorozat is szabályos. Ha az integrálok első sorozata $I_1, I_2, I_3, \ldots$, a második sorozata pedig $I'_1, I'_2, I'_3, \ldots$, akkor, ha a C és C' görbékből olyan vegyes sorozatot alkotunk, melyek tagjai egymásután következnek, azaz mindegyik egészen benne van az előzőben, akkor ez a sorozat, mely mindegyik fajtából végtelen sokat tartalmaz, megint egy approximáló sorozat, tehát a hozzátartozó integrálértékek megint szabályos sorozatot alkotnak és így, ha elég messze megyünk,

$$|I_m - I'_n| < \varepsilon,$$

tehát:

$$|\lim I_m - \lim I'_n| \leq \varepsilon$$

és így a két határérték megegyezik.

Ha az $f(x, y)$ soha sem válik pozitivvá, akkor is ugyanez áll. Ha pedig az $f(x, y)$ előjelét változtatja, akkor megint bevezetjük az $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ függvényeket. Ezekre nézve ismét érvényes az, hogy ha valamely c görbesorozatra vonatkozólag

$$I_1 = \lim_{n=\infty} \iint\limits_{C - c_n} f_1(x, y)\, dx\, dy \quad \text{és} \quad I_2 = \lim \iint\limits_{C - c_n} f_2(x, y)\, dx\, dy$$

léteznek, akkor általában minden ilyen görbesorozatra léteznek e határértékek és akkor

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = I_1 + I_2.$$

Ha például az $f(x, y)$ a C görbén belül ilyen alakú:

$$\frac{\psi(x, y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha},$$

ahol (a, b) egy belső A hely és α pozitiv szám, $\psi(x, y)$ pedig folytonos és korlátos függvény, melynek abszolut értékének felső korlátja M, akkor rajzoljunk az A pont körül egy c kört, mely a C görbén belül van. [Ha A a határon volna, akkor a körnek csak egy része esnék a C-be.] Az

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

integrál kiszámítását két részben végezhetjük el.

$$I = \iint\limits_{C-c} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{c} f(x, y)\, dx\, dy,$$

minthogy a $C-c$ gyűrűtartományban $f(x, y)$ mindenütt folytonos korlátos függvény, tehát az integrál létezik és így csak a c körre vonatkozó integrál teendő meggondolás tárgyává. Az A pontot koncentrikus körökkel vesszük körül, melyek rádiusai 0-hoz konvergáló fogyó sorozatot alkotnak. Ha c' egy a c-n belül levő kör, melynek rádiusa ϱ' és a c'' kör rádiusa $\varrho'' < \varrho'$, akkor a $c'-c''$ gyűrüre vonatkozó integrál kiszámítását poláris koordináták bevezetésével így végezhetjük el:

$$\iint\limits_{c'-c''} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\varrho''}^{\varrho'} \frac{\psi[a+r\cos\varphi, b+r\sin\varphi]}{r^{2\alpha}}\, r\, dr$$

és minthogy $|\psi(x, y)| < M$, tehát ha $\alpha < 1$ azaz $-2\alpha+2$ pozitiv

$$\left|\iint\limits_{c'-c''} f(x, y)\, dx\, dy\right| < 2\pi M \int\limits_{\varrho''}^{\varrho'} \frac{dr}{r^{2\alpha-1}} =$$

$$= \frac{2\pi M}{-2\alpha+2}\left[(\varrho')^{-2\alpha+2} - (\varrho'')^{-2\alpha+2}\right] < \frac{\pi M \,.\, \varrho'^{\,2-2\alpha}}{1-\alpha}$$

tehát:

$$\lim_{\varrho'=0} \iint\limits_{c'-c''} f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

és így a szóban forgó integrál konvergens. Ellenben, ha $\alpha > 1$ és az (a, b) környezetében $\psi(x, y)$ nagyobb a pozitiv m-nél, akkor az integrál divergens, mert a c és c' közötti gyűrűben (ha már ebben $\psi(x, y) > m$)

$$\left|\iint\limits_{c-c'} f(x, y)\, dx\, dy\right| = \left|\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\varrho'}^{\varrho} \frac{\psi(a+r\cos\varphi, b+r\sin\varphi)}{r^{2\alpha}}\, r\, dr\right| >$$

$$> \frac{-2\pi m}{-2\alpha+2}\left[(\varrho')^{-2\alpha+2} - (\varrho)^{-2\alpha+2}\right]$$

és ha ϱ' zérussá válik, az utolsó kifejezés végtelenné lesz. Ugyanez áll az $\alpha=1$ esetében, midőn

$$\left|\iint\limits_{[c-c']} f(x,y)\,dx\,dy\right| = \left|\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\varrho'}^{\varrho} \frac{\psi}{r}\,dr\right| > 2\pi m \,.\log\frac{\varrho}{\varrho'}\,.$$

Eddigelé csak olyan esettel foglalkoztunk, midőn az integrálási tartomány belsejében egyetlen helyen válik végtelenné az integrandus. Ha e helyek száma: n, akkor a feladatot az előbbire vezetjük vissza az integráció területének szétdarabolásával.

Ha az integrandus egy görbe vonal mentén válik végtelenné (vagyis végtelenné válik egy G görbe minden pontjában), akkor is hasonló módon értelmezzük az integrált, mint előbb. Ekkor ugyanis a G görbét rekesztjük ki az integrálás területéről oly módon, hogy körülvesszük a C_1, C_2, $C_3, \ldots$ görbékkel, melyek közül mindegyik egészen az előzőn belül van és amelyek a G görbéhez konvergálnak (azaz a C görbék pontjainak a G-től való legkisebb távolságainak maximuma zérushoz konvergál) és megalkotjuk rendre a $C-C_n$ területre vonatkozó kettős integrálokat. Ha ezen $I_1, I_2, \ldots$ sorozatnak van az approximálás módjától független véges határértéke, akkor definicióképpen azt mondjuk, hogy:

$$\iint\limits_C f(x,y)\,dx\,dy = \lim I_n.$$

Még megjegyezzük, hogy ugyanígy járunk el, ha több görbe mentén válik az $f(x,y)$ végtelenné és hogy mindig felbonthatjuk a területet úgy, hogy e kivételes görbék a határvonalba essenek. Ez esetben a $C_1, C_2, \ldots$ görbék csak egyik oldalról közelednek a G-hez.

7. **A nem korlátos függvényre vonatkozó kétszeres integrál.** Ha a függvény nem korlátos, akkor a kétszeres integrálás esetleg lehetséges anélkül, hogy a kettős integrál léteznék. Az integrálás sorrendje sem tetszőleges. Egy-két példa megvilágítja ezt a nevezetes dolgot.

1. Példa. Legyen az integráció területe a kezdőpont és az (1, 0), (1, 1), (0, 1) pontok által meghatározott négyzet területe; és az integrandus: $\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$; akkor az

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \mp \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx. \tag{A}$$

Ugyanis a baloldali kétszeres integrál kiszámításához először kiszámítjuk ezt:

$$\int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = x\int\limits_0^1 \frac{dy}{(x+y)^3} - \int\limits_0^1 \frac{y}{(x+y)^3}\,dy.$$

Az első integrál: $-\dfrac{x\,(x+y)^{-2}}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=1}$.

A másodikat parciális integrálással határozzuk meg:

$$-\int_0^1 \frac{y}{(x+y)^3}\,dy = \frac{y\,(x+y)^{-2}}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x+y)^{-2}\,dy = \frac{y\,(x+y)^{-2}}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{(x+y)^{-1}}{2}\Bigg|_0^1$$

és így a keresett integrál:

$$-\frac{x\,(x+y)^{-2}}{2} + \frac{y\,(x+y)^{-2}}{2} + \frac{(x+y)^{-1}}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{(x+1)^2},$$

tehát:
$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

A jobboldali *A)* alatti kétszeres integrál pedig az elsőre vezethető vissza, ha így írjuk:

$$-\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx,$$

tehát értéke: $-\frac{1}{2}$.

Ilyen esetben nem lehet a megfelelő kettős integrálról, még kevésbbé annak transzformációjáról beszélni. Igy például, ha az előbbi kétszeres integrálnak megfelelő

$$I = \iint \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$$

kettős integrált transzformálnók, az

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2}$$

egyenlőségekkel bevezetve az új u, v változókat, mely transzformáció függvénydeterminánsa: $\frac{1}{2}$, akkor erre jutnánk:

$$I = \frac{1}{2}\iint \frac{u}{v^3}\,du\,dv.$$

Az integráció területe pedig az

$$u=0,\ v=0;\ u=1,\ v=1;\ u=0,\ v=2;\ u=-1,\ v=1$$

négyzet. Ha kétszeresen integrálunk és pedig előbb a v tengelytől jobbra, azután a balra eső részben és az első rész: I_1, a második pedig I_2, akkor:

$$I_1 = \int_0^1 du \int_u^{2-u} \frac{u}{v^3}\,dv$$

és
$$\int_u^{2-u} \frac{dv}{v^3} = -\frac{1}{2}v^{-2}\Bigg|_u^{2-u} = \frac{u^{-2}}{2} - \frac{(2-u)^{-2}}{2},$$

ebből pedig:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{-1}\,du - \frac{1}{2}\int_0^1 u\,(2-u)^{-2}\,du,$$

tehát miként egyszerű számítás mutatja, I_1 végtelen. I_2 is végtelen tehát az integrál határozatlan.

2. *Példa.* Egy másik példa a következő: Az integráció területe megint a (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) négyzet; az integrandus: $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Számítsuk ki először ezt a kétszeres integrált:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2}-\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$$

Az utolsó integrált parciálisan integrálva:

$$\int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=-\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2}=-\frac{1}{x^2+1}+\int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2}$$

és így:
$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}0=\frac{\pi}{4}.$$

Ha pedig az integrálás sorrendjét megcseréljük, akkor:

$$I'=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=-\frac{\pi}{4}.$$

8. A B függvény és a Γ függvény kapcsolata. A $\Gamma(\alpha)$ függvényt (L. I. kötet 509. lap) ezzel az integrállal értelmeztük:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,$$

ahol $\alpha>0$; a $B(\alpha,\beta)$ függvényt pedig ezzel az integrállal:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

ahol $\alpha>0$, $\beta>0$. (I. kötet 511. lap.)

Állítsuk elő $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$ szorzatot:

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx\,.\int_0^\infty e^{-y}y^{\beta-1}\,dy=\iint e^{-(x+y)}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,dxdy,$$

ahol a jobboldali kettős integrál az x és y tengelyek által alkotott derékszögre (az ú. n. első síknegyedre) vonatkozik. [Ezen egyenlőség, mely a negyedsíkra vonatkozó kettős integrál létezését is állítja, az előbbi általános tételek alkalmazása nélkül is következik, minthogy a baloldali kifejezés két egyszerű integrál szorzata. Ugyanis a

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx=\lim_{t=\infty}\int_0^t e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$

és
$$\int_0^\infty e^{-y}y^{\beta-1}\,dy=\lim_{t=\infty}\int_0^t e^{-y}y^{\beta-1}\,dy.$$

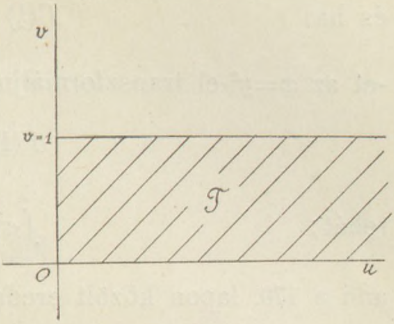
Az
$$\int_0^t e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx\,.\int_0^t e^{-y}y^{\beta-1}\,dy \tag{A}$$

nem más, mint az x és y tengelyek, valamint az $x=t$, $y=t$ egyenesek által meghatározott négyzetre vonatkozó kettős integrál. Minthogy pedig az *A)* alatti szorzatnak van meghatározott határértéke, ha l végtelenné válik, tehát a szóban forgó négyzetre vonatkozó kettős integrálnak is van határértéke és ez ugyancsak $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$.] A kettős integrált transzformáljuk:

$$x = uv, \quad y = u(1-v)$$

téve. Minthogy az első síknegyedben x és y nem negativok, tehát

$$uv \geq 0, \quad u(1-v) \geq 0.$$



15. ábra.

E két egyenlőtlenségből következik: $u \geq 0$, $0 \leq v \leq 1$, tehát ha derékszögü (u, v) koordinátarendszert képzelünk, akkor az első negyedbeli (x, y) tartománynak megfelel az (u, v) síkon az ábrában feltüntetett T sáv. A transzformáció függvénydeterminánsának abszolut értéke: $|u|$, vagy, minthogy u sehol sem negativ: u és így:

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) = \iint_T e^{-u}.(uv)^{\alpha-1}[u(1-v)]^{\beta-1}.\,u\,du\,dv =$$
$$= \iint_T e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}.\,du\,dv =$$
$$= \int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}du\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv = \Gamma(\alpha+\beta)\,B(\alpha,\beta),^*$$

tehát
$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Így például, ha α és β pozitiv egész számok, akkor

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}.$$

Vagy tegyük például $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, akkor arra jutunk, hogy

$$[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\,\Gamma(1).$$

De $$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \arcsin(2x-1)\Big|_0^1$$

(I. kötet 322. lap), tehát:

$$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$$

és $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$, tehát arra jutottunk, hogy $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$, vagyis

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

* A T sávra vonatkozó integrál az $u=l$ egyenessel elhatárolt T' derékszögű négyszögre vonatkozó integrál határértéke, ha $l=\infty$. A T'-ra vonatkozó kettős integrál azonban mint két egyszerű integrál szorzata áll elő; e szorzat határértéke a szövegbeli kifejezés.

és ha
$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
-et az $x=y^2$-el transzformáljuk:
$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,$$
tehát:
$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$
ami a 170. lapon közölt eredménnyel megegyezik.

IX. FEJEZET.

A HÁRMAS ÉS A HÁROMSZOROS INTEGRÁL.

1. Hármas integrál. Legyen adva egy F zárt felület, melynek úgy az X, mint az Y és Z tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel legfölebb két metszéspontja van. A felület határolta térrész minden belső helyén és határhelyén legyen értelmezve az $f(x, y, z)$ egyértékű, korlátos függvény. Az F felület által bezárt T teret tetszés szerinti módon $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ részekre bontjuk fel, melyek az F terét egyszerűen és teljesen kitöltik. A t_i térrészben az $f(x, y, z)$ felső határát M_i-vel, alsó határát m_i-vel jelöljük.

Készítsük el az

$$S = \sum_1^n M_i t_i \quad \text{és} \quad s = \sum_1^n m_i t_i$$

összegeket. A felosztást minden lehető módon elvégezve és minden beosztásra vonatkozólag megalkotva képzeljük a $\sum M_i t_i$ és $\sum m_i t$ összegeket. Az első számhalmaznak, a $\sum M_i t_i$ számok halmazának vesszük az alsó határát, a másodiknak a felső határát. Minthogy a két számhalmaz korlátos, az alsó és felső határuk véges. E két számot elnevezzük az $f(x, y, z)$ függvény T-re vonatkozó *Darboux*-féle felső és alsó integráljának és így jelöljük:

$$\Sigma = \overline{\iiint_T} f(x, y, z)\, dxdydz\,; \quad \sigma = \underline{\iiint_T} f(x, y, z)\, dxdydz$$

vagy pedig így

$$\Sigma = \iiint_{(s)T} f(x, y, z)\, dxdydz\,; \quad \sigma = \iiint_{(i)T} f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Most is, éppen úgy, mint az egyszerű és a kettős integráloknál, megmutathatjuk, hogy $\Sigma \geq \sigma$, továbbá hogy e Σ és σ számok az S, illetőleg s összegek határértékei ilyen értelemben: ha adatik egy tetszés szerinti pozitiv ε szám, akkor ehhez tartozik olyan pozitiv ϱ, hogy, ha minden rész mérete (vagyis a t rész két pontjának egymástól való távolságának maximuma) kisebb a ϱ-nál, akkor, bárminő legyen is a beosztás, a $\sum M_i t_i$-nek a $\sum$-tól és a $\sum m_i t_i$-nek a σ-tól való eltérése abszolut értékre ε-nál kisebb.

Ha $\sum = \sigma$, akkor azt mondjuk, hogy $f(x, y, z)$ a T-ben integrálható és $\sum$ és σ közös értékét így jelöljük:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Az integrálhatóság feltétele éppen úgy határozható meg, mint az előző hasonló tárgyalásokban és azt találjuk, hogy $f(x, y, z)$ integrálható a T-ben, ha azon t térfogatok összege, amelyekben az $f(x, y, z)$ ingadozása [felső és alsó határának különbsége] a tetszés szerinti pozitiv ε-nál nagyobb, a tetszés szerinti pozitiv η-nál kisebbé tehető.

Ebből a kriteriumból azonnal következtethető, hogy, ha $f(x, y, z)$ folytonos a T-ben, akkor integrálható; de integrálható akkor is, ha egyes pontokban, vonalak, vagy felületek mentén véges szakadása van (pl. ha az F határolta térrészben kétféle sűrűségű egymással nem keveredő anyag van elhelyezve és $f(x, y, z)$ jelenti az anyag sűrűségét).

Ha $f(x, y, z)$ a T-ben integrálható, akkor tehát

$$I = \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim \sum M_i t_i = \lim \sum m_i t_i$$

vagyis, ha adatik egy tetszés szerinti kis pozitiv ε és a beosztás méreteit elég kicsinyre választjuk, akkor $\sum M_i t_i$, valamint $\sum m_i t_i$ I-től mindig ε-nál kevesebbel tér el. Ebből az is következik, hogy az egyes térrészekben levő felső és alsó határok helyett az $f(x, y, z)$ függvénynek az illető térrészben felvett értékeit is választhatjuk; ugyanis ha a t_i-ben egy tetszés szerinti (ξ_i, η_i, ζ_i) pontot szemelünk ki, akkor $m_i \leq f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \leq M_i$, tehát

$$I = \lim \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, t_i.$$

A hármas integrálra is megállapítjuk a középértéktételt. Legyen $f(x, y, z)$-nek a T-ben felső határa M és alsó határa m, akkor

$$m \sum t_i \leq I \leq M \sum t_i$$

vagyis I az MT és mT közé esik, tehát

$$I = \mu T,$$

ahol μ egy közbenső érték M és m között és ha $f(x, y, z)$ a T-ben folytonos, akkor van olyan (ξ, η, ζ) hely, melyen értéke éppen μ-vel egyenlő és így:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(\xi, \eta, \zeta)\, T.$$

Általánosabb középértéktétel a következő: Ha $g(x, y, z)$ a T-ben egyértékű, korlátos függvény, $f(x, y, z)$ a T-ben szintén korlátos és nem negativ és mindkettő integrálható, akkor ugyanolyan módon, mint a 138. lapon láttuk, következtetjük, hogy

$$m \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leq \iiint f(x, y, z)\; g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leq$$
$$\leq M \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

ahol m a g alsó határa, M a felső határa a T-ben. Ha még $g(x, y, z)$ a T-ben folytonos, akkor:

$$\iiint f(x, y, z)\; g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = g(\xi, \eta, \zeta) \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

ahol (ξ, η, ζ) a T tartomány alkalmasan választott belső helye, vagy határhelye.

2. A hármas integrál mint kétszeres és mint háromszoros integrál. Legyen az integráció tere az

$$x = a,\ x = a_1 > a\,;\ y = b,\ y = b_1 > b\,;\ z = c,\ z = c_1 > c$$

síkokkal határolt parallelepipedon és $f(x, y, z)$ ennek belsejében és a határán is egyértékű folytonos függvény. Ekkor nemcsak ez a hármas integrál:

$$I = \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

létezik, hanem egyúttal az $x = a$, $x = a_1$; $y = b$, $y = b_1$ egyenesek által határolt derékszögű négyszögre vonatkozó

$$I_1 = \iint f(x, y, z)\, dx\, dy$$

kettős integrál is létezik, ha $c < z < c_1$ és éppen úgy, mint az I. kötet 427. lapján a parameter tartalmazó egyszerű integrálra vonatkozóan, most is megmutathatnók, hogy ez az integrál a z parameter folytonos függvénye, tehát z szerint integrálható. Jelöljük I_1-t, mely z függvénye: $\varphi(z)$-vel. Eszerint tehát létezik az

$$I_2 = \int_c^{c_1} \varphi(z)\, dz$$

egyszerű integrál.

Azt akarjuk megmutatni, hogy ez az $\int_c^{c_1} \varphi(z) dz$ ugyanakkora, mint a szóban forgó I-vel jelölt hármas integrál.

Osszuk fel az $a \ldots a_1$ közt a $d_1, d_2, d_3, \ldots d_l$ szakaszokra, a $b \ldots b_1$-et az $e_1, e_2, \ldots e_m$ és a $c \ldots c_1$ közt a $g_1, g_2, \ldots g_n$ szakaszokra úgy, hogy a

$$\sum_{r=1,2,\ldots,l;\ s=1,2,\ldots,m;\ t=1,2,\ldots,n} f(x_r, y_s, z_t)\, d_r e_s g_t = \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \eta \qquad A)$$

legyen, ahol $|\eta|$ kisebb, mint egy tetszés szerint megadott kis pozitiv ε harmadrésze. Ez lehetséges, mert I létezik. Csak az kell ehhez, hogy a d, e, g részek mind kisebbek legyenek egy bizonyos δ-nál, egyébként tetszés szerintiek lehetnek.

Ezt a δ-t oly kicsinyre választhatjuk, hogy az $A)$ mellett még az is teljesítve legyen, hogy

$$\sum_{r=1,2,\ldots,l;\, s=1,2,\ldots,m} f(x_r, y_s, z)\, d_r e_s = \iint f(x, y, z)\, dx\, dy + \eta' = \varphi(z) + \eta' \qquad B)$$

ahol a jobboldali kettős integrál az $a \leq x \leq a_1$, $b \leq y \leq b_1$ derékszögű négyszögre vonatkozik, η' a z-től függ ugyan, de $|\eta'| < \frac{\varepsilon}{3(c_1 - c)}$ a $c \leq z \leq c_1$ minden értékénél. Ez is teljesíthető, mert I_1 létezik minden z-nél és $f(x, y, z)$ az x, y, z folytonos függvénye.*

És ha a δ ezen választása nem volna elég, akkor még kisebbre választjuk, hogy az $A)$ és $B)$-n kívül még az is teljesüljön, hogy:

$$\sum_{\substack{1 \\ t=1,2,\ldots,n}}^{n} g_t \varphi(z_t) = \int_c^{c_1} \varphi(z)\, dz + \eta'' \qquad C)$$

legyen, ahol $|\eta''| < \frac{\varepsilon}{3}$. Eszerint tehát a δ-t oly kicsinynek választjuk, hogy ha a $d_1, d_2, \ldots, e_1, e_2 \ldots, g_1, g_2, \ldots$ szakaszok, melyekre az $a \ldots a_1$, $b \ldots b_1$, $c \ldots c_1$ közöket felosztottuk, mindannyian kisebbek δ-nál, akkor az $A)$, $B)$, $C)$ relációk teljesítve legyenek.

Az $A)$ így is írható $[g_1, g_2, \ldots, g_n$ szerint rendezve$]$

$$\sum_{t=1}^{n} g_t \sum f(x_r, y_s, z_t)\, d_r e_s = \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \eta.$$

De $B)$ szerint, amely minden z-re érvényes, z helyett z_t-t téve:

* Az $x=a$, $x=a_1$; $y=b$, $y=b_1$ egyenesek által határolt derékszögű négyszöget ugyanis feloszthatjuk a koordináta tengelyekkel párhuzamosakkal olyan t_i derékszögű négyszögekre, melyek oldalai δ-nál kisebbek és melyekben $f(x, y, z)$ ingadozása, vagyis t_i bármely két x', y' és x'', y'' helyén vett $|f(x', y', z) - f(x'', y'', z)| < \alpha$, ha α tetszés szerinti kis pozitiv szám és $c \leq z \leq c_1$. A szóban forgó derékszögű négyszögre, T-re vonatkozó integrál a t_i-kre vonatkozó integrálok összege, vagyis: $\iint_T f(x, y, z)\, dxdy = \Sigma \iint_{t_i} f(x, y, z)\, dxdy$. Az utóbbiakra a középértéktételt alkalmazzuk: $\iint_{t_i} f(x, y, z)\, dxdy = f(x', y', z)\, t_i$, ahol (x', y') a t_i valamely helye; tehát $\iint_T f(x, y, z)\, dxdy = \Sigma f(x', y', z)\, t_i$ és így, ha t_i az a derékszögű négyszög, melynek oldalai d_r és e_s és (x_r, y_s) e t_i valamely tetszésszerinti helye, akkor $f(x', y', z) = f(x_r, y_s, z) + \theta\alpha$ tehető, $[|\theta| < 1]$, tehát $\iint_T f(x, y, z)\, dx\, dy = \Sigma f(x_r, y_s, z)\, d_r e_s + \eta'$, ahol $|\eta'| < \alpha \Sigma t_i = \alpha T$, tehát, ha α kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{3T(c_1 - c)}$, akkor a szövegbeli egyenlőtlenség teljesítve van.

$$\sum f(x_r, y_s, z_t)\, d_r e_s = \iint f(x, y, z_t)\, dx\, dy + \eta'_t = \varphi(z_t) + \eta'_t,$$

tehát az előbbi egyenlőség így is írható:

$$\sum_1^n g_t \varphi(z_t) + \sum_1^n g_t \eta'_t = \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \eta. \qquad D)$$

De
$$|\sum g_t \eta'_t| < \frac{\varepsilon}{3(c_1 - c)} \sum g_t$$

és minthogy $\sum g_t = c_1 - c$, tehát

$$|\sum g_t \eta'_t| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

A *D)*-ben az első tag, a $\sum g_t \varphi(z_t)$ pedig a *C)* szerint $\int\limits_c^{c_1} \varphi(z)\, dz + \eta''$, tehát a *D)* alatti egyenlőség így írható:

$$\int\limits_c^{c_1} \varphi(z)\, dz + \sum g_t \eta'_t + \eta'' = \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \eta$$

és minthogy úgy a $|\sum g_t \eta'_t|$, mint az $|\eta|$ és $|\eta''|$ mind kisebbek $\frac{\varepsilon}{3}$-nál, tehát $\int\limits_c^{c_1} \varphi(z)\, dz$ egyszerű integrál a jobboldali hármas integráltól a tetszés szerinti kis ε-nál kevesebbel tér el, vagyis:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_c^{c_1} \varphi(z)\, dz$$

és ha $\varphi(z)$ helyett az $\iint f(x, y, z)\, dx\, dy$ kettős integrált tesszük, mely az $x = a$, $x = a_1$, $y = b$, $y = b_1$ által határolt derékszögű négyszögre vonatkozik, akkor arra jutunk, hogy:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_c^{c_1} dz \iint f(x, y, z)\, dx\, dy$$

és ez azt fejezi ki, hogy a parallelepipedonra vonatkozó hármas integrált úgy számíthatjuk ki, hogy 1) *z-t parameternek tekintve, integráljuk az $f(x, y, z)$-t a parallelepipedonnak az (xy) síkba eső vetületére nézve és azután* 2) *a nyert kettős integrált integráljuk z szerint a $c \ldots c_1$ közben.*

Természetesen az (x, y, z) szerepei felcserélhetők, tehát könnyen érthető jelöléssel:

$$I = \int\limits_c^{c_1} dz \iint f(x, y, z)\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_b^{b_1} dy \iint f(x, y, z)\, dz\, dx = \int\limits_a^{a_1} dx \iint f(x, y, z)\, dy\, dz.$$

A belül álló kettős integrált még kétszeres integrál alakjában is írhatjuk és akkor a

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} dy \int_c^{c_1} f(x, y, z)\, dz$$

háromszoros integrálra jutunk. Eszerint: $f(x, y, z)$-t integráljuk $c \ldots c_1$ közben z szerint, x-et és y-t paramétereknek tekintve, az így nyert integrált y szerint integráljuk a $b \ldots b_1$ közben, az x-et parameternek tekintve és végül x szerint integrálunk az $a \ldots a_1$ közben.

Az integrálás sorrendje fel is cserélhető.

A legbelső integrál az x és y (folytonos) függvénye. Ha tekintetbe vesszük, hogy az y szerint a $b \ldots b_1$ közben, azután x szerint az $a \ldots a_1$ közben végzendő kétszeres integrál kettős integrálnak is tekinthető, akkor a hármas integrál még így is írható:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint dx\, dy \int_c^{c_1} f(x, y, z)\, dz,$$

ahol a kettős integrál az $x = a$, $x = a_1$, $y = b$, $y = b_1$ által határolt derékszögű négyszög területére vonatkozik. Az (x, y, z) ciklikus felcserélésével a hármas integrál könnyen érthető jelölésben tehát ezen háromféle alakban írható:

$$\iint dy\, dz \int_a^{a_1} f(x, y, z)\, dx, \quad \iint dz\, dx \int_b^{b_1} f(x, y, z)\, dy, \quad \iint dx\, dy \int_c^{c_1} f(x, y, z)\, dz.$$

Megjegyezzük, hogy a hármas integrál ezen különféle kifejezésmódjai akkor is érvényesek, ha az $f(x, y, z)$ nem mindenütt folytonos, hanem egyes felületek mentén szakadásai vannak. Anélkül, hogy az általános tárgyalásba bocsátkoznánk, csak megemlítjük, hogy, ha ezek a szakadási helyek belefoglalhatók olyan térrészbe, melynek a térfogata tetszés szerinti kicsiny, akkor az integrálás szempontjából tekinteten kívül hagyhatók.

Az eddigi eredményeket és a most tett megjegyzést felhasználjuk a hármas integrálnak háromszoros, vagy kétszeres integrál alakjában való kifejezésére abban az esetben is, midőn az integráció tartománya nem parallelepipedon, hanem egy egyszerűen zárt F felület, melyről egyszerűség kedvéért még azt is feltesszük, hogy minden, az x, y, vagy z tengelyekkel párhuzamos egyenes legfölebb két pontban metszi.

Ugyanis: vegyük körül ezt az F felületet egy parallelepipedonnal és értelmezzük az $f_1(x, y, z)$ függvényt úgy, hogy az F belsejében és határán megegyezzék az $f(x, y, z)$-vel, a parallelepipedon többi részében pedig 0 legyen. Ez az $f_1(x, y, z)$ az előbbi megjegyzés értelmében a parallelepipedonban integrálható és integrálja nyilván megegyezik az $f(x, y, z)$-nek az F által bezárt térrészre vonatkozó integráljával. Így tehát:

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^{c_1} dz \iint f_1(x, y, z)\,dx\,dy,$$

ahol a baloldali integrál az F-re vonatkozik, a jobboldali pedig a parallelepipedonra vonatkozó integrál kétszeres integrál alakjában. A parallelepipedon úgy választható, hogy c az F felületnek az (x, y) síkra vonatkozólag legmélyebb és c_1 a legmagasabb pontjának z koordinátái legyenek.

A belül álló kettős integrál, mint tudjuk, úgy értendő, hogy z-nek egy, a $c \ldots c_1$ közbe eső fix z értéket adunk és a parallelepipedonnak az (x, y) síkban levő alapterületére vonatkozólag integrálunk.

De $f_1(x, y, z) = f(x, y, z)$-vel, ha a fix z mellett (x, y, z) a parallelepipedonnak az F felületen belül levő pontja, vagyis, ha (x, y) olyan pont koordinátái, mely a z magasságban az (x, y) síkkal párhuzamosan vont sík és az F felület C_z metszés görbéjének az (x, y) síkra vetett képén belül van. Ha a C_z ezen vetületét C_z'-vel jelöljük, akkor tehát a szóban forgó kettős integrál akkora, mint a

$$\iint f(x, y, z)\,dx\,dy$$

a C_z' által bezárt területre vonatkozólag. Így tehát

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^{c_1} dz \iint f(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Ez így értendő: Kiszemeljük a tetszés szerinti z értéket. Meghatározzuk a $\zeta = z$ síknak (vagyis az (x, y) sík fölött z magasságban vele párhuzamosan vont síknak) az F felülettel való C_z metszésvonalát; e C_z-nek az (x, y) síkon levő C_z' vetülete által bezárt területre vonatkozóan megalkotjuk az $\iint f(x, y, z)\,dx\,dy$ kettős integrált. Ez z függvénye lesz. Ezt azután integráljuk z szerint az F felület legszélsőbb z koordinátái, a c és c_1 között.

A kettős integrált kétszeres integrál gyanánt is kiszámíthatjuk, úgy, hogy x-nek fix értéket adunk és meghatározzuk azokat az y_1 és y_2 értékeket, amelyek a $\xi = x$ egyenesnek a C_z' görbével való metszéspontjaihoz tartoznak és kiszámítjuk az

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y, z)\,dy\cdot$$

integrált, mely x és z függvénye lesz. Ezt azután integráljuk a C_z' görbe legszélsőbb x koordinátái között, melyeket x_1 és x_2-vel jelölünk (ezek z függvényei). Így tehát a kérdéses hármas integrál így is írható:

$$\int_c^{c_1} dz \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y, z)\,dy.$$

Ez pedig még így is értelmezhető: x és z értékeit fixirozzuk. Az (x, z) síkra az (x, z) pontban merőlegest emelünk. Ez átdöfi az F felületet olyan két pontban, melyek y koordinátái y_1 és y_2. Kiszámítjuk az $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y, z)\,dy$ integrált. Ez x és z függvénye lesz. Jelöljük $\varphi(x, z)$-vel. Megtartjuk a z értékét; a z magasságban az (x, y) síkkal párhuzamos metszet legszélsőbb x koordinátáit jelöljük x_1 és x_2-vel. Kiszámítjuk az $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, z)\,dx$-et és végül ezt integráljuk az F felület legszélsőbb z koordinátái, a c és c_1 között. Az x, y, z szerepét tetszés szerint változtathatjuk.

3. **Példák.** Egy két példa jobban megvilágosítja ezt az eljárást.

1. Példa. Legyen $f(x, y, z) = xyz$ és az integráció tartománya az

$$x = a,\ x = a_1 > a;\quad y = b,\ y = b_1 > b;\quad z = c,\ z = c_1 > c$$

síkok által határolt parallelepipedon.

$$I = \iiint xyz\,dx\,dy\,dz = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} dy \int_c^{c_1} xyz\,dz,$$

$$\int_c^{c_1} xyz\,dz = \frac{xy}{2}(c_1^2 - c^2);$$

z szerint integrálva: ha ezt y szerint $b \ldots b_1$ közben integráljuk, $\frac{x(b_1^2 - b^2)(c_1^2 - c^2)}{4}$ lesz belőle és ha ezt x szerint integráljuk $a \ldots a_1$ közben, akkor azt kapjuk:

$$I = \frac{(a_1^2 - a^2)(b_1^2 - b^2)(c_1^2 - c^2)}{8}.$$

Általában, ha

$$f(x, y, z) = \varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z),$$

akkor az előbb említett parallelepipedonra vonatkozó integrál:

$$\iiint \varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^{a_1} \varphi(x)\,dx \int_b^{b_1} \psi(y)\,dy \int_c^{c_1} \chi(z)\,dz,$$

azaz három egyszerű integrál szorzata.

2. Példa. Számítsuk ki ismét az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

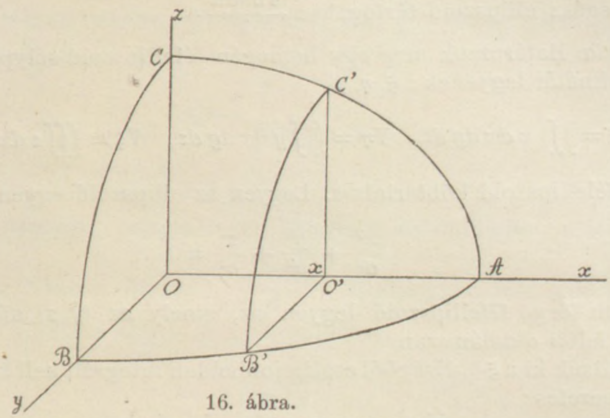
ellipszoid köbtartalmát. A pozitiv X, Y, Z tengelyek ezt az ellipszoidot A, B, C pontokban messék. Elég lesz a nyolcadrészének a köbtartalmát kiszámítani, az $OABC$ rész köbtartalmát. A szóban forgó ellipszoidnyolcadot osszuk fel $t_1, t_2, t_3, \ldots$ részekre, akkor a keresett köbtartalom (V) a beosztásnál keletkező részek összege $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$, tehát:

$$V = \iiint dx\,dy\,dz.$$

Szemeljük ki az (x, y) síkon az (x, y) pontot. Az ellipszoid ehhez tartozó *M* pontjának *z* koordinátája:

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

ahol a gyök pozitivnak veendő. Az (x, y) pontban az (xy) síkra emelt merő-



16. ábra.

leges az integráció-tartomány határfelületét két pontban metszi, melyek *z* koordinátái:

$$z_1 = 0, \; z_2 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Az első (a *z*-szerinti) integrál tehát:

$$\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Most az x távolságban az yz síkkal vont párhuzamos metszet minimális és maximális y koordinátáit kell meghatároznunk. Ezen metszet (az $O'B'C'$ negyedellipszis) vetülete az (yz) síkon az:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

ellipszisnek az Y és Z tengelyek pozitiv részei közé eső negyedrésze; tehát y minimuma: 0, maximuma (az $O'B'$): $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Egyszerű átalakítással

$$c\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}}\, dy =$$

$$= bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt = bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left[\frac{1}{2} t\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t\right]_0^1 =$$

$$= bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Ez nem más, mint az $O'B'C'$ negyedellipsz is területe. Végül x szerint integrálunk. Az integráció határai az x szélső értékei: 0 és a, tehát:

$$V = \frac{bc\pi}{4}\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{abc\,\pi}{6}$$

és így az egész ellipszoid térfogata: $\frac{4abc\pi}{3}$.

3. Példa. Határozzuk meg egy homogén félellipszoid súlypontját. A súlypont koordinátái legyenek: ξ, η, ζ.

$$V\xi = \iiint x\,dx\,dy\,dz, \quad V\eta = \iiint y\,dx\,dy\,dz, \quad V\zeta = \iiint z\,dx\,dy\,dz$$

ahol V a félellipszoid köbtartalma. Legyen az ellipszoid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

és a szóban forgó félellipszoid legyen az, amely az (y, z) síknak a pozitiv x tengely felőli oldalán van.

Számítsuk ki a ξ-t. Evégből csak a jobboldali integrált kell kiszámítanunk, mert V ismeretes:

$$\iiint x\,dx\,dy\,dz = \int dy \int dz \int x\,dx.$$

A belső integrál határai az (yz) síkra az (yz) pontban emelt merőlegesnek a félellipszoid határfelületével való átdöfési pontjainak x koordinátái:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

és így a belső integrál:

$$\int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right). \tag{A}$$

Az $Y = y$ síknak az ellipszoiddal való metszésgörbéjének vetülete az (x, z) síkon az

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = 1$$

ellipszis, melynek féltengelyei

$$a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{és} \quad c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

A legszélsőbb z koordináták:

$$z_1 = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{és} \quad z_2 = -c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

tehát $A)$ alattit integrálva z szerint z_1 és z_2 határok között:

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} a^2 \int_{-c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{2a^2c}{3}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Hátra van még az y szerinti integrálás. A félellipszoid legszélsőbb y koordinátái: $-b$ és b, tehát az utolsó integrál:

$$\frac{2a^2c}{3}\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}dy.$$

Ezen integrál kiszámítására legcélszerűbb lesz $\frac{y}{b}=\sin u$ helyettesítés. Az új határok: $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ és az integrál

$$\frac{2a^2cb}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\,du.$$

De $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\,du$ parciális integrálással könnyen kiszámítható; értéke: $\frac{3\pi}{8}$ és így a keresett hármas integrál: $\frac{a^2bc\pi}{4}$. Minthogy a félellipszoid köbtartalma: $\frac{2abc\pi}{3}$, tehát a súlypont x koordinátája:

$$\xi=\frac{3a}{8}.$$

A félellipszoid az (x, z) valamint az (x, y) síkra szimmetrikus lévén, $\eta=0$, $\zeta=0$.

4. A hármas integrál transzformációja. *A) Lineáris transzformáció.* Legyen adva az $x=a$, $x=a'$, $y=b$, $y=b'$ és $z=c$, $z=c'$ síkok által határolt parallelepipedon. Ha

$$\begin{aligned} x&=a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta+a_4\\ y&=b_1\xi+b_2\eta+b_3\zeta+b_4\\ z&=c_1\xi+c_2\eta+c_3\zeta+c_4\end{aligned}$$

transzformációval, melynek determinánsa nem 0, az (x, y, z) tér minden egyes pontjának a (ξ, η, ζ) tér egy-egy pontját feleltetjük meg, akkor azt mondjuk, hogy az (x, y, z) teret lineárisan transzformáltuk. Nyilvánvaló, hogy az (x, y, z) tér minden síkjának a (ξ, η, ζ) tér síkja felel meg. Ha a sík egyenlete:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

akkor ennek megfelel:

$$\begin{aligned}(Aa_1+Bb_1+Cc_1)\,\xi+(Aa_2+Bb_2+Cc_2)\,\eta+(Aa_3+Bb_3+Cc_3)\,\zeta\\ +Aa_4+Bb_4+Cc_4+D=0\end{aligned}$$

és ezen egyúttal azt is látjuk, hogy párhuzamos síkoknak párhuzamos síkok felelnek meg, tehát a derékszögű parallelepipedonból a transzformáció általánosságban négyoldalú hasábot készít. Ha tehát az eredeti parallelepipedont a határlapokkal párhuzamos, egymásra merőlegesen álló síkokból alkotott ráccsal osztottuk fel kis parallelepipedonokra, akkor a transzformáció által a megfelelő négyoldalú hasáb ugyancsak párhuzamos síkokkal osztatott fel megfelelő négyoldalú hasábokra.

Meghatározzuk a megfelelő térfogatok viszonyát. Evégből vegyünk fel egy tetraedert, melynek csúcsai: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) és ha a megfelelő tetraederé (ξ_1, η_1, ζ_1) stb., akkor az eredeti tetraeder köbtartalma:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & a_1\xi_1+a_2\eta_1+a_3\zeta_1+a_4 & b_1\xi_1+b_2\eta_1+b_3\zeta_1+b_4 & c_1\xi_1+c_2\eta_1+c_3\zeta_1+c_4 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1\xi_4+a_2\eta_4+a_3\zeta_4+a_4 & b_1\xi_4+b_2\eta_4+b_3\zeta_4+b_4 & c_1\xi_4+c_2\eta_4+c_3\zeta_4+c_4 \end{vmatrix}$$

Ha a jobboldali determinánsban az első oszlopot a_4-el szorozva a másodikból, b_4-el szorozva a harmadikból stb. kivonjuk és a determinánst az első oszlop elemei szerint kifejtjük, arra jutunk, hogy:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}$$

vagy ha a $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \ldots (\xi_4, \eta_4, \zeta_4)$ tetraeder köbtartalma V' és a transzformáció determinánsa D, akkor:

$$V = DV'$$

és így általában a (ξ, η, ζ) tér minden polyedere az (x, y, z) tér olyan polyederébe megy át, melynek köbtartalma az elsőnek D-szerese. [Megjegyezzük, hogy a köbtartalom mértékszámát pozitivnek tekintjük, tehát a nyert egyenlőség így irandó: $V = |D|\,V'$] Minthogy ez az állítás minden polyederre vonatkozik, tehát egész általánosságban mondhatjuk, hogy minden zárt felület, melynek köbtartalma mint polyeder köbtartalmának határértéke tekinthető, olyan felületbe megy át, melynek köbtartalma és az eredeti köbtartalom között az előbb említett összefüggés áll fenn.

És így éppen úgy, mint a kettős integrál esetében, (L. 156. lapon) most is

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} F(\xi, \eta, \zeta)\,|D|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

ahol

$$F(\xi, \eta, \zeta) = f[a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta+a_4, \ldots, c_1\xi+c_2\eta+c_3\zeta+c_4]$$

és a második integrál arra a T_1 térfogatra vonatkozik, amely a T-nek a lineáris transzformációval megfelel.

β) Általános eset. Ha általában (x, y, z) és (ξ, η, ζ) között ilyen összefüggések állnak fenn:

$$x=\varphi_1(\xi,\eta,\zeta),\quad y=\varphi_2(\xi,\eta,\zeta),\quad z=\varphi_3(\xi,\eta,\zeta),$$

amelyek a (ξ, η, ζ) tér T_1 részét kölcsönös egyértelműséggel leképezik az (x, y, z) tér T részére és a φ_1, φ_2, φ_3 függvények, valamint első differenciálhányadosaik a T_1 térrészben folytonosak, korlátosak, akkor is fennáll a transzformációra nézve, hogy:

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{T_1} F(\xi,\eta,\zeta)\,|D|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

ahol

$$F(\xi,\eta,\zeta)=f[\varphi_1(\xi,\eta,\zeta),\ \varphi_2(\xi,\eta,\zeta),\ \varphi_3(\xi,\eta,\zeta)] \text{ és } D=D\left(\frac{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3}{\xi,\eta,\zeta}\right).$$

A bizonyítás részleteit mellőzzük, mert analog a 162. lapon közölttel.

Tájékozásul megemlítjük, hogy ha $D \neq 0$ az egész T_1 tartományban s a T térfogat valamelyik parallelepipedonjának egyik csúcsa (x_0, y_0, z_0) melynek megfelel (ξ_0, η_0, ζ_0), akkor e parallelepipedon minden belső (vagy határán levő) (x, y, z) pontjának megfelel (ξ, η, ζ), ahol:

$$x=\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)=\varphi_1(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_0}(\xi-\xi_0)+$$
$$+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_0}(\eta-\eta_0)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_0}(\zeta-\zeta_0)+\varepsilon_1(\xi-\xi_0)+\varepsilon_2(\eta-\eta_0)+\varepsilon_3(\zeta-\zeta_0)$$

és hasonló két egyenlet áll fenn az y-ra és z-re. A parallelepipedon lapjainak általánosságban görbe felületek fognak megfelelni, a parallelepipedonnak egy eltorzított hasábszerű test. Ha az utolsó három tagot, amelyek az elsőkhöz képest is tetszés szerinti kicsinyekké válnak, amidőn a parallelepipedon méretei kellően csökkentetnek, egyelőre nem vesszük figyelembe, akkor e közelítő transzformációval az (x, y, z) tér derékszögű parallelepipedonjának a (ξ, η, ζ) térben szintén négyoldalú hasáb fog megfelelni, mert a transzformáció lineáris. E hasáb köbtartalma:

$$V'=\frac{V}{|D|},$$

ha V az (x, y, z) térbeli parallelepipedon köbtartalma és D a φ_1, φ_2, φ_3 függvénydeterminánsa a ξ_0, η_0, ζ_0 helyen.

Megint ki kell mutatnunk, hogy a valódi transzformációval keletkező test minden (ξ, η, ζ) pontja a közelítő transzformációval nyert ponttól a parallelepipedon méretéhez képest is elenyésző csekéllyel tér el, amiből következik, hogy a közelítő transzformációval nyert hasábhoz szerkeszthető belül és kívül egy másik hasáb és az így keletkezett (a síkban keretszerű idomnak nevezettnek itt megfelelő) gyűrűszerű térrész a parallelepipedon térfogatához képest is elenyésző csekéllyé válik, ha a parallelepipedon méretei végtelen kicsinyekké lesznek. Ebből azután következik, hogy az integrált tetszés szerinti pontossággal megközelítő összegben a valódi transzformációval nyert térrészecskék helyett a közelítő transzformációval nyert hasábok vehetők és így:

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint F(\xi, \eta, \zeta)\,|D|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

A jobboldali integrál arra a térrészre vonatkozik, mely az integráció eredeti tartományából a transzformációval keletkezik. (Feltettük, hogy a D a T_1 tartományban sehol sem 0. Ha egy P helyen 0 volna, akkor a T_1 tartományt két részre osztjuk: T_1' és T_1''-ra, mely utóbbi a P pontot magába zárja. A transzformáció képlete a T_1'-ra érvényes; a T_1'' kisebbítésével pedig elérhetjük, hogy a reá vonatkozó integrál tetszésszerinti kicsiny legyen, tehát a transzformációképletet erre az esetre is kiterjeszthetjük. Ugyanez áll, ha D véges számú helyen lesz zérussá.)

Ha ezt az általános képletet az $f(x, y, z) = 1$ esetére alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy pl. egy zárt F felület által határolt test térfogata:

$$V = \iiint_{T'} |D|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

és a középértéktétel alkalmazásával:

$$V = |D_0|\,V'$$

ahol D_0 a D determináns értéke valamely belső helyen. Minthogy a D folytonos, tehát ha egy kiszemelt (ξ, η, ζ) helyen értéke D, akkor a fenti egyenlet

$$V = |D + \sigma|\,V'$$

alakban írható, ahol $\lim \sigma = 0$, ha V zérussá válik, vagyis

$$\lim_{V=0} \frac{V}{V'} = |D|.$$

Ezt még úgy is szoktuk mondani, hogy a megfelelő térfogatelemek: dV és dV' között a

$$dV = |D|\,dV'$$

reláció áll fenn.

Példaképpen számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ homogén ellipszoidnak az (xy) síkra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. [A síkra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka egy m tömegpontnak md^2, ahol d a pontnak a síktól való távolsága.] Ha ϱ az állandó sűrűség, akkor e nyomaték:

$$I = \varrho \iiint z^2\,dx\,dy\,dz.$$

Ha $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$ tesszük, akkor az ellipszoid belsejének a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

egységsugarú gömb belseje felel meg, tehát, minthogy $|D| = abc$,

$$I = abc^3\varrho \iiint \zeta^2\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Az integrál nem más, mint az egységsugarú, egységsűrűségű gömbnek az (xy) síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{4}{15}\pi$ * és így az ellipszoid tehetetlenségi nyomatéka az (xy) síkra:

$$\frac{4\pi\varrho abc^3}{15} = \frac{Mc^2}{5},$$

ha $M = \frac{4\pi\varrho abc}{3}$ az ellipszoid tömege.

5. A transzformáció-képlet átalakítása. Ha az (x, y, z) tér és az (u, v, w) tér kölcsönös egyértelműséggel egymásra vonatkoztatott pontjai között ezek a relációk állanak fenn:

$$x = \varphi_1(u, v, w); \quad y = \varphi_2(u, v, w); \quad z = \varphi_3(u, v, w),$$

ahol $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ folytonos első differenciálhányadosokkal bíró függvények és két tetszés szerinti pont (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) és megfelelően (u, v, w), (u_1, v_1, w_1), akkor:

$$x_1 - x = \varphi_1(u_1, v_1, w_1) - \varphi_1(u, v, w) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u_1 - u) +$$
$$+ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(v_1 - v) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial w}(w_1 - w) + \varepsilon_1(u_1 - u) + \varepsilon_2(v_1 - v) + \varepsilon_3(w_1 - w),$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ zérusokká válnak, ha $\lim u_1 = u$, $\lim v_1 = v$, $\lim w_1 = w$ és hasonló két formula van az $y_1 - y$, $z_1 - z$ kifejezésére. A két pont távolsága:

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = H_1(u_1 - u)^2 + H_2(v_1 - v)^2 +$$
$$+ H_3(w_1 - w)^2 + 2F_1(v_1 - v)(w_1 - w) + 2F_2(w_1 - w)(u_1 - u) +$$
$$+ 2F_3(u_1 - u)(v_1 - v) + (\varepsilon) \qquad A)$$

ahol (ε) jelöli az ε-os tagok összegét és

$$H_1 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\right)^2,$$
$$H_2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right)^2,$$
$$H_3 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial w}\right)^2,$$

* Az R sugarú, homogén ϱ sűrűségű gömbnek a középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka könnyen kiszámítható; ugyanis ha a 6. pont I. alatti transzformációt alkalmazzuk (L. 227. lapon.):

$$x = r\sin\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\sin\psi, \quad z = r\cos\varphi,$$

a gömbnek a középpontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát ebben az alakban kapjuk:

$$\varrho\iiint r^2\,dx\,dy\,dz = \varrho\iiint r^4\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi = \varrho\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{2\pi} d\psi\int_0^{R} r^4\sin\varphi\,dr = \frac{4\pi\varrho R^5}{5};$$

de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ és minthogy a 3 koordináta-síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok egyenlők, tehát az (xy) síkra vonatkozó nyomaték: $\frac{4\pi\varrho R^5}{15}$.

$$F_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial w} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial w} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\frac{\partial\varphi_3}{\partial w},$$

$$F_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial w}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial w}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial w}\frac{\partial\varphi_3}{\partial u},$$

$$F_3 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}.$$

Ha az (u, v, w) térben egy vonalat képzelünk, vagyis u, v, w valamely t parameter differenciálható függvényei :

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad w = w(t),$$

akkor e görbének az (x, y, z) térben is általánosságban megfelel egy görbe. Ha az *A)* alatti egyenletben szereplő u, v, w és megfelelően az x, y, z a t parameter értékhez és u_1, v_1, w_1 és megfelelően x_1, y_1, z_1 a t_1-hez tartoznak és mindkét oldalon $(t_1 - t)^2$-el osztunk és $\lim t_1 = t$ tesszük, akkor azt nyerjük, hogy:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H_1\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + H_2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + H_3\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 +$$

$$+ 2F_1\frac{dv}{dt}\frac{dw}{dt} + 2F_2\frac{dw}{dt}\frac{du}{dt} + 2F_3\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}.$$

Vagy ha a baloldalon levő kifejezés helyett az I. kötet 481. lapján foglaltak szerint $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$-t tesszük, ahol s a görbe valamely fix pontjától az (x, y, z) pontjáig mért ívhosszúság és a fenti egyenletet differenciálokra vonatkozó alakban írjuk [amivel csak éppen azt akarjuk feltüntetni, hogy ez a reláció minden parameteres előállításra vonatkozik], akkor a vonalelem négyzetét a következő alakban kapjuk:

$$ds^2 = H_1 du^2 + H_2 dv^2 + H_3 dw^2 + 2F_1\, dv\, dw + 2F_2\, dw\, du + 2F_3\, du\, dv.$$

A vonalelem négyzetének kifejezésében szereplő H_1, $H_2, \ldots F_3$ függvények segítségével a transzformációnál előforduló függvénydetermináns egyszerű alakban fejezhető ki; ugyanis e determináns négyzete :

$$D^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial w} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix} \tag{B)}$$

és így, ha az utolsó determinánst Δ-val jelöljük, akkor a 4. pont alatti jelöléssel a megfelelő térelemek között ez az összefüggés áll fenn :

$$dV = \left|\sqrt{\Delta}\right| dV'$$

A hármas integrál transzformációjánál tehát a $|D|$ determinánst $|\sqrt{\Delta}|$-val helyettesíthetjük.

Különös fontossága van annak az (x, y, z) térrésznek, amely az (u, v, w) tér derékszögű parallelepipedonjának felel meg; azért általában azt vizsgáljuk, hogy az (u, v, w) tér azon síkjainak, amelyek a koordináta-síkokkal párhuzamosak, az (x, y, z) tér minő felületei felelnek meg. Ha például w-nek ezt a számértéket tulajdonítjuk: w', vagyis az (u, v) síkkal párhuzamos $w=w'$ síkot szemeljük ki, akkor:

$$x = \varphi_1(u, v, w'), \quad y = \varphi_2(u, v, w') \quad z = \varphi_3(u, v, w'), \tag{1}$$

vagyis az x, y, z mint az u, v parameterek függvényei vannak előállítva, tehát az (x, y, z) térben egy felületsereget kapunk, amint a w'-nek más meg más állandó értéket adunk.

Éppen így a $v=v'$ síknak megfelel az

$$x = \varphi_1(u, v', w), \quad y = \varphi_2(u, v', w), \quad z = \varphi_3(u, v', w) \tag{2}$$

felület és az összes $v=v'$ párhuzamos síkoknak e felületek által alkotott felületsereg.

Végül az $u=u'$-nak megfelel az

$$x = \varphi_1(u', v, w), \quad y = \varphi_2(u', v, w), \quad z = \varphi_3(u', v, w) \tag{3}$$

felület. Ha u' az u_0-tól $u_1 > u_0$-ig folytonosan halad, akkor a 3) alatti felület egy F_1 kezdőhelyzetből folytonosan átmegy egy F_2 véghelyzetbe; és éppen így, ha v' a v_0-tól v_1-ig halad, akkor a 2) alatti felület a Φ_1 kezdőhelyzetből a Φ_2 véghelyzetbe és ha w' a w_0-tól w_1-ig megy, akkor a Ψ_1 felület a Ψ_2-be jut. Az F_1, F_2; Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2 felületek általánosságban egy hasábszerű térrészt határolnak. Ez az a térrész, mely az

$$u = u_0, \; u = u_1, \quad v = v_0, \; v = v_1, \quad w = w_0, \; w = w_1$$

síkok által alkotott parallelepipedonnak felel meg.

Határozzuk meg az (u, v, w) rendszer koordináta-tengelyeivel párhuzamos egyeneseknek megfelelő vonalakat. Legyenek u_0, v_0 megadott számértékek és az (u, v, w) térben legyen adva az $u=u_0$, $v=v_0$ egyenes; ennek megfelel:

$$x = \varphi_1(u_0, v_0, w), \quad y = \varphi_2(u_0, v_0, w), \quad z = \varphi_3(u_0, v_0, w) \tag{C}$$

görbe, mely parameteres alakban van előállítva; a parameter w. Ez a görbe természetesen keresztülmegy azon az (x_0, y_0, z_0) ponton, mely az $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$ pontnak felel meg és rajta van úgy a Φ_1, mint az F_1 felületeken. [Ugyanis, ha pl. 2)-ben $v'=v_0$ tétetik, a Φ_1 felületre jutunk és ha még az u parameternek u_0 értéket tulajdonítunk, akkor éppen a felület azon pontjait kapjuk, melyek e görbét alkotják s. i. t.] Ez a görbe tehát a Φ_1 és F_1 felületek metszésvonala. Éppen így a Ψ_1 és F_1 felületek metszésvonala a $w=w_0$, $u=u_0$ síkok metszésének megfelelő:

$$x=\varphi_1(u_0, v, w_0), \quad y=\varphi_2(u_0, v, w_0), \quad z=\varphi_3(u_0, v, w_0) \qquad D)$$

görbe és a Ψ_1 és Φ_1 felületek metszésvonala:

$$x=\varphi_1(u, v_0, w_0), \quad y=\varphi_2(u, v_0, w_0), \quad z=\varphi_3(u, v_0, w_0). \qquad E)$$

Felvetjük azt a kérdést, mi a feltétele annak, hogy az F_1, Φ_1, Ψ_1 felületek egymást az (u_0, v_0, w_0) pontban* merőlegesen messék? Két felület egymásra definició szerint egy pontban akkor merőleges, ha az illető pontban vont érintő síkok egymásra merőlegesek. A három felület tehát egymásra merőleges, ha az (u_0, v_0, w_0) pontban a három felülethez vont érintő síkok egymásra merőlegesek, vagyis ha ezen érintő síkok metszésvonalai egymást derékszögben metszik. A felület valamely pontjában vont érintősík magában foglalja az e pontban a felülethez vonható összes érintő egyeneseket, vagyis a felületen lévő, e ponton átmenő összes görbéknek e pontban vont érintőit. Így tehát például az F_1 felületnek az (u_0, v_0, w_0) pontban vont érintősíkja átmegy úgy a *D)*, mint a *C)* görbék érintőin, a Φ_1 felület érintősíkja átmegy az *E)* és *C)* görbék érintőin és a Ψ_1 felület érintősíkja átmegy az *E)* és *D)* görbék érintőin. Eszerint tehát a három érintősík metszésvonalai: a *C)*, *D)*, *E)* görbéknek az (u_0, v_0, w_0) pontban vont érintői. Ezen érintők iránycosinusai arányosak a következő mennyiségekkel:

$$\frac{d\varphi_1(u_0, v_0, w)}{dw}, \quad \frac{d\varphi_2(u_0, v_0, w)}{dw}, \quad \frac{d\varphi_3(u_0, v_0, w)}{dw};$$

$$\frac{d\varphi_1(u_0, v, w_0)}{dv}, \quad \frac{d\varphi_2(u_0, v, w_0)}{dv}, \quad \frac{d\varphi_3(u_0, v, w_0)}{dv};$$

$$\frac{d\varphi_1(u, v_0, w_0)}{du}, \quad \frac{d\varphi_2(u, v_0, w_0)}{du}, \quad \frac{d\varphi_3(u, v_0, w_0)}{du}.$$

Ezekkel az iránycosinusokkal arányos mennyiségekkel az ismeretes módon megalkothatjuk annak a feltételeit, hogy a három felület egymást az (u_0, v_0, w_0) pontban derékszögben messe. Ha már most az (u_0, v_0, w_0) nem egy megadott pont, hanem az (u, v, w) tér tetszés szerinti pontja, akkor ugyanezen gondolatmenettel arra jutunk, hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az (u, v, w) tér mindazon síkjaihoz, amelyek a koordinátasíkokkal párhuzamosak, az (x, y, z) tér olyan felületei tartozzanak, melyek egymásra szintén merőlegesek, az, hogy

* (u_0, v_0, w_0) pontnak nevezzük a felület azon x_0, y_0, z_0 pontját, mely az u_0, v_0, w_0-nak felel meg; (u_0, v_0) görbének nevezzük a *C)* görbét s. i. t.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\frac{\partial\varphi_3}{\partial w}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial w}\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}=0$$

legyen az (u, v, w) minden értékénél, vagyis az előbbi jelölést használva: [L. 224. lapon]

$$F_1=0,\quad F_2=0,\quad F_3=0.$$

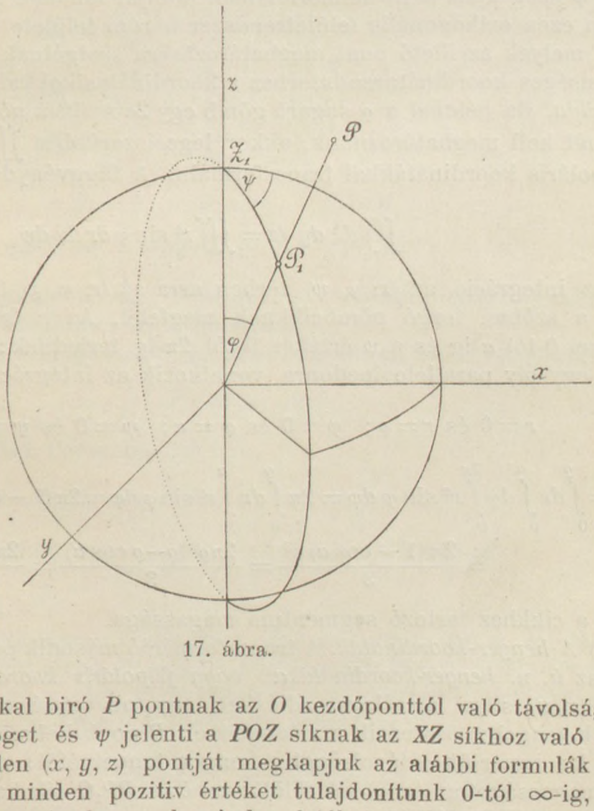
A felületek ilyen rendszerét *orthogonális rendszernek* nevezzük. Orthogonális rendszer esetében a *B)* alatti függvénydetermináns:

$$D=\sqrt{H_1 H_2 H_3}$$

és a megfelelő térfogatelemek közötti reláció:

$$dV=\sqrt{H_1 H_2 H_3}\,dV'.$$

6. Példák az orthogonális rendszerekre és a velük való transzformációra. I. *Térbeli poláris koordináták.* A térbeli koordináták legyenek r, φ, ψ, ahol r jelenti az



17. ábra.

x, y, z koordinátákkal biró P pontnak az O kezdőponttól való távolságát; φ jelenti a POZ szöget és ψ jelenti a POZ síknak az XZ síkhoz való hajlásszögét. A tér minden (x, y, z) pontját megkapjuk az alábbi formulák segítségével, ha r-nek minden pozitiv értéket tulajdonítunk 0-tól ∞-ig, φ-nek minden értéket $0\ldots\pi$-ig és ψ-nek minden értéket 0-tól 2π-ig:

$$x = r\sin\varphi\cos\psi\,; \quad y = r\sin\varphi\sin\psi\,; \quad z = r\cos\varphi.$$

[Az ábrában feltüntetett gömböt egységnyi sugarúnak képzeljük; P_1-ben metszi az OP sugár a gömböt. P_1Z_1 ív $= \varphi$.]

Ezen transzformációra vonatkozólag:

$$H_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1\,;$$

$$H_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2\,;$$

$$H_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = r^2\sin^2\varphi.$$

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0.$$

És így a vonalelem:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\,d\psi^2.$$

A térelemek közötti összefüggés:

$$dV = r^2\sin\varphi\,dV'.$$

A jelen esetben: $r =$ const-nak $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gömbfelület felel meg; tehát a felületek első seregét koncentrikus gömbfelületek alkotják; a $\varphi =$ const-nak az (x, y, z) tér azon pontjai felelnek meg, amelyek az O-ból induló, a Z tengelyhez (pozitiv feléhez) φ szög alatt hajló egyeneseken vannak, vagyis a Z tengelyű, 2φ nyílású kúpfelületek, végre a $\psi =$ const-nak az XZ síkhoz ψ szög alatt hajló félmeridiánsík pontjai felelnek meg. A tér minden pontján ezen orthogonális felületrendszer három felülete vonul: gömb, kúp és sík, melyek az illető pont meghatározására szolgálnak (éppen úgy, mint a közönséges koordinátarendszerben a koordinátasíkokkal párhuzamos 3 sík).

Példa. Ha például a ϱ sugarú gömb egy 2α nyílású gömbcikkének a köbtartalmát kell meghatároznunk, akkor legcélszerűbb a $\iiint dx\,dy\,dz$ integrált ilyen poláris koordinátákkal transzformálni. A függvénydetermináns $r^2\sin\varphi$; tehát:

$$\iiint dx\,dy\,dz = \iiint r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi$$

ahol az integráció az (r, φ, ψ) térben arra az (r, φ, ψ) tartományra terjed, amely a szóban forgó gömbcikknek megfelel. Az r értékei 0-tól ϱ-ig, a φ értékei 0-tól α-ig és a ψ értékei 0-tól 2π-ig terjednek; tehát az (r, φ, ψ) térben egy oly parallelepipedonra vonatkozik az integráció, melynek oldallapjai:

$$r = 0 \text{ és } r = \varrho\,; \quad \varphi = 0 \text{ és } \varphi = \alpha\,; \quad \psi = 0 \text{ és } \psi = 2\pi\,;$$

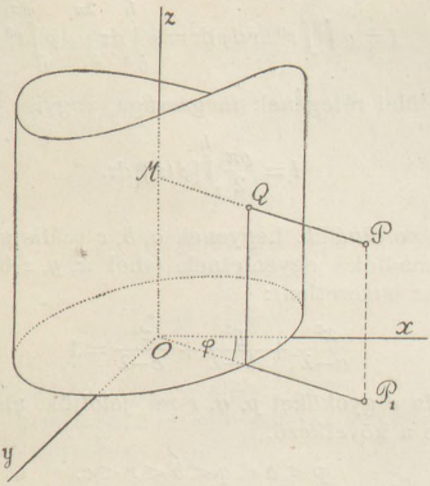
tehát:

$$V = \int_0^\varrho dr \int_0^\alpha d\varphi \int_0^{2\pi} r^2\sin\varphi\,d\psi = 2\pi\int_0^\varrho dr\int_0^\alpha r^2\sin\varphi\,d\varphi = 2\pi(1-\cos\alpha)\int_0^\varrho r^2\,dr =$$

$$= \frac{2\pi(1-\cos\alpha)\,\varrho^3}{3} = \frac{2\pi\varrho^2(\varrho-\varrho\cos\alpha)}{3} = \frac{2\pi\varrho^2 h}{3},$$

ahol h a cikkhez tartozó segmentum magassága.

II) *A henger-koordináták.* A transzformáció második példája gyanánt említjük az ú. n. *henger-koordinátákat*, *vagy félpoláris koordinátákat*. Vegyünk fel az (x, y) síkra merőleges állásban egy (pl. egységsugarú) körhengert, melynek tengelye összeesik a z tengellyel. P pont helyzete meg van határozva, ha ismerjük a távolságot a henger tengelyétől: a $PM = r$-et, továbbá a PP_1 magasságot az (x, y) sík fölött: z-t és a PP_1O sík hajlásszögét az (x, z) síkhoz: φ-t. Ekkor tehát:



18. ábra.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Ha r 0-tól végtelenig, z $-\infty$-től ∞-ig és φ 0-tól 2π-ig halad, akkor az (x, y, z) tér minden pontját előállítjuk. A vonalelem kifejezésében előforduló főmennyiségek:

$$H_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1;$$

$$H_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2;$$

$$H_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

tehát:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2; \qquad dV = r\,dV'.$$

1. Példa. Számítsuk ki egy homogén ϱ sürűségű hengercsőnek a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

Legyen a henger magassága: h, belső sugara r_1, külső sugara r_2; akkor

$$I = \varrho \iiint (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$$

és henger-koordináták bevezetésével:

$$I = \varrho \iiint r\,d\varphi\,dr\,dz = \varrho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r^3\,dr =$$

$$= \frac{\pi\varrho h\,(r_2^4 - r_1^4)}{2} = \frac{\pi\varrho h\,(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)}{2} = \frac{M\,(r_2^2 + r_1^2)}{2},$$

ha M a cső tömege.

2. Példa. Ha általában r jelenti a $P(x, y, z)$ pontnak a Z tengelytől való távolságát, akkor $z = \varphi(r)$ forgási felület egyenlete, melynek forgó görbéje az (x, z) síkon: $z = \varphi(x)$. E forgási felület által határolt homogén ϱ sűrűségű test forgási nyomatéka a Z tengelyre vonatkozóan:

$$I = \varrho \iiint r^2\,dx\,dy\,dz$$

vagy henger-koordinátákban:

$$I = \varrho \iiint r^3\, dr\, d\varphi\, dz = \varrho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varphi(z)} r^3\, dr,$$

ahol h a forgási felület rétegének magassága, vagyis:

$$I = \frac{\varrho\pi}{2} \int_0^h [\varphi(z)]^4\, dz.$$

III) *Elliptikus koordináták.* Legyenek a, b, c reális számok és $a<b<c$. Ennek a harmadfokú egyenletnek (ahol x, y, z 0-tól különböző reális számértékek és λ az ismeretlen):

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1$$

gyökei valósak. Ha e gyököket p, q, r-rel jelöljük, ahol $p<q<r$, akkor a gyökök elhelyezése a következő.

$$p < a < q < b < r < c. \qquad \alpha)$$

Ezek az állítások a következő egyszerű meggondolással bizonyíthatók be. A fenti egyenletet röviden így jelöljük:

$$F(\lambda) - 1 = 0.$$

Ha λ-nak ezt az értéket adjuk: $a+\varepsilon$, akkor $a-\lambda = -\varepsilon$ és ha a pozitiv ε elég kicsiny, akkor $F(\lambda)-1$ a $-\dfrac{x^2}{\varepsilon}$ igen nagy abszolut értékű negativ számtól kevéssel tér el; tehát $F(a+\varepsilon)-1$ negativ. Ha λ-nak ezt az értéket adjuk: $b-\varepsilon$, akkor pedig $F(\lambda)-1$ a második tagtól, az $\dfrac{y^2}{\varepsilon}$-tól lényegtelenül tér el, ha ε elég kicsiny és így pozitiv. Ebből következik, hogy az $F(\lambda)-1=0$ egyenletnek $a+\varepsilon$ és $b-\varepsilon$ között van gyöke, ha elegendő kicsiny az ε; tehát a és b között van gyöke. Ugyanígy mutathatjuk meg, hogy $b+\varepsilon$ és $c-\varepsilon$ között is van gyöke akárminő kicsiny is az ε, tehát b és c között van gyöke. Ha pedig λ helyett egy kellő nagy abszolut értékű negativ számot teszünk, akkor $F(\lambda)$ tetszés szerinti kicsinnyé lesz és így $F(\lambda)-1$ negativ és ha λ helyett $a-\varepsilon$ tesszük, akkor pedig, ha ε elég kicsiny, $F(\lambda)-1$ pozitiv, tehát a $-\infty$ és $a-\varepsilon$ között is van egy gyök, ha elég kicsiny az ε, vagyis $-\infty$ és a között is van gyök, tehát valóban 3 valós gyök van és azok elhelyezése az α) alattiban feltüntetett. Ez érvényes, akárminő számok is az (x, y, z). A 3 valós gyök az (x, y, z) értékekkel változik ugyan, de mindig ilyen elhelyezésű lesz. Ha az (x, y, z) meg vannak adva, akkor a 3 gyök is meghatározott és minthogy a p, q, r elhelyezése is fixirozva van, tehát e (p, q, r) számcsoport az (x, y, z) által egyértelműen van meghatározva. Viszont x^2, y^2, z^2 a p, q, r gyökök által könnyen kifejezhetők. Ugyanis, ha az

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1$$

kifejezést közös nevezőre hozzuk, akkor erre az alakra jutunk:

$$\frac{-(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) + x^2(b-\lambda)(c-\lambda) + y^2(a-\lambda)(c-\lambda) + z^2(a-\lambda)(b-\lambda)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)}.$$

A számláló a $\lambda = p$, $\lambda = q$, $\lambda = r$ helyeken 0-sá váló, λ-ban harmadfokú racionális egész függvény, melyben az első tag: λ^3, tehát a számláló ilyen alakú:

$$(\lambda-p)(\lambda-q)(\lambda-r)$$

és így:

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=\frac{(\lambda-p)(\lambda-q)(\lambda-r)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)} \tag{A}$$

identitásra jutottunk. Ha ezt $(a-\lambda)$-val mindkét oldalon szorozzuk és azután $\lambda=a$ tesszük, akkor erre jutunk:

$$x^2=\frac{(a-p)(a-q)(a-r)}{(b-a)(c-a)}$$

és hasonlóképpen:

$$y^2=\frac{(b-p)(b-q)(b-r)}{(a-b)(c-b)} \tag{B}$$

$$z^2=\frac{(c-p)(c-q)(c-r)}{(a-c)(b-c)},$$

vagyis x^2, y^2, z^2-et kifejeztük a p, q, r által.

Ha az *A)* alatti identitást λ szerint differenciáljuk, rövidség végett az $(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$-t $\varphi(\lambda)$-nak véve, akkor:

$$\frac{x^2}{(a-\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c-\lambda)^2}=$$

$$=\frac{[(\lambda-q)(\lambda-r)+(\lambda-p)(\lambda-r)+(\lambda-q)(\lambda-p)]\varphi(\lambda)-\varphi'(\lambda)(\lambda-p)(\lambda-q)(\lambda-r)}{[\varphi(\lambda)]^2}$$

és ha rendre $\lambda=p$, q, r tesszük, ezen egyenletekre jutunk:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(a-p)^2}+\frac{y^2}{(b-p)^2}+\frac{z^2}{(c-p)^2}&=\frac{(p-q)(p-r)}{\varphi(p)}\\
\frac{x^2}{(a-q)^2}+\frac{y^2}{(b-q)^2}+\frac{z^2}{(c-q)^2}&=\frac{(q-r)(q-p)}{\varphi(q)}\\
\frac{x^2}{(a-r)^2}+\frac{y^2}{(b-r)^2}+\frac{z^2}{(c-r)^2}&=\frac{(r-p)(r-q)}{\varphi(r)}.
\end{aligned} \tag{C}$$

Ha (x, y, z)-nek ezt a fix értékrendszert adjuk: (ξ, η, ζ) és az $F(\lambda)-1=0$ hozzátartozó 3 gyöke: π, $\varkappa$, ϱ, akkor a

$$\frac{\xi^2}{a-\lambda}+\frac{\eta^2}{b-\lambda}+\frac{\zeta^2}{c-\lambda}-1=0$$

egyenlet fennáll, ha λ helyett π, vagy $\varkappa$, vagy ϱ tétetik; ez más szóval azt jelenti, hogy a (ξ, η, ζ) ponton keresztül megy ez a 3 másodrendű felület:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a-\pi}+\frac{y^2}{b-\pi}+\frac{z^2}{c-\pi}-1&=0;\\
\frac{x^2}{a-\varkappa}+\frac{y^2}{b-\varkappa}+\frac{z^2}{c-\varkappa}-1&=0;\\
\frac{x^2}{a-\varrho}+\frac{y^2}{b-\varrho}+\frac{z^2}{c-\varrho}-1&=0.
\end{aligned} \tag{D}$$

A tér minden (ξ, η, ζ) pontján át tehát 3 ilyen másodrendű felület vonul. Minthogy $\pi<a<\varkappa<b<\varrho<c$, tehát az első felület: ellipszoid; a második: egyköpenyű hyperboloid és a harmadik: kétköpenyű hyperboloid.

Igen egyszerűen győződhetünk meg arról, hogy e három felület, mely a (ξ, η, ζ) ponton átmegy, egymást e pontban orthogonálisan metszi; ugyanis az

$$\frac{x^2}{a-\pi}+\frac{y^2}{b-\pi}+\frac{z^2}{c-\pi}-1=0$$

felület (ξ, η, ζ) pontjában vont érintősík egyenlete:

$$\frac{x\xi}{a-\pi}+\frac{y\eta}{b-\pi}+\frac{z\zeta}{c-\pi}-1=0$$

tehát e sík normálisának iránycosinusai: $\frac{\xi}{a-\pi}, \frac{\eta}{b-\pi}, \frac{\zeta}{c-\pi}$-vel arányosak és éppen így a $\varkappa$-hoz tartozó egyköpenyű hyperboloid (ξ, η, ζ) pontjában húzott érintősík normálisának iránycosinusai: $\frac{\xi}{a-\varkappa}, \frac{\eta}{b-\varkappa}, \frac{\zeta}{c-\varkappa}$-val arányosak; de ha a *D)* alatti első és második egyenletet, miután (x, y, z) helyébe (ξ, η, ζ) tettük, egymásból kivonjuk és $(\pi-\varkappa)$ faktort, mely 0-tól különböző, elhagyjuk, akkor:

$$\frac{\xi^2}{(a-\pi)(a-\varkappa)}+\frac{\eta^2}{(b-\pi)(b-\varkappa)}+\frac{\zeta^2}{(c-\pi)(c-\varkappa)}=0$$

egyenlőségre jutunk és ez éppen azt fejezi ki, hogy a szóban forgó két érintősík egymásra merőleges. Éppen így mutathatjuk ki, hogy az egyköpenyű és kétköpenyű hyperboloidok, valamint a kétköpenyű hyperboloid és az ellipszoid is, amelyek átmennek a (ξ, η, ζ) ponton, e pontban egymásra merőlegesek és így arra a nevezetes eredményre jutottunk, hogy a tér minden (x, y, z) pontján át megy az

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=0$$

felületseregnek 3 egyéne: egy ellipszoid, egy egyköpenyű és egy kétköpenyű hyperboloid, melyek egymásra e pontban merőlegesek. Ha tehát az (x, y, z)-t a (p, q, r) által kifejezzük és megalkotjuk a 223. lapon bevezetett mennyiségeket, arra jutunk, hogy az F_1, F_2, F_3 mennyiségek, minthogy orthogonális rendszerről van szó, eltünnek. A H_1, H_2, H_3 meghatározása végett a *B)* alatti egyenleteket előbb p, azután q, végül r szerint parciálisan differenciáljuk. Ha az elsőt p szerint differenciáljuk:

$$2x\frac{\partial x}{\partial p}=-\frac{(a-q)(a-r)}{(b-a)(c-a)}$$

-re jutunk, miből (a *B)* alatti tekintetbevételével):

$$4\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2=\frac{(a-q)^2(a-r)^2}{(b-a)^2(c-a)^2}\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$=\frac{(a-q)(a-r)}{(b-a)(c-a)(a-p)}=\frac{(a-p)(a-q)(a-r)}{(b-a)(c-a)(a-p)^2}=\frac{x^2}{(a-p)^2}$$

Ugyanígy kapjuk:

$$4\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2=\frac{y^2}{(b-p)^2} \quad \text{és} \quad 4\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=\frac{z^2}{(c-p)^2}$$

és ebből:

$$4H_1=\frac{x^2}{(a-p)^2}+\frac{y^2}{(b-p)^2}+\frac{z^2}{(c-p)^2}$$

vagy a *C)* szerint, $(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$-t ismét $\varphi(\lambda)$-nak írva:

$$4H_1=\frac{(p-q)(p-r)}{\varphi(p)}.$$

És ciklikus felcseréléssel:

$$4H_2=\frac{(q-r)(q-p)}{\varphi(q)}, \quad 4H_3=\frac{(r-p)(r-q)}{\varphi(r)},$$

tehát a vonalelem négyzete:

$$ds^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(p-q)(p-r)}{\varphi(p)}\,dp^2 + \frac{1}{4}\,\frac{(q-r)(q-p)}{\varphi(q)}\,dq^2 + \frac{1}{4}\,\frac{(r-p)(r-q)}{\varphi(r)}\,dr^2$$

és a megfelelő térfogatelemek közötti összefüggés

$$dV = \frac{1}{8}\,\frac{(r-p)(r-q)(q-p)}{\left|\sqrt{|\varphi(p)\,\varphi(q)\,\varphi(r)|}\right|}\,dV'.$$

Feladatok és gyakorlatok a VI—IX. fejezetekhez.

1. Az $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ egyenesek által határolt négyzetben $f(x, y)$ úgy legyen értelmezve, hogy mindazokon a helyeken, amelyek koordinátái racionális számok, $f(x, y)=0$ és minden más helyen $f(x, y)=1$. Mutassuk meg, hogy az $f(x, y)$-nak a négyzetre vonatkozó alsó integrálja: 0, felső integrálja: 1, tehát $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ nem létezik.

2. $f(x, y)$ az 1)-ben említett négyzetben olyan, hogy ha x racionális, $f(x, y)=1$ és minden más helyen: $f(x, y)=y$. Mutassuk meg, hogy felső integrálja: 1, alsó integrálja: $\frac{1}{2}$.

3. $f(x, y)$ az előbb említett négyzetben: 1, ha x racionális, $2y$, ha x irracionális. Mutassuk meg, hogy az $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ kettős integrál nem létezik; de $\int\limits_0^1 f(x, y)\,dy = 1$ és ez a kétszeres integrál: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy = 1$. Létezik-e az $\int\limits_0^1 f(x, y)\,dx$?

Ezen a példán látjuk, hogy a kétszeres integrál (az egyik) létezik, de a kettős integrál nem létezik.

4. *Az algebra alaptétele.* Tudjuk, hogy ha $f(x, y)$ valamely véges tartományban egyértékű, folytonos és korlátos, akkor e tartományra vonatkozó kettős integrál létezik és kétszeres integrálással számítható ki, melynek sorrendje tetszés szerinti. Ha tehát valamely $f(x, y)$-ra vonatkozó kétszeres integrálás eredménye a sorrendtől függ, akkor az $f(x, y)$-ra az említett feltételek nincsenek teljesítve.

Legyen például adva a

$$\psi(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

m-edfokú racionális egész függvény, melynek együtthatói valósak és $a_0 \neq 0$, $a_m \neq 0$. Tegyük

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

akkor tehát:

$$\psi(z) = P(r, \varphi) + i\,Q(r, \varphi)$$

alakban írható, ahol:

$$P(r, \varphi) = a_0 r^m \cos m\varphi + a_1 r^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \cdots$$
$$Q(r, \varphi) = a_0 r^m \sin m\varphi + a_1 r^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \cdots$$

Legyen:

$$f(r, \varphi) = \operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q};$$

ekkor tehát

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{Q\dfrac{\partial P}{\partial r} - P\dfrac{\partial Q}{\partial r}}{P^2+Q^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{Q\dfrac{\partial P}{\partial \varphi} - P\dfrac{\partial Q}{\partial \varphi}}{P^2+Q^2}$$

és

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi} = \frac{M}{(P^2+Q^2)^2},$$

ahol M az r és φ folytonos függvénye. Ez az $f''_{r\varphi}$ tehát csakis akkor válik végtelenné, ha $P=0$ és $Q=0$.

Számítsuk ki az $\frac{M}{(P^2+Q^2)^2}$ kettős integrálját az R sugarú körre, melynek középpontja a kezdőpont. Jelöljük ezt a kört C-vel:

$$I=\iint\limits_C \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi}\,dr\,d\varphi.$$

Ha először r szerint integrálunk, akkor:

$$I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi}\,dr=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left[\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]_{r=0}^{r=R}.$$

Mint könnyen kiszámíthatjuk, $\frac{\partial f}{\partial\varphi}$ ilyen alakú:

$$\frac{-ma_0^2r^{2m}+\cdots}{a_0^2r^{2m}+\cdots},$$

ahol az elhagyott tagok r-nek a $2m$-iknél alacsonyabb hatványait tartalmazzák. A számlálóban r-től mentes tag nincsen; a nevezőben van, mert feltételezzük, hogy $a_m \neq 0$. Ha $r=0$, ez a kifejezés: 0; ha pedig r-et elég nagynak választjuk, akkor értéke $-m$-től igen kevéssel különbözik; tehát a kétszeres integrál elég nagy sugarú körre nézve $-2m\pi$-től tetszés szerinti kevéssel különbözik.

Ha pedig először φ szerint integrálunk, akkor az integrál lesz:

$$\int\limits_0^R dr\left[\frac{\partial f}{\partial r}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$$

De $\frac{\partial f}{\partial r}$ a $\sin k\varphi$ és $\cos k\varphi$ $[k=1, 2\ldots m]$ racionális függvénye, tehát 2π helyen ugyanakkora, mint a 0 helyen és így ez az integrál: 0. Ezzel megmutattuk, hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi}$ az R sugarú körön belül nem lehet mindenütt véges, vagyis kell olyan (r,φ) helynek lenni, amelyen $P=0$, $Q=0$, tehát van az R sugarú körben olyan z hely, amelyen $\psi(z)=0$. [Az algebra alaptétele valós együtthatójú egyenletekre bizonyítva, amelyre a szóban forgó tétel az alaptétel feltételezése nélkül végrehajtott eliminációval mindig visszavezethető.]

Köbtartalom számítások. 5. A koordináta-síkok és az

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

sík [a, b, c pozitiv számok] tetraedert alkotnak. Határozzuk meg a köbtartalmát! $\left[V=\iint\left(c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}\right)dx\,dy\right.$; az integráció területe az a derékszögű háromszög, melynek befogói az x tengelyből levágott a és az y-ból levágott b darabok].

6. Egy háromoldalú egyenes hasáb alapja derékszögű háromszög. A hasáb élein felveszünk az alaptól rendre c, c', c'' távolságra 3 pontot (az alapsík fölött) és ezeken át síkot fektetünk. Határozzuk meg az így letompított hasáb köbtartalmát! ($V=$ alap területe $\times$ az élek arithmetikai közepével. Vessük össze az eredményt a prizmatoid köbtartalmára vonatkozó számítással I. kötet 386. lap).

7. Határozzuk meg a

$$z^2 = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma$$

másodrendű felület az $x=x_1$, $x=x_2$, $(x_1 < x_2)$ síkok közé foglalt rétegének köbtartalmát. Alkalmazzuk az eredményt *a)* az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipszoidra, *b)* a

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kétköpenyű hyperboloidra, *c)* a

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyköpenyű hyperboloidra, *d)* a

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

elliptikus kúpra!

8. Számítsuk ki a

$$-\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

elliptikus paraboloid $x=x_1$, $x=x_2 > x_1$ síkok közé foglalt rétegének köbtartalmát!

9. Legyen adva egy R sugarú gömb. Egyik radiusra, mint átmérőre rajzoljunk kört. A kör síkjára merőlegesen állítsunk hengert, melynek keresztmetszete az előbb említett kör. (Gömbbe olyan hengeralakú csövet illesztünk, melynek átmérője a gömb radiusa és mely keresztülmegy a gömb középpontján.) Határozzuk meg a gömb és henger közös részének köbtartalmát! (*Viviani*-féle test.) Megoldás menete: Legyen a gömb egyenlete: $x^2+y^2+z^2=R^2$; a kör az (x, y) síkon legyen. A szóban forgó test (gömbfelülettel beboltozott henger) negyedrészének köbtartalma:

$$V = \iint z\,dx\,dy = \iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$$

kiterjesztve az alapkör felére (mely az x tengely egyik oldalán van). Vezessük be az $x=r\cos\omega$, $y=r\sin\omega$ poláris koordinátákat [r az (x, y) pont távolsága a kezdőponttól és ω az r vektornak az x-tengellyel alkotott szöge]; akkor:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr.$$

A belső integrál:

$$-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\omega} = \frac{R^3}{3}(1 - \sin^3\omega)$$

és így:

$$V = \frac{R^3}{3}\Big[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\omega\,d\omega\Big].$$

Folytassuk! Az egész test köbtartalma: $\frac{2R^3\pi}{3} - \frac{8R^3}{9}$ vagyis, ha a gömb középpontjában a hengerhez érintő síkot képzelünk, akkor az így keletkező félgömbnek a csövön kívüli része: $\frac{8R^3}{9}$. (Viviani-tétel.)

10. Számítsuk ki ezt a kettős integrált:

$$I = \iint x^p y^q (1-x-y)^r \, dx \, dy$$

az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$ területre vonatkozólag. (Legyen $p > -1$, $q > -1$, $r > -1$). Ez a terület az x és y tengelyek pozitiv részei és az $x+y=1$ egyenes által alkotott egyenlő száru derékszögű háromszög. Vezessük be új változókul a (ξ, η)-t a következő módon:

$$x + y = \xi, \quad y = \xi\eta.$$

Innen: $\eta = \dfrac{y}{x+y} = \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}} \leq 1$ (mert $\dfrac{x}{y}$ nem negativ); tehát $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$, vagyis ha (x, y) az előbb említett háromszögben van, akkor (ξ, η) a $\xi=0$, $\xi=1$, $\eta=0$, $\eta=1$ négyzetben van és fordítva. Az I integrált transzformálva:

$$I = \iint \xi^p (1-\eta)^p \xi^q \eta^q (1-\xi)^r . \xi \, d\xi \, d\eta$$

$\left[\text{mert } D\left(\dfrac{x, y}{\xi, \eta}\right) = \xi\right]$ vagyis:

$$I = \iint \xi^{p+q+1} (1-\xi)^r \eta^q (1-\eta)^p \, d\xi \, d\eta$$

kiterjesztve az említett négyzetre. Ez az integrál így is írható:

$$I = \int_0^1 \xi^{p+q+1} (1-\xi)^r \, d\xi . \int_0^1 \eta^q (1-\eta)^p \, d\eta$$

és mivel $p > -1$, $q > -1$, $r > -1$, tehát: (L. I. kötet 510. lapon)

$$I = B(p+q+2, r+1) . B(q+1, p+1)$$

és a 206. lapon megállapitott összefüggés szerint:

$$I = \frac{\Gamma(p+q+2)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} . \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+3)}.$$

Mekkora I, ha $p=0$, $q=0$, $r=1$ (tetraeder köbtartalma)?

11. Számítsuk ki ugyanilyen módon ezt a hármas integrált: ($p > -1$, $q > -1$, $r > -1$, $s > -1$)

$$\iiint x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \, dx \, dy \, dz,$$

ha az integráció az $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $x + y + z \leq 1$-re vonatkozik. [Tegyük itt is

$$x + y + z = \xi, \quad y + z = \xi\eta, \quad z = \xi\eta\zeta$$

és mutassuk meg, hogy az eredeti integráció-tartomány, mely a koordináta síkok és $x+y+z=1$ sík által határolt tetraeder volt, a $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ és $\xi=1$, $\eta=1$, $\zeta=1$ síkok által határolt kocka lesz.]

12. Mutassuk meg, hogy ez az integrál:

$$I = \iint 4x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

az x és y tengelyek pozitiv részei közötti síkrészben konvergens ($p > 0$, $q > 0$). [Egyszerűen úgy, hogy ez az integrál két konvergens egyszerű integrál szorzata: $\lim\limits_{a=\infty} \int_0^a 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx . \int_0^a 2y^{2q-1} e^{-y^2} dy$].

13. Az előbbi [12. alatti] integrál tehát így írható:

$$I = 2\int_0^\infty x^{2p-1} e^{-x^2}\,dx \,.\, 2\int_0^\infty y^{2q-1} e^{-y^2}\,dy.$$

Ha az első integrálban $x^2 = u$, tesszük, akkor

$$\int_0^\infty u^{p-1} e^{-u}\,du = \Gamma(p) \tag{B}$$

lesz belőle. A másodikból $\Gamma(q)$ lesz és így: $I = \Gamma(p)\,\Gamma(q)$.

Az I kettős integrált határozzuk meg az O középpontú R sugarú negyedkörre, mely az x és y tengelyek pozitiv részei között terül el. $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$ téve:

$$I = \iint 4r^{2p+2q-1} e^{-r^2} \cos^{2p-1}\omega \sin^{2q-1}\omega\, d\omega\, dr =$$

$$= \int_0^R 2r^{2(p+q)-1} e^{-r^2}\,dr \,.\, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\omega \,.\, \sin^{2q-1}\omega\, d\omega.$$

Az első tényezőben tegyük $r^2 = \varrho$, akkor az integrál $\int_0^{\sqrt{\varrho}} \varrho^{p+q-1} e^{-\varrho}\,d\varrho$ lesz és így, ha R végtelenné válik, az első tényezőből $B)$ szerint: $\Gamma(p+q)$ lesz. A második tényezőben tegyük $\sin^2\omega = u$; akkor $d\omega = \dfrac{du}{2\cos\omega\sin\omega}$; a határok 0 és 1 lesznek, tehát az integrál: $\int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1}\,du$, vagyis $B(p, q)$; tehát ismét arra jutottunk, hogy:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p, q).$$

14. *A Dirichlet-féle szakadásos integrál.* A többszörös integrálok kiszámításánál sokszor igen jó hasznát vesszük az ú. n. *Dirichlet*-féle szakadásos integrálnak, melyet a következőkben ismertetünk. Tudjuk, hogy

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(L. I. kötet 446. lap.) Ha $x = -y$ tesszük, akkor:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_0^{-\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin y}{y}\,dy; \text{ tehát: } \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Ebből következtetjük, hogy ha ω pozitiv szám, akkor:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \omega x}{x}\,dx = \pi$$

és ha ω negativ, akkor:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \omega x}{x}\,dx = -\pi.$$

[Bizonyítsuk be ezeket az állításokat!] Ha $\omega = 0$, akkor az integrál: 0.

Összefoglalva ezeket így írhatjuk:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \omega x}{x}\,dx = \pi\, sgn\, \omega.$$

Alkalmazzuk ezt az eredményt a következő esetekre: 1) Legyen $-1 < \lambda < 1$, akkor $1 + \lambda$ és $1 - \lambda$ pozitivek, tehát:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(1+\lambda)x}{x}\,dx &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x\cos\lambda x + \cos x\sin\lambda x}{x}\,dx = \pi \\ \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(1-\lambda)x}{x}\,dx &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x\cos\lambda x - \cos x\sin\lambda x}{x}\,dx = \pi. \end{aligned} \tag{A}$$

E kettő összegének fele:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} dx = \pi.$$

2) Legyen $\lambda < -1$, vagy $\lambda > 1$, (azaz $|\lambda| > 1$), akkor $1 + \lambda$, vagy $1 - \lambda$ negativ; tehát az *A)* alatti integrálok közül az egyik π, a másik $-\pi$ és így a kettő félösszege:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} dx = 0.$$

3). Ha $\lambda = 1$, vagy $\lambda = -1$, akkor a két integrál közül egyik π, a másik 0 és így:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Összefoglalva e három esetet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2}[1 + sgn\,(1-\lambda^2)].$$

A baloldalon álló integrál a *Dirichlet*-féle szakadásos integrál. Ezen integrál értéke a λ-tól úgy függ, hogy a $-1 \ldots +1$ nyilt közben az integrál π; a $\lambda=1$ és $\lambda=-1$ helyen: $\frac{\pi}{2}$, minden más helyen: 0.

15. *Az integrandus szorzása. a)* Ha az $I = \int_a^b f(x)\,dx$ integrandus határai a, $b > a$ állandók és

$$i = \int_a^b \varphi(x, y)\,dy$$

integrállal az előbbi integrandust megszorozzuk, akkor az így keletkezett

$$K = \int_a^b f(x) \left[\int_a^b \varphi(x, y)\,dy\right] dx$$

az $x = a$, $x = b$; $y = a$, $y = b$ egyenesek által határolt négyzetre kiterjesztett

$$\iint f(x)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

kettős integrálnak is tekinthető, ha a kettős integrál létezik. Ha ugyanis a kettős integrált lépésenkint integráljuk, először y szerint, akkor az integrál $f(x)\left[\int_a^b \varphi(x, y)\,dy\right]$ lesz és újból integrálva x szerint, a K-t kapjuk.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ kettős integrál az $x=a$, $x=a_1$, $y=a$, $y=a_1$ egyenesek által határolt négyzetre vonatkozik és az integrandust $\int_a^{a_1} \varphi(x, y, z)\,dz$-vel szorozzuk, akkor az így nyert integrál mint az $x=a$, $x=a_1$, $y=a$, $y=a_1$, $z=a$, $z=a_1$ sikok által határolt kockára vonatkozó hármas integrál $\iiint f(x, y)\,\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ tekinthető.

c) Mutassuk meg, hogy ha a most említett kockára vonatkozó

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

integrandusát $\int\limits_{a}^{a_1} \varphi(x, y, z, u)\, du$-val szorozzuk, akkor az így nyert integrál mint az $x = a$, $y = a$, $z = a$, $u = a$, $x = a_1$, $y = a_1$, $z = a_1$, $u = a_1$ négydimenziós kockára vonatkozó $\iiiint f(x, y, z)\, \varphi(x, y, z, u)\, dx\, dy\, dz\, du$ tekinthető s. i. t.

16. Ha $\alpha < a$, $\alpha_1 \geqq a_1 > a$ és ez az x parametertől függő integrál: $\int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(x, y)\, dy$ az $a < x < a_1$ közben: 1, az $x < a$ és $x > a_1$ szakaszban pedig 0, az $x = a$, $x = a_1$ helyeken tetszés szerinti véges szám, akkor

$$\int\limits_{a}^{a_1} f(x)\, dx = \iint f(x)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

ahol a kettős integrál az $x = \alpha$, $x = \alpha_1$, $y = \alpha$, $y = \alpha_1$ egyenesek által határolt négyzetre vonatkozik; ugyanis a jobboldali kettős integrál az előbbi pont *a)* szerint [feltéve természetesen, hogy $f(x)$ az $\alpha \ldots \alpha_1$ közben és $f(x)\, \varphi(x, y)$ a kijelölt négyzetben integrálható] így írható:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)\, dx \Big[\int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(x, y)\, dy\Big]$$

és minthogy az $\int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(x, y)\, dy$ az $\alpha \leqq x < a$ és $a_1 < x \leqq \alpha_1$ közben: 0, az $x = a$ és $x = a_1$ helyek pedig az integrálra befolyással nincsenek, tehát az integrálnak $\alpha \ldots a$ és $a_1 \ldots \alpha_1$ közökre vonatkozó részei 0-t adnak és minthogy az $a \ldots a_1$ közben $\int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(x, y)\, dy = 1$, tehát az integrál értéke: $\int\limits_{a}^{a_1} f(x)\, dx$.

Ha a feltételek akkor is érvényesek, ha α-ból $-\infty$ és α_1-ből $+\infty$ lesz akkor:

$$\int\limits_{a}^{a_1} f(x)\, dx = \iint f(x)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

ahol a kettős integrál az egész síkra vonatkozik, melyben $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Ezzel tehát az $f(x)$-nek az $a \ldots a_1$ közre vonatkozó integrálját előállítottuk az egész síkra vonatkozó kettős integrál alakjában.

17. Az $I = \iint f(x, y)\, dx\, dy$ integrációs tartománya úgy legyen meghatározva, hogy e tartományt alkotó (x, y) helyek azok, amelyek a $\beta \leqq \psi(x, y) \leqq \alpha$ feltételt kielégítik [például az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területére nézve

$$0 \leqq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,$$

vagy ha előre megállapodtunk abban, hogy x és y nem lehetnek negativok, akkor $0 \leqq x + y \leqq 1$ egy egyenlő száru derékszögű háromszög belseje és határa stb.].

$\varphi(x, y, z)$ függvény legyen olyan, hogy ha (x, y) a szóban forgó $\beta < \psi(x, y) < \alpha$ tartományban van, akkor ez az integrál

$$\int\limits_{\beta'}^{\alpha'} \varphi(x, y, z)\, dz$$

éppen 1, ha pedig (x, y) e tartományon kívül van, akkor 0 és ha (x, y) pont az integrációs tartomány határán van, akkor az integrál véges. Az α' és β' olyan számok legyenek, hogy az I integrálási területe beleessék az $x=\alpha'$, $y=\alpha'$, $x=\beta'$, $y=\beta'$ egyenesek által alkotott négyzet területébe.

Az I kettős integrál, miként a 15. pontban láttuk, az ottaniakhoz hasonló feltételek mellett a következő hármas integrál alakjában írható:

$$\iiint f(x, y)\,\varphi\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,;$$

az integráció területe az $x=\alpha'$, $x=\beta'$; $y=\alpha'$, $y=\beta'$; $z=\alpha'$, $z=\beta'$ kocka. Ugyanis a 15. pont *b)* alattija szerint ez a hármas integrál így írható:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy\,.\Big[\int_{\beta'}^{\alpha'}\varphi\,(x, y, z)\,dz\Big],$$

ahol a kettős integrál az $x=\alpha'$, $x=\beta'$; $y=\alpha'$, $y=\beta'$ négyzetre vonatkozik. Minthogy azonban e négyzetnek azon részében, amely a $\beta<\psi(x, y)<\alpha$ területen kívül van, az integrandus 0 és a határon felvett véges értékek figyelmen kívül hagyhatók, tehát az integrál valóban megegyezik I-vel.

18. Számítsuk ki ezt az integrált:

$$I=\iint e^{-kx}x^{a-1}e^{-ky}y^{b-1}\,dx\,dy,$$

ahol $a>0$, $b>0$, $k>0$, az x, y tengelyek és az $x+y=1$ által határolt derékszögű háromszögre. E háromszög belsejében: $0<x+y<1$. Legyen $\sigma=x+y$. Ez a Dirichlet-féle integrál:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z\cos\sigma z}{z}\,dz$$

1, ha $-1<\sigma<1$ és 0, ha $\sigma>1$, vagy $\sigma<-1$, továbbá a határon $\frac{1}{2}$.

Mutassuk meg, hogy ez a Dirichlet-féle integrál:

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z\cos\sigma z}{z}\,dz$$

szintén 1, ha $-1<\sigma<1$; $\frac{1}{2}$, ha $\sigma=1$, vagy $\sigma=-1$ és 0, ha $\sigma>1$ vagy $\sigma<-1$.

Az I kettős integrál az előbbi pontokban foglalt meggondolás szerint ezen hármas integrál alakjában írható:

$$I=\frac{2}{\pi}\iiint e^{-kx}x^{a-1}e^{-ky}y^{b-1}\sin z\cos(x+y)\,z\,\frac{dx\,dy\,dz}{z}.$$

Az integráció tartománya a pozitiv x, y, z tengelyek által alkotott triéder belseje. $\cos(x+y)\,z-i\sin(x+y)\,z=e^{-i(x+y)z}$; tehát $\cos(x+y)\,z$ az $e^{-i(x+y)z}$ reális része, melyet így írunk: $Re^{-i(x+y)z}$. Minthogy az integrandus minden tényezője reális, tehát ha $\cos(x+y)\,z$ helyett $e^{-i(x+y)z}$-t teszünk, akkor az integrál $A+iB$ alakú lesz, ahol A és B valósak és így az I integrál értéke: A lesz. Eszerint tehát az I kiszámítása végett $\cos(x+y)\,z$ helyett $e^{-i(x+y)z}$-t tesszük és az így kapott integrálnak valós részét vesszük; tehát:

$$I=\frac{2}{\pi}R\iiint e^{-(k+iz)x}x^{a-1}\,.\,e^{-(k+iz)y}y^{b-1}\,.\,\frac{\sin z}{z}\,dx\,dy\,dz. \qquad A)$$

Három lépésben integrálunk: először kiszámítjuk ezt az x szerinti

$$= \int_0^\infty e^{-(k+iz)x} x^{a-1}\, dx$$

integrált. Ebben $x\,(k+iz) = u$ tesszük, miből: $dx = \frac{du}{k+iz}$, tehát:

$$i = \frac{1}{(k+iz)^a} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1}\, du = \frac{\Gamma(a)}{(k+iz)^a}. \star$$

Ugyanígy számítjuk ki az y szerinti integrált is; tehát:

$$I = \frac{2\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\pi} R \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} \frac{dz}{(k+iz)^{a+b}}. \qquad B)$$

A jobboldalon álló integrál meghatározása végett így járunk el. Tegyük:

$$V = \int_0^1 e^{-kx} x^{m-1}\, dx,$$

ahol $m > 0$. Ez az integrál éppen úgy, mint az I-nél láttuk, a diskontinuitáti faktorral ellátva a következő kettős integrál alakjában írható:

$$V = R \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(k+iu)x} x^{m-1} \frac{\sin u}{u}\, dx\, du$$

és ha $(k+iu)\,x = y$ tesszük, az előbbi átalakítást (és a jegyzetben foglalt meggondolást) elvégezve, a jobboldali kifejezés erre az alakra hozható:

$$V = \frac{2}{\pi} R \int_0^\infty \int e^{-y} y^{m-1} \frac{\sin u}{u} \frac{dy\, du}{(k+iu)^m} = \frac{2\Gamma(m)}{\pi} R \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \frac{du}{(k+iu)^m},$$

tehát a $B)$ alatti kifejezésben az integrál reális része:

$$\frac{\pi}{2\Gamma(a+b)} V = \frac{\pi}{2\Gamma(a+b)} \int_0^1 e^{-kx} x^{a+b-1}\, dx$$

és így a keresett kétszeres integrál:

$$I = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \int_0^1 e^{-kx} x^{a+b-1}\, dx.$$

19. Mutassuk meg, hogy az $x+y+z=1$ sík és a koordinátasíkok által határolt tetraéderre vonatkozó

$$I' = \iiint x^{a-1} e^{-kx} y^{b-1} e^{-ky} z^{c-1} e^{-kz}\, dx\, dy\, dz$$

hármas integrál [ahol $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$] ugyanilyen átalakítással a következő alakra hozható:

$$I' = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^1 e^{-kx} x^{a+b+c-1}\, dx.$$

Ha a föntebbi példákban $k = 0$, akkor a jobboldalon álló egyszerü integrál

⋆ Minthogy $u = (k+iz)x$, tehát, ha x a valós tengelyen halad 0-tól ∞-ig, akkor u azon az egyenesen megy 0-tól végtelenig, mely a kezdőponton és a $k+iz$ (z fix számérték) ponton megy át. Egyszerű függvénytani meggondolásokból következik, hogy ez ae integrál megegyezik a valós tengely mentén vett integrállal. Ugyanis könnyen kimutatható, hogy a 0 centrumu körnek a két egyenes közé eső ívén vett integrál zérussá válik, ha a kör radiusa végtelen naggyá lesz; tehát a Cauchy-tétel értelmében a két egyenes mentén vett integrálok egyenlők.

az első esetben $\frac{1}{a+b}$, a másodikban $\frac{1}{a+b+c}$, tehát tekintetbe véve az $m\Gamma(m) = \Gamma(m+1)$ relációt [I. kötet 509. lap] arra jutunk, hogy:

$$\iint x^{a-1}y^{b-1}\,dx\,dy = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)};\quad \iiint x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,dx\,dy\,dz = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c+1)};$$

az első integrál az $x+y=1$ és az x, meg y tengelyek által alkotott derékszögű háromszögre, a második az $x+y+z=1$ és a koordinátasíkok által alkotott tetraederre vonatkoztatva. Ha $a=1$, $b=1$, $c=1$ tesszük, az első integrálból $\frac{1}{2}$, a másodikból $\frac{1}{6}$ lesz: a háromszög területe, illetőleg a tetraeder köbtartalma. Ha $a=2$, $b=1$, $c=1$, akkor a tetraeder súlypontjának x koordinátájának kiszámítására szolgáló integrálra jutunk; ha $a=3$, $b=1$, $c=1$, akkor az (yz) síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot kapjuk meg stb.

Számítsuk ki a szóban forgó tetraeder tehetetlenségi nyomatékát az egyes tengelyekre vonatkozólag!

20. Legyen az integráció tartománya az

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} \geq 1 \quad \text{és} \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \qquad A)$$

tartomány [$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$], és a kiszámítandó integrál ismét:

$$I = \iiint x^{r-1}y^{s-1}z^{t-1}\,dx\,dy\,dz,$$

ahol $r > 0$, $s > 0$, $t > 0$. Végezzük az integrálon ezt a transzformációt:

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha},\quad v = \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta},\quad w = \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}$$

akkor:

$$I = \frac{a^r b^s c^t}{\alpha\beta\gamma}\iiint u^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,v^{\frac{s-\beta}{\beta}}\,w^{\frac{t-\gamma}{\gamma}}\,du\,dv\,dw$$

és az $A)$ alatti feltétel $u+v+w \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, tehát a feladat az előbbire redukálódott és így:

$$I = \frac{a^r b^s c^t}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{s}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{t}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha}+\frac{s}{\beta}+\frac{t}{\gamma}+1\right)}.$$

Ha $\alpha = \beta = \gamma = 2$, és $r = s = t = 1$, akkor $I = \iiint dx\,dy\,dz$, vagyis az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipszoid nyolcad része:

$$I = \frac{abc}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.$$

De (l. I. kötet 509. lapon) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, tehát:

$$I = \frac{abc}{6}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

De $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. (L. 208. lapon), tehát: $I = \frac{abc\pi}{6}$ és az egész ellipszoid köbtartalma: $\frac{4abc\pi}{3}$. Számítsuk ki ezzel a formulával az ellipszoid nyolcadának súlypontját, a tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékait!

21. *Forgási test rétege. Guldin szabály.* Képzeljünk az (xz) síknak a z-től jobb felé eső részén egy $x = f(z)$ által értelmezett C görbét; az $f(z)$ a z_1 és $z_2 > z_1$ szakaszban folytonos és véges számú monoton szakaszból áll. Ha a görbét a z tengely körül teljesen körülforgatjuk, akkor forgási felület keletkezik. Egyenlete $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ alakban írható. Határozzuk meg a felület határolta test $z = z_1$ és $z = z_2 > z_1$ síkok közé foglalt rétegének köbtartalmát.

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} [f(z)]^2 \, dz. \qquad \alpha)$$

[L. 153. lapon.]

Határozzuk meg az (xz) síkon levő C görbeív, valamint az (xz) sík $z = z_1$ és $z = z_2$ egyenesei és a z tengely közé foglalt négyszögalakú terület súlypontjának x koordinátáját. Jelöljük ezt ξ-vel.

$$\xi = \frac{\iint x \, dx \, dz}{\iint dx \, dz}$$

a kettős integrál kiterjesztve a szóban forgó négyszögalakú területre. A számlálóban kétszeresen integrálunk, először x szerint. Evégből z-nek fix értéket adunk: a z magasságban az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenes az integráció határát két helyen metszi; a z tengelyen és a C görbén; tehát e metszéspontok abscisszái: $x = 0$ és $x = f(z)$ és így az x szerinti integrál:

$$\int_0^{f(z)} x \, dx = \frac{1}{2} [f(z)]^2 ;$$

tehát a ξ kifejezésében a számláló:

$$\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} [f(z)]^2 \, dz.$$

Ha az integrációnak említett négyszögalakú területe: T, akkor tehát:

$$\xi = \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(z)]^2 \, dz}{2T}$$

és így a forgási test szóbanforgó rétegének $\alpha)$ alatti köbtartalma:

$$V = 2\pi\xi \, . \, T$$

vagyis akkora, mint egy olyan hengerféle testé, melynek alapja a meridián $z = z_1$, $z = z_2$ közötti öve, (melynek területe $2T$), magassága pedig a súlypont által a forgás közben leírt félkör hossza. (Guldin szabály).

22. Határozzuk meg az $x = \sin z$ görbe 0 és π közötti íve által a z tengely körüli forgással leírt test köbtartalmát! Ennek alapján határozzuk meg a z tengely $0 \ldots \pi$ szakasza és az $x = \sin z$ görbe határolta terület súlypontját!

23. Legyen adva a $\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ellipszis $(a > b)$. Ennek az $z = -z_1$ és $z = z_1$ közötti íve forog a z tengely körül. Az így keletkezett (hordóalakú) forgási test köbtartalmát számítsuk ki. Ez a köbtartalom:

$$V = b^2\pi \int_{-z_1}^{z_1} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) dz = 2z_1\pi \left[b^2 - \frac{b^2 z_1^2}{3a^2}\right].$$

Ha a szélső pont távolsága a tengelytől x_1, akkor $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} = 1$-ből z_1^2-et helyettesítve :

$$V = 2z_1\pi \frac{2b^2 + x_1^2}{3},$$

vagyis az ellipszises hordó köbtartalma egyenlő olyan körhenger köbtartalmával, melynek magassága $2z_1$, (a hordó magassága) és alapjának sugara $\sqrt{\frac{2b^2 + x_1^2}{3}}$, ahol b a hordó hasának és x_1 az alapjának rádiusa. (A gyakorlati számításnál $\sqrt{\frac{2b^2 + x_1^2}{3}}$ helyett $\frac{2b + x_1}{3}$-at vesznek. Mekkora a hiba?)

24. Az r sugarú kört forgatjuk egy, a kör síkjában fekvő, a kör középpontjától $a > r$ távolságban levő tengely körül. Számítsuk ki a Guldin szabály szerint a keletkezett gyűrűszerű test köbtartalmát!

25. Határozzuk meg az $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ láncgörbe egy darabja által az x tengely körüli forgással létesült forgási test köbtartalmát!

26. Határozzuk meg az $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ cissoid egy darabjának az x tengely körül való forgása által keletkezett test térfogatát!

27. Számítsuk ki a $3ay^2 = x^3$ semikubikus parabola valamely darabjának körülforgása által keletkezett test térfogatát! *a)* az x tengely körül, *b)* az y tengely körül forgassuk!

28. A konchoid egyenlete poláris koordinátákban: $r = \frac{a}{\cos\varphi} + b$. A szöget az x tengelytől számítjuk. Határozzuk meg egy darabjának az y tengely körül való forgása által keletkezett test köbtartalmát!

29. *Testek áthatása.* Két egyenlő alapú egyenes körhenger tengelyei egymást merőlegesen metszik. Határozzuk meg a közös részük köbtartalmát!

30. Egy ϱ sugarú egyenes körhenger tengelye áthalad az $r > \varrho$ sugarú gömb középpontján. Határozzuk meg a közös részük köbtartalmát!

31. Számítsuk ki az $y^2 + z^2 = 4ax$ és $x^2 + y^2 = 2ax$ felületek (az első elliptikus paraboloid, a második körhenger) közös részének köbtartalmát. [A paraboloid, mely az (y, z) síknak egyik oldalán vonul, valamint a henger az (x, z) és (x, y) síkokra szimmetrikusak, tehát elég, ha az áthatásnak az XZ és XY síkok közötti negyedrészét számítjuk ki. Erre nézve $z = \sqrt{4ax - y^2}$ (a gyök pozitiv jellel) tehát $\frac{V}{4} = \iint z\,dx\,dy$, az integrációt az $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ kör területének illető felére vonatkoztatva].

32. *Forgási test övének felülete.* Legyen adva az (XZ) síkon a $\xi = p(u)$, $\zeta = q(u)$, görbe parameteres alakban. Forgassuk e síkot a Z tengely körül v szöggel, akkor a (ξ, ζ) pont olyan helyzetbe jut, amelyben koordinátái:

$$x = p(u)\cos v\,; \qquad y = p(u)\sin v\,; \qquad z = q(u).$$

Ezek az egyenletek a forgási felület egyenletei. [Ha ξ a parameter, vagyis a forgó görbe egyenlete $\zeta = q(\xi)$, akkor a 180. lapon levő alakra jutunk.] A felületrész területének meghatározására kiszámítjuk az E, F, G főmennyiségeket. Azt találjuk, hogy (L. 181. lapon.)

$$E = [p'(u)]^2 + [q'(u)]^2\,; \qquad F = 0\,; \qquad G = [p(u)]^2$$

és így a felületrész területe:

$$t = \iint p\sqrt{p'^2 + q'^2}\,du\,dv.$$

Ha a forgási tengelyre merőleges síkok közötti öv területéről van szó, akkor az integráció v szerint $0 \ldots 2\pi$ és u szerint a meghatározott u_1 és u_2 értékek között végzendő, [u_1 és u_2 azok a parameterértékek, amelyek az övet határoló síkoknak a meridiánnal való metszéspontjainak felelnek meg, melyek közül az alsót A-val, a felsőt B-vel jelölve gondoljuk]. A kettős integrál kiszámítása végett v szerint integrálunk:

$$t = 2\pi \int p \sqrt{p'^2 + q'^2}\, du. \qquad A)$$

Ha parameterül a meridián valamely P pontjától számított s ívhosszúságot választjuk, akkor $p'^2+q'^2=1$; tehát a forgási felület övének területe

$$t = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} p\, ds, \qquad B)$$

ahol s_1 a PA és s_2 a PB ív hossza. [Az integrandus $2\pi p$ nem más, mint a p sugarú parallel-kör kerülete, $2p\pi ds$ tekinthető a végtelen kis ds élű csonkakúp palástjának.]

33. Számítsuk ki az $A)$ alatti képlet szerint az alapja körül forgatott cyklois-ág által létesített felület területét!

34. Határozzuk meg a láncgörbe (I. kötet 483. lap) valamely darabjának az x tengely körüli forgásával keletkező felület területét!

35. Számítsuk ki a gömböv területét!

36. A $B)$ alatti képlet szintén rávezet egy *Guldin*-féle szabályra. Ugyanis, ha a forgó meridiánívet homogén sodronyból készültnek képzeljük, akkor súlypontjának x koordinátája:

$$\xi_1 = \frac{1}{L} \int_{s_1}^{s_2} p\, ds,$$

ahol L az ívhosszúsága; tehát a forgási felület övének területe

$$t = L \,.\, 2\pi\xi_1$$

vagyis az öv területe akkora, mint a forgó ív súlypontja által a forgás alatt leírt kör hosszából és a forgó ív hosszából alkotott derékszögű négyszög területe.

37. *Viviani feladata.* Határozzuk meg az r sugarú, O centrumú gömbfelület azon részének területét, amelyet az $x^2 + y^2 = rx$ hengerfelület belőle kivág.

38. *Integrálok transzformációja.* Vezessük be a $\iiint f\, dx\, dy\, dz$ hármas integrálba az $ux=vw$, $vy=uw$, $wz=uv$ egyenletekből az x, y, z helyett az u, v, w-t.

39. Vezessük be a $\iint x^{m-1}y^{n-1}\, dx\, dy$ kettős integrálba az $x + y = u$, $y = uv$ egyenletekből az u-t és v-t.

40. Transzformáljuk az

$$\iint \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

kettős integrált, ahol x, y, z között az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ reláció áll fenn, az

$$x = a \sin\varphi \cos\psi\,; \qquad y = b \sin\varphi \sin\psi$$

által.

IRODALOM.

A többváltozós függvényre vonatkozólag ismét első sorban az I. kötetben már említett kézikönyveket említem. Főként a következőket:

1. Genocchi-Peano: Calcolo differenciale. Torino 1884. Német fordítása Bohlmann-tól. Leipzig 1898.

2. Jordan: Cours d'Analyse. Paris 1909. különösen az implicit függvényekre vonatkozó részt (I. kötet p. 74—90.) a szélső értékek számítására vonatkozó részt (I. kötet p. 375—396.) a kettős integrál fogalmának kiterjesztésére vonatkozó fejezetet (II. kötet 66. lap.).
3. Vallée-Poussin: Cours d'Analyse, Paris 1909—1912.
4. Lipschitz: Lehrbuch der Analysis. Bonn 1880., különösen a többváltozós függvény szélső értékére és relativ szélső értékére vonatkozó rész.
5. Baire: Leçons sur les Théories générales de l'Analyse. Paris 1908. L. különösen a többszörös integrálra vonatkozó fejezeteket. I. p. 156—202.
6. v. Mangoldt: Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig. II. és III. kötet. 1912., 1914. Különösen ajánlatos kezdőnek az alapfogalmak preciz, kimerítő tárgyalása és bőséges gyakorlati alkalmazásai miatt.
7. Goursat: Cours d'Analyse. Paris 1902.
8. Cesaro-Kowalewsky: Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1904.
9. Kowalewsky: Grundzüge der Differencial- und Integralrechnung. Leipzig 1909.

A többváltozós függvény határértékére nézve l. még Townsend Über den Begriff u. Anwendung des Doppellimes. Dissertation. Göttingen 1900.

A felület területére nézve l. Geőcze Zoárd értekezéseit, különösen: $z=f(x,y)$ felület quadraturája. Ungvár 1906. Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes. Math. u. naturwiss. Berichte aus Ungarn 1909. A területmérésről. Math. Phys. Lapok 20. és 21. kötet. 1911., 1912. Felületdarab véges mérőszámának szükséges és elégséges feltételéről. Math. Phys. Lapok 25. kötet 1916.

A többváltozós függvény szélső értékeire nézve l.: L. Scheefer: Leipziger Berichte 1886., Math. Annalen 35-ik kötetében, v. Dantscher. Math. Annalen 42. kötetében levő e tárggyal foglalkozó értekezéseit.

A geometriai alkalmazásokra nézve l. Scheffers Anwendung der Differential u. Integralrechnung auf Geometrie. Leipzig 1902.

A többszörös integrálokra nézve l. még Dirichlet's Vorlesungen. Braunschweig 1901. Kronecker-Netto, Vorlesungen über die Theorie der einfachen u. mehrfachen Integrale. Leipzig 1894.

X. FEJEZET.

A VÉGTELEN SOROK.

Numerikus sorok összetartása, széttartása.

1. A végtelen sorozat értelmezése.* Ha ismeretes egy olyan törvényszerűség, egy olyan alkotási elv, amellyel az

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$$

számok egymásután előállíthatók, akkor azt mondjuk, hogy adva van e számok *végtelen sorozata*. A leggyakrabban adva van a $\varphi(x)$ függvény olyan analytikai alakja, mely a pozitiv, egész x-értékekre egymásután szolgáltatja a végtelen sorozat tagjait, vagyis, általában ha n pozitiv egész szám: $u_n = \varphi(n)$. Így például, ha sorban:

$$\varphi(x) = a^x, \quad \frac{1}{x^k}, \quad \frac{1}{x(x+1)},$$

akkor a következő végtelen sorozatokhoz jutunk:

$$a, \ a^2, \ a^3, \ldots a^n, \ldots$$

$$1, \ \frac{1}{2^k}, \ \frac{1}{3^k}, \ldots \frac{1}{n^k}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{6}, \ \frac{1}{12}, \ldots \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$$

2. A végtelen sorozat összege. Mit kelljen véges sorozat összegén érteni, az ismeretes; de az összeadás közönséges fogalma végtelen sorozat esetében nem alkalmazható; mert az összeadás fogalma csakis véges számú összeadandó esetére állapíttatott meg.

* Különbséget teszünk e két kifejezés: *sorozat* és *sor* között. Ha a számok olyan halmazáról van szó, melynek minden egyes eleméhez az 1, 2, 3, . . . pozitiv egész számok közül egy meghatározott index tartozik és viszont (vagyis, amely halmaz kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozható a természetes számokkal, azaz u. n. *megszámlálható* halmaz) és a halmaz elemeinek egy meghatározott elrendezése adva van, akkor azt mondjuk hogy a halmaz elemei *sorozatot* alkotnak. Ha pedig az ilyen sorozat tagjainak összegéről akarunk szólni, akkor *sorról* beszélünk.

Végtelen sorozatra nézve az összeget egészen önkényesen definiálhatnók; de itt is úgy járunk el, mint mathematikai fogalmaink bővítésénél mindenütt tettük, hogy az új fogalomnak a régivel minél több közös tulajdonsága legyen és a régit magában foglalja. Ez utóbbi követelés így értendő: Minden véges sorozat tekinthető végtelen sorozatnak. Ha ugyanis az $u_1, u_2, \ldots u_m$ egy m tagú sorozat, akkor ezt 0 tagok hozzácsatolásával

$$u_1, u_2, \ldots u_m, 0, 0, \ldots$$

végtelen sorozatnak tekinthetjük. Az összeg új fogalmának olyannak kell lennie, hogy ez esetben a régivel megegyezzék. De még így is nagy szabadságunk van az összeg fogalmának értelmezésére nézve.

A végtelen sorozat összegét így értelmezzük: Jelöljük az adott sorozat n első tagjának összegét s_n-el. Eszerint:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots \; s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \ldots$$

Ha már most a fölírt *részletösszegek sorozata, az*

$$s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$$

sorozat szabályos sorozat, mely az s véges számot értelmezi, azaz:

$$\lim s_n = s,$$

akkor az adott $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ végtelen sorozatról azt mondjuk, hogy összegezhető és az $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum\limits_1^\infty u_n$ végtelen sort összetartónak (konvergens) mondjuk és összegének s-et tekintjük.

Ha azonban az $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$ részletösszegsorozat nem szabályos sorozat, akkor egyelőre az adott $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ végtelen sor összegéről nem beszélhetünk; ez esetben az adott $\sum u_n$ sort *széttartónak* (divergens) mondjuk.

Valós tagu sor esetében a széttartásnak a következő két esetét emeljük ki. Meglehet, hogy az $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sorozat korlátlanul nő (vagy fogy); ilyenkor azt is szoktuk mondani, hogy az u sor összege végtelen nagy (vagy negativ végtelen); ha pedig az s részletösszegek mindannyian két véges szám közé esnek, (korlátosak) de a részletösszegek sorozata mégsem szabályos sorozat, némelykor megkülönböztetésül az u végtelen sort határozatlan összegűnek (ingadozónak, oscillálónak) mondjuk.

Példaképpen vizsgáljuk meg a végtelen geometriai sort, vagyis az:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

sort. Ez esetben (hacsak $q \neq 1$) a részletösszegek így írhatók:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{1-q^2}{1-q}, \quad s_3 = \frac{1-q^3}{1-q}, \ldots \quad s_n = \frac{1-q^n}{1-q}, \ldots$$

Ha $|q|<1$, akkor: $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$.

Ekkor tehát a sor konvergens és összege: $\frac{1}{1-q}$.

Ha azonban q pozitiv és 1 vagy 1-nél nagyobb, akkor $s_1, s_2, s_3, \ldots$ a számok korlátlanul növekvő sorozata, a végtelen sor divergens, összege gyanánt ∞ tekinthető. Ha $q<-1$, akkor felváltva, a páratlan rendű részletösszegek pozitiv végtelenné, a páros rendűek negativ végtelenné válnak, a sor divergens, összegről egyáltalában nem beszélhetünk. Ha $q=-1$, akkor $s_1=1$, $s_2=0$, $s_3=1$, $s_4=0, \ldots$ a sor határozatlan összegű (ingadozó).

Ha a sor tagjai komplex számok:

$$u_1=a_1+b_1i,\ u_2=a_2+b_2i, \ldots\ u_n=a_n+b_ni, \ldots$$

akkor:

$$s_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+i(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sigma_n+i\tau_n.$$

Miként ismeretes, az $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ sorozat akkor és csakis akkor szabályos sorozat, ha a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \ldots$ és a $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n, \ldots$ sorozatok ilyenek. (I. kötet 524. l.)

Ez esetben, t. i.: midőn a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ *és a* $\tau_1, \tau_2, \ldots$ *részletösszegek szabályos sorozatokat alkotnak, az adott* $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ *sor konvergens és összege:* $\lim s_n = \lim \sigma_n + i \lim \tau_n$.

Minden más esetben a sor széttartó.

Az összeg ezen értelmezése valóban magában foglalja a véges számú tagból álló sor összegének fogalmát. Ugyanis, ha u_{m+1}, $u_{m+2}, \ldots$ mindannyian eltűnnek, akkor

$$s_m=s_{m+1}=s_{m+2}=s_{m+3}, \cdots$$

vagyis $\lim_{n=\infty} s_n=s_m$; a végtelen sor összege megegyezik az m tagú összeggel.

Alig szükséges megemlíteni, hogy ha az $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sorozatból az első m számú tagot elhagyjuk, akkor az $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots$-ből alkotott sor az $u_1, u_2, u_3, \ldots$-ból alkotott eredeti sorral egyszerre konvergens, vagy divergens. Ha ugyanis az $u_1+u_2+\cdots+u_m$ összeget C-vel jelöljük, akkor, ha $n>m$

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=C+(u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n)$$

és így ha a baloldali (a jobboldali) összegnek van határértéke, midőn n végtelenné válik, akkor a jobboldalinak (baloldalinak) is van.

Azt is azonnal megmutathatjuk, hogy az összeadás *asszociativ tulajdonsága* a konvergens sorra is érvényes. Ugyanis, ha a sor tagjait a sorrendjük megváltoztatása nélkül bármiképen összefoglaljuk, például oly módon, hogy az első m_1 tagot, azután a következő m_2 tagot s í. t. előre összefoglaljuk, vagyis az adott sor helyett a következőt tekintjük:

$$v_1+v_2+v_3+\cdots,$$

ahol:

$$v_1=u_1+u_2+\cdots+u_{m_1};\quad v_2=u_{m_1+1}+u_{m_1+2}+\cdots+u_{m_1+m_2};$$

$$v_3=u_{m_1+m_2+1}+u_{m_1+m_2+2}+\cdots+u_{m_1+m_2+m_3}$$

s í. t., akkor az új részletösszegek nem egyebek, mint:

$$s_{m_1},\ s_{m_1+m_2},\ s_{m_1+m_2+m_3},\ \ldots$$

De ha az $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sorozat szabályos számsorozat, akkor nyilván az

$$s_{m_1},\ s_{m_1+m_2},\ s_{m_1+m_2+m_3},\ \ldots$$

is ilyen és e két sorozat ugyanazt a számot értelmezi; tehát a két végtelen sor összege ugyanaz. (Megjegyezzük, hogy fordítva a tétel nem igaz; a $v_1+v_2+v_3+\cdots$ sor lehet összetartó, ellenben az $u_1+u_2+u_3+\cdots$ sor széttartó.)

3. **A konvergencia általános kriteriuma.** Az $u_1+u_2+u_3+\cdots$ végtelen sor konvergens, ha a részletösszegek sorozata: $s_1, s_2, s_3, \ldots$ szabályos sorozat. Ez a sorozat pedig akkor és csakis akkor szabályos sorozat, ha teljesítve van az a föltétel, hogy bármely kis pozitiv ε-hoz tartozik olyan N küszöbszám, hogy (I. k. 13. l.)

$$|s_{n+k}-s_n|<\varepsilon,$$

ha $n>N$ és k bárminő pozitiv egész szám. Az s_{n+k} és s_n részletösszegek levén:

$$s_{n+k}-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}.$$

Jelöljük ezt a kifejezést, mely a végtelen sor k tagjának összege (az $n+1$-iktől $n+k$-ikig), $R_{n,k}$-val.

A konvergenciának szükséges és elégséges feltétele tehát, hogy bármely kis ε-hoz tartozzék egy k-tól független (ε-tól függő) N küszöbszám, úgy, hogy

$$|R_{n,k}|<\varepsilon,$$

ha $n>N$ és k *bárminő* pozitiv egész szám.

Példaképpen alkalmazzuk e kritériumot a végtelen geometriai sorra. Itt

$$R_{n,k}=q^{n+1}+q^{n+2}+\cdots+q^{n+k}=q^{n+1}\frac{1-q^k}{1-q}.$$

Ha $|q|<1$, akkor $\left|\frac{1-q^k}{1-q}\right|<\frac{2}{|1-q|}$, akármekkora is a pozitiv k; tehát

$$|R_{n,k}|<\left|\frac{2q^{n+1}}{1-q}\right|.$$

Válasszuk az n-et úgy, hogy $\left|\frac{2q^{n+1}}{1-q}\right|<\varepsilon$ legyen. Ehhez elég, ha

$$n+1>\frac{\log\frac{\varepsilon\,|1-q|}{2}}{\log|q|}$$

és így, ha a jobboldali számnál közvetlenül kisebb egész számot N-nel jelöljük, mondhatjuk, hogy ha $n>N$, akkor $|R_{n,k}|<\varepsilon$, akárminő pozitiv egész szám is a k.

Ha $q=1$, akkor $R_{n,k}=k$, tehát $R_{n,k}$ k-val együtt ∞-hez tart, bárminő is n. Ha $|q|>1$, akkor $|R_{n,k}|>\frac{|q|^{n+1}(|q|^k-1)}{|q-1|}$, tehát $|R_{n,k}|$ minden határon túl növekszik.

4. A konvergencia-kriterium alkalmazása váltakozó jelű sorra. Alkalmazzuk az előbb talált kriteriumot azon esetben, midőn az adott sornak a következő tulajdonságai vannak:

1. Tagjai valósak és váltakozó előjelűek; tehát, a sor ilyen alakú:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots \quad (\text{vagy } -u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots)$$

hol $u_1, u_2, u_3, \ldots$ pozitiv számok.

2. Tagjai abszolut értékre nézve csökkenőek és

3. $\lim u_n=0$, azaz, ha tetszés szerinti ε adatik, akkor elmehetünk az N-nel olyan messzire, hogy N-en túl minden n-re nézve $|u_n|<\varepsilon$.

Ekkor, ha n páros:

$$R_{n,k}=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots-u_{n+k},$$

ha k páros és

$$R_{n,k}=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots+u_{n+k},$$

ha k páratlan. Az első esetben $R_{n,k}$ így írható:

$$R_{n,k}=(u_{n+1}-u_{n+2})+(u_{n+3}-u_{n+4})+\cdots+(u_{n+k-1}-u_{n+k})$$

és minthogy a tagok abszolut értékei fogynak, R_{nk} pozitiv. De $R_{n,k}$ még így is írható:

$$R_{n,k}=u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-(u_{n+4}-u_{n+5})-\cdots-u_{n+k}$$

tehát:

$$0<R_{n,k}<u_{n+1}$$

és minthogy $\lim u_n=0$, tehát van olyan N, hogy $R_{nk}<\varepsilon$, ha $n>N$.

Ha k páratlan, akkor

$$R_{n,k}=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}\cdots-u_{n+k-1}+u_{n+k},$$

melyről, ha az első és második, továbbá a harmadik és negyedik stb. tagokat összefoglaljuk, látjuk, hogy pozitiv és minthogy ilyen alakban is írható:

$$R_{n,k}=u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots-(u_{n+k-1}-u_{n+k}),$$

ahol minden kivonandó ismét pozitiv, megint következik, hogy

$$0<R_{n,k}<u_{n+1},$$

tehát van olyan N, hogy $R_{n,k}<\varepsilon$, ha $n>N$.

Ha pedig n páratlan szám, akkor

$$R_{n,k} = -(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} \cdots \pm u_{n+k})$$

tehát $-R_{n,k}$ épen olyan alakú, mint az előbb $R_{n,k}$ volt; tehát általánosan kimondhatjuk, hogy minden pozitiv egész k szám esetében a tetszés szerinti pozitiv ε-hoz tartozik olyan N küszöbszám, hogy:

$$|R_{n,k}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N,$$

vagyis az *olyan váltakozó előjelű végtelen sor, melynek tagjai abszolut értékre nézve monoton csökkenőek és zérushoz tartanak: konvergens.*

Így például ez a végtelen sor:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \cdots$$

konvergens.

5. A konvergencia-kriterium részletezése. Megjegyezzük, hogy a konvergenciának a 3. pontban felállitott szükséges és elégséges feltétele voltaképpen végtelen sok feltételt foglal magában, mert $\lim\limits_{n=\infty} R_{nk} = 0$-nak fönn kell állania, ha $k=1, 2, 3, \ldots$, szóval k minden pozitiv egész számú értékére nézve és pedig úgy, hogy ha adatik egy tetszés szerinti kis poz. ε, ehhez tartozzék olyan N, hogy $|R_{nk}| < \varepsilon$, ha $n > N$, *minden* k-ra nézve, vagyis a $\lim\limits_{n=\infty} R_{nk} = 0$ a k-ra nézve *egyenletesen* áll fenn.

A föntiekből következik, hogy a konvergenciának *szükséges* — de egymagában még nem elégséges — föltétele az, hogy $\lim\limits_{n=\infty} R_{n,1} = 0$ legyen, vagyis $R_{n,1} = u_{n+1}$ lévén [$n+1$ helyett n-et írva], kell, hogy

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0$$

legyen. Ez azt mondja, hogy *csakis olyan sor lehet konvergens, melynek tagjai végtelen kicsinyekké válnak.*

Épen így, ha $k=2$, $k=3$, $k=4, \ldots$ tesszük, arra jutunk, hogy 2, 3, 4, ... szomszédos tag összege is végtelen kicsinnyé lesz, ha n minden határon túl nő. (ami különben megadott k esetében már a $\lim R_{n1} = 0$-ból is következik).

A $\lim u_n = 0$ feltétel egymagában még nem elégséges a konvergenciához. Egy igen egyszerű példa meggyőz bennünket erről. Ilyen a következő sor:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

az ú. n. *harmonikus* sor. E sornál $u_n = \frac{1}{n}$, tehát $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ és a sor mégsem összetartó. Ha ugyanis összetartó volna, akkor, miként láttuk, a tagok tetszés szerinti asszociálásával keletkező sor is összetartó lenne. Asszociáljuk a tagokat így:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big),\ \Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\Big),$$

$$\Big(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\Big),\ \ldots\ \Big(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\Big),\ \ldots$$

Mindenik zárójelben $\frac{1}{2}$-nél nagyobb szám áll; ugyanis az

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

2^k tagú összegben az utolsó tag a legkisebb; tehát az összeg nagyobb $\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$-nél és így a tagok asszociálásával keletkező új sor minden tagja $\frac{1}{2}$-nél nagyobb, n első tagjának összege $s_n>\frac{n}{2}$, tehát a sor összege végtelen nagy.

Az általános konvergencia-kritérium alkalmazásával is azonnal meggyőződhetünk, hogy e sor divergens; ugyanis ha $k=n$ tesszük,

$$R_{n,n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

és így $R_{n,n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, tehát nem érhetjük el, *hogy k-tól függetlenül $R_{n,k}<\varepsilon$* legyen, ha $\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Egy másik példa, amely határozatlan sorra vonatkozik, a következő. Legyen:

$$u_n=\sin(\pi\sqrt{n})-\sin(\pi\sqrt{n-1}),$$

vagyis
$$u_n=2\sin\frac{\pi(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{2}\cos\frac{\pi(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{2}$$

$$=2\sin\frac{\pi}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\cos\frac{\pi(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{2}.$$

A $\sin\frac{\pi}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$ limese: 0; a $\cos\frac{\pi}{2}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ limese határozatlan ugyan, de minthogy minden n-re nézve a cosinus értéke -1 és $+1$ közé esik, tehát:

$$\lim u_n=0.$$

Az n-ik részletösszeg pedig:

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sin(\pi\sqrt{n});$$

tehát $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ határozatlan, [ha pl. $n=4k^2$ (k pozitiv egész), akkor $\lim s_n=0$, ha $n=4k^2+2k$, akkor $\sqrt{n}=(2k+\frac{1}{2})\sqrt{1-\frac{1}{(4k+1)^2}}$ és így $\lim\limits_{n=\infty} s_n=1$].

6. A konvergenciakritérium más fogalmazása. Ha a sor konvergens, akkor, miként láttuk, a tetszés szerinti ε-hoz tartozik olyan N küszöb, melyen túl levő n-ekre $|R_{nk}|<\varepsilon$, akárminő pozitiv egész szám is a k; vagyis

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|<\varepsilon,$$

ha $n>N$, minden k-ra nézve. Tekintsük már most a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ konvergens sorból ezt a végtelen sort:

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots \text{ ad inf.},$$

ahol $n>N$. Ez nyilván konvergens; k-ik részletösszege: R_{nk} és minthogy $|R_{n,k}|$ mindig kisebb ε-nál, tehát a sor összege: $\lim\limits_{k=\infty} R_{n,k}$ is abszolut értékre ε vagy ε-nál kisebb. Ezt az összeget így jelöljük: R_n. Ez a Σu_n sor igazi maradéktagja, mert az n-ik tag utáni összes tagokat tartalmazza. Arra jutottunk tehát, hogy a tetszés szerinti ε-hoz tartozik olyan N küszöb (mondhatnók $N(\varepsilon)$, feltűntetve, hogy az N ε-tól függ), melyen túl levő minden n-re:

$$|R_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots \text{ad inf.}|\leq \varepsilon.$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$, ha az

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

sor konvergens.

Viszont, ha $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$, akkor az adott ε-hoz tartozik olyan N küszöb, melyre nézve:

$$u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\cdots \qquad \alpha)$$

végtelen sor összege absz. értékre $\frac{\varepsilon}{4}$-nél kisebb; ez meg azt jelenti, hogy M-et olyan nagynak választhatjuk, hogy ha $m>M$, akkor már az $\alpha)$ minden m tagú részletösszegének abszolut értéke

$$\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

nél kisebb; és így, ha az $\alpha)$ alatti sornak előbb m tagját, azután $m+k$ tagját vesszük, ahol $m>M$ és k tetszés szerinti pozitiv egész szám, akkor úgy az első m tag összegének, mint az első $m+k$ tag összegének absz. értéke is $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb, tehát a kettő különbségének, vagyis az $m+1$-ik, $m+2$-ik,... $m+k$-ik tagok összegének abszolut értéke ε-nál kisebb. Arra jutottunk tehát, hogy a tetszés szerinti adott ε-hoz tartozik olyan $N'=N+M$ küszöb, amelyen túl levő n-ekre

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|<\varepsilon$$

függetlenül a k-tól. Eszerint tehát a $\lim R_n=0$-ból következett, hogy minden ε-hez tartozik olyan N' küszöb, melyen túl levő n-ekre

$$|R_{n,k}| < \varepsilon$$

k-tól függetlenül, vagyis a 3. pontban adott konvergencia-kritérium teljesen æquivalens a $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ kritériummal.*

7. Végtelen sor szorzása egy számmal. Sorok összeadása. A) *Ha az $u_1+u_2+u_3+\cdots$ végtelen sor konvergens, akkor az $au_1+au_2+au_3+\cdots$ sor is konvergens.* (a tetszés szerinti, véges szám.)

Ha $a=0$, akkor az állítás evidens. Legyen tehát $a \neq 0$. Az adott sor konvergens lévén, $|R_{nk}| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$, minden k-ra nézve; tehát nyilván az $au_1+au_2+au_3+\cdots$ végtelen sorra nézve is teljesítve van a konvergencia feltétele, mert

$$|aR_{n,k}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N\left(\frac{\varepsilon}{|a|}\right).$$

Ha az $u_1+u_2+u_3+\cdots$ sor divergens és $a \neq 0$, akkor az $au_1+ +au_2+au_3+\cdots$ is divergens mert ha ez utóbbi konvergens volna, akkor tagjainak $\frac{1}{a}$-val szorzása után keletkező $u_1+u_2+u_3+\cdots$ sor is konvergens lenne.

Ha az $u_1+u_2+u_3+\cdots$ konvergens sor összege: s, azaz $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$, akkor az $au_1+au_2+au_3+\cdots$ sor összege: as, mert $\lim as_n = as$.

B) *Ha a Σu_n és Σv_n sorok konvergensek, akkor az*

$$u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3, \ldots$$

valamint az

$$u_1-v_1,\ u_2-v_2,\ u_3-v_3, \ldots$$

tagokból alakított sorok is konvergensek.

Bizonyítsuk be az első állítást. Azt kell kimutatnunk, hogy tetszés szerinti pozitiv ε számhoz található oly N küszöbszám, hogy

$$|R_{nk}| = |(u_{n+1}+v_{n+1}) + (u_{n+2}+v_{n+2}) + \cdots + (u_{n+k}+v_{n+k})| < \varepsilon$$

* A végtelen sorok különbségére vonatkozó tétel (7. pont) felhasználásával ez az állítás sokkal egyszerűbben bizonyítható be. Ugyanis válasszuk N-et oly nagyra, hogy ha $n > N$, akkor már $|u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen k tetszés szerinti poz. egész szám, akkor $|u_{n+k+1}+u_{n+k+2}+\cdots|$ is kisebb $\frac{\varepsilon}{2}$-nél. Írjuk ezt a sort így (elől k számú 0-t):

$$0+0+\cdots+0+u_{n+k+1}+u_{n+k+2}+\cdots,$$

ennek összege az előbbivel megegyezik; az $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ és a

$$0+0+\cdots+u_{n+k+1}+u_{n+k+2}+\cdots$$

sorok különbsége $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}+0+0\cdots$, vagyis $R_{n,k}$ és így

$$|R_{n,k}| < \varepsilon.$$

k minden értékénél, ha $n>N$. Evégből menjünk el az N-nel oly messze, hogy

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

és egyúttal $$|v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+k}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

legyen minden, az N-en túl eső n-re és minden k-ra nézve. Ezt mindig elérhetjük, mert hiszen úgy a Σu_n, mint a Σv_n sor is konvergens. Ebből már következik, hogy $|R_{n,k}|<\varepsilon$, ha $n>N$. Épen így bizonyítható a tétel második része, vagy még egyszerűbben, ha Σu_n és $\Sigma(-v_n)$ sorokra alkalmazzuk az előbbi meggondolást.

Ily módon, azaz tagonkinti összeadással nemcsak két, hanem tetszés szerinti (véges) számú konvergens sorból állíthatunk elő új konvergens végtelen sort; azaz általában, ha a Σu_n, Σv_n, $\Sigma w_n, \ldots \Sigma t_n$ konvergens sorok, akkor egyúttal $\Sigma(u_n+v_n+w_n+\cdots+t_n)$ is konvergens.

Azt is rögtön beláthatjuk, hogy ha Σu_n végtelen sor összege s és Σv_n összege σ, akkor $\Sigma(u_n+v_n)$ összege $s+\sigma$. Ugyanis, ha rendre s_n és σ_n az n-ik részletösszegek, akkor:

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)=s_n+\sigma_n$$

és $\lim\limits_{n=\infty}(s_n+\sigma_n)=s+\sigma$.

Ezért a $\Sigma(u_n+v_n)$ végtelen sort a Σu_n és Σv_n sorok összegének mondjuk.

C) *Ha a Σu_n sor konvergens, ellenben a Σv_n divergens, akkor az*

$$u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3,\ldots$$

tagokból alakított sor is divergens. Mert ha konvergens volna, akkor a *B)* alatti szerint a $\Sigma(u_n+v_n)$ és Σu_n konvergens sorok különbsége, a Σv_n sor is konvergens lenne.

8. Abszolut konvergens sor. Feltételesen konvergens sor. *Ha a Σu_n sor tagjainak abszolut értékeiből alkotott sor, a $\Sigma|u_n|$ konvergens, akkor a sor maga is konvergens.*

Ugyanis jelöljük a $\Sigma|u_n|$ maradéktagját $R_{n,k}$-val; (azaz $R_{n,k}=$ $=|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+k}|$) az adott Σu_n sor maradéktagja legyen:

$$r_{nk}=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}.$$

Nyilvánvaló, hogy:

$$|r_{nk}|\leq R_{n,k}.$$

Ebből azonnal következik, hogy Σu_n konvergens, ha $\Sigma|u_n|$ konvergens; mert ekkor tetszés szerinti kis ε-hoz található N küszöbszám, úgy, hogy $R_{n,k}<\varepsilon$, ha $n>N$, minden k mellett; tehát egyúttal

$|r_{nk}| < \varepsilon$, ha $n > N$, minden k értéknél. Ezzel ki van mutatva, hogy ha az *abszolut értékekből alkotott sor konvergens, akkor az adott sor is konvergens.*

Ez a tétel nem fordítható meg. Lehetséges, hogy Σu_n konvergens, bár a $\Sigma |u_n|$ divergens. Így például már láttuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

váltakozó előjelű sor konvergens (252. lapon) és az abszolut értékek sora, az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

sor divergens (252. lapon).

Épen ezért megkülönböztetésül az olyan konvergens sort, melynek tagjainak abszolut értékeiből alkotott sor is konvergens, *abszolut konvergens* sornak nevezzük; ellentétben az olyan konvergens sorral, melynél a tagok abszolut értékeiből alkotott sor divergens. Az ilyent *feltételesen* összetartó sornak mondjuk.

Az olvasó könnyen bebizonyíthatja, hogy két abszolut konvergens sor összege (különbsége) is abszolut konvergens.

9. Abszolut konvergens sor tagjainak szorzása. Az abszolut konvergens sorra vonatkozólag a 6. pont A) alatti állítása jelentékenyen általánosítható. Ugyanis ott azt mondtuk, hogy ha a sor minden tagját ugyanazzal az a számmal szorozzuk, az új sor is konvergens lesz. Most szorzóul ne ugyanazt a számot válasszuk, hanem az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számok olyan sorozatát, melynek minden tagja abszolut értékre, pl. M véges számnál kisebb, tehát a számok egy tetszés szerinti *korlátos* sorozatát. Ekkor kimondhatjuk, hogy:

Ha a Σu_n sor abszolut konvergens és $a_1, a_2, a_3, \ldots$ olyan számok sorozata, melyek abszolut értékre valamely poz. M-nél kisebbek, akkor a $\Sigma a_n u_n$ sor is abszolut konvergens.

Ugyanis, ha egy tetszés szerinti pozitiv ε adatik, vegyük $\frac{\varepsilon}{M}$-et és határozzuk meg az N küszöbszámot úgy, hogy minden k-ra nézve:

$$R_{n,k} = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{M},$$

ha $n > N$. Ez lehetséges, mert a $\Sigma |u_n|$ konvergens. Minthogy pedig:

$$|a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+k}u_{n+k}| \leq$$
$$\leq |a_{n+1}u_{n+1}| + |a_{n+2}u_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}u_{n+k}|$$

és az utóbbi kifejezés kisebb $MR_{n,k}$-nál, tehát:

$$|r_{n,k}| = |a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+k}u_{n+k}| < MR_{n,k} < \varepsilon,$$

ha $n>N$ és k bármely pozitiv egész szám. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A bizonyításnál szükséges volt tudnunk, hogy a Σu_n abszolut konvergens; ha feltételesen konvergens, a tétel nem érvényes. Így például ha az $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots$ feltételesen konvergens sor tagjait rendre $+1$, -1, $+1$, -1, ... korlátos sorozattal szorozzuk, divergens sort kapunk.

10. Komplex tagu sor abszolut összetartásának egy kriteriuma. *Ha az*

$$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+(u_3+iv_3)+\cdots+(u_n+iv_n)+\cdots$$

komplex számokból álló sorban a valós és a képzetes részekből alkotott sorok abszolut konvergensek, akkor az adott sor is abszolut konvergens.

Ugyanis, legyen általában:

$$u_k+iv_k=r_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$$

a sor k-ik tagja trigonometrikus alakban; akkor tehát feltételünk szerint a $\Sigma r_n\cos\alpha_n$ és $\Sigma r_n\sin\alpha_n$ sorok abszolut konvergensek. Ha az első sor tagjait rendre a korlátos

$$\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \cos\alpha_3, \ldots \cos\alpha_n, \ldots$$

és a második sor tagjait megfelelően a korlátos

$$\sin\alpha_1,\ \sin\alpha_2,\ \sin\alpha_3, \ldots \sin\alpha_n, \ldots$$

számokkal szorozzuk, az imént bizonyított tétel értelmében ismét abszolut konvergens sorokhoz jutunk és ha ezeket összeadjuk, összegül a konvergens: $r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n+\cdots$ sort kapjuk. Ezzel kimutattuk, hogy *ha a valós és a képzetes részekből alkotott sorok különkülön abszolut konvergensek, akkor az abszolut értékek sora is konvergens.*

Megjegyezzük, hogy ez a tétel meg is fordítható. Ha ugyanis a komplex sor tagjainak abszolut értékei konvergens sort alkotnak, [azaz a sor abszolut konvergens] akkor ebből az is következik, hogy

$$|r_1\cos\alpha_1|+|r_2\cos\alpha_2|+|r_3\cos\alpha_3|+\cdots$$

valamint

$$|r_1\sin\alpha_1|+|r_2\sin\alpha_2|+|r_3\sin\alpha_3|+\cdots$$

is konvergensek, tehát úgy a valós, mint a képzetes részekből alkotott sorok abszolut konvergensek.

11. A végtelen sor tagjainak elhelyezése. *Az abszolut konvergens sor tagjait tetszés szerinti sorrendbe helyezhetjük, anélkül, hogy a sor konvergenciája megszünnék és összege megváltoznék.* Az állítás második része más szóval azt jelenti, hogy az abszolut konvergens végtelen sorra nézve is érvényes az összeadásnak a véges számú összeadandókból álló összegre vonatkozó, az arithmetika elemeiből ismeretes kommutativitása.

Először megmutatjuk azt az első pillanatra sajátságos körülményt, hogy általában a konvergens végtelen sornak nincs meg a kommutativ tulajdonsága; vagyis a végtelen sor összegének fogalma úgy állapíttatott meg, hogy az a tagok sorrendjétől nem független. A végtelen sor összegét ugyanis mint a részletösszegek sorozatának határértékét definiáltuk; már pedig e részletösszegek a végtelen sor tagjainak sorrendjétől nem függetlenek és így *a priori* várható, hogy a sorösszeg, mint a részletösszegek limese is függ a sorrendtől. Egyszerű példán mutatjuk meg, hogy a tagok sorrendje minő befolyással lehet a végtelen sor összegére.

Ez a sor: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots$ tudvalevően konvergens. Jelöljük az összegét, vagyis pontosabban szólva az

$$s_1=1,\quad s_2=1-\frac{1}{2},\quad s_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ldots$$

részletösszegek limesét S-sel. S így is írható:

$$S=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

vagyis S egyúttal limese az s_2, s_4, $s_6, \ldots$ szabályos sorozatnak is. E sorozat növekvő, tehát $S>s_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ és így $S\neq 0$.

És most vizsgáljuk ezt a sort, mely szintén konvergens* és csakis a tagok sorrendjében különbözik az előbbitől:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Ez, mint konvergens sor, tagösszevonással még így is írható:

$$\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Jelöljük ezen sor összegét S'-al. Az előbbi S még két-két szomszédos tag összevonásával így is írható:

$$S=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right),$$

tehát:

$$S'-S=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}\right)=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}S,$$

vagyis $S'=\frac{3}{2}S$. Az új sorrendben írt sor összege tehát az eredetitől külön-

* Legyenek $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n \ldots$ e sor részletösszegei. A $\sigma_3, \sigma_6, \sigma_9, \ldots \sigma_{3n}, \ldots$ sorozatnak van limese, és pedig mint rögtön látni fogjuk, ez: $S'=\frac{3}{2}S$; de $\sigma_{3n+1}=\sigma_{3n}+\frac{1}{4n+1}$, $\sigma_{3n+2}=\sigma_{3n+1}+\frac{1}{4n+3}$, amiből látjuk, hogy σ_{3n+1} és σ_{3n+2}-nek ugyanaz a limese, mint σ_{3n}-nek; tehát a sor valóban konvergens.

bözik. Mindjárt látni fogjuk, hogy ez azért van, mert a fölírt sor nem abszolut konvergens.

Valós tagokból álló feltételesen összetartó sor csakis olyan lehet, amelyben úgy a pozitiv, mint a negativ tagok száma végtelen nagy. Mert hiszen, ha valós tagú sorban pl. a negativ tagok száma véges volna, akkor bizonyos indextől kezdve minden tag pozitiv lenne és így a sor abszolut konvergens, vagy divergens lenne.

Azt is azonnal beláthatjuk, hogy a feltételesen összetartó $\sum\limits_1^\infty a_n$ sor esetében úgy a pozitiv, mint a negativ tagok sora divergens. Jelöljük ugyanis a pozitiv tagokat sorban $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots$-al, a negativok *abszolut értékeit* sorban $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, \ldots$-al, akkor csak a következő esetek képzelhetők:

a) úgy a pozitiv tagokból, mint a negativok abszolut értékeiből alkotott sor konvergens. Ez esetben töltsük ki a Σa_{i_k} és a Σa_{j_k} sorokban az $i_1, i_2, \ldots$ és a $j_1, j_2, \ldots$ indexes tagok közötti helyeket csupa 0-sal; ezáltal a két sor konvergenciája nem szünt meg; ha most az így kipótolt végtelen sorokat összeadjuk, (miáltal az eredetileg adott sor tagjainak abszolut értékeiből alakított sorhoz jutunk) akkor ismét konvergens sort kapunk; tehát az adott sor abszolut konvergens volna;

b) egyik sor divergens, a másik konvergens. A divergens (egyjelű) sor részletösszegei minden határon túl nőnek, (vagy negativ végtelenné lesznek), tehát ha az előbbi kipótlást végezzük és a két sort egymásból kivonjuk, szintén divergens sort kapunk, holott az így nyert sornak (az eredetileg adott sornak) összetartónak kell lennie (mert hiszen feltételesen összetartónak mondtuk);

marad tehát a harmadik eshetőség: *c)* mindkét sor divergens. Látjuk tehát, hogy *ha a feltételesen összetartó sornak pozitiv és negativ tagjaiból külön végtelen sorokat alkotunk, mindkettő divergens lesz.*

A feltételesen összetartó sorról megmutathatjuk, hogy *összege (vagyis a részletösszegek határértéke) függ az elrendezésétől, sőt a valós tagokból állóról azt is, hogy tagjait úgy rendezhetjük el, hogy bárminő összeget kapjunk.*

Legyenek tehát $a_1+a_2+a_3+\cdots$ és $b_1+b_2+b_3+\cdots$ pozitiv tagú divergens sorok, melyekből a

$$c_1+c_2+c_3+\cdots$$

feltételesen összetartó sort kaptuk oly módon, hogy az a számokat pozitiv, a b számokat pedig negativ jellel vettük bizonyos sorrendben.*

Kimutatjuk, hogy a c számokat úgy rendezhetjük, hogy a keletkező végtelen sor összege a tetszés szerint megadott α legyen.

E végből vegyünk az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ sorból annyi tagot, hogy összegük

* Minthogy a c sor konvergens, tehát nyilván $\lim c_n=0$, vagyis $\lim a_n=0$, $\lim b_n=0$.

α vagy α-nál nagyobb, de eggyel kevesebb tag összege még α-nál kisebb legyen. Tegyük fel, hogy ehhez k számú tag kellett; azaz:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\geq\alpha; \text{ és (ha } k\geq1) \ a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}<\alpha.$$

Ezt bármely α esetében mindig elérhetjük, mert feltételünk szerint a Σa_n sor divergens.

Vegyünk most ehhez negativ jellel annyi b tagot, hogy az új összeg már éppen α-nál kisebb legyen; például l számút; azaz:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-b_2-\cdots-b_l<\alpha$$

és (ha $l\geq1$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-b_2-\cdots-b_{l-1}\geq\alpha.$$

Vegyünk most újból annyi a tagot folytatólagosan, hogy az új összeg α vagy α-nál nagyobb legyen, de eggyel kevesebb tag összege még α-n alul maradjon. Ilyen kell például k_1 számú, azaz:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-b_2-\cdots-b_l+a_{k+1}+\cdots+a_{k+k_1}\geq\alpha;$$

és

$$a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-b_2-\cdots-b_l+a_{k+1}+\cdots+a_{k+k_1-1}<\alpha$$

és ismét l_1 számú b tagot, hogy:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-b_2-\cdots-b_l+a_{k+1}+\cdots+a_{k+k_1}-b_{l+1}-b_{l+2}-\cdots-b_{l+l_1}<\alpha,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-b_2-\cdots-b_l+a_{k+1}+\cdots+a_{k+k_1}-b_{l+1}-b_{l+2}-\cdots-b_{l+l_1-1}\geq\alpha$$

s í. t. Eszerint tehát a c sorból vett első n tag összegét s_n-nel jelölvén, azt látjuk, hogy:

$$s_{k-1}<\alpha\leq s_k, \quad s_{k+l-1}\geq\alpha>s_{k+l},$$
$$s_{k+l+k_1-1}<\alpha\leq s_{k+l+k_1}, \quad s_{k+l+k_1+l_1-1}\geq\alpha>s_{k+l+k_1+l_1}$$

s í. t., vagy általában akármelyik jobboldali indexet m-mel jelölve:

$$s_{m-1}<\alpha\leq s_m \quad \text{vagy} \quad s_{m-1}\geq\alpha>s_m.$$

Az s_m-s_{m-1} különbség pedig vagy valamelyik a szám, vagy b szám és minthogy $\lim a_n=\lim b_n=0$, tehát ha elég messze mentünk, az

$$|s_m-\alpha|\leq|s_m-s_{m-1}|$$

tetszés szerinti kicsiny lesz, tehát

$$\lim_{m=\infty} s_m=\alpha.$$

Az s_m sorozat tehát szabályos, ha m a föntebbi sorozatban szereplő indexet jelenti.

Azonban akármekkora legyen is az n index, mindig: $s_{m'}<s_n\leq s_{m''}$, vagy $s_{m'}\geq s_n\geq s_{m''}$, ahol m' és m'' az m indexnek két olyan, *egymásra következő* értéke, amelyek az n-et közrefogják és így:

$$\lim_{n=\infty} s_n=\lim_{m=\infty} s_m=\alpha.$$

Ezzel kimutattuk, hogy a valós tagú feltételesen összetartó sor összege — az összeg a megállapított módon a részletösszegek határértéke — bárminő szám lehet. A komplex tagú feltételesen konvergens sorokról is megmutathatjuk, hogy a részletösszegek határértéke nem független a részletösszegek alkotásánál használt tagsorrendtől.

Egészen másként áll a dolog az abszolut konvergens soroknál. Kimutatjuk ugyanis, *hogy az abszolut konvergens sor összege független a tagok elhelyezésétől.*

Legyen ugyanis $a_1+a_2+a_3+\cdots$ egy valós, vagy komplex számokból álló végtelen sor, melynél az abszolut értékek sora $c_1+c_2+c_3+\cdots$, ahol $c_i=|a_i|$ szintén konvergens. Helyezzük az a számokat más, tetszés szerinti sorrendbe és jelöljük e számokat az új sorrendjükben így: $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ Legyen az adott sor összege: s, azaz s az $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ részletösszegek sorozatának határértéke. Azt állítjuk, hogy az új elrendezésű sor is abszolut konvergens és összege szintén s.

A konvergenciát így bizonyítjuk: Legyen ε egy tetszés szerinti kis pozitiv szám. Elmehetünk az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ sorban olyan messze, hogy az *abszolut értékekből* alkotott bármelyik $R_{n,k}$ maradéktag ε-nál kisebb legyen; azaz:

$$c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+k}<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad n>N.$$

És most keressük meg az új $a'_1+a'_2+a'_3+\cdots$ sorban azt a tagot, amelyik az $a_1, a_2, a_3, \ldots a_N$ tagok közül utolsónak fordul elő. Mondjuk, hogy ennek az új elrendezésben M index felel meg; vagyis az

$$a'_1, a'_2, a'_3, \ldots a'_M$$

M számú tag között már az $a_1, a_2, \ldots a_N$ mind előfordul. Az M-iken túl levő tagokból vegyünk akárhányat, pl. l-et, akkor az így keletkező

$$|a'_{m+1}|+|a'_{m+2}|+\cdots+|a'_{m+l}|$$

összeg csak olyan tagokból állhat, amelyek valamelyik $R_{n,k}$-ban mind benne vannak, ahol $n>N$; tehát akárminő pozitiv egész szám legyen is l, mindenesetre:

$$|a'_{m+1}|+|a'_{m+2}|+\cdots+|a'_{m+l}|<\varepsilon,$$

ha $m>M$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $a'_1+a'_2+a'_3+\cdots$ sor valóban abszolut konvergens.

Ha e sor összege nem volna s, hanem $s'\neq s$, akkor $|s'-s|>\alpha$ volna, ahol α pozitiv szám. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlenség. Menjünk el az $|a_1|+|a_2|+\cdots$ sorban olyan messzire, hogy $R_{n,k}<\frac{\alpha}{3}$ legyen. Az ehhez tartozó küszöbszám N legyen.

Ebből egyúttal az is következik, hogy a már ismert jelöléssel: $R_n\leq\frac{\alpha}{3}$ ha $n>N$ és így, minthogy $s=s_n+R_{n+1}$, tehát, ha $n>N$:

$$|s_n-s|\leq\frac{\alpha}{3}.$$

M jelentse megint az előbbi M számot és menjünk el az $a'_1+a'_2+\cdots$ sorban olyan messzire, hogy az $|s'_n-s'|<\frac{\alpha}{3}$ legyen. Az ehhez tartozó küszöbszámul azonban M-nél nagyobb számot válasszunk. Legyen az M'; tehát: $M'>M>N$. De:

$$s'-s=s'-s'_n+s'_n-s_n+s_n-s$$

tehát:

$$|s'-s|\leq|s'-s'_n|+|s'_n-s_n|+|s_n-s|.$$

Legyen $n>M'$. s'_n összegben az s_N tagjai mind benne vannak. Ezeken kívül csak olyan tagok lehetnek benne, melyek abszolut értékei valamely $R_{n,k}$ maradéktagban szerepelnek. Ugyanezt mondhatjuk s_n-ről is, tehát

$$|s'_n-s_n|<\frac{\alpha}{3}$$

és így:

$$|s'-s|<\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3},$$

vagyis $|s'-s|<\alpha$, ami ellenkezik azzal a feltevésünkkel, hogy $|s'-s|$ a pozitiv α-nál nagyobb; tehát bebizonyítottuk, hogy $s'=s$.

Kimutattuk tehát, hogy *abszolut konvergens sor tagjai akárminő módon sorozhatók, anélkül, hogy a végtelen sor összege megválloznék.*

12. Dedekind-féle tétel. Sokszor használják a sorok vizsgálatánál ezt a *Dedekind*-től eredő tételt: *Ha Σa_n végtelen sor konvergens és a $c_1, c_2, \ldots$ számokból alkotott*

$$|c_2-c_1|+|c_3-c_2|+|c_4-c_3|+\cdots+|c_n-c_{n-1}|+\cdots$$

sor szintén konvergens, akkor az

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots+a_nc_n+\cdots$$

sor is konvergens.

Legyen a Σa_n összege s, n-ik részletösszege: s_n. Föltételünk szerint $\lim s_n=s$, tehát az s_n részletösszegek mindannyian kisebbek abszolut értékre nézve egy véges M számnál.

Minthogy továbbá a $\Sigma|c_n-c_{n-1}|$ sor konvergens, tehát a $\Sigma(c_n-c_{n-1})$ is konvergens és így a

$$\sigma_n=(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+(c_4-c_3)+\cdots+(c_n-c_{n-1})$$

részletösszegeknek meghatározott határértékük van; de a jobboldali kifejezés nem más, mint c_n-c_1, tehát ebből az is következik, hogy $\lim c_n$ véges és meghatározott számérték.

Írjuk az $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots$ sorban az *Abel* által alkalmazott eljárás szerint $a_1, a_2, a_3, \ldots$ helyett a részletösszegekkel kifejezett értékeiket:

$$a_1=s_1,\ a_2=s_2-s_1,\ a_3=s_3-s_2,\ a_4=s_4-s_3, \ldots\ a_n=s_n-s_{n-1}, \ldots$$

akkor tehát:

$$S_n=a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n=$$
$$=s_1c_1+(s_2-s_1)c_2+(s_3-s_2)c_3+\cdots+(s_n-s_{n-1})c_n=$$
$$=s_1(c_1-c_2)+s_2(c_2-c_3)+s_3(c_3-c_4)+\cdots+s_{n-1}(c_{n-1}-c_n)+s_nc_n.$$

Mivel pedig

$$|c_1-c_2|+|c_2-c_3|+|c_3-c_4|+\cdots$$

feltételünk szerint konvergens, azaz

$$(c_1-c_2)+(c_2-c_3)+(c_3-c_4)+\cdots$$

abszolut konvergens, továbbá $s_1, s_2, s_3, \ldots$ abszolut értékei M-nél kisebbek, tehát a 9. pont szerint az

$$s_1(c_1-c_2)+s_2(c_2-c_3)+s_3(c_3-c_4)+\cdots$$

konvergens és így

$$\lim_{n=\infty}[s_1(c_1-c_2)+s_2(c_2-c_3)+\cdots+s_{n-1}(c_{n-1}-c_n)]$$

véges és meghatározott számérték; a $\lim s_n c_n$ szintén az (minthogy $\lim s_n$ és $\lim c_n$ meghatározott értékek), tehát az előbbi

$$S_n = s_1(c_1-c_2)+s_2(c_2-c_3)+\cdots+s_{n-1}(c_{n-1}-c_n)+s_n c_n$$

összegnek is meghatározott véges határértéke van és ezzel kimutattuk, hogy az $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots$ végtelen sor tényleg konvergens.

Az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ sorról feltettük, hogy konvergens. Most kevesebbet tegyünk fel róla; azt, hogy az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ sorból alkotott részletösszegek mindannyian kisebbek abszolut értékre nézve egy bizonyos M számnál. De ennek fejében a c számoktól valamivel többet kívánunk: nemcsak azt, hogy a $|c_2-c_1|+|c_3-c_2|+\cdots$ sor konvergens, hanem még azt is, hogy $\lim c_n=0$ legyen. Egy új tétel már most így hangzik:

Ha az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ végtelen sor részletösszegei korlátosak (egy véges M-nél kisebb abszolut értékűek) és $|c_2-c_1|+|c_3-c_2|+\cdots$ konvergens és $\lim c_n=0$, akkor

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots$$

konvergens sor.

Ugyanis megint az előbbi átalakítással $S_n=S_n'+S_n''$, ahol

$$S_n'=s_1(c_1-c_2)+s_2(c_2-c_3)+\cdots+s_{n-1}(c_{n-1}-c_n) \quad \text{és} \quad S_n''=s_n c_n.$$

De $\lim S_n'$ létezik, mert $|s_n|<M$ és $\Sigma|c_k-c_{k+1}|$ konvergens. $\lim S_n''=0$, mert $\lim c_n=0$ és az s_n sorozat korlátos, tehát $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ létezik, vagyis a $\Sigma a_n c_n$ konvergens.

A *Dedekind*-tétel alkalmazásaképen a következő fontos példát említjük: Ha az $\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\cdots$, vagy rövid jelölésben $\Sigma\alpha_n\xi^n$ sor konvergens és $|x|<|\xi|$, akkor $\Sigma\alpha_n x^n$ is konvergens. Ha ugyanis $c_0, c_1, c_2, \ldots$ gyanánt ezeket választjuk:

$$1,\ \frac{x}{\xi},\ \left(\frac{x}{\xi}\right)^2,\ \left(\frac{x}{\xi}\right)^3,\ldots$$

és

$$a_n=\alpha_n\xi^n,$$

akkor teljesítve van *a)* hogy a $\Sigma a_n=\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\cdots$ sor konvergens, *b)* hogy a $\Sigma|c_n-c_{n-1}|$ konvergens, $\left(\text{mert } |c_n-c_{n-1}|=\left|\frac{x}{\xi}\right|^{n-1}\left|\frac{x}{\xi}-1\right| \text{ és } |x|<|\xi|\right)$. Így tehát a $\Sigma c_n a_n$ sor, vagyis a $\Sigma\alpha_n x^n$ is konvergens. Később látni fogjuk, hogy $\Sigma\alpha_n x^n$ abszolut konvergens.

13. Abel-féle sortétel. *Ha az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ végtelen sor részletösszegei abszolut értékükre nézve korlátosak és $c_1, c_2, c_3, \ldots$ monoton fogyó (illetőleg nem növekvő) sorozat és $\lim c_n=0$, akkor az*

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots$$

végtelen sor konvergens. (Abel tétele.)

Csak azt kell megmutatnunk, hogy tetszés szerinti kis ε-hoz található olyan N küszöbszám, hogy

$$|R_{n,k}|=|a_{n+1}c_{n+1}+a_{n+2}c_{n+2}+\cdots+a_{n+k}c_{n+k}|<\varepsilon,$$

ha $n>N$ és k bármely pozitív egész szám.

Ezt pedig így mutatjuk meg. Tegyük:

$$a_{n+1}=s_{n+1}-s_n,\ a_{n+2}=s_{n+2}-s_{n+1},\ \ldots\ a_{n+k}=s_{n+k}-s_{n+k-1},$$

ahol s_m az m-ik részletösszeg. Tehát:

$$R_{n,k}=(s_{n+1}-s_n)c_{n+1}+(s_{n+2}-s_{n+1})c_{n+2}+\cdots+(s_{n+k}-s_{n+k-1})c_{n+k}$$
$$=-s_n c_{n+1}+s_{n+1}(c_{n+1}-c_{n+2})+s_{n+2}(c_{n+2}-c_{n+3})+\cdots+$$
$$+s_{n+k-1}(c_{n+k-1}-c_{n+k})+s_{n+k}c_{n+k}$$

és innen, minthogy a zárójelben álló kifejezések és a c-k pozitivok:

$$|R_{n,k}|\leq|s_n|c_{n+1}+|s_{n+1}|(c_{n+1}-c_{n+2})+|s_{n+2}|(c_{n+2}-c_{n+3})+\cdots+$$
$$+|s_{n+k-1}|(c_{n+k-1}-c_{n+k})+|s_{n+k}|c_{n+k}.$$

Az s részletösszegek abszolut értékei feltételünk szerint mind kisebbek egy M számnál. Menjünk el már most n-el olyan messzire, hogy minden c_n kisebb legyen $\frac{\varepsilon}{2M}$-nél. Az ehhez szükséges küszöbszám legyen N. Ekkor, minden s helyébe M-et téve,

$$|R_{n,k}|<M[c_{n+1}+(c_{n+1}-c_{n+2}+c_{n+2}-c_{n+3}+\cdots+$$
$$+c_{n+k-1}-c_{n+k})+c_{n+k}],$$

vagyis, ha $n>N$:

$$|R_{n,k}|<M(c_{n+1}+(c_{n+1}-c_{n+k})+c_{n+k})<M\cdot\frac{2\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

és ezzel kimutattuk, hogy az $a_1c_1+a_2c_2+\cdots$ tényleg konvergens.

Ha az eredeti Σa_n sor konvergens, akkor természetesen az a-kra vonatkozó feltétel teljesűl és így, ha a c számokat a fenti feltételeknek megfelelően választjuk, a $\Sigma a_n c_n$ is konvergens. Az *Abel*-tétel nagy fontosságára való tekintettel erre az esetre újból kimondjuk a tételt: *Ha Σa_n végtelen sor konvergens és $c_1, c_2, c_3, \ldots$ nem növekvő sorozat és* $\lim c_n=0$, *akkor a $\Sigma c_n a_n$ végtelen sor is konvergens.*

Az *Abel*-tétel a Dedekind tétel speciális esete gyanánt is tekinthető. Ugyanis az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ sor részletösszegei korlátosak, továbbá a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatra megszabott feltételekből következik, hogy ez a sor: $c_1-c_2+c_3-c_4\ldots$ konvergens (váltakozó előjelű sor, melynek tagjai abszolut értékre csökkenőek és $\lim c_n=0$), tehát a $(c_1-c_2)+(c_3-c_4)+\cdots$ és a $(c_2-c_3)+(c_3-c_4)+\cdots$ pozitiv tagú sorok konvergensek és igy a:

$$|c_1-c_2|+|c_2-c_3|+|c_3-c_4|+|c\ -c_5|+\cdots$$

sor is konvergens; $\lim c_n=0$; tehát a Dedekind-tétel szerint $\Sigma c_n a_n$ konvergens. Az Abel-tételt azért bizonyítottuk be mégis függetlenül, hogy megmutathassuk, hogy fordítva, valós $c_1, c_2, c_3, \ldots$ számok esetében a *Dedekind*-féle tétel egyúttal az *Abel*-tételből is folyik.

Ezen állítás helyességét így láthatjuk be:

Minthogy feltétel szerint a $\Sigma(c_n-c_{n+1})$ abszolut konvergens, tehát úgy a pozitiv, mint a negatıv tagok konvergens sorokat alkotnak.

Jelöljük azokat az indexeket, melyekre nézve c_n-c_{n+1} pozitiv, i betűvel, azokat, amelyekre c_n-c_{n+1} negativ, k-val. Előbbi megjegyzésünk szerint

$$\Sigma(c_i-c_{i+1}) \quad \text{és} \quad \Sigma(c_k-c_{k+1})$$

konvergensek. A $\Sigma(c_n-c_{n+1})$ konvergens sor összegét jelöljük S-el; akkor

tehát:

$$S=\sum_{1}^{m-1}(c_n-c_{n+1})+\sum_{m}^{\infty}(c_n-c_{n+1}).$$

Az első rész összege: c_1-c_m; a második rész ismét végtelen sor.

Ha m nő, akkor a maradéktagban foglalt pozitiv különbségek, valamint a negativ különbségek összegei (abszolut értékre) fogynak és minthogy a $\Sigma|c_n-c_{n+1}|$ konvergens, tehát úgy a $\sum\limits_{m}^{\infty}(c_i-c_{i+1})$, mint a $\sum\limits_{m}^{\infty}(c_k-c_{k+1})$ 0-á válik, ha m végtelenné lesz. Jelöljük a $\sum\limits_{m}^{\infty}(c_i-c_{i+1})$-et ε'_m-el és a $\sum\limits_{m}^{\infty}(c_k-c_{k+1})$-et $-\varepsilon''_m$-al, akkor tehát:

$$S=c_1-c_m+\varepsilon'_m-\varepsilon''_m,$$

ahol ε'_m és ε''_m m növekedtével fogynak és $\lim\limits_{m=\infty}\varepsilon'_m=\lim\limits_{m=\infty}\varepsilon''_m=0$. Innen:

$$c_m=(c_1-S)+\varepsilon'_m-\varepsilon''_m.$$

A Σa_n sorból a $\Sigma c_m a_m$ sort most már négy lépésben alkothatjuk meg: először szorozzuk a sor tagjait az állandó c_1-S-el, azután sorban a monoton csökkenő 0-sá való ε''_m és ε'_m számokkal, végül a nyert sorokat összeadjuk. Az első operációnál természetesen konvergens sort kapunk, a második és harmadik művelet az *Abel*-tétel értelmében szintén konvergens sorokra vezet, nemkülönben az utolsó lépés: az összeadás. Így tehát a Dedekind-tétel valós $c_1, c_2, \ldots$ esetében voltaképen az Abel-tétel speciális esetének tekinthető.

14. Más összegező eljárás. A konvergens sor összegét úgy értelmeztük, hogy ez az összeg: $s=\lim s_n$. Megmutatjuk, hogy úgy is értelmezhetjük, mint a részletösszegek arithmetikai közepének a határértékét, vagyis, hogy a konvergens sor összege:

$$s=\lim_{n=\infty}\frac{s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n}{n}.$$

Evégből megemlítjük ezt a határértéktételt: (L. I. k. 88. l. 17. feladatot). Ha $u_1, u_2, u_3, \ldots$ oly sorozat, melyre nézve:

$$\lim_{n=\infty}(u_{n+1}-u_n)=\alpha,$$

ekkor egyúttal:

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_n}{n}=\alpha.$$

Tegyük fel tehát, hogy az $a_1+a_2+a_3+\cdots$ sor konvergens, azaz $\lim s_n=s$ véges és meghatározott szám. Legyen:

$$\sigma_n=s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n.$$

Ekkor tehát:

$$\lim(\sigma_{n+1}-\sigma_n)=\lim s_n=s$$

és így az idézett tétel szerint:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_n}{n}=\lim_{n=\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}=s.$$

Ezentúl tehát *konvergens sor összegét úgy is definiálhatjuk, mint a részletösszegek arithmetikai közepének határértékét.* Vagy részletesebben írva: ($s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, $s_3=a_1+a_2+a_3, \ldots$ téve:)

$$\sigma_n = na_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \cdots + a_n$$

és így:

$$\frac{\sigma_n}{n} = a_1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)a_2 + \left(1-\frac{2}{n}\right)a_3 + \cdots + \left(1-\frac{n-1}{n}\right)a_n,$$

tehát a konvergens sor összege gyanánt ezt is mondhatjuk:

$$s = \lim_{n=\infty}\left[a_1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)a_2 + \left(1-\frac{2}{n}\right)a_3 + \cdots + \left(1-\frac{n-1}{n}\right)a_n\right].$$

Mindjárt megjegyezzük, hogy az összegképzés ezen módja egyúttal a végtelen sor összegezésének általánosítása. Olyan eljárás ez, mely konvergens sor esetében ugyanazt az eredményt szolgáltatja, mint az eddigi összegező eljárás. De az új összegezés olyankor is eredményre vezethet, amidőn a régi felmondja a szolgálatot: divergens sor esetében. Így például ez a sor: $1-1+1-1+\cdots$ divergens. Részletösszegei: $1, 0, 1, 0, \ldots$ tehát az eddigi értelmezés szerint összegről nem lehetett szó. Az új összegképzés azonban célhoz vezet, mert:

$$\sigma_1=1,\ \sigma_2=1,\ \sigma_3=2,\ \sigma_4=2,\ \sigma_5=3,\ \sigma_6=3, \ldots\ \sigma_{2n-1}=\sigma_{2n}=n, \ldots$$

tehát:

$$\lim_{p=\infty}\frac{\sigma_p}{p} = \frac{1}{2}$$

és így, ha megint azt az eljárást követjük, amelyet a mathematikai fogalmak bővítésénél mindig követni szoktunk, most azt mondhatjuk, hogy azon esetben, midőn ezen új módszerrel, az *arithmetikai közép módszerével* véges és meghatározott limeshez jutunk: ez a végtelen sor összege. Ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy az illető divergens sort az arithmetikai közepek módszerével szummáltuk és megkülönböztetésül a konvergens sor összegétől, a $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\sigma_n}{n}$ határértéket a sor *szummájának* mondjuk.

XI. FEJEZET.

POZITIV TAGÚ SOROK.

1. Pozitiv tagú sorok. Az összehasonlítás elve. A végtelen sorok konvergenciájának többször említett szükséges és elégséges feltétele, hogy $\lim\limits_{n=\infty} R_{n,k}=0$ legyen (egyenletesen k-ra nézve), ha n végtelenné válik és k pozitiv egész szám. De ezen kriterium alkalmazása a legtöbb esetben igen nagy nehézségbe ütközik, mert az $R_{n,k}$ áttekinthető alakban való előállítását követeli. Ezért szükséges, hogy könnyebben kezelhető kriteriumokat állítsunk fel. Ilyen egyszerű kriteriumot eddigelé csak egyet ismertettünk: a váltakozó előjelű sorok konvergenciájának eldöntésére szolgálót (251. lap). Most a pozitiv tagú sorokra vonatkozólag tárgyalunk néhány egyszerűen kezelhető konvergencia-kriteriumot. E sorokkal azért foglalkozunk behatóbban, mert legtöbbször sorok abszolut összetartását vizsgáljuk, már pedig abszolut értékekből alakított sor pozitiv tagú.

A pozitiv tagú sorokról tudjuk, hogy ezeknél a határozatlanság esete ki van zárva. Az ilyen sorok vagy konvergensek, vagy pedig a részletösszegek végtelenné válnak. Ugyanis, ha $u_1+u_2+u_3+\cdots$ pozitiv tagú végtelen sor, akkor az $s_1, s_2, s_3, \ldots$ részletösszegek monoton növekvő sorozatot alkotnak és így $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ vagy véges, vagy végtelen nagy.

A pozitiv tagú sorok vizsgálatát megkönnyíti a következő *összehasonlítási elv:*

1) *Ha a* $v_1+v_2+v_3+\cdots$ *sor összetartó és az* $u_1+u_2+u_3+\cdots$ *sor tagjai rendre (bizonyos n-től kezdve) nem nagyobbak a* $v_1+v_2+v_3+\cdots$ *megfelelő tagjainál, akkor az u sor is összetartó.*

2) *Ha pedig a* $v_1+v_2+v_3+\cdots$ *széttartó és az* $u_1+u_2+u_3+\cdots$ *tagjai rendre nem kisebbek a v sor megfelelő tagjainál (valamely n indextől kezdve), akkor az u sor is divergens.*

Az első tételt így bizonyíthatjuk be: Jelöljük $(v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+k})$-t $R_{n,k}$-val, $(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k})$-t pedig $R'_{n,k}$-val. Ha már most egy tetszés szerinti kis poz. ε adatik, akkor a v sorban elmehetünk olyan messzire, hogy azon túl $R_{n,k}<\varepsilon$ legyen minden n-re nézve akármekkora pozitiv egész szám legyen is a k; de az u sor tagjai feltételünk szerint kisebbek vagy akkorák, mint a v soréi, tehát egyúttal az u sorra vonatkozó maradéktagra is érvényes, hogy $R'_{n,k} < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy az u sor is konvergens.

A második tételt pedig így bizonyítjuk: Jelöljük a v sor első n tagjának összegét V_n-el, az u sorét pedig U_n-nel.* Ha egy tetszés szerinti nagy M szám adatik, akkor elmehetünk a v sorban olyan messzire, hogy azon túl $V_n > M$ legyen; de ekkor feltételünk szerint egyúttal U_n is nagyobb M-nél és így az $U_1, U_2, U_3, \ldots$ részletösszegek sorozata minden határon túl nő, vagyis az u sor is divergens.

2. A Cauchy-féle kriteriumok. A hiperharmonikus sor. *Ha van olyan 1-nél kisebb q szám, mely*

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots$$

pozitiv tagú sor két szomszédos tagjának hányadosánál:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

-nél valamely indextől kezdve mindig nagyobb, akkor az u sor konvergens; ha pedig ez a hányados egy bizonyos n-től kezdve mindig 1 *vagy* 1*-nél nagyobb, akkor a sor divergens.*

Ha ugyanis van olyan $q < 1$ szám, mely nagyobb minden $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ hányadosnál (bizonyos n-től kezdve), akkor

$$u_{n+1} < u_n q$$

és egyúttal: $\quad u_{n+2} < u_{n+1} q, \quad$ azaz: $\quad u_{n+2} < u_n q^2,$

$\qquad\qquad\qquad u_{n+3} < u_{n+2} q, \quad$ « $\quad u_{n+3} < u_n q^3$

s í. t., vagyis azon bizonyos indextől kezdve az $u_1+u_2+u_3+\cdots$ sor tagjai mind kisebbek az

$$u_n+u_n q+u_n q^2+u_n q^3+\cdots$$

végtelen geometriai sor tagjainál; de ez utóbbi konvergens, tehát az adott sor is konvergens.

A tétel második része a következőképen látható be: Bizonyos indextől kezdve, feltételünk szerint $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, $u_{n+3} \geq u_{n+2}$ s í. t., tehát ezen tagtól kezdve az adott sor tagjai nem fogynak és így a $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ egyenlőség sincs kielégítve, ami pedig a konvergenciának szükséges feltétele.

Ezt a kriteriumot a gyakorlatban legtöbbször egyszerűbb for-

* A két sorból azokat az első tagokat, melyekre nézve nem áll, hogy $u_n \geq v_n$, elhagyhatjuk és a két sort a konvergenciavizsgálat szempontjából azon taggal kezdhetjük, amelytől kezdve mindig $u_n \geq v_n$.

mában használjuk; olyan alakjában, amelyben eredetileg *d'Alembert*-től származik. Ez a *d'Alembert*-féle kriterium a következő:

Ha az $u_1+u_2+u_3+\cdots$ *végtelen sorra nézve* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *létezik és ez a számérték* 1*-nél kisebb, akkor a sor konvergens; ha pedig ez a limesz* 1*-nél nagyobb, akkor a sor divergens.*

Miként e fogalmazásból látjuk, a *d'Alembert*-kriterium szűkebb körre vonatkozik, mint a *Cauchy*-féle, mert ez utóbbinál nem kellett föltennünk, hogy két szomszédos tag hányadosának meghatározott limesze van.

A bizonyítás az előbbire vezethető vissza. Ugyanis, ha

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=c<1,$$

és c' a c-nél nagyobb, de azért 1-nél kisebb szám, akkor a határérték létezéséből következik, hogy elmehetünk az n-el olyan meszszire, hogy innen kezdve $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ minden n-re nézve c'-nél kisebb legyen. De ha $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ mindig kisebb egy, az 1-nél kisebb c' számnál, akkor a sor a *Cauchy*-kriterium értelmében konvergens.

A tétel második része szintén így bizonyítható be. Ha ugyanis $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k>1$, a limesz létezéséből következik, hogy bizonyos N-től kezdve minden n-re nézve $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, tehát ismét a *Cauchy*-kriterium értelmében a sor divergens.

Látjuk tehát, hogy ha $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, a sor konvergens, ha $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, a sor divergens. Ha ez a limesz azonban épen 1, akkor a sor konvergenciája felől ezzel az eljárással nem dönthetünk.

Mindjárt mutatunk is példákat, amelyekből kitűnik, hogy $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ lehet konvergens sornál és divergens sornál is. Így a harmonikus sorban, azaz ebben a sorban:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

az $\quad u_n=\frac{1}{n}\quad$ és $\quad u_{n+1}=\frac{1}{n+1},\quad$ tehát $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$

A sorról tudjuk, hogy divergens. Ellenben ez a sor (hiperharmonikus sor:

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots,$$

ahol $k>1$ és amelynél $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ szintén 1, konvergens.

Ugyanis vegyünk e sor helyett egy másikat, melynek tagjai nem kisebbek e sor megfelelő tagjainál, a következő módon: $\frac{1}{3^k}$ helyett tegyük a nála nagyobb $\frac{1}{2^k}$-t; továbbá $\frac{1}{5^k}$, $\frac{1}{6^k}$, $\frac{1}{7^k}$ mindegyike helyett a nagyobb $\frac{1}{4^k}$-t;

$$\frac{1}{9^k}, \frac{1}{10^k}, \dots \frac{1}{15^k}$$

7 tag mindenike helyett a nagyobb $\frac{1}{8^k}$-t s í. t., akkor az új sor a következő lesz:

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{8^k}+\dots+$$
$$+\frac{1}{8^k}+\frac{1}{16^k}+\dots+\frac{1}{16^k}+\dots$$

Ha erről a sorról kimutatjuk, hogy konvergens, akkor a sorok összehasonlítási elve alapján azt is megmutattuk, hogy az eredeti sor is konvergens. De ha e sorban az egyenlő tagokat összefoglaljuk,* akkor ezt az új sort kapjuk:

$$1+\frac{2}{2^k}+\frac{4}{4^k}+\frac{8}{8^k}+\dots$$

vagyis ezt: $$1+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{(2^{k-1})^2}+\frac{1}{(2^{k-1})^3}+\dots$$

azaz olyan végtelen geometriai sort kaptunk, melynek hányadosa: $\frac{1}{2^{k-1}}$ és minthogy feltételünk szerint $k>1$, tehát $\frac{1}{2^{k-1}}<1$ és így e sor valóban konvergens, amiből következik, hogy az ú. n. hiperharmonikus sor: $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^k}$ konvergens, ha $k>1$.

Most már tehát láttuk, hogy a $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^k}$ végtelen sor konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k=1$. Az is rögtön következik, hogy divergens akkor is, ha $k<1$, mert hiszen ez esetben a $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^k}$ minden tagja nagyobb a divergens $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}$ megfelelő tagjánál.

* Itt azt az általános elvet használjuk, hogy ha a Σu_n pozitiv tagú konvergens sor tagjait tetszés szerinti módon zárójelezzük, akkor az új sor is konvergens lesz és viszont, ha egy pozitiv tagú sor zárójelezve konvergens, akkor konvergens volt eredetileg is. A zárójelezés ugyanis abban nyilvánul, hogy az eredeti sor részletösszegei közül kiszemeljük az i_1-ik, i_2-ik, i_3-ik, . . . részletösszegeket, ahol $i_1<i_2<i_3$, . . . Könnyen beláthatjuk, hogy ha az $s_1, s_2, s_3, \dots$ monoton növekvő sorozat szabályos sorozat, akkor az $s_{i_1}, s_{i_2}, s_{i_3}, \dots$ is ilyen és viszont, és hogy a két sorozat limeszei megegyeznek. Másként: Ha a Σu_n pozitiv tagú sor divergens, akkor a belőle tetszés szerinti zárójelzéssel alkotott sor is divergens és viszont.

Összefoglalva ezeket az eredményeket, kimondhatjuk, hogy a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^k}$$

sor konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k\leq 1$.

3. A második Cauchy-kriterium. *A Σu_n sor konvergens, ha van olyan 1-nél kisebb pozitiv szám, mely nagyobb az $\sqrt[n]{u_n}$-nél, ha csak n nagyobb valamely N-nél; ellenben divergens a sor, ha végtelen sok olyan tagja van, amelyre nézve $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$.*

Ugyanis, ha $\sqrt[n]{u_n}$ kisebb c-nél ($c<1$), akkor $u_n<c^n$, tehát a Σu_n tagjai (bizonyos N-től kezdve) kisebbek az $1+c+c^2+c^3+\cdots$ geometriai sor tagjainál. Minthogy pedig $c<1$, tehát ez a geometriai sor konvergens és így a Σu_n is konvergens.

Ha pedig végtelen sok olyan tagja van a sornak, melynél $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$, akkor $u_n\geq 1$ egyenlőtlenség áll fenn végtelen sok n-re nézve, tehát nem lehet teljesítve a konvergenciának $\lim u_n=0$ szükséges feltétele, a sor tehát divergens.

Ez a kriterium abban is különbözik az előbbitől, hogy benne a sornak csak egy tagja szerepel; nem úgy, mint előbb, ahol két tag hányadosa fordult elő.

Abban az esetben, midőn $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{u_n}$ létezik, ez a kriterium is egyszerűbb alakot ölt. Ugyanis, ha $\lim\sqrt[n]{u_n}<1$, *akkor a sor konvergens, ha pedig* $\lim\sqrt[n]{u_n}>1$, *a sor divergens.*

Az első esetben így bizonyíthatjuk be állításunkat: Ha $\lim\sqrt[n]{u_n}=c<1$, akkor vegyünk egy c' számot a c és 1 között. A limesz létezéséből következik, hogy bizonyos N-től kezdve $\sqrt[n]{u_n}<c'$, tehát az általános kriterium alapján sorunk konvergens. Ha pedig $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$, akkor a limesz létezéséből következik, hogy bizonyos N-től kezdve $\sqrt[n]{u_n}>1$, tehát a sor divergens.

A konvergencia, illetőleg divergencia tekintetében a kérdéses limesz alapján nem dönthetünk abban az esetben, midőn $\lim\sqrt[n]{u_n}=1$. Így például a $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n^k}$ hiperharmonikus sor esetében

$$\log\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}}=-\frac{k\log n}{n}$$

és így $\lim\limits_{n=\infty}\log\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}}=0$, miből: $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}}=1$.

Ha $k\leq 1$ a sor divergens, ha $k>1$, akkor pedig konvergens, holott mindig $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$.

Még megjegyezzük, hogy ha a d'Alembert-féle kritériumban szereplő határérték, azaz

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

létezik, akkor egyúttal létezik a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

is és e két határérték megegyezik. Ezt az érdekes tételt bebizonyítottuk már (L. I. kötet 89. lap). Ehhez most csak azt a megjegyzést akarjuk fűzni, hogy ez az állítás nem fordítható meg. Ugyanis meglehet, hogy $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n}$ létezik, de $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ nem létezik. Így például, ha a és b egymástól különböző pozitiv számok és $u_{2n}=a^n b^n$, $u_{2n+1}=a^n b^{n+1}$, ha $n=1,2,3,\ldots$, akkor $\lim\limits_{m=\infty} \frac{u_{m+1}}{u_m}$ nem létezik, mert ha m páros, akkor $\frac{u_{m+1}}{u_m}=b$, ha pedig m páratlan, akkor $\frac{u_{m+1}}{u_m}=a$; ellenben, ha m páros, akkor $\sqrt[m]{u_m}=(ab)^{\frac{1}{2}}$; ha m páratlan, akkor $\sqrt[m]{u_m}=(ab)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2m}} b^{\frac{1}{2m}}$ és így:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{u_m}=(ab)^{\frac{1}{2}}.$$

4. A sorok összehasonlításának más módja. *Ha a Σv_n pozitiv tagú sor konvergens és a Σu_n pozitiv tagú sor szomszédos tagjai bizonyos indextől kezdve ilyen egyenlőtlenségeket elégítenek ki:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

akkor a Σu_n is konvergens.

Ha pedig Σv_n divergens és a Σu_n sor tagjaira az

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

egyenlőtlenségek állnak, akkor a Σu_n is divergens.

Ugyanis, ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

akkor:
$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

és így:
$$u_{n+1} \leq v_{n+1} \frac{u_n}{v_n}$$

Épen így:
$$u_{n+2} \leq v_{n+2} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq v_{n+2} \frac{u_n}{v_n}$$

s í. t. általában:
$$u_{n+k} \leq v_{n+k} \frac{u_n}{v_n}\cdot$$

De a $v_1+v_2+v_3+\cdots$ sor konvergens, tehát ha tagjait $\frac{u_n}{v_n}$ meghatározott számértékkel szorozzuk, szintén konvergens sort kapunk és így a sorok eredeti összehasonlítási elve alapján következtetve, a Σu_n sor is konvergens.

E kriterium második része pedig így hangzott: Ha a Σv_n divergens és a Σu_n sornál bizonyos tagtól kezdve:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

akkor a Σu_n sor is divergens. Ugyanis az előbbihez hasonlóan:

$$u_{n+1} \geq v_{n+1} \frac{u_n}{v_n}$$

$$u_{n+2} \geq v_{n+2} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geq v_{n+2} \frac{u_n}{v_n}$$

s általában:

$$u_{n+k} \geq v_{n+k} \frac{u_n}{v_n},$$

tehát a Σu_n sor tagjai bizonyos tagtól kezdve rendre nagyobbak az $\frac{u_n}{v_n} \Sigma v_m$ divergens sor tagjainál; tehát a Σu_n valóban divergens.

5. Néhány konvergens (divergens) sor készítése. Legyen az $f(x)$ egy tetszés szerinti korlátlanul és monoton növekvő pozitiv függvény; ekkor tehát az

$$f(1),\ f(2),\ f(3), \ldots f(n), \ldots$$

monoton növekvő korlátlan számsorozat, $\lim\limits_{n=\infty} f(n)=\infty$.

Ebből készítsük a következő végtelen sort:

$$[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\cdots+[f(n+1)-f(n)]+\cdots$$

Tagjai pozitivok és az n-ik részletösszege:

$$s_n = f(n+1)-f(1),$$

tehát s_n az n-el végtelenné válik. A $\sum\limits_1^\infty [f(n+1)-f(n)]$ sor tehát divergens.

Ha pedig a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)}\right)$$

pozitiv tagú végtelen sort készítjük, akkor

$$s_n = \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(n+1)},$$

tehát $\lim s_n = \frac{1}{f(1)}$, vagyis a felírt sor konvergens.

Ha tehát $f(x)$ pozitiv monoton növekvő függvény és $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=\infty$, akkor a

$$\Sigma[f(n+1)-f(n)]$$

divergens, a

$$\sum\left[\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)}\right]$$

pedig konvergens.

Hasonlóképpen mutathatjuk meg, de az előbbiből is következik, hogy ha $\varphi(x)$ monoton csökkenő függvény és $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x)=0$, akkor a $\Sigma[\varphi(n-1)-\varphi(n)]$ sor konvergens és a $\sum\left[\frac{1}{\varphi(n)}-\frac{1}{\varphi(n-1)}\right]$ divergens.

Lássuk ezen eljárás alkalmazását néhány példán. *1. Példa.* Legyen a monoton növekvő függvény: $\log x$. Előbbi tételünk szerint tehát a

$$\Sigma[\log(n+1)-\log n]$$

sor divergens. Ha $\log(n+1)-\log n$-re az

$$f(b)-f(a)=f'[a+\vartheta(b-a)](b-a)$$

középértéktételt alkalmazzuk, akkor azt találjuk, hogy:

$$\log(n+1)-\log n=\frac{1}{n+\vartheta_n},\qquad 0<\vartheta_n<1,$$

tehát a $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n+\vartheta_n}$ sor divergens. Ebből nyomban következik, hogy a $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n}$ is divergens, mert $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+\vartheta_n}$.

2. Példa. Legyen a monoton növekvő $f(x)$ függvény: $\log\log x$ [csak e^e-nél nagyobb x-eket vegyünk figyelembe]. Eszerint a

$$\Sigma[\log\log(n+1)-\log\log n]$$

divergens. Alkalmazzuk ismét a középértéktételt:

$$\log\log(n+1)-\log\log n=\frac{1}{(n+\vartheta_n)\log(n+\vartheta_n)},\qquad 0<\vartheta_n<1.$$

Arra jutottunk, hogy a $\sum\limits_3^\infty\frac{1}{(n+\vartheta_n)\log(n+\vartheta_n)}$ sor divergens. Ebből ismét azonnal következik, hogy a

$$\sum_3^\infty\frac{1}{n\log n}$$

végtelen sor divergens.

3. Példa. Tekintsük most a monoton csökkenő $f(x)=x^{-\alpha}$ függvényt, ahol α pozitiv. Itt teljesítve van a $\lim\limits_{x=\infty}f(x)=0$ kívánság is. Erre alkalmazva előbbi megjegyzésünket, azt látjuk, hogy a $\Sigma[n^{-\alpha}-(n+1)^{-\alpha}]$ sor konvergens. De a középértéktétel szerint

$$n^{-\alpha}-(n+1)^{-\alpha}=\frac{\alpha}{(n+\vartheta_n)^{1+\alpha}},$$

ahol ϑ_n pozitiv, 1-nél kisebb szám. Eszerint tehát a $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{(n+\vartheta_n)^{1+\alpha}}$ sor konvergens és ebből nyomban következik ismét, hogy a

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

is konvergens, mert

$$\frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}<\frac{1}{(n+\vartheta_n)^{1+\alpha}}.$$

4. Példa. Ha $f(x)$ gyanánt a $(\log x)^{-\alpha}$-t választjuk ($\alpha>0$) és megint figyelembe vesszük, hogy:

$$(\log n)^{-\alpha}-[\log(n+1)]^{-\alpha}=\frac{\alpha}{(n+\vartheta_n)[\log(n+\vartheta_n)]^{\alpha+1}},$$

akkor következik, hogy a

$$\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\alpha}}$$

végtelen sor konvergens, akárminő kis pozitiv szám az α.

A már ismert eredményeken kívül (a harmonikus sor divergenciája és a hiperharmonikus sor konvergenciája) most arra jutottunk, hogy a

$$\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

sor divergens, ellenben, ha α tetszés szerinti pozitiv számot jelent, a

$$\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\alpha}}$$

konvergens.

E két sorra vonatkozólag a Cauchy-féle vagy a D'Alembert-féle kritériumok felmondják a szolgálatot, mert mindkét esetben $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

6. Az összetartás (széttartás) fokozatai. Már láttuk, hogy a Σu_n pozitiv tagú konvergens sorból új konvergens sorokat állíthatunk elő, ha tagjait rendre $c_1, c_2, c_3, \ldots$ pozitiv számokkal szorozzuk, melyek felső határa véges; éppen így a pozitiv tagú divergens Σb_n sorból a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ pozitiv számokkal való szorzással ismét divergens sort kapunk, ha a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozat alsó határa 0-nál nagyobb.

Vagy más szóval: Ha a Σu_n konvergens és $\frac{a_n}{u_n}$ bizonyos n-től kezdve az M számnál kisebb, akkor Σa_n is konvergens és ha Σv_n divergens és $\frac{b_n}{v_n}$ az m pozitiv számnál nagyobb, akkor Σb_n is divergens (u_n, a_n, v_n, b_n mind pozitivok).

Ha az $\frac{a_n}{u_n}$ számok mind kisebbek a pozitiv M-nél és még alsó határuk 0-nál nagyobb, akkor a Σa_n konvergenciáját ugyanolyan rangúnak mondjuk, mint a Σu_n-ét és ha a $\frac{b_n}{v_n}$ számok nemcsak egy pozitiv m-nél nagyobbak, hanem még ezenkívül felső határuk véges, akkor a Σb_n divergenciáját ugyanolyan rangúnak tekintjük, mint a Σv_n-ét.

Két pozitiv tagu végtelen sor tehát egyenlő rangúan konvergens (divergens), ha bizonyos n-től kezdve, tagjaik hányadosa két véges pozitiv szám közé esik.

Meglehet azonban, hogy ha a Σu_n konvergens sor tagjait rendre a korlátlanul növekvő

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

sorozat tagjaival szorozzuk, az új $\Sigma c_n u_n$ sor mégis konvergens marad. Ilyenkor tehát a második sorról [$c_n u_n = a_n$ téve], a Σa_n tagjairól, nem mondhatjuk, hogy $\frac{a_n}{u_n}$ egy véges számon alul marad, hanem ellenkezőleg $\frac{a_n}{u_n}$ végtelenné válik.* Akkor a Σa_n konvergens sorról azt mondjuk, hogy konvergenciája alacsonyabb rendű a Σu_n konvergenciájánál.

* *Landau* jelölésével: Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ pozitiv függvények, melyek x-szel végtelenekké válnak, de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ mindig egy véges M-en alul marad, így írjuk: $f(x) = O[\varphi(x)]$. Ha pedig $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, akkor $f(x) = o[\varphi(x)]$. O és o az ordo szó kezdőbetűi.

Éppen így, ha Σv_n divergens és tagjait a zérushoz tartó pozitiv $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozat tagjaival szorozzuk $[\lim c_n = 0]$, lehetséges, hogy az új sor: Σb_n $[b_n = c_n v_n]$ szintén divergens. Ekkor divergenciáját a Σv_n divergenciájánál alacsonyabb rangúnak mondjuk.

A pozitiv tagú konvergens Σa_n sor konvergenciája alacsonyabb rendű a Σu_n sorénál, ha $\frac{a_n}{u_n}$ korlátlanul nő; a divergens Σb_n sor divergenciája alacsonyabb rendű a Σv_n-énál, ha $\lim\limits_{n=\infty} \frac{b_n}{v_n} = 0$.

Azt állítjuk, hogy minden pozitiv tagú konvergens (divergens) sorból alkothatunk alacsonyabb rendű konvergens (divergens) sort.

Ugyanis legyen a Σa_n egy tetszés szerinti pozitiv tagú divergens sor. Szorozzuk meg a Σa_n n-ik tagját

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{s_{n-1}} + \sqrt{s_n}}$$

-nel, ahol s_n a Σa_n n-ik részletösszege (a gyökök pozitiv értékei vétetnek). A Σa_n divergens, tehát $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$. Minthogy pedig

$$a_n = s_n - s_{n-1},$$

tehát:
$$c_n a_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{\sqrt{s_n} + \sqrt{s_{n-1}}} = \sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}}.$$

Az így keletkezett $\Sigma(\sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}})$ sor divergens. Ugyanis

$$\sum_2^m (\sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}}) = \sqrt{s_m} - \sqrt{s_1}, \quad \text{tehát} \quad \sum_2^m (\sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}})$$

m-mel együtt végtelen naggyá lesz.

Látjuk tehát, hogy a Σa_n divergens sorból a $\Sigma c_n a_n = \Sigma(\sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}})$ divergens sort állítottuk elő oly módon, hogy tagjait rendre olyan $c_1, c_2, c_3, \ldots$ számokkal szoroztuk, melyekre nézve $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$. Az új sor divergenciája tehát alacsonyabb rendű, mint az eredetié volt.

Ha pedig a pozitiv tagú Σa_n sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, ahol R_n az $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ maradéktagot jelenti. Ha most meg $\varphi(x)$ gyanánt olyan monoton csökkenő függvényt képzelünk, melyre $\varphi(n) = \sqrt{R_n}$, akkor $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = 0$ és a

$$\sum_1^\infty [\varphi(n) - \varphi(n+1)]$$

konvergens. Szorozzuk meg a_n-et, vagyis az $R_n - R_{n+1}$-et a

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n+1}}}$$

-el, melyről tudjuk, hogy $\lim c_n = \infty$.

$$c_n a_n = \frac{R_n - R_{n+1}}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n+1}}} = \sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}},$$

tehát a $\Sigma c_n a_n$ sor is konvergens, bár a c_n szorzó számok korlátlanul növekesznek.

Megmutattuk tehát, hogy a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ korlátlanul növekvő faktorok úgy választhatók, hogy általuk egy megadott pozitiv tagú konvergens sorból megint konvergens sor válik. Ha e faktorokat erősebben növekedőknek választjuk, akkor természetesen a Σa_n konvergens sorból divergens $\Sigma c_n a_n$ sor válhatik. *Megmutatjuk már most, hogy egy megadott monoton és korlátlanul növekvő*

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$$

sorozathoz mindig készíthető egy Σa_n konvergens sor oly módon, hogy a $\Sigma c_n a_n$ divergens legyen.

A c számok mind pozitivoknak képzelhetők. Válasszuk a $d_1, d_2, d_3, \dots$ pozitiv számokat úgy, hogy

$$d_n = \sqrt{c_{n-1}}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

legyen. Ekkor a d számok korlátlanul növekedő monoton sort alkotnak, tehát a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n+1}}\right)$$

konvergens és a

$$\Sigma(d_{n+1} - d_n)$$

divergens. Az utóbbi sor az előbbiből úgy keletkezik, hogy az n-ik tagot $d_n d_{n+1}$-el szorozzuk. De $d_n d_{n+1} = \sqrt{c_{n-1} c_n} < c_n$. Ha tehát a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n+1}}\right)$$

konvergens sor tagjait rendre $c_1, c_2, c_3, \dots$ faktorokkal szorozzuk, akkor olyan sort kapunk, melynek n-ik tagja a $d_{n+1} - d_n$-nél nagyobb, tehát okvetlenül divergens.

Látjuk tehát, hogy ha $c_1, c_2, c_3, \dots$ monoton növekvő sorozat és $\lim c_n = \infty$, akkor készíthetünk egy Σa_n konvergens sort úgy, hogy a $\Sigma c_n a_n$ már divergens legyen.

7. **Hadamard tétele.** Ezzel kapcsolatban fölvethetjük azt a valós tagú sorokra vonatkozó kérdést, *hogyan kell a $c_1, c_2, c_3, \dots$ (reális) szorzó számokat választanunk, hogy ha egy tetszés szerinti konvergens Σa_n sor adatik [és pedig nem éppen pozitiv tagú sor], a $\Sigma c_n a_n$ is mindig konvergens legyen?*

Ha $c_1, c_2, c_3, \dots$ korlátos sorozat, azaz minden n-re $|c_n| < M$ és az adott sor abszolut konvergens, akkor nyilván a $\Sigma c_n a_n$ is konvergens; mert hiszen e sor maradéktagja:

$$r_{nk} = c_{n+1} a_{n+1} + \dots + c_{n+k} a_{n+k} \quad \text{és így} \quad |r_{nk}| < M(|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|).$$

De ha az adott sor nem abszolut konvergens, már ezt nem mondhatjuk. (Igy például, miként már más helyen említettük, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konvergens sor és ha tagjait rendre az $1, -1, +1, -1, \dots$ számokkal szorozzuk, divergens sort kapunk.) Látjuk tehát, hogy a $c_1, c_2, \dots$ sorozat korlátossága még nem elég ahhoz, hogy minden Σa_n konvergens sorból konvergens $\Sigma c_n a_n$ sor keletkezzék. Másrészt elégséges, de nem szükséges, hogy a $c_1, c_2, c_3, \dots$ szorzók pozitivok legyenek és fogyó sorozatot alkossanak és $\lim c_n = 0$ legyen. Ekkor ugyanis, mint már láttuk (Abel tétele a 264. lapon), a Σa_n konvergenciájából következik a $\Sigma a_n c_n$ konvergenciája. De már egy más, megfelelő tétel is rendelkezésünkre áll: Ugyanis a 263. lapon láttuk, hogy ha Σa_n konvergens és $\Sigma |c_n - c_{n-1}|$ is konvergens, akkor a $\Sigma c_n a_n$ is konvergens. (Dedekind tétele.)

Már most azt állítjuk — és ebben van a *Dedekind*-tétel nagy jelentősége, — hogy *annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\Sigma c_n a_n$ mindig konvergens legyen, bárminő is a Σa_n konvergens sor, az, hogy a $\Sigma(c_n - c_{n+1})$ abszolut konvergens legyen.* Hogy ez a feltétel elégséges, azt tudjuk, hiszen ez éppen a *Dedekind*-tétel. Csak azt kell megmutatnunk, hogy szükséges is.

Először is megjegyezzük, hogy a c_n számok sorozata nem lehet korlátlan, mert ez esetben alakítható volna a c számokból legalább egy

$$c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, \dots$$

pozitiv sorozat, mely monoton növekednék minden határon túl [vagy esetleg olyan negativ sorozat, mely monoton fogyna $-\infty$-ig]. De ekkor találhatnánk ehhez a 6. pont szerint pozitiv

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots$$

számokat úgy, hogy Σa_n konvergens és $\Sigma c_n a_n$ divergens lenne [n jelenti az $i_1, i_2, i_3, \dots$ indexeket]. Ha a hiányzó indexeknek megfelelő a számokat 0-oknak vesszük, akkor tehát konstruálhattuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens sort úgy, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ divergens legyen. Így tehát a c szorzók nem teljesítenék azt a követelést, hogy *minden* konvergens Σa_n sorból konvergens $\Sigma c_n a_n$ sort alkossanak.

A $c_1, c_2, c_3, \dots$ számok tehát felül és alul korlátosak és így a $\Sigma(c_n - c_{n+1})$ csak konvergens sor, vagy határozatlan (ingadozó) lehet, mert $s_n = c_1 - c_n$ mindig felül és alul korlátos.

Azt akarjuk bebizonyítani, hogy ha a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozat *minden* konvergens Σa_n sorból konvergens $\Sigma c_n a_n$ sort létesít, akkor a $\Sigma | c_n - c_{n+1} |$ sornak konvergensnek kell lennie. Kimutatjuk, hogy az ellenkező feltevésből, vagyis abból, hogy a $\Sigma | c_n - c_{n+1} |$ divergens, következik, hogy van olyan Σa_n konvergens sor, melyből a $c_1, c_2, c_3, \dots$ tényezőkkel a divergens $\Sigma c_n a_n$ sor keletkezik.

Tegyük fel tehát, hogy $\Sigma | c_n - c_{n+1} |$ divergens. Ebből következik, hogy a $\Sigma(c_n - c_{n+1})$ sor pozitiv tagjai és negativ tagjai különválasztva, divergens sorokat alkotnak; mert ha mindkettő konvergens lenne, a sor abszolut konvergens lenne; ha egyik divergens, a másik konvergens volna, akkor a $| \Sigma(c_n - c_{n+1}) |$ végtelen volna, vagyis $\lim | c_n | = \infty$ volna.

Jelöljük i-vel a $\Sigma(c_n - c_{n+1})$ pozitiv tagjainak megfelelő indexeket és k-val a negativ tagokét. Ekkor tehát a

$$\Sigma(c_i - c_{i+1}) \quad \text{és a} \quad -\Sigma(c_k - c_{k+1})$$

pozitiv tagú sorok divergensek. Eszerint találhatunk olyan monoton 0-hoz konvergáló t_i pozitiv számokat, amelyekkel az első sor tagjai szoroztatván, még mindig divergens sorra jutunk. És éppen így olyan t_k monoton csökkenő, 0-hoz konvergáló számokat, melyekkel a második sor tagjai szoroztatván, még mindig divergens sort kapunk. A

$$\Sigma t_i (c_i - c_{i+1}) \quad \text{és} \quad \Sigma(-t_k)(c_k - c_{k+1}) \tag{α}$$

pozitiv tagú sorok tehát divergensek és így összegük is divergens. Ha a t_i és $(-t_k)$ számokat az indexeik sorában rendre $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$-mal jelöljük, akkor a τ számok sorozatáról tudjuk, hogy $\lim \tau_n = 0$. Az $\alpha)$ alatti két divergens sor most már egybefoglalva így írható:

$$\Sigma \tau_n (c_n - c_{n+1}),$$

és az n-ik részletösszeg

$$s_n = \tau_1 (c_1 - c_2) + \tau_2 (c_2 - c_3) + \dots + \tau_n (c_n - c_{n+1}),$$

még így is írható:

$$s_n = \tau_1 c_1 + c_2 (\tau_2 - \tau_1) + c_3 (\tau_3 - \tau_2) + \dots + c_n (\tau_n - \tau_{n-1}) - c_{n+1} \tau_n.$$

Az s_n minden határon túl nő, tehát, minthogy $\tau_1 c_1$ és $c_{n+1} \tau_n$ egy meghatározott véges számnál kisebbek [az utóbbi azért, mert c_{n+1} korlátos és $\lim \tau_n = 0$], tehát egyúttal a

$$\sigma_n = c_2(\tau_2-\tau_1) + c_3(\tau_3-\tau_2) + \cdots + c_n(\tau_n-\tau_{n-1})$$

is végtelenné válik az n-el, vagyis a

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n(\tau_n-\tau_{n-1})$$

végtelen sor divergens. A $\sum_{2}^{\infty}(\tau_n-\tau_{n-1})$ ellenben konvergens, mert az első n tag összege $\tau_{n+1}-\tau_1$, ahol $\lim \tau_{n+1}=0$.

Íme tehát abból a föltevésből, hogy a $\Sigma(c_n-c_{n+1})$ nem abszolut konvergens, következett, hogy van olyan $\Sigma(\tau_n-\tau_{n-1})$ konvergens sor, melyből a $c_1, c_2, c_3, \ldots$-mal való szorzással a $\Sigma c_n(\tau_n-\tau_{n-1})$ divergens sor keletkezett. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a *Dedekind*-féle tétel megfordítható, vagyis *hogy minden Σa_n konvergens sorból $\Sigma c_n a_n$ konvergens sor keletkezzék, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\Sigma(c_n-c_{n+1})$ abszolut konvergens legyen.**

8. Monoton sorok konvergenciája. A Σa_n konvergenciájának egy szükséges feltétele, hogy $\lim a_n = 0$ legyen. Ha a sor tagjai pozitivok, még többet is mondhatunk; t. i.: *ha*

$$\lim_{n=\infty} n a_n$$

létezik, ez nem lehet 0-tól különböző. Ha ugyanis $\lim\limits_{n=\infty} n a_n = A > 0$ volna és A' egy tetszés szerinti pozitiv, A-nál kisebb szám, akkor elmehetünk az n-el olyan messzire, hogy azon túl minden

$$n a_n > A'$$

legyen, vagyis $a_n > \frac{A'}{n}$, tehát az adott sor tagjai bizonyos n-től kezdve mindannyian nagyobbak az A'-el szorzott harmonikus sor tagjainál; miből következik, hogy $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n$ is divergens.

Ha tehát a pozitiv tagú Σa_n tagjaira nézve $\lim\limits_{n=\infty} n a_n$ létezik, akkor a konvergenciának szükséges feltétele, hogy ez a limesz 0 legyen. De ez a feltétel még mindig nem elegendő. Egy példán mutatjuk meg, hogy $\lim\limits_{n=\infty} n a_n = 0$ és a sor mégis divergens. Ilyen sor: $\sum \frac{1}{n \log n}$, melyről már tudjuk, hogy divergens, bár

$$\lim_{n=\infty} n \cdot \frac{1}{n \log n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} = 0.$$

E szerint tehát, ha a Σa_n pozitiv tagú sor konvergens, két eset lehetséges: Vagy $\lim\limits_{n=\infty} n a_n = 0$, vagy $\lim\limits_{n=\infty} n a_n$ nem létezik.

* *Hadamard:* Deux théorèmes d'Abel etc. Acta Math. 27.

Pozitiv tagú konvergens *monoton csökkenő* sor esetében a második eset nem lehetséges. Kimutatjuk ugyanis, hogy ha *a Σa_n monoton csökkenő pozitiv tagokból álló konvergens sor, akkor mindenesetre:*

$$\lim_{n=\infty} na_n = 0,$$

vagyis *a pozitiv tagú monoton csökkenő sorokra nézve az összetartásnak szükséges feltétele nemcsak az, hogy $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ legyen, hanem ezen felül az, hogy $\lim\limits_{n=\infty} na_n = 0$ legyen.*

Ha ugyanis ez nem volna teljesítve, akkor az

$$a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots na_n, \ldots$$

számoknak volna a 0-tól különböző (tehát pozitiv) sűrűsödési helyük is; azaz volna olyan pozitiv A, melynél végtelen sok na_n nagyobb volna. Legyen a fönti sorozatban az első ilyen, A-nál nagyobb szám: $n_1 a_{n_1}$; tehát

$$n_1 a_{n_1} > A.$$

A $2n_1$-iken túl is van ilyen na_n (mert hiszen végtelen sok van). Legyen a $2n_1$-iken túl levők közül az első az n_2 indexű, melyre nézve

$$n_2 a_{n_2} > A \qquad n_2 > 2n_1.$$

Épen így: $$n_3 a_{n_3} > A \qquad n_3 > 2n_2$$

s í. t. Így tehát: $a_{n_2} > \frac{A}{n_2}$; de a sor monoton csökkenő; tehát az a_{n_2} előtti tagok is mind nagyobbak $\frac{A}{n_2}$-nél. Az n_1-ik tagtól az n_2-ik tagig (bezárólag) $n_2 - n_1$ tag van és minthogy $n_2 > 2n_1$, tehát e tagok száma $\frac{n_2}{2}$-nél nagyobb; e tagok összege tehát nagyobb $\frac{A}{2}$-nél. Épen így mutatjuk meg, hogy az n_2-ik tagtól az n_3-ik tagig terjedő rész összege is nagyobb $\frac{A}{2}$-nél s í. t., miből következik, hogy a Σa_n sor divergens. Ezzel bebizonyítottuk, hogy monoton csökkenő sor csakis akkor lehet konvergens, ha $\lim\limits_{n=\infty} na_n = 0$.

Ha azonban a pozitiv tagú sor nem monoton csökkenő, akkor a konvergenciájának ilyen szükséges feltétele nincsen. Akkor is konvergens lehet, ha $\lim\limits_{n=\infty} na_n$ nem létezik. *Általában kimutatjuk, hogy ha a sor nem monoton csökkenő, akkor a konvergenciának semmiféle ilyen alakú szükséges feltétele nincsen.* Azaz: Ha $\varphi(n)$ megadott tetszés szerinti, az n-el monoton növekedő korlátlan függvény, akkor mindig található olyan pozitiv tagú konvergens sor, melyre nézve a

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n)\, a_n = 0$$

nincs teljesítve. Ilyen végtelen sor igen könnyen konstruálható.

Ugyanis legyen $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots$ egy tetszés szerinti pozitiv tagú konvergens sor. Elmehetünk n-el olyan messze, hogy $\frac{1}{\varphi(n)}<\alpha_1$ legyen; mert hiszen $\varphi(n)$ az n-nel korlátlanul nő. Mondjuk, hogy ez teljesítve van, ha $n=n_1$; azaz: $\frac{1}{\varphi(n_1)}<\alpha_1$. Épen így legyen az n_1+1-nél nagyobb n_2-re: $\frac{1}{\varphi(n_2)}<\alpha_2$, az n_2+1-nél nagyobb n_3-ra: $\frac{1}{\varphi(n_3)}<\alpha_3,\ldots$ És most készítsük el azt a sort, melynek n_1-ik tagja: $\frac{1}{\varphi(n_1)}$, n_2-ik tagja: $\frac{1}{\varphi(n_2)}$ s í. t., és ha n különbözik az $n_1, n_2, n_3, \ldots$ indexektől, az n-ik tagja legyen pl. $\frac{1}{n^2\varphi(n)}$. Ez mindenesetre konvergens sor; mert hiszen a tagjai rendre kisebbek mint az adott $\sum\alpha_n$ tagjai, illetőleg akkorák, mint a $\sum\frac{1}{n^2\varphi(n)}$ konvergens sor tagjai. Ha az így készitett sor tagjait $a_1, a_2, a_3, \ldots$-al jelöljük, akkor azt látjuk, hogy a

$$\varphi(n)\,a_n$$

szorzat $\frac{1}{n^2}$, ha $n\neq n_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ és 1, ha $n=n_i$, tehát $\lim\limits_{n=\infty}\varphi(n)\,a_n$ nem létezik.

Kimutattuk tehát, hogy ha $\varphi(n)$ tetszés szerinti korlátlanul növekvő függvény, mindig található hozzá olyan pozitiv tagu konvergens sor, melyre nézve a $\lim\limits_{n=\infty}\varphi(n)\,a_n=0$ nincs teljesítve, vagyis a pozitiv tagú sor konvergenciájának nincsen olyanféle szükséges feltétele, hogy a tagjainak egy monoton korlátlanul növekvő számsorozat megfelelő tagjaival való szorzatai 0-hoz konvergáljanak.

Másként áll a dolog monoton csökkenő sorra nézve. Ilyen sor konvergenciájának szükséges feltétele, miként láttuk: $\lim\limits_{n=\infty}na_n=0$. Kérdés, van-e ezenkívül más, ilyen fajta szükséges feltétel:

$$\lim_{n=\infty}n\varphi(n)\,a_n=0,$$

ahol $\varphi(n)$ korlátlanul növekedő függvény? [ha $\varphi(n)$ korlátos volna, akkor ez nem mondana egyebet, mint a $\lim na_n=0$]. Megmutatjuk, hogy ilyen általános konvergencia-kriterium nincsen.

Legyen $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots$ egy tetszés szerinti pozitiv tagu monoton csökkenő konvergens sor. Minthogy $\varphi(n)$ korlátlanul nő, tehát meghatározhatjuk n_1-et úgy, hogy $\frac{1}{\varphi(n_1)}<\alpha_1$ legyen. Válasszuk már most n_2-t úgy, hogy $n_2>2n_1$ legyen és $\frac{1}{\varphi(n_2)}<\alpha_2$; továbbá n_3-at úgy, hogy $n_3>2n_2$ legyen és $\frac{1}{\varphi(n_3)}<\alpha_3$ s í. t.

Képezzük most a következő sorozatot:

$$a_{n_1}=\frac{1}{n_1\varphi(n_1)},\quad a_{n_2}=\frac{1}{n_2\varphi(n_2)},\quad a_{n_3}=\frac{1}{n_3\varphi(n_3)},\dots$$

E számok csökkenőek. A hézagokat töltsük ki így: $a_1, a_2, \dots a_{n_1-1}$ mind egyenlő legyen a_{n_1}-el; az első n_1 tag összege tehát kisebb, mint α_1. Az n_1 és n_2-ik közötti tagok, melyek száma n_2-nél kisebb, mind egyenlők legyenek a_{n_2}-vel; e tagok összege tehát kisebb $n_2\frac{1}{n_2\varphi(n_2)}$-nél, vagyis kisebb α_2-nél s í. t. A sor tehát, amelyet az $a_1, a_2, a_3, \dots$ monoton csökkenő (nem növekvő) számsorozatból megalkottunk, konvergens. Végtelen sok n indexre áll azonban:

$$n\varphi(n)\,a_n=1,$$

tehát a $\lim\limits_{n=\infty} n\varphi(n)\,a_n=0$ nincs teljesítve.

Láttuk, hogy $\lim\limits_{n=\infty} na_n=0$ a pozitiv tagú Σa_n sor konvergenciájának általánosságban nem szükséges feltétele, azaz lehet a sor konvergens, bár $\lim\limits_{n=\infty} na_n$ nem is létezik. De mégis egyet megjegyzünk: Az na_n számok több helyen sűrűsödhetnek; de egyik sűrűsödési hely okvetlenül a 0.

Ez más szóval azt jelenti, hogy bármily kis pozitiv szám legyen is az ε, végtelen sok olyan tagja van a sornak, melyre nézve $na_n<\varepsilon$. Sőt általánosabban: Ha $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots$ tetszés szerinti pozitiv tagú divergens sor és a pozitiv tagú Σa_n sor konvergens, akkor az $\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_3}{\alpha_3}, \dots$ egyik sűrűsödési helye (a limes inferior $n=\infty$-re) mindenesetre a 0. Ugyanis ha e sűrűsödő helyek között a 0 nem foglaltatnék, akkor volna olyan pozitiv A szám, melynél — véges számútól eltekintve — minden $\frac{a_n}{\alpha_n}$ nagyobb volna. De ha

$$\frac{a_n}{\alpha_n}>A,$$

akkor a Σa_n tagjai bizonyos indextől kezdve nagyobbak a divergens $A\Sigma\alpha_n$ tagjainál; tehát Σa_n is divergens volna. Ha $\alpha_n=\frac{1}{n}$, akkor $\Sigma\alpha_n$ divergens és így a most bizonyított állítás azon speciális esetére jutunk, hogy az na_n számok egyik sürűsödő helye: 0. Legyen $\alpha_n=\frac{1}{n\log n}$ és a pozitiv tagú Σa_n konvergens, akkor végtelen sok olyan a_n van, melyre nézve $n\log n\,.\,a_n<\varepsilon$, ha ε tetszés szerinti pozitiv szám, mert $\sum\frac{1}{n\log n}$ divergens.

9. Bertrand-féle sorok. A $\sum\frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens. Azt is tudjuk, hogy

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

szintén divergens, bár tagjai az előbbi sor tagjaiból úgy keletkeztek, hogy azokat a zérushoz konvergáló $\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 3}, \dots \frac{1}{\log n}, \dots$ sorozat tagjaival szoroztuk. E sor divergenciáját a már közölt eljárástól eltérően még úgy is megmutathatjuk, mint a harmonikus sorét (l. 253. lapon). Ugyanis e sorban:

$$\frac{1}{2\log 2}+\underbrace{\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{5\log 5}+\dots+\frac{1}{8\log 8}}+\underbrace{\frac{1}{9\log 9}+\dots+\frac{1}{16\log 16}}+\dots$$

a megjelölt részeket összefoglaljuk és minthogy a sor csökkenő, minden csoportban az egyes tagok helyett a csoport utolsó tagját képzeljük. Az egyes csoportokban a tagok száma: 1, 2, 4, 8,... lévén, e csoportokban foglalt tagok összegei megkisebbítve a következők:

$$\frac{1}{2\log 2}, \frac{1}{2\log 4}, \frac{1}{2\log 8}, \frac{1}{2\log 16}, \dots$$

vagyis: $$\frac{1}{2\log 2}, \frac{1}{4\log 2}, \frac{1}{6\log 2}, \frac{1}{8\log 2}, \dots$$

és minthogy a $\sum\frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, ez az így nyert $\frac{1}{2\log 2}\sum\frac{1}{n}$ is divergens. Eszerint tehát a $\sum\frac{1}{n\log n}$ divergens. Tovább megyünk. A $\sum\frac{1}{n\log n}$ divergens sor tagjait rendre $\frac{1}{\log\log n}$-el szorozzuk [$n>e^e$-től kezdve]. Ezáltal a

$$\sum\frac{1}{n\log n\log\log n}$$

sor származik. Ismét megmutatjuk, hogy bár egy divergens sor tagjait megint korlátlanul csökkenő pozitiv számokkal szoroztuk, mégis divergens sorra jutottunk. A bizonyítás most is úgy végezhető, mint előbb. Legyen $2^{n-1}=a$, $2^n=b$, akkor összefoglaljuk a következő tagokat:

$$\frac{1}{(a+1)\log(a+1)\log\log(a+1)}+$$

$$+\frac{1}{(a+2)\log(a+2)\log\log(a+2)}+\dots+\frac{1}{b\log b\log\log b}$$

és mindenik ilyen tagcsoportban a legkisebbet téve a többi tag helyébe, ezt kapjuk:

$$\frac{1}{2\log 2}\sum\frac{1}{n\log\log 2^n}.$$

De $\log\log 2^n=\log n+\log\log 2<\log n$; tehát

$$\frac{1}{n\log\log 2^n} > \frac{1}{n\log n};$$

de a $\sum\frac{1}{n\log n}$ divergens, tehát a $\sum\frac{1}{n\log\log 2^n}$ is divergens és így a szóban forgó:

$$\sum\frac{1}{n\log n\log\log n}$$

is divergens.

Ezen az úton haladhatunk tovább. Rövidebb írás végett legyen $\log n = l_1 n$, $\log\log n = l_2 n$, $\log\log\log n = l_3 n$ s í. t. *Megmutatjuk, hogy e sorok:*

$$\sum\frac{1}{nl_1 nl_2 nl_3 n\ldots l_k n}$$

divergensek.

Föltesszük, hogy már a

$$\sum\frac{1}{nl_1 nl_2 n\ldots l_{k-1}n}$$

sorra kimutattuk a divergenciát. Ha a szóban forgó sort megint az ismeretes módon részekre bontjuk és minden részben az egyes tagok helyébe a legkisebbet tesszük, akkor egyik szakasz összege, melyben 2^{n-1} tag van, ez lesz:

$$\frac{1}{2l_1 2^n l_2 2^n \ldots l_k 2^n}.$$

De $l_1 2^n = n\log 2$ és $l_m 2^n = l_{m-1}\log 2^n = l_{m-1}(n\log 2) < l_{m-1}n$ [mert $\log 2 < 1$ és $l_{m-1}(x)$ monoton nő az x-el]; tehát az így összefoglalt sor tagjai nagyobbak az $\frac{1}{2\log 2}$-vel szorzott

$$\sum\frac{1}{nl_1 nl_2 n\ldots l_{k-1}n}$$

divergens sor tagjainál.*

Egész általánosan kimondhatjuk tehát, hogy a

$$\sum\frac{1}{n},\ \sum\frac{1}{nl_1 n},\ \sum\frac{1}{nl_1 nl_2 n},\ \sum\frac{1}{nl_1 nl_2 nl_3 n},\ldots$$

végtelen sorok mindannyian divergensek.

E sorok mind olyanok, amelyekre a Cauchy-féle vagy a D'Alembert-féle kriteriumok nem alkalmazhatók, mert mindegyiknél $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Ugyanis általában a középértéktétel szerint:

$$l_m(n+1) = l_m n + l'_m(n+\vartheta).\quad 0<\vartheta<1.$$

* Bizonyításainkban ismételten azt a már említett elvet alkalmaztuk, hogy ha egy pozitiv tagú sorból tagösszevonással divergens sor keletkezik, akkor az eredeti sor is divergens volt.

De
$$l'_m(x) = \frac{1}{xl_1xl_2x\dots l_{m-1}x},$$
tehát
$$\frac{l_m(n+1)}{l_m(n)} = 1 + \frac{1}{(n+\vartheta)\,l_1(n+\vartheta)\dots l_{m-1}(n+\vartheta)\,l_m n}$$
és így:
$$\lim_{n=\infty} \frac{l_m(n+1)}{l_m n} = 1.$$

Másrészt azt az érdekes jelenséget tapasztaltuk (272. lap), hogy ha a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor n-ik tagját $\frac{1}{n^\varrho}$-al szorozzuk, ahol ϱ bárminő kis pozitiv szám, akkor a keletkezett új sor, a
$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$
már konvergens. Épen így mutatható meg, hogy ha a $\sum_2^\infty \frac{1}{n\log n}$ divergens sor n-ik tagját az $\frac{1}{(\log n)^\varrho}$-val szorozzuk, ($\varrho$ pozitiv szám) a keletkezett
$$\sum_2^\infty \frac{1}{n(\log n)^{1+\varrho}}$$
már konvergens. A bizonyítás megint úgy végezhető, mint a hiperharmonikus sor esetében.

Az
$$\underbrace{\frac{1}{2(\log 2)^{1+\varrho}} + \frac{1}{3(\log 3)^{1+\varrho}}} +$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{4(\log 4)^{1+\varrho}} + \frac{1}{5(\log 5)^{1+\varrho}} + \dots + \frac{1}{7(\log 7)^{1+\varrho}}} + \dots$$
sor tagjait a megjelölt módon összefoglaljuk. Az egyes csoportokban a tagok helyébe a legelsőt, a legnagyobbat tesszük. Ezáltal a következő sorra jutunk:
$$\frac{1}{(\log 2)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(\log 4)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(\log 8)^{1+\varrho}} + \dots$$
vagyis erre a sorra:
$$\frac{1}{(\log 2)^{1+\varrho}} \sum_2^\infty \frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Minthogy pedig ez a sor konvergens és tagjai a tagösszevonásnál nyert sor tagjainál rendre nagyobbak, az eredeti $\sum_2^\infty \frac{1}{n(\log n)^{1+\varrho}}$ sor szintén konvergens.

Általában megmutatjuk, hogy a

$$\sum \frac{1}{nl_1n \, . \, l_2n \ldots (l_kn)^{1+\varrho}},$$

amely a divergens $\sum \frac{1}{n\,l_1\,n\,l_2\,n \ldots l_k n}$-ből keletkezik, ha n-ik tagját $\frac{1}{(l_kn)^\varrho}$-val szorozzuk, már konvergens, ha $\varrho>0$. Föltesszük, hogy állításunk $k-1$ esetére már igaznak bizonyult, aminthogy $k-1=1$-re igaz is. A k esetére úgy bizonyítjuk, hogy ismét azt a tagösszefoglaló eljárást alkalmazzuk, amellyel eddig célt értünk, csakhogy most nem 2, 4,... tagot foglalunk össze, hanem 3, 9—3, 27—9, 81—27,... tagot (a csoportok megállapítása után természetesen mindig elhagyjuk azt a néhány tagot, melyekben l_2n, l_3n stb. negativ). Ekkor azon csoportban, amely a 3^n-ik taggal kezdődik, $3^{n+1}-3^n=3^n \, . \, 2$ tag van. Ezek között a legnagyobb az első és ha mindegyik helyett ezt vesszük, akkor az egész n-ik csoport összege:

$$\frac{2}{l_1 3^n \, . \, l_2 3^n \ldots (l_k 3^n)^{1+\varrho}}.$$

De $l_m(3^n)=l_{m-1}(n \log 3)$ és minthogy $\log 3>1$ [épen ez okból választottuk a 2-es szám helyett a 3-at], tehát

$$l_m(3^n)>l_{m-1}n$$

és így a fölírt tört kisebb, mint:

$$\frac{2}{nl_1nl_2n \ldots (l_{k-1}n)^{1+\varrho}}.$$

Minthogy pedig föltételünk szerint $k-1$-re már a tétel igaz, vagyis a

$$\sum \frac{1}{nl_1nl_2n \ldots (l_{k-1}n)^{1+\varrho}}$$

konvergens, tehát következik, hogy a mi sorunk is konvergens.

Ezzel tehát általánosságban kimutattuk, hogy e Bertrand-féle sorok:

$$\sum \frac{1}{n(l_1n)^\sigma}, \quad \sum \frac{1}{nl_1n(l_2n)^\sigma}, \quad \sum \frac{1}{nl_1nl_2n(l_3n)^\sigma}, \ldots$$

konvergensek, ha $\sigma>1$ *és divergensek, ha* $\sigma\leq 1$.

10. Az összefoglaló eljárás általános jellemzése. A *Bertrand*-sorok tárgyalásánál a tagokat bizonyos módon összefoglaltuk. Talán nem lesz felesleges, ha ezen összefoglalásban rejlő általános szempontot külön is kiemeljük. Ha a Σa_n pozitiv sor monoton csökkenő és összefoglaljuk az első p, $(p\geq 2)$ a következő p^2-p, azután a p^3-p^2, p^4-p^3,... tagot, akkor az

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{p-1},\; a_p+a_{p+1}+\cdots+a_{p^2-1},\; a_{p^2}+a_{p^2+1}+\cdots+a_{p^3-1},\ldots$$

csoportokat kapjuk. Minden csoportban az első tag a legnagyobb; tehát az egyes csoportok kisebbek a következő sor tagjainál:

$$pa_0+(p^2-p)\,a_p+(p^3-p^2)\,a_{p^2}+\cdots+(p^n-p^{n-1})\,a_{p^{n-1}}+\cdots$$

vagy az elsőt kihagyva, $p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$ téve, azt látjuk ebből, hogy:

Ha a $pa_p+p^2a_{p^2}+p^3a_{p^3}+\cdots+p^na_{p^n}+\cdots$ sor konvergens, akkor az adott Σa_n is konvergens.

Az előbb egy-egy csoportba foglalt tagok mind nagyobbak a következő csoport legelső tagjánál; tehát az egyes részletek nagyobbak a

$$pa_p,\ (p^2-p)\,a_{p^2},\ (p^3-p^2)\,a_{p^3},\ \ldots\ (p^n-p^{n-1})\,a_{p^n},\ \ldots$$

-nél. Hagyjuk el az első tagot, osszunk el minden tagot $p-1$-el és szorozzuk meg mindenik tagot p-vel. *Ha tehát a*

$$p^2a_{p^2}+p^3a_{p^3}+p^4a_{p^4}+\cdots+p^na_{p^n}+\cdots$$

sor divergens, akkor az adott Σa_n is divergens.

Monoton csökkenő pozitiv tagokból álló Σa_n sorra nézve tehát arra a nevezetes eredményre jutottunk, hogy e sor a

$$pa_p+p^2a_{p^2}+p^3a_{p^3}+\cdots+p^na_{p^n}+\cdots$$

sorral egyszerre konvergens vagy divergens. (p tetszés szerinti 1-nél nagyobb pozitiv egész számot jelent.)

11. Más konvergencia-kriteriumok. A már ismertetett, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ és $\sqrt[n]{a_n}$ vizsgálatán alapuló, konvergencia-kriteriumok az adott sornak a végtelen geometriai sorral való összehasonlításából eredtek. Ha nem ezzel, hanem a hiperharmonikus, vagy a *Bertrand*-sorokkal hasonlítjuk össze az adott pozitiv tagú sort, akkor új kriteriumokra jutunk, melyek olyan esetekben is célhoz vezetnek, midőn az eredeti *Cauchy*-féle kriteriumok felmondják a szolgálatot. Ezen új kriteriumok közül a legegyszerűbb a következő:

Ha a Σa_n pozitiv tagú sorban bizonyos indextől kezdve mindig:

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} > \lambda,$$

ahol $\lambda>1$, akkor a sor konvergens. Ha pedig bizonyos indextől kezdve

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} \leq 1,$$

akkor a sor divergens.

Ugyanis, ha $\dfrac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} > \lambda$, akkor $\log \dfrac{1}{a_n} > \lambda \log n$ és $\dfrac{1}{a_n} > n^\lambda$,

vagyis:
$$a_n < \frac{1}{n^\lambda},$$

tehát a Σa_n tagjai rendre kisebbek a $\lambda>1$ feltevés következtében konvergens $\sum \frac{1}{n^\lambda}$ tagjainál.

Ha pedig $\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} \leq 1$, akkor $\log \frac{1}{a_n} \leq \log n$ és így:

$$a_n \geq \frac{1}{n},$$

tehát a Σa_n tagjai nagyobbak a divergens $\sum \frac{1}{n}$ tagjainál.

Igen gyakran azt a speciális esetet vesszük figyelembe, amidőn ez a határérték:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n}$$

létezik [amit előbb nem tettünk fel]. Aszerint, amint

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} > 1, \quad \text{vagy} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} < 1$$

a Σa_n sor konvergens, vagy divergens. Ugyanis, ha a szóban forgó limes: $A > 1$, akkor, ha $1 < A' < A$, megállapítható olyan N index, amelyen túl mindig

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} > A',$$

tehát az előbbi esettel van dolgunk. Épen így járunk el a kriterium második részének bizonyításánál. Itt, miként látjuk, ismét kimarad az az eset, midőn e limes: 1.

Tovább mehetünk a kriteriumok felállításában. Ugyanis, *ha bizonyos N-től kezdve:*

$$\frac{\log \frac{1}{na_n}}{\log \log n} > \lambda,$$

ahol $\lambda > 1$, *akkor a* Σa_n *konvergens, ha pedig e kifejezés* 1 *vagy* 1-*nél kisebb, akkor a sor divergens*. Ugyanis az első esetben:

$$\log \frac{1}{na_n} > \lambda \log \log n, \quad \text{azaz:} \quad \frac{1}{na_n} > (\log n)^{\lambda},$$

amiből:

$$a_n < \frac{1}{n(\log n)^{\lambda}},$$

tehát a Σa_n tagjai rendre kisebbek a $\sum \frac{1}{n(\log n)^{\lambda}}$ konvergens Bertrand-sor tagjainál, tehát a sor konvergens. Ha pedig N-től kezdve

$$\frac{\log \frac{1}{na_n}}{\log \log n} \leq 1, \quad \text{akkor:} \quad \log \frac{1}{na_n} \leq \log \log n$$

és a Σa_n tagjai nagyobbak a divergens $\sum \frac{1}{n \log n}$ tagjainál vagy egyenlők velük; tehát a sor divergens.

Így haladva, a kriteriumok egy egész sorozatára jutunk. A következő volna: Ha bizonyos N-től kezdve

$$\frac{\log \frac{1}{na_n \log n}}{\log \log \log n} > \lambda > 1,$$

akkor a sor konvergens, ha pedig a baloldali kifejezés bizonyos N-től kezdve 1 vagy ennél kisebb, a sor divergens.

12. Néhány speciális konvergencia-kriterium a pozitiv sorokra vonatkozólag.

A) *A Kummer-Jensen-féle kriterium.* Tudjuk, hogy a *Cauchy*-féle első kriterium így hangzik: Ha $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bizonyos n-től kezdve kisebb λ-nál, mely 1-nél kisebb, a sor konvergens. Ezt így is olvashatjuk: ha $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$ bizonyos n-től kezdve nagyobb egy pozitiv számnál, akkor a sor konvergens. Ezen tétel általánosításának tekinthető ez a (speciális esetében *Kummer*-től, jelen formájában *Jensen*-től eredő) kriterium:

Ha $c_1, c_2, c_3, \ldots$ a pozitiv számok valamely sorozata, és bizonyos N-től kezdve a

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

mindig nagyobb ugyanazon pozitiv számnál, akkor a Σa_n sor konvergens. [Ha a c számok mind 1-gyel egyenlők, akkor a kriterium átmegy a *Cauchy*-féle kriteriumba.]

A tétel bizonyítása igen egyszerűen végezhető. Tegyük fel, hogy bizonyos N-től kezdve, mindig:

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > \alpha,$$

ahol α valamely pozitiv szám. Ebből:

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > \alpha a_{n+1}, \qquad A)$$

amiből először is azt látjuk, hogy $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$, vagyis a pozitiv $c_n a_n$ számok sorozata csökkenő. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{n=\infty} c_n a_n$ létezik.

Az *A)* alatti egyenlőtlenségben sorban $n, n+1, n+2, \ldots n+k-1$-et téve, ered:

$$\begin{aligned} c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} &> \alpha a_{n+1} \\ c_{n+1} a_{n+1} - c_{n+2} a_{n+2} &> \alpha a_{n+2} \\ &\vdots \\ c_{n+k-1} a_{n+k-1} - c_{n+k} a_{n+k} &> \alpha a_{n+k} \end{aligned}$$

és így:

$$c_n a_n - c_{n+k} a_{n+k} > \alpha\, [a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}],$$

vagyis:

$$0 < R_{n,k} < \frac{c_n a_n - c_{n+k} a_{n+k}}{\alpha}$$

minden k-ra nézve. Ha adatik az ε, elmehetünk az M-el oly messzire, hogy $c_n a_n - c_{n+k} a_{n+k} < \varepsilon\alpha$ legyen, vagyis ha $n > M$, akármit jelentsen is a k, $R_{n.k} < \varepsilon$ és ez a Σa_n sor konvergenciáját bizonyítja.

A kriterium második része így hangzik: *Ha a*

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

pozitiv számok olyanok, hogy az

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}, \ldots$$

sor divergens, továbbá az előbbi módon megalkotott

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

kifejezés bizonyos N-től kezdve negativ, vagy 0, akkor a Σa_n sor divergens.

Ezen állítás bizonyítása a következő: Feltételünk szerint a

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1}$$

negativ vagy 0, tehát a $c_n a_n$-ek növekedő számok, (vagy legalább nem csökkenőek). Megadható tehát egy olyan pozitiv μ szám, melynél valamennyi nagyobb. Eszerint tehát

$$a_n > \frac{\mu}{c_n}$$

és így a Σa_n sor tagjai rendre nagyobbak a $\mu \sum \frac{1}{c_n}$ divergens sor tagjainál. Ezzel tehát a tétel helyességét megmutattuk.

A kriterium eredeti (Kummer-féle) formájában feltételeztetett, hogy

$$\lim_{n=\infty} \left(c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right)$$

létezik. Ha ez a limesz pozitiv, a Σa_n sor konvergens, ha negativ, akkor divergens [föltéve ez utóbbi esetben, hogy a $\sum \frac{1}{c_n}$ divergens]. Igen könnyű a kriteriumnak ezt az alakját az előbbire visszavezetni, éppen úgy, mint azt a D'Alembert-kriteriummal tettük.

Megjegyzendő, hogy a *Kummer-Jensen*-kritérium voltaképen equivalens a pozitiv tagú sorra vonatkozólag a konvergencia definiciójával. Nemcsak azt állíthatjuk, hogy ha létezik olyan pozitiv számokból álló $c_1, c_2, \ldots$ sorozat, melyre nézve a feltétel teljesül, akkor a pozitiv tagú sor konvergens, hanem megfordítva is, ha a sor konvergens, akkor létezik olyan $c_1, c_2, \ldots$ sorozat, melyre nézve a feltétel ki van elégítve.

Hogy ezt megmutassuk, legyen

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=s_n, \quad \lim s_n=s \quad \text{és} \quad A>s.$$

Válasszuk továbbá c_n-et így:

$$c_n = \frac{A-s_n}{a_n}; \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

akkor: $$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = \frac{A-s_n}{a_{n+1}} - \frac{A-s_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{s_{n+1}-s_n}{a_{n+1}} = 1,$$

tehát a Kummer-Jensen kritérium teljesül.

B) *A Raabe-féle kritérium.* Ha a *Kummer-Jensen*-kriteriumban szereplő c számokat úgy választjuk, hogy

$$c_n=n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

legyen, akkor

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1$$

és így: Ha
$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$
bizonyos N-től kezdve nagyobb egy, az 1-nél nagyobb számnál, akkor a Σa_n sor konvergens.

Ha pedig ez a kifejezés 1, vagy 1-nél kisebb (a jelen esetben $\sum \frac{1}{c_n} = \sum \frac{1}{n}$ valóban divergens), akkor a sor divergens. Ez a *Raabe*-kriterium módosított alakja. Eredeti formájában, mely az itteni alakjára könnyen redukálható, azt mondja, hogy aszerint, amint

$$\lim_{n=\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

1-nél nagyobb vagy kisebb, a sor konvergens vagy divergens.

A *Kummer*, illetőleg *Raabe*-féle kriteriumot példaképen alkalmazzuk a hiperharmonikus sorra. Ez esetben $a_n = \frac{1}{n^\mu}$, tehát:

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^\mu - 1\right] = n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu - 1\right].$$

Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu$ a középértéktétel szerint kifejtve:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu = 1 + \frac{\mu}{n}\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\right)^{\mu-1}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

tehát:
$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu \left(1 + \frac{\vartheta}{n}\right)^{\mu-1}$$

és így:
$$\lim_{n=\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu.$$

Eszerint a $\sum \frac{1}{n^\mu}$ hiperharmonikus sor konvergens, ha $\mu > 1$ és divergens, ha $\mu < 1$. A határesetben, midőn $\mu = 1$, a Raabe-kriterium eredeti alakjában nem ad felvilágosítást.

C) *A Jamet-féle kriterium.* A Raabe-féle kriteriumot főként olyan esetekben használjuk, midőn $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, tehát midőn a D'Alembert-kriterium felmondja a szolgálatot. Ilyenkor tehát az $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$ különbség végtelen kicsinnyé válik. Ha e különbség n-szerese 1-nél nagyobbá lesz, akkor a sor konvergens (általánosított Raabe-kritérium). Közelfekvő gondolat volt a Cauchy-féle kriteriumnak megfelelő kiegészítését keresni arra az esetre, midőn $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.* Itt az $1 - \sqrt[n]{a_n}$ különbség válik végtelen kicsinnyé, ha n végtelen naggyá lesz. *Ha már most ezt a különbséget az* $\frac{n}{\log n}$ *-nel szorozzuk [mely n-nel végtelenné válik] és a szorzat bizonyos n-től kezdve egy, az 1-nél nagyobb számnál mindig nagyobb, akkor a* Σa_n *konvergens; ha pedig ez a szorzat 1-nél nagyobb sohasem lesz, akkor a sor divergens.*

* Jamet a «Mathesis» 1892. évfolyamában (p. 80) feladatul tűzte ki e kérdést. A megoldás Cesarótól származik, aki azt a «Mathesis» ugyanezen évfolyamában közölte.

A tételt így bizonyíthatjuk be: Tegyük:

$$a_n = n^{-p_n},$$

ahol p_n pozitiv egy bizonyos indexen túl (mert hiszen különben $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ nem volna 0 és a sor konvergenciájáról szó nem lehetne)

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{-\frac{p_n}{n}} = e^{-\frac{p_n \log n}{n}}.$$

De az e^{-x} véges Taylor sorát a második tagnál befejezve:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} e^{-\vartheta x}, \quad \text{tehát:} \quad e^{-x} > 1 - x$$

és így:
$$\sqrt[n]{a_n} > 1 - \frac{p_n \log n}{n},$$

vagyis:
$$p_n > (1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\log n}.$$

Ha tehát bizonyos n-től kezdve:

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\log n} > \lambda > 1,$$

akkor még inkább $p_n > \lambda$; tehát

$$a_n < n^{-\lambda},$$

és így a Σa_n sor tagjai rendre kisebbek a konvergens $\sum \frac{1}{n^\lambda}$ tagjainál. A tétel első részét igazoltuk, vagyis kimutattuk, hogy *ha valamely n-től kezdve*

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\log n}$$

nagyobb egy, az 1-nél nagyobb számnál, akkor a Σa_n pozitiv tagú sor konvergens.

Ha pedig bizonyos n-től kezdve:

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\log n} \leq 1,$$

akkor:
$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 - \frac{\log n}{n}$$

és
$$a_n \geq \left(1 - \frac{\log n}{n}\right)^n.$$

A Σa_n divergenciáját úgy bizonyítjuk be, hogy megmutatjuk, hogy: na_n bizonyos n-től kezdve nagyobb egy véges pozitiv számnál.

$$na_n \geq n \left(1 - \frac{\log n}{n}\right)^n$$

tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy a jobboldali kifejezésnek van pozitiv alsó korlátja, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$ E végből vegyük az na_n logarithmusát

$$\log (na_n) \geq \log n + n \log \left(1 - \frac{\log n}{n}\right).$$

Jelöljük a $\frac{\log n}{n}$-et, mely ha n végtelenné válik, zérussá lesz: $\frac{1}{m}$-el, ahol tehát m az n-el végtelenné lesz. Ekkor $n = m \log n$ tehető és így:

$$\log (na_n) \geq \log n + m \log n \, . \log \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \log n \left[1 + m \log \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right].$$

De $$\log\left(1-\frac{1}{m}\right)=\log\frac{m-1}{m}=\log(m-1)-\log m$$

és ez a középértéktétel szerint így írható: $-\frac{1}{m-\vartheta}$, ahol $0<\vartheta<1$ és így:

$$\log(na_n)>\log n.\left[1-\frac{m}{m-\vartheta}\right]=-\log n\cdot\frac{\vartheta}{m-\vartheta}=-\frac{\vartheta\log n}{m\left(1-\frac{\vartheta}{m}\right)}$$

és visszatéve az $m=\frac{n}{\log n}$-et:

$$\log(na_n)\geq-\frac{\vartheta(\log n)^2}{n\left(1-\frac{\vartheta}{m}\right)}.$$

Minthogy pedig $\lim\limits_{n=\infty}\frac{(\log n)^2}{n}=0$, tehát bárminő szám legyen is a ϑ 0 és 1 között, a jobboldali kifejezés valamely n-től kezdve mindig két korlát, mondjuk $-\alpha$ és 0 közé esik és így a $\log(na_n)$ is mindig nagyobb $-\alpha$-nál; tehát bizonyos n-től kezdve na_n mindig nagyobb egy pozitiv $\beta=e^{-\alpha}$ számnál, vagyis $a_n>\frac{\beta}{n}$ és így a Σa_n divergens. Ezzel bebizonyítottuk a tétel második részét is, vagyis azt, hogy *ha valamely n-től kezdve*

$$\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\log n}\leq 1,$$

akkor a Σa_n pozitiv tagú sor divergens.

D) *A D'Alembert-kriterium kibővítése.* A D'Alembert-kriteriumot nem alkalmazhattuk, ha $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ volt. Így például már a $\sum\frac{1}{n^k}$ sor vizsgálatánál:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)^k}{n^k};\quad\text{tehát}\quad\lim\frac{u_n}{u_{n+1}}=1.$$

Ha k pozitiv egész szám, akkor:

$$\frac{(n+1)^k}{n^k}=1+\frac{k}{n}+\binom{k}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^k},$$

miként látjuk, az $\frac{1}{n}$ szerint rendezett kifejezés. Fölmerül a kérdés, hogy nem lehetne-e az $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ ilyen $\frac{1}{n}$ hatványai szerint rendezett alakjában előforduló együtthatókból következtetni a sor konvergenciájára.

Tegyük fel, — hogy a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk — hogy bizonyos n-től kezdve: $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ mindig nagyobb az $\alpha+\frac{\beta}{n}$-nél, vagy egyenlő vele, ahol α és β az n-től független valós számok.

Ha $\alpha>1$, akkor nyilván $\alpha+\frac{\beta}{n}$ is bizonyos n-től kezdve nagyobb mint $\alpha-\varepsilon>1$, akármekkora a β; tehát $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kisebb egy, az 1-nél kisebb számnál és így a Cauchy-féle kriterium szerint a sor konvergens.

Legyen: $\alpha=1$. Tegyük fel tehát, hogy bizonyos n-től kezdve mindig:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\geq 1+\frac{\beta}{n}$$

és így: $$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geq\beta,$$

tehát az általánosított Raabe-kriteriumból következik, hogy a Σu_n konvergens, ha $\beta > 1$. Ha pedig

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{\beta}{n},$$

ahol $\beta \leq 1$, akkor $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, tehát ugyanezen kritériumból következően a sor divergens.

Ha csak annyit mondhatunk, hogy valamely n indextől kezdve

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n},$$

akkor ez a kriterium még nem alkalmazható.

Vizsgáljuk most azt az esetet, midőn valamely n indextől kezdve

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma}{n^2},$$

ahol γ pozitiv számot jelent. Azt állítjuk, hogy a Σu_n sor divergens. Ennek a megmutatása végett válasszuk összehasonlításul a

$$v_n = \frac{1}{n} e^{\frac{\gamma'}{n}}$$

tagokból álló Σv_n sort, ahol γ' tetszésszerinti fix pozitiv vagy negativ szám. Ez a sor mindenesetre divergens, mert hiszen:

$$\lim_{n=\infty} n v_n = \lim_{n=\infty} e^{\frac{\gamma'}{n}} = 1.$$

E sorban két szomszédos tag hányadosa:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n+1}{n} e^{\frac{\gamma'}{n} - \frac{\gamma'}{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{\gamma'}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \qquad a)$$

Legyen átmenetileg $\frac{1}{n} = x$ és vizsgáljuk az

$$(1+x)\, e^{\frac{\gamma' x^2}{1+x}}$$

kifejezést. Általában:

$$e^y = 1 + y + \frac{e^{\vartheta y} \cdot y^2}{2},$$

vagyis:

$$e^y = 1 + y\,(1+\varepsilon),$$

ahol ε az y-nal egyidőben pozitiv vagy negativ és y-nal 0-sá válik. A jelen esetben $y = \frac{\gamma' x^2}{1+x}$ téve:

$$e^{\frac{\gamma' x^2}{1+x}} = 1 + \frac{\gamma' x^2}{1+x}(1+\varepsilon)$$

és így:

$$(1+x)\, e^{\frac{\gamma' x^2}{1+x}} = 1 + x + \gamma'(1+\varepsilon)\, x^2.$$

vagy visszatérve az $a)$ alattira:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma'(1+\varepsilon)}{n^2}.$$

Ha már most γ' gyanánt a pozitiv γ-nál nagyobb számot választunk, akkor elég nagy n-re nézve mindig $\gamma < \gamma'(1+\varepsilon)$, tehát

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma}{n^2} < \frac{v_n}{v_{n+1}}.$$

De a Σv_n sor divergens, tehát a 4. pont szerint a Σu_n is divergens.

Ha γ nem pozitiv, tegyük $\gamma=-\delta$, ahol δ pozitiv, vagy 0 és

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} - \frac{\delta}{n^2},$$

akkor természetesen a Σu_n sor divergens, mert $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ még kisebb lett, mint előbb volt. Igy tehát arra jutottunk, hogy:

Ha a Σu_n sorban $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ bizonyos n-től kezdve mindig nagyobb az $1+\frac{\beta}{n}$-nél, ahol az állandó $\beta>1$, akkor a Σu_n konvergens; ha $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ bizonyos n-től kezdve nem nagyobb az $1+\frac{\beta}{n}$-nél, ahol $\beta\leq 1$, akkor a Σu_n sor divergens. Akkor is divergens e sor, ha $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ bizonyos n-től kezdve kisebb az $1+\frac{1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}$-nél, ahol γ pozitiv számot jelent.

E) *A Gauss-féle kriterium.* A D) alatt tárgyalt kriterium általánosításával foglalkozunk; azzal az esettel, midőn az $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ hányados n racionális függvénye gyanánt állítható elő. Így például, ha $u_n=\frac{1}{n^k}$, ahol k pozitiv egész szám, akkor

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)^k}{n^k}.$$

Legyen általában:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\alpha n^k + An^{k-1} + Bn^{k-2} + \cdots}{\alpha' n^l + A'n^{l-1} + B'n^{l-2} + \cdots}; \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha' \neq 0;\ u_n > 0)$$

ahol k és l pozitiv egész számok és $A, B, \ldots A', B', \ldots$ együtthatók valós számok. Ha $k>l$, akkor $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ végtelenné válik az n-nel, azaz $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=0$, tehát a D'Alembert-kriteriumból következik, hogy a sor konvergens. Ha $k<l$, akkor pedig ugyanezen kriterium szerint mondhatjuk, hogy a sor divergens. Tehát csak azt az esetet kell vizsgálnunk, midőn $k=l$.

Ha még $\alpha>\alpha'$ ($\frac{\alpha}{\alpha'}$ nyilván pozitiv, mert $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ és így α és α' is pozitivoknak vehetők), akkor $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$, tehát a sor konvergens; ha pedig $\alpha<\alpha'$, akkor $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$ és így a sor divergens; tehát csak azt az esetet kell vizsgálnunk, midőn $\alpha=\alpha'$ és akkor $\alpha=\alpha'=1$ tehető. Eszerint:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^k + An^{k-1} + Bn^{k-2} + \cdots}{n^k + A'n^{k-1} + B'n^{k-2} + \cdots} =$$

$$= \left(1 + \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{A'}{n} + \frac{B'}{n^2} + \cdots\right)^{-1}.$$

Jelöljük egy pillanatra az $\frac{A'}{n} + \frac{B'}{n^2} + \cdots$ k tagú összeget x-el. Ha n-et elég nagynak vesszük, az x tetszés szerinti kicsiny lesz; mert hiszen $\lim\limits_{n=\infty} x=0$. Az $(1+x)^{-1}$ kifejtve a második tagig:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{x^2}{(1+\theta x)^3}, \quad 0<\theta<1$$

tehát:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{A-A'}{n} + \frac{c}{n^2},$$

ahol $\lim\limits_{n=\infty} c$ véges és meghatározott:

$$\lim_{n=\infty} c = A'^2 - B' + B - AA'$$

Alkalmazva az előbbi, D) alatt tárgyalt kriteriumot, kimondhatjuk, hogy a Σu_n sor konvergens, ha $A-A'>1$ és divergens, ha $A-A'\leq 1$.

Így például a hypergeometrikus

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma\,.\,(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma\,.\,(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots$$

sorban, melynek általános tagja:

$$u_n=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)},$$

[α, β, γ közül egyik sem negativ egész szám. A sor tagjai bizonyos n-től kezdve mind pozitivok]:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{n^2+(\gamma+1)\,n+\gamma}{n^2+(\alpha+\beta)\,n+\alpha\beta}.$$

Az előző jelölést megtartva: $A=\gamma+1$, $A'=\alpha+\beta$; tehát a sor konvergens, ha $\gamma+1-\alpha-\beta>1$, azaz $\gamma-\alpha-\beta>0$ és divergens, ha $\gamma-\alpha-\beta\leq 0$.

F) *A Weierstrass-féle kritérium.* A *Gauss*-féle kriterium igen egyszerűen kiterjeszthető arra az esetre is, midőn a végtelen sor tagjai nem pozitiv számok. Éppen ezért mindjárt az előbbi vizsgálatokhoz kapcsoljuk azon eset tárgyalását is, midőn a Σu_n sor tagjai komplex számok és mint előbb:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+\cdots}{n^k+A'n^{k-1}+B'n^{k-2}+\cdots},$$

csakhogy most A, B, ... A', B', ... általában komplex számok. Innen az abszolut értékekre áttérve:

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\frac{\left|1+\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\cdots\right|}{\left|1+\frac{A'}{n}+\frac{B'}{n^2}+\cdots\right|}.$$

Legyen: $A=a+ia_1$, $B=b+ib_1$, ... ; $A'=a'+ia'_1$, $B'=b'+ib'_1$ ...

akkor:

$$\left|1+\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\cdots\right|^2=\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\cdots\right)^2+\left(\frac{a_1}{n}+\frac{b_1}{n^2}+\cdots\right)^2$$

$$=1+\frac{2a}{n}+\frac{\varrho_n}{n^2},$$

ahol ϱ_n az $\frac{1}{n}$ hatványai szerint rendezett polynom és $\lim\limits_{n=\infty}\varrho_n$ valós véges szám.

Épen így:

$$\left|1+\frac{A'}{n}+\frac{B'}{n^2}+\cdots\right|^2=1+\frac{2a'}{n}+\frac{\varrho'_n}{n^2}.$$

Jelöljük egy pillanatra $\frac{2a}{n}+\frac{\varrho_n}{n^2}$-et x-szel. A $\sqrt{1+x}$-et *Maclaurin*-sorba kifejtve a második tagig:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2(1+\vartheta x)^{-\frac{3}{2}},\quad 0<\vartheta<1$$

vagyis:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\gamma x^2,$$

(ahol γ a $-\frac{1}{8}$-tól igen kevéssel különbözik, ha x elég közel van a 0-hoz); tehát a fönti tört számlálóját így is írhatjuk, megállapodva abban, hogy $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ egy ilyen alakú mennyiséget jelentsen: $\frac{\sigma_n}{n^2}$, ahol $\lim\limits_{n=\infty}\sigma_n$ véges szám:

Épen így:
$$\left|1+\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\cdots\right|=1+\frac{a}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
$$\left|1+\frac{A'}{n}+\frac{B'}{n^2}+\cdots\right|=1+\frac{a'}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

és innen, miként előbb már láttuk:
$$\left|1+\frac{A'}{n}+\frac{B'}{n^2}+\cdots\right|^{-1}=1-\frac{a'}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
tehát:
$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\left[1+\frac{a}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1-\frac{a'}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=1+\frac{a-a'}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\left(\frac{1}{n^2}\right)$ így is írható: $\frac{\gamma'}{n^2}$, ahol γ' nem állandó ugyan, de egy állandó γ-tól csak tetszés szerinti kevéssel különbözik, mihelyt n elég nagy.

Így tehát a $\Sigma|u_n|$ sor konvergens, ha $a-a'>1$, és divergens, ha $a-a'\leq 1$; vagyis a Σu_n komplex tagú sor, melyben:
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^k+An^{k-1}+\cdots}{n^k+A'n^{k-1}+\cdots},$$
abszolut konvergens, ha
$$R(A)-R(A')>1.$$

Itt $R(A)$ az A komplex szám reális részét jelenti. A *Gauss*-féle kriterium ezen kiterjesztése *Weierstrass*-tól származik.

E kriteriumnak a hypergeometrikus sorra való alkalmazásából azt kapjuk, hogy az
$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\cdots$$
sor abszolut konvergens, ha $R(\gamma-\alpha-\beta)>0$.

13. Összehasonlítás a Bertrand-sorokkal. Láttuk, hogy a Σu_n pozitiv tagú sor konvergens, ha $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ bizonyos n-től kezdve nagyobb az $1+\frac{\beta}{n}$-nél, ahol $\beta>1$, vagyis, ha $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ nagyobb $1+\frac{1+\varrho}{n}$-nél, bárminő kicsiny (de fix) pozitiv szám legyen is a ϱ. De ha csak annyit tudunk, hogy az $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ hányados $1+\frac{1}{n}$-nél nagyobb, akkor a konvergenciára nem következtethettünk. Másrészt meg azt is tudjuk, hogy ha az $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ kisebb az $1+\frac{1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}$-nél, ahol γ tetszés szerinti konstans, a sor divergens.

A *Bertrand*-sorokkal való összehasonlítás sokkal pontosabb eredményekhez juttat bennünket. Tudjuk ugyanis, hogy a
$$\sum\frac{1}{n\,ln\,l_2n\ldots(l_kn)^{1+\varrho}}$$
Bertrand-sor konvergens, ha ϱ bárminő pozitiv szám és divergens, ha $\varrho\leq 0$. Jelöljük e sor n-ik tagját v_n-nel. A Σu_n adott sort ilyen Bertrand-sorral fogjuk összehasonlítani és kimutatjuk, hogy *ha bizonyos n-től kezdve*
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\,ln}+\frac{1}{n\,ln\,l_2n}+\cdots+\frac{1}{n\,ln\,l_2n\ldots l_kn},\qquad \alpha)$$
(itt k pozitiv egész számot jelent) a Σu_n sor divergens; ha pedig

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \frac{1}{n\,ln\,l_2 n} + \dots + \frac{1+\varrho}{n\,ln\,l_2 n \dots l_k n}, \qquad \beta)$$

ahol ϱ pozitiv szám, akkor a Σu_n sor konvergens.

Ezek a kriteriumok, amint látjuk, messze felülmulják az előbbieket, melyek a harmonikus és hiperharmonikus sorral való összehasonlításból eredtek. Míg ugyanis ott például azt mondtuk, hogy a Σu_n divergens, ha $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$; most azt mondjuk, hogy divergens, ha

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln},$$

vagy még tovább haladva a jobboldali kifejezésben, divergens, ha:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \frac{1}{n\,ln\,l_2 n}$$

s í. t. A tétel bizonyítása végett határozzuk meg két szomszédos tag hányadosát a Σv_n-nel jelölt *Bertrand*-sorban, melyben $\varrho=0$:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{(n+1)\,l(n+1)\,l_2(n+1) \dots l_k(n+1)}{n\,ln\,l_2 n \dots l_k n}. \qquad \gamma)$$

E hányados kiszámítása végett vezessük be az

$$F(x) = x\,lx\,l_2 x \dots l_k x$$

függvényt. Ez az x-szel nyilván monoton nő. Ebből:

$$F'(x) = F(x)\left[\frac{1}{x} + \frac{(lx)'}{lx} + \frac{(l_2 x)'}{l_2 x} + \dots + \frac{(l_k x)'}{l_k x}\right].$$

De általában:
$$\frac{(l_m x)'}{l_m x} = \frac{1}{x\,lx\,l_2 x \dots l_m x},$$

tehát:
$$F'(x) = F(x)\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x\,lx} + \frac{1}{x\,lx\,l_2 x} + \dots + \frac{1}{x\,lx\,l_2 x \dots l_k x}\right].$$

Ha $F(x)$-szel beszorzunk, azonnal látjuk, hogy $F'(x)$ mint csupa pozitiv monoton növekvő függvények szorzatainak összege, x-szel szintén monoton növekszik; de már $\frac{F'(x)}{F(x)}$ az x-szel monoton csökken. Még megjegyezzük, hogy a középértéktétel szerint:

$$F(x+1) = F(x) + F'(x+\vartheta)$$
$$0 < \vartheta < 1$$

és így az $F'(x)$ monoton növekedése folytán:

$$F(x+1) > F(x) + F'(x)$$

vagyis:
$$\frac{F(x+1)}{F(x)} > 1 + \frac{F'(x)}{F(x)}.$$

Alkalmazva ezt a $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ $\gamma)$ alatti kifejezésére, azaz $x=n$ téve:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \frac{1}{n\,ln\,l_2 n} + \dots + \frac{1}{n\,ln\,l_2 n \dots l_k n}.$$

Így tehát, ha $\alpha)$ teljesítve van, vagyis a szóban forgó Σu_n pozitiv tagú sorban bizonyos indextől kezdve mindig

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \cdots + \frac{1}{n\,ln \ldots l_k n},$$

akkor:
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

De a Σv_n divergens, tehát Σu_n is divergens. Ezzel a tétel első része be van bizonyítva.

Legyen most
$$v_n = \frac{1}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_{k-1} n\,(l_k n)^{1+\sigma}} = \frac{1}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_k n \,.\, (l_k n)^{\sigma}},$$

ahol $\sigma > 0$, akkor az $F(x)$ előbbi jelentését megtartva:
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n\,ln\,l_2 n \ldots l_k n}{(n+1)\,l(n+1) \ldots l_k(n+1)} \cdot \left[\frac{l_k(n)}{l_k(n+1)}\right]^{\sigma} = \frac{F(n)}{F(n+1)}\left[\frac{l_k(n)}{l_k(n+1)}\right]^{\sigma}.$$

De ugyancsak a középértéktétel szerint:
$$F(x) = F(x+1) - F'(x+\vartheta), \quad 0<\vartheta<1,$$

és éppen így:
$$l_k(x) = l_k(x+1) - l'_k(x+\vartheta'), \quad 0<\vartheta'<1.$$

Minthogy pedig
$$l'_k(x) = \frac{1}{x\,lx\,l_2 x \ldots l_{k-1}(x)}$$

tehát:
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left[1 - \frac{F'(n+\vartheta)}{F(n+1)}\right]\left[1 - \frac{1}{(n+\vartheta')\,l(n+\vartheta') \ldots l_{k-1}(n+\vartheta')\,l_k(n+1)}\right]^{\sigma}.$$

Az első tényezőben tegyük az $F'(n+\vartheta)$ helyett a nagyobb $F'(n+1)$-et és azután az $\frac{F'(n+1)}{F(n+1)}$ helyett a nagyobb $\frac{F'(n)}{F(n)}$-et. Ezzel az első tényezőt kisebbítettük. A második tényezőben a ϑ'-t, illetőleg az utolsó tényezőben az 1-et hagyjuk el, miáltal ezt a tényezőt is kisebbítettük; tehát:
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \left[1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\,ln} - \frac{1}{n\,ln\,l_2 n} - \cdots - \frac{1}{n\,ln \ldots l_k n}\right]\left[1 - \frac{1}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_k n}\right]^{\sigma}$$

és így a reciprok értéke:
$$\frac{v_n}{v_{n+1}} < \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\,ln} - \cdots - \frac{1}{n\,ln \ldots l_k n}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{n\,ln \ldots l_k n}\right)^{-\sigma}.$$

Ha $(1-x)^{-m}$-et Taylor-sorba fejtjük, akkor a már használt jelölés szerint: $(1-x)^{-m} = 1 + mx + (x^2)$.

Alkalmazzuk ezt az eljárást mindkét tényezőre. Az egyikben $m=1$, a másikban $m=\sigma$. Az elsőben $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \cdots$, tehát az (x^2) alakú tag így írható: $\frac{\theta}{n^2}$, ahol θ kisebb, mint egy könnyen megadható véges pozitiv szám, akármekkora legyen is az n. Éppen így a második tényezőnél ez a tag $\frac{\theta'}{n^2}$ alakú, hol θ' a θ tulajdonságával bir.

Így tehát:
$$\frac{v_n}{v_{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \cdots + \frac{1}{n\,ln \ldots l_k n} + \frac{\theta}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma}{n\,ln \ldots l_k n} + \frac{\theta'}{n^2}\right),$$

vagyis:
$$\frac{v_n}{v_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \cdots + \frac{1+\sigma}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_k n} + \frac{\theta''}{n^2}.$$

Ha már most β) szerint:
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \cdots + \frac{1+\varrho}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_k n},$$

akkor: $$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} > \frac{\varrho-\sigma}{n\,ln\,l_2n\ldots l_kn} - \frac{\theta''}{n^2}.$$

Ha $\sigma<\varrho$, akkor elég nagy n-től kezdve a jobboldal mindig pozitiv lesz. Ugyanis tudjuk, hogy a $lx\,l_2x\ldots l_kx$ szorzat gyengébben válik végtelenné, mint az x, azaz:

$$\lim_{x=\infty} \frac{lx\,l_2x\ldots l_kx}{x} = 0.$$

[amiről a L'Hôpital-szabállyal győződhetünk meg], vagyis a limes jele alatt álló kifejezés elég nagy x-től kezdve tetszés szerinti kis számnál kisebb, tehát:

$$\frac{\varrho-\sigma}{n\,ln\,l_2n\ldots l_kn} - \frac{\theta''}{n^2} = \frac{1}{n\,ln\ldots l_kn}\left[\varrho-\sigma-\frac{\theta''ln\,.\,l_2n\ldots l_kn}{n}\right]$$

alakon azonnal láthatjuk, hogy e kifejezés elég nagy n-től kezdve tényleg pozitivvá lesz.

Már most, ha a β) feltétel teljesítve van, azaz:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \cdots + \frac{1+\varrho}{n\,ln\ldots l_kn},$$

ahol ϱ pozitiv, akkor válasszuk a σ pozitiv számot ϱ-nál kisebbre, de pozitivra. Ekkor a δ) alatti tagokkal képezett

$$\Sigma v_n = \sum \frac{1}{n\,ln\,l_2n\ldots(l_kn)^{1+\sigma}}$$

sor konvergens, és minthogy $\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}}$ pozitivnak bizonyult (elég nagy n-től kezdve), következésképen a Σu_n is konvergens. És ezzel a tétel második részét is bebizonyítottuk. Kimutattuk tehát a pozitiv tagú sorok összehasonlítására vonatkozó következő tételt:

Ha a Σu_n pozitiv tagú sor tagjaiból készített $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ hányados valamely n-től kezdve mindig kisebb, mint

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \frac{1}{nlnl_2n} + \cdots + \frac{1}{nlnl_2n\ldots l_kn},$$

akkor a sor divergens, ha pedig e hányados nagyobb, mint

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \frac{1}{nlnl_2n} + \cdots + \frac{1+\varrho}{nlnl_2n\ldots l_kn},$$

ahol ϱ pozitiv, akkor a Σu_n sor konvergens.

14. A Cauchy-féle integrálkriterium. Ha adva van a Σu_n pozitiv tagú monoton csökkenő sor, akkor könnyen készíthetünk olyan $f(x)$ monoton csökkenő függvényt, melyre nézve

$$f(0) = u_0,\ f(1) = u_1,\ f(2) = u_2, \ldots f(n) = u_n, \ldots$$

Így például, ha $f(x)$-et úgy értelmezzük, hogy minden egész számú n-re: $f(n) = u_n$ legyen és n és $n+1$ közötti x-re pedig:

$$f(x) = f(n) - (x-n)[f(n) - f(n+1)];$$

vagyis ha az $(x=n,\ y=u_n)$, $(x=n+1,\ y=u_{n+1})$ pontokat egyenesekkel összekötjük, akkor az így nyert tört vonal már a kívánt függvényt ábrázolja.

És fordítva, ha $f(x)$ bármely pozitiv monoton csökkenő függvény, mely minden, nem negativ x-re értelmezve van, akkor

$$f(0), f(1), f(2), \ldots$$

pozitiv monoton csökkenő számok sorozata.

Ha már most $f(x)$ monoton csökkenő, a $0 \ldots \infty$ közben pozitiv függvény, akkor *Cauchy* integrálkriteriuma a következőképen formulázható: *A* $\Sigma f(n)$ *végtelen sor konvergens, ha ez az integrál*

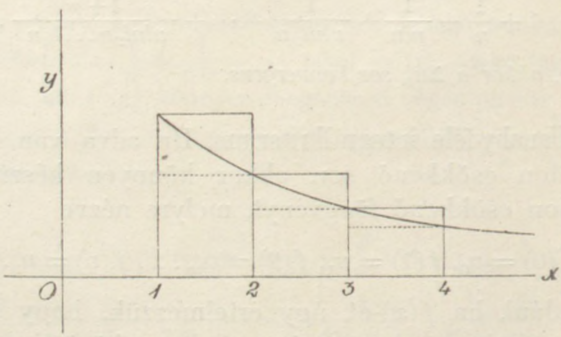
$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

véges, (tehát konvergens) és a $\Sigma f(n)$ *divergens, ha* $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$ *divergens.* Az alsó határul felvett α tetszés szerinti véges pozitiv szám. Az általánosság csorbítása nélkül α egész számnak választható.

Az $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergens, ha $\lim\limits_{y=\infty} \int_{\alpha}^{y} f(x)\,dx$ véges; divergens, ha $\lim\limits_{y=\infty} \int_{\alpha}^{y} f(x)\,dx$ végtelen. Vegyük az első esetet:

Az $\int_{\alpha}^{y} f(x)\,dx$ integrált növeljük, ha $f(x)$ helyett olyan függvényt választunk, mely $\alpha \ldots \alpha+1$ közben: $f(\alpha)$, $\alpha+1 \ldots \alpha+2$ közben $f(\alpha+1), \ldots$ általában az $n \ldots n+1$ közben: $f(n)$; ellenben az integrált csökkentjük, ha $f(x)$ helyett olyan függvényt választunk, mely minden $n \ldots n+1$ közben: $f(n+1)$. Így tehát:

$$f(\alpha+1) + f(\alpha+2) + \cdots + f([y+1])(y-[y]) <$$
$$< \int_{\alpha}^{y} f(x)\,dx < f(\alpha) + f(\alpha+1) + \cdots + f([y])(y-[y])$$



19. ábra.

($[y]$ jelenti az y-ban levő legnagyobb egész számot. Jelöljük ezt m-el). (Ennek az egyszerű állításnak geometriai jelentése az, hogy az $y=f(x)$ által határolt terület kisebb, mint a mellékelt ábrában rajzolt külső derékszögű négyszögekből alakitott idom területe és nagyobb, mint a belsők területeinek összege.)

Eszerint tehát, S_m-el jelölve az

$$f(\alpha)+f(\alpha+1)+f(\alpha+2)+\cdots+f(m)$$

részletösszeget:

$$S_m-f(\alpha)+f(m+1)(y-m)<\int_\alpha^y f(x)\,dx<S_{m-1}+f(m)(y-m). \qquad C)$$

Ha már most y minden határon túl nő és $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx=A$, akkor ($S_m$ mindig kisebb levén $A+f(\alpha)$-nál), az m-mel növekvő S_m-nek meghatározott limese van, tehát a $\Sigma f(n)$ sor konvergens.

Ha pedig $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ divergens integrál, akkor pedig S_{m-1}, mely $\int_\alpha^y f(x)\,dx-f(m)(y-m)$-nál nagyobb, szintén minden határon túl nő, [mert a pozitiv $f(x)$ monoton csökkenő és $0\leq y-m<1$] tehát a $\Sigma f(n)$ divergens sor.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha $f(x)$ monoton csökkenő pozitiv függvény, akkor a $\Sigma f(n)$ végtelen sor az $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ integrállal egyszerre konvergens vagy divergens.

Még ennél valamivel többet is mondhatunk. Ha a $C)$ alatti egyenlőtlenségben y helyett m-et írunk, akkor ez az egyszerűbb reláció

$$S_m-f(\alpha)<\int_\alpha^m f(x)\,dx<S_{m-1}$$

lesz belőle. Az egyenlőtlenség minden tagját S_{m-1}-ből kivonva, következik:

$$0<S_{m-1}-\int_\alpha^m f(x)\,dx<f(\alpha)-f(m). \qquad \beta)$$

Ha a sor (és így az integrál is) konvergens, akkor ez az egyenlőtlenség azt mondja, hogy:

$$\lim_{m=\infty}\left[S_{m-1}-\int_\alpha^m f(x)\,dx\right]=S-\int_\alpha^\infty f(x)\,dx\leq f(\alpha).$$

A szóban forgó végtelen sor összege tehát az $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ integráltól kevesebbel tér el, mint amekkora az első tag.

Vizsgáljuk az $S_{m-1}-\int_\alpha^m f(x)\,dx$ különbséget tekintet nélkül a sor konvergenciájára. Evégből számítsuk ki e különbséget:

$$(S_{m-1}-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx)-(S_m-\int_{\alpha}^{m+1} f(x)\,dx)=-f(m)+\int_{m}^{m+1} f(x)\,dx.$$

A jobboldalon álló integrál kisebb $f(m)$-nél, tehát a jobboldali kifejezés negativ, vagyis az $S_{m-1}-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx$ az m-mel nő; de másrészt az előbbi β) alatti egyenlőtlenség szerint e különbség $f(\alpha)$-nál kisebb, tehát arra jutottunk, hogy a $\lim\limits_{m=\infty}[S_{m-1}-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx]$ létezik és $f(\alpha)$-nál nem nagyobb, akár konvergens a végtelen sor, akár divergens. Ebből megállapítható az $S_m-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx$-re is egy felső korlát; ugyanis

$$S_m-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx=(S_m-S_{m-1})+(S_{m-1}-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx)=$$
$$=f(m)+(S_{m-1}-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx)$$

A zárójelben álló kifejezésnek van $f(\alpha)$-nál kisebb limesze, ha továbbá $\lim f(m)=c$, akkor ebből erre az eredményre jutunk:

$$\lim_{m=\infty}(S_m-\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx)\leq c+f(\alpha).$$

A végtelen sor és az integrál kapcsolata alapján újból rámutatunk a monoton csökkenő sor konvergenciájának egyik szükséges kriteriumára. Az $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$ monoton csökkenő függvény esetében csakis akkor lehet konvergens, ha (I. k. 405. l.)

$$\lim_{x=\infty} x f(x)=0,$$

tehát a $\Sigma f(n)$ pozitiv tagú monoton csökkenő sor konvergenciájának is szükséges feltétele a $\lim\limits_{n=\infty} nf(n)=0$ reláció.

A *Cauchy*-kriteriumot igen jól használhatjuk a sorok konvergenciájának megítélésénél. Így például, ha $f(x)$ gyanánt $\frac{1}{x^k}$-t választjuk, akkor:

$$\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{x^k}$$

integrálról tudjuk, hogy konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k\leqq 1$, tehát megint egyszerű módon jutottunk arra, hogy a hiperharmonikus sor: $\sum\frac{1}{n^k}$ konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k\leq 1$. Az előbbi megjegyzésekből még az is következik, hogy ($\alpha=1$ téve)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}$$

pozitiv és 1-nél kisebb és hogy e különbségnek van határértéke, vagyis

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

véges és meghatározott, 1-nél kisebb pozitiv szám. E számot «az Euler-féle állandó»-nak hívják, C-vel jelölik és értéke: $C=0{,}5772156649015328606\ldots$

Nemcsak ezen igen egyszerű esetben, hanem a Bertrand-sorokra is azonnal alkalmazható ez az új kriterium. Tudjuk ugyanis, hogy az m-szeresen iterált $\log\log\ldots\log x = l_m x$ differenciálhányadosa:

$$D_x[l_m(x)] = \frac{1}{x\,lx\,l_2x\ldots l_{m-1}(x)},$$

tehát, ha $f(x)$ gyanánt $\frac{1}{x\,lx\,l_2x\ldots l_{m-1}(x)}$ monoton csökkenő függvényt választjuk, akkor:

$$\int_a^y \frac{dx}{x\,lx\,l_2x\ldots l_{m-1}x} = l_m(y) - l_m(a),$$

tehát az $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrál divergens és így a

$$\sum \frac{1}{n\,ln\,l_2n\ldots l_{m-1}(n)}$$

sor divergens. Ha pedig $f(x) = \frac{1}{x\,lx\,l_2x\ldots[l_m(x)]^\beta}$ és figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{1}{1-\beta} D_x[l_m(x)]^{1-\beta} = \frac{1}{x\,lx\,l_2x\ldots[l_m(x)]^\beta},$$

akkor:
$$\int_a^y \frac{dx}{x\,lx\,l_2x\ldots[l_m(x)]^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left\{(l_m y)^{1-\beta} - (l_m a)^{1-\beta}\right\}.$$

Ha $\beta>1$, a jobboldali kifejezés első tagjának limese 0 és így az $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrál konvergens, tehát a

$$\sum \frac{1}{n\,ln\,l_2n\ldots(l_m n)^\beta}$$

konvergens, ha $\beta>1$.

15. A Riemann-féle integrál-kriterium. Az imént tárgyalt *Cauchy*-féle integrálkriterium így is fogalmazható: *Ha adatik egy $f(x)$ monoton csökkenő pozitiv függvény és a Σu_n végtelen sorban $f(n) \geq u_n \geq f(n+1)$, akkor a Σu_n sor az $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrállal egyszerre konvergens vagy divergens.* Az előbbi fogalmazástól csak annyiban térünk el, hogy az u_n-et $f(n)$ és $f(n+1)$ között is megengedjük. De világos, hogy ha $\Sigma f(n)$ konvergens, akkor Σu_n is az és ha $\Sigma f(n)$ divergens, vagy másképp: $\Sigma f(n+1)$ divergens, akkor Σu_n szintén divergens.

Másképen a Cauchy-kriterium ezen feltételét így is mondhatjuk: az $f(x)$ pozitiv monoton csökkenő függvény $f(n)$ és $f(n+1)$ értékei közé a Σu_n sornak *egy tagja* esik, vagyis a Σu_n sor $f(n)$-nél nagyobb tagjainak száma: $n-1$. A Cauchy-féle kriteriumot használhatjuk akkor is, ha a Σu_n sor olyan, hogy $f(n)$ és $f(n+1)$ közé nem egy tagja esik, hanem k számú, vagy még akkor is, ha $f(n)$ és $f(n+1)$ közé az n-el változó számú tag jut, mondjuk α_n, de úgy, hogy $1 \leq \alpha_n < M$.* Ugyanis, ha azokat a tagokat, amelyek $f(n)$ és $f(n+1)$ közé esnek, (az alsó korlátot beleértve) összefoglaljuk és U_n-nel jelöljük, akkor:

$$U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \cdots + U_n \leq M\left\{f(a) + f(a+1) + \cdots + f(n)\right\}$$
és
$$U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \cdots + U_n \geq f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(n+1).$$

* Ez esetben nem is tételezzük fel, hogy Σu_n tagjai monoton csökkenőek.

De az $f(a)+f(a+1)+\cdots$ sorról tudjuk, hogy $\int_a^\infty f(x)\,dx$-el egyszerre konvergens vagy divergens, tehát a következtetést éppen úgy végezhetjük, mint az előbbi, egyszerűbb esetben.

Felmerül már most az a kérdés, hogy hát ha a Σu_n sornak az $f(n)$ és $f(n+1)$ számértékek közé eső tagjai az n-nel változó számúak ugyan, de nem korlátos számúak, hanem az előbb α_n-el jelölt szám, mely megmutatja, hogy $f(n)$ és $f(n+1)$ közé hány tagja esik a Σu_n sornak, az n-el korlátlanul növekszik: mi a kritériuma Σu_n konvergenciájának?

Ha az α_n korlátlanul nő, akkor természetesen az $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}=l_n$ is korlátlanul nő, még pedig úgy, hogy $l_{n+1}-l_n$ is korlátlanul nő. Ez az l_n a Σu_n azon tagjainak számát jelenti, amelyek $f(n)$-nél nagyobbak.

Az $l_1, l_2, l_3, \ldots$ monoton növekvő számsorozat. Legyen $g(x)$ egy olyan, monoton növekvő korlátlan függvény, mely kielégíti ezeket az egyenlőtlenségeket:

$$l_n \leq g(n), \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

úgy, hogy a $g(x)$ mintegy az $f(x)$-nél nagyobb tagok számának a meghatározására szolgál.

Ezek előrebocsátása után ismertetjük *Riemannak* a felvetett kérdésre vonatkozó eredményét abban az egyszerű alakban, amelyben ezt *Hurwitz* közölte.* A Riemann-féle konvergencia-kriterium a következő:

Ha $f(x)$ monoton csökkenő függvény, melyre nézve $\lim_{x=\infty} f(x)=0$ és $g(x)$ egy, az x-szel együtt korlátlanul monoton növekvő, pozitiv, differenciálható függvény, továbbá l_x jelenti a Σu_n pozitiv tagú monoton fogyó sor azon tagjainak a számát, amelyek $f(x)$-nél nagyobbak és $l_x < g(x)$, akkor a Σu_n konvergens, ha $\int_a^\infty f(x)g'(x)\,dx$ integrál konvergens. (α tetszésszerinti véges szám.)

A Cauchy-tétel ennek nyilván speciális esete. Ha ugyanis $f(n)$ és $f(n+1)$ között a sornak csak egy tagja van, akkor $l_n=n-1$ és így $g(x)$ gyanánt x választható, tehát a szóban forgó integrál: $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

A tétel bizonyítása a következő: Legyen m $g(1)$-nél nagyobb egész szám. Határozzuk meg az x_0-t úgy, hogy $g(x_0)=m$ legyen. [$g(x)$ korlátlanul monoton nő, tehát ilyen x_0 érték van és pedig csak egy.] A Σu_n sorban $f(x_0)$-nál nagyobb tagok száma: $l_{x_0} < g(x_0) = m$.

Határozzuk meg most az x_1-et úgy, hogy $g(x_1)=m+1$ legyen. Nyilván: $x_1 > x_0$. Ekkor az $f(x_1)$-nél nagyobb tagok száma: $l_{x_1} < g(x_1) = m+1$. Így haladva határozzuk meg az $x_2, x_3, \ldots$ számokat, hogy $g(x_2) = m+2$, $g(x_3) = m+3, \ldots$ legyen. Nyilván $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ és az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ számsorozat a végtelenbe nő.

Az állítjuk már most, hogy $u_{m+1} < f(x_1)$; mert hiszen az $f(x_1)$-nél nagyobb tagok száma $g(x_1)$-nél, azaz $m+1$-nél kisebb, a sortagok pedig feltételünk szerint monoton fogynak; tehát az $m+1$-ik tag mindenesetre $f(x_1)$-nél már kisebb. Éppen így:

$$u_{m+2} < f(x_2),\ u_{m+3} < f(x_3), \ldots u_{m+k} < f(x_k);$$

tehát: $$u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+k} < f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k).$$

De az $f(x_i)$ így is írható:

* *Hurwitz:* Über Riemann's Convergenzkriterium. Math. Annalen, 44. kötet.

$$f(x_i)=f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x)\,dx,$$

mert hiszen $g(x_i)-g(x_{i-1})=1$. Így tehát:

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}<f(x_1)\int_{x_0}^{x_1} g'(x)\,dx+$$

$$+f(x_2)\int_{x_1}^{x_2} g'(x)\,dx+\cdots+f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)\,dx.$$

De másrészt $f(x)$ monoton csökkenő és $g(x)$ növekvő (tehát $g'(x)$ pozitiv) lévén,

$$f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x)\,dx<\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,g'(x)\,dx,$$

tehát:
$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}<\int_{x_0}^{x_k} f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Ha már most $\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ konvergens integrál, akkor az $\int_{x_0}^{x_k} f(x)\,g'(x)\,dx$ mindig egy véges korláton alul marad. Ha tehát k korlátlanul nő, a baloldali összeg mindig e véges számon alul marad, vagyis az $u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots$ és vele együtt a Σu_n is konvergens. Ezzel a tétel első részét igazoltuk.

A Riemann-Hurwitz-féle kriterium egy második része így hangzik: *Ha $f(x)$ monoton csökkenő pozitiv értékkészletű függvény* és $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=0$, $g(x)$ *az x-szel korlátlanul s monoton nő és a Σu_n pozitiv tagú, monoton fogyó sorban az $f(x)$-nél nagyobb tagok száma $l_x>g(x)$, továbbá $\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ divergens integrál, akkor Σu_n is divergens.*

A Cauchy-féle kriterium ennek is speciális esete. Ugyanis, ha $f(n)\geq u_n\geq f(n+1)$, akkor $g(x)$ gyanánt $x-2$ választható.

Az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ számoknak az előbb megállapított jelentést tulajdonítva, most $u_{m+k}>f(x_k)$. Ugyanis az $f(x_k)$-nál nagyobb tagok száma: $l_{x_k}>g(x_k)=m+k$, a sortagok pedig monoton fogynak, tehát az u_{m+k} még ezek közé tartozik és így: $u_{m+k}>f(x_k)$. Eszerint:

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}>f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)$$

és így az előbbi gondolatmenetet követve:

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}>f(x_1)\int_{x_1}^{x_2} g'(x)\,dx+\cdots+f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(x)\,dx.$$

De
$$f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)\,dx>\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,g'(x)\,dx,$$

tehát:
$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}>\int_{x_1}^{x_{k+1}} f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Ha tehát $\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ divergens, akkor az $u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}$ a k-val minden határon túl nő, tehát a Σu_n divergens.

Ezzel a tétel második részét is bebizonyítottuk.

XII. FEJEZET.

VÉGTELEN SOROKKAL VALÓ MŰVELETEK.

1. Összeadás és kivonás. Ha a Σu_n és Σv_n végtelen sorok konvergensek, és az első összege s, a másodiké σ, akkor, miként már láttuk, a

$$\Sigma(u_n+v_n)$$

sor is konvergens és összege $s+\sigma$. Hasonlóképpen a $\Sigma(u_n-v_n)$ is konvergens, összege $s-\sigma$.

Ugyanis, ha a Σu_n n-ik részletösszege: s_n, a Σv_n-é pedig σ_n, akkor a $\Sigma(u_n \pm v_n)$ n-ik részletösszege:

$$S_n = s_n \pm \sigma_n$$

és így:
$$\lim S_n = \lim s_n \pm \lim \sigma_n = s \pm \sigma.$$

Azt is könnyen beláthatjuk, hogy a konvergens sorok összeadására vonatkozó ezen eljárás nemcsak két, hanem tetszés szerinti véges számú összeadandó esetében is érvényes. Azt is rögtön beláthatjuk, hogy ha az összeadandó sorok abszolut konvergensek, az összeg-sor is abszolut konvergens. Ugyanis, ha $R_{n,k}$ jelenti az összeg-sorra nézve az:

$$|u_{n+1}+v_{n+1}| + |u_{n+2}+v_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}+v_{n+k}|$$

maradéktagot és $r_{n,k}$, meg $\varrho_{n,k}$ az $|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}|$, illetőleg $|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \cdots + |v_{n+k}|$ maradéktagok, akkor:

$$R_{n,k} \leqq r_{n,k} + \varrho_{n,k}.$$

Ha már most N-et oly nagyra választjuk, hogy $r_{n,k}$ és $\varrho_{n,k}$ a k-tól függetlenül $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb legyen, ha $n>N$, akkor egyúttal $R_{n,k}<\varepsilon$, ha $n>N$ (k-tól függetlenül). Ugyanez áll több (véges számú) összeadandó esetére is.

2. Pozitiv tagú végtelen sorok szorzása. *Legyen Σa_n és Σb_n két pozitiv tagú konvergens végtelen sor. Az első összege s, a másodiké σ. Alkossuk meg azt a sort, melynek tagjai:*

$$c_1=a_1b_1,\ c_2=a_1b_2+a_2b_1,$$

$$c_3=a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1,\dots\ c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_nb_1,\dots$$

Azt állítjuk, hogy a Σc_n sor konvergens és összege: $S=s\sigma$. Ezen állítás igazolására írjuk fel az s_n és σ_n részletösszegek szorzatában szereplő tagokat ebben a schemában:

$$\begin{array}{llll} a_1b_1, & a_1b_2, & a_1b_3, & \dots, a_1b_n \\ a_2b_1, & a_2b_2, & a_2b_3, & \dots, a_2b_n \\ a_3b_1, & a_3b_2, & a_3b_3, & \dots, a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1, & a_nb_2, & a_nb_3, & \dots, a_nb_n. \end{array}$$

E négyzetes schemában levő szorzatok összege: $s_n\sigma_n$. Ha e négyzetben levő tagokat összegezzük és pedig a baloldali felső saroktól kezdve az $a_nb_1,\dots, a_1b_n$ mellékátlóig bezáróan, mindig ez átlóval párhuzamos egyenesek mentén haladva, akkor:

$$c_1+c_2+c_3+\dots+c_n$$

összeget kapjuk, mely a Σc_n sor n-ik részletösszege: S_n; tehát:

$$S_n < s_n\sigma_n.$$

Vegyük most m-et $\frac{n}{2}$-nek, ha n páros, vagy ha n páratlan szám, $\frac{n-1}{2}$-nek. Az $s_m\sigma_m$ szorzat tagjai a fölírt négyzetnek egy olyan kis saroknégyzetét foglalják el, amely egészen a mellékátló baloldalán terül el; tehát:

$$s_m\sigma_m < S_n$$

és így:

$$s_m\sigma_m < S_n < s_n\sigma_n.$$

Ha n minden határon túl nő, akkor m is végtelenné válik, tehát $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \lim\limits_{m=\infty} s_m = s$ és $\lim\limits_{n=\infty}\sigma_n = \lim\limits_{m=\infty}\sigma_m = \sigma$ és így úgy a jobboldali $s_n\sigma_n$, mint a baloldali $s_m\sigma_m$ határértéke: $s\sigma$, tehát az S_n-nek is van véges határértéke, mely a jobb- és baloldali határértékek közös értékével megegyezik; azaz a Σc_n sor konvergens és összege:

$$S = s\sigma.$$

3. Abszolut konvergens sorok szorzása. Az imént pozitiv tagú konvergens sorokra megállapított szorzási tételt kiterjesztjük azon esetre is, midőn a Σu_n és Σv_n sorok abszolut konvergensek; azaz kimutatjuk, *hogy ha Σu_n és Σv_n abszolut konvergens végtelen sorok, akkor:*

$$w_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + u_3v_{n-2} + \dots + u_nv_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

téve, a Σw_n sor is abszolut konvergens és ha Σu_n összege U, Σv_n-é V, Σw_n-é pedig W, akkor:

$$W = UV.$$

Ha a Σu_n n-ik részletösszege U_n, Σv_n-é V_n, a Σw_n-é pedig W_n és az előbbihez hasonló négyzetes schémába írjuk fel az $U_n V_n$ szorzatot, akkor a mellékátló alatt (a mellékátlótól jobbra) levő tagok összege:

$$U_n V_n - W_n.$$

Jelöljük az $|u_n|$-et a_n-nel, az $|v_n|$-et b_n-nel, az $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$-et c_n-nel és az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ összeget A_n-nel, a $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, illetőleg $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ összegeket B_n-nel és C_n-nel.

A mellékátló alatt levő tagok összegének abszolut értéke nem nagyobb e tagok abszolut értékeinek összegénél, vagyis nem nagyobb az a és b számokból az előbbihez hasonló módon megalkotott schémában a mellékátló alatt levő összegnél, azaz:

$$|U_n V_n - W_n| \leq A_n B_n - C_n.$$

De előbbi bizonyításunk szerint $\lim\limits_{n=\infty} A_n B_n = \lim\limits_{n=\infty} C_n$, tehát:

$$\lim_{n=\infty} (U_n V_n - W_n) = 0$$

és minthogy $\lim U_n = U$, $\lim V_n = V$, tehát $\lim W_n$ is létezik és pedig:

$$\lim W_n = \lim U_n \,.\, \lim V_n.$$

Ha $\lim W_n$-et, melynek létezéséről most már meggyőződtünk, W-vel jelöljük, akkor tehát:

$$W = UV.$$

Megjegyezzük még, hogy

$$|w_n| \leq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = c_n$$

és minthogy a Σc_n konvergens, tehát a $\Sigma |w_n|$ is konvergens, vagyis *a Σw_n szorzatsor abszolut konvergens (Cauchy-tétele).*

Ezzel a szóban forgó tételt bebizonyítottuk.

4. Példa a nem konvergens sorok szorzatára. Az Euler-féle állandó. Az előbbi szorzási eljárás nem vezet mindig konvergens sorra. Meglehet, hogy a Σu_n és Σv_n sorok konvergensek, a Σw_n sor azonban, melyben

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1,$$

nem konvergens. Ennek az igazolására szolgáljon ez a példa: Az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

és a

$$0 + \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \cdots$$

sorok konvergensek; mindkettő azért, mert tagjaik váltakozó előjelűek, csökkenő abszolut értékűek és 0-hoz konvergálók. A szorzatsorban

$$|w_n| = \frac{1}{\log n} + \frac{1}{2\log(n-1)} + \frac{1}{3\log(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\log 2}.$$

Ez a kifejezés nagyobb, mint:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{1}{\log n}.$$

De már láttuk, hogy

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n \qquad \alpha)$$

nagyobb, mint egy bizonyos pozitiv szám, akármekkora pozitiv egész szám is az n vagyis: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{\log n}$ 1-nél nagyobb.

Ebből következik, hogy $|w_n|>1$. A felírt két konvergens sorból létesített szorzatsor tehát nem konvergens.

Az $\alpha)$ alatti differenciára vonatkozó állítást a 304. lapon a Cauchy-féle integrálkritériummal kapcsolatban mutattuk meg; most ugyanezt a Cauchy-féle integráltételtől függetlenül bizonyítjuk be. Kimutatjuk előbb ezt az egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{n+1}<\log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}. \qquad \beta)$$

A középértéktétel szerint: $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\vartheta x)^2}$; $(0<\vartheta<1)$ és így:

$$\log\frac{n+1}{n}=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

Másrészt pedig:

$$\log\frac{n+1}{n}=-\log\frac{n}{n+1}=-\log\frac{n+1-1}{n+1}=$$

$$=-\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{2\left(1-\frac{\vartheta}{n+1}\right)^2}\right)>\frac{1}{n+1};$$

és ezzel a felírt $\beta)$ alatti egyenlőtlenséget igazoltuk.

Ebből következik, hogy ez a végtelen sor:

$$1-\log\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}+\frac{1}{n+1}-\cdots$$

konvergens. Ugyanis váltakozó előjelű, tagjai abszolut értékre csökkenőek, amint éppen most igazoltuk és $\lim u_n=0$. E sornak tehát véges összege van. Jelöljük ezt az összeget C-vel. Ez a C nyilván pozitiv, mert hiszen a sor így is írható:

$$\left(1-\log\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}\right)+\cdots$$

és a $\beta)$ alatti egyenlőtlenségből következik, hogy a zárójelekben álló kifejezések pozitivok. A C-vel jelölt szám így írható:

$$C=\lim_{n=\infty}\left(1-\log\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n=\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right].$$

Ezzel újra kimutattuk azt a nevezetes eredményt, hogy

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right)=C$$

véges, meghatározott pozitiv szám. C az ú. n. Euler-féle állandó. Értéke, mint említettük már: 0·5772156649...

5. **A szorzatsor arithmetikai közepe.** Az előbb láttunk példaképpen olyan két sort, melyekből az ismert eljárással készített szorzatsor divergens volt, bár a két sor maga konvergens. Ez az eset, miként a 3. pont alatti tárgyalásból kitűnik, nem következhetik be, ha a két sor abszolut konvergens. Megmutatjuk már most, *hogy két konvergens sorból alkotott szorzatsor mindig olyan természetű, hogy a részletösszegek arithmetikai közepének van meghatározott határértéke, vagyis a konvergens sorok szorzata mindig szummálható.*

Előre bocsátjuk azt a tényt, melyet már egyszer említettünk, hogy ha $\lim\limits_{n=\infty} a_n=a$, akkor egyúttal

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(L. 266. lapon, ahol $a_i=s_i$).

Ebből a már ismeretes határértéktételből következtetjük ezt az általánosabbat: Ha $\lim a_n=a$ és $\lim b_n=b$, akkor:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$$

Ez valóban általánosítása az előbbinek, mely ebből úgy keletkezik, hogy minden i-re $b_i=1$ tesszük. A most fölírt állítást így bizonyíthatjuk be: Minthogy $\lim a_n=a$ és $\lim b_n=b$, tehát elmehetünk az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ és $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sorozatokban olyan messzire, hogy azontúl minden m-re az

$$|a_m-a|<\varepsilon,\quad |b_m-b|<\varepsilon$$

legyen, hol ε tetszés szerinti kis pozitiv szám. Mondjuk, hogy az ε-hoz tartozó közös küszöbszám N legyen. Tekintsük most az $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$ összeg első felét; azt, amelyben az a indexei közül az utolsó: $\left[\frac{n}{2}\right]$ és legyen $n>2N$. Minthogy ezen részben a b számok indexei mind nagyobbak N-nél, tehát

$$b_k=b+\varepsilon_k$$

tehető, ahol $k>\left[\frac{n}{2}\right]$ és $|\varepsilon_k|<\varepsilon$ és így:

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{\left[\frac{n}{2}\right]}b_{n-\left[\frac{n}{2}\right]+1}=$$

$$=b(a_1+a_2+\cdots+a_m)+a_1\varepsilon_n+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_m\varepsilon_{n-m+1},$$

ahol $\left[\frac{n}{2}\right]$ helyett m-et írtunk.

Így tehát:

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_mb_{n-m+1}}{n}=$$

$$=b\,\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{n}+\frac{a_1\varepsilon_n+\cdots+a_m\varepsilon_{n-m+1}}{n}. \qquad A)$$

A második tag abszolut értékre nézve kisebb, mint:

$$\varepsilon\,\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_m|}{n}$$

amely így is írható:

$$\varepsilon\,\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_m|}{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}$$

és ha n végtelenné válik, $\left[\frac{n}{2}\right]$ is végtelenné lesz, $\lim \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{m=\infty} \frac{|a_1|+\cdots+|a_m|}{m} = |a|,$$

tehát az *A)* alatti kifejezés második tagjának limese: 0.

Az első tag limese pedig $\frac{ab}{2}$, azért, mert

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} = \frac{a}{2}.$$

Éppen így járunk el az $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$ második részével, melyben az a indexei nagyobbak az $\left[\frac{n}{2}\right]$-nél. Erről is megmutatjuk, hogy limesze: $\frac{ab}{2}$ és ezzel bebizonyítottuk, hogy valóban:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

Most már áttérünk a szóban forgó tétel bizonyítására, vagyis annak a megmutatására, hogy a szorzási eljárás szerint alkotott sor, az ú. n. szorzatsor szummálható. Legyenek

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad \text{és} \quad v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots$$

adott *konvergens* sorok és legyenek

$$w_1 = u_1 v_1,\ w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1,\ w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1, \ldots$$

$$w_{n-1} = u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-1} v_1, \ldots$$

tehát az előbb használt

$$u_1+u_2+\cdots+u_k = U_k,\ v_1+v_2+\cdots+v_k = V_k,\ w_1+w_2+\cdots+w_k = W_k$$

jelöléssel: $$W_k = u_1 V_k + u_2 V_{k-1} + \cdots + u_k V_1$$

és így: $$\frac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{n} = \frac{V_1 U_n + V_2 U_{n-1} + \cdots + V_n U_1}{n}.$$

Minthogy pedig $\lim U_n = U$, $\lim V_n = V$ feltevéseink szerint meghatározott véges számok, tehát a most bebizonyított középérték-tétel szerint:

$$\lim_{n=\infty} \frac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{n} = UV$$

és ezzel bebizonyítottuk, *hogy ha Σu_n és Σv_n konvergensek, akkor Σw_n szummálható és szummája (a részletösszegek arithmetikai közepének határértéke)*: UV.

Tehát ha két konvergens sorból alkotott szorzatsor nem is konvergens a szó közönséges értelmében, mindig szummabilis (Cesarò-tétele).

Tudjuk azonban, hogy ha valamely végtelen sor a közönséges értelemben konvergens, akkor szummálható is és szummája megegyezik a közönségesen vett összegével. Ebből a megjegyzésből a végtelen sorok szorzatára vonatkozó *ezen* nevezetes tétel származtatható: *Ha a Σu_n és Σv_n konvergens sorokból megalkotjuk a Σw_n szorzatsort és ez konvergensnek bizonyul, akkor, a szóban forgó sorok összegeit rendre U, V, W-vel jelölvén, biztos, hogy:*

$$W = UV.$$

Ugyanis az arithmetikai középpel vett szummája mindenesetre: UV; de minthogy a Σw_n sor konvergens, tehát a közönséges összeg is ugyanekkora.

Így tehát csak azt kell tudnunk, hogy a Σw_n sor konvergens-e vagy nem; ha konvergens, akkor összege tényleg UV.

6. **Mertens-féle szorzási tétel.** Eddigelé már láttuk, hogy ha Σu_n és Σv_n abszolut konvergensek, akkor Σw_n is abszolut konvergens; másrészt egy példán láttuk, hogy ha Σu_n és Σv_n feltételesen konvergensek [a példában szereplő sorokról ugyanis tudjuk, hogy csak feltételesen konvergensek; az abszolut értékek sora az egyiknél a harmonikus sor, a másodiknál a divergens $\sum \frac{1}{\log n}$ sor], akkor a Σw_n, vagyis két feltételesen konvergens sorból alkotott szorzatsor nem szükségkép konvergens. Hátra van még azon eset, midőn az egyik sor abszolut konvergens, a másik pedig csak feltételesen konvergens. Kimutatjuk, hogy ebben az esetben, *vagyis ha Σu_n abszolut konvergens és Σv_n feltételesen konvergens, a Σw_n szorzatsor mindig konvergens.* Ez a végtelen sorok szorzatára vonatkozó *Mertens*-féle tétel.

Miként előbb láttuk:

$$W_n = u_1V_n + u_2V_{n-1} + u_3V_{n-2} + \cdots + u_nV_1.$$

A $\Sigma|u_n|$ feltételünk szerint összetartó; tehát elmehetünk a sorban olyan messze, hogy azon túl minden m-re és minden k-ra

$$R_{mk} = |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots + |u_{m+k}| < \varepsilon',$$

ahol ε' tetszés szerinti kis pozitiv szám.

A Σv_n is konvergens; tehát elmehetünk olyan messzire, hogy $|V_m - V| < \varepsilon'$ legyen. Mondjuk, hogy e két kivánalomnak megfelelő közös küszöbszám N legyen; azaz, ha $m > N$, akkor egyrészt

$$|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots + |u_{m+k}| < \varepsilon',$$

másrészt:
$$|V_m - V| < \varepsilon'.$$

Legyen már most n tetszés szerinti, $2m$-nél nagyobb szám és $m > N$. Akkor W_n két részre választható:

$$W_n = \underbrace{u_1V_n + u_2V_{n-1} + \cdots + u_mV_{n-m+1}} + \underbrace{u_{m+1}V_{n-m} + u_{m+2}V_{n-m-1} + \cdots + u_nV_1}.$$

Tegyük: $\quad V_n = V + \varepsilon_1, \; V_{n-1} = V + \varepsilon_2, \ldots \; V_{n-m+1} = V + \varepsilon_m,$

akkor $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ abszolut értékre mind kisebbek a megadott ε'-nél. Az első rész tehát így írható:

$$V(u_1 + u_2 + \cdots + u_m) + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \cdots + \varepsilon_m u_m,$$

vagy így:
$$V(u_1 + u_2 + \cdots + u_m) + \varrho,$$

ahol $|\varrho| < \varepsilon' A$, ha $A = \sum\limits_1^\infty |u_k|$.

A második rész abszolut értéke kisebb

$$|u_{m+1}|\,|V_{n-m}| + |u_{m+2}|\,|V_{n-m-1}| + \cdots + |u_n|\,|V_1|$$

-nél, vagy, minthogy a Σv_n sor konvergens és így a Σv_n sor V_k részletösszegei korlátosak, tehát $|V_k|$ egy véges pozitiv számon, mondjuk B-n alul marad, ez a második rész kisebb: $B\left(|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots + |u_n|\right)$-nél. De a zárójelben álló kifejezés feltételünk szerint kisebb ε'-nél, tehát e második rész kisebb $B\varepsilon'$-nél.

Így tehát:
$$W_n = V(u_1 + u_2 + \cdots + u_m) + \varrho + \sigma,$$

ahol $|\varrho| < \varepsilon' A$ és $|\sigma| < \varepsilon' B$. Írjuk a zárójelben álló $u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ helyett $U - (u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots)$ különbséget; ekkor látjuk, hogy:

$W_n = UV - (u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots)V + \varrho + \sigma$; de $|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots| \leq \varepsilon'$, és $|V| \leq B$,

tehát:

$$|W_n - UV| < \varepsilon'(A + 2B)$$

és így:

$$\lim W_n = UV.$$

Így tehát az eddigiekből kitűnik, hogy a) *két abszolut konvergens sorból a Cauchy-féle eljárással alkotott, ú. n. szorzatsor abszolut konvergens és összege a két sor összegének szorzata;*

b) *Két feltételesen összetartó sor szorzata lehet divergens is, de mindenesetre szummálható (azaz a részletösszegei arithmetikai közepének van véges limesze) és a szorzatsor szummája az adott sorok összegeinek szorzatával egyenlő.*

c) *Egy feltételesen összetartó sornak abszolut konvergens sorral való szorzata összetartó és a szorzatsor összege a két adott sor összegeinek szorzatával egyenlő.*

Feladatok és gyakorlatok.

1. Bizonyítsuk be, hogy ezek a sorok konvergensek:

$a)$ $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots$ $\quad b)$ $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \cdots$

$c)$ $\frac{1}{1.(m+1)} + \frac{1}{2(m+2)} + \frac{1}{3(m+3)} + \cdots$ [m pozitiv szám].

2. Bizonyítsuk be, hogy ez a sor divergens: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nb}$. ($\frac{a}{b}$ nem egyenlő valamely negativ egész számmal.)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim \alpha_n = 0$, akkor ez a sor:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \cdots$$

konvergens és összege: $s = \alpha_1$.

4. Ha $s_1, s_2, s_3, \ldots$ szabályos sorozat és $\lim s_n = s$, akkor

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + (s_4 - s_3) + \cdots$$

végtelen sor konvergens és összege: s.

5. Mutassuk meg a 3. alapján, hogy

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

konvergens sor összege: $\frac{1}{2}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy akárminő szám legyen is z, (ha csak nem negativ egész szám)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} + \cdots + \frac{1}{(z+n)(z+n+1)} + \cdots$$

[u. i.: $\frac{1}{(z+n)(z+n+1)} = \frac{1}{z+n} - \frac{1}{z+n+1}$].

7. Bizonyítsuk be, hogy:

$a)$ $$\frac{1}{2}\,\frac{1}{z(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)(z+n+1)(z+n+2)};$$

$b)$ $$\frac{1}{3}\,\frac{1}{z(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)(z+n+1)(z+n+2)(z+n+3)}.$$

8. Tegyük a 3. alatti feladatban:

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{a}, \quad \alpha_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{a+b}, \quad \alpha_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{a+2b}, \ldots$$

és mutassuk meg, hogy ekkor:

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{bc}{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)+c^2}.$$

Így például, ha $a=c=1$, $b=2$,

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

9. Összegezzük ezt a sort:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \cdots$$

[U. i. használjuk ezt a formulát: $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x$; tegyük sorban:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{cotg} \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

s általában:

$$\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{cotg} \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{cotg} \frac{x}{2^{n-1}}.$$

Adjuk össze ezeket az egyenleteket, akkor a baloldalon az előbbi sor első n tagjának összegét, s_n-et kapjuk:

$$s_n = -2 \operatorname{cotg} 2x + \frac{1}{2^n} \operatorname{cotg} \frac{x}{2^n}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\lim s_n = -2 \operatorname{cotg} 2x + \frac{1}{x}.]$$

10. Ha Σu_n konvergens és $a_1, a_2, a_3, \ldots$ korlátlanul és monoton növekedő pozitiv számok, továbbá:

$$s_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n,$$

akkor:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{a_n} = 0.$$

[Ugyanis azt kell kimutatni, hogy n-el olyan messzire mehetünk, hogy mindig $\left|\frac{s_n}{a_n}\right| < \varepsilon$ legyen, ha ε egy tetszés szerinti adott pozitiv szám. Evégből kiindulunk az

$$s_{m+k} - s_m = a_{m+1} u_{m+1} + \cdots + a_{m+k} u_{m+k}$$

egyenletből. Innen:

$$\frac{s_{m+k}}{a_{m+k}} - \frac{s_m}{a_{m+k}} = \frac{a_{m+1}}{a_{m+k}} u_{m+1} + \frac{a_{m+2}}{a_{m+k}} u_{m+2} + \cdots + u_{m+k}. \qquad a)$$

Jelöljük az $\frac{a_{m+1}}{a_{m+k}}, \frac{a_{m+2}}{a_{m+k}}, \ldots \frac{a_{m+k-1}}{a_{m+k}}$ 1-nél kisebb számok sorát $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{k-1}$-el és tegyük:

$$u_{m+1} = \sigma_1, \quad u_{m+1} + u_{m+2} = \sigma_2, \ldots \quad u_{m+1} + \cdots + u_{m+k} = \sigma_k,$$

akkor az $\alpha)$ jobboldalán álló kifejezés így írható:

$$\sigma_1\alpha_1 + (\sigma_2-\sigma_1)\,\alpha_2 + (\sigma_3-\sigma_2)\,\alpha_3 + \cdots + (\sigma_{k-1}-\sigma_{k-2})\,\alpha_{k-1} + (\sigma_k-\sigma_{k-1}),$$

vagyis így: $\quad \sigma_1(\alpha_1-\alpha_2) + \sigma_2(\alpha_2-\alpha_3) + \cdots + \sigma_{k-1}(\alpha_{k-1}-1) + \sigma_k.$

Ha már most az m véges számot úgy választjuk, hogy $|\sigma_p|<\varepsilon'$ minden $p>m$-re, ami tehető, mert a Σu_n sor konvergens, akkor ez a kifejezés, melyben $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3, \ldots$ mind negativok, abszolut értékre kisebb: $3\varepsilon'$-nél, bárminő szám legyen is k. Ha már most k-t oly nagyra választjuk, hogy $\left|\frac{s_m}{a_{m+k}}\right|<\varepsilon'$ legyen, ami tehető, mert a_n korlátlanul nő, akkor $\alpha)$ szerint

$$\left|\frac{s_{m+k}}{a_{m+k}}\right|<4\varepsilon', \quad \text{tehát} \quad \lim_{n=\infty}\frac{s_n}{a_n}=0.$$

Igy például, ha $a_n=n$ és Σu_n konvergens, akkor

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_1+2u_2+3u_3+\cdots+nu_n}{n}=0.$$

11. Ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tetszés szerinti pozitiv számok, akkor ez a sor:

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}+\cdots$$

konvergens.

[Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$s_n = 1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)};$$

ebből következik, hogy a sor konvergens, mert a részletösszegek mind kisebbek 1-nél.]

12. Bizonyítsuk be, hogy a pozitiv tagú Σu_n sor konvergens, ha létezik a pozitiv számoknak olyan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozata, amelyre nézve bizonyos n-től kezdve:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > a_n\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

[A 11. feladatban foglalt konvergens sorral való összehasonlításból következtessük. A Kummer-Jensen kritériumot kapjuk, ha $a_n=\frac{1}{c_n}$ tesszük.]

13. Ha a Σu_n pozitiv tagú sor konvergens (divergens) és s_n az n-ik részletösszege, akkor a $\sum\frac{u_n}{s_n}$ sor konvergens (divergens).

[Ugyanis a két sor megfelelő tagjainak hányadosa: $\frac{u_n}{s_n}:u_n=\frac{1}{s_n}$; tehát ha a Σu_n konvergens, az $\frac{1}{s_n}$ mindig kisebb egy S' véges pozitiv számnál és így a $\sum\frac{u_n}{s_n}$-re a 273. lapon közölt kritérium alkalmazható. Ha pedig Σu_n divergens, akkor

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{s_{n+2}}+\cdots+\frac{u_{n+k}}{s_{n+k}} > \frac{u_{n+1}+\cdots+u_{n+k}}{s_{n+k}} = \frac{s_{n+k}-s_n}{s_{n+k}} = 1-\frac{s_n}{s_{n+k}}.$$

De k úgy választható, hogy $s_{n+k}>2s_n$ legyen, tehát a kérdéses sorban alkalmasan választott n és k értékekre $R_{n,k}>\frac{1}{2}$ bármily nagy is n és így a sor divergens.]

14. Ha Σu_n pozitiv tagú sor *divergens*, akkor ez a sor:

$$\sum \frac{u_n}{s_n^k}$$

konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k \leq 1$. (Abel tétele.)

A tétel második része azonnal következik a 13. feladatból; mert már $\sum \frac{u_n}{s_n}$ is divergens, ha tehát $k<1$, akkor $\frac{u_n}{s_n^k} > \frac{u_n}{s_n}$ és így ez a sor is divergens. Csak az első részt kell bizonyítani. Ez pedig így történhetik:

$$\frac{1}{s_{n-1}^{k-1}} = \frac{1}{(s_n - u_n)^{k-1}} = \frac{1}{s_n^{k-1}\left(1 - \frac{u_n}{s_n}\right)^{k-1}}.$$

De $\frac{1}{(1-x)^\varrho} = (1-x)^{-\varrho}$ a véges Taylor kifejtés szerint:

$$1 + \varrho x + \frac{\varrho(\varrho+1)}{2} x^2 (1-\vartheta x)^{-\varrho-2}$$

és így, ha $0<x<1$, $\varrho>0$, $\frac{1}{(1-x)^\varrho} > 1 + \varrho x$.

A jelen esetben $0 < \frac{u_n}{s_n} < 1$, $\varrho = k-1 > 0$, tehát:

$$\frac{1}{s_{n-1}^{k-1}} > \frac{1}{s_n^{k-1}}\left[1 + (k-1)\frac{u_n}{s_n}\right] > \frac{1}{s_n^{k-1}} + (k-1)\frac{u_n}{s_n^k},$$

$$\frac{u_n}{s_n^k} < \frac{1}{k-1}\left\{\frac{1}{s_{n-1}^{k-1}} - \frac{1}{s_n^{k-1}}\right\}$$

és így, bárminő pozitiv egész szám legyen is p:

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}^k} + \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}^k} + \cdots + \frac{u_{n+p}}{s_{n+p}^k} < \frac{1}{k-1}\left\{\frac{1}{s_n^{k-1}} - \frac{1}{s_{n+p}^{k-1}}\right\} < \frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{s_n^{k-1}},$$

tehát (minthogy $\lim s_n = \infty$ és $k>1$ és a jobboldal független p-től), a $\sum \frac{u_n}{s_n^k}$ sor konvergens.

E szép tételből következnek például a hiperharmonikus sorra vonatkozó kritériumok. Ha u. i.: $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = \cdots = 1$, akkor $s_n = n$; tehát $\sum \frac{1}{n^k}$ konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k \leq 1$. Vagy ha

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad \text{akkor} \quad \sum \frac{1}{n s_n^k}$$

konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k \leq 1$. Ebből egyúttal a *Bertrand*-sorokra is következtethetünk. Ugyanis a 311. lapon közölt segédtétel szerint, ha

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad \text{akkor} \quad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\log n} = 1;$$

tehát a $\sum \frac{1}{n s_n^k}$ sor közvetlenül összehasonlítható a $\sum \frac{1}{n(\log n)^k}$-val és így, ha $k>1$, e sor konvergens, ha $k \gtreqless 1$, akkor divergens.

Ha továbbá a $\sum \frac{1}{n s_n}$ divergens sorban az n-ik részletösszeget s_n'-al jelöljük, akkor $\sum \frac{1}{n\, s_n\, s_n'^k}$ konvergens, ha $k>1$ és divergens, ha $k \leq 1$.

15. Ha $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$ korlátlanul növekvő számok sorozata, akkor a

$\sum \frac{x^n}{a_n^n}$ abszolut konvergens, akárminő számot jelentsen is az x. [Alkalmazzuk a $\sum \left| \frac{x^n}{a_n^n} \right|$-re az $\sqrt[n]{u_n}$-re vonatkozó kritériumot!]

16. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ divergens és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n^2}$ konvergens, [ha csak x nem egyenlő valamely negativ egész számmal].

17. Mutassuk meg, hogy e sor:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x(x+2)}{(x+3)(x+5)} + \frac{x(x+2)(x+4)}{(x+3)(x+5)(x+7)} + \cdots$$

konvergens, ha x nem egyenlő valamely negativ egész számmal és hogy a sor összege: x. [A 3. feladat szerint határozzuk meg sorban $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$-t, ha $\alpha_1 = x$ tétetik; de meg kell mutatnunk, hogy az így meghatározott α_n-re: $\lim \alpha_n = 0$. Ehhez szükségünk lesz a következő állításra:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)}{(x+3)(x+5)\ldots(x+2n+1)} = 0,$$

ámde:
$$\frac{x+2k}{x+2k+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{x+2k}}$$

és
$$\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\left(1+\frac{1}{x+4}\right)\left(1+\frac{1}{x+6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x+2n}\right) >$$
$$> \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4} + \cdots + \frac{1}{x+2n},$$

és minthogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+2n}$ sor divergens, tehát valóban a felírt limes: 0].

18. Legyen $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ és $q > p$, akkor az $1+p+p^2+\cdots$, valamint az $1+q+q^2+\cdots$ sorok konvergensek; e kettőből alkotott:

$$1+p+q+p^2+q^2+\cdots+p^n+q^n+\cdots$$

is konvergens. Mutassuk meg, hogy $\lim \sqrt[n]{u_n}$ és $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ nem léteznek.

19. Ez a sor: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \cdots$ konvergens. Miért? De ha tagjait például olyan sorrendbe helyezzük, hogy minden negativ tag elé 2 pozitiv jusson:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots$$

és e sor $3n$ tagjának összege T_{3n}, az eredeti sor $2n$ tagjának összege S_{2n}, akkor:

$$T_{3n} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

és innen:
$$T_{3n} - S_{2n} > \frac{n}{\sqrt{4n-1}},$$

minek alapján $\lim_{n=\infty} T_{3n} = \infty$, tehát az uj elrendezésben a sor divergens.

20. Bizonyítsuk be, hogy ha a Σa_n abszolut konvergens, akkor az $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ tagokból képezett sor is abszolut konvergens [$n_1, n_2, n_3, \ldots$ tetszés szerinti növekedő indexek].

21. Ha a Σa_n sorban egyetlen tag sem: -1, de valamennyi tag valós, akkor $\Sigma|\log(1+a_n)|$ konvergens, ha $\Sigma|a_n|$ konvergens. [$\log(1+a_n) = \frac{a_n}{1+\vartheta a_n}$ a középértéktétel szerint. Ha $\Sigma|a_n|$ konvergens, akkor bizonyos n-től kezdve $|a_n| < \frac{1}{2}$, tehát $|1+\vartheta a_n| > \frac{1}{2}\cdot$ Folytassuk.]

22. Mutassuk meg, hogy ez a sor:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdots$$

divergens.

23. Bizonyítsuk be, hogy ez a sor:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

x *minden* értékénél abszolut konvergens [például D'Alembert kritériumával].

24. Alkossuk meg e két abszolut konvergens sor szorzatát:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

és mutassuk meg, hogy a szorzatsor n-ik tagja: $\frac{(x+y)^n}{n!}$.

25. Ez a sor: $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx + \cdots$ divergens. (Miért?) Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ akkor szummálható, azaz, hogy részletösszegei arithmetikai közepének van meghatározott véges határértéke. Ez a határérték: $\frac{1}{2}\cdot$ [Ugyanis:

$$s_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(n-1)x =$$
$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(n-1)x\right]\cdot$$

Tegyük: $$s'_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(n-1)x.$$

Ekkor:

$$s'_n \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \cos x \sin\frac{x}{2} + \cos 2x \sin\frac{x}{2} + \cdots + \cos(n-1)x \sin\frac{x}{2}\cdot$$

De: $$\cos kx \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{2k+1}{2}x - \sin\frac{2k-1}{2}x\right]$$

és így: $$s'_n \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{(2n-1)x}{2}\cdot$$

Megint $\sin\frac{x}{2}$-el szorozva:

$$s'_n \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{(2n-1)x}{2}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{4}[\cos(n-1)x - \cos nx],$$

miből: $$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{\cos(n-1)x - \cos nx}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

tehát: $$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\,\frac{1-\cos nx}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

végül: $$\lim \sigma_n = \frac{1}{2}\cdot]$$

26. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_0^\infty a_n$ sor szummálható, azaz létezik a

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}$$

véges határérték. Legyen ez S. Legyen adva a tetszésszerinti kis pozitiv ε. Keressük meg azt az N küszöböt, melyen túl minden n-re teljesítve van, egyrészt az

$$\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n} = S+\varepsilon' \text{ reláció, ahol } |\varepsilon'|<\frac{\varepsilon}{6}, \tag{A)}$$

másrészt $\left|\frac{S}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor tehát ez a reláció is érvényes:

$$\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1} = S+\varepsilon'', \text{ ahol } |\varepsilon''|<\frac{\varepsilon}{6}.$$

$\frac{n+1}{n}$-nel szorzunk mindkét oldalon:

$$\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n} = S+\frac{S}{n}+\varepsilon''\frac{n+1}{n}; \tag{B)}$$

de $\left|\frac{S}{n}+\varepsilon''\frac{n+1}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{3}+2.\frac{\varepsilon}{6}=\frac{2\varepsilon}{3}$ és így a $B)$-ből és $A)$-ból következik, hogy

$$\frac{s_n}{n}=\varepsilon'''; \text{ ahol } |\varepsilon'''|<\varepsilon,$$

vagyis:

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n}{n}=0.$$

Tehát a $\sum a_n$ szummálhatóságának *szükséges* feltétele, hogy $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n}=0$ legyen.

Ebből egyúttal az is következik, hogy $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_{n-1}}{n}=0$ és e kettőből, minthogy $a_n=s_n-s_{n-1}$, következik, hogy a szummálhatóság szükséges feltétele:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n}=0.$$

27. A $\sum a_n$ másodrendűen szummálható, ha létezik mint véges határérték a

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n(n+1)}, \tag{A)}$$

ahol:

$$\sigma_k = s_0+s_1+s_2+\cdots+s_k \quad \text{és} \quad s_m=a_0+a_1+\cdots+a_m.$$

A végtelen sor másodrendű szummájának nevezzük e limes kétszeresét, vagyis a $\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}$ és $\binom{n+1}{2}$ hányadosának határértékét. Jelöljük az $A)$ alatti határértéket S-sel; akkor tehát a fenti n helyett $n+1$-et téve:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_n}{(n+1)(n+2)}=S$$

vagy, ha a $\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_n}{(n+1)(n+2)}$-t $\frac{n+2}{n}$-nel szorozzuk és e szorzat határértékét vesszük, akkor arra jutunk, hogy

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_n}{n(n+1)}=S. \tag{B)}$$

Az $A)$ és $B)$-ből következik:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_n}{n(n+1)}=0.$$

Ebből egyúttal az is következik, hogy $\lim \frac{\sigma_{n-1}}{n(n+1)} = 0$ és e kettőből: $\lim \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{n(n+1)} = \lim \frac{s_n}{n(n+1)} = 0$. Ebből megint rögtön következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_{n-1}}{n(n+1)} = 0$$

és e kettőből: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} = 0$. Minthogy pedig $\lim \frac{n+1}{n} = 1$, tehát:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0.$$

Arra jutottunk tehát, hogy a Σa_n másodrendű szummálhatóságának szükséges feltétele az, hogy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$ legyen.

Bizonyítsuk be a 26) alatti állítást is közvetlenül határértéktételekkel. (ε-ok nélkül!)

28. Bizonyítsuk be, hogy pozitiv tagú divergens sor nem szummálható.

[Ha ugyanis $\sum\limits_0^\infty u_n$ pozitiv tagú divergens sor, akkor $s_n = u_0 + \cdots + u_n$ n-nel együtt a végtelenbe nő, azaz bármilyen nagy szám is A, bizonyos N-től kezdve:

$$s_n > A.$$

A részletösszegek számtani közepe:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} > \frac{(n-N)A}{n} = \left(1 - \frac{N}{n}\right)A,$$

tehát (ε tetszés szerinti kis szám lévén)

$$\sigma_n > A - \varepsilon,$$

ha

$$n > \frac{NA}{\varepsilon}.$$

Eszerint s_n-nel együtt σ_n is végtelenné lesz.]

29. *Hardy-Landau-féle tétel.* Ha Σu_n végtelen sor konvergens, akkor tudjuk, hogy szummálható is és a szummája megegyezik az összeggel; de azt is tudjuk, hogy fordítva nem áll a dolog. Lehet a sor szummálható, bár nem konvergens. *Hardy* elégséges feltételt állított fel arra, hogy a szummálható sor konvergens legyen. Ezt a feltételt *Landau* még egyszerűsítette. Ebben az egyszerűbb alakjában a tétel így hangzik: *Ha a valós'agú Σu_n sor szummálható és nu_n minden n-re nézve nagyobb egy véges $-A$ számnál, ahol A pozitiv, (tehát az nu_n számhalmaz alul korlátos), akkor a Σu_n sor konvergens.*

E nevezetes tétel így bizonyítható be: Legyen az n-ik részletösszeg:

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

és az n-ik arithmetikai közép:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}}{n},$$

akkor tehát feltételünk szerint létezik a $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n$. Legyen ez: S.

Tekintsük ezt a p tagú összeget:

$$s_{m-p} + s_{m-p+1} + \cdots + s_{m-1} = \sum_0^{m-1} s_k - \sum_0^{m-p-1} s_k = m\sigma_m - (m-p)\sigma_{m-p} = p\sigma_{m-p} + m(\sigma_m - \sigma_{m-p}). \qquad \alpha)$$

A baloldalon álló $\sum\limits_{m-p}^{m-1} s_k$ összegben $k < m$ és így ezen összeg minden tagjára nézve

$$s_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = s_m - (u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_m).$$

Minthogy pedig feltételünk szerint: $u_n > -\frac{A}{n}$, tehát a jobboldalon álló kivonandót kisebbítjük, és ezzel a jobboldalon nagyobbítunk, ha minden u_n helyett $-\frac{A}{n}$-et írunk és így

$$s_k < s_m + A\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) < s_m + \frac{(m-k)A}{k}$$

és minthogy $m-p \leq k < m$, tehát a jobboldal még nagyobbodik, ha a számlálóban a k helyett $m-p$-t és a nevezőben is $m-p$-t írunk; vagyis:

$$s_k < s_m + \frac{p}{m-p} A$$

tehát:

$$\sum_{m-p}^{m-1} s_k < p s_m + \frac{p^2}{m-p} A$$

és így, ha p-vel osztunk, az α) alatti egyenlet alapján nyerjük, hogy:

$$s_m + \frac{p}{m-p} A > \sigma_{m-p} + \frac{m}{p}(\sigma_m - \sigma_{m-p}). \qquad 1)$$

Készítsük most el ezt a p tagú összeget:

$$s_m + s_{m+1} + \cdots + s_{m+p-1} = \sum_0^{m+p-1} s_k - \sum_0^{m-1} s_k = (m+p)\sigma_{m+p} - m\sigma_m = p\sigma_{m+p} + m(\sigma_{m+p} - \sigma_m). \qquad \beta)$$

A baloldalon álló $\sum_m^{m+p-1} s_k$ összegben, ahol tehát minden $k \geq m$,

$$s_k = s_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_k > s_m - A\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) > s_m - \frac{(k-m)A}{m}$$

és így, minthogy $k < m+p$,

$$s_k > s_m - \frac{pA}{m}$$

tehát:

$$\sum_m^{m+p-1} s_k > p s_m - \frac{p^2 A}{m}$$

és így ha p-vel osztunk, a β) egyenlet alapján ezt kapjuk:

$$s_m - \frac{pA}{m} < \sigma_{m+p} + \frac{m}{p}(\sigma_{m+p} - \sigma_m). \qquad 2)$$

Az 1) és 2) egyenlőtlenségek fennállanak minden m és $p \leq m$ indexre. Legyen adva a $3A$-nál kisebb, egyébként tetszésszerinti pozitiv ε. Válaszszuk az N küszöbszámot úgy, hogy 1) $|\sigma_m - S| < \frac{\varepsilon}{3}$ legyen, ha $m > N$; 2) $|\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \frac{\varepsilon^2}{18A}$, ha $m > N$ és k tetszésszerinti pozitiv egész szám; 3) $\frac{\varepsilon N}{6A} \geq 1$.

Legyen $m > N$. Válasszuk továbbá p pozitiv egész számot úgy, hogy $p \geq \frac{\varepsilon m}{6A}$ és $p < \frac{\varepsilon m}{3A}$. Minthogy $m > N$, tehát $\frac{\varepsilon m}{6A}$ 1-nél nagyobb szám, $\frac{\varepsilon m}{3A}$ ennek kétszerese, tehát közöttük mindig van egész számnak választható p.

Ekkor tehát a 2) alatti egyenlőtlenségben:

$$\frac{pA}{m} = \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad \sigma_{m+p} = S + \varepsilon'' \text{ ahol } |\varepsilon''| < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad \frac{m}{p} \leq \frac{6A}{\varepsilon}$$

és minthogy $|\sigma_{m+p}-\sigma_m|<\frac{\varepsilon^2}{18A}$, tehát: $\frac{m}{p}|\sigma_{m+p}-\sigma_m|<\frac{6A}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{18A}=\frac{\varepsilon}{3}$
vagyis:

$$s_m<S+\varepsilon$$

és ez fennáll minden N-nél nagyobb m-re.

Egészen hasonló okoskodással következik az 1) alatti egyenlőtlenségből, hogy bizonyos N-en túl, minden m-re nézve

$$s_m>S-\varepsilon$$

Ez a két egyenlőtlenség annyit jelent, hogy

$$\lim_{m=\infty}s_m=S.$$

Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha a valós Σu_n sor szummálható és az nu_n sorozat alul korlátos, akkor a Σu_n konvergens. (Ugyanez áll akkor is, ha nu_n nem alulról, hanem felülről korlátos, mert hiszen akkor $n(-u_n)$ alulról korlátos és a Σu_n sorral a $\Sigma(-u_n)$ sor is egyidőben szummálható.)*

30. *Fejér tétele.*** Hasonló eszmekörbe tartozik *Fejér*nek a következő érdekes tétele: Ha a Σu_n sor szummálható, ahol a sor tagjai valós, vagy képzetes számok és ez a poz. tagú sor: $\sum_1^\infty|\nu u_\nu^2|$ konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens. Ugyanis a Σu_n szummálhatósága azt jelenti, hogy a

$$\sigma_{n+1}=\frac{s_0+s_1+s_2+\cdots+s_n}{n+1}$$

limese létezik. Legyen ez: S. Ha s_k helyett az értékét: $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_k$-t tesszük, akkor

$$\sigma_{n+1}=\frac{(n+1)u_0+nu_1+(n-1)u_2+\cdots+u_n}{n+1}=s_n-\frac{u_1+2u_2+3u_3+\cdots+nu_n}{n+1}$$

vagy röviden írva:

$$\sigma_{n+1}=s_n-\frac{\sum_1^n\nu u_\nu}{n+1}. \qquad A)$$

Válasszuk a p indexet úgy, hogy ha $n>p$, akkor $\sum_{p+1}^n|\nu u_\nu^2|<\frac{\varepsilon^2}{4}$, ahol ε tetszésszerinti kis pozitiv szám. p ilyen választása lehetséges, mert $\Sigma|\nu u_\nu^2|$ konvergens sor.

Láttuk az I. kötet 504. lapján (28. példa), hogy ha $a_1, a_2, \ldots a_m$ és $b_1, b_2, \ldots b_m$ valósak, akkor: $\sum_1^n a_\nu^2\sum_1^n b_\nu^2\geq(\sum_1^m a_\nu b_\nu)^2$. Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget arra az esetre, midőn az a számok rendre: $(p+1)^{\frac12}, (p+2)^{\frac12}, \ldots n^{\frac12}$ és a b számok: $(p+1)^{\frac12}|u_{p+1}|, (p+2)^{\frac12}|u_{p+2}|, \ldots n^{\frac12}|u_n|$. Arra jutunk, hogy:

$$\sum_{p+1}^n\nu\cdot\sum_{p+1}^n|\nu u_\nu^2|\geq(\sum_{p+1}^n|\nu u_\nu|)^2$$

vagyis a p említett választása folytán:

$$\frac{\varepsilon^2}{4}\sum_{p+1}^n\nu\geq(\sum_{p+1}^n|\nu u_\nu|)^2$$

* *Hardy:* Proceedings of the London Mathematical Society 1910, *Landau:* Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy u. Axer. Odbitka z Prac Matematyczno-Fizycznych XXI. Warszawa 1910.

** *Fejér:* Ueber die Convergenz der Potenzreihe etc. Schwarz Festschrift p. 42.

és minthogy

$$\sum_{p+1}^{n}\nu < \sum_{1}^{n}\nu < (n+1)^2,$$

tehát

$$\left(\sum_{p+1}^{n}|\nu u_\nu|\right)^2 < \frac{1}{4}(n+1)^2\varepsilon^2$$

és így

$$\frac{\left|\sum_{p+1}^{n}\nu u_\nu\right|}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

ha csak $n > p$. Válasszuk n-et oly nagyra, hogy a

$$\frac{\left|\sum_{1}^{p}\nu u_\nu\right|}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen, a mi lehetséges, mert a számláló fix p számú tag összege, akkor tehát:

$$\frac{1}{n+1}\left|\sum_{1}^{n}\nu u_\nu\right| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{1}^{p}\nu u_\nu\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{p+1}^{n}\nu u_\nu\right| < \varepsilon,$$

tehát *A)* szerint:

$$\sigma_{n+1} = s_n - \varepsilon',$$

ahol $|\varepsilon'| < \varepsilon$, minden n-re, mely egy bizonyos N-en túl van, vagyis:

$$\lim s_n = \lim \sigma_n = S.$$

XIII. FEJEZET.

VÉGTELEN FÜGGVÉNYSOR ÖSSZETARTÁSA.

1. Végtelen függvénysorok. Legyenek

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots$$

az x valós változónak az $\alpha \ldots \beta$ intervallumban értelmezett, egyértékű, valós függvényei. Ha ξ ezen intervallum valamely helye, akkor az

$$u_1(\xi),\ u_2(\xi),\ u_3(\xi), \ldots$$

meghatározott számértékeket jelentenek. Ezen számértékekkel alkotott numerikus végtelen sor:

$$u_1(\xi)+u_2(\xi)+u_3(\xi)+\cdots$$

konvergens, vagy divergens. Ha e sor a ξ minden értékénél, amely az $\alpha \ldots \beta$ intervallumba esik [a határok beleértésével, vagy ezek nélkül]* konvergens, akkor a $\Sigma u_n(x)$ az $\alpha \ldots \beta$ (zárt, vagy nyilt) köz minden helyéhez egy meghatározott véges értéket rendel (a sor összegét), vagyis az $\alpha \ldots \beta$ közben egy függvényt értelmez: az adott $\sum_1^\infty u_n(x)$ *végtelen függvénysor összegét.*

Jelöljük ezt a függvényt $U(x)$-el; akkor tehát a végtelen sor összegének értelmezése szerint a szóban forgó közben:

$$U(x) = \lim_{n=\infty} [u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)],$$

vagy ha a részletösszegeket sorban így jelöljük:

$$U_1(x)=u_1(x),\ U_2(x)=u_1(x)+u_2(x),\ U_3(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x), \ldots$$

akkor:

$$U(x)=\lim_{n=\infty} U_n(x).$$

Az $U(x)$ az $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x), \ldots$ függvényeknek a *határfüggvénye.*

Igy például az 1, x, x^2, $x^3, \ldots$ végtelen függvénysorozatból alkotott

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

* Ha a határpontok beleértetnek, akkor úgy mondjuk, hogy az $\alpha \ldots \beta$ zárt közben, ellenkező esetben: nyílt közben.

sor konvergens, ha $-1<x<1$. A $-1\cdots+1$ nyilt közben az $U(x)$ határfüggvény: $\frac{1}{1-x}$.

2. Az összegfüggvény folytonossága. A végtelen függvénysor által értelmezett függvény tulajdonságaival kell foglalkoznunk. Először azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy *folytonos függvények végtelen sora folytonos összegfüggvényt ábrázol-e?*

Azt kérdezzük, hogy, ha $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... az $\alpha \ldots \beta$ közben folytonosak, vajjon az $U(x)=\Sigma u_n(x)$ is folytonos-e?

Mutatunk néhány példát, amelyeken feltüntetjük, hogy folytonos függvényekből alkotott végtelen sor összege lehet nem folytonos is.

1. Példa. Vegyük fel előre az $U_n(x)$-et így:

$$U_n(x)=x^{\frac{1}{2n-1}},$$

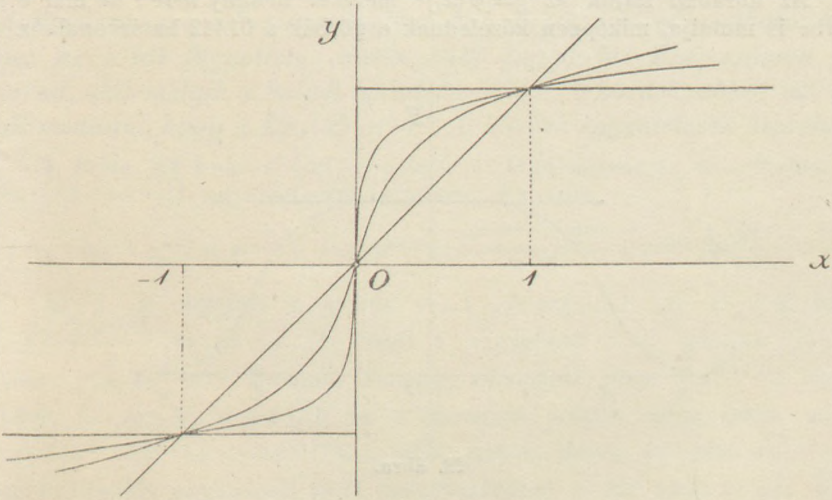
a gyök alatt a valós értéket értve. Ez nyilván folytonos függvénye az x-nek. De ha n végtelenné válik, akkor $\lim x^{\frac{1}{2n-1}}=1$, 0, vagy -1, aszerint, amint $x \gtreqless 0$.

Ha már most e végtelen függvénysort alkotjuk meg:

$$U_1+(U_2-U_1)+(U_3-U_2)+(U_4-U_3)+\cdots+(U_n-U_{n-1})+\cdots,$$

vagyis az
$$x+(x^{\frac{1}{3}}-x)+(x^{\frac{1}{5}}-x^{\frac{1}{3}})+\cdots$$

sort, melynek minden tagja bárminő véges intervallumban folytonos, akkor azt tapasztaljuk, hogy a részletösszegek sorozata: U_1, U_2, U_3, ... U_n, ... és $U=\lim U_n$ nem folytonos olyan közben, mely a 0 helyet is tartalmazza.



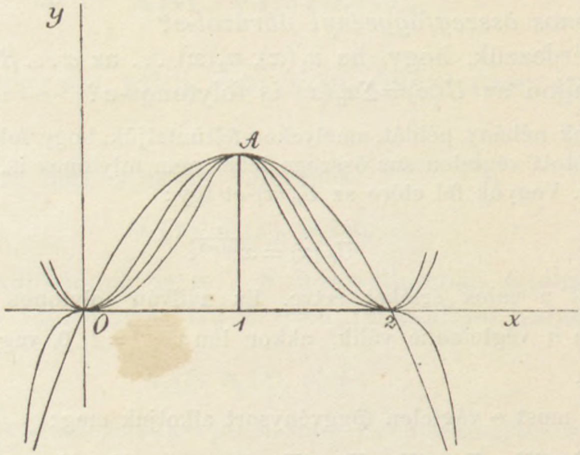
20. ábra.

Az $U(x)$ függvény menetét a mellékelt ábra mutatja. Ezen ábrában feltüntettük egyúttal az U_1, U_2, U_3 menetét is, hogy lássuk, a folytonos függvények képei miképen simulnak a határfüggvény képéhez.

2. *Példa.* Egy másik, egyszerű példa a következő: Legyen

$$\varphi(x)=x(2-x).$$

Ez a 0...2 intervallumban pozitiv és maximális értékét az $x=1$ helyen veszi fel. E maximuma: 1. Igy tehát $[\varphi(x)]^n$ az $x=1$ helyen: 1, másutt a 0...2 intervallumban 1-nél kisebb és így $\lim\limits_{n=\infty}[\varphi(x)]^n=0$, ha $x\neq 1$.

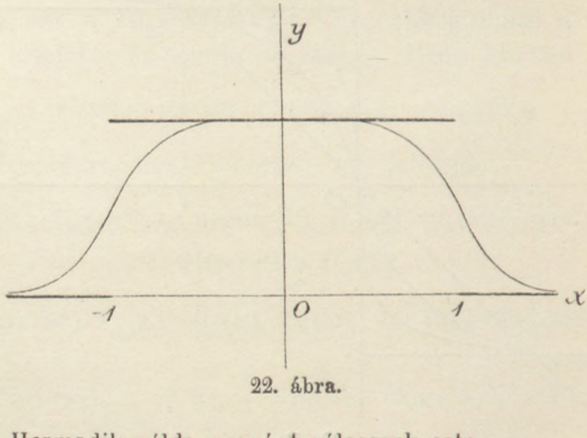


21. ábra.

Ha már most a

$$\varphi(x)+\{[\varphi(x)]^2-\varphi(x)\}+\{[\varphi(x)]^3-[\varphi(x)]^2\}+\cdots$$

végtelen függvénysort alkotjuk meg, akkor folytonos függvényeknek olyan sorával van dolgunk, mely a 0...2 közben mindenütt: 0, az $x=1$ helyen: 1. Az ábrában látjuk az $y=[\varphi(x)]^n$ menetét nehány n-re; de már e pár görbe is mutatja, miképpen közelednek e görbék a $01A12$ határvonalhoz.



22. ábra.

3. *Példa.* Harmadik példa gyanánt válasszuk ezt:

$$U_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}.$$

Ebből: $\lim\limits_{n=\infty}U_n=1$, ha $|x|<1$ és $\lim\limits_{n=\infty}U_n=0$, ha $|x|>1$, végül pedig

$\lim\limits_{n=\infty} U_n(x) = \frac{1}{2}$, ha $|x| = 1$. A határfüggvény menetét a vastagon kihúzott vonal ábrázolja. A vékonyan rajzolt görbe $U_5(x)$ menetét tünteti fel.

Eszerint tehát az

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2-x^4}{(1+x^2)(1+x^4)} + \frac{x^4-x^6}{(1+x^4)(1+x^6)} + \frac{x^6-x^8}{(1+x^6)(1+x^8)} + \cdots$$

végtelen függvénysor olyan függvényt állít elő, mely 0, ha $|x| > 1$; $\frac{1}{2}$, ha $|x| = 1$ és 1, ha $|x| < 1$.

Ezek a példák világosan mutatják, hogy folytonos függvények végtelen sorának összege nem mindig folytonos függvény.

3. Egyenletes összetartás. Kérdés, minő módon kell a végtelen függvénysorok osztályát megszorítanunk, hogy az előbbi pontban észlelt tünemény ne fordulhasson elő. Hogy e kérdésre megfelelhessünk, a konvergenciának egy új fogalmát vezetjük be, melyre a numerikus soroknál nem volt szükségünk.

Tegyük fel, hogy a $\Sigma\varphi_n(x)$ függvénysor konvergens az $a \ldots b$ intervallum minden helyén. Ez azt jelenti, hogy ha megadatik az intervallum ξ helye és megadatik egy tetszés szerinti kis ε, van olyan N küszöbszám, hogy minden pozitiv egész k-ra $|r_{n,k}(\xi)| < \varepsilon$, ha $n > N$. Az $r_{n,k}(\xi)$ jelenti a $\varphi_{n+1}(\xi) + \varphi_{n+2}(\xi) + \cdots + \varphi_{n+k}(\xi)$ maradékösszeget.* *Az ε pontossághoz tartozó N küszöb általánosságban attól a ξ helytől is függ, amelyen a konvergenciát vizsgáltuk.* Ennek a feltüntetésére a ξ helyhez tartozó küszöbszámot N_ξ-vel jelöljük.

Az N_x tehát az x függvényének is tekinthető. *Ha már most az adott tetszés szerinti ε-hoz tartozó $N_x = N_x(\varepsilon)$ úgy választható, hogy egy, az x-től független, csakis ε-tól függő $M = M(\varepsilon)$ számon alul marad, akármelyik x helyét tekintsük az $a \ldots b$ köznek, akkor azt fogjuk mondani, hogy a $\Sigma\varphi_n(x)$ az $a \ldots b$ közben egyenletesen összetartó.*

1. Példa. Az $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ függvénysor az $a \ldots b$ zárt közben $(-1 < a < b < 1)$ egyenletesen összetartó. Ugyanis

$$r_{nk} = x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots + x^{n+k} = \frac{x^{n+k+1} - x^{n+1}}{x-1} = x^{n+1}\frac{1-x^k}{1-x}.$$

Az $1 - x$ nagyobb a pozitiv $\gamma = 1 - b$ számnál, $|1 - x^k| < 2$, tehát: $|r_{nk}| < \frac{2|x|^{n+1}}{\gamma}$ és ha $|a|$, $|b|$ közül a nagyobbat c-vel jelöljük $[|c| < 1]$, akkor: $|r_{nk}| < \frac{2}{\gamma} c^{n+1}$. Ha most N-et úgy választjuk, hogy $\frac{2}{\gamma} c^{N+1} < \varepsilon$ legyen, akkor, ha $n > N$, $a \leq x \leq b$ és k bárminő pozitiv egész szám, mindig $|r_{nk}| = |x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots + x^{n+k}| < \varepsilon$, tehát, miként látjuk, az egész $a \ldots b$ közben beérhetjük ugyanazzal az N küszöbszámmal. A Σx^n tehát az $a \ldots b$ zárt közben egyenletesen összetartó.

* De ha minden k-ra érvényes, hogy $|r_{nk}| < \varepsilon$, akkor, miként már láttuk, egyúttal $|r_{n\infty}|$, vagy röviden $|r_n|$ is kisebb ε-nál vagy egyenlő vele. Ha N küszöbön túl $|r_n| < \varepsilon$, akkor minden k-ra $|r_{nk}| < 2\varepsilon$; tehát az összetartás vizsgálatát r_n, vagy r_{nk} vizsgálatára alapíthatjuk.

2. Példa. Nem így áll a dolog például azzal a sorral, amelyben az n-ik részletösszeg:

$$F_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Ez a végtelen sor a következő:

$$\frac{x}{1+x^2} + \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) + \left(\frac{3x}{1+9x^2} - \frac{2x}{1+4x^2}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right) + \cdots$$

Akárminő számot jelentsen is az x, a sor összege:

$$F(x) = \lim_{n=\infty} F_n(x) = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

A sor összege: $F(x)$, tehát mindig 0.

Ha most kiszemeljük pl.: a $0 \ldots +1$ intervallumot, észrevesszük, hogy bárminő ξ helyét vegyük is e szakasznak, mindig találhatunk egy olyan hozzátartozó N küszöböt, melyen túl a maradékösszeg:

$$|r_n(\xi)| = \left|0 - \frac{n\xi}{1+n^2\xi^2}\right| = \frac{n\xi}{1+n^2\xi^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ugyanis, ha azt akarjuk, hogy $|r_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen, akkor előbb keressük meg azt az n-et, melyre fönnáll:

$$\frac{n\xi}{1+n^2\xi^2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebből:
$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\xi\varepsilon}$$

és minthogy az $\frac{n\xi}{1+n^2\xi^2}$ az n növekedésével fogy, (ha már $n > \frac{1}{\xi}$), tehát a ξ-hez tartozó küszöbszám:

$$N_\xi = \left[\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\xi\varepsilon}\right],$$

ahol a szögletes zárójellel azt jelöltük, hogy a benne levő szám után következő első egész számot értjük. Miként látjuk, ez a küszöbszám a ξ-től függ és ha a szóban levő szakasz $0 \ldots 1$, akkor az N_ξ nem korlátos, tehát nincsen olyan, ξ-től független $N(\varepsilon)$ véges szám, mely nagyobb minden N_ξ-nél.

Ha a szakaszban, vagy a határán 0 nem volna, hanem pl.: $0 < a \leq x \leq b$ intervallumról volna szó, akkor $|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n > N$, mihelyt

$$N > \frac{2}{a\varepsilon}.$$

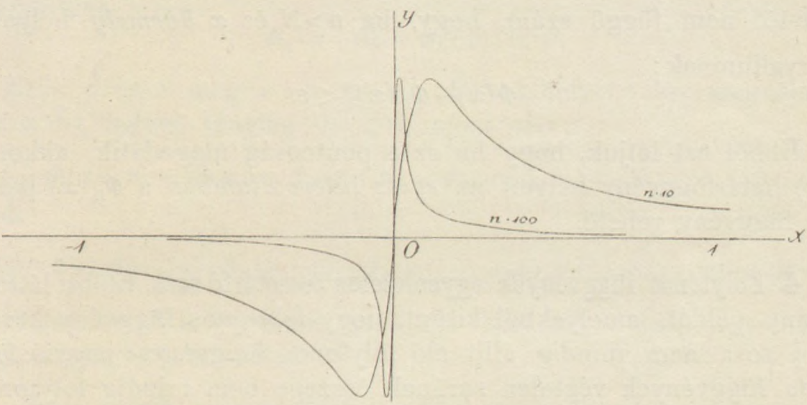
[Ugyanis az N_ξ föntebbi alakjában $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ helyett is 1-et tettünk, ξ helyett a nevezőben pedig a legkisebb a-t. Ezzel N-t nagyobbítottuk.] Ez azt jelenti, hogy ha a föntebbi végtelen sorban $\frac{2}{a\varepsilon}$-nál több tagot veszünk, akkor a sor részletösszege a határfüggvénytől, mely a jelen esetben 0, az $a \ldots b$ intervallum minden helyén $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kevesebbel tér el.

Ha azonban a 0-ig terjed az intervallum, akkor ilyen, közös N számot nem találhatunk.

Hogy e sor ilyen közben nem egyenletesen összetartó, azt a következő módon is beláthatjuk. Az n-ik taggal kezdődő maradéktag

$$r_n(x) = -\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

az $x=\frac{1}{n}$, illetőleg $x=-\frac{1}{n}$ helyen (ahol minimumát, illetőleg maximumát éri el): $-\frac{1}{2}$, illetőleg $\frac{1}{2}$ lesz, tehát nem lehet abszolut értékre nézve a megadott $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb, mihelyt $\varepsilon<1$. A vizsgált sor tehát a 0-t nem tartalmazó közben egyenletesen összetartó, ellenben a 0-t tartalmazó közben nem egyenletesen összetartó. Szemléletessé tehetjük a viszonyokat, ha az $F_n(x)$ részletösszegek menetét vizsgáljuk. $F_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$-nek a $-1\cdots+1$ szakaszban maximuma van az $x=\frac{1}{n}$ helyen és minimuma van a $-\frac{1}{n}$ helyen. Maximuma (minimuma): $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$. A mellékelt ábra $n=10$ és $n=100$ esetében mutatja $F_n(x)$ menetét. Ez ábrán világosan látjuk, hogy miért egyenle-



23. ábra.

tesen összetartó a sor bármely szakaszban, mely a 0-t nem tartalmazza, [ekkor ugyanis olyan messze haladhatunk a sorban, hogy $F_n(x)$ képe tetszés szerinti közel símul az X tengelyhez] és miért nem egyenletesen összetartó az olyan szakaszban, mely a 0-t is tartalmazza. [Ekkor ugyanis, bárminő messze haladjunk is a sorban, még mindig felugrik (lesülyed) az $F_n(x)$-et ábrázoló görbe az $x=\frac{1}{n}\left(x=-\frac{1}{n}\right)$ helyen $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$ magasságra (mélységre)].

3. *Példa.* Legyen:

$$u_1=xe^{-x^2},\ u_2=2xe^{-2x^2}-xe^{-x^2},\ \ldots\ u_n=nxe^{-nx^2}-(n-1)\,xe^{-(n-1)x^2},$$

akkor a sor n tagjának összege: $F_n(x)=nxe^{-nx^2}$ és akárminő értéke legyen is x-nek, miként a L'Hospital-szabállyal kiszámíthatjuk, $\lim_{n=\infty} F_n(x)=0$. E Σu_n végtelen függvénysor összege mindig 0. De a sor nem egyenletesen összetartó, ha az intervallum a 0-t is tartalmazza. Ugyanis $F_n\left(\frac{1}{n}\right)=e^{-\frac{1}{n}}$ és $F\left(-\frac{1}{n}\right)=-e^{-\frac{1}{n}}$; de ha n-et elég nagynak vesszük, $e^{-\frac{1}{n}}$ az 1-től alig különbözik és így nem állapítható meg olyan N szám, melyen túl a 0-t (akárcsak határán is) tartalmazó közben minden x-re nézve:

$$|F_n(x)-0|<\varepsilon$$

lenne.

Az egyenletes konvergencia oly fontos fogalom, hogy a tárgyalt példákon való felvilágosítás után még egyszer visszatérünk az értelmezésére. A $\Sigma\varphi_n(x)$ végtelen függvénysor az $a \ldots b$ szakaszban egyenletesen összetartó, ha a szakasz minden helyén oly módon konvergens, hogy: minden ε-hoz tartozik olyan N küszöbszám, melyen túl levő n-ekre nézve ***minden***, e szakaszba eső x helyen:

$$|r_{n,k}(x)| < \varepsilon, \quad \text{vagy} \quad |r_n(x)| < \varepsilon,$$

vagy másképpen: ha a szakasz minden x helyén konvergens $\Sigma\varphi_n(x)$ sor összegét $\Phi(x)$-el és $\sum_0^n \varphi_m(x)$ részletösszeget $\Phi_n(x)$-el jelöljük, akkor minden megadott ε-hoz tartozik olyan N, *csupán* az ε-tól függő, az x-től nem függő szám, hogy, ha $n>N$ és x *bármely* helye az intervallumnak:

$$|\Phi(x)-\Phi_n(x)| < \varepsilon.$$

Ebből azt látjuk, hogy ha az ε pontosság megadatik, akkor a $\Phi(x)$ határfüggvény helyett az *egész intervallumban* a $\Phi_n(x)$ [közelítő] függvény vehető.

4. Folytonos függvények egyenletesen összetartó sora. Előbb láttunk néhány példát, amelyekből kitünt, hogy folytonos függvények végtelen sora nem mindig állít elő folytonos függvényt; vagyis folytonos függvények végtelen sorának összege nem mindig folytonos. Kimutatjuk, hogy ez a jelenség nem fordulhat elő, ha a függvények sora egyenletesen összetartó a szóban forgó intervallumban. Azaz: *Ha egy végtelen függvénysor tagjai valamely zárt szakaszban folytonosak és a függvénysor e zárt szakaszban egyenletesen összetartó, akkor a végtelen sor összege is folytonos e szakaszban (és pedig egyenletesen folytonos).*

Ha ugyanis az $a \ldots b$ zárt szakaszban

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$$

mind folytonosak és $\Sigma\varphi_n(x)$ egyenletesen összetartó és $\Sigma\varphi_n(x)$ összege: $\Phi(x)$, akkor megmutatjuk, hogy a tetszés szerinti pozitiv ε-hoz tartozik olyan δ küszöbintervallum, hogy az $a \ldots b$ köz minden x helyén:

$$|\Phi(x+h)-\Phi(x)|<\varepsilon,$$

ha $|h|<\delta$ és $x+h$ a közbe esik. [Az a, b határhelyeken csak pozitiv, illetőleg csak negativ h értékekre követeljük ezt.]

Ezen állítás bizonyítása végett vegyük az adott ε harmadrészét: $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$-ot. A sor egyenletesen összetartó lévén, az ε'-hez tartozik egy az $a \dots b$ intervallumra érvényes N küszöbszám úgy, hogy:

$$|r_n(x)| = |\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \cdots| < \varepsilon', \quad \text{ha } n > N,$$

tehát bárminő h-t vegyünk is, ha csak $x+h$ benne van az $a \dots b$ közben, akkor egyúttal:

$$|r_n(x+h)| < \varepsilon', \quad \text{ha } n > N.$$

Legyen:

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + r_n(x),$$

ahol $\Phi_n(x)$, az n-ik részletösszeg és n valamely N-nél nagyobb, megválasztott szám. A $\Phi_n(x)$ n számu folytonos függvény összege, tehát maga is folytonos és így az ε'-hez tartozik olyan δ küszöb-intervallum, hogy:

$$|\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)| < \varepsilon',$$

ha $|h| < \delta$ és x meg $x+h$ az $a \dots b$ köz helyei.* Igy megválasztván a δ-t, legyen tényleg $|h| < \delta$; most már:

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \Phi_n(x+h) - \Phi_n(x) + r_n(x+h) - r_n(x),$$

tehát:

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leqq |\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)| + |r_n(x+h)| + |r_n(x)| < 3\varepsilon' = \varepsilon.$$

Ezzel tehát a $\Phi(x)$-nek az $a \dots b$ szakaszban való (egyenletes) folytonosságát kimutattuk.

Megjegyezzük azonban, hogy ez a tétel nem fordítható meg; azaz: lehet folytonos függvények valamely sora nem egyenletesen összetartó és a sor összege mégis folytonos függvény. Igy például a már említett sor, melynek n-ik részletösszege:

$$F_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

és melyről megmutattuk, hogy a 0-t tartalmazó közben nem egyenletesen összetartó, minden x értéknél 0 összegű, tehát folytonos függvény. Sőt, ha e sor tagjait valamely $f(x)$ folytonos függvényt előállító egyenletesen összetartó sor tagjaihoz rendre hozzáadjuk, nem egyenletesen összetartó sort kapunk, mely ugyancsak az $f(x)$-et állítja elő.

A most bebizonyított fontos tételt még másképpen is fogalmazzuk: A $\Sigma\varphi_n(x)$ sorban x-et fixirozzuk, $x = x_0$ téve. A sor összege: $\Phi(x)$ az x_0 helyen folytonos. Ez azt jelenti, hogy az x_0 helyen a helyettesítési értéke megegyezik a határértékével:

$$\Phi(x_0) = \lim_{x=x_0} \Phi(x).$$

* És pedig, mint már tudjuk, egy és ugyanazzal a δ-val az egész $a \dots b$ szakaszban beérhetjük, [mert ha valamely függvény az ab zárt szakaszban (e szakasz minden helyén) folytonos, akkor egyenletesen folytonos]. (L. I. kötet 69. lap.)

Másrészt azonban: $\Phi(x)=\lim\limits_{n=\infty}\Phi_n(x)$, mert a sor összege a részletösszegek határértéke; tehát:

$$\Phi(x_0)=\lim_{x=x_0}\lim_{n=\infty}\Phi_n(x).$$

Vagy pedig így járhatunk el:

$$\Phi(x_0)=\lim_{n=\infty}\Phi_n(x_0);$$

de $\Phi_n(x)$ az x_0 helyen folytonos, mert hiszen véges számu folytonos függvény összege és így:

$$\Phi_n(x_0)=\lim_{x=x_0}\Phi_n(x);$$

tehát:

$$\Phi(x_0)=\lim_{n=\infty}\lim_{x=x_0}\Phi_n(x).$$

E két egyenlőségből:

$$\lim_{x=x_0}\lim_{n=\infty}\Phi_n(x)=\lim_{n=\infty}\lim_{x=x_0}\Phi_n(x),$$

és ez azt fejezi ki, hogy e kétszeres limesek egyenlők; azaz mindegy: akár előbb összegezzük a sort és azután vesszük az x_0 helyen a határértéket, akár előbb vesszük az x_0 helyen a határértéket, azután összegezzük a sort. Így tehát az az állítás, hogy folytonos függvényeknek valamely intervallumban egyenletesen összetartó sora folytonos határfüggvényt értelmez, még úgy is fogalmazható, hogy: folytonos függvények egyenletesen összetartó sorából alkotott n-ik részletösszegnek minden x_0 helyen, $n=\infty$-re való határértéke olyan kétszeres limes, melyre nézve mindegy, akár előbb az n válik végtelenné és azután x válik x_0-sá, akár fordítva, előbb x válik x_0-sá és azután n végtelenné. [Tudjuk, hogy az ilyen kétszeres limesek nem mindig egyenlők: pl. $\lim\limits_{y=0}\lim\limits_{x=0}\frac{x}{y}=0$ és $\lim\limits_{x=0}\lim\limits_{y=0}\frac{x}{y}=\infty$.

5. **Az egyenletes összetartás egy kriteriuma.** Látjuk, hogy minő fontossága van az egyenletes összetartásnak még gyakorlati szem pontból is. Ugyanis a $\Sigma\varphi_n(x)$ egyenletesen összetartó sor összege helyett egy megadott pontosság mellett az egész intervallumban ugyanazt a részösszeget vehetjük. Éppen ezért kívánatos, hogy olyan kritériummal rendelkezzünk, mellyel az egyenletes összetartásra következtethessünk. Ilyen, *Weierstrass*tól származó kritérium a következő: *Ha a* $|\varphi_n(x)|$ *maximuma az* $a\ldots b$ *közben* M_n *és a* ΣM_n *összetartó, akkor a* $\Sigma\varphi_n(x)$ *ezen intervallumban egyenletesen összetartó.*

Ezt igen egyszerűen beláthatjuk. Ha ugyanis ε adatik, akkor elmegyünk a ΣM_n sorban olyan messzire, hogy:

$$M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+k}<\varepsilon$$

legyen bármely k-ra; ekkor tehát, akárminő értéket is jelentsen x az $a\ldots b$ közben:

$$|\varphi_{n+1}(x)+\varphi_{n+2}(x)+\cdots+\varphi_{n+k}(x)|\leq|\varphi_{n+1}(x)|+\cdots+$$
$$+|\varphi_{n+k}(x)|\leq M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+k}<\varepsilon,$$

tehát valóban a $\Sigma\varphi_n(x)$ egyenletesen összetartó.

Megjegyezzük azonban, hogy ez csak *elégséges*, de nem *szükséges* feltétel. Ezt rögtön belátjuk, ha meggondoljuk, hogy a ΣM_n konvergenciájából nemcsak a $\Sigma\varphi_n(x)$, hanem egyúttal a $\Sigma|\varphi_n(x)|$ egyenletes konvergenciája is következett; vagyis a $\Sigma\varphi_n(x)$ abszolut, egyenletesen konvergens, ha ΣM_n konvergens. Már pedig lehet valamely függvénysor egyenletesen összetartó valamely közben anélkül, hogy abszolut konvergálna. Így például, ha $0 \leq x \leq a < 1$, akkor ez a függvénysor

$$\Sigma\left[x^n + \frac{(-1)^n}{n}\right],$$

mely a Σx^n és $\Sigma\frac{(-1)^n}{n}$ egyenletesen összetartó sorokból keletkezett, egyenletesen összetartó, holott az abszolut értékek sora: $\Sigma\left|(-1)^n x^n + \frac{1}{n}\right|$ széttartó.* Ezzel kimutattuk, hogy a ΣM_n összetartása nem lehet az egyenletes összetartás szükséges feltétele.

6. **Egyenlőtlenül összetartó sor által előállított folytonos függvény.** Bebizonyítottuk, hogy folytonos függvények egyenletesen összetartó sora a szóban forgó intervallumban mindig folytonos függvényt állít elő. De láttunk már olyan függvénysort is (a 330. lapon 2. példa), amely nem egyenletesen összetartó az olyan intervallumban, mely 0-t is magában foglalja és mégis folytonos függvényt állít elő. Egy általános módszert mutatunk, mellyel *Bendixson* ilyen függvénysorokat szerkesztett. Legyen $\Sigma f_n(x)$ az $a \ldots b$ intervallumban nem egyenletesen összetartó, de minden tagja folytonos. A nem egyenletes összetartás abban nyilvánul, hogy van olyan ε, melyhez nem tartozik az egész intervallumban érvényes küszöbszám, azaz bárminő nagynak válasszuk is az N-et, azon túl még mindig van olyan n index, hogy az $a \ldots b$ köz valamely x helyén:

$$|r_n(x)| = |F(x) - F_n(x)| > \varepsilon. \qquad A)$$

[Itt $r_n(x)$ az $f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$ maradék, $F_n(x)$ az n-ik részletösszeg és $F(x)$ a $\lim F_n(x)$ határfüggvény.] [Megjegyzendő, hogy nem minden n-re áll ez az egyenlőtlenség, csak éppen annyit mondunk, hogy minden N-en túl van ilyen n, vagyis végtelen sok n-re áll fenn az $|r_n(x)| > \varepsilon$ egyenlőtlenség valamely (az n-el esetleg változó) x helyen].

Alkossuk meg a maradéktagokkal ezt a végtelen függvénysort:

$$r_1 - r_1 + r_2 - r_2 + \cdots + r_n - r_n + \cdots$$

Ez az ab intervallum minden helyén konvergens, mert feltételünk szerint $\Sigma f_n(x)$ az ab közben mindenütt konvergens és így, ha az ab köz valamely előre kiszemelt helye x_0, akkor a $\Sigma f_n(x)$ sorban elmehetünk olyan messze, hogy $|r_n(x_0)| < \varepsilon$ legyen, ha $n > N$ és ε tetszés szerinti megadott pozitiv szám. Már pedig az $r_1 - r_1 + r_2 - r_2 + \cdots$ sorban a maradékösszeg: $R_{n,k}$ vagy 0 vagy ilyen alakú: r_i vagy $-r_j$, vagy $r_i - r_j$, tehát abszolut értékben mindenesetre kisebbé tehető ε-nál, ha n-nel elég messze megyünk. A sor tehát konvergens; de konvergens sor tagjait tetszés szerint foglalhatjuk össze, tehát így is: $(r_1 - r_1) + (r_2 - r_2) + \cdots$, vagyis végtelen sorunk összege az ab intervallum minden helyén: 0. A függvénysor *összege tehát folytonos függvény*. De az $r_1 - r_1 + r_2 - r_2 + \cdots$ sor nem egyenletesen összetartó. Ugyanis, ha ε gyanánt az $A)$ alatti egyenlőtlenségben szereplő ε-t választjuk, végtelen sok n-et találunk, melyekre nézve az ab intervallum egy-egy helyén $|R_{n1}| > \varepsilon$.

* Numerikus összetartó sor mindig egyenletesen összetartó akármilyen változóra nézve. Két egyenletesen összetartó sor összege szintén egyenletesen összetartó.

Ilyen módon tehát minden egyenlőtlenül összetartó sorból készíthetünk olyan egyenlőtlenül összetartó sort, melynek összege folytonos függvény.

7. Arzela kritériuma. Az egyenletes összetartás tehát nem szükséges feltétele annak, hogy *folytonos függvények* sorának összege folytonos legyen. Ez csak elégséges feltétel. *Arzela* foglalkozott azzal a kérdéssel*, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy, az $a \ldots b$ zárt közben folytonos függvényekből alakult $\Sigma f_n(x)$ függvénysor által értelmezett $F(x)$ összeg folytonos legyen. Az eredmény kimondása végett bevezetünk egy új fogalmat: a *quasi egyenletes összetartás fogalmát*. A $\Sigma f_n(x)$ sort egyenletesen összetartónak mondtuk az $a \ldots b$ zárt közben, ha bármely pozitiv ε-hoz tartozik N küszöbszám, úgy, hogy $|r_n(x)| < \varepsilon$ legyen a közbe eső minden x-re nézve, ha $n > N$. Tehát ez az egyenlőtlenség: $|r_n(x)| < \varepsilon$, *minden* ilyen n-re nézve fennáll, függetlenül az x-től. Most csak azt kívánjuk, hogy akárminő nagy N-et jelölünk is meg, ezen túl legyen minden, az ab közbe tartozó x-hez található — esetleg x-től függő — *legalább egy* n_x index, úgy, hogy $|r_{n_x}(x)| < \varepsilon$ legyen: de az $a \ldots b$ közben levő összes x helyekhez tartozó n_x indexek egy (N-től függő) $N' > N$ számnál kisebbek legyenek. Vagyis az előbbitől eltérően, most nem kívánjuk, hogy minden x-re nézve fennálljon az $|r_n(x)| < \varepsilon$, ha csak $n > N$ és N független az x-től, hanem az egyes x értékekhez a tetszés szerint megadott N-en túl az N és egy hozzá tartozó $N' > N$ közé eső más meg más n_x indexek tartozhatnak. Most már értelmezzük a quasi egyenletes konvergencia fogalmát.

A függvénysor az $a \ldots b$ közben quasi egyenletesen konvergens, ha 1. az $a \ldots b$ zárt köz minden helyén konvergens és 2., ha egy tetszés szerinti kis ε-hoz és tetszés szerinti nagy N-hez található olyan $N' > N$, hogy bárminő helye is az x az $a \ldots b$ köznek, legalább egy, az $N < n_x < N'$ feltételt kielégítő, (az x-től függő) n_x indexre teljesül az $|r_{n_x}(x)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

És már most azt állítjuk, hogy *folytonos függvények $\Sigma f_n(x)$ végtelen sora az $a \ldots b$ közben akkor és csakis akkor értelmez folytonos függvényt, ha e közben quasi egyenletesen összetartó.*

Először kimutatjuk, hogy a quasi egyenletes összetartás az $F(x)$ folytonosságának elégséges feltétele; vagyis, hogy ha a $\Sigma f_n(x)$ folytonos függvénysor az $a \ldots b$ közben quasi egyenletesen összetartó, akkor a sor összege: $F(x)$ e köz minden helyén folytonos. Evégből csak azt kell megmutatni, hogy az $a \ldots b$ köz minden x' helyéhez és minden pozitiv ε-hoz tartozik olyan δ küszöbintervallum, hogy $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$, ha $|x' - x''| < \delta$.

A $\Sigma f_n(x')$ konvergens, tehát N-et úgy választhatjuk, hogy $|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $n > N$. Ehhez az N-hez és az $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz a quasi egyenletes összetartás folytán tartozik olyan N', hogy minden x-nél alkalmasan választott n_x-re: $|r_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, ahol $N < n_x < N'$. Készítsük el a sor következő részletösszegeit:

$$s_{N+1}(x),\ s_{N+2}(x),\ s_{N+3}(x), \ldots\ s_{N'}(x).$$

Mindezek véges számú folytonos függvény összegei; tehát az $a \ldots b$ minden helyén folytonosak. Keressük meg e függvényekre nézve az x'-hez tartozó, $\frac{\varepsilon}{3}$ pontosságnak megfelelő küszöbintervallumokat. Legyenek ezek:

* Mem. di Bologna 1899. L. még *Pohl*-nak az Arzela eredeti értekezése alapján készült érdekes dolgozatát a Monatshefte der Math. 1905. évi kötetében (p. 54), valamint *Borel* Fonctions de variables réelles c. könyvét (p. 41).

$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{N'-N}$ és közülük a legkisebb: δ. Ekkor tehát, ha n bármelyik, N és N' közötti index, mindig $|S_n(x') - S_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $|x'-x''| < \delta$. [Ha $x'=a$, akkor csak az x'-nél nagyobb, ha $x'=b$, akkor csak az x'-nél kisebb, $|x'-x''|<\delta$ feltételnek eleget tevő x'' értékek jönnek figyelembe.]

Az $F(x') - F(x'')$ növekményt akarjuk kifejezni. Ez így írható:

$$F(x') - F(x'') = F(x') - S_{n_{x''}}(x') + S_{n_{x''}}(x') - S_{n_{x''}}(x'') + S_{n_{x''}}(x'') - F(x'').$$

De: $\quad F(x') - S_{n_{x''}}(x') = r_{n_{x''}}(x')$; $\quad S_{n_{x''}}(x'') - F(x'') = - r_{n_{x''}}(x'')$,

tehát: $\quad |F(x') - F(x'')| \leq |r_{n_{x''}}(x')| + |S_{n_{x''}}(x') - S_{n_{x''}}(x'')| + |r_{n_{x''}}(x'')|$.

A jobboldali első tag kisebb $\frac{\varepsilon}{3}$-nál, mert hiszen $|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha csak $n > N$; már pedig $n_{x''} > N$. A harmadik tag a quasi-egyenletes összetartás miatt kisebb $\frac{\varepsilon}{3}$-nál. A közbenső tag pedig azért kisebb $\frac{\varepsilon}{3}$-nál, mert $|x'-x''| < \delta$ és $n_{x''}$ az N és N' közé esik. Így tehát:

$$|F(x') - F(x'')| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x'-x''| < \delta.$$

Ezzel kimutattuk, hogy $F(x)$ az $a \ldots b$ köz minden helyén folytonos; vagyis azt, hogy a quasi-egyenletes összetartás valóban elégséges feltétele annak, hogy a folytonos függvények sorának összege (egyenletes) folytonos legyen.

Most megmutatjuk, hogy a quasi-egyenletes összetartás az összeg folytonosságának szükséges feltétele. Tegyük fel tehát, hogy a folytonos $f_n(x)$ függvények $\Sigma f_n(x)$ sora az $a \ldots b$ zárt intervallumban mindenütt összetartó és összege: $F(x)$ folytonos. Ha egy tetszés szerinti x' helyet szemelünk ki, akkor megválaszthatjuk N-t úgy, hogy a maradéksor abszolut értéke $|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $n > N$. Az előbbi jelöléseket megtartva:

$$F(x) = S_n(x) + r_n(x).$$

Az $F(x)$-nek az egész $a \ldots b$ zárt közben való folytonosságából, miként ismeretes (I. kötet 69. lap), következik, hogy van olyan, az egész $a \ldots b$-re vonatkozó δ küszöbintervallum, hogy akárhol legyen is az x' az $a \ldots b$ zárt közben (a határhelyeken h-nak csak pozitiv, illetőleg negativ értékeket tulajdonítva):

$$|F(x'+h) - F(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha} \quad |h| < \delta.$$

Minthogy az $S_n(x)$ véges számu folytonos függvény összege, tehát van olyan δ_n, hogy teljesül az $|S_n(x'+h) - S_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ egyenlőtlenség, akárhol legyen is az x', ha $|h| < \delta_n$. Válasszuk a δ és δ_n közül a kisebbiket. Jelöljük ezt δ'_n-nel és legyen $|h| < \delta'_n$. Ekkor tehát:

$$F(x'+h) - F(x') = S_n(x'+h) - S_n(x') + r_n(x'+h) - r_n(x')$$

egyenlőségből következik:

$$r_n(x'+h) = F(x'+h) - F(x') - S_n(x'+h) + S_n(x') + r_n(x'),$$

miből:

$$|r_n(x'+h)| < |F(x'+h) - F(x')| + |S_n(x'+h) - S_n(x')| + |r_n(x')|$$

vagyis: $\quad |r_n(x'+h)| < \varepsilon, \quad$ ha $\quad |h| < \delta'_n \quad$ és $\quad n > N$.

Azt látjuk ebből, hogy ha N-et már megválasztottuk úgy, hogy $n > N$-re

$|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$, akkor minden x' helynek van olyan, az n indextől függő $2\delta'_n$ szélességű környezete, amelynek minden helyén teljesítve van az $|r_n(x)| < \varepsilon$. Ez az $f_n(x)$ függvények és az $F(x)$ határfüggvény folytonosságából következett.

És most a szóban forgó tételt indirekt uton bizonyítjuk be. Ha $\Sigma f_n(x)$ az $a \ldots b$ közben nem volna quasi-egyenletesen összetartó, akkor, ha e közt megfelezzük, nyilván, legalább az egyik félben nem volna quasi-egyenletesen összetartó. Most azt a felet, amelyben nem quasi egyenletesen összetartó, újból megfelezzük s i. t. Ezzel az eljárással eljutunk az $a \ldots b$ köz valamely x' pontjához, melyet körülvevő tetszés szerinti kis $a' \ldots b'$ intervallumban a $\Sigma f_n(x)$ nem quasi-egyenletesen összetartó, vagyis van olyan ε és olyan N, amelyekhez nem választhatjuk az előbb értelmezett n_x-et és N'-et úgy, hogy minden $n_x < N'$ legyen; vagyis az n_x számhalmaz felül nem korlátos, ha $a' \leq x \leq b'$.

De az x' helyen $|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha csak $n > M$ küszöbszámnál, mert hiszen $\Sigma f_n(x)$ minden x helyen összetartó. Az $F(x)$ folytonosságából azonban az is következett, hogy ekkor $|r_n(x)|$ az x'-nak egy bizonyos véges, az $|x-x'| < \delta_n$ egyenlőtlenséget kielégítő környezetében is kisebb ε-nál (δ független x'-től). De az $a' \ldots b'$ tetszésszerinti kicsiny, tehát fix n mellett δ_n-nél kisebbnek is vehető; és így az egész $(a'b')$ közben: $|r_n(x)| < \varepsilon$, ha a fix $n > M$, pl. ha $n = M+1$, tehát nem igaz, hogy az n_x számok felül korlátlanok, mert egyazon n-el is beérjük az egész $a' \ldots b'$ közben. Igy tehát ellenmondásra jutottunk abból a feltevésből kiindulva, hogy $\Sigma f_n(x)$ nem quasi-egyenletesen összetartó az (a, b) közben.

Ezzel kimutattuk, hogy a $\Sigma f_n(x)$ folytonos függvénysor összege az (ab) zárt közben akkor és csakis akkor folytonos függvény, ha e közben quasi egyenletesen konvergens.

Példa. Láttuk, hogy ennek a sornak: $\sum_0^\infty [nxe^{-nx^2} - (n+1)xe^{-(n+1)x^2}]$ összege minden x értéknél: 0, tehát folytonos függvény; de nem egyenletesen összetartó olyan intervallumban, mely a 0-t is tartalmazza; mert hiszen $r_n(x) = nxe^{-nx^2}$ és pl. $x = \frac{1}{n}$ téve: $r_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{1}{n}}$, mely 1-től elenyésző csekélységgel különbözik, ha n elég nagy; tehát nincs olyan N, amelyen túl *minden* n-re és *minden* x-re teljesítve volna $|r_n(x)| < \varepsilon$. Ezzel szemben e függvénysornak tételünk értelmében minden $(0, a)$ közben quasi egyenletesen összetartónak kell lennie. Hogy valóban az, azt így mutathatjuk meg. Legyen adva az ε és N. Legyen $m > \frac{1}{\varepsilon}$ és $m > N$. És vegyük fel a pozitiv ξ számot úgy, hogy pl. $\xi < \frac{1}{m^2}$ és $\xi < a$ legyen. Ekkor a $0 \ldots \xi$ intervallumba eső x-ekre:

$$r_m(x) = mxe^{-mx^2} < m\xi e^{-mx^2} < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

A ξ-től jobbra eső (ξ, a) szakaszban pedig a sor egyenletesen összetartó, mert $|r_n(x)| < nae^{-n\xi^2}$ és ez kisebb mint ε, ha n elég nagy; tehát az adott N-en túl van olyan m', amelyre a (ξ, a) köz minden x helyén: $|r_{m'}(x)| < \varepsilon$; és így az adott ε-hoz találhattunk [és pedig az adott N számnál nagyobb] N' számot $(N' \geq m')$ úgy, hogy minden x-hez tartozik olyan n_x index, mely N és N' közé esik és amelyre: $|r_{n_x}(x)| < \varepsilon$. Jelen esetben csak két értéket vett fel az n_x és pedig a $0 < x < \xi$ szakaszban: m; azon túl: m' értéket.

8. Egyenletesen összetartó sor integrálása. Az egyenletes összetartás a végtelen függvénysornak sok tekintetben olyan jelleget ad, mint a minővel véges tagú sor rendelkezik; ugyanis, ha ε-nyi hibát megengedünk, akkor az egész $a \dots b$ intervallumban a függvénysor összege helyett bizonyos számú első tagjának összege vehető, minthogy az elhagyott rész abszolut értéke ε-nál kisebb. Ez a tulajdonsága vonja maga után, hogy az összegfüggvény integrálható és teszi lehetővé, hogy az ilyen sort az alábbi értelemben az $a \dots b$ közben tagonkint integrálhatjuk, ha a sor minden tagja integrálható függvény.

Ugyanis legyen adva a $\sum\limits_1^\infty f_n(x)$ függvénysor, mely az $a \dots b$ közben egyenletesen összetartó és melynek minden tagja e közben korlátos és integrálható. Jelöljük a sor összegét $F(x)$-el. Azt állítjuk, 1., hogy $\int\limits_a^b F(x)\,dx$ létezik (vagyis $F(x)$ az $a \dots b$ közben integrálható) és 2., hogy

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \sum_1^\infty \int\limits_a^b f_n(x)\,dx,$$

vagyis, hogy a sor összegének integrálját úgy kaphatjuk meg, hogy tagonkint integrálunk és ezeket az integrálokat összeadjuk [ebben természetesen az az állítás is benne foglaltatik, hogy a jobboldali numerikus sor konvergens].

Az $F(x)$-ről, mint korlátos függvények egyenletesen összetartó sorának összegéről azonnal beláthatjuk, hogy az $a \dots b$ zárt közben korlátos és így van felső és alsó integrálja. Először is azt mutatjuk meg, hogy e kettő megegyezik, vagyis hogy $F(x)$ integrálható. Jelöljön ε egy tetszés szerinti kis pozitiv számot. A $\Sigma f_n(x)$ sorban elmehetünk olyan messzire, hogy a maradéktag abszolut értéke $\frac{\varepsilon}{b-a}$-nál kisebb legyen, akármely helyet jelöljön is az x az $a \dots b$ zárt közben. Legyen az $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz tartozó küszöb N és $n>N$, továbbá $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m(x)=S_n(x)$, $\sum\limits_{n+1}^{\infty} f_m(x)=R_n(x)$; akkor

$$F(x)=S_n(x)+R_n(x)$$

alakban írható. Nyilván $S_n(x)$ és $R_n(x)$ korlátosak, tehát vannak alsó és felső integráljaik.

Könnyen beláthatjuk, hogy ha $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ és valamely közben $\varphi_1(x)$ felső határa M_1, φ_2-é M_2, a φ-é pedig M, akkor $M \leqq M_1+M_2$ és ha m_1, m_2 és m a megfelelő alsó határok, akkor $m \geqq m_1+m_2$. Ebből következik, hogy ha φ_1, φ_2 korlátosak, akkor a Darboux-féle integrálokra is a következő egyenlőtlenségek állnak fenn:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\int}\varphi(x)\,dx \leq \overline{\int}\varphi_1(x)\,dx + \overline{\int}\varphi_2(x)\,dx\,; \\ \underline{\int}\varphi(x)\,dx \geq \underline{\int}\varphi_1(x)\,dx + \underline{\int}\varphi_2(x)\,dx.\end{array}\right\} \quad \alpha)$$

Minthogy $\quad \int\limits_{(s)a}^{b} R_n(x)\,dx \leq \varepsilon, \quad \int\limits_{(i)a}^{b} R_n(x)\,dx \geq -\varepsilon,$

tehát az α) alatti egyenlőtlenségeket alkalmazva az $S_n(x) + R_n(x)$-re, arra jutunk, hogy:

$$\int\limits_{(s)a}^{b} F(x)\,dx \leq \int\limits_{(s)a}^{b} S_n(x)\,dx + \varepsilon, \quad \int\limits_{(i)a}^{b} F(x)\,dx \geq \int\limits_{(i)a}^{b} S_n(x)\,dx - \varepsilon.$$

De $S_n(x)$, mint véges számu integrálható függvény összege, integrálható, vagyis az alsó és felső integráljai megegyeznek, tehát a fenti egyenlőtlenségek, tudva, hogy a felső integrál nem kisebb az alsó integrálnál, összefoglalva így is írhatók:

$$\int\limits_{a}^{b} S_n(x)\,dx + \varepsilon \geq \int\limits_{(s)a}^{b} F(x)\,dx \geq \int\limits_{(i)a}^{b} F(x)\,dx \geq \int\limits_{a}^{b} S_n(x)\,dx - \varepsilon \qquad \beta)$$

és ebből következik, hogy:

$$0 \leq \int\limits_{(s)a}^{b} F(x)\,dx - \int\limits_{(i)a}^{b} F(x)\,dx \leq 2\varepsilon,$$

vagyis $F(x)$ felső és alsó integráljai a tetszés szerinti kicsiny 2ε-nál kevesebbel különböznek egymástól, tehát egyenlők egymással, vagyis $F(x)$ integrálható az $a \ldots b$ közben. És ezzel az állításunk első részét bebizonyítottuk.

A második része ebből, és a β) alattiból már következik; ugyanis a β) alatti egyenlőtlenségekből most már az is következik, hogy:

$$\int\limits_{a}^{b} F(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} S_n(x) + \varepsilon',$$

ahol $|\varepsilon'| < \varepsilon$, ha $n > N$ vagyis az, hogy:

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{a}^{b} S_n(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} F(x)\,dx.$$

És ebből azt látjuk, hogy

$$\int\limits_{a}^{b} f_1(x)\,dx + \int\limits_{a}^{b} f_2(x)\,dx + \int\limits_{a}^{b} f_3(x)\,dx + \cdots$$

numerikus végtelen sor konvergens és részletösszegeinek sorozata az $\int\limits_{a}^{b} F(x)\,dx$ (véges) számértékhez konvergál, tehát az $\int\limits_{a}^{b} F(x)\,dx$ integrál e végtelen sor összege. Ezzel állításunk mindkét részét bebizonyítottuk.

Ha a függvénysor egy $a \ldots b$ közben nem is egyenletesen összetartó, mégis megeshetik, hogy összege e közben integrálható függvény és hogy az összeg integrálját a sor tagonként való integrálásával nyerjük, ami azt mutatja, hogy az egyenletes összetartás nem szükséges, hanem csak elégséges feltétele a tagonként integrálhatóságnak. Megeshetik azonban az is, hogy az összegfüggvény integrálható és a sortagok integráljai konvergens sort alkotnak, de e sor összegéül nem az eredeti sor összegének integrálját kapjuk.

Így például ez a sor: $\sum\limits_0^{\infty}[n^2xe^{-n^2x^2}-(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}]$, melynek összege (miként a hasonló példában a 331. lapon láttuk) 0, nem egyenletesen összetartó, ha a szakaszban 0 is benne van. Itt az összeg $F(x)=0$, tehát $\int\limits_0^b F(x)\,dx=0$. Ellenben, ha az n-ik részletösszeget tagonkint integráljuk, erre jutunk:

$$\sum_0^n \int_0^b [n^2xe^{-n^2x^2}-(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}]\,dx =$$

$$= \sum_0^n\left[-\frac{1}{2}e^{-n^2b^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-(n+1)^2b^2}-\frac{1}{2}\right]=\sum_0^n\left(-\frac{1}{2}e^{-n^2b^2}+\frac{1}{2}e^{-(n+1)^2b^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}e^{-b^2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right)+\left(\frac{1}{2}e^{-4b^2}-\frac{1}{2}e^{-4b^2}\right)+\cdots+\frac{1}{2}e^{-(n+1)^2b^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-(n+1)^2b^2}$$

és így az összeg limese: $-\frac{1}{2}$; tehát nem egyezik meg az $\int\limits_0^b F(x)\,dx$-el. (Darboux példája.)

9. Függvénysor tagonkénti differenciálása. Láttuk az előző pontban, hogy integrálható függvényeknek egy közben egyenletesen összetartó sora e közben integrálható függvényt állít elő és hogy e függvény integrálját a tagonkénti integrálással nyert sor összege szolgáltatja. Kérdés, vajjon differenciálható függvények konvergens sora differenciálható függvényt állít-e elő és ha igen, az összegfüggvény differenciálhányadosát megadja-e a tagonkénti differenciálással nyert sor? Általában ez nincs így. De igenis *differenciálható az (ab) közben mindenütt konvergens $\sum\limits_0^{\infty}u_n(x)$ függvénysor összege és differenciálhányadosát e köz minden helyén a tagonkénti differenciálással nyert sor összege adja, ha ezen intervallumban az eredeti sor minden tagjának folytonos differenciálhányadosa van és ha a differenciálással keletkezett $\Sigma u_n'(x)$ sor e közben egyenletesen összetartó.* Ugyanis, ha az $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$ egyenletesen összetartó sor összege: $\varphi(x)$, akkor $a<\alpha<b$ és $a<x<b$ véve, az előbbiek szerint a $\Sigma u_n'(x)$ tagonként integrálható az (αx) közben és

$$\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx=\sum_0^{\infty}[u_n(x)-u_n(\alpha)].$$

De úgy a $\Sigma u_n(x)$, mint a $\Sigma u_n(\alpha)$ összetartó, tehát a jobboldali összeg szétválasztható és ha $\Sigma u_n(\alpha) = C$ tesszük

$$\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx = \sum_0^\infty u_n(x) + C$$

és x felső határ szerint differenciálva (az x a $\Sigma u'_n(x)$-ra vonatkozó feltevések következtében $\varphi(x)$-nek folytonossági helye):

$$\frac{d}{dx}\sum_0^\infty u_n(x) = \varphi(x) = \sum_0^\infty u'_n(x)$$

és ezzel kimutattuk a fönti állítás igazságát.

(Megemlítjük, hogy a fenti feltétel ismét csak elégséges, de nem *szükséges* feltétele annak, hogy a függvénysor összegének differenciálhányadosa a tagok differenciálhányadosainak összege legyen.)

10. Komplex tagú függvénysorok. Mindaz, amit valós változó függvényeinek soráról eddig mondtunk, komplex változó függvényeinek sorára is azonnal átvihető, csak intervallum helyett tartomány teendő. Ha az x komplex változó a sík valamely C görbe belsejébe eső pontjának megfelelő számérték és $\varphi_n(x)$ a hozzárendelt függvényérték, akkor éppen úgy alkothatjuk meg a $\Sigma\varphi_n(x)$ függvénysort, mint előbb. E függvénysor a C görbe határolta tartomány minden helyén [a határ beleértésével, vagy anélkül] összetartó, vagy széttartó lehet. Egyenletesen összetartó e tartományban, ha minden pozitiv ε-hoz tartozik oly N küszöbszám, hogy

$$|\varphi_{n+1}(x) + \cdots + \varphi_{n+k}(x)| < \varepsilon,$$

ha $n > N$, bármily pozitiv egész szám is k és bárminő helyét jelentse x a tartománynak.

A komplex x változó $f(x)$ függvénye *folytonos* az a helyen, ha bármely ε-hoz tartozik egy pozitiv ϱ szám úgy, hogy $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \varrho$, vagyis, ha x a ϱ sugarú, a középpontú körön belül levő pontot jelöl. Ha $f(x)$ a tartomány minden helyén (a határhelyeket is beleértve) folytonos, akkor *egyenletesen* folytonos, azaz a szóban forgó tartomány bármely helyét jelentse is az a, az adott ε-hoz ugyanazon ϱ-val beérhetjük. [E tétel bizonyítása egészen úgy történhetik, mint a 14. lapon láttuk.] Ezen értelmezések alapul vételével éppen úgy, mint előbb, kimutathatjuk, hogy, ha a $\Sigma\varphi_n(x)$ valamely tartományban egyenletesen összetartó és mindenik tagja folytonos, akkor a sor összege: $\Phi(x)$ is folytonos (és pedig egyenletesen folytonos).

Az egyenletes összetartásnak már említett elégséges kritériuma (Weierstrass-féle kritérium, l. 334. lapon) a komplex változó függvényeire is közvetlenül alkalmazható.

XIV. FEJEZET.

A HATVÁNYSOR.

1. Hatványsor konvergenciája. Az előbbiek megvilágosításául, de azért is, mert a függvénysorok között a legfontosabb, tárgyaljuk a hatványsort, melynek általános alakja:

$$A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_n(x-a)^n+\cdots$$

Az A_n együtthatók és a valós vagy komplex állandókat jelentenek, az x pedig valós vagy komplex változót jelöl. Az első kérdés, hogy x minő értékrendszerénél konvergens ez a sor?

Erre vonatkozólag először bebizonyítjuk azt az *Abel*től eredő tételt, hogy *ha a* $\sum\limits_0^\infty A_n x^n$ *hatványsor valamely* ξ $(\neq a)$ *helyen összetartó, akkor mindazon x helyeken, amelyek az a-hoz közelebb vannak, mint a ξ, vagyis, amelyekre nézve* $|x-a|<|\xi-a|$, *abszolut konvergens.*

Ugyanis abból, hogy e sor a ξ helyen konvergens, következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} A_n(\xi-a)^n=0,$$

vagyis, ha kiszemelünk egy tetszés szerinti ε pozitiv számot, akkor tartozik hozzá olyan N küszöb, melyen túl levő minden n-re:

$$|A_n(\xi-a)^n|<\varepsilon.$$

Ha még az első $N+1$ tag abszolut értékei

$$|A_0|,\ |A_1(\xi-a)|,\ |A_2(\xi-a)^2|, \ldots\ |A_N(\xi-a)^N|$$

és ε közül a legnagyobbat M-el jelöljük, akkor elmondhatjuk, hogy a $\Sigma A_n(\xi-a)^n$ sor *minden* tagja abszolut értékre M-nél kisebb.

Legyen már most $|x-a|<|\xi-a|$. Ezen sorban:

$$|A_0|+|A_1|\,|x-a|+|A_2|\,|x-a|^2+\cdots+|A_n|\,|x-a|^n+\cdots,$$

mely az adott hatványsorból úgy keletkezett, hogy minden tagnak abszolut értékét vettük, az általános tag így írható:

$$|A_n|\,|x-a|^n=|A_n|\left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n|\xi-a|^n$$

és minthogy $|A_n|\,|\xi-a|^n<M$, tehát:

$$|A_n|\,|x-a|^n<M\left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n,$$

vagyis a $\sum^{\infty}|A_n|\,|x-a|^n$ pozitiv tagú sor minden tagja kisebb az $M\sum_0^{\infty}\left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n$ sor megfelelő tagjánál. Ez utóbbi sor azonban konvergens, mert feltételünk szerint $\left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|<1$; tehát a $\sum_0^{\infty}|A_n(x-a)^n|$ sor is konvergens minden x-re, ha csak $|x-a|<|\xi-a|$ és ezzel bebizonyitottuk az említett nevezetes Abel-féle tételt.

Ebből a tételből rögtön következtethetünk azon tartomány alakjára, amelyen belül a hatványsor konvergens.

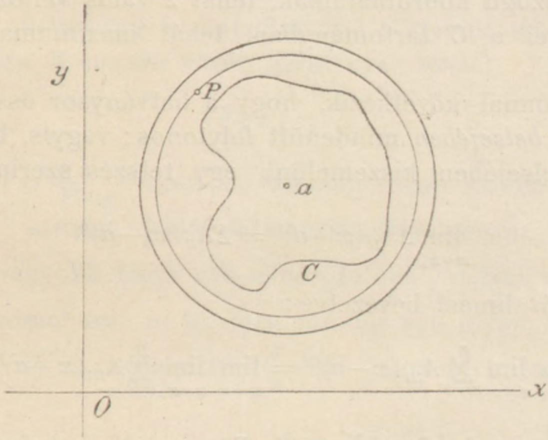
Láttuk ugyanis, hogy ha a ξ helyen $(\xi\neq a)$ a sor konvergens, akkor — hogy röviden szóljunk — az a-hoz közelebb eső helyeken is (még pedig abszolut) konvergens. Ebből az is következik, hogy ha valamely η helyen $(\eta\neq a)$ divergens a sor, akkor minden, a-tól távolabbi helyen is divergens; mert hiszen, ha egy távolabbi x helyen konvergens volna, akkor az előbbi tétel szerint a közelebbi η helyen is konvergens volna, a feltétellel ellentétben.

Ennek a megjegyzésnek igen egyszerű geometriai jelentése van: Ha az adott hatványsor valamely ξ $(\neq a)$ helyen konvergens és az a centrumból a $|\xi-a|$ radiussal kört rajzolunk, akkor a sor e kör *belsejében* minden helyen abszolut konvergens; ha pedig az η helyen divergens, akkor az a körül az $|\eta-a|$ rádiussal rajzolt kör *külsejében* mindenütt divergens.

Ezen alapon most már meghatározhatjuk azon tartomány alakját, amelyen belül a hatványsor konvergens. Meglehet, hogy a sík minden helyén összetartó. Ekkor a hatványsort mindenütt konvergensnek, az általa előállitott függvényt *transcendens egész függvénynek* mondjuk. Meglehet, hogy az $x=a$ hely kivételével, amely helyen a hatványsor A_0 tagjára redukálódik, mindenütt divergens. E két szélső esetet egyelőre hagyjuk ki. Vagyis tegyük fel, hogy van olyan $\xi(\neq a)$ hely, melyen a sor konvergens és olyan η hely, melyen divergens. Nyilván $|\eta-a|>|\xi-a|$. Ha az $|\eta-a|$ rádiussal a középpontból kört rajzolunk, akkor ezen a körön kívül konvergencia-hely nem lehet. A konvergencia-helyeknek az a-tól való távolsága a számok egy korlátos halmaza [egyik sem nagyobb $|\eta-a|$-nál], tehát e távolságoknak van felső határuk; ez *pozitiv*, mert feltevésünk szerint van a sornak az a-tól különböző konvergencia helye (ξ). Legyen ez a felső határ: R. Ez azt jelenti, hogy olyan konvergencia-hely, mely R-nél messzebb volna a-tól, nincsen, ellenben, ha ε (R-nél kisebb, egyébként) tetszés szerinti pozitiv szám, akkor biztosan van olyan x konvergencia-hely, melyre $|x-a|>R-\varepsilon$.

Rajzoljunk az a centrumból R sugárral kört. Azt állítjuk, hogy az adott hatványsor e körön belül levő helyeken (abszolut) konvergens, e körön kívül levőkön pedig divergens, vagyis, *hogy a* $\Sigma A_n(x-a)^n$ *(abszolut) konvergencia-tartományának belseje az* a *centrumból* R *sugárral leírt kör belseje.*

Ugyanis vegyünk fel az R sugarú kör belsejében valahol egy x helyet, azaz legyen: $|x-a|<R$. Rajzoljunk most az a körül egy olyan R' sugarú kört, mely az R sugarún belül van ugyan, de az x pontot magában foglalja. Ezt könnyen tehetjük, csak R'-et úgy kell választani, hogy $|x-a|<R'<R$ legyen. Az R' és R sugarú körök közötti gyűrűben mindenesetre van konvergencia-hely, mert hiszen R a konvergenciahelyek a-tól való távolságainak felső határa volt. Legyen ilyen konvergencia-hely ξ, akkor az Abel-tétel szerint az x helyen a hatványsor szintén konvergens, sőt azt is mondhatjuk,



24. ábra.

hogy abszolut konvergens. Ha pedig x az R sugarú körön kívül van, akkor a sor ott nem lehet konvergens, mert különben R nem lenne a konvergencia-helyek a-tól való távolságainak felső határa.

A hatványsornak az R sugarú körön való viselkedéséről később szólunk, amikor azt a kérdést is fölvetjük, hogy maga a kör kerülete hozzátartozik-e a konvergencia-tartományhoz, vagy nem?

Igazoltuk tehát, hogy az R sugarú kör tényleg a konvergencia tartomány és pedig e *«konvergencia-kör» belsejében* a hatványsor minden helyen abszolut konvergens.

A hatványsor olyan függvénysor, melynek tagjai folytonos függvények. Bebizonyítjuk már most, hogy, ha a konvergencia-kör *belsejében* kiválasztunk tetszés szerint valamely tartományt [pl. az ábrában feltüntetett C görbe belsejét és e görbe pontjait], akkor a *hatványsor e tartományban egyenletesen összetartó,* (tehát összege folytonos függvény).

A bizonyítás igen egyszerűen végezhető az egyenletes összetartás említett Weierstrass-féle kritériuma alapján. Ugyanis megjelölünk az R sugarú konvergencia-körön belül egy P pontot, mely messzebb van az a centrumtól, mint a szóban forgó tartomány bármelyik helye. Legyen e P pont távolsága az a-tól ϱ. Minthogy $\varrho<R$, tehát a

$$\Sigma\,|A_n|\,\varrho^n$$

konvergens. De ha x a C tartomány bármely helye, akkor:

$$|A_n(x-a)^n| < |A_n|\,\varrho^n$$

és így az egyes $|A_n(x-a)^n|$ tagok abszolut értékeinek C tartománybeli maximumaiból alkotott sor konvergens, tehát a $\Sigma A_n(x-a)^n$ a C tartományban egyenletesen összetartó. (Ezen abszolut értékek az x pont derékszögű koordinátáinak, tehát 2 valós változónak folytonos függvényei a C tartományban, tehát maximumaikról joggal beszélünk.)

Ebből azonnal következik, hogy a hatványsor összege a konvergencia-kör *belsejében* mindenütt folytonos; vagyis, ha a konvergencia-kör belsejében kiszemelünk egy tetszés szerinti x_0 helyet, akkor

$$\lim_{x=x_0} \Sigma A_n(x-a)^n = \Sigma A_n(x_0-a)^n$$

vagyis a kettős limest bevezetve:

$$\lim_{x=x_0}\lim_{n=\infty}\sum_{m=0}^{n} A_m(x-a)^m = \lim_{n=\infty}\lim_{x=x_0}\sum_{m=0}^{n} A_m(x-a)^m.$$

2. A konvergencia-kör rádiusa. A $\Sigma A_n(x-a)^n$ hatványsor konvergencia-körének rádiusát akarjuk meghatározni. Erre a következő, Cauchy-tól eredő, újabban *Cauchy-Hadamard*-félének nevezett eljárás szolgál. Alkossuk meg ezt a számsorozatot:

$$|A_1|,\ |\sqrt{A_2}|,\ |\sqrt[3]{A_3}|,\ |\sqrt[4]{A_4}|,\dots\ |\sqrt[n]{A_n}|,\dots \qquad \alpha)$$

Meglehet, hogy e sorozat korlátlan, azaz bármely M-nél nagyobb is van benne. Ezt az esetet egyelőre hagyjuk el. [Ekkor, mint látni fogjuk, a konvergencia-kör sugara: 0.] Nevezzük e végtelen számsorozat (véges) felső származékszámát F-nek. E számhoz az I. kötet 9. lapján adott értelmezés szerint így jutunk: a pozitiv számokat (most már tehát nemcsak a racionális számokról szólunk) két szeletbe sorozzuk: A-ba sorozunk valamely pozitiv számot, ha a felírt sorozatban nála nagyobb szám *végtelen sok* van; a többit, vagyis az olyan számokat, melyeken a felírt sorozatnak csak véges sok tagja emelkedik felül, vagy pedig egy sem, a B-be soroljuk. Az A és B szeletek határszáma: F.

F-nek tehát a következő nevezetes tulajdonsága van: Ha ε tetszés szerinti kis pozitiv szám, akkor $F-\varepsilon$-nál nagyobb szám a felírt sorozatban végtelen sok van; ellenben $F+\varepsilon$-nál nagyobb csak véges számú van vagy egy sincs.

Külön megemlítjük azt az esetet, midőn $F=0$. Ekkor az ε-nál nagyobb tag csak véges számban van a sorozatban, tehát található olyan N szám, hogy

$$|\sqrt[n]{A_n}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N,$$

vagyis $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{A_n} = 0$. Ekkor tehát a felírt sorozatnak határértéke is: 0.

Legyen most az α) alatti sorozat felső származékszáma $F \neq 0$; ekkor a $\Sigma A_n (x-a)^n$ konvergencia-körének rádiusa:

$$R = \frac{1}{F}.$$

Ezt az állítást így bizonyítjuk be: Vegyünk fel olyan ξ értéket, mely ezen R sugarú körön kívül van; tehát:

$$|\xi - a| > \frac{1}{F},$$

vagyis $|\xi - a| = \frac{1}{F-\varepsilon}$, ahol ε valamely F-nél kisebb pozitiv szám. F az $|\sqrt[n]{A_n}|$ sorozat felső származékszáma lévén, végtelen sok $F - \frac{\varepsilon}{2}$-nél nagyobb tagja van e sorozatnak; vagyis akárminő nagy N számot szemeljünk is ki, még mindig van olyan N-nél nagyobb n-hez tartozó $|\sqrt[n]{A_n}|$, mely $F - \frac{\varepsilon}{2}$-nél nagyobb; vagyis végtelen sok n-re:

$$|A_n (\xi - a)^n| > \left[\frac{F - \frac{\varepsilon}{2}}{F - \varepsilon}\right]^n.$$

De a jobboldali kifejezés 1-nél nagyobb, tehát a $\Sigma A_n (\xi - a)^n$ végtelen sorban végtelen sok tag 1-nél nagyobb abszolut értékű és így e sorra az összetartás e szükséges feltétele: $\lim A_n (\xi - a)^n = 0$ nincs teljesítve, a $\Sigma A_n (\xi - a)^n$ sor nem lehet konvergens.

Vegyünk most fel olyan ξ helyet, mely az $\frac{1}{F}$ sugarú körön belül van, vagyis legyen $|\xi - a| = \frac{1}{F+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. A felső származékszámnak most a másik tulajdonságát használjuk fel; t. i. azt, hogy az $|\sqrt[n]{A_n}|$ sorozatban csak néhány $F + \frac{\varepsilon}{2}$-nél nagyobb tag van; vagyis, hogy az N-iken túl a sorozatnak *minden* tagja kisebb $F + \frac{\varepsilon}{2}$-nél, azaz, ha $n > N$,

$$|A_n (\xi - a)^n| < \left(\frac{F + \frac{\varepsilon}{2}}{F + \varepsilon}\right)^n,$$

tehát a $\Sigma|A_n(\xi-a)^n|$ pozitiv tagú sor tagjai az N-iktől kezdve rendre kisebbek a konvergens

$$\Sigma\left(\frac{F+\frac{\varepsilon}{2}}{F+\varepsilon}\right)^n$$

végtelen geometriai sor tagjainál és így a $\Sigma A_n(\xi-a)^n$ konvergens.

Bebizonyítottuk tehát, hogy ha az $|\sqrt[n]{A_n}|$ sorozat felső származékszáma 0-tól különböző véges szám, akkor e felső származékszám [az ú. n. limes superior $n=\infty$-re] reciprok értéke a konvergencia-kör rádiusa. Ezt így is jelöljük: $\limsup\limits_{n=\infty}|\sqrt[n]{A_n}|$; tehát:

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n=\infty}.\,|\sqrt[n]{A_n}|.$$

Ha az $|\sqrt[n]{A_n}|$ számok sorozatának van 0-tól különböző, véges limese, akkor ez egyúttal a sorozat limes superiorja is és ekkor a konvergencia-kör sugarának reciprok értéke:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n=\infty}|\sqrt[n]{A_n}|$$

Ha az $|\sqrt[n]{A_n}|$ számok felső származékhelye: 0, akkor, miként említettük, e számok limese is 0 és akkor $R=\infty$, vagyis a $\Sigma A_n x^n$ az egész síkon konvergens.* Ezen állítás bizonyítása így végezhető: Legyen ξ a sík tetszés szerinti helye és legyen

$$0<\varepsilon<\frac{\varrho}{|\xi-a|},\quad \text{ahol}\quad 0<\varrho<1.$$

Minthogy $\lim\sqrt[n]{A_n}=0$, megválaszthatjuk az N-et úgy, hogy

$$|\sqrt[n]{A_n}|<\varepsilon,\quad \text{ha}\quad n>N$$

és így: $$|A_n(\xi-a)^n|<|\varepsilon(\xi-a)|^n<\varrho^n,$$

vagyis a $\Sigma|A_n(\xi-a)^n|$ sor tagjai (a N-iktől kezdve) rendre kisebbek a $\Sigma\varrho^n$ konvergens végtelen geometriai sor tagjainál, a $\Sigma A_n(x-a)^n$ tehát a tetszés szerint választott ξ helyen konvergens.

Ha az $|\sqrt[n]{A_n}|$ számsorozat nem korlátos, azaz a sorozat felső származékhelye a végtelenben van, akkor minden N-en túl van a tetszés szerint adott pozitiv M-nél nagyobb $|\sqrt[n]{A_n}|$. Ha $|\xi-a|$ egy tetszés szerinti kis szám, válasszuk M-et $\frac{1}{|\xi-a|}$-nál nagyobbra, akkor vég-

* Ez esetben is mondhatjuk, hogy a konvergencia-sugár: $\frac{1}{F}$, ha a szokásos módon az $\frac{1}{0}$ szimbolummal ∞-t jelöljük. Az $\frac{1}{\infty}$ szimbolum 0-t jelentsen.

telen sok $|\sqrt[n]{A_n}|$ van, mely ennél nagyobb, vagyis végtelen sok n-re $|A_n(\xi-a)^n|>1$ és így a ξ helyen a hatványsor divergens; tehát $R=0$, a $\Sigma A_n(x-a)^n$ az $x=a$ centrum kivételével sehol sem konvergens. (A jegyzet értelmében most is $R=\frac{1}{F}$.) Ilyen sor például az

$$1+(x-a)+2(x-a)^2+2.3(x-a)^3+\cdots+n!(x-a)^n+\cdots,$$

melyre nézve $\sqrt[n]{A_n}$ korlátlanul nő. [L. I. kötet 90. lapon.] Éppen így a $\Sigma n^n x^n$ sor is mindenütt divergens, mert $\sqrt[n]{n^n}=n$.

Így tehát arra az általános eredményre jutottunk, hogy (a jegyzetben foglalt megállapítással) a konvergencia-sugár minden esetben az $|\sqrt[n]{A_n}|$ sorozat felső származékszámának reciprok értéke.

Sokszor a D'Alembert-kritérium segítségével határozhatjuk meg a $\Sigma A_n(x-a)^n$ sor konvergencia körének rádiusát. Ugyanis a $\Sigma|A_n||x-a|^n$ pozitiv tagú sor konvergens (illetőleg divergens), ha $|A_n||x-a|^n=u_n$ téve, $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ létezik és 1-nél kisebb (illetőleg 1-nél nagyobb). Ez a limes mindig létezik, ha $\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|$ létezik. Ekkor

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right||x-a|,$$

tehát a $\Sigma|A_n||x-a|^n$ sor konvergens, vagy divergens, aszerint, amint:

$$\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right||x-a|<1,\quad\text{vagy}\quad\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right||x-a|>1,$$

vagyis a $\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|=0$ esetben minden x-re, a $\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|=\infty$ esetben csupán $x=a$-ra összetartó a sor, míg $0<\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|<\infty$ esetben sorunk konvergens, ha:

$$|x-a|<\frac{1}{\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|}=\lim\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|,$$

és divergens, ha

$$|x-a|>\lim\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|,$$

tehát a konvergencia-kör radiusa mindig:

$$R=\lim\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|.$$

Ezek az állítások az előbbiekből is közvetlenül következnek. Ugyanis láttuk már, hogy ha $\lim\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|$ létezik, akkor ez a limes megegyezik a $\lim|\sqrt[n]{A_n}|$-el. (L. I. kötet 89. lapon.)

Ezen egyszerű kritériummal megállapíthatjuk például, hogy ez a hatványsor:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

mindenütt konvergens. Ennél ugyanis:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}=n+1,$$

tehát
$$R=\lim\frac{A_n}{A_{n+1}}=\infty.$$

Az előbb említett $\sum\limits_0^\infty n!\,(x-a)^n$ sorra nézve

$$\lim\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{1}{n+1}=0,$$

tehát a konvergencia-kör rádiusa, $R=0$.

Nézzük a

$$-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n}+\cdots$$

sort; ennél $\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|=\frac{n+1}{n}$, tehát $\lim\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|=1$, vagyis a konvergenciakör rádiusa: 1.

3. Általános megjegyzések a hatványsornak a konvergencia-körön való viselkedésére vonatkozólag. Mondottuk, hogy a konvergencia-kör elválasztja a sík olyan pontjait, amelyeknek megfelelő x értékekre a $\Sigma A_n(x-a)^n$ konvergens, azoktól, amelyeken divergens. Magán a konvergencia-körön levő helyekre nézve ezzel nem döntöttünk. E tekintetben a legkülönbözőbb esetek lehetségesek. Igy például ez az egyszerű hatványsor:

$$\Sigma x^n,$$

melynek konvergencia-köre a 0 centrumú egységsugarú-kör, a konvergencia-kör minden helyén divergens. Ugyanis a konvergencia-kör valamely helye:

$$\cos\alpha+i\sin\alpha,$$

tehát a sor n-ik tagja:

$$u_n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

és így $|u_n|=1$, tehát $\lim u_n=0$ feltétel sincs teljesítve; a sor divergens.

Ellenben például ez a sor:

$$\Sigma\frac{x^n}{n^2},$$

melynek konvergencia-körének rádiusa szintén: 1 $\left[\text{mivel}\lim\frac{A_n}{A_{n+1}}=1\right]$, a kör minden helyén konvergens. Ugyanis, ha $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$ teszszük, a sorból ez lesz:

$$\Sigma\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{n^2}$$

és az abszolut értékek sora: $\Sigma\frac{1}{n^2}$ konvergens; tehát maga a sor is konvergens.

Olyan példát is mondhatunk, amelyből azt látjuk, hogy a sor a konvergencia-körnek csak egyetlen helyén divergens, minden más helyen pedig konvergens. Sőt egész általánosságban megmutatjuk, hogy ha az

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

hatványsor együtthatói pozitivok és monoton csökkenőek, továbbá a sor konvergencia-sugara: 1 és $\lim a_n=0$, akkor e körnek egyetlen helye: az $x=1$ az, amelyen a sor divergens lehet. Ugyanis tegyük $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $(0<\alpha<2\pi)$, akkor a fenti sor valós része:

$$a_0+a_1\cos\alpha+a_2\cos 2\alpha+a_3\cos 3\alpha+\cdots$$

E sor konvergenciájának megmutatása végett kiszámítjuk az $R_{n,k}$ maradéktagot:

$$R_{n,k}=a_{n+1}\cos(n+1)\alpha+a_{n+2}\cos(n+2)\alpha+\cdots+a_{n+k}\cos(n+k)\alpha.$$

Szorozzunk mindkét oldalon $2\sin\frac{\alpha}{2}$-el:

$$2R_{n,k}\sin\frac{\alpha}{2}=\sum_{n+1}^{n+k}a_m\cdot 2\cos m\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

De $$2\cos m\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{(2m+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2m-1)\alpha}{2},$$

tehát $$2R_{n,k}\sin\frac{\alpha}{2}=\sum_{n+1}^{n+k}a_m\left[\sin\frac{(2m+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2m-1)\alpha}{2}\right]=$$

$$=-a_{n+1}\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}+\sin\frac{(2n+3)\alpha}{2}(a_{n+1}-a_{n+2})+$$

$$+\sin\frac{(2n+5)\alpha}{2}(a_{n+2}-a_{n+3})+\cdots+a_{n+k}\sin\frac{(2n+2k+1)\alpha}{2},$$

és így, minthogy az a_n számok csökkenőek, tehát mindenik $a_{m-1}-a_m$ különbség pozitiv:

$$\left|2R_{n,k}\sin\frac{\alpha}{2}\right|<a_{n+1}+[a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+2}-a_{n+3}+\cdots+a_{n+k-1}-a_{n+k}]+$$

$$+a_{n+k}=2a_{n+1}.$$

Ha elmegyünk olyan messzire, hogy $a_n<\varepsilon$ legyen, akkor a jobboldal 2ε-nál kisebb és így, ha $\alpha\neq 0$, akkor

$$\left| R_{n,k} \sin\frac{\alpha}{2} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenségből következik:

$$|R_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Ebből azonnal látjuk, hogy egy tetszés szerinti pozitiv ε'-hoz tartozik olyan N, melynél nagyobb n-ekre minden $|R_{n,k}| < \varepsilon'$, hacsak $\alpha \neq 0$. Ugyanis, ha ε' adatik, akkor tegyük az előbbi ε-t egyenlővé $\sin\frac{\alpha}{2}\varepsilon'$-vel és menjünk el n-el olyan messzire, hogy már $a_n < \varepsilon$ legyen, ekkor aztán

$$|R_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \varepsilon'$$

lesz. Ezzel kimutattuk, hogy a $\Sigma a_n \cos n\alpha$ sor legfölebb az $\alpha=0$ helyen lehet divergens. Épen így mutatjuk meg, hogy a $\Sigma a_n \sin n\alpha$ minden α helyen konvergens [itt az $\alpha=0$ sem lehet divergencia helye] és így bebizonyítottuk, hogy a szóban forgó hatványsor a konvergencia-kör minden helyén konvergens, legfölebb az $x=1$ helyet kivéve. Így a $\sum\limits_1^\infty \frac{x^n}{n}$ sor az $|x| = 1$ kör minden helyén konvergens, legfeljebb az $x=1$ helyet kivéve. E helyen a sor csakugyan divergens.

4. Abel tétele. A $\Sigma a_n x^n$ hatványsorral értelmezett $f(x)$ függvény a hatványsor által a konvergencia-kör belsejében lévő helyekre meg van határozva. Ha a konvergencia-körön belül egy tetszés szerinti zárt görbét vonunk, akkor ezen belül és rajta a hatványsor egyenletesen összetartó; így tehát folytonos függvényt állít elő. Ez más szóval azt jelenti, hogy ha x_0 egy ilyen belső hely, akkor bárminő úton közeledjünk is az x_0 helyhez, a $\Sigma a_n x^n$ határértéke az $x=x_0$ helyen megegyezik a függvény ottani értékével, vagyis

$$\lim_{x=x_0} \Sigma a_n x^n = \Sigma a_n x_0^n.$$

Vagy még más szóval: ha egy tetszés szerinti pozitiv ε adatik, megjelölhetünk az x_0 körül egy olyan — természetesen egészen a konvergencia-körbe eső — környezetet, amelyen belül levő x helyeken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, azaz:

$$|\Sigma a_n x^n - \Sigma a_n x_0^n| < \varepsilon, \quad \text{vagyis:} \quad |\Sigma a_n (x^n - x_0^n)| < \varepsilon.$$

Mondhatjuk-e ugyanezt olyan x_0 helyről, amely a konvergencia-kör kerületén van? Természetesen itt csakis olyan x_0 kerületi helyre gondolhatunk, amelyen a $\Sigma a_n x^n$ konvergens. A kérdés tehát az, hogy, ha x_0 kerületi helyen a $\Sigma a_n x^n$ konvergens, megjelölhető-e az x_0-nak olyan, a konvergencia-körbe eső környezete, amelyen belül levő x helyeken megint

$$|\Sigma a_n x^n - \Sigma a_n x_0^n| < \varepsilon,$$

ahol ε tetszés szerinti kis pozitiv szám, vagyis áll-e megint az, hogy

$$\lim_{x=x_0} \Sigma a_n x^n = \Sigma a_n x_0^n \text{ ?}$$

A kérdés tárgyalásánál elegendő arra az esetre szorítkozni, amidőn a hatványsor konvergencia-köre az egységkör és az x_0 kerületi hely az 1 pont; ha ugyanis a $\Sigma a_n x^n$ hatványsort átalakítjuk úgy, hogy $x = x_0 z$ tesszük, akkor az így nyert z változójú hatványsor konvergencia-körének sugara nyilván 1 lesz és az $x = x_0$ helynek az új $\Sigma a_n x_0^n z^n$ hatványsorra nézve $z = 1$ felel meg; már pedig a $z = 1$ helynek kicsiny, az egységkörbe eső környezetét az $x = x_0 z$ transzformáció az x síknak x_0 körüli, az adott hatványsor konvergencia-körébe beleeső kis tartományára képezi le. Legyen tehát a $\Sigma a_n x^n$ hatványsor konvergencia-körének sugara 1 és az $x = 1$ helyen a $\Sigma a_n x^n$ hatványsor, azaz a Σa_n numerikus végtelen sor, konvergens. Jelölje s_n e sor n-ik részletösszegét $[a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$-et$]$ és a Σa_n végtelen sor összege legyen s. A sor n-ik tagja így írható:

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

és így: ($s_{-1} = 0$ téve), $|x| < 1$-re:*

$$\sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty (s_n - s_{n-1}) x^n = \sum_0^\infty s_n x^n - \sum_0^\infty s_{n-1} x^n =$$
$$= \sum_0^\infty s_n x^n - \sum_0^\infty s_n x^{n+1} = \sum_0^\infty s_n (x^n - x^{n+1}).$$

Ez fennáll akkor is, ha az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ együtthatók ilyen speciális értékűek: $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \cdots = 0$. Ekkor $\Sigma a_n x^n$ a legelső tagjára redukálódik és $s_n = 1$, tehát az előbbi egyenlőség ilyen alakú:

$$1 = \sum_0^\infty (x^n - x^{n+1}).$$

Ha ezen egyenlőség mindkét oldalát s-el szorozzuk és az előbbi megfelelő oldalaiból kivonjuk, akkor arra jutunk, hogy:

$$\sum_0^\infty a_n x^n - s = \sum_0^\infty (s_n - s)(x^n - x^{n+1}).$$

Azt akarjuk megmutatni, hogy az 1 hely bizonyos környezetében vett x-ekre

$$\lim_{x=1} \Sigma a_n x^n = s,$$

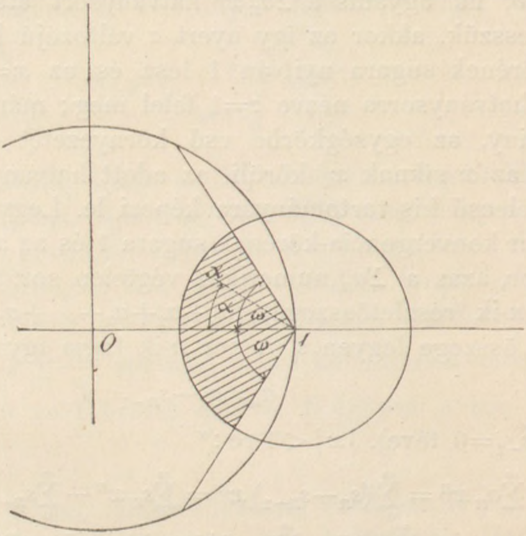
* Minthogy az s_n részletösszegek korlátosak, tehát úgy a $\Sigma s_n x^n$, mint a $\Sigma s_{n-1} x^n$ abszolut összetartók, ha $|x| < 1$ és így a $\Sigma (s_n - s_{n-1}) x^n$ fenti szétválasztása lehetséges.

vagyis, hogy a most felírt egyenletben a baloldali kifejezés határértéke 0, ha x 1-hez konvergál. Evégből a jobboldali kifejezést vizsgáljuk. Minthogy $\lim s_n = s$, tehát $|s_n - s|$ minden n-re nézve egy véges számon alul marad.

Ha a jobboldali összegnek akárminő $m+1$-ik taggal kezdődő részét vesszük, igaz, hogy

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}(s_n-s)(x^n-x^{n+1})\right| < M|1-x|\sum_{m+1}^{\infty}|x|^n < M|1-x|\sum_{0}^{\infty}|x|^n,$$

vagyis kisebb, mint ez a kifejezés: $M\dfrac{|1-x|}{1-|x|}$, ahol M az $|s_{m+1}-s|$, $|s_{m+2}-s|$, $|s_{m+3}-s|, \ldots$ sorozat tagjainál nagyobb.



25. ábra.

Ha x-et a 25. ábrán besraffozott részből vesszük, akkor

$$1-x = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

tehető, ahol ϱ jelenti az 1 és x pontok távolságát, α pedig azt a hegyes szöget, amelyet az $(x1)$ a (01)-gyel alkot. Innen:

$$x = 1 - \varrho\cos\alpha - \varrho i \sin\alpha$$

és így:

$$|x|^2 = 1 - 2\varrho\cos\alpha + \varrho^2$$

és ebből:

$$1 - |x|^2 = 2\varrho\cos\alpha - \varrho^2$$

Innen pedig:

$$1 - |x| = \frac{1-|x|^2}{1+|x|} = \frac{2\varrho\cos\alpha - \varrho^2}{1+|x|},$$

tehát:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} = \frac{\varrho}{2\varrho\cos\alpha - \varrho^2}(1+|x|) = \frac{1+|x|}{2\cos\alpha - \varrho},$$

tehát, ha α abszolut értéke egy megadott ω *hegyes* szögnél kisebb és

$$0 < \varrho < 2\cos\omega - \eta,$$

ahol $2\cos\omega > \eta > 0$, akkor

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{2}{2\cos\omega - \varrho} < \frac{2}{\eta} = A,$$

és így fennáll ez az egyenlőtlenség:

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}(s_n - s)(x^n - x^{n+1})\right| < MA,$$

ahol A egy, csupán az ω szög nagyságától függő véges számérték, M pedig olyan pozitiv szám, hogy minden $n > m$-re nézve $|s_n - s| < M$. Ha már most m-et olyan nagyra választjuk, hogy minden, m-nél nagyobb n indexre: $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2A}$ legyen — amit tehetünk, mert hiszen $\lim s_n = s$ — akkor

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}(s_n - s)(x^n - x^{n+1})\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ha x a 2ω nyílású és $2\cos\omega - \eta$ sugarú, említett körcikk bármelyik helye.

Ha már m-et így megválasztottuk, akkor a

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n - s = \sum_{0}^{\infty}(s_n - s)(x^n - x^{n+1})$$

két részre bontható. Az első: $\sum_{0}^{m}(s_n - s)(x^n - x^{n+1})$, a másodikról pedig már tudjuk, hogy $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb abszolut értékű, ha x bárminő, az említett körcikkből vett érték. Az első rész véges számú tagot tartalmaz és az $x=1$ helyen zérussá válik; tehát az 1 helynek van olyan környezete, melyen belül mindenütt $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb abszolut értékű. Ez a környezet például az 1-ből, mint centrumból leírt ϱ' sugarú kör. Ezen körből az előbbi szög (mint az ábra mutatja) szintén egy körcikket vág ki. Ha már most a $2\cos\omega - \eta$ és ϱ' sugarú körcikkek közül a kisebb sugarúnak bármelyik x helyét vesszük, akkor:

$$\left|\sum_{0}^{\infty} a_n x^n - s\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ha az 1 helyen $f(x)$ elrendelt értékéül a Σa_n helyettesitési értéket tekintjük, mondhatjuk, hogy $f(x) = \Sigma a_n x^n$ az $x=1$ helyen folytonos (határértéke egyenlő elrendelt értékével); de úgy, hogy $\lim_{x=1} \Sigma a_n x^n = \Sigma a_n$, ha x egy olyan hegyesszögben halad az 1-hez, melynek csúcsa: 1 és melynek szárai a konvergencia-körhöz az 1 pontban vont érintő baloldalán vonulnak. *Ha tehát akárminő olyan vonal mentén haladunk a kör belsejében az 1 ponthoz, mely a fönt értelmezett szögtartományban vonul, a $\Sigma a_n x^n$ határértéke mindig*

Σa_n lesz — ha t. i.: a Σa_n konvergens. E nevezetes tétel legegyszerűbb esete, amelyet *Abel* fedezett fel, a folytonosság kimondása arra az esetre, midőn a 01 rádius mentén haladunk az 1 pontba. A tárgyalt általánosítás *Stolz*-tól származik.

5. Frobenius-tétel. Az Abel-tétel jelentősége abban van, hogy annak alapján a $\Sigma a_n x^n$ által a konvergencia-kör belsejében értelmezett függvény határértékét a kör kerületén meghatározhatjuk egyszerű helyettesítéssel, ha a sor azon a helyen összetartó. Ha azonban a $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ hatványsor a konvergencia-kör valamely helyén nem összetartó, lehet-e mégis az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ számértékekből közvetlenül kiszámítani a hatványsor által előállított függvénynek ezen a helyen való határértékét? Hogy egy egyszerű példát említsünk, ez a sor: $1-x+x^2-x^3+\cdots$ az egységsugarú körben konvergens és mint tudjuk, összege: $\frac{1}{1+x}\cdot$ Az $x=1$ helyen a sornak nincs értelme: az $1-1+1-1+\cdots$ divergens ingadozó sor; az $\frac{1}{1+x}$ határértéke az $x=1$ helyen: $\frac{1}{2}\cdot$ Látjuk tehát, hogy a sornak nincs értelme az $x=1$ helyen, bár a függvénynek, melyet a sor előállít, ezen a helyen meghatározott határértéke van. De ha az $1-1+1-1+\cdots$ ingadozó sornak az összegezés közönséges módja szerint nem is tulajdoníthatunk összeget, egy más összegezési eljárással, az arithmetikai közép módszerével alkotott összege, a sor szummája, vagyis a $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}$ könnyen meghatározható számérték. Ugyanis: $s_0=1$, $s_1=0$, $s_2=1$, $s_3=0$ s í. t., tehát

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}=\frac{1}{2}\cdot$$

Íme azt látjuk, hogy ez a szumma megegyezik a függvénynek az $x=1$ helyhez tartozó határértékével.

Frobenius egész általánosságban kimutatta, hogy *ha $\Sigma a_n x^n$ a konvergencia-kör $x=x_0$ helyén az arithmetikai közép módszerével szummálható és e szummája: σ, akkor* $\lim\limits_{x=x_0}\Sigma a_n x^n=\sigma$, ahol a $\lim\limits_{x=x_0}$ jel hasonlóan értendő, mint az Abel-tétel esetében. Ez a Frobenius-tétel az Abel-tételt speciális eset gyanánt magában foglalja. Ugyanis, ha a $\Sigma a_n x^n$ az x_0 helyen konvergens — amire az *Abel*-tétel vonatkozik — akkor szummálható is és a sor szummája egyenlő a közönséges értelemben vett összeggel.

Frobenius tételét, a konvergencia kör sugarát ismét 1-nek feltételezve és az $x_0=1$ speciális választást téve, így bizonyíthatjuk be: Legyen $n>0$-ra:

$$\sigma_{n+1}=\frac{s_0+s_1+s_2+\cdots+s_n}{n+1}$$

és $n<0$ esetében: $\sigma_{n+1}=0$. Ekkor tehát:

$$s_0+s_1+\cdots+s_n=(n+1)\sigma_{n+1}$$

és éppen így:

$$s_0+s_1+\cdots+s_n+s_{n+1}=(n+2)\sigma_{n+2},$$

tehát:

$$s_{n+1}=(n+2)\sigma_{n+2}-(n+1)\sigma_{n+1}$$

és épen így:

$$s_n=(n+1)\sigma_{n+1}-n\sigma_n,$$

mikből azután:

$$s_{n+1}-s_n=a_{n+1}=(n+2)\sigma_{n+2}-2(n+1)\sigma_{n+1}+n\sigma_n.$$

Így tehát:

$$\sum_0^\infty a_n x^n=\sum_0^\infty[(n+1)\sigma_{n+1}-2n\sigma_n+(n-1)\sigma_{n-1}]x^n$$

és minthogy az egység-sugarú körön belül egyenkint a

$$\sum_0^\infty(n+1)\sigma_{n+1}x^n,$$

valamint a

$$\sum_0^\infty 2n\sigma_n x^n=\sum_0^\infty 2(n+1)\sigma_{n+1}x^{n+1}$$

és a

$$\sum_0^\infty(n-1)\sigma_{n-1}x^n=\sum_0^\infty(n+1)\sigma_{n+1}x^{n+2}$$

sorok abszolut összetartók (minthogy σ_n korlátos és a $\Sigma n x^n$ sor abszolut összetartó, ha $|x|<1$), tehát a fönti sor tagjai tetszés szerint rendezhetők és így:

$$\sum_0^\infty a_n x^n=\sum_0^\infty(n+1)\sigma_{n+1}(x^n-2x^{n+1}+x^{n+2}).$$

Ha $a_0=1$, $a_1=a_2=a_3=\cdots=0$ tesszük, akkor $\sum_0^\infty a_n x^n=1$ és $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\cdots=1$, tehát $|x|<1$-re:

$$1=\sum_0^\infty(n+1)(x^n-2x^{n+1}+x^{n+2}).$$

Legyen $\lim\limits_{n=\infty}\sigma_n=\sigma$, mely határérték feltételünk szerint véges, meghatározott számérték. Szorozzuk meg az utolsó egyenlőség két oldalát σ-val és vonjuk le az előtte levő megfelelő oldalaiból:

$$\Sigma a_n x^n-\sigma=\Sigma(n+1)(\sigma_{n+1}-\sigma)(x^n-2x^{n+1}+x^{n+2}).$$

Azt kell megmutatnunk ismét, hogy megjelölhető az $x=1$ hely környezete a konvergencia-körön belül oly módon, hogy ha x ebben a környezetben van, akkor a jobboldali kifejezés tetszés szerinti kicsiny abszolut értékű lesz.

Minthogy $\lim\sigma_n=\sigma$, tehát minden $|\sigma_{n+1}-\sigma|$ egy és ugyanazon véges számnál kisebb és így a jobboldali összeg bármelyik $m+1$-edik taggal kezdődő részének abszolut értéke:

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-\sigma)(x^n-2x^{n+1}+x^{n+2})\right| < M\sum_{m+1}^{\infty}(n+1)\,|x^n|\,|1-x|^2 <$$
$$< M\sum_{0}^{\infty}(n+1)\,|x^n|\,|1-x|^2,$$

ahol M nagyobb a $|\sigma_{m+1}-\sigma|$, $|\sigma_{m+2}-\sigma|$, $|\sigma_{m+3}-\sigma|, \ldots$ sorozat tagjainál. Ebben az egyenlőtlenségben előforduló $\sum\limits_{0}^{\infty}(n+1)|x|^n$, mint látni fogjuk, (360. lapon) $\frac{1}{(1-|x|)^2}$-tel egyenlő, tehát:

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-\sigma)(x^{n+2}-2x^{n+1}+x^n)\right| < M\frac{|1-x|^2}{(1-|x|)^2}.$$

A jobboldalon álló kifejezést éppen úgy kezeljük, mint az *Abel*-féle tételnél tettük; ekkor azt kapjuk, hogy minden olyan körcikk belsejében, aminőről előbb szóltunk, ez az $\frac{|1-x|^2}{(1-|x|)^2}$ egy véges pozitiv A-nál kisebb és így a jobboldal MA-nál kisebb. Az m-et megint úgy választjuk, hogy $|\sigma_{n+1}-\sigma| < \frac{\varepsilon}{2A}$ legyen, ha $n+1>m$, ekkor a

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-\sigma)(x^{n+2}-2x^{n+1}+x^n)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha most a

$$\Sigma a_n x^n - \sigma = \Sigma(n+1)(\sigma_{n+1}-\sigma)(x^{n+2}-2x^{n+1}+x^n)$$

egyenlőségben a jobboldali összeget két részre bontjuk, az n index-szel az első részben 0-tól m-ig haladva, a másodikban $m+1$-től ∞-ig; akkor a második rész abszolut értéke az $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb, bárminő értéket vegyen is fel az x a szóban forgó körcikken belül. Az első rész véges számú folytonos függvény összege, mely az $x=1$ helyen: 0, tehát körülvehető az $x=1$ hely olyan körrel, amelyen belül ez az m-tagú összeg mindenütt $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb abszolut értékű. Így tehát megint egy körcikkre jutottunk, melyen belül bármely x helyen $|\Sigma a_n x^n - \sigma| < \varepsilon$. És ezzel a Frobenius-tételt bebizonyítottuk, vagyis kimutattuk, hogy a korábban részletezett határátmenettel

$$\lim_{x=1} \Sigma a_n x^n = \sigma,$$

ha σ a Σa_n numerikus sornak az arithmetikai közép módszerével alkotott szummája.

6. A komponált sor összetartási köre. A $\Sigma a_n x^n$ és $\Sigma b_n x^n$ hatványsorokból megalkotjuk ezt a hatványsort:

$$\Sigma a_n b_n x^n,$$

melyet «Hadamard-féle komponált» hatványsornak akarunk nevezni.

Azt állítjuk, hogy *ha az első sor összetartási körének sugara r, a második köréé pedig r_1, akkor a $\Sigma a_n b_n x^n$ összetartási körének sugara:* $\varrho \geq r r_1$. Ugyanis a

$$\limsup |\sqrt[n]{a_n}| = \frac{1}{r}, \quad \limsup |\sqrt[n]{b_n}| = \frac{1}{r_1}.\text{*}$$

Ez azt jelenti, hogy ha kiszemelünk tetszés szerinti $r' < r$ és $r_1' < r_1$ pozitiv számokat, melyek az r, illetőleg r_1-től tetszés szerinti kevéssel térnek el, akkor az $|\sqrt[n]{a_n}|$ számok között csak véges számú lesz az $\frac{1}{r'}$-nél nagyobb és az $|\sqrt[n]{b_n}|$ számok között csak véges számú lesz az $\frac{1}{r_1'}$-nél nagyobb, vagyis egy bizonyos N-en túl már egyetlen egy $|\sqrt[n]{a_n}|$, illetőleg $|\sqrt[n]{b_n}|$ sem lesz az $\frac{1}{r'}$, illetőleg $\frac{1}{r_1'}$-nél nagyobb; tehát e N-en túl minden

$$|\sqrt[n]{a_n}| < \frac{1}{r'} \quad \text{és} \quad |\sqrt[n]{b_n}| < \frac{1}{r_1'};$$

és így ezen N-en túl minden:

$$|\sqrt[n]{a_n b_n}| < \frac{1}{r' r_1'}.$$

Ezt megjegyezvén, vegyünk fel egy tetszés szerinti kis pozitiv ε számot; akkor: $\frac{1}{r r_1} + \varepsilon$ minden esetre írható ilyen alakban: $\frac{1}{r' r_1'}$, ahol $r' < r$, $r_1' < r_1$**; tehát az $|\sqrt[n]{a_n b_n}|$ számok között csak véges számú $\frac{1}{r r_1} + \varepsilon$-nál nagyobb foglaltatik és így $\limsup |\sqrt[n]{a_n b_n}| \leqq \frac{1}{r r_1}$. De $\limsup |\sqrt[n]{a_n b_n}|$ a $\Sigma a_n b_n x^n$ hatványsor konvergencia-sugarának reciprok értéke: $\frac{1}{\varrho}$ és így: $\varrho \geq r r_1$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

7. **Hatványsor differenciálása és integrálása.** Ha a $\Sigma a_n x^n$ hatványsort, melynek konvergencia-sugara r, tagonkint differenciáljuk, erre a sorra jutunk:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

vagyis $\Sigma n a_n x^{n-1}$-re. Azt állítjuk, hogy e sor összetartási körének sugara szintén: r.

* Az r és r_1-ről feltesszük, hogy végesek és 0-tól különbözők. Ha pl. r végtelen, akkor $\lim |\sqrt[n]{a_n}| = 0$ (ekkor ugyanis a limes superior közönséges limessé válik) és így egyúttal, ha $r_1 \neq 0$, $\lim |\sqrt[n]{a_n b_n}| = 0$. Ha egyik 0, a másik ∞, akkor a tétel nem mond semmit, ezt az esetet kizárjuk.

** Ehhez csak az $\frac{1}{(r+\sigma)(r_1+\sigma)} = \frac{1}{r r_1} + \varepsilon$ σ-ban másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Azonnal látjuk, hogy egyik negativ gyök ε-nal együtt 0-sá válik.

Alig szükséges mondanunk, hogy ha valamely x helyen $\Sigma a_n x^n$ konvergens, akkor $x\Sigma a_n x^n = \Sigma a_n x^{n+1}$ is konvergens és viszont, ha

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

konvergens és $x \neq 0$, akkor az x-szel való osztással nyert

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

is konvergens. A deriválással nyert sor «komponált» sornak tekinthető; a komponálandó sorok ezek:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots \quad \text{és} \quad 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

A második sor konvergencia-körének sugara: 1; mert $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$; $\left[\text{ugyanis } \lim \log \sqrt[n]{n+1} = \lim \frac{\log(n+1)}{n} = 0\right]$.

Az első sor konvergencia-körének rádiusa az előbbi megjegyzés szerint: r; tehát a $\Sigma n a_n x^{n-1}$ konvergencia-sugara $\varrho \geq r$. De másrészt a $\Sigma a_n x^{n-1}$ tekinthető e két sor kompoziciójának:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

és
$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots$$

és minthogy a második sor konvergencia-sugara ismét: 1, tehát $r \geq \varrho$-ra jutunk és így e két egyenlőtlenségből azt látjuk, hogy: $\varrho = r$.

Ezzel kimutattuk hogy a tagonkinti deriválással nyert hatványsor konvergencia-körének sugara megegyezik az eredetiével.

Ha a $\Sigma a_n x^n$ hatványsor együtthatói valósak és x-nek csak valós értékeire szorítkozunk, akkor nem összetartási körről, hanem csak «összetartási köz»-ről szólunk; t. i.: az r sugarú összetartási körbe eső $-r \ldots +r$ közben összetartó a sor [Ezenkívül nem lehet összetartó, mert akkor, miként tudjuk, az összetartási kör is nagyobb sugarú lenne.] Ha tehát csak valós értékekre szorítkozunk, akkor az előbbi eredményből következtethetjük, hogy a hatványsor minden, a $-r \ldots +r$ belsejébe eső közben tagonkint differenciálható.

Ugyanis, ha e közön *belül* akárminő közt veszünk fel, akkor ebben, a tagonkinti deriválással nyert sor egyenletesen összetartó, tehát a tagonkinti deriválás megengedett művelet. (Megengedett oly értelemben, hogy az így nyert sor megadja az eredeti sor definiálta függvény differenciálhányadosát.) Így például

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

ha $|x| < 1$, tehát

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

a $-1 \cdots +1$ köz minden belső helyén.

[Itt megjegyezzük, hogy ugyanez áll minden olyan tartományban, amely a konvergencia-kör belsejében van, ha a differenciálhányados fogalmát komplex változó függvényeinek esetére megfelelően általánosítjuk.]

Ugyanezt mondhatjuk az integrálásra vonatkozóan is. Ugyanis a $-r\ldots+r$ belső közeiben a $\Sigma a_n x^n$ egyenletesen összetartó, tehát a 339. lapon közölt tétel szerint tagonkint integrálható. A $\Sigma a_n x^n$ függvény (α, x) közre vonatkozó integrálja tehát, (ha α és x a $-r\ldots r$ közben van):

$$\int_\alpha^x (\Sigma a_n x^n)\,dx = \Sigma \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} - \Sigma \frac{a_n \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

8. Valós függvény végtelen Taylor-sora. Ha az $f(x)$ függvény az $\alpha\ldots\beta$ intervallumban $n+1$-szer differenciálható, akkor, mint megmutattuk, (l. I. kötet 147. lap) ezen intervallum minden belső a helye környezetében előállítható véges Taylor-sorban, ilyen alakban:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + R_{n+1},$$

ahol R_{n+1} a maradéktagot jelenti, melyet különösen kétféle alakjában, a Lagrange- és a Cauchy-féle alakban használtunk. Az első ilyen alakú:

$$\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)\,h^{n+1}}{(n+1)!},$$

a második pedig:

$$\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)(1-\vartheta)^n\,h^{n+1}}{n!}, \quad (0<\vartheta<1).$$

Ha már most az $f(x)$-nek ezen $\alpha\ldots\beta$ közben az a helyen *minden* differenciálhányadosa meghatározott véges számértékű, akkor az a kérdés merül fel, nem lehetne-e az $\alpha\ldots\beta$-ba eső $a+h$ helyen a függvény értékét az előbbi mintájára alkotott:

$$f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + \cdots \qquad \alpha)$$

végtelen sorral kifejezni? Az ilyen sort, mely h-ra vonatkozólag hatványsornak is tekinthető, *végtelen Taylor-sor*nak fogjuk nevezni.

A feltett kérdés tulajdonképpen kettős. Az első az, hogy a felírt: $\Sigma \frac{f^{(n)}(a)\,h^n}{n!}$ végtelen sornak van-e egyáltalában értelme, azaz konvergens-e, van-e összege? [ennek kapcsán kérdezhetjük, minő h értékekre konvergens ez a sor, vagyis mekkora a konvergencia köze (vagy ami ezzel megegyező: konvergencia körének átmérője)]. A második kérdés, hogy e sor összege valóban megegyezik-e az $f(a+h)$-val?

Ha a második kérdésre igenlően felelünk, akkor — minthogy $f(a+h)$ meghatározott véges számérték — már a $\Sigma \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!}$ konvergenciájára nézve is döntöttünk, sőt, minthogy a sor h-ra nézve hatványsor, ez esetben azt is tudjuk, hogy minden, $|h|$-nál kisebb abszolut értékű h'-re abszolut konvergens e sor.

Legyen $\alpha < a < \beta$, h megadott fix szám, $\alpha \leq a+h \leq \beta$ és jelöljük $F_n(h)$-val az $\alpha)$ alatti sor első $n+1$ tagjának összegét. Tudjuk, hogy $f(a+h)$ véges Taylor-sorba fejtve, ilyen alakú:

$$f(a+h) = F_n(h) + R_{n+1},$$

ahol R_{n+1} az ismeretes (pl. Lagrange- vagy Cauchy-féle) maradéktag. Ha van olyan N index, hogy $|R_{n+1}|$ minden $n > N$-re kisebb a tetszés szerint adott pozitiv ε-nál, akkor:

$$|f(a+h) - F_n(h)| < \varepsilon,$$

mihelyt $n > N$, vagyis:

$$\lim_{n=\infty} F_n(h) = f(a+h).$$

De $\lim\limits_{n=\infty} F_n(h)$ nem egyéb, mint az $\alpha)$ alatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)\,h^n}{n!}$$

végtelen Taylor-sor összege; tehát azt látjuk, hogy $\lim\limits_{n=\infty} R_{n+1} = 0$, a *szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $f(a+h)$ előállítható legyen összetartó végtelen Taylor-sorban.*

Ezt a kritériumot a maga teljességében nem igen alkalmazhatjuk, mert hiszen az R_{n+1} nemcsak n-től, hanem egyúttal ϑ-tól is függ, ami az n-nel szintén változik. A legtöbbször úgy járunk el, hogy megmutatjuk, hogy az:

$$\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)\,h^n}{n!},$$

vagy az

$$\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)(1-\vartheta)^{n-1}h^n}{(n-1)!}$$

maradéktag limese 0, függetlenül attól, hogy ϑ mekkora pozitiv, 1-nél kisebb szám. Ilyen formában tehát *elégséges* feltételt kapunk az $f(a+h)$ előállítására.

Ha $a=0$ és $h=x$ tesszük, akkor a végtelen Taylor-sor átmegy ebbe:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

és ebben az alakjában végtelen *Maclaurin*-sornak is nevezzük.

XV. FEJEZET.

NEHÁNY ELEMI FÜGGVÉNY SORFEJTÉSE.

1. e^x **sorfejtése.** Eddigelé az e^x-et úgy értelmeztük, mint az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ limesét, ha n végtelenné válik; most előállítjuk *Maclaurin*-sorban. Evégből szükségünk van az e^x-nek és minden rendű differenciálhányadosának értékére az $x=0$ helyen. $f(x)=e^x$-nek minden differenciálhányadosa: e^x, tehát a jelen esetben

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=1$$

és így az e^x-nek megfelelő végtelen sor:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Kérdés, hogy x minő értékeinél állítja ez a sor tényleg elő az e^x függvényt. Evégből vegyük pl. a Lagrange-féle maradéktagot. Ez:

$$\frac{e^{\theta x}\,.\,x^n}{n!}.$$

Ennek a limesét kell meghatároznunk.

Az $e^{\theta x}$ véges számérték, mely kisebb, mint $e^{|x|}$; tehát csak $\lim\limits_{n=\infty}\frac{x^n}{n!}$-t keressük. Tegyük fel, hogy $|x|$ az m és $m+1$ szomszédos egész számok közé esik, úgy, hogy: $m<|x|<m+1$ és legyen $n>m$. Ekkor $\frac{x^n}{n!}$-t így írjuk:

$$\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{x}{m+1}\cdot\frac{x}{m+2}\cdots\frac{x}{n}.$$

Az első tényező egy meghatározott véges szám. A többi tényező szorzatának abszolut értéke kisebb: $\left(\frac{|x|}{m+1}\right)^{n-m}$-nél, tehát, minthogy $\frac{|x|}{m+1}<1$, az n-et oly nagyra választhatjuk, hogy ez a hatvány tetszés szerinti kicsiny legyen. Így tehát, akármekkora legyen is az x,

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\theta x} . x^n}{n!} = 0.$$

Ezt a határértéket még egy másik, egyszerűbben célhoz vezető úton is megállapítjuk. Ugyanis azt állítjuk, hogy a $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ az x minden értékénél abszolut konvergens.

Ezt azonnal beláthatjuk akár a D'Alembert szabály alkalmazásával is; mert, ha $u_n = \frac{|x^n|}{n!}$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} : \frac{|x^n|}{n!} = \lim_{n=\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Minthogy tehát $\sum \frac{x^n}{n!}$ konvergens, következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

És ebből: $$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\theta x} . x^n}{n!} = 0.$$

Így tehát kimondhatjuk, *hogy a* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *sor* x *minden valós értékénél előállítja az* e^x *függvényt*, vagyis minden valós x értékre:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

2. Az e kiszámítása. Felhasználjuk ezt a sorfejtést az e kiszámítására. Evégből $x=1$-et tesszük e sorba. Azt kapjuk, hogy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Ha a sort az n-ik tagnál berekesztjük, akkor a hiba a *Lagrange*-féle alakban írva: $\frac{e^\vartheta}{(n+1)!}$, ahol $0 < \vartheta < 1$. Minthogy pedig $e < 3$, tehát ez a hiba kisebb, mint $\frac{3}{(n+1)!}$. Már ez is elég jól használható kifejezés a hiba megállapítására. De még alkalmasabbat is előállítunk. Ha ugyanis a fönntebbi numerikus sort az n-ik tagnál berekesztjük, akkor elhagytuk az

$$R = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

maradékot. Ez még így is írható:

$$R = \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right],$$

ami kisebb, mint

$$\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{(n+1)!(n)}=\frac{1}{n.n!}.$$

Ha tehát az e kiszámításában utolsó tagul a sorból $\frac{1}{n!}$-et vesszük, akkor az elkövetett hibà kisebb ezen utolsó tag n-edrészénél. Így például $\frac{1}{10^{10}}$ pontossággal számítva:*

$\frac{1}{2}=0·5$ | $\frac{1}{8!}=0·000024801587\ldots$

$\frac{1}{3!}=0·166666666666\ldots$ | $\frac{1}{9!}=0·000002755732\ldots$

$\frac{1}{4!}=0·041666666666\ldots$ | $\frac{1}{10!}=0·000000275573\ldots$

$\frac{1}{5!}=0·008333333333\ldots$ | $\frac{1}{11!}=0·000000025052\ldots$

$\frac{1}{6!}=0·001388888888\ldots$ | $\frac{1}{12!}=0·000000002087\ldots$

$\frac{1}{7!}=0·000198412698\ldots$ | $\frac{1}{13!}=0·000000000160\ldots$

és innen: $e=2·718281828442$, mely 10 helyre pontos.

3. a^x hatványsora. Az e^x hatványsorából azonnal megkaphatjuk az a^x hatványsorát, ha a tetszés szerinti pozitiv szám. Ugyanis $a^x=e^{x\log a}$, tehát:

$$a^x=1+x\log a+\frac{x^2(\log a)^2}{2!}+\frac{x^3(\log a)^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n(\log a)^n}{n!}+\cdots$$

Minthogy az e^x sora x minden értékére előállítja az e^x-et, tehát ez a sor is x minden értékénél előállítja az a^x-et.

4. $\sin x$ hatványsora. A $\sin x$ függvénynek a 0 helyen való differenciálhányadosaiból előállíthatjuk a $\sin x$ Maclaurin-sorát, amely, mint látni fogjuk, a $\sin x$-et minden x értékre megadja. Ez a Maclaurin-sor könnyen kapható; ugyanis: $(\sin x)'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

* A számításba vett tagok közül 11 tagban, a tizedes jegyek elhanyagolása következtében egyenkint $\frac{1}{10^{12}}$-nél kisebb hibát követünk el; az összes hiba tehát: $h<\frac{11}{10^{12}}+\frac{1}{13.13!}<\frac{1}{10^{10}}$.

$(\sin x)'' = \sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \ldots$ és általában, (miről teljes indukcióval könnyen meggyőződhetünk)

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

tehát: $$(\sin x)_0^{(2n)} = 0, \ (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n$$

és így a $\sin x$ Maclaurin-sora:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

A maradéktag Lagrange-féle alakjából következik, hogy

$$|R_n| = \frac{\left|\sin\left(\vartheta x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| |x^n|}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!},$$

és minthogy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, bárminő értéke legyen is x-nek, tehát $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ és így a $\sin x$ felírt sora minden x értékre megadja a $\sin x$-et.

5. $\cos x$ **hatványsora.** A $\cos x$ Maclaurin-sorának előállítására ugyanilyen módon járunk el:

$$(\cos x)_{x=0} = 1, \quad (\cos x)_0' = 0, \quad (\cos x)_0'' = -1,$$

$$(\cos x)_0''' = 0, \quad (\cos x)_0^{\mathrm{IV}} = 1,$$

és általában:

$$(\cos x)_0^{(2n)} = (-1)^n, \quad (\cos x)_0^{(2n+1)} = 0$$

és így $\cos x$ hatványsora:

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Ez a sor is minden x értékre megadja a $\cos x$-et. Észrevesszük, hogy a $\cos x$ sora a $\sin x$-éból tagonkinti differenciálással állítható elő.

6. **Más függvények sorfejtései.** Példaképpen állítsuk elő az

$$f(x) = e^{x\cos a}\cos(x\sin a) \quad \text{és} \quad \varphi(x) = e^{x\cos a}\sin(x\sin a)$$

Maclaurin sorait, ha a egy meghatározott, egyébként tetszés szerinti számérték. Evégből kiszámítjuk az $f(x)$ differenciálhányadosait:

$$f'(x) = e^{x\cos a}\cos(x\sin a) \,.\, \cos a - e^{x\cos a}\sin(x\sin a) \,.\, \sin a =$$
$$= e^{x\cos a}[\cos(x\sin a)\cos a - \sin(x\sin a)\sin a] = e^{x\cos a}\cos[x\sin a + a]$$

$$f''(x) = e^{x\cos a}\cos[x\sin a + a] \,.\, \cos a - e^{x\cos a}\sin[x\sin a + a]\sin a =$$
$$= e^{x\cos a}(\cos(x\sin a + a)\cos a - \sin(x\sin a + a)\sin a) = e^{x\cos a}\cos(x\sin a + 2a).$$

Teljes indukcióval igazolhatjuk, hogy általában:

$$f^{(n)}(x) = e^{x\cos a} \cos(x \sin a + na).$$

Hasonlóképpen mutatjuk meg, hogy általában:

$$\varphi^{(n)}(x) = e^{x\cos a} \sin(x \sin a + na).$$

Az $x=0$ helyen a függvény és a differenciálhányadosok értékei:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \cos a,\ f''(0) = \cos 2a, \ldots\ f^{(n)}(0) = \cos na, \ldots$$

és így $f(x)$ Maclaurin-sora:

$$1 + \cos a \,.\, x + \frac{\cos 2a}{2} x^2 + \frac{\cos 3a}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\cos na}{n!} x^n + \cdots$$

A Lagrange-féle maradéktag:

$$\frac{f^{(n)}(\xi)\, x^n}{n!} = \frac{e^{\xi\cos a} \cos[\xi \cos a + na]}{n!} x^n.$$

Ha egy tetszés szerinti $-\alpha \ldots \alpha$ intervallumot szemelünk ki, ebben $e^{\xi\cos a} \leq e^{\alpha}$, $|\cos[\xi\cos a + na]| \leq 1$, tehát a maradéktag legfeljebb: $\frac{Mx^n}{n!}$, ahol $M = e^{\alpha}$; de $\lim\limits_{n=\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, tehát a felírt sor minden intervallumban konvergens és előállítja az $f(x)$-et; tehát mondhatjuk:

$$e^{x\cos a} \cos(x \sin a) = \Sigma \frac{\cos na}{n!} x^n.$$

Éppen így:

$$e^{x\cos a} \sin(x \sin a) = \Sigma \frac{\sin na}{n!} x^n.$$

Ha $a=0$ tesszük, akkor az első sor: e^x-et adja; ha $a = \frac{\pi}{2}$ tesszük, akkor az első sor $\cos x$-et, a második pedig $\sin x$-et szolgáltatja.

7. A logarithmus sora. A $\log x$ Maclaurin-sorba nem fejthető; mert $x=0$ helyen úgy a $\log x$, mint a differenciálhányadosai végtelenekké válnak. Ezért pl. az $x=1$ hely környezetében állítjuk elő a logarithmust, vagyis az

$$f(a+h) = \Sigma \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n$$

Taylor-sorba fejtést alkalmazzuk. A jelölést kissé megváltoztatva, $a=1$ és $h=x$-et írunk, vagyis $\log(1+x)$-et állítjuk elő. Eszerint tehát szükségünk van a $\log z$ differenciálhányadosaira a $z=1$ helyen.

$$(\log z)' = \frac{1}{z},\quad (\log z)'' = -\frac{1}{z^2},\quad (\log z)''' = +\frac{2}{z^3}, \ldots$$

és általában:

$$(\log z)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n},$$

amiről teljes indukcióval meggyőződhetünk. Így tehát a $z=1$ helyen

$$(\log z)_{z=1} = 0,\quad (\log z)'_{z=1} = 1,\quad (\log z)''_{z=1} = -1,$$
$$(\log z)'''_{z=1} = 2, \ldots\quad (\log z)^{(n)}_{z=1} = (-1)^{n-1}(n-1)! \ldots$$

tehát a kérdéses Taylor-sor ez lesz:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad \alpha)$$

Annak eldöntésére, hogy ez a végtelen sor előállítja-e a $\log(1+x)$-et, megvizsgáljuk a maradéktagját. De előbb célszerű megállapítani, hogy ez a végtelen sor általában x minő értékeire nézve konvergens? Tudjuk, hogy a hatványsor a konvergencia-körön belül [vagy, minthogy itt csak valós értékekről van szó, mondhatjuk: a konvergencia-intervallumon belül] abszolut összetartó; azért tehát elégséges ezen sor vizsgálata

$$\xi+\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}+\cdots+\frac{\xi^n}{n}+\cdots,$$

ahol ξ pozitiv. A sor n-edik tagját u_n-nel jelöljük és a D'Alembert-kritériumot alkalmazzuk:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\xi\frac{n}{n+1},$$

tehát:

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\xi$$

és így a sor konvergens, ha $\xi<1$ és divergens, ha $\xi>1$. *Az adott sor tehát konvergens, ha* $|x|<1$, *vagyis ha x a* $-1\cdots+1$ *intervallum belsejében van és divergens, ha x ezen intervallumon kívül van.*

A Lagrange-féle maradéktag a jelen esetben:

$$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,x^n}{n!\,(1+\vartheta x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\vartheta x)^n},$$

ahol ϑ valamely pozitiv valódi tört. Ha x pozitiv, 1-nél nem nagyobb, akkor $\frac{x}{1+\vartheta x}<1$, $\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n<1$ és így a maradéktag limese:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n=0.$$

De ha x negativ, vagyis a $-1\cdots+1$ intervallum balfeléből vétetik az x, akkor $\frac{x}{1+\vartheta x}$ abszolut értékéről nem tudjuk a priori eldönteni, hogy 1-nél kisebb-e, mert ϑ értékét nem ismerjük. A *Lagrange*-féle maradéktag a sor használhatóságára nézve nem ad felvilágosítást.

Vizsgáljuk meg a *Cauchy*-féle maradéktagot. Ennek általános alakja:

$$C_n=\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)(1-\vartheta)^{n-1}h^n}{(n-1)!},$$

a jelen esetben, midőn $a=1$, $h=x$, $f(x)=\log(1+x)$ tétetett:

$$C_n = (-1)^{n-1}\frac{(1-\vartheta)^{n-1}x^n}{(1+\vartheta x)^n},$$

ami így is írható:

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{1+\vartheta x}.$$

Ha x negativ, de abszolut értéke 1-nél kisebb, akkor $1-\vartheta<1+\vartheta x$ és így $\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}<1$, továbbá $\frac{1}{1+\vartheta x}<\frac{1}{1+x}$ és így az $\frac{1}{1+\vartheta x}$ tényező is korlátos; végre $\lim\limits_{n=\infty} x^n=0$, tehát:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}\frac{x^n}{1+\vartheta x}=0,$$

a maradéktag limese: 0. [Ha x pozitiv, a Cauchy-féle maradéktag akkor is 0 felé konvergál.] Eszerint a Cauchy-féle maradéktag a $-1\cdots+1$ intervallum minden belső helyén 0-hoz konvergál, ha n végtelenné válik; tehát a felírt Taylor-sor valóban előállítja ebben az intervallumban a $\log(1+x)$-et. Kimondhatjuk tehát, hogy ha $-1<x<1$, akkor:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots$$

Ezzel egy általános módszerhez jutottunk a $0\ldots2$ közben levő számok logarithmusainak előállítására; ugyanis, ha $|x|<1$, akkor $0<1+x<2$ és ha $1+x$ 2-nél kisebb pozitiv szám, akkor $|x|<1$.

[Az *α)* alatti végtelen sorra úgy is juthattunk volna, ha sorba fejtjük az $\frac{1}{1+x}$-et a végtelen geometriai sor tétele szerint:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

Ez a hatványsor a $-1\cdots+1$ nyílt közben összetartó és így e köz minden belső intervallumában egyenletesen összetartó, tehát a tagonkinti integrálás megadja az összeg integrálját; de $\int\limits_0^x\frac{dx}{1+x}=\log(1+x)$, a jobboldalon pedig a tagonkinti integrálással:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots$$

végtelen sort kapjuk, tehát ilyen módon is rájutottunk a $\log(1+x)$ hatványsorára].

Ezzel egyuttal $\log(a+x)$ Taylor-sorát is megállapíthatjuk, ha a pozitiv és $|x|<a$;

$$\log(a+x)=\log\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]=\log a+\log\left(1+\frac{x}{a}\right);$$

de

$$\log\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\cdots,$$

tehát:

$$\log(a+x)=\log a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\cdots$$

A $\log(1+x)$ hatványsora, miként említettük, alkalmas arra, hogy a $0\ldots 2$ közötti számok logarithmusait meghatározzuk; az $x=1$ határhelyen a sor: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots$ váltakozó előjelű harmonikus sor lesz, amelyről tudjuk, hogy konvergens. *Abel* tételéből (l. 352. lapon) következik, hogy e numerikus sor összege megadja a $\log(1+x)$ határértékét az $x=1$ helyen, vagyis a $\log 2$ számértéket. Arra jutottunk tehát, hogy

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Erre az egyenlőségre még az Abel-féle sortétel felhasználása nélkül is rájuthatunk. Ugyanis, miként láttuk, a $\log(1+x)$ véges Taylor-sorának Lagrange-féle maradéktagja

$$L_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\vartheta x)^n};$$

tehát

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+L_n$$

és így $x=1$ téve:

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}+L_n', \text{ ahol } L_n'=\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\vartheta)^n}.$$

Minthogy $\lim\limits_{n=\infty} L_n'=0$, tehát a váltakozó előjelü harmonikus sor összege $\log 2$.

8. **A logarithmus kiszámítása.** A $\log(1+x)$ hatványsora numerikus számításra még nem nagyon alkalmas, mert igen sok tagot kellene tekintetbe vennünk, ha elég kis hibával akarunk számítani; azért ennek segítségével a számításra alkalmasabb sort készítünk. Ha x helyébe $-x$-et tesszük, akkor a fentebbi sorból ez lesz:

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots,$$

mely a $\log(1-x)$-et megadja, szintén a $-1<x<1$ intervallumban. A $\log(1+x)$ és $\log(1-x)$ sorainak egymásból való kivonásából eredő:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right]$$

egyenlőség már a logarithmus kiszámítására alkalmas képletet szolgáltat. Legyen ugyanis N tetszés szerinti pozitiv egész szám, akkor x-et úgy választhatjuk, hogy

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N}$$

legyen. Ez az egyenlőség teljesül, ha az $x=\frac{1}{2N+1}$; ekkor $0<x<1$. A $\log\frac{1+x}{1-x}$ fentebbi végtelen sora az $x=\frac{1}{2N+1}$ helyettesítéssel átmegy a következőbe:

$$\log\frac{N+1}{N}=2\left\{\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3\,(2N+1)^3}+\frac{1}{5\,(2N+1)^5}+\cdots\right],$$

vagyis:

$$\log(N+1)=\log N+2\left\{\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3\,(2N+1)^3}+\frac{1}{5\,(2N+1)^5}+\cdots\right\}. \qquad A)$$

Így tehát, ha $\log N$ ismeretes, akkor ezen formulával $\log(N+1)$ meghatározható. Módszerhez jutottunk a pozitiv egész számok logarithmusainak egymás után való meghatározására.

Még csak azt akarjuk megjegyezni, hogy ha a jobboldali végtelen sorból csak az első k tagot használjuk a számításra, vagyis az utolsó, számításba vett tag:

$$\frac{2}{(2k-1)\,(2N+1)^{2k-1}},$$

akkor az elhanyagolt rész kisebb, mint:

$$\frac{2}{(2k+1)}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2k+1}}\left\{1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\cdots\right\},$$

vagy, ha a zárójelben álló geometriai sort összegezzük, arra jutunk, hogy a hiba, amit e tagok elhagyásával elkövetünk, kisebb, mint:

$$\frac{2}{(2k+1)\,(2N+1)^{2k-1}\cdot 4N\,(N+1)} \qquad a)$$

és ez kisebb, mint az utolsó számba vett tag, osztva: $4N(N+1)$-el. Így pl.: ha $N>4$, ez a hiba kisebb az utolsó, számításba vett tag 100-adrészénél.

Ha $N=1$, $\log N=0$ és akkor $\log(N+1)=\log 2$-re ezt a numerikus sort kapjuk:

$$\log 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right\}.$$

Ha $\log 2$-t százezredrész pontossággal akarjuk meghatározni, akkor el kell mennünk e sorban oly messzire, hogy az utolsó, számba vett tag $\frac{1}{100000}$-nél nagyobb ne legyen. Ehhez elég az első 5 tag:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{3}=0{\cdot}3333333\ldots & \frac{1}{3}=0{\cdot}3333333\ldots\\
\frac{1}{3^3}=0{\cdot}0370370\ldots & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}=0{\cdot}0123456\ldots\\
\frac{1}{3^5}=0{\cdot}0041152\ldots & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}=0{\cdot}0008230\ldots\\
\frac{1}{3^7}=0{\cdot}0004572\ldots & \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}=0{\cdot}0000653\ldots\\
\frac{1}{3^9}=0{\cdot}0000508\ldots & \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}=0{\cdot}0000056\ldots\\
\hline
 & \qquad 0{\cdot}3465728
\end{array}$$

vagyis: $\log 2=0{\cdot}6931456\ldots$

ami 5 tizedesre pontosan megadja a $\log 2$-t. [Az elhanyagolt tagokból eredő hiba ugyanis *a)* szerint $<0{\cdot}0000014\ldots$; a tekintetbe vett tagok kiszámításában elkövetett hiba $<5.0{\cdot}0000001$, tehát az összes hiba $<(0{\cdot}1)^5$.]

A $\log 3$ kiszámítása végett az *A)* alatti formulában $N=2$ tesszük, ekkor $2N+1=5$; tehát

$$\log 3=\log 2+2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3\,.\,5^3}+\frac{1}{5\,.\,5^5}+\frac{1}{7\,.\,5^7}+\cdots\right\}$$

$$\frac{1}{5}=0{\cdot}200000 \qquad \frac{1}{5}=0{\cdot}200000\ldots$$
$$\frac{1}{5^3}=0{\cdot}008000 \qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}=0{\cdot}002666\ldots$$
$$\frac{1}{5^5}=0{\cdot}000320 \qquad \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}=0{\cdot}000064\ldots$$
$$0{\cdot}202730$$

Ez a 3 tag elég, ha százezredrészig számítunk, mert a zárójelben levő sorra nézve a többi tagok elhanyagolásával elkövetett hiba kisebb, mint az utolsó számbavett tag osztva: $4N(N+1)$-gyel, vagyis ez utolsó tag 24-edrésze és így a sor kétszeresében is a hiba kisebb, mint 0·00001. Igy tehát

$$\log 3=\log 2+0{\cdot}405460\cdots=1{\cdot}09860\ldots$$
$$\log 4=2\log 2=1{\cdot}3862912\ldots$$

Innen pedig:

$$\log 5=\log 4+2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3\,.\,9^3}+\frac{1}{5\,.\,9^5}+\cdots\right\}$$

$$\frac{1}{9}=0{\cdot}111111\ldots \qquad \frac{1}{9}=0{\cdot}111111\ldots$$
$$\frac{1}{9^3}=0{\cdot}001372\ldots \qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}=0{\cdot}000457\ldots$$
$$\frac{1}{9^5}=0{\cdot}000017\ldots \qquad \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}=0{\cdot}000003\ldots$$
$$0{\cdot}111571$$

és ebből $\log 5=1{\cdot}60943\ldots$

Ebből meghatározhatjuk a log 10-et; ugyanis

$$\log 10=\log 2+\log 5=2{\cdot}30257\ldots$$

és innen:

$$M=\frac{1}{\log 10}=0{\cdot}43429\ldots$$

Az M modulus jelentősége ismeretes; ugyanis ezzel kell megszoroznunk az e alapra vonatkoztatott logarithmusokat, hogy a közönséges, 10-es alapra vonatkozó logarithmusokat kapjuk.

Minél nagyobb az előbbi formulában használt N, annál kevesebb tag számbavételével érjük el a kívánt pontosságot. Éppen ezért a 2, 3, 5 logarithmusait nagyobb pontosság céljából a következőképpen számították ki: Ha sorban $N=15$, $N=24$, $N=80$ tesszük, akkor a $\log\frac{N+1}{N}$-re szolgáló képlet megadja a $\log\frac{16}{15}$, $\log\frac{25}{24}$, $\log\frac{81}{80}$-at; de

$$\log\frac{16}{15}=4\log 2-1\,.\log 3-1\,.\log 5,$$
$$\log\frac{25}{24}=-3\log 2-1\,.\log 3+2\log 5,$$
$$\log\frac{81}{80}=-4\log 2+4\log 3-1\,.\log 5$$

és e három egyenletből:

$$\log 2=7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80},$$
$$\log 3=11\log\frac{16}{15}+8\log\frac{25}{24}+5\log\frac{81}{80},$$
$$\log 5=16\log\frac{16}{15}+12\log\frac{25}{24}+7\log\frac{81}{80}\cdot$$

9. A binomiális tétel. x^m hatvány Maclaurin-sorba nem fejthető, ha m nem pozitiv egész szám ;* mert ha m nem pozitiv egész szám, akkor az $x=0$ helyen vagy maga az x^m, vagy valamelyik differenciálhányadosa végtelenné válik. Ezért tehát az általános hatványt is egy más hely, pl. az 1 környezetében fejtjük ki az

$$f(a+h)=\sum\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

alakú Taylor-sorba. A jelölést megint megváltoztatva, h helyett x-et írunk és $a=1$ tesszük, vagy más szóval, az $(1+x)^m$ függvényt Maclaurin-sorba fejtjük. A z^m függvénynek a $z=1$ helyen való értékére és differenciálhányadosainak értékeire van szükségünk. A z^m differenciálhányadosai rendre:

$$z^m,\quad mz^{m-1},\quad m(m-1)z^{m-2},$$
$$m(m-1)(m-2)z^{m-3},\ldots\quad m(m-1)\ldots(m-n+1)z^{m-n},\ldots$$

$z=1$ helyen ezek a kifejezések a következő értékeket veszik fel:**

$$1,\quad m,\quad m(m-1),\quad m(m-1)(m-2),\ldots\quad m(m-1)\ldots(m-n+1)\ldots$$

és így az $(1+x)^m$ függvényhez tartozó hatványsor:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots,$$

vagy rövidebb jelöléssel:

$$1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots+\binom{m}{n}x^n+\cdots$$

Meg kell vizsgálnunk, hogy ez a végtelen sor x minő értékeire adja meg az $(1+x)^m$ függvényt? Célszerű lesz megint először e sor konvergenciájának vizsgálatával foglalkoznunk. A konvergenciakörön [vagy itt, ahol egyelőre csak valós változókkal dolgozunk, a konvergencia-közön] belül a hatványsor abszolut konvergens, tehát a $\sum\left|\binom{m}{n}x^n\right|$ sor konvergenciája vizsgálandó. A D'Alembert-féle kritérium szolgálhat felvilágosítással. Két szomszédos tag hányadosa:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\binom{m}{n+1}x^{n+1}:\binom{m}{n}x^n=\frac{m-n}{n+1}x,$$

tehát: $$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n=\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}x\right|=|x|.$$

* Ha m pozitiv egész szám, x^m maga az (egytagú) Maclaurin-sor.

** z^m a $z=1$ helyen többértékű, ha m nem egész szám ; valós értéke csak $+1$ vagy még -1 lehet. Válasszuk a $+1$ értéket ; ezzel egyúttal mindenik differenciálhányados értékét is megállapítottuk a $z=1$ helyen.

A $\sum \binom{m}{n} x^n$ hatványsor tehát konvergens, ha $|x| < 1$, divergens, ha $|x| > 1$. A Lagrange-féle maradéktag a jelen esetben:

$$\binom{m}{n}(1+\vartheta x)^{m-n}x^n, \quad \text{ahol} \quad 0<\vartheta<1.$$

Ez még így is írható:

$$\binom{m}{n}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n (1+\vartheta x)^m.$$

Ha x pozitiv és 1-nél kisebb, akkor

$$\frac{x}{1+\vartheta x} < x < 1 \quad \text{és így:} \quad \lim_{n=\infty}\binom{m}{n}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n = 0,$$

mert hiszen kimutattuk, hogy a $\sum u_n = \sum \binom{m}{n} x^n$ sor konvergens, ha $0<x<1$ és így előbbi állításunk az összetartás ismeretes $\lim u_n = 0$ feltételéből következik. Az $(1+\vartheta x)^m$ véges érték, $(< 2^m)$, tehát a Lagrange-féle maradéktag limese: 0, ha x pozitiv és 1-nél kisebb.

Ha x negativ, akkor a Lagrange-féle maradéktag megint felmondja a szolgálatot, mert ez esetben $\frac{x}{1+\vartheta x}$-ről a priori nem mondhatjuk, hogy 1-nél kisebb abszolut értékű. Ismét a Cauchy-féle maradéktaghoz fordulunk. Ez a maradéktag a jelen esetben:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+\vartheta x)^{m-n}(1-\vartheta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}, \quad \text{ahol} \quad 0<\vartheta<1,$$

vagyis: $$m\cdot\binom{m-1}{n-1}x^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}\cdot(1+\vartheta x)^{m-1}\cdot x.$$

Erről az alakról kimutatjuk, hogy a 0-hoz konvergál, ha $|x| < 1$ és n végtelenné válik. Ha ugyanis x negativ és abszolut értéke 1-nél kisebb, akkor

$$0 < \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} < 1, \quad \text{tehát} \quad 0 < \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1} < 1;$$

továbbá: $$\lim_{n=\infty}\binom{m-1}{n-1}x^{n-1} = 0,$$

mert a $\sum\binom{m-1}{n}x^n$ sor konvergens, ha $|x| < 1$; a maradéktagban előforduló többi tényező véges korlát alatt marad, ha $|x| < 1$, tehát a maradéktag limese: 0.

Ha x pozitiv, akkor is dönthetünk a Cauchy-féle alak segítségével; ugyanis a Cauchy-féle maradéktagot ilyen elrendezésben írjuk:

$$m\binom{m-1}{n-1}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}(1-\vartheta)^{n-1}(1+\vartheta x)^{m-1}x$$

és ez 0-hoz konvergál, mert

$$0 < \frac{x}{1+\vartheta x} < x < 1\,;\; 0 < (1-\vartheta)^{n-1} < 1,$$

továbbá

$$\left|\binom{m-1}{n-1}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}\right| \leq \left|\binom{m-1}{n-1}x^{n-1}\right|,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty}\binom{m-1}{n-1}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}(1-\vartheta)^{n-1} = 0.$$

A szorzat további tényezője: $m(1+\vartheta x)^{m-1}x$ korlátos, ha $|x|<1$, tehát a maradéktag limesze zérus.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy a felírt $\sum\binom{m}{n}x^n$ sor valóban előállítja az $(1+x)^m$ hatványt, ha $|x|<1$. Így tehát, ha $|x|<1$ és m tetszés szerinti valós szám, érvényes ez a «*binomiális tétel*»:

$$(1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots+\binom{m}{n}x^n+\cdots$$

Ha m pozitiv egész szám, akkor a jobboldalon álló összes binomiális együtthatók eltünnek, mihelyt $n>m$, vagyis a jobboldal, az $(1+x)^m$ kifejtett alakja: x m-edfokú racionális egész függvénye. Ha azonban m nem pozitiv egész szám, akkor a jobboldalon végtelen hatványsor áll, melynek összege az $(1+x)^m$ azon «ágát» adja, mely az $x=0$ helyen $+1$.

Példák. Igy például legyen $m=\frac{1}{2}$; ekkor

$$\binom{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2},\quad \binom{\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1.1}{2.4};\quad \binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{1.2.3}=\frac{1.1.3}{2.4.6}$$

és általában, amint teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk:

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}=(-1)^{n-1}\frac{1.1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6.8\ldots 2n},$$

tehát, ha $|x|<1$,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2.4}x^2+\frac{1.3}{2.4.6}x^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4+\cdots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}x^n+\cdots$$

Ha $m=-1$, akkor $\binom{m}{n}=\frac{-1.-2.-3\ldots-n}{1.2.3\ldots n}=(-1)^n$ és így, ha $|x|<1$,

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

ami az ismeretes geometriai sor. Ha $m=-2$, akkor

$$\binom{m}{n}=\frac{-2.-3\ldots-(n+1)}{1.2\ldots n}=(-1)^n(n+1),$$

vagyis: $$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3\ldots,$$

mely sor az előbbiből tagonkinti differenciálással is előállítható.

10. A maradékösszeg megbecsülése. A binomiális sor összegezése a gyakorlati számítás szempontjából is fontos. Ezért kivánatos, hogy könnyen kezelhető módszerrel rendelkezzünk a számítás pontosságának megbecsülésére, vagyis annak a megállapítására, hogy mekkora hibát követünk el, ha a végtelen binomiális sor helyett e sor valamely részletösszegét tekintjük. Ilyen módszerre vezetnek a következő fejtegetések.*

1. Ha x *pozitiv*, akkor a $\sum\binom{m}{n}x^n$ binomiális sor tagjai, minthogy feltevésünk szerint $0<m<1$, váltakozó előjelűek. Ugyanis

$$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!},\quad \binom{m}{k+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{(k+1)!},$$

vagyis $$\binom{m}{k+1}=\binom{m}{k}\frac{m-k}{k+1};$$

de $k>m$, tehát $m-k$ negativ és így:

$$\operatorname{sgn}\binom{m}{k+1}=-\operatorname{sgn}\binom{m}{k}.$$

(A $\sum\binom{m}{n}x^n$ bizonyos tagtól kezdve akkor is váltakozó előjelű, ha m nem a $0\ldots1$ közből való.) A tagok csökkenő abszolut értékűek; mert a k-ik tagból a $k+1$-ik úgy keletkezik, hogy $\frac{m-k}{k+1}x$-el szorozzuk; e szorzó abszolut értéke: $\frac{k-m}{k+1}x$, ami 1-nél kisebb. Ha az ilyen konvergens sor összegének kiszámítása végett az első k tagot vesszük tekintetbe, akkor az elhagyott rész kisebb az utolsó, tekintetbe vett tagnál. Ugyanis minden váltakozó előjelű (pozitiv taggal kezdődő), csökkenő Σa_n sor R_k maradékösszegének megbecsülésénél így járhatunk el: Ha k páros:

$$\begin{aligned}R_k&=a_{k+1}-a_{k+2}+a_{k+3}-a_{k+4}+\cdots=\\&=a_{k+1}-(a_{k+2}-a_{k+3})-(a_{k+4}-a_{k+5})+\cdots,\end{aligned}$$

* A gyakorlati számítás szempontjából feltehetjük, hogy m kitevő 0 és 1 közé esik; mert ha r az m-nél közvetlenül kisebb egész szám, akkor $(1+x)^m=(1+x)^{m-r}(1+x)^r$. A második tényező könnyen kiszámítható; az elsőben $0<m-r<1$.

vagy
$$R_k = (a_{k+1} - a_{k+2}) + (a_{k+3} - a_{k+4}) + \cdots,$$
miből:
$$a_{k+1} - a_{k+2} < R_k < a_{k+1}.$$
Ha k páratlan, akkor, $-R_k$-ra ugyanez áll, tehát minden esetben:
$$|a_{k+1} - a_{k+2}| < |R_k| < |a_{k+1}|,$$
vagyis valóban a váltakozó előjelű csökkenő sor maradéka abszolut értékre kisebb az első elhanyagolt és annál inkább az utolsó számba vett tag abszolut értékénél, azaz: $|R_k| < |a_k|$. Így tehát, ha *x pozitiv és $0<m<1$, akkor a binomiális sor maradéktagja kisebb abszolut értékű, mint az utolsó, számításba vett tag.**

2. Legyen x *negativ*. A k-ik tag után következő tagok:
$$\binom{m}{k+1} x^{k+1}, \quad \binom{m}{k+2} x^{k+2}, \ldots$$
közül az r-ik igy írható:
$$\binom{m}{k} \frac{(m-k)(m-k-1)\ldots(m-k-r+1)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+r)} x^{k+r},$$
ahol az $\binom{m}{k}$ melletti tört abszolut értéke 1-nél kisebb, mert feltettük, hogy $0<m<1$. Tehát a $(k+1)$-ik taggal kezdődő elhagyott rész abszolut értékre nézve kisebb, mint
$$\left|\binom{m}{k}\right| \sum_k^\infty |x|^r = \left|\binom{m}{k} \frac{x^k}{1-|x|}\right|,$$
vagyis kisebb, mint az utolsó számításba vett tag osztva $1-|x|$-szel.

Ezeknek az egyszerű szabályoknak jó hasznát vesszük a hiba hozzávetőleges megállapításánál.

11. Gyökvonás a binomiális sor segítségével. A binomiális sort felhasználjuk a közelítő numerikus gyökvonásra. Így például, ha $\sqrt[5]{1152}$-t kell kiszámítani, akkor 1152-t ilyen alakban írjuk: $1152=1024+128$. Az első tag: 4^5; tehát
$$\sqrt[5]{1152} = \sqrt[5]{4^5+128} = 4\sqrt[5]{1+\frac{128}{4^5}} = 4\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}.$$
Az $\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$ a binomiális tétel segítségével kiszámítható. Az $\frac{1}{5}$-ik hatvány binomiális együtthatói:
$$\binom{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5}, \quad \binom{\frac{1}{5}}{2} = -\frac{2}{25}, \quad \binom{\frac{1}{5}}{3} = \frac{6}{125}, \quad \binom{\frac{1}{5}}{4} = -\frac{21}{625}, \quad \binom{\frac{1}{5}}{5} = \frac{399}{15625}, \ldots$$
tehát:
$$\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{40} - \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{64} + \frac{6}{125}\cdot\frac{1}{512} - \frac{21}{625}\cdot\frac{1}{4096} + \cdots$$

* Könnyen megmutatható, hogy ez érvényes R_k-ra akkor is, ha m tetszés szerinti pozitiv szám és $k>m$.

$\frac{1}{10^5}$ pontossággal számítva, már az első 4 tag is elégséges. Ezek:

$$\begin{array}{r}
1 \\
0{\cdot}025 \\
- \quad -0{\cdot}001250 \\
+0\ 000093 \\
\hline
1{\cdot}025093\ -0{\cdot}001250 = 1{\cdot}023843
\end{array}$$

tehát: $\sqrt[5]{1152} = 4 \,.\, 1{\cdot}023843 \ldots = 4{\cdot}095372 \ldots$

Általában, ha N-ből kell k-ik gyököt vonnunk, ahol N egész szám, akkor N-et felbontjuk két részre: Az első: az N-ben foglalt legnagyobb k-ik hatvány, pl.: N_1^k, a második rész $N-N_1^k=M_1$ és így:

$$N^{\frac{1}{k}} = N_1\left(1+\frac{M_1}{N_1^k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

A második tényező kiszámítására alkalmazható a binomiális tétel, ha $\frac{M_1}{N_1^k}<1$. [Ha $\frac{M_1}{N_1^k}>1$, sőt már az esetben is, midőn $\frac{M_1}{N_1^k}<1$, de közel van 1-hez, az N *után* következő első teljes k-ik hatványt, N_2^k-t vesszük és akkor N-et így bontjuk fel: $N=N_2^k+(N-N_2^k)=N_2^k-M_2$ és így $N^{\frac{1}{k}}=N_2\left(1-\frac{M_2}{N_2^k}\right)^{\frac{1}{k}}$ számítandó $\left(\frac{M_2}{N_2^k}\right.$ mindig $<1.)$].

12. A binomiális sor az 1 és -1 helyeken. Felvetjük azt a kérdést, hogy az $(1+x)^m$ függvény előállítására szolgáló $\Sigma\binom{m}{n}x^n$ hatványsor alkalmas-e a függvény értékének meghatározására, ha x a konvergencia-intervallum határpontja? Abel tétele értelmében: Ha a $\Sigma\binom{m}{n}x^n$ az $x=1$ helyen konvergens, akkor meg is adja a $\lim\limits_{x=1}(1+x)^m$ értéket (az $x=1$ hely felé a konvergencia-köz belsejéből a valós tengely mentén közeledvén), vagyis $\Sigma\binom{m}{n}=2^m$. Ha pedig az $x=-1$ helyen konvergens e sor, akkor megadja a $\lim\limits_{x=-1}(1+x)^m$ értéket, (ha x megint megfelelően tart (-1)-hez). Ebből már az is következik, hogy ez az utóbbi eset csakis pozitiv m-re állhat be, mert ha m negativ, akkor $(1+x)^m$ az $x=-1$ helyen végtelenné válik (ha $m=0$, akkor mindig $(1+x)^m=1$.). Vizsgáljuk meg tehát, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}$ sor m minő értékeinél konvergens és azután ugyanezt a kérdést tesszük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}$-re vonatkozólag.

Ha $m<-1$, akkor — azt állítjuk — a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}$ sor divergens. Ugyanis legyen $u_n=\binom{m}{n}$, akkor $u_{n+1}=\binom{m}{n}\frac{m-n}{n+1}$ és minthogy: $m<-1$, a számlálóban levő $m-n$ abszolut értéke $n+1$-nél nagyobb, vagyis $|u_{n+1}|>|u_n|$, tehát $\lim u_n=0$ sincs teljesítve és így $\Sigma\binom{m}{n}$ divergens.

Ha $m=-1$, akkor a $\Sigma\binom{m}{n}$ sor átmegy ebbe: $1-1+1-1+\ldots$ és ez is divergens sor.

Végül, ha $m>-1$, akkor $u_{n+1}=\binom{m}{n}\frac{m-n}{n+1}$ alakon látjuk, hogy $m-n$ m-nél nagyobb n-től kezdve mindig negativ, tehát a $\Sigma\binom{m}{n}$ váltakozó előjelű, és az $m>-1$ és $m<n$ egyenlőtlenségekből folyólag $m-n>-(1+n)$ és $m-n<0$, azaz $|m-n|<n+1$, tehát a sor tagjai abszolut értékre fogynak. Ha még azt is megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{n=\infty}\binom{m}{n}=0$, akkor be lesz bizonyítva, hogy a $\Sigma\binom{m}{n}$ konvergens.

A $\lim\limits_{n=\infty}\binom{m}{n}=0$ fennállásának megmutatása végett összehasonlítjuk a $\Sigma\binom{m}{n}$ sor tagjait a $\Sigma\frac{1}{n^{m+1}}$ sor tagjaival és megmutatjuk, hogy az elsőben a tagok abszolut értékre kisebbek, mint a második sor megfelelő, fix számmal szorzott tagjai. Legyen az első sor n-ik tagja u_n, a másodiké: v_n és $n>m$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n-m}{n+1}=1-\frac{m+1}{n+1}$$

és
$$\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{m+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-m-1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-(m+1)}.$$

Ha ϱ pozitiv, akkor az $(1+x)^{-\varrho}>1-\varrho x$, amiről $(1+x)^{-\varrho}$-nak a második tagnál berekesztett véges Taylor-sorba fejtésével meggyőződhetünk. Alkalmazva ezt a jelen esetre:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-(m+1)}>1-\frac{m+1}{n+1},$$

vagyis:
$$\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}}>\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

Igy tehát:
$$|u_{n+1}|<\frac{|u_n|}{v_{n+1}}v_{n+2}.$$

Ugyanígy: (L. 273. lapon.)
$$|u_{n+2}|<\frac{|u_{n+1}|}{v_{n+2}}v_{n+3}$$

és $|u_{n+1}|$ helyébe az előbbi egyenlőtlenségből $\frac{|u_n|}{v_{n+1}}v_{n+2}$-t téve:

$$|u_{n+2}|<\frac{|u_n|}{v_{n+1}}v_{n+3}$$

s í. t.; általában:
$$|u_{n+k}|<\frac{|u_n|}{v_{n+1}}v_{n+k+1}.$$

Az n valamely fix index. Ha az $\frac{|u_n|}{v_{n+1}}$ meghatározott számértéket A-val jelöljük és $n+k$ helyébe újból n-et írunk, akkor arra jutunk, hogy $|u_n|<Av_{n+1}$, tehát $\lim u_n=0$.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha $m>-1$, akkor a $\Sigma\binom{m}{n}$ végtelen sor konvergens és így előállítja az Abel-tétel értelmében a 2^m-et; vagyis erre a numerikus egyenlőségre jutottunk:

$$2^m=1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\cdots+\binom{m}{n}+\cdots\quad(m>-1).$$

Vizsgáljuk meg most a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}$ végtelen sort. Miként említettük, ha $m<0$, ez a sor nem lehet konvergens, mert ha konvergens volna, Abel tétele értelmében előállítaná az $(1+x)^m$ függvény határértékét az $x=-1$ helyen; de ez végtelen, ha $m<0$. Tegyük fel tehát, hogy $m>0$. Ekkor a $\Sigma(-1)^n\binom{m}{n}$ sor tagjai bizonyos n-től kezdve mind egyenlő jelűek és az előbbi jelölést használva, azt találjuk, hogy $0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}}$. De a jelen esetben a Σv_n sor, vagyis a $\Sigma\frac{1}{n^{m+1}}$ sor konvergens és így a kérdéses $\Sigma(-1)^n\binom{m}{n}$ is konvergens és így arra jutottunk, hogy ha $m>0$, akkor:

$$1-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+\cdots=0.$$

13. Arc tg x Maclaurin-sora. Az arc tg x sorának megállapítása céljából szükségünk van ezen függvénynek és differenciálhányadosainak az $x=0$ helyen való értékeire. Arc tg x-en azt a szöget értjük (absz. mértékben mérve), mely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között van és melynek tangense: x. Ez a definició egyértelmű; ha ugyanis x bármely pozitiv, vagy negativ szám, a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között egyetlen olyan szög van, melynek tangense: x. Minden más olyan szög, melynek tangense x, ettől a szögtől π pozitiv vagy negativ egész számú többszöröseiben különbözik. Jelöljük az arc tg x-et y-nal, akkor

$$(1+x^2)\,y'=1$$

egyenlőséget a Leibnitz-szabály szerint n-szer differenciálva, erre a relációra jutunk:

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n\,(n-1)\,y^{(n-1)}=0$$

mely az arc tg x három szomszédos differenciálhányadosa között állapit meg összefüggést. (E differenciálhányadosok minden valós x helyen végesek, mert olyan törtek, melyek nevezői $1+x^2$ pozitiv egész hatványai.) Nekünk e differenciálhányadosokra az $x=0$ helyen van szükségünk. Jelöljük az $(\text{arc tg}\, x)^{(n)}$-et az $x=0$ helyen röviden $y_0^{(n)}$-val; akkor tehát a fönti egyenletbe $x=0$ téve:

$$y_0^{(n+1)}+n\,(n-1)\,y_0^{(n-1)}=0$$

egyszerű összefüggést kapjuk az $n-1$-ik és $n+1$-ik differenciálhányadosok $x=0$ helyen való értékei között. Ebből a relációból egymásután kiszámíthatjuk a Maclaurin-sor együtthatóit. Minthogy $y_0=0$, tehát:

$$y_0''=y_0^{\mathrm{IV}}=\cdots=0,$$

vagyis minden páros rendű differenciálhányados: 0. Ellenben $y_0'=1$, tehát $y_0'''=-2$, $y_0^{\mathrm{V}}=4.3.2$ és, miként teljes indukcióval azonnal beláthatjuk:

$$y_0^{(2k+1)}=(-1)^k.\,(2k)!$$

Igy tehát a szóban forgó Maclaurin-sor:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots$$

Erről a sorról megint a D'Alembert-kritérium segítségével megállapíthatjuk, hogy $-1\cdots+1$ közben konvergens. Kérdés, hogy az arc tg x-et előállítja-e? Evégből meg kellene határoznunk pl. a Lagrange-féle maradéktagot. Ehhez pedig az arc tg x n-ik differenciálhányadosának explicit alakjára volna szükségünk; de az n-ik differenciálhányados ilyen előállítása sok számítással jár, azért $y^{(n)}$-et nem az x, hanem y által fejezzük ki, ami jóval egyszerűbb. Ugyanis $y' = \frac{1}{1+x^2}$ relációban $x = \operatorname{tg} y$ téve, azt kapjuk, hogy

$$y' = \cos^2 y.$$

Ebből:

$$y'' = -2\cos y \sin y \, . \, y' = -2\cos^3 y \sin y = -\cos^2 y \sin 2y.$$

Ha még egyszer differenciálunk x szerint arra jutunk, hogy:

$$y''' = 2\cos^3 y \sin y \sin 2y - 2\cos^4 y \cos 2y = -2\cos^3 y \cos 3y$$

és így:

$$y''' = -2\cos^3 y \, . \cos 3y.$$

Hasonlóképpen kaphatjuk, hogy $y^{IV} = 6\cos^4 y \sin 4y$ s í. t. Azt állítjuk, hogy általában a következő formula érvényes:*

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \cos^n y \sin n\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Erről teljes indukcióval győződhetünk meg. $n = 2$ esetében a formula érvényes. Ha x szerint differenciálunk:

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n-1}\left[-n! \cos^{n-1} y \sin y \sin n\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \right.$$
$$\left. - n! \cos^n y \cos n\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right] y' =$$
$$= (-1)^n n! \cos^{n+1} y \left[\sin y \sin n\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos y \cos n\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right]$$

és $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, $\cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ téve:

$$y^{(n+1)} = (-1)^n n! \cos^{n+1} y \sin(n+1)\left[\frac{\pi}{2} - y\right]$$

és ezzel a szóban forgó differenciálási képletet igazoltuk. Ebből látjuk, hogy

$$\left|\frac{y^{(n)}}{(n-1)!}\right| < 1,$$

vagy pedig n-nel osztva:

$$\left|\frac{y^{(n)}}{n!}\right| < \frac{1}{n}.$$

Igy tehát a Lagrange-féle maradéktagban előforduló

$$\frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} < \frac{1}{n},$$

tehát, ha $|x| < 1$, $\lim\limits_{n=\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)\, x^n}{n!} = 0.$

* Bertrand, Traité etc. I. p. 144.

Eszerint tehát a felírt Maclaurin-sor a $-1\cdots+1$ közben valóban előállítja az $\operatorname{arc\,tg} x$-et, vagyis e közben:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$$

Ugyanerre az eredményre juthatunk, ha az $\operatorname{arc\,tg} x$ differenciálhányadosát hatványsorba fejtjük és tagonkint integrálunk. Ugyanis:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

és ebből $0\ldots x$ közben integrálva:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots,$$

mint előbb találtuk. A hiba, amit elkövetünk, ha a sort az n-ik tagnál berekesztjük: $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n$; minthogy pedig: $\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right|$, miként láttuk, kisebb $\frac{1}{n}$-nél, tehát a hiba abszolut értéke kisebb, mint $\frac{|x^n|}{n}$, vagyis kisebb az első elhanyagolt tag abszolut értékénél. Ez különben onnan is látszik, hogy a sor az egész $-1<x<1$ közben váltakozó előjelű és tagjainak abszolut értékei csökkenően közelednek 0-hoz.

14. A π kiszámítása. Ha az $\operatorname{arc\,tg} x$ sorában x helyébe 1-et teszünk, akkor az $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ konvergens sorba megy át, tehát Abel tétele szerint: $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$ e sor összege, vagyis:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

De a jobboldali sor a $\frac{\pi}{4}$ számítására nem alkalmas, mert ha pl. 5 tizedesre pontosan akarnók a $\frac{\pi}{4}$-et meghatározni, akkor 50000 tagot kellene számításba vennünk. Ezért tehát a π kiszámítására könnyebben kezelhető sort készítünk.

Vegyük tekintetbe, hogy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}$; vagyis, ha $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, akkor $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{x+y}{1-xy}$ vagy más szóval, ha:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x,\ \beta = \operatorname{arc\,tg} y, \text{ akkor } \alpha+\beta = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Ha pl. azt akarjuk, hogy $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$ legyen, akkor x-et és y-t csak úgy kell választanunk, hogy $\frac{x+y}{1-xy} = 1$ legyen, vagyis: $y = \frac{1-x}{1+x}$, tehát általában akárminő értéke van is az x-nek

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}.$$

Igy pl.: ha $x=\frac{1}{2}$, akkor $y=\frac{1}{3}$; tehát:

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\cdots$$

és így:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right]+\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right]+\cdots$$

Még ennél is gyorsabban célhoz jutunk, ha $\frac{\pi}{4}$-et úgy bontjuk szét két összeadandóra, hogy az egyik egy könnyen kiszámítható kis szög többszöröse legyen, a másik pedig maga legyen igen kicsiny. *Machin* csillagász erre a következő eljárást alkalmazta: Az említett kis szög gyanánt azt választotta, melynek tangense: $\frac{1}{5}$. Legyen tehát $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$; akkor $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{5}{12}$ és ebből $\operatorname{tg}4\alpha=\frac{120}{119}$. Igy tehát 4α igen közel van a $\frac{\pi}{4}$-hez és $>\frac{\pi}{4}$.

Mondjuk, hogy $4\alpha=\frac{\pi}{4}+\beta$; akkor

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4\alpha\,.\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{239}.$$

Ennélfogva:

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

Kiszámítjuk először az α-t, vagyis $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$-öt, azután β-t, vagyis $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$-et.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3\,.\,5^3}+\frac{1}{5\,.\,5^5}-\frac{1}{7\,.\,5^7}+\frac{1}{9\,.\,5^9}\cdots$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{5}=0\cdot2000000000; & \frac{1}{5} & =0\cdot2000000000 & \\
\frac{1}{5^3}=0\cdot0080000000; & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} & & =0\cdot0026666667\\
\frac{1}{5^5}=0\cdot0003200000; & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} & =0\cdot0000640000 & \\
\frac{1}{5^7}=0\cdot0000128000; & \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} & & =0\cdot0000018287\\
\frac{1}{5^9}=0\cdot0000005120; & \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9} & =0\cdot0000000569 & \\
\frac{1}{5^{11}}=0\cdot00000002048; & \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}} & & =0\cdot0000000019\\
\hline
 & & 0\cdot2000640569 & -\ 0\cdot0026684973
\end{array}$$

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=0\cdot1973955596\ldots$$

Legfeljebb 4 tagban követtünk el $\frac{1}{2}\frac{1}{10^{10}}$-nél kisebb hibát. Az első elhanyagolt tag $<\frac{7}{10^{11}}$, tehát az eredmény hibája $<\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{10^{10}}+\frac{0\cdot7}{10^{10}}=\frac{2\cdot7}{10^{10}}$

és

$$4\alpha=0\cdot7895822392.$$

A 4α-ban a hiba $< \frac{11}{10^{10}}$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \, . \, 239^3} + \frac{1}{5 \, . \, 239^5} + \cdots$$

9 tizedes pontossághoz elég 2 tag 10 tizedesének figyelembevétele:

$$\frac{1}{239} = 0{\cdot}0041841004$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} = 0{\cdot}0000000244$$

$$\beta = 0{\cdot}0041840760$$

A hiba mindegyik tagban kisebb $\frac{1}{2} \frac{1}{10^{10}}$-nél, tehát az összes hiba kisebb, mint $\frac{1}{10^{10}}$ (a megtartott tagokból) $+ \frac{0{\cdot}5}{10^{10}}$ (az elhagyott tagokból) $= \frac{1{\cdot}5}{10^{10}}$. Az α és β számokból:

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 0{\cdot}7853981632,$$

melynek hibája legfeljebb $\frac{13}{10^{10}}$ vagyis

$$\pi = 3{\cdot}1415926528 \ldots,$$

legfeljebb $\frac{4 . 12{\cdot}5}{10^{10}} = \frac{5}{10^9} = \frac{1}{2} \frac{1}{10^8}$-nél kisebb hibával, tehát a számítás 8 jegyre pontos.*

15. Az arc sin x **sora.** Arc sin x-en azt a szöget értjük itt, amely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között van és melynek sinusa x. (L. I. kötet 79. lap.) Ez a -1 és 1 közötti szakaszban egyértékű monoton növekvő függvény. Első differenciálhányadosa tehát pozitiv.** Előállítjuk az arc sin x differenciálhányadosait az $x = 0$ helyen. Tegyük $y = \arcsin x$. A

$$\sqrt{1-x^2} \, . \, y' = 1$$

egyenlőségből (a gyökmennyiség, mint említettük, pozitiv) újra

* Ezzel az eljárással π értékét 707 jegyre számították ki. Az első 30-at észben tarthatjuk, ha megjegyezzük ezt a kis francia verset és minden szó helyett a benne levő betűk számát tesszük:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages
Immortel Archimède, artiste ingénieux.
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Az első 30 számjegy: 3·141592653589793238462643383279 ...

** Az x-hez tartozó arc sin x többi értékei ilyen alakúak: $(2k+1)\pi - y$, $y + 2l\pi$, ha k és l egész számok és y a $-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$ közötti érték. A $-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$ közötti értékrendszert az arc sin x első *ágának* mondjuk, a $\pi - y$ (a kiegészítő szög) a második ága. Ez az ág monoton csökkenő, a differenciálhányadosa negativ.

differenciálva:

$$-xy'+(1-x^2)y''=0$$

egyenlőségre jutunk. És ha ezt a Leibniz-szabály szerint n-szer differenciáljuk:

$$n^2y^{(n)}+(2n+1)xy^{(n+1)}=(1-x^2)y^{(n+2)}$$

összefüggést kapjuk az arc sin x három szomszédos diff. hányadosa között. (Megjegyezzük, hogy az arc sin x differenciálhányadosai az $x=\pm 1$-től különböző helyeken mindenütt végesek, mert e differenciálhányadosok oly törtek, melyek számlálói x rac. egész függvényei és nevezői $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ pozitiv egész kitevőjű hatványai.) Ha $x=0$ tesszük és e helyen az n-ik differenciálhányadost $y_0^{(n)}$-val jelöljük, akkor:

$$y_0^{(n+2)}=n^2y_0^{(n)}$$

egyszerű összefüggésre jutunk.

Minthogy $y_0''=0$, tehát minden páros rendű differenciálhányados az $x=0$ helyen eltűnik. Ellenben a páratlan rendű differenciálhányados

$$y_0^{(2n+1)}=[(2n-1)(2n-3)\dots 1]^2,$$

amiről teljes indukcióval könnyen meggyőződhetünk. Eszerint tehát a szóban forgó Maclaurin-sor a jelen esetben:

$$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{3^2.x^5}{5!}+\frac{(5.3)^2x^7}{7!}+\frac{(7.5.3)^2x^9}{9!}+\dots+$$
$$+\frac{[(2n-1)(2n-3)\dots 1]^2x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$$

vagy a számlálókban és nevezőkben álló közös tényezőkkel rövidítve, áttekinthetőbb alakban:

$$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots+$$
$$+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$$

A D'Alembert-kritériummal könnyen meggyőződhetünk megint arról, hogy e sor a $-1\cdots+1$ közben konvergens. A maradéktagot kellene meghatároznunk, hogy bizonyosak legyünk arról, vajjon e sor tényleg előállítja-e az arc sin x első ágát a $-1\cdots+1$ közben. De erről hosszadalmas számítás nélkül is azonnal meggyőződhetünk. Ugyanis arc sin x első ágának differenciálhányadosát a binomiális tétel szerint kifejtjük:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\dots$$

Ez a sor a $-1\cdots+1$ köz belső közében egyenletesen konvergens, tehát ha x e közbe esik, akkor $0 \ldots x$ határok között tagonkint integrálva, megkapjuk az $\arcsin x$ első ágát. Így tehát valóban:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Minthogy a jobboldali végtelen sor az $\arcsin x$ első ágát tényleg előállítja, a gyakorlati számításnál elkövetett hiba megállapítására a sor maradéktagját számítjuk ki. Ez az n-ik tagtól kezdve:

$$R = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1.3.5\ldots 2n+1}{2.4.6\ldots 2n+2}\cdot\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \cdots$$

A jobboldalt nagyobbítjuk, ha együtthatóul mindenik tagban az elsőt tekintjük; vagyis

$$|R| < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}(1 + |x|^2 + |x|^4 + \cdots) =$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-|x|^2},$$

vagyis a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag, osztva $1 - |x|^2$-el.

Az $\arcsin x$ sorát is felhasználhatjuk a π meghatározására. Ha például tekintetbe vesszük, hogy $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, akkor:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,2^{2n+1}}.$$

XVI. FEJEZET.

AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK ÉRTELMEZÉSE KOMPLEX VÁLTOZÓRA.

1. Az elemi függvények értelmezésének tágítása. Az előbbiekben megismerkedtünk az e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ stb. függvények végtelen Taylor-soraival. Ezek a hatványsorok a konvergencia közben az illető $f(x)$ függvényt tényleg megadták. De a hatványsornak akkor is van értelme, ha a változó komplex értékeket kap. Tudjuk, hogy a hatványsor egy körön belül, az ú. n. konvergencia-körön belül minden helyen abszolut konvergens és e körön belül levő bármely területben egyenletesen összetartó. A konvergencia-kör átmérője megegyezik az előbbiekben használt konvergencia-közzel. Az $f(x)$ függvényre tehát olyan analitikai alakot kaptunk, amelynek nemcsak akkor van értelme, ha az x a konvergencia-közbe eső valós érték, hanem akkor is, ha x a konvergenciakör bármelyik belső helye. Igy pl. az

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

jobboldalán álló hatványsor értelmezve van x minden értékére, mert e hatványsor konvergens az egész síkon.

Az e^x eleddig csakis valós x-ekre volt értelmezve. Hogy mit kelljen e^x-en értenünk, ha x komplex szám, arra nézve az eddigiek nem kötnek meg bennünket, tehát teljesen önkényesen járhatnánk el az e^x értelmezésének komplex számokra való kiterjesztésében. De most már rendelkezésünkre áll az e^x olyan kifejezése, amelynek közvetlenül tulajdoníthatunk értelmet minden x-re. *Ezért tehát definicióképen megállapodunk abban, hogy e^x-en a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsor összegét értjük, bármely valós vagy komplex számot jelentsen is x.* Ezzel az eredetileg valós változóra megadott függvény értelmezését kiterjesztjük komplex változóra. *Általában megállapodunk abban, hogy a valós x-ekre értelmezett $f(x)$ függvénynek, vagy, ha e függvény többértékű, egy «ágának» értel-*

mezési tartományát kiterjesztjük az $f(x)$-et, illetőleg ezen ágát előállító Taylor-sor egész konvergencia-körére úgy, hogy ha valós x-ekre $f(x)=\Sigma a_n(x-c)^n$ és e hatványsor konvergencia-köre az R sugarú, c középpontú kör, akkor e körön belül levő minden x-re $f(x)$-et a $\Sigma a_n(x-c)^n$ hatványsorral értelmezzük.

2. Az e^x értelmezése és addició-tétele. Az előbbiekben mondottak szerint tehát e^x-et ezen hatványsorral értelmezzük:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

A jobboldali hatványsor abszolut konvergens minden x értékre nézve; tehát abszolut konvergens az egész síkon, konvergenciakörének radiusa végtelen nagy. Az e^x tehát az x *minden* értékére értelmezve van.

Az e^x ezen új értelmezése a régit magában foglalja; mert ha x valós, akkor a $\sum \frac{x^n}{n!}$ nem más, mint az e^x ismert Taylor-sora.

Megmutatjuk, hogy az új értelmezéssel megadott függvénynek is megvan az a nevezetes tulajdonsága, amelyet valós változó esetében mint a hatványok szorzási tételét ismerünk; nevezetesen megmutatjuk, hogy ha x és y két tetszés szerinti szám, akkor: $e^x . e^y = e^{x+y}$.

A $\sum \frac{x^n}{n!}$ és $\sum \frac{y^n}{n!}$ végtelen sorokat a Cauchy-féle szorzási szabály szerint szorozzuk egymással. A Σa_n és Σb_n abszolut konvergens sorokat úgy szoroztuk, hogy megalkottuk a Σc_n végtelen sort, ahol:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Megmutattuk, hogy $\Sigma c_n = \Sigma a_n . \Sigma b_n$. A jelen esetben $a_n = \frac{x^n}{n!}$ és $b_n = \frac{y^n}{n!}$, tehát

$$c_n = \frac{y^n}{n!} + \frac{xy^{n-1}}{1.(n-1)!} + \frac{x^2y^{n-2}}{2.(n-2)!} +$$
$$+ \frac{x^3y^{n-3}}{3!(n-3)!} + \cdots + \frac{x^ky^{n-k}}{k!(n-k)!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} =$$
$$= \frac{1}{n!}\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n\right] = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Vagyis:
$$\sum \frac{x^n}{n!} \cdot \sum \frac{y^n}{n!} = \sum \frac{(x+y)^n}{n!}$$

és ezzel bebizonyítottuk, hogy az $e^x . e^y = e^{x+y}$ tétel komplex kitevőkre is érvényes. E tételt az e^x függvény addicio-tételének szokás nevezni.

3. e^x **mint határérték.** Még egy más úton is igazoljuk annak a jogosultságát, hogy e^x értelmezéseül a $\Sigma \frac{x^n}{n!}$ hatványsort tesszük. Ugyanis valós x-ekre nézve tudjuk, hogy e^x-et ez a határérték definiálta: $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, ahol m egész számot jelentett. Megmutatjuk, hogy bárminő valós vagy komplex szám legyen is az x, mindig fennáll, hogy

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

és ezzel ez a két értelmezés is megegyezőnek bizonyul.

Legyen n úgy választva, hogy a $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{|x^k|}{k!}$ maradéktag $\frac{\varepsilon}{3}$-nál kisebb. Ehhez pl. csak az kell, hogy n egy bizonyos, könnyen meghatározható N-nél nagyobb legyen. Válasszuk meg az n-et N-nél nagyobbra és legyen $m>n$. (m egész szám) Az $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$-et a binomiális tétel szerint kifejtve:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{mx}{m}+\binom{m}{2}\frac{x^2}{m^2}+\cdots+\binom{m}{n}\left(\frac{x}{m}\right)^n+\cdots+\binom{m}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^m =$$

$$= 1+x+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots+ \qquad \alpha)$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}$$

A jobboldali összeget két részre választjuk. Az első az n-ik tagig menjen, a második a többi $m-n$ tagot tartalmazza. Az első rész:

$$A = 1+x+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{x^n}{n!}\cdot$$

Ez így is írható:

$$A = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\varphi(m),$$

ahol $\varphi(m)$, fix n mellett, zérussá lesz, ha m végtelenné válik. A második rész pedig:

$$B = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{m}\right)+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n+1}{m}\right)+\cdots$$

és ez abszolut értékre nézve kisebb, mint:

$$\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}+\frac{|x^{n+2}|}{(n+2)!}+\cdots+\frac{|x^m|}{m!} < \sum_{n+1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Az előbb bevezetett $\varphi(m)$-mel jelölt kifejezésről tudjuk, hogy $\lim\limits_{m=\infty}\varphi(m)=0$; tehát megállapíthatunk n-hez oly M_n küszöbszámot, melyen túl levő minden m-re nézve $|\varphi(m)| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$ Az $\alpha)$ alatti egyenlet ilyen alakban írható:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\varphi(m)+B.$$

Ha a jobboldali első $n+1$ tag összege helyett a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ végtelen sort írjuk, akkor ezzel ε' hibát ejtünk, ahol $|\varepsilon'| < \frac{\varepsilon}{3}$ és így:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}+\varepsilon'+\varphi(m)+B$$

egyenlőség áll fenn, ahol

$$|\varepsilon'| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\varphi(m)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |R| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ha $n > N$ és $m > M_n$ és így:

$$\left|\left(1+\frac{x}{m}\right)^m - \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}\right| < \varepsilon,$$

ha $m > M_n$. De ez éppen azt mondja, hogy:

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}.$$

És ezzel bebizonyítottuk, hogy $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ akkor is létezik, ha x komplex szám és hogy ez a limes megegyezik a $\Sigma\frac{x^n}{n!}$ hatványsor összegével. Megjegyezzük, hogy e számításban m-mel csak a pozitiv egész számokon át haladtunk a végtelenhez, de meg lehet mutatni, hogy, miként valós, úgy komplex x esetében is:

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = e^x$$

akkor is, ha m tetszés szerinti módon válik végtelenné.

4. Az exponenciális és trigonometriai függvények kapcsolata. Euler tétele. Legyen x tetszés szerinti valós szám, akkor előbbi értelmezésünk és a komplex sorok összegének definiciója szerint:

$$e^{xi} = 1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \cdots$$

vagyis:

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

és ha tekintetbe vesszük, hogy az első sor összege: $\cos x$, a másodiké pedig $\sin x$, akkor erre, az analizis egyik legszebb, *Euler* által felfedezett kapcsolatára jutunk:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \qquad \alpha)$$

Igy például, ha $x = 2k\pi$ tesszük, ahol k tetszés szerinti egész szám, akkor: $e^{2k\pi i} = 1$, ha pedig $x = (2k+1)\pi$, akkor $e^{(2k+1)\pi i} = -1$.

Az előbbiből következik, hogy ha x tetszés szerinti szám: $e^{x+2k\pi i} = e^x . e^{2k\pi i} = e^x$, vagyis e^x olyan függvénye az x-nek, amely nem változik meg, ha a változót $2\pi i$ bármely egész számú többszörösével megnöveljük, vagyis e^x *periodikus* függvény, periodusa: $2\pi i$.

Ha az $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ Euler-féle relációban a valós x helyett $-x$-et írunk, akkor: $e^{-xi} = \cos x - i \sin x$ egyenlőségre jutunk és ez az előbbivel együtt arra vezet, hogy $\sin x$-et és $\cos x$-et az exponenciális függvénnyel fejezzük ki. Ugyanis az

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

egyenlőségekből következik, hogy

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \qquad \beta)$$

Ezekből pedig a $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{cotg} x$ definiciói szerint:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{i}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}, \quad \operatorname{ctg} x = i\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}.$$

Ezek az egyenlőségek a máshonnan, főként geometriai meggondolásokból ismeretes trigonometriai függvényeket valós argumentumokra az exponenciális függvény segítségével állítják elő.

5. A trigonometriai függvények értelmezése komplex változóra. Értelmezzünk két függvényt, melyeket $S(x)$ és $C(x)$-szel akarunk jelölni, e végtelen sorok által:

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots; \quad C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Ezekről a sorokról kimutathatjuk, hogy x minden értékére abszolut konvergensek, továbbá, hogy összegük az exponenciális függvénnyel az $e^{ix} = C(x)+iS(x)$ relációval függ össze, miből:

$$S(x) = [e^{ix}-e^{-ix}] : 2i; \quad C(x) = [e^{ix}+e^{-ix}] : 2.$$

Az így értelmezett $S(x)$ és $C(x)$ függvények valós x értékekre a geometriai módon megállapított $\sin x$ és $\cos x$ függvényekkel teljesen megegyeznek; mert hiszen valós x-ekre a geometriai értelmezésből kiindulva és a geometriai úton megállapított addició-tételek és ugyancsak a geometriai úton megállapított $\lim\limits_{x=0} [\sin x : x] = 1$ reláció segítségével állítottuk elő a $\sin x$ és $\cos x$ végtelen Taylor-sorait és ezek a sorok ugyanazok, mint az $S(x)$, illetőleg $C(x)$ fenti sorai. Az $S(x)$, illetőleg $C(x)$ függvények értelmezési tartománya bővebb mint a $\sin x$ és $\cos x$ függvényeké, mert $S(x)$ és $C(x)$ minden komplex értékre is értelmezve vannak. Az 1. pontban megállapított elv szerint az eddig csak valós x-ekre értelmezett $\sin x$ és $\cos x$ függvények értelmezését komplex változókra is kiterjesztjük, amenynyiben $\sin x$-en az előbbi $S(x) = \sum\limits_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ és $\cos x$-en a $C(x) = \sum\limits_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ végtelen sorokat értjük, melyek x minden értékénél abszolut konvergensek.

Ezzel elértük azt is, hogy az Euler-féle relációk, vagyis az előbbi pont $\alpha)$ és $\beta)$ alatti relációi a $\sin x$ és $\cos x$-re vonatkozólag fennállanak minden (valós és komplex) x-re.

Az így általánosított $\sin x$ és $\cos x$ függvényekre a geometriai meggondolásoktól függetlenül és a változó minden értékére megállapíthatók a trigonometriai addició-tételek, ha az exponenciális függvény addició-tételét felhasználjuk. Ugyanis

$$C(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad S(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

$$C(y)=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad S(y)=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

egyenletekből:

$$C(x).\,C(y)-S(x).\,S(y)=\frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{2}=C(x+y)$$

relációra jutunk. Éppen így kapjuk az $S(x)\,C(y)+C(x)\,S(y)=S(x+y)$ relációt, továbbá az első két egyenletből a $[C(x)]^2+[S(x)]^2=1$ összefüggést s í. t.

Miután komplex változóra is értelmeztük a $\sin x$ és $\cos x$ függvényeket, megállapítjuk, hogy $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ legyen minden x-re, hol a nevező $\neq 0$, miáltal a $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{cotg} x$ függvények is értelmezve vannak (az említett kivétellel) minden x-re. Az Euler-tétel felhasználásával arra jutunk, hogy:

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{i}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=i\,\frac{1-e^{2ix}}{1+e^{2ix}},\quad \operatorname{cotg} x=-i\,\frac{1+e^{2ix}}{1-e^{2ix}}.$$

6. A hyperbolás függvények. Az $S(x)$ és $C(x)$ függvények x minden értékére értelmezve vannak. Tegyük x helyett ix-et, akkor erre jutunk:

$$S(ix)=i\left[x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right],\quad C(ix)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

Az $S(ix)/i$ valamint a $C(ix)$ függvények x valós értékeire valósak. Valós x-ek esetében külön nevet is adunk e függvényeknek. Az elsőt hyperbolás sinusnak nevezzük és így jelöljük: $\mathfrak{Sin}\, x$. Éppen így $C(ix)$-et valós x esetében $\mathfrak{Cos}\, x$-nek írjuk és hyperbolás cosinusnak mondjuk. Eszerint tehát:

$$\mathfrak{Sin}\, x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\frac{1}{i}\sin(ix);$$

$$\mathfrak{Cos}\, x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\cos(ix).$$

Ezek segítségével értelmezzük a trigonometriai függvényeknek megfelelően a hyperbolás tangenst és cotangenst. Igy:

$$\mathfrak{Tg}\, x=\mathfrak{Sin}\, x/\mathfrak{Cos}\, x,\quad \mathfrak{Cotg}\, x=\mathfrak{Cos}\, x/\mathfrak{Sin}\, x.$$

A hyperbolás függvényeknek az exponenciális függvénnyel való kapcsolatai nyilvánvalók:

$$e^x = \mathfrak{Cos}\, x + \mathfrak{Sin}\, x\,; \quad e^{-x} = \mathfrak{Cos}\, x - \mathfrak{Sin}\, x,$$

vagy:
$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,; \quad \mathfrak{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot$$

Ebből következtethetjük a hyperbolás függvények addició-tételét. Ugyanis:

$$\mathfrak{Sin}\, x\,.\,\mathfrak{Cos}\, y + \mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y = \mathfrak{Sin}\,(x+y)\,;$$
$$\mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y + \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y = \mathfrak{Cos}\,(x+y)$$

stb., amelyekre az $i\,\mathfrak{Sin}\, x = \sin(ix)$ és $\mathfrak{Cos}\, x = \cos(ix)$ addició-tételeiből is rájuthatunk. (L. I. kötet 468. lapon, ahol a $\mathfrak{S}$ és $\mathfrak{C}$ helyett az S és C betűket használtuk.)

6. A logarithmus általánosítása. A logarithmusról eddigelé csak igen szűk körben szólhattunk; csakis pozitiv szám logarithmusa szerepelt, mert e bármely reális kitevőjű hatványa pozitiv. Most a logarithmust is általánosítjuk. Általában valamely A szám logarithmusán olyan x exponenst értünk, melyre nézve $e^x = A$ egyenlőség áll fenn.

Legyen A komplex szám, melynek modulusa $R = |A| \neq 0$ és argumentuma: φ, (ezt úgy választjuk, hogy $-\pi \leq \varphi < \pi$ legyen) vagyis $A = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Keressünk olyan $x = x' + ix''$ komplex számot [x' és x'' valósak], mely azzal a tulajdonsággal bir, hogy

$$e^{x'+ix''} = A.$$

Minthogy $e^{x'+ix''} = e^{x'}(\cos x'' + i\sin x'')$, tehát

$$e^{x'}(\cos x'' + i\sin x'') = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ebből következik, hogy

$$e^{x'}\cos x'' = R\cos\varphi, \quad e^{x'}\sin x'' = R\sin\varphi.$$

Ez egyenletek jobb- és baloldalait négyzetre emelvén és összeadván arra jutunk, hogy

$$e^{2x'} = R^2$$

és minthogy $R = |A|$ pozitiv, tehát innen:

$$e^{x'} = R, \quad \cos x'' = \cos\varphi, \quad \sin x'' = \sin\varphi.$$

Az első egyenletből következik, hogy az x' valós szám az R pozitiv szám közönséges logarithmusa, a második és harmadik egyenletből pedig, hogy x'' a φ-től csak 2π egész számú többszörösében különbözik, vagyis $x'' = \varphi + 2k\pi$, (ahol k egész szám, vagy 0) tehát A logarithmusa:

$$\log A = \log R + i\,[\varphi + 2k\pi].$$

Igy tehát *egy tetszés szerinti számnak végtelen sok logarithmusa van; egyiknek valós része a szám abszolut értékének valós* *logarithmusa és képzetes része az argumentum i-szerese. A szám minden más logarithmusa ettől (a «főértéktől») $2i\pi$ egész számú többszörösében különbözik.*

Igy például 1-nek a logarithmusai $2ki\pi$ alakúak, (ahol k tetszés szerinti egész szám vagy 0), mert az előbb R-rel jelölt szám értéke most 1, és $\varphi=0$.

Az A pozitiv szám logarithmusa a föntiek szerint: $\log A+2ki\pi$, ahol $\log A$ a közönséges (valós) logarithmus. Látjuk, hogy az eddigi értelmezéssel a logarithmusnak csak egyik értékét vettük tekintetbe.

Számítsuk ki $\log(-1)$-et! -1 abszolut értéke 1, argumentuma: π; tehát -1 logarithmusa: $i\pi+2ki\pi$, vagyis $(2k+1)i\pi$, tehát $i\pi$ bármelyik páratlan többszöröse.

Számítsuk ki: $1+i$ logarithmusát. $1+i$ abszolut értéke a pozitiv $\sqrt{2}$; argumentumára nézve pedig tudjuk, hogy

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{tehát}\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$$

és így: $$\log(1+i)=\log\sqrt{2}+i\pi/4+2ki\pi$$

ahol k tetszés szerinti egész szám.

Nyilvánvaló, hogy a valós számok valós logarithmusaira vonatkozó addició-tétel érvényes az általánosított logarithmusra is. U. i.: ha A valamelyik logarithmusa x, és B-é y, akkor $A=e^x$, $B=e^y$ és ebből: $AB=e^{x+y}$, vagyis AB logarithmusának egyik értéke: $x+y$.

7. **A logarithmus sora komplex változó esetében.** Tudjuk, hogy ha x valós szám és $|x|<1$, akkor $\log(1+x)$ Maclaurin-sora a következő:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots \qquad A)$$

Ez a hatványsor x minden szóban forgó értékéhez *egy valós* értéket rendel: az x egyértékű függvénye. A $\log(1+x)$-ről már tudjuk, hogy valós x esetében is végtelen sok értékű. Egyik értéke az *A)* alatti sor összege; minden más értéke ettől az értéktől $2\pi i$ egész számú többszörösében különbözik. Most megmutatjuk, hogy a $\log(1+x)$ egyik értéke — és pedig ismét a főértéke — akkor is kifejezhető az *A)* alatti sor alakjában, ha x komplex szám és $|x|<1$.

Ugyanis, ha $$x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

ahol $$0\leq r<1 \quad \text{és} \quad -\pi<\varphi\leq\pi,$$

akkor: $$1+x=1+r\cos\varphi+ri\sin\varphi=R(\cos\psi+i\sin\psi)$$

ahol: $$R=\left|\sqrt{1+2r\cos\varphi+r^2}\right|,\quad \cos\psi=\frac{1+r\cos\varphi}{R},\quad \sin\psi=\frac{r\sin\varphi}{R} \qquad B)$$

és ahol $-\pi\leq\psi<\pi$. (Minthogy $\cos\psi$ pozitiv, tehát a ψ szög $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé esik.)

Az előbbi pontban foglalt értelmezés szerint:

$$\log(1+x)=\log R+i\psi+2ki\pi,$$

ahol $\log R$ az R valós logarithmusát jelenti, melyet félreértés elkerülése végett $(\log R)$-nek írunk. $(\mathrm{Log}\, R)+i\psi$ a $\log(1+x)$ főértéke. $(\mathrm{Log}\, R)$-et és ψ-t kell kiszámítanunk. Evégett vegyük tekintetbe, hogy ha $|x|<1$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

és így ha $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ahol $0\leq r<1$, akkor:

$$\frac{1}{1+x}=1-r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi-r^3\cos 3\varphi+\cdots-i(r\sin\varphi-r^2\sin 2\varphi+\cdots)$$

Nyilván, mind a valós rész, mind a képzetes rész konvergens, mert $r<1$. Minthogy pedig:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+r\cos\varphi+ri\sin\varphi}=\frac{1+r\cos\varphi-ri\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}$$

tehát különválasztva a valós és képzetes részeket:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1+r\cos\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}&=1-r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi-r^3\cos 3\varphi+\cdots\\ \frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}&=r\sin\varphi-r^2\sin 2\varphi+r^3\sin 3\varphi-\cdots\end{aligned}\right\}\quad C)$$

A *C)* alatti első egyenletből, ha mindkét oldalon 1-et kivonunk és ha $r\neq 0$, $-r$-rel osztunk, ez lesz:

$$\frac{r+\cos\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}=\cos\varphi-r\cos 2\varphi+r^2\cos 3\varphi-r^3\cos 4\varphi+\cdots$$

Ez az egyenlőség fennáll akkor is, ha $r=0$. A baloldalon álló kifejezés, miként R-nek a *B)* alatti kifejezéséből következik, nem más, mint $(\log R)$-nek r szerinti differenciálhányadosa; tehát, mindkét oldalon integrálva r szerint 0 és r határok között, (minthogy a jobboldalon tagonkint integrálhatunk), arra jutunk, hogy:

$$[(\log R)]_0^r=r\cos\varphi-\frac{r^2\cos 2\varphi}{2}+\frac{r^3\cos 3\varphi}{3}-\frac{r^4\cos 4\varphi}{4}+\cdots$$

De ha $r=0$, akkor $(\log R)=0$, tehát arra jutottunk, hogy:

$$(\log R)=r\cos\varphi-\frac{r^2\cos 2\varphi}{2}+\frac{r^3\cos 3\varphi}{3}-\cdots \quad D)$$

$(\log R)$-et r és φ által kifejeztük. Most a ψ szöget határozzuk meg, szintén r és φ által.

A *B)* alatti egyenletből látjuk, hogy az $1+x$ argumentuma:

$$\psi=\mathrm{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi},\quad\text{ahol}\quad -\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy ψ-nek r szerinti differenciálhányadosa:

$$\frac{d\psi}{dr}=\frac{\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}$$

és így *C)* szerint:

$$\frac{d\psi}{dr}=\sin\varphi-r\sin 2\varphi+r^2\sin 3\varphi-\cdots$$

Innen, az előbbi következtetés megismétlésével, tekintetbe véve, hogy $-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}$, tehát $\psi=0$, ha $r=0$, arra jutunk, hogy:

$$\psi=r\sin\varphi-\frac{r^2\sin 2\varphi}{2}+\frac{r^3\sin 3\varphi}{3}-\cdots, \quad E)$$

tehát a *D)* és *E)* alatti egyenlőségek tekintetbe vételével kifejezhetjük $\log(1+x)$ főértékét:

$$\log(1+x) = (\log R) + i\psi = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}.$$

Ezzel kimutattuk, hogy $\log(1+x)$ főértékét azon esetben, midőn x komplex szám, ugyanolyan alaku hatványsor állítja elő, mint abban az esetben, midőn x valós számot jelentett. [V. ö. 431. l. 34. feladatával.] (Ismét megjegyezzük, hogy $|x|<1$.) Ezzel egyuttal azt is megmutattuk, hogy a logarithmus-függvény értelmezésének föntebb megállapított kiterjesztése komplex számok esetére e fejezet 1. pontjában kimondott elvvel teljes összhangzásban történt.

8. Az arcus-függvények. Előbb a trigonometriai függvényeket az exponenciális függvénnyel hoztuk kapcsolatba. Most a trigonometriai függvények inverz függvényeit, az arcus függvényeket, értelmezésüket a komplex argumentumokra is kiterjesztve, az exponenciális függvény inverzével, a logarithmussal hozhatjuk kapcsolatba. Legyen x valós szám és $\operatorname{arc\,tg} x = y$, vagyis $x = \operatorname{tg} y$, akkor tehát

$$x = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{e^{iy}+e^{-iy}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iy}-1}{e^{2iy}+1}.$$

Ebből: $\quad e^{2iy} = \dfrac{1+ix}{1-ix}$, vagyis: $\quad y = \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{1+ix}{1-ix}$,

tehát arra jutottunk, hogy:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}.$$

Megállapodunk abban, hogy az $\operatorname{arc\,tg} x$-et komplex x-ekre (hacsak $x \neq i$) ezen, valós x-ek esetére levezetett képlettel értelmezzük. Ha a jobboldalon álló logarithmus egyik értékét u_1-gyel és $\frac{u_1}{2i}$-t y_1-gyel jelöljük, akkor a logarithmus minden más értéke: $u_1 + 2ki\pi$ és így az $\operatorname{arc\,tg} x = y_1 + k\pi$, ahol k egész szám; vagyis az $\operatorname{arc\,tg} x$ összes értékei egyikből úgy keletkeznek, hogy ehhez π egész számú többszöröseit hozzáadjuk. Ezen értékek közűl az $\operatorname{arc\,tg} x$ *főértékének* nevezzük azt, melynek valós része $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közé esik.

Ha $|x|<1$, akkor $\log(1+ix)$, valamint $\log(1-ix)$ főértéke, mint láttuk, x hatványai szerint haladó hatványsorba fejthetők:

$$\log(1+ix) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(ix)^n}{n}; \quad \log(1-ix) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n},$$

ahol, mint az előző pontban láttuk, a képzetes részek koordinátái $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közé. A logarithmus függvény addició-tétele alapján:

$$\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(ix)^n}{n}+\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n}.$$

A képzetes rész koordinátája $-\pi$ és π közé esik, vagyis $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ *főértéke*:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

ha x 1-nél kisebb abszolut értékű valós, vagy komplex szám. Ezzel egyuttal azt is megmutattuk, hogy az $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$-et komplex x esetében is ugyanaz a Maclaurin sor állítja elő, mint amelyet valós x-re találtunk és így az arcus tangens függvény értelmezésének komplex változó esetére való kiterjesztése megint az 1. pontban megállapított elvvel összhangzásban történt.

Értelmezzük most az $\arcsin x$ függvényt komplex argumentumokra. Számítsuk ki e végből az $\arcsin x$-et, ha x valós. Legyen $\arcsin x = y$, vagyis $x=\sin y$; tehát:

$$x=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}=\frac{e^{2iy}-1}{2ie^{iy}}$$

és ez az e^{iy}-ra másodfokú egyenlet, melyből: $e^{iy}=ix\pm\sqrt{1-x^2}$, tehát:

$$\arcsin x=\frac{1}{i}\log\left[ix\pm\sqrt{1-x^2}\right].$$

Már most megállapodunk abban, hogy komplex x-ekre az $\arcsin x$-et ezzel, a valós x-ekre levezetett képlettel értelmezzük. Ennek alapján látjuk, hogy megadott (valós vagy komplex) x-hez végtelen sok olyan szög tartozik, melynek ez az x a sinusa; és pedig, ha y_1-gyel jelöljük az $\frac{1}{i}\log\left[ix+\sqrt{1-x^2}\right]$ egyik értékét, (ahol $+\sqrt{1-x^2}$-tel jelöltük a $\sqrt{1-x^2}$ egyik értékét), y_2 pedig az $\frac{1}{i}\log\left[ix-\sqrt{1-x^2}\right]$-nek egyik értéke, akkor $\arcsin x$ minden más értéke vagy $y_1+2k\pi$, vagy $y_2+2k'\pi$ alakú, ahol k és k' egész számok.

Nézzük még az $\arcsin x$ e különböző rendszerekből vett két értékének összegét. Az addició-tétel szerint:

$$\frac{1}{i}\left[\log\left(ix+\sqrt{1-x^2}\right)+\log\left(ix-\sqrt{1-x^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{i}\log\left(ix+\sqrt{1-x^2}\right)\left(ix-\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{1}{i}\log(-1).$$

De $\log(-1)=(2l+1)\pi i$, tehát az összeg ilyen alakú: $(2l+1)\pi$. Ha k és k' egész számokat alkalmasan választjuk, mindig elérhetjük, hogy $l=0$. Arra jutottunk, amit valós szögekre vonatkozólag a trigonometria elemeiből ismerünk, hogy adott sinusértékhez mindig tartozik olyan két szög is, melyek összege π.

XVII. FEJEZET.

A FOURIER-SOR ELMÉLETÉNEK ELEMEI.*

1. Egyenletesen összetartó trigonometriai sor. Tegyük fel, hogy az $a \ldots a+2\pi$ közben korlátos, integrálható $f(x)$ függvény előállítható e közben

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+(a_3\cos 3x+b_3\sin 3x)+\cdots$$

alakú végtelen trigonometriai sorral, mely sor az $a \ldots a+2\pi$ zárt közben *egyenletesen* összetartó.

Az $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ együtthatók ekkor könnyen meghatározhatók. Ugyanis feltételünk szerint:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty (a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{A}$$

tehát, ha mindkét oldalon $\cos kx$-el szorzunk, ahol k pozitiv egész szám, akkor

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_1^\infty (a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx)$$

és a jobboldali végtelen sor egyenletesen összetartó, tehát, ha az $a \ldots a+2\pi$ határok között az egyenlet mindkét oldalán integrálunk, a jobb oldalon az integráció tagonkint végezhető el. De tudjuk (I. kötet 360. lap), hogy ha k és n egész számok

$$\int_a^{a+2\pi}\sin nx\cos kx dx=0 \quad \text{és} \quad \int_a^{a+2\pi}\cos nx\cos kx dx=0, \quad \text{ha} \quad k\neq n$$

és

$$\int_a^{a+2\pi}\cos^2 kx dx=\pi, \quad \text{ha} \quad k\neq 0,$$

tehát:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos kx dx=\pi a_k, \quad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Éppen így kapjuk, hogy:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin kx dx=\pi b_k \quad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

és

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx=\pi a_0.$$

* A Fourier-sorok elméletének csak az elemeit tárgyaljuk, azt is részben az olvasóra bízott gyakorlatok formájában. Az elmélet részleteire nézve az ide vonatkozó irodalomra utalunk.

Arra jutottunk tehát, hogy ha $f(x)$ a zárt $a\ldots a+2\pi$ közben az $A)$ alatti egyenletesen összetartó sorban állítható elő, akkor $k=0, 1, 2, \ldots$-re:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha. \qquad B)$$

Ha az $A)$ alatti sorról nem tudjuk, hogy egyenletesen összetartó, csak azt, hogy összetartó, akkor nem tudjuk azt sem, hogy az együtthatók kiszámítására az előbbi eljárás alkalmazható-e; tehát ha $f(x)$ elő is van állítva az $A)$ alatti módon trigonometriai sorban, még nem tudhatjuk, hogy az együtthatói a $B)$ alatti kifejezések-e?

2. Fourier-sor. A Fourier-sor szummája. Az a_k, b_k együtthatók kifejezésére vonatkozó kérdést megfordítjuk: Legyen adva az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad A)$$

trigonometriai sor, melynek együtthatóiról a priori tudjuk az integrálalakban való előállíthatást, melyben tehát $k=0, 1, 2, \ldots$-re:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha,$$

ahol $f(x)$ az $a\ldots a+2\pi$ zárt közben korlátos, integrálható függvény. Az $A)$ alatti sort $f(x)$ függvény *Fourier*-sorának nevezzük. Kérdezzük, előállítja-e ez a sor az $f(x)$-et?

Legyen x az $a\ldots a+2\pi$ köz valamely helye. Tegyük fel, hogy e helyen $f(x)$-nek úgy a jobboldali, mint a baloldali határértéke létezik. (Egyelőre x-et belső helynek képzeljük.) A már bevezetett jelöléssel a jobboldali határértéket $f(x+0)$-al, a baloldalit pedig $f(x-0)$-al jelöljük.

Számítsuk ki a sor szummáját, vagyis a részletösszegek arithmetikai közepének határértékét az x helyen. Tudjuk, hogy ha valamely végtelen sor konvergens, akkor a szummája a sor összegével megegyezik.

Az n-ik részletszumma az x helyen:

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n},$$

ahol $s_k=s_k(x)$ a sor első $k+1$ tagjának összege, vagyis:

$$s_k = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,[\cos n\alpha \cos nx + \sin n\alpha \sin nx]\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha-x) + \cos 2(\alpha-x) + \cdots + \cos k(\alpha-x)\right]d\alpha.$$

Az integrál jele alatti zárójelben álló kifejezésről úgy, mint az I. kötet 115. lapján a hasonló kifejezésre vonatkozólag láttuk, pl. teljes indukcióval bebizonyíthatjuk, hogy ez a kifejezés ilyen alakra hozható (l. még II. 320. l.):

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cos k(\alpha-x) - \cos(k+1)(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)},$$

tehát:
$$s_k = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,\frac{\cos k(\alpha-x) - \cos(k+1)(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha \qquad B)$$

és így a részletösszegek n-ik arithmetikai közepe:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha = \frac{1}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin^2\frac{n(\alpha-x)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha$$

és ha az α integrációs változó helyett ezzel a helyettesítéssel:

$$\frac{\alpha-x}{2} = \beta$$

a β-t vezetjük be, akkor a határok $\frac{a-x}{2}$ és $\pi+\frac{a-x}{2}$ lesznek, tehát:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{a-x}{2}}^{\pi+\frac{a-x}{2}} f(2\beta+x)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta. \qquad C)$$

Feltételünk szerint $a<x<a+2\pi$, miből: $-\pi<\frac{a-x}{2}<0$, tehát az alsó határ negativ, a felső pedig pozitiv és így a szóban forgó integrál ugyanolyan alakú, mint az I. kötet 452. lapján tárgyalt. Ott azt láttuk, hogy az ilyen alakú integrál határértéke (ha $0<u<\pi$ és $0<v<\pi$):

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\int_{-u}^{v}\varphi(\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta = \frac{\pi}{2}\left[\varphi(+0)+\varphi(-0)\right]. \qquad D)$$

Ha $\varphi(\beta)$ helyébe $f(2\beta+x)$-et tesszük, ahol x fix számérték, akkor *C)* és *D)*-ből arra jutunk, hogy:

$$\lim_{n=\infty}\sigma_n(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]. \qquad E)$$

Így tehát, *ha $f(x)$ az $a\ldots a+2\pi$ közben integrálható korlátos függvény, és az x belső helyen jobboldali és baloldali határértéke van, akkor az*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

trigonometriai sor, melyben:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,d\alpha\,; \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha\,; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha,$$

vagyis az $f(x)$ függvény Fourier-sora az arithmetikai közepek módszerével szummálható és szummája [a sor első n részletösszege arithmetikai közepének limese] a függvény x helyen való jobboldali és baloldali határértékeinek számtani középértéke. (Fejér tétele.)*

Ha az $f(x)$ az x helyen folytonos, akkor $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$ és így:

$$\lim_{n=\infty}\sigma_n(x) = f(x).$$

*Ha tehát az $a\ldots a+2\pi$ közben integrálható korlátos $f(x)$ függvény az x belső helyen folytonos, akkor az A) alatti sor szummája egyenlő a függvénynek x helyen való értékével.***

* *Fejér* e nevezetes tételt, mellyel a Fourier-sorok elméletének új irányt szabott, legelőször röviden a Comptes Rendusben (1900 dec. 10) közölte. L. még budapesti tud. egyetemi doctori értekezését, mely a Math. és Phys. Lapok XI. kötetében is megjelent, továbbá a Math. Annalen 58-ik kötetét. *Fejér* ezt a tételt nem korlátos függvényekre vonatkozólag is bebizonyítja.

** *Fejér* az előbb idézett helyeken azt is megmutatja, hogy ha az $f(x)$ függvény az $a\ldots a+2\pi$ köz valamely $x_1\ldots x_2$ szakaszában folytonos, akkor

Eddig az x hely belső hely volt. Könnyű az eredmény kiterjesztése arra az esetre, midőn x az a vagy az $a+2\pi$ határhelyen van. Tegyük fel, hogy $f(a+0)$, $f(a+2\pi-0)$ határértékek léteznek. Ha $x=a$, akkor *C)* szerint:

$$\sigma_n(a) = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi f(2\beta+a)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta$$

és ha a $0\ldots\pi$ szakaszba beiktatjuk a tetszésszerinti c helyet, akkor a jobboldali integrál így bontható fel:

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^c f(2\beta+a)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta + \frac{1}{n\pi}\int_c^\pi f(2\beta+a)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta.$$

Az első integrál határértéke, ha n végtelenhez tart, $\frac{1}{2}f(a+0)$. [L. I. kötet 452. lap.] A második integrálban tegyük $\beta=\pi-\gamma$; az integrál lesz:

$$-\frac{1}{n\pi}\int_{\pi-c}^0 f(2\pi+a-2\gamma)\left(\frac{\sin n\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 d\gamma = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi-c} f(2\pi+a-2\gamma)\left(\frac{\sin n\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 d\gamma$$

és ez már épen olyan alakú, mint az első integrál; tehát határértéke: $\frac{1}{2}f(2\pi+a-0)$ és így, ha $x=a$, akkor:

$$\lim_{n=\infty}\sigma_n(a) = \tfrac{1}{2}[f(a+0)+f(a+2\pi-0)].$$

A $\sigma_n(x)$ periodicitása folytán ugyanez áll akkor is, ha $x=a+2\pi$. Ha tehát $f(x)$ *az említett feltételeket teljesíti, akkor az A) alatti sor szummája az $x=a$, vagy $x=a+2\pi$ határhelyeken a függvénynek e két helyen levő [az intervallum belsejéből a határhelyhez irányuló útból származó] határértékeinek számtani középértéke.* Ha $f(a+2\pi-0)=f(a-0)$, illetőleg $f(a+0)=f(a+2\pi+0)$, ami mindenesetre teljesül, ha $f(x)$ *«periodikus» és periodusa* 2π, akkor az a, vagy $a+2\pi$ helyen:

$$2\lim_{n=\infty}\sigma_n = f(a+0)+f(a-0) = f(a+2\pi+0)+f(a+2\pi-0).$$

3. Korlátosan változó függvény Fourier-sora. Tegyük fel, hogy $f(x)$ az $a\ldots a+2\pi$ közben *korlátos, monoton növekvő függvény.* Az ilyenről tudjuk, hogy integrálható (L. I. kötet 279. lap) és azt is tudjuk, hogy minden helyen van jobboldali és baloldali határértéke (L. I. kötet 77. lap), tehát erre az $f(x)$-re minden x helyen az előbbi eredmény érvényes, azaz Fourier-sora az $(a, a+2\pi)$ köz minden helyén szummabilis és szummája az e helyhez tartozó jobb- és baloldali határértékek számtani közepe. Az $f(x)$ *Fourier*-sorának együtthatói:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha.$$

Nézzük az elsőt. Az integrálra a második középértéktételt alkalmazhatjuk, tehát (L. I. kötet 369. lap)

$$\pi a_n = \int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha = f(a+0)\int_a^\xi \cos n\alpha d\alpha + f(a+2\pi-0)\int_\xi^{a+2\pi}\cos n\alpha d\alpha,$$

ahol ξ az $a\ldots a+2\pi$ köz valamely belső helye. Minthogy pedig:

$x_1'\ldots x_2'$ szakaszban, ahol $x_1 < x_1' < x_2' < x_2$, a

$$\lim_{n=\infty}\sigma_n(x) = f(x)$$

egyenletesen áll fenn; azaz e szakaszban $f(x)$ Fourier-sora *egyenletesen szummálható* és a szumma a függvény értéke.

$$\int_a^\xi \cos n\alpha d\alpha = \frac{\sin n\xi - \sin na}{n}; \quad \int_\xi^{a+2\pi} \cos n\alpha d\alpha = \frac{\sin na - \sin n\xi}{n},$$

tehát:
$$na_n = \frac{1}{\pi}\left[f(a+0) - f(a+2\pi-0)\right]\left[\sin n\xi - \sin na\right].$$

De $|\sin n\xi - \sin na| \leq 2$, az első tényező véges szám, tehát $|na_n|$ kisebb egy véges, n-től független számnál. Ugyanezt mutathatjuk meg $|nb_n|$-ről is, tehát az

$$n\,|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \tag{γ}$$

kisebb egy n-től (és x-től) független véges számnál.

Ebből következik, hogy $n\,|a_n \cos nx + b_n \sin nx|$ kisebb egy n-től (és x-től) független véges számnál, ha $f(x)$ az $a \ldots a+2\pi$ közben monoton csökkenő függvény, tehát ugyanez áll akkor is, ha $f(x)$ egy monoton növekedő és egy monoton csökkenő függvény összege és így akkor is, ha $f(x)$ az $a \ldots a+2\pi$ közben *korlátosan változó függvény* (L. I. kötet 285. lap). Eszerint tehát, ha $f(x)$ az $a \ldots a+2\pi$ közben korlátosan változó függvény, akkor a *Fourier*-sorára a *Hardy*-féle tétel (L. 322. lapon) alkalmazható, vagyis e sor az $a \ldots a+2\pi$ köz minden x helyén konvergens. De ekkor a közönséges értelemben vett összeg megegyezik az arithmetikai közepek módszerével alkotott szummával; tehát arra az eredményre jutottunk, hogy: *Ha $f(x)$ az $a \ldots a+2\pi$ közben korlátosan változó függvény (fonction à variation bornée), akkor az*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sor, melyben

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha,$$

minden x helyen, melyre nézve $a \leq x \leq a+2\pi$, konvergens és összege az x belső helyen:*

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right],$$

a határhelyeken:

$$\frac{1}{2}\left[f(a+0) + f(a+2\pi-0)\right]. \qquad \text{(\textit{Dirichlet-Jordan}-tétel.)}$$

Ha a 2. pont *B)* alatti képletében az integráljel alatt álló tört számlálóját és nevezőjét a $\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$, illetőleg $1 - \cos w = 2\sin^2\frac{w}{2}$ képleteknek megfelelően átalakítjuk, akkor ($a=0$ téve) erre jutunk:

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{\sin\frac{\alpha - x}{2}}\,d\alpha.$$

* Ha a *Hardy*-féle tétel bebizonyításánál követett eljárást olyan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ valós függvénysorra alkalmazzuk, amely az $x_1 \leq x \leq x_2$ intervallumban *egyenletesen* szummálható és amelynek tagjai e szakaszban az $|nu_n(x)| < K$ (K fix véges szám, $n = 1, 2, 3, \ldots$) feltételt *egyenletesen* teljesítik, akkor arra jutunk, hogy a $\Sigma u_n(x)$ sor az $x_1 \ldots x_2$ szakaszban egyenletesen konvergens. Minthogy azon esetben, midőn $f(x)$ az $a \ldots a+2\pi$ közben korlátosan változó, a γ) alatti kifejezés egyenletesen korlátos e közben, tehát a *Hardy*-tétel ezen általánosításából és a 400. lapon említett *Fejér*-féle tételből már most az is következik, hogy *az $a \ldots a+2\pi$ közben korlátosan változó $f(x)$ függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens minden olyan szakasz bármelyik belső részközében, amely szakaszban $f(x)$ folytonos.*

Ez a k-ik részletösszeg *Dirichlet*-féle alakja. Ha tehát $f(x)$ korlátosan változó függvény, akkor minden belső x helyen:

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{\sin\frac{\alpha-x}{2}} d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

és a 0, vagy 2π határhelyeken: $\frac{1}{2}[f(+0)+f(2\pi-0)]$. (*Dirichlet-Jordan*-tétel.)

4. Két speciális eset: 1. Legyen $f(x)$ 2π szerint periodikus, a $-\pi\ldots\pi$ közben *páratlan függvény*, azaz olyan, hogy: $f(x)=-f(-x)$. Ekkor a Fourier-sorának együtthatói, az ú. n. Fourier-féle állandói a következők:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha.$$

Ha az első integrálban $\alpha=-\beta$ tesszük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\alpha)\, d\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-\beta)\, d\beta = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\beta)\, d\beta,$$

tehát $a_0=0$; továbbá, (ha $n\geq 1$),

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha$$

és ennek alapján ugyanúgy, mint előbb, kimutatható, hogy $a_n=0$. Végül a

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha$$

relációban az első integrálról, $\alpha=-\beta$-val transzformálva, kimutathatjuk, hogy a második integrállal egyenlő, tehát:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha.$$

Eszerint tehát a $-\pi\ldots\pi$ közben páratlan $f(x)$ Fourier-sora a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ «sinus-sor», ahol:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha.$$

2. Legyen $f(x)$ a $-\pi\ldots\pi$ közben *páros függvény*, azaz $f(x)=f(-x)$, akkor a Fourier-féle állandóiról mutassuk meg az előbbihez hasonló módon, hogy:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha, \quad b_n = 0. \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

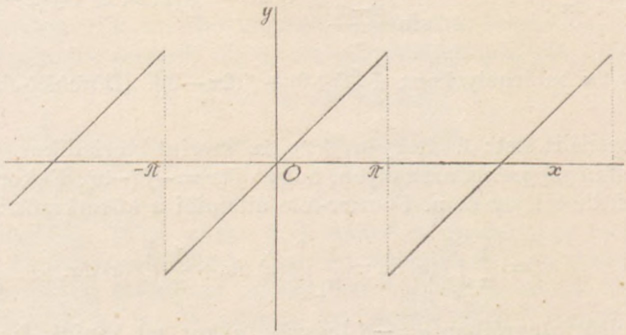
5. Példák a Fourier-sorra. *1. Példa.* Legyen a 2π periodusú $f(x)$ a $-\pi\ldots\pi$ közben: x. Minthogy ez a $-\pi\ldots\pi$ közben monoton nő, tehát Fourier-sora konvergens minden x helyen és összege minden belső helyen: x, a határhelyeken: 0. A függvény menetét a mellékelt 26. ábra tünteti fel.

Minthogy $f(x)$ páratlan, tehát $a_n=0$ és

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha \sin n\alpha d\alpha = -\frac{2}{\pi}\frac{\alpha\cos n\alpha}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos n\alpha d\alpha = (-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

és így a szóban forgó függvény Fourier-sora:

$$2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right).$$



26. ábra.

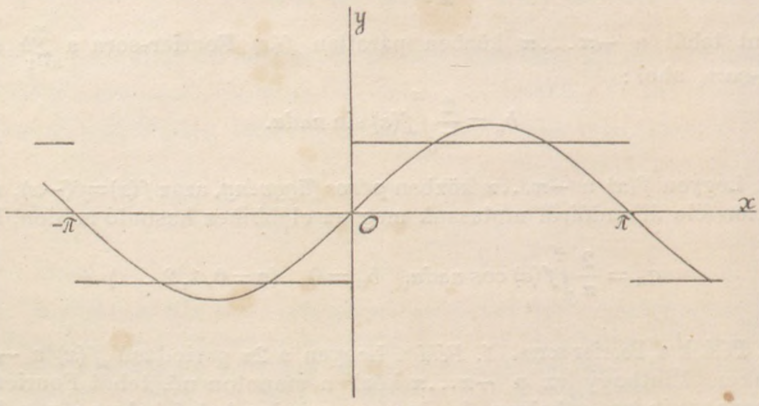
Ezen sinus-sor összege tehát minden $-\pi < x < \pi$-re megadja az x-et, ha pedig $x = -\pi$, vagy $x = \pi$, akkor ez az összeg: 0. Így például, ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$\frac{\pi}{4}$ ezen soralakjával már találkoztunk (l. 382. lapon.).

2. *Példa.* Legyen a 2π periodusú $f(x)$ függvény a $-\pi \ldots 0$ közben: $-\frac{\pi}{4}$, a $0 \ldots \pi$ közben: $\frac{\pi}{4}$. (x) a $(-\pi, +\pi)$ közben páratlan függvény. Mutassuk meg, hogy Fourier-sora:

$$\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots$$

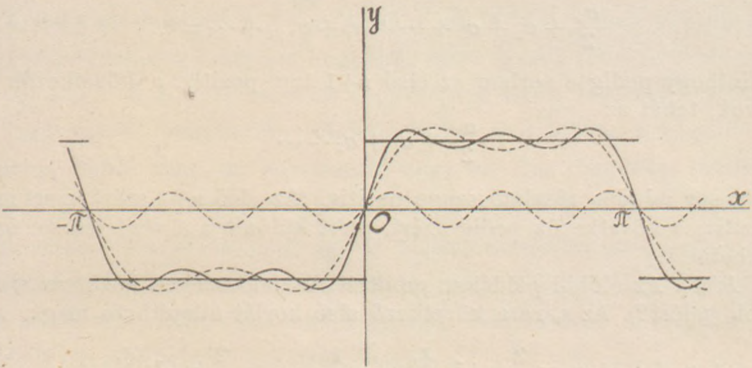


27. ábra.

Azt látjuk tehát, hogy ez a sor

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

minden $0<x<\pi$-re: 1, minden $-\pi<x<0$-re: -1 és az $x=0$, $x=-\pi$, $x=\pi$ helyeken, ahol $f(x)$-nek szakadása van: 0. A mellékelt ábrák feltüntetik az $f(x)$ függvény menetét, a 27. ábra a Fourier-sor első részletösszegét, a 28. ábra a második és harmadik részletösszegeket, hogy lássuk, miképpen



28. ábra.

simulnak e részletösszegeket ábrázoló görbék az $f(x)$-hez (a tört vonal $\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$, a vastagabb: $\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$ menetét ábrázolja; az x tengely mentén kigyózó törtvonal $\frac{1}{5}\sin 5x$-et ábrázolja).

3. Példa. Legyen $f(x)$ páratlan függvény, mely egyenlő x-szel, ha $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, továbbá $\pi-x$-szel egyenlő, ha $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$. Készítsük el az $y=f(x)$ görbe rajzát, mutassuk meg, hogy a Fourier-sora:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Ebből, ha $x=\frac{\pi}{2}$, ezt a nevezetes relációt kapjuk:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

4. Példa. Mutassuk meg, hogy az $x\sin x$ páros függvény Fourier-sora:

$$1-\frac{\cos x}{2}-2\sum_{2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{(n-1)(n+1)}$$

a $-\pi\ldots\pi$ közben; és tegyük $x=\frac{\pi}{2}$.

5. Példa. Állítsuk elő annak az $f(x)$ függvénynek a Fourier-sorát, mely x^2, ha $-\pi<x<\pi$.

6. Példa. Állítsuk elő azon $f(x)$ Fourier-sorát, mely a $0\leq x\leq\pi$ közben: e^x, a $-\pi\leq x\leq 0$ közben e^{-x}.

7. Példa. Állítsuk elő Fourier-sorban azt a függvényt, mely a $0\ldots\pi$ közben $\sin(2\nu+1)\frac{x}{2}$ és a $-\pi\ldots0$ közben: $-\sin(2\nu+1)\frac{x}{2}$, ahol ν pozitiv egész szám. Ez a függvény páros, a $-\pi\ldots\pi$ közben folytonos. Mutassuk meg, hogy ezen függvény Fourier-sora:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots,$$

ahol:

$$a_k=\frac{2}{\pi}\,\frac{\nu+\frac{1}{2}}{(\nu+\frac{1}{2})^2-k^2},\quad \text{ha } k\geqq 0.$$

8. Példa. A 7. példában szereplő függvény Fourier-együtthatóinak előbbi alakjából látjuk, hogy $a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu$ pozitivek, az ezután következő Fourier-féle állandók mind negativok. A felírt Fourier-sor mindenütt konvergens és a függvényt előállítja (miért?). Így tehát az $x=0$ helyen:

$$\frac{a_0}{2}+a_1+a_2+\cdots+a_\nu+a_{\nu+1}+\cdots=0.$$

Minthogy pedig e sorban az első $\nu+1$ tag pozitiv, a következők mind negativok, tehát az

$$\frac{a_0}{2}+a_1+a_2+\cdots$$

végtelen sor minden részletösszege pozitiv. (Az első $\nu+1$ azért, mert minden tag pozitiv, a következők pedig azért, mert különben a végtelen sor összege nem lehetne 0.)

9. Példa. Az előbbi példában említett részletösszegek közül az s_ν a legnagyobb (miért?). Az s_ν-re a következő alsó korlát állapítható meg:

$$s_\nu > a_1+a_2+\cdots+a_\nu=\frac{2}{\pi}(\nu+\tfrac{1}{2})\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(\nu+\frac{1}{2})^2-k^2}>\frac{2}{\pi}(\nu+\tfrac{1}{2})\sum_{1}^{\nu}\frac{1}{(\nu+1)^2-k^2}\cdot$$

A 302. lapon foglalt összehasonlítás alkalmazásával:

$$\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(\nu+1)^2-k^2}>\int_0^\nu\frac{dx}{(\nu+1)^2-x^2}=\Big[\int_0^\nu\frac{dx}{\nu+1+x}+\int_0^\nu\frac{dx}{\nu+1-x}\Big]\frac{1}{2\nu+2}=$$

$$=\frac{1}{2(\nu+1)}\log(2\nu+1);$$

tehát:

$$s_\nu>\frac{1}{2\pi}\log(2\nu+1).$$

10. Példa. Legyen adva az az $f(x)$ függvény, mely a $0\ldots\pi$ közben annyi, mint

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin(2^{n^3}+1)\frac{x}{2}}{n^2},$$

a $-\pi\ldots0$ közben pedig $-\varphi(x)$. Mutassuk meg, hogy a $\varphi(x)$ függvénysor a $(0,\pi)$ közben egyenletesen összetartó és hogy $f(x)$ a $-\pi\ldots\pi$ közben páros, folytonos, az $x=0$ helyen: 0.

11. Példa. Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ a $-\pi\ldots\pi$ zárt közben folytonos függvények egyenletesen összetartó sora és összege $F(x)$, továbbá $F(x)$ Fourier állandói: A_k, B_k, $(k=0,1,2,\ldots)$, $f_n(x)$ Fourier állandói pedig $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$, akkor:

$$A_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_k^{(n)},\quad B_k=\sum_{n=1}^{\infty}b_k^{(n)}.$$

[Ugyanis $F(x)\cos kx$ és $F(x)\sin kx$ integráljai tagonkinti integrálással állíthatók elő.]

12. Példa. Az előbbi példában kimondott tétel némi módosítással alkalmazható a 10. példában említett $f(x)$-re; ennek alapján vizsgáljuk az $f(x)$ m-edik Fourier-féle részletösszegét az $x=0$ helyen, ahol $m=\frac{2^{n^3}}{2}\cdot$ Evégből vegyük először a

$$\sin(2^{n^3}+1)\frac{x}{2}$$

Fourier-sorának m-edik részletösszegét az $x=0$ helyen. Megmutattuk, hogy a

$\sin(2\nu+1)\frac{x}{2}$ Fourier-féle (cosinus) sorának ν-ik részletösszege a 0 helyen

$$s_\nu > \frac{1}{2\pi}\log(2\nu+1).$$

A jelen esetben $\nu = m = \frac{2^{n^3}}{2}$, tehát a $\sin(2^{n^3}+1)\frac{x}{2}$-nek m-edik Fourier-féle részletösszege a 0 helyen nagyobb, mint $\frac{1}{2\pi}\log(2^{n^3}+1)$, tehát nagyobb, mint $\frac{n^3}{2\pi}\log 2$. A $\varphi(x)$-et előállító függvénysor többi tagjának számlálóiban álló függvények Fourier-féle részletösszegei a 0 helyen a 8. példa szerint pozitivek. Ebből tehát az következik, hogy ha $f(x)$ függvényt, mely pozitiv x-ekre a $\varphi(x)$-szel, negativ x-ekre a $-\varphi(x)$-szel megegyezik, cosinus-sorba fejtjük, akkor Fourier-sorának $\frac{2^{n^3}}{2}$-ik részletösszege az $x=0$ helyen nagyobb $\frac{n}{2\pi}\log 2$-nél, tehát az n-nel végtelenné válik. Az $f(x)$ függvény tehát egyszerű példa arra, hogy folytonos függvény Fourier-sora divergens lehet [e példában ezt a 0 helyről mutattuk meg].*

6. **A részletszumma korlátja.** A 400. lapon láttuk, hogy $f(x)$ Fourier-sorának n-ik részletszummája az x helyen:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\frac{\sin^2\frac{n(\alpha-x)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha.$$

Ha $f(\alpha)$-nak az $a\ldots a+2\pi$ közben felső határa M, alsó határa m, akkor ebből következik, hogy

$$\frac{m}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\alpha-x)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha \leq \sigma_n(x) \leq \frac{M}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\alpha-x)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha.$$

Ha $f(\alpha)$ az egész $a\ldots a+2\pi$ közben : 1, akkor Fourier-féle állandói : $\frac{a_0}{2} = 1$, $a_k = 0$, $b_k = 0$, tehát $\sigma_n(x) \equiv 1$, vagyis:

$$\frac{1}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\alpha-x)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,dx = 1 \qquad a)$$

és így az előbbi reláció ebben az alakban írható :

$$m \leq \sigma_n(x) \leq M,$$

vagyis *a Fourier-sor minden részletszummája a függvénynek az $a\ldots a+2\pi$ közben való felső és alsó határa közé esik.*

Ezt a Fourier-féle sor s_n részletösszegeiről nem lehet állítani. Hiszen láttunk egy példát arra, hogy a részletösszeg végtelenné is válhatik, bár a függvény korlátos. *Fejér* azonban bizonyos esetekben a Fourier-sor részlet-

* Erre a körülményre, mely a Fourier-sorok újabb elméletében alapvető, legelőször *du Bois-Reymond* mutatott rá. A fenti példa és a tárgyalás gondolatmenete, mely ezt a nevezetes tüneményt egyszerűen mutatja: *Fejér Lipót*tól való, aki a kérdéssel több értekezésében foglalkozott (L. péld. Journal für reine u. angew. Math. 137. k.)

összegeire nézve is megállapított korlátokat. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-féle állandóira nézve áll az, hogy:

$$|na_n| \leq A, \quad |nb_n| \leq B$$

minden n-re, ahol A és B két véges nem negativ szám. Jelöljük az

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

-et u_n-nel, akkor (l. 324. lapon)

$$\sigma_{n+1} = s_n - \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu}{n+1}.$$

A jobboldali összegben:

$$|u_\nu| \leq |a_\nu \cos \nu x| + |b_\nu \sin \nu x| < \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu},$$

tehát $|\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu| < n(A+B)$ és így:

$$\sigma_{n+1} - (A+B) < s_n < \sigma_{n+1} + (A+B)$$

és minthogy $m \leq \sigma_{n+1} \leq M$, tehát, ha minden n-re: $|na_n| \leq A$, $|nb_n| \leq B$, akkor a Fourier-sor részletösszegeire minden x helyen érvényes ez az egyenlőtlenség:*

$$m - (A+B) < s_n < M + A + B.$$

7. **Példák a részletösszegek korlátjaira.** *1. Példa.* Mutassuk meg, hogy ha $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ a $0 \ldots 2\pi$ közben, akkor Fourier-állandói:

$$a_k = 0; \quad b_k = \frac{1}{k},$$

vagyis:
$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

Alkalmazzuk erre az előbbi pontban tárgyalt tételt és mutassuk meg, hogy minden n-re és minden x-re:

$$\left| \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} \right| < 2{\cdot}58.$$

[U. i.: $\frac{\pi - x}{2}$ maximuma a $0 \ldots 2\pi$ közben: $\frac{\pi}{2}$, minimuma: $-\frac{\pi}{2}$, $na_n = 0$, $nb_n = 1$, tehát $A = 0$, $B = 1$.]

2. Példa. Legyen adva a $-\pi \ldots \pi$ közben páratlan $f(x)$ függvény, mely a $0 \ldots \pi$ közben:

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x + \sin x \log (2 \sin x).$$

Mutassuk meg, hogy Fourier-sora:

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{2} + \cdots + \frac{\sin (2n-1)x}{n} + \cdots$$

és mutassuk meg, ismét az előbbi pont szerint, hogy minden n-re és minden x-re:

$$\left| \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{2} + \cdots + \frac{\sin (2n-1)x}{n} \right| < 2{\cdot}58.$$

* *Fejér:* Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues. Annales de l'école normale supérieure 1911. p. 72.

8. A részletszumma ingadozása. Megmutattuk, hogy a $\sigma_n(x)$ arithmetikai közép M és m közé esik, ha az $f(x)$ felső határa az $a \ldots a+2\pi$ közben M és alsó határa m. Ebből következik, hogy az $a \ldots a+2\pi$ köz minden helyén és minden n-re:

$$|f(x)-\sigma_n(x)| \leq P,$$

ahol $P=M-m$, a függvény ingadozása az $a \ldots a+2\pi$ közben. Ennél még többet is mondhatunk, ha tudjuk, hogy x az $a \ldots a+2\pi$ köz valamely belső intervallumából való. Legyen $a \leq c < d \leq a+2\pi$ és $c < c' < d' < d$; továbbá x a $c' \ldots d'$ köz valamely pontja: $c' \leq x \leq d'$. A 2. pont alatti

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\frac{\sin^2 n\frac{\alpha-x}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha$$

egyenlőség két oldalából vonjuk ki az (l. 6. pont α) alatti egyenlőséget)

$$f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\frac{\sin^2 n\frac{\alpha-x}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha$$

egyenlőség megfelelő oldalait. Arra jutunk, hogy:

$$\sigma_n(x)-f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_a^{a+2\pi}[f(\alpha)-f(x)]\frac{\sin^2 n\frac{\alpha-x}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha$$

A jobboldali integrált három részre bontjuk:

$$\sigma_n - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_a^c + \frac{1}{2n\pi}\int_c^d + \frac{1}{2n\pi}\int_d^{a+2\pi}$$

Ha x a $c' \ldots d'$ közben van, akkor az első és harmadik integrál integrandusa korlátos, tehát ha n elég nagy, akkor az első és harmadik tag a tetszésszerinti kis pozitiv η-nál kisebb abszolut értékű.

A középső tagról pedig a következőt mondhatjuk:

$$i = \left|\frac{1}{2n\pi}\int_c^d [f(\alpha)-f(x)]\frac{\sin^2 n\frac{\alpha-x}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha\right| \leq \frac{p}{2n\pi}\int_c^d \frac{\sin^2 n\frac{\alpha-x}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha,$$

ahol p jelenti az $f(\alpha)$ ingadozását a $c \ldots d$ közben. Minthogy pedig az integrál jele alatt pozitiv függvény áll, az integrált növeljük, ha a határai gyanánt a-t és $a+2\pi$-t választjuk; tehát a szóban forgó középső tag abszolut értéke: $i \leq p$. Arra jutottunk tehát, hogy ha $a \leq c < c' \leq x \leq d' < d \leq a+2\pi$, akkor:

$$|f(x)-\sigma_n(x)| < p+\eta,$$

hol η tetszés szerinti kis pozitiv szám és p az $f(x)$ ingadozása a $c \ldots d$ közben, hacsak n elég nagy.

9. Riemann-féle tétel. Legyenek $f(x)$ és $[f(x)]^2$ is a $0 \ldots 2\pi$ közben integrálhatók* és $f(x)$ függvény Fourier-féle állandói: a_k, b_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$

* E pontokban nem tételezzük fel $f(x)$ korlátos voltát a $(0, 2\pi)$ közben. Ha $f(x)$ korlátos és integrálható, akkor, az integrálhatóság általános feltételéből (l. I. kötet 274. lapon) könnyen következtethető, hogy $[f(x)]^2$ is integrálható.

azaz : $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha$ és jelöljenek c_0; c_1, d_1; c_2, d_2; ... tetszés szerinti valós állandókat. Számítsuk ki ezt az integrált:

$$I_n = \int\limits_0^{2\pi}\Big[f(x) - \frac{c_0 a_0}{2} - \sum_1^n (c_k a_k \cos kx + d_k b_k \sin kx)\Big]^2 dx.$$

A négyzetreemelést az integrál jele alatt elvégezzük, tagonkint integrálunk, tekintetbe véve az $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 kx dx$ stb. integráloknak a 398. lapon közölt értékeit. Az eredmény a következő:

$$I_n = \int\limits_0^{2\pi}[f(x)]^2 dx - \pi\Big\{c_0(2-c_0)\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n c_k(2-c_k)a_k^2 + \sum_1^n d_k(2-d_k)b_k^2\Big\}. \qquad A)$$

Ha $c_k=1$, $d_k=1$, $(k=0, 1, 2\ldots)$, akkor erre a nevezetes képletre jutunk:

$$\left.\begin{aligned} i_n &= \int\limits_0^{2\pi}\Big[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_1^n (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\Big]^2 dx = \\ &= \int\limits_0^{2\pi}[f(x)]^2 dx - \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2+b_k^2)\Big]. \end{aligned}\right\} \qquad B)$$

Minthogy i_n nem negativ, ebből a képletből következik, hogy a $\sum_1^\infty a_k^2$, $\sum_1^\infty b_k^2$ sorok konvergensek, továbbá, hogy az $\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_k^2 + b_k^2)$ végtelen sor összege nem nagyobb, mint az $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(x)]^2 dx$ integrál.

A $\sum_{k=1}^\infty (a_k^2+b_k^2)$ sor konvergenciájából következnek ezek a fontos *Riemann*-féle határértéktételek:

$$\lim_{k=\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha = \lim_{k=\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha = 0,$$

ha $f(\alpha)$ (és még $[f(\alpha)]^2$) a $0\ldots 2\pi$ közben integrálható.*

10. A Fourier-sor részletösszegeinek egy nevezetes tulajdonsága. Tegyük az előbbi *A)* alatti kifejezésben

$$c_k = 1 + \delta_k,\ d_k = 1 + \varepsilon_k, \quad \text{akkor} \quad c_k(2-c_k) = 1 - \delta_k^2,\ d_k(2-d_k) = 1 - \varepsilon_k^2.$$

Az *A)* és *B)*-ből következik, hogy

$$I_n = i_n + \frac{\delta_0^2 a_0^2}{2} + \Sigma(\delta_k^2 a_k^2 + \varepsilon_k^2 b_k^2), \qquad C)$$

tehát $I_n \geqq i_n$.

Oldjuk meg ezt a feladatot: Határozzuk meg az

$$\frac{A_0}{2} + A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 2x + B_2\sin 2x + \cdots + A_n\cos nx + B_n\sin nx$$

n-edrendű «trigonometriai polinomot», vagyis az A_k, B_k együtthatókat úgy, hogy az

$$\int\limits_0^{2\pi}\Big[f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_1^n (A_k\cos kx + B_k\sin kx)\Big]^2 dx \qquad D)$$

* *Riemann:* Über trigonometrische Reihen. Ges. Werke p. 241. L. még *Harnack:* Grundriss der Theorie der Fourier'schen Reihe etc. *Serret* Diff. und Integralrechnung II. kötet (2. kiadás). Anhang.

integrál (mely az A_k, B_k változóktól függ) *minimális* legyen. Ha az A_k és B_k keresett együtthatókat $c_k a_k$, illetőleg $d_k b_k$ alakban írjuk, ahol a_k és b_k az $f(x)$ Fourier-féle együtthatói, akkor a feladatot úgy is fogalmazhatjuk, hogy határozzuk meg a c_k és d_k faktorokat úgy, hogy a *D)* alatti integrál minimális legyen. A *C)* alattiból látjuk, hogy ez az integrál (a hibanégyzet integrálja) minimális, ha mindenik $\delta_k=0$, $\varepsilon_k=0$, vagyis ha $c_k=1$, $d_k=1$, miből következik, hogy a keresett együtthatók:

$$A_k = a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha, \quad B_k = b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha.$$

Mutassuk meg ugyanezt a maximum-minimum számítás közönséges módszerével is! Látjuk tehát, hogy az a trigonometriai polinom teszi minimummá a «hibanégyzetet», melynek együtthatói az $f(x)$ Fourier-féle állandói.*

11. A Parseval—Hurwitz-féle tétel. Legyenek az előbbi I_n integrálban szereplő c, d állandók a következők: $c_0=1$, $c_k = d_k = \frac{n-k}{n}$. Könnyen megmutathatjuk, hogy ekkor a

$$\frac{c_0 a_0}{2} + \sum_1^n (c_k a_k \cos kx + d_k b_k \sin kx)$$

összeg nem más, mint $\sigma_n(x)$ (az n-ik arithmetikai közép) és így ezekkel a c, d állandókkal készített I_n integrál *A)* szerint a következő:

$$I_n = \int_0^{2\pi} [f(x)-\sigma_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx - \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n^2-k^2}{n^2}(a_k^2+b_k^2)\Big].$$

$\lim\limits_{n=\infty} I_n$-et akarjuk kiszámítani. Megakarjuk mutatni, hogy $\lim\limits_{n=\infty} I_n = 0$, ha $f(x)$ *korlátos* a $(0, 2\pi)$ közben.

Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk be: $f(x)$ föltételünk szerint integrálható; tehát a $0\ldots 2\pi$ köz úgy osztható be véges számú részekre, hogy azon szakaszok összes terjedelme, amelyekben $f(x)$ ingadozása a megadott, tetszés szerinti kis pozitiv ε-nál nagyobb, a tetszés szerinti kis pozitiv η-nál kisebb legyen. Jelöljük a $0\ldots 2\pi$ köz azon szakaszait, melyekben $f(x)$ ingadozása ε-nál nem nagyobb, δ-val; azokat, melyekben az ingadozás ε-nál nagyobb, Δ-val. Minden δ-ba iktassunk bele egy δ' belső közt, úgy, hogy mindkét szélén még maradjon egy-egy kis köz; ezeket jelöljük δ''-vel. A δ'' közök összes terjedelme a tetszés szerinti kis η-nál kisebbre választható. Így tehát a $0\ldots 2\pi$ köz felosztatott δ', δ'' és Δ közökre. Az I_n integrál kiszámítása végett külön számítjuk ki a δ', δ'' és Δ közökre vonatkozó integrálokat. Valamely δ' közben $|f(x) - \sigma_n| < 2\varepsilon$, ha n elegendő nagy, mert kimutattuk, hogy egy köznek belső részközében ezen különbség abszolut értéke kisebb, mint az $f(x)$-nek a teljes közben való ingadozása, $+$ egy tetszés szerinti kis pozitiv szám, ha n kellő nagyra választatott (l. 409. lapon); tehát az I_n-nek a δ' közökre vonatkozó részének abszolut értéke kisebb, mint $8\pi\varepsilon^2$, ha n elég nagy. A Δ közökben az ingadozás P-nél (a $0\ldots 2\pi$ közbeli ingadozásnál) nem nagyobb, a Δ intervallumok összes terjedelme azonban η-nál kisebb, tehát az I_n-nek a Δ-kra vonatkozó része kisebb, mint ηP^2. A δ'' közökre ugyanez áll és így:

$$|I_n| < 8\pi\varepsilon^2 + 2\eta P^2$$

* A. *Toepler:* Bemerkenswerte Eigenschaft der periodischen Reihen. Akad. Anzeiger. Wien 1876. p. 205.

vagyis bizonyos N-n túl levő n-ekre $|I_n| < \varrho$, ahol ϱ tetszésszerinti kis pozitiv szám és így:

$$\lim_{n=\infty} I_n = 0.$$

Ezzel bebizonyítottuk ezt a tételt:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2-k^2}{n^2} (a_k^2+b_k^2) \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx.$$

Ámde $0 \leqq i_n \leqq I_n$, tehát a 410. lap *B)* és *C)* egyenletei szerint a $\lim\limits_{n=\infty} I_n = 0$ egyenlőségből következik, hogy $\lim\limits_{n=\infty} i_n = 0$, amiből azt kapjuk, hogy az

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx,$$

ha $f(x)$ a $0 \ldots 2\pi$ közben integrálható, korlátos függvény és a_k, b_k az $f(x)$ Fourier-féle állandói.

Ha ezt a tételt az $f(x) + \varphi(x)$ összegre alkalmazzuk, akkor arra az általánosabb eredményre jutunk, hogy ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ korlátosak és integrálhatók a $0 \ldots 2\pi$ közben, akkor

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = a_0 a_0' + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k' + b_k b_k'), \qquad \alpha)$$

ahol a_k és b_k az $f(x)$, a_k' és b_k' a $\varphi(x)$ Fourier-féle állandói.*

12. A Fourier-sor integrálása. Legyenek a $0 \ldots 2\pi$ közben integrálható korlátos $f(x)$ függvény Fourier-féle állandói: a_k, b_k, azaz:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha.$$

Értelmezzük továbbá az $(x_0 x_1)$ közben, ahol $0 \leq x_0 < x_1 \leq 2\pi$ a $\varphi(x)$ függvényt úgy, hogy ez a függvény a $0 \ldots x_0$, valamint az $x_1 \ldots 2\pi$ közben 0 legyen, az $x_0 \ldots x_1$ közben pedig 1. Jelöljük e függvény Fourier-féle állandóit a_k' és b_k'-vel. Könnyen kiszámíthatjuk, hogy

$$a_0' = \frac{(x_1-x_0)}{\pi}, \quad a_k' = \frac{\sin kx_1 - \sin kx_0}{k\pi}, \quad b_k' = -\frac{\cos kx_1 - \cos kx_0}{k\pi}.$$

Minthogy pedig a jelen esetben:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx,$$

tehát az előbbi pont *α)* alatti relációja:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{a_0}{2}(x_1-x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\sin kx_1 - \sin kx_0}{k} - b_k \frac{\cos kx_1 - \cos kx_0}{k} \right).$$

vagyis; *ha $f(x)$ Fourier-sora (mely esetleg nem is konvergens):*

* Ez az ú. n. *Parseval*-féle tétel. L. *Hurwitz:* Über die Fourier'schen Constanten integrierbarer Functionen c. értekezését. Math. Annalen 57-ik kötet, p. 425.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

akkor $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ *integrált úgy kapjuk meg, hogy* $f(x)$ *Fourier-sorát tagonkint integráljuk az* $x_0 \ldots x_1$ *határok között és az így nyert (konvergens) sor összegét vesszük.*

Pótlások, feladatok és gyakorlatok a X—XVII. fejezetekhez.

I. π transcendens szám. Kimutatjuk, hogy π nem elégíthet ki olyan algebrai egyenletet, melynek együtthatói racionális számok. Tegyük fel az ellenkezőt; akkor $i\pi$ is «algebrai szám», azaz $i\pi$ gyöke egy olyan

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad \alpha)$$

n-edfokú algebrai egyenletnek, melyben az együtthatók rac. egész számok és $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. Tegyük fel, hogy ezen egyenlet többi gyökei: $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ és $i\pi$-t jelöljük egyöntetűség végett α_1-gyel. Tudjuk hogy $e^{i\pi} = -1$, tehát:

$$(1+e^{\alpha_1})\,(1+e^{\alpha_2})\,(1+e^{\alpha_3}) \ldots (1+e^{\alpha_n}) = 0.$$

Ha a szorzást elvégezzük, ilyen alakra jutunk:

$$1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = 0, \qquad \beta)$$

ahol $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ számokból minden lehető módon készített $1, 2, \ldots, n$ tagú összegek. Így pl.:

$$\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2, \ldots\ \beta_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_{n+2} = \alpha_1 + \alpha_3, \ldots, \beta_N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Szemeljünk ki pl. egy ilyen összeget:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i.$$

Ismeretes módon megállapítható olyan $f_i(x) = 0$ algebrai egyenlet, melynek gyökei az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ összes i-tagú összegei és melynek együtthatói az $\alpha)$ egyenlet együtthatói által racionálisan fejezhetők ki. Minthogy pedig mindezek az összegek a β számok között előfordulnak, tehát az az $\binom{n}{i}$ számú β, amelyek mindegyike ilyen i-tagú összeg, eleget tesz az $f_i(x) = 0$ racionális egész együtthatójú algebrai egyenletnek. Ilyen egyenlet készíthető n: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$, melyek közül az utolsó elsőfokú. Ha az $f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)$ szorzatot $F(x)$-szel jelöljük, akkor tehát $F(x) = 0$ olyan N-edfokú, racionális egész együtthatójú algebrai egyenlet, melynek gyökei éppen a $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ számok. Ha a β számok közül M számú, melyeket ismét $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_M$-mel jelölünk (és melyek közül $\beta_1 = \alpha_1 = i\pi$), nem zérus, a többi pedig 0, akkor az előbbi N-edfokú egyenlet jobb- és baloldalát x^{N-M}-mel osztjuk, miáltal ez az M-edfokú egyenlet lesz belőle:

$$b_0x^M + b_1x^{M-1} + \cdots + b_M = 0 \qquad \gamma)$$

ahol $b_0 \neq 0$ és $b_M \neq 0$. Szorozzuk meg ezen egyenlet mindkét oldalát b_0^{M-1}-gyel; akkor

$$(b_0x)^M + b_1\,(b_0x)^{M-1} + b_2b_0\,(b_0x)^{M-2} + \cdots + b_M\,b_0^{M-1} = 0 \qquad \gamma')$$

egyenletre jutunk. Ebből azt látjuk, hogy $b_0\beta_1, b_0\beta_2, \ldots b_0\beta_M$ olyan racionális egész együtthatójú algebrai egyenlet gyökei, melynél a legmagasabb fokú tag együtthatója: 1. Eszerint tehát a $b_0\beta_1, b_0\beta_2, \ldots b_0\beta_M$ ú. n. *algebrai egész szá-*

mok. Az algebrai egész számokról tudjuk, hogy a belőlük összeadás-, kivonás- és szorzással előállított kifejezések is algebrai egész számok,* tehát a $b_0\beta_1, \ldots, b_0\beta_M$ «konjugált» algebrai egész számokból nyert szimmetrikus, racionális egész kifejezések racionális egész számok, (mert ha egy algebrai egész szám racionális, akkor közönséges egész szám).

A β) alatti relációból a $\beta_{M+1} = \cdots = \beta_N = 0$ tekintetbe vételével az

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M} = 0 \qquad \delta)$$

lesz, ahol a vagy egyenlő 1-gyel, vagy 1-nél nagyobb racionális egész szám.

A γ) alatti egyenlet baloldalát jelöljük $f(x)$-szel és $b_0^M f(x)$-et $g(x)$-szel és vezessük be ezt a konvergens integrált:

$$I = \int_0^\infty e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1} dx,$$

ahol ϱ egy, majd alkalmasan választandó, pozitiv egész szám. Ez az integrál még így is írható:

$$I = \int_0^{\beta_k} e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1} dx + \int_{\beta_k}^\infty e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1} dx$$

ahol az első integrál a $0 \ldots \beta_k$ egyenes mentén, a második pedig a β_k-ból az x tengellyel párhuzamos egyenes mentén veendő.** Ha I-vel a δ) alatti egyenlőséget szorozzuk, akkor a következőre jutunk;

$$P_1 + P_2 = 0,$$

ahol (az $e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1} dx$ integrandust elhagyva):

$$P_1 = a \int_0^\infty + e^{\beta_1} \int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} \int_{\beta_2}^\infty + \cdots + e^{\beta_M} \int_{\beta_M}^\infty,$$

$$P_2 = \qquad e^{\beta_1} \int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} \int_0^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M} \int_0^{\beta_M}.$$

Vizsgáljuk meg egyenkint az itt szereplő integrálokat. A $[g(x)]^{\varrho+1}$ az x racionális egész függvénye, melynek x-től mentes tagja: $b_0^{M(\varrho+1)} b_M^{\varrho+1} \neq 0$; tehát

$$x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1} = b_0^{M(\varrho+1)} b_M^{\varrho+1} x^\varrho + \cdots,$$

* L. pl. Dedekind Zahlentheorie II. kiadás p. 454.

** Vegyük fel az X tengelyen elég nagy t távolságban a P pontot és emeljünk e pontban merőlegest az X-re; ez a β_k-ból induló és az X-el párhuzamos egyenest messe N-ben; akkor az $O\beta_k NP$ trapézben az integrandus reguláris analytikai függvény, tehát Cauchy tétele szerint az integrál az OP egyenesen akkora mint az $O\beta_k$ és $\beta_k N$ meg az NP mentén vett integrál. Ha $\beta_k = c + di$, akkor az utóbbi integrál csupa $\int_t^{t+di} e^{-x} x^m dx$ alakú tagokból áll. (m a ϱ és $M(\varrho+1)+\varrho$ közötti pozitiv egészszám.) Ez pedig, ha $x = t + yi$ tesszük, a következő lesz: $e^{-t} \int_0^d (\cos y - i \sin y)(t+iy)^m i dy$, melyről könnyű kimutatni, hogy zérussá lesz, ha d végtelenné válik. Ezzel ki lesz mutatva, hogy az $O\beta_k$ és $\beta_k \infty$ mentén vett integrál ugyanakkora, mint a valós tengely mentén a $0 \ldots \infty$ szakaszban vett integrál.

ahol a ki nem írt tagok x-nek ϱ-nál magasabb hatványait tartalmazzák. Így tehát, minthogy $\int_0^\infty e^{-x}x^m dx = m!$, ha m pozitiv egész szám, a P_1 első tagja:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1} dx = \varrho!\; b_0^{M(\varrho+1)} b_M^{\varrho+1} + (\varrho+1)!\; A,$$

ahol A racionális egész szám. Most nézzük a P_1 második tagjában előforduló:

$$\int_{\beta_1}^\infty e^{-x}x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1} dx$$

integrált. Vezessük be x helyett a β_1+y-t; akkor az integrál alsó határa: 0 lesz. x^ϱ-ból $(\beta_1+y)^\varrho = \beta_1^\varrho + y\varphi(y)$ lesz, ahol $\varphi(y)$ az y racionális egész függvénye β_1-ben racionális egész együtthatókkal. Minthogy pedig $g(x)$ gyöktényezőkre bontott alakja:

$$g(x) = b_0^{M+1}(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_M),$$

tehát $g(x)$-ből ez lesz:

$$b_0^{M+1}\, y\,.\,(y+\beta_1-\beta_2)\ldots(y+\beta_1-\beta_M)$$

vagyis ez:

$$b_0^2\, y\,[b_0y+b_0\beta_1-b_0\beta_2][b_0y+b_0\beta_1-b_0\beta_3]\ldots[b_0y+b_0\beta_1-b_0\beta_M]$$

és így $[g(x)]^{\varrho+1}$ ilyen alakú:

$$b_0^{2\varrho+2}\, y^{\varrho+1}\, \psi(z)^{\varrho+1} \qquad \varepsilon)$$

ahol $\psi(z)$ z rac. egész függvénye, z-vel jelölvén a $b_0y + b_0\beta_1$-et. $\psi(z)$ együtthatói a $b_0\beta_2, b_0\beta_3, \ldots b_0\beta_M$ elemi szimmetrikus függvényei, tehát a $b_0\beta_1$-nek racionális egész kifejezései racionális egész együtthatókkal.* Így tehát az ε) alatti kifejezés ilyen alakú:

$$b_0^{2\varrho+2}\, y^{\varrho+1}[A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots+A_{M-1}y^{M-1}]^{\varrho+1}$$

ahol $A_0, A_1, \ldots$ a $b_0\beta_1$ racionális egész kifejezései racionális egész együtthatókkal. Ezeket tekintetbe véve, arra jutunk, hogy az $\int_{\beta_1}^\infty e^{-x}x^\varrho[g(x)]^{\varrho+1}dx$ integrál az $x = \beta_1 + y$ helyettesítéssel átmegy ebbe:

$$e^{-\beta_1}\int_0^\infty e^{-y}[\beta_1^\varrho + y\varphi(y)]\,.\,b_0^{2\varrho+2}y^{\varrho+1}[A_0+A_1y+\cdots+A_{M-1}y^{M-1}]^{\varrho+1}dy =$$

$$= e^{-\beta_1}\,.\,(b_0\beta_1)^\varrho\, b_0^{\varrho+2}\int_0^\infty e^{-y}y^{\varrho+1}[A_0+A_1y+\cdots]^{\varrho+1}dy + e^{-\beta_1}\int_0^\infty e^{-y}y^{\varrho+2}\Psi(y)\,dy$$

* Ha ugyanis $\varphi(z) = z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_m = 0$ racionális egész együtthatójú algebrai egyenlet gyökei $z_1, z_2, \ldots z_m$, akkor $z_2, z_3, \ldots z_m$ szimmetrikus egész függvényei a $\frac{\varphi(z)}{z-z_1} = 0$ egyenlet együtthatóinak racionális egész függvényei; de

$$\frac{\varphi(z)}{z-z_1} = z^{m-1} + (z_1+\alpha_1)z^{m-2} + \cdots + (z_1^{m-1} + \alpha_1 z_1^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1});$$

tehát a $z_2, z_3, \ldots z_m$ szimmetrikus egész függvényei a z_1 és a $\varphi(z)$ együtthatói által racionális egész alakban állíthatók elő. Ezt az egyszerű algebrai tételt alkalmaztuk a γ') alatti egyenletre, melynek gyökei $b_0\beta_1, b_0\beta_2, \ldots b_0\beta_M$.

ahol $\Psi(y)$ y racionális egész függvénye $b_0\beta_1$-ben racionális egész együtthatókkal. Ha a jobboldali első integrálban a hatványt kifejtjük és az integrációt tagonként elvégezzük, arra jutunk, hogy az első tagban

$$\int_0^\infty e^{-y} y^{\varrho+1}\, dy = (\varrho+1)\,!$$

tényező fordul elő, minden következő tagban pedig

$$\int_0^\infty e^{-y} y^r\, dy = r!$$

tényező szerepel, ahol $r > \varrho+1$, tehát az

$$\int_{\beta_1}^\infty e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1}\, dx$$

integrál értéke:

$$e^{-\beta_1}(\varrho+1)\,!\; G(b_0\beta_1),$$

ahol $G(b_0\beta_1)$ a $b_0\beta_1$ algebrai egész szám racionális egész kifejezése racionális egész együtthatókkal és így a P_1 második tagja:

$$e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1}\, dx = (\varrho+1)\,!\; G(b_0\beta_1).$$

Éppen így mutatjuk meg, hogy általában a P_1-ben előforduló:

$$e^{\beta_k}\int_{\beta_k}^\infty e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1}\, dx = (\varrho+1)\,!\; G(b_0\beta_k)$$

ahol G *ugyanazt* a racionális egész függvényt jelenti mint előbb és így:

$$P_1 = a\varrho\,!\; b_0^{M(\varrho+1)} b_M^{\varrho+1} + (\varrho+1)\,!\; [A + G(b_0\beta_1) + G(b_0\beta_2) + \cdots + G(b_0\beta_M)] \qquad \eta)$$

ahol A, mint említettük, rac. egész szám és a mellette álló összeg a γ') alatti egyenlet gyökeinek, a $b_0\beta_1, b_0\beta_2, \ldots b_0\beta_M$ algebrai *egész* számoknak szimmetrikus egész függvénye, tehát racionális egész szám.

Válasszuk a $\varrho+1$-et tetszés szerinti primszámnak, mely nagyobb mint $ab_0^M b_M$ és vegyük tekintetbe, hogy *Fermat* tétele szerint*

$$b_0^{M(\varrho+1)} \cdot b_M^{\varrho+1} \equiv b_0^M b_M \mod (\varrho+1),$$

akkor az η) alatti így írható:

$$P_1 = a\varrho\,!\; b_0^M b_M + (\varrho+1)\,!\; K,$$

ahol K rac. egész szám. P_1 első tagja $(\varrho+1)\,!$-al nem osztható, mert feltételünk szerint $\varrho+1$ az $ab_0^M b_M$-nél nagyobb primszám; tehát P_1 a $(\varrho+1)\,!$-al nem osztható és így *0-tól okvetlenül különböző egész szám.*

Most nézzük a P_2 kifejezés egyes tagjait. Az első:

$$I = e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} e^{-x} x^\varrho [g(x)]^{\varrho+1}\, dx.$$

Ha $x = \beta_1 y$ tesszük, akkor nyerjük, hogy:

* Lásd pl. *Dedekind:* Zahlentheorie, II. kiadás, 39. lap.

$$I = \beta_1^{\varrho+1} e^{\beta_1} \int_0^1 e^{-\beta_1 y} y^\varrho [g(\beta_1 y)]^{\varrho+1} dy$$

Ha a $0 \ldots 1$ közben $|e^{\beta_1} e^{-\beta_1 y}|$ maximuma L, $|\beta_1| |g(\beta_1 y)|$ maximuma N, akkor

$$|I| < LN^{\varrho+1}$$

és ha a P_2 minden tagjára nézve hasonló megbecsülést végzünk és az N számok közül a legnagyobbat választjuk és ezt újra N-nel jelöljük, akkor arra jutunk, hogy

$$|P_2| < L'N^{\varrho+1},$$

ahol L' és N ϱ-tól független pozitiv számok. Feltételünk szerint $P_1+P_2=0$, tehát:

$$|P_1| = |P_2|.$$

Ha mindkét oldalon ϱ!-al osztunk, a baloldalon racionális egész számot kapunk, mely 0-tól különböző, a jobboldalon pedig egy, az

$$L'N \cdot \frac{N^\varrho}{\varrho!}$$

törtnél kisebb számra jutunk. Ha már most $\varrho+1$-et az előbb megállapított követelés szerint az $ab_0^M b_M$-nél nagyobb primszámnak választjuk és még ezenfelül oly nagyra, hogy $\frac{N^\varrho}{\varrho!} < \frac{1}{L'N}$, [amit mindig elérhetünk, mert $\lim\limits_{\varrho=\infty} \frac{N^\varrho}{\varrho!} = 0$ és végtelen sok primszám van], akkor a jobboldalon 1-nél kisebb számot kapunk és így a $|P_1| = |P_2|$ lehetetlen. Ezzel tehát kimutattuk, hogy a π nem lehet algebrai szám.*

II. Függvénysorokra vonatkozó feladatok. 1. Készítsük el azt a függvénysort, melynél az n-ik részletösszeg: $s_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. Mutassuk meg, hogy ez a sor egyenletesen konvergál a 0-hoz minden $0 \leq x \leq a$ közben, ha $a < 1$; és hogy konvergens oly közben is, mely az 1-et tartalmazza, de a konvergenciája nem egyenletes. Rajzoljuk meg az első 5 részletösszeg menetét!

2. Mutassuk meg, hogy $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^4x^2}$ minden közben egyenletesen összetartó és hogy a belőle tagonkinti differenciálással készített sor is ilyen.

3. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergens minden x-re, de nem egyenletesen konvergens olyan közben, mely a 0-t is tartalmazza.

4. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\cos(n^2x)}{n^2}$ egyenletesen összetartó minden közben, de a tagonkinti differenciálással nyert sor divergens, ha $x \neq k\pi$. (k tetszésszerinti egész szám.)

5. Mutassuk meg, hogy

$$\varphi(x) = \lim_{t=0} \frac{x^2}{x^2+t^2}$$

az $x=0$ helyen: 0, minden más helyen: 1. Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 0-hoz kon-

* Ezt a tudománytörténeti szempontból is nevezetes tételt *Hermite*nek az e transcendens voltára vonatkozó vizsgálatai nyomán (L. I. kötet 505. lapján) legelőször *Lindemann* bizonyította be. Bizonyítását l. Math. Annalen 20-ik kötetében. Az itt közölt bizonyítás lényegében *Hilbert*től való (Math. Ann. 43-ik kötet). L. még *F. Klein:* Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementar-geometrie. Leipzig 1895. p. 53.

vergáló szabályos számsorozat. Mutassuk meg, hogy:

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{x^2+a_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^2(a_{n-1}^2-a_n^2)}{(x^2+a_{n+1}^2)(x^2+a_n^2)}!$$

6. Jelentse $\varphi(u)$ az 5. pontban értelmezett függvényt és legyen $u = \sin(n!\,\pi x)$. Mutassuk meg, hogy $f_n(x) = \varphi[\sin(n!\,\pi x)]$ minden olyan racionális x helyen, melynek nevezője [a törtet rövidíthetetlen alakban képzelve] n-nél nem nagyobb, 0, minden más helyen 1. Mutassuk meg, hogy ez a függvénysor: $f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[f_{n+1}(x) - f_n(x)]$ minden racionális x helyen: 0, minden irracionális helyen: 1 *[Dirichlet példája]*.*

7. A $\log(2-2\cos x)$ a $0\ldots\pi$ alul nyilt, felül zárt közben előállítható a $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ trigonometriai sorban; ez a sor nem egyenletesen összetartó e közben. [A szóban forgó előállításra például a Fourier-együtthatók kiszámítása nélkül is rájuthatunk a 390. lapon foglaltak szerint ilyen módon:

$$2-2\cos x = 2 - e^{ix} - e^{-ix} = (1-e^{ix})(1-e^{-ix});\ \text{tehát}\ \log(2-2\cos x) = \\ = \log(1-e^{ix}) + \log(1-e^{-ix}).$$

De $\log(1-u) = -(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots)$, ha $|u| < 1$. A jobboldali sor konvergencia sugara 1, tehát Abel tétele szerint ez a sor az ismeretes módon vett $\lim \log(1-u)$-t adja a konvergencia-körön levő u helyeken is, ha csak konvergens a sor. e^{ix} és e^{-ix} abszolut értéke 1, ha x valós, tehát e helyek a konvergencia-körön vannak és a Dedekind-, vagy Abel tétel szerint (L. a 263. lapon) a $\sum\frac{\cos nx}{n}$ a $0\ldots\pi$ köz minden, 0-tól különböző helyén, a $\sum\frac{\sin nx}{n}$ pedig minden helyen konvergens és így a $\sum\frac{e^{nix}}{n}$ és $\sum\frac{e^{-nix}}{n}$ sorok is konvergensek, ha $x \neq 0$; tehát az $x = 0$-tól különböző helyeken valóban:

$$\log(2-2\cos x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}].$$

A $\log(2-2\cos x)$ függvény a $0\ldots\pi$ közben integrálható. Az integrál az I. kötet 495. lapján a 15-ik példában foglalt eljárással azonnal kiszámítható, ha $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ tesszük és arra jutunk, hogy:

$$\int_0^{\pi}\log(2-2\cos x)\,dx = 0.$$

Ha a $\log(2-2\cos x)$-et előállító $-2\sum_1^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ sort tagonként integráljuk a 0 és π határok között, szintén 0-t kapunk. Így tehát a tagonkénti integrálás helyes eredményre vezetett, bár a függvénysor nem egyenletesen összetartó.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ a $0\ldots1$ zárt közben folytonos differenciálhányadosokkal biró függvények egyenletesen összetartó sora. Részletösszege: $s_n = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$, tehát e közben a sor összege: $s = \lim_{n=\infty} s_n = x$; ennek differenciálhányadosa: 1. Ha tagonként differenciálunk, erre a sorra jutunk: $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)$, melynek összege a $0\ldots1$ köz belsejében mindenütt 1, ellen-

* Crelle Journal für reine u. angew. Mathematik IV. p. 169.

ben az $x=1$ helyen: 0, tehát a differenciálhányadosok sora a $0 \ldots 1$ zárt közben nem egyenletesen összetartó.

9. *Integrálható függvény, melynek szakadóhelyei mindenütt sűrűek.* Jelentse (a) az a és a hozzá legközelebb álló egész szám különbségét, ha e különbség $\neq \pm \frac{1}{2}$; ha pedig ez a különbség, $\frac{1}{2}$, vagy $-\frac{1}{2}$, akkor legyen $(a)=0$. Mutassuk meg, hogy ez a függvénysor:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \cdots$$

egyenletesen összetartó minden véges intervallumban. Mutassuk meg, hogy (nx) mindenütt folytonos, kivéve azokat a helyeket, melyek $x = \frac{2k+1}{2n}$ alakban írhatók, ahol k és n egész számok; tehát minden (nx) integrálható minden véges közben és így $\varphi(x)$ is integrálható. A $\frac{2k+1}{2n}$ hely az (nx), $(3nx)$, $(5nx)$, ... szakadóhelye. Ha x e helyen balról jobbfelé áthalad, mindezeknek -1 ugrásuk van; a $\varphi(x)$ többi tagja folytonos e helyen, tehát a $\varphi(x)$-nek is ugrása van e helyen. Mutassuk meg, hogy ha a' és a'' egymástól különbözők, akkor közöttük mindig van $\frac{2r+1}{2s}$ alakú hely. A $\varphi(x)$ szakadó helyei tehát úgy vannak elosztva, hogy bármely két szám közé esik szakadó hely (mindenütt sűrű halmaz; olyan, mint a racionális számok halmaza).*

III. **Mindenütt folytonos függvény, mely sehol sem differenciálható.** (*Weierstrass* példája.**) Mutassuk meg, hogy ha b 1-nél kisebb abszolut értékű szám és a tetszésszerinti valós szám, akkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x$$

függvénysor egyenletesen összetartó minden véges intervallumban és $f(x)$ minden helyen folytonos függvény.

Legyen x_0 adott pozitiv szám, b 1-nél kisebb pozitiv szám, a 1-nél nagyobb páratlan egész szám, végül m pozitiv egész szám. Határozzuk meg az a_m egész számot úgy, hogy $a_m - a^m x_0 = x_{m+1}$ az $\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2}$ közé essék (a határokat megengedve). Legyen: $x' = \frac{a_m - 1}{a^m}$, $x'' = \frac{a_m + 1}{a^m}$.

Mutassuk meg, hogy:

$$-\frac{3}{2a^m} \leq x' - x_0 \leq -\frac{1}{2a^m}, \quad \frac{1}{2a^m} \leq x'' - x_0 \leq \frac{3}{2a^m}.$$

Látjuk, hogy x' és x'' a kiszemelt x_0 pont különböző oldalain vannak és hogy ha m elég nagy, akkor tetszésszerint közel jutnak az x_0-hoz.

Számítsuk ki ezt a differenciahányadost:

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

Az $f(x)$-et bontsuk két részre: $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, ahol: $\varphi(x) = \sum_{0}^{m-1} b^n \cos a^n \pi x$

* L. bővebben *Riemann*: Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Gesammelte Werke p. 229.

** Crelle: Journal für reine. u. angew. Math. LXXIX. kötet.

és $\psi(x) = \sum_{m}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x$. A készítendő differenciahányadosnak a $\varphi(x)$-re vonatkozó része így írható:

$$\frac{\varphi(x') - \varphi(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{0}^{m-1} \frac{(ab)^n [\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0]}{a^n (x' - x_0)} =$$

$$= -\sum_{0}^{m-1} (ab)^n \pi \sin \tfrac{1}{2} a^n \pi (x' + x_0) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}{\frac{1}{2} a^n (x' - x_0) \pi}.$$

Minthogy $\frac{\sin u}{u}$ felső korlátja $+1$, alsó korlátja: -1, tehát az utolsó tényező abszolut értéke 1-nél kisebb és így:

$$\left| \frac{\varphi(x') - \varphi(x_0)}{x' - x_0} \right| < \sum_{0}^{m-1} (ab)^n \pi = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1}.$$

Nézzük most a differenciahányadosnak a $\psi(x)$-re vonatkozó részét. Tegyük $n = m + k$, ahol $k \geq 0$.

$$\frac{\psi(x') - \psi(x_0)}{x' - x_0} = b^m \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{\cos a^{m+k} \pi x' - \cos a^{m+k} \pi x_0}{x' - x_0}.$$

De

$$a^{m+k} \pi x' = a^k (a_m - 1) \pi$$

és így, minthogy a_m egész szám, a pedig páratlan, tehát

$$\cos a^{m+k} \pi x' = (-1)^{a_m - 1};$$

továbbá:

$$x_0 = \frac{-x_{m+1} + a_m}{a^m}, \quad \text{tehát:} \quad a^{m+k} \pi x_0 = a^k a_m \pi - a^k \pi x_{m+1}$$

és így:

$$\cos a^{m+k} \pi x_0 = (-1)^{a_m} \cos a^k \pi x_{m+1}.$$

Tekintetbe véve, hogy $-\frac{1}{2} \leq x_{m+1} \leq \frac{1}{2}$, láthatjuk, hogy $\cos \pi x_{m+1}$ nem negativ.

A szóban forgó differenciahányados így írható:

$$\frac{\psi(x') - \psi(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{a_m - 1} (ab)^m \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{1 + \cos a^k \pi x_{m+1}}{a^m (x' - x_0)}.$$

De a jobboldalon álló $a^m (x' - x_0)$-ról tudjuk, hogy $-\frac{1}{2}$ és $-\frac{3}{2}$ közé, a számláló pedig 0 és 2 közé esik, tehát a jobboldali végtelen sor minden tagja negativ; első tagja $k = 0$-nak megfelelően: $\frac{1 + \cos \pi x_{m+1}}{a^m (x' - x_0)}$ abszolut értékére $\frac{2}{3}$-nál nagyobb (mert $\cos \pi x_{m+1}$ nem negativ) és így $\frac{\psi(x') - \psi(x_0)}{x' - x_0}$ absz. értéke nagyobb $\frac{2}{3}(ab)^m$-nál; előjele pedig $(-1)^{a_m}$-ével megegyező.

A $\frac{\varphi(x') - \varphi(x_0)}{x' - x_0}$-ról megmutattuk, hogy abszolut értékre $\pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1}$-nél kisebb. Válasszuk az a-t úgy, hogy $ab = \alpha\pi + 1$ legyen ahol $\alpha > \frac{3}{2}$, akkor

$$\left| \frac{\varphi(x') - \varphi(x_0)}{x' - x_0} \right| < \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1} = \frac{1}{\alpha} (ab)^m < \frac{2}{3} (ab)^m.$$

A $\psi(x)$ differenciahányadosának abszolut értéke pedig $\frac{2}{3}(ab)^m$-nél nagyobb, tehát az $\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$ előjele ugyanaz, mint $\frac{\psi(x') - \psi(x_0)}{x' - x_0}$ jele, vagyis $(-1)^{a_m}$. Minthogy pedig a $\psi(x)$ differenciahányadosa $\frac{2}{3}(ab)^m$-nél nagyobb és a $\varphi(x)$-é $\frac{1}{\alpha}(ab)^m$-nél kisebb abs. értékű tehát $f(x) = \psi(x) + \varphi(x)$ differenciahányadosa $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)(ab)^m$-nél nagyobb abszolut értékű, ahol $\frac{1}{\alpha} < \frac{2}{3}$.

Mutassuk meg, ugyanezt a gondolatmenetet követve, hogy az

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} \text{ jele } (-1)^{\alpha_m+1},$$

vagyis az x_0 helyen való jobboldali differenciahányados ellenkező jelű, mint a baloldali és hogy e differenciahányados abszolut értéke nagyobb mint $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{a}\right)(ab)^m$. Így tehát ha m végtelenné válik, vagyis x' és x'' az x_0-hoz konvergálnak, akkor a differenciahányadosnak nem lesz véges, meghatározott határértéke, (mert $ab > 1$), vagyis az x_0 pontban az $f(x)$ függvénynek nincs differenciálhányadosa. x_0 hely egészen tetszésszerint választott. $f(x)$ tehát mindenütt folytonos függvény, melynek az esetben, midőn $0 < b < 1$, a páratlan és $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, sehol sincs differenciálhányadosa.

IV. **Az egyenletes összetartás Bendixson*-féle kritériuma.** Ha $\sum\limits_1^\infty u_n(x)$ az $a \ldots b$ köz minden helyén [elég volna mondani: mindenütt sűrű halmazban, pl. az $a \ldots b$ köz minden racionális helyén] konvergens, mindenik $u_n(x)$ az $a \ldots b$ közben differenciálható és a részletösszegek x-szerinti differenciálhányadosai az egész $a \ldots b$ közben korlátosak, azaz, minden m indexre: $|s'_m(x)| = |\sum\limits_1^m u'_n(x)| < M$, akkor a $\sum\limits_1^\infty u_n(x)$ e közben egyenletesen összetartó.

Bizonyítás menete: Legyen adva ε. Válasszuk a pozitiv δ-t úgy, hogy $\delta < \frac{\varepsilon}{4M}$ legyen és osszuk fel az $a \ldots b$ közt r egyenlő részre úgy, hogy e részek δ-nál kisebbek legyenek.

Feltételünk szerint mindenik részben van olyan ξ pont, melyen a $\Sigma u_n(x)$ konvergens. Legyenek ily pontok: $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$. Így tehát $\Sigma u_n(\xi_1)$, $\Sigma u_n(\xi_2), \ldots, \Sigma u_n(\xi_r)$ konvergens sorok. Válasszuk meg az N indexet úgy, hogy, ha $k > N$ és l bármely k-nál nagyobb szám, akkor

$$\left|\sum_k^l u_n(\xi_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i=1, 2 \ldots r).$$

Feltételünk szerint minden m indexre $\left|\sum\limits_1^m u'_n(x)\right| < M$; tehát

$$\left|\sum_k^l u'_n(x)\right| = \left|\sum_1^l u'_n(x) - \sum_1^{k-1} u'_n(x)\right| \leq \left|\sum_1^l u'_n(x)\right| + \left|\sum_1^{k-1} u'_n(x)\right| < 2M.$$

Ha x az i-ik szakasz bármelyik helye, akkor a középértéktétel szerint:

$$\sum_k^l u_n(x) = \sum_k^l u_n(\xi_i) + (x - \xi_i) \sum_k^l u'_n(\eta_i),$$

ahol η_i a ξ_i és x közötti hely. Így tehát

$$\left|\sum_k^l u_n(x)\right| < \left|\sum_k^l u_n(\xi_i)\right| + 2\delta M < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$$

ha $k > N$ és $l > k$. Ez az egyenlőtlenség érvényes az i-ik szakasz minden helyére; de i jelentheti az 1, 2 . . . r számok bármelyikét, tehát x lehet az

* *Bendixson:* Öfversigt of kongl. Vetenskaps Akademiske Forhandlingar 54. k. 605—622 p. L. a tételt kétváltozós függvénysorra *Townsend:* Über den Begriff und die Anwendung des Doppellimes. Göttingai dissertatio 1900. p. 34.

$a \dots b$ zárt köz bármelyik helye. Ezzel megmutattuk, hogy a $\Sigma u_n(x)$ az $a \dots b$ közben egyenletesen összetartó.

Mutassuk meg ennek a felhasználásával, hogy $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$ egyenletesen konvergens minden $a \dots b$ közben, ha $0 < a < b < \pi$.

V. **Pozitivtagú függvénysorok egyenletes összetartása.** *(Dini kriteriuma.)* Tudjuk, hogy ha $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, ... függvények az $a \leq x \leq b$ közben folytonosak, akkor a $\sum_1^\infty u_n(x)$ sor egyenletes összetartása *elégséges* feltétel arra, hogy a $\Sigma u_n(x)$ összeg az illető intervallumban folytonos legyen; de nem *szükséges* feltétel. Ha azonban az *$u_n(x)$ függvények az $a \dots b$ zárt közben folytonosak és pozitivok és a konvergens $\sum_1^\infty u_n(x)$ sor összege az $a \dots b$ közben folytonos, akkor a $\sum_1^\infty u_n(x)$ sor e közben egyenletesen összetartó.* Vagyis ebben az esetben az egyenletes összetartás *szükséges* és *elégséges* feltétele a $\Sigma u_n(x)$ folytonosságának. (Az $u_n(x)$ függvények pozitiv voltának köszönhető ez a megfordíthatóság).

Bizonyítás menete: A sor maradéktagja az adott köz x helyén $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \cdots$. $R_n(x)$ így is írható:

$$R_n(x) = \sum_1^\infty u_m(x) - \sum_1^n u_m(x).$$

Mivel a $\sum_1^\infty u_m(x)$ feltételünk szerint az $a \dots b$ közben folytonos, $\sum_1^n u_m(x)$ pedig, mint véges számú folytonos függvény összege, szintén folytonos, tehát — akármekkora is az n index — az $R_n(x)$ az $a \dots b$ zárt közben folytonos. Legyen x_0 az $a \dots b$ köz valamely helye. És legyen adva az ε pozitiv szám. Minthogy a $\Sigma u_n(x_0)$ konvergens, tehát az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez rendelhető olyan N küszöb, hogy, ha $n > N$, akkor $R_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen n egy bizonyos, az N-en túl levő index. $R_n(x)$ folytonos az x_0 helyen; tehát megjelölhető egy σ köz úgy, hogy az $x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma$ feltételt kielégítő x értékekre nézve: $|R_n(x) - R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ez az egyenlőtlenség pedig, tekintetbe véve, hogy a tagok mind pozitivok és $R_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, így is írható: $0 < R_n(x) < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \sigma$. Ilyen egyenlőtlenség fennáll pl. ha $n = N + 1$; de minthogy a sor tagjai pozitivok, tehát ha n nagyobbodik, $R_n(x)$ csak kisebbedhetik és így *minden* $n > N$-re mondhatjuk, hogy $0 < R_n(x) < \varepsilon$, ha x az $x_0 - \sigma \dots$, $x_0 + \sigma$ zárt közben van. (Ha x_0 a-val, illetőleg b-vel összeesik, akkor csak jobboldali, vagy baloldali, σ szélességű közről szólhatunk.)

Legyen $x_0 = a$. Ehhez és az adott ε-hoz tartozik egy bizonyos N küszöb és megfelelően egy bizonyos σ köz. Vegyük a σ köz jobboldali végpontját. Ehhez és ε-hoz megint tartozik egy N' és σ' köz. Ha már most N és N' közül a nagyobbikat választjuk [pl. N-et], akkor az egész $\sigma + \sigma'$ közre áll, hogy, ha $n > N$.

$$0 < R_n(x) < \varepsilon.$$

Vegyük a σ' köz jobboldali végpontját és folytassuk az előbbi eljárást. Azt állítjuk, hogy ilyen módon *véges* számú lépésben eljutunk a b ponthoz.

Ugyanis, ha ez nem volna igaz, akkor véges számú σ közzel nem jutnánk el b-hez, vagyis általában az $a \dots b$ zárt köznek volna olyan helye [esetleg csak a b], amelyhez nem jutnánk el az előbbi processussal megalkotott véges számú σ köz összeillesztésével. Az $a \ldots b$ köznek van olyan helye [pl. az a σ-nyi környezetéhez tartozó pont], amelyhez eljutunk véges számú közzel és olyan, amelyhez nem jutunk el. Nyilván, ha x'-hez nem jutunk el, akkor $x'' > x'$-hez sem jutunk és ha x'-hez eljutunk, akkor $x'' < x'$-hez is eljutunk. Az $a \ldots b$ köz helyeit tehát két szeletre vághatjuk: A és B-re úgy, hogy az A helyeihez eljutunk, a B helyeihez nem jutunk el. A két szelet határhelye legyen x_0. Ha $x' > x_0$, akkor már x' a B-be tartozik, tehát véges számú lépésben x'-hez nem juthatunk; ellenben ha $x'' < x_0$, akkor x''-hez eljutunk. De tudjuk, hogy x_0-hoz és ε-hoz tartozik egy N szám és egy σ köz oly módon, hogy ha $x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma$ és $n > N$, akkor $0 < R_n(x) < \varepsilon$. Az x_0-tól jobbra jelöljük meg az $x' < x_0 + \sigma$ helyet és balra az $x'' > x_0 - \sigma$ helyet. x''-höz feltételünk szerint véges számú lépésben eljutunk. Mondjuk, hogy k lépésben, azaz van olyan közös N szám, hogy $0 < R_n(x) < \varepsilon$, ha $n > N$ és x az $a \ldots x''$, zárt köz bármelyik helye. Tegyük még e közhöz az $x_0 - \sigma$-tól $x_0 + \sigma$-ig terjedő közt is (elhagyva azt a baloldali részét, amely az x''-től balra esik). Ha e közhöz tartozó küszöbszám és az előbbi $a \ldots x''$-hez tartozó közös küszöbszám közül a nagyobbikat választjuk és azt N-nel jelöljük, akkor tehát az a-tól $x_0 + \sigma$-ig terjedő egész darabon áll, hogy $0 < R_n(x) < \varepsilon$, ha $n > N$; tehát véges számú lépésben [t. i. $k+1$ lépésben] az x_0-on túlhaladtunk, ami feltevésünkkel ellenkezik és így lehetetlen, hogy létezzék x_0 határpont. Ezzel tehát kimutattuk, hogy *véges számu* σ közzel az egész $a \ldots b$ zárt köz befedhető és ha az összes N-ek közül a legnagyobbat választjuk, akkor ezen túl levő n-ekre $0 < R_n(x) < \varepsilon$, ha x az $a \ldots b$ zárt köz bármelyik helye. A $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ tehát az $a \ldots b$ zárt közben egyenletesen összetartó.

Ugyanez áll arra az esetre is, ha az $u_n(x)$ függvények mindannyian negativok.

Bizonyítsuk be az előbbi alapján, hogy ha az $u_n(x)$ függvények folytonosak és a $\sum_1^{\infty} |u_n(x)|$ is folytonos az $a \ldots b$ közben, akkor $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ e közben egyenletesen összetartó.

VI. Feladatok a hatványsorokra vonatkozólag. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$ hatványsorban a ξ helyen minden $|A_n(\xi-a)^n| < g$, ahol g meghatározott pozitiv szám, akkor a hatványsor konvergencia-körének sugara: $R \geq |\xi - a|$. [Bizonyítás menete: $|A_n(x-a)^n| = |A_n| \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n |\xi-a|^n < g \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n$. Folytassuk.]

2. Legyen $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|, \ldots$ korlátlanul növekvő számok sorozata. Mutassuk meg, hogy

$$1 + \frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{x^3}{a_3^3} + \cdots + \frac{x^n}{a_n^n} + \cdots$$

konvergencia-köre végtelen nagy sugarú.

3. Legyen a egész szám, mely > 1. Mutassuk meg, hogy ezen sor:

$$1 + bz^a + b^2 z^{a^2} + b^3 z^{a^3} + \cdots + b^n z^{a^n} + \cdots$$

konvergencia-körének sugara: 1 és ha $|b| < 1$, akkor ez a sor abszolut konvergens az egységsugarú kör minden helyén is. Mutassuk meg, hogy ha $z = \cos \pi x + i \sin \pi x$ tesszük, akkor e sor valós része az az $f(x)$ függvény, melyről megmutattuk, hogy minden x helyen folytonos, de sehol sem differenciálható. (L. 419. lapon.)

4. *Bessel-függvények.* Mutassuk meg, hogy a

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}}{n!(m+n)!}$$

transcendens egész függvény. (*Bessel*-függvény) (m pozitiv egész szám).

5. Bizonyítsuk be, hogy a 4. alatti hatványsorok között fennállanak ezek az összefüggések:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x)$$

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x).$$

Tegyük e két egyenletben *a)* m helyett $m-1$-et és *b)* m helyett $m+1$-et és az első egyenletből keletkezettekből vezessük le ezt:

$$J_{m-2}(x) + 2J_m(x) + J_{m+2}(x) = \frac{4m^2}{x^2} J_m(x) - \frac{4}{x} J'_m(x).$$

A másodikból pedig ezt:

$$J_{m-2}(x) - 2J_m(x) + J_{m+2}(x) = 4J''_m(x)$$

és e kettő különbségéből:

$$J''_m(x) + \frac{1}{x} J'_m(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) J_m(x) = 0$$

(a Bessel-féle függvény ezt a differenciálegyenletet elégíti ki). Igazoljuk ezt azzal is, hogy $J_m(x)$ hatványsorát a baloldalba helyettesítjük és megmutatjuk, hogy a baloldalon keletkező hatványsor minden együtthatója: 0.

6. *Hypergeometrikus sor.* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$-szel jelöljük *Gauss* szerint ezt a *hypergeometrikus sort:* ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ és $\gamma \neq$ negativ egész szám).

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} x +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma\,.\,(\gamma+1)} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\ldots n \quad \gamma\,.\,(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \cdots$$

Mutassuk meg, hogy konvergencia-körének rádiusa: 1.

7. Mutassuk meg, hogy

a) $(t+u)^n = t^n F\left(-n, \beta, \beta, -\frac{u}{t}\right)$ [β tetszőleges, n poz. egész szám].

b) $(t+u)^n + (t-u)^n = 2t^n F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{u^2}{t^2}\right)$ [n poz. egész szám].

c) $(t+u)^n - (t-u)^n = 2nt^{n-1}uF\left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n+1, \frac{3}{2}, \frac{u^2}{t^2}\right)$ [n poz. egész szám].

d) $\log(1+t) = tF(1, 1, 2, -t) \qquad |t| < 1.$

e) $\log\frac{1+t}{1-t} = 2tF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, t^2\right) \qquad |t| < 1.$

8. Mutassuk meg, hogy:

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x.$$

9. Állítsuk elő eszerint $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ k-ik differenciálhányadosát! Állítsuk elő $\int_0^x F(\alpha, \beta, \gamma, x)\, dx$ integrált; $|x| < 1$.

10. Mutassuk meg, hogy:

$$a)\ (\beta-\alpha)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) = 0,$$

$$b)\ (\gamma-\alpha-1)\ F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - (\gamma-1)\, F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = 0,$$

$$c)\ (\gamma-\alpha-\beta)\ F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \alpha(1-x)\, F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - (\gamma-\beta)\, F(\alpha, \beta-1, \gamma, x) = 0,$$

$$d)\ (\gamma-\alpha-\beta)\ F(\alpha, \beta, \gamma, x) - (\gamma-\alpha)\, F(\alpha-1, \beta, \gamma, x) + \beta(1-x)\, F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) = 0,$$

$$e)\ x(1-x)\, F'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\, x]\, F' - \alpha\beta F = 0\,;$$

a hypergeometrikus sor kielégíti ezt az *e)* alatti differenciálegyenletet. (Gauss: Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$ etc.)*

11. Állítsuk elő $(1-k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ függvényt, (ahol $k<1$), binomiális sorban és tagonkinti integrálással számítsuk ki az

$$F(\Phi) = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

elsőfajú elliptikus integrált. Mutassuk meg az I. kötet 347-ik lapján tárgyalt integrálképletek felhasználásával, hogy:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \cdots + \left[\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \cdots\right].$$

12. Ha a $\sum_0^\infty a_n x^n$ konvergencia-körének rádiusa r és $\sum_0^\infty b_n x^n$-é ϱ, ahol $\varrho \geq r$, mutassuk meg, hogy a $\sum_0^\infty (a_n + b_n)\, x^n$ összetartási sugara: $R \geq r$.

13. Ha $\sum_0^\infty a_n x^n$ konvergencia-rádiusa $r > 0$, akkor $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\, x^n$ transzcendens egész függvény.

14. Az r sugarú kör valamely helye: $x = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; e helyen az $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ hatványsor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = U(\varphi) + i V(\varphi),$$

ahol $U(\varphi)$ és $V(\varphi)$ a φ és r valós függvényei. Ha r kisebb, mint a konvergencia-radius, akkor a jobboldalon álló sor φ-re nézve egyenletesen összetartó; tehát, ha 0 és 2π határok közt integrálunk:

$$\int_0^{2\pi} [U(\varphi) + iV(\varphi)]\, d\varphi = 2\pi a_0.$$

Ha $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ tesszük, (ahol α_n és β_n valós számok), akkor

$$U(\varphi) = \sum_{n=0}^\infty (\alpha_n r^n \cos n\varphi - \beta_n r^n \sin n\varphi)\,; \quad V(\varphi) = \sum_{n=0}^\infty (\alpha_n r^n \sin n\varphi + \beta_n r^n \cos n\varphi).$$

15. Mutassuk meg a *Parseval-Hurwitz*-tétel alapján (l. 411. lapon), hogy:

$$\int_0^{2\pi} (U^2 + V^2)\, d\varphi = 2\pi \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n}.$$

* L. Gauss: Werke III. kötet. p. 123.

16. Legyen $f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ transzcendens egész függvény; $c_n = \alpha_n + i\beta_n$, ahol α_n és β_n valósak; tegyük $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol r és φ valós és $f(x) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$, ahol U és V az r és φ valós függvényei. Tudjuk, hogy:

$$U = \sum_0^\infty r^n(\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi)$$

és hogy:

$$\pi r^n \alpha_n = \int_0^{2\pi} U \cos n\varphi \, d\varphi; \qquad -\pi r^n \beta_n = \int_0^{2\pi} U \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Ebből:

$$\pi r^n c_n = \int_0^{2\pi} U e^{-ni\varphi} d\varphi; \quad \text{és így:} \quad \pi r^n |c_n| \leq \int_0^{2\pi} |U| \, d\varphi$$

és $n = 0$ esetében:

$$2\pi\alpha_0 = \int_0^{2\pi} U d\varphi.$$

Innen:

$$\pi r^n |c_n| + 2\pi\alpha_0 \leq \int_0^{2\pi} (U + |U|) \, d\varphi$$

és $\alpha)$

$$\pi r^n |c_n| - 2\pi\alpha_0 \leq \int_0^{2\pi} (|U| - U) \, d\varphi.$$

Az r sugaru körvonal azon helyein, melyeken U pozitiv, az $U + |U| = 2U$, amelyeken U negativ, $U + |U| = 0$. Tegyük fel, hogy végtelen sok olyan 0 középpontú, korlátlanul növekvő sugarú kör van, melyen U pozitiv értékeinek maximuma $< Ar^\lambda$, ahol A meghatározott pozitiv szám, r az illető kör rádiusa és λ pozitiv egész szám. Ekkor tehát, $n = \lambda + k$ téve:

$$|c_{\lambda+k}| < \frac{2|\alpha_0|}{r^{\lambda+k}} + \frac{4A}{r^k}$$

és így, minthogy r korlátlanul nőhet, $c_{\lambda+1}, c_{\lambda+2}, c_{\lambda+3}, \ldots$ mind zérusok, vagyis $f(x)$ racionális egész függvény, melynek fokszáma $\leq \lambda$. Ha tehát a $\Sigma c_n x^n$ reális része pozitiv értékeinek maximuma végtelen sok (korlátlanul növekvő) koncentrikus körön Ar^λ-nál kisebb, akkor a $\Sigma c_n x^n$ λ-nál nem magasabb fokú racionális egész függvény. *(Hadamard-tétele.)** Mutassuk meg, hogy ez az imaginarius részre is érvényes.

Az r sugarú kör azon helyein, melyeken U pozitiv, $|U| - U = 0$, melyeken U negativ, $|U| - U = 2|U|$; tehát az $\alpha)$ alatti második egyenlőtlenségből következik, hogy ha végtelen sok, korlátlanul növekvő r sugarú körön az U negativ értékei abszolut értékeinek maximuma kisebb Ar^λ-nál, akkor a $\Sigma c_n x^n$ λ-nál nem magasabb fokú racionális egész függvény.

17. Az $f(x) = \Sigma A_n x^n$ az $x = 0$ helyen 0-tól különböző, ha $A_0 \neq 0$. Mutassuk meg, hogy ha $A_0 \neq 0$, akkor van olyan 0 középpontú, véges r sugarú kör, melyen belül $f(x)$ sehol sem 0. [Bizonyítás menete:

$$\varphi(x) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

az $x = 0$ helyen 0 és x folytonos függvénye; tehát ha ε megadott pozitiv szám, akkor van olyan r véges szám, hogy $|\varphi(x)| < \varepsilon$, ha $|x| < r$. Válasz-

* *Hadamard:* Propriétés des fonctions entières. Journal de Mathématiques 1893. p. 186.

szuk ε gyanánt pl.: $\frac{|A_0|}{2}$-et, akkor tehát az r sugarú körön belül $f(x) = A_0 + \varphi(x)$ nem lehet 0.]

Ha $A_0 = A_1 = A_2 = \cdots = A_{k-1} = 0$, $A_k \neq 0$, akkor $f(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} A_{k+n} x^n$, az $x = 0$ helyen 0. [Azt mondjuk, $f(x)$-nek az $x = 0$ k-szoros zérus-helye]. Mutassuk meg ugyanúgy, mint előbb, hogy egy véges r sugarú, 0 középpontú körön belül más zérus-hely nincs. Fogalmazzuk a tételt $\Sigma A_n (x-a)^n$ hatványsorra!

18. Legyen $x = 0$ tetszésszerinti környezetében is az $f(x) = \Sigma A_n x^n$-nek zérus-helye. Mutassuk meg, hogy ez az állítás úgy is fogalmazható, hogy $f(x)$-nek végtelen sok zérus-helye van és ezeknek egyik sűrűsödő helye a 0. Mutassuk meg, hogy ekkor $A_k = 0$, ha $k = 0, 1, 2, \ldots$; vagyis a hatványsor identikusan 0. [Az $f(x)$ folytonosságából következik, hogy $x=0$ zérus-helye az $f(x)$-nek; tehát ha csak véges számú együttható volna 0, akkor az előbbi tétel szerint 0 nem lehetne sűrűsödő helye a zérus-helyeknek.] Fogalmazzuk meg ez állítást a $\sum_{0}^{\infty} A_n (x-a)^n$ hatványsorra vonatkozólag $x = a$ helyre is.

19. Ha $f(x) = \Sigma A_n x^n$, $\varphi(x) = \Sigma B_n x^n$ és $f(x) = \varphi(x)$ végtelen sok helyen, melyek egyik sűrűsödő helye a 0, akkor minden $A_n = B_n$. [Az $f(x) - \varphi(x)$-re alkalmazzuk az előbbi tételt.] E feladatokban a hatványsor konvergencia sugara $\neq 0$.

20. *A hatványsor differenciálása.* Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergencia-köre az r sugarú O középpontú C kör. Az $r' < r$ rádiusszal rajzoljuk meg a C-vel koncentrikus C' kört. Legyen x a C' kör belsejében és $|h| < r - r'$; ekkor $|x| + |h|$ is a C belső pontja, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x| + |h|)^n$ konvergens. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|\, (|x| + |h|)^{n-1}$, valamint $\Sigma n(n-1)\, |a_n|\, (|x| + |h|)^{n-2}$ is konvergensek. Számítsuk ki $f(x)$ növekményét:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(x+h)^n - x^n].$$

De $(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 \eta_n$, ahol:

$$\eta_n = x^{n-2} + \frac{n-3}{3} x^{n-3} h + \frac{(n-3)(n-4)}{3 \cdot 4} x^{n-4} h^2 + \cdots + \frac{(n-3)!}{3 \cdot 4 \ldots n} h^{n-2},$$

tehát:

$$|\eta_n| < |x|^{n-2} + (n-2)\, |x|^{n-3}\, |h| + \binom{n-2}{2} |x|^{n-4}\, |h|^2 + \cdots = (|x| + |h|)^{n-2}.$$

A differenciahányados:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \frac{h}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n \eta_n.$$

Minthogy pedig a második tag abszolut értéke kisebb, mint

$$\frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, |a_n|\, (|x| + |h|)^{n-2},$$

melynek limesze 0, ha h zérussá válik, tehát arra jutottunk, hogy ha x bármely helye a C'-nak (és a komplex helyen való $f'(x)$ differenciálhányadost is $\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$-al értelmezzük)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Minthogy pedig r' tetszésszerinti kevéssel tér el az r-től, tehát ez a tétel érvényes a konvergencia-kör minden belső helyére.

21. Legyen $g(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ konvergencia rádiusa 1-nél nagyobb és $a_0 \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az együtthatók abszolut értékeinek sorozata korlátos. Válasszuk a pozitiv μ-t úgy, hogy $|a_k| \leq \mu$, ha $k = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $g(x)$ nem tünik el azon körben, melynek rádiusa: $\varrho = \frac{|a_0|}{|a_0| + \mu}$. [Megmutatjuk, hogy ha $|x| < \varrho$, akkor $\sum_1^\infty a_n x^n$ absz. értéke kisebb $|a_0|$-nál, tehát $a_0 + \sum_1^\infty a_n x^n$ nem lehet 0, ha $|x| < \varrho$].

22. Legyen $g(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ összetartási sugara $r \geq 1$ és $a_0 \neq 0$. Legyen $|x| \leq \varrho < 1$, akkor:

$$|g(x) - a_0| = |\sum_1^\infty a_n x^n| \leq \sum_1^\infty |a_n| \varrho^n \leq \sqrt{\sum_1^\infty |a_n|^2 \cdot \sum_1^\infty \varrho^{2n}} =$$

$$= \sqrt{(-|a_0|^2 + \sum_0^\infty |a_n|^2) \frac{\varrho^2}{1-\varrho^2}}$$

[$\sum_1^\infty |a_n| \varrho^n$-re a Schwarz-féle egyenlőtlenséget alkalmaztuk. L. I. 504. lap].

Ha ϱ-t úgy választjuk, hogy $|g(x) - a_0| < |a_0|$ legyen, amidőn $|x| \leq \varrho$, akkor $|g(x)| \neq 0$. Mutassuk meg eszerint, hogy a

$$\varrho = \frac{|a_0|}{\sqrt{\sum_0^\infty |a_n|^2}}$$

sugarú körön belül $g(x) = 0$-nak nincs gyöke. (Petrovitch-tétele.)*

23. *Az Abel-sortétel, mint egy integráltétel speciális esete.* Legyen adva a $\sum_{n=0}^\infty a_n$ valós tagú konvergens sor, $\Sigma a_n = A$. Értelmezzük a $\psi(x)$ függvényt a $0 \ldots \infty$ közben úgy, hogy ha $n \leq x < n+1$, akkor $\psi(x) = a_n$. Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \psi(x)\,dx$ létezik és értéke: A. Alkalmazzuk erre az integrálra az I. kötet 437. lapján tárgyalt Dirichlet-tételt és mutassuk meg, hogy ez az Abel-féle sortételt szolgáltatja arra az esetre, midőn a $\Sigma a_n x^n$ hatványsor az $x = 1$ helyen konvergens és a valós tengely mentén haladunk az $x = 1$ helyhez. [U. i.: az $\int_0^\infty e^{-yx} \psi(x)\,dx$ integrál most $\Sigma a_n \int_n^{n+1} e^{-yx}\,dx = [\Sigma a_n e^{-ny}] \frac{1-e^{-y}}{y}$. Ha $e^{-y} = x$ tesszük, akkor, ha y pozitiv, $x < 1$; $\lim_{y=0} \frac{1-e^{-y}}{y} = 1$. Folytassuk!].

24. Legyen $f(x) = \Sigma A_n x^n$. Állítsuk elő az $f(x) \, . \, f(-x)$ szorzatot a Cauchy-féle szorzási tétel szerint.

25. Legyenek $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_k$ az összes különböző k-ik egységgyökök; mutassuk meg, hogy az

$$f(\omega_1 x)\, f(\omega_2 x) \ldots f(\omega_k x) = \sum_{n=0}^\infty B_{nk} x^{nk}$$

alakú hatványsor.

26. Készítsük el a $\sum_{k=0}^\infty \binom{m}{k} x^k$ és $\sum_{k=0}^\infty \binom{n}{k} x^k$ hatványsorok szorzatát és mu-

* Bulletin de la Société math. de France 1901. XXIX. k. p. 303—312. L. még *Landau* Ueber eine Aufgabe aus der Functionentheorie, The Tohoku Math. Journal V. k. 1914. p. 103.

tassuk meg, hogy a szorzat:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+n}{k}x^k.$$

27. A $\log(1+x)$ és $\frac{1}{1+x}$ függvények Maclaurin-sorainak szorzatát állítsuk elő és mutassuk meg közvetlenül, hogy az így nyert sor:

$$x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$

és hogy konvergencia körének sugara: 1.

28. Mutassuk meg, hogy ha $|x|<1$, akkor $1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+x^{12}-\cdots$ végtelen sor összege: $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$. [Ez utóbbi kifejezés így írható: $\frac{1-x}{1-x^4}$].

29. Mutassuk meg, hogy:

$$x \operatorname{arc tg} x-\log\sqrt{1+x^2}=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)2n}, \quad \text{ha } |x|\leq 1.$$

30. Legyen $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ n-edfokú rac. egész függvény; gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Mutassuk meg, hogy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i} \qquad \alpha)$$

és hogy a jobboldali kifejezés így írható: $-\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k x^{k-1}$, ha $|x|$ kisebb, mint a legkisebb abszolut értékű gyök absz. értéke, ahol $\sigma_k=\frac{1}{\alpha_1^k}+\frac{1}{\alpha_2^k}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n^k}$. Mutassuk meg azt is, hogy ha $|x|$ nagyobb, mint a legnagyobb abszolut értékű gyök absz. értéke, akkor az α) alatti kifejezés így írható: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{x^{k+1}}$, ahol $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k$.

Szorozzuk az α) mindkét oldalát $f(x)$-szel és állítsuk elő a σ_k, illetőleg s_k hatványösszegekre vonatkozó recursiv képleteket!

31. *A $\sum\frac{x^n}{n!}$ és az e^x identitása.* Ez a hatványsor: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots$ x minden értékére konvergens. Jelöljük az általa előállított függvényt $F(x)$-szel; tehát: $F(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Szorítkozzunk valós x-ekre. Mutassuk meg, hogy $F(-x).F(x)=1$. Ebből következik, hogy $F(x)$ akkor is pozitiv, ha x negativ. Mutassuk meg továbbá, hogy $F'(x)=F(x)$.

Legyen k tetszés szerinti valós szám és $[F(x)]^k$ a hatvány pozitiv értéke. Állítsuk elő $[F(x)]^k$ differenciálhányadosait az $x=0$ helyen és mutassuk meg, hogy $[F(x)]^k$ Maclaurin sora: $\sum_{0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{n!}$, vagyis $[F(x)]^k=F(kx)$. Ez fennáll minden valós x-re és minden valós k-ra, tehát $x=1$ téve: $F(k)=F(1)^k$, vagy k betű helyett x-et téve és a $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ numerikus sor összegét e-vel jelölve, arra jutottunk, hogy $\sum_{0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ minden valós x-re.*

32. *A trigonometriai függvények értelmezése.* Értelmezzük a $C(x)$ és $S(x)$ függvényeket a következő hatványsorokkal:

$$C(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots, \quad S(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

* Beke M. Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba. Budapest. Franklin-Társulat. 1908. 112. lap.

a) Mutassuk meg, hogy ezzel a $C(x)$ és $S(x)$ *minden x* értékre értelmezve van. (E hatványsorok konvergencia köre végtelen sugarú.)

b) Mutassuk meg, hogy $C(x) + i\, S(x) = e^{ix}$ és ennek alapján azt, hogy a $C(x)$ és $S(x)$ függvényekre az $S(x+y) = S(x)\, C(y) + C(x)\, S(y)$, $C(x+y) = C(x)\, C(y) - S(x)\, S(y)$ addicio tételek, valamint a $[C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1$ reláció érvényesek. (L. 392. lapon.)

c) Minő általános tételekből következik, hogy $C(x)$, $S(x)$ folytonosak és differenciálhatók és hogy $C'(x) = -S(x)$, $S'(x) = C(x)$?

d) $C(x)$ így írható:

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3.4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7.8}\right) - \cdots$$

Mutassuk meg ezen az alakon, hogy $C(\sqrt{6})$ negativ. Minthogy pedig $C(0)=1$, tehát a $0 \ldots \sqrt{6}$ közben [$\sqrt{6}$-t poz.-nak vegyük] van a $C(x)$-nek legalább egy gyöke. Másrészt azonban $S(x)$ így írható:

$$S(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6.7}\right) + \frac{x^9}{9!}\left(1 - \frac{x^2}{10.11}\right) + \cdots$$

és ezen látjuk, hogy ha $0 < x \leq \sqrt{6}$, akkor $S(x)$ mindig pozitiv, tehát $C(x)$ differenciálhányadosa e közben mindig negativ. Ebből következik, hogy $C(x)$-nek a $0 \ldots \sqrt{6}$ közben csak egy gyöke lehet. Jelöljük ezt a számot $\frac{p}{2}$-vel; tehát $0 < \frac{p}{2} < \sqrt{6}$.

e) Bizonyítsuk be most ezeket az addicio tételeket:

$$S\left(\frac{p}{2} - x\right) = C(x), \quad C\left(\frac{p}{2} - x\right) = S(x), \quad S\left(\frac{p}{2} + x\right) = C(x), \quad C\left(\frac{p}{2} + x\right) = -S(x);$$

$S(p) = 0$, $C(p) = -1$, stb., mely tételek a $\sin x$ és $\cos x$-re vonatkozólag az elemekből ismeretesek, ha $p = \pi$.

f) Mutassuk meg, hogy a $0 \ldots 2p$ közben nincs két hely: x és x_1, melyeken $C(x) = C(x_1)$ és egyúttal $S(x) = S(x_1)$ lenne. [Az előbbi tételekből és a differenciálhányados előjeléből ugyanis következtethetjük, hogy $S(x)$ a $0 \ldots \frac{p}{2}$ közben 0-tól 1-ig monoton nő, $\frac{p}{2} \ldots p$ közben 1-től 0-ig monoton fogy, p-től $\frac{3p}{2}$-ig 0-tól -1-ig fogy és $\frac{3p}{2}$-től $2p$-ig -1-től 0-ig nő; folytassuk a $C(x)$-re. Ha pl. x a $0 \ldots 2p$ köz első (harmadik) negyedében volna, akkor $S(x) = S(x_1)$-ből következik, hogy x_1 csak a második (negyedik) negyedben lehet és viszont; de akkor $C(x) \neq C(x_1)$].

g) $x = C(t)$, $y = S(t)$ egyenletek minden valós t-hez valós x és y értékeket rendelnek egyértelműen; ha t-nek a $0 \ldots 2p$ közbe eső összes értékeket tulajdonítjuk, akkor egyszerűen zárt görbét kapunk [azaz a 0 helynek megfelelő (x, y) pont ugyanaz, mint a $2p$-nek megfelelő és előbb nem záródik a görbe, mert akkor t és t_1 a $0 \ldots 2p$ köz két pontja és $C(t_1) = C(t)$, $S(t_1) = S(t)$ volna.] E görbére nézve: $x^2 + y^2 = 1$, tehát e görbe az egységsugarú kör, melynek középpontja a kezdőpont.

h) Az $x = C(t)$, $y = S(t)$ által meghatározott kör negyedrészét kapjuk, ha t a $0 \ldots \frac{p}{2}$ közt futja be (miért?). E körnegyed ívhosszúsága:

$$l = \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{[S'(t)]^2 + [C'(t)]^2}\, dt = \int_0^{\frac{p}{2}} dt = \frac{p}{2}.$$

Ezzel kimutattuk, hogy $2p$ az egységsugarú kör kerülete, vagyis: $p = \pi$.

i) Ha a $\sin x$-et illetőleg $\cos x$-et geometriai értelmezéssel adjuk meg és geometriai úton állapítjuk meg a rájuk vonatkozó addicio tételeket, továbbá feltételezzük a $\sin x$ (és $\cos x$) folytonosságát, akkor tehát azt mondhatjuk, hogy a végtelen sorral értelmezett S és C függvények értékei a $\frac{\pi}{2}$ és a 0 helyeken megegyeznek a $\sin x$, illetőleg $\cos x$ e helyeken való értékeivel, vagyis $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $S(0) = \sin(0)$, $C(0) = \cos(0)$ és minthogy az addicio tételek ugyanazok az S és C-re, mint a sinus és cosinus függvényekre és az egyes negyedekben az előjelek is megegyeznek, következik, hogy $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \cdots \frac{\pi}{2^n}, \cdots$ helyeken $C(x) = \cos x$, $S(x) = \sin x$. Ha már most $0 < \alpha < 1$ a 2-es számrendszerben véges alakban előállítható és $x = \alpha\frac{\pi}{2}$, akkor $C(x) = \cos x$, $S(x) = \sin x$. A szóban forgó függvények folytonosságából következtessük, hogy minden valós x-re nézve: $S(x) = \sin x$, $C(x) = \cos x$.

33. $(1-u)\, e^{u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\cdots+\frac{u^k}{k}}$ megbecsülése, ha $|u| < 1$. Az e^u, $e^{\frac{u^2}{2}} \ldots e^{\frac{u^k}{k}}$ függvények hatványsorokba fejthetők, melyek minden u értéknél konvergensek. Ezek szorzata a Cauchy-féle szorzási szabállyal elkészíthető. Így kapjuk, hogy:

$$(1-u)\, e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}} = \sum_0^\infty \alpha_\nu u^\nu. \qquad A)$$

Azonnal belátjuk, hogy $\alpha_0 = 1$. Ha mindkét oldalon u szerint differenciálunk, és (-1)-gyel szorzunk, erre jutunk:

$$u^k e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}} = -\sum_1^\infty \nu\alpha_\nu u^{\nu-1}$$

és ha $e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}}$-t az előbb említett módon ismét hatványsorba fejtjük, arra jutunk, hogy a baloldalon az u^0, u^1, u^2, ... u^{k-1} együtthatói 0-ok és minden más együttható pozitiv; tehát:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0\,; \quad \alpha_i < 0, \quad \text{ha} \quad i > k.$$

Ha $u = 1$ tesszük az *A)*-ban, akkor a baloldalon 0 lesz, tehát:

$$1 + \sum_1^\infty \alpha_\nu = 0,$$

vagyis az α együtthatók abszolut értékeinek összege α_{k+1}-től kezdve: 1. Ha $|u| < 1$ és $l > k$, akkor $|u|^l < |u|^k$, tehát, ha $|u| < 1$,

$$|1-u| \left| e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}} \right| < 1 + |u^{k+1}|\, |\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots| = 1 + |u|^{k+1}$$

(*Fejér Lipót* szóbeli közlése nyomán).

Ezt az egyenlőtlenséget, mely a transcendens egész függvények elméletében nagyfontosságú, még így is fogalmazzuk:

$$(1-u)\, e^{u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\cdots+\frac{u^k}{k}} = 1 + \varphi_k(u),$$

ahol $|\varphi_k(u)| < |u^{k+1}|$, ha $|u| < 1$.

34. $\log(1+x)$ *hatványsora komplex x esetében.* Legyen $0 < \varrho < 1$. Ekkor a ϱ sugarú körben $\sum_{n=1}^\infty \frac{u^n}{n}$ egyenletesen konvergens. Jelöljük e végtelen sor összegét $f(u)$-val. Ki akarjuk mutatni, hogy:

$$e^{f(u)} = \frac{1}{1-u}$$

vagyis, hogy $f(u)$ az $\frac{1}{1-u}$ egyik logarithmusa.

Legyen adva a tetszésszerinti kis pozitiv ε. Válasszuk a K indexet oly nagyra, hogy, ha $k \geq K$,

$$\frac{\varrho^k}{1-\varrho} < \frac{\varepsilon}{5}$$

legyen; ekkor az előbbi pontban szereplő $\varphi_k(u)$-ról is tudjuk, hogy ha $|u| \leq \varrho$,

$$\left|\frac{\varphi_k(u)}{1-u}\right| < \frac{\varrho^k}{1-\varrho} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Válasszuk a K'-t oly nagyra, hogy:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n} < \frac{\varepsilon}{5}(1-\varrho) \quad \text{és még} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n} < \frac{1}{2}$$

legyen, ha $k \geq K'$. Jelöljük a K és K' közül a nagyobbikat K-val. Ekkor tehát:

$$\left|\frac{\varphi_k(u)}{1-u}\right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{u^n}{n} = \sigma, \quad \text{ahol} \quad |\sigma| < \sum_{k+1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n} < \frac{\varepsilon}{5}|1-u| \quad \text{és} \quad |\sigma| < \frac{1}{2},$$

ha $k > K$. Az $f(u) = \sum_{1}^{\infty} \frac{u^n}{n}$ két részre választassék így: $f(u) = \varphi(u) + \psi(u)$, ahol

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{k} \frac{u^n}{n}; \quad \psi(u) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{u^n}{n} = \sigma.$$

Tudjuk a 33. alattiból, hogy

$$e^{\varphi(u)} = \frac{1}{1-u} + \frac{\varphi_k(u)}{1-u};$$

továbbá:

$$e^{\psi(u)} = 1 + \psi(u) + \frac{[\psi(u)]^2}{2!} + \frac{[\psi(u)]^3}{3!} + \cdots = 1 + \tau$$

és megállapításaink szerint:

$$|\tau| < |\sigma| + |\sigma|^2 + |\sigma|^3 + \cdots = \frac{|\sigma|}{1-|\sigma|} < \frac{2\varepsilon}{5}|1-u|.$$

és
$$|\tau| < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1.$$

Ezeket tekintetbe véve, a következőre jutunk:

$$e^{f(u)} = e^{\varphi(u)} \cdot e^{\psi(u)} = \left(\frac{1}{1-u} + \frac{\varphi_k(u)}{1-u}\right)(1+\tau) = \frac{1}{1-u} + \frac{\tau}{1-u} + \frac{\varphi_k(u)}{1-u} + \frac{\tau\varphi_k(u)}{1-u}.$$

A jobboldalon álló

$$\left|\frac{\tau}{1-u}\right| < \frac{2\varepsilon}{5}, \quad \left|\frac{\varphi_k(u)}{1-u}\right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \left|\frac{\tau\varphi_k(u)}{1-u}\right| < \frac{2\varepsilon}{5}$$

tehát:

$$e^{f(u)} = \frac{1}{1-u} + \eta,$$

ahol $|\eta| < \varepsilon$. Minthogy ε tetszés szerinti kicsiny, tehát:

$$e^{f(u)} = \frac{1}{1-u}.$$

Ha még $u = -x$ tesszük, ebből az egyenletből következik, hogy:

$$e^{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}} = 1 + x$$

vagyis:
$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$
ha $|x|<\varrho$. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $\log(1+x)$ («főértékének»)* hatványsora komplex x esetében is a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, ha $|x|<\varrho$. Minthogy pedig ϱ tetszés szerinti kevéssel kisebb mint 1, tehát e sorfejtés érvényes az egységsugarú kör belsejében minden x helyen.

35. Mutassuk meg, hogy ha $z=\tau+it$ változó a végtelenbe megy oly egyenes mentén, amely nem párhuzamos a reális tengellyel (τ tengellyel), akkor $\frac{1}{i}\operatorname{cotg} z$ határértéke -1, vagy $+1$, a szerint, amint t pozitiv, vagy negativ.

[Ha t pozitiv, $\frac{1}{i}\operatorname{cotg} z$ így írható:
$$\frac{1}{i}\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=\frac{e^{-2t}e^{2i\tau}+1}{e^{-2t}e^{2i\tau}-1}\quad\text{és így}\quad\lim_{t=\infty}\frac{1}{i}\operatorname{cotg} z=-1.$$
Ha pedig t negativ, $\frac{1}{i}\operatorname{cotg} z$ ebben az alakban írható:
$$\frac{1+e^{-2i\tau}\cdot e^{2t}}{1-e^{-2i\tau}\cdot e^{2t}},\quad\text{tehát}\quad\lim_{t=-\infty}\frac{1}{i}\operatorname{cotg} z=1.]$$

36. *A hatványsor analytikai folytatása.* Legyen $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hatványsor konvergencia-köre C és ennek rádiusa: R. Vegyük fel az α pontot a C körön belül. α-ból, mint középpontból rajzoljuk meg a c kört, mely belülről érinti a C kört. c rádiusa tehát: $R-|\alpha|$. E c körön belül, hozzá tetszés szerinti közel vonuló koncentrikus c' körben vegyük fel az x pontot és a c' és c közötti gyűrűben a 0α sugár meghosszabbításán a ξ pontot. A Σa_nx^n hatványsor a ξ helyen abszolut konvergens. Minthogy x a c'-ben van, tehát

* Hogy a $P=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ a $\log(1+x)$ *főértéke*, így mutathatjuk meg: Tegyük $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ahol $-\pi<\varphi\leq\pi$, $0<r<1$; ekkor a P imaginárius komponense: $I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n\sin n\varphi}{n}$ lesz. Csak azt kell megmutatnunk, hogy ez az I a $-\pi\ldots\pi$ közbe esik. Ha $\varphi=0$, akkor $I=0$.

Megmutatjuk először, hogy amidőn fix φ mellett r nő, akkor I nő, ha φ pozitiv és fogy, ha φ negativ. E végből állítsuk elő I-nek r szerinti differenciálhányadosát.
$$\frac{dI}{dr}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^{n-1}\sin n\varphi.$$
Erről azonnal megmutathatjuk, hogy nem más, mint $\frac{1}{1+x}$ imaginárius komponensének $-\frac{1}{r}$-szerese, [l. a 395. lapon a *C)* alatti második egyenlőséget], vagyis: $\frac{\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}$; de e kifejezés nevezője pozitiv minden φ-re, tehát megmutattuk, hogy $\operatorname{sgn}\frac{dI}{dr}=\operatorname{sgn}\varphi$, vagyis valóban az r növekedésével I nő (fogy), ha φ pozitiv (negativ).

De ha $r=1$, akkor I-ből ez lesz: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\varphi}{n}$ és erről a sorról láttuk [404. lapon], hogy összege $\frac{\varphi}{2}$; tehát mindenesetre $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé esik és így, ha $0<r<1$, akkor I a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé eső érték, tehát a $P=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ valóban «főértéke» a $\log(1+x)$-nek.

$|\alpha|+|x-\alpha|<|\xi|$. Az α helyen léteznek az $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$,... számértékek, (az $f(x)$ differenciálhányadosai az α helyen), ahol:

$$f^{(i)}(\alpha)=i!\,a_i+\frac{(i+1)!}{1!}a_{i+1}\alpha+\frac{(i+2)!}{2!}a_{i+2}\alpha^2+\cdots+\frac{(i+r)!}{r!}a_{i+r}\alpha^r+\cdots.$$

Készítsük el ezt a hatványsort:

$$f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2+\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3+\cdots \qquad A)$$

Azt állítjuk, 1) hogy e hatványsor konvergens a c körön belül fekvő minden x helyen és 2) hogy értéke a c körben megegyezik az $f(x)$ értékével.

Legyen x a c' körben és legyen az $A)$ alatti sor első $n+1$ tagjának öszszege $t_n(x)$, vagy röviden t_n és a $\Sigma a_n x^n$ n-ik részletösszege $s_n(x)$, röviden s_n.

$$t_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}(x-\alpha)^i=\sum_{i=0}^{n}\left[a_i+\binom{i+1}{i}a_{i+1}\alpha+\binom{i+2}{i}a_{i+2}\alpha^2+\cdots\right](x-\alpha)^i.$$

A jobboldali kifejezés $n+1$ konvergens végtelen sor összege. Rendezzük $a_0, a_1, a_2, \ldots$ szerint. a_k együtthatója, ha $k\leq n$,

$$A_k=\alpha^k+k\alpha^{k-1}(x-\alpha)+\binom{k}{2}\alpha^{k-2}(x-\alpha)^2+\cdots+\binom{k}{k}(x-\alpha)^k.$$

Ha pedig $k>n$, akkor a_k együtthatója:

$$A_k=\alpha^k+k\alpha^{k-1}(x-\alpha)+\binom{k}{2}\alpha^{k-2}(x-\alpha)^2+\cdots+\binom{k}{n}\alpha^{k-n}(x-\alpha)^n.$$

Így tehát, ha $k\leq n$, akkor: $A_k=[\alpha+(x-\alpha)]^k=x^k$. Ha pedig $k>n$, akkor:

$$|A_k|<(|\alpha|+|x-\alpha|)^k<|\xi|^k.$$

A t_n tehát így írható:

$$t_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}A_ka_k,\quad \text{ahol}\quad |A_k|<|\xi|^k$$

vagyis:

$$t_n=s_n+\varrho \qquad B)$$

ahol

$$|\varrho|<\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\,|\xi|^k.$$

Megállapítható olyan N küszöb, hogy $\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\,|\xi|^k$ kisebb legyen egy tetszésszerint adott pozitiv ε-nál, ha $n>N$. Ez lehetséges, mert $\Sigma a_n\xi^n$ abszolut összetartó. Minthogy pedig s_n-nek van határértéke és pedig $\lim\limits_{n=\infty}s_n=f(x)$, tehát $B)$-ből következik, hogy

$$\lim_{n=\infty}t_n=f(x)$$

és ezzel mindkét állítást bebizonyítottuk, ha x a c'-ben van. Minthogy pedig c' tetszés szerinti közel vonul a konvergencia-kört belülről érintő, α középpontú c körhöz, tehát a tétel igaz c minden belső helyére.

Az $A)$ alatti hatványsor konvergencia-körének rádiusa, miként láttuk, legalább is $r=R-|\alpha|$ és ezen az r sugarú c körön belül az $A)$ sor értéke megegyezik az $f(x)$-szel. Meglehet azonban, hogy az $A)$ hatványsor konvergencia köre a c-vel koncentrikus, r-nél nagyobb sugarú C', vagyis a konvergencia-köre kinyúlik a C-ből, tehát az $A)$ alatti hatványsornak olyan tartományban is van értelme, amelyben a $\Sigma a_n x^n$-nek nem volt. A $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}(x-\alpha)^i$

a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ «analytikai folytatása». Megemlítjük azt is, hogy a C és C' közös tartományában az *A)* alatti sor összege szintén $f(x)$.

37. Állítsuk elő az $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsor analytikai folytatását az α helyre vonatkozólag, ahol $|\alpha| < 1$. Mutassuk meg, hogy az így keletkezett $\frac{1}{1-\alpha}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^n$ sor konvergencia-köre az α középpontú, $|1-\alpha|$ sugarú kör. Rajzoljuk meg az eredeti sor és az analytikai folytatás konvergencia-tartományait!

38. Mutassuk meg, hogy a 36-ik feladatban levő t_n így állítható elő: *

$$t_n = \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n!}\,\frac{d^n}{d\alpha^n}\left[\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}\right].$$

39. Az $\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{x^{n+1}}$ konvergens, ha $|\alpha| < |x|$. Állítsuk elő a Cauchy-féle módon az $f(\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\alpha^n$ és $\frac{1}{x-\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{x^{n+1}}$ szorzatát és mutassuk meg, hogy e szorzat a 36. alatti jelöléssel:

$$\sum_{m=0}^{\infty} s_m \frac{\alpha^m}{x^{m+1}}.$$

40. Állítsuk elő ennek az $\frac{f(\alpha)}{x-\alpha} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} s_m\frac{\alpha^m}{x^{m+1}}$-nek α-szerinti n-ik differenciálhányadosát és mutassuk meg, hogy a 38. alatti

$$t_n = \left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{n+1}\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{m-n} s_m$$

vagy $m-n=\mu$ téve:

$$t_n = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}\binom{n+\mu}{\mu}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\mu} s_{n+\mu}}{\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{-n-1}};$$

$\left|\frac{\alpha}{x}\right|$, mint feltettük, 1-nél kisebb; legyen $\frac{\alpha}{x}$ pozitiv (mi ennek a geometriai jelentése?).

Ha meggondoljuk, hogy $\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{-n-1} = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty}\binom{n+\mu}{\mu}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\mu}$, akkor azt látjuk, hogy t_n-et úgy kaphatjuk meg, hogy a $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ sor $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ részletösszegeit rendre megszorozzuk a

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{n+\mu}{\mu}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\mu}$$

pozitiv tagú sor tagjaival és az összeget a szorzó számok összegével osztjuk (középértéket vettünk). Mutassuk meg t_n ezen kifejezéséből, hogy $\lim\limits_{n=\infty} t_n = s$.**

41. *Valós változós függvény végtelen Taylor-sora.* Legyen $f(x)$ és minden rendű differenciálhányadosa az $a \ldots b$ zárt közben pozitiv ($b > a$). (Az a

* A komplex változó függvényei differenciálás tekintetében ugyanazon alaki törvényeknek hódolnak, mint a valós változó függvényei.

** *Fekete Mihály* szóbeli közlésének köszönöm az analytikai folytatás ezen felfogását. Könnyen megmutatható a t_n e középérték alakjából is, hogy t_n-re vonatkozólag a 36. alatti 1) és 2) állítások érvényesek.

helyen végtelen sok differenciálhányados 0 lehet.)* Ekkor az

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots \qquad A$$

végtelen Taylor-sor konvergens az $a \ldots b$ köz minden belső x helyén és összege: $f(x)$. Az első állítás igen könnyen belátható. Ugyanis $f(x)$ véges Taylor-sora:

$$f(x)=\sum_0^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ahol $a<\xi<x<b$; tehát az *A)* alatti sor első $n+1$ tagjának összege: $S_{n+1}(x)<f(x)$ és ha $f(x)$ maximuma az $a \ldots b$ közben M, akkor tehát $S_n(x)<M$. Ebből már következik az *A)* pozitiv tagú sor konvergenciája.

Ha α az $a \ldots b$ köz tetszésszerinti helye, akkor (l. I. kötet 148. lapján)

$$f(b)=f(\alpha)+f'(\alpha)(b-\alpha)+f''(\alpha)\frac{(b-\alpha)^2}{2}+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(b-\alpha)^{n+1}+H_{n+2},$$

ahol H_{n+2} pozitiv; tehát

$$f^{(n+1)}(\alpha)<\frac{(n+1)!\,f(b)}{(b-\alpha)^{n+1}}. \qquad B$$

Ez az egyenlőtlenség fennáll minden $a\leq\alpha<b$ helyre. Legyen már most $a\leq x\leq b'<b$ és állítsuk elő $f(x)$-et véges Taylor-sorban a Cauchy-féle maradéktaggal [I. kötet 148. lapon $p=1$, $b=x$ téve]

$$f(x)=\sum_0^n{}^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^n\,(x-a)}{n!} \qquad (a<\xi<x).$$

A *B)* alatti egyenlőtlenségben $\alpha=\xi$ téve, azt kapjuk, hogy az itt szereplő Cauchy-féle maradéktag:

$$H_{n+2}<\frac{(n+1)\,f(b)\,(b-a)}{b-\xi}\left(\frac{x-\xi}{b-\xi}\right)^n$$

Minthogy $a<x<b'$ és $a<\xi<x$, tehát $\frac{x-\xi}{b-\xi}<\frac{b'-\xi}{b-\xi}<\frac{b'-a}{b-a}$, akárhol legyen is a ξ az $a \ldots x$ közben és így, ha $\frac{b'-a}{b-a}$-t, mely 1-nél kisebb, m-el jelöljük, akkor

$$H_{n+2}<\frac{f(b)\,(b-a)}{b-b'}(n+1)\,m^n$$

és ebből következik, hogy $\lim_{n=\infty} H_{n+2}=0$ akárhol legyen is az x az $a \ldots b'$ közben. Ezzel kimutattuk, hogy a Cauchy-féle maradéktag limese: 0 minden x-re nézve, mely az $a \ldots b'$ közben van, vagyis az *A)* alatti sor valóban előállítja az $f(x)$-et az $a \ldots b'$ közben. Minthogy pedig b' tetszésszerinti kevéssel tér el a b-től, tehát a tétel az egész $a \ldots b$ nyilt közre érvényes.

Ugyanez áll akkor is, ha $f(x)$ és minden differenciálhányadosa az $a \ldots b$ közben negativ, tehát akkor is, ha $f(x)$ olyan két függvény összege, melyek közül az egyiknek minden differenciálhányadosa az $a \ldots b$ közben pozitiv, a másiké negativ.

Ha az $f(x)$ az $a \ldots b$ közben a $\sum_0^\infty A_n(x-a)^n$ végtelen Taylor-sorban

* Abból, hogy az a helyen végtelen sok differenciálhányados pozitiv, (és egy sem negativ) már következik, hogy az $a \ldots b$ köz belsejében minden differenciálhányados pozitiv.

állítható elő, akkor külön választva a pozitiv és negativ együtthatójú tagokat [ami megtehető, mert a sor a konvergencia intervallumon *belül* abszolut konvergens], erre jutunk:

$$(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

ahol $\psi(x)$ és $\varphi(x)$ és minden differenciálhányadosuk az $a \ldots b$ közben pozitiv [legfölebb az a helyen: 0]. Arra a *Bernstein Serge*-től eredő szép tételre * jutottunk, hogy az $f(x)$ valós változós függvény az $a \ldots b$ közben akkor és csakis akkor állítható elő végtelen Taylor-sorban, ha előállítható két olyan függvény különbsége gyanánt, melyek mindenike összes differenciálhányadosaival együtt az $a \ldots b$ közben pozitiv (az a helyen lehetnek 0-ok is).

Lagrange azt hitte [Oeuvres t. IX. p. 65. t. X. p. 72.), hogy egy valós változós függvény előállítható az $a \ldots b$ köz minden helye környezetében végtelen Taylor-sorban, ha minden rendű differenciálhányadosa véges az $a \ldots b$ közben. *Cauchy* (Leçons sur le calcul infinitésimal (1823.) p. 15. (1826.) p. 105) megmutatta, hogy ez nem igaz. Cauchy példája: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, ha $x \neq 0$ és $f(x) = 0$, ha $x = 0$. E függvény minden differenciálhányadosának értéke az $x=0$ helyen: 0. [Így például $f'(0) = \lim\limits_{h=0} \frac{f(h)-0}{h} = \lim \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}}$. Tegyük $h = \frac{1}{\sqrt{k}}$ és mutassuk meg a L'Hospital szabállyal, hogy $f'(0) = 0$; éppen így $f''(0) = 0$, s. i. t.] Minden más helyen is a differenciálhányadosok végesek. És a függvény még sem fejthető Taylor-sorba minden helyen, mert hiszen, ha 0 helyen fejtenők ki, a sor minden tagja 0 volna, holott $f(x)$ nem 0, ha $x \neq 0$.

VII. Dirichlet-sor. 1. Legyenek $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ pozitiv számok, és $\lim \lambda_n = \infty$. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

végtelen sor: az *általános Dirichlet*-féle sor. Mutassuk meg, hogy ha $\lambda_n = \log n$, akkor ebből a *speciális* $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ Dirichlet-sor lesz és hogy ha $\lambda_n = n$ és $e^{-s} = x$ tesszük, akkor a $\sum_1^\infty a_n x^n$ hatványsor lesz belőle.

2. *A Dirichlet-sor konvergencia-tartománya. Ha* $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ *az* $s = s_0$ *helyen konvergens, akkor konvergens minden olyan* s_1 *helyen is, melynek reális része nagyobb az* s_0 *reális részénél:* $R(s_1) > R(s_0)$. [Ha $s = s_0$ helyen a részletösszegek korlátosak, akkor is konvergens a sor az s_1 helyen.] (Vessük egybe ezt a tételt a hatványsorokra vonatkozó Abel-tétellel (l. 343. lapon) és vezessük le ebből az Abel-tételt.)

Bizonyítás menete: Feltétel szerint $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s_0}$ konvergens, tehát minden n-ik részletösszeg abszolut értéke: $|S_n| < A$, ahol A pozitiv szám; $a_m e^{-\lambda_m s_0} = S_m - S_{m-1}$ téve:

$$\sum_{m=n}^{n+k} a_m e^{-\lambda_m s} = \sum_{m=n}^{n+k} (S_m - S_{m-1})\, e^{-\lambda_m (s-s_0)} = -S_{n-1} e^{-\lambda_n (s-s_0)} +$$

$$+ S_n \left[e^{-\lambda_n (s-s_0)} - e^{-\lambda_{n+1}(s-s_0)}\right] + S_{n+1}\left[e^{-\lambda_{n+1}(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n+2}(s-s_0)}\right] +$$

$$+ \cdots + S_{n+k-1}\left[e^{-\lambda_{n+k-1}(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n+k}(s-s_0)}\right] + S_{n+k} e^{-\lambda_{n+k}(s-s_0)}$$

* *Bernstein Serge.* Fonctions analytiques de variables réelles. Math. Ann. 75. kötet p. 449.

tehát: $\left|\sum_{m=n}^{n+k} a_m e^{-\lambda_m s}\right| < A \sum_{m=n}^{n+k-1} \left| e^{-\lambda_m (s-s_0)} - e^{-\lambda_{m+1}(s-s_0)} \right| +$

$$+ A e^{-\lambda_n R(s-s_0)} + A e^{-\lambda_{n+k} R(s-s_0)}. \qquad \alpha)$$

Az első tagban:

$$e^{-\lambda_m (s-s_0)} - e^{-\lambda_{m+1}(s-s_0)} = (s-s_0) \int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}} e^{-u(s-s_0)} du,$$

tehát:

$$\left| e^{-\lambda_m (s-s_0)} - e^{-\lambda_{m+1}(s-s_0)} \right| \leq |s-s_0| \int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}} e^{-uR(s-s_0)} du$$

és így:

$$\sum_{m=n}^{n+k-1} \left| e^{-\lambda_m (s-s_0)} - e^{-\lambda_{m+1}(s-s_0)} \right| \leq |s-s_0| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+k}} e^{-uR(s-s_0)} du =$$

$$= \frac{|s-s_0|}{R(s-s_0)} \left(e^{-\lambda_n R(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n+k} R(s-s_0)} \right).$$

Mutassuk ki ezen egyenlőtlenség és az *α)* alatti másik két tag figyelembevételével azt a föntebbiekben megfogalmazott állítással egyértékű tételt, hogy ha a $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ az $s=s_0$ helyen konvergens, akkor konvergens abban a félsíkban, mely a valós tengelyre a $R(s_0)$ abcissájú pontban emelt merőleges jobboldalán van.*

3. Mutassuk meg, hogy a $\Sigma \frac{1}{n!} \frac{1}{n^s}$ Dirichlet-sor minden valós s-nél konvergens [D'Alembert kriteriummal!].

4. Mutassuk meg, hogy a $\Sigma \frac{n!}{n^s}$ Dirichlet-sor egy valós értéknél sem konvergens.

5. Ha a $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$-re az előbbi esetek egyike sem áll, vagyis van olyan valós s_0 hely, melyen konvergens és van olyan s_1, melyen divergens e sor, akkor mutassuk meg ugyanolyan gondolatmenettel, mint a 346. lapon a konvergencia-rádius meghatározásánál tettük (szeletalkotással), hogy van egy σ határpont a valós tengelyen, melytől jobbra levő helyeken konvergens, balra levő helyeken pedig divergens a sor. E Dirichlet-sor konvergenciatartománya a σ abscissáju határpontban a valós tengelyre emelt merőleges jobboldalán levő síkrész és az említett merőleges azon pontjai, amelyeken a Dirichlet-sor konvergens. A σ neve: a Dirichlet-sor *konvergencia-abscissája*.

6. Mutassuk meg, hogy ha a $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ Dirichlet-sor az $s=s_0$ helyen *abszolut* konvergens, akkor az s helyen is *abszolut* konvergens, ha $R(s) \geqq R(s_0)$.

7. *A Dirichlet-sor konvergencia-abscissájának meghatározása.* Ha a $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ Dirichlet-sor konvergencia-abscissája, $\sigma > 0$, akkor:

$$\sigma = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{x} a_n \right|}{\lambda_x}$$

Bizonyítás menete: Jelöljük $\sum_{1}^{x} a_n$-et, vagyis az első x számú együttható összegét $A(x)$-szel és legyen $\limsup_{x=\infty} \frac{\log|A(x)|}{\lambda_x} = L$. (Megjegyezzük, hogy L nem lehet negativ; mert ha $L=-\alpha$ volna, ahol α pozitiv, akkor bizonyos x-től kezdve mindig $\frac{\log|A(x)|}{\lambda_x} < -\alpha'$ volna, ahol $0<\alpha'<\alpha$ és így $\left|\sum_{n=1}^{x} a_n\right| < e^{-\alpha' \lambda_x}$ miből, tekintve, hogy λ_x korlátlanul nő, következik, hogy $\lim_{x=\infty} \sum_{1}^{x} a_n = 0$ vagyis a

* *Jensen* tétele. Tidsskrift for Mathematik, Serie 5. Bd. 2. L. *Landau* Handbuch über die Verteilung der Primzahlen. II. p. 726.

a szóban forgó Dirichlet-sor $s=0$ helyen konvergens; ez pedig ellenkezik azzal a föltevéssel, hogy $\sigma>0$.)

Legyen δ adott pozitiv szám; akkor a limes superior fogalmából [felső származékhely] következik, hogy egy ξ küszöbszámon túl minden x-re:

$$\frac{\log|A(x)|}{\lambda_x} < L + \frac{\delta}{2}, \quad \text{vagyis:} \quad |A(x)| < e^{\lambda_x\left(L+\frac{\delta}{2}\right)}.$$

A

$$\sum_{n=v}^{w} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=v}^{w} [A(n) - A(n-1)]\, e^{-\lambda_n s} =$$

$$= -A(v-1)\, e^{-\lambda_v s} + \sum_{n=v}^{w-1} A(n)\left[e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}\right] + A(w)\, e^{-\lambda_w s}$$

egyenlőségben $|A(x)|$-re nézve a föntebbi egyenlőtlenséget vegyük tekintetbe. Arra jutunk, hogy ha $w>v>\xi+1$ és $s=L+\delta$:

$$\left|\sum_{n=v}^{w} a_n e^{-\lambda_n s}\right| < \sum_{n=v}^{w-1} e^{\lambda_n\left(L+\frac{\delta}{2}\right)}\left[e^{-\lambda_n(L+\delta)} - e^{-\lambda_{n+1}(L+\delta)}\right] +$$

$$+ e^{\lambda_w\left(L+\frac{\delta}{2}\right)} e^{-\lambda_w(L+\delta)} + e^{\lambda_v\left(L+\frac{\delta}{2}\right)} e^{-\lambda_v(L+\delta)} \qquad \alpha)$$

Az $e^{-\lambda_n(L+\delta)} - e^{-\lambda_{n+1}(L+\delta)}$ különbséget ebben az integrálalakban írjuk:

$$(L+\delta)\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u(L+\delta)}\,du$$

és így az $\alpha)$ alatti jobboldalán álló összeg így írható:

$$(L+\delta)\sum_{n=v}^{w-1} e^{\lambda_n\left(L+\frac{\delta}{2}\right)}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u(L+\delta)}\,du$$

vagy, minthogy $\lambda_n \leq u \leq \lambda_{n+1}$, tehát ez kisebb, mint:

$$(L+\delta)\int_{\lambda_v}^{\lambda_w} e^{u\left(L+\frac{\delta}{2}\right)} e^{-u(L+\delta)}\,du = (L+\delta)\int_{\lambda_v}^{\lambda_w} e^{-u\frac{\delta}{2}}\,du.$$

Ha v végtelen naggyá lesz, akkor ez zérussá válik. [Pontosabban: minden δ-hoz meghatározható olyan V küszöb, melyen túl levő v és $w>v$ indexekre ez az integrál a tetszésszerinti kis ε-nál kisebbé lesz.] Az $\alpha)$ alatti jobboldalán tehát az első tag 0-sá válik, ha v végtelenné lesz. A második és harmadik tagról ez igen könnyen kimutatható. Ezzel ki van mutatva, hogy ha $s=L+\delta$, akkor a szóban forgó Dirichlet-sor konvergens; vagyis, hogy a σ konvergenciaabscissa nem lehet nagyobb L-nél. Most meg kell mutatnunk, hogy L sem lehet nagyobb σ-nál. Tegyük fel, hogy a Dirichlet-sor t valós helyen konvergens. (Ez a t mindenesetre pozitiv, mert $t>\sigma$ és σ feltételünk szerint pozitiv.) Jelöljük a $\sum_{n=1}^{x} a_n e^{-\lambda_n t}$ részletösszeget $B(x)$-szel. [$B(0)=0$ téve.] Nyilván $B(x)$ korlátos, mondjuk: $|B(x)|<B$ minden x-re. Minthogy

$$a_n = a_n e^{-\lambda_n t}\cdot e^{\lambda_n t},$$

tehát:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{x} a_n = \sum_{n=1}^{x} a_n e^{-\lambda_n t} e^{\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{x} [B(n) - B(n-1)]\, e^{\lambda_n t} =$$

$$= \sum_{1}^{x-1} B(n)\left[e^{\lambda_n t} - e^{\lambda_{n+1} t}\right] + B(x)\, e^{\lambda_x t},$$

miből t pozitiv voltára való tekintettel:

$$|A(x)| < B\left(e^{\lambda_x t} - e^{\lambda_1 t}\right) + Be^{\lambda_x t} < 2B\, e^{\lambda_x t}$$

tehát:

$$\frac{\log|A(x)|}{\lambda_x} < \frac{\log 2B}{\lambda_x} + l$$

és így, ha x elég nagy, (minthogy $\lim \lambda_x = \infty$), $\left|\frac{\log 2B}{\lambda_x}\right|$ tetszésszerinti kicsiny, tehát $L \leq l$, vagyis konvergencia-hely az L-től balra nincsen és így L nem lehet nagyobb σ-nál. Ezzel ki van mutatva, hogy $L = \sigma$. Megmutattuk tehát, hogy a $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ Dirichlet-sor pozitiv konvergencia-abscissája:

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\log|\sum_1^x a_n|}{\lambda_x}.$$

Ha a Dirichlet-sor az egyszerűbb: $\Sigma \frac{a_n}{n^s}$, vagyis $\lambda_x = \log x$, akkor a pozitivnak feltételezett konvergencia-abscissa:

$$\sigma = \limsup_{x=\infty} \frac{\log|\sum_1^x a_n|}{\log x}.$$

8. Tegyük fel, hogy $\Sigma a_n z^n$ hatványsor konvergencia-köre 1-nél kisebb sugarú. Tegyük $z = e^{-s}$; mutassuk meg, hogy ha $|z| < 1$, akkor $s = \tau + it$ valós része pozitiv. Az adott hatványsor Dirichlet-sor alakjában írva: $\Sigma a_n e^{-ns}$; tehát $\lambda_n = n$. Mekkora a konvergencia abscissája?

9. Mutassuk meg, hogy a 8. alatti esetben $\Sigma a_n z^n$ konvergencia-köre ugyanaz, mint $\frac{1}{1-z} \Sigma a_n z^n$ konvergencia-köre, vagyis ugyanaz, mint a $\Sigma(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)z^n$ hatványsoré. Ez utóbbinak konvergencia rádiusa:

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n=\infty} \left|\sqrt[n+1]{\sum_{k=0}^{n} a_k}\right|}, \text{ vagy: } \frac{1}{\limsup\limits_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{\sum_{1}^{n} a_k}\right|}.$$

Mutassuk meg, hogy a megfelelő Dirichlet-sor konvergencia-abscissájának meghatározásával ugyanerre az eredményre jutunk.

IRODALOM.

A végtelen sorok tanulmányozására első sorban ismét azokat a kézikönyveket ajánlom, amelyeket eddig is majdnem minden helyen ajánlottam: Kőnig Analízisét, Picard (I. kötet, különösen érdekes a trigonometriai sorokra vonatkozó rész), Goursat, Jordan (I. kötet), Ch. J. de la Vallée Poussin kitűnő kézikönyveit, melyek pontosabb címeit már több helyen közöltem (l. pl. 247. lapon). Ezeken kívül különösen még a következőket ajánlom.

1. *Cesàro-Kowalewsky:* Lehrbuch der algebraischen Analysis, Leipzig 1904, mint amelyben a numerikus sorokra vonatkozó igen érdekes részletek vannak.
2. *E. W. Hobson:* The Theory of Functions of a real variable and the Theory of Fourier-series. Cambridge 1908. (úgy a numerikus sorok, mint a függvénysorok pontos tárgyalása p. 455.).
3. *Hardy:* Pure mathematics, Cambridge 1908.
4. *Ulisse Dini:* Lezioni di analisi infinitesimale Pisa 1909. (Különösen a függvénysorok integrálására vonatkozó tárgyalásáért II. k. p. 144.)
5. *E. Borel:* Leçons sur les séries à termes positifs. Paris 1902.
6. *E. Borel:* Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

7. *Bromwich:* An introduction of the theory of infinite series. London. Macmillan 1908. (Igen gazdag tartalmú, érdekes munka.)
8. *Tannery:* Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1904.
9. *M. Godefroy:* Théorie élémentaire des séries. Paris 1903.
10. *Niels Nielsen:* Lehrbuch der unendlichen Reihen. Leipzig 1909.
11. *C. Runge:* Theorie u. Praxis der Reihen. Sammlung Schubert XXXII. Leipzig 1904.

A Fourier-sorokra vonatkozólag forrásmunkákul a szövegben említetteken kívül ajánlom a következőket:

12. *Fourier:* Théorie analytique de la chaleur. Oeuvres. Paris 1888. I. kötet.
13. *Dirichlet:* Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- u. Cosinusreihen. (Repertorium der Physik von. H. W. Dove u. L. Moser I. p. 152. 1837. L. még Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften 116-ik füzetét.)
14. *Poincaré:* Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Paris. Carré. 1895. p. 55.
15. *Riemann-Hattendorf:* Partielle Differentialgleichungen. Braunschweig 1882.
16. *H. Lebesgue:* Leçons sur les séries trigonometriques. Paris 1906.
17. *H. S. Carslaw:* Introduction to the Theory of Fourier-series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat. London 1906.
18. Az egész irodalmat 1908-ig felölelő összefüggő történeti áttekintést találunk *H. Burkhardt* nagy munkájában: Entwickelungen nach oscillirenden Functionen. Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig 1901-től 1909-ig.
19. A *Dirichlet*-sorokra vonatkozó alapvető munka: *Landau:* Handbuch der Lehre von der Vertheilung der Primzahlen. 2 kötet. Leipzig 1909., valamint
20. *Hardy és Riesz M.:* The general theory of Dirichlet Series. A Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics sorozatban. Cambridge 1915.

TÁRGY- ÉS NÉVMUTATÓ.

TARTALOM.

I. FEJEZET.

Többváltozós függvények.

II. FEJEZET.

Többváltozós függvény differenciálhányadosai. Implicit függvény.

III. FEJEZET.

Többváltozós függvény Taylor sora. Maximum, minimum.

IV. FEJEZET.

A quadratikus alak vizsgálata.

V. FEJEZET.

Feltételes szélső érték.

Feladatok és gyakorlatok az I—V. fejezethez.

VI. FEJEZET.

A kettős integrál.

VII. FEJEZET.

A kettős integrál átalakítása.

VIII. FEJEZET.

A kettős integrál értelmezésének kiterjesztése.

IX. FEJEZET.

A hármas és a háromszoros integrál.

Feladatok és gyakorlatok a VI—IX. fejezetekhez.

X. FEJEZET.

A végtelen sorok.

Numerikus sorok összetartása, széttartása.

XI. FEJEZET.

Pozitiv tagú sorok.

XII. FEJEZET.

Végtelen sorokkal való műveletek.

XIII. FEJEZET.

Végtelen függvénysor összetartása.

XIV. FEJEZET.

A hatványsor.

XV. FEJEZET.

Néhány elemi függvény sorfejtése.

XVI. FEJEZET.

Az elemi függvények értelmezése komplex változóra.

XVII. FEJEZET.

A Fourier-sor elméletének elemei.

Pótlások, feladatok és gyakorlatok a X—XVII. fejezetekhez.

HIBÁK ÉS SAJTÓHIBÁK.

I. kötet.

39. lap 9. sor. melyek után teendő: «számításunk folyamán».
50. l. 10. sor. $[f(x)-A][f(x)-B]$ helyett $[f(x)-A][\varphi(x)-B]$.
68. l. alulról 6. sor. (c) helyett $f(c)$ való.
93. l. 3. sor. [l. később a Bernoulli függvényt] kihagyandó.
103. l. 12. sor. a_n helyett a_{n-1} teendő.
106. l. 11. sor. $|\Delta x| < \sigma$ helyett $|\Delta x| < \delta'$.
122. l. jegyzetére nézve l. Kőnig D. ismertetését. M. Ph. L. 190. p. 383.
127. l. alulról 5. sor. $u^{(n)}v$ helyett $u^{(n)}v'$ teendő.
133. l. 11. példában $-4y$ helyett -2 teendő.
148. l. 7. sorban k helyett p teendő.
186. l. 3. sorban és $u_0=0$ kihagyandó.
196. l. 16. sorban $x<1$ helyett $0<x<1$.
206. l. 8. sor. $x-a_2$ helyett $(x-a_2)^2$.
209. l. 1. sor. $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_2)$ helyett $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2m})$.
212. l. alulról 1., 2., 4. sorokban h helyett h_3 teendő.
247. l. alulról 11. sor. $x=a$ helyen; helyesen $x=\infty$ helyen.
267. l. 2. sor. $s_2 \leq s_1$ helyett $s_2 \geq s_1$ teendő.
269. l. alulról 21. sor. felső határa helyett alsó határa.
292. l. 13. sor függvénye van után (ha egy van) teendő.
310. l. alulról 8. sor. $\varphi(x)$ volt helyett $\varphi(x)$, illetőleg $\psi_1(x)$ volt, teendő.
326. l. felülről 15. és 16. sorban $ax^{-n}+b$ helyett $(ax^{-n}+b)^p$ teendő.
343. l. 15. sor. $dz=$ helyett $dx=$ teendő.
352. l. alulról 2. és 9. sorokban t_1-a helyett $t_1-\alpha$ teendő.
355. l. alulról 2. sor. $\alpha=\beta=0$ helyett $\alpha=\beta=1$ teendő.
360. l. alulról 7. sor. $m-n$ helyett $2(m-n)$ teendő.
362. l. alulról 10. sor. $\sin^2 y$ helyett $\cos^2 y$ teendő.
367. l. 3. sor. $s_1=u_0$ helyett $s_0=u_0$.
372. l. 5. sor. $n+1$-edfokú helyett n-edfokú teendő, alulról 8. sor $f'(x)$ helyett $f(x)$ teendő.
448. lapon alulról 10. és 16. sorban $\psi(bx)$ helyett $\varphi(bx)$ irandó.
451. lapon alulról 5. sorban eredmény után teendő: ha $a<\pi$ (mert különben $\dfrac{x}{\sin x}$ nem volna korlátos).
452. lap 1. sor végén ismét ha $a<\pi$ teendő. 9. sorban végén és $<\pi$ és a 12. sorban pozitiv után $(b<\pi)$ teendő.
457. l. 2. sor. $a_{1s}-a_2$ helyett a_1-a_{2s} teendő.
458. l. 18. sorban c helyett g teendő.
522. l. 12. sor. $\varrho^m \sin m\varphi = r\cos\alpha$ helyett $\varrho^m \sin m\varphi = r\sin\alpha$.

II. kötet.

12. l. felül 3. sor (xy)-nal után «a P pontba» teendő.
12. l. alulról 9. sor: $(x, y)=$ helyesen: $f(x, y)=$.
16. l. 6. sorban «mint az» után «ezekhez tartozó (ugyanolyan felső indexű)» teendő.
20. l. felülről 10. sor: $|h_n| < \delta$, helyesen: $|h_m| < \delta$.
21. l. alulról 6. sor: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)-C$, helyesen: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-C$.
21. l. utolsó sor: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=C$, helyesen: $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=C$.
23. l. alulról 3. sor: (a, b), $(a+h, b)$, $(a, b+k)$ helyett $(a-h, b-k)$, $(a+h, b-k)$, $(a-h, b+k)$ teendő.
28. l. alulról 4. sor: (x, y)-nak helyesen: $f(x, y)$-nak.

38. l. alulról 17. sor: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z)$ helyesen: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z)$.

44. l. utolsó sor: helyesen: $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$.

59. l. felülről 2. sor: helyesen: $\Phi\left(\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}, \ldots \frac{u_{n+1}}{u_1}\right) = 0$.

72. l. felülről 9. és 11. sor: (x, y) helyesen: $f(x, y)$.

74. l. felülről 13. és 14. sor: $k=l\alpha$ helyesen: $k=l\beta$.

100. l. felülről 12. sorban $a_{22}\, y^{2-1}$ helyett $a_{22}\, y^2-1$ teendő.

143. l. utolsó sor: 5. ábrában helyesen: 6. ábrában.

144. l. alulról 8. sor: 11. ábrában helyesen: 6. ábrában.

186. l. felülről 12. sor: $\int_{T_1}^{T_2} T(t)\, dt$ helyesen: $\int_{T_1}^{T_2} F(t)\, dt$.

246. l. felülről 13. sor: 1902 helyett II. kiadás 1910. teendő.

274. l. alulról 13. sor: pozitivok helyett nem negativek teendő.

275. l. felülről 14. sor és 284. l. alulról 13. sorban e^c helyett e.

310. l. alulról 10. sor: címben nem abszolut konvergens teendő.

384. l. ** alatt 2. sorban $y+2t\pi$ helyett $y+2l\pi$ teendő.

396. l. utolsó sor közé szó után esnek teendő.

397. l. 2. sor $-\pi \ldots \pi$ helyett $-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$ való.

421. l. alulról 7. sor $\sum_k u'_n(x)$ helyett $\sum_k^l u'_n(x)$ teendő.

436. l. 4. sor (x) helyett $f(x)$, 10. sorban (b) helyett $f(b)$ és a 13. sorban $^{(n+1)}(\alpha)$ helyett $f^{(n+1)}(\alpha)$ teendő és a 11. és 12. sorokban H_{n+2} helyett K_{n+2} teendő.

440. l. alulról 4. sor Lesioni helyett Lezioni.

UTÓSZÓ.

Hivatalos elfoglaltságom és közbejött egyéb körülmények akadályoztak meg abban, hogy e második kötetet az előszóban emlitett időben megjelentessem.

A könyv megszabott terjedelme miatt az eredeti terv szerint kiszemelt anyag egy részét el kellett hagynom. Ez az oka annak, hogy az első kötetben említett halmazelméleti függelék (p. 511.), a komplex változók függvényeinek tervbe vett rendszeres tárgyalása (p. V.) és más, tervezett részletek elmaradtak. Midőn ezt sajnálattal jelentem, egyúttal annak a reményemnek adok kifejezést, hogy a felölelt anyag kimerítő, a tudomány mai állásának megfelelő tárgyalásával és a sokoldalú gyakorlattal a mathematika egyéb ágai iránti érdeklődést is sikerült felkeltenem és a további tanulmányokhoz a kellő alapot megrakhattam.

Kedves kötelességet teljesítek, midőn meleg köszönetet mondok *dr. Fekete Mihály* egyetemi magántanár úrnak, aki kezdettől fogva egészen a nyomtatásig minden korrekturát a leggondosabban átnézett, továbbá *dr. Szűcs Adolf* műegyetemi magántanár úrnak, aki két-három korrekturát nagy gonddal javított. Jó tanácsaikkal a munka értékét bizonnyal igen nagy mértékben emelték. Köszönetet mondok még *Magyar Márta* bölcsészethallgatónak, aki az utolsó korrekturát gondosan átvizsgálta és a tárgymutató készítésénél segítségemre volt.

Végül köszönöm a Franklin-Társulatnak, hogy a mai súlyos viszonyok között fáradságot és áldozatot nem kímélve állította ki ezt a második kötetet.