DIFFERENCIÁL-

ÉS

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

A M. KIR. VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSI MINISZTÉRIUM

MEGBIZÁSÁBÓL

IRTA

Dr BEKE MANÓ

ELSŐ KÖTET

BUDAPEST
FRANKLIN-TÁRSULAT
MAGYAR IROD. INTÉZET ÉS KÖNYVNYOMDA
1910

ELŐSZÓ.

Midőn e kézikönyv megírására a megtisztelő megbízást kaptam, tudtam, hogy igen nagy munkára vállalkozom. Arra nem is gondoltam, hogy olyan könyvet írjak, mely csakis a vizsgálati követelményeket tartja szem előtt. Tudományos kézikönyvről egészen más fogalmat alkottam magamnak. Az igazi tudományos kézikönyveinkkel úgy vagyunk, mint az utazásainkkal. Aki csak bizonyos meghatározott praktikus célból utazik, annak az utazás ritkán szerez gyönyörűséget. Aki magát az utazást is szereti, aki a természet szépségeit és változatosságát élvezni tudja, az idegen világ és új emberek iránt melegen érdeklődik, aki a hasznosat a széppel összekötni akarja és tudja: annak nem teher, hanem élvezet az utazás. De csakis akkor, ha egy-egy vidéknek nemcsak a főútjait, hanem a gyalogösvényeit, csapásait, hegyormait, városait és falvait egyaránt többször bejárja. Hányszor lepődünk meg egy-egy kedves vidékünket járva azon, hogy új meg új, eleddig észre sem vett gyönyörű részleteket, pompás harmoniát látunk. Egy-egy új világítás, lelkünk új hangulata, társunk egy-egy felvilágosító szava, vagy kisérőnk elragadtatása, külső és belső okok egészen új, eddig soha nem tapasztalt, vagy csak félig érzett nagy érzéseket keltenek bennünk. Így vagyunk igazi kézikönyveinkkel is. Egész életünk tudományos pályáján kisérő társaink, hű barátaink. Bennük évek, sőt évtizedek mulva is fedezünk fel új részleteket. A régiek, mint a megszokott tájak, barátságosan integetnek és ha elmélyedünk bennük, ha lelkünk frisseségével új részletekre bukkanunk, sokszor egészen új világításba kerül a régi is, tudásunk harmonikusabbá, összefoglalóbbá, egységesebbé és így mélyebbé és erősebbé válik. Igaz, hogy igen kevés ilyen kézikönyvünk van, kevés ilyen öreg barátunk kísér bennünket tudományos pályánkon. De mindegyikünknek vannak ilyen hű társai. Az ilyeneknek azután a hibáit is szívesen elnézzük, sőt jól esik ezek fölött vitába ereszkednünk velük. Így képzeltem mindig a tudományos kézikönyv szerepét. Hosszú időn át jó vezető, kísérő, segítőtárs, útmutató és azután kitartó, hű barát legyen. Ez volt a programmom.

E programmnak megfelelően külsőleg is kifejezésre akartam juttatni, hogy e könyvet nemcsak egyszeri átolvasásra szánom. Ami első olvasásra való, azt rendszerint nagyobb betűvel szedettem, a későbbre hagyandó részek kisebb betűsek, vagy ha nagyobb betűvel vannak is némely helyen szedve, szögletes zárójelbe tétettek. Megjegyzem azonban, hogy az ilyen módon megjelölt szakaszokban sokszor fordúl elő olyan dolog is, amelyre az első olvasásra szánt szövegben hivatkozás történik. Azért említem ezt, nehogy következetlenséggel vádoltassam. Úgy vélem ugyanis, hogy némelykor megengedhetjük magunknak azt is, hogy az olvasót egyes fogalmakkal és tényekkel megismertessük, bár a mathematikai tények pontos tárgyalását, az állítások pontos bizonyítását későbbre hagyjuk. Igen sok értékes, különösen a legújabb vizsgálatok körébe vágó dolgot nem a szövegbe, hanem az egyes fejezetekhez «feladatok és gyakorlatok» címen csatolt részbe illesztettem. Ezáltal ez a rész igen változatossá vált, melyben azonban szintén nagyobbára megjelöltem azokat a feladatokat és gyakorlatokat, amelyekkel csak később foglalkozzék az olvasó. Ebben tehát vannak egyrészt olyan könnyebb feladatok, melyek arra szolgálnak, hogy a kezdő jól megismerhesse ezt az új nyelvet, amelynek alapos ismerete és amelyben való készség nélkül a felsőbb mathézis telve van tövisekkel, vannak másrészt nehezebb feladatok, melyek arra szolgálnak, hogy az olvasó némi önállóságra tegyen szert e mathematikai nyelv kezelésében. Ezeknél rendszerint megjelöltem a megoldás módját. Vannak azután e részben még olyan majdnem teljesen kidolgozott gyakorlatok is, melyek a főszöveg kiegészítéseül szolgálnak. Ezért a feladatok és gyakorlatok gondos átszámítását és áttanulmányozását nagyon melegen ajánlom.

Az előbb jelzett programmnak megfelelően a könyv egész tárgyalásmódja is némileg eltér a szokásos könyvekétől. Inkább előadásszerű, semmint pragmatikus könyv. Úgy mint az előadásban szokás, e könyvben is első és főtörekvésem volt, hogy az olvasó a tárgyalandó problémával teljesen tisztában legyen, a problémának a régiekből való felmerülését megismerje, a megoldás módja iránt lehetőleg az ismert egyszerűbb esetek, vagy analóg feladatok alapján előre tájékozódjék, sőt az eredményt is, ha nem is egész pontosan, de nagyjában előre lássa. Sokszor megtettem e pedagógiai elvnek megfelelően, hogy a tételt először szemléletesen, vagy egyszerűbb esetében, vagy több feltétel mellett mutattam be és csak azután szabadítottam fel a szemlélettől, azután mutattam be általánosságban, később kevesbítettem meg a feltételeket. Mindezt azért tettem, hogy az olvasóval éreztessem a szigorú bizonyítás szükségét, vele együtt állapítsam meg a feladat megoldásához szükséges feltételeket. Csakis úgy érhető el, hogy az olvasó a finomabb analizisekbe is elmélyedjen, ha azok szükségességét érzi. Legfőbb törekvésem volt, hogy ilyen módon mindenütt a mathematikai gondolatot, az egész gondolatmenetet, és esetleg a mathematikai gondolat lehetséges keletkezését feltüntessem. Csakis így véltem biztosítani azt, hogy az olvasó tudása összefüggő, egységes, harmonikus legyen és egyúttal az önálló mathematikai gondolkozás útja is egyengettessék. Alig szükséges megemlítenem, hogy mint volt középiskolai tanár, egyetlen alkalmat sem mulasztottam el — még ha itt-ott a szigorú rendszeresség rovására volt is — hogy a felsőbb mathematikának a középiskolai tanításanyaggal való kapcsolatára ne utaljak.

Mennyire tudtam megvalósítani programmomat, annak megítélését a szíves olvasóra kell bíznom. Fogyatékosságai bizonnyal vannak e munkának; de azt tudom, hogy egyet minden elfogulatlan olvasóm meg fog benne érezni, azt, hogy szeretettel írtam. A tárgy, a tanítás iránti szeretettel, hallgatóim és a mathematikával foglalkozó olvasóim iránti kötelességből.

Megjegyzem még, hogy a második kötet, mely a többváltozós függvényeket, a végtelen sorokat és a függvénytant tartalmazza már sajtó alatt van és remélhetőleg az 1911-ik év folyamán megjelenik.

Végül kedves kötelességet teljesitek, midőn hálás köszönetet mondok dr. SZŰCS ADOLF tanár úrnak, aki minden ívet három korrekturában olvasott át és az összes rajzokat készítette, dr. FEKETE MIHÁLY tanárjelölt úrnak, aki két korrekturát és dr. SZABÓ PÉTER tanárképző int. gyakorló főgimnáziumi tanár úrnak, aki a második korrekturát olvasta. Ezek az igen tisztelt barátaim, mondhatnám kedves munkatársaim, szíves tanácsaikkal nagy segítségemre voltak. Ha könyvem a mathematika iránti érdeklődés terjesztésében szolgálatot tesz, ebben nagy részük lesz nekik is. Hálás köszönetet mondok a nagyméltóságú Vallás- és Közoktatásügyi Miniszteriumnak, mely e munka megírását lehetővé tette és a Franklin-Társulatnak, mely ilyen tetszetős alakban adta ki.

Dr. Beke Manó.

I.

VALÓS SZÁM. EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY DIFFERENCIÁLHÁNYADOSA, INTEGRÁLJA. KOMPLEX SZÁM.

I. FEJEZET.

AZ IRRACIONÁLIS SZÁM. SZABÁLYOS SOROZAT.

1. Bevezető feladat kitűzése. Az egész számokat és a törtszámokat adottaknak tekintjük. Ezek összessége a racionális számok *halmazát* alkotja. E halmaznak két fontos tulajdonságát említjük meg. Az első e halmaz *rendezettsége*. Ezen azt értjük, hogy ha a racionális számok halmazának bármely két *elemét* [bármely két racionális számot] tekintjük, α-t és β-t, e két szám vagy egyenlő, vagy pedig egyik nagyobb a másiknál, azaz, e két szám között az

$$\alpha=\beta,\quad \alpha>\beta,\quad \alpha<\beta$$

vonatkozások egyike áll fenn. A második tulajdonság pedig a halmaz *sűrű* volta. Ezen pedig azt értjük, hogy bármely két különböző szám közé a halmaznak valamelyik száma iktatható, azaz, ha

$$\alpha>\beta,$$

akkor mondhatunk olyan γ racionális számot, mely e kettő között van, vagyis melyre nézve:

$$\alpha>\gamma>\beta.$$

[Így pl.: α és β között van $\frac{\alpha+\beta}{2}$].

Nem minden számhalmaz mondható sűrűnek. Így például ha csak az egész számokra gondolunk, akkor ezek összessége az egész számok halmazát alkotja. Ez a halmaz rendezett, de nem sűrű, mert hiszen pl.: n és $n+1$ közé nem iktatható e halmaz valamely száma.

Azt mondottuk, hogy α és β közé iktatható γ rac. szám. De α és γ közé is iktatható γ_1 rac. szám, α és γ_1 közé megint γ_2 s í. t., tehát voltaképpen úgy is mondhattuk volna, hogy az α és β rac. számok közé végtelen sok rac. szám iktatható.

A mathematika nem érheti be a racionális számokkal, mert a legegyszerűbb feladatok megoldását sem végezhetnők el, ha más számok nem állnának rendelkezésünkre. Így például, ha D pozitiv egész szám nem teljes négyzet [nem négyzete egy egész számnak], akkor ezt a feladatot:

$$x^2 = D,$$

mely az algebra elemeiben szerepel és mely azt követeli, hogy határozzunk meg olyan számot, melynek négyzete: D, megoldhatatlannak kellene mondanunk, ha csakis a racionális számokkal rendelkeznénk. Mert olyan racionális szám, melynek négyzete D, nem létezik. Ezen állításunk igazolására előrebocsátjuk a következő kis algebrai megjegyzést.

Ha t és u, valamint t_1 és u_1 tetszés szerinti számok [határozatlanok] akkor, miként egyszerű számítással meggyőződhetünk róla:

$$(t^2 - Du^2)(t_1^2 - Du_1^2) = (tt_1 - Duu_1)^2 - D(tu_1 - t_1u)^2.$$

Az $x^2 = D$ egyenletnek egész számú megoldása nincsen, mert hiszen D-ről azt mondtuk, hogy nem teljes négyzet; tehát ha volna törtszám megoldása, akkor ez csak olyan lehetne, melynek nevezője 1-nél nagyobb. Az összes, lehetséges törtszám-megoldások közül szemeljünk ki olyant, melynek nevezője a legkisebb. Legyen ilyen megoldás: $\frac{p}{q}$. E szerint tehát egyrészt

$$\frac{p^2}{q^2} = D,$$

azaz:

$$p^2 - Dq^2 = 0$$

volna, másrészt pedig olyan törtszámmegoldás, melynek nevezője q-nál kisebb, feltevésünk szerint nem lehet.

A $\frac{p}{q}$ okvetlenül áltört volna, mert $D > 1$. Osszuk el p-t q-val. A hányados egész része legyen p_1, a maradék: r; azaz:

$$\frac{p}{q} = p_1 + \frac{r}{q},$$

ahol $r < q$. Innen:

$$p - qp_1 = r.$$

Tegyük már most a fölirt identitásba, melyben a t, u, t_1 és u_1 betűk egészen tetszőlegesek:

$$t = p, \quad u = q, \quad t_1 = p_1, \quad u_1 = 1,$$

akkor a következőre jutunk:

$$(p^2 - Dq^2)(p_1^2 - D) = (pp_1 - Dq)^2 - D(p - qp_1)^2.$$

De a baloldal 0, mert $p^2 - Dq^2 = 0$. A jobboldalon $p - qp_1 = r$, tehát

$$\left(\frac{pp_1 - Dq}{r}\right)^2 = D.$$

Ha tehát igaz volna, hogy $\frac{p^2}{q^2}=D$, akkor igaz volna az is, hogy az $x^2=D$ egyenletnek van olyan törtszámú megoldása is, melynek nevezője $r<q$. De ez képtelenség, mivel feltevésünk szerint q-nál kisebb nevezőjű tört nem elégítheti ki az egyenletet. Eszerint tehát kimondhatjuk, hogy nincs olyan racionális szám, melynek négyzete D volna, vagyis az $x^2=D$ egyenletnek racionális megoldása nincsen. Ha tehát azt akarjuk, hogy az $x^2=D$ egyenletnek is legyen megoldása, ezt a megoldást a rac. számok által értelmeznünk kell.

2. Szeletalkotás a racionális számok halmazában. Az adott D segítségével az összes pozitiv racionális számokat két osztályba sorolhatjuk. Az A osztályba sorozzuk azokat a racionális számokat, melyek négyzetei D-nél kisebbek, a B osztályba pedig azokat, amelyek négyzetei D-nél nagyobbak. Ezen osztályozásnál egyetlen rac. szám sem maradhat ki, mert olyan rac. szám, amelynek négyzete éppen D volna, nem létezik. A B osztályba sorozott rac. számok mindannyian nagyobbak az A-ba sorozottaknál, vagyis a B számok bármelyike nagyobb az A osztály számainál.

Megjegyezzük még, hogy az A-ban nincs legnagyobb és a B-ben nincs legkisebb szám. Ezt az állításunkat a következőképpen bizonyíthatjuk be. Ha α egy, az A-ba tartozó rac. szám, vagyis $\alpha^2<D$, akkor meghatározhatunk oly 1-nél kisebb u pozitiv rac. számot, hogy az $\alpha+u$ is az A-ba tartozzék. Ugyanis ehhez csak az kell, hogy

$$(\alpha+u)^2<D$$

legyen; vagyis $$2\alpha u+u^2<D-\alpha^2$$

legyen. Az u-t úgy választjuk, hogy

$$2\alpha u+u<D-\alpha^2$$

legyen; mert ha u ezt az egyenlőtlenséget kielégíti, akkor [minthogy $u<1$ és így $u^2<u$] még inkább kielégül az $(\alpha+u)^2<D$ egyenlőtlenség. Eszerint tehát, ha

$$u<\frac{D-\alpha^2}{2\alpha+1} \quad \text{és} \quad u<1$$

tesszük, akkor mindenesetre $\alpha+u$ az A-ba tartozik. Látjuk tehát, hogy bárminő, A-ba tartozó számhoz tudunk egy nála nagyobbat és még mindig A-ba tartozó számot [tehát végtelen sok nagyobbat] alkotni és így az A osztályban nincsen legnagyobb szám. Éppen így mutathatjuk meg, hogy a B osztályban nincsen legkisebb.

A megadott D segítségével tehát képesek voltunk a pozitiv rac. számok halmazát *két szeletre:* az A és B *szeletekre* bontani; az $x^2=D$ egyenlet mintegy ketté szelte a rac. számok összességét oly módon, hogy

1) minden poz. rac. szám vagy az A, vagy a B szeletbe tartozik,

2) a B szelet minden száma nagyobb az A számainál,

3) az A szeletben nincs legnagyobb, a B-ben pedig nincs legkisebb szám.

Azt fogjuk ezentúl mondani, hogy e két szeletet egymástól egy *szám* választja el: *a két szelet határszáma,* mely éppen a szeletalkotással, vagyis azon *képességünkkel* van értelmezve, hogy minden poz. rac. számról eldönthetjük, hogy az A, vagy B szeletbe tartozik-e. Ez az így értelmezett határszám D pozitiv négyzetgyöke. Definicióképpen még azt is megállapítjuk, hogy ez a szám nagyobb az A számainál és kisebb a B számainál.

Azt a gondolatmenetet, amelyet ezen példa tárgyalásánál követtünk, általánosítjuk és azt mondjuk, hogy *ha valamely eljárással sikerül a racionális számok halmazát két szeletre vágni, az A és B-be olyformán, hogy minden rac. szám az egyik szeletbe tartozzék és a B szelet számai mindannyian nagyobbak az A számainál, akkor ezzel egy számot, a két szelet határszámát értelmeztük.*

Pótlásul megjegyezzük, hogy a szeletezésnél esetleg egyetlen racionális szám ki is maradhat; így például: ha D négyzetszám (rac. szám négyzete) és az A szeletbe tesszük azokat a pozitiv rac. számokat, melyek négyzete D-nél kisebb, B-be pedig azokat, melyek négyzete D-nél nagyobb, akkor D pozitiv négyzetgyöke kimaradt. Ez a *határszám.* Ha az ilyen esetet el akarjuk kerülni, akkor azt mondjuk, hogy az A szeletbe teendők azok a pozitiv rac. számok, melyek négyzete D-nél *nem* nagyobb, B-be a többi. Ezentúl, ha csak külön meg nem mondjuk, mindig így képzeljük a szeletalkotást. Ekkor a szeletalkotásnak előbb felsorolt 3) alatti tulajdonsága elmarad. Megjegyezzük még, hogy ha nemcsak a pozitiv számokra szorítkozunk, akkor A szeletbe tesszük még a 0-t és a negativ rac. számokat is.

A szeletalkotásnál négy esetre gondolhatunk: 1) Az A-ban van legnagyobb, a B-ben nincs legkisebb racionális szám; 2) az A-ban nincs legnagyobb, de a B-ben van legkisebb rac. szám; 3) az A-ban van legnagyobb és a B-ben van legkisebb rac. szám és végül: 4) az A-ban nincs legnagyobb és a B-ben nincs legkisebb szám.

Az 1) eset például akkor állana elő, ha azt mondanók, hogy az A szeletbe soroljuk az összes, $\frac{7}{8}$-nál kisebb rac. számokat és még a $\frac{7}{8}$-ot is, a B-be pedig a többit. Ez a szeletalkotás egészen tökéletes, mert mindenik rac. számot valamelyik szeletbe soroztuk, továbbá A szelet minden száma kisebb a B bármelyik számánál. — A 2) eset például akkor állna be, ha az A-ba soroznók az összes, $\frac{2}{3}$-nál kisebb rac. számokat és a B-be a többit (tehát a $\frac{2}{3}$-ot is). — A 3) alatti eset nem lehetséges, mert ha az A legnagyobb száma megegyeznék a B legkisebb számával, akkor ez a rac. szám két szeletbe tartoznék, holott mi kikötjük, hogy mindenik rac. szám csak egyik szeletben lehet; ha pedig az A legnagyobb száma α és a B legkisebb száma β volna, akkor az α és β közé eső racionális számok nem tartoznának egyik szeletbe sem, tehát a szeletalkotás nem volna tökéletes. — A 4)-ik esetre példa a $\sqrt{2}$ értelmezésére szolgáló, az előbbi pontban tárgyalt szeletalkotás.

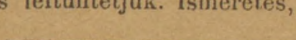
Ha az 1) vagy 2) esettel van dolgunk, akkor a két szelet határszáma az A-ban levő legnagyobb, illetőleg a B-ben levő legkisebb rac. szám és azt mondjuk, hogy a szeletalkotással ezt a határszámot értelmeztük. Ha pedig a negyedik esettel van dolgunk, vagyis az A szeletben nincs legfelső és a B-ben nincs legalsó rac. szám, akkor e szeletalkotással egy újfajta számot, a két szelet határszámát, egy *irracionális számot* értelmeztünk.

A szeletalkotás tehát olyan általános eljárás, amely úgy racionális, mint irracionális szám értelmezésére szolgálhat. E számokat összefoglalva *reális* számoknak nevezzük. A reális szám általános értelmezési módja a szeletalkotás, melynek néhány fontos alkalmazásával azonnal megismerkedünk.

Ha a szeletalkotással racionális számot értelmeztünk, akkor nyilván ez a határszám, mely az A-nak legnagyobb, vagy a B-nek legkisebb száma, egyúttal nagyobb az A minden más számánál és kisebb a B minden más számánál. Ami ezen szeletezésnél magától értetődő, azt azon esetben, mely bennünket most leginkább érdekel, midőn ugyanis az értelmezett szám irracionális, *definicióképpen* állapítjuk meg. Azt mondjuk ugyanis, hogy *az A, B szeletek által értelmezett szám, [melyet némelykor $A|B$ jellel is jelölünk] nagyobb az A számainál és kisebb a B számainál.* Ezzel már ennek az irracionális számnak a helyzetét az összes racionális számokhoz képest megállapítottuk. Egy α irracionális szám eszerint nagyobb az α értelmezésére szolgáló A szeletbe tartozó számoknál és kisebb a B-be tartozóknál. Összefoglalva az eddigieket, arra jutottunk, hogy:

Ha a rac. számok összességét valamiképpen két szeletbe sorozzuk oly módon, hogy az A szelet minden száma kisebb legyen a B bármelyik számánál és az A-ban nincs legnagyobb, a B-ben pedig nincs legkisebb szám, akkor e szeletalkotással a két szelet határszámát: egy irracionális számot értelmeztünk. Ez az irracionális szám nagyobb, mint az A szeletbe tartozó bármelyik szám és kisebb, mint a B bármelyik száma. Ha pedig a szeletalkotásnál egyetlen rac. szám kimaradt vagy ha az A szeletben van legnagyobb, vagy B-ben legkisebb rac. szám, akkor a szeletezéssel ezt a rac. határszámot értelmeztük.

Jegyzet. Szemléletesebbé tesszük a tárgyalást, ha az elmondottak geometriai vonatkozását is feltüntetjük. Ismeretes, hogy a racionális számokat



1. ábra.

egyszerű geometriai szerkesztéssel ábrázolhatjuk az egyenes pontjai által. Ha OE közt mértékegységnek választjuk és a tetszés szerinti (mondjuk poz.)

racionális szám, akkor ezen a számnak megfelel az egyenesen azon A pont, melyre nézve:

$$OA : OE = a : 1,$$

vagy röviden:

$$OA = a \, . \, OE.$$

Ez az A pont ketté vágja az egyenest: a jobboldali és baloldali részre; minden a-nál nagyobb racionális szám jobbfelé, a-nál kisebb racionális szám pedig balfelé esik. Ha már most valamely módon, valamely adott utasítás szerint a racionális számoknak megfelelő pontokat két osztályba sorozhatjuk oly módon, hogy az **A** osztály minden pontja a **B** osztály minden pontjától balfelé essék és az elválasztás olyan, hogy sem az **A**-nak, sem a **B**-nek nincs legszélső pontja [mint pl. az $x^2 = D$ esetében], akkor azt mondjuk (azt postuláljuk), hogy ezen szétválasztással, ezen szeletalkotással, az egyenesnek *egy pontját* határoztuk meg, vagyis az elválasztást az egyenes egy pontja, a két szelet határpontja eszközli, amelynek irracionális számérték felel meg. Ezen geometriai szemléletnek megfelelően sokszor fogjuk mondani, hogy a szeletalkotással egy *helyet* értelmeztünk, az értelmezett számnak megfelelő pontra gondolva.

3. A valós számok rendezettsége. Definicióképpen megállapítottuk, hogy az irracionális szám nagyobb az értelmező A szeletbe tartozó rac. számoknál és kisebb a B számainál; most általában két valós számot akarunk egymással összehasonlítani, illetőleg meg akarunk állapítani olyan eljárást, amellyel eldönthetjük, hogy két valós szám közül melyik tekintendő nagyobbnak. — Ha az $\alpha = A \,|\, B$ szám, vagyis az A és B szeletek által értelmezett szám racionális és az $\alpha' = A' \,|\, B'$ szám is racionális és $\alpha' > \alpha$, akkor szemeljünk ki egy tetszés szerinti γ rac. számot úgy, hogy

$$\alpha < \gamma < \alpha'$$

legyen. Ez a γ szám egyrészt az A'-ben van, mert α'-nél kisebb, másrészt pedig a B-ben van, mert α-nál nagyobb. *Ha tehát $\alpha' > \alpha$, akkor a B-nek vannak olyan elemei, amelyek az A'-be esnek.* A B-nek egy része beletartozik az A'-be.

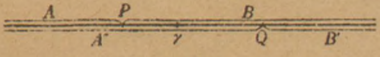
Ami racionális számokat értelmező szeletalkotás esetében ilyen világos, azt definicióképpen kiterjesztjük minden más esetre is.

Általában ilyen módon állapítunk meg a szeletekkel értelmezett valós számok között nagyságbeli egybevetést: Ha a B szeletben van olyan γ racionális szám, mely egyúttal az A'-be is tartozik, akkor az $A' \,|\, B'$ által értelmezett α' nagyobb az $A \,|\, B$ értelmezte α-nál. [Alig szükséges megjegyeznünk, hogy ekkor a B szeletnek minden, γ-nál kisebb száma, tehát a B szeletnek egy *része* is benne van az A'-ban, mert hiszen ha γ benne van az A'-ben, akkor minden szám, mely γ-nál kisebb, szintén az A'-be esik. Azt az állítást, hogy a B szeletnek valamely γ száma az A'-be tartozik, még úgy is mondhatjuk, hogy az A' valamely γ száma a B-ben van.]

Még másképpen is kifejezhetjük ezt az állítást. A γ szám ugyanis B-be tartozik, tehát nagyobb az A minden számánál; minthogy pedig a γ az A'-ben is benne van, tehát minden, nála kisebb rac. szám, vagyis az A minden száma is benne van az A'-ben és pedig úgy, hogy még olyan rac. szám is van az A'-ben, mely nem tartozik az A-ba (γ). Ilyenkor azt mondjuk, hogy A egészen benne foglaltatik az A'-ben. Hasonlóan következtethetjük, hogy a B' egészen benne van a B-ben. Ezért tehát az előbbi állítás így is fogalmazható: *Az $A'|B'$ által értelmezett α' számot az $A|B$ értelmezte α-nál nagyobbnak mondjuk, ha az A szelet egészen benne van az A'-ben, illetőleg a B' egészen benne van a B-ben.* Fordítva, ha az A' az A-ban, illetőleg B a B'-ben egészen benne foglaltatik, akkor $\alpha > \alpha'$. Ha pedig ezen esetek egyike sem forog fenn, azaz A minden száma A'-ben és A' minden száma A-ban van, vagyis az A és A' szeletek megegyeznek (ekkor a B is megegyezik B'-el), akkor $\alpha = \alpha'$.

Jegyzet. Szemléletesebbé válik ez az elvont tárgyalás, ha megint az egyenes pontjaira gondolunk. Képzeljük az egyenesen az összes racionális pontokat. Két szeletalkotással értelmeztük a P és Q pontokat, melyek közül az első α számot, a második α' számot ábrázolja. $\alpha' > \alpha$, ha az A szelet egészen benne van A'-ben (illetőleg B' a B-ben); vagyis, ha van olyan B-be tartozó γ szám, mely egyúttal A'-ban is benne van.

Ezzel tehát megállapítottuk, hogy mit értsünk ezen kifejezésen: α' szám nagyobb az α-nál, $\alpha' < \alpha$ vagy $\alpha' = \alpha$. Ez a megállapítás teljesen olyan jellegű, mint a racionális számokra vonatkozó. Ha

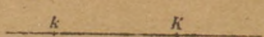


2. ábra.

ugyanis α, β és γ racionális számok, melyek közül $\alpha > \beta$ és $\beta > \gamma$, akkor következik, hogy $\alpha > \gamma$. Itt is úgy van. Ha $\alpha > \alpha'$ és $\alpha' > \alpha''$ akkor az α''-t értelmező A'' szelet benne van az α'-t értelmező A'-ben és ez az A' benne van az α-t értelmező A-ban. Ebből pedig következik, hogy A'' benne van A-ban, vagyis $\alpha'' < \alpha$. És e megállapításunk általános: éppen úgy alkalmazható racionális számok, mint irracionális számok összehasonlítására. Ezzel tehát a racionális és irracionális számok összességében, a reális számok halmazában is létesítettük a nagyobbság és kisebbség fogalmát, vagyis a reális számok halmaza *rendezett* halmaz.

4. Számhalmaz felső (alsó) határa. A racionális számokon végezhető szeletalkotásnak, tehát a reális szám értelmezésének néhány fontos alkalmazásával akarunk megismerkedni. Ha adva van n szám: $a_1, a_2, \ldots a_n$, akkor ezek között mindig van legalább egy, melynél nagyobb a számok között nincs és legalább egy, melynél kisebb nincs a számok között. Ha az elsőt H-val, a másodikat h-val jelöljük, akkor azt mondhatjuk, hogy H a megadott számhalmaz felső száma, h pedig az alsó száma [amely esetleg H-val meg is egyezhetik]. Minden véges halmazban (véges számú elemet tartalmazó halmazban) így van a dolog. De ha a számhalmaz végtelen sok számot tartalmaz, akkor egészen más viszonyok léphetnek fel. Gondoljunk például az összes, 1-nél *kisebb* számokra, vagyis arra a számhalmazra, mely az 1-nél *kisebb* számokat tartalmazza. Világos, hogy most nem mondhatjuk meg, hogy melyik e halmaz azon száma (e halmazba tényleg beletartozó szám), melynél nagyobb e halmazban ne volna; mert ha a halmaznak bárminő számát mondanám is, még mindig alkotható volna olyan más szám, mely a halmazba tartozik (1-nél kisebb) és a mondott számnál nagyobb.

A végtelen számhalmazoknak két fajtáját különböztetjük meg. Ha például az összes poz. valódi törtekre gondolok, akkor nyilván e számhalmaz minden eleme 1-nél kisebb és 0-nál nagyobb; ha ellenben az összes pozitiv egész számokra gondolok, akkor nem mondhatunk olyan számot, melynél nagyobb ne volna a halmazban. Az első esetben azt mondjuk, hogy a halmaz *korlátos* és pedig *felül és alul korlátos*, a második esetben azt mondjuk, hogy a halmaz *korlátlan* (a mondott halmaz csak felül korlátlan). *A végtelen halmazt felül korlátosnak mondjuk, ha van olyan K szám, melynél nagyobb szám nincs a halmazban; alul korlátos, ha van olyan k szám, melynél kisebb nincs a halmazban.* Ha felül is, alul is korlátos a halmaz, akkor a halmaz minden eleme k és $K>k$ szá-



3. ábra.

mok között van. Ha nincs olyan szám, amelynél nagyobb ne volna a halmazban, vagyis, ha a halmaz elemei között bármely megadható számnál nagyobb is van, akkor felül korlátlannak mondjuk és ha nincs oly nagy abszolut értékű negativ szám, amelynél kisebb tagja ne volna a halmaznak, akkor alul korlátlannak mondjuk. Egyelőre korlátos halmazokról és pedig teljesen korlátos számhalmazokról szólunk. Az ilyen korlátos halmaz minden eleme K és k közé esik, vagyis a halmaz elemeit ábrázoló pontok a két korlát k és K között vannak. E korlátok maguk esetleg nem tartoznak a halmazba.

Ilyen halmazoknál, mint egy példában láttuk, nem lehet mindig a halmaz legfelső (legalsó) számáról beszélni. De van két szám, melyek ezeket pótolják: a halmaz *felső határa* és *alsó határa.*

E fontos számokat a következőképpen értelmezzük: Az összes racionális számokat két szeletbe vágjuk: az A szeletbe teszünk egy racionális számot akkor, ha nála nagyobb, vagy vele egyenlő szám is van a halmazban. [Ilyen például minden k-nál kisebb rac. szám.] A B osztályba sorozzuk azokat a rac. számokat, melyeknél nagyobb nincs a halmazban. [Ilyen péld.: K.] [Nyilván, a B-be sorozott számok mind nagyobbak az A számainál és a sorozásnál egy szám sem maradhat ki.| Ezzel a szeletalkotással értelmeztünk egy (rac. vagy irracionális) számot, melyet H-val jelölünk. Ezt a H számot a halmaz *felső határának* nevezzük.

Ez a felső határ határszáma azon számoknak, amelyek a halmaz minden eleménél nagyobbak és azoknak, melyek nem nagyobbak a halmaz minden eleménél. Más szóval: a felső határszámnál nagyobb nincs a halmazban, de minden, nála kisebb számnál nagyobb is van a halmazban. A felső határ maga lehet a halmaz eleme, de lehet, hogy nem tartozik bele a halmazba. Így például, ha az összes valódi törtekre gondolunk, akkor nyilván e halmaz felső határa: 1 és ez nem tartozik a halmazba. De ha például az összes 3 és 4 közötti számokra gondolunk és még a 4-re is, akkor e halmaz felső határa: 4 benne van a halmazban.

Egészen hasonlóan alkotjuk meg a végtelen halmaz alsó határának a fogalmát is. A racionális számok összességében szeletet alkotunk oly módon, hogy mindazokat a számokat, melyeknél kisebb nincs a halmazban, az A-ba sorozzuk és azokat, melyeknél kisebb is van a halmazban, B-be tesszük. E szeletezéssel értelmezett szám a halmaz alsó határa, melyet h-val jelölünk.

Eddigelé arra gondoltunk, hogy az adott korlátos halmaz elemei racionális számok; de ez teljesen felesleges. Éppen így állapithatjuk meg a H és h számokat minden esetben, bárminő reális számok legyenek is a halmaz elemei.

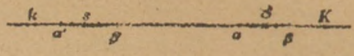
Alig kell megjegyeznünk, hogy a halmaz minden száma h és H között van (a határokat beleértve), tehát egyúttal $H>h$ [ha csak a halmazban nem csupa egyenlő szám foglaltatik]. [Jól megjegyzendő, hogy a h és H számok nem ugyanazok, mint a k és K korlátok; mert pl. azon számhalmaznál, mely az összes 1 és 2 közötti számokat tartalmazza, korlát gyanánt tekinthetem a 0 és 10-et, azt mondva, hogy e halmaz elemei mind 0 és 10 között vannak; ezzel már a halmaz korlátolt volta a kijelentésben biztosítva van.]

Az így értelmezett két határszám a halmaz leírásánál sokszor fontos szerepet játszik; de sajnos, sok esetben csak igen laza összefüggésben van magával a halmazzal. Így például ha azt mondom: gondoljunk az 1 és 2 közötti számokra és még 5-re. Akkor nyilván e halmaz felső határa 5, bár ez igen lazán függ össze a végtelen halmazzal. Éppen ezért azon iparkodunk, hogy a végtelen halmazzal szorosabban, erősebben összefüggő számokat értelmezzünk.

5. Sűrűsödő hely. Főszármazék-helyek. Gondoljunk egy korlátos végtelen (végtelen sok számból álló) számhalmazra, melynek alsó korlátja k, felső korlátja: K. A racionális számok összességét így osztjuk be A és B szeletbe:

A-ba teszünk egy α számot akkor, *ha a halmazban végtelen sok nála nagyobb szám van* és B-be a többit. Eszerint tehát a B

szeletbe azok kerülnek, amelyek vagy nagyobbak a halmaz minden eleménél, vagy ha nem nagyobbak is minden elemnél, de csak véges számú tagnál kisebbek. E szeletalkotással egy számot (egy helyet) értelmeztünk, melyet a halmaz *felső sürüsödő helyének* nevezünk. Az ábrában ezt a helyet S-el jelöltük.



4. ábra.

E sűrűsödő helynek értelmezése szerint a következő fontos tulajdonsága van: ha az A szeletben egy tetszés szerinti α, számot veszünk fel és a B szeletben β-t (az ábrában S-től balra van α és jobbra β) akkor, bárminő közel legyen is az α a β-hoz, *az $\alpha\beta$ közbe a halmaznak végtelen sok eleme esik.*

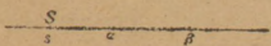
Ugyanis α az A-ba tartozik, tehát tőle jobbra végtelen sok eleme van a halmaznak (végtelen sok száma a halmaznak nagyobb az α-nál); de e végtelen sok elemből a β-n túl csak véges számú eshetik, mert hiszen a β a B-be tartozik, következésképpen az $\alpha\beta$ közben a halmaznak végtelen sok eleme van. Ezért mondjuk, hogy az S helyen a halmaz *összesürüsödik.*

Egy másik sűrűsödő helyet a következőképpen állapíthatunk meg: a B szeletbe teszünk egy β rac. számot, ha a halmaznak végtelen sok, β-nál kisebb száma van; ellenben A-ba tesszük a többi rac. számokat; vagyis egy α szám akkor kerül az A-ba, ha a halmazban csak véges számú, nála kisebb elem van. E szeletalkotással egy s számot értelmeztünk, mely szintén sűrűsödő helye a halmaznak. Itt megint, ha az s-től balfelé α' és jobbfelé β' számokat vesszük fel, egymáshoz akárminő közel, *vagyis az $\alpha'\beta'$ közt bárminő kicsinynek vesszük is, e közben a halmaznak végtelen sok száma lesz;* mert β' a B-be tartozik, tehát tőle balra végtelen sok tagja van a halmaznak, másrészt pedig α'-tól balra már csak véges számú tag lehet, következésképpen $\alpha'\beta'$ közben, akárminő kicsiny legyen is ez a köz, a halmaznak végtelen sok helye van, s a halmaz *alsó sürüsödő helye.*

Ilyenformán tehát minden korlátos végtelen halmazhoz *két sürüsödő* helyet állapíthattunk meg. E két hely bármely kis környezetében [ezen azt értjük, hogy bármely kis, az előbbi módon megállapított $\alpha\beta$ vagy $\alpha'\beta'$ közben] a halmaznak végtelen sok eleme van.

Ez a két szám (s és S) már szorosabb kapcsolatban van a végtelen halmazzal, mint a vele sokszor csak lazán összefüggő felső, illetőleg alsó határ. Ezeket az S és s helyeket, amelyeket a végtelen halmaz révén konstruáltunk, a halmaz *főszármazékhelyeinek* tekinthetjük.

Különösen fontos azon eset megemlítése, midőn e főszármazékhelyek, *az S és s számok megegyeznek.* Ilyenkor a szóban forgó végtelen halmaznak más sűrűsödő helye nem is lehet, vagyis, ha bárhol jelölünk is meg olyan $\alpha\beta$ közt, mely az S (illetőleg az s) helyet nem foglalja magában, ezen $\alpha\beta$ közön belül csak véges számú pontja lehet a halmaznak. Ugyanis, ha α és β pontok S-től jobbra vannak, akkor S-re nézve a jobboldali (B) szeletbe tartoznak, tehát



5. ábra.

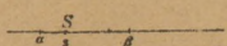
B értelmezése szerint α-nál nagyobb eleme a halmaznak [tehát $\alpha\beta$-ba eső is] csak véges számú lehet. Ha pedig $\alpha\beta$ S-től balra esik, akkor az s-re vonatkozó A szeletben van a β és így β-nál kisebb eleme a halmaznak [tehát $\alpha\beta$-ba eső is] csak véges számú lehet. *Ezzel kimutattuk, hogy ekkor más sűrűsödő hely, mint a közös $S=s$, nincsen. Az ilyen végtelen halmazt, melynek S és s helyei összeesnek, vagyis melynek csak egyetlen egy sűrűsödő helye van, méltán tekinthetjük az $S=s$ szám származtatójának.*

6. Szabályos sorozattal értelmezett szám. Ha adva van az

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

rac. számoknak egy végtelen sorozata (ez úgy értendő, hogy ismeretes olyan eljárás, mellyel e sorozat tagjait előállíthatjuk), akkor voltaképpen egy végtelen számhalmazunk van. E végtelen számhalmaznak az előbb megállapított értelemben van két főszármazékszáma: S és s. Úgy az S, mint az s hely körül e halmaz összesűrűsödik, azaz, bárminő kis szakaszt jelöljünk is ki az S, vagy s körül, ebben a sorozatnak végtelen sok száma van.

Vizsgáljuk először azt az esetet, midőn e sorozat *egy* számot származtat, vagyis midőn $S=s$. Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy a sorozat *szabályos sorozat.* Ilyenkor a halmaz csak egy helyen sűrűsödik össze, vagyis, ha $S=s$-től balfelé (tehát az A szeletben) egy α és jobbfelé (a B szeletben) egy β számot jelölünk meg, melyek egymáshoz bárminő közel vannak, az $\alpha\beta$ szakaszba a



6. ábra.

sorozatnak végtelen sok száma esik és e szakaszon kívül csak véges számú helye van a sorozatnak.

Ezt az állítást még így is kifejezhetjük: Mondhatunk egy olyan N poz. egész számot, amelynél nagyobb indexű tagja a sorozatnak már mind az $\alpha\beta$ intervallum belsejébe esik, vagyis az $\alpha\beta$ közön kívül csak olyan tagja van a sorozatnak, melynek indexe N-nél nem nagyobb.

Az $\alpha\beta$ közt oly kicsinyre választhatjuk, aminő kicsinyre csak tetszik. Ez a következő meggondolással érhető el. Szemeljünk ki az S-et értelmező A szeletben egy tetszésszerinti α rac. számot és a B szeletben egy β rac. számot. A $\beta-\alpha$ közt jelöljük d-vel. Ha előre megállapítjuk, hogy mi egy ε-nél kisebb közt akarunk és a d ennél nagyobb, akkor felezzük meg az $\alpha\ldots\beta$ közt, vagyis szemeljük ki az $\frac{\alpha+\beta}{2}$ számot. Ez vagy az A, vagy a B szeletbe tartozik (S-től jobbra, vagy balra van). Ha A-ban van, intervallum gyanánt most az $\frac{\alpha+\beta}{2}\cdots\beta$-t válasszuk (ha B-ben volna, új intervallum gyanánt az $\alpha\cdots\frac{\alpha+\beta}{2}$-t választanók). Az új intervallum szélső pontjait jelöljük α_1 és β_1-gyel.

A $\beta_1-\alpha_1$ köz az előbbi köz fele: $\frac{d}{2}$. Ha még ez is nagyobb a megadott ε-nál, az $\alpha_1\beta_1$ közt újból megfelezzük és ha pl. az $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ felező pont a B-ben volna, akkor új intervallum gyanánt az $\alpha_1\cdots\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ közt választanók (ellenkező esetben $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\cdots\beta_1$ közt). Ezen új intervallum szélső pontjait α_2, illetőleg β_2-vel jelöljük. Az $\alpha_2\beta_2$ intervallum az előbbinek fele, tehát: $\frac{d}{4}$. Ha még ez is nagyobb az ε-nál, az eljárást addig folytatjuk, míg az intervallum, mely rendre:

$$d,\ \frac{d}{2},\ \frac{d}{4},\ \frac{d}{2^3},\ \frac{d}{2^4},\ldots\ \frac{d}{2^k},\ldots$$

lesz, az ε-nál kisebbé válik. Ezt a folytonos felezés útján egyszer okvetlenül elérjük. Mondjuk, hogy az így keletkezett köz végpontjai α ill. β, akkor tehát találtunk az A szeletben olyan α és a B-ben olyan β rac. számokat, melyek köze: $\beta-\alpha<\varepsilon$.*

Ilyenkor rövidebb szólás kedveért azt *fogjuk mondani, hogy az A, B szeletalkotással értelmezett S számot akár az α, akár a β rac. szám ε pontossággal megközelíti.*

Ezen megjegyzések alapján a szabályos sorozatnak az a tulajdonsága, hogy csak egy sűrűsödési helye van, még így is fogalmazható: Ha egy tetszés szerinti kis ε számot jelölnek ki, megállapíthatunk ehhez egy oly N pozitiv egész számot, amelynél nagyobb indexű tagjai a sorozatnak mindannyian egy, ε-nél kisebb $\alpha\ldots\beta$ intervallumba esnek; következésként az N-iken túl levő tagjai a sorozatnak egymástól ε-nál kevesebbel különböznek. Formulában ezt így írhatjuk fel:

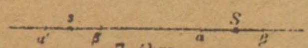
* Ha $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots$ közül valamelyik összeesik S-el (ez persze csak akkor fordulhat elő, ha S racionális), akkor minden következő α gyanánt is S-et választjuk.

$$|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon,$$

ha* $$n>N.$$

A szabályos sorozatnak tehát az a nevezetes tulajdonsága van, hogy bármely kis pozitiv ε számhoz tartozik olyan N *küszöbszám*, melynél nagyobb indexű tagok (a sorozatnak a N-iken túl levő tagjai) egymástól az ε-nál kevesebbel különböznek. A szabályos sorozatnak ezt a tulajdonságát röviden úgy fogjuk említeni, hogy *a szabályos sorozat összesűrűsödő sorozat.*

Ha az adott végtelen sorozat S és s főszármazékhelyei különbözők, akkor a sorozat nem lehet ilyen összesűrűsödő, vagyis nem tartozik minden ε-hoz olyan küszöbszám, amelynél nagyobb indexű tagok egymástól ε-nál kevesebbel különböznének. Hiszen ilyenkor az S és s helyeken is sűrűsödik a halmaz, vagyis az S és s helyek tetszésszerinti kis környezetében is végtelen sok tagja van a sorozatnak és így akárminő messze menjünk is a sorozatban, még min-



7. ábra.

dig találunk olyan tagokat, amelyek az S kis környezetében vannak és olyanokat, amelyek az s környezetébe esnek; tehát nem lehet, hogy valamely N küszöbön túl egymástól csak elenyésző csekéllyel különbözzenek.

[Ezt a jórészt szemléleten alapuló okoskodást pontosabban így végezhetjük el. Az S számot az $A\,|\,B$, az s-et az $A'\,|\,B'$ szeletek értelmezzék. Mintbogy $S>s$, megjelölhető olyan α rac. szám, mely egyrészt az A-ban, másrészt B'-ben van, azaz

$$s<\alpha<S.$$

Az s és α között kitűzzük a β' rac. számot, mely tehát egyrészt a B'-ben, másrészt az A-ban van. Most az S-től jobbra (B-ben) egy tetszés szerinti β számot és s-től balra az α' számot tűzzük ki. Jelöljük a $\beta'\alpha$ távolságot (az $\alpha-\beta'$ különbséget) e-vel. Azt állítjuk, hogy az adott

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

sorozat, melynek főszármazékhelyei: s és S, nem lehet összesűrűsödő sorozat, vagyis nem lehet bármely ε-hez olyan hozzátartozó N küszöbszámot találni, hogy

$$|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon$$

legyen, ha csak $n>N$ és k bármely pozitiv egész szám. Ha ugyanis ε gyanánt például az e számot választjuk, akkor már ez nem lehetséges, mert ha N volna az e-hez tartozó küszöbszám, akkor bármely N-iken túl levő tagjai a sorozatnak e-nél kevesebbel különböznének, holott úgy az $\alpha'\beta'$, mint az $\alpha\beta$ közben végtelen sok tagja van a sorozatnak és így azon a vélt N-en túl is van olyan a_n, amely az $\alpha\beta$ közbe esik és olyan a_{n+k}, amely az $\alpha'\beta'$ közben van, tehát $|a_{n+k}-a_n|>e$. Ezen e-hez tehát nem tartozhatik N küszöbszám, a sorozat nem lehet összesűrűsödő.]

* A két kis függélyes vonással azt akarjuk jelölni, hogy a különbség abszolut értéke veendő; k tetszés szerinti pozitiv egész szám.

Most már tehát látjuk, hogy ha a két főszármazékhely megegyezik, azaz $s=S$, akkor a sorozat összesűrűsödő, azaz bármely ε-hoz tartozik egy N küszöbszám, melyre nézve $|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon$, ha $n>N$ és fordítva, ha a sorozat összesűrűsödő, akkor $s=S$, mert ha e két főszármazékhely nem esnék össze, a sorozat nem lehetne összesűrűsödő.

Ezért tehát a szabályos sorozatot úgy is definiálhatjuk, hogy *szabályos az olyan sorozat, melyre nézve bármely ε számhoz tartozik oly N küszöbszám, hogy $|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon$, ha $n>N$ (a sorozat összesűrűsödő)*, akár pedig úgy, hogy *szabályos az a sorozat, melynek két főszármazékszáma megegyezik.*

A szabályos sorozatról azt is mondjuk, hogy az $S=s$ származékszámot értelmezi. Még egyszer megemlítjük, hogy ezen a kifejezésen pontosabban azt értjük, hogy a szabályos sorozat által képesek vagyunk a racionális számok összességében olyan szeletalkotást eszközölni, mely az $S=s$ szám értelmezésére szolgál. Ez a szeletalkotás, miként az S és s számok értelmezéséből következik, oly módon végezhető, hogy az A szeletbe sorozzuk mindazokat a racionális számokat, amelyeknél kisebb az adott sorozatban csak véges számban fordul elő és minden más számot (melyeknél kisebb végtelen sok van) a B-be sorozzuk, vagy pedig (éppen mivel $S=s$) az A-ba sorozzuk mindazokat, melyeknél nagyobb végtelen sok van az adott sorozatban és B-be azokat, melyeken a sorozatnak csak véges számú tagja halad túl. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozattal értelmezett $S=s$ számot e sorozat *határértékének*, limesének nevezzük és így jelöljük: $\lim a_n$.

7. Monoton növekvő, vagy csökkenő sorozat. Ha az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozat számai rendre növekesznek (vagy legalább is nem csökkennek, azaz $a_i \geq a_{i-1}$), akkor azt mondjuk, hogy e sorozat *monoton növekvő* sorozat. A növekvő sorozat vagy *korlátos*, vagy *korlátlan*. Korlátos, ha minden tagja egy bizonyos megadható K számnál kisebb, korlátlan, ha ilyen K szám nem mondható, azaz, ha bármely nagy K számnál is van nagyobb tagja a sorozatnak: a sorozat bármely K számon túlhalad. Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy a *sorozat korlátlanul nő, vagy még úgy is mondjuk, hogy a sorozat tagjai végtelen naggyá válnak* és némelykor így is írjuk ezt az állítást: $\lim a_n=\infty$.

Azt állítjuk, hogy a korlátos monoton növekvő sorozat *szabályos* sorozat. Azt kell csak evégből megmutatni, hogy két főszármazékszáma megegyezik, vagy, ami ezzel egyenlő értékű, hogy a sorozat egy helyen összesűrűsödő. Könnyen megmutathatjuk akár egyik, akár másik alakjában a monoton növekvő sorozatnak ezt a tulajdonságát. A sorozat S felső származékszámát ugyanis úgy kellett megállapítanunk, hogy a B szeletbe tettük azokat a rac. számokat, amelyeknél nagyobb a sorozatban csak véges számú van; A-ba pedig azokat, amelyeknél nagyobb végtelen sok van a sorozatban. $A|B=S$. Legyen már most adva egy tetszés szerinti ε szám. Megállapithatunk két számot β-t és α-t, melyek közül az α az A-ban (S-től balra) és β a B-ben (S-től jobbra) van és $\beta-\alpha<\varepsilon$. α-nál nagyobb szám a sorozatban végtelen sok van. Szemeljük ki egyiket. Legyen ez az N-ik, azaz $a_N>\alpha$. Minthogy a sorozat monoton növekedő, tehát az N-iken túl levő tagok mind nagyobbak az a_N-nél, tehát nagyobbak az α-nál. β-nál nagyobb egyetlen egy sem lehet; mert ha egyik tag nagyobb volna a β-nál, akkor minden következő is nagyobb lenne és akkor végtelen sok volna a β-nál nagyobb, holott β a B szeletbe tartozik. Így tehát az N-iken túl levő tagok mind nagyobbak az α-nál, de mind kisebbek a β-nál, tehát mindannyian az $\alpha\beta$ közbe esnek és így bármelyik két tag különbsége ε-nál kisebb; azaz

$$|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon,$$

ha

$$n>N,$$

az N az adott ε-hoz tartozó küszöbszám; az adott sorozat tehát valóban szabályos sorozat.

Az imént láttuk, hogy a β-nál nagyobb szám az adott sorozatban egy sincs. Ezért tehát az S-et értelmező szeletalkotást még úgy is elvégezhettük volna, hogy az A-ba sorozzuk azokat a rac. számokat, melyeknél nagyobb szám is van az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számhalmazban, a B-be pedig a többit, vagyis azokat a rac. számokat, melyeknél nagyobb e halmazban nincs. A szeletalkotás ezen módja a halmaz *felső határát* értelmezi; tehát a monoton növekedő sorozat származékszáma, vagyis e sorozat által értelmezett szám nem más, mint a sorozat felső határa.

A monoton növekedő korlátos sorozat szabályos sorozat, az általa értelmezett szám e sorozat felső határa.

Így például ilyen értelemben mondhatjuk, hogy a végtelen tizedes tört mindig egy számot értelmez.

Ha pl. ezt a tizedestörtet írom fel:

$$0\cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots,$$

amelynek a jegyei valamely ismeretes eljárással egymás után származtathatók (egy számjegy sem nagyobb 9-nél), akkor ez a tizedes tört, éppen mivel a származtatása ismeretes, meghatározottnak tekinthető. Ismeretes tehát e tizedes törtből részenkint alkotható számsorozat:

$$0\cdot\alpha_1,\ 0\cdot\alpha_1\alpha_2,\ 0\cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ 0\cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots,$$

vagyis

$$a_1=\frac{\alpha_1}{10},\quad a_2=\frac{10\alpha_1+\alpha_2}{100},\quad a_3=\frac{100\alpha_1+10\alpha_2+\alpha_3}{1000},\quad a_4=\frac{1000\alpha_1+100\alpha_2+10\alpha_3+\alpha_4}{10000}$$

s f. t.

Ez a számsorozat monoton növekvő, mert mindenik tagja nagyobb, mint az előtte levő, vagy legfölebb egyenlők (ha t. i. valamelyik jegy 0); továbbá korlátos e sorozat, mert hiszen mindegyik tagja kisebb, mint 1. Az

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

sorozat tehát szabályos sorozat, mely az ismertetett értelemben egy számot definiál, amelyet

$$\lim a_n$$

-nel jelöltünk.

Ha a szám értelmezésére szolgáló A szeletből egy tetszés szerinti α és a B szeletből egy racionális β számot kiszemelünk és $\beta-\alpha=\varepsilon$, akkor elmehetünk a sorozatban oly messze, hogy azontúl a sorozat minden tagja α és β közé essék. Ha e küszöbszám N, akkor azt mondjuk, hogy a_n az értelmezett számot ε-nyi pontossággal előállítja, (ha $n>N$). Ezen általános megjegyzés a végtelen tizedes tört esetében egyszerűen átlekinthetővé teszi ezt a megközelítést.

Ugyanis a fölírt sorozat minden tagja kisebb a $\lim a_n$-nél (mert a sorozat monoton növekvő) és ha akármelyik tagban az utolsó számjegyet 1-gyel megnöveszljük, már a B-be tartozó, tehát $\lim a_n$-nél nagyobb számot kapunk. (Így pl. 0·314159... esetében 0·3, 0·31, 0·314, 0·3141, ..., az A szeletbe és 0·4, 0·32, 0·315, 0·3142, ... a B szeletbe tartoznak), tehát

$$0{\cdot}\alpha_1,\ 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2,\ 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \ldots 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n; \ldots$$

mind kisebbek a $\lim a_n$-nél; és

$$0{\cdot}(\alpha_1+1),\ 0{\cdot}\alpha_1(\alpha_2+1),\ 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+1),\ 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_4+1), \ldots 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n+1), \ldots$$

nagyobbak a $\lim a_n$-nél; eszerint tehát a $\lim a_n$ szám, melyet a végtelen tizedes tört értelmez, a sorozatban foglalt számokkal 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001,... pontossággal állíttatik elő.

Egy másik, egyszerű példa gyanánt említjük a végtelen geometriai sort. Ha q pozitiv szám, akkor az

$$s_1=1,\ s_2=1+q,\ s_3=1+q+q^2,\ s_4=1+q+q^2+q^3, \ldots s_n=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}, \ldots$$

számok sora (az $1, q, q^2, q^3, \ldots$ geometriai sor részletösszegeinek sorozata) monoton sorozat. Ha $q\geqq 1$, akkor a sorozat nem korlátos, mert hiszen akkor $s_n\geqq n$, tehát minden számnál nagyobbá válik, de ha $q<1$, akkor a sorozat korlátos; ugyanis

$$s_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}<\frac{1}{1-q},$$

tehát bármelyik tag kisebb az $\frac{1}{1-q}$-nál. E sorozat tehát szabályos sorozat, melyről még azt is megmutathatjuk, hogy $\frac{1}{1-q}$-t értelmezi, vagyis, hogy az A és B szeletek határszáma éppen $\frac{1}{1-q}$. Ennél a számnál nagyobb a sorozatban nincs; tehát minden olyan β rac. szám, mely ennél nagyobb, a B-be tartozik. Ellenben, ha $\alpha<\frac{1}{1-q}$, akkor $\frac{1}{1-q}=\alpha+\varrho$ alakú, ahol ϱ pozitiv szám. Most már csak az n kitevőt úgy kell meghatároznunk, hogy

$$\frac{q^n}{1-q}<\varrho,$$

vagyis: $q^n<(1-q)\varrho$ legyen. Minthogy $q<1$, tehát mondhatjuk, hogy $q=\frac{1}{1+u}$, ahol u pozitiv. De $(1+u)^n>1+nu$, tehát:

$$q^n < \frac{1}{1+nu} < \frac{1}{nu}.$$

Így tehát n-et csak úgy kell meghatároznunk, hogy $\frac{1}{nu} < (1-q)\varrho$ legyen. Ha: $n > \frac{1+u}{\varrho u^2}$, akkor már elértük, hogy $\frac{q^n}{1-q} < \varrho$. Ha az $\frac{1+u}{\varrho u^2}$-et ν-vel jelöljük és N e ν-nél nagyobb egész szám, akkor tehát, ha

$$n > N,$$

következik, hogy

$$\frac{q^n}{1-q} < \varrho$$

és így:

$$s_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} > \frac{1}{1-q} - \varrho = \alpha,$$

vagyis, ha $n>N$, akkor $s_n>\alpha$. Azt látjuk ebből, hogy az $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sorozatban az N-iken túl levő tagok mind nagyobbak az α-nál, vagyis minden, az $\frac{1}{1-q}$-nál kisebb α az A szeletbe tartozik és így a két szelet határszáma az $\frac{1}{1-q}$, amit megállapodásunk értelmében így írunk:

$$\lim s_n = \lim (1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = \frac{1}{1-q}.$$

Ez az $\frac{1}{1-q}$, miként az elemekből ismeretes, a végtelen geometriai sor összege. E tárgyalásból kitűnik, hogy ez az állítás úgy értendő, hogy az

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$$

részletösszegek szabályos sorozata által értelmezett szám az $\frac{1}{1-q}$.

Végül utolsó példa gyanánt ezt a számsorozatot vizsgáljuk, melyre a következőkben igen gyakran lesz szükségünk:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \left(1+\frac{1}{5}\right)^5, \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

E sorozat általános tagja:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

egyúttal a származtatás módját is feltünteti. Azt állítjuk, hogy ez a sorozat korlátos monoton növekvő sorozat. Evégből először kimutatjuk, hogy az $n+1$-ik tag nagyobb az n-iknél. A binomiális tétel szerint:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

De $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ így is írható:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}.$$

Az a_n kifejezésében ez a $k+1$-ik tag. Az a_{n+1} kifejezésében a $k+1$-ik tagot ebből úgy kaphatom meg, ha n helyébe $n+1$-et írok. De ezzel a számlálóban minden tényező nagyobbodik (mert hiszen az 1 mellett álló kivonandók kisebbednek); tehát az a_{n+1}-nek minden egyes tagja nagyobb az a_n

ugyanannyadik tagjánál (természetesen csupa pozitív tagok vannak) és még egy $n+2$-ik tag is van $\left(az \left(\frac{n+1}{n+1}\right) \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right)$, tehát $a_{n+1} > a_n$.

Ezzel kimutattuk, hogy a sorozat monoton növekvő. Most azt mutatjuk meg, hogy korlátos. Az a_n felírt $k+1$-ik tagját nagyobbítom, ha a számláló minden tényezőjéből elhagyom a kivonandót, vagyis, ha a számlálót 1-nek veszem; vagyis, ha ezen $k+1$-ik tagot egyszerűen $\frac{1}{k!}$-nak veszem. És ha ezt az a_n mindenik tagjánál megteszem, akkor azt kapom, hogy

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

és ha most még $\frac{1}{3!}$ helyébe $\frac{1}{2.2}=\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{4!}=\frac{1}{4.3.2}$ helyébe $\frac{1}{2^3}$, s általában $\frac{1}{k!}$ helyébe a nála nagyobb $\frac{1}{2^{k-1}}$-et tesszük (a nevező minden tényezője helyett a kisebb 2-t téve), azt találjuk, hogy

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

A jobboldalon álló kifejezés a második tagtól kezdve nem egyéb, mint az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$$

geometriai sor n-ik részletösszege; minthogy pedig minden részletösszeg kisebb $\frac{1}{1-q}$-nál, vagyis a jelen esetben 2-nél, tehát

$$a_n < 3,$$

vagyis a szóban forgó sorozat minden tagja kisebb 3-nál és így a sorozat korlátos. Az általa értelmezett számot e-vel jelöljük. Később majd meglátjuk, hogy ezt az e számot a 2·71828... végtelen tizedes tört állítja elő. A megállapított jelöléssel:* $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Eddigelé mindig monoton növekvő sorozatról szóltunk. Éppen úgy beszélhettünk volna monoton csökkenő sorozatról is. Az ilyen sorozat vagy minden negativ számnál kisebbé [azaz abs. értékre minden számnál nagyobbá] válik, akkor azt mondjuk, hogy $-\infty$-né lesz, vagy pedig van egy olyan megadható k szám, mely alá nem sülyed. Ekkor a sorozatot korlátosnak mondjuk. Az ilyen sorozat is, miként az olvasó az előbbiek szerint megállapíthatja, szabályos sorozat.

8. 0-t értelmező szabályos sorozat. Ha az

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

* Pontosabban ezt így jelöljük $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ és így olvassuk: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ limese, ha n minden határon túl nő (röviden, ha n végtelenné válik): e, amivel nem akarunk most még egyebet mondani, minthogy az $(1+\frac{1}{1})$, $(1+\frac{1}{2})^2$, $(1+\frac{1}{3})^3, \ldots$ szabályos sorozat által értelmezett szám: e.

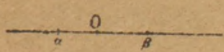
szabályos sorozat sűrűsödő helye $S=s=0$, akkor azt mondjuk, hogy ez a sorozat 0-t értelmezi, vagyis

$$\lim a_n=0.$$

Ekkor tehát az S értelmezésére szolgáló B szelet a pozitiv rac. számokból áll, az A szelet pedig a negativ rac. számokat tartalmazza. Ha tehát fölvesszük a B-ben a β és az A-ban az α számot, melyek különbsége $\beta-\alpha<\varepsilon$, akkor a szabályos sorozat alaptulajdonsága szerint elmehetünk a sorozatban olyan messze, hogy azon túl a sorozat minden tagja az $\alpha\beta$ közbe essék. Ha ez a küszöbszám N, akkor tehát

$$|a_n|<\varepsilon,$$

ha $n>N$; mert hiszen úgy a β, mint az α abs. értékre ε-nál okvetlenül kisebbek (mert az egyik poz., a másik neg. és különbségük



8. ábra.

ε-nál kisebb). *Ha tehát a szabályos sorozat a 0-t értelmezi, akkor bármely kis ε-hoz tartozik olyan N küszöbszám, melyen túl minden tag abs. értéke ε-nál kisebb, azaz $|a_n|<\varepsilon$, ha $n>N$.*

Ezt az állítást rövidebben úgy fogjuk ezentúl kifejezni, hogy a 0-t értelmező szabályos sorozat tagjai elenyésző csekélyekké (végtelen kicsinnyé) lesznek. Ezen a kifejezésen éppen azt értjük, hogy bármely kis ε-hoz tartozik oly N küszöbszám, hogy $|a_n|<\varepsilon$, ha $n>N$.

Fordítva is áll a dolog. Ha ugyanis a szabályos sorozat tagjai végtelen kicsinyekké lesznek, akkor e sorozat a 0-t értelmezi. Ekkor ugyanis nyilván a 0 helyen sűrűsödik össze a sorozat.

[Pontosabban ez az állítás így bizonyítható: Bármely pozitiv szám az S-et értelmező B szeletbe tartozik és minden negativ szám az A szeletbe. Ugyanis legyen β egy tetszés szerinti pozitiv szám. Válasszunk ε gyanánt β-nál kisebb számot. Minthogy a sorozat tagjai feltételünk szerint végtelen kicsinyekké lesznek, tehát az adott ε-hoz tartozik oly N küszöbszám, hogy ezen küszöbön túl levő minden a_n abs. értékre ε-nál kisebb; vagyis legfölebb N tagja van a sorozatnak, mely β-nál nagyobb. β tehát az S-et értelmező B szeletbe tartozik. (Ide tettük ugyanis mindazokat a rac. számokat, melyeknél nagyobb a sorozatban csak véges számú van.) Éppen így mutathatjuk meg, hogy minden negativ rac. szám az A szeletbe való. A pozitiv és negativ számok határszáma pedig 0; tehát $S=0$. Éppen így mutatjuk meg, hogy $s=0$; tehát kimutattuk, hogy ha a sorozat tagjai a megállapított értelemben végtelen csekélyekké lesznek, akkor e sorozat a 0-t értelmezi.

Még egy kis megjegyzést teszünk. Nem is kellett volna külön megmondanunk, hogy a sorozat, amelyről feltettük, hogy tagjai végtelen csekélyekké válnak, szabályos sorozat; mert nem is lehet más. Vagyis: mindazon sorozatok, amelyek tagjai végtelen csekélyekké válnak, a 0-t értelmező szab. sorozatok. Ha ugyanis a tagok végtelen csekélyekké válnak, akkor bizonyos

N-től kezdve valamennyien kisebbek abs. értékre nézve $\frac{\varepsilon}{2}$-nél, tehát oly $\alpha\beta$ intervallumba esnek, melynek baloldali végpontja α negativ és abs. értéke kisebb $\frac{\varepsilon}{2}$-nél, a jobboldali végpontja β pozitiv és szintén $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb. Ezen N-iken túl levő tagok tehát mind az $\alpha\beta$-ba esnek, bármely kettő különbsége abs. értékre ε-nál kisebb: a sorozat tehát szabályos].

A sz. sorozat tehát akkor és csakis akkor értelmezi a 0-t, ha bármely kis ε-hoz tartozik oly N küszöbszám, hogy $|a_n| < \varepsilon$, ha $n > N$.

Így például ez a sorozat: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ 0-t értelmező sz. sorozat. Ha például $\varepsilon = \frac{1}{100}$, akkor hozzátartozó küszöbszám gyanánt $N = 100$ választható, mert a 100-ikon túli tagok mind kisebbek $\frac{1}{100}$-nál. Hasonlóképpen az $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{n^2}, \ldots$ sorozat is 0 sorozat, mert ε-hoz küszöbszámul választhatjuk azt az egész számot, mely $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$-nál nagyobb. Ugyanis, ha $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, akkor $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Hasonlóan ez a sorozat: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ melyben a tagok előjelei váltakoznak, szintén 0 sorozat. Vagy ez a sorozat: a, aq, aq^2, $aq^3, \ldots aq^n, \ldots$ ha $|q| < 1$.

Ugyanis az n úgy választható, hogy $|aq^n| < \varepsilon$ legyen. Evégből kell, hogy: $q^n < \left|\frac{\varepsilon}{a}\right|$ legyen, amit miként a 16. lapon láttuk, elérhetünk, ha n-et valamely, könnyen meghatározható N-nél nagyobbnak választjuk. A sorozat 0 sorozat, melyet rövid jelöléssel így írunk fel:

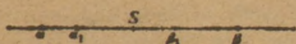
$$\lim_{n=\infty} aq^n = 0.$$

A 0-sorozatban (így nevezzük rövidebben a 0-t értelmező sz. sorozatokat) akárminő messze haladjunk is, még mindig lehetnek különböző előjelű tagok. Más sz. sorozatban ez nem lehetséges. Ha ugyanis $S = s$ pozitiv, akkor a s-et értelmező A szeletben válasszunk egy tetszésszerinti pos. α számot. Ezen α-nál kisebb szám a sorozatban csak véges számban lehet, vagyis egy N indextől kezdve már a sorozat minden tagja α-nál nagyobb, tehát pozitiv. Éppen így áll a dolog, ha az $S = s$ negativ. *Az olyan sz. sorozatban, mely nem 0 sorozat, csak véges számú jelváltás lehetséges.* Ha az értelmezett szám pozitiv (negativ), akkor egy bizonyos megadható indexen túl a sorozat minden tagja pozitiv (negativ).

Eddigelé főként olyan számsorozatokról beszéltünk, melyek tagjai rac. számok. Látni fogjuk majd, hogy éppen úgy használhatunk olyan számsorozatokat is, amelyek elemei irracionális számok. Ezúttal csak arra akarunk utalni, hogy ha az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozat elemei irracionális számok, melyek végtelen csekélyekké lesznek, a sorozat akkor is a 0-t értelmezi oly módon, hogy e sorozatra nézve $S=s=0$. A bizonyítás éppen úgy végezhető, előbb, kimutatva, hogy minden pozitiv racionális szám az S-et (vagy s-et) értelmező B szeletbe, és minden negativ racionális szám az S (vagy s) értelmezésénél szereplő A-ba való.

A 0 sorozatnak a következő nevezetes tulajdonsága van: *Ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozat és $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ 0 sorozat, akkor az $a_1+\varepsilon_1, a_2+\varepsilon_2, a_3+\varepsilon_3, \ldots$ is szabályos sorozat, mely ugyanazt a számot értelmezi, mint az $a_1, a_2, a_3, \ldots$, vagyis* $\lim(a_n+\varepsilon_n) = \lim a_n$.

[Megmutatjuk, hogy az $a_1+\varepsilon_1, a_2+\varepsilon_2, a_3+\varepsilon_3, \ldots$ sorozat főszármazékszámai is megegyeznek: $S'=s'$ és hogy $S'=S$, (azaz S' által létesített A' szelet megegyezik az S-hez tartozó A-val, illetőleg B' megegyezik B-vel). Sőt ennél többet is megmutathatunk, t. i. azt, hogy ha az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tetszés szerinti végtelen sorozat, melynek főszármazékszámai S és s, akkor $a_1+\varepsilon_1, a_2+\varepsilon_2, a_3+\varepsilon_3, \ldots$ főszármazékszámai szintén S és s. Ugyanis az S értelmezésére szolgáló B szeletből vegyünk egy tetszés szerinti β racionális számot. Szemeljünk ki még egy ennél kisebb β_1 számot is a B-ből. Ennél nagyobb szám az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatban csak véges számban lehet. Van tehát olyan N index, melyen túl már β_1-nél nagyobb szám nincs a sorozatban. Menjünk el most az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ sorban olyan messze, hogy azontúl csupa $\beta-\beta_1$-nél



9. ábra.

kisebb szám legyen. Ezt elérhetjük, mert e sorozat a 0-t értelmezi. Mondjuk, hogy az N_1-ik tagon túl következik ez be. Az N és N_1 számok közül a nagyobbikat jelöljük M-mel. Eszerint tehát egyrészt

$$a_n < \beta_1, \quad \text{ha} \quad n > M,$$

másrészt:

$$|\varepsilon_n| < \beta - \beta_1, \quad \text{ha} \quad n > M,$$

ebből következik, hogy*

$$a_n+\varepsilon_n < \beta, \quad \text{ha} \quad n > M,$$

vagyis az $a_1+\varepsilon_1, a_2+\varepsilon_2, a_3+\varepsilon_3, \ldots$ sorozatban β-nál nagyobb csak véges számú van; a β tehát az S'-hez tartozó B' szeletben van.

Ha pedig α egy tetszés szerinti rac. szám az S-hez tartozó A szeletből (azaz végtelen sok α-nál nagyobb szám van az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatban), akkor szemeljünk ki egy $\alpha_1 > \alpha$ számot ugyancsak az A-ból. Az α_1-et túlhaladó szám az a sorozatban végtelen sok van. Menjünk el most az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ sorban olyan messze, hogy minden tag kisebb abszolut értékű legyen $\alpha_1-\alpha$-nál. Mondjuk, hogy ez az N-ik tagon túl következik be. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatban végtelen sok, α_1-nél nagyobb szám van; tehát az N-ik tagon túl is végtelen sok ilyen van. Ha a_n egy ilyen tag, azaz

$$a_n > \alpha_1,$$

akkor, minthogy:**

$$|\varepsilon_n| < \alpha_1 - \alpha.$$

* U. i. $a_n+\varepsilon_n \leq a_n+|\varepsilon_n|$; kisebb, ha ε_n negativ, egyenlő, ha ε_n pozitiv.
** U. i. $a_n+\varepsilon_n \geq a_n-|\varepsilon_n|$; nagyobb, ha ε_n pozitiv és egyenlő, ha ε_n negativ.

$$a_n + \varepsilon_n > \alpha$$

és minthogy végtelen sok ilyen n index van, tehát az $a_1+\varepsilon_1, a_2+\varepsilon_2, a_3+\varepsilon_3, \ldots$ sorban végtelen sok α-nál nagyobb szám van, vagyis α az S'-t értelmező A' szeletben van. Azt látjuk tehát, hogy az S-et értelmező B szelet (A szelet) minden száma az S'-t értelmező B'-ben (A'-ben) van, tehát $S=S'$.

Egészen hasonlóan mutatható meg, hogy az alsó származékszámok is megegyeznek, vagyis $s=s'$. *Ha tehát az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nem szabályos sorozat, akkor az $a_1+\varepsilon_1, a_2+\varepsilon_2, a_3+\varepsilon_3, \ldots$ sem szabályos sorozat, de a főszármazékszámok megegyeznek. Ha pedig az $a_1, a_2, a_3 \ldots$ szabályos sorozat, mely az $S=s$ számot értelmezi, akkor az $a_1+\varepsilon_1, a_2+\varepsilon_2+\cdots$ is szabályos sorozat, mely ugyanazt az $S=s$ számot értelmezi.*]

Fordítva is áll ez az utóbbi állítás. *Ha ugyanis két szabályos sorozat*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{és} \quad b_1, b_2, b_3, \ldots$$

ugyanazt a számot értelmezi, azaz $\lim a_n = \lim b_n$, *akkor e sorozatok tagjai egymástól csakis egy 0-sorozatban különbözhetnek, azaz $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, \ldots$ 0 sorozat, vagyis* $\lim (a_n-b_n)=0$.

Ezt megint a következőképpen láthatjuk be: Legyen a $\lim a_n = \lim b_n$ értelmezésére szolgáló B szelet valamelyik száma β és az A szelet egy száma α. E két szám már úgy legyen választva, hogy $\beta-\alpha$ kisebb legyen egy tetszés szerinti előre megadott ε-nál. Akkor, miként ismeretes, elmehetünk olyan messze, hogy az a sorozat minden tagja ebbe az $\alpha \ldots \beta$ közbe essék. Mondjuk, hogy N az ide tartozó küszöbszám. Hasonlóképpen menjünk el a b sorozatban is olyan messzire, hogy azontúl minden tag ebbe az $\alpha\beta$ közbe essék. Legyen N_1 az ehhez szükséges küszöbszám. A kettő közül a nagyobbikat jelöljük M-mel. Ekkor tehát

$$\alpha < a_n < \beta, \quad \alpha < b_n < \beta,$$

ha $n > M$. Minthogy az M-iken túl minden a és minden b az $\alpha\beta$-ba esik, tehát

$$|a_n - b_n| < \varepsilon,$$

ha $n > M$. És ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

Kimutattuk tehát, hogy két szabályos sorozat akkor és csakis akkor értelmezi ugyanazt a számot, ha $\lim (a_n-b_n)=0$, *vagyis, ha megfelelő tagjainak a különbsége 0 sorozat.*

Egy és ugyanazt a számot számtalan sok szabályos sorozattal értelmezhetjük; de mindezek a sorozatok egymástól csak 0 sorozatokban különbözhetnek. Némelykor még racionális számot is szabályos sorozattal állítunk elő, vagyis olyan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozatot használunk, melyre nézve $\lim a_n = A$ rac. szám. Ezt az esetet még a következőképpen is jellemezhetjük. Az A rac. szám értelmezésére szolgáló egyik, legtermészetesebb szabályos sorozat az, amelynek tagjai mind egyenlők A-val: $A, A, A, \ldots$ Ha már most az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozat is ugyanazt a számot értelmezi, akkor

$$a_1-A,\ a_2-A,\ a_3-A, \dots\ a_n-A, \dots$$

0 sorozat, vagyis $\lim (a_n-A)=0$,

vagy más szóval: *az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatnak akkor és csakis akkor lesz az A rac. szám a határértéke, ha bármely ε-hez található oly N küszöbszám, hogy:*

$$|a_n-A|<\varepsilon, \text{ ha } n>N.$$

Így pl. $\frac{1}{1-q}$ a határértéke az

$$s_1=1,\ s_2=1+q,\ s_3=1+q+q^2,\ s_4=1+q+q^2+q^3, \dots\ s_n=1+q+q^2+\dots+q^{n-1}, \dots$$

sorozatnak, ha $|q|<1$, mert

$$s_n=\frac{1-q^n}{1-q}$$

és így

$$\frac{1}{1-q}-s_n=\frac{q^n}{1-q},$$

de $\lim\limits_{n=\infty}\frac{q^n}{1-q}=0$ (vagyis a $\frac{q}{1-q}, \frac{q^2}{1-q}, \frac{q^3}{1-q}, \dots$ sorozat 0-sorozat).

Ilyen értelemben mondhatjuk, hogy $\frac{1}{9}=0{\cdot}1111\dots$, $\frac{1}{3}=0{\cdot}3333\dots$ s í. t.

9. Műveletek a reális számokkal. Ha a és b rac. számok, akkor az elemekből ismeretes eljárással meg tudjuk állapítani azt a számot, melyet $a+b$-vel, $a-b$, ab vagy $\frac{a}{b}$-vel jelölünk. Ha e számok nem racionálisak, akkor hogyan végzendők e műveletek? Az irracionális számok rendszerint szabályos sorozataikkal vannak értelmezve. Kérdés tehát, hogy ha a és b irr. számok szabályos sorozatai meg vannak adva, miképpen határozzunk meg olyan szabályos sorozatokat, amelyek által értelmezett számokat a és b összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának nevezhessük. Minthogy nemcsak irracionális, hanem rac. számokat is előállíthatunk szabályos sorozatokkal, a megállapítandó eljárásainknak olyanoknak kell lenniök, hogy az esetben, midőn az adott sorozatok rac. számokat jelentenek, a régi, ismeretes eredményekre vezessenek. Másrészt pedig azt is megköveteljük a szabályos sorozatok értelmezte számokkal végzendő műveletektől, hogy ezen műveleteknek a rac. számok esetében fennálló alaptulajdonságai (pl. az összeadás commutativ és associativ volta, a szorzás commutativ, associativ és distributiv volta stb.) érvényben maradjanak. Ezzel a mathematikai értelmezések teljes szabadságának korlátokat szabunk, hogy eljárásaink általánosságát, rac. és irracionális számokra való egyforma alkalmazhatóságát, biztosítsuk.

a) *Az összeg megállapítása.* Ha adva van két szám: a és b szabályos sorozataik által, és pedig

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{és} \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

szabályos sorozatok közül az első az a, a második a b számot értelmezi, azaz

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b,$$

akkor megalkotjuk e két sorozatból az

$$a_1 + b_1, \; a_2 + b_2, \; a_3 + b_3, \ldots$$

sorozatot. Bebizonyítjuk, hogy ez is szabályos sorozat és definicióképpen megállapítjuk, hogy ezen szabályos sorozat által értelmezett c szám az a és b összege, azaz formulában:

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Hogy az $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ szabályos sorozat, azt úgy mutatjuk meg, hogy bármely ε-hoz található olyan N küszöbszám, melyen túl levő tagok különbsége ε-nál kisebb, azaz (minden poz. egész k-ra nézve).

$$|a_{n+k} + b_{n+k} - (a_n + b_n)| < \varepsilon,$$

ha csak $$n > N.$$

Felezzük meg evégből az adott ε számot és határozzuk meg az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatra nézve az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó küszöbszámot. Legyen ez N_1; akkor tehát minden poz. egész k-ra:

$$|a_{n+k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha csak} \quad n > N_1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget így is írhatjuk:

$$a_n - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n+k} < a_n + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \alpha)$$

Határozzuk meg az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez a $b_1, b_2, b_3, \ldots$ szabályos sorozatban tartozó küszöbszámot. Legyen ez N_2, akkor tehát minden poz. egész k-nál

$$|b_{n+k} - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha csak} \quad n > N_2,$$

vagyis $$b_n - \frac{\varepsilon}{2} < b_{n+k} < b_n + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \beta)$$

Az N_1 és N_2 számok közül jelöljük a nagyobbikat M-el, akkor tehát az $\alpha)$ és $\beta)$ alatti egyenlőtlenségek fennállanak, ha csak $n > M$. E két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva:

$$a_n + b_n - \varepsilon < a_{n+k} + b_{n+k} < a_n + b_n + \varepsilon,$$

ha csak $$n > M.$$

Ez az egyenlőtlenség még így is írható:

$$|a_{n+k}+b_{n+k}-(a_n+b_n)|<\varepsilon,$$

ha

$$n>M,$$

és ezzel kimutattuk, hogy az a_1+b_1, a_2+b_2, $a_3+b_3,\ldots$ sorozat szabályos sorozat. E sorozat által értelmezett c számot nevezzük az a és b összegének, vagyis $c=a+b$. Ha az egyik összeadandó: 0, azaz pl.: a $b_1, b_2, b_3,\ldots$ sorozat 0 sorozat, akkor, miként már a 7. pontban megállapítottuk, az a_1+b_1, a_2+b_2, $a_3+b_3,\ldots$ sorozat szintén az a számot értelmezi, vagyis $a+0=a$.

Ezen megjegyzésből azonnal beláthatjuk azt is, hogy az összeg független az összeadandók értelmezésére felhasznált sorozatoktól, mert ha más szabályos sorozatot használunk az a, ill. a b értelmezésére, ez az előbbitől csak 0 sorozatban különbözhetik. Az összeadás ezen megállapítása a rac. számokra megállapított összeadási műveletnek kibővítése; de olyan, amely a régit magában foglalja. Ha ugyanis az a és b rac. számok, akkor a legtermészetesebb szabályos soraik:

$$a, a, a,\ldots;\quad b, b, b,\ldots$$

és a megállapított módon e két szám összegét az

$$a+b, a+b, a+b,\ldots$$

szabályos sorozat értelmezi, mely valóban: $a+b$.

Példa. A $\sqrt{2}$ értelmezésére szolgáló szabályos sorozat:

1, 1·4, 1·41, 1·414, 1·4142, 1·41421, 1·414213, 1·4142135...

A $\sqrt{3}$ értelmezésére szolgáló szabályos sorozat:

1, 1·7, 1·73, 1·732, 1·7320, 1·73205...

A $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ értelmezésére szolgáló szabályos sorozat:

2, 3·1, 3·14, 3·146, 3·1462, 3·14626...

Ha az összegben ε pontosságot akarunk, akkor mindegyik összeadandót $\frac{\varepsilon}{2}$ pontossággal vesszük figyelembe. Így pl., ha 0·0001 pontossággal számolunk, akkor mindegyik összeadandóban olyan messzire kell menni, hogy a hiba 0·00005-nél kisebb legyen. Ezt elérjük, ha mindegyik összeadandóban a százezredrészt elhagyjuk, de a rendes módon igazítással pótoljuk a tízezredrészt.

b) *A különbség megállapítása.* Ha az a számot az $a_1, a_2, a_3,\ldots$ és a b számot a $b_1, b_2, b_3,\ldots$ szabályos sorozatok értelmezik, akkor megalkotjuk az

$$a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3,\ldots$$

sorozatot. Azt állítjuk, hogy ez is szabályos sorozat és definicióképpen e sorozat határértékét, c-t nevezzük az a és b különbségének, azaz

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

A bizonyítás egészen úgy végezhető, mint előbb. A különbség ezen megállapítása szintén magában foglalja a rac. számokra vonatkozó ismeretes eljárást és azonnal beláthatjuk azt is, hogy a különbség ezen értelmezéséből következik, hogy ha $c = a - b$, akkor $a = b + c$.

c) *A szorzás megállapítása.* Először megmutatjuk, hogyha az a számot értelmezi az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szab. sorozat és $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots$ egy tetszésszerinti 0-sorozat, akkor az

$$a_1 e_1, \; a_2 e_2, \; a_3 e_3, \ldots$$

sorozat is 0 sorozat. Vagyis rövid jelölésben: $\lim a_n e_n = 0$.

Evégből csak azt kell megmutatnunk, hogy egy tetszésszerinti kis ε számhoz tartozik oly N küszöbszám, hogy

$$|a_n e_n| < \varepsilon, \quad \text{ha csak} \quad n > N.$$

Szemeljünk ki egy tetszésszerinti poz. A rac. számot, mely az $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$ sorozat minden tagjánál nagyobb (mivel a véges szám, ez mindig lehetséges) és az adott ε helyett vegyük az $\frac{\varepsilon}{A}$ számot. Minthogy az $e_1, e_2, e_3, \ldots$ sorozat 0-sorozat, tehát elmehetünk benne olyan messze, hogy azontúl minden tagja abs. értékre nézve $\frac{\varepsilon}{A}$-nál kisebb legyen; azaz:

$$|e_n| < \frac{\varepsilon}{A}, \quad \text{ha} \quad n > N.$$

Minthogy pedig mindenik $|a_n| < A$, tehát:

$$|a_n e_n| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N$$

és ezzel kimutattuk, hogy $\lim a_n e_n = 0$.

Ha pedig az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozat az a számot és a $b_1, b_2, b_3, \ldots$ szabályos sorozat a b számot értelmezi és egyik sem 0-sorozat, akkor azt állítjuk, hogy e két sorozatból alkotott:

$$a_1 b_1, \; a_2 b_2, \; a_3 b_3, \; a_4 b_4, \ldots \; a_n b_n, \ldots$$

sorozat is szabályos sorozat és ha az általa értelmezett szám c, akkor definicióképpen megállapítjuk, hogy

$$c = ab,$$

vagyis: $\lim (a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.

Hogy az $a_1 b_1, \; a_2 b_2, \; a_3 b_3, \ldots$ sorozat szabályos sorozat, annak megállapítása végett megmutatjuk, hogy bármely ε-hoz található oly N küszöbszám, hogy minden k poz. egész számra nézve:

$$|a_{n+k}b_{n+k} - a_n b_n| < \varepsilon,$$

ha $$n > N.$$

Minthogy az adott sorozatok közül egyik sem 0, feltehetjük, hogy mindkettő poz. számot értelmez (ellenkező esetben tagjait -1-gyel szoroznók) és így, miként kimutattuk, (20. lapon) egy bizonyos indextől kezdve úgy az a sor, mint a b sor tagjai mind positivok. Szemeljünk ki most olyan poz. A rac. számot, mely nagyobb az a sor minden tagjánál és olyan B poz. rac. számot, mely nagyobb a b sor minden tagjánál és az adott kis ε helyett vegyük a következő számot:

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{A+B+1}.$$

(Az ε' már oly kicsinyre vehető, hogy egy M-en túl az $a_n-\varepsilon'$ és $b_n-\varepsilon'$ is pozitivok legyenek.)

Határozzuk meg az ε'-hez az a sorozatban tartozó küszöbszámot és ugyancsak az ε'-hez a b sorozatban tartozó küszöbszámot. E két küszöbszám közül legyen a nagyobbik: N. (N választásánál arra is ügyelünk, hogy az $N>M$ legyen.) Ekkor tehát:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon' \quad \text{ha} \quad n > N,$$

ami ismét így írható:

$$a_n - \varepsilon' < a_{n+k} < a_n + \varepsilon'.$$

Éppen így: $$b_n - \varepsilon' < b_{n+k} < b_n + \varepsilon', \quad \text{ha} \quad n > N$$

E két egyenlőtlenség szorzásából ered:

$$a_n b_n - \varepsilon'(a_n+b_n)+\varepsilon'^2 < a_{n+k}\cdot b_{n+k} < a_n b_n + \varepsilon'(a_n+b_n)+\varepsilon'^2.$$

A jobboldalt nagyobbítjuk azzal, hogy ε' szorzóját a_n+b_n helyett $A+B$-nek vesszük és még a kis ε' négyzete helyett ε'-t írunk (valódi tört négyzete kisebb e törtnél). A baloldalt pedig kisebbítjük oly módon, hogy az $\varepsilon'(a_n+b_n)$ kivonandó helyett a nagyobb $\varepsilon'(A+B)$-t tesszük és az ε'^2 helyett a kisebb $-\varepsilon'$-t írjuk. Eszerint:

$$a_n b_n - \varepsilon'(A+B+1) < a_{n+k}b_{n+k} < a_n b_n + \varepsilon'(A+B+1),$$

tehát: $$a_n b_n - \varepsilon < a_{n+k}b_{n+k} < a_n b_n + \varepsilon$$

ami még így is írható:

$$|a_{n+k}b_{n+k} - a_n b_n| < \varepsilon$$

és ezzel kimutattuk, hogy az a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... sorozat szabályos sorozat. Az általa értelmezett c számot az a és b szorzatának nevezzük. A szorzat ezen megállapítása is független az a és b

számok értelmezésére használt szabályos sorozatoktól. Ha ugyanis más szabályos sorozattal értelmezzük az a számot, ez csak ilyen alakú lehet:

$$a_1+e_1,\ a_2+e_2,\ a_3+e_3,\dots$$

ahol $e_1, e_2, e_3,\dots$ 0 sorozat. Éppen így a b-t értelmező sorozat:

$$b_1+e'_1,\ b_2+e'_2,\ b_3+e'_3,\dots$$

alakú, ahol $e'_1, e'_2, e'_3,\dots$ is 0 sorozat. E két sorozatból az előbbi eljárással megalkotjuk azt, melynek n-ik tagja:

$$a_n b_n+e_n b_n+e'_n a_n+e_n e'_n.$$

Ezen sorozat pedig az összeadás értelmezése szerint 4 szám összegét értelmezi: ez összeg:

$$\lim a_n b_n+\lim e_n b_n+\lim e'_n a_n+\lim e_n e'_n.$$

De a második, harmadik és negyedik tag 0, tehát az új sorozat határértéke is $\lim a_n b_n$.

A szorzás ezen megállapitása természetesen magában foglalja azt az esetet is, midőn az egyes tényezők racionálisak, és ezen esetben az ismeretes szorzatra vezet. Ha ugyanis a és b rac. számok, akkor a legtermészetesebb értelmezésük az $a, a, a,\dots$ illetőleg $b, b, b,\dots$ szabályos sorozatok és így a szorzatot értelmező sorozat: $ab, ab, ab,\dots$ valóban az ab számot szolgáltatja.

A szorzat megállapitásánál a legfontosabb lépés annak a kimutatása volt, hogy az $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3,\dots$ sorozat szabályos sorozat. A bizonyitásnál követett eljárás világosabbá válik, ha a közönséges számvetésben követett hasonló eljárásra utalunk. Ha adva van két (esetleg végtelen) tizedes szám

$$\alpha\cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots\quad \beta\cdot\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\dots$$

az első α egészet, a második β egészet is tartalmaz és e két szám szorzatát akarjuk megállapitani ε pontossággal, akkor a következőként járhatunk el. Kiszemelünk olyan A számot, mely nagyobb az első számnál és olyan B számot, mely nagyobb a második számnál (ilyen pl. $\alpha+1$, vagy $\alpha\cdot(\alpha_1+1)$, $\alpha\cdot\alpha_1(\alpha_2+1)$ s í. t., $\beta+1$, vagy $\beta\cdot(\beta_1+1),\dots$) és ha mindegyik tényezőt

$$\frac{\varepsilon}{A+B+1}$$

pontossággal vesszük tekintetbe, akkor a szorzat ε pontosságú lesz. Így pl., ha 32·53482672... és 58·79325483... szorzandók egymással $\frac{1}{10000}$ pontossággal, akkor A gyanánt 33, B gyanánt 59 választható, így $\frac{\varepsilon}{A+B+1}$ helyett a kisebb $\frac{\varepsilon}{100}=\frac{1}{1000000}$ veendő; vagyis, ha a tényezőket milliomodrészre kikerekítjük, akkor a szorzat tízezredrészre pontos lesz; tehát 32·534827 és 58·793255 szorzandók.

d) *A hányados megállapítása.* Ha $b_1, b_2, b_3,\dots$ szab. sorozat a 0-tól különböző b számot értelmezi, azaz $\lim b_n=b\neq 0$, akkor az

$$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots \frac{1}{b_n}, \ldots$$

is szabályos sorozat és az általa értelmezett β számot a b reciprok értékének mondjuk, azaz:

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$

Feltehetjük, hogy b pozitiv. Szemeljünk ki egy tetszésszerinti, b-nél kisebb B poz. racionális számot. Tudjuk, hogy a $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sorozat a b helyen összesűrűsödik, azaz, ha még egy tetszésszerinti A számot is választunk, mely b-nél nagyobb, akkor bizonyos N indextől kezdve, a sorozatnal minden tagja B és A közé esik, tehát B-nél nagyobb. Nekünk ezúttal csak arra van szükségünk, hogy a sorozat tagjai (bizonyos tagtól kezdve) mind nagyobbak a B-nél. (Ezt nem mondhattuk volna, ha a $b=0$ lett volna, amit kizártunk). Azt kell megmutatnunk, hogy az $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots$ sorozat szabályos, azaz tetszésszerinti ε-hoz található oly M küszöbszám, hogy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+k}}\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > M$$

és k tetszésszerinti poz. egész szám.

Az adott ε-ból állítsuk elő az $\varepsilon' = B^2\varepsilon$ számot és menjünk el az adott $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sorozatban olyan messze, hogy egyrészt már teljesítve legyen az a követelés, hogy minden b_n nagyobb legyen a B-nél, másrészt pedig, hogy két tag különbsége ε'-nél kisebb abs. értékű legyen. Tegyük fel, hogy M-nél nagyobb indexekre ezt már elértük, azaz

$$|b_{n+k} - b_n| < \varepsilon' \quad \text{és} \quad |b_n| > B, \quad \text{ha} \quad n > M.$$

Most állítsuk elő ezt a különbséget:

$$\left|\frac{1}{b_{n+k}} - \frac{1}{b_n}\right|.$$

Ez a különbség, ha $n > M$

$$\left|\frac{1}{b_{n+k}} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_{n+k} - b_n}{b_n b_{n+k}}\right| < \frac{\varepsilon'}{B^2} = \varepsilon,$$

(mert a számlálót nagyobbítottuk, midőn helyébe ε'-t írtunk és a nevezőt kisebbítettük, midőn úgy a $|b_n|$, mint $|b_{n+k}|$ helyett B-t írtunk).

Ezzel kimutattuk, hogy az $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots$ sorozat szabályos. Az általa értelmezett β számot definicióképpen $\frac{1}{b}$-nek mondjuk.

Ha már most $a_1, a_2, a_3, \ldots$ az a számot értelmező szabályos sorozat, akkor a *c)* alatti pont értelmében az

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}, \ldots$$

is szabályos sorozat és határértéke $a \cdot \frac{1}{b}$, melyet $\frac{a}{b}$-nek fogunk írni. Formulában tehát:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}, \quad \text{ha} \quad \lim b_n \neq 0.$$

A reciprok érték megállapításánál a legfontosabb lépés szintén annak a kimutatása volt, hogy az $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots$ szab. sorozat. Az itt követett gondolatmenetet gyakran alkalmazzuk a közönséges számításnál is. Ha ugyanis adva van a $b = \beta \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \ldots$ tizedes tört és előre megállapítjuk, hogy az $\frac{1}{b}$ hányadost ε pontossággal akarjuk kiszámitani, kérdés, hogy az osztóban hány tizedes jegyet vegyünk tekintetbe? Evégből meghatározunk egy, a b-nél kisebb B számot, pl. β-t, ha ez nem 0, vagy $\beta \cdot \beta_1$-et, ... s í. t. és a b számból annyi tizedes jegyet hagyunk csak meg, hogy a hiba $B^2 \varepsilon$-nál kisebb legyen; mert ekkor már az $\frac{1}{b}$ hányadost ε pontossággal kapjuk. Így pl., ha az osztó: 43·7653182... és a reciprok értékét $\frac{1}{1000000}$ pontossággal akarjuk meghatározni, akkor így járunk el: B gyanánt 40-et veszünk (43 helyett) és akkor $B^2 = 1600$ és e helyett a kisebb 1000-et vesszük. $B^2 \varepsilon$ tehát a jelen esetben: $\frac{1000}{1000000} = \frac{1}{1000}$, vagyis az osztót ezredrészre kerekítjük ki. Osztó gyanánt a 43·765-öt használjuk.

Ha pedig e két szám hányadosát akarjuk meghatározni: $a = \alpha \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$ és $b = \beta \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots$ ε pontossággal, akkor tudjuk már előbbről, hogy az egyes tényezőket $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{A+B+1}$ pontossággal kell tekintetbe vennünk. Az egyik tényező a, a másik $\frac{1}{b}$.

10. A szabályos sorozat általánositása. Eddigelé főként olyan szab. sorozatokról szóltunk, melyeknek tagjai racionális számok; mert hiszen a szab. sorozat értelmezésében szereplő $a_{n+k} - a_n$ különbségről nem szólhattunk, ha az a_{n+k} és a_n nem racionálisak. Most azonban, minthogy a műveleteket, főként a kivonás műveletét minden reális számra kiterjesztettük, semmi sem akadályoz bennünket abban, hogy mindazt, amit rac. számokból álló szab. sorozatokról mondtunk, kiterjesszük az olyan szab. sorozatokra is, melyek tagjai bárminő reális számok. (Egy esetben már ezt meg is mutattuk: a 0 sorozat tagjai t. i. tetszésszerinti számok lehetnek, vagyis, ha valamely $e_1, e_2, e_3, \ldots$ sorozatra nézve minden ε-hoz található oly N küszöbszám, hogy $|e_n| < \varepsilon$, akkor e sorozatnak egyetlenegy összesűrűsödési helye van és ez a 0, tehát akkor e sorozat a már ismert módon a 0 értelmezésére szolgál.) Általában már most mindazokat a sorozatokat, melyekre nézve bármely pozitiv ε-hoz található oly N küszöbszám, hogy $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ minden poz. k

indexnél, ha $n>N$, szabályos sorozatoknak nevezzük. (Minden, reális számokból álló sorozatnak van két főszármazékszáma S és s es ha ezek összeesnek, a sorozat szabályos.) Ezen sorozatokra vonatkozólag éppen úgy mutathatnók meg az összeadás, kivonás, szorzás és osztás törvényeit mint előbb; ezekre nézve éppen úgy következik, hogy két sorozat akkor és csakis akkor értelmezi ugyanazt a számot, ha egymástól 0 sorozatban különböznek.

Ebből az állításból egy nevezetes következtetést vonunk le. Azt már láttuk, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szab. sorozat egy α rac. számot értelmez, azaz, ha $\lim a_n = \alpha$ rac. szám, akkor ez még úgy is kifejezhető, hogy az

$$a_1 - \alpha,\ a_2 - \alpha,\ a_3 - \alpha, \ldots\ a_n - \alpha, \ldots$$

sorozat 0 sorozat (L. 23. lap). Ugyanígy áll a dolog akkor is, ha α irracionális szám. Ekkor ugyanis az

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{és} \quad \alpha, \alpha, \alpha, \ldots$$

sorozatok ugyanazt a számot értelmezik, tehát előbbi megjegyzésünk szerint az

$$a_1 - \alpha,\ a_2 - \alpha,\ a_3 - \alpha, \ldots\ a_n - \alpha, \ldots \qquad 1)$$

sorozat 0 sorozat, vagyis

$$\lim (a_n - \alpha) = 0.$$

Fordítva is áll a dolog. Ha ez az 1) alatti sorozat 0 sorozat, akkor az $a_1, a_2, \ldots$ oly szabályos sorozat, mely az α-t értelmezi, mert hiszen ez a sorozat az $\alpha, \alpha, \alpha, \ldots$-ból úgy keletkezik, hogy az $a_1 - \alpha$, $a_2 - \alpha$, $a_3 - \alpha, \ldots$ 0 sorozatot hozzáadjuk.

Ebből a szab. sorozat új világításba kerül. Eddig az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatról úgy kellett mindig megmutatnunk, hogy szabályos sorozat, hogy tagjainak egymásközti különbségét vizsgáltuk, azt néztük, hogy *egymástól*, elég messze haladva a sorban, elég kevéssel különböznek-e; de most már némelykor másként járhatunk el. Ha ugyanis megmutatjuk, hogy a sorozat tagjai egy bizonyos α számtól tetszésszerinti kevéssel különböznek, ha elég messze haladunk a sorozatban, vagyis, ha meg tudjuk mutatni, hogy egy tetszésszerinti kis pozitiv ε-hoz tartozik oly N küszöbszám, hogy azontúl mindig

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad \text{ha csak} \quad n > N$$

[vagyis $\lim (a_n - \alpha) = 0$], akkor nemcsak azt mutattuk meg, hogy e sorozat szabályos, hanem egyúttal azt is, hogy az általa értelmezett szám: α, vagyis $\lim a_n = \alpha$.

Lássuk ezen fontos megjegyzés alkalmazását egy-két példán.

1) A 0·1111... végtelen tizedes törtre azt mondjuk, hogy: $\frac{1}{9}$. Mi ennek a pontos értelme? Egyszerűen az, hogy a

$$0{\cdot}1,\ 0{\cdot}11,\ 0{\cdot}111,\ 0{\cdot}1111, \ldots$$

sorozat oly szabályos sorozat, melynek limese: $\frac{1}{9}$. E sorozat n-ik tagja ugyanis:

$$a_n = \frac{10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+1}{10^n} = \frac{10^n-1}{9.10^n},$$

tehát

$$\frac{1}{9} - a_n = \frac{1}{9} - \frac{10^n-1}{9.10^n} = \frac{1}{9.10^n}$$

és minthogy oly messze mehetünk a sorban, hogy $\frac{1}{9.10^n}$ mindig kisebb legyen egy tetszés szerint megadott ε számnál, tehát:

$$\lim a_n = \frac{1}{9}.$$

2. Egy másik példa, melyen rac. határérték létezését mutatjuk meg, a következő: Ez a sorozat:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8} \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$$

0 sorozat. Legyen már most a az 1-nél nagyobb szám: $a=1+u$. Alkossuk meg a következő sorozatot:

$$a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{4}},\ a^{\frac{1}{8}}, \ldots\ a^{\frac{1}{2^n}}, \ldots$$

Azt állítjuk, hogy ez szabályos sorozat, mely az 1-et értelmezi; azaz:

$$\lim_{n=\infty} a^{\frac{1}{2^n}} = 1.$$

Evégből csak azt kell megmutatnunk, hogy az

$$(a^{\frac{1}{2}}-1),\ (a^{\frac{1}{4}}-1),\ (a^{\frac{1}{8}}-1), \ldots\ (a^{\frac{1}{2^n}}-1), \ldots \qquad a)$$

sorozat 0 sorozat, vagyis: $\lim\limits_{n=\infty} (a^{\frac{1}{2^n}}-1) = 0.$

Ezt a következő megfontolással mutatjuk meg: Először is beláthatjuk azonnal, hogy az $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{8}}, \ldots$ sorozat monoton csökkenő, mert általában $\sqrt[k]{1+u} > \sqrt[l]{1+u}$ (mindig a pozitiv gyökre gondolva), ha $k<l$; továbbá az $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, \ldots$ számok mind nagyobbak az 1-nél, mert ha 1-nél nagyobb számból gyököt vonunk, a gyök 1-nél nagyobb lesz. Így tehát a sorozat korlátos; következésként szabályos sorozat; most már csak azt kell megmutatni, hogy határértéke: 1. Azt állítjuk, hogy

$$a^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{u}{2},$$

mert, ha ez az egyenlőtlenség nem állana, akkor $a^{\frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{u}{2}$ volna és ebből négyzetreemeléssel következnék, hogy $a=1+u \geq 1+u+\frac{u^2}{4}$ lenne, ami képtelenség. Így tehát valóban $a^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{u}{2}$. De ebből új gyökvonással következik sorra:

$$a^{\frac{1}{4}} < 1 + \frac{u}{4},\quad a^{\frac{1}{8}} < 1 + \frac{u}{8},\quad a^{\frac{1}{16}} < 1 + \frac{u}{16}, \ldots\ a^{\frac{1}{2^n}} < 1 + \frac{u}{2^n}, \ldots$$

Mondhatjuk tehát általában, hogy

$$1 < a^{\frac{1}{2^n}} < 1 + \frac{u}{2^n}$$

és így:

$$a^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \frac{u}{2^n}.$$

De ezzel már ki is van mutatva, hogy az $a)$ alatti sorozat 0 sorozat, mert ha egy tetszés szerinti ε szám adatik, mindig találhatunk oly N-et, hogy $\frac{u}{2^N} < \varepsilon$ legyen és ha n ennél az N-nél nagyobb, akkor mindig: $\frac{u}{2^n} < \varepsilon$, tehát az $a)$ alatti sorozatban N az ε-hoz tartozó küszöbszám. E sorozat tehát 0 sorozat és így valóban:

$$\lim_{n=\infty} a^{\frac{1}{2^n}} = 1.$$

Ha a az 1-nél kisebb pozitiv szám, akkor is $\lim a^{\frac{1}{2^n}} = 1$. Erről meggyőződhetünk, ha tekintetbe vesszük, hogy ez esetben az $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{8}}, \ldots$ sorozat monoton növekedő, de minden tagja kisebb lévén 1-nél, korlátos sorozat. Ezután folytatólagosan így okoskodunk:

Minthogy a kisebb 1-nél, tehát ilyen alakban írható: $a = \frac{1}{1+u}$ és így:

$$a^{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{(1+u)^{\frac{1}{2^n}}}.$$

A jobboldalon a nevező helyett a nagyobb $1 + \frac{u}{2^n}$-t teszük, tehát

$$1 > a^{\frac{1}{2^n}} > \frac{1}{1 + \frac{u}{2^n}}$$

és így:

$$0 < 1 - a^{\frac{1}{2^n}} < 1 - \frac{1}{1 + \frac{u}{2^n}} = \frac{\frac{u}{2^n}}{1 + \frac{u}{2^n}}$$

és ha a szélső tagban a nevezőből még az $\frac{u}{2^n}$-et elhagyjuk, akkor még nagyobbítottuk, tehát

$$0 < 1 - a^{\frac{1}{2^n}} < \frac{u}{2^n}$$

és ebből már ép úgy, mint előbb, következik, hogy most is:

$$\lim_{n=\infty} (1 - a^{\frac{1}{2^n}}) = 0.$$

3. Harmadik példa gyanánt a következőt választjuk, mely az előbbinek általánosítása. Legyen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ egy tetszés szerinti (racionális) 0-sorozat és a tetszés szerinti, 1-nél nagyobb szám, akkor

$$a^{e_1}, a^{e_2}, a^{e_3}, \ldots a^{e_n}, \ldots$$

szabályos sorozat, mely az 1-et értelmezi, vagyis $\lim a^{e_n} = 1$. Ezt az állítást az előbbi példában bebizonyítottuk, ha az $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ez a speciális 0 sorozat volt: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Most egész általánosan akarjuk az állítás helyességét igazolni. Azt kell csak kimutatni, hogy $|a^{e_n}-1|$ tetszés szerinti kis ε számnál kisebb lesz, ha csak n-nel elég messzire megyünk. Azt már bebizonyítottuk, hogy az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$ sorozatban elmehetünk olyan messzire, hogy

$$|a^{\frac{1}{2^n}}-1|<\varepsilon, \text{ vagyis } 1<a^{\frac{1}{2^n}}<1+\varepsilon$$

legyen, ha csak $n>N$. Minthogy pedig az $e_1, e_2, \ldots$ 0 sorozat, tehát elmehetünk olyan messzire, hogy minden e szám abs. értékre nézve kisebb legyen $\frac{1}{2^N}$-nél. Mondjuk, hogy ez az M-iktől kezdve bekövetkezik. De ha az exponens kisebbedik, az 1-nél nagyobb szám hatványa is kisebbedik és így, ha e_m positiv szám, akkor, hacsak $m>M$,

$$1<a^{e_m}<a^{\frac{1}{2^N}}<1+\varepsilon.$$

Ha pedig e_m negativ szám, akkor meg az exponens abs. értékének csökkenésével a hatvány nő, tehát

$$1>a^{e_m}>a^{-\frac{1}{2^N}}.$$

A jobboldalon álló kifejezésről éppen úgy, mint 33. lapon, megmutatható, hogy $1-\varepsilon$-nál nagyobb, tehát

$$1>a^{e_m}>1-\varepsilon,$$

ha $m>M$ és így minden esetben:

$$|a^{e_m}-1|<\varepsilon,$$

ha $m>M$ és ezzel a szóban forgó állítást igazoltuk. A bizonyítás arra az esetre, midőn $a<1$, (de $a>0$) éppen így végezhető. Formulában ezt így is fogalmazhatnók:

Ha $\lim e_n=0$ [azaz $e_1, e_2, e_3, \ldots$ 0 sorozat], és a poz. szám, akkor $\lim a^{e_n}=1$.

11. Az irracionális számokat tartalmazó szabályos sorozat helyettesítése racionális sorozattal. Az előbbiekből egyszerűen következtethető, hogy gyakorlati szempontból nincs is szükségünk az olyan szabályos sorozatra, melynek tagjai között irracionális számok is vannak. Ha ugyanis egy tetszésszerinti irracionális α számról van szó, akkor alkothatunk olyan rac. számot, mely az α-tól egy megadott ε-nál kevesebbel különbözik. Evégből nem kell egyebet tennünk, mint az α értelmezésére szolgáló (péld. az általa létesített A szeletből kiválasztható) racionális $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ szabályos sorozatban olyan messzire menni, hogy $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ legyen.

Ezen kis megjegyzés alapján már most, ha az adott szabályos sorozatunk:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots$$

irracionális számokat is tartalmaz, akkor felveszünk egy tetszésszerinti $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n, \ldots$ (csupa poz. számból álló) zérus sorozatot (pl.: 0·1, 0·01, 0·001, ...) és megkeresünk egy olyan β_1 rac. számot, mely α_1-től e_1-nél kevesebbel különbözzék; azután β_2 rac.

számot úgy, hogy $|\alpha_2-\beta_2|<e_2$ legyen, továbbá β_3 rac. számot, hogy $|\alpha_3-\beta_3|<e_3$ s. í. t. legyen, (ha $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ végtelen tizedes törtek, akkor kikerekítjük őket rendre 0·1, 0·01, 0·001,... pontossággal). Azt állítjuk, hogy a $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ sorozat is szabályos és ugyanazt a számot értelmezi, mint az adott $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sorozat. Ugyanis az

$$\alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2, \alpha_3-\beta_3, \ldots \alpha_n-\beta_n, \ldots$$

mint azonnal belátható, 0 sorozat és ezzel állításunkat igazoltuk.

12. **Más műveletek az irracionális számokkal.** Megállapítottuk, mit kell értenünk $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$ alatt, ha a és b irracionális számok, vagyis, hogy a és b sz. soraiból hogyan kell olyan sz. sorokat készítenünk, melyek az $a\pm b$, ab és $\frac{a}{b}$ számokat értelmezik. Alig szükséges megemlíteni, hogy ezen alapon már nemcsak két, hanem több irracionális számmal is elvégezhetjük a négy alapműveletet, vagyis az $a, b, c, \ldots$ irracionális számokból összeadás, kivonás, szorzás és osztással (ha csak az osztó nem 0) alkotható minden kifejezés értelmezve van. Így például, ha x irracionális szám, akkor x minden pozitiv vagy negativ egész hatványa is értelmezve van. Ha ugyanis az x meghatározására szolgál az

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

szabályos sorozat, akkor x^2 alatt az

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots x_n^2, \ldots$$

szab. sorozat által értelmezett számot, e sorozat határértékét, azaz $\lim x_n^2$-t kell értenünk. A szorzás tárgyalásánál láttuk, hogy ez a sorozat tényleg szab. sorozat és az ott megállapított eljárásból még az a fontos dolog is következett, hogy ha az x értelmezésére nem éppen ezt a szab. sorozatot használtuk volna, hanem bármely más (tehát ettől 0 sorozatban különböző) akkor is ugyanerre a határértékre jutottunk volna. Általában, ha m pozitiv vagy negativ egész szám, és az x irracionális számot az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sorozattal definiáljuk, akkor az

$$x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots$$

is szab. sorozat és a limese: x^m. Formulában ezt így írjuk: Ha $x=\lim x_n$ (azaz x az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ szab. sorozat által van megadva), akkor

$$\lim (x_n^m)=x^m=(\lim x_n)^m.$$

E sorozat határértéke, az x^m szám független attól, hogy x értelmezésére minő szabályos sorozatot használtunk.

Ebből következik az is, hogy az x irracionális számmal alkotott ilyen egész kifejezések:

ax^2+bx+c, $ax^3+bx^2+cx+d, \ldots$ $a_0x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k$,

vagy ez a törtkifejezés:

$$\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k}{b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_l}$$

is oly módon számitandók ki, hogy az x-et értelmező bármelyik rac. szab. sorozat tagjait x helyébe egymás után helyettesítjük. Az így kapott helyettesítési eredmények szab. sorozatot alkotnak (hacsak a nevező nem 0 sorozat) és e sorozat által értelmezett szám adja meg a kifejezés értékét.

Feladatok és gyakorlatok.

1. Bizonyítsuk be, hogy ez a sorozat: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{n-1}{n}, \ldots$ szab. sorozat, mely az 1-et értelmezi. Mutassuk meg, hogy e sorozatnak 1 egyúttal a felső határa. Mekkorák az $\varepsilon=0{\cdot}1$, $0{\cdot}01$, $0{\cdot}001$-hez tartozó N küszöbszámok?

2. Mutassuk meg, hogy $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ szintén 1-et értelmező szabályos sorozat.

3. Mutassuk meg, hogy $2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ számhalmaz nem szab. sorozat és hogy főszármazékszámai: 0 és 1.

4. Ha t_n jelenti az r sugarú körbe írt szabályos n-szög területét és T_n a körülírt szabályos n-szögét, mutassuk meg, hogy e sorozat: $t_6, t_{12}, t_{24}, \ldots$ szabályos sorozat. Éppen így, hogy $T_6, T_{12}, T_{24}, \ldots$ szabályos sorozat és mutassuk meg, hogy $\lim t_n=\lim T_n$.

5. Legyenek a és $b>a$ pozitiv számok. Alkossuk meg sorban ezekből a következő pozitiv számokat:

$$a_1=\sqrt{ab},\ b_1=\frac{a_1+b}{2}.$$

Minthogy $b>a$, tehát: $b>a_1>a$: és $b_1<b$.
A most előállított a_1 és b_1-ből ugyanilyen módon állítsuk elő:

$$a_2=\sqrt{a_1b_1},\quad b_2=\frac{a_2+b_1}{2},\ \text{azután:}\ a_3=\sqrt{a_2b_2},\quad b_3=\frac{a_3+b_2}{2},\ \text{s i. t.}$$

Mutassuk meg, hogy az $a, a_1, a_2, \ldots$, valamint a $b, b_1, b_2, \ldots$ szab. sorozatok.

Továbbá: $$b_1-a_1=\frac{a_1+b}{2}-a_1=\frac{b-a_1}{2}<\frac{b-a}{2}.$$

Éppen így: $$b_2-a_2<\frac{b_1-a_1}{2}<\frac{b-a}{4},\ \text{s i. t.}$$

Mutassuk meg ennek alapján, hogy $\lim a_n=\lim b_n$. Ugyanezt még így is megmutathatjuk:

$$b_n=\frac{a_n+b_{n-1}}{2},\ \text{tehát}\ \lim b_n=\frac{\lim a_n+\lim b_{n-1}}{2}=\frac{\lim a_n+\lim b_n}{2},$$

miből $\lim a_n=\lim b_n$.

Jegyzet. Az elemi geometria megmutatja, hogy

$$t_{2n}=\sqrt{t_n T_n} \quad \text{és} \quad \frac{2}{T_{2n}}=\frac{1}{t_{2n}}+\frac{1}{T_n},$$

(ahol t_n és T_n a 4. feladatban megállapított értelműek), vagyis:

$$\frac{1}{t_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{t_n}\cdot\frac{1}{T_n}} \quad \text{és} \quad \frac{1}{T_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_{2n}}+\frac{1}{T_n}\right).$$

Ha $a=\frac{1}{T_4}$ és $b=\frac{1}{t_4}$ tesszük, azaz ($r=1$ téve): $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, akkor az előbbi $a_1, a_2, a_3, \ldots$, valamint $b, b_1, b_2, \ldots$ sorozatok az $\frac{1}{\pi}$ számot értelmezik.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ racionális számok szabályos sorozata és $\lim \alpha_n=\alpha$ és a tetszés szerinti pozitiv szám, akkor $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3}, \ldots$ is szabályos sorozat. Ugyanis e sorozat mindenik tagja kisebb valamely M számnál, tehát $|a^{\alpha_n}-a^{\alpha_{n+k}}|<M|1-a^{\alpha_{n+k}-\alpha_n}|$. Válasszuk a β számot oly kicsinyre, hogy $|1-a^{\beta}|<\frac{\varepsilon}{M}$ legyen. Ez lehetséges a 33. lapon foglaltak szerint.

És most menjünk el az n-el oly messze, hogy $|\alpha_n-\alpha_{n+k}|<\beta$ legyen, ha $n>N$. Ekkor már aztán: $|a^{\alpha_n}-a^{\alpha_{n+k}}|<\varepsilon$, tehát a szóban forgó sorozat szabályos. Ha $\beta_1\beta_2\beta_3, \ldots$ ugyanazt az α-t értelmezi, akkor $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, a^{\beta_3}, \ldots$ ugyanazt a számot értelmezi, mint $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3}, \ldots$

Ugyanis az $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \ldots$ sorozat az $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \ldots$-ből úgy keletkezik, hogy rendre az $a^{\beta_1-\alpha_1}, a^{\beta_2-\alpha_2}, a^{\beta_3-\alpha_3}, \ldots$-mal szorzunk. De itt az exponensek 0 sort alkotnak, tehát $\lim a^{\beta_n-\alpha_n}=1$.

7. Bizonyítsuk be, hogy e számok

$$1,\ 1+\frac{1}{2^2},\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}, \ldots,\ 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}, \ldots$$

szabályos sorozatot alkotnak.

Jegyzet. Minthogy a sorozat növekvő, elég megmutatni, hogy korlátos. Ez például így lehetséges:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Jegyzet. Evégből egy kis átalakítást kell végeznünk.

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{(2^2-1)(3^2-1)\ldots(n^2-1)}{(1.2.3\ldots n)^2}=$$

$$=\frac{1.3.2.4.3.5\ldots(n-1)(n+1)}{(1.2.3\ldots n)^2}=\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{3.4\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}=$$

$$=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

IRODALOM.

Jegyzet. Kézikönyvünkben a szám fogalmának felépítését nem tárgyaljuk rendszeresen, mert messzemenő fejtegetéseket igényelne. Az olvasónak, aki e résszel behatóbban akar foglalkozni, ajánljuk a következő forrásokat.

1. Dedekind: Was sind u. was sollen die Zahlen. Braunschweig 1887. 1893.
2. Kronecker Über den Zahlbegriff. Journ. f. Math. 101. és Philos. Aussätze Zeller gewidmet. Leipzig 1887.
3. Helmholtz Zählen u. Messen. u. o. L. egyúttal szerző dolgozatát a Természettud. Társulat jubileumi évkönyvében: Számlálás és mérés.
4. Frege Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884.
5. Hankel Theorie der complexen Zahlsysteme. Leipzig 1867.
6. Russell The principles of mathematics. Cambridge 1903. p. 111.
7. Hilbert Über die Grundlagen der Logik u. der Arithmetik. Intern. math. Congressus. Heidelberg 1904. és egyúttal Grundlagen der Geometrie 1903. p. 24.
8. Hölder Die Axiome der Quantität u. die Lehre vom Mass. Leipzig 1901.
9. Kőnig Analizis. Budapest 1886. 1—63. lap.

Az I. fejezetben tárgyaltakhoz a következő forrásokat és kiegészítő munkákat ajánljuk.

1. Kőnig Analizis. Második szakasz.
2. Lipschitz Lehrbuch der Analysis I. Bonn 1877.
3. Jordan Cours d'Analyse I. Paris 1909.
4. J. Tannery Introduction à la théorie des fonctions d'une variable I. p. 1—42. 1904.
5. Dedekind: Stetigkeit u. irrationale Zahlen. Braunschweig 1872, ahol a szeletalkotás először szerepel.
6. Cantor Math. Annalen 5. kötet p. 128.
7. Heine Journal für reine u. angew. Math. 74. p. 174.
8. Dantscher: Die Weierstrass'sche Theorie der irr. Zahlen. Leipzig. Lásd még a Weierstrass-féle elméletet: Kossak berlini Werder gymn. programmértekezésben 1872-ben.
9. Baire Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité. Paris 1905.
10. Kitűnő összefoglalása az egész elméletnek: Pringsheim Irrationalzahlen u. Convergenz unendlicher Processe. Encycl. de Math. I. p. 47.

II. FEJEZET.

A FÜGGVÉNY FOGALMA.

1. Állandó és változó. Az elemi mathematikában főként állandó mennyiségekkel volt dolgunk. Ez a szám: 5 egy meghatározott számértéket jelent. Sokszor nem törődtünk a használt számok nagyságával, mert inkább a számok összekapcsolásának módja, a számítás képlete érdekelt bennünket. Ilyenkor betűkkel jelöltük a számokat. E betűk szintén meghatározott és rendszerint számításunk folyamán meg nem változtatható értékű számokat képviseltek; csak absztraháltunk a számértékeiktől. Ezzel ellentétben olyan jeleket is használunk, melyek nem egyetlen értéket képviselnek, hanem az értékek egész halmazát. Így például, ha azt mondjuk, hogy x jelölje a 0 és 1 közötti számok bármelyikét, de oly módon, hogy x a 0 és 1 közötti minden számértéket fölvegye, vagy ha azt mondjuk, x jelölje a racionális számok bármelyikét, oly módon, hogy minden rac. értéken áthaladjon, akkor, ha az x-et mennyiségnek tekintjük, voltaképpen olyan mennyiségnek kell gondolnunk, mely a nagyságát változtatja, mintegy különböző állapotokba kerül. Az ilyen mennyiséget röviden *változónak* mondjuk. És pedig, ha e mennyiség változását más mennyiség változása nem befolyásolja, vagyis teljesen *szabadon* tulajdoníthatunk neki értékeket, akkor *független változónak* mondjuk. Példaképpen megemlítjük, hogy ha x minden számértéket szabadon (pozitivot, 0-t vagy negativot) fölvehet, vagy ha minden egész számú értéken áthalad, vagy ha minden, 0 és a közötti értéket képvisel (a 0 és a határokat is beleértve, vagy pedig egyik, vagy mindkettő nélkül) stb., akkor x független változó. *Általában tehát, ha egy tetszésszerinti számhalmaz adatik és x e számhalmaz minden számértékét fölveheti, azaz e számhalmaz minden elemével egészen szabadon, minden más mennyiségtől függetlenül, egyenlővé lehető, akkor az x független változó.* A megadott számhalmazt az x független változó *értékhalmazának* nevezzük.

A legtöbb esetben a változó értékhalmazául egy egész számközt tekintünk, például az a és b megadott számok közét. Ilyenkor külön meg kell mondanunk, hogy az x fölveheti-e a számköz határait is, vagy hogy azok egyikét, vagy mindkettejét a halmazból kirekesztve gondoljuk-e? De némelykor előfordul, hogy az x nem veheti fel egy számköz minden számértékét, hanem például csak a számközben levő racionális számokat, vagy a számközben levő irracionális számokat stb., szóval az x értékhalmaza nem az egész számköz, hanem annak egy, mindenesetre teljesen meghatározott része.

A változót rendszerint az *abc* utolsó betűivel, $x, y, z, \ldots$-vel jelöljük.

Ha e független változó mindenkori értékéhez egy meghatározott számértéket rendelünk, akkor ezzel egy második számhalmazt értelmezünk. Így például, ha megalkotjuk ezt a kifejezést: $3x+5$, akkor ezzel már az x független változóhoz azt a számértéket rendeltük, amelyet kapunk, ha x mindenkori értékét a $3x+5$ kifejezésbe helyettesítjük. Az így nyert számértékek ismét egy számhalmazt alkotnak. E számhalmaz összefoglaló ábrázolására ismét egyetlen jelet használunk, midőn azt mondjuk, hogy a $3x+5$ kifejezést y-nal jelöljük. Az y is változó mennyiség, melynek a $3x+5$ által jellemzett értékei mintegy különböző állapotait szolgáltatják. Minthogy az y számértékei az x független változó számértékeitől függenek, az y-t *függő változónak* (azaz x-től függő változónak), vagy röviden x *függvényének* mondjuk.

Így például, ha ezeket a vonatkozásokat írjuk fel:

$$y = 3x^2 - 5x + 8, \quad z = \frac{x+1}{x-1}, \quad u = \sqrt{1-x}, \quad v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x},$$

akkor az első esetben x minden számértékéhez az y részére olyan értéket rendeltünk, melyre a $3x^2-5x+8$ kiszámításával jutunk. A második esetben x minden számértékéhez a z-nek azon számértékét rendeltük, amelyre az $\frac{x+1}{x-1}$ kiszámításával juthatunk. De itt már egy megjegyzést kell tennünk. Az osztásnak csakis akkor van értelme, ha a nevező 0-tól különböző. Ha tehát $x=1$, akkor a hozzátartozó z érték eddigi értelmezéseink alapján nem számítható ki. Az x független változó értékhalmazából tehát ezt az egy számot, az $x=1$-et ki kell hagynunk. Vagyis a második esetben az x értékhalmaza nem az egész számsor, hanem e számsor az $x=1$ hely kihagyásával. A harmadik példánál ismét két fontos megjegyzés teendő. A $\sqrt{1-x}$-nek valós értéke csakis akkor lehet, ha $x \leq 1$-nél, tehát az x értékhalmazából az 1-nél nagyobb számokat ki kell hagynunk; másrészt pedig tudjuk, hogy a $\sqrt{1-x}$ kétértékű, tehát, hogy az u meghatározottá váljék, azt is meg kell mondanunk, hogy e két érték közül melyik veendő. Így például a meghatározás teljes, ha megmondjuk, hogy mindig a pozitiv (illetőleg $x=1$-nél 0) érték veendő u gyanánt, vagy ha megállapítjuk, hogy pozitiv x-ekre nézve a $\sqrt{1-x}$ pozitiv értéke, negativ x-ekre nézve pedig a $\sqrt{1-x}$ negativ értéke veendő s í. t. A negyedik formula alakjából következik, hogy x-nek csakis pozitiv egész számú értéket tulajdoníthatunk; tehát x értékhalmazát a pozitiv egész számok alkotják.

Az y számértékeinek az x számértékeihez való hozzárendelése igen sokféleképpen történhetik. Az eddigi példákban ezt a hozzárendelést bizonyos formulák segítségével végeztük (melyekhez némelykor külön megállapításokat is kellett fűznünk, hogy a hozzárendelés teljesen meg legyen határozva). De lehetséges ez a hozzárendelés másféle módon is. Így például, miként az a geometriában szokásos, az x (abs. mértékszámmal kifejezett) szöghöz, ha $\frac{\pi}{2} > x > 0$, hozzárendeljük azon derékszögű háromszögből, melyben egyik szög: x, ezen x-szel szemközti befogónak az átfogóhoz való viszonyát. Az így nyert y, melynek ismeretes jele: $\sin x$, az x változónak egy meghatározott függvénye: a sinus függvény. Hasonló módon értelmezzük geometriai meggondolások alapján a $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ függvényeket is. A hozzárendelés történhetik még olyan módon is, hogy táblázatba foglaljuk, hogy az egyes x értékekhez minő y értékek tartoznak és egyúttal megadjuk az utasítást arra is, hogy miképpen számíttassék ki a táblázatban nem található x számértékekhez tartozó y érték, miként ezt pld. a logarithmustáblánál megszoktuk. Mindezeknél a *fődolog éppen az, hogy valamely, teljesen meghatározott módon, az x értékhalmazának minden számához egy, meghatározott y számértéket rendeltünk. Ha a függetlenül változó x és az y számértékei között ilyen kapcsolat áll fenn, akkor y az x független változó egyértékű függvénye.* Az y és x közötti ezen vonatkozást általánosságban így jelöljük:

$$y=f(x),$$

[vagy $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(x)$, $\Phi(x)$ s. í. t.] és így olvassuk: y az x függvénye, $y=$ functio x, vagy némelykor a függvényvonatkozás pontosabb jellemzésével, y f függvénye (vagy φ függvénye, sin függvénye stb.) az x-nek. Az x független változó által fölvett egyes számértékekről sokszor szemléletesebb kifejezés céljából úgy mondjuk, hogy az x változónak ezen helye; például az $x=1$ hely, az $x=a$ hely és a hozzátartozó y-értékről úgy mondjuk, hogy az y függvény az $x=a$ helyen ekkora. Így például az $y = \sin x$ az $x = \frac{\pi}{6}$ helyen: $\frac{1}{2}$ $\left(\text{azaz } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$, az $\frac{x+1}{x-1}$ függvény az $x=5$ helyen: $\frac{3}{2}$ $\left(\text{azaz } \frac{x+1}{x-1}\text{-ből } \frac{3}{2} \text{ lesz, ha } x \text{ helyébe 5-öt írunk}\right)$.

Az $y=f(x)$ függvénynek az $x=a$ helyhez tartozó *számértékét* így jelöljük: $f(a)$. Így például, ha $y=\operatorname{tg} x$, vagyis a szóban levő f függvény a jelen esetben a tangens, akkor

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1,\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \text{ s. í. t.}$$

2. A függvény határértéke. Ha ennek az egyszerű függvénynek:

$$y=x^2$$

értékét akarjuk meghatározni az $x=3$ helyen, akkor a 3-at az x

helyébe egyszerűen behelyettesítjük, miáltal 9-et kapunk, tehát $x=3$ helyen $y=9$. De ha x nem racionális, hanem irracionális értéket vesz fel (pl.: $x=\sqrt[3]{2}$), hogyan számítsuk ki a hozzátartozó függvényértéket? A felelet az első fejezet alapján könnyen megadható. A szóban forgó irracionális számot, melyet pl. a-val akarunk jelölni, egy tetszésszerinti racionális számokból álló szab. sorozattal állítjuk elő, pl. az

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

sorozattal (ha $a=\sqrt[3]{2}$, e sorozat gyanánt választható: 1·2, 1·25, 1·259, 1·2599, 1·25992, ...) és sorban kiszámítjuk az

$$a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots a_n^2, \ldots$$

számokat. Ezek, miként kimutattuk, szintén szab. sorozatot alkotnak és az általuk értelmezett szám éppen az, amit a szorzásnak az irracionális számokra kiterjesztett definiciójaképpen: a^2-nek, az irracionális a szám négyzetének neveztünk. Azt is kimutattuk, hogy ez a számérték független attól, hogy minő szab. sorozattal értelmeztük az a számot. Ha a szóban forgó a hely irracionális, másképpen, mint a most ismertetett módon (vagy ehhez hasonló módon), nem számíthatjuk ki e függvénynek az $x=a$-hoz tartozó értékét. Ha a racionális, akkor egyszerű behelyettesítéssel megkaphatjuk a kívánt függvényértéket. De a racionális a számot is értelmezhetjük szab. sorozattal és így a hozzátartozó függvényértéket ez esetben is kiszámíthatjuk olyan eljárással, mint amilyenre irracionális a esetében kényszerítve vagyunk. Az is világos, hogy az így kapott számérték megegyezik a helyettesítéssel nyerhető a^2-el, mert hiszen az a értelmezésére szolgáló $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szab. sorozatból az $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ szabályos sorozatot kapjuk és az ezáltal értelmezett szám független a felhasznált sorozattól. Mig tehát a behelyettesités közvetlenül nem alkalmazható mindig, a második eljárás általánosabb érvényű.

Hogy az említett igen egyszerű példánál követett eljárást általánosabban fogalmazzuk, megjegyezzük, hogy igen sokszor az $f(x)$ függvénynek az a helyhez tartozó értékét úgy számítjuk ki, hogy az a helyet az $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ szabályos sorozattal értelmezzük* (tehát $\lim a_n=a$) és egymásután megállapítjuk (és pedig az $f(x)$ függvény értelmezésének megfelelően a képletbe helyettesítéssel, vagy geometriai szerkesztéssel, vagy a tabella segítségével stb.) az $a_1, a_2, \ldots$ helyekhez tartozó

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots f(a_n), \ldots$$

* Természetesen olyan $a_1, a_2, \ldots$ számokat választunk, amelyekre nézve az $f(x)$ értelmezve van, tehát az x értékhalmazába tartozókat. Ha ilyen szabályos sorozat nincs (vagyis az a helyen nem sűrűsödik össze az x értékhalmaza), akkor az eljárás nem alkalmazható.

függvényértékeket és ha ezek a függvényértékek szintén sz. sorozatot alkotnak, akkor e sorozat által értelmezett A számot tekintjük az a-hoz tartozó függvényértéknek és pedig megkülönböztetésül attól az értéktől, mely a függvény eredeti értelmezése alapján esetleg az a helyhez tartozik, és amely érték az A-tól különböző is lehet, az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozathoz tartozó *határértéknek* nevezzük. *Ha*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

egy, a független változó értékhalmazából kiszemelt szabályos sorozat, melyre nézve $\lim \alpha_n = a$ *és az*

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3) \ldots$$

függvényértékek oly szabályos sorozatot alkotnak, mely az A számot értelmezi, azaz $\lim f(\alpha_n) = A$, *akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen az adott sorozathoz tartozó határértéke: A.*

Ezentúl, hogy tárgyalásainkat könnyebben áttekinthetővé tegyük, rendszerint az x független változó értékhalmazául vagy egy számköz minden helyét tekintjük (pl.: a 0 és 1 közötti összes számokat a határokkal együtt, vagy azok nélkül, vagy minden véges számot stb.) vagy pedig egy ilyen számközben foglalt összes racionális számokat és legfölebb egyes helyeket hagyunk ki e számközből. Így például ez a kifejezés : $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ minden x értékre nézve egyszerűen kiszámítható, kivéve az $x=-1$ és az $x=2$ helyet; ha ugyanis $x=+2$ tesszük, akkor a számláló is, a nevező is 0 lesz, tehát az osztás értelmezése cserben hagy bennünket, osztásról nem szólhatunk. Éppen így, ha $x=-1$, akkor pedig a nevező válik 0-á, tehát megint nem lehet a közönséges értelemben osztásról szó. Ezen függvényben a független változó értékhalmaza tehát az egész számsor a -1 és 2 kivételével.

Különösen fontos az az eset, midőn úgy, mint a tárgyalt egyszerű esetünkben, ez az A érték független attól, hogy az a szám értelmezésére minő szabályos sorozatot használtunk.

Az $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy az a helyen a határértéke A, ha az a számot értelmező tetszésszerinti

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots$$

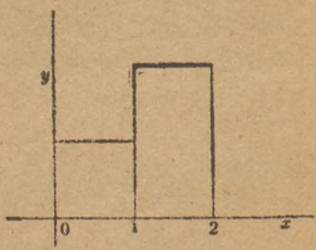
szabályos sorozattal készített

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3), \ldots f(\alpha_n), \ldots$$

*függvényértékek szabályos sorozatot alkotnak, mely az A számot értelmezi.**

* *Jegyzet.* Ha csak azon $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sorozatokról mondhatjuk ezt, amelyek tagjai mind kisebbek (nagyobbak) az a-nál, vagyis amelyek csak egy oldalról konvergálnak az a-hoz, akkor azt mondjuk, hogy A az $f(x)$ függvénynek az a helyen a *baloldali (jobboldali) határértéke.*

Jó lesz, ha mindjárt most figyelmeztetünk arra, hogy nem lehet mindig határértékről szólni. Így például, ha $y=f(x)$ olyan függvény, mely a $0\ldots 1$ intervallumban mindig 1, az $1\ldots 2$ intervallumban pedig mindig 2-vel egyenlő, akkor e függvény menetét grafikusan is igen egyszerűen ábrázolhatjuk ebben a közben. Az X tengelyen megjelöljük az 1 és 2 helyeket és az X tengellyel a $0\ldots 1$ közben az egységnyi távolságban, az $1\ldots 2$ közben pedig a 2 egységnyi távolságban vonunk párhuzamosakat. A vastagon kihúzott egyenes darab ábrázolja a függvény menetét. Ez a függvény tehát a $0\ldots 2$ intervallum minden helyén meghatározott értéket vesz fel. Kérdés, az $x=1$ helyen, melyre nézve az értelmezés semmit sem állapított meg (az $x=1$ hely kivétetett az x értékhalmazából) van-e ennek a függvénynek határértéke? E végből szemeljünk ki egy szabályos sorozatot, mely az 1-et értelmezi. Szemeljük ki például az



10. ábra.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

sorozatot, mely balfelől konvergál az 1-hez (pl. csupa valódi tört). Az ezzel megalkotott

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots f(a_n), \ldots$$

számsorozat tényleg szabályos sorozat, mert minden tagja: 1; tehát e sorozat az 1-et értelmezi. De ha az $x=1$ helyet jobbfelől közelítjük meg a

$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots$$

szabályos sorozattal, melynek minden tagja 1 és 2 között van, akkor pedig az

$$f(b_1), f(b_2), f(b_3), \ldots f(b_n), \ldots$$

függvényértékek oly szabályos sorozatot alkotnak, melynek limese: 2; tehát az $x=1$ helyet értelmező különféle szabályos sorozatok nem vezetnek ugyanazon értékhez. Ha pedig az $x=1$ helyet oly szabályos sorozattal értelmezzük, melynek tagjai felváltva a $0\ldots 1$ és $1\ldots 2$ intervallumba esnek, mint például

$$\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{6}, 1\tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{8}, 1\tfrac{1}{8}, \ldots$$

akkor az ezzel megalkotott függvényértékek sora:

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$$

nem is szabályos sorozat; tehát a szóban forgó $f(x)$ függvénynek $x=1$ helyen határértéke nincsen.

Egy másik egyszerű példa, mely ezeket a viszonyokat megvilágítja: a $\sin\frac{1}{x}$ függvény, melynek az $x=0$ helyen nincsen határértéke. Az $x=0$ helyet értelmezhetjük például ezzel a szabályos sorozattal:

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2\pi+\alpha}, \frac{1}{4\pi+\alpha}, \frac{1}{6\pi+\alpha}, \frac{1}{8\pi+\alpha}, \ldots \frac{1}{2n\pi+\alpha}, \ldots$$

ahol α tetszés szerinti szám. A megfelelő függvényértékek

$$\sin\alpha, \sin\alpha, \sin\alpha, \ldots$$

tehát szabályos sorozat, mely a $\sin\alpha$ számot értelmezi. Amint tehát α-nak más meg más értéket tulajdonítunk, vagyis amint a 0 értelmezésére más meg más szabályos sorozatot használunk, más meg más határértékhez jutunk, sőt könnyen fölírhatunk az $x=0$ értelmezésére olyan szabályos sorozatot is, hogy a megfelelő függvényértékek egyáltalában nem is alkotnak szab. sorozatot.

Látjuk már ezekből az egyszerű példákból is, hogy az $f(x)$ függvénynek az a helyen való A határértékéről még nem beszélhetünk, ha az a értelmezésére szolgáló egyes sz. sorozatokkal megalkotott $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, ... függvényértékek sorának A a határértéke; még külön meg kell vizsgálni, hogy ez az A határérték független-e az a_1, a_2, a_3, ... számok választásától? Éppen ezért a megállapított fogalmat egy kissé átalakítjuk. *Az $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy az a helyen a határértéke A, ha minden poz. ε-számhoz található olyan poz. δ szám, hogy*

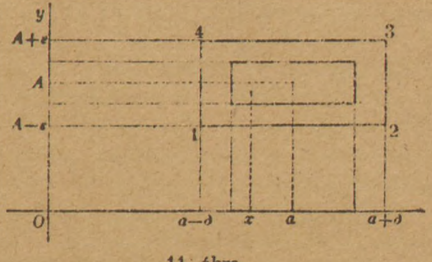
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

hacsak

$$|x-a|<\delta.$$

Az ε számot a megadott *eltérésnek*, (pontosság mértékének) és a δ számot a megadott ε-hoz tartozó *küszöb-intervallumnak* nevezzük. Ez az értelmezés más szóval azt jelenti, hogy bármilyen kis eltérést (ε) jelöljünk is meg, mindig megállapítható egy hozzátartozó δ küszöbintervallum oly módon, hogy mindazon x helyeken, amelyek az a-tól (jobbra vagy balra) δ-nál kisebb közben vannak, a függvény értéke az A-tól ε-nál kevesebbel különbözzék.

Oly fontos ez a fogalom, hogy még geometriai szemlélettel is támogatjuk. Az X tengelyen megjelöljük az a helyet, az Y tengelyen az A távolságot, melynek végpontját is A-val jelöljük. Az A ponton át az X tengellyel párhuzamost vonunk. Az A-tól fölfelé és lefelé fölmérjük a megadott ε távolságot. Ehhez az ε-hoz tartozik bizonyos δ küszöbintervallum, melyet az a-tól jobbra és balra felrajzolunk és a végpontokon át merőlegeseket vonunk az X-re. Így kapjuk az 1234 derékszögű négyszöget. Ha már most az a körüli 2δ intervallum bármely x helyét szemeljük is ki és a hozzátartozó $f(x)$ függvényértéket ezen abscissához mint ordinátát felrajzoljuk, ezen ordináta végpontjának ebbe a négyszögbe kell esnie. Ha az ε helyett egy kisebbet, például $\frac{\varepsilon}{2}$-et választjuk, akkor a δ helyett egy más, az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó, az előbbinél nem nagyobb küszöbintervallumot kapunk és a hozzátartozó (vastagon kihúzott) négyszöget, úgy, hogy az új δ-ba tartozó x helyeknek megfelelő ordináták végpontjai ebbe a kisebb négyszögbe esnek s í. t.



11. ábra.

Látjuk, tehát, hogy az $x=a$ helyhez tartozó határérték olyan számérték, melynek létesítésében az a hely *környezetének* van teremtő befolyása; de olyan környezetnek, mely minden határon túl csökkenhet. Azt, hogy az $f(x)$-nek az a helyen A a határértéke, így írjuk:

$$\lim_{x=a} f(x) = A$$

és így olvassuk: $f(x)$-nek az $x=a$ helyen a határértéke: A.

[Most azt akarjuk megmutatni, hogy az A határérték ezen definiciója teljesen megegyezik azzal, amelyet előbb állapítottunk meg a szab. sorozatok segítségével. Először kimutatjuk, hogy ha a második értelmezés szerint

$$\lim_{x=a} f(x) = A,$$

akkor minden $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ szabályos sorozatra nézve, mely az a-t értelmezi

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots f(a_n), \ldots \qquad \alpha)$$

az A-t értelmező szab. sorozat, azaz ha $\lim a_n = a$, $\lim f(a_n) = A$, vagyis, hogy a második értelmezés maga után vonja, magában foglalja az elsőt is. Azt kell csak megmutatni, hogy bármely ε-hoz található oly N küszöbszám, hogy

$$|f(a_n) - A| < \varepsilon,$$

ha csak $n > N$.

Az adott ε-hoz tartozik a feltételünk szerint olyan δ küszöbintervallum, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \qquad \beta)$$

ha $|x-a| < \delta$. Minthogy az $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ sorozat az a-t értelmező szabályos sorozat, tehát a δ-hoz tartozik olyan N küszöbszám, hogy

$$|a_n - a| < \delta, \text{ ha } n > N,$$

de akkor, minthogy az N-iken túl levő minden a_n az a közepű 2δ közbe esik, tehát mindezen a_n helyekre nézve érvényes a $\beta)$ alatti egyenlőtlenség, vagyis minden ilyen a_n-re nézve:

$$|f(a_n) - A| < \varepsilon$$

és ezzel kimutattuk, hogy az $\alpha)$ alatti sorozat az A-t értelmező szab. sorozat.

Kissé nehezebb az állítás második részének, vagyis annak a megmutatása, hogy ha az $\alpha)$ alatti sorozat mindazon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számokra vonatkozólag, melyek az a-t értelmezik, szabályos sorozat, akkor fennáll a második értelmezés, vagyis a $\beta)$ is, azaz, hogy az A határérték létezésének első értelmezése a másodikat magában foglalja. Ezt az állítást indirekt úton bizonyítjuk.

Ha ugyanis nem így volna, akkor annak az állításnak, hogy minden ε-hoz található olyan δ küszöbintervallum, melyen belül levő x értékekre nézve

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

az ellenkezője állana. Mi ennek az állításnak az ellenkezője? Az, hogy nem tartozik minden ε-hoz küszöbintervallum; vagyis van olyan ε pontossági mérték, melyhez nem tartozik küszöbintervallum. Legyen ilyen küszöb nélküli ε érték: e. Eszerint tehát e-hez nem tartozik küszöbintervallum; tehát bármely kis δ számot jelöljünk is meg, mindig található olyan x, melyre nézve

$$|x - a| < \delta,$$

(azaz x az $a-\delta \ldots a+\delta$ közbe tartozik), és amelyhez tartozó függvényérték az A-tól e-nél többel tér el, azaz melyre nézve:

$$|f(x)-A|>e.$$

Tehát annak az állításnak, hogy minden ε-hoz tartozik oly δ küszöb, melyre nézve

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

ha $|x-a|<\delta$, az ellenkezője ez: Van olyan e pozitiv szám, melyhez küszöbintervallum nem tartozik, vagyis bárminő kis δ számot szemeljünk is ki, az $a-\delta \ldots a+\delta$ közben mindig található olyan x, melyre nézve

$$|f(x)-A|\geq e.$$

Kissé sokáig időztünk ennél a dolognál, hogy az olvasó megszokja az ilyen fajta logikai operációkat, melyekre igen sokszor lesz szükségünk.

Már most tehát szemeljünk ki egy tetszés szerinti δ számot. Az $a-\delta \ldots a+\delta$ intervallumban föltételünk szerint van egy x_1 szám, melyre nézve $|f(x_1)-A|>e$. Legyen δ_1 az $|a-x_1|$ távolságnál kisebb és egyúttal $\frac{\delta}{2}$-nél is kisebb. Az $a-\delta_1 \ldots a+\delta_1$ közben megint van olyan x_2 hely, melyre nézve $|f(x_2)-A|\geq e$.

Legyen δ_2 az $|a-x_2|$-nél kisebb és egyúttal a $\frac{\delta_1}{2}$-nél is kisebb. Ebben megint van olyan x_3 hely, melyre nézve $|f(x_3)-A|\geq e$ s í. t. Így kapjuk az

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_n, \ldots$$

számok sorát, melyekről tudjuk, hogy az a számot értelmező szabályos sorozatot alkotnak, mert hiszen

$$|x_1-a|<\delta,\ |x_2-a|<\frac{\delta}{2},\ |x_3-a|<\frac{\delta}{4},\ |x_4-a|<\frac{\delta}{8}, \ldots$$

szóval:

$$\lim |x_n-a| = 0.$$

Ha e számsorozathoz megalkotjuk az

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots f(x_n), \ldots$$

függvényértékeket, ezek mindannyian e-nél távolabb esnek az A számtól, azaz:

$$|f(x_1)-A|\geq e,\ |f(x_2)-A|>e,\ |f(x_3)-A|\geq e, \ldots |f(x_n)-A|\geq e, \ldots$$

tehát nem alkothatnak egy A-t értelmező szab. sorozatot. Ez pedig ellenkezik azzal a föltevéssel, hogy *minden*, az a számot értelmező $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozatra nézve az $f(a_1), f(a_2), \ldots f(a_n), \ldots$ sorozat A-t értelmező szab. sorozat legyen. Így tehát a $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$ kétféle értelmezése megegyezik. Ezentúl legtöbbször a másodikat használjuk; *vagyis* $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$, *ha bármely kis pozitiv ε-hoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy* $|f(x)-A|<\varepsilon$, *ha* $|x-a|<\delta$.]

3. A határértékekre vonatkozó néhány egyszerű tétel. a) *Összeg limese.* Ha két függvényről van szó: $f(x)$ és $\varphi(x)$-ról és

$$\lim_{x=a} f(x) = A,\quad \lim_{x=a} \varphi(x) = B \qquad \alpha)$$

akkor az $f(x)$ és $\varphi(x)$-ből összeadással képezett $f(x)+\varphi(x)$-re nézve:

$$\lim_{x=a} [f(x)+\varphi(x)] = A + B.$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be: A megadott ε-nak vegyük a felét és keressük meg az $f(x)$-re vonatkozólag az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó küszöbintervallumot. Legyen ez δ. Hasonlóképpen az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó küszöbintervallum $\varphi(x)$-nél: δ_1. E kettő közül a kisebbiket jelöljük ismét δ-val. Eszerint tehát:

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |\varphi(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2},$$

ha
$$|x-a|<\delta.$$

A két egyenlőtlenség így is írható:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$B-\frac{\varepsilon}{2}<\varphi(x)<B+\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } |x-a|<\delta.$$

E két egyenlőtlenségből származik

$$A+B-\varepsilon<f(x)+\varphi(x)<A+B+\varepsilon, \quad \text{ha } |x-a|<\delta$$

és ez így is írható:

$$|f(x)+\varphi(x)-(A+B)|<\varepsilon, \quad \text{ha } |x-a|<\delta$$

és ezzel kimutattuk, hogy

$$\lim_{x=a}[f(x)+\varphi(x)]=A+B=\lim_{x=a}f(x)+\lim_{x=a}\varphi(x).$$

A bebizonyított tétel azt fejezi ki, hogy *összeg határértéke a tagok határértékeinek összege*, vagy más szóval: mindegy, akár előbb adjuk össze a két függvényt, azután vesszük az a helyhez tartozó határértéket, akár fordítva, előbb számítjuk ki az egyes függvények határértékeit az $x=a$ helyen, azután végezzük az összeadást.

Ez a tétel természetesen nemcsak két, hanem tetszésszerinti (véges) számú összeadandó esetében is érvényes.

b) *Különbség limese.* Ha $\lim_{x=a} f(x)=A$ és $\lim_{x=b}\varphi(x)=B$, akkor

$$\lim_{x=a}[f(x)-\varphi(x)]=A-B.$$

Vegyük ismét a megjelölt, tetszés szerinti pontossági mértéknek, ε-nak a felét; akkor megint megállapítható egy olyan közös δ küszöbintervallum, melyre nézve

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |\varphi(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } |x-a|<\delta,$$

vagyis:
$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$B+\frac{\varepsilon}{2}>\varphi(x)>B-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $f(x)$-ből $\varphi(x)$-et kivonjuk, akkor kisebbet kapunk, mintha az $f(x)$-nél nagyobb $A+\frac{\varepsilon}{2}$-ből a $\varphi(x)$-nél kisebb $B-\frac{\varepsilon}{2}$-et vonjuk ki; és nagyobbat kapunk, mintha az $f(x)$-nél kisebb $A-\frac{\varepsilon}{2}$-ből a $\varphi(x)$-nél nagyobb $B+\frac{\varepsilon}{2}$-et vesszük el, azaz

$$A-B-\varepsilon<f(x)-\varphi(x)<A-B+\varepsilon,$$

ami így is írható:

$$|f(x)-\varphi(x)-(A-B)|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x-a|<\delta,$$

vagyis: $\lim\limits_{x=a}[f(x)-\varphi(x)]=A-B=\lim\limits_{x=a}f(x)-\lim\limits_{x=a}\varphi(x).$

c) *Szorzat limese.* Ha $\lim\limits_{x=a}f(x)=A$ és c állandó számérték, akkor

$$\lim_{x=a}cf(x)=Ac$$

Ezen állítás igazolása nagyon egyszerű.* Ha ugyanis egy tetszésszerinti kis poz. ε szám adatik, akkor ebből az $\left|\frac{\varepsilon}{c}\right|=\varepsilon'$ számot készítjük és megkeressük ehhez az $x=a$ helynek megfelelő küszöbintervallumot, a δ-t. Eszerint tehát:

$$A-\varepsilon'<f(x)<A+\varepsilon',$$

ha $|x-a|<\delta$ és innen következik, hogy $cf(x)$ az $Ac-c\varepsilon'$ és $Ac+c\varepsilon'$ közé esik, vagyis az $Ac+\varepsilon$ és $Ac-\varepsilon$ közé; tehát:

$$|cf(x)-Ac|<\varepsilon,$$

vagyis valóban $\lim\limits_{x=a}cf(x)=Ac$. Ha $c=-1$, akkor ebből az a külön is megemlíthető állítás következik, hogy ha $\lim\limits_{x=a}f(x)=A$, akkor $\lim\limits_{x=a}[-f(x)]=-A$.

Ha a $\lim\limits_{x=a}f(x)=0$ és $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=0$, akkor a megadott tetszőleges kis ε-ból elkészítjük az $\varepsilon'=\sqrt{\varepsilon}$ kis poz. számot és megkeressük az ε'-hoz tartozó küszöbintervallumokat. Ha a kisebbik δ, akkor tehát

$$|f(x)|<\varepsilon' \quad |\varphi(x)|<\varepsilon',$$

ha $|x-a|<\delta$ és e két egyenlőtlenség szorzásából ered:

$$|f(x)\varphi(x)|<\varepsilon,$$

* Ha $c=0$, a tétel nem is szorul bizonyításra; tehát feltehető, hogy $c\neq0$.

ha $|x-a|<\delta$, ami azt mutatja, hogy

$$\lim_{x=a} [f(x) . \varphi(x)]=0.$$

Ha tehát $\lim_{x=a} f(x)=0$ és $\lim_{x=a} \varphi(x)=0$, akkor e két függvény szorzatának, az $f(x)\varphi(x)$-nek a limese is 0 az a helyen.

Ha pedig általában $\lim_{x=a} f(x)=A$ és $\lim_{x=a} \varphi(x)=B$, akkor egyúttal:

$$\lim_{x=a} [f(x)-A]=0 \quad \text{és} \quad \lim_{x=a} [\varphi(x)-B]=0$$

és így az előbbi megjegyzésünk szerint az

$$[f(x)-A][\varphi(x)-B]=f(x) . \varphi(x)-Bf(x)-A\varphi(x)+AB$$

szorzatnak a limese is 0. Innen:

$$f(x)\varphi(x)=[f(x)-A][f(x)-B]+Bf(x)+A\varphi(x)-AB.$$

De a jobboldalon álló összeg limesét tagonként vehetjük, és minthogy $\lim_{x=a} f(x)=A$, $\lim_{x=a} \varphi(x)=B$, tehát

$$\lim_{x=a} [f(x)\varphi(x)]=B\lim_{x=a} f(x)+A\lim_{x=a} \varphi(x)-AB,$$

$$\lim_{x=a} [f(x)\varphi(x)]=2AB-AB=AB,$$

azaz: $$\lim_{x=a} [f(x)\varphi(x)]=AB=\lim_{x=a} f(x) . \lim_{x=a} \varphi(x)$$

és ezzel azt mutattuk meg, hogy egész általánosságban, ha

$$\lim_{x=a} f(x)=A \quad \text{és} \quad \lim_{x=a} \varphi(x)=B,$$

akkor $$\lim_{x=a} [f(x) . \varphi(x)]=AB,$$

a szorzat limese egyenlő a tényezők limeseinek a szorzatával; vagyis mindegy, akár előbb végezzük el a szorzást és azután keressük a limest, vagy fordítva, előbb keressük ki a határértékeket, azután végezzük el a szorzást.

A most levezetett tétel természetesen nem csak két, hanem több tényező esetében is érvényes; tehát például pozitiv egész kitevőjű hatvány esetében is.

d) *Hányados limese.* Ha $\lim_{x=a} f(x)=A$ és $\lim_{x=a} \varphi(x)=B$ és $B \neq 0$, akkor

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}$$

Először megmutatjuk e tétel igazságát, ha $f(x)=1$, vagyis $\lim_{x=a} \frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{B}$. Minthogy $\lim_{x=a} \varphi(x)=B \neq 0$, ($B$ mindig pozitivnak tekinthető), tehát egy tetszés szerinti kis ε-hoz tartozik oly δ

küszöbintervallum, melyre nézve

$$B-\varepsilon<\varphi(x)<B+\varepsilon,$$

ha $|x-a|<\delta$. Válasszunk ε gyanánt pl.: $\frac{B}{2}$-nél kisebb pozitiv számot; akkor tehát az $a-\delta \ldots a+\delta$ intervallum minden helyén $\varphi(x)>\frac{B}{2}$. Szóval, van egy olyan, az a helyet magában foglaló szakaszunk, melynek minden helyén a $\varphi(x)$ nagyobb egy bizonyos M-mel jelölendő pozitiv számnál. Ezen kis előzetes megjegyzés után a tétel könnyen bizonyítható. Adatik egy tetszés szerinti kis ε (ez $\frac{B}{2}$-nél mindig kisebbnek gondolható). Ebből megalkotjuk az $\varepsilon'<BM\varepsilon$ számot úgy, hogy még az ε' is kisebb legyen $\frac{B}{2}$-nél. Megkeressük az ε'-hoz tartozó küszöbintervallumot. Legyen ez δ. Akkor tehát:

$$|\varphi(x)-B|<\varepsilon', \text{ ha } |x-a|<\delta.$$

Továbbá:
$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{B}\right|=\left|\frac{B-\varphi(x)}{B\,.\,\varphi(x)}\right|.$$

A jobboldali kifejezés számlálója ε'-nál kisebb, ha $|x-a|<\delta$, a nevező pedig nagyobb MB-nél, tehát ha a számláló helyébe a nagyobb ε', a nevező helyébe pedig a kisebb BM tétetik, akkor ezáltal a jobboldal nagyobbodik, vagyis:

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{B}\right|<\frac{\varepsilon'}{BM}<\varepsilon, \text{ ha } |x-a|<\delta$$

és így:
$$\lim_{x=a}\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{B}.$$

Ebből a *c)* alatti tétel felhasználásával következik, hogy

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x=a}\left[f(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\right]=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim\varphi(x)},$$

vagyis azon esetben, midőn a *nevező limese nem* 0, *a hányados limesét úgy kaphatjuk meg, ha a számláló limesét a nevező limesével elosztjuk,* vagyis ezen esetben mindegy, akár előbb keressük a számláló és nevező limesét, azután végezzük az osztást, akár fordítva, előbb végezzük el az osztást, azután keressük meg a határértéket.

e) A határérték számításának megkönnyítésére egy fontos megjegyzést teszünk. *Ha az $\alpha \ldots \beta$ intervallumban, mely az a helyet magában foglalja, az $f(x)$ függvény minden, az a-tól különböző x helyen pozitiv értékű és az a helyen van határértéke, akkor ez a határérték csak pozitiv vagy* 0 *lehet.*

Bebizonyítjuk, hogy ez a határérték negativ nem lehet. Tegyük fel, hogy negativ, vagyis $\lim\limits_{x=a} f(x) = -A$. Vegyünk fel egy ε pontossági mértéket, mely $\frac{A}{2}$-nél kisebb. Ehhez tartozik δ küszöbintervallum, mely egészen az $\alpha \ldots \beta$ közbe esik, (ha δ nagyobb volna, kisebbet választanánk helyette), vagyis

$$-A - \varepsilon < f(x) < -A + \varepsilon,$$

ha $|x-a| < \delta$. De ε kisebb $\frac{A}{2}$-nél, tehát úgy a jobboldali, mint a baloldali szám negativ, vagyis $f(x)$ az $a-\delta \ldots a+\delta$ köz minden helyén [az a-ról nem is szólva] negativ volna, holott feltételünk szerint mindenütt pozitiv. Eszerint tehát $\lim\limits_{x=a} f(x)$ nem lehet negativ, tehát vagy pozitiv, vagy 0.

Éppen így következtethető, hogy ha $f(x)$ egy, az a helyet magában foglaló szakasz minden helyén (az a kivételével) negativ és az a helyen van határértéke, ez csak negativ vagy 0 lehet.

Ebből következtetjük ezt, a határérték számításnál gyakran használatos állítást: Ha az $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvények közül az a helyet magában foglaló $\alpha \ldots \beta$ intervallumban az $f(x)$ minden helyen [az a-ról nem szólva] nagyobb, mint a megfelelő $\varphi(x)$ és úgy az $f(x)$-nek, mint a $\varphi(x)$-nek van az a helyen határértéke, akkor

$$\lim_{x=a} f(x) \geq \lim_{x=a} \varphi(x).$$

Ugyanis ez esetben az $f(x) - \varphi(x)$ különbség minden x helyen pozitiv és e különbségnek az $x = a$ helyen a határértéke: $\lim\limits_{x=a} f(x) - \lim\limits_{x=a} \varphi(x)$, tehát az előbbi megjegyzésünk szerint $\lim\limits_{x=a} f(x) - \lim\limits_{x=a} \varphi(x)$ pozitiv vagy 0, azaz: $\lim\limits_{x=a} f(x) \geq \lim\limits_{x=a} \varphi(x)$.

Ugyanígy következik, hogy ha $f(x)$ az $\alpha \ldots \beta$ közben mindenütt kisebb a megfelelő $\psi(x)$-nél, akkor

$$\lim_{x=a} f(x) \leq \lim_{x=a} \psi(x),$$

ha az a helyen úgy az $f(x)$-nek, mint a $\psi(x)$-nek van határértéke.

E két állítást összefoglalva már most így mondhatjuk: Ha az $\alpha \ldots \beta$ közben minden x helyen (az a-ról nem szólva)

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$$

és úgy a $\varphi(x)$ és $\psi(x)$-nek, mint az $f(x)$-nek az $x = a$ helyen van határértéke, akkor:

$$\lim_{x=a} \varphi(x) \leq \lim_{x=a} f(x) \leq \lim_{x=a} \psi(x).$$

Ezen megjegyzés alapján az $f(x)$ limesét két szám közé tudjuk szorítani, ha a $\lim \varphi(x)$ és $\lim \psi(x)$ számok ismeretesek. Különösen fontos az alkalmazás szempontjából az az eset, midőn

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \psi(x).$$

Ebben az esetben többet mondhatunk, mint előbb; t. i. azt állítjuk, *hogy ha tudjuk, hogy az $\alpha \ldots \beta$ közben minden x helyen* (az a kivételével)

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

és $\lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \psi(x)$, *akkor az $f(x)$-nek is van az a helyen határértéke és pedig:* $\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \psi(x)$. Itt tehát azt is állítjuk, hogy az $f(x)$-nek az a helyen *van* határértéke, amit előbb mindig föltételeztünk.

Ezt az állítást a következőképpen bizonyíthatjuk be. Legyen a közös $\lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \psi(x)$ határérték: A. Adatik egy tetszés szerinti ε. Vegyük a hozzá tartozó küszöbintervallumokat a $\varphi(x)$ és a $\psi(x)$-re nézve. A kisebbik legyen δ. Ekkor tehát:

$$|\psi(x) - A| < \varepsilon,\ |\varphi(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } |x - a| < \delta,$$

vagyis:

$$A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon,$$

tehát

$$A - \varepsilon < \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) < A + \varepsilon,$$

ha $|x - a| < \delta$ és így $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta$, ami már bizonyítja, hogy $\lim_{x=a} f(x) = A$.

4. A határérték-fogalom kibővítése. a) *Határérték a végtelenben.* Eddig mindenütt az a helyen való határértékről volt szó. Az a hely a végesben volt. Most az $f(x)$ függvénynek a végtelenben való határértékéről szólunk. Valamely adott $f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy a végtelenben A a határértéke, ha bárminő kis ε számhoz tartozik oly N pozitiv küszöbszám (ennek nem kell egész számnak lennie), melyen túl levő helyeken a függvény értéke az A-tól ε-nál kevesebbel különbözik; azaz

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

ha csak $x > N$. [Ha pedig $|f(x) - A| < \varepsilon$ minden x-re nézve, mely $-N$-nél kisebb, akkor $f(x)$-nek a negativ végtelenben A a határértéke.] Így például az $\frac{1}{x^2}$ függvény határértéke a végtelenben: 0, mert ha egy tetszés szerinti ε poz. szám adatik, elmehetünk az x-el oly messze, hogy $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ legyen. Evégből csak az kell, hogy $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ legyen. Az ε-hoz tartozó küszöbszám $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Ha ugyanis

$$x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

Egy másik példa a következő: Ha $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, akkor $f(x)$ limese a végtelenben: $\frac{a}{c}$.* Ugyanis

$$\left|\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}\right|=\left|\frac{bc-ad}{c(cx+d)}\right|.$$

Ha azt akarjuk, hogy a jobboldalon álló eltérés ε-nál kisebb legyen, akkor csak x-et úgy kell választani, hogy

$$\frac{|bc-ad|}{|c||cx+d|}<\varepsilon$$

legyen, azaz
$$|cx+d|>\frac{|bc-ad|}{|c\varepsilon|}.$$

A $|cx+d|\geq|cx|-|d|$, tehát a fönti egyenlőtlenség mindenesetre teljesítve lesz, ha

$$|cx|-|d|>\frac{|bc-ad|}{|c\varepsilon|},$$

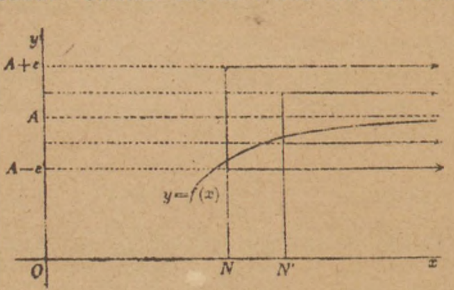
vagyis:
$$|x|>\frac{|bc-ad|}{c^2\varepsilon}+\left|\frac{d}{c}\right|.$$

Az ε-hoz tartozó N küszöbszám tehát

$$N=\frac{|bc-ad|}{c^2\varepsilon}+\left|\frac{d}{c}\right|$$

Geometriai szemlélettel e viszonyokat így tüntethetjük fel:

Az ordináta tengelyre fölrajzoljuk az A távolságot. A végpontjától fölfelé és lefelé a megadott ε-t. A végpontokon át az x tengellyel párhuzamosakat vonunk. Ha az ε-hoz tartozó küszöbszám N, akkor N-et felrajzoljuk az X tengelyre és a végpontján át az Y tengellyel párhuzamosat vonunk. Az $y=f(x)$ függvényt ábrázoló görbének a vastagabban vont végtelen sávon kívül az $x=N$ egyenestől jobbra egyetlen pontja sem lesz. Ha ε helyett a kisebb ε'-t választjuk, akkor N helyett a távolabb eső N' küszöbszámot kapjuk és ennek megfelelően a keskenyebb sávra jutunk s í. t., a sávot oly keskenyre vehetjük, amint csak tetszik.



12. ábra.

A határérték számítására vonatkozó tételek a most megállapított végtelen helyen való határértékre is vonatkoznak, amiről meggyőződhetünk, ha a közölt bizonyításokat megfelelően átalakítjuk, az ε-hoz tartozó δ küszöbintervallum helyett mindenütt N küszöbszámot (illetőleg az x tengelynek $N\ldots\infty$ szakaszát) téve.

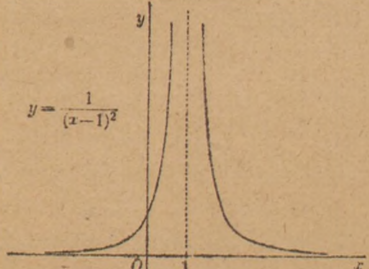
* $c\neq0$, mert különben $f(x)$ az x-el végtelenné válik.

Ha $f(x)$-nek a végtelenben A a határértéke, akkor ezt így jelöljük:

$$\lim_{x=\infty} f(x) = A$$

és így olvassuk: $f(x)$ az A határérték felé convergál, ha x végtelené válik, vagyis ha x korlátlanul növekszik.

b) *Korlátlanul változó függvény.* Ha az $\frac{1}{(x-1)^2}$ függvény menetét grafikusan feltüntetjük, észrevesszük, hogy ha az abszcissza értéke akár jobbról, akár balról, az 1-hez közeledik, az ordináta igen rohamosan nő. Pontosabban ez azt fejezi ki, hogy akárminő nagy N számot mondanak is, megjelölhetünk az 1 pont környezetében olyan közt, melybe tartozó x értékekhez való függvényértékek mindig nagyobbak az N-nél. Így például, ha N gyanánt 100-at választunk, akkor az $x=1$ helytől jobbra és balra $\frac{1}{10}$ nagyságú intervallumot kell fölmérnünk, mert ha $|x-1|<\frac{1}{10}$, akkor $\frac{1}{(x-1)^2}>100$. Ha N gyanánt 1,000.000 választatik, akkor csak $|x-1|<\frac{1}{1000}$ veendő. Általában így fogjuk e viszonyokat jellemezni: *Ha az a hely környezetében mindig megjelölhető oly δ köz, melyen belül levő x helyekhez tartozó függvényértékek a tetszés szerint megadott poz. N számnál nagyobbak, vagyis, ha minden N számhoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy*



13. ábra.

$$f(x) > N, \quad \text{ha} \quad |x-a| < \delta,$$

akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ az a helyen végtelen naggyá válik, amit így jelölünk:

$$\lim_{x=a} f(x) = \infty.$$

[Ha a mondott állítás $-f(x)$-re alkalmazható, akkor $\lim\limits_{x=a} f(x) = -\infty$.]

Végül ha az a hely a végtelenben van, akkor $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = \infty$, ha bármely poz. N számhoz megállapítható egy poz. M szám úgy, hogy minden M-nél távolabb levő x helyen a függvény értéke N-nél nagyobb, azaz

$$f(x) > N, \quad \text{ha} \quad x > M.$$

5. **Határérték létezésének kritériuma.** Eddig azzal a kérdéssel foglalkoztunk, hogy az $f(x)$ függvénynek az a helyen (mely ∞ is lehet) mikor lesz a határértéke a megadott A szám (mely ∞ is lehet). A feleletet erre a kérdésre kétféleképpen is megadtuk. Először úgy mondtuk, hogy minden, az a számot értelmező $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szab. sorozathoz tartozó $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ függvényértéksorozatnak oly szab. sorozatot kell alkotnia, melynek limese A.

Ezzel teljesen egyenrangúnak bizonyítottuk a második választ, melyet a 45. lapon adtunk. De most az a kérdés merül fel, hogy ha az A nem ismeretes, miképpen lehet az $f(x)$ függvény értelmezése alapján eldönteni, hogy van-e az $x=a$ helyen meghatározott határértéke vagy nincs és ha igen, mekkora ez a határérték?

Térjünk vissza ismét az A határérték létezésének második alakú kritériumára. Ha $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$ véges szám, akkor bármely kis ε-hoz tartozik oly küszöbintervallum, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha x-et ebből az intervallumból választjuk. Válasszuk az ε felét; ha az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó küszöbintervallum δ és az $a-\delta\ldots a+\delta$ köz tetszés szerinti két helyét x' és x''-vel jelöljük, akkor:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x')<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x'')<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

és így

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Azt látjuk tehát, hogy ha $\lim\limits_{x=a} f(x)$ véges, meghatározott szám, akkor minden ε-hoz tartozik oly δ küszöbintervallum, melynek belsejében levő bármely két x' és x'' helyet véve, az ezekhez tartozó függvényértékek egymástól ε-nál kevesebbel különböznek. És most azt mondjuk, hogy ezen állítás megfordításában van a határérték létezésének általános kritériuma. Vagyis, ha minden ε számhoz tartozik olyan $a-\delta\ldots a+\delta$ intervallum, melynek belsejébe tartozó bármely két x' és x'' helyre nézve:

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

akkor létezik a $\lim\limits_{x=a} f(x)$. Ezt a létező limest úgy határozhatjuk meg, hogy egyetlen a-t értelmező $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozathoz megalkotjuk az $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ függvényértékeket. Ezen sorozat okvetlenül szabályos sorozat, melynek határértéke lesz a $\lim\limits_{x=a} f(x)$.

[Ezen, később, különösen az integrálszámításban igen gyakran alkalmazandó állítást a következő meggondolással bizonyíthatjuk be indirekt úton. Ha az $x=a$ helyen az $f(x)$ korlátos függvénynek nem volna határértéke, akkor volna egy olyan a-t értelmező szabályos sorozat, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ melyhez tartozó

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots \qquad a)$$

függvényértékek nem alkotnának szabályos sorozatot. (Még arra is lehetne gondolni, hogy $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ szabályos sorozat ugyan, de egy másik, a-t értelmező sorozathoz $b_1, b_2, b_3, \ldots$-hez tartozó $f(b_1), f(b_2), f(b_3), \ldots$ értékek, melyek szintén szabályos sorozatot alkotnak, határértékre nézve nem egyeznek meg az előbbivel; de akkor, mint könnyen kimutatható, az $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ is az a-t értelmező szab. sorozat és az $f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), \ldots$ nem szabályos sorozat, tehát megint az előbb említett esettel van dolgunk.)

Ha az $a)$ sorozat nem szabályos, akkor van egy küszöbszámnélküli e: azaz, bármilyen messze menjünk is az $a)$ sorozatban, mindig található azon túl két olyan tag, melyek különbsége e-nél nagyobb; tehát bármilyen nagy is az n, mindig van két k és l pozitiv egész szám, hogy

$$|f(a_{n+k})-f(a_{n+l})|>e. \qquad \beta)$$

Válasszuk már most az ε számot e-nél kisebbre. Ehhez az ε-hoz föltételünk szerint tartozik olyan δ szám, hogy az $a-\delta \dots a+\delta$ közben levő bármely két x' x'' helyre nézve $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Most keressük meg az $a_1, a_2, a_3, \dots$ szabályos sorozatban a δ számhoz tartozó küszöbszámot. Legyen ez N. Akkor tehát

$$|a_n - a| < \delta$$

mindig, ha $n>N$, vagyis e szab. sorozat N-ik tagjától kezdve, valamennyi tag az $a-\delta \dots a+\delta$ közbe esik, tehát ha csak $n>N$, bárminő pozitiv egész számok legyenek is k és l, mindig

$$|f(a_{n+k}) - f(a_{n+l})| < \varepsilon,$$

ami a β) alattival ellenkezik; tehát nem lehetséges, hogy $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots$ nem szab. sorozat; vagyis ha $a_1 a_2 a_3 \dots$ egy tetszés szerinti szab. sorozat, melynek limese $\lim a_n = a$, akkor $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots$ is mindig szab. sorozat és mindig ugyanazt az A számot értelmezi. Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha bármely kis ε-hoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy az $a-\delta \dots a+\delta$ közből vett bármely két x', x'' helyen

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

akkor létezik a $\lim\limits_{x=a} f(x)$* (mely természetesen, minthogy $f(x)$-et korlátosnak, azaz egy véges számnál kisebbnek vettük fel, véges.)

Ha az a hely nem a végesben van, akkor ez a kritérium így hangzik: Ha minden pozitiv ε számhoz megjelölhető oly N szám, hogy bármely két $x'>N$, $x''>N$ helyre nézve $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, akkor a $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ véges és meghatározott szám. Ha ugyanis $x=\frac{1}{z}$ tesszük, akkor az $f(x)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ a z változó függvényének tekinthető. Ha $x=N$, $z=\frac{1}{N}$ és ha $x>N$, akkor $z<\frac{1}{N}$. Eszerint tehát bármely kis ε számhoz $\delta=\frac{1}{N}$ szám tartozik és minden ennél kisebb pozitiv z' és z''-re nézve

$$\left|f\left(\frac{1}{z'}\right) - f\left(\frac{1}{z''}\right)\right| < \varepsilon;$$

tehát az előbbi (illetve a jegyzetben levő) megállapítás folytán az $f\left(\frac{1}{z}\right)$-nek (jobboldali) limese a $z=0$ helyen véges és meghatározott szám és

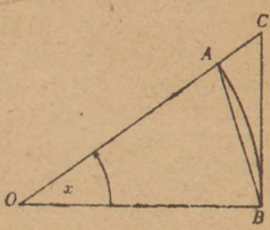
$$\lim_{x=\infty} f(x) = \lim_{z=0} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Eddig, miként előzőleg kijelentettük, az x értékhalmazául mindig az egész számvonalat, vagy annak egy közét használtuk, legfölebb egyes helyeket véve ki. Megjegyezzük azonban, hogy egész tárgyalásunk érvényes volna akkor is, ha például az x értékhalmazául csak a racionális számok összességét (vagy egy közben foglalt racionális számok összességét) tekintenők. Ekkor

* *Jegyzet.* Ha az $a-\delta \dots a$ közre nézve áll ez a dolog, azaz, bármely kis ε-hoz tartozik oly δ, hogy az $a-\delta \dots a$ köz bármely két x', x'' helyén az $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, akkor ugyanezzel az okoskodással azt mutatjuk ki, hogy minden oly szab. sorozatra mely baloldalról haladva az a-hoz, az a-t értelmezi, az $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots$ szab. sorozat. E sorozatok közös limesűek; e közös limes az $f(x)$ függvénynek az a helyhez tartozó baloldali limese. Éppen így szólhatunk a jobboldali limesről, ha minden $a_1, a_2, \dots$ szab. sorozatra nézve, melynek tagjai a-nál nagyobbak és $\lim a_n = a$, az $f(a_1), f(a_2), \dots$ szab. sorozatot alkotnak és közös limesűek.

megfelelően azt mondanók: az $x=a$ helyen (mely lehet racionális, vagy irracionális) az $f(x)$ függvénynek határértéke A, ha bármely kis ε-hoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$ mindazon racionális x helyekre nézve, amelyek az $a-\delta \ldots a+\delta$ közben vannak. És éppen így, ha az $f(x)$ minden racionális helyre van csak értelmezve és bármely kis ε-hoz tartozik δ köz, úgy, hogy az $a-\delta \ldots a+\delta$-ból vett bármely két x', x'' racionális helyre nézve $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, akkor $\lim\limits_{x=a} f(x)$ véges és meghatározott számérték.]

6. Néhány egyszerű határérték kiszámítása. Főként a határérték fogalmának begyakorlása céljából néhány, már az elemi menynyiségtanból ismeretes határértéket akarunk előzőleg megállapítani: *a)* A geometriában a $\sin x$-et úgy értelmezik, hogy azon derékszögű háromszögben, melyben egyik hegyes szög x, $\sin x$ a szemközti befogó viszonya az átfogóhoz. Ez az értelmezés nyilván föltételezi, hogy oly derékszögű háromszög létezik, melynek egyik szöge x; tehát,



14. ábra.

hogy x hegyes szög legyen. Ha $x=0$, vagy $x=\frac{\pi}{2}$, akkor ez az értelmezés cserben hagy bennünket, mert olyan derékszögű háromszög, melyben az egyik hegyes szög 0, vagy $\frac{\pi}{2}$ lenne, képtelenség. Eszerint a 0 (illetőleg $\frac{\pi}{2}$) helyre az $f(x)$ függvény eredetileg nincs értelmezve. De a geometriában kimutatjuk, hogy minden x hegyes szögre nézve $\sin x<x$; legegyszerűbben például úgy, hogy az AOB körcikk területe: $\frac{r^2 x}{2}$ nagyobb az AOB háromszög területénél, mely $\frac{r^2 \sin x}{2}$ és minthogy $\sin x$ pozitiv; tehát

$$0<\sin x<x$$

minden hegyes szögre nézve. Ekkor azonban a 53. lapon közölt tétel szerint* minthogy $\lim x=0$, következik, hogy

$$\lim_{x=0} \sin x=0.$$

A 0 helyen tehát a $\sin x$-nek, a geometriai értelmezése szerint elrendelt értéke nincsen, de igenis van (jobboldali) határértéke és ez 0.

Ha még definicióképpen megállapítjuk, hogy $\sin(-x)=-\sin x$, akkor következik, hogy a baloldali határérték is 0.

Jegyzet. Közbevetően megemlítjük, hogy ha az $f(x)$ függvénynek az a helyen a jobboldali és baloldali határértékei megegyezők: A, akkor igazi határértéke is A. Mert hiszen hogy a jobboldali határérték A, ez azt jelenti, hogy bármely kis ε-hoz található olyan pozitiv δ, hogy az $a \ldots a+\delta$ közben $|f(x)-A|<\varepsilon$. Éppen így, minthogy a baloldali határértéke is A, ehhez az ε-hoz tartozik oly $a-\delta' \ldots a$ köz, melyből vett x-ekre nézve: $|f(x)-A|<\varepsilon$. Ha δ és δ' közül a kisebbet választjuk, például δ-t, akkor az $a-\delta \ldots a+\delta$ bár-

* A tétel nem csak arra az esetre áll, midőn ez az egyenlőtlenség az a-t magában foglaló szakaszra érvényes, hanem akkor is, ha ez az egyenlőtlenség az $a \ldots a+d$ szakaszra áll fönn (az a baloldali határpont kivételével), csakhogy akkor csupán a jobbfelőli határértékről lehet szó. Éppen így, ha az $a-d \ldots a$ szakaszban áll fenn az egyenlőtlenség, akkor meg a baloldali határértékekről szólhatunk. Itt a tételnek ezt a szűkebb fogalmazását alkalmazzuk.

mely x helyére nézve (mely az a-tól különbözik): $|f(x)-A|<\varepsilon$, vagyis tényleg $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$.

Kimondhatjuk tehát, hogy $\lim\limits_{x=0} \sin x = 0$.

Éppen így áll a dolog a $\cos x$-re nézve is. Az $x=0$ helyen ez sincs geometriailag értelmezve, de megállapíttatik, hogy minden hegyes szög cosinusa pozitiv és hogy $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Ha $\sin x$ helyett x-et teszünk, akkor ezzel a $\sqrt{1-\sin^2 x}$-et kisebbítjük, mert $x > \sin x$ és ha ezt a $\sqrt{1-x^2}$-et még négyzetre emeljük, megint kisebbítjük. Eszerint tehát:

$$1 > \cos x > 1 - x^2$$

és így megint a jobboldali limest véve, azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$.

Azt is megállapítják, hogy minden hegyes szögre nézve:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \text{tehát} \quad \lim_{x=0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1.$$

Így értendő az elemekben megállapított: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

b) Egy másik, szintén az elemekben szereplő határérték a következő: az a^x hatványt eredetileg pozitiv egész x számokra értelmezzük, mint szorzatot (a pozitiv legyen). Erre a hatványra megállapítjuk a műveleti szabályokat, köztük az $a^m : a^n = a^{m-n}$ osztási szabályt és azt mondjuk, hogy ez a műveleti szabály érvényes legyen akkor is, ha $m=n$, és így az a^0 jelnek ezt az értéket adjuk: 1. A műveletek megmaradásának elve kényszerít tehát bennünket arra, hogy az a^0 jelnek, amely a hatványozás eredeti értelmezése szerint minden értelem nélkül való jel, ezt a meghatározott értéket tulajdonítsuk: 1.

Megmutatjuk, hogy ez még másként is felfogható; úgy, hogy az a^x függvénynek az $x=0$ helyen a jobboldali határértéke: 1. Evégből megemlítjük, hogy előzőleg az a^x hatványt minden racionális x-re értelmezve képzeljük oly módon, hogy $a^{\frac{m}{n}}$ alatt az $\sqrt[n]{a^m}$ pozitiv értékét értjük. Megmutatjuk azt is, hogy ha α racionális szám β-nál nagyobb és $a>1$, akkor $a^\alpha > a^\beta$, ha pedig $a<1$, $a^\alpha < a^\beta$. Azt már megmutattuk (l. 33. lap), hogy ha $a>1$, akkor

$$1 < a^{\frac{1}{2^n}} < 1 + \frac{a-1}{2^n}.$$

Ebből már következik, hogy a^x jobboldali limese az $x=0$ helyen: 1; ugyanis bármely kis ε számot mondjanak, mindig elmehetünk az n-nel oly messze, hogy $\frac{a-1}{2^n} < \varepsilon$ legyen. Tegyük fel, hogy már $\frac{a-1}{2^N} < \varepsilon$ és jelöljük $\frac{1}{2^N}$-et δ-val. Ha már most x pozitiv szám δ-nál kisebb, akkor

$$1 < a^x < a^{\frac{1}{2^N}} < 1 + \varepsilon$$

és így:

$$a^x - 1 < \varepsilon,$$

ha $x<\delta$; a δ tehát az ε-hoz tartozó jobboldali küszöbintervallum. Ezzel kimutattuk, hogy az a^x jobboldali limese az $x=0$ helyen valóban: 1, ha $a>1$. Éppen így áll a dolog, ha $a<1$, mert ekkor, miként láttuk,

$$1 - \frac{1-a}{2^n} < a^{\frac{1}{2^n}} < 1.$$

Ha tehát az N-et oly nagyra választjuk, hogy $\frac{1-a}{2^N}$ kisebb legyen a megadott ε-nál és ha 2^N reciprok értéke δ, akkor megint

$$1 - a^x < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x < \delta.$$

Ha még definicióképpen, vagy a műveletek megmaradása alapján megállapítjuk a negativ kitevőjű hatvány értelmét, hogy t. i.: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, akkor könnyen következtethetjük, hogy a^x baloldali limese a 0 helyen szintén 1, vagyis általában:

$$\lim_{x=0} a^x = 1.$$

[Megjegyezzük, hogy itt x-nek csakis racionális értékeit vettük tekintetbe, az x értékhalmaza tehát csakis a racionális számok halmaza volt, mert hiszen irracionális x értékekre a^x-et még nem tekintettük értelmezettnek. De most azt is megállapítjuk, hogy a^α-n mit értsünk, ha α pozitiv irracionális szám? Megmutatjuk ugyanis, hogy az a^x-nek az α irracionális helyen, melyen sem az eredeti, sem a most már kibővített értelmezés szerint nincs értelme, meghatározott véges határértéke van. Legyen a 1-nél nagyobb. Vegyünk fel egy tetszésszerinti, α-nál nagyobb β racionális számot és jelöljük az a^β-t rövidség végett M-mel.

Ha egy tetszés szerinti kis pozitiv ε szám adatik, vegyük az M-edrészét. Legyen: $\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon'$. Az előbbiek szerint állapítsuk meg a δ számot úgy, hogy

$$a^\delta - 1 < \varepsilon'$$

legyen. Ekkor már egyúttal* $1-a^{-\delta}<\varepsilon'$. Ha már most az $\alpha-\frac{\delta}{2}\cdots\alpha+\frac{\delta}{2}$ intervallumot tekintjük, akkor ennek bármely két x', x'' helye egymástól δ-nál kevesebbel különbözik: $|x'-x''|<\delta$.

Legyen két ilyen tetszőleges racionális szám: x', x''.

$$a^{x'}-a^{x''}=a^{x''}(a^{x'-x''}-1).$$

A jobboldalon álló kifejezésben $a^{x''}$ helyett a nagyobb M-et tesszük; $a^{x'-x''}$ pedig, ha $x'>x''$, kisebb a^δ-nál, ha $x'<x''$, nagyobb mint $a^{-\delta}$, tehát a második tényező mindenképpen ε'-nél kisebb abs. értékű és így:

$$|a^{x'}-a^{x''}|<M\varepsilon'<\varepsilon.$$

Ezzel a határérték létezését kimutattuk (l. 56. lap).]

c) A $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x}$. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény a sinus függvény ismeretes értelmezése alapján minden x értékre nézve egyszerű behelyettesítéssel kiszámítható. Kivétel az $x=0$, mikor e számítás nem végezhető, mert az osztás ebben az esetben nincs értelmezve. Minthogy tehát az $x=0$ környezetének minden helyén véges és meghatározott értéke van a $\frac{\sin x}{x}$-nek, fölvetjük a kérdést, hogy van-e ennek a függvénynek az $x=0$ helyen határértéke? Kimutatjuk, hogy igenis van határértéke és pedig ez a határérték: 1. Ugyanis a 14. ábrából látjuk, hogy $\sin x<x$ minden hegyes szög esetében; mert az AOB körcikk területe nagyobb az AOB háromszögénél. Ha még a B pontban a körhöz érintőt vonunk, akkor meg azt látjuk, hogy a COB derékszögű háromszög területe nagyobb az AOB körcikknél. E háromszög területe: $\frac{r^2\operatorname{tg} x}{2}$; tehát e három terület összevetéséből ered:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

* Ugyanis $a^\delta<1+\varepsilon'$-ből következik, hogy $a^{-\delta}>\frac{1}{1+\varepsilon'}$. De $\frac{1}{1+\varepsilon'}>1-\varepsilon'$, mert $(1+\varepsilon')(1-\varepsilon')=1-\varepsilon'^2<1$. Megjegyezzük még azt is, hogy a δ számot $\beta-\alpha$-nál kisebbre vehettük.

minden hegyes szögre nézve. Ha még $\sin x$-el ezen egyenlőtlenség minden tagját elosztjuk:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ami még így is írható:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Ha már most x a pozitiv számokon át a 0 felé convergál, akkor úgy a jobboldalon, mint a baloldalon álló függvények határértéke 1 lesz, tehát az 53. lapon tárgyalt tétel szerint a $\frac{\sin x}{x}$ jobboldali határértéke: 1. Minthogy azonban $\sin(-x) = -\sin x$, tehát $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ és így a baloldali határérték is: 1, vagyis

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

d) A $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Megállapítottuk, hogy az

$$\left(1+\frac{1}{1}\right),\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots \qquad a)$$

szab. sorozat (l. 17. lap), melynek limese: e. Kérdés, hogy az $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ függvénynek az $x=\infty$ helyen van-e és ha igen, ugyanaz-e a határértéke? Kimutatjuk, hogy igen:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

vagyis ez azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény e felé convergál nem csak akkor, ha az x-nek egész számú értékein át haladunk a végtelenbe, hanem ha bárminő $x_1, x_2, x_3, \ldots$ korlátlanul növekedő sorozaton át haladunk is. Hogy a fölírt határérték érvényes, annak a kimutatása végett csak azt kell belátnunk, hogy bármely kis ε-hoz található oly N küszöbszám, hogy

$$\left| e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \right| < \varepsilon.$$

ha $x > N$. Adatik tehát az ε. Vegyük a felét és legyen $\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon'$. Minthogy az *a)* sorozat limese: e, elmehetünk benne olyan messze, hogy azon túl minden tagja ε'-nál kevesebbel tér el az e-től. Tegyük fel, hogy az ε'-hoz tartozó ezen küszöbszám: N. Ha ez az N küszöbszám kisebb volna $\frac{3}{\varepsilon'}$-nál, akkor még nagyobbat veszünk helyette; szóval N-et oly nagynak választjuk, hogy egyrészt

$$\left| e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right| < \varepsilon', \quad \text{ha} \quad n > N, \quad \text{másrészt} \quad N > \frac{3}{\varepsilon'}.$$

Ha már most x egy tetszésszerinti N-nél nagyobb szám és például M és $M+1$ egész számok közé esik, azaz:

$$M < x < M+1,$$

akkor:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

-et nagyobbítjuk, ha az alapot azáltal nagyobbítjuk, hogy x helyébe a kisebb M-et tesszük és az exponenst azzal nagyobbítjuk, hogy az x helyébe a nála nagyobb $M+1$-et írjuk. Éppen így ezt a kifejezést kisebbítjük, ha az alapban x helyébe $M+1$-et és a kitevőben x helyébe a kisebb M-et tesszük. Azaz:

$$\left(1+\frac{1}{M+1}\right)^{M}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M+1},$$

ami még így is írható:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{M+1}\right)^{M+1}}{1+\frac{1}{M+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}\left(1+\frac{1}{M}\right).$$

De $\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}$ az $a)$ sorozat monoton volta miatt e-nél kisebb és $\left(1+\frac{1}{M+1}\right)^{M+1}$ az $e-\varepsilon'$-nél nagyobb, tehát:

$$\frac{e-\varepsilon'}{1+\frac{1}{M+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e+\frac{e}{M}.$$

A baloldali kifejezés, mint már többször említve volt, az $\frac{1}{1+u}>1-u$ folytán egyszerűbben is írható és így:

$$e-\frac{e}{M+1}-\varepsilon'\left(1-\frac{1}{M+1}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e+\frac{e}{M}.$$

A jobboldalon álló kifejezést még nagyobbítjuk, ha $\frac{e}{M}$ helyett ε'-t mondunk.* A baloldalon állót kisebbítjük, ha a levonandó $\frac{e}{M+1}$ helyett a nagyobb ε'-t és $1-\frac{1}{M+1}$ helyett 1-et írunk. Ha még tekintetbe vesszük, hogy $2\varepsilon'=\varepsilon$, akkor:

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e+\frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis ha csak $x>N$, akkor

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-e\right|<\varepsilon$$

és így valóban:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Ezen határérték megállapításánál az x a pozitiv számokon át vált végtelenné, vagyis pozitiv végtelenné lett. Vajjon van-e ennek a függvénynek határértéke, ha x negativ végtelenne válik? Kimondhatjuk, hogy ekkor is:

$$\lim_{x=-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Ha ugyanis $x=-z$ tesszük, akkor

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^{z}}$$

és így:

$$\lim_{x=-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{z=\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^{z}}.$$

* Mert $\frac{e}{M}<\frac{3}{M}<\frac{3}{N}$, de N-et feltételünk szerint $\frac{3}{\varepsilon'}$-nél nagyobbnak vettük, tehát $\frac{e}{M}<\varepsilon'$.

Tehát csak $\lim\limits_{z=\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^z$ számítandó ki.

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)^z=\left(\frac{z-1}{z}\right)^z=\left[\frac{z-1}{1+(z-1)}\right]^z=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^z}$$

és ez még így is írható:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$$

vagyis $x=-z$ tévén:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right).$$

De ha x negativ végtelenné válik, z pozitiv végtelenné lesz ($z-1$ szintén) és így a jobboldalon álló kifejezés első tényezőjének határértéke: e, a második tényezőé pedig: 1; tehát

$$\lim_{x=-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Kimondhatjuk tehát, hogy általában:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

x akár pozitiv, akár negativ végtelenné váljék.

Ez oly fontos határérték, hogy még más alakban is felírjuk. Ha ugyanis $\frac{1}{x}$ helyett z betűt írunk, akkor, ha x végtelenné válik, z 0-á lesz és így:

$$\lim_{z=0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e.$$

Ebből megállapitjuk ezt a határértéket is: $\lim\limits_{z=0}(1+az)^{\frac{1}{z}}$, ha a tetszés szerinti pozitiv vagy negativ szám. Evégből az helyett u betűt írunk, megjegyezve, hogy ha z zérussá lesz, akkor u is eltűnik.

$$(1+az)^{\frac{1}{z}}=(1+u)^{\frac{a}{u}}=\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^a.$$

[Később be fogjuk látni, hogy általában $\lim\limits_{x=a}[f(x)]^a=[\lim\limits_{x=a}f(x)]^a$, ha $\lim\limits_{x=a}f(x)$ véges, meghatározott szám, vagyis, hogy éppen úgy, mint pozitiv egész számú exponens esetében, midőn $[f(x)]^a$ szorzatnak tekinthető, melynek limese a tényezők limeseinek szorzata, tehát $\lim\limits_{x=a}[f(x)]^a=[\lim\limits_{x=a}f(x)]^a$, úgy minden a exponens esetében a limeskeresés és a hatványozás fölcserélhető.] Eszerint tehát:

$$\lim_{z=0}(1+az)^{\frac{1}{z}}=[\lim_{u=0}(1+u)^{\frac{1}{u}}]^a=e^a.$$

Ha z helyébe megint az eredeti $\frac{1}{x}$-et írjuk, akkor ez az egyenlet így irható:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a.$$

7. Folytonos függvény. Az eddigiekben megállapitottuk, hogy mit értsünk az $f(x)$ függvénynek az a helyen való határértékén. Többféleképpen is fogalmazhatjuk ezt az állítást: $\lim\limits_{x=a}f(x)=A$, Mondhatjuk, hogy minden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sz. sorozatra nézve, mely az a-t értelmezi ($\lim a_n = a$) az $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ függvényérték-sorozat sz. sor, mely az A-t értelmezi, azaz, ha $\lim a_n = a$, akkor $\lim f(a_n) = A$. Ezzel egyenlő értékű, hogy bármily kis ε-hoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta$ és pedig, ha $x - a$ mindig pozitiv (negativ), akkor azt mondjuk, hogy a jobboldali (baloldali) határérték A és ha x mindazon helyeket jelenti, amelyek az $a - \delta \ldots a + \delta$ közben vannak, akkor tulajdonképpeni határértékről van szó. Ugyanezt az állítást még a következő alakban is szoktuk kifejezni: ha x helyébe, mely úgyis az a közvetlen közelében levő helyeket jelenti: $a + h$ alakot írjuk, akkor azt, hogy az x az $a - \delta \ldots a + \delta$ közben van, így is jelölhetjük:

$$|h| < \delta,$$

tehát $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$, ha minden ε-hoz tartozik oly δ köz, hogy

$$|f(a+h) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |h| < \delta.$$

Az eddigiekben rendszerint oly helyeken állapítottuk meg a függvény határértékét, amelyekre a függvény eredeti értelmezése (akár a formulával történő, akár a geometriai, akár a tabelláris) nem vonatkozhatott (így pl.: $\sin x$ az $x=0$ helyen, $\dfrac{\sin x}{x}$ az $x=0$ helyen stb.), szóval, amelyekhez a függvény eredeti értelmezésével elrendelt érték nem tartozott. De éppen úgy beszélhetünk a függvény határértékéről minden más helyen is. Így például ez az egyszerű függvény: x^n, ha n pozitiv egész szám, az $x=1$ helyen: 1. Ez a képlet által szolgáltatott érték, vagyis az $x=1$ helyhez elrendelt értéke. De egyúttal a határértéke is 1. Erről a határérték definiciója alapján azonnal meggyőződhetünk. Ha ugyanis egy tetszés szerinti kis pozitiv ε szám adatik és k egy tetszés szerinti 1-nél nagyobb szám (pl.: 1·1, vagy 1·01), akkor legyen $\delta \leqq \dfrac{\varepsilon}{nk^{n-1}}$ (és még $\delta < k - 1$ is ki legyen elégítve). Azt állítjuk, hogy ez a δ az ε-hoz tartozó küszöbintervallum. Ugyanis

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1),$$

vagyis: $$|x^n - 1| = |x-1|\,|x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1|.$$

Ha $|x-1| < \delta$, vagyis x az $1-\delta$ és $1+\delta$ közből vétetik, (δ egyrészt az $\dfrac{\varepsilon}{nk^{n-1}}$-nél, másrészt a $k-1$-nél kisebb, tehát $x < k$), akkor a második tényező minden tagja kisebb k^{n-1}-nél (ugyanis, ha x

nagyobb 1-nél, világos, hogy e kifejezés legnagyobb tagja x^{n-1}, ha pedig $x<1$, akkor minden tag az 1 kivételével 1-nél kisebb, annál inkább k^{n-1}-nél), tehát a jobboldali kifejezés második tényezője kisebb nk^{n-1}-nél, azaz:

$$|x^n-1|<\delta . nk^{n-1}<\varepsilon.$$

Ha tehát x az $1-\delta$ és $1+\delta$ közé esik, akkor $|1-x^n|<\varepsilon$, vagyis valóban δ az ε-hoz tartozó küszöbintervallum és így $\lim\limits_{x=1} x^n=1$.

Ha tehát az $f(x)$ függvénynek az $x=a$ helyen van is a definiciójából eredő értéke, azért rendszerint mégis szólhatunk e helyen a $\lim\limits_{x=a} f(x)$-ről. Meglehet már most, hogy úgy, miként az említett egyszerű példában, az $f(x)$-nek az $x=a$ helyen van véges határértéke: A és ez a határérték ugyanaz, mint a függvénynek az a helyhez tartozó elrendelt értéke. Ilyenkor a két számérték eme megegyezését úgy jellemezzük, hogy azt mondjuk, az $f(x)$ függvény az a helyen *folytonos*. Ellenkező esetben, vagyis, midőn véges határérték az a helyen nincsen, vagy van határérték, de ez nem egyezik meg az $f(x)$-nek az a helyhez rendelt értékével, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ az $x=a$ helyen *nem folytonos*.* Az a helyhez tehát rendszerint kétféle számérték tartozik: egyrészt a függvény definiciója értelmében elrendelt érték, melyet $f(a)$-val jelölünk, másrészt pedig az a-hoz tartozó határérték: $\lim\limits_{x=a} f(x)$.

E meghatározás szerint már *most az $f(x)$ függvény az $x=a$ helyen folytonos, ha az a helyen van véges határértéke és ez a határérték az a helyhez rendelt értékkel egyenlő, azaz:*

$$\lim_{x=a} f(x)=f(a),$$

vagy más szóval, ha bármely kis ε számhoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

ha $|x-a|<\delta$; vagy még másként, ha minden pozitiv ε-hoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy

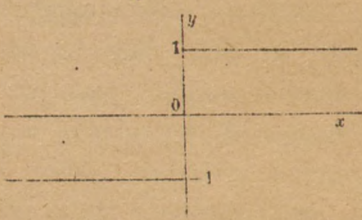
$$|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon,$$

ha $|h|<\delta$.

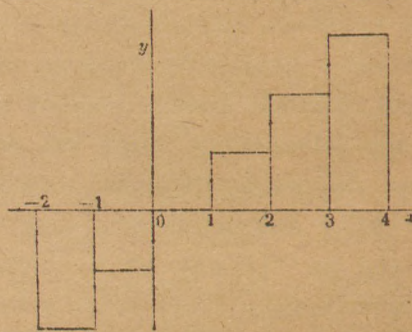
* Még arra az esetre is lehetne gondolni, midőn az $f(x)$-nek az a helyen van határértéke, de elrendelt értéke nincs. Ilyenkor, ha a függvénynek az a helyen való értékéről egyáltalában beszélni akarunk, magát a határértéket tekintjük az a helyhez tartozó értéknek. (Így például a csupán racionális helyekre értelmezett függvény értelmezését az irracionális helyekre kiterjesztjük, ha ezen helyeken van határérték.)

[Még azt is megjegyezzük, hogy ha ez az egyenlőtlenség csakis pozitiv (negativ) h-kra áll fenn, akkor az $f(x)$-nek a jobboldali (baloldali) határértéke $f(a)$, vagyis az $f(x)$ az a helyen jobbról (balról) folytonos].

Néhány példát mutatunk be a nem folytonos függvényre vonatkozólag: *a)* Egy $f(x)$ függvényt úgy értelmezünk, hogy minden pozitiv x helyen $+1$, minden negativ x helyen -1 legyen és $x=0$ helyen $f(x)=0$ legyen. Ezzel ezt a függvényt minden helyen értelmeztük. Grafikusan is igen egyszerűen feltüntethetjük (15. ábra). Az O kezdőpontról megjegyezzük, hogy ez a pont is hozzátartozik a grafikus képhez, a függvény menetét ábrázoló «görbéhez». E függvény az $x=0$ helyen nem folytonos: szakadásos. Ugyanis e helyen a jobboldali határértéke $+1$, a baloldali -1 és az elrendelt érték egyikkel sem egyezik meg; tehát a függvény egyik oldalról sem folytonos. Ezen függvényt így jelöljük: sgn x (signum x), mert ha x előjele pozitiv, a függvény értéke $+1$, ha pedig x jele negativ, a függvény értéke mindig -1.



15. ábra.



16. ábra.

b) Képzeljünk egy függvényt, mely minden helyen ugyanolyan értékű, mint az x^2 függvény, de ha $x=1$, akkor értéke 0 legyen. Nyilván ennek a függvénynek az $x=1$ helyen szakadása van; ezen a helyen ugyanis a határértéke: 1 és a definiált értéke: 0.

c) Jelöljük $[x]$-el az x számban foglalt legnagyobb egész számot, a közvetlen kisebb egész számot, ha x nem egész szám; ha pedig x egész szám, akkor legyen $[x]=x-\frac{1}{2}$ és $x=0$ helyen: 0. (Így pl., ha $x=2{\cdot}375\ldots$, akkor $[x]=2$). Ez a függvény a $0\ldots1$ szakaszban mindenütt 0, az $1\ldots2$ szakaszban: 1, ... az $n\ldots n+1$ szakaszban: n, tehát a menetet a mellékelt lépcsőzetes ábra tünteti fel. Azonnal látjuk, hogy e függvény minden helyre egyértelműen definiáltatott; és hogy minden egész számú helyen szakadása van.

d) Az $y=\frac{1}{x-a}$ függvénynek az $x=a$ helyen nincs véges határértéke. Ha jobboldalról közeledünk az a helyhez, akkor minden pozitiv számnál nagyobbá válik, végtelenné lesz, ha pedig a baloldalról közelítjük meg az a helyet, akkor meg negativ végtelenné lesz. Az a helyen tehát nem folytonos. Az $y=\frac{1}{(x-a)^2}$ végtelenné válik az $x=a$ helyen és pedig mindkét oldalról pozitiv végtelenné lesz; tehát az $x=a$ helyen nem mondjuk folytonosnak.

e) az $y=\sin\frac{1}{x-a}$ függvény teljesen meg van határozva ha megállapítjuk, hogy az $x=a$ helyen, melyen eredetileg értelmezve nincs, pl. 0 legyen.

De bármiképpen állapíttassék is meg az $x=a$ helyhez tartozó függvényérték, még sem folytonos a függvény e helyen, mert nincs határértéke, illetőleg a határérték attól függ, hogy minő sorozattal értelmezzük az a helyet. Így például, ha ezt a szabályos sorozatot használjuk:

$$a+\frac{1}{2\pi+a},\ a+\frac{1}{4\pi+a},\ a+\frac{1}{6\pi+a},\dots a+\frac{1}{2n\pi+a},\dots,$$

mely nyilván az a-t értelmezi, akkor $\sin\frac{1}{x-a}$ mindig a $\sin\alpha$ értéket veszi fel.

[Ez a nehány példa eléggé illusztrálja, hogy minő különböző fajta diszkontinuitásai lehetnek a függvénynek. A legutolsó példában különösen azt láttuk, hogy választható olyan szab. sorozat az a értelmezésére, hogy az $f(a_1), f(a_2), f(a_3),\dots$ sorozat határértéke a $\sin\alpha$ legyen; tehát, minthogy $\sin\alpha$ a -1 és $+1$ közötti bármely számot jelentheti, a -1 és $+1$ között bármely számot lehet határértékül tekinteni. Az első példánál szintén volt az $x=0$ helyen határérték és pedig a jobboldali $+1$, a baloldali -1. Lehetséges tehát, hogy az a számot értelmező $a_1, a_2\dots$ sorozatok különböző határértékekhez, (mint az 1. példánál) lehet, hogy végtelen sokhoz vezetnek. Az első esetben a lehetséges határértékek között van egy legnagyobb és egy legkisebb. A második esetben, t. i. midőn végtelen sok határértékhez juthatunk és e végtelen sok szám halmaza korlátos, akkor, miként tudjuk, van egy felső határuk M és egy alsó határuk m. A lehetséges határértékek az M és m között vannak. A $M-m$ különbséget a határértékek ingadozásának mondjuk. (Így pl. az *e)* alatti példánál $M=+1$, $m=-1$, $M-m=2$). Ha $M=m$, azaz a határértékingadozás 0, akkor az illető a helyen az $f(x)$ függvénynek meghatározott véges határértéke van, tehát ha az elrendelt értéke is megegyezik ezzel, akkor ez az a hely a függvénynek folytonossági helye.]

Eddig mindig csak arról szóltunk, hogy a függvény egy bizonyos *a helyen* folytonos, vagy nem folytonos. Ha az $\alpha\dots\beta$ intervallum minden helyén folytonos (az α és β helyeket is beleértve), akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ az $\alpha\dots\beta$ *intervallumban folytonos.*

Az ilyen esettel, vagyis azzal, midőn az $\alpha\dots\beta$ intervallum minden helyén folytonos az $f(x)$ függvény, kissé tüzetesebben kell foglalkoznunk. Ha az $f(x)$ függvény az a helyen folytonos, akkor egy adott ε-hoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, ha $|x-a|<\delta$. Ha $a_1, a_2, a_3,\dots a_n$ véges számú helyeken folytonos, akkor minden ε-hoz tartoznak az egyes helyeken $\delta_1, \delta_2, \delta_3,\dots \delta_n$ küszöbintervallumok és ha ezek közül a legkisebbet δ-val jelöljük, akkor azt mondhatjuk, hogy az ε-hoz tartozik oly *közös* δ küszöbintervallum, hogy

$$|f(a_1+h)-f(a_1)|<\varepsilon,\ |f(a_2+h)-f(a_2)|<\varepsilon,\dots |f(a_n+h)-f(a_n)|<\varepsilon,\quad \text{ha}\ |h|<\delta.$$

De mondhatjuk-e ezt akkor is, ha az $f(x)$ végtelen sok $a_1, a_2, a_3,\dots$ helyen, vagy egy $\alpha\dots\beta$ intervallum minden helyén folytonos? (a határokat is beleértve, ahol legalább is egyoldalú folytonosságot teszünk fel). Ez a fontos kérdés tehát így hangzik: Ha $f(x)$ az $\alpha\dots\beta$ szakasz minden helyén folytonos (a határhelyeken is) és megadatik egy tetszés szerinti ε, található-e mindig ehhez oly *közös* küszöbintervallum, hogy a szakasz *bármelyik* helyére elmondhassuk, hogy

$$|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon,\quad \text{ha}\ |h|<\delta$$

(a határokon csak pozitiv, illetőleg negativ h-ról szólunk). Azt állítjuk, hogy igenis, minden ε-hoz található egy, az egész szakaszra közös δ küszöbintervallum.

Adva levén ε, a szakasz *minden* helyéhez tartozik egy-egy δ. A δ pozitiv számok végtelen halmazt alkotnak. E végtelen halmaz alsó határa csak pozitiv, vagy 0 lehet; tegyük fel, hogy nem 0 és jelöljük m-el. Az alsó határ fogalma szerint a halmazban m-nél kisebb szám nincsen; eszerint tehát minden δ nagyobb m-nél, tehát m-et tekinthetjük az ε-hoz tartozó közös küszöbintervallumnak, vagyis, ha a a szakasz bármelyik helye

$$|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon, \text{ ha } |h|<m.$$

De pozitiv számok végtelen halmazának alsó határa 0 is lehetne. Mit jelent ez? Egyrészt azt a magától értetődő dolgot, hogy 0-nál kisebb δ nem létezik, másrészt azonban azt, hogy bármely kis pozitiv számot jelentsen is δ', az $\alpha\beta$ szakaszban van olyan a hely, melyhez tartozó küszöbintervallum δ'-nál kisebb [mert hiszen, ha δ'-nál kisebb δ nem volna, akkor nem 0, hanem vagy δ', vagy ennél nagyobb volna az alsó határ]. Bebizonyítjuk, hogy a δ küszöbintervallumok választhatók úgy, hogy a δ-k alsó határa ne legyen 0.

Ha ugyanis ez az alsó határ minden lehető választásnál 0 volna, akkor az $\alpha \ldots \beta$ szakasznak legalább egyik felében 0 volna ez az alsó határ. Jelöljük azon félszakasz határpontjait, melyben az alsó határ 0, α_1 és β_1-gyel. (Ezek közül egyik megegyezik α-val, vagy β-val.) Az $\alpha_1\beta_1$ szakaszban tehát a δ küszöbintervallum alsó határa 0. Ezt a szakaszt megint megfelezzük. Legalább egyik felében a δ küszöbintervallum alsó határa 0. Jelöljük ezt a félszakaszt $\alpha_2\beta_2$-vel 's í. t. Ezzel az eljárással tehát sorban az $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3, \ldots$ szakaszokra jutunk, melyek mindegyikében a δ küszöbintervallumok alsó határa 0.

Az egyes félintervallumok baloldali határpontjai, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ monoton növekedő sort alkotnak (esetleg egyesek megegyeznek, sőt talán mind megegyezik az α-val) a baloldali $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ határpontok monoton csökkenő sort alkotnak és nyilván $\lim \alpha_n = \lim \beta_n$, mert hiszen ez a folytonos felezéssel nyert $\alpha_n\beta_n$ intervallum tetszés szerinti kicsinnyé válik. E két sorozat által értelmezett számot jelöljük c-vel. (Ez esetleg az adott $\alpha \ldots \beta$ köz egyik határhelye is lehet.)

Ennek a c helynek az a tulajdonsága van, hogy minden $\alpha_n\beta_n$ közben benne van, tehát ha bárminő kis $\lambda \ldots \mu$ közt jelölünk is meg, mely a c-t magában foglalja, ebben az ε-hoz tartozó δ küszöbintervallumok alsó határa 0. Igen ám, de feltételünk szerint az $f(x)$ mindenütt, tehát a c helyen is folytonos. Jelöljük meg a szóban forgó ε feléhez, az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez a c helyen tartozó küszöbintervallumot. Legyen ez d; vagyis a $c-d \ldots c+d$ közbe eső bármely x helyre nézve:

$$|f(x)-(c)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ugyanez áll a $c-\frac{d}{2} \ldots c+\frac{d}{2}$ közre is. Jelöljük meg ennek aköznek valamely tetszés szerinti helyét ξ-vel, akkor tehát

$$f(c)-\frac{\varepsilon}{2}<f(\xi)<f(c)+\frac{\varepsilon}{2}$$

és ha x a $c-d \ldots c+d$ bármelyik helyét jelöli, akkor is

$$f(c)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f(c)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

E két egyenlőtlenségből következik, hogy:

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon,$$

ha a ξ a $c-\frac{d}{2}\ldots c+\frac{d}{2}$ és x a $c-d\ldots c+d$ bármelyik helyét jelöli. De ekkor a $|\xi-x|$ távolság legalább is $\frac{d}{2}$-ig terjedhet, vagyis az előbbi egyenlőtlenségből ez is következik:

Ha ξ a $c-\frac{d}{2}\ldots c+\frac{d}{2}$ köz valamelyik helye (akármelyik lehet), akkor $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$, ha csak $|x-\xi|<\frac{d}{2}$. De ez azt jelenti, hogy a $c-\frac{d}{2}\ldots c+\frac{d}{2}$ köz minden ξ helyéhez tartozik egy közös, legalább $\frac{d}{2}$ nagyságú küszöbintervallum; e közben tehát az ε-hoz tartozó küszöbintervallumok mindannyian $\frac{d}{2}$-nél nagyobbak levén, alsó határuk nem lehet 0. Ellenmondásra jutottunk és ezzel kimutattuk, hogy nem állhat meg az a feltevésünk, hogy az $\alpha\beta$ szakaszban az ε-hoz tartozó küszöbintervallumok alsó határa csak 0 lehet. Ez az alsó határ 0-tól különböző m pozitiv szám is lehet és így, ha ξ az $\alpha\beta$ szakasz bármelyik helyét jelenti és ε tetszés szerinti megadott szám, akkor:

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon,$$

ha csak az x a $\xi-m\ldots\xi+m$ közből vétetik (a határhelyeken csak egyoldalú közökről szólunk). És ezzel kimutattuk azt a nagyfontosságú tételt, hogy *ha $f(x)$ az $\alpha\ldots\beta$ intervallum minden helyén (a határokon is) folytonos, akkor bármely ε pontossághoz tartozik egy **közös** m küszöbintervallum úgy, hogy $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, ha $|x-a|<m$, ahol a az $\alpha\ldots\beta$ köz akármelyik helye.* Ezt az állítást, vagyis a **közös** küszöbintervallum létezését röviden úgy fogjuk mondani, hogy $f(x)$ az $\alpha\ldots\beta$ közben *egyenletesen folytonos.*

Így pl. láttuk, hogy x^n, ha n pozitiv egész szám, minden helyen folytonos. Kérdés, hogy egy tetszés szerinti $a\ldots b$ szakaszban adott ε-hoz mekkora közös küszöbintervallum tartozik? Minthogy

$$x_1^n-x^n=(x_1-x)(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x+x_1^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}),$$

tehát, ha a $|b|>|a|$ és $|b|=\beta$, akkor

$$|x_1^n-x^n|<n|x_1-x|\beta^{n-1}.$$

Ha tehát δ-t úgy választjuk, hogy $\delta<\frac{\varepsilon}{n\beta^{n-1}}$ legyen, akkor

$$|x_1^n-x^n|<\varepsilon,$$

ha csak $$|x_1-x|<\delta,$$

tehát az adott ε-hoz az egész $a\ldots b$ intervallumban a $\delta=\frac{\varepsilon}{n\beta^{n-1}}$ küszöbintervallum tartozik.

8. Néhány tétel a folytonos függvényekről. *a)* Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $x=a$ helyen folytonosak, akkor a 48. lapon közölt tételek alapján rögtön következik, hogy 1) $f(x)+\varphi(x)$, 2) $f(x)-\varphi(x)$, 3) $f(x).\varphi(x)$ és 4) ha $\varphi(a)\neq 0$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ is folytonos az $x=a$ helyen. Elég lesz a bizonyítás gondolatmenetét például az 1) esetre vonatkozóan közölni. Az $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $x=a$ helyen folytonosak; vagyis

$\lim_{x=a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x=a} \varphi(x)=\varphi(a)$. Ebből következik, hogy

$$\lim_{x=a} [f(x)+\varphi(x)] = f(a) + \varphi(a),$$

vagyis az $f(x)+\varphi(x)$ függvény az $x=a$ helyen folytonos. Ugyanígy bizonyítandó a többi tétel is. Azt is azonnal beláthatjuk, hogy nem csak két, hanem több függvényből összeadás, kivonás, szorzás és osztással alkotott függvény (az utolsó, ha a nevező nem 0) is folytonos az $x=a$ helyen, ha e függvény megalkotásánál szereplő függvények mind folytonosak. Az is világos, hogy ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $a \ldots b$ szakaszban (a határokat is beleértve) folytonosak, akkor $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x).\varphi(x)$ és $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ is folytonos e szakaszban (az utolsó, ha $\varphi(x)$ sehol sem válik 0-vá, vagy pontosabban, ha abs. értéke egy megadott M poz. számnál mindig nagyobb).

b) *Összetett függvény folytonossága.* Egyelőre célszerű lesz az összetett függvény fogalmát bevezetni, mert több, a függvényekre vonatkozó ismeretünk ezzel áttekinthetőbben csoportosítható. Egy-két példán mutatjuk meg, hogy miről van szó. Az $ax+b$ az x függvénye (lineáris függvénye). A $\sin(ax+b)$ voltaképpen szintén az x függvénye, de sokszor célszerű ezt úgy felfogni, hogy előbb az $ax+b$-t tekintjük az x függvényének és ha ezt z-vel jelöljük, akkor a $\sin(ax+b)$ egyszerűen $\sin z$-nek tekinthető. A $\sin(ax+b)$-t ebből a szempontból az x összetett függvényének mondjuk.

Egy másik egyszerű példa: $y=(3x^2-5x+2)^3$. Ha az alapot z betűvel jelöljük, akkor $y=z^3$ és $z=3x^2-5x+2$. Az y az x összetett függvénye. Ennek a felfogásnak csak éppen azt a jelentőségét látjuk ezúttal, hogy a $3x^2-5x+2$ harmadik hatványának kiszámításából eredő hatodfokú egész függvény helyett a z változónak csak harmadfokú függvénye áll előttünk. E két egyszerű példa nyomán szerkeszthetünk akárhányat; de elég e két példa is arra, hogy az összetett függvény jelölésével megismerkedjünk. Ha $z=\varphi(x)$ az x változó és $y=f(z)$ a z-nek megadott függvénye, akkor voltaképpen az $f(z)$ az x függvénye. Ezt így írjuk:

$$y = f[\varphi(x)]$$

és így olvassuk: y a $\varphi(x)$-nek f függvénye. Itt természetesen egyelőre az x-nek csak olyan $a \ldots b$ szakaszban szabad változnia, amelyben $\varphi(x)$ az x-nek olyan egyértékű függvénye, melynek értékkészlete az $f(z)$ értelmezési tartományba esik. Így pl. ha $\sqrt{\sin x}$-re gondolunk, akkor x csakis a $0 \ldots \pi$ közötti szakaszban mozoghat, mert ha $x>\pi$, akkor $\sin x$ negativ és a míg csak reális számokról szólunk, a gyök alatti mennyiség negativ nem lehet.

Az összetett függvényre vonatkozólag azt állítjuk, hogy ha az $x=a$ helyen a $\varphi(x)$ folytonos és $\varphi(a)=b$, továbbá az $f(z)$ függvény a $z=b$ helyen folytonos, akkor az $f[\varphi(x)]$ összetett függvény az $x=a$ helyen folytonos.

[Evégből csak azt kell megmutatnunk, hogy ha egy tetszés szerinti kis ε adatik, található ehhez oly δ küszöbintervallum, hogy

$$|f[\varphi(a+h)]-f[\varphi(a)]|<\varepsilon, \text{ ha } |h|<\delta. \qquad \alpha)$$

Adatik az ε. Határozzuk meg ehhez a σ küszöbintervallumot úgy, hogy

$$|f(b+k)-f(b)|<\varepsilon, \text{ ha } |k|<\sigma. \qquad \beta)$$

Ez lehetséges, mert $f(z)$ a b helyen folytonos. És most határozzuk meg az a helyen a $\varphi(x)$ függvénynek a σ-hoz tartozó küszöbintervallumát, δ-t, amelyre nézve

$$|\varphi(a+h)-\varphi(a)|<\sigma, \text{ ha } |h|<\delta,$$

vagyis:
$$\varphi(a)-\sigma<\varphi(a+h)<\varphi(a)+\sigma.$$

Ha $\varphi(a+h)=\varphi(a)+k$ tesszük, akkor tehát $|k|<\sigma$ és így, ha $|h|<\delta$, akkor $\alpha)$ teljesítve van, mert

$$f[\varphi(a+h)]=f[\varphi(a)+k]=f(b+k), \quad |k|<\sigma$$

és így az $\alpha)$ baloldala így írható:

$$f(b+k)-f(b),$$

ez pedig a $\beta)$ szerint abs. értékre kisebb ε-nál, tehát valóban:

$$|f[\varphi(a+h)]-f[\varphi(a)]|<\varepsilon, \text{ ha } |h|<\delta.$$

Könnyen belátható, hogy ha $\varphi(x)$ az $a\ldots b$ szakaszban folytonos és míg az x az $a\ldots b$ szakaszt befutja, addig a $\varphi(x)$ az $\alpha\ldots\beta$ szakaszban marad és $f(z)$ az $\alpha\ldots\beta$ szakaszban a z folytonos függvénye, akkor az $f[\varphi(x)]$ az $a\ldots b$ közben az x folytonos függvénye.]

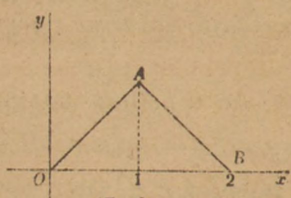
c) *Folytonos függvény jeltartása. Ha $f(x)$ az a helyen pozitiv (negativ), akkor az a helynek van olyan környezete, melyen belül is mindenütt pozitiv (negativ),* vagyis a folyt. függvény a jelét egy megadható közben megtartja. Legyen ugyanis $f(a)=A$ pozitiv. Válaszszuk ε-t $\frac{A}{2}$-nél kisebbre és legyen az ε-hoz tartozó küszöbintervallum δ; akkor tehát $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $|x-a|<\delta$; vagyis e közben:

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

De úgy az $A+\varepsilon$, mint az $A-\varepsilon$ is pozitiv, $\left(\text{mert } \varepsilon<\frac{A}{2}\right)$, tehát $f(x)$ is pozitiv, ha $|x-a|<\delta$. Éppen így bizonyítjuk be a tétel másik részét.

d) *Folytonos függvény felső (alsó) határa* (Weierstrass-tétel). Ha az x független változó az ab szakaszban halad (akár minden értéket fölvesz, akár csak minden rac. értéket, vagy más számhalmazt), akkor az $f(x)$ függvény hozzátartozó számértékei szintén egy végtelen számhalmazt alkotnak és ha az $f(x)$ az ab szakaszban korlátos, akkor az $f(x)$ számértékek halmazának van egy M felső és m alsó határa. [Emlékeztetünk a halmaz felső határának fogalmi megállapítására: az összes racionális számokat két szeletbe sorozzuk; az A-ba tesszük az α számot akkor, ha a halmazban nála nagyobb is van, B-be az ellenkező esetben. A két szelet határa az M. Ebből következik, hogy a halmazban M-nél nagyobb szám nincs, de ha ε bárminő kis pozitiv szám, $M-\varepsilon$-nál nagyobb szám igenis van a halmazban; mert hiszen ha nem volna, akkor nem M volna a felső határ, hanem $M-\varepsilon$, vagy ennél kisebb. Ugyanígy áll a dolog az alsó határral; a halmazban m-nél kisebb szám nincsen, ellenben bármely kis szám legyen is az ε, az $m+\varepsilon$-nál kisebb szám van a halmazban.]

Az M számot az $f(x)$ függvény ab szakaszbeli felső határának, a m-et pedig alsó határának nevezzük. Megjegyezzük azonban, hogy nem kell azt gondolnunk, hogy az $f(x)$ függvény az ab szakasz egy vagy több helyén tényleg fölveszi ezt az M értéket. Egy-két példán mutatjuk meg, hogy ez általában nincs így. Definiáljunk egy $f(x)$ függvényt a következő módon: a $0 \ldots 1$ közben mindig akkora legyen, mint x, az $1 \ldots 2$ közben pedig akkora legyen, mint $2-x$. Ezzel a $0 \ldots 2$ közben értelmeztük, csak még azt nem mondottuk meg, hogy az 1 helyen mekkora értékű. Megállapítjuk, hogy az $x=1$ helyen: $\frac{1}{2}$ legyen. Ezzel ez a függvény a $0 \ldots 2$ köz minden helyén meg van határozva. Rajzban is igen egyszerűen tüntethető fel: a mellékelt ábrán a tört vonal ábrázolja a szóban forgó függvény menetét, de az $x=1$ helyhez $y=\frac{1}{2}$ kivételes pont tartozik. E függvény felső határa a $0 \ldots 2$ szakaszban nyilván: 1. (1-nél nagyobb nem lesz, de $1-\varepsilon$-nál nagyobb lesz, bárminő kicsiny legyen is ε). De van-e olyan x hely, amelyhez tartozó függvényérték éppen 1? Látjuk, hogy nincs, mert ha a főmegállapítás az $x=1$-re is vonatkoznék, e helyen $f(x)$ éppen 1 lenne, de erre azt a kivételes megállapítást statuáltuk, hogy $f(1)=\frac{1}{2}$ legyen.



17. ábra.

Egy más $f(x)$ függvényt így definiálunk: x minden értékénél $f(x)$ akkora legyen, mint $\sin x$, kivéve az $x=\frac{\pi}{2}$ helyet, amikor 0 legyen. Ezen függvénynek is, mint azonnal látjuk, a $0 \ldots \pi$ szakaszban a felső határa: 1, de ezt az értéket sehol sem veszi fel. Ugyanígy áll a dolog az alsó határral.

A most felhozott példák olyan függvényekre vonatkoznak, melyek az ab szakaszban nem folytonosak. Ha azonban $f(x)$ függvény az ab szakaszban (a határokat is beleértve) folytonos, akkor ez az eset nem fordulhat elő, vagyis:

Ha $f(x)$ az ab szakaszban (a határokat is beleértve) folytonos, akkor legalább egy olyan c hely van e szakaszban, amely helyen a felső (alsó) határát felveszi, vagyis $f(c)=M$. (Weierstrass tétele.)

E fontos tételt a következőképpen bizonyítjuk be: Az ab szakaszban az $f(x)$ felső határa legyen M. Ha már az a helyen $f(a)=M$ volna, akkor nincs mit bizonyítanunk; mert akkor már van egy hely, amelyen a függvény értéke: M.

Ha az ab szakaszban valahol egy α helyet megjelölünk, akkor ezzel a szakaszt két részre osztottuk: $a\alpha$-ra és αb-re. Az egyes részszakaszokban a függvényértékek felső határa csak M, vagy M-nél kisebb lehet. [Mert ha $M'>M$ volna a felső határ valamelyik részszakaszban, akkor volna az M és M' között levő függvényérték is, ami pedig lehetetlen, mert az egész szakaszban sincs M-nél nagyobb függvényérték.] Ha az $a\alpha$ szakaszban a felső határ M-nél kisebb, akkor az α számot az A szeletbe tesszük, ha pedig a β hely olyan, hogy az $a\beta$ szakaszban a felső határ M, akkor a β számot a B szeletbe tesszük. Ezzel minden számot, mely az ab közbe esik, osztályoztunk és nyilván egyik szelet sem üres, mert a minden esetre az A szeletbe tartozik és b a B-be. A B szelet minden száma nagyobb az A számainál, (mert ha α az A-ba tartozik, azaz $a\ldots\alpha$ szakaszban a felső határ M-nél kisebb, akkor minden, az α-nál kisebb α' is az A-ban van, mert akkor az $a\alpha'$ szakaszban is kisebb a felső határ M-nél). Az A és B szeletek által értelmezett c számról azt állítjuk, hogy $f(c)=M$. A bizonyítás indirekt úton történik. Ha ugyanis $f(c)$ nem volna M-mel egyenlő, akkor M-nél kisebb lenne, mondjuk: $M-h$.

Válasszuk az ε poz. számot $\frac{h}{2}$-nél kisebbre. Az $f(x)$ függvény az ab szakasz minden helyén, tehát a c helyen is folytonos; tehát az ε-hoz tartozik olyan δ küszöbintervallum, hogy

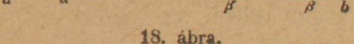
$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x-c|<\delta,$$

vagyis:

$$M-h-\varepsilon<f(x)<M-h+\varepsilon,$$

ha

$$|x-c|<\delta,$$



18. ábra.

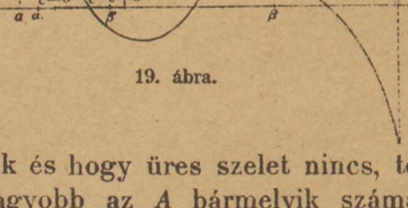
tehát ha x a c-től jobbra vagy balra eső δ nagyságú intervallumból vétetik, akkor még mindig $f(x)<M-\frac{h}{2}$ és így e 2δ szélességű szakaszban az $f(x)$ felső határa M-nél kisebb; és így, ha c-től

jobbra e szakaszban egy tetszésszerinti β' számot szemelünk ki, az $a\beta'$ közben a függvényértékek felső határa M-nél kisebb. Igen de β', mint a c-től jobbra eső szám már a B szeletben van, tehát az $a\beta'$ közben a függvényértékek felső határa M. Ellenmondásra jutottunk, mely csakis abból származhatott, hogy azt mondottuk: $f(c)<M$. Ezzel kimutattuk, hogy $f(c)=M$; vagyis, hogy a folytonos függvény a felső határát az ab szakaszban fel is veszi.

Míg tehát általában csak annyit mondhatunk, hogy ha az ab szakaszban $f(x)$ felső határa M, akkor a függvényértékek M-hez tetszés szerinti közel jutnak, de nem biztos, hogy van olyan hely a szakaszban, melyhez tartozó függvényérték éppen M, addig a folytonos függvénynél a Weierstrass-tétel értelmében van olyan c hely, melyre nézve $f(c)=M$. Ugyanez áll az m alsó határra nézve.

e) *Folytonos függvény jelváltása. Ha $f(x)$ valamely szakaszban folytonos és e szakasz egyik helyén pozitiv, másik helyén negativ, akkor kell e két hely között legalább egy olyan közbenső helynek lennie, amelyen a függvény értéke:* 0. Azaz, ha $\operatorname{sgn} f(a)=-\operatorname{sgn} f(b)$, akkor van olyan c hely az a és b között, melyre nézve $f(c)=0$. (Bolzano-tétel.)

Tegyük fel, hogy $f(a)$ pozitiv és $f(b)$ negativ. Szemeljünk ki az ab közben egy α helyet. Ha az $f(x)$ az $a\alpha$ köz minden helyén pozitiv, akkor az α számot az A szeletbe tesszük. Ha a β számról ezt nem mondhatjuk, vagyis az $a\beta$ közben az $f(x)$ már nem mindenütt pozitiv, akkor a β számot a B szeletbe tesszük. Könnyen belátható, hogy ezzel az ab minden számát osztályoztuk és hogy üres szelet nincs, továbbá, hogy a B mindenik száma nagyobb az A bármelyik számánál. E szeletek által értelmezett c számról azt állítjuk, hogy $f(c)=0$.



19. ábra.

Mert ha $f(c)$ nem volna 0, akkor pozitiv, vagy negativ lenne; mondjuk, hogy $f(c)=A$ pozitiv szám. Ekkor, minthogy feltételünk szerint $f(x)$ mindenütt folytonos, található (l. 71. lap) oly δ köz, hogy $f(x)$ mindig pozitiv, ha $|x-c|<\delta$. Ebből következik, hogy ha e közben a c-től jobbra egy tetszésszerinti β' helyet szemelünk ki, akkor $f(x)$ az $a\beta'$ közben mindenütt pozitiv; de β' a B szeletbe tartozik, tehát $f(x)$ nem lehet az egész $a\beta'$ közben pozitiv. Ellenmondásra jutottunk; tehát $f(c)$ nem lehet pozitiv.

Ha pedig föltesszük, hogy $f(c)$ negativ, akkor megint megjelölhető egy oly 2δ szélességű környezete, melyen belül $f(x)$ mindenütt negativ. Ha tehát a c-től balfelé e közben egy α' helyet jelölünk meg, akkor az $a\alpha'$ közben már valahol az $f(x)$ negativ is lett (a ∂ intervallumnak az α' előtti részében); de ez nem lehetséges, mert α', mint a c-től balra eső szám, az A szeletbe tartozik, tehát az $a\alpha'$ közben az $f(x)$ soha sem vált negativvá. Az ellenmondás abból eredt, hogy föltettük, hogy az $f(c)$ negativ. Így tehát $f(c)$ sem pozitiv sem negativ nem lehet, kell, hogy $f(x)$ a c helyen, az A és B szeletek határhelyén, 0 legyen.

Ezen fontos tételnek egyik alkalmazása gyanánt megemlítjük az algebra azon nevezetes tételét, hogy minden páratlan fokú algebrai egyenletnek, melynek együtthatói valósak, van valós gyöke; azaz, ha

$$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\cdots+a_{2n+1}$$

$2n+1$-edfokú racionális egész függvény, akkor van olyan valós c szám, melyre nézve $f(c)=0$, vagyis az

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\cdots+a_{2n+1}=0$$

$2n+1$-edfokú algebrai egyenletnek van valós gyöke. Föltehetjük, hogy $a_0=1$. Az $|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{2n+1}|$ pozitiv számok között a legnagyobbikat jelöljük M-mel.

x-et oly nagy absolut értékűre választjuk (1-nél mindenesetre nagyobbra), hogy az $x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}$ első tagja, az x^{2n+1} nagyobb abs. értékű legyen, mint a többi együttvéve, azaz

$$|x^{2n+1}|>|a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\cdots+a_{2n+1}| \qquad a)$$

legyen. Ezt elérjük, ha a baloldalt nagyobbra választjuk, mint egy, a jobboldalnál nagyobb szám. A jobboldal helyett tehát egy nála nagyobb pozitiv számot választunk. A jobboldalt nagyobbítjuk, ha az összeg abs. értéke helyett a tagjai abs. értékeinek összegét vesszük, vagyis:

$$|a_1x^{2n}|+|a_2x^{2n-1}|+\cdots+|a_{2n+1}|$$

-et és még inkább nagyobbítjuk ezt a kifejezést, ha az $|a_1|, |a_2|, \ldots$ helyett mindenütt a nagyobb M-et tesszük és ha $|x^{2n}|$-t teszünk az $|x^{2n-1}|, |x^{2n-2}|, \ldots$ helyett is. Ezzel a jobboldal

$$|(2n+1)Mx^{2n}|$$

lett. Az $a)$ alatti egyenlőtlenség tehát okvetlenül ki lesz elégítve, ha

$$|x^{2n+1}|>|(2n+1)Mx^{2n}|,$$

azaz:

$$|x|>(2n+1)M$$

(és, miként már megjegyeztük, $|x|>1$). Ha $|x|$-et $(2n+1)M$-nél és 1-nél nagyobbnak választjuk, akkor az

$$f(x)=x^{2n+1}+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\cdots+a_{2n+1}$$

kifejezés előjelét az első tag jele dönti el, mert hiszen az első tag abs. értéke nagyobb, mint a mellette álló összegé. Ha tehát az x-et a $(2n+1)M$-nél és 1-nél nagyobb pozitiv a számnak választjuk, akkor az $f(x)$ pozitiv lesz, azaz $f(a)>0$. Ha pedig x-et a $(2n+1)M$-nél és 1-nél nagyobb abs. értékű negativ b számnak választjuk, akkor $f(b)<0$ és így az $a\ldots b$ közben kell egy oly c helynek lennie, melyre nézve: $f(c)=0$. Ezzel a jelzett tételt bebizonyítottuk.

f) *A folytonos függvény az alsó és felső határok közti értékeket fölveszi.* Ha $f(x)$ egy szakaszban folytonos és e szakasz a helyén $f(a)=A$, a b helyen pedig $f(b)=B$ és C az A és B közt fekvő számérték, akkor az ab közben van olyan c hely, melyen a függvény értéke éppen a megadott C; azaz, ha

$$f(a)=A,\quad f(b)=B \quad \text{és} \quad A<C<B,$$

akkor a és b közt van olyan c hely, hogy

$$f(c)=C,$$

tehát a folytonos függvény két értéke között minden értéket fölvesz. Ha A gyanánt az m alsó határt és B gyanánt az M felső határt választjuk, akkor pedig arra jutunk, hogy az m és M között levő minden értéken áthalad a folytonos függvény.

A tétel bizonyítása az előbbi alapján igen egyszerű. Ha ugyanis a jelzett szakaszban az $f(x)$ folytonos, akkor az

$$F(x)=f(x)-C$$

is folytonos. Ha $x=a$ tesszük, akkor $F(a)=f(a)-C=A-C$ negativ. Ha pedig $x=b$ tesszük, akkor $F(b)=f(b)-C=B-C$ pozitiv és így kell egy közbenső c helynek lenni, amelyen $F(c)=0$, azaz:

$$f(c)=C.$$

A folytonos függvény tehát az A-tól B-ig hézag nélkül, (folytonosan) halad át.

9. **A monoton függvény.** Ha az $f(x)$ függvény az $a\ldots b$ szakaszban olyan természetű, hogy azalatt, míg az x a-tól b-ig halad, az $f(x)$ soha sem fogy, azaz, ha $x_1>x_2$, akkor $f(x_1)\geq f(x_2)$, akkor az ab szakaszban monoton növekedőnek mondjuk. Ha pedig sohasem nő e szakaszban, azaz, ha $x_1>x_2$, $f(x_1)\leq f(x_2)$, akkor az ab szakaszban monoton csökkenő.

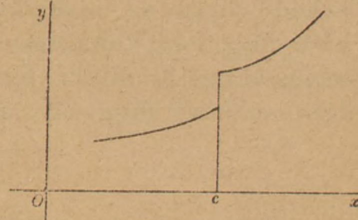
[Ha egy tetszés szerinti c helyet kiszemelünk az ab szakaszban, akkor az $f(x)$ monoton növekvő (csökkenő) függvény, mely az ab szakaszban korlátos (azaz egy véges M számnál mindig kisebb) a c helyen úgy viselkedik, hogy jobboldalról és baloldalról is van határértéke a c helyen. Szemeljünk ki ugyanis egy tetszés szerinti $c_1\, c_2\, c_3 \ldots$ monoton növekedő számsort, mely a c számot értelmezi és alkossuk meg az

$$f(c_1), f(c_2), f(c_3), \ldots$$

függvényértékeket. Minthogy e számok sora föltételünk szerint monoton növekvő korlátos sor, tehát véges és meghatározott határértéke van. Jelöljük ezt A-val. Ha a c értelmezésére egy más, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ monoton sort használtunk volna, az $f(\gamma_1), f(\gamma_2), f(\gamma_3), \ldots$ sorozatnak szintén A lett volna a határértéke; mert ha nem az volna, hanem $B<A$ és C egy tetszés szerinti, A és B közti szám, akkor eljuthatunk a c helyhez olyan közel, hogy minden $c_n, c_{n+1}, \ldots$ helyen az $f(c_n), f(c_{n+1}), \ldots$ függvényértékek a C és A közé essenek és a $\gamma_n, \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$ helyekhez tartozó $f(\gamma_n), f(\gamma_{n+1}), f(\gamma_{n+2}), \ldots$ már mind C-nél kisebbek legyenek; tehát pl.: $f(\gamma_n)<C$. De a γ_n-en túl van egy c_m szám, melyre nézve $f(c_m)>C$; ezen túl ismét γ szám, melyhez tartozó függvényérték C-nél kisebb s í. t., tehát az $f(x)$ nem volna monoton növekvő. Eszerint tehát bármely $c_1, c_2, c_3, \dots$ monoton növekvő sorozatot válasszunk is, melynek limese c, az $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \dots$ ugyanazt a számot értelmező monoton növekedő korlátos sort alkotják, tehát baloldalról véve:

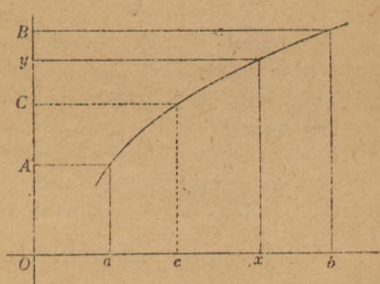
$$\lim_{x=c} f(x) = A.$$

Éppen így mutatható meg, hogy a jobboldali limes is létezik. De nem okvetlenül szükséges, hogy e két határérték megegyezzék. Meglehet, hogy úgy, mint a mellékelt ábrában, a függvénynek a c helyen ugrása (szakadása) van.]



20. ábra.

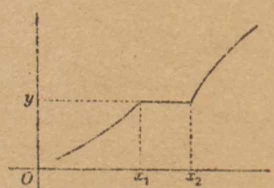
10. Inverz függvény. Legyen az $y=f(x)$ függvény az ab szakaszban monoton változó, pl. monoton növekedő folytonos függvény és $f(a)=A$, $f(b)=B$; akkor az A és B közötti minden értéket fölveszi az ab közben és pedig, ha feltesszük még, hogy konstans szakasza nincsen, minden, az A és B közé eső C értéket az ab szakasznak csakis egyetlen c helyén veheti fel; mert hiszen ha $f(c)=C$, akkor minden helyen, mely a és c között van, a függvény C-nél kisebb és mindazon helyeken, amelyek c és b között vannak, a függvény C-nél nagyobb értékű. Az A és B között levő minden y értékhez tehát egyetlen egy x érték tartozik. Az $f(x)$ függvény által tehát nemcsak minden, $a \dots b$ intervallumbeli x-hez tartozik egy meghatározott y érték, hanem fordítva is, minden olyan y-hoz, mely az AB közbe való, tartozik egy x érték. Az x is tehát az y-nak egyértékű függvénye, mely az AB közben értelmeztetett. Jelöljük ezt így: $x=\varphi(y)$. (Némelykor így is jelöljük: $x=f^{-1}(y)$.) A $\varphi(y)$-t, illetőleg az $f^{-1}(y)$-t az $f(x)$ *inverz függvényének* mondjuk.



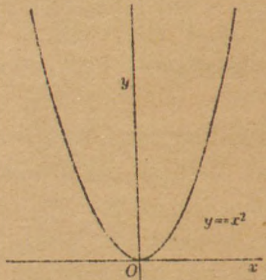
21. ábra.

A $\varphi(y)$ is monoton növekedő függvény. Ha ugyanis $x_2 > x_1$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$, vagyis $y_2 > y_1$ és így fordítva, ha $x_2=\varphi(y_2)$ és $x_1=\varphi(y_1)$, továbbá $y_2 > y_1$, akkor a hozzátartozó $x_2 > x_1$, mert hiszen, ha $x_2 < x_1$ volna, akkor y_2 nem lehetne nagyobb y_1-nél. Az $f^{-1}(y)$ is tehát monoton növekvő függvény az AB szakaszban.

Minthogy $f(x)$-nek konstans szakasza nincs, következik az is, hogy $\varphi(y)$ folytonos, ha az $f(x)$ folytonos volt. A monoton függvény ugyanis minden helyen jobb oldalról és baloldalról is folytonos; tehát csak az az eset fordulhatna elő, hogy valamely y helyen az $f^{-1}(y)$ függvény jobboldali határértéke más volna, mint a baloldali (és pedig az utóbbi nagyobb lenne, mert $f^{-1}(y)$ növekvő). Ha az $f^{-1}(y)$ egyik oldali határértéke x_1, a másik pedig x_2 volna, akkor az $f(x_1)=f(x_2)$ lenne (22. ábra) és így az $f(x)$-nek az $x_1 x_2$ közben állandó értéke lenne. De azt mondtuk, hogy az $f(x)$-nek konstans szakasza nincsen. Ezzel tehát kimutattuk, hogy monoton növekedő függvény inverz függvénye is monoton növekvő és ha az eredeti függvény konstans szakasz nélküli folytonos az egész ab közben, akkor az inverz függvény is folytonos. Ugyanez áll a monoton csökkenő függvény inverz függvényére.



22. ábra.



23. ábra.

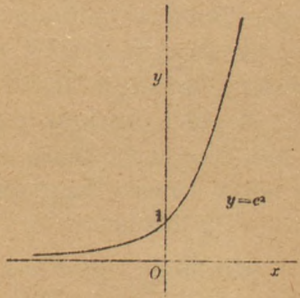
Jegyzet. Ha az $f(x)$ az ab közben nem monoton, akkor az inverz függvénye nem egyértékű. Így pl. azon egyszerű esetben, midőn $y=x^2$, minden x értékhez egyetlen y érték tartozik, de egy megadott y pozitiv értékhez két x érték van rendelve; de ha a függvény menetét csak pozitiv x-ekre vizsgáljuk, vagyis egy tetszés szerinti ab pozitiv közben (l. a parabola jobboldali felét), akkor igenis nemcsak, hogy minden x értékhez egyetlen y érték tartozik, de minden pozitiv y értékhez is egyetlen poziti x érték van rendelve.

Példaképpen megismertetünk nehány fontos inverz függvényt.

1) *A hatvány inverz függvénye.* Ha n pozitiv egész szám, az $y=x^n$ hatvány az x egyértékű monoton növekvő függvénye a pozitiv x-ekre vonatkozólag. Ha tehát egy tetszés szerinti poz. ab szakaszt szemelünk ki, akkor a függvény értéke az a^n-től b^n-ig folytonosan nő, ha az x az a-tól b-ig halad; tehát fordítva, az $a^n \ldots b^n$ szakaszban az x az y-nak is egyértékű, folytonos monoton függvénye. A hatvány ezen inverz függvényét, miként ismeretes, így jelöljük: $x=y^{\frac{1}{n}}$. Az $x^{\frac{1}{n}}$ függvény tehát minden poz. x-re nézve (ha mindig az n-edik gyök pozitiv értékét veszszük) folytonos függvény. Ebből egyúttal az is következik, hogy ha m poz. vagy neg. egész szám, akkor $x^{\frac{m}{n}}$ is folytonos (összetett) függvény.

2) *Az exponenciális függvény inverz függvénye.* Az $y=a^x$ függvényről tudjuk, hogy ha $a>1$, akkor valós x-ekre nézve a^x (pozitiv értéke) egyértékű monoton folytonos függvény, mely x-el együtt minden határon túl nő, azaz, ha x végtelenné válik, a^x is

végtelenné lesz és ha x neg. végtelenné lesz, a^x 0-á válik. Eszerint tehát fordítva minden poz. y értékhez egyetlen egy x érték tartozik és az a^x függvény invers függvénye a $0 \ldots \infty$ intervallumban egyértékű, monoton, folytonos függvény. Ez a függvény a $\log y$. Ha y betű helyett x-et írunk, akkor tehát azt mondhatjuk, hogy $\log x$ az x poz. értékeire nézve egyértékű monoton, folytonos függvény. A $\log x$-en (mely az a^x invers függvénye) megadott x számérték mellett azt a számot értjük, melyre az a alapot emelnünk kell, hogy x-et kapjunk hatványul; azaz $a^{\log x} = x$; tehát itt a $\log x$ az úgynevezett a alapú logarithmust jelenti. Ezentúl rendszerint az e alapú logarithmust használjuk és $\log x$-en x-nek e alapú logarithmusát értjük.



24. ábra.

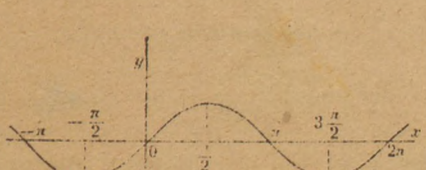
Ebből az a alapú logarithmus úgyis igen egyszerűen számítható ki; ugyanis ha x-nek a alapú logarithmusát ${}^a\log x$-el jelöljük és az e alapú logarithmust egyszerűen $\log x$-el, akkor, minthogy:

$$a = e^{\log a},$$

tehát
$$x = a^{{}^a\log x} = e^{\log a \cdot {}^a\log x},$$

vagyis:
$$ {}^a\log x = \frac{\log x}{\log a}.$$

3) *A cyklometrikus függvények.* Az $y = \sin x$ a $-\frac{\pi}{2} \cdots + \frac{\pi}{2}$ szakaszban monoton növekvő folytonos függvény, mely -1-től $+1$-ig



25. ábra.

halad; tehát az inverz függvénye is ilyen. Az $y = \sin x$ inverz függvényét $\arcsin y$-nak nevezzük. Az $\arcsin y$ az y-nak -1 és $+1$ közötti szakaszában tehát egyértékű, monoton növekvő folytonos függvénye. Az y betű helyett megint x-et téve, mondhatjuk, hogy $\arcsin x$ jelenti azt a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti szöget (abs. mértékkel mérve), melynek sinusa: x. Így például:

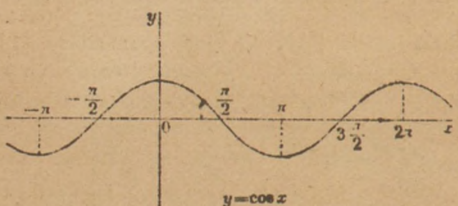
$$\operatorname{arc\,sin} 0 = 0, \quad \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ha nem szorítkoznánk a $-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}$ közötti szögekre, akkor nem mondhatnók, hogy az $\operatorname{arc\,sin} x$ függvény az x egyértékű függvénye, mert olyan szög, melynek sinusa: x, végtelen sok van. Ha az egyik: y (azaz $\sin y = x$), akkor $\pi - y$, $y + 2\pi$, $-y + 3\pi, \ldots y + 2k\pi$, $-y + (2k+1)\pi \ldots$ mind olyan szögek, melyek sinusa x.

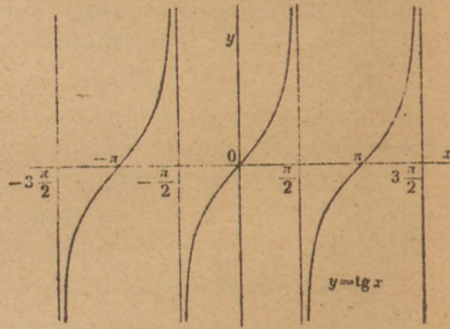
Könnyű lesz most már megállapitani, hogy mit értünk $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ alatt?

A $\cos x$ ugyanis a $0 \ldots \pi$ szakaszban monoton csökkenő folytonos függvény, mely $+1$-től -1-ig halad; tehát az $\operatorname{arc\,cos} x$, mely a $\cos x$ invers függvénye, szintén monoton folytonos függvény a $-1 \cdots +1$ közben.

Minthogy $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, tehát annak a szögnek, melynek cosinusa x, a pótszögének a sinusa lesz x,



26. ábra.



27. ábra.

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x = \operatorname{arc\,sin} x,$$

vagyis:
$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} x.$$

A $\operatorname{tg} x$ függvény a $-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}$ közben monoton növekvő folytonos függvény, mely $-\infty$-től ∞-ig minden értéket fölvesz; tehát az inverz függvénye, az $\operatorname{arc\,tg} x$ minden valós számra értelmezve van és a $-\infty\cdots\infty$ egész számvonalon monoton növekedő, minden véges helyen folytonos függvény. $\operatorname{arc\,tg} x$ jelenti azt a $-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}$ közötti szöget, melynek tangense: x.

10. Alkalmazások. Az összetett függvény és az inverz függvény folytonosságáról tanultakat néhány fontos elemi ismeretünk kibővítésére akarjuk alkalmazni.

a) Az a^z exponenciális függvény z minden értékénél folytonos. Ha $z = \varphi(x)$ az x-nek valamely $\alpha \ldots \beta$ közben folytonos függvénye, akkor az összetett függvényekre vonatkozó tétel szerint $a^{\varphi(x)}$ is folytonos e közben. Ha c az $a\ldots b$ köz valamelyik helye, akkor a $\varphi(x)$ határértéke a c helyen megegyezik a helyettesítési értékével, azaz $\lim\limits_{x=c}\varphi(x)=\varphi(c)$, mert $\varphi(x)$ a c helyen folytonos; de az $a^{\varphi(x)}$ is folytonos e helyen, tehát

$$\lim_{x=c} a^{\varphi(x)}=a^{\varphi(c)}=a^{\lim\limits_{x=c}\varphi(x)}$$

amiből azt látjuk, hogy ha az exponens az $x=c$ helyen folytonos (vagyis e helyen véges, meghatározott, azaz a határátmenet módjától független határértéke van), akkor mindegy, akár előbb végezzük a hatványozást, azután keressük a hatvány határértékét, akár pedig előbb keressük meg az exponens határértékét, azután végezzük el a hatványozást. Ezt a tényt már fel is használtuk. (I., 63. lap.)

b) Az x^n hatványról könnyű volt kimutatnunk, hogy x minden pozitiv értékénél folytonos, ha n egész számot jelent. Ha n tetszés szerinti racionális, vagy irracionális számot jelent, akkor az előbbiek szerint így mutathatjuk meg ezen egyszerű alakú függvény folytonosságát. x^n így írható:

$$x^n=e^{n\log x}$$

és minthogy $n\log x$ minden pozitiv x esetében folytonos, (mert $\log x$ monoton növekvő folytonos függvény inverz függvénye), tehát x^n is folytonos. Azonnal beláthatjuk, hogy ha $\varphi(x)$ folytonos függvény az $a\ldots b$ közben csakis 0-tól különböző pozitiv értékeket vesz fel, akkor ugyanilyen módon az is következik, hogy $[\varphi(x)]^n$ is folytonos. Sőt még egy lépéssel tovább mehetünk. Ha $f(x)$ az ab közben mindig pozitiv és folytonos, továbbá $\varphi(x)$ e közben folytonos, akkor $[f(x)]^{\varphi(x)}$ is folytonos; mert hiszen ez így írható:

$$e^{\varphi(x)\log f(x)}$$

és az exponens az illető közben x folytonos függvénye. Ha c az ab köz tetszés szerinti helye, akkor e c helyen az $[f(x)]^{\varphi(x)}$ értéke: $f(c)^{\varphi(c)}$; $f(c)=\lim\limits_{x=c}f(x)$ és $\varphi(c)=\lim\limits_{x=c}\varphi(x)$ és így:

$$\lim_{x=c}[f(x)^{\varphi(x)}]=[\lim_{x=c}f(x)]^{\lim\limits_{x=c}\varphi(x)}$$

és ebben azt az igen gyakran alkalmazandó eljárást igazoltuk, hogy ha úgy az alap, mint a kitevő az x folytonos függvényei, akkor mindegy, akár előbb végezzük el a hatványozást, azután keressük a határértéket, akár fordítva, előbb keressük meg az alap és a kitevő határértékeit, azután végezzük el a hatványozást.

A tétel előbbi, egyszerűbb alakjának alkalmazásaképpen megemlítjük a következőt, amelyre már utaltunk:

A $$\varphi(x)=(1+ax)^{\frac{1}{ax}}$$

függvény határértéke az $x=0$ helyen: e. E függvény ezen a helyen (és egyúttal másutt is mindenütt) folytonos, tehát

$$[\varphi(x)]^a=(1+ax)^{\frac{1}{x}}$$

is folytonos az $x=0$ helyen és limese ezen a helyen: e^a; vagyis

$$\lim_{x=0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a.$$

Ha x helyébe $\frac{1}{z}$-t írunk, akkor ebből egyúttal azt is látjuk, hogy

$$\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

c) Ha $\varphi(x)$ az $a \ldots b$ közben mindenütt folytonos és pozitiv, akkor $\log \varphi(x)$ is folytonos, mert $\log z$ folytonos, tehát az összetett $\log \varphi(x)$ is folytonos. Ennek az egyszerű megjegyzésnek alkalmazásaképpen az imént meghatározott határértéket még más alakban is előállítjuk. Minthogy a

$$\varphi(x) = (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$$

az x minden értékénél, ($x=0$ helyen is) folytonos és ha az alap $1+\alpha x$ pozitiv, $\varphi(x)$ teljesen meghatározott függvény (ha t. i. megállapodunk abban, mint eddig mindig, hogy az $\frac{1}{x}$-ik hatványnak pozitiv értéke veendő). mely x minden értékénél folytonos és pozitiv értékű, tehát

$$\log \varphi(x) = \frac{\log(1+\alpha x)}{x}$$

is folytonos az $x=0$ helyen és így a

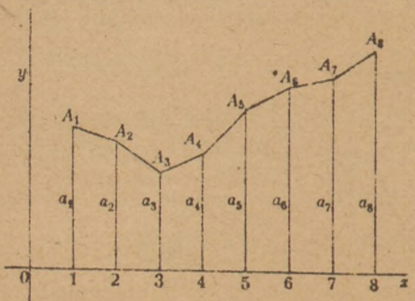
$$\lim_{x=0} \log \varphi(x) = \log \lim_{x=0} \varphi(x) = \log \lim_{x=0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = \log e^\alpha = \alpha,$$

vagyis:
$$\lim_{x=0}\frac{\log(1+\alpha x)}{x} = \alpha. \qquad \beta)$$

d) Jegyzet. Eddig a függvény folytonosságának vizsgálatánál a tárgyalás egyszerűsitése végett elkerültük a függvénynek az $x=\infty$ helyen való vizsgálatát. De az egész tárgyalás erre a helyre is könnyen kiterjeszthető; az $f(x)$ függvény az $x=\infty$ helyen folytonos, ha létezik a $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ és a függvény elrendelt értéke e helyen ezzel a határértékkel megegyezik. Így pl. $\lim\limits_{x=\infty}\frac{1}{x}=0$, tehát az $\frac{1}{x}$ az $x=\infty$ helyen is folytonos; ellenben $\sin x$ az $x=\infty$ helyen nem folytonos, mert nincs határértéke. [Ha ugyanis az x az $a+2k\pi$ számokon át halad a végtelenbe, akkor $\sin x$ mindig $\sin a$, tehát a határérték az a-val változó.]

Feladatok és gyakorlatok az I. és II. fejezethez.

1. Ha adva van egy tetszés szerinti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számsorozat, akkor alkothatunk ebhez olyan $f(x)$ folytonos függvényt, mely az 1, 2, 3, ... helyeken a megadott $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számértékeket veszi fel pl. oly módon, hogy megjelöljük az A_1 pontot, melynek abscissája: 1, ordinátája: a_1, az A_2 pontot, melynek koordinátái: $(2, a_2)$ s i. t. és azután ezeket a pontokat egyenesekkel összekötjük.



28. ábra.

Mutassuk meg, hogy ha az adott sorozat szabályos és $\lim a_n = a$, akkor $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=a$ és fordítva, ha $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=a$, akkor az $a_1\, a_2 \ldots$ szabályos sorozat és $\lim a_n=a$.

Sokszor megkönnyítjük a határérték vizsgálatát, ha a sorozat helyett ezt a függvényt tekintjük. Nevezzük az ilyen folytonos függvényt a sorozathoz rendelt függvénynek.

2. Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szabályos sorozat és $\lim a_n = a$ 0-tól különböző, akkor $a_1^k, a_2^k, a_3^k, \ldots$ is szab. sorozat, melynek limese a^k, bárminő számot jelentsen is a k. [Ha $f(x)$ a sorozathoz rendelt függvény, akkor $\lim [f(x)]^k = [\lim f(x)]^k$].

3. Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2 \ldots$ pozitiv határértékű szabályos sorozat, akkor $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots$ is szabályos sorozat és $\lim \log a_n = \log \lim a_n$.

4. Ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitiv szab. sorozat és $b_1, b_2, b_3, \ldots$ szintén szab. sorozat, akkor az $a_1^{b_1}, a_2^{b_2}, a_3^{b_3}, \ldots$ is szab. sorozat és $\lim a_n^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. [Ha a az $m-1$ és m egész számok közé esik, akkor $\frac{a^n}{n!} < \frac{m^n}{n!}$; de

$$\frac{m^n}{n!} = \frac{m^m}{m!} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m}{m+2} \cdot \frac{m}{m+3} \cdots \frac{m}{n};$$

az $\frac{m^m}{m!}$ egy meghatározott α véges szám és

$$\frac{m}{m+2} < \frac{m}{m+1}, \quad \frac{m}{m+3} < \frac{m}{m+1} \ldots, \quad \text{tehát:} \quad \frac{m^n}{n!} < \alpha \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-m}.$$

Tegyük $\frac{m}{m+1} = \beta$ és $\frac{\alpha}{\beta^m} = \gamma$; akkor: $\frac{m^n}{n!} < \gamma\beta^n$, ahol γ egy meghatározott véges szám és $\beta < 1$. n-et oly nagyra választhatjuk, hogy β^n tetszés szerinti kicsiny legyen. Ezzel kimutattuk, hogy $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.]

6. Legyen adva két pozitiv szám: a és $b > a$. Alkossuk meg e két szám geometriai középarányosát: $a_1 = \sqrt{ab}$-t és arithmetikai középarányosát: $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$-et. Ugyanezt tegyük a most nyert két számmal: a_1 és b_1-el: $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $b_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1)$ s í. t. Kimutatjuk, hogy az $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$, valamint a $b, b_1, b_2, \ldots$ szabályos sorozatok, melyek közös határértékűek.

Minthogy $b > a$, tehát $\sqrt{ab} > a$ és $\frac{1}{2}(a+b) < b$; továbbá $\frac{1}{2}(a+b)$ mindig nagyobb a $\sqrt{ab}$-nél, mert ha kisebb volna, vagy egyenlők lennének, akkor

$$ab \geqq \tfrac{1}{4}(a+b)^2$$

lenne, vagyis $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2$ negativ vagy 0 lenne; az első mindig, a második pedig, ha $a \neq b$ képtelenség. Eszerint tehát $a_1 > a$, $b_1 < b$, $b_1 > a_1$. Éppen így következik tovább, hogy $a_2 > a_1$, $b_2 < b_1$, $b_2 > a_2$ s í. t.; vagyis az

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

sorozat emelkedő, de minden tagja kisebb b-nél. tehát korlátos monoton növekvő sorozat. Határértéke legyen α. Éppen így a $b, b_1, b_2, \ldots$ korlátos monoton csökkenő sorozat. Határértéke legyen: β. Minthogy továbbá:

$$b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n),$$

tehát: $$\lim b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\lim a_n + \lim b_n).$$

azaz: $$\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

vagyis $\beta = \alpha$. Ezt a számot az a és b számok arithmetikai-geometriai középértékének nevezzük.

7. Egészen hasonló okoskodással mutatjuk meg az a, b pozitiv számok arithmetikai-harmonikus középértékének létezését. Az a, b számokból megalkotjuk az a_1-et. mint az a és b harmonikus közepét: $\frac{2}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ és a b_1-et,

mint az a és b arithmetikai közepét; $2b_1=(a+b)$. Az a_1 és b_1-ből éppen így az a_2 és b_2 számokat és általában:

$$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}; \quad 2b_{n+1}=a_n+b_n.$$

Tegyük fel, hogy $a<b$; akkor $a_1>a$, $a_2>a_1,\ldots$ és $b_1<b$, $b_2<b_1,\ldots$; az $a_1, a_2, a_3,\ldots$ sorozat monoton növekvő, a $b, b_1, b_2,\ldots$ pedig monoton csökkenő; de mindkettő korlátos, mert mindenik a kisebb b-nél és fordítva mindegyik b szám nagyobb a-nál. Jelöljük az első sorozat határértékét α-val, a másodikét β-val. Minthogy

$$b_{n+1}=\tfrac{1}{2}(a_n+b_n),$$

tehát megint következik, hogy $\beta=\alpha$.

8. Legyen adva ismét két szám: a és b. Vegyük a középértéküket: $a_1=\frac{a+b}{2}$; ezután a b és a_1 közepét: $a_2=\frac{b+a_1}{2}$, tovább az a_1 és a_2 közepét: $a_3=\frac{a_1+a_2}{2}$ s í. t. mindig a két utolsó közepét:

$$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}.$$

Megmutatjuk, hogy az $a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots$ szab. sorozat, mely az $\frac{a+2b}{3}$ számot értelmezi.

Miként azonnal beláthatjuk, az $a_1, a_3, a_5,\ldots$ növekvő és az $a_2, a_4, a_6,\ldots$ csökkenő monoton korlátos sorozatok, és ha az első határértéke α, a másodiké α', akkor az $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$ egyenletből következik, hogy

$$\lim a_{n+1}=\frac{\lim a_n+\lim a_{n-1}}{2}, \quad \text{azaz} \quad \alpha=\alpha'.$$

Most a határértéket ki is számítjuk. Ugyanis teljes indukcióval meggyőződhetünk arról, hogy

$$a_n=\frac{a+2b}{3}+(-1)^n\frac{b-a}{3.2^n}.$$

Ha ugyanis $n=1$ és $n=2$, akkor valóban áll ez a formula és ha

$$a_n=\frac{a+2b}{3}+(-1)^n\frac{b-a}{3.2^n}; \quad a_{n+1}=\frac{a+2b}{3}+(-1)^{n+1}\frac{b-a}{3.2^{n+1}},$$

akkor $$a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})=\frac{a+2b}{3}+(-1)^{n+2}\frac{b-a}{3.2^{n+2}},$$

tehát a formula általánosan érvényes. Ebből következik, hogy

$$\lim a_n=\frac{a+2b}{3}.$$

9. A csillagászatban igen fontos ezen transcendens egyenlet: $l=u-e\sin u$-nak u-ra való megoldása. $0<e<1$. (Keppler-féle egyenlet.) Vegyünk fel egy tetszés szerinti u_0 számot és alkossuk meg az $u_1=l+e\sin u_0$, $u_2=l+e\sin u_1$-et s í. t. rendre az $u_0, u_1, u_2, u_3,\ldots$ sorozatot. Ha nem az u_0-ból, hanem v_0-ból indulunk ki, akkor rendre a $v_0, v_1, v_2,\ldots$ számokat kapjuk. Mutassuk meg, hogy u_0-v_0, u_1-v_1, $u_2-v_2,\ldots$ zérus sorozat! Ugyanis:

$$u_n-v_n=e(\sin u_{n-1}-\sin v_{n-1})=2e\sin\frac{u_{n-1}-v_{n-1}}{2}\cdot\cos\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}.$$

De $\quad |\sin\alpha|<|\alpha|$, $|\cos\alpha|<1$, tehát: $|u_n-v_n|<e\,|u_{n-1}-v_{n-1}|$ és éppen így: $|u_{n-1}-v_{n-1}|<e\,|u_{n-2}-v_{n-2}|$ s í. t., vagyis $|u_n-v_n|<e^n|u_0-v_0|$. Minthogy pedig $e<1$, tehát: $\lim(u_n-v_n)=0$. Ebből következtetjük, hogy az $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sorozat szabályos sorozat. Ugyanis ha v_0 gyanánt u_k-t választjuk, akkor $v_n=u_{n+k}$, tehát az előbbi $|u_n-v_n|<e^n|u_0-v_0|$ most: $|u_n-u_{n+k}|<$ $<e^n|u_0-u_k|$, vagy ha tekintetbe vesszük, hogy $u_k=l+e\sin u_{k-1}$, tehát $|u_k|<|l|+e$, akkor $|u_{n+k}-u_n|<e^n(|u_0|+|l|+e)$ és ez már bizonyítja, hogy az u sor szabályos sorozat.

A $\lim u_n=u$ a Keppler-féle egyenlet megoldása. Ugyanis az $u_n=l+$ $+e\sin u_{n-1}$ egyenletből, minthogy $\lim u_n=\lim u_{n-1}=u$, következik: $u=l+e\sin u$. Más megoldás (valós) nincs. Ugyanis ha U más megoldás volna, akkor válasszuk u_0 gyanánt u-t és v_0 gyanánt U-t. Akkor $u_1=u_2=u_3=\cdots=u$ és $v_1=v_2=v_3=\cdots=U$; tehát a $\lim(u_n-v_n)=0$-ból következik: $u=U$.

10. Ha 1 korona tőkét $p\%$-os kamatlábbal helyeznek el oly módon, hogy a kamatokat minden évben n-szer, egyenlő közökben a tőkéhez csatolják, akkor a felnőtt tőke az év végén $\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n$. Kérdés, ha n minden határon túl nő (azaz végtelen kis időközönkint csatoltatik a kamat a tőkéhez), mekkora lesz ez a felnőtt tőke? Ha $\frac{p}{100n}=x$ tesszük, akkor $n=\frac{p}{100x}$; tehát

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n=\lim_{x=0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{p}{100}}=e^{\frac{p}{100}}.$$

11. Ha a fény, melynek intenzitása: I, egy vékony, Δx vastagságú átlátszó rétegen megy át, akkor az intenzitásából veszít; a veszteség az optika tanítása szerint arányos a réteg vastagságával. Képzeljük a d vastagságú réteget n egyenlő vastag rétegre osztva. Az elsőn áthaladva, veszít $cI\frac{d}{n}$-et az intenzitásból, ahol c az arányossági faktor. Az első rétegen átjövő fény intenzitása tehát $I_1=I-I\frac{cd}{n}=I\left(1-\frac{cd}{n}\right)$ lesz. A második rétegben ismét veszít $I_1\frac{cd}{n}$-et, tehát e második rétegen áthaladván, intenzitása: $I\left(1-\frac{cd}{n}\right)^2$ lesz s í. t. az n-ik rétegen áthaladván, intenzitása: $I\left(1-\frac{cd}{n}\right)^n$ lesz. Ha az egyes rétegeket végtelen kicsinyekké tesszük, azaz n-et végtelen naggyá növesztjük, akkor $\lim\limits_{n=\infty}\left(1-\frac{cd}{n}\right)^n=e^{-cd}$, tehát a d vastagságú rétegen áthaladó fény erőssége Ie^{-cd} lesz.

12. Jelölje $[x]$ az x számban foglalt legnagyobb egész számot (pl., ha $x=3\frac{2}{3}$, $[x]=3$). Ábrázoljuk az $y=[x]$ függvény menetét; ábrázoljuk az $x-[x]$ menetét. Mutassuk meg, hogy minden egész helyen szakadása van. Mekkora az $m\ldots m+1$ szakaszban az alsó határa, mekkora a felső határa? Eléri-e a felső határát?

13. Egy $f(x)$ függvényt értelmezünk a $0\ldots1$ szakaszban a következő módon: $f(x)=x$ legyen; kivéve, ha $x=\frac{1}{2}$, akkor $f(x)=\frac{1}{3}$ és ha $x=\frac{1}{3}$, akkor $f(x)=\frac{1}{2}$. Folytonos-e ez a függvény? Ez a függvény a $0\ldots1$ szakaszban minden értéket felvesz 0-tól 1-ig és még sem folytonos.

14. A $\sin\frac{1}{x-a}$ sokszor említett függvény bármely szakaszban, mely az a helyet magában foglalja, minden, az a-tól különböző helyen folytonos (mert $\frac{1}{x-a}$ folytonos az $x=a$ kivételével és $\sin z$ is folytonos). Ha bármely $\alpha\ldots\beta$ szakaszt jelölünk meg, akkor a $\sin\frac{1}{x-a}$ a $\sin\frac{1}{\alpha-a}$ és $\sin\frac{1}{\beta-a}$ kö-

zött levő értékeket mind fölveszi. Ha ugyanis az $\alpha \ldots \beta$ nem tartalmazza az a helyet, azért, mert a függvény folytonos e szakaszban; ha pedig tartalmazza az a helyet, azért, mert az a hely tetszés szerinti közelében bármely értéket felvesz a $-1 \ldots +1$ között (miért?). Látjuk tehát, hogy ha a függvény folytonos és egy tetszés szerinti α helyen értéke A, β helyen B, akkor az $\alpha\beta$ közben minden értéket felvesz A és B között; de fordítva nem áll a dolog. Lehetséges, hogy minden értéket fölvesz az AB között, bárminő $\alpha\beta$ közről legyen is szó és még sem folytonos.

15. [Ha $f(x)$ függvény az $a \ldots b$ intervallumnak csak minden racionális helyére van értelmezve, akkor az α racionális helyen e függvény folytonos, ha minden ε számhoz tartozik olyan δ küszöbintervallum, hogy $|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$, ha $|x-\alpha|<\delta$, azaz x az $\alpha-\delta \ldots \alpha+\delta$ szakaszba tartozó bármely *racionális* szám. Mutassuk meg, hogy ekkor, ha $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bármely racionális számokból álló, α rac. számot értelmező szabályos sorozat, az $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f\alpha_3), \ldots$ is szab. sorozat és $\lim f(\alpha_n)$ független attól, hogy minő sorozatot választottunk az α értelmezésére.

Legyen $f(x)$ az $a \ldots b$ intervallum minden racionális helyén értelmezve és mindezen helyeken az iménti megjegyzés értelmében folytonos. Lehet-e most is következtetni, hogy az $f(x)$ az ab intervallumban egyenletesen folytonos, azaz, hogy egy megadott ε-hoz található olyan állandó, az egész intervallumhoz tartozó δ küszöbintervallum, melyre nézve $|f(x) - f(\alpha)|<\varepsilon$, ha $|x-\alpha|<\delta$, bárminő racionális helyet jelentsen is az α?

Felelet: Most ez a következtetés nem végezhető el; mert, ha megint úgy okoskodunk, mint a 68. lapon, akkor eljutunk egy olyan c helyhez, amelyen a függvény nem volna folytonos; de ez a c hely lehet irracionális is; tehát nem jutunk ellentétbe feltevésünkkel.

Legyen az $f(x)$ az ab szakasz rac. helyein *egyenletesen* folytonos. Értelmezzünk most egy olyan $F(x)$ függvényt, mely minden racionális helyen megegyezik az $f(x)$-el. Irracionális α helyen az $f(x)$ nincs értelmezve. Az $F(x)$-et értelmezzük így: Ha az α irracionális helyet az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ racionális számokból álló szabályos sorozat állítja elő, akkor, mint azonnal látjuk majd, $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3), \ldots$ számértékek szintén szabályos sorozatot alkotnak és e sorozat határértéke független attól, hogy az α irracionális számot minő racionális sorozattal értelmeztük. Ezt a $\lim f(\alpha_n)$-et tekintjük az $F(\alpha)$-nak. (Így például eredetileg az a^x az x-nek racionális értékeire van értelmezve és pedig az a^x az x egyenletesen folytonos függvénye. Irracionális α helyen az a^{α}-t mint az $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3}, \ldots$ szabályos sorozat határértékét értelmezzük. Ez a határérték független a felhasznált szabályos sorozattól. (L. 60. lapon.) Mutassuk meg, hogy *ha az $f(x)$ a jelzett értelemben (azaz csakis a racionális helyeket véve tekintetbe) az ab-ben egyenletesen folytonos, akkor az $F(x)$ az ab intervallumban folytonos* (tehát egyenletesen folytonos).

Ha ugyanis α irracionális szám, melyet $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ rac. számsorozat értelmez, akkor $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3), \ldots$ szabályos sorozat. Ezt így mutatjuk meg: A tetszés szerint megadott ε-hoz tartozik egy, az egész ab szakaszra közös δ küszöbintervallum, melyre nézve $|f(u) - f(v)|<\varepsilon$, ha $|u-v|<\delta$ és u, v, racionális számok. Az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sorozatban menjünk el olyan messze, hogy két tag különbsége már δ-nál kisebb legyen. Mondjuk, hogy az N-ik tagon túl ez már bekövetkezik; akkor $|f(\alpha_n) - f(\alpha_{n+k})|<\varepsilon$, ha $n>N$; tehát valóban az $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots$ szabályos sorozat. Mutassuk meg, hogy ha $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots$ is az α-t értelmező racionális szabályos sorozat, akkor $\lim f(\beta_n) = \lim f(\alpha_n)$!

Még azt kell megmutatnunk, hogy $F(x)$ az intervallum minden x irracionális helyén is folytonos. Legyen adva az ε. Vegyük a harmadrészét. Az

$\frac{\varepsilon}{3}$-hoz tartozik olyan d küszöbintervallum, melyre nézve az egész szakaszban $|f(u)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{3}$, ha u és v racionálisak. Az $F(x)$ értelmezéséből következik, hogy megállapítható olyan δ küszöb, hogy $|F(x)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{3}$, ha $|x-\alpha|<\delta$ és α e köz *bármelyik* racionális száma. Válasszuk δ-t $\frac{d}{2}$-nél kisebbre. Legyen x' e köz bármely irracionális száma; akkor ugyancsak e közben van olyan β racionális szám, melyre nézve $|F(x')-f(\beta)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Minthogy:

$$F(x)-F(x')=F(x)-f(\alpha)+f(\alpha)-f(\beta)+f(\beta)-F(x'),$$

tehát:

$$|F(x)-F(x')|<\varepsilon.$$

Így tehát, ha x' az $x-\frac{d}{2}\ldots x+\frac{d}{2}$ köz bármely helye, akkor $|F(x)-F(x')|<\varepsilon$, tehát $F(x)$ az x helyen folytonos. Ezzel kimutattuk, hogy $F(x)$ minden x helyen folytonos.]

16. Ha $f(x)$ x minden véges értékénél egyértékű és minden véges szakaszban korlátos, továbbá

$$\lim_{x=\infty}[f(x+1)-f(x)]=A, \qquad \alpha)$$

akkor egyúttal

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}=A. \qquad \beta)$$

Ugyanis: az $\alpha)$ alatti feltétel azt jelenti, hogy ha egy tetszés szerinti kis ε adatik, akkor elmehetünk az x-el olyan messze, mondjuk ξ-be, hogy

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x+1)-f(x)<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

ha csak $x>\xi$. Ha x helyett $x+1$-et teszünk, akkor is:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x+2)-f(x+1)<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

ép így:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x+3)-f(x+2)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x+n)-f(x+n-1)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

és ha ezen n egyenlőtlenséget összeadjuk:

$$nA-n\frac{\varepsilon}{2}<f(x+n)-f(x)<nA+n\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez az egyenlőtlenség fennáll minden pozitiv egész n-re, ha csak $x>\xi$. Válasszuk x-et ξ-nél nagyobbra és a fölirt egyenlőtlenségből állítsuk elő a következőt:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x+n)-f(x)}{n}<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

azaz:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x+n)}{n}-\frac{f(x)}{n}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha az x befutja az $\alpha\ldots\alpha+1$ intervallumot, ahol α egy, a ξ-nél nagyobb számértéket jelent, akkor $f(x)$, mely véges szakaszban mindig korlátos, abs. értékre egy bizonyos M-nél kisebb. Válasszuk most az n-et oly nagyra, hogy $\frac{M}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ legyen. Ekkor tehát $\frac{f(x)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$, ha x az $\alpha\ldots\alpha+1$ közben mozog és így: ha $n>\frac{2M}{\varepsilon}$.

$$A-\varepsilon<\frac{f(x+n)}{n}<A+\varepsilon,$$

tehát bármely ε-hoz találtunk egy olyan $N=\frac{2M}{\varepsilon}$ számot, amelyen túl levő n-ekre nézve [ha x az $\alpha \ldots \alpha+1$ közben mozog] ez az egyenlőtlenség fennáll. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x+n)}{n} = A.$$

De ebből azonnal következik, hogy:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x+n)}{x+n} = \lim_{n=\infty} \frac{f(x+n)}{n} \cdot \frac{n}{n+x} = A.$$

Ha $x+n$ helyett z betűt írunk, akkor tehát:

$$\lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{z} = A.$$

és ezzel a jelzett állítást be is bizonyítottuk.

[17. Az előbbi tételnek igen sokszor vesszük hasznát a határértékszámításnál, azért mindjárt számhalmazra is alkalmazzuk. Legyen adva az $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ számhalmaz, melyről nem állítjuk, hogy szabályos sorozat, csak azt, hogy két szomszédos tag különbségeiből alkotott

$$a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ a_4-a_3, \ldots, a_{n+1}-a_n, \ldots$$

sorozat szabályos, azaz $\lim (a_{n+1}-a_n)=A$ véges, meghatározott számérték. Azt állítjuk, hogy ebből következik:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = A,$$

vagyis, hogy az $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots, \frac{a_n}{n}, \ldots$ is szabályos sorozat és

$$\lim \frac{a_n}{n} = \lim (a_{n+1}-a_n).$$

Ezen állítás bebizonyítása céljából alkossunk egy $f(x)$ lépcsőzetes függvényt a következő módon: $0 \ldots 1$ közben (1-et is beleértve) mindig a_1, az $1 \ldots 2$ közben (2-ben is) $a_2, \ldots n \ldots n+1$ közben pedig a_{n+1} s í. t.

Ezen $f(x)$ függvény minden véges intervallumban véges, továbbá

$$\lim [f(x+1) - f(x)] = A.$$

Ugyanis, ha egy tetszés szerinti ε-t megadnak, megkeressük azt az N indexet, amelyen túl levő n-ekre nézve:

$$A-\varepsilon < a_{n+1}-a_n < A+\varepsilon.$$

Ilyen N küszöbszám létezik, mert hiszen $\lim\limits_{n=\infty} (a_{n+1}-a_n)=A$. Ha már most x-et N-nél nagyobbnak vesszük, akkor $f(x)=a_n$ és $f(x+1)=a_{n+1}$ tehető, miből

$$A-\varepsilon < f(x+1)-f(x) < A+\varepsilon$$

következik, vagyis valóban $\lim\limits_{x=\infty} [f(x+1)-f(x)]=A$. Ebből az előbbi szerint következik, hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = A,$$

vagyis bármely ε-hoz tartozik oly N küszöb, melyen túl

$$A-\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < A+\varepsilon, \text{ ha } x > N,$$

tehát akkor is áll ez, ha x az N-nél nagyobb bármely egész számot jelenti; tehát minden N-nél nagyobb n-re nézve:

$$A-\varepsilon<\frac{a_n}{n}<A+\varepsilon,$$

azaz:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n}=A.]$$

[18. Jelöljük az a_1-et α_1-gyel, a_2-a_1-et α_2-el, a_3-a_2-t α_3-mal, ... $a_{n+1}-a_n$-et α_{n+1}-gyel, ..., akkor:

$$a_2=\alpha_1+\alpha_2,\ a_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ldots\ a_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\ldots$$

Ezen jelöléssel az előbbi tétel így hangzik: Ha az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ szabályos sorozat és $\lim \alpha_n=A$, akkor egyúttal

$$\lim_{n=\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=A,$$

vagy rövidebben, ha $\lim \alpha_n$ meghatározott véges szám, akkor:

$$\lim\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=\lim \alpha_n.]$$

[19. Ha $f(x)$ az x-nek egyértékű és minden véges szakaszban korlátos függvénye, mely mindenütt pozitiv és sehol sem válik zérussá, továbbá:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=A\neq 0,$$

akkor egyúttal:

$$\lim_{x=\infty}\sqrt[x]{f(x)}=A.$$

A $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=A$-ból ugyanis következik, hogy:

$$\lim_{x=\infty}[\log f(x+1)-\log f(x)]=\log A$$

és ha $\log f(x)$-et $\varphi(x)$-el jelöljük, a $\varphi(x)$-re érvényesek a 16. alatti feltételek és minthogy:

$$\lim_{x=\infty}[\varphi(x+1)-\varphi(x)]=\log A,$$

tehát

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\log A,$$

vagyis:

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log f(x)}{x}=\lim_{x=\infty}\log\sqrt[x]{f(x)}=\log A,$$

azaz:

$$\lim_{x=\infty}\sqrt[x]{f(x)}=A.$$

Ebből levezethető a következő fontos tétel: Ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitiv, 0-tól különböző számok sora és

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A\neq 0,$$

akkor egyúttal:

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}=A.$$

Ebben a tételben voltaképpen két fontos állítás foglaltatik; először az, hogy ha létezik a $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$, vagyis két egymásutáni tag hányadosának limese, akkor egyúttal létezik a $\lim\sqrt[n]{a_n}$ is; a második állítás pedig az, hogy ez a két limes megegyezik.]

[20. **Határozzuk meg ezt a határértéket:**

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{1.2.3\ldots n}.$$

Tegyük evégből:
$$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots n}{n^n}.$$

A keresett határérték a $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\varphi(n)}$. Ha megmutatjuk, hogy $\lim \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ véges, meghatározott szám, mely 0-tól különbözik, akkor alkalmazható a 19. gyakorlatban követett eljárás. Már pedig:

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

tehát:
$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \frac{1}{e}$$

és így:
$$\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{1.2\ldots n} = \frac{1}{e}.$$

Ennek a segítségével meghatározható

$$\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$$

is. Ugyanis:

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \left(\frac{1}{2n} \sqrt[2n]{1.2\ldots n\,(n+1)\ldots 2n}\right)^2 \cdot \frac{4n}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}} =$$
$$= \left(\frac{1}{2n} \sqrt[2n]{1.2\ldots 2n}\right)^2 \frac{4}{\frac{1}{n}\sqrt[n]{1.2\ldots n}}$$

és így:
$$\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)\ldots 2n} = \frac{4}{e}.]$$

[21. **Legyenek $f(x)$ és $\varphi(x)$ minden pozitív x-re nézve egyértékű, véges függvények, továbbá $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = \lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = 0$ és azonkívül a $\varphi(x)$ monoton csökkenő. Ha létezik a**

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)-f(x+1)}{\varphi(x)-\varphi(x+1)}, \qquad \alpha)$$

akkor létezik a $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ is és e két határérték megegyezik. Jelöljük az $\alpha)$ határértéket A-val. E határérték létezése azt jelenti, hogy ha egy tetszés szerinti ε szám adatik, elmehetünk az x-el olyan messzire, hogy

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(x+1)}{\varphi(x)-\varphi(x+1)} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen, ha csak $x>N$; tehát fönnállanak ilyen x-re a következő egyenlőtlenségek:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(x+1)}{\varphi(x)-\varphi(x+1)} < A + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x+1)-f(x+2)}{\varphi(x+1)-\varphi(x+2)} < A + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots$$
$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x+n-1)-f(x+n)}{\varphi(x+n-1)-\varphi(x+n)} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

és minthogy a $\varphi(x)$ monoton csökkenő, tehát mindezekben a nevezők pozitivek és így az egyenlőtlenségek e nevezőkkel szorozhatók, vagyis sorban:

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)[\varphi(x)-\varphi(x+1)]<f(x)-f(x+1)<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)[\varphi(x)-\varphi(x+1)]\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)[\varphi(x+n-1)-\varphi(x+n)]<f(x+n-1)-f(x+n)<$$

$$<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)[\varphi(x+n-1)-\varphi(x+n)]$$

és ha ezeket összeadjuk:

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)[\varphi(x)-\varphi(x+n)]<f(x)-f(x+n)<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)[\varphi(x)-\varphi(x+n)],$$

vagyis:
$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x+n)}{\varphi(x)-\varphi(x+n)}<A+\frac{\varepsilon}{2} \qquad \beta)$$

fönnáll minden n pozitiv egész szám esetében, ha csak $x>N$. De

$$\frac{f(x)-f(x+n)}{\varphi(x)-\varphi(x+n)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x+n)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x)}}.$$

Az x-et képzeljük egy tetszés szerinti fix, N-nél nagyobb számértéknek. Ha n határtalanul nő, úgy az $f(x+n)$, mint a $\varphi(x+n)$ elenyészik, tehát a jobboldali második tényező 1-gyé válik, azaz

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(x)-f(x+n)}{\varphi(x)-\varphi(x+n)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Ez azt jelenti, hogy elmehetek az n-nel olyan messzire, hogy

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x+n)}{\varphi(x)-\varphi(x+n)}<\frac{f(x)}{\varphi(x)}+\frac{\varepsilon}{2}$$

legyen, ha csak $n>M$ és így a $\beta)$ alatti egyenlőtlenségből a következőt alkothatjuk:

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<A+\varepsilon,$$

ha $x>N$; de ez éppen azt jelenti, hogy:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$$

és ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

Ebből azonnal következik, hogy ha $b_1, b_2, b_3, \ldots$ egy tetszés szerinti 0 sorozat (azaz $\lim b_n=0$) és $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szintén 0 sorozat, de monoton csökkenő, továbbá

$$\lim_{n=\infty}\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A,$$

akkor egyúttal:
$$\lim_{n=\infty}\frac{b_n}{a_n}=A.]$$

[22. Ennek a tételnek a kiegészítője a következő: Ha $f(x)$ minden véges közben korlátos, de végtelen x esetében végtelen, azaz x-el határtalanul nő,

($\lim\limits_{x=\infty} f(x)=\infty$) és $\varphi(x)$ szintén ilyen, de azonkívül monoton növekedő függvény, továbbá

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{\varphi(x+1)-\varphi(x)} = A,$$

akkor egyúttal:
$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A.$$

Ugyanis, ha tetszés szerinti ε adatik, elmehetünk az x-el olyan messze, hogy mindig:

$$A-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x+1)-f(x)}{\varphi(x+1)-\varphi(x)} < A+\frac{\varepsilon}{2}$$

legyen; és ha most x helyébe rendre $x+1, x+2, \ldots x+n-1$ tétetik, akkor éppen úgy, mint előbb, azt kapjuk, hogy:

$$A-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x+n)-f(x)}{\varphi(x+n)-\varphi(x)} < A+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \beta)$$

[hol használtuk fel a $\varphi(x)$ monoton növekedését?]. De

$$\frac{f(x+n)-f(x)}{\varphi(x+n)-\varphi(x)} = \frac{f(x+n)}{\varphi(x+n)} \cdot \frac{1-\dfrac{f(x)}{f(x+n)}}{1-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x+n)}}.$$

A jobboldali második tényező limese (n végtelenné nő): 1, tehát:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x+n)-f(x)}{\varphi(x+n)-\varphi(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{f(x+n)}{\varphi(x+n)},$$

vagyis n oly nagyra választható, hogy mindig

$$\frac{f(x+n)}{\varphi(x+n)} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x+n)-f(x)}{\varphi(x+n)-\varphi(x)} < \frac{f(x+n)}{\varphi(x+n)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen, bárhol van is az x valamely $\alpha \ldots \alpha+1$ közben; tehát a $\beta)$ alatti egyenlőtlenség így írható:

$$A-\varepsilon < \frac{f(x+n)}{\varphi(x+n)} < A+\varepsilon,$$

ha $n>M$ és $\alpha \leqq x \leqq \alpha+1$. Ha $x+n$ helyett z betűt írunk, akkor ez azt jelenti, hogy:

$$\lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = A.$$

Ebből megint következik, hogy ha $b_1, b_2, b_3, \ldots$ korlátlan számsorozat és $a_1, a_2, a_3, \ldots$ monoton növekvő korlátlan sorozat, továbbá

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = A,$$

akkor egyúttal:
$$\lim_{n=\infty} \frac{b_n}{a_n} = A.$$

(Ha $\varphi(x)=x$, akkor a feltételek teljesítve vannak és a tétel így hangzik: ha $f(x)$ véges közben véges és x-el határtalanul nő, továbbá $\lim\limits_{x=\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$, akkor egyúttal $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f(x)}{x} = A$.)]

[23. Határozzuk meg a

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r}{n^{r+1}}$$

határértéket [l. később a Bernoulli-függvényt], ha r pozitiv egész szám. Legyen

$$b_n=1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r, \quad a_n=n^{r+1},$$

akkor b_n és a_n számok teljesítik az előbbi pontban felsorolt feltételeket és

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{(n+1)^r}{(n+1)^{r+1}-n^{r+1}}=\frac{1}{(n+1)\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{r+1}\right]}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)\left[1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{r+1}\right]}.$$

De:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{r+1}=1-\frac{r+1}{n+1}+\binom{r+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}-\binom{r+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots+\frac{(-1)^{r+1}}{(n+1)^{r+1}}$$

és így:

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{(r+1)-\binom{r+1}{2}\frac{1}{n+1}+\cdots}$$

vagyis:

$$\lim_{n=\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{r+1},$$

tehát:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r}{n^{r+1}}=\frac{1}{r+1}.]$$

24. A $\sin\frac{1}{x}$ minden x helyen folytonos, csak az $x=0$ helyen nem, ahol minden értéket felvehet a -1 és $+1$ között, aszerint, amint az x más meg más úton halad az $x=0$ helyhez. Nézzük ezt a függvényt:

$$\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}.$$

Ha ilyen alakban írjuk: $\sin\frac{1}{z}$, akkor látjuk, hogy kivételes helye csakis ott lehet, ahol $z=0$, azaz ahol $\sin\frac{1}{x}=0$. De $\sin\frac{1}{x}$ 0-á lesz minden helyen, ahol $\frac{1}{x}=k\pi$, vagyis $x=\frac{1}{k\pi}\cdot$ Valóban, ha x az $\frac{1}{k\pi}$ helyhez például azon a számsoron át halad, melynek n-ik tagja:

$$c_n=\frac{1}{k\pi+\arcsin\frac{1}{\alpha+2n\pi}}, \quad \text{ekkor:} \quad \lim c_n=\frac{1}{k\pi},$$

vagyis:
$$\frac{1}{x}=k\pi+\arcsin\frac{1}{\alpha+2n\pi} \quad \text{és} \quad \sin\frac{1}{x}=(-1)^k\frac{1}{\alpha+2n\pi},$$

miből:
$$\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}=(-1)^k\sin(\alpha+2n\pi)=(-1)^k\sin\alpha.$$

E függvény tehát az $\frac{1}{k\pi}$ helyeken határozatlan. Míg tehát a $\sin\frac{1}{x}$-nek egyetlen ilyen helye volt, a $\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$-nek végtelen sok van: $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots$ melyek a 0 helyen összesűrűsödnek.

25. Érdekes függvény a következő:

$$f(x)=\frac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{e^{\operatorname{tg} x}+1}.$$

Ha x a $\frac{\pi}{2}$-hez konvergál és pedig jobbfelől (azaz $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb számokon át), akkor $\operatorname{tg} x$ mindig negativ és $e^{\operatorname{tg} x}$ minden számnál kisebbé válik, azaz $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{tg} x}=0$ és így $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}} f(x)=-1$, megjegyezve, hogy jobboldali határértékről van szó. Ha a baloldali határértéket keressük, akkor előbb $f(x)$-et ebben az alakban írjuk:

$$f(x)=\frac{1-e^{-\operatorname{tg} x}}{1+e^{-\operatorname{tg} x}}$$

és ha x a $\frac{\pi}{2}$-hez balról konvergál, minthogy $\operatorname{tg} x$ végtelenné válik, tehát

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} e^{-\operatorname{tg} x}=0 \quad \text{és így} \quad \lim_{x=\frac{\pi}{2}} f(x)=1.$$

A baloldali határérték $+1$, a jobboldali -1. [A jobboldali határértéket így szokták jelölni: $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}+0} f(x)$, a baloldalit így: $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}-0} f(x)$.]

[26. Határozzuk meg ezt a határértéket: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$, megjegyezve, hogy a nevezőben levő négyzetgyöknek mindig a pozitiv értéke veendő. Minthogy:

$$\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}},$$

tehát a keresett limes: $+1$, ha x bármely pozitiv számot jelent és -1, ha x negativ szám. Ha pedig $x=0$, akkor $\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$ mindig 0, tehát a határértéke is 0. Ha, mint említve volt, megállapodunk abban, hogy e jellel: $\operatorname{sgn} x$, $+1$-et jelölünk, ha x pozitiv, -1-et, ha x negativ és 0-t ha $x=0$, akkor tehát:

$$\lim_{n=\infty} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}=\operatorname{sgn} x.$$

Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$, valamint $\frac{2}{\pi} \lim\limits_{n=\infty} \operatorname{arctg} nx$ szintén $\operatorname{sgn} x$-et ábrázolják. A $\operatorname{sgn} x$-et még a következő egyszerű módon is előállíthatjuk. Ha u pozitiv hegyes szög és $\operatorname{tg} u=x$, akkor

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\operatorname{cotg} u=\frac{1}{x};$$

azaz $\quad u=\operatorname{arctg} x, \quad \frac{\pi}{2}-u=\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \quad$ és így: $\quad \operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$

Ha u negativ hegyes szög, akkor $\operatorname{tg} u=x$ negativ és $-\frac{\pi}{2}-u$ szintén negativ hegyes szög és

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}-u\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+u\right)=\operatorname{cotg} u=\frac{1}{x}, \quad \text{vagyis:} \quad -\frac{\pi}{2}-u=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

és így:

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

Eszerint tehát, ha az $\operatorname{arctg} x$-et a már többször említett módon $-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$ közben vesszük:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

összeg $\frac{\pi}{2}$, ha x pozitiv, $-\frac{\pi}{2}$ ha x negativ. Ha $x=0$, akkor az $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$-nek nincs értelme, határozatlan. Állapodjunk meg abban, hogy ez esetben az $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ helyett 0-t mondunk, vagyis inkább definiálunk olyan függvényt, mely minden x értéknél $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$-el megegyezik és $x=0$ helyen: 0. E megállapodásból következik, hogy

$$\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn} x.$$

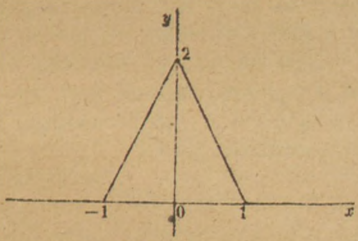
Ugyanezen megállapodással, mint könnyen megmutatható

$$\frac{2x}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = |x|,$$

mert általában $x \operatorname{sgn} x = |x|$.]

27. Állapítsuk meg az: $f(x) = |x+1| + |x-1| - 2|x|$ függvény menetét!
Ha $|x| > 1$, akkor vagy $x = 1+y$, vagy $x = -1-y$ alakban írható, ahol y pozitiv. Az első esetben:

$$|x+1| = 2+y, \quad |x-1| = y, \quad |x| = 1+y, \quad \text{tehát } f(x) = 0.$$



29. ábra.

A második esetben:

$$|x+1| = y, \quad |x-1| = 2+y, \quad |x| = 1+y, \quad \text{tehát } f(x) = 0 \text{ szintén.}$$

Ha pedig $|x| < 1$, akkor vagy $x = y$ vagy $x = -y$, ahol y 1-nél kisebb pozitiv szám. Az első esetben:

$$|x+1| = 1+y, \quad |x-1| = 1-y, \quad \text{tehát } f(x) = 2-2y = 2(1-y) = 2(1-x).$$

A második esetben:

$$|x+1| = 1-y, \quad |x-1| = 1+y, \quad |x| = y, \quad \text{tehát } f(x) = 2(1-y) = 2(1+x) \ldots f(0) = 2.$$

A függvény menetét a 29. kép ábrázolja.

Állapítsuk meg az $f(x) = |x+\alpha| + |x-\alpha| - 2|x|$ menetét, ha α adott pozitiv szám.

[28. Hogyan viselkedik a $\varphi(x) = A\dfrac{e^{\frac{1}{x-a}} - 1}{e^{\frac{1}{x-a}} + 1}$ az a helyen?]

29. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sin \alpha x}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; *c)* $\lim\limits_{x=0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

7. Lipschitz Lehrbuch der Analysis. Bonn 1880.
8. Hobson The Theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series. Cambridge 1907.
9. Baire Leçons sur les théories générales de l'Analyse. Paris 1908.
10. Du-Bois-Reymond Die allgemeine Functionentheorie. Tübingen 1882. (Philosophiai szempontból érdekes.)

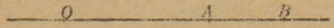
A feladatok nagyrészt az előbb említett könyvekből, egyes értekezésekből és a következő, gyakorlásul ajánlható gyűjteményekből vétettek:

1. E. Pascal: Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale. Milano 1905.
2. Frenet-Laurent Recueil d' exercices sur le calcul infinitésimal. Paris 1904.
3. Tisserand-Painlevé Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal. Paris 1896.

III. FEJEZET.

A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS.

1. A sebesség fogalma. A görbe emelkedése. Ha a pont egyenesen mozog és időszámításunk kezdetén az egyenesnek O pontjában van, akkor a mozgás teljesen ismeretesnek tekinthető, ha meg tudjuk mondani, hogy bármely t mp. elteltével hol lesz a mozgó pont, vagyis, ha ismeretes az O ponttól való s távolsága. Más szóval azt jelenti ez, hogy a mozgás teljesen ismeretes, ha tudjuk, hogy s



30. ábra.

hogyan függ a t-től, azaz s minő függvénye a t-nek. A fizikában megtanítják, hogy egyenletes mozgás esetében s arányos a t-vel, azaz $s=ct$, egyenletesen változó mozgás esetében s arányos a t négyzetével $s=\frac{at^2}{2}$, vagy $s=ct+\frac{at^2}{2}$ s. í. t. Mondjuk általában, hogy

$$s=f(t),$$

ahol $f(t)$ a t változónak egyértékű függvénye. t időegység alatt leírt út legyen OA. Ha a t idő Δt-vel növekszik (Δt nem Δ és t szorzata, hanem egységes jele egy bizonyos számértéknek: a t növekedésének) és a Δt idő alatt leírt utat Δs-el jelöljük, akkor a $t+\Delta t$ idő alatt leírt út: $OB=s+\Delta s=f(t+\Delta t)$, tehát

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t).$$

Ha ezt a Δt idő alatt leírt utat magához a Δt időhöz viszonyítjuk, akkor a $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ számértéket kapjuk, amely bizonyos tekintetben mértékeül szolgálhat a mozgás gyorsaságának a Δt idő alatt. Ez a Δt időnek megfelelő középsebesség:

$$v=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

a Δt-től függ (maga a t állandónak tekintetik). Ha e viszonynak $\lim \Delta t = 0$ esetére véges és meghatározott határértéke van, akkor ez a határérték a mozgó pontnak a t időpontban való sebessége. Ha ezt a sebességet c-vel jelöljük, akkor tehát:

$$c = \lim_{\Delta t = 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

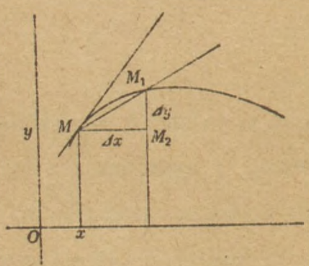
Így pl., ha a mozgó pont t idő alatt $\frac{at^2}{2}$ nagyságú utat ír le, akkor

$$f(t) = \frac{at^2}{2} \quad \text{és} \quad f(t+\Delta t) = \frac{a(t+\Delta t)^2}{2} = \frac{a}{2}\left[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2\right]$$

és így a Δt idő alatti középsebesség:

$$v = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = at + \frac{a\Delta t}{2}$$

és így a t időpontban való sebesség: $\lim_{\Delta t = 0}\left(at + \frac{a\Delta t}{2}\right) = at$. Ha tehát a leírt út arányos az idő négyzetével, akkor a sebesség arányos az idővel.



31. ábra.

Egészen hasonló fogalomalkotással van dolgunk a görbe pálya *emelkedésének* megállapításánál.

Ha egy görbe vonal egyenlete: $y = f(x)$ és az x, y koordinátákkal biró pontot M-mel jelöljük és az x abszcisszát megnövesztjük Δx-el, akkor az $x + \Delta x$ abszcisszához tartozó ordináta: $y + \Delta y$. Az M_1 pont koordinátái: $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, azaz $x + \Delta x$ és $f(x + \Delta x)$.

Míg az abszcissza Δx-el nő, az ordináta Δy-al növekszik. A Δx szakaszon a görbe vonal átlagos emelkedésének mérésére szolgálhat a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ viszonyszám, vagyis az M_1MM_2 szög tangense. És itt éppen úgy, mint ahogy a mozgásnál egy egészen új, mélyreható fogalomalkotással megállapítják a mozgó pont sebességét *egy időpontban*, most is beszélhetünk a görbének emelkedéséről a pálya megadott *M pontjában*. Ha ugyanis a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

viszonynak, mely a Δx függvénye, a $\Delta x = 0$-nak megfelelő határértéke véges és meghatározott szám, akkor azt mondhatjuk, hogy a görbe emelkedését az M helyen a

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

számmal mérjük. Ennek geometriai jelentése a következő: A $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nem más, mint az MM_1 húr irányhatározója (hajlásszögének tangense), tehát ha Δx zérussá válik, az MM_1 szelőnek két metszéspontja összeesik és minthogy feltételünk szerint a szóban forgó tangensnek, tehát magának a hajlásszögnek is van meghatározott határértéke, a metszőnek van meghatározott *határhelyzete*. A metszőt ezen határhelyzetében érintőnek nevezzük, tehát a $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nem más, mint az M pontban vonható érintőnek az irányhatározója.

És most általában, ha az $y=f(x)$ adott függvény, akkor az $x+\Delta x$-hez tartozó függvényérték: $f(x+\Delta x)$. Ha az x növekszik Δx-el, akkor a függvényérték nő $f(x+\Delta x)-f(x)$-el és ha az

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

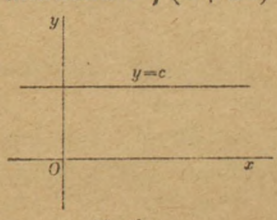
viszonynak $\Delta x=0$ helyen van véges és meghatározott határértéke, akkor ezt a határértéket az $f(x)$ függvénynek az x helyen való növekedési mértékszámának tekinthetjük és az $f(x)$ függvény x helyhez tartozó *differenciálhányadosának* nevezzük. Ezt a számértéket így jelöljük: $f'(x)$, vagy $Df(x)$, vagy $D_x f(x)$, vagy $\frac{df(x)}{dx}$, vagy még rövidebben: y', Dy, $D_x y$, $\frac{dy}{dx}$.

2. **Néhány egyszerű függvény differenciálhányadosa.** a) *Az állandó diff. hányadosa* 0. Ha ugyanis az $f(x)$ függvény x minden értékénél: c állandó számértékkel egyenlő, akkor mindenütt $f(x+\Delta x)$ is c és így

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$$

minden Δx-re nézve, tehát

$$f'(x)=\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0.$$



32. ábra.

Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha $f(x)$ nem minden x értékre egyenlő az állandó c-vel, hanem egy $\alpha\beta$ szakasz belsejében és x hely e szakasz belső helye.

Ennek a tételnek az az igen egyszerű geometriai tétel felel meg, hogy az x tengellyel c távolságban húzott párhuzamos, az $y=c$ görbe bármely pontjában vont érintő maga ez a vonal, melynek hajlásszöge 0, tehát iránytatározója is 0.

b) *Ha* $y=f(x)$ *differenciálhányadosa* $f'(x)$, *akkor az* $y=af(x)$ *függvény diff. hányadosa:* $af'(x)$.

Ugyanis $af(x)$ diff. hányadosa:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x}=a.\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=af'(x).$$

c) *Az összeg differenciálhányadosa.* Ha $f(x)$ *diff. hányadosa az* x *helyen* $f'(x)$ *és* $\varphi(x)$*-é ugyanezen a helyen* $\varphi'(x)$, *akkor* $f(x)+\varphi(x)$ *diff. hányadosa:* $f'(x)+\varphi'(x)$.

Ugyanis $f(x)+\varphi(x)$ diff. hányadosa a definició szerint:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)+\varphi(x+\Delta x)-[f(x)+\varphi(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right].$$

A jobboldalon álló összeg határértékét megkapjuk, ha a tagjainak határértékeit (melyek feltételünk szerint meghatározott véges számok) összeadjuk; de az első tag határértéke $f'(x)$, a másodiké: $\varphi'(x)$. Eszerint:

$$[f(x)+\varphi(x)]'=f'(x)+\varphi'(x).$$

Más jelöléssel: ha u az x változó függvénye és v szintén az x változó függvénye és valamely x helyen létezik mind az u, mind a v diff. hányadosa, akkor:

$$(u+v)'=u'+v'\,;\quad D(u+v)=Du+Dv\,;\quad \frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

Könnyen belátható, hogy ha $f(x)$ n függvény összege, azaz $f(x)=u_1+u_2+\cdots+u_n$ és valamely x helyen mindegyik tagnak van véges és meghatározott diff. hányadosa, akkor egyúttal:

$$f'(x)=u'_1+u'_2+\cdots+u'_n.$$

Ugyanígy következik, hogy ha $f(x)=u-v$, akkor egyúttal $f'(x)=u'-v'$.

d) *Az* x^n *hatvány diff. hányadosa, ha* n *poz. egész szám.* Az értelmezés szerint, ha $y=x^n$, akkor

$$y'=\lim_{\Delta x=0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}.$$

De $(x+\Delta x)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$

és így
$$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$
$$=nx^{n-1}+\Delta x\left[\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x+\binom{n}{3}x^{n-3}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right],$$

tehát:
$$\lim_{\Delta x=0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

Így például x differenciálhányadosa: 1, x^2-é $2x$, x^3-é $3x^2$ s így tovább. Ebből a *b)* alatti tétellel következik, hogy ha c állandó, akkor cx^n differenciálhányadosa: ncx^{n-1}.

Így például az $y=ax^2$ parabolának azon M pontjában, melynek abszcisszája ξ, ordinátája tehát $\eta=a\xi^2$, az érintőjének irányhatározója: $\operatorname{tg}\alpha=2a\xi$. Ha a mozgás törvényszerűsége olyan, hogy a t idő alatt leírt út: $s=\frac{at^2}{2}+ct$, akkor e mozgás sebessége: $\frac{ds}{dt}=at+c$.

Az $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ differenciálhányadosa:
$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+a_n.$$

e) *A* $\sin x$ *diff. hányadosa.* Ha $y=\sin x$, akkor:
$$y'=\lim_{\Delta x=0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

A jobboldali kifejezés így is írható:
$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

E szorzat limesét megkapjuk, ha a tényezőinek a limeseit szorozzuk. Az első tényező limese II. fej. 6. pont *c)* szerint: 1. A cosinus pedig folytonos függvény minden x helyen, tehát a határértéke megegyezik a helyettesítési értékével, azaz $\lim\limits_{\Delta x=0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$ és így:
$$y'=\cos x.$$

A $\sin x$ diff. hányadosa tehát: $\cos x$.

Így például az $x=0$ helyen az $y=\sin x$ görbe érintőjének irányhatározója: $\cos 0=1$, vagyis az érintő e helyen $\frac{\pi}{4}$ szöget alkot az x tengellyel.

f) *Szorzat diff. hányadosa.* Ha úgy az $f(x)$, mint a $\varphi(x)$ függvények az x helyen differenciálhatók (véges és meghatározott diff. hányadosuk van), akkor az $y=f(x).\varphi(x)$ függvény differenciálhányadosát a következőképpen számítjuk ki:

$$y' = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)\,.\,\varphi(x+\Delta x) - f(x)\,.\,\varphi(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\varphi(x) + f(x+\Delta x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x)}{\Delta x}$$

(az $f(x+\Delta x)\varphi(x)$ tagot hozzáadva és kivonva). A jobboldali kifejezés két részben is írható:

$$\lim\left\{\frac{f(x+\Delta x)\,[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]}{\Delta x} + \frac{\varphi(x)\,[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}\right\}.$$

Tagonkint vesszük a limest. Az első tag szorzat, melynek első tényezője $f(x+\Delta x)$, második tényezője $\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$. Be fogjuk majd bizonyítani, hogy ha a függvény valamely helyen differenciálható, akkor ezen a helyen egyúttal folytonos is; tehát

$$\lim_{\Delta x=0} f(x+\Delta x) = f(x).$$

Így tehát az első tag limese: $f(x)\varphi'(x)$.

A második tag limese: $\varphi(x)f'(x)$; tehát ha $y = f(x).\varphi(x)$, akkor:

$$y' = f(x)\varphi'(x) + \varphi(x)f'(x).$$

Ez a szorzat differenciálási szabálya. Más jelölésben: ha $y = uv$, akkor $y' = uv' + u'v$; $D(uv) = uDv + vDu$, $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dx}$.

Ha a szorzat nem két, hanem általában n tényezőből áll, akkor is igen egyszerű a differenciálási szabálya.

Ugyanis ha $y = u_1u_2u_3 \ldots u_n$, akkor $y' = u_1'u_2u_3 \ldots u_n + u_1u_2'u_3 \ldots u_n + u_1u_2u_3'u_4 \ldots u_n + \cdots + u_1u_2u_3 \ldots u_{n-1}u_n'$, vagyis a diff. hányados n tagból áll, melyeket úgy határozunk meg, hogy a szorzatnak egy-egy tényezőjét differenciáljuk és a többi változatlan tényezővel megszorozzuk, azután az így keletkezett tagokat összeadjuk.

E tétel helyességét legegyszerűbb lesz teljes indukcióval bizonyítani. Tegyük fel, hogy ez a szabály $n-1$ tényező esetében érvényes. Ekkor az $y = u_1u_2 \ldots u_n$ így írható: $y = (u_1u_2 \ldots u_{n-1})u_n$ és y' meghatározása végett a két tényezőből álló szorzat differenciálási szabályát alkalmazzuk. Eszerint:

$$y' = (u_1u_2 \ldots u_{n-1})'u_n + u_1u_2 \ldots u_{n-1}u_n'.$$

De az első tag a feltételünk szerint:

$$[u_1'u_2 \ldots u_{n-1} + u_1u_2'u_3 \ldots u_{n-1} + \cdots + u_1u_2 \ldots u_{n-2}u_{n-1}']u_n;$$

tehát valóban:

$$y' = u_1'u_2 \ldots u_n + u_1u_2' \ldots u_n + \cdots + u_1u_2 \ldots u_n'.$$

g) *Hányados differenciálása.* Legyenek $f(x)$ és $\varphi(x)$ valamely x helyen differenciálhatók és $\varphi(x)$ e helyen 0-tól különböző, akkor az $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ diff. hányadosát a következőképpen határozhatjuk meg:

$$y'=\lim_{\Delta x=0}\left[\left(\frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right):\Delta x\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)\varphi(x)-f(x)\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x\,.\,\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)}.$$

A jobboldali kifejezést kissé átalakítjuk, számlálójához függesztve $-f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x)+f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x)$-et.

$$y'=\lim_{\Delta x=0}\frac{\varphi(x+\Delta x)[f(x+\Delta x)-f(x)]-f(x+\Delta x)[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]}{\Delta x\,.\,\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\,.\,\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right\}.$$

A határértéket tagonkint számítjuk ki. Az első tag határértéke: $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$. A második tag első tényezője hányados, melynek úgy a számlálója, mint a nevezője Δx-nek a $\Delta x=0$ helyen folytonos függvénye és a nevező 0-tól különböző, tehát e hányados határértéke 50. l. *d)* szerint: $\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^2}$, a második tényező határértéke pedig $\varphi'(x)$; tehát:

$$y'=\frac{f'(x)}{\varphi(x)}-\frac{f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}=\frac{\varphi(x)f'(x)-f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}.$$

Ez a hányados differenciálási szabálya. Más jelölésben, ha:

$$y=\frac{u}{v},\ \text{akkor:}\ y'=\frac{u'v-uv'}{v^2},\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},\ D\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vDu-uDv}{v^2}.$$

h) *Negativ egész kitevőjű hatvány differenciálása.* Ha $y=x^{-n}$, akkor $y=\frac{1}{x^n}$, tehát az előbbi szerint (minthogy itt $u'=0$)

$$y'=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1},$$

vagyis itt is ugyanaz a differenciálási szabály alkalmazandó, mint a poz. kitevőjű hatványnál (az exponens szorzóul teendő és azután a hatvány exponense eggyel lejebb szállítandó).

i) *A differenciálható függvény folytonossága.* Ha az $f(x)$ függvény az x helyen differenciálható, azaz

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

véges meghatározott számérték, pl. A, akkor az $f(x)$ függvény ezen az x helyen folytonos.

Válasszunk két tetszésszerinti A' és A'' számot úgy, hogy $A'<A<A''$ legyen. Minthogy $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A$, tehát megállapítható egy oly δ küszöbszám, hogy ha $|\Delta x|<\delta$, akkor

$$A'<\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<A''. \qquad \alpha)$$

Azt akarjuk bebizonyítani, hogy $f(x)$ az x helyen folytonos. Ez be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy egy tetszésszerinti ε poz. számhoz tartozik olyan δ' poz. küszöbszám, melyre nézve

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon,$$

ha csak $|\Delta x|<\sigma$. Ezt így mutatjuk meg: Az A' és A'' közül jelöljük a nagyobb absz. értékűt M-mel. Számítsuk ki az $\frac{\varepsilon}{M}$-et. Az $\frac{\varepsilon}{M}$ és az előbb megállapított δ küszöbszámoknál kisebb szám legyen a δ'; tehát $\delta'<\delta$, $\delta'<\frac{\varepsilon}{M}$.

Az $\alpha)$ egyenlőtlenség így is írható:

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|<M.|\Delta x|,$$

ha $|\Delta x|<\delta$ és még inkább, ha $|\Delta x|<\delta'$.

De ha $|\Delta x|<\delta'$, akkor $M|\Delta x|<M\delta'<\varepsilon$ és így: ha csak $|\Delta x|<\delta'$, akkor

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon,$$

vagyis az adott ε-hoz tartozó küszöbszám a δ' és ezzel az $f(x)$ függvényről megmutattuk, hogy az x helyen folytonos.

E szerint tehát a folytonosság szükséges feltétele annak, hogy a függvény valamely helyen differenciálható legyen; egy egész $\alpha\ldots\beta$ szakaszban (illetőleg a szakasz minden helyén) az $f(x)$ csakis akkor lehet differenciálható, ha minden helyen folytonos.

Megjegyezzük azonban, hogy a folytonosság nem elégséges feltétele a differenciálhatóságnak; azaz lehetséges, hogy a függvény valamely x helyen folytonos és még sem differenciálható. Így például az $y=x\sin\frac{1}{x}$ függvény mindenütt, az $x=0$ helyen is folytonos. A $\sin\frac{1}{x}$-nek az $x=0$ helyen nincs ugyan határértéke, tehát nem is folytonos; de minthogy akárminő úton közeledjünk is az $x=0$ helyhez, a $\sin\frac{1}{x}$ függvény mindig -1 és $+1$ között marad, tehát $\lim\limits_{x=0}x\sin\frac{1}{x}=0$. E függvénynek a 0 helyen való folytonossága magából a folytonosság értelmezéséből is azonnal következik; hiszen ha $|x|<\varepsilon$, akkor $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$, tehát az ε-hoz tartozó küszöbintervallum is ε. Nézzük az $x\sin\frac{1}{x}$ differenciálhányadosát az $x=0$ helyen. A jelen esetben

$$f(0+\Delta x)=\Delta x\,.\sin\frac{1}{\Delta x}\quad\text{és így:}\quad\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

és így $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ nem létezik.

Még ennél is egyszerűbb eset a következő. Legyen $f(x)$ az a függvény, mely $0\ldots1$ szakaszban: x, $1\ldots2$ szakaszban: $2-x$, tehát az OAB törtvonal által ábrázolt folytonos függvény. (L. 72. lapon.) Az A helyen a szó közönséges értelmében nem lehet differenciálhányadosról szólni. A $0\ldots1$ szakasz minden helyén e differenciálhányados: 1; az $1\ldots2$ szakaszban pedig: -1. De ez az egyszerű példa ráutal arra, hogy a differenciálhányados fogalmát némileg tágítsuk. Ha ugyanis Δx a negativ számokon át válik 0-sá, akkor*

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=1\quad\text{és így}\quad\lim_{\Delta x=-0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=1.$$

Ha pedig Δx a pozitiv számokon át válik 0-á, akkor

$$\lim_{\Delta x=+0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-1;$$

vagyis az $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$-nek baloldali határértéke: -1, jobboldali határértéke pedig: $+1$. Ilyen esetekben azt szoktuk mondani, hogy az $f(x)$-nek van jobb és baloldali differenciálhányadosa és az egyiket így jelöljük: $f'_+(x)$, a másikat pedig így: $f'_-(x)$.

[Az első példánál a differenciálhányados értelmezése arra vezetett, hogy az $x\sin\frac{1}{x}$ függvénynek az $x=0$ helyen a diff. hányadosa volna $\lim\limits_{\Delta x=0}\sin\frac{1}{\Delta x}$. Ha a Δx-a negativ számokon át halad a 0-hoz, akkor a $\sin\frac{1}{\Delta x}$ határértéke minden szám lehet -1 és $+1$ között. E számhalmaz alsó határa: -1, felső határa $+1$. Ha pedig jobbról konvergál a Δx a 0-hoz, akkor is a $\sin\frac{1}{\Delta x}$ minden érték felé konvergálhat -1 és $+1$ között; tehát a számhalmaz alsó határa -1, felső határa $+1$. Általában, ha a $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ attól függ, hogy a Δx a pozitiv, vagy negativ számok mínő során át halad a 0-hoz, akkor a jobboldali határértékek által alkotott számhalmaz felső határát a jobboldali felső diff. hányadosnak nevezzük s í. t. Ilyenformán tehát minden esetben négy számértéket definiálhatunk: a jobboldali felső és alsó differenciálhányadost és a baloldali felső és alsó differenciálhányadost. Igazi differenciálhányadosról csak akkor lehet szó, ha ez a négy számérték véges és megegyező.]

j) *Összetett függvény differenciálása.* Ha $\varphi(x)$ az x helyen differenciálható és ha $\varphi(x)=z$ és az $y=f(z)$ függvény a z helyen

* $\Delta x=-0$-al azt jelöljük, hogy a Δx a negativ számok mentén válik zérussá, azaz baloldalról közeledik a 0-hoz; a $\Delta x=+0$ azt jelenti, hogy Δx a jobboldalról közeledik a 0-hoz.

differenciálható, akkor az $y=f[\varphi(x)]$ összetett függvénynek az x helyen való differenciálhányadosát a következőképpen határozhatjuk meg. Ha az x-et megnövesztjük Δx-el, akkor a $z=\varphi(x)$ megváltozik $\Delta z=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$-el és így az $f[\varphi(x)]$ növekménye:

$$\Delta y=f[\varphi(x+\Delta x)]-f[\varphi(x)]=f(z+\Delta z)-f(z).$$

Az $f[\varphi(x)]$ növekményét viszonyítanunk kell az x növekményéhez Δx-hez:

$$\frac{f[\varphi(x+\Delta x)]-f[\varphi(x)]}{\Delta x}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta x}.$$

De a jobboldali kifejezés így is írható:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

A keresett diff. hányados nem más, mint e szorzat határértéke, ha Δx a 0-hoz konvergál; de azt mondottuk, hogy a $\varphi(x)$ az x helyen differenciálható; tehát folytonos is és így, ha az x elenyésző csekéllyel növekszik, a $z=\varphi(x)$ is elenyésző csekéllyel változik, vagyis Δx-el együtt Δz is zérussá válik. Ezért tehát

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta z=0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\cdot\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Mindkét tényező limese meghatározott véges szám. Az első nem egyéb, mint az $f(z)$ függvény diff. hányadosa a z-helyen;* a másik pedig, mely nem más, mint $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$, $\varphi(x)$ függvény diff. hányadosa az x helyen; vagyis:

$$y'=Df[\varphi(x)]=f'(z).\varphi'(x),$$

vagy más jelölésben: $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Ez az összetett függvény differenciálási szabálya. Néhány példa megvilágítja e fontos tétel alkalmazását.

1. példa. Legyen $\varphi(x)=ax+b$ és $f(z)=z^n$, azaz $f[\varphi(x)]=(ax+b)^n$. Az x szerinti differenciálhányadost így kapjuk meg: az $ax+b$ helyébe képzeljünk z betűt és a z^n hatványt differenciáljuk z szerint: ez nz^{n-1}, azaz: $n(ax+b)^{n-1}$. Most a $z=ax+b$ differenciáltassék x szerint. A differenciálhányados: a; tehát:

$$\frac{dy}{dz}=n(ax+b)^{n-1} \text{ és } \frac{dz}{dx}=a, \text{ tehát: } \frac{dy}{dx}=na(ax+b)^{n-1}.$$

* A Δz ugyan nem válik tetszés szerinti módon 0-á, mert hiszen Δx-től is függ, de ha $f(z)$-nek a z helyen van differenciálhányadosa — amit feltettünk — akkor ez független attól, hogy Δz miként lesz 0.

2. példa. Legyen $\varphi(x)=x^2$ és $f(z)=\sin z$, azaz: $f[\varphi(x)]=\sin(x^2)$. A $\sin z$ z szerinti differenciálhányadosa: $\cos z$. A z függvény x szerinti differenciálhányadosa: $2x$, tehát:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=2x\cos x^2.$$

3. példa. $\cos x$ *differenciálhányadosa.* $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ összetett függvény. Itt $z=\frac{\pi}{2}-x$ és $y=\sin z$.

$$\frac{dy}{dz}=\frac{d\sin z}{dz}=\cos z;\quad \frac{dz}{dx}=\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{dx}=-1$$

és így: $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x.$$

Eszerint: $$(\cos x)'=-\sin x.$$

k) *A tang x differenciálhányadosa.* $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$; tehát a $\operatorname{tg} x$ diff. hányadosát megkapjuk, ha ezt a hányadost differenciáljuk. $\frac{u}{v}$ diff. hányadosa: $\frac{u'v-v'u}{v^2}$, tehát

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy:

$$(\operatorname{cotg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

l) *Az exponenciális függvény differenciálása.* Legyen $y=e^x$, akkor

$$y'=\lim_{\Delta x=0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}$$

$$\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\,\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

A feladat tehát arra redukálódott, hogy határozzuk meg a $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ határértéket. Ha Δx a 0-hoz konvergál, akkor $e^{\Delta x}$ az 1-hez konvergál, ha tehát $e^{\Delta x}=1+h$ tesszük, akkor h is 0-á válik a Δx-el.

$e^{\Delta x}=1+h$-ból: $\Delta x=\log(1+h)$ és így:

$$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{h}{\log(1+h)}=\frac{1}{\frac{\log(1+h)}{h}}=\frac{1}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}.$$

Eszerint tehát:

$$\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\frac{e^x}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}$$

és így: $$\lim_{\Delta x=0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\frac{e^x}{\lim\limits_{h=0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}.$$

De $\lim\limits_{h=0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} = \log \lim\limits_{h=0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \log e = 1$ és így:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x,$$

vagyis az e^x függvény differenciálhányadosa: e^x

m) *Inverz függvény differenciálása.* Ha $x=f(y)$ az y változó egyértékű folyton növekvő függvénye azon y értékekre nézve, melyek az $\alpha \ldots \beta$ szakaszban vannak és $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$, akkor, miként ismeretes (l. 77. lap) az y az x változónak is egyértékű monoton függvénye az $a \ldots b$ szakaszban. Jelöljük ezt a függvényt $\varphi(x)$-el. $\varphi(x)$ az $f(x)$ függvénynek inverz függvénye. A $\varphi(x)$-nek az x szerinti differenciálhányadosát akarjuk meghatározni, föltéve, hogy az adott $f(y)$ függvény az y szerint az egész $\alpha \ldots \beta$ szakaszban differenciálható és e differenciálhányados sehol sem lesz 0. Ha x-et megnöveszjük Δx-el, akkor y megváltozik Δy-al és:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Ha Δx zérussá válik, akkor Δy is 0-á lesz, mert y az x folytonos függvénye és fordítva; tehát mindegy, akár azt mondjuk, hogy Δx konvergál a 0-hoz, akár azt, hogy Δy válik zérussá. A jobboldali hányadosnak van véges és meghatározott határértéke, ha Δy a zérus felé konvergál, mert feltételünk szerint $\lim\limits_{\Delta y=0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = f'(y)$ a 0-tól különbözik. Így tehát a baloldali kifejezésnek is van határértéke, azaz:

$$\lim_{\Delta y=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{f'(y)}.$$

De a baloldali határérték előbbi megjegyzésünk szerint így is írható: $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; ez pedig nem más, mint y-nak x szerinti diff. hányadosa: y' [vagy $\varphi'(x)$] és így:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Vagy más jelölésben: $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

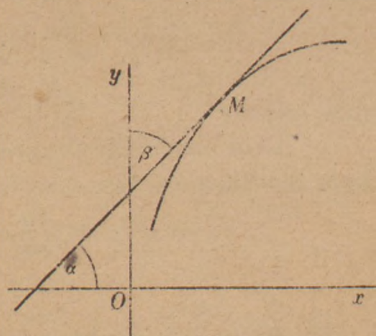
És ez az inverz függvény differenciálására igen egyszerű eljárást szolgáltat: Ha adva van az x mint az y függvénye, akkor y-nak x szerinti diff. hányadosát úgy állítjuk elő, hogy *az x y szerinti diff. hányadosának reciprok értékét vesszük.* Ezt az eljárást mindjárt alkalmazzuk néhány fontos differenciálási szabály megállapítására.

E tétel geometriai jelentése nyilvánvaló. Ugyanis a monoton emelkedő görbe M pontjában húzott érintőnek az X tengellyel való hajlásszöge α, az Y tengellyel alkotott szöge: β. A görbe egyenlete akár $x=f(y)$, akár $y=\varphi(x)$ alakban írható; tehát

$$\frac{dx}{dy}=\operatorname{tg}\beta,\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha;$$

de $\qquad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{cotg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$

és így $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$



33. ábra.

n) *A logarithmus diff. hányadosa.* Ha $y=\log x$, akkor $x=e^y$. A logarithmus tehát az exponenciális függvény inverz függvénye. Az exponenciális függvény minden szakaszban monoton, a differenciálhányadosa sehol sem 0, tehát az előbbi eljárás alkalmazható: Itt

$$\frac{dx}{dy}=e^y,\quad \text{tehát}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}.$$

E szerint tehát: $(\log x)'=\frac{1}{x}$.

A $\log x$ differenciálhányadosát az exponenciális függvénynek már előbb meghatározott diff. hányadosából hoztuk le. De megfordítva is eljárhatunk. A $\log x$ differenciálhányadosát közvetlenül így számíthatjuk ki:

$$(\log x)'=\lim_{\Delta x=0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}.$$

A számláló így is írható: $\log\frac{x+\Delta x}{x}$; vagy még: $\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ és így:

$$(\log x)'=\lim_{\Delta x=0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Ha a 82. lap β) formulájában x helyett Δx-et és a helyett $\frac{1}{x}$-et teszünk, akkor azt találjuk, hogy

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x},$$

azaz: $(\log x)'=\frac{1}{x}$.

Az $y=e^x$ függvény diff. hányadosát most már így határozhatjuk meg: Az e^x a $\log x$ inverz függvénye; mert ha $y=e^x$, akkor $x=\log y$ és így:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x,$$

tehát $(e^x)'=e^x$.

o) *A ciklometrikus függvények differenciálása.* 1) Ha $y=\text{arc}\sin x$, akkor $x=\sin y$ és így:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y},$$

De ha $x=\sin y$, akkor $\cos y=\sqrt{1-x^2}$ és pedig, ha miként már megállapítottuk, $y=\text{arc}\sin x$ alatt azt a szöget értjük (absz. mértékszámban), melynek sinusa x és $-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}$ közé esik, akkor $\cos y$ pozitiv, tehát a $\sqrt{1-x^2}$ poz. értéke veendő. Eszerint tehát:

$$(\text{arc}\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Ha $y=\text{arc}\cos x$, akkor $y=\frac{\pi}{2}-\text{arc}\sin x$ (mert hiszen az a szög, melynek cosinusa x, pótszöge annak, amelynek sinusa: x) és így

$$(\text{arc}\cos x)'=-(\text{arc}\sin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) Ha $y=\text{arc}\,\text{tg}\,x$, akkor $x=\text{tg}\,y$ és

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y.$$

De $\cos^2 y=\frac{1}{1+\text{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$, tehát:

$$(\text{arc}\,\text{tg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

4) Ha pedig $y=\text{arc}\,\text{cotg}\,x$, akkor $y=\frac{\pi}{2}-\text{arc}\,\text{tg}\,x$ és így:

$$(\text{arc}\,\text{cotg}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

p) *A hatvány diff. hányadosa.* Az x^α függvény diff. hányadosát megállapítottuk, ha az α kitevő pozitív vagy negativ egész szám. Most már általánosabban megállapítható e diff. hányados; ugyanis x^α poz. értéke mindig így írható [föltéve, hogy x poz. szám]: $e^{\alpha\log x}$ és így:

$$(x^\alpha)'=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\log x}=\frac{\alpha x^\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

tehát az eddig talált differenciálási szabály általában is érvényes:

a hatványt úgy kell differenciálnunk, hogy az exponenst szorzóul tesszük és a hatvány exponensét eggyel leszállítjuk. Így pl.:

$$D\sqrt{x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\qquad D\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Összefoglalás: A megállapitott differenciálási szabályok ezek:

1. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$; 2. $(e^x)'=e^x$; 3. $(\sin x)'=\cos x$;

4. $(\cos x)'=-\sin x$; 5. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6. $(\operatorname{cotg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 7. $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$;

8. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 9. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Az összeg, szorzat és hányados differenciálási szabályai:

10. $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 11. $(uv)'=u'v+v'u$;

12. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

Feladatok a differenciálási szabályok begyakorlására.

Állítsuk elő a következő függvények differenciálhányadosait az x helyen:

1. $(3x+5)^a$, 2. $(ax^2+bx+c)^m$, 3. $(x^3+1)^5$,
4. $(x^2-5x+2)^3$, 5. $\sqrt{1+x}$, 6. $\sqrt{1-x}$,
7. $\sqrt{1-x^2}$, 8. $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 9. $\sqrt[3]{x^2+1}$,
10. $\sqrt[n]{ax^2+bx+c}$, 11. $(1+x)^{\frac{2}{3}}$, 12. $\sqrt[3]{(1-x)^2}$,
13. $\dfrac{1+x}{1-x}$, 14. $\dfrac{1-x}{1+x}$, 15. $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,
16. $\dfrac{a+bx}{c+dx}$, 17. $\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{a+bx+cx^2}$, 18. $\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$,
19. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, 20. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 21. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,
22. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, 23. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2-1}}$, 24. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$,
25. $\sin 2x$, 26. $\cos ax$, 27. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{a}$,
28. $\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}$, 29. $\sin(x^2)$, 30. $\operatorname{tg}\sqrt{x}$,
31. $\sin\dfrac{1}{x}$, 32. $\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 33. $\operatorname{tg}\dfrac{1}{1+x}$,
34. $\operatorname{cotg}\dfrac{x^2+1}{2}$, 35. $\sin(\sin x)$, 36. $\cos(\sin x)$,
37. e^{-x}, 38. e^{-5x}, 39. $e^{\frac{1}{x}}$,

40. $e^{\frac{1+x}{1-x}}$, 41. $e^{\sin x}$, 42. $e^{\operatorname{tg} x}$,

43. $e^{-\cos x}$, 44. $e^{-\operatorname{cotg} x}$, 45. $e^{\sin 2x}$,

46. $e^{\operatorname{tg} \alpha x}$, 47. $e^{\alpha \operatorname{tg} x}$, 48. $e^{\sin \frac{1}{x}}$,

49. $\sqrt{1+e^x}$, 50. $\frac{1+e^x}{1-e^x}$, 51. $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$,

52. $\frac{\operatorname{tg} x-2}{\operatorname{tg} x+1}$, 53. e^{x^2}, 54. $\sin(e^x)$,

55. $e^x . \sin x$, 56. $e^{-x} . \operatorname{tg} x$, 57. $x^3 e^x$,

58. $x^2 e^{-x^2}$, 59. $\cos(e^{-x})$, 60. $\operatorname{tg}(e^{-2x})$,

61. $\frac{e^x}{x^2}$, 62. $\frac{x^3}{e^x}$, 63. $\frac{\sin x}{e^x}$,

64. $\frac{e^x}{\operatorname{tg} x}$, 65. $\frac{e^{-x}}{\operatorname{cotg} x}$, 66. $\frac{x^3}{\sin x}$,

67. $\frac{\sin x}{x^3}$, 68. $\frac{\cos x}{x}$, 69. $\frac{a \sin x+b}{\alpha \sin x+\beta}$,

70. $\frac{ae^x-b}{\alpha e^x-\beta}$, 71. a^{2x}, 72. a^{x^2},

73. $\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$, 74. $\operatorname{tg} \frac{e^x-1}{x}$. 75. $\cos \frac{x}{e^x}$,

76. $a^{\sin x}$, 77. $\sin x . a^{\cos x}$, 78. $\frac{a^{\cos x}}{\sin x}$,

79. $\log(x^2+3x+2)$, 80. $\log \sin x$, 81. $\sin \log x$,

82. $\log \operatorname{tg} x$, 83. $\operatorname{tg} \log x$, 84. $\log \log x$,

85. $\frac{1+\log x}{1-\log x}$, 86. $\sqrt{1+\log x}$, 87. $(a \log x+b)^5$

88. $x^2 \log x$, 89. $\frac{x^2}{\log x}$, 90. $\frac{\log x}{x}$,

91. $\log(e^x+e^{-x})$, 92. $e^{\frac{x}{1-x}}$, 93. $(x+\sqrt{1-x^2})^n$,

94. $\log(a+bx^2)$, 95. $\log \sqrt{a^2-x^2}$, 96. $e^x \log x$,

97. $\log \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, 98. $\log(a+bx+cx^2)$, 99. $\log(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2 x^2})$,

100. $\log \sqrt{\frac{a \cos x+b \sin x}{a \cos x-b \sin x}}$ 101. $\log \log \log x$, 102. $\frac{\log x}{\sqrt{1+x}}$,

103. $x-\log(1+x)$, 104. $(1-x^3) \log x$, 105. $(ax^2+bx+c) e^x$,

106. $\sqrt{\frac{1-\log x}{1+\log x}}$, 107. $\frac{1}{\log x-x}$, 108. $\frac{1}{\sin \log x}$,

109. $\arcsin \sqrt{x}$, 110. $\arcsin \frac{1+x}{1-x}$, 111. $\arcsin \sqrt{1-x^2}$,

112. $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$, 113. $\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$, 114. $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$,

115. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 116. $\arcsin \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}$, 117. $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

118. $e^{\operatorname{arctg} x}$, 119. $\log \arcsin \frac{x}{a}$, 120. $\frac{e^x \cos x}{1+e^x \sin x}$,

121. x^x [tegyük $x=e^{\log x}$, tehát $x^x=e^{x \log x}$], 122. $x^{\frac{1}{x}}$,

123. e^{e^x}, 124. $(\sin x)^x$, 125. $x^{\sin x}$, 126. $x^{\operatorname{tg} x}$.

127. Differenciáljuk a $\sin(\alpha+x)=\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x$ egyenlet mindkét oldalát x szerint.

128. Differenciáljuk a $\sin 2x=2\sin x\cos x$ egyenlet mindkét oldalát x szerint.

129. Differenciáljuk a $\operatorname{tg}(\alpha+x)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}x}$ mindkét oldalát x szerint.

130. Differenciáljuk a $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ mindkét oldalát x szerint.

131. Differenciáljuk a $\sin(\alpha-x)=\sin\alpha\cos x-\cos\alpha\sin x$ mindkét oldalát x szerint.

132. Differenciáljuk az $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}$ identitás mindkét oldalát x szerint.

133. Határozzuk meg a $\varphi(x^2)$ függvény x szerinti differenciálhányadosát, valamint a $[\varphi(x)]^2$-ét!

134. Bebizonyítandó ez a nevezetes összegformula:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

[A bizonyítás teljes indukcióval végezhető. Ha ugyanis ez a formula helyes, akkor kimutatjuk, hogy helyes akkor is, ha n helyett $n+1$-et teszünk. vagyis helyes ez is:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx+\sin\overline{n+1}\,x=\frac{\sin\frac{n+2}{2}x\,.\,\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},\qquad \alpha)$$

ugyanis a baloldali kifejezés a föltétel szerint így írható:

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\,.\,\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin\overline{n+1}\,x$$

és ha $\sin\overline{n+1}x=2\sin\frac{n+1}{2}x\,.\cos\frac{n+1}{2}x$ tesszük, akkor ez még így is írható:

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{nx}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right].$$

A zárójelben álló második tag két sinus különbsége:

$$\sin\frac{n+2}{2}x-\sin\frac{nx}{2},$$

tehát valóban helyes az $\alpha)$ alatti formula. Minthogy pedig, ha $n=2$, a képlet, mint egyszerű számítással megmutatható, helyes, tehát egész általánosan is igaz, hogy:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Differenciáljuk mindkét oldalt x szerint!

135. Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ egymástól egy bizonyos intervallumban igen cse-

kéllyel különböznek, abból még nem következik, hogy $f'(x)$ is igen csekélylyel különbözik a $\varphi'(x)$-től. Így például, ha $f(x)=\varphi(x)+\varepsilon\sin\frac{x}{\varepsilon^2}$, akkor $f(x)$ a $\varphi(x)$-től mindenütt ε-nál kevesebbel tér el (a görbék ordinátáinak különbsége ε-nál kisebb, mert $\sin\frac{x}{\varepsilon^2}$ mindig -1 és $+1$ között van). Számítsuk ki $f'(x)$ és $\varphi'(x)$ különbségét és mutassuk meg, hogy ez igen nagy is lehet, ha ε elég kis szám.

136. Tegyük az $f(x)$ függvényben $x=e^z$, azaz $z=\log x$ és határozzuk meg az $f(x)$-nek z szerinti differenciálhányadosát. Ez: $f'(x)\cdot\frac{dx}{dz}=f'(x)e^z=xf'(x)$. Ezt így írjuk: $\frac{df}{d\log x}=xf'(x)$, vagy $D_{\log x}f(x)=xf'(x)$. Számítsuk ki

$$D_{\log x}x^n,\quad D_{\log x}\log x,\quad D_{\log x}(\log x)^k,\quad D_{\log x}[x^k(\log x^l)].$$

137. Tegyük az $f(x)$-ben $x=\log z$, azaz $z=e^x$ és határozzuk meg $\frac{df}{dz}$-t azaz: $[D_{e^x}f(x)]$-et.

IRODALOM.

Első olvasmányul ajánlom a kezdőnek a következő munkáknak a differenciálásra vonatkozó részeit:

BEKE: Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba. Budapest 1908.
OSGOOD: A first course in differential and integral calculus. London 1907.
FABRY: Traité de Mathématiques générales. Paris 1908.
LORENTZ H. A.: Lehrbuch der Differential u. Integralrechnung. Leipzig 1900.
VIVANTI: Complementi di Matematica. Milano 1904. (Manuali Hœpli.)

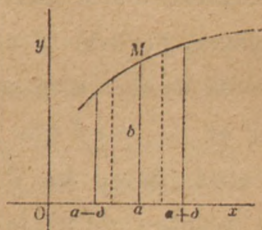
Az itt tárgyaltak kiegészítéseül és forrásmunkákul pedig főként ezeket:

GENOCCHI-PEANO-BOHLMANN: Differentialrechnung. Leipzig 1899.
SERRET: Lehrbuch der Differential u. Integralrechnung. 1909.
KIEPERT: Differential u. Integralrechnung. Hannover 1905.
KOWALEWSKI: Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1909.
CESARO-KOWALEVSKY: Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1904.
HARNACK: Elemente der Diff. u. Integralrechnung. Leipzig 1881.
PASCH: Grundlagen der Analysis. Leipzig 1909.
JORDAN: Cours d'Analyse. Paris 1909.
TANNERY: Introduction à la théorie des fonctions. Paris 1904.
HUMBERT: Cours d'Analyse. Paris 1903.
BAIRE: Théories générales de l'Analyse. Paris 1909.
CZUBER: Diff. u. Integralrechnung. Leipzig 1906.
CH. I. DE LA VALLÉE POUSSIN: Cours d'Analyse infinitésimale. II. kiadás. Paris 1909.
E. PASCAL: Calcolo infinitesimale. Milano 1895. (Manuali Hœpli.)
BERTRAND: Traité de calcul différentiel et intégral. Paris 1870.
W. F. MEYER: Differential u. Integralrechnung. Leipzig (Schubert-Sammlung) 1901.
WILLIAMSON: Differential and Integral-Calculus. London 1896.

IV. FEJEZET.

A DIFFERENCIÁLHÁNYADOSRA VONATKOZÓ FONTOS TÉTELEK. A MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLHÁNYADOSOK.

1. **A függvény növekedése és csökkenése.** Az ábrában feltüntetett görbéről azt mondjuk, hogy az M ponton át növekedően, vagy emelkedően vonul, mert a görbe pontjainak ordinátái nőnek, midőn az M-en áthaladunk, vagyis az M-től balra levő pontok ordinátái kisebbek és az M-től jobbra levő pontok ordinátái nagyobbak, mint az M ordinátája. Természetesen ez csak egy bizonyos szakaszra vonatkozhatik, mert az M-től távolabb levő jobboldali helyeken az ordináta kisebb is lehet, mint a b. E szemléletnek megfelelően már most azt fogjuk mondani, hogy az $f(x)$ *függvény az a helyen [az a abscisszával biró pontban] nő, ha megállapitható egy* δ *köz, úgy, hogy az* $a-\delta$ *és a közötti minden* x *helyen* $f(x)<f(a)$ *és az a és* $a+\delta$ *közötti helyeken* $f(x)>f(a)$; *vagyis*



34. ábra.

$$f(a-h)<f(a), \quad f(a+h)>f(a),$$

ha h tetszés szerinti pozitiv, δ*-nál kisebb számot jelent.*

És ennek megfelelően azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az a helyen fogy, vagy csökken, ha megállapitható egy δ köz úgy, hogy az $a-\delta$ és a közötti minden x helyen $f(x)>f(a)$ és az a és $a+\delta$ közötti minden x helyen $f(x)<f(a)$.

Ha az $f(x)$ az a helyen differenciálható, vagyis a

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

véges és meghatározott szám, akkor igen egyszerűen eldönthető, hogy az $f(x)$ az a helyen nő-e vagy fogy? Ugyanis, *ha* $f'(a)$ *pozitiv, akkor az* $f(x)$ *függvény az a helyen nő, ha pedig* $f'(a)$ *negativ akkor fogy.*

Tegyük fel, hogy $f'(a)$ pozitiv. Minthogy:

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

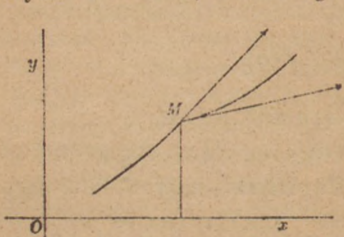
pozitiv, tehát megjelölhető egy olyan pozitiv δ küszöbintervallum, hogy az $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ hányados mindig pozitiv, ha $|h|<\delta$. Ugyanis a föntebbi határérték létezéséből következik, hogy ha $\varepsilon < \frac{f'(a)}{2}$ tesszük és ezen ε-hoz tartozó küszöb δ, akkor

$$f'(a)-\varepsilon < \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < f'(a)+\varepsilon,$$

ha $|h|<\delta$.

De itt úgy a jobboldali, mint a baloldali kifejezés is pozitiv, $\left(\text{mert } \varepsilon < \frac{f'(a)}{2}\right)$, tehát $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mindenesetre pozitiv, ha $|h|<\delta$. Ebből következik, hogy ha h negativ, akkor a számláló is negativ, ha h pozitiv, a számláló is pozitiv; vagyis negativ h-ra nézve, $f(a+h)<f(a)$ és pozitiv h esetében $f(a+h)>f(a)$, vagyis ha x az $a-\delta \ldots a$ intervallum bármely száma, akkor $f(x)<f(a)$ és ha x az $a \ldots a+\delta$ köz bármely helye, akkor $f(x)>f(a)$. Ezzel kimutattuk, hogy ha $f'(a)$ pozitiv, akkor $f(x)$ az a helyen növekedő. Ugyanígy mutatható meg, hogy ha $f'(a)$ negativ, akkor $f(x)$ az a helyen fogyó.

[Némelykor következtethetünk a függvény növekedésére és csökkenésére olyan esetben is, midőn az illető helyen tulajdonképpeni differenciálhányados nincsen; de úgy a jobb, mint a baloldali diff. hányadosok léteznek. Így pl. a mellékelt ábrában az M helyen nincs diff. hányados, de a görbe növekedése nyilvánvaló. Általában, ha az a helyen *úgy a jobb, mint a baloldali diff. hányadosok pozitivok, a függvény e helyen nő.* Ugyanis, ha a baloldali diff. hányados pozitiv, azaz



35. ábra.

$$\lim_{h=0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = A,$$

ahol h a pozitiv számokon át válik 0-á, pozitiv, akkor éppen úgy, mint előbb, megállapítható olyan δ küszöbintervallum, melyen belül az

$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

pozitiv, ha $h<\delta$; tehát a számláló mindezen h értékekre nézve negativ, azaz az $a-\delta \ldots a$ közön belül mindenütt $f(x)<f(a)$.

Ha most még a jobboldali diff. hányados is pozitiv, azaz

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = B$$

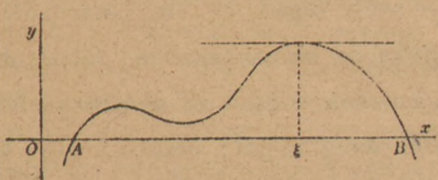
pozitiv szám, ha h a pozitiv számokon át válik 0-á, akkor meg az következik, hogy egy $a \ldots a+\delta'$ közön belül levő minden x helyre nézve $f(x) > f(a)$; tehát valóban az $f(x)$ az a helyen értelmezésünk szerint növekedően megy át.

Még az is meglehet, hogy az a helyen e diff. hányadosok nem léteznek, hanem a $\lim\limits_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ határozatlan, vagyis attól függ, hogy a h mi módon válik zérussá [gondoljunk csak az $x \sin \frac{1}{x}$ függvényre az $x=0$ helyen]. Ha a h a negativ oldalról válik zérussá és az $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-nak mindig van véges limese, bármiképpen haladjunk is a h-val a 0-hoz és e különböző limesek által alkotott számhalmaz felső határa: D^f_-, valamint e számhalmaz alsó határa D^a_- mindkettő pozitiv és a jobboldali limesek által alkotott számhalmaz felső és alsó határai, a D^f_+ és D^a_+ is pozitivok, akkor is következtethető, hogy az illető függvény az a helyen át növekedően halad.

Ha úgy a jobboldali, mint a baloldali diff. hányadosok is léteznek és mindkettő negativ az a helyen, akkor a $-f(x)$ diff. hányadosai pozitivok, tehát a $-f(x)$ növekedően megy át az a helyen és így az $f(x)$ csökken. Éppen így, ha a D^f_+, D^a_+, D^f_-, D^a_- számok az a helyen negativok, akkor is következtethető, hogy az $f(x)$ fogyóan halad át az a helyen].

Nem szóltunk még arról az esetről, midőn az $f'(a)=0$. Ezzel később foglalkozunk.

2. A Rolle-tétel. A mellékelt ábra olyan görbét tüntet fel, mely az X tengelyt az A és B pontokban metszi és az AB szakaszban más metszéspont nincsen. Az ilyen görbe az A helyen vagy a ten-



36. ábra.

gely fölé emelkedik, vagy a tengely alá száll. Ha az első eset forog fönn, akkor az AB szakaszban legalább egyszer emelkedőből sülyedővé kell válnia. Ha a második eset áll, akkor pedig fordítva sülyedőből emelkedővé kellett lennie. Ezt a szemléletünket még úgy is kifejezhetjük, hogy a görbe érintőjének legalább egyszer az AB szakaszban az X tengellyel párhuzamossá kell válnia, vagyis kell az AB köz belsejében legalább egy olyan ξ helynek lenni, amelyre nézve $f'(\xi)=0$.

Ezt az állítást már most pontosabban, a geometriai szemlélettől függetlenül, a következőképpen fogalmazzuk és bizonyítjuk: *Ha az $f(x)$ függvény az $x=a$ és $x=b>a$ helyeken eltünik, azaz $f(a)=0$, $f(b)=0$ és az $a \ldots b$ szakaszban mindenütt meghatározott véges diff.*

hányadosa van, azaz minden $a<x<b$ helyen* $\lim\limits_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *véges, meghatározott, akkor létezik olyan ξ hely az ab szakaszban, melyen $f'(\xi)=0$.*

Ha az $f(x)$ az ab szakaszban mindenütt 0 volna, akkor természetesen minden közbenső ξ helyen $f'(\xi)=0$ lenne; ezzel az esettel tehát nem is kell foglalkoznunk. Csak azt az esetet kell tehát szemügyre vennünk, midőn az $f(x)$ az ab szakaszban 0-tól különböző értéket is fölvesz. Mondhatjuk, hogy pozitiv értéket; mert ellenkező esetben $-f(x)$-et vizsgálnók.

Az $f(x)$ függvény által az ab szakaszban fölvett számértékek halmazának felső határa legyen M. Ez mindenesetre pozitiv, mert azt mondtuk, hogy $f(x)$-nek pozitiv értékei is vannak e szakaszban. Az $f(x)$ az ab szakasz belsejében mindenütt folytonos, mert hiszen mindenütt differenciálható. Weierstrass tétele szerint (l. 73. lapon) tehát az ab szakaszban van legalább egy olyan ξ hely, amelyen a függvény értéke éppen M; azaz $f(\xi)=M$. Ez a ξ hely az *ab belsejében* van, mert $f(a)=0$, $f(b)=0$. Azt állítjuk: ez olyan ξ hely, melyen $f'(\xi)=0$. Ugyanis az $f(x)$ föltételünk szerint a ξ helyen is differenciálható, tehát $\lim\limits_{h=0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ véges és meghatározott. De $f(\xi)=M$ az $f(x)$ maximális értéke az ab szakaszban; tehát akárminő számértéket jelentsen is h, ha csak a $\xi+h$ az ab szakaszban van, az $f(\xi+h)$ nem lehet nagyobb az $f(\xi)$-nél; tehát az $f(\xi+h)-f(\xi)$ nem lehet pozitiv. Ha tehát h pozitiv szám, akkor az $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ mindig negativ, vagy 0; tehát

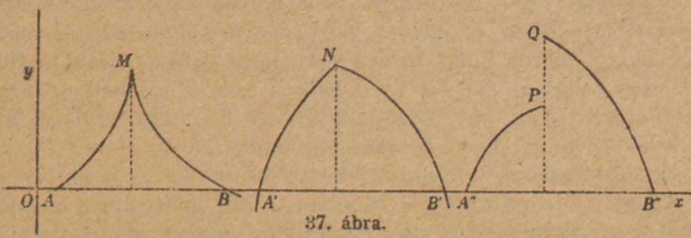
$$\lim_{h=0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$

is csak negativ, vagy 0 lehet, ha h pozitiv számokon át válik zérussá. Ha pedig h negativ, akkor az $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ mindig pozitiv, vagy 0, tehát a $\lim\limits_{h=0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ is csak pozitiv szám, vagy 0 lehet. Eszerint az $f(x)$ függvénynek a ξ helyen a baloldali diff.

* Az a és b helyekre nézve elégséges az a feltevés, hogy az a helyen jobboldali, b helyen baloldali diff. hányadosa van; úgy, hogy tehát ezeken a helyeken akár szakadása, vagy törése is lehet; általában az $f(x)$ viselkedése az a előtt és b után szóba sem jön.

hányadosa pozitiv, vagy 0; a jobboldali pedig negativ vagy 0. De feltételünk szerint az $f(x)$ minden helyen, tehát a ξ helyen is differenciálható, vagyis a jobboldali és baloldali diff. hányadosai megegyeznek. Következésképpen mindkettő: 0. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $f'(\xi)=0$.

A tétel bizonyításához fel kellett használnunk 1), hogy $f(a)=0$, $f(b)=0$ és 2), hogy az ab szakaszban $f(x)$ mindenütt differenciálható. Ha e 2) alatti feltétel nincs teljesítve, akkor a tétel nem érvényes. Így például a mellékelt ábrában feltűntetett görbék mind teljesítik azt a feltételt, hogy $f(a)=0$, $f(b)=0$, de sehol sincs az X tengellyel párhuzamos érintőjük, mert az M, N, illetőleg P pontokban nem mondhatók differenciálhatóknak.



37. ábra.

E *Rolle*-tétel oly fontos, hogy szükségesnek tartjuk egy még elemibb bizonyításának a közlését, amely kevésbbé általános, mint az előbbi, mert valamivel többet tételez fel. És pedig: legyen $f(a)=0$ és $f(b)=0$, továbbá $f(x)$ az ab szakaszban minden x helyen differenciálható és az $f'(x)$ függvény, tehát a diff. hányados, mint az x függvénye, az ab szakaszban mindenütt folytonos. [Ezt előbb nem tettük fel.] Az a és b helyek úgy legyenek választva, hogy az a-tól jobbra eső helyeken a b előtt az $f(x)$ seholsem 0, (mert hiszen különben b helyett az előbb álló zérus helyet választhatnók).

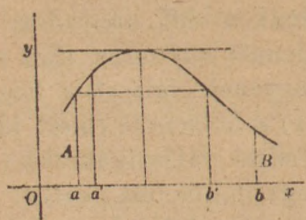
Az $f'(x)$ az ab szakasz belsejében vagy mindenütt pozitiv, vagy mindenütt negativ, vagy pedig az előjelét változtatja. Ha mindenütt pozitiv volna, akkor $f(x)$ folyton nőne és minthogy $f(a)=0$, tehát nem lehetne a b helyen 0. Éppen így nem lehet $f'(x)$ mindenütt negativ; tehát csak a harmadik eset állhat fenn; de minthogy $f'(x)$ folytonos, tehát ha az ab intervallumban jelváltása van, e közben valamely ξ helyen $f'(\xi)=0$.

A ξ az a és b között van; tehát így is írható: $\xi=a+\vartheta(b-a)$, ahol ϑ az 1-nél kisebb pozitiv szám. Ezen jelöléssel a Rolle-tétel így hangzik: Ha $f(a)=0$, $f(b)=0$ és az ab köz minden helyén $f'(x)$ véges, meghatározott szám, akkor van olyan $\vartheta<1$ pozitiv szám, melyre nézve: $f'[a+\vartheta(b-a)]=0$.

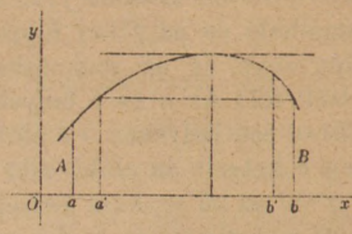
[A differenciálhányadosnak egy igen érdekes tulajdonságára utalunk, mely alkalmat ád a függvény folytonosságában rejlő sajátságának pontosabb megismerésére. Legyen az $f(x)$ az ab szakaszban mindenütt differenciálható. A diff. hányadosáról: $f'(x)$-ről feltesszük, hogy az ab szakaszban mindenütt korlátos, azaz K és L véges számok közé esik. Azt állítjuk, hogy ha $f'(x)$ *az a helyen pozitiv és b helyen negativ, akkor kell egy közbenső helynek lenni, ahol* $f'(x)$ *eltűnik.* Ha feltennők, hogy $f'(x)$ az ab intervallumban mindenütt folytonos, akkor állításunk közvetlen világos lenne; de éppen azt akarjuk megmutatni, hogy a derivált függvénynek, az $f'(x)$-nek ez a tulajdonsága mindig megvan, akár folytonos, akár nem. Legyen $f(a)=A$ és $f(b)=B$. Ha $A=B$, akkor a tétel a Rolle-tételből rögtön következik, mert akkor $f(x)-A$ függvény úgy az $x=a$, mint az $x=b$ helyen eltűnik és az egész ab szakaszban differenciálható, tehát egy közbenső ξ helyen a diff. hányadosa zérus; azaz $f'(\xi)=0$.

Ha $A\neq B$ és pl. $A>B$, akkor vegyük szemügyre az $f(x)-A$ függvényt. Ez az a helyen zérus; de a diff. hányadosa az a helyen pozitiv, tehát növekedőben van és így az a-tól jobbra van olyan hely is, ahol pozitiv. Legyen ilyen hely a'; tehát $f(a')-A$ pozitiv. A b helyen az $f(x)-A$ negativ, mert $A>B$. Eszerint $f(x)-A$ az a' helyen pozitiv, a b helyen negativ, tehát egy közbenső b' helyen zérus [mert hiszen $f(x)$, mint differenciálható függvény, folytonos is]. Így tehát az $f(x)-A$ az a helyen és a b' helyen zérus, tehát a Rolle-tétel szerint van egy közbenső $a<\xi<b'$ (tehát egyúttal $a<\xi<b$) hely, melyen a diff. hányadosa: 0, azaz valóban $f'(\xi)=0$.

Ha $B>A$, akkor az $f(x)-B$ függvényt választjuk. Ez az a helyen negativ, a b helyen 0 ugyan, de minthogy a b helyen a diff. hányadosa negativ, tehát a b helyen át fogyóan megy, vagyis a b-től balra van olyan környezet, melyen belül pozitiv. Legyen ennek egy helye a b'. Ekkor tehát $f(x)-B$ az a helyen negativ, a b' helyen pozitiv, tehát a és b' között van olyan a' hely, melyen $f(a')-B=0$. Így tehát az $f(x)-B$ úgy az a', mint a b helyen eltűnik, tehát ismét a Rolle-tétel alkalmazható. A tétel bizonyításánál követett gondolatmenetet szemléletessé teszik a mellékelt ábrák:



38. ábra.

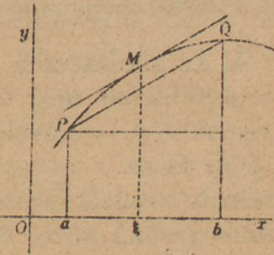


39. ábra.

Ha tehát $f'(x)$ *az ab szakaszban korlátos és* $f'(a)>0$, $f'(b)<0$ [*vagy* $f'(a)<0$ *és* $f'(b)>0$], *akkor az ab szakaszban van olyan közbenső* ξ *hely, melyen* $f'(\xi)=0$. Az $f'(x)$ derivált függvény, tehát ebben a tekintetben úgy viselkedik, mint a folytonos függvény. Sőt tovább is mehetünk. A folytonos függvényekre vonatkozólag ebből az egyszerű tulajdonságból leszármaztathattuk azt, hogy két értéke között minden értéket fölvesz. Most is megmutatjuk (tekintet nélkül az $f'(x)$ folytonosságára), hogy *ha* $f'(a)=A$ *és* $f'(b)=B$, *továbbá C az A és B között fekvő bármely szám, akkor az ab szakaszban van olyan c hely, melyen* $f'(c)=C$. A bizonyítás igen egyszerű; csak az $f(x)-Cx$ függvényt tekintsük. Ennek a diff. hányadosa: $f'(x)-C$ az a helyen $A-C$, a b helyen pedig $B-C$. Az egyik pozitiv, a másik negativ, tehát az imént bebizonyított tétel szerint van, az ab szakaszban fekvő olyan c hely, melyen $f'(c)-C=0$, vagyis $f'(c)=C$.]*

* *Jegyzet.* Régebben azt mondták, hogy $f(x)$ folytonos az ab szakaszban, ha az $f(a)$ és $f(b)$ között levő minden értéket fölvesz e szakaszon belül. Lát-

3. A középértéktétel. (Lagrange-féle.) A Rolle-tétel geometriai szemlélete még úgy is kifejezhető, hogy ha a görbe az X tengelyt az A és B pontokban metszi, akkor van egy közbenső hely, melyen az érintő párhuzamos az AB húrral. Ebben a fogalmazásban tekintve a dolgot, azt látjuk, hogy lényegtelen az, hogy az AB húr éppen az X tengellyel összeessék. A mellékelt ábrán szemléljük a következő általánosabb helyzeti relációt: A görbének a P és Q közötti szakaszában mindig van legalább egy olyan M pontja, melyhez tartozó érintő párhuzamos a PQ húrral. Ezen szemlélet analytikai fogalmazása a következő: *Ha $f(x)$ az ab szakaszban mindenütt differenciálható, akkor ab közben van olyan ξ közbenső hely, melyen*



40. ábra.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ezt a nevezetes tételt a szemlélettől függetlenül, a következőképpen bizonyíthatjuk be: Megalkotjuk a következő függvényt:

$$F(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x).$$

Ez az $F(x)$ ugyanazon tulajdonsággal bir, mint amelyet az $f(x)$-ről föltételeztünk: az ab szakaszban minden helyen véges és meghatározott diff. hányadosa van. Ezen kívül pedig $F(a)=0$, $F(b)=0$, tehát az $F(x)$-re a Rolle-tétel alkalmazható. Az

$$F'(x)=-f'(x)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

diff. hányadosnak az ab szakasz valamely közbenső ξ helyén zérussá kell válnia; azaz:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

és ezzel a szóban forgó tételt be is bizonyítottuk. Ha $\xi=a+\vartheta(b-a)$ írjuk, akkor e tétel ilyen alakú:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'[a+\vartheta(b-a)],\qquad 0<\vartheta<1$$

vagy:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'[a+\vartheta(b-a)],$$

tunk már egy példát (85. lap 13. példa), mely azt mutatja, hogy a folytonosságnak új (*Cauchy*-féle) definiciója, mely szerint minden helyen létezzék véges és meghatározott határérték, mely a függvény elrendelt értékével megegyezik az előbbi értelmezést magában foglalja ugyan, de fordítva nem áll a dolog.

vagy $b-a=h$ téve:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\vartheta h).$$

Ezt a tételt *Lagrange*-féle középértéktételnek fogjuk nevezni.

4. Az általánosabb (Cauchy-féle) középértéktétel. A Lagrange-féle középértéktételt még úgy is felfoghatjuk, hogy az $f(b)-f(a)$ növekménynek a $b-a$ növekményhez való viszonyát állapítja meg, vagyis az $f(x)$ és az x növekedési viszonyát; tehát két függvény növekedéseinek arányát számítja ki. A második függvény az x. De ezen fogalmazásban közel fekszik az a gondolat, hogy az x helyett egy másik függvényt válasszunk. Legyen ez $\varphi(x)$ és határozzuk meg az $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ hányadost.

Legyen tehát, hogy a feltételeket előre megmondjuk, úgy az $f(x)$, mint a $\varphi(x)$ az ab szakaszban mindenütt differenciálható; a diff. hányadosok korlátosak és ezen kívül a $\varphi(x)$ diff. hányadosa e szakaszban sehol sem 0.

Alkossuk meg ismét az előbbi mintájára a következő függvényt:

$$F(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(b)-\varphi(x)].$$

Az $F(x)$ is, mint alakjából látjuk, az ab szakasz minden helyén differenciálható. Továbbá: $F(a)=0$, $F(b)=0$, tehát ismét a Rolle-tétel alkalmazható, vagyis van olyan közbenső ξ hely, melyen az $F(x)$ diff. hányadosa:

$$F'(x)=-f'(x)+\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$$

eltűnik. Ha ilyen hely a ξ, akkor, minthogy föltételünk szerint $\varphi'(\xi)\neq 0$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Ez a *Cauchy*-féle középértéktétel. Ha $\varphi(x)$ helyett az egyszerű x-et tesszük, akkor az előbbi Lagrange-féle középértéktételre jutunk. Ezt a középértéktételt az előbb bevezetett jelöléssel még így is írhatjuk:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\vartheta h)}{\varphi'(a+\vartheta h)}.$$

5. A középértéktételnek fontos alkalmazása. Tudjuk, hogy ha az $f(x)$ az ab szakaszban állandó, akkor $f'(x)$ e szakaszban mindenütt 0. Most e tétel megfordításáról szólunk. *Ha az $f(x)$-ről tudjuk, hogy az ab szakaszban mindenütt* 0 *a diff. hányadosa (az **a** helyen elég a jobboldali és a **b** helyen a baloldali diff. hányados* *eltűnése), akkor az $f(x)$-nek az ab szakaszban mindenütt egy és ugyanazon állandó értéke van, vagyis az egész szakaszban: $f(x)=f(a)$.*

Ha ugyanis az $f(x)$-re, amely az ab szakasz minden helyén differenciálható, a középértéktételt alkalmazzuk olyképpen, hogy az eddig használt b helyébe x-et, az ab szakasz bármelyik helyét teszszük, akkor:

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a),$$

ahol ξ az a és x között levő hely; de minthogy a diff. hányados mindenütt 0, tehát $f'(\xi)=0$ és így:

$$f(x)=f(a),$$

vagyis az $f(x)$ függvény az ab intervallumban mindenütt állandó, ugyanakkora, mint az a helyen.

Ebből rögtön következik, hogy ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az ab szakaszban mindenütt differenciálhatók és a szakasz minden helyén $f'(x)=\varphi'(x)$, akkor $f(x)$ a $\varphi(x)$-től az egész szakaszban csakis egy állandó számértékben különbözhetik, vagyis $f(x)=\varphi(x)+c$. Ugyanis az $f(x)-\varphi(x)$ differenciálhányadosa mindenütt 0, tehát $f(x)-\varphi(x)$ az egész szakaszban: konstans. E konstans értéke: $f(a)-\varphi(a)$; tehát

$$f(x)=\varphi(x)+f(a)-\varphi(a).$$

Geometriai értelme ennek az állításnak, hogy az $y=f(x)$ és $y=\varphi(x)$ görbék közötti ordinátadarabok mindenütt egyenlők, a két görbe úgynevezett egyenlőközű görbe, egyik a másikból úgy keletkezik, hogy bizonyos $f(a)-\varphi(a)$ darabbal a másodikat az ordinátatengely irányában eltoljuk.

6. A magasabbrendű differenciálhányadosok. Ha az $f(x)$ az ab szakaszban mindenütt differenciálható és a differenciálhányadosa: $f'(x)$ az x-nek szintén differenciálható függvénye e szakaszban, akkor az $f'(x)$ függvény differenciálhányadosát, a

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

határértéket az $f(x)$ függvény x helyhez tartozó második differenciálhányadosának nevezzük és így jelöljük: $f''(x)$, vagy $D_{xx}f(x)$, vagy $D^{(2)}f(x)$, vagy $f(x)=y$ téve: $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Így például, ha $y=x^n$, akkor $y'=nx^{n-1}$, $y''=n(n-1)x^{n-2}$; vagy ha $y=e^x$, akkor $y'=e^x$, $y''=e^x$, vagy ha a szóban forgó függvény: $\sin x$, akkor $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$.

Feladat: Gyakorlatul állítsa elő az olvasó a $\log x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, a^x második differenciálhányadosait.

Ha az $f''(x)$ az ab szakaszban szintén differenciálható, akkor diff. hányadosát az $f(x)$ harmadik differenciálhányadosának nevezzük és $f'''(x)$-el, vagy $D'''f(x)$-el, vagy $y=f(x)$ téve, $\frac{d^3y}{dx^3}$-al jelöljük és általában az $f(x)$ $n-1$-ik diff. hányadosának első diff. hányadosát az $f(x)$ függvény n-ik diff. hányadosának mondjuk és $f^{(n)}(x)$-el, vagy $D^{(n)}f(x)$-el, vagy $y=f(x)$ téve $\frac{d^ny}{dx^n}$-el jelöljük.

Azonnal belátható, hogy az $f(x)$ i-ik diff. hányadosának k-ik diff. hányadosa nem más, mint az $f(x)$ $i+k$-ik diff. hányadosa, azaz: $D^{(k)}[D^{(i)}f(x)]=D^{(k+i)}f(x)$. Ha ugyanis ez az állítás $k-1$-re helyes, azaz: $D^{(k-1)}[D^{(i)}f(x)]=D^{(k+i-1)}f(x)$, akkor helyes k-ra is, mert ha az utolsó kifejezés mindkét oldalán x szerint differenciálunk, akkor a baloldalon $D^{(k)}[D^{(i)}f(x)]$-et, a jobboldalon pedig $D^{(k+i)}f(x)$-et kapjuk.

Feladat: Gyakorlatul állítsuk elő az x^n, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, a^x első 5 diff. hányadosát.

Jegyzet. A $\sin x$ függvény differenciálhányadosainak megalkotásánál arra az egyszerű szabályra jutunk, hogy

$$(\sin x)^{(4n)}=\sin x,\qquad (\sin x)^{(4n+1)}=\cos x,$$
$$(\sin x)^{(4n+2)}=-\sin x,\qquad (\sin x)^{(4n+3)}=-\cos x.$$

Erre a diff. hányadosok egyszerű megalkotásával is rájutunk; de még egyszerűbben, ha meggondoljuk, hogy

$$(\sin x)'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$\left(\text{ugyanis } \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\right)$ ami azt mondja, hogy a $\sin x$ függvényen végzendő differenciálási operáció egyszerűen abból áll, hogy az argumentumát $\frac{\pi}{2}$-el növeljük. Ebből ugyanis azonnal következik, hogy ha általában a differenciálást k-szor végezzük el egymás után, akkor $(\sin x)^{(k)}=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$-re jutunk, vagyis az argumentumhoz k-szor kellett $\frac{\pi}{2}$-et hozzáadnunk; tehát:

$$(\sin x)^{(4n)}=\sin(x+2n\pi)=\sin x,$$
$$(\sin x)^{(4n+1)}=\sin\left(x+2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,$$
$$(\sin x)^{(4n+2)}=\sin(x+2n\pi+\pi)=-\sin x,$$
$$(\sin x)^{(4n+3)}=\sin\left(x+2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x.$$

Éppen így állapíthatók meg a $\cos x$-re vonatkozó differenciálási szabályok:

$$(\cos x)^{(4n)} = \cos x, \qquad (\cos x)^{(4n+1)} = -\sin x,$$
$$(\cos x)^{(4n+2)} = -\cos x, \qquad (\cos x)^{(4n+3)} = +\sin x,$$

mert $(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, vagyis a $\cos x$-on végzendő differenciálási művelet az argumentumának $\frac{\pi}{2}$-el való növeléséből áll.

7. A Leibniz-féle differenciálási szabály. Ha u és v az x független változónak legalább n-szer differenciálható függvényei az x helyen, akkor az uv szorzatnak n-ik differenciálhányadosát a következő szabály szerint állíthatjuk elő:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \cdots +$$
$$+ \binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)},$$

vagy rövidebben írva:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{1}^{n} k \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

megjegyezve, hogy $u^{(k)}$ az esetben, ha $k=0$, u-val helyettesítendő. Éppen így $v^{(0)} = v$. Szóval, az uv szorzat n-ik differenciálhányadosa $n+1$ tagú összeg; minden tagban u más-más diff. hányadosának v diff. hányadosával való szorzata van. A két differenciálási rendszám összege éppen n. Az u differenciálási rendszáma szerint rendezett összegben az együtthatók rendre ugyanazok, mint az $(a+b)^n$ hatványban szereplő binomiális coefficiensek.

Ezen szabály helyességéről teljes indukcióval győződhetünk meg. Ha ugyanis föltesszük, hogy az uv n-ik diff. hányadosa valóban a felírt alakú, akkor kimutatjuk, hogy uv szorzat $n+1$-ik differenciálhányadosa ugyanilyen szabállyal képezhető. Ugyanis uv $n+1$-ik diff. hányadosát az $(uv)^{(n)}$-ből úgy kapjuk, hogy még egyszer differenciáljuk. Minden tagból két tagot szolgáltat a differenciálás:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v' + u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n)}v' + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v'' + \cdots +$$
$$+ \binom{n}{k}u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k+1)} + \cdots + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}.$$

Ha most a hasonló tagokat összevonjuk és tekintetbe veszszük, hogy

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

akkor: $(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \binom{n+1}{1}u^{(n)}v' + \binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v'' + \cdots +$

$$+ \binom{n+1}{k+1}u^{(n-k)}v^{(k+1)} + \cdots + uv^{(n+1)}$$

vagy rövidebb jelöléssel:

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{0}^{n+1}{}_k \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} v^{(k)}.$$

Minthogy pedig $n=1$ esetében $(uv)' = uv' + u'v$, tehát a szóban forgó szabály helyes, következésképpen ez a szabály általános érvényességű. Ezt a Leibniz-féle differenciálási szabálynak nevezzük. Eszerint:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$
$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''';$$
$$(uv)^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}, \quad \text{s. í. t.}$$

8. A második differenciálhányados mint határérték. A középértéktétel ismételt alkalmazása a magasabbrendű differenciálhányadosokat mint határértékeket új világításba helyezi. Legyen h egy meghatározott adott számérték és jelöljük az $f(x+h) - f(x)$ függvényt $F(x)$-el.

$$F(x) = f(x+h) - f(x).$$

Alkalmazzuk az $F(x)$ függvényre, mely ha $f(x)$ az ab szakaszban differenciálható, nyilván legalább az $a+|h| \ldots b-|h|$ szakaszban differenciálható, a középértéktételt:

$$F(x+h) - F(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) =$$
$$= hF'_x(x+\vartheta h) = h[f'(x+\vartheta h+h) - f'(x+\vartheta h)],$$

ahol $0 < \vartheta < 1$. A zárójelben álló utolsó kifejezésre ismét alkalmazzuk a középértéktételt (az $x+\vartheta h$ helyen)

$$f'(x+\vartheta h+h) - f'(x+\vartheta h) = hf''(x+\vartheta h+\vartheta_1 h),$$

ahol ϑ_1 is az 1-nél kisebb pozitiv szám. Eszerint tehát:

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = h^2 f''(x+\vartheta h+\vartheta_1 h) \qquad \alpha)$$

és innen:

$$f''(x+\vartheta h+\vartheta_1 h) = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}.$$

A számlálóban álló kifejezést az $f(x)$ másodrendű növekményének nevezzük és éppen úgy, mint az $f(x+h)-f(x)$ függvénynövekményt $\Delta f(x)$-el, úgy ezt $\Delta^2 f(x)$-el jelöljük és ha h helyett megint a szokásos Δx-et tesszük, akkor:

$$f''[x+(\vartheta+\vartheta_1)\Delta x] = \frac{\Delta^2 f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

Ha most még föltesszük, hogy az x helyen az $f(x)$ második differenciálhányadosa folytonos, akkor a

$$\lim_{\Delta x=0} f''[x+(\vartheta+\vartheta_1)\Delta x]$$

határérték: $f''(x)$ és így:

$$f''(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^2 f(x)}{(\Delta x)^2},$$

vagyis éppen úgy, mint $f'(x)$ az $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ viszony határértéke $h=0$ helyen úgy az $f''(x)$ az

$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

határértéke $h=0$ helyen; de ez utóbbira nézve ez az állítás itt csakis azon esetben van megmutatva, ha $f''(x)$ az x helyen egyúttal folytonos.

Az $\alpha)$ alatti egyenletet még egy kissé megváltoztatott alakban is felírjuk; ugyanis x helyébe $x-h$-t tesszük. Ekkor kissé szimmetrikusabb alakban áll elő e reláció.

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=h^2 f''(x+\vartheta' h),$$

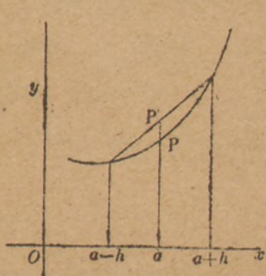
ahol ϑ' a -1 és $+1$ közé eső szám (ugyanis a jobboldalon $f''(x-h+\vartheta h+\vartheta_1 h)$ volna, ahol ϑ és ϑ_1 az 1-nél kisebb pozitiv számok, tehát $-h+\vartheta h+\vartheta_1 h=h(-1+\vartheta+\vartheta_1)=\vartheta' h$, ahol ϑ' -1 és $+1$ közé esik). Innen is, ha $f''(x)$ az x helyen folytonos:*

$$f''(x)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

A magasabbrendű diff. hányadosokkal, mint ilyen határértékekkel, később foglalkozunk. (L. 172. l.)

9. A második differenciálhányados geometriai és mechanikai jelentése. Ha az $y=f(x)$ által jellemzett görbe P pontjának abszcisszája a és az a helyen az $f(x)$ második differenciálhányadosa, az $f''(a)$ pozitiv, akkor tehát a

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$



41. ábra.

pozitiv szám; és így a limes értelmezése szerint van egy olyan H küszöbköz, mely azzal a tulajdonsággal bir, hogy az

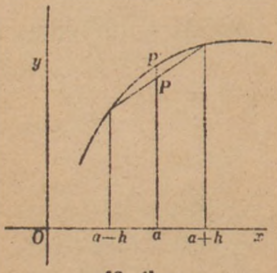
$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

* Megjegyezzük, hogy e reláció igaz akkor is, ha $f''(x)$ az x helyen nem folytonos.

hányados mindig pozitiv, ha $|h| < H$; tehát e hányados számlálója is pozitiv, azaz:

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} > f(a).$$

Ez azt mondja, hogy a 41. ábrában látható trapéz középvonala, a P' pont ordinátája nagyobb, mint a görbe P pontjának az ordinátája, bárminő távolságot jelentsen is a h, ha csak H-nál kisebb. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a görbe a P pont környezetében felülről nézve homorú (vagy alulról nézve domború). Ha $f''(a)$ negativ, akkor ugyanígy következik, hogy $f(a+h)-2f(a)+f(a-h)$ negativ, ha $|h| < H$-nál és így



42. ábra.

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} < f(a),$$

a görbe a P' hely környezetében felülről tekintve domború (42. ábra).

Ha $f''(a)=0$, akkor a görbe homorú, vagy domború voltára ebből nem következtethetünk.

A második differenciálhányados mechanikai jelentősége is azonnal átlátható. Ha a mozgó pont egyenes pályán halad és bizonyos kezdőponttól mért távolsága s a t időnek ismeretes függvénye, azaz $s=f(t)$, akkor a mozgás teljesen jellemezve van. Ismeretes, hogy a mozgás sebessége alatt $f'(t)$-t, azaz $\lim\limits_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$-t értjük. A sebesség v is eszerint a t bizonyos függvénye és pedig rendszerint olyan, amely ismét differenciálható. [Ha v nem folytonos, például ütközés, vagy egyéb hirtelen akadálya támad a mozgásnak, akkor nem lehet v differenciálhányadosáról szólni.] Az $f''(t)$, vagyis $\frac{dv}{dt}$, a sebesség differenciálhányadosa, a $\frac{d^2s}{dt^2}$ második differenciálhányados az, amit a fizikában gyorsulásnak nevezünk.

Feladatok és gyakorlatok.

1. Határozzuk meg a következő diff. hányadosokat:

a) x^a az ötödikig!	*b)* $D^{(n)}x^a$,	*c)* $D^{(n)}\sin x$,
d) $D^{(n)}\cos x$,	*e)* $D''\operatorname{tg} x$, $D'''\operatorname{tg} x$,	*f)* $D''\operatorname{cotg} x$, $D'''\operatorname{cotg} x$,
g) $D^{(n)}e^x$,	*h)* $D'''\log x$, $D^{(n)}\log x$,	*i)* $D^{(n)}a^x$,
j) $D''\arcsin x$,	*k)* $D''\operatorname{arc\,tg} x$,	*l)* $D'''\sqrt{x}$,

2. Határozzuk meg az $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ n-edfokú egész függvény differenciálhányadosait az n-ikig!

3. *a)* $D''\dfrac{ax+b}{cx+d}$, *b)* $D'''\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2+3x-5}$, *c)* $D''\dfrac{a\sin x+b}{c\sin x+d}$,

d) $D''\log\log x$, *e)* $D''e^{x^2}$, *f)* $D''e^{\sin x}$.

4. *a)* $D'''(x^3e^x)$, *b)* $D'''(x^3\log x)$, *c)* $D'''[x^2(\log x)^2]$,

d) $D^{IV}[\sin xe^x]$, *e)* $D'''(\sin x\log x)$.

5. Ha $(a+x)$-et n-ik hatványra emeljük (n pozitiv egész szám), akkor mindenesetre ilyen alakú kifejezést kapunk:

$$(a+x)^n=\alpha_n+\alpha_{n-1}x+\alpha_{n-2}x^2+\cdots+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_0x^n,$$

ahol az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ együtthatókat kiszámíthatjuk, ha mindkét oldalon differenciálunk egymásután n-szer és az így nyert identitásokban $x=0$ teszszük. Így:

$$n(a+x)^{n-1}=\alpha_{n-1}+2\alpha_{n-2}x+\cdots+(n-2)\alpha_2x^{n-3}+(n-1)\alpha_1x^{n-2}+n\alpha_0x^{n-1},$$
$$n(n-1)(a+x)^{n-2}=2\alpha_{n-2}+3.2\alpha_{n-3}x+\cdots+(n-2)(n-3)\alpha_2x^{n-4}+$$
$$+(n-1)(n-2)\alpha_1x^{n-3}+n(n-1)\alpha_0x^{n-2}$$

s így tovább. Ha $x=0$ tesszük, $\alpha_n=a^n$, $\alpha_{n-1}=na^{n-1}$, $\alpha_{n-2}=\binom{n}{2}a^{n-2}\ldots$-et kapjuk. (Binomiális-tétel!)

6. Az
$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \alpha)$$

identitást differenciáljuk egymásután 3-szor! Az első differenciálással ezt az identitást kapjuk:

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}. \qquad \beta)$$

Erre a szummáló-formulára van szükségünk, ha például ilyen feladatot akarunk megoldani: Valaki az első év elején n koronát helyez el a takarékpénztárba, minden következő év elején eggyel kevesebbet. Mennyire növekszik a pénze az n-ik év elejéig? Oldjuk meg e feladatot!

Ha pedig mindkét oldalon x^{n-1}-el osztunk és $\frac{1}{x}$ helyett y-t írunk, mutassuk meg, hogy

$$n+(n-1)y+(n-2)y^2+\cdots+y^{n-1}=\frac{y^{n+1}-(n+1)y+n}{(y-1)^2}$$

formulát kapjuk. Erre van szükségünk, ha azt kérdezzük, mennyi pénzünk lesz a takarékban az n-ik év elején, ha az első év elején 1 koronát, a második év elején 2 koronát, szóval, minden évben 1-gyel több koronát helyezünk el, mint az előzőben! Oldjuk meg ezt a feladatot!

Differenciáljuk az *α)* alatti identitás mindkét oldalát és az így nyert *β)* alatti identitás mindkét oldalát szorozzuk meg x-el és újra differenciáljunk. Ekkor a baloldalon az

$$1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$$

kifejezést kapjuk. Számítsuk ki a jobboldalt! Szorozzunk aztán ismét mindkét oldalon x-el és differenciáljunk újból! Ha ezt az eljárást folytatjuk, sorban az

$$1^3+2^3x+3^3x^2+\cdots+n^3x^{n-1},\ 1^4+2^4x+3^4x^2+\cdots+n^4x^{n-1},\ldots$$

kifejezéseket kapjuk. (Megjegyezzük, hogy ha e kifejezésekben x helyébe 1-et teszünk, a jobboldalon $\frac{0}{0}$ alakú kifejezésre jutunk, melynek az osztás értelmezése szerint értéket nem tulajdoníthatunk. Később bővebben foglalkozunk az ilyen határozatlan alakokkal.)

7. Az
$$1+e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{(n-1)x}=\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$$
identitás mindkét oldalát differenciáljuk egymásután 3-szor!

8.* Ha u és v az x függvényei, határozzuk meg sorban az $\frac{u}{v}$ hányados első, második, harmadik differenciálhányadosát. Ez az eljárás meglehetősen hosszadalmas. Áttekinthetőbb a következő: Tegyük $\frac{u}{v}=y$, azaz $u=yv$ és jelöljük a k-ik differenciálhányadosokat $k!\,u_k$, $k!\,y_k$, illetőleg $k!\,v_k$-val; u_0 és v_0 jelentsék az u és v függvényeket. Az $u=yv$-t egymásután differenciálván, a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned}
u_0&=y_0v_0\\
u_1&=y_0v_1+y_1v_0\\
u_2&=y_0v_2+y_1v_1+y_2v_0\\
u_3&=y_0v_3+y_1v_2+y_2v_1+y_3v_0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n&=y_0v_n+y_1v_{n-1}+y_2v_{n-2}+y_3v_{n-3}+\cdots+y_nv_0;
\end{aligned}$$

ugyanis a k-ik egyenlet e rendes formájában a Leibniz-szabály alkalmazásával ilyen alakú:
$$u^{(k)}=yv^{(k)}+\binom{k}{1}y'v^{(k-1)}+\cdots+\binom{k}{r}y^{(r)}v^{(k-r)}+\cdots+y^{(k)}v.$$

Az r-ik tag a jobboldalon: $\binom{k}{r}y^{(r)}v^{(k-r)}=\frac{k!}{r!\,(k-r)!}\,y^{(r)}v^{(k-r)}$; de a bevezetett jelölés szerint:
$$\frac{y^{(r)}}{r!}=y_r;\quad \text{és}\quad \frac{v^{(k-r)}}{(k-r)!}=v_{k-r},\quad \text{továbbá}\quad \frac{u^{(k)}}{k!}=u_k.$$

Ezen egyenletrendszerből kell az y_n-et kiszámítunk. E rendszer determinánsa a diagonálására redukálódik, tehát:

$$y_n=\frac{1}{v_0^{n+1}}\begin{vmatrix}
v_0 & 0 & 0 & \ldots 0 & u_0\\
v_1 & v_0 & 0 & \ldots 0 & u_1\\
v_2 & v_1 & v_0 & \ldots 0 & u_2\\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots 0 & \cdot\\
v_{n-1} & v_{n-2} & v_{n-3} & \ldots v_0 & u_{n-1}\\
v_n & v_{n-1} & v_{n-2} & \ldots v_1 & u_n
\end{vmatrix}$$

Ha ezt a determinánst az utolsó oszlopa szerint kifejtjük, akkor azt találjuk, hogy u_n aldeterminánsa: v_0^n, u_{n-1}-é $-v_1v_0^{n-1}$, ... u_{n-k}-hoz tartozó aldeterminánst megkapjuk, ha e determinánsból az utolsó oszlopot és az u_{n-k}-t tartalmazó sort elhagyjuk. Az u_{n-k}-hoz tartozó aldetermináns: ez (az $n-k$-ik sor és oszlop után vonást húztunk).

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
v_0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & & \ldots 0\\
v_1 & v_0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & & \ldots 0\\
v_2 & v_1 & v_0 & \ldots 0 & 0 & 0 & & \ldots 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & & \cdots\\
v_{n-k-1} & & & \ldots v_0 & 0 & 0 & & \ldots 0\\
\hline
v_{n-k+1} & & & \ldots v_2 & v_1 & v_0 & 0 & \ldots 0\\
v_{n-k+2} & & & \ldots v_3 & v_2 & v_1 & v_0 & \ldots 0\\
\cdot & & & \cdots & \cdot & \cdot & & \cdots\\
v_n & & & \cdots & v_k & v_{k-1} & & \ldots v_1
\end{array}\right|$$

és így e determináns: v_0^{n-k} szorozva a jobboldali alsó sorokban álló determinánssal. Eszerint tehát:

$$y_n = \frac{u_n}{v_0} - \frac{u_{n-1}}{v_0^2} v_1 + \frac{u_{n-2}}{v_0^3} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 \\ v_2 & v_1 \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{u_{n-3}}{v_0^4} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 & 0 \\ v_2 & v_1 & v_0 \\ v_3 & v_2 & v_1 \end{vmatrix} + \frac{u_{n-4}}{v_0^5} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_1 & v_0 & 0 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_0 \\ v_4 & v_3 & v_2 & v_1 \end{vmatrix} - \ldots$$

9. Mutassuk meg, hogy ha $y = \operatorname{arctg} x$, akkor $(1+x^2)\, y'' + 2xy' = 0$.

Állítsuk elő a baloldal n-ik differenciálhányadosát! Az első tagra alkalmazva a Leibniz-szabályt, csak 3 tagot kapunk: $(1+x^2)\, y^{(n+2)} + 2nxy^{(n+1)} + n(n-1)\, y^{(n)}$-et. A második tagra alkalmazva a Leibniz-szabályt, csak 2 tagot kapunk: $2xy^{(n+1)} + 2ny^{(n)}$-et és így, ha $y = \operatorname{arctg} x$, akkor az n-ik, $n+1$-ik és $n+2$-ik diff. hányadosai között a következő reláció (differenciálreláció, differenciálegyenlet) áll fönn:

$$(1+x^2)\, y^{(n+2)} + 2(n+1)\, xy^{(n+1)} + n(n+1)\, y^{(n)} = 0.$$

10. Mutassuk meg, hogy ha $y = \arcsin x$, akkor

$$(1-x^2)\, y'' - xy' = 0. \qquad \alpha)$$

Mutassuk meg, hogy az $\arcsin x$ $n-1$-ik, n-ik és $n+1$-ik differenciálhányadosai között ez a differenciálreláció áll fönn:

$$(1-x^2)\, y^{(n+1)} - (2n-1)\, xy^{(n)} - (n-1)^2\, y^{(n-1)} = 0$$

(az α) alatti egyenletből $n-1$-szeres differenciálással a Leibniz-szabály szerint).

11. Ha $y = (\arcsin x)^2$, mutassuk meg, hogy:

$$(1-x^2)\, y'' - xy' - 4y = 0.$$

Differenciáljunk mindkét oldalon $n-1$-szer.

12. Ha $y = \frac{x}{e^x - 1}$, akkor $x = ye^x - y$. Differenciáljunk mindkét oldalon n-szer!

13. Ha $y = \cos(m \arcsin x)$, akkor

$$(1-x^2)\, y'' - xy' + m^2 y = 0.$$

Állítsuk elő mindkét oldalon az n-ik diff. hányadost!

14. Mutassuk meg, hogy ha $y = \sin(m \arcsin x)$, akkor is:

$$(1-x^2)\, y'' - xy' + m^2 y = 0.$$

15. Mutassuk meg, hogy ha

$$y = \cos(m \arccos x), \quad \text{vagy ha} \quad y = \sin(m \arccos x),$$

akkor is $(1-x^2)\, y'' - xy' + m^2 y = 0$. (Miért egyezik meg e négy differenciálegyenlet?)

16. A kúpszelet egyenlete ilyen alakban írható:

$$y = mx + n + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}.$$

Mutassuk meg, hogy y kielégíti ezt a diff. egyenletet:

$$40 y'''^3 - 45 y'' y''' y^{IV} + 9 y''^2 y^{V} = 0.$$

[Ugyanis y adott kifejezését x szerint kétszer differenciálva, erre jutunk:

$$y''=(AC-B^2)(Ax^2+2Bx+C)^{-\frac{3}{2}},\quad \text{vagyis:}\quad (y'')^{-\frac{2}{3}}=(AC-B^2)^{-\frac{2}{3}}(Ax^2+2Bx+C)$$

másodfokú egész függvény, tehát $D_x^{(3)}(y'')^{-\frac{2}{3}}=0$. Ezt fejtsük ki!]

17. Ha $y=x^n\log x$, számítsuk ki $y^{(n+1)}$-et!

18. Ha $y=e^{-x}\cos x$, bizonyítsuk be, hogy $y^{\mathrm{IV}}+4y=0$.

19. Ha $y=a\cos\log x+b\sin\log x$, mutassuk meg, hogy $x^2y''+xy'+y=0$ és vezessük le ebből a Leibniz-féle differenciálási szabállyal:

$$x^2y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+(n^2+1)y^{(n)}=0.$$

20. Ha $y^2=\dfrac{1}{\cos 2x}$, akkor $y+y''=3y^5$.

21. Ha $u_n=(e^x+e^{-x})^n$, mutassuk meg, hogy $u_n''=n^2u_n-4n(n-1)u_{n-2}$.

22. Ha $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$, mutassuk meg, hogy: $(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$.

23. Bizonyítsuk be (teljes indukcióval), hogy:

$$vD^{(n)}u=D^{(n)}(uv)-\binom{n}{1}D^{(n-1)}(uv')+\binom{n}{2}D^{(n-2)}(uv'')-$$
$$-\binom{n}{3}D^{(n-3)}(uv''')+\cdots+(-1)^n uv^{(n)}.$$

24. Ha u az x függvénye: $u=\varphi(x)$ és $f(u)=f[\varphi(x)]$-et, mint az x függvényét $F(x)$-el jelöljük: határozzuk meg $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$-et. [Összetett függvény magasabb rendű differenciálhányadosa.]

25. Határozzuk meg $f(\log x)$ x szerinti második, harmadik és negyedik differenciálhányadosát!

26. Vezessük be ezt az operáció jelet:

$$(D^n+A_1D^{n-1}+A_2D^{n-2}+\cdots+A_n)f(u).$$

Ez alatt ezt akarjuk érteni:

$$D^{(n)}f(u)+A_1D^{(n-1)}f(u)+A_2D^{(n-2)}f(u)+\cdots+A_nf(u).$$

Igy például: $D(D-1)(D-2)f(u)$ jelentése:

$$(D^3-3D^2+2D)f(u),\quad \text{azaz:}\quad f'''(u)-3f''(u)+2f'(u).$$

Bizonyítsuk be már most, hogy:

$$D_x^{(n)}f(\log x)=\frac{1}{x^n}D(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)f(u).$$

(Igy például:

$$D_x'f(\log x)=Df(u)\cdot\frac{1}{x}\;.\; D_x''f(\log x)=D''f(u)\frac{1}{x^2}-Df(u)\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}D''f-Df,$$

melyet szimbolikusan az előbbi megállapítás szerint $\dfrac{1}{x^2}(D^2-D)f(u)=$ $=\dfrac{1}{x^2}D(D-1)f(u)$-val jelölünk.)

27. Bebizonyítandó, hogy $D^{(n)}[\varphi(x)e^{\alpha x}]=e^{\alpha x}(D+\alpha)^n\varphi(x)$, ahol $((D+\alpha)^n\varphi(x)$ úgy értendő, hogy

$$\left[D^{(n)}+\binom{n}{1}D^{(n-1)}\alpha+\binom{n}{2}D^{(n-2)}\alpha^2+\cdots+\alpha^n\right]\varphi(x),$$

azaz: $D^{(n)}\varphi(x)+\binom{n}{1}\alpha D^{(n-1)}\varphi(x)+\binom{n}{2}\alpha^2D^{(n-2)}\varphi(x)+\cdots+\alpha^n\varphi(x))$.

28. Számítsuk ki az

$$X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

racionális egész függvényt $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ esetében.

29. Bizonyítsuk be, hogy az előbbi feladatban szereplő X_n (Legendre-féle polynom) eleget tesz ennek a differenciálegyenletnek:

$$(x^2-1)\,X_n'' + 2x\,X_n' - n\,(n+1)\,X_n = 0.$$

(Legyen $y=(x^2-1)^n$, akkor $(x^2-1)\,y' = 2nyx$. Ha mindkét oldal $n+1$-ik differenciálhányadosát vesszük és megjegyezzük, hogy

$$X_n = \frac{y^{(n)}}{2.4\ldots 2n},$$

akkor megkapjuk a keresett differenciálegyenletet.)

30. Mutassuk meg, hogy $y=\frac{\sin x}{x}$ a $0\ldots\pi$ közben monoton csökkenő függvény. (Számítsuk ki a $\frac{\sin x}{x}$ diff. hányadosát! Ez: $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, vagyis $\cos x\frac{x-\operatorname{tg}x}{x^2}$. Ha x a $0\ldots\frac{\pi}{2}$ közben van, akkor $\operatorname{tg}x > x$ és $\cos x$ pozitiv, tehát a $\frac{\sin x}{x}$ diff. hányadosa negativ; ha x a $\frac{\pi}{2}\ldots\pi$ közben van, akkor $\operatorname{tg}x$ negativ és $\cos x$ is negativ, tehát a $\cos x\frac{x-\operatorname{tg}x}{x^2}$ ismét negativ; a differenciálhányados mindig negativ, tehát valóban a $\frac{\sin x}{x}$ mindig csökkenő a $0\ldots\pi$ közben.) Mutassuk meg, hogy $\frac{\sin x}{x}$ a $-\pi\ldots0$ közben monoton növekvő.

31. Mutassuk meg, hogy a $\log(1+x)-x$ függvény pozitiv x-eknél monoton csökkenő és a $-1\ldots0$ közön belül monoton növekvő. (A diff. hányadosa: $\frac{1}{1+x}-1$ negativ, ha x pozitiv és pozitiv, ha x negativ és $|x|<1$. Minthogy $x=0$ helyen a $\log(1+x)-x$ értéke: 0, tehát ebből az is következik, hogy minden -1-nél nagyobb x-re nézve $\log(1+x)-x<0$, azaz $\log(1+x)<x$. Ha x pozitiv, ebből következik, hogy $\frac{\log(1+x)}{x}<1$, vagyis $1+x<e^x$. Ha x negativ és $|x|<1$, tegyük $x=-y$; akkor is $\log(1-y)<-y$ és ebből $1-y<e^{-y}$.

32. Ha x pozitiv, az $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ monoton növekvő függvény. Ugyanis

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

és így a diff. hányadosa:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right].$$

Azt kell tehát csak megmutatni, hogy pozitiv x-ekre nézve:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}.$$

A baloldal így is írható:

$$\log\frac{x+1}{x} = -\log\frac{x}{x+1} = -\log\frac{x+1-1}{x+1} = -\log\left(1-\frac{1}{x+1}\right).$$

De az előbb láttuk (31. feladat), hogy $\log(1-y)<-y$, ha $0<y<1$ és így y helyett $\frac{1}{x+1}$-et téve:

$$\log\left(1-\frac{1}{x+1}\right)<-\frac{1}{x+1}, \text{ vagyis } -\log\left(1-\frac{1}{x+1}\right)>\frac{1}{x+1},$$

tehát:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$$

és így a szóban forgó $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$ minden poz. x-nél poz., tehát az $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ az x-el együtt nő, minden pozitiv helyen növekvő. [Tudjuk, hogy limese, ha $x=\infty$, éppen e; tehát $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ mindig kisebb e-nél.]

33. Mutassuk meg, hogy az $\frac{a+x}{b+x}$ függvény pozitiv x-ekre nézve monoton növekvő, ha $b>a$ és monoton csökkenő, ha $b<a$. (Vagyis a valódi tört nő, ha a számlálóját és nevezőjét egyenlő számokkal növesztjük, az áltört pedig fogy. A limes mindig: 1).

34. Mutassuk meg, hogy $\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ minden pozitiv x értéknél pozitiv. (Ha $x=0$, e függvény értéke 0; mutassuk meg, hogy monoton növekvő; ezzel meg lesz mutatva az is, hogy minden pozitiv x-nél pozitiv).

[35. Ha $f(x)$ az x helyen differenciálható, akkor, miként a diff. hányados definiciójából következik, $\lim\limits_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$. Ha $x+h$ helyett x'-t írunk, akkor tehát

$$\lim_{x'=x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}=f'(x).$$

Most azt akarjuk megmutatni, hogy ha $x''>x>x'$, akkor a diff. hányados még a következő határérték alakjában is írható:

$$\lim_{x''=x'}\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}.$$

Ebben tulajdonképpen két állítás foglaltatik: először, hogy ha $f(x)$ az x helyen differenciálható, akkor a fölírt limes létezik és másodszor, hogy ez a limes egyenlő $f'(x)$-el.

Ezt az állítást bebizonyítandó, előzetesen a következő kis megjegyzéseket tesszük: Ha u és v tetszés szerinti számok és α, β pozitiv számok, melyek összege: 1, akkor $\alpha u+\beta v$ mindig az u és v közé esik. Ugyanis

$$\alpha u+\beta v=\alpha u+(1-\alpha)v=\beta v+(1-\beta)u;$$

tehát $\alpha u+\beta v-u=\beta(v-u)$ és $\alpha u+\beta v-v=\alpha(u-v)$.

Látjuk, hogy az egyik különbség pozitiv, a másik negativ, tehát valóban az $\alpha u+\beta v$ az u és v közé esik.

A másik megjegyzés a következő: Ha a, b, c tetszés szerinti számok és $\alpha<\beta<\gamma$, akkor a $\frac{c-a}{\gamma-\alpha}$ mindig a $\frac{b-a}{\beta-\alpha}$ és $\frac{c-b}{\gamma-\beta}$ közé esik. Ugyanis, ha $\frac{c-b}{\gamma-\beta}=u$, $\frac{b-a}{\beta-\alpha}=v$ tesszük, akkor

$$\frac{c-a}{\gamma-\alpha}=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}u+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}v.$$

De úgy a $\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$, mint a $\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ pozitivok és összegük 1, tehát az előbbi megjegyzés értelmében valóban a $\frac{c-a}{\gamma-\alpha}$ a $\frac{c-b}{\gamma-\beta}$ és $\frac{b-a}{\beta-\alpha}$ közé esik.

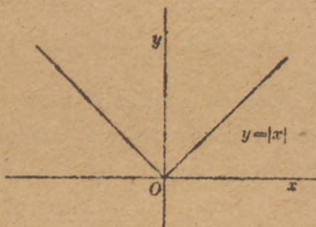
Ha már most $c=f(x'')$, $b=f(x)$, $a=f(x')$ és $\gamma=x''$, $\beta=x$, $\alpha=x'$ tesszük, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$ mindig az $\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x}$ és $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ közé esik. De e két kifejezésnek közös határértéke, ha úgy az x', mint az x'' az x-hez konvergálnak: $f'(x)$; tehát valóban:

$$\lim_{x''=x'} \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} = f'(x).$$

Az x'' és x' akárminő módon convergálhatnak az x-hez, csak az van kikötve, hogy az egyik mindig a jobboldalán, a másik pedig a baloldalán legyen. Így például tehetjük $x''=x+h$ és $x'=x-h$, ahol h tetszés szerinti pozitiv 0 felé konvergáló szám. Eszerint, ha $f'(x)$ létezik:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

Azt mutattuk meg, hogy ha $f'(x)$ létezik, akkor ezen egyenlet baloldalán álló limes is létezik és szintén $f'(x)$. Meglehet azonban, hogy $f'(x)$ nem is



43. ábra.

létezik, vagyis az $f(x)$ a szóban forgó x helyen nem is differenciálható és a baloldali limes mégis véges és meghatározott számérték. Így például, ha az $f(x)$ függvény: $|x|$, akkor a kezdőpontban törése van a görbének, érintőről nem lehet beszélni, a jobboldali diff. hányados $+1$. a baloldali pedig -1; tehát tulajdonképpeni diff. hányados nincsen. De $f(0+h)=h$ és $f(0-h)=h$, tehát $\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}$ minden h értékre nézve: 0 és így a limese is 0; vagyis a szóban forgó határérték létezik. Ha tehát a diff. hányadost ilyen módon értelmeznők: $\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, akkor általánosabb fogalmat állapítanánk meg, mint a közönséges értelmezéssel.

Megjegyezzük még, hogy a $\lim_{x''=x'} \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} = f'(x)$ állítást a középérték-tétellel igen egyszerűen bebizonyíthatjuk; ugyanis:

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} = f'(\xi),$$

ahol ξ az x'' és x' közötti helyet jelent. Ha már most x'' és x' a közöttük levő x helyhez konvergálnak, akkor a ξ is az x-hez konvergál. Ez tény; de hogy ez esetben az $f'(\xi)$ függvény is az $f'(x)$ értéket veszi fel, az csak akkor állítható, ha $f'(x)$ függvény az x helyen folytonos. Erre az előbbi bizonyításnál nem volt szükség.]

36. [Fontos kérdés, hogy ha az $f(x)$ függvény az ab intervallum minden helyén differenciálható, az $f'(x)$ differenciálhányados e szakaszban folytonos-e? Más szóval, hogy ha α a szakasz valamely helye és az α helyen az $f(x)$ diff. hányadosa A, azaz $\lim\limits_{h=0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=A$, kérdés, hogy az $f'(x)$ függvénynek az α helyen van-e határértéke és e határérték megegyezik-e A-val?

a) Ha az $f(x)$ függvény az ab szakasz minden helyén differenciálható, abból nem következik, hogy az $f'(x)$ e szakaszban folytonos. Így például ez a függvény $x^2\sin\frac{1}{x}$ mindenütt differenciálható. Az $x=0$ helyen ez a diff. hányados a differenciálás értelmezése szerint

$$\lim_{h=0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h=0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h=0}h\sin\frac{1}{h}.$$

A $\lim\limits_{h=0}\sin\frac{1}{h}$ határozatlan ugyan, de -1 és $+1$ között változik, tehát $\lim\limits_{h=0}h\sin\frac{1}{h}=0$ és így az $x^2\sin\frac{1}{x}$ függvénynek az $x=0$ helyen a diff. hányadosa: 0. Egy tetszés szerinti x helyen e diff. hányados a rendes szabályokkal kiszámítható:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Ez az $f'(x)$ függvény minden szakaszban, mely a 0 helyet nem tartalmazza, folytonos. A 0 helyen az első tag 0. A második azonban határozatlan, mert függ attól, hogy minő úton válik az x zérussá. Így tehát az $f'(x)$-nek a 0 helyen nincs határértéke.

b) Még azt lehetne gondolni, hogy az α helyen az $f'(x)$-nek van ugyan határértéke, de ez nem egyezik meg az A-val. Azt állítjuk, hogy ez nem lehetséges. Vagyis, ha az $f(x)$ az ab szakaszban differenciálható és e szakasz α helyén $\lim\limits_{x=\alpha}f'(x)=B$, akkor $B=A$; vagyis, ha az $f'(x)$-nek az α helyen van határértéke, ez nem lehet más, mint az $f(x)$-nek az α helyhez tartozó diff. hányadosa. Ugyanis az $f(x)$ az $\alpha\ldots\alpha'$ szakaszban differenciálható, tehát

$$\frac{f(\alpha')-f(\alpha)}{\alpha'-\alpha}=f'(\xi),$$

ahol ξ az $\alpha\ldots\alpha'$ köz valamely közbenső helye. Ha α' az α-hoz konvergál, akkor ξ is az α-hoz konvergál és feltételünk szerint $\lim\limits_{\xi=\alpha}f'(\xi)=B$; tehát

$$\lim_{\alpha=\alpha'}\frac{f(\alpha')-f(\alpha)}{\alpha'-\alpha}=B.$$

De a baloldali limes feltételünk szerint: A; tehát valóban $A=B$.

Így tehát, ha $f(x)$ valamely $a\ldots b$ köz minden helyén differenciálható, akkor e köz bármely α helyén $f'(x)$ vagy folytonos, vagy $\lim f'(x)$ e helyen nem létezik.]

37. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{b=a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)$. Ez az egyenlet determináns alakban így is írható:

$$\lim_{b=a}\frac{\begin{vmatrix} f(b) & 1 \\ f(a) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}=f'(a).$$

Most ennek analogiájára azt mutatjuk meg, hogy

$$\lim_{a=b=c} \begin{vmatrix} f(c) & c & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c^2 & c & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} f''(a),$$

ha $f''(x)$ az a helyen folytonos.

Jelöljük az

$$\begin{vmatrix} f(c) & c & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c^2 & c & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

hányadost A-val és tegyük a c helyett az x betűt. Az így előálló:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

függvény az x-nek folytonos és feltételünk szerint differenciálható függvénye az $\alpha\beta$ szakaszban, melyben az a, b, c helyet foglalnak. Ez az $F(x)$ zérussá válik, ha $x=c$ és ha $x=b$; tehát a Rolle-tétel szerint a bc közbe eső ξ helyen az $F'(\xi)=0$, vagyis:

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & 1 & 0 \\ f(b) & b & 1 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 2\xi & 1 & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Legyen most $F_1(x)$ a következő függvény (mely ezen egyenlet baloldalából keletkezik, ha b helyett x-et teszünk):

$$F_1(x) = \begin{vmatrix} f'(\xi) & 1 & 0 \\ f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 2\xi & 1 & 0 \\ x^2 & x & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}.$$

Ez az $F_1(x)$ zérussá lesz, ha $x=a$, mert mindkét determináns eltűnik és ha $x=b$ a fönti egyenlet szerint; tehát az a és b között van oly η hely, melyen $F_1'(\eta)=0$; azaz:

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & 1 & 0 \\ f'(\eta) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 2\xi & 1 & 0 \\ 2\eta & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Végül legyen:

$$F_2(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & 1 & 0 \\ f'(\eta) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2\eta & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}.$$

Ez eltűnik, ha $x=\xi$ és ha $x=\eta$, tehát a ξ és η közötti ζ helyen $F_2'(\zeta)=0$, azaz:

$$\begin{vmatrix} f''(\zeta) & 0 & 0 \\ f'(\eta) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2\eta & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis: $\qquad f''(\zeta)-2A=0 \qquad A=\frac{f''(\zeta)}{2}.$

Ha már most b és c az a-hoz konvergálnak, akkor ζ is az a-hoz konvergál és ha $f''(x)$ az a helyen folytonos, akkor $\lim f''(\zeta)=f''(a)$, tehát

$$\lim_{c=b=a} \begin{vmatrix} f(c) & c & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c^2 & c & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{f''(a)}{2}.$$

Mutassuk meg, hogy ha $b=a+h$, $c=a+2h$, vagy ha $b=a-h$, $c=a+h$ tesszük, akkor a már ismeretes

$$\lim \frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2} = f''(a) \text{ és } \lim \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

határértéket kapjuk.

[38. Ha az ab szakaszban $f(x)$ mindenütt folytonos és e szakasz minden belső helyén

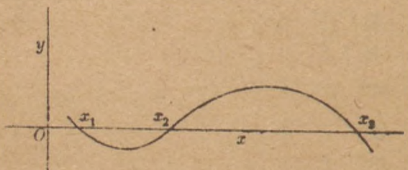
$$\Delta^2 f(x) = f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$$

kifejezés pozitiv, ha $|h|$ egy bizonyos tetszés szerinti kis τ számnál kisebb, akkor az ab intervallum belsejében az $f(x)$-nek nem lehet maximuma (és ha a $\Delta^2 f(x)$ mindenütt negativ, az ab belsejében nem lehet minimuma). Ha ugyanis az ab belsejébe eső x_0 helyen $f(x)$-nek maximuma volna, akkor úgy az $f(x_0+h)-f(x_0)$, mint az $f(x_0-h)-f(x_0)$ mindig negativ lenne, ha csak $|h|$ egy bizonyos σ-nál kisebb volna. De ekkor e két különbség összege; vagyis $f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)$ is negativ lenne, holott azt állítottuk, hogy $\Delta^2 f(x)$ minden belső helyen pozitiv.

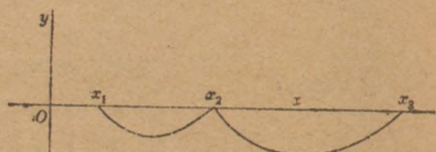
Másrészt azonban tudjuk, hogy Weierstrass tétele szerint az $f(x)$ folytonos függvény az ab szakasz valamely helyén fölveszi a maximális értékét. Ez a hely belső hely nem lehet, tehát csak vagy az a, vagy b (vagy esetleg mindkettő) lehet.

Azt látjuk tehát ebből, hogy ha $\Delta^2 f(x)$ az ab szakasz minden helyén pozitiv, akkor $f(x)$ maximumát a határhelyeken veheti csak fel. Éppen így, ha $\Delta^2 f(x)$ az ab szakasz minden helyén negativ, akkor $f(x)$ minimumát a határhelyeken veszi fel.]

[39. Ha az $f(x)$ az ab szakaszban mindenütt folytonos és $\Delta^2 f(x) = f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$ e szakaszban mindenütt pozitiv (negativ), ha csak $|h|<\tau$, akkor az $f(x)$ e szakaszban legfölebb két helyen tűnhetik el. Ha ugyanis az x_1, x_2, x_3 három egymásután következő zérus helye volna az $f(x)$-nek, akkor



44. ábra.



45. ábra.

az előbbi szerint maximuma az x_1x_2 szakaszban csak a határhelyeken lehet. De mindkét határhelyen az értéke 0, tehát az x_1x_2 szakaszban csakis negativ lehet. Ha az x_2 helyen $f(x)$ negativból pozitivba menne át, akkor x_2x_3 közben mindig pozitiv is maradna; de akkor maximuma nem lehetne az x_2, vagy x_3 határhelyeken, melyeken $f(x)$ eltűnik. Ha pedig az x_2 helyen nem menne át az $f(x)$ a negativból a pozitivba (miként a mellékelt ábrán), akkor az x_2 helyen: $f(x_2+h)$ negativ, $f(x_2-h)$ is negativ és minthogy $f(x_2)=0$, tehát $f(x_2+h)+f(x_2-h)-2f(x_2)$ negativ lenne, holott azt mondtuk, hogy az ab szakasz minden helyén $\Delta^2 f(x)$ pozitiv. Az $f(x)$-nek ilyen menete tehát nem lehetséges; tehát 2-nél több 0 hely az ab szakaszban nem lehet.]

[40. Ha az ab szakaszban $f(x)$ mindenütt folytonos és e szakasz minden belső helyén $\Delta^2 f(x)=f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$ negativ (pozitiv), ha $|h|$ egy bizonyos τ-nál kisebb, akkor az ab intervallum belsejében minden x helyen az $f(x)$ függvénynek meghatározott (véges vagy végtelen) jobboldali és baloldali differenciálhányadosa van. E tétel tehát a diff. hányados létezésének egy elégséges föltételét szolgáltatja. Bizonyítása a következő:

Vegyük fel az ab intervallumban a tetszés szerinti x_1 és x_2 helyeket és ezek között az x helyet és alkossuk meg a

$$\varphi(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)-f(x)$$

folytonos függvényt. Erről azonnal látjuk, hogy $\varphi(x_1)=0$ és $\varphi(x_2)=0$, továbbá, hogy

$$\Delta^2\varphi(x)=\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)=-[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)],$$

(mert hiszen a $\varphi(x)$ a $-f(x)$-től csak x lineáris függvényében különbözik, melynek második differenciája 0).

A $\Delta^2\varphi(x)$ tehát az egész ab intervallumban mindenütt pozitiv, ha $\Delta^2 f(x)$-ről feltettük, hogy mindenütt negativ. Ebből következik az előző két tétel szerint, hogy először is $\varphi(x)$ az ab szakaszban másutt sehol sem tűnik el, mint az x_1 és x_2 helyeken és másodszor, hogy az x_1x_2 szakaszban a maximumát az x_1 és x_2 határhelyeken éri el. E maximuma: 0, vagyis a $\varphi(x)$ az x_1x_2 szakaszban mindenütt negativ, vagyis:

$$f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)-f(x)$$

minden x helyen, mely az x_1 és $x_2>x_1$ közé esik: negativ. Ha a pozitiv $x-x_1$-el osztjuk, negativ hányadost kapunk, vagyis:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}.$$

Mit mond ez az egyenlőtlenség? Az x_2 tetszés szerinti hely az x_1-től jobbra van; az x hely közelebb van az x_1-hez, mint az x_2. Eszerint tehát az

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

hányados növekszik, ha az x az x_1-hez közeledik; tehát e hányadosnak van meghatározott limese és pedig, ha e növekedés korlátos, akkor e limes meghatározott véges szám, ha pedig korlátlan, akkor e limes: végtelen nagy. De e hányados limese nem egyéb, mint az x_1 helyhez tartozó jobboldali diff. hányadosa az $f(x)$-nek. Ezzel kimutattuk, hogy az x_1 helyen — mely különben egészen tetszés szerinti — az $f(x)$-nek van meghatározott véges vagy végtelen jobboldali diff. hányadosa. Ha a $\varphi(x)$ helyett a $\psi(x)$-et alkotjuk meg oly módon, hogy a $\varphi(x)$-ben az x_1-et az x_2-vel felcseréljük, akkor ugyanilyen módon arra jutunk, hogy az $f(x)$-nek az x_2 helyen van meghatározott véges, vagy végtelen baloldali diff. hányadosa (ha e diff. hányados végtelen, akkor $-\infty$, mert egy monoton csökkenő függvény határértéke). Minthogy pedig úgy az x_1, mint az x_2 az ab szakasz bármely helyét jelenthetik, kimutattuk, hogy ha

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$$

az ab szakasz minden helyén pozitiv (negativ), az $f(x)$-nek mindenütt van úgy jobb-, mint baloldali diff. hányadosa. Az x helyen a baloldali diff. hányados $\lim\limits_{h=0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$, a jobboldali: $\lim\limits_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Azt állítjuk, hogy ha $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$ mindig pozitiv (vagy mindig negativ), ha $|h|<\tau$ és ha még ezenfelül

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}=0,$$

akkor e kétféle diff. hányados megegyező és így az $f(x)$ az ab szakasz minden helyén differenciálható. Ugyanis

$$0=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}=\lim_{h=0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$$

és minthogy a jobboldali kifejezésnek úgy a kisebbítendője, mint a kivonandója meghatározott véges határértékű, tehát a különbség határértéke tagonkint is vehető és így:

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h=0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=0$$

és ezzel kimutattuk, hogy az $f(x)$ az ab szakasz minden helyén differenciálható.]

[41. A középértéktétel bizonyításánál feltételeztük, hogy $f(x)$ az ab intervallumban minden helyen differenciálható. Ha ez nem teljesül, akkor a középértéktétel felmondja a szolgálatot. Így például legyen minden x helyen $f(x)=\frac{1}{x}$. Tudjuk, hogy

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

A jelen esetben ez a középértéktétel:

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=(b-a)f'(\xi)$$

alakú; vagyis: $f'(\xi)=-\frac{1}{ab}$ és így: $-\frac{1}{\xi^2}=-\frac{1}{ab}$, vagyis $\xi=\sqrt{ab}$. Ez a számítás a tétel értelmében alkalmazható, ha az ab szakasz a 0-t nem tartalmazza. Ez esetben tehát a közbenső ξ érték: $\sqrt{ab}$. De ha az ab szakasz a 0 helyet is tartalmazza, azt a helyet, melyen az $\frac{1}{x^2}$ diff. hányados végtelenné válik, akkor már a középértéktétel nem érvényes. Legyen ugyanis $a=-a'$, akkor

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{a'}=(b+a')f'(\xi)$$

volna, miből következnék:

$$-\frac{1}{\xi^2}=\frac{1}{a'b},$$

vagyis $\xi^2=-a'b$, melynek valós megoldása nincsen; tehát közbenső ξ helyről nem lehet szó.

Ha $f(x)$ gyanánt azt a függvényt választjuk, mely mindenütt egyenlő $\frac{1}{x}$-el, kivéve az $x=0$ helyet, melyen $f(x)$ értékét 0-nak választjuk, akkor is arra jutunk, hogy a középértéktétel csakis azon esetben alkalmazható, ha az ab szakasz a kivételes 0 helyet nem tartalmazza. De a kivételes helynek még a határon sem szabad lennie. Ha ugyanis a $0 \ldots b$ szakaszra alkalmaznók a tételt, azt kapnók, hogy:

$$f(b)-f(0)=bf'(\xi).$$

Feltételünk szerint $f(b)=\frac{1}{b}$, $f(0)=0$, $f'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}$; tehát

$$\frac{1}{b}=-\frac{b}{\xi^2},$$

miből a ξ-re megint nem kapunk valós értéket.

Egy másik szintén igen egyszerű példa a következő: Legyen $f(x)$ mindenütt egyenlő x^2-el, az $x=0$ helyet kivéve, melyen $f(x)$ értéke: 1 legyen. Az $f(x)$ függvénynek az $x=0$ hely tehát szakadási helye. Ha az ab intervallum nem tartalmazza a 0 helyet, akkor a középértéktétel alkalmazható:

$$b^2-a^2=(b-a)f'(\xi)$$

$f'(\xi)$ a jelen esetben: 2ξ, tehát:

$$\xi=\frac{b+a}{2}.$$

A ξ hely valóban az a és b között van és pedig éppen a középen. Ha $a=-a_1$ negativ szám és b pozitiv, vagyis az ab köz a kivételes 0 helyet is tartalmazza, akkor

$$b^2-a_1^2=2(b+a_1)\xi,$$

vagyis
$$\xi=\frac{b-a_1}{2}=\frac{b+a}{2},$$

tehát a ξ ismét az a és b közötti hely. De ha $a=0$, vagyis a kivételes hely az ab szakasz egyik határhelye, akkor

$$b^2-1=2b\xi,$$

vagyis
$$\xi=\frac{b}{2}-\frac{1}{2b}.$$

Ha $0<b<1$, akkor ξ-re negativ számértéket kapunk, vagyis a ξ hely nem esik a $0 \ldots b$ szakaszba, nem közbenső hely, a középértéktétel nem érvényes.]

42. Láttuk, hogy ha $f(x)$-nek az ab szakaszban mindenütt 0 a diff. hányadosa, akkor $f(x)$ csakis állandó lehet. Megjegyezzük azonban, hogy ez a tétel csakis akkor érvényes, ha minden helyen igazi diff. hányados van. Így pl., ha $[x]$ jelenti az x-ben levő legnagyobb egész számot (pl. $[3\frac{1}{3}]=3$), akkor az $[x]$ függvénynek a diff. hányadosa mindenütt 0. Az egész számú helyeken azonban csakis baloldali (vagy csakis jobboldali) diff. hányados van.

43. Ha $f(x)$ az a és b helyeken 0, (de közbenső helyen nem 0) és az $a \ldots b$ közben mindenütt van véges differenciálhányadosa, akkor az

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

az $a \ldots b$ közben minden értéket fölvesz. Ugyanis az

$$F(x)=f(x)\,e^{-cx}$$

-re alkalmazható a *Rolle*-tétel, tehát:

$$-cf(\xi)\,e^{-c\xi}+f'(\xi)\,e^{-c\xi}=0,$$

vagyis:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = c,$$

ahol c tetszés szerinti számot jelent, ξ valamely közbenső hely a és b között.

IRODALOM.

E fejezetben foglaltakra vonatkozólag a már előbb említett forrásmunkákat és kézikönyveket ajánljuk ismét. Főként pedig Jordan, Tannery, Hobson, Dini már említett munkáit.

A feladatok és gyakorlatok gondos átszámítását nagyon melegen ajánljuk.

V. FEJEZET.

A VÉGES TAYLOR-SOR. INTERPOLÁCIÓ.

1. Racionális egész függvény rendezése. Ha $f(x)$ az x változónak n-edfokú racionális egész függvénye, azaz:

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n$$

és x helyébe az $x=(x-a)+a$ kifejezést helyettesítjük, akkor $f(x)$-et az $x-a$ hatványai szerint rendezhetjük, vagyis:

$$f(x)=B_0+B_1(x-a)+B_2(x-a)^2+\cdots+B_n(x-a)^n. \qquad \alpha)$$

Minden racionális egész függvény rendezhető ilyen módon. Például ha $a=1$, akkor az

$$x^3+3x^2-5x+8$$

harmadfokú racionális egész függvényben x helyett $1+(x-1)$-et téve, ez a következőbe megy át:

$$\begin{aligned}
[1+(x-1)]^3+3[1+(x-1)]^2-5[1+(x-1)]+8= \\
=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1 \\
+3(x-1)^2+6(x-1)+3 \\
-5(x-1)-5 \\
+8 \\
=(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+7.
\end{aligned}$$

Tehát az a rac. egész függvény, mely x hatványai szerint rendezve: $8-5x+3x^2+x^3$, az $(x-1)$ hatványai szerint rendezett alakban:

$$7+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)^3.$$

Az $(x-a)$ hatványai szerint rendezett racionális egész függvény $B_0, B_1, B_2 \ldots B_n$ együtthatói igen egyszerűen határozhatók meg. Állítsuk ugyanis elő sorban az $f(x)$ függvény diff. hányadosait és számítsuk ki e diff. hányadosok számértékeit az $x=a$ helyen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= B_0 + B_1(x-a) + B_2(x-a)^2 + \cdots + B_k(x-a)^k + \cdots + B_n(x-a)^n \\
f'(x) &= \quad B_1 + 2B_2(x-a) + \cdots + kB_k(x-a)^{k-1} + \cdots + nB_n(x-a)^{n-1} \\
f''(x) &= \quad 2B_2 + \cdots + k(k-1)B_k(x-a)^{k-2} + \cdots + n(n-1)B_n(x-a)^{n-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(k)}(x) &= \quad k!\,B_k + \cdots + n(n-1)\ldots(n-k+1)B_n(x-a)^{n-k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(x) &= \quad n!\,B_n.
\end{aligned}
$$

Ha $x=a$ tesszük, akkor azt találjuk, hogy:

$$
B_0 = f(a),\quad B_1 = f'(a),\quad B_2 = \frac{f''(a)}{2},
$$

$$
B_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots B_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \ldots B_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.
$$

Eszerint tehát az adott n-edfokú rac. egész függvény $f(x)$ az $x-a$ hatványai szerint rendezve:

$$
f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 +
$$

$$
+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.
$$

Így például visszatérve az x^3+3x^2-5x+8 egész függvényre, azt találjuk, hogy

$$
f'(x) = 3x^2+6x-5,\quad f''(x) = 6x+6,\quad f'''(x) = 6
$$

és így: $\quad f(1)=7,\quad f'(1)=4,\quad f''(1)=12,\quad f'''(1)=6,$

tehát $\quad f(x) = 7+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)^3,$

miként előbb direkt számítással láttuk.

Ha tehát ismerjük az $f(x)$ racionális egész függvénynek értékét és a diff. hányadosainak az értékeit az $x=a$ helyen, akkor az előbbi formulával kiszámítható az $f(x)$ értéke egy tetszés szerinti b helyen, mert $x=b$ téve:

$$
f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.
$$

Ha $f(x)$ nem racionális egész függvény, akkor természetesen ez a formula nem alkalmazható a függvény egy tetszés szerinti b helyen való értékének a meghatározására. Kérdés már most, hogy *ha $f(x)$ az $\alpha\beta$ intervallumban legalább $n+1$-szer differenciálható függvény és a meg b az intervallum meghatározott helyei, mekkora hibát követünk el, ha ekkor is $f(b)$ helyett az*

$$
f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \qquad \beta)
$$

számértéket mondjuk; illetőleg feladatul tűzzük ki magunknak az így elkövetett hibának egyszerű, áttekinthető alakban való előállítását.

2. A véges Taylor-sor maradéktagja. Ezt az elkövetett hibát jelöljük így:

$$A(b-a)^p,$$

ahol p valamely tetszés szerinti pozitiv egész számot jelent. Vagyis, ha ezzel pótoljuk a $\beta)$ alatti kifejezést, akkor pontosan:

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+$$
$$+\frac{f''(b)}{2}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+A(b-a)^p. \qquad \gamma)$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy az A számot úgy választjuk, hogy ez az egyenlőség fennálljon, vagyis

$$A=\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\cdots-\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^p}.$$

Az A számot más, áttekinthetőbb alakban akarjuk kifejezni. E végből bevezetjük a következő $F(x)$ függvényt:

$$F(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-$$
$$-\frac{f''(x)}{2}(b-x)^2-\frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^3\cdots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n-A(b-x)^p,$$

melyet a $\gamma)$ alatti kifejezésből úgy állítottunk elő, hogy az a betű helyett x-et írtunk és mindent a baloldalra vittünk. Minthogy az $f(x)$-ről feltettük, hogy legalább $n+1$-szer differenciálható az $\alpha\beta$ szakaszban, ebből az is következik, hogy az $F(x)$ e szakaszban legalább egyszer differenciálható.

Ha x helyébe b-t tesszük, azt találjuk, hogy $F(b)=0$. Ha pedig x helyébe a-t írunk, akkor éppen az A választása folytán, a $\gamma)$ alatti egyenlet értelmében, szintén $F(a)=0$. Eszerint tehát az $F(x)$ az $\alpha\beta$ szakaszban mindenütt differenciálható és e szakasz a és b helyein eltűnik, tehát *Rolle* tétele szerint a differenciálhányadosa legalább egy, az ab szakaszban levő ξ helyen eltűnik.

Állítsuk elő az $F(x)$ diff. hányadosát. A $k+2$-ik tag ilyen alakú: $-\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$. Ennek a diff. hányadosa a következő két tagból áll:

$$+\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}-\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

Így tehát:

$$F'(x)=-f'(x)+f'(x)-f''(x)(b-x)+f''(x)(b-x)-\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2+$$
$$+\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2+\cdots-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+pA(b-x)^{p-1}.$$

Minthogy két-két tag mindig ellenkezően egyenlő, mindössze a két utolsó tag marad meg, azaz:

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + pA(b-x)^{p-1}.$$

Ennek egy közbenső ξ helyen el kell tűnnie, vagyis:

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}.$$

és így az $A(b-a)^p$ alakú hiba, amelyet H_{n+1}-el jelölünk:

$$A(b-a)^p = H_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^{n-p+1}(b-a)^p}{n!\,k}.$$

Minthogy ξ az ab szakaszban van, ilyen alakban írható:

$$\xi = a + \vartheta(b-a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

és így: $b-\xi=(b-a)(1-\vartheta)$, miből:

$$H_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}[a+\vartheta(b-a)](1-\vartheta)^{n-p+1}(b-a)^{n+1}}{n!\,p},$$

tehát, ha az $f(x)$ *az ab szakaszban legalább $n+1$-szer differenciálható* [minthogy a Rolle-tételt alkalmaztuk, tehát elégséges, ha az a helyen csak jobboldali és a b helyen csak baloldali $(n+1)$-ik diff. hányados létezik], akkor:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(1-\vartheta)^{n-p+1}(b-a)^{n+1}}{n!\,p},$$

ahol $\xi=a+\vartheta(b-a)$ és $0<\vartheta<1$, továbbá p tetszés szerinti pozitiv egész szám (ϑ az a, b és p számoktól függ).

A jobboldali kifejezés a *véges Taylor sor.* Utolsó tagja a Taylor-sor *maradéktagja.* A p tetszés szerinti pozitiv egész szám.

Különösen két esetet akarunk felemlíteni. Először, midőn $p=n+1$, azután pedig, midőn $p=1$. Ha $p=n+1$, akkor:

$$H_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ez esetben tehát a véges Taylor-sor következő alakú:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

ahol ξ az ab szakasz valamely meghatározott, de ismeretlen közbenső helye. Az itt szereplő maradéktag a *Lagrange-féle maradéktag*. A második esetben, midőn $p=1$, a maradéktag ilyen alakú:

$$H_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}[a+\vartheta(b-a)](1-\vartheta)^n(b-a)^{n+1}}{n!},$$

tehát a véges Taylor-sor ilyen alakú:

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}[a+\vartheta(b-a)](1-\vartheta)^n(b-a)^{n+1}}{n!}.$$

Az itt szereplő maradéktag a *Cauchy-féle maradéktag*. Mindkét maradéktag elég egyszerű alakú. Különösen egyszerű a véges Taylor sor a Lagrange-féle maradéktaggal, mert ez egészen olyan alakú, mint a sor többi tagja, azzal a különbséggel, hogy az $n+1$-dik diff. hányados értéke nem az a kezdőhelyen, hanem egy közbenső ξ helyen veendő.

Azonnal észrevesszük, hogy ez a Taylor-sor közvetlen általánosítása a középértéktételnek. Ha ugyanis $n+1=1$, akkor $f(b)=$ $=f(a)+f'(\xi)(b-a)$ egyenletre jutunk, a közönséges középértéktételre.

Ha $b=a+h$ tesszük, akkor a véges Taylor sort a Lagrange-maradékkal következő, szokásos alakban kapjuk:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h^2\frac{f''(a)}{2}+\cdots+$$

$$+h^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!},$$

a Cauchy-félével pedig:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h^2\frac{f''(a)}{2}+\cdots+$$

$$+h^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)(1-\vartheta)^n}{n!}.$$

(Megjegyezzük, hogy a két maradékban szereplő ϑ számok rendszerint különbözők.)

Igen sokszor használjuk a Taylor sort az esetben, midőn $a=0$. Ekkor a sor alakját, pl.: a Lagrange-maradéktaggal az előbbiből kapjuk, ha $a=0$ tesszük. Tegyük még a h betű helyett az x-et, akkor tehát:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Ebben az alakjában a sort sokszor külön névvel *Maclaurin* sornak is nevezzük.

3, **A Taylor sor néhány gyakorlati alkalmazása.** a) *Az osztásnál.* Legyen $f(x)$ függvény: $\frac{1}{1+x}$ és fejtsük ki ezt Maclaurin sorba; de a második taggal rekesszük be a sorfejtést. Ez esetben szükségünk van $f(x)$-re, $f'(x)$-re és $f''(x)$-re. Ezek sorban a következők:

$$\frac{1}{1+x}, \quad -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{2}{(1+x)^3}$$

és az $x=0$ helyen $f(0)=1$, $f'(0)=-1$; továbbá a ϑx helyen a második differenciálhányados: $\frac{2}{(1+\vartheta x)^3}$; tehát $\frac{1}{1+x}$ Maclaurin sora:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{(1+\vartheta x)^3}.$$

Ha $\frac{1}{1+x}$ helyett azt mondjuk: $1-x$, akkor az elkövetett hiba: $\frac{x^2}{(1+\vartheta x)^3}$ és így, ha x pozitiv szám, ez a hiba kisebb x^2-nél. Ha az x elég kis szám, például $\frac{1}{1000}$-nél kisebb, akkor tehát $\frac{1}{1000000}$-nál kisebb hibát követünk el, ha $\frac{1}{1+x}$ helyett $1-x$-et mondunk.

Ha a következő osztás végzendő: $N:(N+n)$, akkor a hányadost így is írhatjuk:

$$\frac{N}{N+n}=\frac{1}{1+\frac{n}{N}}$$

és ha n az N-hez képest elég kicsiny, akkor az előbbi szerint hányadosul $1-\frac{n}{N}$-et is mondhatunk. Igy például $1000:1001$ helyett $\frac{1}{1000000}$ pontossággal mondhatjuk $1-\frac{1}{1000}=0{\cdot}999$. Ha x nem elég kicsiny, de 1-nél kisebb, akkor a Maclaurin sorban esetleg egy-két taggal tovább mehetünk. Igy, ha még egy taggal tovább megyünk, akkor:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\frac{x^3}{(1+\vartheta x)^4}$$

és ha x pozitiv, akkor $\frac{1}{1+x}$ helyett: $1-x+x^2$-et vesszük; az elkövetett hiba abszolut értéke x^3-nál kisebb.

Igy például $\frac{1}{1{\cdot}02}=1-0{\cdot}02+0{\cdot}0004=0{\cdot}9804$ tehető; az elkövetett hiba kisebb $0{\cdot}000008$-nál, vagyis kisebb $\frac{1}{100000}$-nél.

b) *A gyökvonásnál.* Legyen megint x kis pozitiv szám és $f(x)=\sqrt[k]{1+x}$, ahol k pozitiv egész szám. E gyök pozitiv értékét állítsuk elő Maclaurin sorral. Ez esetben:

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{k}}, \quad f'(x)=\frac{1}{k}(1+x)^{\frac{1}{k}-1}, \quad f''(x)=-\frac{1}{k}\cdot\frac{k-1}{k}(1+x)^{\frac{1}{k}-2}\ldots$$

és így:

$$(1+x)^{\frac{1}{k}}=1+\frac{x}{k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{k-1}{k}(1+\vartheta x)^{\frac{1}{k}-2}x^2.$$

Minthogy $(1+\vartheta x)^{\frac{1}{k}-2}<1$, tehát ha $(1+x)^{\frac{1}{k}}$ helyett ezt mondjuk: $1+\frac{x}{k}$, az elkövetett hiba absz. értéke kisebb $\frac{k-1}{2k^2}x^2$-nél. Igy például, ha $k=2$, és $\sqrt{1+x}$ helyett $1+\frac{x}{2}$-et veszünk, a hiba kisebb: $\frac{x^2}{8}$-nál. Ha $k=3$ és $\sqrt[3]{1+x}$ helyett $1+\frac{x}{3}$-at mondunk, akkor az elkövetett hiba $\frac{x^2}{9}$-nél kisebb.

Ha egy tetszés szerinti M egész számból kell pl. négyzetgyököt bontanunk és megtaláltuk már az M-ben levő legnagyobb négyzetszámot N-et, azaz M ilyen alakú: N^2+n, (ahol $n<2N+1$), akkor $\sqrt{M}$ így írható:

$$\sqrt{M}=\sqrt{N^2+n}=N\sqrt{1+\frac{n}{N^2}},$$

ahol $\frac{n}{N^2}\leq\frac{2}{N}$. Eszerint tehát ha $\sqrt{M}$ helyett:

$$N\left[1+\frac{n}{2N^2}\right]=N+\frac{n}{2N}$$

-et mondunk, az elkövetett hiba kisebb, mint $\frac{N}{8}\left(\frac{2}{N}\right)^2=\frac{1}{2N}$.

(Ebből láthatjuk, hogy ha a négyzetgyökvonásnál követett rendes eljárással az M szám gyökéből már a $p+1$ jegyű N-et meghatároztuk, akkor a további jegyeket teljesen felesleges egyenkint meghatározni. Ugyanis a rendes eljárással megalkotjuk az $M-N^2=n$ különbséget. Ha már most ezt az n-et a megtalált N kétszeresével elosztjuk, akkor $\frac{n}{2N}$ a hiányzó részt úgyis megadja $\frac{1}{2N}$-nél nagyobb pontossággal, tehát $\frac{1}{2.10^p}$-nél jóval nagyobb pontossággal; tehát az $\frac{n}{2N}$ hányadosnak első p jegye megadja pontosan az N után következő p jegyet. Ha tehát a $p+1$ jegyű N megvan, akkor az $(M-N^2):2N$ osztással egyszerre megkaphatjuk a további p jegyet.)

c) *Alkalmazás a logarithmuskeresésnél.* Legyen most $f(x)=\log(1+x)$. Ezen függvény Maclaurin sorának megalkotása céljából szükségünk van az $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... differenciálhányadosokra, melyek sorban:

$$\log(1+x),\quad \frac{1}{1+x},\quad -\frac{1}{(1+x)^2},\ldots$$

A Maclaurin sort a második tagnál berekesztve a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(\vartheta x)\,x^2}{2};$$

a jelen esetben: $f(0)=\log 1=0$, $f'(0)=1$; tehát:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2\,(1+\vartheta x)^2}. \qquad a)$$

Ha tehát $\log(1+x)$ helyett (természetes, azaz e alapra vonatkoztatott logarithmus értendő) x-et mondunk, az elkövetett hiba absz. értéke: $\frac{x^2}{2\,(1+\vartheta x)^2}$, tehát ha x pozitiv szám, e hiba kisebb, mint $\frac{x^2}{2}$.

Ha a logarithmusrendszer alapjául nem e-t választjuk, hanem 10-et és megkülönböztetésül egy ideig a 10-es alapra vonatkoztatott logarithmust Log-al jelöljük, akkor az a logarithmusát értelmező

$$10^{\mathrm{Log}\,a}=a$$

egyenletből, ha mindkét oldalon e alapú logarithmust veszünk:

$$\mathrm{Log}\, a \,.\, \log 10 = \log a,$$

vagyis, ha $\frac{1}{\log 10}$-et M-el jelöljük, (ez a szám: 0·43429...) akkor:

$$\mathrm{Log}\, a = M \log a.$$

Ha tehát az előbbi $\alpha)$ egyenlet mindkét oldalán M-el szorzunk:

$$\mathrm{Log}\,(1+x) = Mx - \frac{Mx^2}{2\,(1+\vartheta x)^2}$$

-re jutunk, vagyis ha $\mathrm{Log}\,(1+x)$ helyett Mx-et mondunk, a hiba kisebb: $\frac{Mx^2}{2}$-nél.

A rendes kis ötjegyű logarithmustáblában csak 4-jegyű számok logarithmusai vannak; ha többjegyű szám logarithmusát keressük, ez a szám mindig így képzelhető: N négyjegyű egész $+n$, ahol n 1-nél kisebb (mert hiszen a tizedes pont helyzete a mantisszára nézve nem jön tekintetbe).

$N+n$ logarithmusa így írható:

$$\mathrm{Log}\,(N+n) = \mathrm{Log}\, N\left(1+\frac{n}{N}\right) = \mathrm{Log}\, N + \mathrm{Log}\left(1+\frac{n}{N}\right).$$

Ha a második tag helyett az előbbi formula értelmében $M\frac{n}{N}$-et teszünk, az elkövetett hiba: $\frac{M}{2}\,\frac{n^2}{N^2}$-nél kisebb. De $n<1$, N pedig 4 jegyű szám, tehát 1000-nél nagyobb és így a hiba kisebb: $\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{1000000}$-nál, kisebb $\frac{1}{4000000}$-nál $\left(\text{mert } M<\frac{1}{2}\right)$, sőt ha N nem egyessel kezdődik, hanem legalább 2-essel, akkor a hiba már $\frac{1}{16000000}$-nál is kisebb.

Ha n helyett éppen 1-et írunk, akkor a logarithmuskeresésnek egyszerű szabályára jutunk. Ugyanis:

$$\mathrm{Log}\,(N+1) = \mathrm{Log}\, N\left(1+\frac{1}{N}\right) = \mathrm{Log}\, N + \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{N}\right)$$

és a kellő pontossággal: $\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{N}\right) = M\frac{1}{N}\cdot$ Az elkövetett hiba $\frac{M}{2N^2}$-nél kisebb. Jelöljük az $\frac{M}{N}$-et Δ-val, azaz:

$$\mathrm{Log}\,(N+1) - \log N = \Delta$$

$\left(\frac{M}{2N^2}\text{-nél kisebb hibával}\right)$, akkor $\frac{Mn}{N} = n\Delta$. Arra jutottunk tehát, hogy az előbbinél kisebb hibával:

$$\mathrm{Log}\,(N+n) = \mathrm{Log}\, N + n\Delta,$$

ahol $\Delta = \mathrm{Log}\,(N+1) - \mathrm{Log}\, N$ az úgynevezett táblabeli különbség. *Eszerint tehát a $N+n$ logarithmusát úgy kapjuk meg, hogy az N logarithmusához a táblabeli különbség n-szeresét hozzáadjuk.* Az elkövetett hiba mindig kisebb $\frac{1}{4000000}$-nál.

Ha általában N ν jegyű szám, azaz olyan táblázatunk van, melyben a ν jegyű számok logarithmusai foglaltatnak és n 1-nél kisebb, akkor

$$\mathrm{Log}\,(N+n) = \mathrm{Log}\, N\left(1+\frac{n}{N}\right) = \mathrm{Log}\, N + \mathrm{Log}\left(1+\frac{n}{N}\right).$$

Az utolsó tag helyett $\frac{Mn}{N}$-et mondunk, (vagyis ismét a táblabeli különbség n-szeresét), akkor az elkövetett hiba $\frac{M}{2}\frac{n^2}{N^2}$-nél kisebb, vagyis kisebb $\frac{1}{4.10^{2\nu-2}}$-nél.

d) *A trigonometriai számok logarithmusai.* Legyen az $f(x)$ függvény: $\log\sin x$. Alkossuk meg a Taylor sorát berekesztve a sort a második tagnál. (Maclaurin sorról nem lehet szó, mert $\log\sin x$ az $x=0$ helyen nem véges.) Evégből szükségünk van az $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$-re, melyek közül az első kettő az a helyen, az utolsó az $a+\vartheta h$ helyen veendő:

$$f(x)=\log\sin x,\quad f'(x)=\operatorname{cotg} x,\quad f''(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

és így: $f(a+h)=\log\sin(a+h)=\log\sin a+h\operatorname{cotg} a-\frac{h^2}{2\sin^2(a+\vartheta h)}$.

Ha 10-es rendszerbeli logarithmusról van szó, akkor:

$$\operatorname{Log}\sin(a+h)=\operatorname{Log}\sin a+hM\operatorname{cotg} a-\frac{Mh^2}{2\sin^2(a+\vartheta h)}.$$

Ha az adott szög α elsőpercből és β másodpercből áll, akkor abszolut mértékszáma:

$$\frac{\alpha\pi}{60.180}+\frac{\beta\pi}{3600.180}.$$

Jelöljük az első tagot a-val, a másodikat h-val. Ha $\beta=1$, akkor $h=\frac{\pi}{3600.180}$ és $\operatorname{Log}\sin(\alpha'+1'')$ első 2 tagja:

$$\operatorname{Log}\sin\alpha'+\frac{M\pi}{3600.180}\operatorname{cotg}\alpha'.$$

Jelöljük az $\frac{M\pi}{3600.180}\operatorname{cotg}\alpha'$ számot, az α perchez tartozó növekményt, (azaz 1″-nek megfelelő növekményt) Δ_α-val, akkor tehát

$$\operatorname{Log}\sin(\alpha'+\beta'')=\operatorname{Log}\sin\alpha'+\beta\Delta_\alpha-\frac{M}{2}\left(\frac{\pi\beta}{3600.180}\right)^2\frac{1}{\sin^2(a+\vartheta h)}.$$

Ha a $\operatorname{Log}\sin(\alpha'+\beta'')$ helyett e kifejezés első két tagját mondjuk, akkor az elkövetett hibát a harmadik tag adja meg. Minthogy a β mindig kisebb 60-nál és $\frac{M}{2}<\frac{1}{4}$, $\sin^2(a+\vartheta h)>\sin^2 a$, tehát ez a hiba kisebb:

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{60.180}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2 a}$$

-nál, vagy π helyett a nagyobb 3·2-et téve, kisebb mint

$$\frac{1}{6750^2.\sin^2\alpha'}.$$

Ha azt akarjuk, hogy ez a hiba kisebb legyen $\frac{1}{2.10^\nu}$-nél (vagyis ν tizedes pontossággal számolunk), akkor kell, hogy

$$\frac{1}{6750^2\sin^2\alpha}<\frac{1}{2.10^\nu},$$

legyen, miből: $$\sin^2\alpha>\frac{2.10^\nu}{6750^2}.$$

Igy például, ha $\nu=5$, akkor kell, hogy

$$\sin\alpha>\frac{\sqrt{2000}}{675},$$

tehát el van érve a kívánt pontosság, mihelyt

$$\sin\alpha > \frac{1}{15}$$

és minthogy 4 fokú szög sinusa nagyobb $\frac{1}{15}$-nél, tehát 4 foknál nagyobb szögekre nézve a hiba $\frac{1}{2.10^5}$-nél kisebb. Ez esetben tehát

$$\operatorname{Log}\sin(\alpha'+\beta'') = \operatorname{Log}\sin\alpha' + \beta\Delta_\alpha$$

tehető a kívánt pontossággal, vagyis ha a szög 4 foknál nagyobb, akkor a sinusának a logarithmusát öt tizedesre úgy határozhatjuk meg, hogy csupán a fokok- és perceknek megfelelő logarithmust vesszük és az 1 mp-nek megfelelő pótlékot a Δ_α-t, (melyet a táblában találunk) megszorozzuk a másodpercek számával és ezt a pótlékot az előbbihez hozzáadjuk.

4. A Taylor-sor egyértelműsége. Ha az $f(x)$ függvénynek az a hely bizonyos környezetében mindenütt létezik az első $n+1$ differenciálhányadosa, akkor e környezetbe tartozó $a+h$ helyen:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + \cdots +$$

$$+ f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(a+\vartheta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

alakban állítható elő. Fontos itt az a körülmény, hogy $f(a+h)$, vagyis az $f(x)$ értéke az $a+h$ helyen előállítható olyan alakban, mint egy $n+1$-edfokú racionális egész függvény, (melynél azonban az utolsó tag együtthatója is függ a h-tól). Fölmerül a kérdés, hogy nem lehet-e az $f(a+h)$-t még más együtthatókkal biró ilyen alakban előállítani, mely az $f(a+h)$ értékét adná az $a \ldots a+b$ szakaszban, azaz a h-nak egy $0 \ldots b$ intervallumba eső minden értékére nézve (a határokat beleértve); vagyis lehetséges-e, hogy minden ilyen h értékre nézve az

$$f(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_n h^n + A_{n+1} h^{n+1}$$

alakban legyen előállítva, ahol az $A_0, A_1, \ldots A_n$ konstansok legyenek, az A_{n+1} pedig a h-nak olyan függvénye, mely a h minden, szóban forgó értékénél korlátos legyen?

Ha ilyen előállítás lehetséges volna, akkor fennállana a h minden (az illető intervallumba eső) értékére a következő egyenlőség:

$$A_0 + A_1 h + \cdots + A_n h^n + A_{n+1} h^{n+1} =$$

$$= f(a) + hf'(a) + \cdots + h^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}.$$

Fönnállana ez az egyenlőség $h=0$-nál; tehát

$$A_0 = f(a),$$

vagyis:

$$A_1 h + A_2 h^2 + \cdots = h f'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots$$

a h minden értékénél érvényes volna. Ebből következik, hogy $h \neq 0$ esetén

$$A_1 + A_2 h + \cdots = f'(a) + h \frac{f''(a)}{2} + \cdots$$

volna és ha $\lim h = 0$ tesszük, melyre nézve az egyenlőség szintén fönnáll:

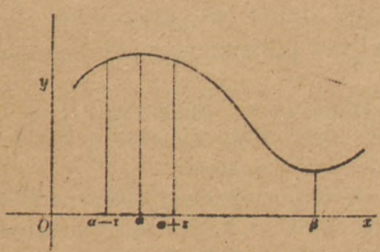
$$A_1 = f'(a)$$

következik s így tovább

$$A_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad A_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \dots, \quad \text{végül} \quad A_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}.$$

Ezzel kimutattuk, hogy az $f(a+h)$ a h-nak egy bizonyos $0 \dots b$ szakaszba eső minden értékére csak egyféleképpen állítható elő $A_0 + A_1 h + \cdots + A_{n+1} h^{n+1}$ alakban, ahol $A_0, A_1 \dots A_n$ állandó számok.

5. A függvény maximuma és minimuma. Ha $f(x)$ az ab szakaszban bárminő módon értelmezett korlátos függvény, akkor e szakaszban van M felső határa és m alsó határa. Ha az $f(x)$ a szakaszban folytonos minden helyen (a határokon is), akkor Weierstrass tétele szerint kell a szakaszban (esetleg a határon) olyan helynek lenni, amelyen az $f(x)$ az M értéket és olyannak, melyen az m



46. ábra.

értéket fölveszi. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$-nek az $M(m)$ az ab szakaszban a maximális (minimális) értéke. Az $f(x)$-nek az ab szakaszban M-nél nagyobb (m-nél kisebb) értéke nincs. Most a maximumnak (minimumnak) más, ettől némileg eltérő fogalmával [az ú. n. relativ maximummal (minimummal)] akarunk megismerkedni. *Az $f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy az α helyen maximuma van, ha az α-tól jobbra és balra kijelölhető egy olyan τ szakasz, melyre nézve*

$$f(x) < f(\alpha),$$

ha x az $\alpha - \tau \dots \alpha + \tau$ szakasz bármely (α-tól különböző) helye, vagyis, $f(\alpha+h) < f(\alpha)$, ha $0 < |h| < \tau$. Látjuk ezen értelmezésből, hogy az $f(x)$-nek az $\alpha-\tau \ldots \alpha+\tau$ szakaszban $f(\alpha)$ a maximuma; de nem okvetlenül az egész ab szakaszban. *Éppen így a β helyen az $f(x)$-nek minimuma van, ha megállapítható egy τ szakasz úgy, hogy $f(x)>f(\beta)$ mindazon x helyeken, melyek a $\beta-\tau \ldots \beta+\tau$ közből vétetnek.* A mellékelt 47. ábrán látjuk, hogy az $f(x)$ a feltüntetett szakaszban relativ maximális értékű az α helyen és rel. minimális értékű a β helyen.

Kérdés, hogyan lehet meghatározni azokat a helyeket, melyeken $f(x)$-nek maximuma, vagy minimuma (mondjuk egy névvel: *szélső értéke)* van?

Ha az $f(x)$ az ab szakaszban levő α helyen differenciálható, akkor szélső értéke ezen a helyen nem lehet, ha a differenciálhányadosa 0-tól különbözik.

Kimutattuk ugyanis (a 118. lapon), hogy ha $f'(\alpha)>0$, akkor az $f(x)$ az α helyen növekedően halad át, azaz α-tól jobbra nagyobb értéket vesz fel, mint $f(\alpha)$, α-tól balra pedig kisebbeket, vagy pontosabban szólva, megállapítható egy τ szakasz úgy, hogy $f(x)>f(\alpha)$, ha x az $\alpha \ldots \alpha+\tau$ szakaszból vett bármely hely és $f(x)<f(\alpha)$, ha x az $\alpha-\tau \ldots \alpha$ szakasz bármely helye. Ha pedig $f'(\alpha)<0$, akkor az $f(x)$ az α helyen csökkenően halad át.

Szélső értéke tehát csak olyan α helyen lehet a differenciálható függvénynek, melyen $f'(\alpha)=0$.

Ennek egyszerű geometriai jelentése az, hogy maximuma, vagy minimuma csak ott lehet az érintőkkel biró görbének, ahol az érintő az x tengellyel párhuzamos. (L. az előbbi ábrát.)

De a differenciálhányados eltűnése még nem biztosítja a szélső értéket, vagyis ez a szóban forgó függvényekre nézve szükséges feltétele a szélső érték létezésének, de nem elégséges.

Igy például az x^3 függvénynek a differenciálhányadosa, a $3x^2$ az $x=0$ helyen 0; a függvény értéke e helyen 0, jobbra pozitiv, balra pedig negativ, tehát az $x=0$ helyen át az $y=x^3$ görbe emelkedően vonul.

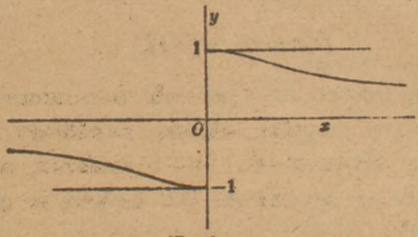
Egy másik példa a következő: Legyen $\varphi(x)$ olyan függvény, amely minden x helyen folytonos, de az $x=0$ helyen nem; de ezen a helyen is meghatározott jobb és baloldali határértékei legyenek és pedig az egyik pozitiv, a másik negativ. Ilyen például az

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

függvény. Tegyük fel, hogy x baloldalról közeledik a 0-hoz; akkor $\frac{1}{x}$ minden negativ számnál kisebbé válik és így $e^{\frac{1}{x}}$ a 0 felé konvergál, a hányados értéke: -1-é válik. Irjuk most e törtet ebben az alakban:

$$\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}.$$

Ha a pozitiv oldalról konvergál az x a 0-hoz, akkor e tört limese: $+1$. [Ilyen viselkedésű $\varphi(x)$ menetét a mellékelt ábra mutatja.]



47. ábra.

Legyen már most a vizsgálandó $f(x)=x^2\varphi(x)$, ahol $\varphi(x)$ a jelzett módon viselkedik az $x=0$ helyen. Ez a függvény minden x értéknél folytonos. A 0 helyen is, mert hiszen az $x^2\varphi(x)$ 0-á válik, bármely úton haladjunk is az x változóval a 0 helyhez. A differenciálhányadosa a 0 helyen: $\lim\limits_{h=0}\frac{h^2\varphi(h)}{h}=0$. Differenciálhányadosa tehát a 0 helyen eltűnik. Nézzük, hogyan viselkedik a 0 hely környezetében az $f(x)$. Ha x pozitiv, $\varphi(x)$ is pozitiv és így $x^2\varphi(x)$ pozitiv. Ha x negativ, $x^2\varphi(x)$ is negativ; tehát $f(x)=x^2\varphi(x)$ a 0 helyen át növekedően megy. Ez a függvény tehát, dacára annak, hogy $f'(x)$ a 0 helyen eltűnik, e helyen mégis növekedő; szélső értéke nincs.

Ha azonban az $f(x)$ függvénynek az $x=a$ helyen az első diff. hányadosa 0 és e helyen van véges és folytonos második differenciálhányadosa, mely 0-tól különböző, akkor az a helyen az $f(x)$-nek szélső értéke van és pedig, ha $f''(a)$ pozitiv, akkor minimuma, ha $f''(a)$ negativ, akkor maximuma van.*

Ugyanis, ha az $f(a+h)$-t kifejtjük Taylor sorba, melyet a második taggal berekesztünk, akkor:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{f''(a+\vartheta h)h^2}{2}$$

és így a jelen esetben, midőn $f'(a)=0$:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f''(a+\vartheta h)h^2}{2}.$$

Ha már most $f''(a)$ pozitiv, akkor, minthogy az $f''(x)$-ről azt mondtuk, hogy az a helyen folytonos, tehát van egy olyan $a-\tau\ldots a+\tau$ szakasz, melyen belül az $f''(x)$ mindig pozitiv és így, ha $|h|<\tau$, akkor biztos, hogy az $f''(a+\vartheta h)$ is pozitiv, mert hiszen az $a+\vartheta h$ mindenesetre az $a-\tau\ldots a+\tau$ szakaszba esik. Így tehát az

* A második differenciálhányados folytonosságát csakis a tárgyalás egyszerűsítése céljából tételezzük fel. Később, ettől függetlenül is tárgyaljuk a szélső érték feltételeit.

$\frac{f''(a+\vartheta h)h^2}{2}$ tag h minden értékénél, amely a $-\tau \ldots +\tau$ közből vétetik, pozitiv, következésképpen:

$$f(a+h) > f(a),$$

ha $|h|<\tau$; tehát az a helyen az $f(x)$-nek *minimuma* van.

Ha pedig az $f''(a)$ negativ, akkor, minthogy $f''(x)$ folytonos az a helyen, van egy olyan $a-\tau \ldots a+\tau$ szakasz, melyen belül az $f''(x)$ mindig negativ és így az $a+\vartheta h$ helyen is negativ, tehát az

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f''(a+\vartheta h)h^2}{2}$$

-ből következik, hogy $\quad f(a+h) < f(a),$

ha csak $|h|<\tau$, vagyis az $f(x)$-nek az a helyen *maximuma* van.

Látjuk tehát, hogy ha az a helyen az $f(x)$ második diff. hányadosa folytonos és $f'(a)=0$, akkor az $f(x)$-nek az a helyen maximuma van, ha $f''(a)$ negativ és minimuma van, ha $f''(a)$ pozitiv. A folytonos második diff. hányadossal biró függvényekre nézve tehát az a helyen a szélső érték létezésének szükséges feltétele, hogy $f'(a)$ eltűnjék és elégséges feltétel, hogy ezenkívül $f''(a)$ ne legyen 0.

Megeshetik, hogy az a helyen nem csak az első, hanem a második diff. hányados is eltűnik. Ez esetben az előbbi kriteriumot nem alkalmazhatjuk. Nézzük általában, lehet-e és miképpen a függvény szélső értékére következtetni, ha az a helyen az első, második,... szóval, mondjuk, az első n differenciálhányados eltűnik, ellenben az $n+1$-ik differenciálhányados nem 0. Tegyük fel ismét azt is, hogy ez az első el nem tűnő diff. hányados az a helyen egyúttal folytonos is. Ez esetben az $n+1$-ik tagnál berekesztett Taylor sor, mely általában

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} +$$

$$+ \frac{h^3 f'''(a)}{3!} + \cdots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}$$

alakú, az $f'(a), f''(a), \ldots f^{(n)}(a)$ eltűnése folytán:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}.$$

Ha $f^{(n+1)}(a)$ pozitiv, akkor az $f^{(n+1)}(x)$-nek az a helyen feltételezett folytonossága miatt van olyan $a-\tau \ldots a+\tau$ szakasz, melyen belül $f^{(n+1)}(x)$ mindenütt pozitiv, tehát az $a+\vartheta h$ helyen is, ha $|h|<\tau$. Vizsgáljuk a maradéktag jelét. Két esetet különböztetünk meg: $n+1$ páratlan vagy $n+1$ páros. Ha $n+1$, vagyis az első, el nem tűnő differenciálhányados rendszáma páratlan, akkor e maradéktag előjele a h jelétől függ. Ha h pozitiv, e maradéktag pozitiv; ha h negativ, a maradéktag is negativ és így ha x az $a-\tau \ldots a$ szakaszban van, akkor $f(x)<f(a)$, ha pedig x az $a \ldots a+\tau$-ből vétetik, akkor $f(x)>f(a)$.

Az $f(x)$ függvény tehát az a helyen át növekedően halad; az a helyen az $f(x)$-nek nincs szélső értéke. Ugyanigy mutatható meg, hogy ha $f^{(n+1)}(a)$ negativ, akkor az $f(x)$ az a helyen át csökkenően halad.

Ha tehát az első, el nem tünő differenciálhányados páratlan rendű, akkor ezen a helyen a függvénynek szélső értéke nincsen.

Nézzük azt az esetet, midőn $n+1$ páros szám. Ez esetben a

$$\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}$$

maradéktag a jelét az $a-\tau \ldots a+\tau$ szakaszban nem változtatja, mert h^{n+1} előjele nem változik. E maradéktag jele tehát ugyanaz, mint az $f^{(n+1)}(a)$ jele és így, ha $f^{(n+1)}(a)$ pozitiv, akkor az $a-\tau \ldots a+\tau$ szakaszban

$$f(x)>f(a),$$

vagyis az a helyen az $f(x)$-nek minimuma van. Ha pedig $f^{(n+1)}(a)$ negativ, akkor az $a-\tau \ldots a+\tau$ szakaszban

$$f(x)<f(a),$$

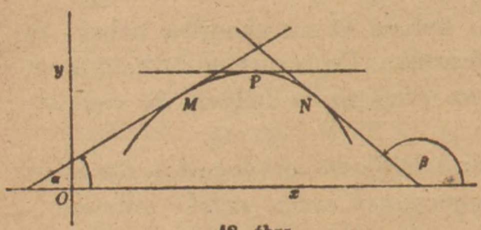
tehát az $f(x)$-nek az a helyen maximuma van. Eszerint tehát, *ha az első, az a helyen el nem tünő diff. hányados páros rendű, akkor az $f(x)$-nek e helyen szélső értéke van, és pedig maximuma, ha ez a diff. hányados negativ, minimuma, ha pozitiv.*

[Eddigelé csak olyan függvények szélső értékéről szóltunk, melyeknek a szóban forgó a helyen az első el nem tűnő differenciálhányadosuk folytonos; mert hiszen különben nem mondhattuk volna, hogy az $f^{(n+1)}(a+\vartheta h)$-nak ugyanolyan jele van, mint az $f^{(n+1)}(a)$-nak. De ez a kikötés nem is szükséges, ami azonnal kitűnik, ha a szélső érték vizsgálatát nem kötjük a Taylor sorhoz.

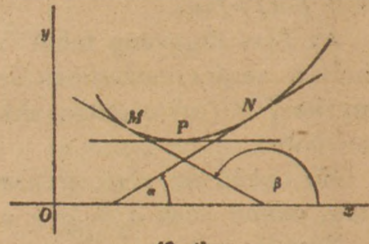
Ha az $f(x)$ differenciálható (az a hely bizonyos környezetében), szélső értéke e helyen csakis akkor lehet, ha $f'(a)=0$. Ez miként láttuk, szükséges feltétel. Ha az $f'(x)$ úgy válik az a helyen zérussá, hogy pozitivből negativba megy át, azaz, úgy, hogy egy bizonyos $a-\tau \ldots a$ szakaszban $f'(x)$ pozitiv és az $a \ldots a+\tau$ szakaszban negativ, akkor az $f(x)$ az $a-\tau \ldots a$ szakaszban monoton nő egészen $f(a)$-ig és az $a \ldots a+\tau$ szakaszban fogy, tehát az a helyen $f(x)$-nek maximuma van. Ha pedig az $f'(x)$ az a helyen úgy válik 0-á, hogy a negativból megy át a pozitivba, akkor $f(x)$ az $a-\tau \ldots a$ szakaszban fogy és az $a \ldots a+\tau$ szakaszban nő, tehát az a helyen minimuma van.

Ezen állításoknak igen egyszerű geometriai szemléletek felelnek meg. A mellékelt ábrában az első képen az M helyen húzott érintő hajlásszöge hegyes szög, tangense pozitiv, az N helyen húzott érintő hajlásszöge: β tompaszög, tangense: negativ, tehát az $f'(x)$ pozitivból negativba megy át.

A P helyen maximum van. Éppen ellenkezőleg áll a dolog a második képen. *Eszerint tehát, ha $f'(a)=0$ és $f'(x)$ az a helyen úgy válik zérussá, hogy pozitivból negativba megy át, akkor $f(x)$-nek az a helyen maximuma van, ellenkező esetben minimuma van.*



48. ábra.



49. ábra.

Látjuk tehát, hogy ha az $f'(x)$-ről eldönthető, hogy a jelzett módon válik az a helyen zérussá, akkor a második differenciálhányados vizsgálata teljesen felesleges; még azt sem kell megvizsgálni, hogy az a helyen van-e második differenciálhányados, vagy nincs.

Ha $f'(x)$ az a előtti helyeken pozitiv, az a utáni helyeken negativ, akkor az a helyen csökkenően megy át és így, ha létezik az a helyen az $f'(x)$-nek differenciálhányadosa, — azaz $f(x)$-nek második differenciálhányadosa, — akkor $f''(a)$ negativ, (vagy 0), ha pedig az a előtti helyeken $f'(x)$ negativ és az a utáni helyeken pozitiv, akkor $f'(x)$ az a helyen át növekedően halad és így, ha az a helyen van $f(x)$-nek második differenciálhányadosa, akkor ez csakis pozitiv (vagy 0) lehet.

Fordítva: ha az a helyen létezik az $f''(a)$ és ez pozitiv, akkor $f'(x)$ az $x=a$ helyen át emelkedően halad, tehát, minthogy $f'(a)=0$, negativból pozitivba megy át, és így az $f(x)$ az a hely előtt csökkenő, az a után emelkedő, vagyis $f(x)$-nek az a helyen minimuma van, ha pedig $f''(a)$ negativ, akkor $f'(x)$ az $x=a$ helyen át csökkenően vonul, miből következik, hogy az a helyen az $f(x)$-nek maximuma van.

Eszerint tehát, *ha $f'(a)=0$ és $f''(a)>0$, $f(x)$-nek minimuma van az a helyen, ha pedig $f''(a)<0$, maximuma van.* Amint látjuk, itt egyáltalában nem jött szóba az $f''(x)$ folytonossága.

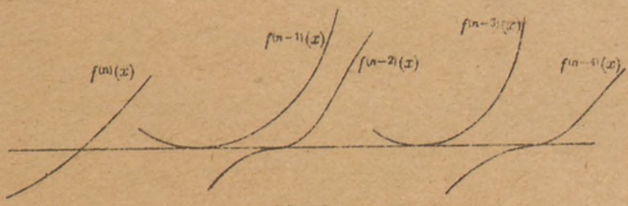
Egészen hasonlóan következtethetünk azon esetben, midőn az a helyen $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$ és $f^{(n+1)}(a)\neq 0$. Ha $f^{(n+1)}(a)$ pozitiv, akkor $f^{(n)}(x)$ az a helyen nő, tehát minthogy $f^{(n)}(a)=0$, a negativból a pozitivba megy át. $f^{(n)}(x)$ eszerint az a előtt negativ, az a után pozitiv; tehát $f^{(n-1)}(x)$ az a előtti helyeken fogy, az a utáni helyeken nő; de minthogy az a helyen $f^{(n-1)}(a)=0$, tehát úgy az a előtti, mint az a utáni helyeken pozitiv, (vagyis az a helyen levő 0 értéke egyúttal minimuma).

A megelőző differenciálhányados, az $f^{(n-2)}(x)$ hogyan viselkedik az a környezetében? Az a környezetében a differenciálhányadosa mindenütt pozitiv, tehát az a helyen át növekedően halad, vagyis éppen úgy, mint az $f^{(n)}(x)$ a negativból a pozitivba megy át.

Igy haladva tovább, arra az eredményre jutunk, hogy ha $f^{(n+1)}(a)$ pozitiv, akkor $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-3)}(x)$, $f^{(n-5)}(x), \ldots$ vagyis visszáról számítva, minden második differenciálhányados úgy válik 0-sá az a helyen, hogy egy $a-\tau \ldots a+\tau$ szakaszban mindenütt pozitiv az a hely kivételével, vagyis mindezeknek az a helyen minimumuk van. Ellenben az $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-2)}(x), \ldots$ vagyis visszáról számítva az első, harmadik stb. az a helyen úgy válik zérussá, hogy a negativból a pozitivba megy át.

Sematikusan feltüntettük e differenciálhányadosok magaviseletét az a

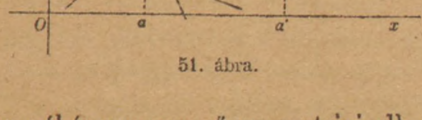
hely környezetében (51. ábra). Ha $n+1$ páratlan, akkor tehát minden páratlan rendű differenciálhányados az a helytől jobbra is, balra is pozitiv; tehát $f'(x)$ is az $a-\tau \dots a+\tau$ szakaszban pozitiv, vagyis az $f(x)$ úgy az $a-\tau \dots a$ szakaszban, mint az $a \dots a+\tau$ szakaszban nő, tehát az a helyen nem lehet szélső értéke. Ha pedig $n+1$ páros, akkor minden páratlan rendű differenciálhányados, így tehát az $f'(x)$ is a negativból a pozitivba megy át az a helyen, tehát ezen a helyen minimuma van az $f(x)$-nek. Kiinduló pontunk az volt, hogy $f^{(n+1)}(a)$ pozitiv. Ha $f^{(n+1)}(a) < 0$, akkor ugyanilyen okoskodással jutunk arra, hogy az $f(x)$-nek az a helyen maximuma van.



50. ábra.

Ha tehát $f(x)$ *az a helyen $n+1$-szer differenciálható és az első n differenciálhányadosa eltűnik, az $n+1$-ik pedig nem zérus, akkor, ha $n+1$ páros szám, az $f(x)$-nek maximuma vagy minimuma van, aszerint, amint $f^{(n+1)}(a)$ negativ, vagy pozitiv.*

Megeshetik azonban, hogy az a helyen az $f(x)$-nek nincs is meghatározott differenciálhányadosa, hanem csak jobb és baloldali differenciálhányadosa van. Ilyenkor is dönthetünk némelykor a szélső érték tekintetében. Ha ugyanis az egyoldali differenciálhányadosok ellenkező előjelű véges számértékek, akkor az $f(x)$-nek az a helyen mindig szélső értéke van; és pedig, ha a baloldali differenciálhányados pozitiv, akkor maximuma van, ha negativ, akkor minimuma van; mert hiszen az első esetben az a hely közelében a függvény balról növekvő, jobbról csökkenő, a második esetben pedig fordítva, balról csökkenő, jobbról növekvő. A mellékelt ábrán feltüntettük e kétféle helyzetet.]



51. ábra.

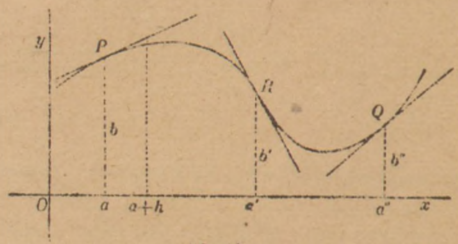
6. A Taylor sor néhány egyszerű geometriai alkalmazása. a) *A görbe és az érintő viszonylagos helyzete.* Az $y=f(x)$ függvény menetét az 53-ik ábrában rajzolt görbe tüntesse fel Szemeljük ki e görbe P pontját, melynek abscissája a, ordinátája: $b=f(a)$. Vizsgáljuk meg a *görbének P pontja környezetében az érintőjéhez való helyzetét.* Az érintő átmegy a P ponton, irányhatározója pedig $m=f'(a)$; tehát, ha az egyenes pontjainak folyó koordinátáit ξ és η-val jelöljük, az érintő egyenlete:

$$\eta - b = f'(a)(\xi - a),$$

azaz:

$$\eta = f(a) + f'(a)(\xi - a).$$

Azt kérdezzük, hogy az érintő, amelynek P pontja közös a görbével, a P környezetében a görbe fölött, vagy a görbe alatt vonul-e? E végből határozzuk meg úgy a görbének, mint az érintőnek az $a+h$ abscissához tartozó ordinátáit. Ha $\xi = a+h$ tesszük, akkor az



52. ábra.

érintő egyenletéből azt kapjuk, hogy ehhez az $a+h$ abscissához tartozó ordináta, melyet η-val akarunk jelölni:

$$\eta = f(a) + f'(a)h.$$

A görbének az $a+h$ abscissához tartozó ordinátája pedig, melyet y-nal akarunk jelölni: $y = f(a+h)$ és ha az $f(a+h)$-t a második tagig Taylor-sorban állítjuk elő:

$$y = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a+\vartheta h)\,h^2}{2}.$$

Most már felelhetünk arra a kérdésre, hogy az $a+h$ abscissával biró helyen a görbe az érintő alatt, vagy fölött vonul-e? Ha $\eta > y$, akkor az érintő ezen a helyen a görbe fölött van, ha $\eta < y$, akkor pedig alatta. De:

$$y - \eta = \frac{f''(a+\vartheta h)\,h^2}{2}.$$

Csak ezt kell vizsgálnunk. Tegyük fel, hogy oly közönséges görbével van dolgunk, amelynek a második diff. hányadosa az a helyen folytonos é nem 0, akkor van egy olyan $a-\tau \ldots a+\tau$ szakasz, amelyen belül az $f''(x)$ nem változtatja a jelét, tehát ha $|h| < \tau$ akkor $f''(a+\vartheta h)$-nak is olyan jele van, mint $f''(a)$-nak; és minthogy a jobboldalon álló kifejezésben h^2 szerepel, tehát $\frac{f''(a+\vartheta h)\,h^2}{2}$-nek is olyan jele van, mint $f''(a)$-nak, akár *pozitiv a h, akár negativ*, vagyis akár jobbfelé, akár balfelé távolodtunk a P ponttól. *Eszerint tehát, ha $f''(a)$ pozitiv, akkor $\eta < y$, vagyis a görbe az érintő fölött vonul (mint a Q helyen), ha pedig $f''(a)$ negativ, akkor a görbe az érintő alatt vonul, (mint a P helyen).* Ezt még úgy is mondhatjuk, hogy az első esetben a görbe az a helyen felülről nézve homorú, a második esetben pedig domború.

Ha a második diff. hányados az a helyen éppen 0, akkor az eddigi vizsgálattal nem döntöttük el a görbének az érintőhöz való helyzetét. Tegyük fel mindjárt, hogy az $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$ és a legközelebbi el nem tűnő diff. hányados az $n+1$-ik. Ekkor a görbének az $a+h$ abscissához tartozó ordinátája, az $f(a+h)$, a következő alakban írható:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}$$

és itt két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha $n+1$ páros szám, akkor

$$y-\eta=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}$$

(megint feltéve, hogy $f^{(n+1)}(x)$ az a helyen folytonos) az előjelét nem változtatja egy bizonyos $a-\tau \dots a+\tau$ szakaszban, tehát a görbe az érintési pont környezetében az érintő alatt, vagy fölött vonul aszerint, amint $f^{(n+1)}(a)$ negativ, vagy pozitiv. Ha azonban $n+1$ páratlan szám, akkor az $y-\eta$ különbség a h előjelével megváltoztatja az előjelét; tehát az R pont egyik oldalán (53. ábra) a görbe az érintő alatt, a másik oldalán pedig fölötte vonul és pedig, ha $f^{(n+1)}(a)$ pozitiv, akkor az a helytől balra levő helyeken $y-\eta$ negativ, a jobbra eső helyeken pedig pozitiv, vagyis a görbe az R előtt az érintő alatt vonul és azután föléje kerül. Ha pedig $f^{(n+1)}(a)$ negativ, akkor fordítva az R hely előtt a görbe az érintő fölött van és azután alája kerül. Mindkét esetben azt mondjuk, hogy a görbének ezen a helyen *inflexiós pontja (forduló pontja)* van. A legegyszerűbb az az eset, midőn $f''(a)=0$, de $f'''(a)\neq 0$.

b) *Két görbe viszonylagos helyzete.* Ha a P ponton át, melynek koordinátái: a, b, két görbe vonul, (54. ábra) az $y=f(x)$ és az $y=\varphi(x)$,

akkor:
$$f(a)=\varphi(a).$$

Vizsgáljuk meg, hogy e pont környezetében a két görbe egymáshoz képest minő helyzetű. E végből megint az $a+h$ abscissához tartozó ordinátákat hasonlítjuk össze, ami legegyszerűbben úgy végezhető, ha az $f(x)-\varphi(x)$ különbséget számítjuk ki az $a+h$ helyen. Jelöljük ezt az $f(x)-\varphi(x)$ függvényt $F(x)$-el. Ekkor tehát:

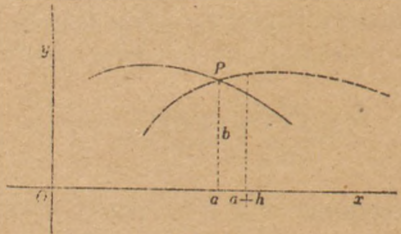
$$F(a+h)=f(a+h)-\varphi(a+h)=F(a)+F'(a+\vartheta h)\,h.$$

De $F(a)=f(a)-\varphi(a)=0$. $\quad F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)$;

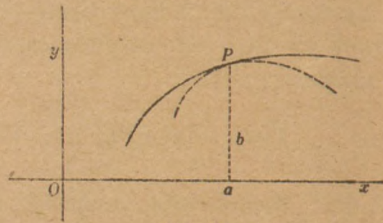
tehát
$$F'(a+\vartheta h)=f'(a+\vartheta h)-\varphi'(a+\vartheta h),$$

vagyis:
$$f(a+h)-\varphi(a+h)=[f'(a+\vartheta h)-\varphi'(a+\vartheta h)]\,h.$$

Ha $f'(a) \neq \varphi'(a)$, vagyis $f'(a)-\varphi'(a) \neq 0$ és úgy az $f'(x)$, mint $\varphi'(x)$ folytonosak az a helyen, akkor létezik olyan $a-\tau \ldots a+\tau$ köz, melyen belül $f'(x)-\varphi'(x)$ a jelét nem változtatja; tehát $f'(a+\vartheta h)-$ $-\varphi'(a+\vartheta h)$ ugyanolyan előjelű, mint $f'(a)-\varphi'(a)$, ha csak $|h|<\tau$.



53. ábra.



54. ábra.

Ebből következik, hogy $f(a+h)-\varphi(a+h)$ ordinátakülönbség előjele a h jelével változik, vagyis az első görbe a P helyen átszeli a másodikat és pedig ha $f'(a)>\varphi'(a)$, akkor a P-től balra az első görbe alul van, a P-től jobbra pedig felül. Ha $f'(a)<\varphi'(a)$, akkor fordítva, az első görbe felülről alá száll.

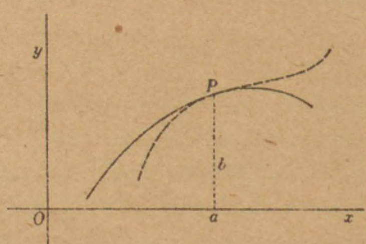
Ha azonban $f'(a)=\varphi'(a)$, vagyis ha a két görbének a P pontban közös érintőjük van (55. ábra), akkor nem így áll a dolog. A helyzet általános vizsgálata végett tegyük fel, hogy nem csak $f'(a)=\varphi'(a)$, hanem egyúttal

$$f''(a)=\varphi''(a), \ldots f^{(n)}(a)=\varphi^{(n)}(a),$$

ellenben $f^{(n+1)}(a) \neq \varphi^{(n+1)}(a)$. Ekkor:

$$f(a+h)-\varphi(a+h)=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)-\varphi^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Föltéve, hogy az $f^{(n+1)}(x)$ és $\varphi^{(n+1)}(x)$ az $x=a$ helyen folytonosak és $f^{(n+1)}(a) \neq \varphi^{(n+1)}(a)$, azaz $f^{(n+1)}(a)-\varphi^{(n+1)}(a)$ nem zérus,



55. ábra.

akkor egy bizonyos $a-\tau \ldots a+\tau$ szakaszban az $f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)$ nem változtatja a jelét és így, ha $n+1$ páratlan, akkor ugyanolyan helyzettel van dolgunk, mint előbb, vagyis az egyik görbe a másikon áthalad; ha azonban $n+1$ páros, akkor az $f(a+h)-\varphi(a+h)$

megtartja az előjelét akár pozitiv, akár negativ a h és így az első görbe a második fölött, vagy alatt vonul a P környezetében a szerint, amint $f^{(n+1)}(a)-\varphi^{(n+1)}(a)$ különbség pozitiv vagy negativ.

Azon esetekben, midőn:

$$f(a)=\varphi(a),\ f'(a)=\varphi'(a),\ f''(a)=\varphi''(a)\ldots f^{(n)}(a)=\varphi^{(n)}(a),$$

ellenben $f^{(n+1)}(a)\neq\varphi^{(n+1)}(a)$, vagyis az $f(x)$ és $\varphi(x)$ valamint az első n diff. hányadosaik az $x=a$ helyen megegyeznek, ellenben az $n+1$-ik diff. hányadosok különbözők, azt mondjuk, hogy a két görbének az $x=a$ helyen *n-edrendű érintkezése* van.

Így például, ha az a helyen $f''(a)=0$, de $f'''(a)\neq 0$, akkor az $y=f(x)$ görbének az $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ egyenessel, vagyis az a, $f(a)$ pontban vont érintővel másodrendű érintkezése van *(inflexiós pont)*; mert ez esetben $\varphi(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ és így:

$$f(a)=\varphi(a),\ f'(a)=\varphi'(a),\ f''(a)=\varphi''(a)=0\,;$$

ellenben $f'''(a)\neq\varphi'''(a)$. A görbe inflexiós pontja tehát a görbe olyan pontja, amelyben az egy egyenessel másodrendűen (vagy általában páros rendűen) érintkezik.

c) Következő, fontos példa gyanánt tárgyaljuk ezt a kérdést: *Létezik-e olyan kör, mely az $y=f(x)$ görbét egy adott a, $f(a)$ koordinátákkal biró pontjában legalább másodrendűen érinti?* A keresett kör középpontjának koordinátái legyenek α, β és radiusa: r. A kör egyenlete ilyen alakú:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

vagyis:

$$y=\beta+\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}.$$

A jelen esetben tehát:

$$\varphi(x)=\beta+\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}.$$

(Megjegyezzük, hogy egyelőre csakis a kör olyan részeire szorítkozunk, amelyekben a négyzetgyök jelét nem kell megváltoztatni.)

Másodrendű érintkezéshez szükséges, hogy az $x=a$ helyen $f(x)=\varphi(x)$, $f'(x)=\varphi'(x)$, $f''(x)=\varphi''(x)$ legyen.

Számítsuk ki a $\varphi'(x)$ és $\varphi''(x)$-et.

$$\varphi'(x)=-\frac{x-\alpha}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}};\quad \varphi''(x)=-\frac{r^2}{[r^2-(x-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Kell tehát, hogy fennálljanak a következő egyenletek:

$$f(a)=\beta+\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}\,;$$

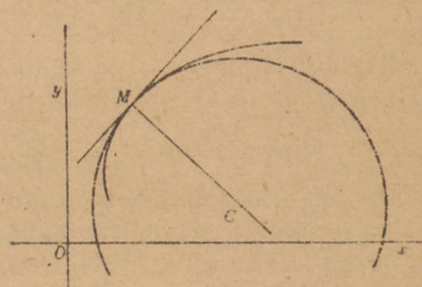
$$f'(a)=-\frac{a-\alpha}{\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}},\quad f''(a)=-\frac{r^2}{[r^2-(a-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad \mu)$$

Innen kell a három ismeretlen mennyiséget, az α, β és r-et kiszámítani. Az r kiszámítására alkossuk meg az $1+[f'(a)]^2$ kifejezést:

$$1+[f'(a)]^2 = 1+\frac{(a-\alpha)^2}{r^2-(a-\alpha)^2} = \frac{r^2}{r^2-(a-\alpha)^2},$$

tehát:
$$\{1+[f'(a)]^2\}^{\frac{3}{2}} = \frac{r^3}{\{r^2-(a-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}} = -rf''(a)$$

és így:
$$r = -\frac{\{1+[f'(a)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(a)},$$



56. ábra.

Állapodjunk meg abban, hogy r pozitiv legyen, vagyis a számlálóban levő $(1+[f'(a)]^2)^{\frac{1}{2}}$ gyökmennyiségnek azon értékét vegyük, amely a $-f''(a)$-val egyjelű. Ha $f'(a)$ helyett $\frac{dy}{dx}$-et, $f''(a)$ helyett $\frac{d^2y}{dx^2}$ írunk, akkor az x abscissához tartozó pontban a legalább kétszeresen érintő körnek, az úgynevezett *görbületi körnek,* vagy oskuláló körnek a radiusa: a *görbületi sugár:*

$$r = \left| \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right|.$$

A $\mu)$ alatti harmadik egyenletből:

$$[r^2-(a-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}} = -\frac{r^2}{f''(a)},$$

tehát:
$$\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2} = -\frac{r^{\frac{2}{3}}}{[f''(a)]^{\frac{1}{3}}},$$

mely egyenlet, minthogy r-et pozitivnek vettük, a $\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}$ jelét is meghatározza; ha ezt a kifejezést a $\mu)$ alatti második egyenletbe helyettesítjük, akkor

$$a-\alpha=-f'(a)\cdot\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}=+\frac{r^{\frac{2}{3}}\cdot f'(a)}{[f''(a)]^{\frac{1}{3}}}$$

és ha r kifejezéséből $f''(a)$-t kiszámítjuk és ide helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$a-\alpha=-\frac{rf'(a)}{\sqrt{1+[f'(a)]^2}},$$

ahol a nevezőben álló négyzetgyök, miként említettük, olyan jelű, mint a $-f''(a)$.

Végül pedig a $\mu)$ alatti első egyenletből meghatározzuk az $f(a)-\beta$-t:

$$f(a)-\beta=\frac{r}{\sqrt{1+[f'(a)]^2}}.$$

Erre még visszatérünk.

7. Interpoláció. A Lagrange-féle interpolációs képlet. A véges Taylor sorral kifejeztük azt az $f(x)$ függvényt, melynek az a helyen ismertük az értékét valamint első n differenciálhányadosának az értékét. Ezt a feladatot még így is fogalmazhattuk volna: Határozzuk meg azt az n-edfokú racionális egész függvényt, melynek az a helyen ugyanaz az értéke van, mint az $f(x)$-nek és melynek első n diff. hányadosa is megegyezik ezen a helyen az $f(x)$ diff. hányadosaival. Ha ugyanis ezt az n-edfokú racionális függvényt ebben az alakban írjuk:

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_n(x-a)^n,$$

akkor

$$f(a)=\varphi(a),\ f'(a)=\varphi'(a),\ f''(a)=\varphi''(a)\ldots\ f^{(n)}(a)=\varphi^{(n)}(a)$$

egyenletekből következik, hogy

$$A_0=f(a),\ A_1=f'(a),\ A_2=\frac{f''(a)}{2},\ldots\ A_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

tehát

$$\varphi(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

vagyis a keresett $\varphi(x)$ nem más, mint az $f(x)$ véges Taylor sorának első $n+1$ tagjából álló része. A $\varphi(x)$ n-edfokú racionális egész függvényben tehát olyan függvényt nyertünk, mely az a helyen az $f(x)$-el megegyezik és e helyen n első diff. hányadosa is egyenlő az $f(x)$ diff. hányadosaival. Más helyen természetesen a $\varphi(x)$ az $f(x)$-től eltér. A hiba, amelyet elkövetnénk, ha $f(x)$ helyett az x helyen a $\varphi(x)$-et vennők, éppen az a maradéktag, $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, mely a

Taylor-sornál szerepel. ξ az a és x közötti bizonyos meghatározott helyet jelent. A $\varphi(x)$-et az $f(x)$ *közelítő függvényének* nevezhetjük.

Közelfekvő már most az a gondolat, hogy olyan $\varphi(x)$ közelítő függvényt konstruáljunk, mely az $f(x)$-el nemcsak egy helyen egyezik meg. Elsőnek tárgyaljuk ezt a feladatot: *Állítsunk elő olyan $\varphi(x)$ racionális egész függvényt, mely az $f(x)$-el a megadott különböző*

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_{n+1}$$

helyeken megegyezik. Hányadfokú függvény legyen ez a $\varphi(x)$? Azt állítjuk, hogy n-edfokú egész függvénnyel a kívánt eredményt elérhetjük, azaz van egy olyan n-edfokú racionális egész függvény $\varphi(x)$, melyre nézve:

$$\varphi(a_1)=f(a_1),\ \varphi(a_2)=f(a_2),\ \varphi(a_3)=f(a_3), \dots \varphi(a_{n+1})=f(a_{n+1}).$$

Ugyanis minden n-edfokú egész függvény ebben az alakban írható:

$$\varphi(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\dots+A_nx^n$$

és így kell, hogy fennálljanak ezek az egyenletek:

$$\begin{array}{l}
A_0+A_1a_1\ \ +A_2a_1^2\ \ +\dots+A_na_1^n\ \ =f(a_1)\\
A_0+A_1a_2\ \ +A_2a_2^2\ \ +\dots+A_na_2^n\ \ =f(a_2)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_0+A_1a_{n+1}+A_2a_{n+1}^2+\dots+A_na_{n+1}^n=f(a_{n+1}).
\end{array}$$

Ezen $n+1$ egyenletből álló rendszer determinansa:

$$\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n\\
1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n
\end{vmatrix}$$

nem más, mint az $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ számok Vandermonde-féle determinansa, mely 0-tól különböző, minthogy az $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ egymástól különböznek. Így tehát az egyenletrendszer az $A_0, A_1, A_2, \dots A_n$ együtthatókra megoldható, ezért a kívánt n-edfokú racionális egész függvény egyértelműen meg van határozva. Alacsonyabb rendű függvény általánosságban nem szerkeszthető, mert ha $m<n$ volna, az m-edfokú

$$B_0+B_1x+B_2x^2+\dots+B_mx^m$$

rac. egész függvény csak úgy teljesíthetné a követelményeket, ha fennállnának ezek az egyenletek

$$
\begin{aligned}
&B_0+B_1a_1+B_2a_1^2+\cdots+B_ma_1^m=f(a_1)\\
&B_0+B_1a_2+B_2a_2^2+\cdots+B_ma_2^m=f(a_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&B_0+B_1a_{n+1}+B_2a_{n+1}^2+\cdots+B_ma_{n+1}^m=f(a_{n+1}),
\end{aligned}
$$

melyek csak akkor lehetségesek, ha az $f(a_1)$, $f(a_2)\ldots f(a_{n+1})$ között bizonyos, $n-m$ számú, reláció állana fenn, vagyis ha az $m+2$-ik egyenlettől kezdve a többi már az előzőből következnék, tehát a $\varphi(x)$ meghatározására $f(x)$-nek az $a_{m+2},\ldots a_n$ helyeken felvett értékei feleslegesek volnának.

Természetesen számtalan sok n-nél magasabb fokú rac. egész függvény teljesítheti a kívánságunkat, hiszen ha

$$\omega(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+1})$$

tesszük és $\varphi(x)$ az előbb meghatározott n-edfokú egész függvény, akkor minden ilyen alakú függvény:

$$\varphi(x)+\omega(x)\psi(x),$$

ahol $\psi(x)$ tetszésszerinti racionális egész függvényt jelent, szintén megoldja a feladatot, mert az első tagról tudjuk, hogy $\varphi(a_i)=f(a_i)$, a második tag pedig az a_i helyeken eltűnik.

Az n-edfokú $\varphi(x)$ közelítő függvény előállítását igen áttekinthető alakban végezhetjük, ha először olyan n-edfokú rac. egész függvényt konstruálunk, mely az $a_1, a_2,\ldots a_{i-1}, a_{i+1},\ldots a_{n+1}$ helyeken (tehát az a_i kivételével a megadott helyek mindenikén) zérus, csak az a_i helyen: 1. Ez a függvény a következő:

$$\omega_i(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})(x-a_{i+2})\ldots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})(a_i-a_{i+2})\ldots(a_i-a_{n+1})}.$$

Rögtön látjuk, hogy ha $x=a_i$, akkor a számláló megegyezik a nevezővel, és ha $x=a_k$, $k\neq i$, $\omega_i(a_k)=0$.

Ez az egyszerű n-edfokú egész függvény könnyen áttekinthető alakban írható, ha tekintetbe vesszük az előbb már használt

$$\omega(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+1})$$

$n+1$-edfokú egész függvényt. Az $\omega_i(x)$ számlálója ugyanis így írható: $\dfrac{\omega(x)}{x-a_i}$.

A nevező meghatározása végett alkossuk meg $\omega'(x)$-et. Ez $n+1$ tagból áll és pedig:

$$
\begin{aligned}
\omega'(x)=(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n+1})+(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n+1})+\cdots\\
+(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n+1})+\cdots\\
+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).
\end{aligned}
$$

Ha már most itt x helyett a_i-t teszünk, akkor az i-ik tag kivételével a többi mind eltűnik, az i-ik tag pedig:

$$(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_{n+1})$$

lesz; éppen az, amely az $\omega_i(x)$ nevezőjében szerepel; tehát:

$$\omega_i(x)=\frac{\omega(x)}{(x-a_i)\,\omega'(a_i)}.$$

Ez tehát azon n-edfokú rac. egész függvény, mely az $a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_{n+1}$ helyeken 0, és az a_i helyen: 1.

Ha így rendre megalkotjuk az $\omega_1(x)=\dfrac{\omega(x)}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)}$,

$$\omega_2(x)=\frac{\omega(x)}{(x-a_2)\,\omega'(a_2)},\ldots\ \omega_{n+1}(x)=\frac{\omega(x)}{(x-a_{n+1})\,\omega'(a_{n+1})}$$

segédfüggvényeket, akkor azonnal látjuk, hogy az a $\varphi(x)$ n-edfokú közelítő függvény, melyre nézve

$$\varphi(a_1)=f(a_1),\ \varphi(a_2)=f(a_2),\ldots\ \varphi(a_{n+1})=f(a_{n+1}),$$

ilyen alakú:

$$\varphi(x)=\frac{f(a_1)\,\omega(x)}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)}+\frac{f(a_2)\,\omega(x)}{(x-a_2)\,\omega'(a_2)}+\cdots+\frac{f(a_{n+1})\,\omega(x)}{(x-a_{n+1})\,\omega'(a_{n+1})}.$$

Ugyanis, ha $x=a_1$, akkor az első tag értéke: $f(a_1)$, a többié: 0. Ha $x=a_2$, a második tag értéke $f(a_2)$, a többié: 0 s i. t.

Most itt is felvetjük azt a kérdést, melyet a véges Taylor sornál megoldottunk, *hogy mekkora hibát követünk el, ha a b helyen $f(b)$ helyett $\varphi(b)$-t mondunk?* Írjuk ezt a hibát ilyen alakban:

$$A(b-a_1)(b-a_2)\ldots(b-a_{n+1}),$$

vagyis A gyanánt válasszuk az

$$\frac{f(b)-\varphi(b)}{(b-a_1)(b-a_2)\ldots(b-a_{n+1})}$$

számértéket. Az A számot egyszerűbben, áttekinthetőbb alakban, akarjuk kifejezni. Evégből bevezetjük az

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)-A\omega(x)$$

függvényt. Feltesszük, hogy $f(x)$ — és így $F(x)$ is — legalább $n+1$-szer differenciálható oly szakaszban, mely az $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ és a b helyet is magában foglalja. Ez az $F(x)$ az $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ és b helyeken eltűnik. Az első $n+1$ helyen azért, mert $f(a_i)=\varphi(a_i)$ és $\omega(a_i)=0$, a b helyen pedig, mert hiszen az A számértéket éppen úgy választottuk, hogy $f(b)-\varphi(b)-A\omega(b)=0$ legyen.

Rolle tétele szerint tehát $F'(x)$-nek az $a_1, \ldots a_{n+1}, b$ két-két egymásutáni helye között, tehát összesen legalább $n+1$ helyen el kell tűnnie. De ebből ismét az következik, hogy az $F'(x)$ diff. hányadosa, vagyis $F''(x)$ n közbenső helyen tűnik el s í. t., végül arra jutunk, hogy $F^{(n+1)}(x)$ legalább egy helyen, mely az $a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ b helyek szélső helyei között van, eltűnik. Jelöljük ezen helyek egyikét ξ-vel. Eszerint tehát:

$$F^{(n+1)}(\xi)=0.$$

De $\varphi(x)$ n-edfokú egész függvény, tehát $n+1$-ik diff. hányadosa: 0. $\omega(x)$ pedig: $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+1})$, tehát $n+1$-ik diff. hányadosa: $(n+1)!$ és így:

$$F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-(n+1)!\,A,$$

tehát:
$$F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\,A=0,$$

vagyis:
$$A=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

és igy:
$$f(b)=\varphi(b)+\omega(b)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

vagy b helyett x-et írva:

$$f(x)=\frac{f(a_1)\,\omega(x)}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)}+\frac{f(a_2)\,\omega(x)}{(x-a_2)\,\omega'(a_2)}+\ldots$$
$$+\frac{f(a_{n+1})\,\omega(x)}{(x-a_{n+1})\,\omega'(a_{n+1})}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)\,\omega(x)}{(n+1)!},$$

ahol ξ egy bizonyos, az $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$, x szélső pontjai közötti helyet jelöl. Ez a maradéktaggal ellátott *Lagrange*-képlet.

8. **Az Ampère-féle interpolációs képlet.** Az interpolációs képletet rendszerint olyankor használjuk, mikor az észleletek adataiból bizonyos törvényszerüséget akarunk megállapítani, vagy legalább is az észleleteket egy összefüggő képbe, formulába akarjuk foglalni. Így például, ha egy rúd hosszúságát $a_1, a_2, \ldots a_n$ hőmérsékleteknél megmértük és rendre $b_1, b_2, \ldots b_n$-nek találtuk, akkor konstruálhatjuk a t hőmérséknek olyan $n-1$-edfokú rac. egész függvényét $\varphi(t)$-t, amely az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken a megadott $b_1, b_2, \ldots b_n$ értékeket veszi fel. Ez a rac. egész függvény tekinthető az észleleteink összefoglaló képének és sokszor a $\varphi(t)$-t tekintjük azon törvénynek, mely a rúd hosszúságát a hőmérséklettől való függésben feltünteti. Természetesen, miként már említettük, az $a_1, a_2, \ldots a_n$-től különböző hőmérsékletekre vonatkozólag a $\varphi(t)$ nem adja meg pontosan a rúd hosszát; de a kísérleti tudományokban megkívántató pontossággal mégis használható. Sőt, ha az észleletek

számát megfelelően szaporítjuk és ezzel a $\varphi(t)$ fokszámát emeljük, azon hallgatólagos posztulátummal élnek a kísérletezők, hogy ezáltal a pontosságot határtalanul fokozni lehet.* De éppen ebből a szempontból tekintve a Lagrange-féle interpolációs formulát, annak egy, a gyakorlati számítás szempontjából jelentékeny hiányát tapasztaljuk. Ha ugyanis n észleletet tettünk, akkor a Lagrange formula szerint legelső teendőnk az

$$\omega(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

megalkotása és ebből kapjuk az ismertetett módon az $n-1$-edfokú (előbb $n+1$ adatról volt szó, azért n-edfokú függvényt állítottunk elő) közelítő függvényt, a $\varphi(x)$-et, a:

$$\frac{b_1\omega(x)}{(x-a_1)\omega'(a_1)}+\frac{b_2\omega(x)}{(x-a_2)\omega'(a_2)}+\cdots+\frac{b_n\omega(x)}{(x-a_n)\omega'(a_n)}$$

-et. Ha most még pótlólag új észleleteket tennénk, az egész számítást újból kellene kezdenünk, mert az $\omega(x)$ megváltozott. Ezért tehát a gyakorlati számítás szempontjából arról kell gondoskodnunk, hogy olyan közelítő függvényt konstruáljunk, mely az észleletek szaporításával csak egy-egy újabb taggal változik.

Keressünk tehát ismét, de célszerűbb alakban egy $\varphi(x)$ $n-1$-edfokú egész függvényt, mely a megadott különböző $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken ugyanolyan értékeket vesz fel, mint az $f(x)$, vagyis $\varphi(a_1)=f(a_1)$, $\varphi(a_2)=f(a_2), \ldots \varphi(a_n)=f(a_n)$ legyen.

Azt állítjuk, hogy a $\varphi(x)$ $n-1$-edfokú egész függvény ilyen alakban is írható:

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x-a_1)+A_2(x-a_1)(x-a_2)+$$
$$+A_3(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+\cdots+A_{n-1}(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}),$$

csak az $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ együtthatókat kell megfelelően választani. Ha sorban $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3, \ldots$ $x=a_n$ tesszük, akkor ezen együtthatókra a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}
f(a_1)&=A_0\\
f(a_2)&=A_0+A_1(a_2-a_1)\\
f(a_3)&=A_0+A_1(a_3-a_1)+A_2(a_3-a_1)(a_3-a_2) \qquad\qquad \alpha)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(a_n)&=A_0+A_1(a_n-a_1)+A_2(a_n-a_1)(a_n-a_2)+\cdots\\
&\quad+A_{n-1}(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})
\end{aligned}$$

és ezen egyenletekből a keresett $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ együtthatók sorban

* Hogy ez általánosságban nincs így, azt *Runge* és *Borel* egymástól függetlenül kimutatták. (*Runge*: Zeitschrift für Math. u. Phys. 1901. p. 229; *Borel* Verhandlungen des dritten intern. Math. Congresses. p. 229. és Fonctions de variables réelles. p. 74.)

meghatározhatók. Ebből egyúttal azt is látjuk, hogy egyetlen egy ilyen $\varphi(x)$ rac. egész függvény létezik.

Az A_0, A_1, A_2, .. A_{n-1} együtthatók meghatározása igen átlátszó alakot ölt, ha a következő új függvényeket, az ú. n. Ampère-féle *interpolációs függvényeket* vezetjük be:

$$f_0(x)=f(x),\quad f_1(x)=\frac{f_0(x)-f_0(a_1)}{x-a_1},\quad f_2(x)=\frac{f_1(x)-f_1(a_2)}{x-a_2},$$

$$f_3(x)=\frac{f_2(x)-f_2(a_3)}{x-a_3},\ldots\quad f_n(x)=\frac{f_{n-1}(x)-f_{n-1}(a_n)}{x-a_n}, \qquad \beta)$$

melyeknek alkotása könnyen áttekinthető. A második egyenletből:

$$f(x)=f(a_1)+(x-a_1)\,f_1(x)$$

és ha a harmadik egyenletből $f_1(x)$-et kifejezzük és ide helyettesítjük:

$$f(x)=f(a_1)+(x-a_1)\,f_1(a_2)+(x-a_1)(x-a_2)\,f_2(x).$$

Ha a negyedik egyenletből $f_2(x)$-et ide helyettesitjük:

$$f(x)=f(a_1)+(x-a_1)\,f_1(a_2)+(x-a_1)(x-a_2)\,f_2(a_3)+$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\,f_3(x)$$

s végül:

$$f(x)=f(a_1)+(x-a_1)\,f_1(a_2)+(x-a_1)(x-a_2)\,f_2(a_3)+\cdots$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})\,f_{n-1}(a_n)+$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\,f_n(x). \qquad \gamma)$$

Ha ezen egyenletben sorban x helyett a_2, a_3,... a_n-et tesszük, a következő egyenleteket kapjuk:

$$f(a_2)=f(a_1)+(a_2-a_1)\,f_1(a_2)$$
$$f(a_3)=f(a_1)+(a_3-a_1)\,f_1(a_2)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)\,f_2(a_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(a_n)=f(a_1)+(a_n-a_1)\,f_1(a_2)+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\,f_2(a_3)+\cdots$$
$$+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})\,f_{n-1}(a_n).$$

Ha $f(a_1)$ helyett az α) alatti egyenletek értelmében A_0-t teszünk, akkor észrevesszük, hogy ezen egyenletek teljesen megegyeznek az α) alattiakkal, ha

$$A_0=f(a_1),\ A_1=f_1(a_2),\ A_2=f_2(a_3),\ldots;\ A_{n-1}=f_{n-1}(a_n)$$

tétetik, vagyis az interpolációs függvények segítségével a keresett A_0, A_1,... A_{n-1} együtthatókat kiszámítottuk. Eszerint tehát az az n—1-edfokú rac. egész függvény, mely a megadott a_1,... a_n helyeken az $f(a_1)$,... $f(a_n)$ számértékeket veszi fel, a következő:

$$\varphi(x)=f(a_1)+f_1(a_2)(x-a_1)+f_2(a_3)(x-a_1)(x-a_2)+$$
$$+f_3(a_4)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+\cdots$$
$$+f_{n-1}(a_n)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}),$$

ahol az $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ meghatározására a β) alatti rekurrens eljárás szolgál.

Ez a $\varphi(x)$ $n-1$-edfokú *Ampère*-féle közelítő függvény természetesen csak alakjára nézve különbözik a Lagrange-féle közelítő függvénytől. De éppen ez az alakja teszi gyakorlati szempontból használhatóbbá. Alkalmazása ugyanis úgy történik, hogy az adott $a_1, a_2, \ldots a_n$ és az észlelt $f(a_1), \ldots f(a_n)$ számértékekből sorban kiszámítjuk az $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ együtthatókat és ezzel az $n-1$-edfokú $\varphi(x)$-et. Ha most még egy új észlelet járul az eddigiekhez, akkor egy új

$$f(a_{n+1}) = A_0 + A_1(a_{n+1}-a_1) + A_2(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2) + \cdots$$
$$+ A_n(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{n+1}-a_n)$$

egyenletet függesztünk még az α) alattiakhoz és ebből kiszámítjuk az A_n-et és ezzel az új, most már n-edrendű közelítő függvényt egyszerűen úgy kapjuk meg, hogy az előbbi $\varphi(x)$-hez még az

$$A_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

új tagot hozzáillesztjük. Minden új észlelet tehát a közelítő függvénynek egy-egy új taggal való megtoldását vonja maga után.

Ha az $f(x)$ helyett egy, az $a_1, a_2, \ldots a_n$-től különböző x helyen a $\varphi(x)$-et mondjuk, akkor az elkövetett hiba, miként láttuk, a következő alakú:

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

ahol ξ egy, az $a_1, a_2, \ldots a_n$, x között levő hely. Eszerint tehát az x helyen:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

Az $f(x)$ ezen alakjának és az interpolációs függvények segítségével előállított γ) alatti alakjának összehasonlításából egy igen fontos következtetést vonhatunk az interpolációs függvényekre.

A γ) alatti képlet szerint ugyanis:

$$f(x) = \varphi(x) + (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)f_n(x),$$

tehát

$$f_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Ez azt fejezi ki, hogy az $a_1, a_2, \ldots a_n$ számadatokkal az $f(x)$-ből megalkotott n-ik interpolációs függvény az x helyen egyenlő az $f(x)$ függvény n-ik differenciálhányadosával egy, az $a_1, a_2, \ldots a_n$ és x között (tehát a legszélsőbbek között) levő ξ helyen, osztva $n!$-al. Ez az interpolációs függvényekre vonatkozó *Schwarz*-féle tétel.*

* H. *Schwarz* Gesammelte Werke II. p. 307.

Ha itt $n=1$ tesszük, akkor

$$\frac{f(x)-f(a_1)}{x-a_1}=f'(\xi)$$

összefüggésre jutunk, amely nem egyéb, mint az ismeretes középértéktétel. Ha pedig $n=2$, akkor

$$f_2(x)=\frac{f_1(x)-f_1(a_2)}{x-a_2}=$$

$$=\frac{f(x)(a_2-a_1)+f(a_1)(x-a_2)+f(a_2)(a_1-x)}{(x-a_1)(x-a_2)(a_2-a_1)}=\frac{f''(\xi)}{2}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a számláló nem más, mint az

$$\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a_2) & a_2 & 1 \\ f(a_1) & a_1 & 1 \end{vmatrix}$$

determinans, a nevező pedig az x, a_2, a_1 Vandermonde-féle determinansa, akkor tehát arra a már levezetett relációra jutunk:

$$\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a_2) & a_2 & 1 \\ f(a_1) & a_1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_1^2 & a_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{f''(\xi)}{2},$$

ahol ξ az x, a_2 és a_1 között levő hely. Ha itt a_1 helyett a betűt, a_2 helyett $a+h$-t és x helyett $a+2h$-t tesszük, akkor az

$$\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a+\vartheta h)$$

relációra jutunk. Az intrpolációs függvényekre vonatkozó *Schwarz*-tétel tehát ezen ismeretes tétel általánosításának tekinthető.

Ha az $a_1, a_2, \dots a_n$ és x helyek mindanayian egy közös a helyhez konvergálnak és az $f^{(n)}(x)$ az a helyen folytonos, akkor a *Schwarz*-tételből a

$$\lim_{x=a_1=\cdots=a_n=a} f_n(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

származik, mely egyenlet az $f(x)$ függvény n-dik differeciálhányadosát közvetlenül határérték gyanánt értelmezi.

9. Az interpolációs függvény szimmetriás alakja. Az $f(x)$ első interpolációs függvénye:

$$f_1(x)=\frac{f(x)-f(a_1)}{x-a_1}=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(a_1)}{a_1-x}$$

alakban írható. Ez az alak x és a_1-re szimmetrikus; azaz nem változik meg, ha x-et a_1-gyel fölcseréljük.

Azt állítjuk már most, hogy általában az n-ik interpolációs függvény, az $f_n(x)$ az $x, a_1, a_2, \dots a_n$ betűkre nézve szimmetrikus. Ezen állítás igazolását teljes indukcióval végezzük. Evégből bevezetjük először is a z-nek

$$\psi(z)=(z-x)(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_{n-1})$$

függvényét, melyben $x, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ meghatározott, tetszőleges számértékeket jelentsenek. $\psi(z)$ n-edfokú racionális egész függvénynek z szerinti differenciálhányadosa, miként már többször láttuk, n tag összege:

$$\psi'(z)=(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_{n-1})+(z-x)(z-a_2)\dots(z-a_{n-1})+\cdots$$
$$+(z-x)(z-a_1)\dots(z-a_{n-2}).$$

Innen következik, ha rendre z helyébe x-et, $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$-et teszünk:

$$\psi'(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1}),$$
$$\psi'(a_1)=(a_1-x)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_{n-1}),\dots,$$
$$\psi'(a_{n-1})=(a_{n-1}-x)(a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

Ezek előrebocsátása után feltesszük, hogy $f_{n-1}(x)$ ilyen alakú:

$$f_{n-1}(x)=\frac{f(x)}{\psi'(x)}+\frac{f(a_1)}{\psi'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{\psi'(a_2)}+\dots+\frac{f(a_{n-1})}{\psi'(a_{n-1})},$$

ahol $\quad \psi(z)=(z-x)(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_{n-1})$

és bebizonyítjuk, hogy ekkor a következő interpolációs függvény: $f_n(x)$ ilyen alakú:

$$f_n(x)=\frac{f(x)}{\omega'(x)}+\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{\omega'(a_2)}+\dots+\frac{f(a_n)}{\omega'(a_n)},$$

ahol: $\quad \omega(z)=(z-x)(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)$

$n+1$-edfokú, megfelelően alkotott racionális egész függvény. A bizonyítás egyszerűen abból áll, hogy az $f_n(x)$ függvényt az $n-1$-ik interpolációs függvény segítségével az értelmezés alapján kiszámítjuk. Ugyanis:

$$f_n(x)=\frac{f_{n-1}(x)-f_{n-1}(a_n)}{x-a_n}$$

és az $f_{n-1}(x)$ és $f_{n-1}(a_n)$ feltételezett kifejezéseit ide behelyettesítve:

$$f_n(x)=\frac{1}{x-a_n}\Bigg\{\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})}+$$
$$+\frac{f(a_1)}{(a_1-x)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_{n-1})}+\cdots$$
$$+\frac{f(a_{n-1})}{(a_{n-1}-x)(a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2})}-$$

$$-\frac{f(a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}-$$

$$-\frac{f(a_1)}{(a_1-a_n)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_{n-1})}-\ldots$$

$$-\frac{f(a_{n-1})}{(a_{n-1}-a_n)(a_{n-1}-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_{n-2})}\Big\},$$

ahol a negativ előjelű tagok a pozitivokból egyszerűen úgy állíthatók elő, hogy x helyett a_n-et írunk. Minthogy:

$$\frac{f(a_i)}{(a_i-x)(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{n-1})}-$$

$$-\frac{f(a_i)}{(a_i-a_n)(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{n-1})}=$$

$$=\frac{(x-a_n)f(a_i)}{(a_i-x)(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_n)},$$

tehát, ha bevezetjük a $\psi(z)$-nek megfelelően az $n+1$-edfokú rac. egész függvényt:

$$\omega(z)=(z-x)(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n),$$

mely a $\psi(z)$-től csak abban különbözik, hogy még egy $z-a_n$ tényezőt hozzácsatoltunk, akkor azonnal látjuk, hogy az utolsó kifejezés nem más, mint: $\frac{(x-a_n)f(a_i)}{\omega'(a_i)}$.

Ha már most az elől álló $\frac{1}{x-a_n}$-el beszorzunk, akkor azt kapjuk, hogy:

$$f_n(x)=\frac{f(x)}{\omega'(x)}+\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{\omega'(a_2)}+\cdots+\frac{f(a_n)}{\omega'(a_n)}, \qquad \alpha)$$

tehát $f_n(x)$ éppen olyan alkotású, mint az $f_{n-1}(x)$. Azt közvetlen számítással láttuk, hogy $f_1(x)$ ilyen alakú. Ugyanis, ha $n=1$, akkor $\omega(z)=(z-x)(z-a_1)$ másodfokú egész függvény és

$$\omega'(z)=(z-x)+(z-a_1), \quad \text{tehát} \quad \omega'(x)=x-a_1, \ \omega'(a_1)=a_1-x$$

és így:
$$f_1(x)=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(a_1)}{a_1-x}.$$

Minthogy tehát az $\alpha)$ alatti formula $n=1$ esetében érvényes és kimutattuk, hogy ha $n-1$-re érvényes, fennáll n-re is, tehát minden n-re nézve igaz, hogy:

$$f_n(x)=\frac{f(x)}{\omega'(x)}+\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{\omega'(a_2)}+\cdots+\frac{f(a_n)}{\omega'(a_n)},$$

ahol $\omega(z)=(z-x)(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)$

és $\omega'(x)$, $\omega'(a_1)$,... $\omega'(a_n)$ az $\omega'(z)$ számértékei az x, a_1, a_2,... a_n helyeken. Ezzel az interpolációs függvényeket a kívánt szimmetrikus alakban előállítottuk.

Ha most visszatérünk az *Ampère-féle közelítő függvényhez*, vagyis ahhoz az $n-1$-edfokú rac. egész függvényhez, mely az $a_1, a_2, \dots a_n$ helyeken az $f(x)$-el megegyezik és melyet

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x-a_1)+A_2(x-a_1)(x-a_2)+\cdots$$
$$+A_{n-1}(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})$$

alakban állítottunk elő, akkor $A_0, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ együtthatókat most az adott függvénynek az $a_1 \dots a_n$ helyeken fölvett értékeivel közvetlenül kifejezhetjük. Ugyanis azt találtuk, hogy

$$A_0=f(a_1),\ A_1=f_1(a_2),\ A_2=f_2(a_3),\dots A_i=f_i(a_{i+1}),\dots A_{n-1}=f_{n-1}(a_n)$$

és minthogy általában

$$f_i(x)=\frac{f(x)}{\omega'(x)}+\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}+\dots+\frac{f(a_i)}{\omega'(a_i)},$$

ahol
$$\omega(z)=(z-x)(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_i),$$

tehát: (az első tagot $x=a_{i+1}$ helyettesitése után utolsónak téve)

$$A_i=\frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_{i+1})}+$$
$$+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_{i+1})}+\cdots \qquad \beta)$$
$$+\frac{f(a_{i+1})}{(a_{i+1}-a_1)(a_{i+1}-a_2)\dots(a_{i+1}-a_i)}.$$

10. A Newton-féle interpoláció. Ha

$$a_1=a,\ a_2=a+h,\ a_3=a+2h,\dots a_n=a+(n-1)h,$$

vagyis az adott $a_1, a_2 \dots a_n$ észlelési helyek arithmetikai sort alkotnak h különbséggel, akkor azt mondjuk, hogy æquidistans interpolációval, vagy *Newton-féle interpolációval* van dolgunk. Ez esetben a $\varphi(x)$ $n-1$-edfokú közelítő függvény a következő alakú:

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)(x-a-h)+$$
$$+A_3(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)+\cdots$$
$$+A_{n-1}(x-a)(x-a-h)\dots(x-a-\overline{n-2}h)$$

Számítsuk ki az itt szereplő $A_0, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ együtthatókat. Evégből nem kell egyebet tennünk, mint a β) alatti formulában $a_1, a_2, \dots$ helyett $a, a+h, a+2h$-t,... helyettesiteni. Vegyük szemügyre az egyes tagok nevezőit.

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_{i+1})=(-1)^i 1.2.3\dots ih^i=(-1)^i i!\,h^i$$
$$(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_{i+1})=(-1)^{i-1}.1.1.2.3\dots(i-1)h^i=$$
$$=(-1)^{i-1}(i-1)!\,h^i$$
$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_3-a_{i+1})=(-1)^{i-2}.2.1.2.3\dots(i-2)h^i=$$
$$=(-1)^{i-2}2.(i-2)!\,h^i$$
$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)\dots(a_4-a_{i+1})=(-1)^{i-3}.3.2.1.2.3\dots(i-3)h^i=$$
$$=(-1)^{i-3}.3!(i-3)!\,h^i$$
. . . .
$$(a_{i+1}-a_1)(a_{i+1}-a_2)\dots(a_{i+1}-a_i)=i.(i-1)(i-2)\dots 1h^i=i!\,h^i$$

és így a β) alatti kifejezést fordított sorrendben írva:

$$A_i=\frac{1}{i!\,h^i}\Big\{f(a+ih)-\binom{i}{1}f(a+\overline{i-1}h)+$$
$$+\binom{i}{2}f(a+\overline{i-2}h)+\dots+(-1)^i f(a)\Big\}.$$

Így például:

$$A_0=f(a),\ A_1=\frac{1}{h}\{f(a+h)-f(a)\},$$
$$A_2=\frac{1}{2h^2}\{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)\},$$
$$A_3=\frac{1}{3!\,h^3}\{f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)\}.$$

Az $A_0, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ együtthatók eszerint meghatároztattak az $f(x)$ függvénynek az észleleti a, $a+h$, $a+2h, \dots$ helyeken fölvett értékeiből.

Bemutatjuk ezenkívül még az együtthatóknak egy más, egyszerűbb meghatározási módját is, amely lépésenkint állapitja meg a számértékeiket.

Azt látjuk ugyanis, hogy $hA_1=f(a+h)-f(a)$; vagyis hA_1 nem más, mint az $f(x)$ növekménye az a helyen, ha a változó növekedése h. Jelöljük ezt a növekményt, melyet *véges különbségnek* is nevezünk: $\Delta f(a)$-val; vagyis $\Delta f(a)=f(a+h)-f(a)$ tesszük. Ezen jelöléssel: $hA_1=\Delta f(a)$.

A második együtthatóról is észrevesszük, hogy

$$2h^2A_2=f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)$$

ilyen alakban írható:

$$f(a+2h)-f(a+h)-[f(a+h)-f(a)].$$

vagyis az előbbi jelöléssel:

$$\Delta f(a+h)-\Delta f(a).$$

Ezt a véges különbséget így jelöljük $\Delta^2 f(a)$ és az $f(x)$ második véges különbségének nevezzük. Ezen jelöléssel tehát: $2h^2A_2=\Delta^2 f(a)$. Így haladunk tovább. Egymásután értelmezzük a $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a),\ldots$ véges különbségeket oly módon, hogy $\Delta^k f(a)=\Delta[\Delta^{k-1}f(a)]$ legyen. Azt állítjuk már most, hogy általában:

$$k!\,h^k A_k=\Delta^k f(a).$$

Ezt az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk be. Feltesszük ugyanis, hogy

$$(k-1)!\,h^{k-1}A_{k-1}=f(a+\overline{k-1}h)-\binom{k-1}{1}f(a+\overline{k-2}h)+$$
$$+\binom{k-1}{2}f(a+\overline{k-3}h)+\cdots+(-1)^{k-1}f(a)=\Delta^{k-1}f(a) \qquad \gamma)$$

és bebizonyítjuk, hogy a következő

$$f(a+kh)-\binom{k}{1}f(a+\overline{k-1}h)+\binom{k}{2}f(a+\overline{k-2}h)-\cdots+(-1)^k f(a) \qquad \delta)$$

nem más, mint $\Delta^k f(a)$.

Ugyanis:

$$\Delta^k f(a)=\Delta[\Delta^{k-1}f(a)]=\Delta^{k-1}f(a+h)-\Delta^{k-1}f(a).$$

Ha a γ) alatti kifejezésben a helyett $a+h$-t tesszük, lesz:

$$\Delta^{k-1}f(a+h)=f(a+kh)-\binom{k-1}{1}f(a+\overline{k-1}h)+\binom{k-1}{2}f(a+\overline{k-2}h)+\cdots$$
$$+(-1)^r\binom{k-1}{r}f(a+\overline{k-r}h)+\cdots+(-1)^{k-1}f(a+h)$$

és ha ebből a γ) alatti $\Delta^{k-1}f(a)$-t levonjuk, tekintetbe véve a $\binom{k-1}{r}+\binom{k-1}{r-1}=\binom{k}{r}$ egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$$\Delta^{k-1}f(a+h)-\Delta^{k-1}f(a)=f(a+kh)-\binom{k}{1}f(a+\overline{k-1}h)+$$
$$+\binom{k}{2}f(a+\overline{k-2}h)-\cdots+(-1)^k f(a),$$

tehát valóban a δ) alatti kifejezésre jutunk, melyről tudjuk, hogy: $k!\,h^kA_k$. Így tehát bebizonyítottuk, hogy

$$A_0=f(a),\ hA_1=\Delta f(a),\ 2h^2A_2=\Delta^2 f(a),\ldots\ k!\,h^kA_k=\Delta^k f(a),\ldots$$

Eszerint tehát a Newton-féle $n-1$-edfokú közelítő függvény így írható:

$$\varphi(x)=f(a)+\frac{\Delta f(a)}{h}(x-a)+\frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2}(x-a)(x-a-h)+$$
$$+\frac{\Delta^3 f(a)}{3!\,h^3}(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)+\cdots$$
$$+\frac{\Delta^{n-1}f(a)}{(n-1)!\,h^{n-1}}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}h)$$

és ha még a meghatározott maradéktagot is figyelembe vesszük, akkor tehát az $f(x)$ függvény értéke az x helyen:

$$f(x)=f(a)+\frac{\Delta f(a)}{h}(x-a)+\frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2}(x-a)(x-a-h)+\cdots$$
$$+\frac{\Delta^{n-1}f(a)}{(n-1)!\,h^{n-1}}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}h)+$$
$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h). \qquad A)$$

Még egyszer felírjuk, hogy ezen nevezetes *Newton-féle interpolációs formulában* együtthatókul szereplő véges különbségek:

$$\Delta f(a)=f(a+h)-f(a),\ \Delta^2 f(a)=f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)\ldots\ \Delta^k f(a)=$$
$$=f(a+kh)-\binom{k}{1}f(a+\overline{k-1}h)+\binom{k}{2}f(a+\overline{k-2}h)+\cdots+(-1)^k f(a). \qquad B)$$

Az $A)$ alatti formulából éppen úgy, mint az általános esetben tettük, az æquidistans észlelési helyek esetében is megállapíthatjuk a Schwarz-formulát, amellyel a magasabbrendű differenciálhányadosokat, miként már jeleztük, mint határértékeket állíthatjuk elő.

Ha ugyanis fölírjuk az $A)$ formula szerint az $f(x)$-et először az n-ik, azután az $\overline{n+1}$-ik tagig bezárólag, akkor

$$f(x)=f(a)+\frac{\Delta f(a)}{h}(x-a)+\frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2}(x-a)(x-a-h)+\cdots$$
$$+\frac{\Delta^{n-1}f(a)}{(n-1)!\,h^{n-1}}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}h)+$$
$$+\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}(x-a)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)$$

és
$$f(x)=f(a)+\frac{\Delta f(a)}{h}(x-a)+\frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2}(x-a)(x-a-h)+\cdots$$
$$+\frac{\Delta^n f(a)}{n!\,h^n}(x-a)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)+$$
$$+\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)\ldots(x-a-nh),$$

ahol η és ξ az $a\ldots a+nh$ közben vannak, ha x is e közben van.

Tegyük most mindkét formulában: $x=a+nh$. Akkor az elsőből:

$$f(a+nh)=f(a)+n\Delta f(a)+\binom{n}{2}\Delta^2 f(a)+\binom{n}{3}\Delta^3 f(a)+\cdots$$
$$+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}f(a)+f^{(n)}(\eta)\cdot h^n$$

lesz; a második pedig:

$$f(a+nh)=f(a)+n\Delta f(a)+\binom{n}{2}\Delta^2 f(a)+\binom{n}{3}\Delta^3 f(a)+\cdots$$
$$+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}f(a)+\Delta^n f(a),$$

tehát bárminő számot jelentsen is h (hacsak az $a \ldots a+nh$ szakaszban $f(x)$ mindenütt $n+1$-szer differenciálható):

$$f^{(n)}(\eta)=\frac{\Delta^n f(a)}{h^n},$$

vagy részletesen írva *B)* szerint:

$$f^{(n)}(\eta)=\frac{f(a+nh)-\binom{n}{1}f(a+\overline{n-1}h)+\binom{n}{2}f(a+\overline{n-2}h)+\cdots+(-1)^n f(a)}{h^n}$$

és ha $f^{(n)}(x)$ az a hely környezetében folytonos, akkor, ha h a 0 felé konvergál, $a+h$, $a+2h, \ldots$ mind az a-hoz konvergálnak és így a közbenső η hely is az a-hoz konvergál, tehát $f^{(n)}(x)$ folytonossága miatt:

$$f^{(n)}(a)=\lim_{h=0}\frac{f(a+nh)-\binom{n}{1}f(a+\overline{n-1}h)+\binom{n}{2}f(a+\overline{n-2}h)+\cdots+(-1)^n f(a)}{h^n}$$

Ez az a formula, mely az n-ik diff. hányadost közvetlenül határérték gyanánt tünteti fel. $n=1$, $n=2$ esetében a már ismeretes

$$f'(a)=\lim_{h=0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\quad f''(a)=\lim_{h=0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}$$

képletekre jutunk.

$n=3$, $n=4$ esetében:

$$f'''(a)=\lim_{h=0}\frac{f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)}{h^3},$$

$$f^{\mathrm{IV}}(a)=\lim_{h=0}\frac{f(a+4h)-4f(a+3h)+6f(a+2h)-4f(a+h)+f(a)}{h^4}.$$

A Newton-féle interpolációs formulát sokszor használjuk olyan esetben, midőn $a=0$ és $h=1$; ezért ezt a speciális alakját külön is felírjuk; mindjárt a maradéktagot is hozzátéve:

$$f(x)=f(0)+x\Delta f(0)+x(x-1)\frac{\Delta^2 f(0)}{2}+x(x-1)(x-2)\frac{\Delta^3 f(0)}{3!}+\cdots$$
$$+x(x-1)\ldots(x-n+1)\frac{\Delta^n f(0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x(x-1)\ldots(x-n),$$

vagy a binomialis együttható jelével:

$$f(x)=f(0)+\binom{x}{1}\Delta f(0)+\binom{x}{2}\Delta^2 f(0)+\binom{x}{3}\Delta^3 f(0)+\cdots$$
$$+\binom{x}{n}\Delta^n f(0)+\binom{x}{n+1}f^{(n+1)}(\xi).$$

A $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a), \ldots$ véges különbségek a már ismertetett módon igen egyszerűen számíthatók ki. Ha ugyanis az $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h), \ldots$ számértékeket horizontális sorban írjuk fel, akkor két szomszédos közötti különbség sorban: $\Delta f(a)$, $\Delta f(a+h)$, $\Delta f(a+2h), \ldots$ és ezen számok közötti különbségek sora:

$$\Delta^2 f(a),\ \Delta^2 f(a+h),\ \Delta^2 f(a+2h),\ \Delta^2 f(a+3h), \ldots$$

s í. t., miként a következő összeállítás mutatja:

$$\begin{array}{cccc} f(a), & f(a+h), & f(a+2h), & f(a+3h), \ldots \\ \Delta f(a) & \Delta f(a+h) & \Delta f(a+2h) & \Delta f(a+3h) \ldots \\ \Delta^2 f(a) & \Delta^2 f(a+h) & \Delta^2 f(a+2h) & \Delta^2 f(a+3h) \ldots \\ \Delta^3 f(a) & \Delta^3 f(a+h) & \Delta^3 f(a+2h) & \Delta^3 f(a+3h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Megjegyezzük még, hogy ha az *A)* alatti formulában sorban $x=a+h$, $a+2h, \ldots$ $a+(n-1)h$ tesszük, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$f(a+kh)=f(a)+\binom{k}{1}\Delta f(a)+\binom{k}{2}\Delta^2 f(a)+\cdots+\binom{k}{k}\Delta^k f(a)$$
$$k=1,\ 2, \ldots\ n-1.$$

Ez az egyenletrendszer a $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a), \ldots$ $\Delta^{n-1} f(a)$-ra nézve lineáris egyenletrendszer, melyből ezekre a *B)* alatti kifejezéseknek kell következniök, azaz ezen egyenletrendszer megoldása:

$$\Delta^k f(a)=f(a+kh)-\binom{k}{1}f(a+\overline{k-1}h)+$$
$$+\binom{k}{2}f(a+\overline{k-2}h)+\cdots+(-1)^k f(a),$$
$$k=1,\ 2, \ldots\ n-1,$$

amely megint az $f(a+h)$, $f(a+2h), \ldots$ $f\big(a+(n-1)h\big)$-ra nézve lineáris egyenletrendszer, melyből az *A)* alatti megoldások adódnak. Az *A)* alatti rendszer tehát a *B)* alatti megoldási rendszerének tekinthető és viszont.

11. A Newton-féle interpolációs képlet néhány egyszerű alkalmazása. A számításokat megkönnyítik a következő egyszerű megjegyzések:

1) Ha $$f(x)=A_1 f_1(x)+A_2 f_2(x)+\cdots+A_r f_r(x),$$

ahol A_1, $A_2, \ldots$ A_r állandó számok, akkor:

$$\Delta f(x)=A_1 \Delta f_1(x)+A_2 \Delta f_2(x)+\cdots+A_r \Delta f_r(x),$$

mert hiszen:

$$f(x+h)-f(x)=A_1[f_1(x+h)-f_1(x)]+A_2[f_2(x+h)-f_2(x)]+\cdots+A_r[f_r(x+h)-f_r(x)].$$

2) Ha $(x)=f_1(x)\,.\,f_2(x)$,

akkor
$$f(x+h)-f(x)=f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x)\,.\,f_2(x)=$$
$$=f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x+h)f_2(x)+f_1(x+h)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)=$$
$$=f_1(x+h)\,\Delta f_2(x)+f_2(x)\,\Delta f_1(x),$$

vagyis:
$$\Delta f(x)=f_1(x+h)\,\Delta f_2(x)+f_2(x)\,\Delta f_1(x)$$

formula szolgáltatja a szorzat véges különbségét.

3) Az x^n véges különbsége, ha n pozitiv egész szám, könnyen meghatározható:

$$\Delta x^n=(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n,$$

ebből következik, hogy minden n-edfokú racionális egész függvény véges különbsége: $n-1$-edfokú racionális egész függvény, vagyis a véges különbségelés művelete ép úgy leszállítja a racionális egész függvény fokszámát, mint a differenciálás. Ha az n-edfokú racionális egész függvény:

$$(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n,$$

akkor:
$$\Delta\, f(x)=nA_0hx^{n-1}+\cdots$$
$$\Delta^2 f(x)=n(n-1)A_0h^2x^{n-2}+\cdots$$
$$\Delta^n f(x)=n!\,A_0h^n$$

és minden magasabb rendű különbség: 0.

4) A legegyszerűbben állítható elő az ilyen alakú racionális egész függvény véges különbsége:

$$f(x)=(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h),$$

ugyanis:
$$f(x+h)=(x-a+h)(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}h),$$

tehát:
$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=nh(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}h),$$

vagyis az utolsó tényező elhagyandó és nh szorzóul teendő. Innen tovább:

$$\Delta^2 f(x)=n(n-1)h^2(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-3}h),$$
$$\Delta^3 f(x)=n(n-1)(n-2)h^3(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-4}h),$$

s í. t.

Ha $h=1$, $a=0$ tesszük, akkor az

$$f(x)=\binom{x}{n}$$

binomiális együttható véges különbségei sorban: $\binom{x}{n-1}, \binom{x}{n-2}, \ldots$

5) Igen egyszerű még az e^x függvény véges különbségének az előállítása is. Ugyanis:

$$\Delta e^x=e^{x+h}-e^x=(e^h-1)e^x,$$

tehát e^x egyszerűen e^h-1-gyel szorzódik. Ebből azonnal következik, hogy:

$$\Delta^2 e^x=(e^h-1)^2e^x,\quad \Delta^3 e^x=(e^h-1)^3e^x,\ldots \text{ s í. t.}$$

Ugyanígy:
$$\Delta a^x=a^x(a^h-1),\quad \Delta^2 a^x=a^x(a^h-1)^2,\ldots$$

6) Ha $f(x)$ n-edfokú racionális egész függvény, akkor, miként láttuk: $\Delta^{n+1}f(x)=0$; vagyis az $\overline{n+1}$-ik rendű differencia: zérus. Az $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$,... számok sorozatát *n-edrendű számtani sornak* nevezzük. Az ilyen felsőbbrendű számtani soroknál is ugyanazon feladatokkal szoktunk foglalkozni, mint a közönséges számtani sornál, (az elsőrendűnél): a k-ik tag meghatározásával és a k első tag összegének kiszámításával.

Jelöljük az $f(0), f(1), f(2),\ldots$ számokat sorban: $u_0, u_1, u_2,\ldots$-vel; és a megfelelő véges különbségeket: $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2,\ldots, \Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1,\ldots$-el s így tovább. Sorban felírva:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
u_0, & & u_1, & & u_2, & & u_3, & & u_4,\ldots \\
& \Delta u_0, & & \Delta u_1, & & \Delta u_2, & & \Delta u_3,\ldots & \\
& & \Delta^2 u_0, & & \Delta^2 u_1, & & \Delta^2 u_2,\ldots & & \\
& & & \Delta^3 u_0, & & \Delta^3 u_1,\ldots & & &
\end{array}
$$

Igy például, ha $f(x)=x^2$, akkor a megfelelő másodrendű számtani sor az ő különbségi soraival:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0, & & 1, & & 4, & & 9,\ldots \\
& 1, & & 3, & & 5,\ldots & \\
& & 2, & & 2,\ldots & & \\
& & & 0,\ldots & & &
\end{array}
$$

Ha $f(x)=x^3$, a megfelelő harmadrendű sor:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0, & & 1, & & 8, & & 27, & & 64,\ldots \\
& 1, & & 7, & & 19, & & 37,\ldots & \\
& & 6, & & 12, & & 18,\ldots & & \\
& & & 6, & & 6,\ldots & & & \\
& & & & 0,\ldots & & & &
\end{array}
$$

Ha $f(x)=x^4$, akkor már előre tudjuk, hogy $\Delta^4 x^4=4!=24$. A sor a következő (csak annyi tagot írtunk fel, amennyi a számításhoz okvetlenül szükséges):

$$
\begin{array}{l}
0,\quad 1,\quad 16,\quad 81,\ldots \\
\quad 1,\quad 15,\quad 65,\ldots \\
\qquad 14,\quad 50,\ldots \\
\qquad\quad 36,\ldots \\
\qquad\qquad 24,\ldots \\
\qquad\qquad\quad 0,\ldots
\end{array}
$$

A felsőbb számtani sorra vonatkozó két feladatot most már megoldhatjuk. A k-ik tag ugyanis $f(k)$ az $A)$ alatti formula szerint:

$$(k)=f(0)+\binom{k}{1}\Delta f(0)+\binom{k}{2}\Delta^2 f(0)+\cdots+\binom{k}{k}\Delta^k f(0),$$

vagyis: $$u_k=u_0+\binom{k}{1}\Delta u_0+\binom{k}{2}\Delta^2 u_0+\cdots+\binom{k}{k}\Delta^k u_0.$$

Az összeg alkotása végett az adott $u_0, u_1, u_2,\ldots$ sorból ezt a sort készítjük:

$$0,\ u_0,\ u_0+u_1,\ u_0+u_1+u_2,\ u_0+u_1+u_2+u_3,\ldots$$

melyet röviden: $$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ldots$$

-el jelölünk; tehát általában $s_k=u_0+u_1+\cdots+u_{k-}$ és $s_0=0$.

A most készített sor, mint azonnal látjuk, szintén felsőbb számtani sor és pedig, ha az $u_0, u_1, u_2,\ldots$ n-edrendű volt, ez a sor $\overline{n+1}$-edrendű, mert hiszen az első különbségi sora éppen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ Ezen sor $k+1$ indexű tagját, azaz s_{k+1}-et az előbbi formula szerint számítjuk ki: (figyelembe vegyük, hogy $s_0=0$ és $u_0=0$)

$$s_{k+1}=\binom{k+1}{1}u_0+\binom{k+1}{2}\Delta u_0+\binom{k+1}{3}\Delta^2 u_0+\cdots$$

Igy például, ha $f(x)=x^2$, akkor $u_0=0$, $\Delta u_0=1$, $\Delta^2 u_0=2$, $\Delta^3 u_0=0,\ldots$ tehát:

$$s_{k+1}=1^2+2^2+\cdots+k^2=\binom{k+1}{2}+2\binom{k+1}{3}=\frac{k\,.\,(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ha $f(x)=x^3$, akkor: $u_0=0$, $\Delta u_0=1$, $\Delta^2 u_0=6$, $\Delta^3 u_0=6$, $\Delta^4 u_0=0,\ldots$, tehát:

$$s_{k+1}=1^3+2^3+\cdots+k^3=\binom{k+1}{2}+6\binom{k+1}{3}+6\binom{k+1}{4}=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$$

7) Alkalmazzuk a Newton-formulát az e^x előállítására. Legyen $a=0$, $h=1$.

$$f(0)=1,\ \Delta f(0)=e-1,\ \Delta^2 f(0)=(e-1)^2,\ \Delta^3 f(0)=(e-1)^3,\ldots$$

tehát:

$$e^x=1+x(e-1)+\binom{x}{2}(e-1)^2+\binom{x}{3}(e-1)^3+\cdots+\binom{x}{n}(e-1)^n+\binom{x}{n+1}e^{\xi}.$$

ahol $0<\xi<x$ vagy $0<\xi<n$. Ha x pozitiv egész szám és ha $x=m\leq n$, akkor a jobboldalon a maradéktagtól eltekintve, racionális egész függvény áll, mely az $m+1$ számú: $0, 1, 2, \ldots m$ egész értékekre nézve megadja az e^x-et, mert hiszen a binomiális tétel szerint:

$$1+m(e-1)+\binom{m}{2}(e-1)^2+\cdots+\binom{m}{m}(e-1)^m=(1+e-1)^m=e^m.$$

12. Az Hermite-féle interpoláció. A Lagrange-féle interpolációs formulával olyan n-edfokú racionális egész függvényt határoztunk meg, mely $n+1$ megadott helyen az $f(x)$ függvény megadott értékeit vette fel. A véges Taylor sorral pedig olyan n-edfokú racionális függvényt állapítottunk meg, melynek egy megadott helyen az értéke és első n-differenciálhányadosának az értéke megegyezett az $f(x)$ és az ő differenciálhányadosainak megfelelő értékeivel. Közelfekvő gondolat már most olyan racionális egész függvény keresése, mely az $f(x)$ függvénnyel a megadott $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken megegyezzék, azonkívül pedig ugyanezen helyeken, vagy e helyek egy részében, mondjuk az $a_1, a_2, \ldots a_r$ $(r\leq n)$ helyeken a közelítő függvénynek az adott $f(x)$-el megegyező differenciálhányadosai legyenek; és ugyanezen helyeken, vagy ezek egy részében, mondjuk az $a_1, a_2 \ldots a_s$ $(s\leq r)$ helyeken a második differenciálhányadosok is megegyeznek s i. t.

Ezúttal csak ezt az egyszerű feladatot akarjuk tárgyalni: Határozzunk meg olyan $\varphi(x)$ racionális egész függvényt, mely az $f(x)$-el a megadott $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken megegyezik, azaz:

$$\varphi(a_1)=f(a_1),\ \varphi(a_2)=f(a_2)\ldots\ \varphi(a_n)=f(a_n)$$

legyen és ezenkívül az $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ $(r<n)$ helyeken a $\varphi(x)$ diff.

hányadosai is megegyezzenek az $f(x)$ megfelelő differenciálhányadosaival, azaz:

$$\varphi'(a_1)=f'(a_1),\ \varphi'(a_2)=f'(a_2),\dots\ \varphi'(a_r)=f'(a_r)$$

legyen. A $\varphi(x)$ racionális egész függvénynek tehát $n+r$ feltételt kell kielégítenie. Azt állítjuk, hogy ezeket egy $n+r-1$-edfokú racionális egész függvénnyel elérhetjük. Ha ugyanis $\varphi(x)$-et ebben az alakban írjuk:

$$\varphi(x)=A_0x^{n+r-1}+A_1x^{n+r-2}+\dots+A_{n+r-1},$$

akkor tehát az $A_0, A_1,\dots A_{n+r-1}$ $n+r$ számú együtthatóknak ezen egyenletrendszert kell kielégíteniök:

$$A_0a_i^{n+r-1}+A_1a_i^{n+r-2}+\dots+A_{n+r-1}=f(a_i)$$
$$i=1,\ 2,\dots\ n,$$

$$(n+r-1)A_0a_k^{n+r-2}+(n+r-2)A_1a_k^{n+r-3}+\dots+A_{n+r-2}=f'(a_k)$$
$$k=1,\ 2,\dots\ r.$$

Megmutatjuk, hogy ezen egyenletrendszer determinánsa nem lehet 0, ha az $a_1, a_2,\dots a_n$ különbözők, vagyis, hogy ez a rendszer az $A_0, A_1,\dots A_{n+r-1}$ számokra nézve mindig megoldható és így a keresett $n+r-1$-edfokú racionális egész függvény meghatározható.

Tegyük fel az ellenkezőt, vagyis azt, hogy e determinans 0. De úgy legyen e determinans 0, hogy nem tűnik el minden első rendű aldeterminansa. Ha valamelyik sorhoz tartozó aldeterminansokat, melyek között feltételünk szerint el nem tünő is van, $C_0, C_1, C_2,\dots C_{n+r-1}$-gyel jelöljük és ezekkel sorban a determinans egyes sorait megszorozzuk, akkor, minthogy a determinans feltétel szerint 0, a következő egyenleteket kapjuk:

$$C_0a_i^{n+r-1}+C_1a_i^{n+r-2}+\dots+C_{n+r-1}=0.$$
$$i=1,\ 2,\dots\ n$$

$$(n+r-1)C_0a_k^{n+r-2}+(n+r-2)C_1a_k^{n+r-2}+\dots+C_{n+r-2}=0$$
$$k=1,\ 2,\dots\ r.$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy a

$$\psi(x)=C_0x^{n+r-1}+C_1x^{n+r-2}+\dots+C_{n+r-1}$$

$n+r-1$-edfokú egész függvény eltűnik, ha $x=a_1, a_2,\dots a_n$ és a $\psi'(x)$ eltűnik, ha x helyébe $a_1, a_2,\dots a_r$, vagyis $\psi(x)=0$ egyenletnek az $a_1, a_2,\dots a_n$ gyökei és pedig az első r: az $a_1, a_2\dots a_r$ kétszeres gyök; a $\psi(x)=0$ egyenletnek tehát $n+r$ gyöke volna. A $\psi(x)$ azonban csak $n+r-1$-edfokú. $n+r$ gyöke tehát az esetben, ha a $C_0, C_1,\dots C_{n+r-1}$ nem csupa zérus, nem lehet.

Arra jutottunk tehát, hogy ha a rendszer determinansa zérus, akkor kell, hogy mindenik aldeterminánsa is 0 legyen. Ha az első oszlopot és az utolsó sort elhagyjuk, ugyanolyan alkotású determinanst kapunk, mint az eredeti volt, csak rendszáma eggyel alacsonyabb. Ez is csak úgy tűnhetik el, ha minden aldeterminansa 0 s i. t. r lépés után azonban már a diff. hányadosokra vonatkozó összes r sort elhagytuk, a megmaradó determinans nem más, mint az $a_1, a_2, \ldots a_n$ Vandermonde-féle determinansa, mely nem lehet 0, ha az $a_1, a_2, \ldots a_n$ között egyenlők nincsenek. Eszerint tehát az a feltevés, hogy a szóban forgó egyenletrendszer determinansa 0, nem állhat meg és így valóban az $A_0, A_1, \ldots A_{n+r-1}$ együtthatók teljesen meghatározhatók, vagyis elvben kimutattuk, hogy létezik egy oly $n+r-1$-edfokú racionális egész függvény, mely teljesíti ezen $n+r$ kívánságot:

$$\varphi(a_1)=f(a_1),\ \varphi(a_2)=f(a_2), \ldots \varphi(a_n)=f(a_n),$$
$$\varphi'(a_1)=f'(a_1), \ldots \varphi'(a_r)=f'(a_r).$$

Magasabb fokú rac. egész függvény természetesen számtalan sok ilyen készíthető. Ha ugyanis

$$\omega(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \ldots (x-a_r)^2(x-a_{r+1}) \ldots (x-a_n)$$

tesszük, akkor, mint azonnal látjuk, $\omega(x)$ az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken és $\omega'(x)$ az $a_1, a_2, \ldots a_r$ helyeken eltűnik, tehát minden $\varphi(x)+$ $+\psi(x).\omega(x)$ alakú függvény, melyben $\psi(x)$ tetszésszerinti rac. egész függvény, szintén teljesíti az $n+r$ feltételt.

A keresett $\varphi(x)$ közelítő függvény megalkotása már most a következőképpen végezhető: Legyen $\psi(x)$ azon $n-1$-edfokú rac. egész függvény, mely az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken az $f(a_1), f(a_2) \ldots f(a_n)$ értékeket veszi fel. Ez a $\psi(x)$ akár a Lagrange, akár az Ampère-féle alakban előállítható. Az első formája:

$$\psi(x)=\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}\frac{\omega(x)}{x-a_1}+\frac{f(a_2)}{\omega'(a_2)}\frac{\omega(x)}{x-a_2}+\cdots+\frac{f(a_n)}{\omega'(a_n)}\frac{\omega(x)}{x-a_n},$$

ahol $\omega(x)=(x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n)$.

A második formája pedig

$$\psi(x)=f(a_1)+f_1(a_2)(x-a_1)+f_2(a_3)(x-a_1)(x-a_2)+\cdots$$
$$+f_{n-1}(a_n)(x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_{n-1}),$$

ahol az $f_1(x), f_2(x), \ldots f_{n-1}(x)$ az $f(x)$ Ampère-féle interpolációs függvényei.

A $\varphi(x)-\psi(x)$ eltűnik az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken. Ezért a keresett $\varphi(x)$-et már most ebben az alakban írjuk:

$$\varphi(x)=\psi(x)+\omega(x)\varrho(x),$$

ahol $\varrho(x)$ egy még ismeretlen $r-1$-edfokú rac. egész függvény. $\omega(x)$ pedig a már használt $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

Ha x helyébe sorban $a_1, a_2, \ldots a_n$-et tesszük, akkor a $\psi(x)$ sorban az $f(a_1), f(a_2), \ldots f(a_n)$ számértékeket veszi fel és minthogy $\omega(x)$ ezen helyeken eltűnik, tehát valóban:

$$\varphi(a_1)=f(a_1),\ \varphi(a_2)=f(a_2),\ldots\ \varphi(a_n)=f(a_n)$$

első n követelmény teljesítve van. A $\varrho(x)$ meghatározására a további követelmények szolgálnak. Ugyanis:

$$\varphi'(x)=\psi'(x)+\omega(x)\varrho'(x)+\omega'(x)\varrho(x)$$

és ha itt x helyébe sorban $a_1, a_2, \ldots a_r$-et tesszük, akkor (minthogy $\omega(a_1)=\omega(a_2)=\cdots=\omega(a_r)=0$)

$$\varphi'(a_1)=\psi'(a_1)+\omega'(a_1)\varrho(a_1),\ \varphi'(a_2)=\psi'(a_2)+\omega'(a_2)\varrho(a_2),\ldots$$
$$\varphi'(a_r)=\psi'(a_r)+\omega'(a_r)\varrho(a_r),$$

vagyis kell, hogy

$$\varrho(a_1)=\frac{f'(a_1)-\psi'(a_1)}{\omega'(a_1)},\ \varrho(a_2)=\frac{f'(a_2)-\psi'(a_2)}{\omega'(a_2)},\ldots\ \varrho(a_r)=\frac{f'(a_r)-\psi'(a_r)}{\omega'(a_r)}$$

legyen. A $\varrho(x)$ tehát olyan $r-1$-edfokú rac. egész függvény, melynek az $a_1, a_2, \ldots a_r$ helyeken ezen megadott értékei vannak. Ezek segítségével a $\varrho(x)$, pl.: a Lagrange alakban:

$$\varrho(x)=\frac{f'(a_1)-\psi'(a_1)}{\omega'(a_1)\omega_1'(a_1)}\frac{\omega_1(x)}{x-a_1}+\frac{f'(a_2)-\psi'(a_2)}{\omega'(a_2)\omega_1'(a_2)}\frac{\omega_1(x)}{x-a_2}+\cdots$$
$$+\frac{f'(a_r)-\psi'(a_r)}{\omega'(a_r)\omega_1'(a_r)}\frac{\omega_1(x)}{x-a_r},$$

ahol $\omega_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_r)$.

Valamivel áttekinthetőbbé válik a számítás, ha előre a Newton-féléhez hasonló alakban írjuk fel a közelítő $\varphi(x)$ függvényt a következőképpen:

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x-a_1)+\cdots+A_{n-1}(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})+$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)[B_0+B_1(x-a_1)+$$
$$+B_2(x-a_1)(x-a_2)+\cdots+B_{r-1}(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{r-1})]. \quad A)$$

Az első sorban álló kifejezés az, amit előbb $\psi(x)$-el jelöltünk, a második sorban a zárójelben álló $r-1$-edfokú rac. egész függvény pedig az előbb $\varrho(x)$-el jelölt kifejezés. Az itt szereplő

$$A_0, A_1\ldots A_{n-1}, B_0,\ldots B_{r-1}$$

együtthatók meghatározása rekurrens úton eszközölhető. Ugyanis, ha sorban x helyébe $a_1, a_2, \ldots a_n$ tétetik, akkor sorban az $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$

kiszámítható; mert hiszen $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$,... $\varphi(a_n)$ feltételünk szerint: $f(a_1)$, $f(a_2)$,... $f(a_n)$ megadott értékekkel egyenlők. Az így meghatározott együtthatók már az egyszerű interpolációnál szerepeltek, vagyis $A_i=f_i(a_{i+1})$, ahol $f_i(x)$ az i-ik interpolációs függvény. A további $B_0, B_1, \ldots$ együtthatók kiszámítása végett állítsuk elő $\varphi(x)$ diff. hányadosát, a már meghatározott részt $\psi(x)$-el és a zárójelben állót $\varrho(x)$-el jelölve:

$$\begin{aligned}\varphi'(x)=\psi'(x)+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\varrho'(x)+\\+\omega'(x)[B_0+B_1(x-a_1)+B_2(x-a_1)(x-a_2)+\cdots+\\+B_{r-1}(x-a_1)\ldots(x-a_{r-1})]\end{aligned}$$

és így, ha sorban x helyett $a_1, a_2, \ldots a_r$-et tesszük, a $B_0, B_1, \ldots B_{r-1}$ egymás után meghatározhatók.

Végül meghatározzuk itt is a maradéktagot. Ha az $f(x)$ helyett az előbbi, *A)* alatti kifejezést mondjuk, akkor bizonyos hibát követünk el, mely az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyen zérus. Ha $x=b$, akkor a hiba: $f(b)-\varphi(b)$. Jelöljük ezt a hibát így:

$$(b-a_1)^2(b-a_2)^2\ldots(b-a_r)^2(b-a_{r+1})\ldots(b-a_n)\,C$$

és alkossuk meg a

$$F(x)=\varphi(x)+(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_r)^2(x-a_{r+1})\ldots(x-a_n)\,C$$

racionális egész függvényt. Minthogy a $\varphi(x)$-hez függesztett tag az $a_1\ a_2, \ldots a_n$ helyeken eltűnik és e tag diff. hányadosa az $a_1, a_2, \ldots a_r$ helyeken zérus, tehát $F(x)$ is olyan rac. egész függvény, mely az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken az $f(x)$-el megegyezik és azonkívül az $a_1, a_2, \ldots a_r$ helyeken az $F'(x)$ ugyanakkora, mint az $f'(x)$. Ezenkívül azonban még a b helyen is $F(b)=f(b)$, mert hiszen a $\varphi(b)$-hez járuló tag éppen a hiba: $f(b)-\varphi(b)$.

Az $F(x)$ tehát az $n+1$ számú: $a_1, a_2, \ldots a_n$, b helyeken megegyezik az $f(x)$-el; tehát e helyen: $\Phi(x)\equiv F(x)-f(x)=0$ és így a Rolle-tétel értelmében $\Phi'(x)$ n közbenső helyen: zérus. De $\Phi'(x)$ ezenkívül még a megadott $a_1, a_2, \ldots a_r$ helyeken is 0, tehát $\Phi'(x)$ összesen legalább $n+r$ helyen tűnik el. Következésként $\Phi''(x)$ legalább $n+r-1$ közbenső helyen válik zérussá, $\Phi'''(x)$ pedig $n+r-2$ helyen s i. t., végül $\Phi^{(n+r)}$ legalább 1 olyan helyen válik zérussá, mely az $a_1, a_2, \ldots a_n$ és b között van. Jelöljünk egy ilyen helyet ξ-vel.

Minthogy $\varphi(x)$ csak $n+r-1$-edfokú, tehát;

$$\Phi^{(n+r)}(x)=-f^{(n+r)}(x)+(n+r)!\,C$$

és így: $$C=\frac{f^{(n+r)}(\xi)}{(n+r)!}.$$

Eszerint tehát (ha b helyett x-et írunk):

$$f(x)=\varphi(x)+$$

$$+\frac{f^{(n+r)}(\xi)}{(n+r)!}(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_r)^2(x-a_{r+1})(x-a_{r+2})\ldots(x-a_n).$$

13. **Az interpolációs formula alkalmazása a táblázatoknál.** Nem akarunk túlságosan a részletekbe hatolni, azért csak inkább példaképpen mutatjuk meg, hogy a logarithmus táblázat használatánál elkövetett hibát mennyivel pontosabban lehet az interpolációs képlet segítségével megállapítani, mint a Taylor sorral, ahogy eddig tettük. Tegyük fel, hogy a táblázatból kivehetjük a ν jegyű egész számok logarithmusait. Ilyen ν jegyű szám legyen N, a következő: $N+1$. Határozzuk meg az $N+x$ logarithmusát, ahol $x<1$. Az

$$f(x)=f(0)+x\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2}f''(\xi)$$

formulát használjuk, ahol $\Delta f(0)=f(1)-f(0)$. A jelen esetben: $f(x)=\log(N+x)$, tehát $f(0)=\log N$, $\Delta f(0)=\log(N+1)-\log N$, $f''(x)$ pedig (természetes logarithmus esetében): $\frac{-1}{(N+x)^2}$ és így:

$$\log(N+x)=\log N+x[\log(N+1)-\log N]-\frac{x(x-1)}{2}\frac{1}{(N+\xi)^2}.$$

Ha Briggs-féle logarithmusról van szó, akkor $M=0{\cdot}4343$-el szorozva mindkét oldalon, azt látjuk, hogy ha a rendes eljárásnál $N+x$ logarithmusát úgy határozzuk meg, hogy $\log N$-hez a táblabeli különbség $[\log(N+1)-\log N]$ x-szeresét hozzáadjuk, akkor a hiba kisebb, mint:

$$\frac{x(1-x)}{4N^2}.$$

Az $x(1-x)$ maximális értékét éri el, ha $x=\frac{1}{2}$, vagyis a hiba kisebb, mint: $\frac{1}{16N^2}$. A ν jegyű N nagyobb $10^{\nu-1}$-nél, tehát a hiba

$$0<h<\frac{1}{16.10^{2\nu-2}}.$$

Így például, ha $\nu=4$, vagyis a táblából 4 jegyű számok logarithmusai vehetők, akkor $h<\frac{1}{16.10^6}$, tehát a közönséges interpolálás 6 tizedes jegyre pontos minden esetben, sőt ha N 1200-on túl van, akkor már $h<\frac{1}{16.144.10^4}<$ $<\frac{1}{2.10^7}$ vagyis 7 jegyre pontos a számítás. Ha $\nu=3$, azaz a táblából csak 3 jegyű szám logarithmusát vehetjük ki, akkor a rendes interpolálásnál elkövetett hiba: $h<\frac{1}{16.10^4}$. Ha azt akarjuk, hogy a számításunk 5 tizedese pontos legyen, akkor kell, hogy

$$\frac{1}{16N^2}<\frac{1}{2.10^5}$$

legyen, miből $N\geq112$ következik; vagyis azt látjuk, hogy ha 5 jegyű logarithmustáblával dolgozunk, akkor elégséges volna, ha 3 jegyű számok logarithmusai foglaltatnának a táblázatban, vagyis 100-tól 999-ig terjedő számok; 4 és többjegyű szám logarithmusát már a rendes interpolációs eljárással lehetne meghatározni. A hiba kisebb, mint $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, ha $N > 112$; de ha $N \leq 112$, a hiba akkor is kisebb mint $\frac{1}{1 \cdot 6} 10^{-5}$.

(Már ebből a néhány megjegyzésből is látszik, hogy ha 5 jegyű logarithmustáblát készítenek, akkor nagy pazarlást végeznek, midőn a táblázatba 1000-től 9999-ig levő számok logarithmusait teszik. Elégséges volna 100-tól 999-ig terjedő számok logarithmusainak közlése, legfölebb — nagyobb pontosság kedveért — olyan póttáblázattal, melyben 1000-től 1120-ig levő számok logarithmusai volnának meg.)

Most a visszakeresésnél elkövetett hiba meghatározásával akarunk foglalkozni. Tegyük fel, hogy a megadott logarithmus a táblában megtalált $a = \log N$ és $b = \log(N+1)$ között van, vagyis a megadott logarithmusunk: $a+x$, ahol $x < b-a$. Az $a+x$-hez tartozó numerus tehát $N+y$, ahol $y<1$, vagyis: $\log(N+y) = a+x$, azaz:

$$N+y = 10^{a+x}.$$

Fejtsük ki az $f(x) = 10^{a+x}$ függvényt a Newton formulával a második tagig, $h = b-a$ téve.

$$f(x) = f(0) + x\frac{\Delta f(0)}{h} + \frac{x(x-h)}{2} f''(\xi).$$

A jelen esetben:

$$f(0) = 10^a = N, \quad \Delta f(0) = 10^b - 10^a = 1, \quad f''(\xi) = 10^{a+\xi}(\log 10)^2,$$

tehát:
$$N+y = N + \frac{x}{b-a} + \frac{x(x-b+a)}{2} 10^{a+\xi}(\log 10)^2,$$

vagyis közelítően:
$$y = \frac{x}{\log(N+1) - \log N},$$

azaz: $a+x$-hez tartozó numerust úgy kapjuk meg, hogy az a-hoz tartozó numerushoz (N-hez) hozzátesszük az y pótlékot, melyet úgy határozunk meg, hogy az x többletet a táblabeli különbséggel elosztjuk. Az elkövetett hiba meghatározása végett tekintetbe vesszük, hogy $x(x-b+a)$ maximális (abs.) értékét éri el, a $0 \ldots (b-a)$ közben, ha $x = \frac{b-a}{2}$, tehát $|x(x-b+a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}$, $10^{a+\xi} < 10^b = N+1$, tehát a hiba:

$$H < \frac{(b-a)^2}{8}(N+1)(\log 10)^2.$$

De $b-a = \log(N+1) - \log N = \log N\left(1+\frac{1}{N}\right) - \log N = \log\left(1+\frac{1}{N}\right)$ és $\log\left(1+\frac{1}{N}\right) < \frac{M^*}{N}$ és minthogy $\log 10 = \frac{1}{M}$, tehát a visszakeresésnél alkalmazott interpolációnál elkövetett hiba:

$$H < \frac{N+1}{8N^2}.$$

* Ugyanis $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2(1+\vartheta z)^2}$, ha a $\log(1+z)$ Maclaurin sorát a második tagnál berekesztjük, tehát

$$\log(1+z) < z.$$

Itt a log természetes logarithmust jelent; tehát Briggs-féle $\log(1+z) < Mz$. Ha $z = \frac{1}{N}$ tesszük: $\log\left(1+\frac{1}{N}\right) < \frac{M}{N}$.

Ha tehát a táblázatban ν jegyű egész szám logarithmusa van, akkor $N > 10^{\nu-1}$ és $N \leq 10^{\nu} - 1$, tehát:

$$h < \frac{1}{8.10^{\nu-2}}.$$

Igy például, ha $\nu = 4$, akkor a numerusnak interpolációval meghatározott 2 tizedes jegye pontos.

Feladatok és gyakorlatok.

1. Ha $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$, állítsuk elő $f(1)$-et, $f'(1)$, $f''(1)$, $f'''(1)$-et és rendezzük az $f(x)$-et $x-1$ hatványai szerint.

2. Rendezzük a $3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1$-et $x-1$ hatványai szerint.

3. Ha az $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ racionális egész függvényt például $x-a$ hatványai szerint akarjuk rendezni, akkor egymásután ki kell számítanunk az $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, . . .-et az a helyen. Ezt a számítást, vagyis az $x-a$ hatványai szerint haladó Taylor-sor együtthatóinak a meghatározását kissé könnyebben is elvégezhetjük. Ugyanis az $f(x)$ ilyen alakra hozandó:

$$f(x) = A_n + A_{n-1}(x-a) + A_{n-2}(x-a)^2 + \cdots + A_0 (x-a)^n.$$

Ebből látjuk, hogy ha az $f(x)$ egész függvényt $x-a$-val osztjuk, hányadosul:

$$f_1(x) = A_{n-1} + A_{n-2}(x-a) + A_{n-3}(x-a)^2 + \cdots + A_0 (x-a)^{n-1}$$

-et és maradékul A_n-et kapjuk. Ha az $f_1(x)$-et osztjuk $x-a$-val, hányadosul az

$$f_2(x) = A_{n-2} + A_{n-3}(x-a) + \cdots + A_0 (x-a)^{n-2}$$

$n-2$-edfokú racionális egész függvényt kapjuk és maradékul A_{n-1}-et s í. t. Igy egymásután meghatározzuk az $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots$ együtthatókat. Nem kell tehát egyebet tennünk, mint egymásután $x-a$-val osztani. Ez pedig könnyen végezhető. Ha ugyanis $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$ n-edfokú racionális egész kifejezést osztjuk $(x-a)$-val és az eredményt

$$b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-1} + \frac{b_n}{x-a}$$

-val jelöljük, akkor

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \left[b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-1} + \frac{b_n}{x-a}\right](x-a) =$$
$$= b_0 x^n + (b_1 - b_0 a) x^{n-1} + (b_2 - b_1 a) x^{n-2} + \cdots + (b_n - b_{n-1} a),$$

vagyis

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 + b_0 a \\ b_2 &= a_2 + b_1 a \\ b_3 &= a_3 + b_2 a \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_n &= a_n + b_{n-1} a; \end{aligned}$$

ebből a képletsorból a hányados $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$ együtthatóinak egyszerű meghatározási módját olvashatjuk le. A k-ik együtthatót úgy kapjuk meg, hogy az osztandó k-ik együtthatójához hozzáadjuk a hányados már megtalált $k-1$-ik együtthatójának a-szorosát. Ezt az eljárást egyszerű schemába foglalhatjuk, melyet egy példán tüntetünk fel: Legyen az osztandó: $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8x + 3$, az osztó: $x-2$.

Irjuk fel az osztandó együtthatóit és ezektől jobbra a 2-t és alkossuk meg sorban az előbbi formula szerint a b_0, b_1, b_2, . . . együtthatókat:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5, & -3, & 2, & -8, & 3 & 2 \\ 5, & 7, & 16, & 24, & \underline{51} & \end{array}$$

Ha tehát az osztást elvégezzük, hányadosul $5x^3+7x^2+16x+24$-et és maradékul 51-et kapunk. Ha az adott $5x^4-3x^3+2x^2-8x+3$ az $x-2$ hatványai szerint volna rendezendő, akkor $51=A_4$. Az A_3 meghatározása végett folytatnunk kell az osztást. Az $5x^3+7x^2+16x+24$-et kell tovább osztanunk $x-2$-vel. Az előbbi schema szerint:

$$\begin{array}{cccc|c} 5, & 7, & 16, & 24 & 2 \\ 5, & 17, & 50, & \underline{124} & \end{array}$$

a hányados: $5x^2+17x+50$, a maradék 124, vagyis $A_3=124$.

$$\begin{array}{ccc|c} 5, & 17, & 50 & 2 \\ 5, & 27, & \underline{104} & \end{array}$$

$A_2=104$.

$$\begin{array}{cc|c} 5, & 27 & 2 \\ 5, & \underline{37} & \end{array}$$

miből $A_1=37$ és $A_0=5$. Nem is kell mindig újra leírni a hányados együtthatóit, hanem egy schemában kaphatjuk a kívánt $A_4, A_3, \ldots$ együtthatókat:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5, & -3, & 2, & -8, & 3 & 2 \\ 5, & 7, & 16, & 24, & \underline{51} & \\ 5, & 17, & 50, & \underline{124} & & \\ 5, & 27, & \underline{104} & & & \\ 5, & \underline{37} & & & & \\ \underline{5} & & & & & \end{array}$$

Az aláhúzott számok a keresett együtthatók és így

$$f(x)=5(x-2)^4+37(x-2)^3+104(x-2)^2+124(x-2)+51.$$

Állítsuk elő a $7x^6-58x^5-23x^4+6x^3-2x^2+8$-at *a)* $x-1$, *b)* $x+1$, *c)* $x-2$, *d)* $x+3$ hatványai szerint rendezve.

4. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ racionális egész függvény $(x-a)^2$-el akkor és csakis akkor osztható, ha $f(a)=0$ és $f'(a)=0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ racionális egész függvénynek $x=a$ k-szoros gyöke, ha $f(a)=0$, $f'(a)=0, \ldots f^{(k-1)}(a)=0$, $f^{(k)}(a)\neq 0$.

6. Határozzuk meg azt az $f(x)$ hetedfokú racionális egész függvényt, mely 1-gyel növelve $(x-1)^4$-el és 1-gyel kisebbítve $(x+1)^4$-el osztható.

7. *Az e^x Maclaurin sora.* $D^{(n)}e^x=e^x$; tehát $x=0$ helyen mindenik diff. hányados: 1. Ezt így is szoktuk írni: $(D^n e^x)_0$, vagy $\left(\frac{d^n e^x}{dx^n}\right)_0$, vagy $(e^x)_0^{(n)}$, ahol a jobboldalon álló 0 azt jelenti, hogy a differenciálhányados az $x=0$ helyen veendő. Eszerint tehát:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n e^{\vartheta x}}{n!}.$$

Az utolsó tag a Lagrange-féle maradéktag. A Cauchy-maradéktag volna: $\frac{x^n(1-\vartheta_1)^{n-1}e^{\vartheta_1 x}}{(n-1)!}$. Ha $x=1$ tesszük, akkor:

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{e^{\vartheta}}{n!}$$

-et kapjuk, ahol $\vartheta<1$. Ez a formula az e kiszámítására célszerűen alkalmazható.

Az egyes tagok sorban könnyen kiszámíthatók; ugyanis a k-ik tagot az előzőből egyszerűen úgy kapjuk meg, hogy azt k-val elosztjuk. Az egyes tagok rendre a harmadiktól kezdve:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= 0{\cdot}5 \\
\frac{1}{3!} &= 0{\cdot}166666666667 \\
\frac{1}{4!} &= 0{\cdot}041666666667 \\
\frac{1}{5!} &= 0{\cdot}008333333333 \\
\frac{1}{6!} &= 0{\cdot}001388888889 \\
\frac{1}{7!} &= 0{\cdot}000198412698 \\
\frac{1}{8!} &= 0{\cdot}000024801587 \\
\frac{1}{9!} &= 0{\cdot}000002755732 \\
\frac{1}{10!} &= 0{\cdot}000000275573 \\
\frac{1}{11!} &= 0{\cdot}000000025052 \\
\frac{1}{12!} &= 0{\cdot}000000002088 \\
\frac{1}{13!} &= 0{\cdot}000000000160 \\
\frac{1}{14!} &= 0{\cdot}000000000011 \\
\hline
& \ 2{\cdot}718281828457
\end{aligned}
$$

A hiba, amelyet elkövetünk, ha a számításban az n-ik tagnál megállapodunk: $\frac{e^{\vartheta}}{n!}$, de minthogy $e<3$, tehát a hiba $\frac{3}{n!}$-nál kisebb. A jelen esetben, midőn $n=15$, a hiba, az utolsó jegyben történő elhanyagolásokon kívül kisebb $3 . 10^{-12}$-nél. Pontosabb számítással azt találjuk, hogy

$$e = 2{\cdot}718281828459045\ldots$$

tehát ez a számítás 11 jegyre pontos.

8. Az e előbbi alakjából következtethetjük, hogy e nem lehet racionális szám. Tegyük fel ugyanis, hogy e racionális és pedig legegyszerűbb alakjában: $\frac{p}{q}$. De e ebben az alakban írható, ha a sorfejtésben a $q+1$-ik tagnál állapodunk meg:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{e^{\vartheta}}{(q+1)!}.$$

Ha most mindkét oldalon $q!$-al szorzunk, a baloldalon feltételünk szerint egész számot kapunk $[p(q-1)!]$; a jobboldalon azonban az egész rész mellett marad még: $\frac{e^{\vartheta}}{q+1}$, mely nem lehet egész, mert a számláló 3-nál kisebb, a nevező pedig nagyobb. Eszerint tehát e nem lehet törtszám.

9. A^x *Maclaurin sora* (*A* pozitiv szám).

$$(A^x)' = A^x \log A,\quad (A^x)'' = A^x (\log A)^2, \ldots$$

tehát:
$$(A^x)_0 = 1,\quad (A^x)'_0 = \log A,\quad (A^x)''_0 = (\log A)^2, \ldots$$

és így:
$$A^x = 1 + x \log A + \frac{x^2 (\log A)^2}{2} + \frac{x^3 (\log A)^3}{3!} + \cdots$$

Határozzuk meg a maradéktagot!

10. Mutassuk meg, hogy ha x pozitiv szám:

$$e^x > 1 + x,\quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

és:
$$e^{-x} > 1 - x,\quad e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

11. Ha $0 < x < 1$, akkor az előbbi $e^x > 1 + x$ egyenlőtlenségből a következő, ontosabb egyenlőtlenséget is levezethetjük: $e^x > 1 + x$-ből:

$$e^x \left(1 - \frac{x}{2}\right) > (1+x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

De $x < 1$, tehát $x^2 < x$ és így a jobboldali kifejezés 1-nél nagyobb, tehát:

$$e^x \left(1 - \frac{x}{2}\right) > 1$$

és így:
$$a)\ e^x > \frac{1}{1 - \frac{x}{2}},\qquad b)\ e^{-x} < 1 - \frac{x}{2}$$

következik. Különösen ez az utóbbi nevezetes, mert a 10) alattival összevetve, azt látjuk, hogy ha $x < 1$, akkor:

$$1 - x < e^{-x} < 1 - \frac{x}{2}.$$

12. Irjuk fel a $\sin x$, $\cos x$ Maclaurin sorait a Lagrange-féle maradéktagokkal!

13. Irjuk fel a $\log(1+x)$ Maclaurin sorát *a)* a Lagrange-féle, *b)* a Cauchy-féle maradéktaggal!

14. Irjuk fel az $(1+x)^m$ Maclaurin sorát *a)* a Lagrange, *b)* a Cauchy maradéktaggal!

15. Mutassuk meg a Taylor sor segítségével, hogy π-nél kisebb pozitiv x-re nézve $\sin x < x$, $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, továbbá, hogy

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{és} \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

16. Legyen $F(x) = f(x)\,\varphi''(x) - f'(x)\,\varphi'(x) + f''(x)\,\varphi(x)$. Határozzuk meg $F'(x)$-et!

17. Legyen $F(x) = f(x)\,\varphi^{(p)}(x) - f'(x)\,\varphi^{(p-1)}(x) + f''(x)\,\varphi^{(p-2)}(x) - f'''(x)\,\varphi^{(p-3)} + \cdots + (-1)^p f^{(p)}(x)\,\varphi(x)$. Számítsuk ki $F'(x)$-et! [p pozitiv egész szám.]

Azt az érdekes eredményt kapjuk, hogy

$$F'(x) = f(x)\,\varphi^{(p+1)}(x) + (-1)^p f^{(p+1)}(x)\,\varphi(x).$$

Ha $F(x)$-re a középértéktételt alkalmazzuk, $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$ a jelen esetben:

$$F(b)-F(a)=f(b)\,\varphi^{(p)}(b)-f'(b)\,\varphi^{(p-1)}(b)+\cdots+(-1)^p f^{(p)}(b)\,\varphi(b)-$$
$$-[f(a)\,\varphi^{(p)}(a)-f'(a)\,\varphi^{(p-1)}(a)+\cdots+(-1)^p f^{(p)}(a)\,\varphi(a)]=$$
$$=[f(\xi)\,\varphi^{(p+1)}(\xi)+(-1)^p f^{(p+1)}(\xi)\,\varphi(\xi)]\,(b-a).$$

Irjuk fel ezt a középértékrelációt az esetben, midőn $\varphi(x)=\frac{(b-x)^p}{p!}$; mutassuk meg, hogy ekkor a Taylor sort kapjuk a Cauchy-féle maradéktaggal!

18. A Lagrange-féle maradéktagban előforduló ϑ-ra vonatkozólag a következő megjegyzéseket tehetjük: *a)* Ha $f(a+h)$-t kifejtjük és először az n-ik, azután az $n+1$-ik tagnál állapodunk meg, akkor (Lagrange-féle maradéktaggal)

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^n f^{(n)}(a+\vartheta h)}{n!}=$$
$$=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(a+\vartheta_1 h)}{(n+1)!},$$

miből:
$$f^{(n)}(a+\vartheta h)=f^{(n)}(a)+\frac{hf^{(n+1)}(a+\vartheta_1 h)}{n+1}$$

és minthogy:
$$f^{(n)}(a+\vartheta h)=f^{(n)}(a)+\vartheta h f^{(n+1)}(a+\vartheta_2 h),$$

tehát:
$$\vartheta f^{(n+1)}(a+\vartheta_2 h)=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta_1 h)}{n+1}.$$

Innen:
$$\vartheta=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta_1 h)}{(n+1)f^{(n+1)}(a+\vartheta_2 h)}$$

miből, ha $f^{(n+1)}(x)$ az a helyen folytonos és nem 0:

$$\lim_{h=0}\vartheta=\frac{1}{n+1}.$$

Ha $f^{(n+1)}(x)$ az $a\ldots a+h$ közben folytonos és 0-vá nem válik és maximuma M, minimuma m (mindkettő tehát vagy pozitiv vagy negativ), akkor ha pl. M és m pozitivok:

$$\frac{m}{(n+1)M}<\vartheta<\frac{M}{(n+1)m}.$$

Ha $f(x)$ $n+1$-edfokú rac. egész függvény, akkor $M=m$, tehát $\vartheta=\frac{1}{n+1}$.
Általában, ha $\frac{M}{m}$ és $\frac{m}{M}$ viszony mindenik diff. hányadosra korlátos, akármekkora legyen is n, akkor

$$\lim_{n=\infty}\vartheta=0,$$

tehát ϑ az n növekedtével 0-felé konvergál.

19. A Cauchy-féle maradéktagban szereplő ϑ megközelítése így végezhető: Az n-ik Cauchy-maradéktag egyenlő az n-ik Lagrange maradéktaggal, tehát:

$$\frac{(1-\vartheta)^{n-1}f^{(n)}(a+\vartheta h)}{(n-1)!}=\frac{f^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}{n!},$$

miből:
$$\vartheta=1-\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}\,\frac{f^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}{f^{(n)}(a+\vartheta h)}}.$$

Innen megint következik a már említett feltételek mellett, hogy

$$\lim_{h=0}\vartheta=1-\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}.$$

Ha $f(x)$ n-edfokú egész függvény, $\vartheta = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$. Általában a 18*-ban említett feltételek mellett (ha ismét más $M>0$, $m>0$)

$$1-\sqrt[n-1]{\frac{M}{nm}} < \vartheta < 1-\sqrt[n-1]{\frac{m}{nM}}$$

és ugyancsak az előbb említett feltétel mellett $\lim\limits_{n=\infty}\vartheta=0$, mert $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}=1$.

20. Fejtsük ki Maclaurin sorba az n-ik tagig $(1+x)\log(1+x)$-et. Határozzuk meg a Cauchy-féle maradéktagot!

21. Fejtsük ki Maclaurin sorba az $\operatorname{arctg} x$-et! Ehhez szükségünk van az $\operatorname{arctg} x$-nek és differenciálhányadosainak értékére az $x=0$ helyen. Ezeket a következő meggondolással határozhatjuk meg. Ha $y=\operatorname{arctg} x$, akkor

$$y'=\frac{1}{1+x^2}; \quad \text{vagyis:} \quad (1+x^2)\,y'=1$$

és ha itt mindkét oldalon n-szer differenciálunk, a baloldalon a Leibniz szabályt alkalmazva:

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)\,y^{(n-1)}=0.$$

Ha $y_0^{(k)}$-al jelöljük a k-ik differenciálhányados értékét az $x=0$ helyen, akkor tehát ezen egyenletben $x=0$ téve:

$$y_0^{(n+1)}+n(n-1)\,y_0^{(n-1)}=0.$$

Minthogy $(y')_0=1$, tehát ha ezen egyenletben $n=2$ tesszük, azt kapjuk, hogy $y_0'''=-2$.

Ha pedig most $n=4$ tesszük, $y_0^{V}=4!$ Ha $n=6$, akkor $y_0^{(7)}=-6!$ és már ebből a néhány esetből is kiolvashatjuk, hogy az $\operatorname{arctg} x$ páratlan rendű diff. hányadosai az $x=0$ helyen ezen egyszerű szabály szerint alkothatók meg:

$$y_0^{(2m+1)}=(-1)^m\,(2m)!$$

Megerősíthetjük ezt az állításunkat teljes indukcióval. $m=1$-re érvényes, mert $y_0'''=-2$. Tegyük most az alapegyenletben $n=2m+2$; akkor ebből $x=0$ téve:

$$y_0^{(2m+3)}+(2m+2)(2m+1)\,y_0^{(2m+1)}=0,$$

vagyis:

$$y_0^{(2m+3)}=-(2m+2)(2m+1)\,y_0^{(2m+1)}$$

és minthogy feltevésünk szerint

$$y_0^{(2m+1)}=(-1)^m\,(2m)!, \quad \text{tehát:} \quad y_0^{(2m+3)}=(-1)^{m+1}\,(2m+2)!$$

vagyis ugyanolyan szabály szerint alkotandó meg a $2m+3$-ik differenciálhányados, mint a $2m+1$-ik; tehát általában az $\operatorname{arctg} x$-nek minden páratlan rendű differenciálhányadosa az $x=0$ helyen:

$$y_0^{(2m+1)}=(-1)^m\,(2m)!$$

A páros rendűekről azonnal belátható, hogy a 0 helyen mindannyian eltűnnek. Ugyanis közvetlenül látjuk, hogy

$$y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

tehát $x=0$ helyen $y_0''=0$. Ha már most az alapegyenletbe $x=0$, $n=3$-at teszszük, azt kapjuk, hogy $y_0^{IV}=0$, ha $n=5$ tétetik: $y_0^{VI}=0$ s í. t.; tehát valóban minden páros rendű differenciálhányados a 0 helyen eltűnik. Most már felírhatjuk az arctg x Maclaurin sorának első n tagját:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

22. Fejtsük ki Maclaurin sorba az arc sin x-et! Szükségünk van az arc sin x-nek és differenciálhányadosainak az $x=0$ helyen való értékeire.

$$(\arcsin x)_0=0,\quad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arcsin x)''=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

vagyis, ha $y=\arcsin x$, akkor

$$(1-x^2)\,y''-xy'=0$$

és ha itt mindkét oldalon n-szer differenciálunk a Leibniz-szabályt alkalmazva

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

és ha $x=0$ tesszük, $\qquad y_0^{(n+2)}-n^2y_0^{(n)}=0.$

Minthogy $y_0''=0$, ebből következik, hogy minden páros rendű differenciálhányados az $x=0$ helyen eltűnik. A páratlan rendűek közül az első: 1; tehát ha $n=1$ tesszük: $y_0'''=1$. $n=3$ téve: $y_0^{(5)}=3^2$ és $y_0^{(7)}=(3.5)^2$, $y_0^{(9)}=(3.5.7)^2$ s általában, amiről teljes indukcióval meggyőződhetünk:

$$y_0^{(2n+1)}=1.3^2.5^2.7^2\ldots(2n-1)^2.$$

Eszerint tehát az arc sin x Maclaurin sorában a $2n+1$-ik tag így írható:

$$\frac{1.3^2.5^2.7^2\ldots(2n-1)^2x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$

és ez így is írható:

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n},$$

vagyis az arc sin x sorfejtésének első tagjai:

$$x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7}+$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

A maradéktagok meghatározása ilyen módon nagyon körülményes; azért ezt csak később közöljük.

23. Mutassuk meg, hogy $x^{\frac{1}{x}}$-nek az $x=e$ helyen maximuma van. Mekkora ez a maximum?

24. Mutassuk meg, hogy ha $0<a<b$, az $\dfrac{(x-a)(b-x)}{abx}$-nek az $x=+\sqrt{ab}$ helyen maximuma és az $x=-\sqrt{ab}$ helyen minimuma van.

25. Mikor és hol van az $ax^2+2bx+c$ másodfokú egész függvénynek maximuma, mikor van minimuma?

26. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{1+2x\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$-nek $x=-1$ és $x=+1$ helyeken maximuma és $x=0$ helyen minimuma van.

27. $e^x-2\cos x+e^{-x}$-nek $x=0$ helyen minimuma van.

28. $\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{4}+\frac{3x}{2}-2$ szélső értékeit határozzuk meg!

29. Határozzuk meg $x^m(1-x)^n$ szélső értékeit (m és n pozitiv egész számok).

30. Határozzuk meg $(a+x)^m(b+x)^n$ szélső értékeit (m és n pozitiv egész számok).

31. Számítsuk ki $\frac{\log x}{x}$ szélső értékét!

32. Határozzuk meg $x^m e^{-x^2}$, valamint $e^x \sin x$ és nxe^{-nx^2} szélső értékeit!

33. $4\cos x+\cos 2x$ szélső értékeinek meghatározása.

34. Határozzuk meg x azon értékét, mely az $\left[\frac{r}{ax^\varrho}\right]^x$-et maximummá teszi. Mekkora ez a maximális érték? (ϱ pozitiv szám).

35. Egy literes nyitott hengeralakú edényt akarunk késziteni. Hogyan válasszuk a méreteket, hogy a legkevesebb bádogra legyen szükségünk?

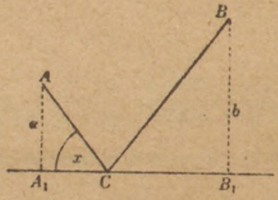
Az edény alapkörének rádiusa legyen x, magassága y; akkor $x^2y\pi=1$, felülete $x^2\pi+2x\pi y=z$, vagyis $z=x^2\pi+\frac{2}{x}\cdot$ Ennek kell minimummá lennie. Ehhez kell, hogy $2x\pi-\frac{2}{x^2}=0$ legyen, vagyis $\pi x^3=1$, miből $x=\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\cdot$ Mutassuk meg, hogy ez a z felületet minimummá teszi.

36. Hogyan kellene egy zárt, henger alakú literes edényt a legkevesebb bádoggal elkésziteni?

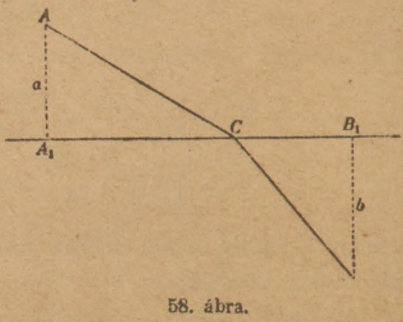
37. Egy négyzetalakú papirból a maximális köbtartalmú nyitott dobozt akarjuk késziteni; mekkora oldalú négyzeteket kell mindenik sarokból kivágni?

38. Hogyan kellene egy adott derékszögű négyszög alakú lapból a legnagyobb köbtartalmú dobozt késziteni?

39. Adva van egy egyenes és fölötte az A és B pontok (illetőleg a, b és $A_1B_1=c$ távolságok). Hol kell választanunk a C pontot az egyenesen, hogy az $AC+CB$ távolság minimális legyen? (58. ábra.)



57. ábra.



58. ábra.

40. Adva van egy egyenes és fölötte az A, alatta a B pont (azaz adva van: a, b és A_1B_1). Hol kell választanunk a C pontot az egyenesen, hogy az AC és CB befutására szükséges idő minimális legyen, ha AC-n a mozgó állandó c sebességgel és CB-n állandó c_1 sebességgel halad? (59. ábra.)

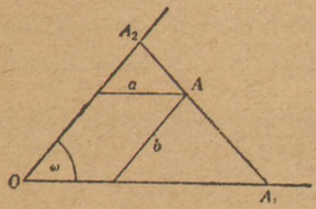
41. Az r sugarú körbe rajzolható derékszögű négyszögek közül melyiknek van a legnagyobb területe?

42. Az ellipszisbe rajzolható derékszögű négyszögek közül melyik a legnagyobb területű?

43. Melyik a legnagyobb területű azon háromszögek között, melyeknek adott a és b oldalaik vannak?

44. Adott ω szög belsejében van az A pont (pl. adva van a és b). Hogyan kell az A ponton át az A_1A_2 egyenest húzni, hogy az OA_1A_2 terület minimális legyen (60. ábra). Az A_1A_2 egyenlete azon ferdeszögű koordinátarendszerben, melynek tengelyei: OA_1 és OA_2.

$$\frac{x}{OA_1}+\frac{y}{OA_2}=1, \quad \text{vagyis} \quad OA_2.x+OA_1.y=OA_1.OA_2.$$



59. ábra.

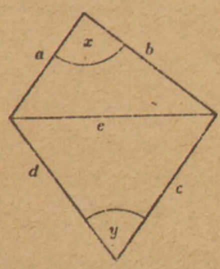
Minthogy a, b az A koordinátái, tehát ezen egyenlet ki van elégítve, ha $x=a$, $y=b$, azaz: $OA_2.a+OA_1.b=OA_1.OA_2$; innen: $OA_2=\frac{b.OA_1}{OA_1-a}$, vagy $OA_1=z$ téve: $OA_2=\frac{bz}{z-a}$. Az OA_1A_2 háromszög területe:

$$t=\frac{1}{2}OA_1.OA_2\sin\omega=\frac{1}{2}\frac{bz^2}{z-a}\sin\omega;$$

ennek kell minimálisnak lennie.

45. Adott felületű egyenes körhenger maximális köbtartalmú legyen.

46. Adva vannak egy négyszög oldalai: a, b, c, d. Mutassuk meg, hogy ezen oldalakkal biró maximális területű négyszög az, amely körbe írható.



60. ábra.

A négyszög területe: $t=\frac{1}{2}[ab\sin x+cd\sin y]$; de x és y között ez az összefüggés áll fenn:

$$e^2=a^2+b^2-2ab\cos x=c^2+d^2-2cd\cos y. \qquad a)$$

Hogy t maximális legyen, kell, hogy x szerinti differenciálhányadosa 0 legyen; azaz

$$ab\cos x+cd\cos y\frac{dy}{dx}=0$$

legyen; $\frac{dy}{dx}$-et az $a)$ alatti relációból számítsuk ki. Innen, ha x szerint differenciálunk:

$$ab\sin x=cd\sin y\frac{dy}{dx}$$

és ha innen $\frac{dy}{dx}=\frac{ab\sin x}{cd\sin y}$-et az előbbibe helyettesítjük:

$$\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y=0$$

egyenletre jutunk, miből $y=-x+n\pi$ következik; de négyszögről lévén szó, csakis $x=\pi-y$ állhat; tehát a kérdéses négyszög olyan, mely körbe rajzolható.

Hogy valóban maximummal van dolgunk, annak az eldöntésére a terület kifejezésének az x szerinti második differenciálhányadosát kell előállítani. Az első differenciálhányadosa, (ha $\frac{dy}{dx}$ talált értéket behelyettesítjük)

$$ab\cos x+cd\cos y\cdot\frac{ab\sin x}{cd\sin y}=\frac{ab\,[\cos x\sin y+\sin x\cos y]}{\sin y}=\frac{ab\sin(x+y)}{\sin y}$$

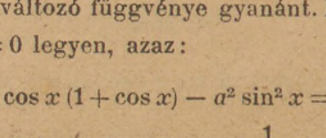
és ennek differenciálhányadosa x szerint:

$$ab\left[\frac{\cos(x+y)}{\sin y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)-\frac{\sin(x+y)\cos y}{\sin^2 y}\,\frac{dy}{dx}\right].$$

Ez a területnek x szerinti második differenciálhányadosa. Ha tekintetbe vesszük, hogy $y=\pi-x$, akkor $\cos(x+y)=-1$ és $\frac{\sin x}{\sin y}=1$, akkor a második differenciálhányadosra e speciális négyszög esetében ezt az értéket kapjuk: $-\frac{ab(ab+cd)}{cd\sin y}$ és így ez valóban negativ (mert $0<y<\pi$); tehát *a körbe írható négyszög az összes négyszögek között, melyeknek megadott 4 oldala van, maximális területű.*

47. Azon trapézek között, melyeknek 3 egyenlő hosszúságú oldaluk van, melyik a maximális területű? Ha az egyenlő oldalak hossza a és a trapéz egyik szöge x, akkor a területe:

$$t=(a\cos x+a)\,a\sin x=a^2(1+\cos x)\sin x;$$



61. ábra.

t tehát előállíttatott az x változó függvénye gyanánt. Hogy a terület maximális legyen, kell, hogy $\frac{dt}{dx}=0$ legyen, azaz:

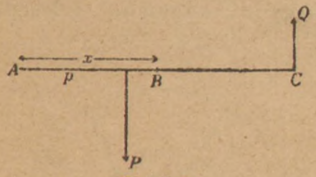
$$a^2\cos x\,(1+\cos x)-a^2\sin^2 x=0.$$

Innen $\cos x$-re két értéket kapunk: -1-et és $\frac{1}{2}$-et. Az első esetnek geometriai értelme nincsen, a második esetben $x=\frac{\pi}{3}$. A második differenciálhányadosa t-nek:

$$-a^2[4\cos x\sin x+\sin x]=-a^2\sin x\,(4\cos x+1)$$

és ha $x=\frac{\pi}{3}$, ez a kifejezés negativ; tehát valóban maximummal van dolgunk és így: Azon trapézek közül, melyeknek 3 egyenlő oldaluk van, az *a maximális területű, melyben az alap melletti szög 60°-ú.*

48. ABC egykarú emelő. $Pp=M$ ellenállás adott. Az emelő rúdja homogén, az egységnyi hosszúságnak megfelelő súlya: γ. Hol kell a Q egyensulyozó erőt alkalmazni, hogy az minimális legyen?



62. ábra.

Az AB távolság, AC-nek fele legyen x, akkor $AC=2x$ és az emelő rúd súlya $2\gamma x$; tehát:

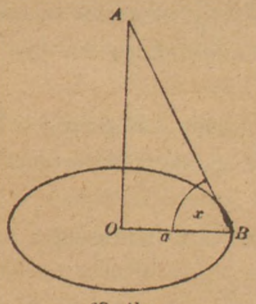
$$M+2\gamma x^2=2Qx,$$

miből: $Q=\frac{M}{2x}+\gamma x$. Hogy Q minimális legyen, kell, hogy

$$\frac{dQ}{dx}=-\frac{M}{2x^2}+\gamma=0$$

legyen, vagyis: $x=\sqrt{\frac{M}{2\gamma}}$. Innen $Q=\frac{M}{2x}+\gamma x=\sqrt{2M\gamma}$.

49. Egy a sugarú kerek asztal közepe fölött van egy föl és letolható lámpa. Minő magasra kell a lámpát elhelyeznünk, hogy az asztal körül ülők a legjobban lássanak?



63. ábra.

A fényerősség a távolság négyzetével fordított arányban és a hajlásszög sinusával egyenes arányban van. Legyen itt a hajlásszög: x; akkor tehát az asztal szélén a fény intenzítása

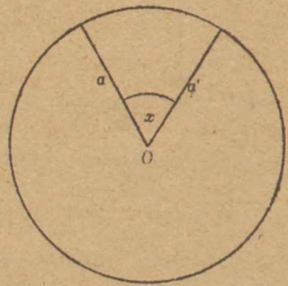
$$I=C\,.\,\frac{\cos^2 x}{a^2}\,.\,\sin x,$$

(mert $AB=\frac{a}{\cos x}$) C arányossági factor. Hogy I maximális legyen, kell, hogy x szerinti differenciálhányadosa 0 legyen; vagyis kell, hogy

$$-2\cos x\sin^2 x+\cos^3 x=0$$

legyen; tehát vagy $\cos x=0$, vagy $2\sin^2 x=\cos^2 x$, tehát $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$ Az első esetben a világító pont a végtelenben volna, tehát nyilván minimummal van dolgunk; a második esetben mutassuk meg, hogy maximum van. Az a szög, melynek tangense: $\frac{1}{\sqrt{2}}$, körülbelül 35°.

50. Az r sugarú körlapból (mely itatós papirosból van) x nyílású körcikket vágunk ki, hogy azután az a és a' összehajtásával tölcsért kapjunk. Mekkora legyen az x, hogy a (kúpalakú) tölcsér maximális köbtartalmú legyen?



64. ábra.

51. Adott hosszúságú gerenda teherbirása arányos a széiességével és a vastagságának a négyzetével. Kérdés, hogyan kell kivágni egy adott henger alakú fatörzsből olyan gerendát, melynek maximális teherbirása van?

52. n galvánelemből állítunk elő telepet oly módon, hogy mindig x elemet nagylapúan és így az $y = \frac{n}{x}$ csoportot láncolatosan kapcsoljuk. Kérdés, hogyan kell az x-et választanunk, hogy az így keletkező telep intenzitása maximális legyen?

53. Mutassuk meg, hogy azon háromszögek közül, melyekben az alap és magasság összege állandó, a legnagyobb területű az, melyben az alap egyenlő a magassággal.

54. Az egyenlő átfogóval biró derékszögű háromszögek közül melyik a maximális területű?

55. Adva van az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis. Határozzuk meg azon érintőjét (illetőleg az érintési pont koordinátáit), melynek a koordinátatengelyek közé eső darabja minimális.

56. Adva vannak egy háromszög csúcspontjai. Koordinátái: x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3. Az oldalait ugyanolyan viszonyban $(\lambda : 1)$ osztjuk és az osztópontokat megint egy háromszöggé összekötjük. Mutassuk meg, hogy ez az így keletkezett háromszög akkor lesz minimális területű, ha az oldalak feleztettek.

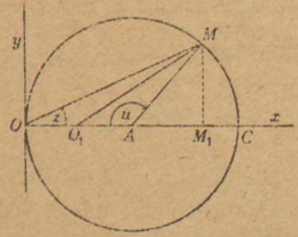
57. Némelykor az $y=f(x)$ függvénynek egy bizonyos ab szakaszba eső maximumát vagy minimumát keressük csupán. Ha e szakaszban a függvény monoton változik, akkor a legnagyobb (legkisebb) értékét a határpontokban éri el, ahol esetleg nincs is az eddigi értelmezésünk szerint maximum (minimum) (a görbének nincs tetőpontja) és nincs teljesítve az $f'(x)=0$ feltétel sem. Ilyenkor a szélső értéket az eddigi eljárással nem határozhatjuk meg. Egy igen egyszerű geometriai feladaton mutatjuk meg, hogy a független változó-

nak korlátoltsága miatt nem kaphatjuk meg a rendes eljárással a szélső értékeket.

Legyen adva egy a sugarú kör, melynek középpontja az X tengelyen levő A pont és radiusa az $OA=a$. O a kezdőpont.

$$\overline{OM}^2=2a.x,$$

M pont abscissája $OM_1=x$.



65. ábra.

Keressük a maximális OM húrt! Jelöljük OM-et y-al, akkor tehát $y^2=2ax$ és innen:

$$y\frac{dy}{dx}=a$$

$\frac{dy}{dx}$ nem lehet 0; tehát a rendes eljárás értelmében azt kellene mondanunk, hogy maximális (vagy minimális) húr nincsen, holott tudjuk, hogy OC a maximális és a 0 minimális húr. Az első $x=2a$-nak, a másik $x=0$-nak felel meg. Ebből láthatjuk egyúttal, miért nem kaptuk meg a szélső értékeket. Az $x=2a$ és $x=0$ ugyanis a független változó határpontjai, a független változó csakis a $0\ldots 2a$ szakaszban változhatik a geometriai feladatnak megfelelően. E szakaszban a húr monoton nő 0-tól $2a$-ig, tehát minimumát és maximumát a határhelyeken veszi fel. (Megjegyezzük, hogy okoskodásunk forduló pontja az volt, hogy az $yy'=a$ egyenletből azt következtettük, hogy y' nem lehet 0. Hozzá kellett volna tennünk: hogy ha y véges; ez azonban y-nak geometriai értelméből a priori világos).

Ha független változó gyanánt a z szöget választjuk, akkor $OM=2a\cos z$; tehát szélső értéke lesz, ha $\sin z=0$, vagyis, ha $z=0$. Megkaptuk tehát az OC maximumot; de nem kaptuk meg a 0 minimumot. Ennek oka az, hogy midőn z-t tekintettük független változónak, ez a $-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}$ intervallumban változhatik a geometriai feladatnak megfelelően. Ezen szakaszban pedig a $z=0$ helyen, a szakasz közepén rendes maximum van (tetőpont), de a $-\frac{\pi}{2}\ldots 0$ szakaszban monoton növekvő és a $0\ldots\frac{\pi}{2}$ szakaszban monoton csökkenő a függvény, a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ helyek a határhelyek.

Ha a koordinátarendszer kezdőpontjául nem a kör kerületének O pontját, hanem O_1-et választjuk és $O_1A=d$ és $O_1AM\sphericalangle=u$, akkor

$$\overline{O_1M}^2=d^2+a^2-2da\cos u\,;$$

O_1M helyett y-t téve: $yy'=da\sin u$; u szög most $0\ldots 2\pi$ intervallumban mozog, tehát $y'=0$, ha $u=\pi$, vagy $u=0$. Az első esetben az O_1C maximumot, a másodikban az O_1O minimumot kapjuk.

58. Ha valamely hosszúságot többször megmérünk, rendszerint mindig különböző mérési eredményt kapunk. Ha n mérés $a_1, a_2, \ldots a_n$ számértékeket szolgáltatta, akkor legvalóbbszínűnek az x azon értékét tartjuk, melyre nézve az $x-a_1, x-a_2, \ldots x-a_n$ hibák négyzeteinek összege minimális. Ez a négyzetösszeg:

$$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)+\cdots+(x-a_n)^2$$

minimális lesz, ha

$$y'=2[x-a_1+x-a_2+\cdots+x-a_n]=0,$$

azaz:

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Minthogy $y''=2n$ pozitiv, tehát látjuk, hogy a *hiba-négyzetek összege minimum, ha a talált mértékszámok arithmetikai középét vesszük.*

59. Adva van az $ax+by+c=0$ egyenes és a $\xi\eta$ koordinátákkal biró pont. Az egyenesnek melyik pontja van a (ξ, η)-hoz legközelebb és mekkora ez a legkisebb távolság?

Az egyenes tetszésszerinti pontjának koordinátái: x, $y=-\frac{ax+c}{b}$; ezen pont távolsága a (ξ, η)-tól: d és

$$d^2=(\xi-x)^2+\left(\eta+\frac{ax+c}{b}\right)^2. \qquad \alpha)$$

Hogy ez minimum legyen, kell, hogy a jobboldali kifejezés differenciálhányadosa 0 legyen: (2 mindjárt el is hagyható):

$$x-\xi+\frac{a}{b}\left(\eta+\frac{ax+c}{b}\right)=0,$$

vagyis:

$$x=\frac{b^2\xi-ab\eta-ac}{a^2+b^2},$$

innen egyúttal:

$$y=\frac{a^2\eta-ab\xi-bc}{a^2+b^2}.$$

Ezzel meghatároztuk az egyenes azon pontját, amely a (ξ, η)-hoz legközelebb lehet. Innen:

$$x-\xi=-\frac{a\,[a\xi+b\eta+c]}{a^2+b^2}, \quad y-\eta=-\frac{b\,[a\xi+b\eta+c]}{a^2+b^2},$$

tehát: $d=\frac{a\xi+b\eta+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Minthogy az $\alpha)$ alattiból $\frac{1}{2}d^2$ második diff. hányadosa: $1+\frac{a^2}{b^2}$ pozitiv, tehát valóban minimummal van dolgunk. Ez a minimális távolság nem más, mint a $(\xi\eta)$ pontnak az egyenestől való merőleges távolsága.

60. Ha $y=f(x)$ görbe bármely két pontja A és B; A koordinátái: x_1, $y_1=f(x_1)$, B-é: x_2, $y_2=f(x_2)$ és

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>f(x_1)+f(x_2),$$

(vagyis a CC_1 ordináta nagyobb, mint az A_1B_1BA trapéz középvonala), akkor az $y=f(x)$ által ábrázolt görbe alulról nézve homorú; ha pedig bármely két pontra vonatkozólag:

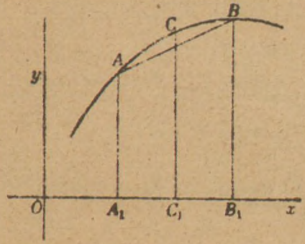
$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_1)+f(x_2),$$

akkor a görbe domború. Ha $f(x)$-nek mindenütt van második diff. hányadosa és ha $f''(x)$ az ab szakaszban mindenütt pozitiv és sehol sem 0, akkor

$$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Ugyanis ha az

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(\xi)$$



66. ábra.

formulában $a=\frac{x_1+x_2}{2}$, $b=x_1$, azután pedig $a=\frac{x_1+x_2}{2}$, $b=x_2$ tesszük, akkor

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{x_1-x_2}{2}f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{(x_1-x_2)^2}{8}f''(\xi);$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{x_2-x_1}{2}f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{(x_1-x_2)^2}{8}f''(\eta);$$

ahol ξ az $\frac{x_1+x_2}{2}\cdots x_1$ és η az $\frac{x_1+x_2}{2}\cdots x_2$ szakasz valamely helye. E két egyenletet összeadva:

$$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{(x_1-x_2)^2}{8}[f''(\xi)+f''(\eta)],$$

tehát, mivel $f''(x)$ mindenütt pozitiv,

$$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Ha pedig $f''(x)$ mindenütt negativ, akkor:

$$f(x_1)+f(x_2)<2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Azt állítjuk, hogy ha tetszés szerinti n pont koordinátái (melyek közül legalább kettő különböző):

$$x_1,\ y_1=f(x_1);\ x_2,\ y_2=f(x_2);\ \ldots\ x_n,\ y_n=f(x_n),$$

és ha a görbe (alulról nézve) homorú, akkor:

$$nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$

ha pedig (alulról nézve) domború, akkor:

$$nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

(Szemléleti úton azonnal belátható a dolog. Ha ugyanis az adott görbén tetszés szerinti n helyre 1—1 egységnyi tömegpontot helyezünk el, akkor ezen n tömegpont tömegközéppontja az első esetben mindenesetre a görbe vonal alá esik; tehát a tömegközéppont ordinátája kisebb, mint a görbének a tömegközépponton átmenő ordinátája. De a tömegközéppont abscissája:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \quad \text{ordinátája:} \quad \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

az $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ abscissához tartozó ordinátája a görbének pedig:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

és így az első esetben:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

a második esetben pedig:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

E fontos tételt tisztán számítással a következőképpen bizonyíthatjuk be: Az első esetben:

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>f(x_1)+f(x_2)$$

egyenlőtlenség fönnáll a görbe bármely két pontjára nézve. Válasszuk most a görbének azon két pontját, melyek abscissái: $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{x_3+x_4}{2}$. Ezen két pontra alkalmazva az egyenlőtlenséget:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)<2f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right),$$

vagyis: $$4f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)>f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4).$$

Ha a két pont gyanánt azokat választjuk, melyek abscissái:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \quad \text{és} \quad \frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4},$$

akkor ugyanígy a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$8f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_8}{8}\right)>f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_8)$$

és így általában, ha m tetszés szerinti pozitiv egész szám:

$$2^m f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right)>f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^m}). \qquad \alpha)$$

Már most legyen n egy tetszés szerinti pozitiv egész szám és 2^m 2-nek azon legkisebb hatványa, mely n-nél nagyobb és válasszuk 2^m pont gyanánt a görbe azon pontjait, melyek közül az első n pont abscissái: $x_1, x_2, \ldots x_n$, a többi 2^m-n ponté pedig mindegyiké: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$. Ezen 2^m pontra alkalmazható az $\alpha)$ alatti egyenlőtlenség. De a jelen esetben

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+\frac{(2^m-n)(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}}{2^m}=$$

$$=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

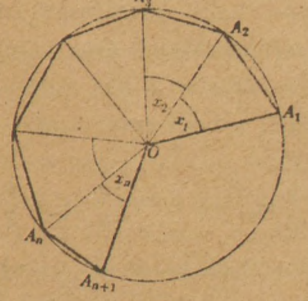
és
$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^m})=$$
$$=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+(2^m-n)f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right),$$
tehát az *a)* alatti egyenlőtlenség átmegy ebbe:
$$nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

Éppen így a második esetben, vagyis midőn bármely két pontra nézve érvényes $2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_1)+f(x_2)$, akkor érvényes általában ezen egyenlőtlenség:
$$nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

Alkalmazások: 1. Ha például a szóban forgó függvény: e^x, mely fölülről nézve homorú, akkor általában:
$$e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n}>ne^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}.$$

Ha $e^{x_1}=a_1$, $e^{x_2}=a_2,\ldots e^{x_n}=a_n$ pozitiv számokra írjuk fel ezt az egyenlőtlenséget, akkor ezt a nevezetes egyenlőtlenséget találjuk:
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

2. Az $y=\sin x$ a $0\ldots\pi$ szakaszban alulról nézve homorú $\left(\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x\right.$ minden helyen negativ). (Vagy a diff. hányados tekintetbe vétele nélkül következtetve, ha x_1 és x_2 bármely két helyet jelent
$$\sin x_1+\sin x_2=2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\leq 2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\Big),$$
tehát ha $x_1, x_2,\ldots x_n$ tetszés szerinti, π-nél kisebb pozitiv szögek, akkor az előbbiek szerint:
$$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n<n\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$



67. ábra.

Ennek az állításnak geometriai értelme a következő: $OA_1A_2A_3A_4\ldots A_{n+1}$ sokszög területe kisebb, mint azon beírt n oldalú sokszög területe, melynek oldalai mind egyenlők az A_1A_{n+1} ív n-edrészéhez tartozó húrral. Ha

A_{n+1} összeesik az A_1-gyel, akkor ez azt fejezi ki, hogy *a körbe írható n oldalú sokszögek közül a szabályos n-szögnek van legnagyobb területe.*

3. Mutassuk meg hasonló eljárással, hogy a kör köré írható n-szögek közül a szabályos n-szögnek van legkisebb területe.* ($y = \operatorname{tg} x$ a $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ szakaszban felülről nézve homorú.)

61. Ha valamely körívnek megfelelő húr hossza: A és e körív felének megfelelő húr hossza: B, akkor a körív hossza nagy megközelítéssel: $\frac{8B-A}{3}$. Mekkora az elkövetett hiba?

Ha a körív hossza (az egység sugarú körben) x, akkor $A = 2\sin\frac{x}{2}$, $B = 2\sin\frac{x}{4}$, vagyis Taylor sorban kifejtve a $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{\cos(\vartheta z)}{5!} z^5$ formula szerint z helyébe $\frac{x}{2}$-et, azután $\frac{x}{4}$-et téve:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{\cos\frac{\vartheta x}{2}}{5!}\cdot\frac{x^5}{32} \quad \text{és} \quad \sin\frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{384} + \frac{\cos\vartheta'\frac{x}{4}}{5!}\frac{x^5}{1024}$$

és innen:

$$8B - A = 4x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{64}\,\frac{\cos\vartheta'\frac{x}{4}}{5!} - \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{\cos\frac{\vartheta x}{2}}{5!}\,\frac{x^5}{16}\right] = 3x + \alpha x^5,$$

ahol:
$$\alpha = \frac{\cos\frac{\vartheta' x}{4} - 4\cos\frac{\vartheta x}{2}}{64.5!},$$

vagyis, minthogy a számláló abs. értéke mindenesetre kisebb 5-nél, $\alpha < \frac{1}{1536}$ és így $\frac{8B-A}{3}$ megadja az x-et $\frac{x^5}{4608}$-nál kisebb hibával. Így például, ha a körbe szabályos 24-szöget rajzolunk, akkor $x < 0{\cdot}3$ és így $\frac{x^5}{4608} < \frac{1}{18.10^5}$; tehát ha a szabályos 24-szög oldala: A és a szabályos 48-szögé B, akkor $24\cdot\frac{8B-A}{3}$ megadja a kör kerületét legalább is $\frac{4}{3.10^5}$ pontossággal.

62. *Huygens* «De circuli magnitudine inventa» c. értekezésében több egyenlőtlenséget állapít meg, melyek a körmérés szempontjából érdekesek. Ilyenek pl.: 1) A félkörnél kisebb szegmentum területe nagyobb, mint az alapját képező húr felett emelt beírt egyenlőszárú háromszög $\frac{4}{3}$-a. 2) A félkörnél kisebb szegmentum területe kisebb azon háromszög $\frac{2}{3}$-ánál, melynek alapja a szegmentum húrja, oldalai a húr végpontjaiban húzott érintők. 3) Az 1) és 2)-ből pedig: ha t_n a beírt szab. n-szög és T_n a körülírt szab. n-szög területe, akkor:

$$t_{2n} + \frac{1}{3}(t_{2n} - t_n) < t < \frac{2}{3}T_n + \frac{1}{3}t_n,$$

ahol t a kör területe. Bizonyítsuk be ezeket az egyenlőtlenségeket Taylor sorba fejtéssel és becsüljük meg a különbségeket. (Mint a 61. feladatban.)

63. Határozzuk meg az $y = ax^2$ parabola valamely x_1, $y_1 = ax_1^2$ pontjában húzható érintő egyenletét és ugyanezen pontban a görbületi sugarát.

* Math. Phys. Lapok 1907. 202. l.

64. Határozzuk meg az $y=\sin x$ görbe valamely x_1, $y_1=\sin x_1$ pontjában húzott érintő egyenletét és ugyanezen pontban a görbületi sugarat!

65. Határozzuk meg azt az n-edfokú racionális egész függvényt, melynek értékei a $0, 1, 2, \dots n$ helyeken rendre: $+1, -1, +1, -1, \dots +(-1)^n$. Az első különbségi sor: $-2, +2, -2, +2, \dots$; a második: $4, -4, +4, \dots$ a harmadik: $-8, +8, \dots$ s í. t. általában a k-ik kül. sor: $(-1)^k 2^k, (-1)^{k+1} 2^k, \dots$, tehát az interpolációs formula szerint:

$$\left[\varphi(x) = f(a) + \frac{\Delta f(a)}{h}(x-a) + \frac{\Delta^2 f(a)}{2.h^2}(x-a)(x-a-h) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta^3 f(a)}{3!\,h^3}(x-a)(x-a-h)(x-a-2h) + \cdots\right]$$

$$\varphi(x) = 1 - 2x + \frac{4}{2}x(x-1) - \frac{8}{3!}x(x-1)(x-2) + \frac{16}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3) + \cdots$$

$$= 1 - 2\binom{x}{1} + 4\binom{x}{2} - 8\binom{x}{3} + 16\binom{x}{4} + \cdots + (-1)^n 2^n \binom{x}{n}.$$

Ezt úgy is kérdezhettük volna, hogy melyik az az n-edfokú racionális egész függvény, mely a $0, 1 \dots n$ helyeken ugyanolyan értékeket vesz fel, mint a $\cos \pi x$. Határozzuk meg a maradéktagot!

66. Melyik az az n-edfokú racionális egész függvény, mely az $x=0$, $1, 2, \dots n$ helyeken ugyanazon értékeket veszi fel, mint a $\sin \frac{\pi}{2} x$, vagyis sorban: $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

67. Fejezzük ki az x^3-t Newton-féle interpolációs függvény alakjában

$$\left[f(x) = f(0) + \Delta f(0)\, x + \Delta^2 f(0)\, \frac{x(x-1)}{2} + \cdots\right]$$

Evégből szükségünk van a $0, 1, 8, 27, \dots$ különbségi soraira. Az első: $1, 7, 19, \dots$, a második: $6, 12, \dots$, a harmadik állandó: 6; a többi: 0, tehát a jelen esetben: $f(0)=0$, $\Delta f(0)=1$, $\Delta^2 f(0)=6$, $\Delta^3 f(0)=6$ és így:

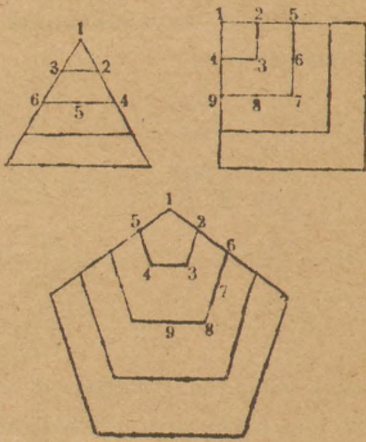
$$x^3 = x + 6\frac{x(x-1)}{2} + 6\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3}.$$

Állítsuk elő ilyen módon az x^4, x^5, x^6-t is!

68. Számítsuk ki a $\Delta \sin \pi x$, Δa^x, $\Delta \frac{1}{x}$, $\Delta \frac{1}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}$ véges különbségeket ($h=1$ téve).

69. Ha az egyenlőoldalú háromszögbe a mellékelt ábra mintájára pontokat helyezünk, akkor a csúcson lesz 1 pont; az alappal vont első párhuzamoson: 2, a következőn 3 s í. t.; tehát e pontok számát az 1, 2, 3, 4, ... számtani sor tagjai adják meg. A négyzetbe ilyen módon rajzolható pontok számát hasonlóképpen állapítjuk meg: A csúcsra jön 1 pont; a 234 tört vonalra 3, a 579 vonalra 5 s í. t.; tehát az 1, 3, 5, 7, ... számtani sor tagjai. Mutassuk meg, hogy ilyenformán egy szabályos 5-szögbe minden egyes törtvonaldarabra sorban: 1, 4, 7, 10, ... a hatszögbe: 1, 5, 9, 13, ... pont rajzolható stb. Eszerint tehát, ha az illető idom egy-egy oldalára n pontot raj-

zoltunk, az egész háromszögbe: $\binom{n+1}{2}$, a négyszögbe n^2, az ötszögbe $\frac{n(3n-1)}{2}$, a hatszögbe $n(2n-1)$ pontot tettünk összesen. Ezek a számok a poligonális számok. Határozzuk meg az első n háromszögszám összegét! Határozzuk meg az első n négyszögszám, ötszögszám, hatszögszám összegét.



68. ábra.

70. Tegyük fel, hogy $f(x)$ valamely szakaszban mindenütt differenciálható legalább n-szer és hogy

$$x+h_1,\ x+h_1+h_2,\ x+h_1+h_2+h_3, \ldots\ x+h_1+h_2+\cdots+h_n$$

is e szakaszban vannak. Ekkor a középértéktétel szerint:

$$f(x+h_1)-f(x)=h_1f'(x+\vartheta_1h_1), \qquad \alpha)$$

Jelöljük a baloldalt, mely az x-nek differenciálható függvénye, $f_1(x)$-el és alkalmazzuk erre újból a középérték-tételt:

$$f_1(x+h_2)-f_1(x)=h_2f_1'(x+\vartheta_2h_2).$$

De $f_1'(y)=f'(x+h_1)-f'(x)$ és így, ebben x helyett $x+\vartheta_2h_2$ téve:

$$f_1'(x+\vartheta_2h_2)=f'(x+h_1+\vartheta_2h_2)-f'(x+\vartheta_2h_2)$$

és a jobboldalra a középértéktételt alkalmazva:

$$f_1'(x+\vartheta_2h_2)=h_1f''(x+\vartheta_1h_1+\vartheta_2h_2),$$

[ahol ϑ_1 nem egyezik meg az előbbi ϑ_1-el], tehát:

$$f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)-f(x+h_2)+f(x)=h_1h_2f''(x+\vartheta_1h_1+\vartheta_2h_2). \qquad \gamma)$$

Jelöljük a baloldalt $f_2(x)$-el és alkalmazzuk erre újból a középértéktételt:

$$f_2(x+h_3)-f_2(x)=h_3f_2'(x+\vartheta_3h).$$

De $f_2'(x)=f'(x+h_1+h_2)-f'(x+h_1)-f'(x+h_2)+f'(x)$,

tehát x helyett $x+\vartheta_3h$ téve:

$$f_2'(x+\vartheta_3h)=f'(x+h_1+h_2+\vartheta_3h)-f'(x+h_1+\vartheta_3h)-f'(x+h_2+\vartheta_3h)+f'(x+\vartheta_3h),$$

tehát a γ) egyenlőségben $f(x)$ függvény helyett $f'(x)$-et és x helyett $x+\vartheta_3 h$-t téve, azt kapjuk, hogy a γ) jobboldala ez lesz:

$$h_1 h_2 f'''(x+\vartheta_1 h_1+\vartheta_2 h_2+\vartheta_3 h_3),$$

[ahol ϑ_1 és ϑ_2 nem egyeznek meg a γ) alatti formulában szereplő ϑ_1 és ϑ_2-vel], tehát

$$f_2(x+h_3)-f_2(x)=h_1 h_2 h_3 f'''(x+\vartheta_1 h_1+\vartheta_2 h_2+\vartheta_3 h_3)$$

részletesen írva:

$$f(x+h_1+h_2+h_3)-f(x+h_1+h_2)-f(x+h_2+h_3)-f(x+h_3+h_1)+$$
$$+f(x+h_1)+f(x+h_2)+f(x+h_3)-f(x)=h_1 h_2 h_3 f'''(x+\vartheta_1 h_1+\vartheta_2 h_2+\vartheta_3 h_3).$$

Igy folytatva, azt kapjuk, hogy:

$$f(x+h_1+h_2+h_3+\cdots+h_n)-\Sigma f(x+h_1+h_2+\cdots+h_{n-1})+$$
$$+\Sigma f(x+h_1+h_2+\cdots+h_{n-2})-\Sigma f(x+h_1+h_2+\cdots+h_{n-3})+\cdots+(-1)^n f(x)=$$
$$=h_1 h_2 h_3\ldots h_n f^{(n)}(x+\vartheta_1 h_1+\vartheta_2 h_2+\cdots+\vartheta_n h_n),$$

ahol $\Sigma f(x+h_1+h_2+\cdots+h_i)$ jelenti azon $\binom{n}{i}$ tagú összeget, melynek egyes tagjaiban az x mellett a $h_1, h_2, \ldots h_n$ közül kiválasztható i tag összege áll.

Ha $h_1=h_2=\cdots=h_n=h$, mi lesz ebből a formulából:

$$f^{(n)}(x+\vartheta_1 h_1+\vartheta_2 h_2+\cdots+\vartheta_n h_n)=$$
$$=\frac{f(x+h_1+h_2+\cdots+h_n)-\Sigma f(x+h_1+\cdots+h_{n-1})+\cdots+(-1)^n f(x)}{h_1 h_2\ldots h_n}.$$

Ha $f^{(n)}(x)$ az x helyen folytonos, akkor ebből egyúttal

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h_1=h_2=\cdots=h_n=0}\frac{f(x+h_1+h_2+\cdots+h_n)-\Sigma f(x+h_1+\cdots+h_{n-1})+\cdots+(-1)^n f(x)}{h_1 h_2\ldots h_n}$$

az n-dik differenciálhányados új értelmezése származik.

IRODALOM.

E fejezetben tárgyaltak kiegészítéseül ajánljuk a következőket: A véges Taylor sorra vonatkozólag:

1. König: Analizis p. 432.
2. Cesaro-Kowalewsky: Elem. Lehrbuch der alg. Analysis etc. p. 265.
3. Genocchi-Peano: Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung p. 68.
4. Goursat: Cours d'Analyse. I. p. 101.
5. Jordan: Cours d'Analyse. I. p. 205.
6. Tannery: Introduction etc. p. 390.

Az interpolációk tanára vonatkozólag:

1. Markoff: Differenzenrechnung.
2. Seliwanoff: Differenzenrechnung.

A feladatokban foglalt tételek kiegészítéseül: Netto Combinatorik (sokszögszámok) p. 48. Jensen Sur les fonctions convexes Acta Math. XXX. p. 175. (1. 60. feladat). Beke Math. Phys. L. XI. köt. p. 302. XVI. köt. p. 210.

VI. FEJEZET.

HATÁRÉRTÉKEK KISZÁMÍTÁSA.

1. L'Hospital szabály. A $\frac{0}{0}$ határozatlan alak. *a)* Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvények az $x=a$ helyen eltűnnek, akkor e helyen az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányados nem számítható ki; mert $\frac{0}{0}$ alakú, melynek az osztás definiciója szerint értelmet nem tulajdoníthatunk. Az $x=a$ helyen tehát ez esetben az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányadosnak helyettesítési értéke nincsen. Meglehet azonban, hogy határértéke van, azaz $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ létezik: például az l számérték. Ez azt jelenti, hogy $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányados az l-től elenyésző csekéllyel különbözik, ha x az a-tól végtelen kis távolságban van; vagy pontosabban: bármely ε számhoz meg tudunk állapítani olyan δ küszöböt, hogy

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}-l\right|<\varepsilon,$$

ha $|x-a|<\delta$. Ilyenkor ezt a határértéket tekintjük az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányados a helyhez tartozó értékének. Ezt joggal tehetjük, mert hiszen az a helyhez tartozó két érték, a helyettesítési érték és határérték közül az első nem létezik.

Ha tehát $f(a)=0$ és $\varphi(a)=0$, továbbá $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=l$, akkor $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ értéke gyanánt az $x=a$ helyen, (ha egyébként nincs ez az érték megállapítva), ezt az l határértéket tekintjük.

E határérték kiszámítását némelykor eddigi tételeink segítségével elvégezhetjük. E végből felhasználjuk az általánosabb Cauchy-féle középértéktételt. Ezt a tételt, melyet már ismerünk, még a következő, egyszerűen áttekinthető módon is megállapíthatjuk: Legyen $f(x)$ és $\varphi(x)$ két olyan függvény, melyek az $\alpha\beta$ szakaszban minden helyen differenciálhatók; továbbá a és b e szakasz két helye, akkor ez a determináns:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & 1 \\ f(a) & \varphi(a) & 1 \\ f(b) & \varphi(b) & 1 \end{vmatrix}$$

szintén az egész szakaszban differenciálható és az $x=a$ helyen, valamint az $x=b$ helyen eltűnik. *Rolle* tétele szerint tehát $F'(x)$ az a és b között legalább egy helyen: 0; de

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & \varphi'(x) & 0 \\ f(a) & \varphi(a) & 1 \\ f(b) & \varphi(b) & 1 \end{vmatrix} = f'(x)[\varphi(a)-\varphi(b)] - \varphi'(x)[f(a)-f(b)].$$

Jelöljük azt a közbenső helyet, melyen $F'(x)$ eltűnik, ξ-vel; tehát:

$$f'(\xi)[\varphi(a)-\varphi(b)] - \varphi'(\xi)[f(a)-f(b)] = 0.$$

Ha $\varphi'(\xi)$ nem 0 és $\varphi(a)-\varphi(b)$ sem 0, akkor:

$$\frac{f(a)-f(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Az utolsó megjegyzés szükséges volt ahhoz, hogy az osztást a $[\varphi(a)-\varphi(b)]\varphi'(\xi)$-vel elvégezhessük. Minthogy azonban a ξ helyet nem ismerjük, tehát azt, hogy $\varphi'(\xi) \neq 0$, rendszerint úgy biztosítjuk, hogy csak olyan esetekre szorítkozunk, melyekben $\varphi'(x)$ az $a \dots b$ szakasz belsejében sehol sem tűnik el. [Az a, vagy b helyeken eltűnhetik, az nem akadályoz bennünket a következtetésünkben, mert hiszen ξ közbenső hely.] Ezzel egyúttal már azt is biztosítottuk, hogy $\varphi(b) \neq \varphi(a)$; mert hiszen, ha $\varphi(b)=\varphi(a)$ volna, akkor Rolle tétele szerint valamely közbenső helyen $\varphi'(x)$ is eltűnnék. Így tehát a $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ követelést el is hagyhatjuk.

Ha tehát $\varphi'(x)$ az ab szakasz belsejében sehol sem 0, akkor:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Alkalmazzuk ezt a formulát abban az esetben, midőn $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$. Válasszuk b gyanánt az x helyet, mely az a közelében van és feltesszük, hogy az $a \dots x$ szakasz belsejében a $\varphi(x)$ függvény diff. hányadosa sehol sem 0. Ekkor a formulánk a következő alakú lesz (minthogy $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$)

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

ahol ξ az $a \dots x$ valamely belső helye. Ha már most az x-nek egymásután az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ értékeket adjuk, melyek az a-hoz konvergálnak, akkor a ξ részére keletkező $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ olyan számértékek, melyek szintén a-felé konvergálnak (mert hiszen ξ_k az $a \ldots x_k$ szakaszban van). Ha az így nyert

$$\frac{f'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}, \frac{f'(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)}, \frac{f'(\xi_3)}{\varphi'(\xi_3)}, \ldots \qquad \alpha)$$

számértékek egy meghatározott véges l számot értelmeznek, akkor az ezekkel egyenlő

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}, \frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}, \frac{f(x_3)}{\varphi(x_3)}, \ldots \qquad \beta)$$

számértékek is az l-hez convergálnak; e sorozat határértéke tehát: l. Sőt, ha l nem véges szám, akkor is így áll a dolog; mert hiszen ha az első sorozat korlátlan szabályos számsorozat, vagyis elmehetünk benne olyan messzire, hogy azon túl minden tagja nagyobb a tetszés szerint megadott N számnál, (vagy kisebb $-N$-nél), akkor a második sorozat is végtelenné válik.

Még az eddigiekből nem következtethetjük, hogy $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ létezik, mert hiszen ha más $x_1, x_2, x_3, \ldots$ helyeken át haladunk az a-hoz, más $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ közbenső helyek léphetnek fel és kérdés, hogy ekkor lesz-e az $\alpha)$ alatti sornak határértéke. Hanem, ha az $\alpha)$ alatti sorozatnak mindig van határértéke, akárminő számokon át haladunk is a 0-hoz és ez a határérték mindig egy és ugyanaz az l, azaz

$$\lim_{\xi=a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = l,$$

akkor igenis a $\beta)$ alatti sorozatnak is l a határértéke, akárminő úton haladjunk is az a-hoz, mert hiszen e $\beta)$ alatti sorozatnak a határértéke mindig ugyanaz, mint a megfelelően választott ξ helyekkel alkotott $\alpha)$ sorozaté. Ha tehát az $\alpha)$ sorozat határértéke független a ξ helyek választásától, akkor a $\beta)$ alatti sorozatnak is ugyanez lesz a határértéke. Kimondhatjuk tehát a következő nevezetes tételt:

Ha $f(a)=0$ és $\varphi(a)=0$, továbbá az a helynek olyan környezete állapítható meg, melyen belül (az a helyet nem véve tekintetbe) $\varphi'(x)$ sehol sem 0, továbbá $\lim\limits_{\xi=a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ létezik és pedig véges, (vagy meghatározott jelű végtelenné válik), akkor $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ is létezik és az előbbivel megegyezik; azaz (ξ helyett x-et írva)

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Ezt a tételt *L'Hospital*-féle tételnek nevezzük.

Ha az a helyen úgy az $f'(x)$, mint a $\varphi'(x)$ folytonosak és $\varphi'(a) \neq 0$, akkor e l'Hospital szabály alkalmazása igen egyszerű. Ekkor ugyanis $\lim_{x=a} f'(x) = f'(a)$ és $\lim_{x=a} \varphi'(x) = \varphi'(a)$, tehát:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Így például az $\frac{x}{\sin x}$ hányados a 0 helyen $\frac{0}{0}$ határozatlan alakú; de a számláló diff. hányadosa 1, a nevezőé: $\cos x$, a diff. hányadosok viszonya tehát $\frac{1}{\cos x}$ és így:

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Megeshetik, hogy az $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ hányados limesét az a helyen megint nem számíthatjuk ki, mert $f'(a) = 0$ és $\varphi'(a) = 0$, vagyis a jobboldali kifejezés ismét $\frac{0}{0}$ határozatlan alakú. Ha azonban az $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$-nek az $x = a$ helyen van határértéke és $\varphi''(x) \neq 0$, ha $x \neq a$, akkor az előbbi következtetés ismételhető és a L'Hospital szabály újból való alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x=a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)},$$

tehát, ha nem csak $f(a) = 0$ és $\varphi(a) = 0$, hanem egyúttal $f'(a) = 0$ és $\varphi'(a) = 0$, de $\lim_{x=a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = l$, akkor

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l,$$

és általában, ha az $x = a$ helyen úgy az $f(x)$, mint a $\varphi(x)$, valamint első $n-1$ differenciálhányadosaik is eltűnnek, de a

$$\lim_{x=a} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)} = l,$$

akkor egyúttal:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l,$$

mert hiszen ez esetben a L'Hospital tétel szerint:

$$\lim_{x=a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)} = l$$

és így ugyancsak ezen szabály szerint

$$\lim_{x=a} \frac{f^{(n-2)}(x)}{\varphi^{(n-2)}(x)} = l$$

s í. t., végül:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l.$$

Hallgatagon feltettük, hogy a nevezőben szereplő differenciálhányadosok az a hely környezetében (az a pontot kivéve) nem tűnnek el.

Így például, $\frac{1-\cos x}{x^2}$ az $x=0$ helyen $\frac{0}{0}$ határozatlan alakú. A számláló és nevező differenciálhányadosainak osztásából keletkező, $\frac{\sin x}{2x}$-nek értéke közvetlenül nem állapítható meg, mert ez ismét $\frac{0}{0}$ alakra vezet. Erre alkalmazva a L'Hospital szabályt, azt találjuk, hogy $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$, tehát egyúttal $\lim\limits_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

A L'Hospital szabály ezen kibővítésére közvetlenül is rájuthatunk, ha a Cauchy-féle középértéktételt kissé általánosítjuk:

Tegyük fel, hogy

$$f'(a)=0, \ldots f^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{és} \quad \varphi'(a)=0, \ldots \varphi^{(n-1)}(a)=0$$

és $\varphi^{(n)}(x)$ az a elég kis környezetében nem tűnik el. Ez a determináns:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & 1 \\ f(a) & \varphi(a) & 1 \\ f(b) & \varphi(b) & 1 \end{vmatrix}$$

az $x=a$ és az $x=b$ helyeken 0; tehát $F'(x)$ egy közbenső ξ helyen eltűnik; azaz

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & \varphi'(x) & 0 \\ f(a) & \varphi(a) & 1 \\ f(b) & \varphi(b) & 1 \end{vmatrix}$$

az $x=\xi$ helyen: 0. De ez a determináns az $x=a$ helyen is 0, mert $f'(a)=0$, $\varphi'(a)=0$; tehát az $F''(x)$ egy, az a és ξ közötti helyen eltűnik. Jelöljük ezt a helyet ξ'-al; tehát

$$F''(x) = \begin{vmatrix} f''(x) & \varphi''(x) & 0 \\ f(a) & \varphi(a) & 1 \\ f(b) & \varphi(b) & 1 \end{vmatrix}$$

a ξ' helyen eltűnik; de feltételünk szerint $f''(a)=0$, $\varphi''(a)=0$, tehát egyúttal $F''(a)=0$; vagyis megint az következik, hogy az $F'''(x)$ egy, az a és ξ' között ξ'' helyen 0. Így haladva tovább, azt találjuk, hogy az

$$F^{(n)}(x) = \begin{vmatrix} f^{(n)}(x) & \varphi^{(n)}(x) & 0 \\ f(a) & \varphi(a) & 1 \\ f(b) & \varphi(b) & 1 \end{vmatrix}$$

determináns egy, az ab szakaszban levő $\xi^{(n)}$ helyen (melyet rövidség kedvért ismét ξ-vel akarunk jelölni) eltűnik; azaz:

$$f^{(n)}(\xi)[\varphi(a)-\varphi(b)]-\varphi^{(n)}(\xi)[f(a)-f(b)]=0.$$

Ha tehát $\varphi(a)\neq\varphi(b)$ és $\varphi^{(n)}(x)$-ről tudjuk, hogy az ab szakaszban nem tűnik el, akkor $\varphi^{(n)}(\xi)\neq 0$ és így:

$$\frac{f(a)-f(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)}.$$

Ha tehát az $f(x)$ első $n-1$ diff. hányadosa, valamint a $\varphi(x)$ első $n-1$ diff. hányadosa az $x=a$ helyen 0, továbbá a $\varphi^{(n)}(x)$ az ab szakasz belsejében sehol sem tűnik el, akkor a Cauchy-féle középértéktételnek ez a kibővítése áll:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)},$$

ahol ξ egy bizonyos, az $a\ldots b$ szakaszban levő hely. Ha már most $f(a)$ és $\varphi(a)$ is zérusok és $b=a+h$ tesszük, akkor:

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)},$$

ahol ξ az $a\ldots a+h$ szakaszban van. Ha $\lim\limits_{x=a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$ létezik, akkor éppen úgy, mint előbb, következik, hogy:

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\lim_{x=a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)},$$

vagyis: $$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x=a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Ha tehát $$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$$

és $$\varphi(a)=\varphi'(a)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(a)=0$$

és $\varphi^{(n)}(x)$ az a hely elég kis környezetében nem 0, továbbá

$$\lim_{x=a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}=l,$$

akkor egyúttal: $$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=l.$$

* A $\varphi(a)\neq\varphi(b)$ feltételt megint elhagyhattuk; mert, ha $\varphi^{(n)}(x)$ az ab szakaszban sehol sem 0, akkor $\varphi^{(n-1)}(x)$ nem veheti fel két helyen ugyanazt az értéket, tehát, minthogy $\varphi^{(n-1)}(a)=0$, az egész szakaszban mindenütt pozitiv vagy mindenütt negativ; ebből ugyanez következik a $\varphi^{(n-2)}(x)$-re s í. t. a $\varphi'(x)$-re is és így nem lehet $\varphi(a)=\varphi(b)$, mert akkor ab közben $\varphi'(x)=0$ volna. A kibővítésben látjuk, kevesebb feltevéssel élünk, mintha az eredeti tételt többször egymásután alkalmazzuk.

Ismét megemlítjük azt az egyszerű es a számításainkban leggyakrabban előforduló esetet, melyben $f^{(n)}(x)$ és $\varphi^{(n)}(x)$ az a helyen folytonosak és $\varphi^{(n)}(a)\neq 0$. Ekkor ugyanis

$$\lim_{x=a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)},\quad \text{tehát}\quad \lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}.$$

[Bebizonyítottuk, hogy ha $f(a)=0$ és $\varphi(a)=0$ és $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$-nek az a helyen van határértéke, akkor ez egyúttal az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$-nek is határértéke. Megmutatjuk most, hogy fordítva nem áll a dolog, vagyis, ha $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ létezik, abból még nem következik, hogy egyúttal $\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ is létezik; tehát, hogy a jobboldalon álló kifejezés határértékének létezéséből a baloldalon álló $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ határértékére lehetett következtetni, de fordítva nem. Így például az $\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ az $x=0$ helyen $\frac{0}{0}$ határozatlan alakú; de határértéke van és pedig: 0; ugyanis

$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}$$

alakban írható. Az első tényező határértéke: 1, a másodiké pedig, melynek egyik tényezője 0-á válik, a másik pedig ingadozik ugyan, de csakis -1 és és $+1$ között: szintén 0. Így tehát $\lim\limits_{x=0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0.$

Alkossuk meg a számláló és nevező diff. hányadosainak quotiensét. Ez a következő:

$$\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

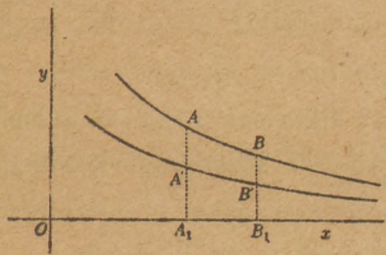
Ha x 0 felé convergál, a számláló első tagja 0 lesz, a nevező: 1, de a számláló második tagjának nincs határértéke, vagyis inkább a határértéke attól függ, hogy az x minő úton válik 0-á.]

b) Eddig az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányados határértékét vizsgáltuk az $x=a$ helyen, midőn $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$. Az a véges számértéket jelentett. Sokszor megesik, hogy az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányados határértékét az $x=\infty$ helyen keressük, ha $\lim\limits_{x=\infty}f(x)=0$ és $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x)=0$. Annak, hogy $\lim\limits_{x=\infty}f(x)=0$, geometriai értelme, hogy az $y=f(x)$ görbe asymptotice közeledik az x tengelyhez. A kérdés itt tehát az, hogy az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányadosnak van-e határértéke, ha x végtelenné válik, vagyis az $\frac{AA_1}{A'A_1}$ hányadosnak van-e határértéke (69. ábra)?

Ezt a kérdést könnyen visszavezethetjük az előbbire, midőn a szóban forgó a hely véges volt. Ha ugyanis $x = \frac{1}{y}$ tesszük, akkor x végtelenné válik, ha y zérussá lesz és fordítva; tehát

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{y=0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Látjuk tehát, hogy a jobboldali határérték az $y = 0$ helyre vonatkozik. Itt az $f\left(\frac{1}{y}\right)$ az y-nak függvénye, melyet könnyebb áttekintés végett $f_1(y)$-al jelölünk és $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$ helyett $\varphi_1(y)$-t teszünk. Feladatunk tehát a $\lim\limits_{y=0} \frac{f_1(y)}{\varphi_1(y)}$ kiszámítása, ha $f_1(0)=0$, $\varphi_1(0)=0$. Alkal-



69. ábra.

mazzuk a L'Hospital szabályt. E végből $f_1(y)$ és $\varphi_1(y)$ differenciálhányadosaira van szükségünk: Minthogy $f_1(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$, tehát

$$f_1'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right),$$

ahol a jobboldalon a differenciálás az $\frac{1}{y} = x$ szerint végzendő. Éppen így:

$$\varphi_1'(y) = -\frac{1}{y^2} \varphi'\left(\frac{1}{y}\right);$$

tehát:
$$\lim_{y=0} \frac{f_1'(y)}{\varphi_1'(y)} = \lim_{y=0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)},$$

vagy ha $\frac{1}{y}$ helyébe megint x-et írunk, a jobboldal így írható: $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Ha tehát ez a limes létezik, akkor a L'Hospital szabály szerint:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Itt két dolgot kell még megjegyeznünk. Először is, a L'Hospital szabály megállapítását az $x=a$ véges helyen azon esetben végeztük el, midőn a $\varphi'(x)$ az $x=a$ hely környezetében nem tűnik el. A jelen esetben ez azt jelenti, hogy a $\varphi_1'(y)$ az $y=0$ hely környezetében ne tűnjék el; tehát például a $0 \ldots h$ szakasz belsejében $\varphi_1'(y)$ mindenütt 0-tól különböző legyen. Minthogy pedig $\varphi_1'(y)=-x^2\varphi'(x)$ és ha y a $0 \ldots h$ szakaszban van, akkor x az $\frac{1}{h} \cdots \infty$ szakaszban van, vagyis $\frac{1}{h}$-nál nagyobb, tehát kell, hogy az $x^2\varphi'(x)$ az $\frac{1}{h}$-nál nagyobb x-ekre nézve zérustól különböző legyen, azaz egy bizonyos N számon túl az $x^2\varphi'(x)$ vagyis $\varphi'(x)$ ne legyen 0.

Egy másik megjegyzés a következő: Ha $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ és $\lim\limits_{x=\infty} \varphi'(x)$ léteznek, akkor csakis 0 lehet mindkettő. Ez azt jelenti, *hogy ha* $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=0$, *akkor egyúttal — ha egyáltalában* $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ *létezik, —* $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)=0$. Ennek az állításnak megfelelő geometriai kép igen egyszerű. Ha az $y=f(x)$ görbe asymptotice közeledik az X tengelyhez, mint az előbbi ábra mutatja, akkor az érintőjének határhelyzete — ha ugyan van határhelyzet — az X tengely.

Ezt az állítást számítással is igazoljuk. Ha ugyanis $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ létezik és 0-tól különböző, akkor vagy pozitiv, vagy negativ. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)=m$ pozitiv szám. Ez azt jelenti, hogy elmehetünk az x-el olyan messzire (N-ig), hogy azon túl mindenütt $f'(x)$ $m-\varepsilon$ és $m+\varepsilon$ közé esik, szóval, hogy $f'(x)$ nagyobb egy bizonyos m' pozitiv számnál. Legyen x egy ilyen, N-en túl levő hely; és x' egy másik, tőle jobbra eső hely: akkor a középértéktétel szerint:

$$f(x')=f(x)+(x'-x)f'(\xi),$$

vagyis

$$f(x')>f(x)+m'(x'-x).$$

Az $f(x)$ tehát monoton növekvő függvény és pedig minden határon túl nő, tehát limese nem lehet 0. Látjuk tehát, hogy ha $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)=m$ pozitiv szám, akkor $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ nem lehet 0. Éppen így mutatható meg, hogy ha $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ negativ szám, akkor sem lehet $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$: zérus. Így tehát, ha $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=0$ és egyáltalában $f'(x)$-nek van határértéke, ez csakis 0 lehet.

[Meglehet, hogy $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=0$ és $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ nem létezik. Így például, ha $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$, akkor $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=0$, de $f'(x)=-\frac{\sin x^2}{x^2}+2\cos x^2$ és $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ nem létezik, mert az első tag limese: 0, a másodiknak pedig nincs határértéke. *De ha* $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ *létezik* (s véges szám) *és minden helyen van* $f'(x)$ *és* $f''(x)$ *korlátos, azaz* $|f''(x)|<M$ *minden x-re, akkor* $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ *létezik, tehát:* 0. Ugyanis, tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=A$; és legyen adva a tetszés szerinti kis pozitív ε. Akkor az ehhez tartozó N küszöbön túl mindenütt:

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Válasszunk az N-en túl egy tetszés szerinti l közt. E közben $f'(x)$ nem lehet mindenütt $\frac{2\varepsilon}{l}$-nél nagyobb, mert akkor $f(x+l)=f(x)+lf'(\xi)$-ből: $f(x+l)>A-\varepsilon+2\varepsilon>A+\varepsilon$ volna; tehát az l közben okvetlenül van olyan hely, amelyen $f'(x)<\frac{2\varepsilon}{l}\cdot$ Legyen ilyen hely az a; tehát $f'(a)<\frac{2\varepsilon}{l}\cdot$ Ha x e köz bármely helye, akkor

$$f'(x)=f'(a)+f''(\xi)(x-a)$$

-ból következik, hogy:

$$|f'(x)|<\frac{2\varepsilon}{l}+Ml.$$

Ha l gyanánt ezt választjuk: $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}}$, akkor tehát

$$|f'(x)|<2\sqrt{2\varepsilon M};$$

tehát az N-en túl mindenütt $|f'(x)|<2\sqrt{2\varepsilon M}$ és ez már azt mutatja, hogy $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)=0$. Így tehát, *ha* $\lim f(x)$ *létezik (akár 0, akár más véges szám) és* $f''(x)$ *is mindenütt létezik és egy véges M-nél kisebb, akkor ebből már következik, hogy* $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)=0$.]*

Azt látjuk tehát, hogy ha a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$-t akarjuk kiszámítani azon esetben, midőn $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=0$ és $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x)=0$, a L'Hospital szabály alkalmazása megint csak $\frac{0}{0}$ alakú kifejezésre vezet; de azért mégis némelykor a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ meghatározása egyszerűbben végezhető, mint a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$-é. Így például számítsuk ki a

$$\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{b}{x}\right)}$$

hányadost az $x=\infty$ helyen. A számláló is, a nevező is 0-á válik A számláló diff. hányadosa: $-\frac{a}{x(a+x)}$, a nevezőé: $-\frac{b}{x(b+x)}$,

* *Hadamard* Propriété des trajectoires en Dynamique. Journ. de Math. 1897. p. 334.

tehát a L'Hospital szabály szerint:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{b}{x}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{a}{b} \cdot \frac{b+x}{a+x} = \frac{a}{b}.$$

2. A $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alak. Ha $f(x)$ az $x=a$ helyen és $\varphi(x)$ is ezen a helyen végtelenné válik, akkor az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányados az $x=a$ helyen behelyettesítéssel nem számítható ki. Helyettesítési értéke nincs. Megint megmutatjuk, hogy bizonyos esetekben a határértéke kiszámítható. Csak olyan esetekre szorítkozunk, midőn úgy az $f(x)$-nek, mint a $\varphi(x)$-nek mindenütt van véges differenciálhányadosa az a hely környezetében (az a hely kivételével), vagyis, ha x_1 és x_2 tetszés szerinti két hely az a környezetében (pl.: az a baloldalán), akkor az $x_1 \ldots x_2$ szakaszban az $f(x)$ és $\varphi(x)$ mindenütt differenciálhatók (és $\varphi'(x)$ e szakaszban nem 0) és így a középértéktétel alkalmazható:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Ezen megjegyzés előrebocsátásával, vegyünk fel az a-hoz elég közel egy x_1 helyet és jelöljön x egy tetszés szerinti helyet az $x_1 \ldots a$ szakaszban. Ekkor az előbbi megjegyzés szerint:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{\varphi(x_1)-\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

de a baloldal így is írható:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}},$$

tehát

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Ha már most a jobboldalon álló $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ hányadosnak van határértéke, ha a ξ a-hoz konvergál (balfelől), akkor a baloldali kifejezésnek is van, ezzel megegyező határértéke; de a baloldalon szorzat áll. A második tényező 1-felé konvergál, ha x az a-felé tart; mert hiszen $f(x_1)$ és $\varphi(x_1)$ fix számértékek és $f(x)$ meg $\varphi(x)$ végtelenné válnak; így tehát a baloldali $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$-nek is van határértéke és ez megegyezik az $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ határértékével.

Ha tehát $\lim\limits_{x=a} f(x)=\infty$ *és* $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=\infty$ *és az* a *hely bármely kis környezetében* $f'(x)$ *és* $\varphi'(x)$ *léteznek és* $\varphi'(x)$ *nem tűnik el és* $\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *létezik, akkor egyúttal*

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Látjuk tehát, hogy a $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alak kiszámítására, illetőleg a $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ meghatározására éppen olyan eljárásunk van, mint a $\frac{0}{0}$ alak esetében volt. Ha a differenciálhányadosok quotiensének az $x=a$ helyen van (véges, vagy meghatározott jelű végtelen) határértéke, akkor az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ hányadosnak is ugyanez a határértéke.

Így például a $\frac{\log(e^x-e^a)}{\log(x-a)}$ az $x=a$ helyen ilyen alakú: $\frac{\infty}{\infty}$. A számláló differenciálhányadosa: $\frac{e^x}{e^x-e^a}$, a nevezőé: $\frac{1}{x-a}$. Az a-tól különböző helyeken mindkettő véges és az $\frac{1}{x-a}$ a 0-tól különböző, tehát az előbbi levezetés feltételei teljesítve vannak. A differenciálhányadosok quotiense: $\frac{(x-a)e^x}{e^x-e^a}$ az $x=a$ helyen határozatlan alakú ugyan, de a L'Hospital szabály szerint kiszámítható értéke: 1; tehát $\lim\limits_{x=a}\frac{\log(e^x-e^a)}{\log(x-a)}=1.$

Hogy $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ azon esetben, midőn a baloldalon a számláló is, a nevező is végtelenné válik az $x=a$ helyen, némelykor még egyszerűbben is megállapítható és pedig közvetlenül a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakra vonatkozó L'Hospital szabállyal. Ugyanis $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ így is írható: $\frac{1}{\varphi(x)}:\frac{1}{f(x)}$, tehát a

$$\lim_{x=a}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

kerestetik. De ha x az a-felé konvergál, akkor $\frac{1}{\varphi(x)}$ és $\frac{1}{f(x)}$ eltűnnek, tehát $\frac{0}{0}$ határozatlan alakkal van dolgunk. Alkossuk meg a számláló és nevező differenciálhányadosait. Ezek: $-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$ és $-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$. Hányadosuk pedig:

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2 \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

tehát ha ennek az $x=a$ helyen van határértéke, akkor egyúttal

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x=a}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2 \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

Ha már előre tudjuk, hogy $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ létezik és 0-tól különböző, a jobboldal így is írható:

$$\left[\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2\cdot\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$$

és ha $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ számértékkel rövidítünk, akkor:

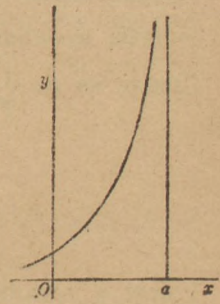
$$1=\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\lim\frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

miből:

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

tehát ismét az előbbi tételt kaptuk: egyszerűbben, mert csakis a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakra vonatkozó, már megállapított tételt alkalmaztuk. [De többet kellett föltételeznünk mint előbb: föl kellett tennünk, hogy a $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ létezik és 0-tól különböző, mert különben a $\lim\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2\cdot\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ számítását nem végezhettük volna úgy, hogy az egyes tényezőinek a limeseit szorozzuk és ha e limesről nem tudnók, hogy 0-tól különböző, nem lehetett volna azt mondanunk, hogy a $\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}$-el rövidítünk. Megjegyezzük, hogy ez utóbbitól megszabadulhatunk; ha ugyanis $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ 0 volna, akkor e helyett például a $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)+\varphi(x)}{\varphi(x)}$-et keresnők, mely nem 0, hanem 1 és erre mutatnók ki, hogy $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)+\varphi(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)+\varphi'(x)}{\varphi'(x)}$, miből következik ismét, hogy $\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.]

[Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $x=a$ helyen végtelenekké válnak, akkor a $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ számítását a $\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ számításával hoztuk kapcsolatba; kimutatva, hogy ha úgy $f'(x)$, mint $\varphi'(x)$ az a bizonyos környezetében mindenütt véges és ha a $\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ létezik, akkor e két limes megegyező. Megjegyezzük azonban itt is, hogy a második limesnek, a $\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$-nek a kiszámítása helyettesítéssel megint nem végezhető, mert ismét $\frac{\infty}{\infty}$ alakra jutunk. Vagyis általában azt állítjuk, hogy ha $f(x)$ az $x=a$ helyen végtelen és az a környezetében minden helyen véges, meghatározott differenciálhányadossal bir, akkor egyúttal $f'(x)$ is végtelenné válik az $x=a$ helyen. Ennek az állításnak geometriai értelme igen egyszerű. Ha az $y=f(x)$ asymptotikusan közeledik az $x=a$ egyeneshez, akkor az érintője, ha egyáltalában van határfekvése, az Y tengellyel párhuzamossá válik.



70. ábra.

Ezt az állítást pontosabban így igazolhatjuk: Minthogy $\lim\limits_{x=a} f(x)=\infty$, tehát az a hely közelében van olyan α hely, melyen túl (a-felé) minden x' helyen $f(x)$ nagyobb egy megadott N-nél. Legyen b egy tetszésszerint választott hely az a előtt. Ha $f'(x)$ határértéke az a helyen is véges lenne, akkor a $b \ldots a$ szakaszban mindenütt kisebb lenne egy m számnál. Legyen már most $N > f(b)+(b-a)m$ és x' az $\alpha \ldots a$ közben. Ekkor, minthogy $f(x)$-nek a $b \ldots x'$ közben mindenütt meghatározott véges differenciálhányadosa van, a középértéktétel alkalmazható; azaz:

$$f(x') = f(b) + (x'-b)f'(\xi), \quad \text{vagyis} \quad f(x') < f(b) + (a-b)m,$$

tehát $f(x') < N$, ami ellenmond annak, hogy $f(x') > N$, ha $x' > \alpha$.

Azzal az esettel foglalkoztunk, midőn az $x=a$ helyen a számláló és nevező végtelenné válik. Az a hely a végesben volt. Tegyük fel most azt, hogy az a a végtelenben van, vagyis $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x)=\infty$. Ekkor úgy járunk el, mint a $\frac{0}{0}$ alakú határozatlan alaknál; t. i.: tegyük $x=\frac{1}{z}$, akkor a

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z=0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$$

és ez kapcsolatba lép a

$$\lim_{z=0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \lim_{z=0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

-el. Ha ez az utóbbi létezik, akkor egyúttal megegyezik a keresett $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$-el.*

[Megjegyezzük, hogy azt mutattuk meg, hogy ha $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ létezik, akkor az említett feltétel mellett $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ is létezik. Megeshetik azonban, hogy a differenciálhányadosok quotiensének nincs limese és az $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$-nek van. Így például ha $y=\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$, akkor

$$\lim_{x=\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x=\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1,$$

holott a számláló diff. hányadosa: $1-\cos x$ és a nevezőé: $1+\cos x$, e kettő hányadosa tehát: $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{2}x$ és $\lim\limits_{x=\infty}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x$ határozatlan.]

3. **Más határozatlan alakok.** 1. Ha $\lim\limits_{x=a}f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=\infty$, akkor $f(x)-\varphi(x)$ az $x=a$ helyen $\infty-\infty$ alakú, mely a kivonás értelmezése szerint ki nem számítható. Meglehet azonban, hogy $\lim\limits_{x=a}[f(x)-\varphi(x)]$ mégis létezik. Így pl., ha

$$f(x)=1+\frac{1}{x-a},\quad \varphi(x)=\frac{1}{x-a},$$

akkor $f(x)$ és $\varphi(x)$ az a helyen végtelenné válnak; de $f(x)-\varphi(x)=1$. A $\lim\limits_{x=a}[f(x)-\varphi(x)]$ határértékének kiszámítása végett vezessük be ezeket a függvényeket: $f_1(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ és $\varphi_1(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$, melyek $x=a$ helyen eltűnnek. Ezek segítségével

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{f_1(x)}-\frac{1}{\varphi_1(x)}=\frac{\varphi_1(x)-f_1(x)}{f_1(x)\varphi_1(x)}$$

és így: $\lim\limits_{x=a}[f(x)-\varphi(x)]=\lim\limits_{x=a}\dfrac{\varphi_1(x)-f_1(x)}{f_1(x)\,\varphi_1(x)}$. De a jobboldali kifeje-

* A középértéktétel alkalmazásánál föltettük, hogy $\varphi'(x)$ az a valamely környezetében nem tűnik el. Itt az kell, hogy $\varphi'(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}$ a $z=0$ környezetében ne tűnjék el, vagyis például, ha

$$0<\frac{1}{z}<\alpha,\quad \text{a}\quad \varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\neq 0.$$

Ebből következik, hogy ha $x>\dfrac{1}{\alpha}$, $\varphi'(x)$ nem zérus; vagyis egy bizonyos N-nél nagyobb értékek mellett $\varphi'(x)\neq 0$.

zés $x=a$ helyen $\frac{0}{0}$ alakú, tehát ha a L'Hospital szabály alkalmazható, akkor ezt a határértéket ki tudjuk számítani.

2. Egy másik határozatlan alak keletkezik az $f(x)\varphi(x)$ szorzatból, ha $x=a$ helyen $f(x)=0$, $\varphi(x)=\infty$. Ez esetben megint $\varphi_1(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$ téve, azt látjuk, hogy $\varphi_1(x)$ az $x=a$ helyen zérussá lesz és így a

$$\lim_{x=a} f(x)\varphi(x)=\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi_1(x)}$$

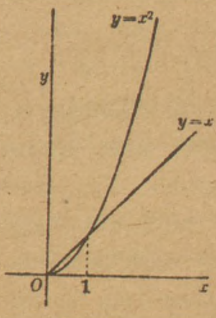
és a jobboldali kifejezés az $x=a$ helyen ismét $\frac{0}{0}$ alakú, mely, ha a L'Hospital szabály alkalmazható, e szerint kiszámítható.

3. Határozatlan alakra vezet még az $y=f(x)^{\varphi(x)}$, ha $\lim\limits_{x=a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=\infty$. Ez esetben $\log y=\varphi(x)\log f(x)$ és így az $x=a$ helyen $\log y$ megint $0\,.\,\infty$ alakú, mint előbb.

4. Végül ha $\lim\limits_{x=a} f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=0$, akkor az $y=f(x)^{\varphi(x)}$ az $x=a$ helyen ∞^0. határozatlan alakú. Itt megint $\log y=\varphi(x)\log f(x)$ az $x=a$ helyen $0\,.\,\infty$ alakú, mely az előbb már ismertetett módon számítható ki.

4. Függvények növekedése és fogyása. Két különböző pozitiv szám, A és B közül vagy $A>B$, vagy $B>A$. Az első esetben $\frac{A}{B}>1$, a második esetben $\frac{A}{B}<1$.

Ha két függvényünk van, például x és x^2, akkor közvetlenül nem mondhatjuk, hogy egyik a másiknál nagyobb, vagy kisebb. Ha ugyanis az x 1-nél kisebb, akkor az $y=x$ egyenes az $y=x^2$ parabola fölött vonul, vagyis $x>x^2$, ha pedig $x>1$, akkor a parabola mindig az egyenes fölött marad, azaz $x^2>x$.



71. ábra.

Egy másik példa legyen a következő két függvény összehasonlítása: x és $x-\sin x$. Mindkettő pozitiv x minden pozitiv értékénél. Ha x a $0\ldots\pi$ szakaszban van, az első nagyobb a másodiknál; a $\pi\ldots2\pi$ szakaszban fordítva, a második nagyobb az elsőnél és általában minden $2k\pi\ldots(2k+1)\pi$ szakaszban $x>x-\sin x$, minden $(2k+1)\pi\ldots(2k+2)\pi$ szakaszban $x<x-\sin x$. Az első példánál legalább azt mondhattuk, hogy ha $x>1$, akkor *mindig* $x^2>x$, vagyis az $1\ldots\infty$ szakaszban a második függvény nagyobb az elsőnél. A másodiknál ennyit sem mondhattunk.

Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ bizonyos x-től kezdve monoton növekedő és pedig korlátlanul növekedő függvények, tehát $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=\infty$ *és* $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x)=\infty$, *akkor definició-*

*képpen azt mondjuk, hogy $f(x)$ erősebb növekedésű a $\varphi(x)$-nél, ha $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$; $f(x)$ gyengébb növekedésű a $\varphi(x)$-nél, ha $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$ és végül $f(x)$ egyenlő növekedésű a $\varphi(x)$-el, ha $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zérustól különböző véges szám.**

[Ezek a fogalmak némileg megfelelnek a pozitiv számok összehasonlításában szereplő nagyobb, kisebb és egyenlő fogalmaknak. E hármas lehetőség főjellemvonásai ugyanis a következő tulajdonságokban van: 1) Ha $A>B$, akkor $B<A$. 2) Ha $A>B$ és $B\geq C$, akkor $A>C$. 3) Ha $A<B$, $B\leq C$, akkor $A<C$. 4) Ha $A=B$ és $B=C$, akkor $A=C$. E tulajdonságoknak megfelelők a függvények növekedésének összehasonlításában a következők: 1) Ha a $f(x)$ erősebben nő, mint $\varphi(x)$, akkor $\varphi(x)$ gyengébb növekedésű $f(x)$-nél. Ugyanis $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$-ből következik, hogy $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=0$. 2) Ha $f(x)$ erősebben nő, mint $\varphi(x)$ és $\varphi(x)$ erősebben nő $\psi(x)$-nél (vagy egyenlő növekedésű), akkor $f(x)$ erősebb növekedésű a $\psi(x)$-nél. Ugyanis $\frac{f(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ és minthogy

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty,\ \lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\infty \text{ (vagy véges), tehát } \lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{\psi(x)}=\infty.$$

3) Ha $f(x)$ gyengébb a $\varphi(x)$-nél és $\varphi(x)$ nem erősebb a $\psi(x)$-nél, akkor $f(x)$ gyengébb a $\psi(x)$-nél. Ugyanis $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$ és $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$ (vagy véges), tehát: $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\psi(x)}=\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$. 4) Ha $f(x)$ olyan növekedésű, mint $\varphi(x)$ és $\varphi(x)$ olyan, mint $\psi(x)$, akkor $f(x)$ is olyan növekedésű, mint $\psi(x)$; Ugyanis $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\alpha$, $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\beta$, tehát $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\psi(x)}=\alpha\beta$ zérustól különböző véges szám, vagy általában, ha

$$A<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<B$$

és

$$A'<\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}<B',$$

akkor

$$AA'<\frac{f(x)}{\psi(x)}<BB',$$

A különbség e két fogalom között azonban mégis igen lényeges. Két pozitiv szám ugyanis mindig a háromféle vonatkozás egyikében van; vagy nagyobb, vagy kisebb az első, mint a második, vagy egyenlők egymással. Két növekedő függvényről azonban azt nem mondhatjuk, hogy az egyik vagy erősebben nő, mint a másik, vagy gyengébben, vagy egyenlően. Ez esetben ilyen hármas lehetőséggel, trichotomiával, a kettő közötti vonatkozás nincs kimerítve. Ugyanis, ha az $f(x)$ és $\varphi(x)$ monoton növekedő függvények hányadosának, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$-nek tulajdonképpeni limese nincsen, hanem aszerint, amint x egyik vagy másik módon válik végtelenné, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ végtelenné, vagy

* Ugyanez áll akkor is, ha $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nem létezik ugyan, de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ elég nagy x-ekre két véges pozitiv vagy két véges negativ szám közé esik.

0-sá válik, akkor nem mondhatjuk, hogy $f(x)$ erősebben, vagy gyengébben válik végtelenné a $\varphi(x)$-nél. Így például $f(x)=e^{x^2+x\sin x}$ diff. hányadosa

$$e^{x^2+x\sin x}[\sin x+x(2+\cos x)]$$

pozitiv x-re sohasem negativ, tehát $f(x)$ monoton növekvő és ha x a pozitiv számokon át bármiképpen a végtelenbe halad, $f(x)$ is végtelenné lesz. Éppen így a $\varphi(x)=e^{x^2}$; de e kettő hányadosa: $e^{x\sin x}$ végtelenné válik, ha például x az $\alpha, \alpha+2\pi, \alpha+4\pi, \ldots \alpha+2n\pi, \ldots$ számokon át halad, ahol $0<\alpha<\pi$; ellenben 0-sá lesz, ha $\pi<\alpha<2\pi$, mert ez esetben $\sin x$ mindig $\sin\alpha$ negativ számmal egyenlő.]

A növekedő függvényeknek egész skáláját alkothatjuk meg. Így például ezen függvények:

$$x, x^2, x^3, \ldots x^n, \ldots$$

közül mindegyik erősebben válik végtelenné, mint az előző; mert hiszen, ha $n>m$, akkor $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$ végtelenné válik az x-el.

Definicióképpen azt mondjuk, hogy x^n n-edrendűen válik végtelenné az x-el; vagyis mintegy a növekedés mértékeül az x-et választjuk, mely első rendű végtelenné válik és ehhez képest x^n n-edrendű végtelen lesz. A fölírt sorozat minden egyes tagjának eszerint egy rendszám felel meg: a végtelenné válásának a rendszáma. Ezt rövidebben úgy is mondjuk, hogy x^n n-edrendű végtelen lesz az x-el, vagy az x-hez képest.

Ezen fogalom megállapítása után egyúttal azt is mondhatjuk, hogy minden k-adfokú racionális egész függvény k-adrendű végtelenné válik, mert ha

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k,$$

akkor $\frac{f(x)}{x^k}=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_k}{x^k}$; tehát, ha x végtelenné lesz, akkor $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x^k}=a_0$ véges szám; és általában, ha $\varphi(x)$ monoton növekvő pozitiv függvény és $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}$ zérustól különböző véges szám, (vagy $\frac{\varphi(x)}{x^n}$ két véges szám közé esik), akkor $\varphi(x)$-ről azt mondjuk, hogy n-edrendű végtelenné válik. Ha $\psi(x)$ k-adrendű végtelenné válik, akkor $x^l\varphi(x)$ $k+l$-edrendű végtelenné válik, mert ha $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\psi(x)}{x^k}$ constans, akkor $\lim\limits_{x=\infty}\frac{x^l\psi(x)}{x^{k+l}}$ is constans. Ebből következik, hogy ha $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=x^k$, akkor $\varphi(x)$ olyan rendű végtelenné lesz, mint $x^k\psi(x)$.

A növekedési skála azonban az előbbi sorozattal távolról sincs kimeritve. Mondhatunk olyan növekvő függvényt, mely erősebben válik végtelenné, mint akármelyik x^n. Ilyen pl.: e^x.

Ugyanis $\lim\limits_{x=\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$, amiről a L'Hospital-szabály alkalmazásával meggyőződhetünk. Eszerint tehát nincsen olyan sorszám, mely az e^x végtelenségének jellemzésére alkalmas volna; ennek ugyanis olyan sorszámnak kellene lenni, mely valamennyi véges sorszám után következnék. Ha nem akarjuk azt mondani, hogy az e^x végtelenségének nincs rendszáma, akkor a rendszámfogalmat bővítenünk kell. Bevezetjük az ω rendszámot, mint olyant, mely az 1, 2, 3, ... rendszámok után következik és ezen új szimbolummal jelöljük az e^x végtelenné válásának rendjét.

Az ω új rendszámot *transzfinit rendszámnak* mondjuk. Ennek a bevezetése nem is szokatlan gondolatmenettel történt. Ha már az első n számunk megvan, akkor a következőt kétféleképpen alkothatjuk meg. Vagy azt mondjuk, hogy 1-gyel tovább megyünk, tehát n-ből $n+1$-et készítünk, szóval konsekutiv alkotási eljárást használunk, vagy a már megalkotott n számot, mint kollektiv fogalmat tekintjük és megalkotjuk az összes, már bevezetett számok után jövőt. Ez is $n+1$. Ha azonban már az összes véges rendszámok rendelkezésünkre állnak, akkor az első alkotási eljárás, a konsekucio elve nem alkalmazható; tehát az új számot a második elvvel, a kollektiv alkotási elvvel definiáljuk. A két eljárás szétvált, ami a fogalmak bővítésénél igen gyakori eset.

Voltaképpen ezt az eljárást is alkalmaztuk már. Ha ugyanis egy monoton szab. sorozatunk van, pl.: 0·3, 0·33, 0·333, ..., akkor mindegyik tagnak megvan a maga rendszáma; e sorozat által értelmezett $\frac{1}{3}$, mely e sorozat határértéke, e számok között nem foglaltatik, hanem valamennyi után következik; tehát, ha sorszámot akarnánk e limes-számnak is tulajdonítani, az a transfinit ω lehetne. Ebből a szempontból tekintve a dolgot, az ω transfinit számot az 1, 2, 3, ... sorozat limes-számának is mondhatjuk.

A végtelenségi rendszámok alkotásánál tehát két elvet alkalmaztunk. Ha $\varphi(x)$ rendszáma n és $f(x)$ olyan rendű, mint $x\varphi(x)$, akkor $f(x)$-ről azt mondjuk, hogy $n+1$-edrendű; tehát az n-edrendűből a következő $n+1$-edrendűt készitettük. Ha pedig már ilyen módon alkottunk egy skálát, melynek tagjai 1, 2, 3, ...-rendűek, akkor készítünk egy olyan függvényt, mely magasabb rendű, mint e skála bármelyik tagja; ez a második alkotási elv alkalmazása.

De most ismét tovább mehetünk. xe^x ugyanis magasabb rendű, mint e^x, mert $\frac{xe^x}{e^x}=x$ első rendű végtelenné válik. Ha tehát xe^x függvény végtelenné válásának is akarunk rendszámot tulajdonítani, ez $\omega+1$-gyel jelölhető; tehát megint az első alkotási elv lép életbe. Folytatólagosan x^2e^x, x^3e^x, ... rendszámai $\omega+2$, $\omega+3$, ... s í. t. Könnyű most ismét olyan függvényt készíteni, mely magasabb rendű végtelenné válik az x-el, mint az xe^x, x^2e^x, ... sorozat bármely tagja. Ilyen az e^{2x}, mert hiszen $\frac{e^{2x}}{x^ne^x}=\frac{e^x}{x^n}$ és $\lim\limits_{x=\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$. Ha az e^{2x} végtelenségének rendjét is meg akarjuk jelölni, ezt célszerűen 2ω-val tehetjük. Ezután ismét az xe^{2x}, x^2e^{2x}, ... sorozat következik az első alkotási elvvel és e^{3x} a másodikkal s í. t. De még tovább folytatható az eljárás. Ugyanis az e^{x^2} magasabb rendű végtelenné válik, mint az e^x, e^{2x}, e^{3x}, ... sorozat bármely tagja, mert $\frac{e^{x^2}}{e^{nx}}=e^{x(x-n)}$ végtelenné lesz az x-el. Az e^{x^2} végtelenségi rendszáma ω^2. Ezen eljárással a növekedő függvények sorozatának alkotását kimeríthetetlenül folytathatjuk. A végtelenné válás rendszámai a transfinit számok kimeríthetlen halmazára vezettek, melyek részint az első, részint a második alkotási elvvel keletkeztek. A második alkotási elvvel keletkezett transfinit számok ezek voltak:

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega, \ldots\ \omega^2,\ \omega^2+\omega, \ldots\ 2\omega^2,\ 3\omega^2, \ldots\ \omega^3, \ldots\ \omega^n, \ldots\ \omega^\omega, \ldots\ \omega^{\omega^\omega}, \ldots,$$

melyek az

$$e^x, e^{2x}, e^{3x}, \dots e^{x^2}, e^{x^2+x}, \dots e^{2x^2}, e^{3x^2}, \dots e^{x^3}, \dots e^{x^n}, \dots e^{e^x}, \dots e^{e^{e^x}}, \dots$$

függvények növekedési rendszámai voltak.

A készített skálát még a másik irányban is folytathatjuk. Így például $\sqrt{x}$ is végtelenné válik az x-el, de alacsonyabb rendű végtelenné, mint x, mert $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=0$. A $\sqrt{x}$ rendszámát $\frac{1}{2}$-el jelölhetjük, mert általában megállapodunk abban, hogy $f(x)$ növekedő függvény rendszáma n legyen, ha $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f(x)}{x^n}$ véges és 0-tól különböző. Eszerint tehát az

$$x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{4}}, \dots x^{\frac{1}{n}}, \dots$$

növekedő függvények rendszámai

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots$$

Érdekes, hogy megint találhatunk oly korlátlanul növekedő függvényt, mely alacsonyabb rendű végtelenné válik, mint a felsoroltak. Ilyen pl. a $\log x$. Ugyanis, ha α tetszés szerinti pozitiv szám, $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{x^\alpha}{\log x}$, mint a l'Hospital-szabállyal következtetjük: ∞. A $\log x$ tehát alacsonyabb rendű végtelenné válik, mint bármely x^α. Ha az előbbi gondolatmenetet folytatni akarnók, új transfinit számot kellene alkotnunk a $\log x$ végtelenségének jellemzésére. Ez a szám: $\frac{1}{\omega}$ volna. A $\log x$-nél alacsonyabb rendűen válik végtelenné $(\log x)^\alpha$, ha α az 1-nél kisebb pozitiv szám, mert $\dfrac{(\log x)^\alpha}{\log x}=(\log x)^{\alpha-1}$ zérussá lesz, ha x végtelenig nő. És mindezeknél alacsonyabb rendű végtelenné lesz a $\log\log x$. Ugyanis

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log\log x}{(\log x)^\alpha}$$

a l'Hospital-szabály szerint a számláló és nevező diff. hányadosainak a quotienséből alkotható meg. A számláló diff. hányadosa: $\dfrac{1}{x\log x}$ a nevezőé: $\dfrac{\alpha(\log x)^{\alpha-1}}{x}$ és e kettő hányadosa: $\dfrac{1}{\alpha(\log x)^\alpha}$ az x-el zérussá lesz. A $\log\log x$ végtelenségi rendszámának $\frac{1}{\omega^2}$ tekinthető. Így kapjuk a korlátlanul növekvő függvények egy kimeríthetetlen sorozatát, a

$$\log x, \log\log x, \log\log\log x, \dots$$

melyek mind végtelenekké válnak ugyan, de mindinkább alacsonyabb rendben.

5. A végtelen kicsinyek rendje. A főrész. Úgy, mint a korlátlanul növekvő függvények növekedését egybevetettük, úgy a végtelen kicsinyekké váló függvények rendjét is összevetjük. Megállapodunk abban, hogy ha

$$\lim_{x=a} f(x)=0 \quad \text{és} \quad \lim_{x=a}\varphi(x)=0,$$

akkor aszerint, amint $\lim\limits_{x=a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ végtelen, vagy 0, azt fogjuk mondani, hogy $f(x)$ alacsonyabb, vagy magasabb rendű végtelen kicsinnyé lesz, mint $\varphi(x)$.

Ha pedig $\lim\limits_{x=a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ véges szám, mely 0-tól különbözik (vagy ha nincs is ilyen határérték, de $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ véges (pozitiv vagy negativ) korlátok közt ingadozik, ha x az a-hoz konvergál), akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ és $\varphi(x)$ egyenlő rendű végtelen kicsinyekké válnak. Az x függvény a 0 helyen (vagy $x-a$ az a helyen) zérussá lesz. Ezt úgy fogjuk mondani, hogy x *első rendű végtelen kicsinnyé* lesz. *És ha $f(x)$ az $x=0$ helyen úgy válik zérussá, hogy* $\lim\limits_{x=0}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}$ *véges és 0-tól különböző, (α pozitiv szám), akkor azt mondjuk definicióképpen, hogy $f(x)$ az $x=0$ helyen α-drendű végtelen kicsinnyé lesz.* Éppen így, ha $\lim\limits_{x=a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^\alpha}$ 0-tól különböző véges szám [vagy általában az a környezetében mindig két pozitiv vagy két negativ véges szám között van], akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ az a helyen α-drendű végtelen kicsinnyé válik.

Ha $f(x)$ például ilyen alakú: $\varphi(x)+\psi(x)$, ahol $\varphi(x)$ az x-el α-drendű és $\psi(x)$ β-adrendű végtelen kicsinnyé lesz és $\beta>\alpha$, akkor $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\psi(x)}{x^\alpha}=0$, ellenben $\dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ két pozitiv vagy két negativ szám között van, tehát $\dfrac{f(x)}{x^\alpha}$ is elég kis x-ekre e két pozitiv vagy két negativ szám között marad, tehát $f(x)$ is α-rendű végtelen csekély lesz. A $\psi(x)$ tehát az $f(x)$ végtelen csekéllyé válásának rendjére befolyással nincsen. Ilyenkor a $\varphi(x)$-et az $f(x)$ *főrészének* mondjuk. Így például, ha $f(x)$ ilyen alakú:

$$f(x)=A_0x^{\alpha_0}+A_1x^{\alpha_1}+A_2x^{\alpha_2}+\cdots+A_nx^{\alpha_n},$$

ahol $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ exponensek pozitiv számok, melyek közül α_0 a legkisebb, akkor

$$\frac{f(x)}{x^{\alpha_0}}=A_0+A_1x^{\alpha_1-\alpha_0}+\cdots+A_nx^{\alpha_n-\alpha_0}$$

és így: $\lim\limits_{x=0}\dfrac{f(x)}{x^{\alpha_0}}=A_0$ véges szám, a mi definicióink szerint azt fejezi ki, hogy $f(x)$ az $x=0$ helyen α_0-rendű végtelen kicsinnyé válik. Az $f(x)$ főrésze: $A_0x^{\alpha_0}$. Az $f(x)$ végtelen kicsinységének rendjére nézve tehát az $A_0x^{\alpha_0}$ mellett, vagyis a leggyengébb végtelen kicsiny tag mellett álló (véges számú) erősebb végtelen csekélyek tekintetbe sem vétetnek; ebből a szempontból azt szoktuk mondani, hogy a magasabb rendű végtelen kicsinyek az alacsonyabb rendűek mellett elhanyagolhatók.

A végtelen kicsinnyé váló függvényeknek egyszerű skálája volna például az

$$x, x^2, x^3, \ldots x^n, \ldots$$

függvénysor, melyek az $x=0$ helyen 1, 2, 3, ... n-edrendű végtelen kicsinyekké válnak. Megint alkothatunk olyan függvényt, mely erősebben lesz végtelen kicsinnyé, mint a fölírt skála bármely tagja. Ilyen pl.: az $e^{-\frac{1}{x}}$. Ugyanis az $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$, ha x a pozitiv oldalról közeledik a 0-hoz, $\dfrac{0}{0}$ határozatlan alakú, vagy ha $\dfrac{1}{x}=z$ tesszük, $\dfrac{z^n}{e^z}$ alakra jutunk, mely a $z=\infty$ helyen vizsgálandó. Ezen a helyen a tört $\dfrac{\infty}{\infty}$ határozatlan alakú. A diff. hányadosok viszonya

$\frac{nz^{n-1}}{e^z}$ szintén határozatlan alakú; de a l'Hospital-szabály n-szeres alkalmazásával $\frac{n!}{e^z}$ alakra jutunk, mely a $z=\infty$ helyen: 0; tehát $\lim\limits_{x=0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0$, vagyis $e^{-\frac{1}{x}}$ magasabb rendű végtelen kicsiny, mint x bármely hatványa. A végtelen kicsinyek rendjének jellemzésére szintén bevezethetjük a transfinit rendszámokat egészen olyan módon, mint előbb tettük.

Itt is folytathatjuk a sorozatot balfelé is például az $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, \ldots x^{\frac{1}{n}}, \ldots$ x csökkenésével monoton csökkenő függvények bevezetésével. Ezekhez megint megállapítható olyan monoton csökkenő függvény, mely szintén 0-sá lesz a 0 helyen, de alacsonyabb rendű zérussá, mint az x bármely pozitiv hatványa. Ilyen pl. a $-\frac{1}{\log x}$. Ugyanis $\frac{x^\alpha}{\frac{1}{\log x}}$ az $x=0$ helyen $\frac{0}{0}$ alakú; ha megint $x=\frac{1}{z}$ tesszük, akkor

$$-\frac{x^\alpha}{\frac{1}{\log x}} = \frac{\log z}{z^\alpha}$$

lesz, mely a $z=\infty$ helyen vizsgálandó. E helyen a jobboldali kifejezés $\frac{\infty}{\infty}$ alakú. A l'Hospital-szabály szerint azonnal megkapjuk, hogy $\lim\limits_{z=\infty} \frac{\log z}{z^\alpha} = 0$, tehát x^α erősebb végtelen kicsiny, mint $-\frac{1}{\log x}$, vagyis az $\frac{1}{\log x}$ az $x=0$ helyen alacsonyabb rendű végtelen kicsiny, mint az x bármely pozitiv hatványa.

Könnyen meggyőződhetünk arról is, hogy az $\frac{1}{\log(-\log x)}$ gyengébben lesz végtelen kicsiny, mint a $-\frac{1}{\log x}$ s í. t.

6. Végtelen kicsinyek összehasonlítása a Taylor-sor segítségével. Ha $f(x)$ az $x=a$ helyen differenciálható és e diff. hányados 0-tól különböző véges szám, akkor

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \neq 0,$$

vagyis az $f(x)-f(a)$ éppen olyan rendű végtelen kicsinnyé válik az $x=a$ helyen, mint az $x-a$, tehát $f(x)-f(a)$ első rendű végtelen kicsiny lesz az $x=a$ helyen. Azt látjuk tehát, hogy ha az $f'(a)$ 0-tól különböző véges szám, akkor a függvény növekménye éppen olyan rendű végtelen kicsiny, mint a változó növekménye. Ez más szóval azt fejezi ki, hogy ha ε tetszés szerinti kis pozitiv szám, akkor a hozzátartozó $a-\tau \ldots a+\tau$ közben:

$$f'(a) - \varepsilon < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a) + \varepsilon,$$

vagyis $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \eta$ alakban írható, ahol $|\eta| < \varepsilon$, ha $|x-a| < \tau$, vagyis $\lim\limits_{x=a} \eta = 0$. Az η tehát az $(x-a)$-val együtt elenyészik. Az előbbi egyenletből:

$$f(x) - f(a) = (x-a)\,[f'(a)+\eta] = f'(a)\,(x-a) + \eta\,(x-a).$$

A jobboldalon álló első tag elsőrendű végtelen kicsinnyé lesz, ha x az a-hoz konvergál, a második tag azonban magasabbrendű, mert $\lim \frac{\eta\,(x-a)}{x-a} = 0$ t. i.

$\lim \eta=0$, tehát $f(x)-f(a)$ növekmény főrésze az $f'(a)(x-a)$. Ha röviden y-nal jelöljük az $f(x)$-et, akkor tehát Δy egyenlő rendű végtelen kicsiny lesz a Δx-el és a főrésze $f'(a)\Delta x$. Ha még a helyett x-et írunk, akkor tehát az x helyen az $f(x)$ függvény növekménye:

$$\Delta y=\left(f'(x)+\eta\right)\Delta x$$

és e növekmény főrésze: $f'(x).\Delta x$. Ezt az állítást szimbolikus alakban így is szoktuk kifejezni:

$$dy=f'(x)\,dx$$

és így olvassuk: ha a változót a végtelen kis dx-el növeljük, akkor a függvény a végtelen kis dy-nal nő, (változik) és a függvény végtelen kis növekménye $f'(x)$-szerese a változó végtelen kis növekményének, ha $f'(x)$ zérustól különböző véges szám. Megjegyezzük azonban, hogy ez a fölírt egyenlet csakis szimbolikus egyenlet, nem valóságos. Mert hiszen a végtelen kicsiny valóságban: 0, tehát a fölírt egyenlet igazi jelentése: $0=f'(x).0$, ami semmit sem mond. A fölírt szimbolikus egyenlettel semmi egyebet nem akarunk jellemezni, mint azt, hogy y-nak x szerinti differenciálhányadosa, azaz $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$. Némi haszna azonban mégis van az új alaknak; egyrészt könnyen áttekinthető módon tünteti fel azt az előbbi állításunkat, hogy a függvény növekménye éppen olyan rendű végtelen kicsinnyé lesz, mint a változóé és másrészt, ha félreértésekre nem ad alkalmat, különösen gyakorlati kérdések tárgyalásánál egyszerűbben fogalmazható tételekre vezet. Ezért a most bevezetett jelölésre külön nevet is alkotunk. A dx-et az x változó *differenciáljának*, a dy-t pedig az y *differenciáljának* nevezzük. A fönti szimbolikus alak a differenciálok közötti reláció.

Ha az a helyen $f'(a)=0$ és $f''(a)\neq 0$, akkor a Taylor-sor a következő alakú:

$$f(x)=f(a)+f''(\xi)\,(x-a)^2.$$

Ha egyszerűség kedveért feltesszük, hogy $f''(x)$ az a helyen folytonos, akkor $f''(\xi)=f''(a)+\eta$ írható és ha x az a-hoz convergál, ezzel ξ is a-ba megy és η 0-sá válik: $\lim\limits_{x=a}\eta=0$; tehát:

$$f(x)=f(a)+f''(a)\,(x-a)^2+\eta\,(x-a)^2$$

vagyis az $f(x)$ növekménye, melyet most $\Delta^2 y$-al jelölünk:

$$\Delta^2 y=f''(a)\,(\Delta x)^2+\eta\,(\Delta x)^2.$$

Ha tehát $f'(a)=0$, akkor a $\Delta^2 y$ növekmény főrésze $f''(a)(\Delta x)^2$, másodrendű végtelen kicsinnyé válik.

Így például, ha $f(x)$-nek az $x=a$ helyen közönséges maximuma, vagy minimuma van, tehát $f'(a)=0$, $f''(a)\neq 0$, akkor e helyen a változó (abscissa) végtelen kis növekményéhez a függvénynek (ordinátának) másodrendű végtelen kis növekménye tartozik.

Szimbolikus alakban ezt a megfelelkezést megint az előbbihez hasonlóan így írjuk:

$$d^2y=f''(a)\,(dx)^2.$$

Ha általában az a helyen $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ és $f^{(n)}(a)\neq 0$ akkor a Taylor-sor:

$$(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-a)^n,$$

miből megint azt látjuk, hogy ez esetben a változó végtelen kis növekményéhez a függvény n-edrendű végtelen kis növekménye tartozik. Ezt szimbolikusan megint így írjuk:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,(dx)^n$$

és ezzel megint csak azt akarjuk jelölni, hogy a függvény-növekmény főrésze: $f^{(n)}(x)\,(\Delta x)^n$.

7. **Differenciálás a végtelen helyen.** Láttuk már, hogy ha az $f(x)$ függvénynek az $x=a$ helyen meghatározott differenciálhányadosa van és $f'(x)$-nek az $x=a$ helyen van határértéke, akkor az $f(x)$-nek az a helyhez tartozó differenciálhányadosa nem lehet más, mint az $f'(x)$ függvénynek az a helyen lévő határértéke (138. lap *b)*). Ez nem magától értetődő dolog, mert két különböző határértékről van szó. Ugyanis az a helyhez tartozó differenciálhányados:

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

így is érthető: Alkossuk meg az $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hányadost. Tegyük *először* $x=a$, vagy, ami mindegy, *változatlan h* mellett alkossuk meg a $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ határértéket és *azután* tegyük $h=0$, vagyis alkossuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{h=0} \lim_{x=a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ez az a helyhez tartozó differenciálhányados. Másrészt az $f'(x)$ függvény a következőképpen van értelmezve:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ha már most ezen függvénynek $x=a$ helyhez tartozó határértékét keressük, akkor ebből meg kell alkotni a következő határértéket:

$$\lim_{x=a} \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Látjuk tehát, hogy az $f(x)$-nek az a helyhez tartozó diff. hányadosa az $f'(x)$ derivált függvény a helyhez tartozó határértékétől abban különbözik, hogy az $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hányadosnak az $x=a$, $h=0$-hoz tartozó határértékét különböző sorrendben állapítottuk meg. Az első esetben először tettük $x=a$, azután $h=0$; a másodikban pedig először $h=0$, azután $x=a$. Később, midőn a több változós függvényről szólunk, bőven lesz alkalmunk tapasztalni, hogy a határátmenet sorrendje minő befolyással lehet a határértékre. A most szóban levő esetre vonatkozólag ismételjük azt, amit már más alkalommal tárgyaltunk, hogy ha $\lim\limits_{x=a} f'(x)$ létezik, akkor az $f(x)$-nek az a helyen ez a diff. hányadosa.

Ha az a hely a végtelenben van, akkor is meg kell különböztetni e két fogalmat: az $f(x)$ diff. hányadosa a végtelen távoli x helyen és az $f'(x)$ diff. hányados a végtelenben levő x helyen. Az első az $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hányados határértékét jelenti, ha először x végtelenné válik azután h zérussá, tehát ezt a határértéket:

$$\lim_{h=0}\lim_{x=\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

a második pedig az $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hányados határértéke, ha előbb tesszük $h=0$, azután válik x végtelenné, tehát:

$$\lim_{x=\infty}\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Meglehet, hogy az egyik létezik, a másik nem. Így például, ha

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\sin(x^2),$$

akkor
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h+\frac{1}{x+h}\sin(x+h)^2-\frac{1}{x}\sin(x^2)}{h}$$

és ha x-et végtelenné tesszük, akkor e hányados határértéke: 1 a h-tól teljesen független, tehát

$$\lim_{h=0}\lim_{x=\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1.$$

Ha pedig előbb tesszük $h=0$, azaz kiszámítjuk az $f(x)$ diff. hányadosát az x helyen, azt találjuk, hogy

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)+2\cos(x^2)$$

és ha most x-el végtelenbe megyünk, a $\cos(x^2)$ miatt határértéket nem kapunk. A $\lim\limits_{x=\infty}\lim\limits_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tehát nem létezik.

A l'Hospital-tétel segítségével a $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$, vagyis a diff. hányados határértéke egyszerűen kiszámítható, ha a létezéséről eleve biztosítva vagyunk. Ugyanis láttuk, hogy ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $x=\infty$ helyen végtelenekké válnak és $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ létezik, akkor egyúttal:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x=\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Tegyük $\varphi(x)$ helyébe x-et, akkor tehát, ha $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$ létezik:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x=\infty}f'(x).$$

Ha tehát tudjuk, hogy $f'(x)$-nek x végtelenné válásakor van meghatározott (akár végtelen) határértéke, ez egyszerűen a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$ határértékből számítható ki. A $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$ létezéséből tehát a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$ is következik.

Megjegyezzük azonban, hogy fordítva a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$ létezéséből nem következik a $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$ létezése. Ugyanis az előbbi példát idézve, melynél

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\sin(x^2),$$

azt találjuk, hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ellenben $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$-ről megmutattuk, hogy nem létezik.

Kérdés, tekinthető-e a $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}$ a végtelen helyhez tartozó differenciálhányadosnak? azaz mondhatjuk-e, hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{h=0} \lim_{x=\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}?$$

Azt állítjuk, hogyha $f(x)$ úgy válik végtelenné, hogy bármely h véges számra nézve: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hányados limese ($x=\infty$-nél) h-tól független véges, (A) szám, akkor igenis $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}$ tekinthető a végtelen helyhez tartozó diff. hányadosnak.*

Ugyanis, ha $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a jegyzetben említett módon független a h-tól, akkor a jobboldalon álló kettős limes helyett egyszerűen ez a limes vehető. De erről megmutathatjuk, hogy megegyezik a $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}$-el. Ugyanis, ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A$$

függetlenül a h-tól, (a jegyzetben megállapított módon), akkor bármely kis ε-hoz tartozik oly N küszöbszám, melyen túl levő x-ekre nézve, *akárminő* pozitiv szám legyen is a h:

$$A - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < A + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen x_0 egy ilyen tetszés szerint kiszemelt N-nél nagyobb szám. Ekkor tehát:

$$A - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < A + \frac{\varepsilon}{3}$$

és ha x_0+h helyébe x-et teszünk és így h helyett $x-x_0$-t, ez az egyenlőtlenség így is írható:

$$A - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{x_0}{x}} < A + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Az $\frac{f(x)}{x}$ mellett álló tényező limese: 1, mert hiszen x_0 egy meghatározott fix szám és x-el az $f(x)$ végtelenné válik.

* És pedig ez a függetlenség úgy értendő, hogy ha egy tetszés szerinti kis pozitiv ε adatik, meghatározható olyan N, hogy *bárminő legyen is h*,

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - A \right| < \varepsilon,$$

ha $x > N$. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A$ *egyenletesen.* Megjegyezzük még, hogy a két limes egyenlő voltára adott feltétel elegendő ugyan, de nem szükséges.

Tehát elmehetünk az x-el (természetesen N-en túl) oly messzire, hogy az $\dfrac{1-\frac{x_0}{x}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}$ az ő határértékétől, az 1-től, mindig $\dfrac{\varepsilon}{3|A|+\varepsilon}$-nál kevesebbel* különbözzék, azaz, ha $x>M$, akkor (az egyszerűbb írás kedveért feltéve, hogy $A>0$):

$$1-\frac{\varepsilon}{3A+\varepsilon}<\frac{1-\frac{x_0}{x}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}<1+\frac{\varepsilon}{3A+\varepsilon}$$

és így a fönti egyenlőtlenség így is írható, ha $x>M$:

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{3A+\varepsilon}\right)<\frac{f(x)}{x}<\left(A+\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{3A+\varepsilon}\right),$$

vagyis:

$$A-\frac{\varepsilon}{3}-\frac{A\varepsilon}{3A+\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{3(3A+\varepsilon)}<\frac{f(x)}{x}<A+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{A\varepsilon}{3A+\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{3(3A+\varepsilon)},$$

miből:

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon,$$

tehát, ha $x>M$, akkor mindig $\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon$, ami azt bizonyítja, hogy $\lim\frac{f(x)}{x}=A$, vagyis

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x=\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ebben az esetben tehát $\lim\frac{f(x)}{x}$ tekinthető a végtelen helyhez tartozó diff. hányadosnak.

Eddigi tárgyalásaink könnyebben áttekinthető geometriai viszonyokkal is illusztrálhatók. Ha ugyanis $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$ létezik, akkor ez azt jelenti, hogy az $y=f(x)$ görbéhez vont érintő irányhatározójának van határértéke; vagyis, ha a kezdőpontból a görbe pontjaihoz vont érintőkhöz párhuzamosakat vonnánk, ezen egyeneseknek volna határhelyzetük. És ha az $[x, f(x)]$ pontot a kezdőponttal összekötjük, ezen egyenes irányhatározója: $\frac{f(x)}{x}$. Az így vont egyeneseknek is van határhelyzetük és ez az előbbivel megegyezik. A $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$, illetőleg a vele megegyező $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$-et asymptotikus irányhatározónak nevezzük.]

8. Asymptota. Ha $y=f(x)$ olyan görbe egyenlete, mely végtelenbe nyúlik, melyre nézve $\lim\limits_{x=\infty}f(x)=\infty$ és $y=Ax+B$ olyan egyenes, mely azzal a tulajdonsággal bir, hogy a görbéhez határtalanul

* Vagy kevesebbel, mint $\dfrac{\varepsilon}{3A'+\varepsilon}$, ahol $A'>|A|$ arra az esetre ha A zérus volna.

közeledik, vagyis az ordináták különbsége: $f(x)-Ax-B$ az x korlátlan növekedésével elenyésző csekély lesz, azaz

$$\lim_{x=\infty}[f(x)-Ax-B]=0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az $y=Ax+B$ egyenes az $y=f(x)$ görbe *asymptotája*.

Hogyan kell az A és B együtthatókat meghatározni, hogy az $y=Ax+B$ az $y=f(x)$ asymptotája legyen? Az A meghatározása a következőként történhetik:

A $\lim\limits_{x=\infty}(f(x)-Ax-B)=0$-ból az is következik, hogy:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)-Ax-B}{x}=0.$$

Tegyük fel, hogy B-re csak véges értéket keresünk, vagyis olyan asymptotát akarunk meghatározni, mely nem párhuzamos az y tengellyel. Ekkor az előbbi kifejezés így is írható:

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-A\right)=0,$$

vagyis, ha van ilyen asymptota, akkor

$$A=\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Ha a jobboldalon álló limes nem léteznék, akkor ilyen asymptotáról nem lehet szó.

Ha már az A számot megállapítottuk, akkor $\lim\limits_{x=\infty}(f(x)-Ax-B)=0$-ból következik, hogy ha van asymptota, amely nem párhuzamos az y tengellyel, akkor, B véges szám lévén,

$$\lim_{x=\infty}[f(x)-Ax]=B.$$

Ha a baloldali limes nem létezik, akkor B nem lehet meghatározott szám és akkor asymptota sincsen.

Az asymptota létezéséhez tehát, amint látjuk, kettő szükséges: 1) hogy $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$ létezzék. Ez a határérték az asymptota irányhatározója: A. 2) hogy létezzék $\lim\limits_{x=\infty}(f(x)-Ax)$. Ha ez létezik és véges szám, akkor e határérték: B az Y tengelyből levágott darab. Ha e két határérték közül egyik, vagy a másik nem létezik, akkor asymptota nincsen.

Eddig nem szóltunk az Y tengellyel párhuzamos asymptotáról. Ha az $f(x)$ az $x=a$ helyen végtelenné válik, akkor az $x=a$ egyenest nevezhetjük a görbe asymptotájának.

Példaképpen határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

hyperbola asymptotáit. Ezen egyenletből:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Minden x abscissához, mely a-nál nagyobb abs. értékű, az ordinátának két értéke tartozik: $+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ és $-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Vegyük először a gyök pozitiv értékét.

Első dolgunk a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$ megállapítása. Ez:

$$\lim_{x=\infty}\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{b}{a};$$

tehát ha asymptota létezik, annak irányhatározója, az előbb A-val jelölt szám, csak $\frac{b}{a}$ $\left(\text{vagy, ha a gyök negativ értékét vesszük, } -\frac{b}{a}\right)$ lehet.

Most meg kell határoznunk, hogy létezik-e a

$$\lim_{x=\infty}\left(f(x)-Ax\right)?$$

Ez a jelen esetben:

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right].$$

De $\sqrt{x^2-a^2}$ így is írható: $x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$.

A $\sqrt{1+z}$ alakú kifejezés Maclaurin-sora a következő:

$$1+\frac{1}{2}\frac{z}{\sqrt{1+\vartheta z}};$$

a jelen esetben z helyett $-\frac{a^2}{x^2}$-et téve:

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=1-\frac{1}{2}\frac{\frac{a^2}{x^2}}{\sqrt{1-\vartheta\frac{a^2}{x^2}}}$$

és így:

$$\lim_{x=\infty}(f(x)-Ax)=\lim_{x=\infty}\left[\frac{b}{a}x\left(1-\frac{1}{2}\frac{\frac{a^2}{x^2}}{\sqrt{1-\vartheta\frac{a^2}{x^2}}}\right)-\frac{b}{a}x\right]=$$

$$=-\lim_{x=\infty}\frac{ab}{2x\sqrt{1-\vartheta\frac{a^2}{x^2}}}=0,$$

vagyis az előbb B-vel jelölt számérték: 0 és így asymptota valóban létezik és pedig kettő: az egyik: $y=\frac{b}{a}x$, a másik: $y=-\frac{b}{a}x$.

Határozzuk meg a hyperbola érintőjének az irányhatározóját. Ez:

$$y'=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

és így: $\lim\limits_{x=\infty}y'=\frac{b}{a}$, vagy $\lim\limits_{x=\infty}y'=-\frac{b}{a}$, aszerint, amint a hyperbolaágnak az x tengely fölötti, vagy alatti részét tekintjük. Látjuk tehát, hogy most $f'(x)$-nek van határértéke. Az x, y pontban húzott érintő, ha ξ, η jelentik a folyó koordinátákat: $\eta-y=y'(\xi-x)$; vagyis:

$$\eta=y'\xi+y-y'x.$$

Ha x végtelenné válik, akkor $\lim\limits_{x=\infty}y'=\frac{b}{a}$ és $\lim\limits_{x=\infty}(y-y'x)=$ $=-\lim\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}}=0$; tehát az érintőnek van meghatározott határfekvése és pedig az $\eta=\frac{b}{a}\xi$, illetőleg az $\eta=-\frac{b}{a}\xi$. Az asymptota tehát egyúttal az érintőnek a határhelyzete is.

Általában azonban nem így van a dolog. Asymptota akkor van, ha létezik a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}=A$ és $\lim\limits_{x=\infty}(f(x)-Ax)=B$. Az érintőnek pedig akkor lesz határhelyzete (vagyis a görbe végtelenben levő pontjához akkor tartozik érintő), ha létezik a $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$, vagyis az érintő irányhatározójának határértéke és ha létezik a $\lim\limits_{x=\infty}(y-y'x)$, az érintő által az y tengelyből levágott darab határértéke. Tudjuk, hogy a $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$ létezéséből még nem következik $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$ létezése; de fordítva igen. Ha tehát az érintőnek van határfekvése, azaz létezik $\lim\limits_{x=\infty}f'(x)$ és $\lim\limits_{x=\infty}[f(x)-xf'(x)]$, továbbá, és létezik $\lim[f(x)-Ax]$ és ez az utóbbi limesszel megegyezik, akkor az érintő határhelyzete, melyet *végérintőnek* nevezhetünk, megegyezik az asymptotával.

Megmutatjuk egy igen egyszerű példán, hogy a két fogalom: *asymptota* és *végérintő* nem mindig egyezik meg. Legyen a görbe egyenlete:

$$y = \frac{\sin x}{x} + Ax + B.$$

Határozzuk meg az asymptotáját. Első dolog annak megállapítása, hogy $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}$ van-e?

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x^2} + A + \frac{B}{x},$$

tehát $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = A$. Második dolgunk a $\lim\limits_{x=\infty} [f(x) - Ax]$ meghatározása. Ez

$$\lim_{x=\infty} \left[\frac{\sin x}{x} + Ax + B - Ax\right] = \lim_{x=\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + B\right) = B,$$

tehát a szóban forgó görbe asymptotája: $y = Ax + B$.

Van-e végérintője? E kérdésre válaszolandó, meg kell határoznunk, hogy az (x, y) pontban vont érintőnek van-e határhelyzete, ha x végtelenné válik?

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + A = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + A; \text{ tehát } \lim_{x=\infty} y' = A.$$

Az érintő iránybatározójának van határértéke: A és ez természetesen megegyezik a $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}$-el.

Az (x, y) pontban vont érintő egyenlete (ξ, η a folyó koordináták): $\eta - y = y'(\xi - x)$; tehát az Y tengelyből levágott darab: $y - y'x$, vagyis:

$$\frac{\sin x}{x} + Ax + B - \cos x + \frac{\sin x}{x} - Ax = B + 2\frac{\sin x}{x} - \cos x.$$

Ha x végtelenné válik, $\frac{\sin x}{x}$ zérussá lesz, ellenben $\cos x$ határozatlan, mert a $-1 \cdots +1$ között ingadozik. Az érintő által az Y tengelyből levágott rész limese határozatlan és így az érintőnek határhelyzete nincsen, végérintőről nem szólhatunk.

Még egyszerűbb az $y = \frac{\sin x^2}{x}$ görbe esete. Itt:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} = 0, \quad \text{tehát} \quad A = 0$$

és $$\lim_{x=\infty}(f(x)-Ax)=\lim_{x=\infty}\frac{\sin x^2}{x}=0, \text{ vagyis } B=0.$$

Az asymptota tehát $y=0$.

Másrészt azonban az érintő irányhatározója:

$$y'=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2},$$

tehát $\lim_{x=\infty} f'(x)$ nem létezik, vagyis az érintőnek nincs határhelyzete, az asymptota nem végérintő.

Feladatok és gyakorlatok.

1. $\frac{\log x}{x-1}$ az $x=1$ helyen meghatározandó (azaz $\lim_{x=1}\frac{\log x}{x-1}$).

2. $\frac{x-1}{x^n-1}$ és $\frac{x^n-1}{x^m-1}$ az $x=1$ helyen.

3. $\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ az $x=0$ helyen.

4. $\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ az $x=0$ helyen.

5. $\frac{x-\operatorname{arc}\sin x}{(\sin x)^3}$ az $x=0$ helyen.

6. $\frac{a^x-b^x}{x}$, $\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$, $\frac{x-\sin x}{x^3}$, $\frac{\sin 3x}{x-\frac{3}{2}\sin 2x}$ az $x=0$ helyen.

7. $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$, $\frac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\sin x}$ az $x=0$ helyen.

8. $\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ az $x=1$ helyen, (a gyök pozitivnak veendő).

9. $\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$, $\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$, $\frac{1-\cos(x-a)}{(x-a)^2}$, $\frac{e^x-e^a}{x-a}$ az $x=a$ helyen.

10. $\frac{x\sin x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$ az $x=\frac{\pi}{2}$ helyen.

11. $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{a+3x}-2\sqrt{x}}$ az $x=a$ helyen (a gyök pozitiv értéke veendő).

12. $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ az $n=-1$ helyen.

13. $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ az $x=\frac{\pi}{2}$ helyen.

14. $\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$ az $x=0$ helyen.

15. $\frac{a^{\sin x}-a}{\log\sin x}$ az $x=\frac{\pi}{2}$ helyen.

16. $\frac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$ az $x=0$ helyen.

17. $\frac{e^x+\log(1-x)-1}{\operatorname{tg}x-x}$ az $x=0$ helyen.

18. $\frac{\sqrt{1-x}+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ az $x=1$ helyen.

19. $\frac{e^x+\sin x-1}{\log(1+x)}$ az $x=0$ helyen.

20. $\frac{x+\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x}{2x+\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x}$ az $x=0$ helyen.

21. $\frac{x+\sin x-\sin 2x}{2x+\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x}$ az $x=0$ helyen.

22. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ az $x=a$ helyen.

23. $\dfrac{x-\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}\operatorname{tg} x}{x^3}$ az $x=0$ helyen.

24. $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ az $x=0$ helyen.

25. $\dfrac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$ az $x=0$ helyen.

26. $\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$ az $x=0$ helyen.

27. $\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{b-\sqrt{b^2-x^2}}$ az $x=0$ helyen (a gyök pozitivnak veendő).

28. $\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ az $x=0$ helyen. 29. $\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}$ az $x=0$ helyen.

30. $\dfrac{x}{e^x-1}$ az $x=0$ helyen és a differenciálhányadosa az $x=0$ helyen kiszámítandók.

31. Némelykor könnyebben célt érünk az ilyen határértékek kiszámításánál, ha nem a l'Hospital-szabályt alkalmazzuk, hanem közvetlenül a számláló és nevező Taylor-sorát használjuk fel. Így például a 6. példában szereplő $\lim\limits_{x=0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ kiszámítása céljából fejtsük ki a $\sin x$-et a 3-ik tagon túl:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4\sin(\vartheta x)}{4!}; \quad \text{tehát:} \quad \frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}-\frac{x\sin\vartheta x}{4!}$$

és így:

$$\lim\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

32. Határozzuk meg még egyszer ily módon a $\lim\limits_{x=0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $\lim\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$ (a számláló és nevező kifejtését már a második tagnál rekesszük be).

33. Ugyanilyen módon számítsuk ki a

$$\lim_{x=0}\frac{\sin 3x}{x-\frac{2}{3}\sin 2x}, \quad \lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \lim_{x=0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3},$$

$$\lim_{x=0}\frac{2x-3\sin x+x\cos x}{x^3} \quad \text{és a} \quad \lim_{x=0}\frac{(9+6\cos x)x-(14+\cos x)\sin x}{x^7}$$

(úgy a $\cos x$, mint a $\sin x$ a 8-ik tagig fejtendő ki).

34. Számítsuk ki a l'Hospital-szabály szerint még a következő határértéket: $\lim\limits_{x=0}\dfrac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\sin x}$. Ugyanezt sorokkal is.

35. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sin 2x+2\sin^2 x-2\sin x}{\cos x-\cos^2 x}$. 36. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{(x-2)e^x+x+2}{(e^x-1)^3}$

37. $\lim\limits_{x=3}\dfrac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$. 38. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{m\sin x-\sin mx}{x(\cos x-\cos mx)}$ (sorokkal is!)

39. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)}$.

(Ez különben a l'Hospital-szabály alkalmazása nélkül is könnyen megállapítható. Ugyanis a számláló ismeretes trigonometriai formula szerint $2\sin x \cos \alpha$; a nevező pedig: $-2\sin x \,.\, \sin \alpha$; tehát a keresett limes: $-\operatorname{cotg}\alpha$.)

40. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\operatorname{tg} nx - n \operatorname{tg} x}{n \sin x - \sin nx}$. 41. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{\sqrt{2x-x^4} - \sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$.

42. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$. 43. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\operatorname{tg} ax - ax}{\operatorname{tg} bx - bx}$.

44. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x}{e^x}$, $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$, $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x^n}{e^{\alpha x}}$ (α pozitiv). E határértékek 0-ok. Azt mutatja az utolsó, hogy $e^{\alpha x}$, ahol α bárminő kis pozitiv számot jelent, erősebben válik végtelenné, mint x-nek bármely magas hatványa.

45. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\log x}{x}$, $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\log x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{(\log x)^\alpha}{x^\beta}$ (α és β pozitiv számok). E határértékek 0-ok. Azt mutatja az utolsó, hogy $\log x$ bárminő magas hatványa is gyöngébb végtelenné lesz, mint x akárminő alacsony hatványa.

46. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\log\log x}{\log x}$ a számláló differenciálhányadosa: $\dfrac{1}{x \log x}$, a nevezőé: $\dfrac{1}{x}$, tehát a keresett limes: 0.

47. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{(\log\log x)^\alpha}{(\log x)^\beta}$ (α és β pozitivek); a számláló diff. hányadosa:

$$\alpha(\log\log x)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x\log x}, \text{ a nevezőé: } \beta(\log x)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x},$$

tehát
$$\lim_{x=\infty} \frac{(\log\log x)^\alpha}{(\log x)^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x=\infty} \frac{(\log\log x)^{\alpha-1}}{(\log x)^\beta}.$$

Ha ezt az eljárást folytatjuk, végre a számlálóban az exponens 0, vagy negativ lesz és így a keresett limes: 0. Ez azt mondja, hogy $\log\log x$ bárminő magas hatványa is alacsonyabb rendű végtelenné válik, mint $\log x$ akárminő alacsony hatványa. Ezt az eredményt úgyis megtaláltuk volna, hogy $y=\log x$ helyettesítéssel

$$\frac{(\log\log x)^\alpha}{(\log x)^\beta} = \frac{(\log y)^\alpha}{y^\beta}$$

és így ezt az esetet az előbbire vezettük volna vissza.

48. A l'Hospital-szabály szerint, ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $x=a$ helyen végtelenekké válnak és $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ létezik, akkor $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Meglehet azonban és erre már rá is utaltunk (228. lapon), hogy a második határérték nem létezik. Ebből nem következik, hogy az első sem létezik. Vagyis előfordulhat, hogy $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ létezik, bár $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ nincsen. Így pl.

$$\lim_{x=\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x=\infty} \frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}} = 1.$$

A számláló diff. hányadosa: $1-\cos x$, a nevezőé: $1+\cos x$. E kettő hányadosa: $\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$, tehát $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$ és $\lim\limits_{x=\infty} \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$ határozatlan, vagyis attól függ, hogy az x minő értékeken át halad a végtelenbe. Nem lesz érdektelen, ha ezt a sajátságos körülményt jobban földerítjük. A l'Hospital-szabály levezetésénél (az $x=\infty$ helyen) erre az egyenlőségre jutottunk:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}=\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}}{1-\dfrac{\varphi(x_2)}{\varphi(x_1)}}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

ahol ξ mindig az x_1 és x_2 közötti helyet jelent. Ebből következik, hogy ha x_1-el a végtelenbe megyünk,

$$\lim_{x_1=\infty}\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}=\lim\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\,.$$

Ha tehát a baloldali limes létezik, ez megegyezik a jobboldalival. És itt van a fordulópont. Meglehet, hogy a ξ közbenső értékekre megalkotott $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$-nek van limese, de általában $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$-nek nincsen; azaz, meglehet, hogy ha a ξ értékeken át haladunk a végtelenbe, $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ limese határozott, de más úton haladva, más limeshez jutunk. Sőt úgy is kell lenni, ha a baloldali limes létezik. Vagyis, ha $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ létezik, akkor a ξ közbenső értékekkel megalkotott $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ számértékek sorozatának ugyanez a limese van. Nézzük a mi példáuknál, hol is vannak a ξ közbenső helyek?

$$\frac{x_1-\sin x_1-(x_2-\sin x_2)}{x_1+\sin x_1-(x_2+\sin x_2)}=\frac{(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{\sin x_1-\sin x_2}{x_1-x_2}\right)}{(x_1-x_2)\left(1+\dfrac{\sin x_1-\sin x_2}{x_1-x_2}\right)}$$

és ha x_1 korlátlanul nő, akkor a $\frac{\sin x_1-\sin x_2}{x_1-x_2}$ zérussá válik, tehát a ξ közbenső hely olyan, hogy úgy $f'(\xi)=1-\cos\xi$, valamint $\varphi'(\xi)=1+\cos\xi$ az 1 felé convergálnak, vagyis a ξ hely a $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröséhez convergál és így az előbb talált $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\operatorname{tg}^2\frac{\xi}{2}$ az 1-hez convergál. Általában tehát az $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=$ $=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$-nek nincs határértéke, de a jelen esetben a ξ közbenső helyekkel megalkotott $\operatorname{tg}^2\frac{\xi}{2}$ határértéke: 1.

49. Számítsuk ki $\lim\limits_{x=\infty} x^n e^{-x}$-et, ahol n pozitiv szám. ($\infty\cdot 0$ határozatlan alak, mely azonnal $\frac{x^n}{e^x}$ alakban írható). Határozzuk meg $\lim x^n e^{-mx}$-et (n és m pozitiv számok).

50. $\lim\limits_{x=0} x\log x$. Ha $x=\frac{1}{z}$ tesszük, akkor $-\lim\limits_{z=\infty}\frac{\log z}{z}$ számítandó.

51. $\lim\limits_{x=0} x(\log x)^\alpha$ (α pozitiv szám) és $\lim\limits_{x=0} x^\alpha(\log x)^\beta$ (α és β pozitiv számok).

52. $\lim\limits_{x=\infty} x^{\frac{1}{x}}$ helyett a logarithmusának a limese számítandó.

53. $\lim\limits_{x=\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-1)$ ($\infty\cdot 0$ határozatlan alak. Ha $x=\frac{1}{z}$ tesszük, $\lim\limits_{z=0}\frac{a^z-1}{z}$ számítandó. Ez $\frac{0}{0}$ alak. A számláló diff. hányadosa: $a^z\log a$, a nevezőé: 1. tehát:

$$\lim_{x=\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{z=0}\frac{a^z-1}{z}=\lim_{z=0} a^z\log a=\log a.$$

Ugyanezt a Taylor-sor segítségével: $a^z=1+z\log a+\frac{(z\log a)^2}{2}a^{\vartheta z}$, tehát

$$\frac{a^z-1}{z}=\log a+\frac{z(\log a)^2}{2}a^{\vartheta z}\quad\text{és így}\quad\lim_{z=0}\frac{a^z-1}{z}=\log a.$$

Ha $a=e$, akkor

$$\lim_{x=\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=1.$$

54. $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ (1^∞ határozatlan alak. Helyette a logarithmusa számítandó: $\log\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)$ és x helyett $\frac{1}{z}$-t téve:

$$\lim_{x=\infty} x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{z=0}\frac{\log(1+az)}{z}=\lim_{z=0}\frac{a}{1+az}=a$$

és így:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a.$$

(Ezt a l'Hospital szabály nélkül valamivel egyszerűbben így mutathatjuk meg:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{x=\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a=e^a.$$

55. $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ helyett a logarithmusa számítandó:

$$\lim_{x=\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{z=0}\frac{\log(1+z^2)}{z}=\lim_{z=0}\frac{2z}{1+z^2}=0,$$

tehát:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=1.$$

Számítsuk ki ehhez hasonlóan $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^x$, ha $\alpha>1$.

56. $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

57. $\lim\limits_{x=1} x^{\frac{1}{1-x}}$, $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$, $\lim\limits_{x=0}(e^x-1)^{\frac{1}{x}}$.

58. $\lim\limits_{x=\infty}(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{x}}$. $(a>0)$

59. Számítsuk ki: $e^{-\frac{1}{x^2}}$ és első 3 diff. hányadosának határértékét az $x=0$ helyen.

60. $\lim\limits_{x=a}\frac{\log(e^x-e^a)}{\log(x-a)}$. 61. $\lim x^a(\log x)^b$ (a és b pozitiv számok).

62. $\lim\limits_{x=0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$ (A $\lim\limits_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$-ről már tudjuk, hogy e; tehát $\frac{0}{0}$ alakkal van dolgunk.)

A számláló diff. hányadosa:

$$-(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left[\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x^2}\log(1+x)\right];$$

tehát

$$\lim_{x=0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=-\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\log(1+x)\right]=$$

$$=-e\lim\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\log(1+x)\right]=-e\lim_{x=0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

A l'Hospital-szabályt újból alkalmazva a jobboldali kifejezés limese a következőképpen írható:

$$-e\lim_{x=0}\frac{1-1-\log(1+x)}{3x^2+2x}=e\lim_{x=0}\frac{\log(1+x)}{2x+3x^2}$$

és még egyszer alkalmazva a l'Hospital-szabályt, végül arra jutunk, hogy a keresett limes:

$$\lim_{x=0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{e}{2}.$$

(Ez azt fejezi ki, hogy az $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ az e-től, ha x végtelen kicsinnyé válik, első rendű végtelen csekéllyel különbözik; a két végtelen kicsiny hányadosa: $\frac{e}{2}$).

63. Határozzuk meg $\lim\limits_{x=a}\dfrac{a^n-x^n}{(\log a)^n-(\log x)^n}$-et.

64. $\lim\limits_{x=1}\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

65. $\lim\limits_{x=0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$.

(Közös nevezőre hozva: $\dfrac{(\pi x-1)(e^{2\pi x}-1)+2\pi x}{2x^2(e^{2\pi x}-1)}$. Fejtsük ki a számlálóban és a nevezőben előforduló $e^{2\pi x}$-et Maclaurin-sorban úgy, hogy x negyedik hatványánál megállapodunk. Ezt a negyedik hatványt tartalmazó tagot ki sem kell számítani. $e^{2\pi x}-1=2\pi x+\dfrac{4\pi^2x^2}{2}+\dfrac{8\pi^3x^3}{6}+(x^4)$. Az (x^4)-el azt akarjuk jelölni, hogy x^4-t tartalmazó tag, mellyel egyelőre nem törődünk. A számláló ezek után így írható: $\dfrac{2\pi^3x^3}{3}+(x^4)$, a nevező pedig: $4\pi x^3+(x^4)$, tehát a tört:

$$\frac{2\pi^3x^3+(x^4)}{12\pi x^3+(x^4)}$$

és $2x^3\pi$-vel rövidítve: $\dfrac{\pi^2+(x)}{6+(x)}$, ahol (x) jelenti az x-el szorzott tagokat. Ebből következik, hogy a keresett limes: $\dfrac{\pi^2}{6}$. Oldjuk meg ezt a feladatot a l'Hospital-szabály többszörös alkalmazásával is!

66. $\lim\limits_{x=0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$. 67. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x-\pi x}{2x^2\operatorname{tg}\pi x}$.

68. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\log\operatorname{tg}px}{\log\operatorname{tg}x}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right.$ alak. A számláló diff. hányadosa:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}px}\cdot\frac{p}{\cos^2px},\quad\text{a nevezőé: }\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2x},$$

tehát $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\log\operatorname{tg}px}{\log\operatorname{tg}x}=p\lim\limits_{x=0}\dfrac{\operatorname{tg}x\cos^2x}{\operatorname{tg}px\cdot\cos^2px}=p\lim\dfrac{\sin 2x}{\sin 2px}=p\dfrac{1}{p}=1.$

69. $\lim\limits_{x=0}x^{x^n}$. (E helyett a logarithmusának a limesét keressük.

$$\lim_{x=0}x^n\log x=0;\quad\text{tehát}\quad\lim x^{x^n}=1,$$

ha n poz. szám.)

70. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$. (A számlálót és nevezőt Maclaurin-sorba fejtsük és pedig az x^4-t tartalmazó tagokig. Azt találjuk, hogy a számláló: $\dfrac{1}{6}x^3+(x^4)$, a nevező $x^3+(x^4)$, tehát a keresett limes: $\dfrac{1}{6}$.

Oldjuk meg ezt a feladatot a l'Hospital-szabály alkalmazásával is!)

71. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$. 72. $\lim\limits_{x=\pi-a-b}\dfrac{\sin(a+b)\sin(a+x)-\sin b\sin x}{\sin(a+b+x)}$.

73. $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arc\,tg}(a+x)-\operatorname{arc\,tg}(a-x)}$.
74. $\lim\limits_{x=0} \frac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{c^x \sin cx - d^x \sin dx}$.

75. $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$,
76. $\lim\limits_{x=0} \frac{e^x - e^{\operatorname{tg} x}}{x - \sin x}$.

77. $\lim\limits_{x=\infty} \left[x - x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.
78. $\lim\limits_{x=a} \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

79. $\lim\limits_{x=\infty} 2^x \sin\frac{a}{2^x}$
80. $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$.

81. $\lim\limits_{x=0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}$.
82. $\lim\limits_{x=0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^5}$.

83. $\lim\limits_{x=0} \frac{\log(1+x)^2 - 2x + x^2}{x^3}$
84. $\lim\limits_{x=0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$.

85. $\lim\limits_{x=\infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right]$. (Tegyük $x = \frac{1}{z}$);

$$\lim_{x=\infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right] = \lim_{z=0} \frac{\sqrt{(az+1)(bz+1)}-1}{z}$$

és a l'Hospital-szabályt alkalmazva, azt találjuk, hogy a keresett limes: $\frac{a+b}{2}$.

86. Számítsuk ki hasonlóan a következő limest:

$$\lim_{x=\infty} \left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} - x\right].$$

87. $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\log(x+be^x)}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}$.
88. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

89. *Asymptota poláris koordináták esetében.* Ha a görbe egyenletét ebben az alakban írjuk: $\frac{1}{r} = f(\varphi)$, ahol r a görbe egy tetszésszerinti P pontjának a rendszer O kezdőpontjától való távolsága és φ az OP radius vectornak az X tengelyhez való hajlásszöge, akkor P pont a görbén végtelenbe halad, ha r végtelenné válik, azaz, ha $f(\varphi)=0$. Legyen ezen egyenlet egyik gyöke α. Az E egyenes az X tengelyhez ω szöggel hajoljon és a kezdőponttól q távolságra legyen. A görbe valamely (r, φ) pontjának távolsága az E-től:

$$d = q - r\sin(\varphi - \omega).$$

Hogy az E a görbe asymptotája legyen, kell, hogy $\lim\limits_{r=\infty} [q - r\sin(\varphi-\omega)] = 0$ legyen. $r=\infty$ helyett azt is mondhatjuk: $\varphi=\alpha$. Tehát kell pl., hogy:

$$\lim_{\varphi=\alpha} \left[\frac{q}{r} - \sin(\varphi-\omega)\right] = 0,$$

vagyis $\sin(\alpha-\omega)=0$, tehát az asymptota irányszöge csakis az $f(\varphi)=0$ valamelyik gyöke lehet; kell továbbá, hogy

$$q = \lim_{\varphi=\alpha} r\sin(\varphi-\alpha)$$

legyen, azaz: $\lim\limits_{\varphi=\alpha} \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{f(\varphi)} = q$ legyen. A L'Hospital szabály szerint tehát: $q = \frac{1}{f'(\alpha)}$.

90. Mutassuk meg, hogy az $\frac{1}{r} = \varphi^2 \sin\frac{1}{\varphi}$ görbének asymptotái a $\varphi = \frac{1}{n\pi}$ szögekhez tartoznak.

91. Mutassuk meg, hogy $y = xe^{\frac{1}{x}}$ görbe asymptotája: $y=x+1$.

92. Határozzuk meg az $\frac{1}{r} = \frac{\varphi}{a}$ spirális asymptotáját!

VII. FEJEZET.

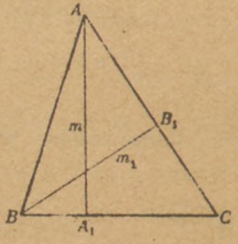
A HATÁROZOTT INTEGRÁL.

1. A területszámítás. Az elemi geometria egyik legfontosabb feladata az idomok területeinek meghatározása. És itt is két, egészen különböző természetű vizsgálatot igényel az egyenes vonalak által határolt idomnak, a sokszögnek, és az elemekben tárgyalt görbe vonalú idomnak, a körnek a területmeghatározása.

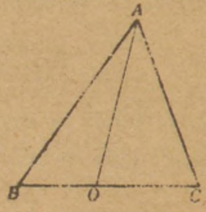
Egy kissé tüzetesebben akarunk foglalkozni ezzel a kérdéssel, hogy a határozott integrál geometriai jelentőségét előkészítsük.

Mit értsünk a legegyszerűbb idom, a háromszög területén? Ez az első kérdés. Vagyis, ha adva van egy háromszög, hogyan állapítsunk meg az alkotórészeinek mértékszámaiból olyan számot, melyet a háromszög területének tekinthessünk? Definicióképpen megállapítjuk, hogy az ABC háromszög területe arányos legyen az am szorzattal; mondjuk tehát kam, ahol k egy, minden háromszögre nézve állandó szám, a az egyik oldal és m a reá vont magasság mértékszáma.

E megállapítás jogosultságának a belátásához először is azt kell megmutatni, hogy az így megállapított számérték független attól, hogy melyik oldalt választjuk alapul. Ezt azonnal beláthatjuk. Ugyanis a $BB_1C\triangle$ hasonló az AA_1C-hez, tehát $AC:BC=AA_1:BB_1$, vagyis $am=bm_1$; tehát mindegy, akár a akár b választassék is a háromszög alapjául, szóval a *terület gyanánt megállapított mértékszám: kam független attól, hogy a háromszögnek melyik oldalát választjuk alapnak.*



72. ábra.

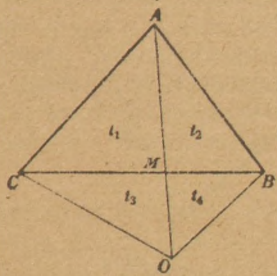


73. ábra.

Ha az a oldalon fölveszünk egy O pontot, amely az a oldalt a_1 és a_2 részekre osztja, akkor a definició szerint az $AOC\triangle$ területe: $t_1=ka_1m$ és AOB területe: $t_2=ka_2m$. E két terület összege egyenlő az ABC területével, mert $kam=ka_1m+ka_2m$.

A terület fogalma tehát oly módon állapíttatott meg, hogy ezen, rendszerint csak a szemlélet alapján ismertetett tulajdonsággal rendelkezik: $ABC=AOC+AOB$.

Hogy az O pontot másutt is felvehessük, megállapodunk még a következőben: Ha az O pont a háromszög valamelyik oldalától arra van, amerre a háromszög, akkor ezen oldallal mint alappal és O csúccsal biró háromszög területét pozitivnak vesszük; ellenkező esetben pedig negativnak. Igy például a CA oldalnak a jobb felén terül el a CAB háromszög, ugyanezen a félen van az O pont is, tehát CAO területe pozitiv. Éppen így ABO területe is pozitiv, mert az O pont az AB oldalnak ugyanazon a felén van, mint az ABC háromszög; ellenben az OCB területe negativ, mert CB oldal fölött van az ABC háromszög és alatta az O pont. Ezen megállapítás után azonnal belátható, hogy $ACO+AOB+COB=ABC$.



74. ábra.

Ugyanis az ABC területe az előbbi szerint: $t=t_1+t_2$, mert M pont a BC oldalon van. Az OAC területe: t_1+t_3 (a t_1, t_2, t_3, t_4 pozitiv számértékek), mert M pont a háromszög OA oldalán van, tehát szintén érvényes az előbb említett felbontás. Az OBA területe: t_2+t_4, az OBC-é pedig $-(t_3+t_4)$; tehát valóban: $ABC=ACO+ABO+CBO$.

Akárhol is legyen az O pont a síkon, ez az állítás mindig helyes.

Legyen most egy tetszés szerinti, összefüggő sokszög: $ABCD\ldots$ Vegyük fel az O pontot bárhol.

Azt akarjuk bebizonyítani, hogy ha az adott polygont csupa háromszögre bontjuk és O pontot tetszés szerinti helyen vesszük föl és a polygon csúcsaival összekötjük, akkor az OAB, OBC, ... háromszögek területeinek összege, a kellő előjellel véve a területeket, egyenlő a háromszögek területeinek összegével.

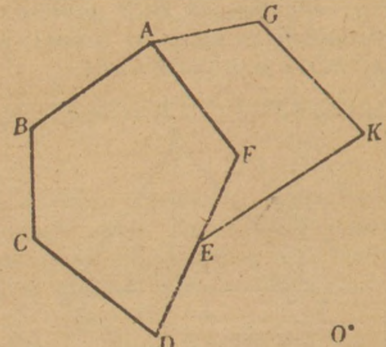
Kellő előjel alatt mit értünk? Ennek a megállapítása végett megjegyezzük, hogy a sokszög mindenik oldalára nézve megállapíthatjuk, hogy a sokszög ezen oldal melyik felén van. Ezen azt értjük, hogy a sokszögnek az illető oldal közvetlen közelében levő része az illető sokszögoldalnak melyik felén van. Ha már most az O pont az illető oldalnak (mondjuk pl. AB-nek) ugyanazon a felén van, mint az iménti megállapodás szerint maga a polygon, akkor az illető O csúcsú háromszöget (pl. OAB) pozitivnek vesszük, ellenkező esetben negativnak.

Be akarjuk tehát bizonyítani, hogy ha a polygont tetszés szerinti módon bontjuk fel háromszögekre (melyek egymást nem fedik és másrészt a sokszög belsejének minden pontja vagy egy háromszög belsejében, vagy többnek a határán van), akkor e háromszögek területeinek összege akkora, mint $OAB+OBC+OCD+\cdots$, ahol AB, BC, CD, ... a sokszög oldalai.

Hogy e tételt bebizonyítsuk, mutassuk meg előbb, hogy ha P' és P'' két olyan polygon, melyeknek közös oldalai vannak, de egymást fedő részeik nincsenek (vagyis nincs olyan pont, mely mindkettő belsejében volna) és a két polygon összetételéből keletkező polygon P és a P'-re vonatkozó

$OAB+OBC+OCD+\cdots$ összeg S_1, a P''-re vonatkozó összeg S_2, a P-re vonatkozó pedig S, akkor $S=S_1+S_2$.

Ugyanis (az ábrát tartva szem előtt), az egész P polygonra vonatkozik az $S=OAB+OBC+OCD+ODE+OEK+OKG+OGA$ összeg. A P'-re nézve pedig az $S_1=OAB+OBC+OCD+ODE+OEF+OFA$; a P''-re pedig: $S_2=OEF+OFA+$ $+OAG+OGK+OKE$. De ha az S_2-ben szereplő OEF háromszög pozitiv terü-



75. ábra.

letű, az S_1-ben szereplő OEF negativ és abszolut értékre az előbbivel megegyezik; mert hiszen ha O pont EF-nek azon oldalán van, mint a P'' polygon, akkor a P'-tel ellenkező oldalon van (vagy megfordítva). Ugyanez áll az OFA háromszögre stb. Így tehát bebizonyítottuk, hogy $S=S_1+S_2$.

Ha már most a polygont valamiképpen az említett megszorítással háromszögekre bontjuk fel és e háromszögeket megszámozzuk úgy, hogy szomszédos számokkal szomszédos háromszögeket látunk el és az előbbi tételt sorban alkalmazzuk az 1. és 2. háromszögekből keletkező idomra, azután erre és a 3. háromszögből keletkező s í. t., akkor ezzel bebizonyítottuk, hogy $S=OAB+OBC+OCD+\cdots$ egyenlő a részháromszögek területeinek összegével.

Így tehát kimutattuk, hogy *ha a P polygont tetszés szerinti módon háromszögekre bontjuk fel, arról gondoskodva, hogy a sokszög belsejének minden pontja egyik háromszögben legyen és az O pontot valahol felvesszük és a P csúcsaival összekötjük, akkor a részháromszögek területeinek összege ugyanakkora, mint azon háromszögek területeinek összege, amelyeknek alapjai a sokszög oldalai és közös csúcsuk: O.*

Most még két megjegyzést tehetünk. Először is: az O pontot tetszés szerint választhatjuk; mert hiszen akárhol vegyük is fel az O pontot, $S=OAB+OBC+OCD+\cdots$ terület mindig egyenlő a részháromszögek területeinek összegével, így az S is független az O helyzetétől. A másik megjegyzés az, hogy a polygonra vonatkozó S összeg független attól, hogy a polygont miképpen bontottuk fel háromszögekre; mert hiszen ezen S összegben csakis a polygon oldalai szerepelnek; tehát ha a *polygont bárhogyan bontjuk is fel háromszögekre, e háromszögek területeinek összege állandó.*

Ezért tehát ezt az összeget a *polygon területének* nevezzük.

Még csak az van hátra, hogy a terület formulájában szereplő k konstanst alkalmasan válasszuk. Evégből az egységnyi hosszúsággal képzeljünk négyzetet alkotva. Az átlóval felbontjuk két derékszögű háromszögre. Mindegyiknek a területe a definició szerint, minthogy az alap és magasság 1, k lesz, a négyzet területe tehát $2k$ és így, ha azt akarjuk, hogy e terület mértékszáma 1 legyen, akkor k-t $\frac{1}{2}$-nek kell választanunk.

Eszerint tehát a háromszög területe definicióképpen: $\frac{am}{2}$, a sokszög területe pedig egyenlő részháromszögei területeinek összegével.

Ez a tárgyalás kimutatta, hogy minden egyenes vonalú idomhoz területképpen egy számot rendelhetünk, melyről a következőket állíthatjuk: 1) A háromszöghöz rendelt szám: $\frac{am}{2}$ független attól, hogy melyik oldalt válasszuk a-nak. 2) A sokszöghöz rendelt szám független attól, hogy miképpen bontottuk fel a sokszöget háromszögekre, 3) egybevágó idomokhoz rendelt számok egyenlők, mert hiszen egybevágó háromszögekre bonthatók, 4) ha P_1 polygonhoz rendelt szám t_1, P_2-hez rendelt szám t_2, akkor a P_1 és P_2 összetételéből keletkezett polygonhoz rendelt szám t_1+t_2.

A területmérést rendesen olyan módon szokták tárgyalni, hogy a terület mértékszámának létezését a priori feltételezik és természetesen a 4) alatti tulajdonságot is a priori felteszik. Itt *Hadamard* nyomán kimutattuk,* hogy miképpen lehet ettől az aprioristikus szemléleti feltevéstől függetlenül minden polygonhoz egy számot rendelni, melyet joggal nevezhetünk a polygon területének.

2. Görbevonalú idom területe. A geometria elemeiben nem csak sokszögek területeit tárgyaljuk, hanem a görbevonalú idomok közül is legalább a körét. Nézzük meg kissé pontosabban, voltaképpen hogyan határozzuk meg a kör területét, vagyis hogyan kell értelmeznünk azt a számot, mely a kör területének a mértékszáma.

Belerajzolunk a körbe egy szabályos hatszöget és szerkesztünk köréje is szabályos hatszöget. Az első területét jelöljük B_6-al, a másodikat K_6-al. Elemi módszerekkel sikerül a beírt és körülírt szabályos n szög területéből a beírt és a körülírt szabályos $2n$-szög területének a meghatározása. Ezt a gondolatmenetet követve, meghatározhatjuk sorban a $B_6, B_{12}, B_{24}, \ldots$ és a $K_6, K_{12}, K_{24}, \ldots$ számokat, melyek közül B_n a szabályos beírt n szög és K_n a körülírt szabályos n-szög területe.

Azonnal belátható, hogy a $B_6, B_{12}, B_{24}, \ldots$ számsorozat monoton növekedő, de minthogy minden beírt szabályos sokszög benne van pl. a körülírt szabályos hatszögben, tehát e monoton növekedő sorozat korlátos és így egy B számot értelmez, ahol $B=\lim B_n$. Éppen így a $K_6, K_{12}, K_{24}, \ldots$ sorozat korlátos monoton csökkenő sor, tehát egy K számot értelmez, ha $K=\lim K_n$.

Azt kell még megmutatni, hogy $K=B$. Evégből tekintetbe vesszük, hogy a beírt szabályos n-szög és a körülírt szabályos n-szög hasonló idomok, ha tehát a beírt szabályos n-szög valamely oldalának a középponttól való távolsága d_n (a körülírté r, a rádius), akkor: $\frac{B_n}{K_n} = \left(\frac{d_n}{r}\right)^2$ és minthogy $\lim\limits_{n=\infty} d_n=r$, tehát $\lim \frac{B_n}{K_n} = \frac{B}{K} = 1$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $B_6, B_{12}, \ldots$ és $K_6, K_{12}, \ldots$ sorozatoknak közös határértékük van. Ezt a közös határértéket tekintjük a *kör területének.*

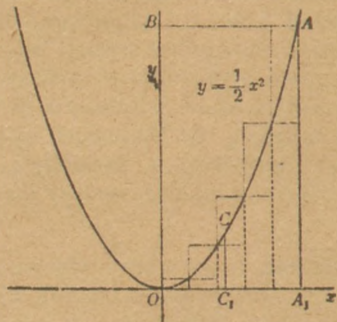
Ehhez a definicióhoz még sok szó fér. Kérdés, hogy ha nem a szabályos hatszögből indulunk ki, hanem más szabályos sokszögből és az oldalak számát mindig megduplázzuk, vajjon akkor is erre a határértékre jutunk-e? Vagy ha nem szabályos sokszögekkel operáltunk volna, hanem másféle sokszögekkel, melyek oldalai elenyésző csekélyekké válnak, vajjon akkor ugyanazt a határértéket kapjuk-e? Ezekkel a kérdésekkel ezúttal nem foglalko-

* *Hadamard:* Géométrie élémentaire. I. p. 289.

zunk, hanem még néhány problemán mutatjuk be, miként lehet oly idom területét meghatározni, melynek egyik-másik határvonala görbe vonal.

1. Példa. Első példa gyanánt értelmezzük az OA_1A területet, ha az OA az $y=ax^2$ parabola íve. Jelöljük az OA_1-et l-el. Osszuk fel az OA_1-et n egyenlő részre, egy-egy rész: $\frac{l}{n}\cdot$ Az egyes osztópontok abscissái:

$$\frac{l}{n},\ \frac{2l}{n},\ \frac{3l}{n},\dots \frac{nl}{n}=l.$$



76. ábra.

Ezen abszcisszákhoz tartozó ordinátàk sorban:

$$a\frac{l^2}{n^2},\ a\frac{4l^2}{n^2},\ a\frac{3^2l^2}{n^2},\dots a\frac{n^2l^2}{n^2}.$$

A szóban forgó területbe belerajzoljuk az egyes szakaszokra állított derékszögű négyszögeket. Ilyen négyszögek mindig berajzolhatók, mert a görbe mindenütt emelkedő. A k-ik szakaszra állított derékszögű négyszög alapja: $\frac{l}{n}$, magassága (a baloldali ordináta): $a\frac{(k-1)^2l^2}{n^2}$, tehát a berajzolt derékszögű négyszög területe: $a(k-1)^2\frac{l^3}{n^3}$ és így az $n-1$ berajzolt derékszögű négyszög összes területe:

$$t_n=\frac{al^3}{n^3}[1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2].$$

Ha minden egyes szakaszra azt a derékszögű négyszöget rajzoljuk, melynek magassága a szakasz jobboldali végpontjában emelt ordináta, akkor a kérdéses területet magában foglaló, csupa derékszögű négyszögből álló területet kapunk. A k-ik szakaszra emelt derékszögű négyszög magassága ezúttal $a\frac{k^2l^2}{n^2}$, tehát ezen egész körülírt idom területe:

$$T_n=\frac{al^3}{n^3}[1+2^2+3^2+\dots+n^2].$$

A t_n és T_n kiszámítása végett szükségünk van a természetes számsor egymásután jövő számainak négyzetösszegére, S_n-re. Ezt például az V. fejezetben tárgyalt eljárástól eltérően a következő egyszerű, elemi módon állapíthatjuk meg. Tudjuk, hogy az egymásutáni m páratlan szám összege

$1+3+5+\cdots+(2m-1)$ éppen m^2; tehát a négyzetszámokat így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
1^2&=1\\
2^2&=1+3\\
3^2&=1+3+5\\
4^2&=1+3+5+7\\
&\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
n^2&=1+3+5+7+\cdots+(2n-1).
\end{aligned}$$

Innen: $$S_n=n.1+(n-1)\,3+(n-2)\,5+\cdots+1.(2n-1).$$

Adjunk még ehhez

$$2S_n=2.1^2+2.2^2+2.3^2+\cdots+2n^2$$

-et fordított sorrendben. Ekkor a k-ik taghoz, vagyis a $(n-k+1)\,(2k-1)$-hez $2\,(n+1-k)^2$ kerül. E kettő összege:

$$(n+1-k)\,(2n+2-2k+2k-1)=(n+1-k)\,(2n+1)$$

és így: $$3S_n=(2n+1)\,[1+2+3+\cdots+n]=\frac{(2n+1)\,n\,(n+1)}{2},$$

vagyis: $$S_n=\frac{(2n+1)\,n\,(n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6},$$

tehát: $$T_n=\frac{al^3}{n^3}\Big[\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\Big],$$

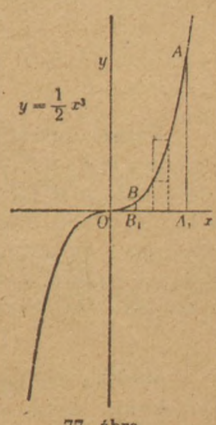
ha pedig S_{n-1}-et számítjuk ki, azt találjuk, hogy:

$$t_n=\frac{al^3}{n^3}\Big[\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\Big].$$

Ha már most n-et korlátlanul növesztjük, vagyis $\lim\limits_{n=\infty} T_n$ és $\lim\limits_{n=\infty} t_n$-et számítjuk ki, arra jutunk, hogy $\lim T_n=\lim t_n=\frac{al^3}{3}$. E közös határértéket nevezzük az OAA_1 idom területének. Eszerint tehát a keresett terület: $t=\frac{al^3}{3}=\frac{al^2.l}{3}$; minthogy pedig $al^2=A_1A$, tehát a keresett terület az OA_1AB derékszögű négyszög harmadrésze.

Könnyű most már pl. a C_1AAC idom területének a meghatározása. Ugyanis ez a terület: $t=OAA_1O-OCC_1O$; tehát ha $OC_1=l_1$, akkor: $t=\frac{a\,(l^3-l_1^3)}{3}$.

2. Példa. Második példa gyanánt válasszuk az OA_1A terület meghatározását, ha az OA_1 görbe az $y=ax^3$ harmadrendű parabola íve. Megint úgy járunk el, mint előbb. Az $OA_1=l$ abscissát fölosztjuk n egyenlő részre; mindenik részre két derékszögű négyszöget rajzolunk. Egyiket a baloldali ordinátával, amely egészen bele esik a keresett területbe, a másikat a jobboldali ordinátával, melynek egy kis része kinyúlik a szóban forgó idomból. A k-ik szakasz baloldali ordinátája $\frac{a\,(k-1)^3\,l^3}{n^3}$, a jobboldali pedig $\frac{ak^3l^3}{n^3}$ és így a kisebb négyszög területe: $\frac{a\,(k-1)^3\,l^4}{n^4}$, a nagyobbé: $\frac{ak^3l^4}{n^4}$.



77. ábra.

A kisebb négyszögek összes területe:

$$t_n = \frac{al^4}{n^4}\left[1+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3\right],$$

a nagyobb négyszögek összes területe pedig:

$$T_n = \frac{al^4}{n^4}\left[1+2^3+3^3+\cdots+n^3\right].$$

A t_n, illetőleg T_n meghatározása végett az egymásután jövő egész számok köbeinek összegét kell kiszámítanunk. Ezt már megtettük (l. 186. lap), s azt találtuk, hogy:

$$1+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4};$$

ebből egyúttal azt is tudjuk, hogy

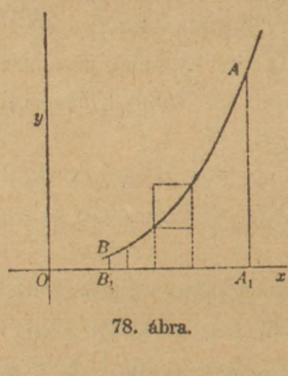
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

tehát
$$t_n = \frac{al^4}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \quad \text{és} \quad T_n = \frac{al^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

és innen, ha n végtelenné válik, $\lim t_n = \lim T_n = \frac{al^4}{4}$. Ez a keresett terület.

Ha a BB_1A_1A négyszögféle idom területét keressük, ahol $OB_1=l_1$, akkor azonnal megtaláljuk, hogy ez a terület: $t = \frac{a(l^4-l_1^4)}{4}$.

3. Példa. Harmadik példa gyanánt az előbbi két speciális példa általánosítását válasszuk. Határozzuk meg az A_1ABB_1 alakú területet, ha a BA ív az $y=x^k$ görbe íve, ahol k tetszés szerinti pozitiv vagy negativ szám (csak -1 ne legyen) és $OA_1=a$, $OB_1=b$ (a és b pozitivok).



78. ábra.

Válasszunk egy n pozitiv egész számot; és határozzuk meg a q pozitiv számot úgy, hogy $bq^n=a$ legyen; alkossuk meg egymásután a $bq, bq^2, bq^3, \ldots bq^n=a$ számokat és jelöljük meg az abszcissza tengelyen azokat a pontokat, amelyek a kezdőponttól rendre $b, bq, bq^2, \ldots bq^n$ távolságra vannak. Mivelhogy $a>b$, tehát $q>1$ és így ezek a pontok nyilván B_1A_1 szakaszba esnek. Ily módon a $B_1A_1=a-b$ közt n szakaszra osztottuk. Az r-ik szakasz határpontjai: bq^{r-1}, bq^r; a szakasz nagysága:

$$bq^{r-1}(q-1).$$

Minden szakaszra úgy, mint előbb tettük, két derékszögű négyszöget helyezünk: egyik egészen belül van a szóban forgó területen, a másiknak egy része kiesik ebből a területből. Az r-ik szakaszra emelt kisebb négyszög magassága a bq^{r-1} abszcisszához tartozó ordináta, tehát: $b^k q^{k(r-1)}$ és így e négyszög területe: $b^{k+1} q^{(k+1)(r-1)}(q-1)$; a nagyobbik négyszög területe:

$$b^{k+1} q^{(k+1)r-1} \cdot (q-1).$$

A nagyobb négyszögek összes területe tehát:

$$T_n = b^{k+1}(q-1)\left[q^{k+1} + q^{2(k+1)} + q^{3(k+1)} + \dots + q^{n(k+1)}\right] \cdot \frac{1}{q};$$

a kisebbek összege pedig:*

$$t_n = b^{k+1}(q-1)\left[1 + q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \dots + q^{(n-1)(k+1)}\right].$$

A zárójelekben álló geometriai sorokat összegezvén, azt találjuk, hogy:

$$T_n = b^{k+1}\frac{(q-1)}{q}\,\frac{q^{(n+1)(k+1)} - q^{k+1}}{q^{k+1}-1}; \quad t_n = b^{k+1}(q-1)\,\frac{q^{n(k+1)}-1}{q^{k+1}-1},$$

vagyis, tekintetbe véve, hogy $bq^n = a$,

$$T_n = \frac{q-1}{q^{k+1}-1}\left(a^{k+1} - b^{k+1}\right) q^k; \qquad t_n = \frac{q-1}{q^{k+1}-1}\left(a^{k+1} - b^{k+1}\right).$$

Ha már most n végtelenné válik, akkor q az 1-hez konvergál; mert hiszen $q^n = \frac{b}{a}$, tehát $\log q = \frac{\log b - \log a}{n}$ és így $\lim\limits_{n=\infty} \log q = 0$, miből $\lim\limits_{n=\infty} q = 1$. Viszont, ha q az 1-hez konvergál, n végtelenné válik, mert $q^n = \frac{b}{a}$-ból:

$$n = \frac{\log b - \log a}{\log q} \quad \text{és} \quad \lim_{q=1} \frac{1}{\log q} = \infty.$$

Mindegy tehát akár n-et tesszük végtelenné, akár a q quotienst 1-gyé.

De ha q az 1-hez konvergál, akkor $\frac{q-1}{q^{k+1}-1}$ $\frac{0}{0}$ határozatlan alakú, határértéke azonban a l'Hospital szabállyal megállapítható. A számláló differenciálhányadosa: 1, a nevezőé $(k+1)q^k$, tehát (ha $k \neq -1$) e határérték: $\frac{1}{k+1}$ és így:

$$\lim T_n = \lim t_n = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1}.$$

Ez a keresett terület. Ha a görbe egyenlete nem $y = x^k$, hanem $y = Ax^k$, akkor a terület A-szor ekkora. Látjuk, hogy ez a formula magában foglalja az előbbieket; ezeket kapjuk, ha $k=2$, vagy $k=3$ tesszük. Megjegyezzük azonban, hogy e levezetésünk csakis akkor tekinthető általában érvényesnek, ha $k \neq -1$, amit már kiemeltünk és ha az ab szakasz a 0 helyet nem foglalja magában. Ha ugyanis $b=0$ volna, akkor nem beszélhetünk olyan q-ról, melyre nézve $bq^n = a$. Ha a 0 belső hely volna, akkor sem szólhatunk olyan pozitiv q számról, melyre nézve $bq^n = a$ lenne.

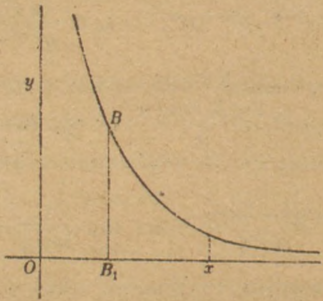
Ha azonban $k+1 > 0$, azaz k pozitiv, vagy -1 és 0 közé eső negativ szám, mégis van értelme az eredményünknek azon esetben is, midőn a baloldali határpont: $b=0$.

Ha ugyanis a 0 határpont helyett egy más, pozitiv x-et választunk, akkor az $x \dots a$ szakaszra vonatkozó terület az alkalmazott eljárással kiszá-

* A nagyobb és kisebb szók felcserélendők, ha k negativ; mert ekkor a görbe nem monoton növekvő, hanem monoton csökkenő.

mítható. Ez a terület a talált formula szerint: $\frac{a^{k+1}-x^{k+1}}{k+1}$, amint látjuk az x folytonos függvénye és ha x a 0 felé konvergál, e terület határértéke: $\frac{a^{k+1}}{k+1}$ véges, meghatározott érték, melyet magából a terület formulájából is megkaphatunk, ha egyszerűen b helyett 0-t teszünk. Azt látjuk tehát, hogy bár maga az eljárás, mely a terület meghatározására vezetett, közvetlenül nem alkalmazható, ha $b=0$, de a képleteink érvényességüket ez esetben sem vesztik el, ha $k+1>0$, vagyis ez esetben a területet mint az $\frac{a^{k+1}-x^{k+1}}{k+1}$ határértékét definiálhatjuk ($x=0$ helyen).

Hasonló megjegyzést teszünk arra az esetre vonatkozólag, midőn k negativ szám. Ez esetben az $y=x^k$ görbének az X tengely asymptotája; és ha $k+1<0$, vagyis midőn k a -1-nél kisebb szám, akkor a terület fogalmát kiterjeszthetjük arra a végtelen hosszú sávra, mely a BB_1 ordináta és a görbe, meg az X tengely közé esik. A levezetés megint nem érvényes, mert hiszen



79. ábra.

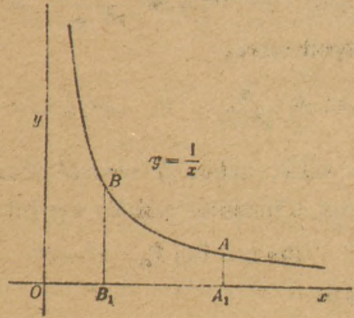
ez esetben a $bq^n=a$ egyenletnek nincs véges megoldása; de az eredmény mégis kiterjeszthető erre az esetre is. Ugyanis, ha a helyett x-et írunk, akkor azt találjuk, hogy az x abscissához tartozó ordinátával határolt terület: $t=\frac{x^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}$ és ha most x végtelenné válik, akkor $\lim_{x=\infty} t=-\frac{b^{k+1}}{k+1}$ véges, meghatározott pozitiv számérték. Ez a határérték a szóban forgó végtelen hosszú sáv területe.

4. *Példa.* Eddigelé a $k=-1$ esetet kizártuk; most ezt akarjuk tárgyalni ugyanolyan módon végezve a beosztást, mint előbb. Válasszuk a q-t úgy, hogy $bq^n=a$, miből $q=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. A $b, bq, bq^2, \ldots bq^n=a$ abscissákhoz tartozó pontokat megjelöljük. Az r-ik szakasz határpontjai: bq^{r-1} és bq^r. Minthogy a görbe egyenlete: $y=\frac{1}{x}$, tehát e szakaszra emelt derékszögű négyszögek területei:

$$\text{a külsőé: } \frac{bq^{r-1}(q-1)}{bq^{r-1}}=q-1; \quad \text{a belsőé pedig: } \frac{1}{q}(q-1)=1-\frac{1}{q}\cdot$$

Látjuk tehát, hogy a jelen esetben az egyes szakaszokra emelt belső (vagy külső) négyszögek mind egyenlő területűek. A négyszögek összes területe az első esetben: $t_n=n(q-1)$, a belső négyszögek összege: $T_n=n\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdot$

t_n illetőleg T_n határértékét kell kiszámítanunk, ha n végtelenné válik. q helyett tegyük az $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ értéket, akkor tehát először $\lim\limits_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}-1\right)$



80. ábra.

határozandó meg. Ha n végtelenné lesz, $\infty . 0$ határozatlan alakú kifejezéssel van dolgunk. De:

$$n\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}-1\right)=\frac{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}-1}{\frac{1}{n}}$$

alakban is írható és ez már $\frac{0}{0}$ határozatlan alakra vezet, melyre a l'Hospital szabályt alkalmazhatjuk. A számláló differenciálhányadosa (n szerint differenciálva): $-\frac{1}{n^2}\log\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, a nevezőé pedig: $-\frac{1}{n^2}$ és így:

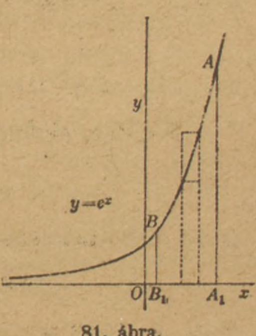
$$\lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}-1\right)=\log\frac{a}{b}.$$

Éppen így találjuk a külső derékszögű négyszögek összegéről is, hogy határértéke, ha n végtelenné válik: $\log\frac{a}{b}$; tehát:

$$\lim_{n=\infty} t_n=\lim_{n=\infty} T_n=\log a-\log b.$$

Arra az érdekes eredményre jutottunk, hogy a B_1A_1AB területe, melynek BA íve az $y=\frac{1}{x}$ egyenszárú hyperbola íve: $\log a-\log b$. Ha b gyanánt éppen 1-et választunk, akkor ez a terület: $\log a$.

5. *Példa.* Következő példa gyanánt válasszuk a B_1A_1AB idom területének meghatározását, ha a BA ív az $y=e^x$ exponenciális görbe íve.



81. ábra.

Osszuk fel a B_1A_1 közt n egyenlő részre. Mindenik rész: $\frac{a-b}{n}$. Jelöljük ezt h-val. Az r-ik rész határpontjai: $b+(r-1)h$ és $b+rh$. E végpontokhoz tartozó ordináták: $e^{b+(r-1)h}$ és e^{b+rh} és így a belső négyszög területe: $he^{b+(r-1)h}$, a külsőé: he^{b+rh}. Az előbbi jelöléseket megtartva, eszerint:

$$t_n = h\,[e^b + e^{b+h} + e^{b+2h} + \cdots + e^{b+\overline{n-1}h}],$$

$$T_n = h\,[e^{b+h} + e^{b+2h} + e^{b+3h} + \cdots + e^{b+nh}],$$

vagyis:

$$t_n = he^b\,[1 + e^h + e^{2h} + \cdots + e^{(n-1)h}] = he^b\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1} \quad \text{és} \quad T_n = he^{b+h}\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1}$$

és $nh = a - b$-t visszahelyettesítve:

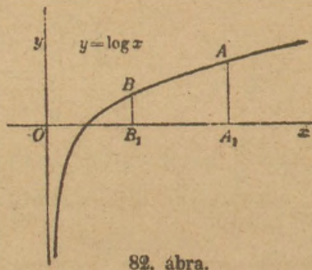
$$t_n = (e^a - e^b)\,\frac{h}{e^h-1}\,; \quad T_n = e^h \,.\, (e^a - e^b)\,\frac{h}{e^h-1}\,.$$

Ha n végtelenné válik, akkor h zérussá lesz; tehát a feladatunk a $\lim\limits_{h=0} \frac{h}{e^h-1}$ kiszámítása. A L'Hospital szabály szerint: $\lim\limits_{h=0} \frac{h}{e^h-1} = 1$ és így:

$$\lim t_n = \lim T_n = e^a - e^b.$$

Ez a keresett terület.

6. Példa. Határozzuk meg a B_1BAA_1 területet, ha BA ív az $y = \log x$ görbe íve. Legyen $OB_1 = b$, $(b > 1)$; $OA_1 = a$, $(a > b)$. Válasszunk egy n pozitiv



82. ábra.

egész számot és határozzuk meg a q pozitiv számot úgy, hogy $bq^n = a$ legyen. A B_1A_1 közbe eső: bq, $bq^2, \ldots$ bq^{n-1} pontokat jelöljük meg. Az r-ik szakasz határpontjai: bq^{r-1} és bq^r. A szakasz baloldali ordinátája: $\log b + (r-1)\log q$, a jobboldali pedig: $\log b + r \log q$.

A beírható derékszögű négyszög területe:

$$bq^{r-1}(q-1)\,[\log b + (r-1)\log q],$$

a nagyobbik négyszög területe pedig:

$$bq^{r-1}(q-1)\,[\log b + r\log q],$$

tehát:

$$t_n = b\,(q-1)\log b\,[1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}] +$$
$$+ b\,(q-1)\log q\,[q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + (n-1)\,q^{n-1}]$$

és

$$T_n = b\,(q-1)\log b\,[1 + q + \cdots + q^{n-1}] + b\,(q-1)\log q\,[1 + 2q + \cdots + nq^{n-1}].$$

A t_n-ben előforduló kifejezések közül:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{a-b}{b\,(q-1)}$$

és itt differenciálván q szerint:

$$1 + 2q + \cdots + (n-1)\,q^{n-2} = \frac{(n-1)\,q^n - nq^{n-1} + 1}{(q-1)^2},$$

tehát, ha q-val szorzunk

$$q+2q^2+3q^3+\cdots+(n-1)q^{n-1}=\frac{(n-1)q^{n+1}-nq^n+q}{(q-1)^2}=$$

$$=\frac{(n-1)qa-na+bq}{b(q-1)^2}=\frac{na(q-1)+q(b-a)}{b(q-1)^2}$$

és így:
$$t_n=(a-b)\log b+\frac{\log q}{q-1}[na(q-1)+q(b-a)]=$$

$$=(a-b)\log b+na\log q+\frac{q\log q}{q-1}(b-a),$$

vagy n helyébe a $bq^n=a$-ból: $\frac{\log a-\log b}{\log q}$-t téve:

$$t_n=(a-b)\log b+a(\log a-\log b)+\frac{q\log q}{q-1}(b-a).$$

Ha n végtelenné válik, q az 1-hez konvergál és

$$\lim_{q=1}\frac{q\log q}{q-1}=1$$

a l'Hospital szabály szerint számítva; tehát:

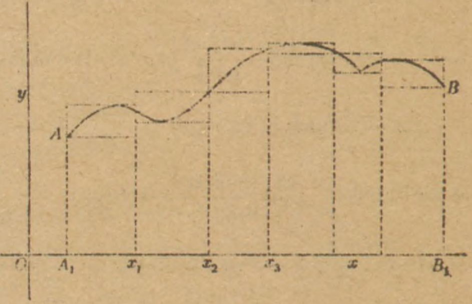
$$\lim_{n=\infty}t_n=a\log a-b\log b-(a-b).$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha $\lim\limits_{n=\infty}T_n$-et számítjuk ki. Eszerint tehát a keresett terület:

$$t=a\log a-b\log b-(a-b)=a(\log a-1)-b(\log b-1).$$

3. A határozott integrál értelmezése. Az eddigi területszámításainknál a B_1A_1 intervallumot valamiképpen felosztottuk szakaszokra és pedig vagy olyanokra, amelyek egyenlő nagyok voltak, vagy pedig oly módon történt a felosztás, hogy az osztópontoknak megfelelő abszcisszák geometriai sort alkottak. Az így keletkező szakaszokra, mint alapokra, olyan derékszögű négyszögeket állítottunk, amelyek magassága vagy az illető szakasz baloldali, vagy pedig jobboldali ordinátái voltak. Az így keletkező t_n, illetőleg T_n területek határértékét állapítottuk meg. Mindannyiszor közös határértékre jutottunk. Ezt a közös határértéket tekintettük a szóban forgó idom területének. Ehhez az eljáráshoz sok szó fér. Először is megjegyezzük, hogy a tárgyalt esetekben a görbék mindenütt monoton változtak és ebből eredt az, hogy a baloldali ordinátával alkotott négyszög az illető idomon belül volt, a jobboldali ordinátával alkotott négyszög pedig magában foglalta az illető idom megfelelő részét, vagy fordítva. Ha a görbe nem változik az egész szakaszban monoton, akkor ezt nem állíthatjuk. De egyébként is felmerülhet az a kérdés, hogy ha a B_1A_1 szakaszt másféleképpen osztottuk volna be kisebb szakaszokra, vajjon lett volna-e akkor is a t_n, illetőleg T_n területnek határértéke, és ha igen, egyenlő lett volna-e ez a két határérték? Hogy a fölvetett kérdésre általánosságban felelhessünk, tegyük fel, hogy az A_1ABB_1 területet akarjuk értelmezni, ahol az

AB vonal az $y=f(x)$ által ábrázolt görbe és $f(x)$ az A_1B_1 szakaszban mindenütt egyértékű, folytonos függvény.



83. ábra.

Mielőtt a tulajdonképpeni tárgyalásba fognánk, ismétlésképpen megjegyezzük, hogy abbeli állításunk, hogy $f(x)$ az A_1B_1 szakasz minden helyén (a határhelyeket is beleértve) folytonos, azt jelenti, hogy ha x az A_1B_1 szakasz valamely helye, akkor a tetszésszerinti ε számhoz tartozik oly δ küszöbintervallum, hogy

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad |h|<\delta,$$

megjegyezve, hogy az A_1, illetőleg B_1 határhelyeken esetleg csak egyoldali ilyen küszöbintervallum létezik. Kimutattuk már (l. 69. lap), hogy ha az $f(x)$ az A_1B_1 szakasz minden helyén folytonos (a határokon is), akkor minden ε-hoz tartozik egy bizonyos, az egész intervallumra nézve közös, 0-tól különböző δ küszöbintervallum, vagyis, hogy ha x *bármelyik* helye az A_1B_1-nek, $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$, ha $|h|<\delta$. Ez más szóval azt jelenti, hogy ha adott ε-nál az A_1B_1 szakasz minden helyéhez tartozó legnagyobb δ-kat képzeljük, akkor e δ pozitiv számok halmazának alsó határa 0-tól különbözik. Ezt az állítást röviden úgy fejeztük ki, hogy az $f(x)$ az A_1B_1 szakaszban *egyenletesen folytonos.*

Ezt az állítást egy kissé módosítjuk. Ugyanis a megadott ε helyett válasszuk a felét; és határozzuk meg az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó legnagyobb küszöbintervallumok alsó határát. Jelöljük most ezt a minimális közt, mely tehát az egész szakasznak az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó közös küszöbintervalluma: δ-val. Ha most a 2δ közt az A_1B_1-re akárhová ráhelyezzük, vagyis az A_1B_1-en akárhol $C_1D_1=2\delta$ közt jelölünk meg és e C_1D_1-nek bármely két helyét szemeljük is ki, pl.: x_1-et és x_2-t, akkor az ezekhez tartozó függvényértékek egymástól ε-nál kevesebbel különböznek; azaz $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Ugyanis, ha a C_1D_1 kis, 2δ nagyságú szakasz közepét vesszük, pl.: az x helyet, akkor a δ értelmezése szerint úgy az $|f(x)-f(x_1)|$, valamint az $|f(x)-f(x_2)|$ az $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebbek: azaz:

$$f(x)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_1)<f(x)+\frac{\varepsilon}{2};\quad f(x)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_2)<f(x)+\frac{\varepsilon}{2}$$

és e két egyenlőtlenségből következik, hogy:

$$-\varepsilon<f(x_1)-f(x_2)<\varepsilon,$$

vagyis $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Látjuk ebből a megjegyzésből, hogy ha ε tetszésszerint megadatik, találunk egy hozzátartozó 2δ nagyságú közt, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy *bármely* két x_1 és x_2 helyen, melyek egymástól e 2δ-nál kevesebbel térnek el, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Evégből nem kellett egyebet tennünk, mint az adott ε feléhez, az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozó közös küszöbintervallumot választani δ gyanánt.

Ezt a tényt még egyszerűbben is kifejezhetjük. Ha ugyanis egy bizonyos szakaszban $f(x)$ függvény maximumát M-el, minimumát m-el jelöljük (a maximumát és minimumát $f(x)$ tényleg föl is veszi, mert folytonos) és a kettő különbségét az $M-m$-et ω-val jelöljük és az $f(x)$ függvény e szakaszbeli *ingadozásának* nevezzük, akkor az előbbi állítás röviden úgy fejezhető ki, hogy ha $f(x)$ mindenütt folytonos, akkor *bármely ε-hoz tartozik oly Δ küszöbintervallum, hogy az A_1B_1 bármely Δ nagyságú szakaszában az ingadozás ε-nál kisebb legyen.*

Ezen előzetes megjegyzések után fogjunk hozzá a szóban forgó területszám értelmezéséhez.

Osszuk fel az A_1B_1 szakaszt tetszésszerinti módon az A_1 és B_1 közé iktatott $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ abscissájú pontokkal. Az A_1 abscissája legyen $x_0=a$, a B_1-é pedig $x_n=b$.

Legyen az első szakaszban $f(x)$ maximuma M_1, minimuma m_1 (az előbbi pontban tárgyalt esetekben m_1 és M_1 mindig a szélső ordinátákat jelentették). A második $x_1 \ldots x_2$ szakaszban $f(x)$ maximuma M_2, minimuma m_2; s í. t. az i-ik, azaz $x_{i-1} \ldots x_i$ szakaszban a maximum M_i, a minimum m_i.

Alkossuk meg a következő összegeket:

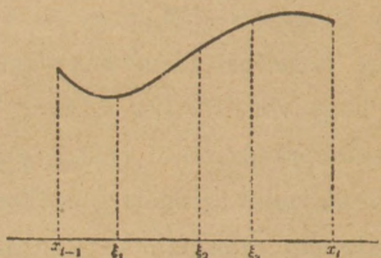
$$S_1=M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(b-x_{n-1});$$
$$s_1=m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_n(b-x_{n-1}).$$

(Geometriai értelme ennek az eljárásnak megint az, hogy S_1 olyan derékszögű négyszögek összes területe, melyek egy része a szóban forgó területből kinyúlik és s_1 azoké, melyek az illető idomba bele vannak rajzolva.)

Most sűrítsük a beosztást oly módon, hogy minden egyes szakaszt ismét beosztunk. Hogy a viszonyokat jobban feltüntethessük, az i-ik szakaszt külön kirajzoljuk az új beosztásával. Legyenek az i-ik szakasz új osztópontjai:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{m-1}$$

és készítsük el az így keletkező új beosztásnak megfelelő S és s összegeket, melyeket S_2 és s_2-vel fogunk jelölni.



84. ábra.

Jelöljük az $x_{i-1} \ldots \xi_1$ szakaszban az $f(x)$ maximumát M_{i1}-gyel, minimumát m_{i1}-gyel; a következő $\xi_1 \ldots \xi_2$ részben a maximum M_{i2}, a minimum m_{i2}, s í. t.

Emlékeztetünk arra, hogy az egész $x_{i-1} \ldots x_i$ szakaszban az $f(x)$ maximuma M_i, minimuma m_i. A szakasz egyes részeiben a maximum nyilván nem lehet nagyobb az egész szakaszra vonatkozó maximumnál és a minimum nem lehet kisebb az egész szakaszra vonatkozó minimumnál. Vagyis $M_{i1}, M_{i2}, M_{i3}, \ldots$ mindannyian kisebbek M_i-nél (vagy legfölebb egyenlők vele) és $m_{i1}, m_{i2}, \ldots$ mind nagyobbak m_i-nél (vagy legfölebb egyenlők vele).

Az előbb kiszámított S_1-ben az i-ik szakaszhoz tartozó rész volt: $M_i(x_i - x_{i-1})$. Most az új beosztásnak megfelelő S_2 összegben ezen tag helyébe lép a következő:

$$M_{i1}(\xi_1 - x_{i-1}) + M_{i2}(\xi_2 - \xi_1) + M_{i3}(\xi_3 - \xi_2) + \cdots + M_{im}(x_i - \xi_{m-1}).$$

Ez az összeg nem nagyobb, mint $M_i(x_i - x_{i-1})$, mert hiszen, ha $M_{i1}, M_{i2}, \ldots$ helyébe a nagyobb M_i-t tennők, akkor lenne ez az összeg

$$M_i\,[\xi_1 - x_{i-1} + \xi_2 - \xi_1 + \xi_3 - \xi_2 + \cdots + x_i - \xi_{m-1}] = M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Ebből következik, hogy az uj beosztásnak megfelelő S_2 összeg nem nagyobb S_1-nél.

Egészen hasonló módon győződünk meg arról, hogy a minimális értékekkel megalkotott s_2 viszont nem lehet kisebb az s_1-nél. Vagyis: $S_2 \leq S_1$; $s_2 \leq s_1$.

Most ismét sűrítsük a beosztást oly módon, hogy megint minden szakaszt kisebb részekre osztunk. Megalkotjuk a maximális ordinátákkal az S_3 összeget és a minimális ordinátákkal az s_3-at. Megint azt találjuk, hogy $S_3 \leq S_2$, $s_3 \geq s_2$.

Így folytatjuk ezt az eljárást. Ezzel tehát egyrészt az

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$$

csökkenő, másrészt az

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$$

növekedő számsort kapjuk. Mindkét számsorozat korlátos. Ugyanis, ha az egész A_1B_1 szakaszban az $f(x)$ minimuma m, akkor nyilván bármelyik S összeg nagyobb $m(b-a)$-nál és ha az A_1B_1 szakaszban az $f(x)$ maximuma M, minden s összeg kisebb $M(b-a)$-nál.

Következésként mindkét sorozat szabályos sorozat, mindkettőnek van véges határértéke. Jelöljük az elsőt S-el, a másodikat s-el; azaz $\lim S_n = S$, $\lim s_n = s$.

Hátra van még annak a megmutatása, hogy ha a beosztásokat oly módon sűrítettük, hogy minden egyes rész elenyésző csekéllyé válik, akkor $S = s$.

Evégből csak azt kell megmutatni, hogy ilyen beosztás mellett elmehetünk a két sorozatban olyan messzire, hogy azon túl minden $S_n - s_n$ kisebb lesz egy tetszésszerint megadott ε-nál, vagyis, hogy $\lim (S_n - s_n) = 0$.

Adatik tehát egy tetszésszerinti kis ε szám. Alkossuk meg ebből az $\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon'$ számot és keressük meg az $f(x)$ függvénynek $\frac{\varepsilon'}{2}$-hez tartozó küszöbintervallumát az egész ab szakaszra vonatkozólag. Legyen ez δ. Akkor, az iménti előzetes megjegyzésünk szerint, minden 2δ nagyságú intervallumban az $f(x)$ ingadozása (maximuma és minimuma közti különbsége) kisebb az ε'-nál.

Menjünk el a folytatólagos (consecutiv) beosztásokkal olyan messzire, hogy minden egyes szakasz kisebb legyen a 2δ-nál; vagy, ami ezzel egyenlő értékű állítás, a szakaszok szélességének felső határa 2δ-nál kisebb. Ez minden esetre elérhető, mert azt mondottuk, hogy olyan beosztásokat készítünk, melyek elenyésző csekély szélességűekké válnak, vagyis a szakaszok szélességeinek felső határa minden számnál kisebbé válik a fokozatos beosztások alatt; tehát minden esetre elmehetünk a beosztások sorában olyan messzire, hogy minden szakasz kisebb lesz a 2δ-nál.

Tegyük fel, hogy a N-ik beosztás már ilyen; akkor tehát, ha $n > N$, úgy a S_n, mint a s_n összegben szereplő összes $x_i - x_{i-1}$ szakaszok kisebbek a 2δ-nál és így e szakaszokban az összes ingadozások kisebbek ε'-nál. Legyenek az n-ik beosztásnak megfelelő S_n, illetőleg s_n összegek ezek:

$$S_n = M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_i(x_i-x_{i-1})+\cdots+M_k(b-x_{k-1}),$$
$$s_n = m_1(x_1-a)+\cdots+m_k(b-x_{k-1}),$$

ahol $k-1$ az osztópontok száma. Innen:

$$S_n - s_n = (M_1-m_1)(x_1-a)+(M_2-m_2)(x_2-x_1)+\cdots+(M_k-m_k)(b-x_{k-1}).$$

De az M_1-m_1, $M_2-m_2, \ldots M_k-m_k$ ingadozások mindannyian kisebbek az ε'-nál, tehát

$$S_n - s_n < \varepsilon'[x_1-a+x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots+b-x_{k-1}] = \varepsilon'(b-a) = \varepsilon.$$

Ezzel kimutattuk, hogy az $S_1, S_2, \ldots$ és $s_1, s_2, \ldots$ sorozatokban az N-iken túl levő tagok különbsége a tetszésszerint megadott ε-nál kisebbek, vagyis az S_1-s_1, S_2-s_2, $S_3-s_3, \ldots$ sorozat 0 sorozat (az ε-hoz tartozó küszöbszám N) és így $\lim\limits_{n=\infty}(S_n-s_n)=0$; de $\lim S_n = S$ és $\lim s_n = s$, következésképpen: $S=s$.

Ezzel megmutattuk, *hogy ha $f(x)$ az ab intervallumban folytonos, akkor az*

$$S_n = M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_k(b-x_{k-1})$$

és

$$s_n = m_1(x_1-a)+\cdots+m_k(b-x_{n-1})$$

összegek, ha a folytatólagos beosztások oly módon sűríttetnek, hogy minden szakasz elenyésző csekéllyé válik, egy és ugyanazon határértékhez konvergálnak.

Ezt a közös határértéket így jelöljük:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

és az $f(x)$ *függvény a és b határok közti integráljának* (határozott integráljának) nevezzük. $f(x)$ az integrandus, a és b az integrál határai. Ezzel az eljárással tehát az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

határozott integrált értelmeztük azon esetben, midőn $f(x)$ folytonos függvény. Az így értelmezett $S=s$ számérték egyúttal az $y=0$, $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ vonalakkal határolt terület mértékszámát jelentse.

[De ehhez az eljáráshoz még egy megjegyzést kell fűznünk. Az $S_1, S_2, S_3, \ldots$, illetőleg $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sorozatokat úgy alkottuk meg, hogy kiindulva egy bizonyos, teljesen önkényes beosztásból, ezen beosztás egyes részeit újból részekre osztottuk. (Ezt a beosztási módot mondtuk folytatólagos, consecutiv beosztásnak.) Az így keletkezett újabb szakaszokat ismét részekre osztottuk s í. t.; szóval mindig consecutiv beosztással haladtunk előre. Kérdés, ha nem így járnánk el, hanem más módon osztanók be az ab intervallumot, megtartva természetesen, hogy az egyes szakaszok elenyésző kicsinyekké válnak, vájjon ugyanezen határértékhez jutnánk-e? Minthogy e vizsgálatok nemcsak folytonos függvényekre érvényes eredményeket szolgáltatnak, azért a kérdést általánosabban tárgyaljuk.

Legyen tehát $f(x)$ egy tetszésszerinti függvény, melyről egyebet nem teszünk fel, mint azt, hogy az ab intervallumban korlátos és ennek minden helyén pozitiv.

Osszuk fel az ab szakaszt részekre, miként előbb tettük, az $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ pontokkal. Az $f(x)$ minden szakaszban véges poz. értékeket vesz fel. Az i-ik szakaszban felvett értékhalmazának felső határát jelöljük M_i-vel, alsó határát m_i-vel. Most nem mondhatjuk, hogy M_i és m_i maximális, illetőleg minimális értékek. Megalkotjuk megint ezeket az összegeket:

$$S_1 = M_1(x_1-a) + M_2(x_2-x_1) + \dots + M_n(b-x_{n-1});$$
$$s_1 = m_1(x_1-a) + m_2(x_2-x_1) + \dots + m_n(b-x_{n-1}).$$

Akárminő legyen is a beosztásunk, a vele megalkotott S összeg kisebb $M(b-a)$-nál és nagyobb $m(b-a)$-nál, ha M az egész ab intervallumbeli felső határ és m az egész ab intervallumban fölvett függvényértékek felső határa. Éppen így mondhatjuk, hogy bármiképpen történjék is az intervallum beosztása, az s összegek mindannyian szintén az $M(b-a)$ és $m(b-a)$ közé esnek.

Minden beosztásnak megfelel egy S szám. E számok összessége az $M(b-a)$ és $m(b-a)$ közé eső számhalmaz. Ennek a halmaznak az *alsó határát* jelöljük Σ-val. Tudjuk, ez azt jelenti, hogy az S számok között Σ-nál kisebb nincsen, de ha ε tetszésszerinti poz. szám, akkor $\Sigma+\varepsilon$ és Σ között mindenesetre van a halmaznak eleme, vagyis mindenesetre van olyan beosztás, amellyel megalkotott S összeg Σ és $\Sigma+\varepsilon$ közé esik.

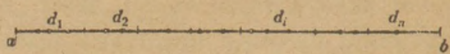
Éppen így az összes képzelhető beosztásoknak megfelelő s összegek oly halmazt alkotnak, melynek elemei mind az $m(b-a)$ és $M(b-a)$ közé esnek. E halmaz *felső határát* jelöljük σ-val. Ez azt jelenti, hogy az s számok halmazában σ-nál nagyobb szám nincs; de ha ε tetszésszerinti poz. szám, akkor mindenesetre van olyan beosztás, melynek megfelelő s összeg $\sigma-\varepsilon$ és σ közé esik.

Azt állítjuk már most, hogy ha a beosztások szélességét elég kicsinyre választjuk, akkor minden beosztásnak megfelelő S összeg végtelen csekéllyel tér el a Σ-tól. Pontosabban kifejezve ez azt jelenti, hogy ha tetszésszerinti kis pozitiv ε számot adnak, ehhez tartozik egy λ küszöbintervallum, úgy, hogy ha az ab szakaszt *bármiképpen* olyan $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ részszakaszokra osztjuk, melyek mindannyian kisebbek a λ-nál (azaz maximum $\delta < \lambda$) és ezen szakaszokkal kiszámítjuk az $M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + M_3\delta_3 + \cdots = S$ összeget, $S - \Sigma < \varepsilon$ lesz. Ebben az állításban gyökerezik a Σ alsó határ jelentősége.

Ezt az állítást a következőképpen bizonyíthatjuk. A Σ az összes S összegek alsó határa, tehát van olyan beosztása az ab intervallumnak, melyhez olyan S_1 összeg tartozik, mely a Σ és $\Sigma + \frac{\varepsilon}{2}$ közé esik. Legyen ilyen beosztás az, amely az ab intervallumot a $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$ szakaszokra osztja. Eszerint tehát:

$$S_1 = M_1 d_1 + M_2 d_2 + \cdots + M_n d_n$$

és
$$\Sigma \leq M_1 d_1 + M_2 d_2 + \cdots + M_i d_i + \cdots + M_n d_n < \Sigma + \frac{\varepsilon}{2}.$$



86. ábra.

Most osszuk be az ab szakaszt más módon. Az ábrán az S_1-nek megfelelő beosztások határhelyeit kis vonáskák, az új beosztás határait köröcskék jelölik. Az új beosztásban kétféle részeket különböztetünk meg. Olyanokat, melyek egészen a régi szakaszokban vannak, mondjuk belső szakaszokat, és olyanokat, melyek határpontjai különböző szakaszokba esnek, mondjuk: átugró szakaszokat. Ilyen átugró szakasz legfölebb $n-1$ van. Mondjuk, hogy a d_i szakaszba eső belső szakaszok legyenek: $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \ldots$ és mondjuk, hogy az átugró szakaszok legyenek: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$

Alkossuk most meg az új beosztásnak megfelelő S összeget. Jelöljük a δ_{i1} szakaszban az $f(x)$ felső határát M_{i1}-gyel, a δ_{i2}-ben a felső határt M_{i2}-vel s í. t.; továbbá a $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ átugró szakaszokban a felső határok $M', M'', M''', \ldots$ akkor a megfelelő S összeg, melyet S'-al jelölünk:

$$S' = \cdots + M_{i1}\delta_{i1} + M_{i2}\delta_{i2} + M_{i3}\delta_{i3} + \cdots + M'\delta_1 + M''\delta_2 + M'''\delta_3 + \cdots,$$

ahol az első rész a belső szakaszokra, a második pedig az átugró szakaszokra vonatkozik.

S' helyett nagyobb számot készítünk a következő módon: $M_{i1}, M_{i2}, M_{i3}, \ldots$ helyett, melyek mind az előbbi d_i szakasz részeihez tartozó felső határok, M_i-t teszünk, mely az egész d_i szakaszban felvett függvényértékek felső határa; továbbá, minthogy a $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots$ belső szakaszok esetleg nem töltik ki a d_i szakaszt (ha ugyanis átugró szakasz is van), a jobbról és balról hiányzó szakaszokat M_i-vel szorozva még hozzátesszük az S' ezen részéhez. Ezzel a fölírt első rész helyébe $M_i d_i$ került. Éppen így teszünk mindenik szakasszal, vagyis az S' első része ekkor $M_1d_1+M_2d_2+\cdots+M_nd_n=S_1$ lett. Most a második, az átugró szakaszokra vonatkozó részt nagyobbítjuk. M', M'', M''',... helyett az egész ab intervallumra vonatkozó M felső határt tesszük. Az új szakaszok maximális szélességét jelöljük λ-val és δ_1, δ_2, δ_3,... helyett tegyük λ-t. Az átugró szakaszok száma legfölebb $n-1$. A második rész helyett a nagyobb $nM\lambda$ szorzatot tegyük. Ezzel az eljárással az S' összeget nagyobbítottuk, tehát

$$S'<S_1+nM\lambda.$$

Az n meghatározott, ismeretes számérték; jelenti az S_1 számításánál használt d_1, d_2, d_3,... részek számát. M jelenti az $f(x)$ felső határát az ab intervallumban. λ fölött tetszésszerint rendelkezünk.

Válasszuk már most a λ számot úgy, hogy $nM\lambda<\frac{\varepsilon}{2}$ legyen, azaz $\lambda<\frac{\varepsilon}{2nM}$. Ekkor tehát $S'<S_1+\frac{\varepsilon}{2}$. Másrészt azonban S'-ről tudjuk, hogy Σ-nál nagyobb, mert hiszen Σ az összes S-ek alsó határa. Így tehát $0<S'-\Sigma<S_1+\frac{\varepsilon}{2}-\Sigma$; De $S_1-\Sigma<\frac{\varepsilon}{2}$, tehát:

$$S'-\Sigma<\varepsilon.$$

Kimutattuk tehát, hogy *ha csak λ, a szakaszok maximális szélessége, $\frac{\varepsilon}{2nM}$-nél kisebb, akkor bármely beosztással előállított S' összeg a Σ-tól ε-nál kevesebbel különbözik.*

Hogy ezt a nevezetes gondolatmenetet jól áttekinthessük, röviden ismételjük, hogy Σ az összes beosztásoknak megfelelő S összegek számhalmazának alsó határa. Adatik egy tetszésszerinti ε szám. Készítünk egy olyan beosztást, amelynek megfelelő S_1 összeg a Σ és $\Sigma+\frac{\varepsilon}{2}$ közé essék. Ilyen mindenesetre van, mert Σ az S számok alsó határa. Az ehhez szükséges osztórészek száma legyen n. Ha már most olyan tetszésszerinti beosztást készítünk, melyben minden egyes szakasz kisebb az $\frac{\varepsilon}{2nM}$-nél, akkor mindig olyan S összeget kapunk, mely Σ és $\Sigma+\varepsilon$ közé esik.

Ugyanilyen módon tüntethető fel a σ felső határ jelentősége. Adatik egy poz. ε szám. Vegyük a felét és készítsünk egy beosztást úgy, hogy a vele alkotott $s_1=m_1d_1+m_2d_2+\cdots+m_nd_n$ a $\sigma-\frac{\varepsilon}{2}$ és σ közé essék. Ilyen mindenesetre van, mert hiszen σ az s számhalmaz felső határa. És most osszuk fel az ab intervallumot másképpen, egészen tetszésünk szerint. Lesznek belső szakaszok és átugrók. Így például a d_i-be eső belső szakaszok: $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots$ és az átugró szakaszok, melyek száma n-nél kisebb: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ Eme beosztással készítsük el az

$$s' = \cdots + m_{i1}\delta_{i1} + m_{i2}\delta_{i2} + \cdots + m'\delta_1 + m''\delta_2 + m'''\delta_3 + \cdots$$

összeget, ahol az $m_{i1}, m_{i2}, \ldots$, valamint $m', m'', \ldots$ értelme az előbbiekhez analog. Az s' összeget kisebbítjük avval, hogy $m_{i1}, m_{i2}, \ldots$ helyett a kisebb m_i-t tesszük. Ha a belső szakaszok nem töltik ki a régi d_i szakaszt, a hiányt még m_i-vel szorozva hozzáadjuk az s'-hez. Így például, ha a $\delta_{i1} + \delta_{i2} + \cdots < d_i$-nél, akkor a hiányzó $\varDelta_i$ (esetleg két részből álló) szakaszt m_i-vel szorozva még hozzáadjuk a régi i-ik szakaszból eredő összeghez. Ezzel az s'-et az ilyen $m_i\varDelta_i$ alakú tagokkal nagyobbítottuk. Ezzel a d_i belső szakaszaiból eredő $m_{i1}\delta_{i1} + m_{i2}\delta_{i2} + \cdots$ helyébe $m_i d_i$ került, vagyis az s' összeg első része helyett s_1. De megjegyezzük, hogy az $m_i\varDelta_i$ alakú tagok hozzácsatolásával nagyobbítás is történt. Hogy az s' kisebbíttessék, e hozzáadott számnál nagyobbat levonunk. A $\varDelta_i$ részek összege voltaképpen nem más, mint az átugró szakaszok terjedelme; azaz $\Sigma\varDelta_i = \Sigma\delta_i$. Minden m_i kisebb az egész ab intervallumra vonatkozó M felső határnál; tehát a hozzáadott $\Sigma m_i\varDelta_i$ rész ellensúlyozására $M\Sigma\varDelta_i = M\Sigma\delta_i$-t levonjuk. Sőt ennél többet. Ugyanis jelöljük az új beosztás maximumát λ-val, akkor $\Sigma\delta_i < n\lambda$. Levonunk az $M\Sigma\delta_i$ helyett $nM\lambda$-t és még elhagyjuk az s'-ban szereplő második részt, amely az átugró szakaszokból eredt. Eszerint tehát:

$$s' > s_1 - nM\lambda.$$

Válasszuk a λ-t úgy, hogy $nM\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen, ekkor tehát

$$s' > s_1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és minthogy} \quad s_1 > \sigma - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{tehát} \quad s' > \sigma - \varepsilon.$$

Az s'-ről tudjuk, hogy σ-nál kisebb és most meg azt látjuk, hogy $\sigma - \varepsilon$-nál nagyobb, tehát kimondhatjuk, hogy *hacsak az egyes szakaszok λ-nál kisebbek, akkor minden ilyen beosztásra vonatkozó s összegek $\sigma - \varepsilon$ és σ közé esnek. Ebből kitűnik a σ szám jelentősége.*

Bármely korlátos $f(x)$ függvényhez tartozik tehát az ab szakaszra vonatkozólag két nevezetes szám: Σ és σ. Az első az S öszszegek alsó határa, a második az s összegek felső határa. Az elsőt az $f(x)$ felső integráljának, a másodikat az $f(x)$ alsó integráljának nevezzük (intégrale par excès és par défaut) és az elsőt így jelöljük: $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, a másodikat így: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Még megmutatjuk azt is, hogy általában $\Sigma > \sigma$. Ugyanis, tegyük fel az ellenkezőt, vagyis azt, hogy $\Sigma < \sigma$. A $\sigma - \Sigma$ különbség legyen a pozitiv α. Az előbbiek szerint a beosztást annyira előrehaladtnak képzelhetjük, hogy ha csak minden osztásrész kisebb egy d köznél, akkor az

$$S=M_1d_1+M_2d_2+\cdots<\Sigma+\frac{\alpha}{3} \quad \text{és} \quad s=m_1d_1+m_2d_2+\cdots>\sigma-\frac{\alpha}{3},$$

vagyis:
$$\Sigma>S-\frac{\alpha}{3}, \quad \sigma<s+\frac{\alpha}{3},$$

tehát:
$$\sigma-\Sigma<s-S+\frac{2\alpha}{3}.$$

De
$$s-S=d_1(m_1-M_1)+d_2(m_2-M_2)+\cdots<0$$

és így: $\sigma-\Sigma<\frac{2\alpha}{3}$, ami ellenkezik azzal, hogy $\sigma-\Sigma=\alpha$. Így tehát $\Sigma\geq\sigma$. Még egy fontos megjegyezni valónk van. Ha az egyes szakaszokban tetszés szerinti helyeket jelölünk meg; pl. az i-ik szakaszban a ξ_i helyet, akkor nyilván:

$$m_i\leq f(\xi_i)\leq M_i,$$

tehát:
$$f(\xi_1)\,d_1+f(\xi_2)\,d_2+\cdots\leq M_1d_1+M_2d_2+\cdots$$

és
$$f(\xi_1)\,d_1+f(\xi_2)\,d_2+\cdots\geq m_1d_1+m_2d_2+\cdots$$

Ebből következik, hogy akárminő kicsiny legyen is az ε, a beosztással annyira haladhatunk, hogy

$$\sigma-\varepsilon<f(\xi_1)\,d_1+f(\xi_2)\,d_2+\cdots<\Sigma+\varepsilon$$

legyen, ha csak $\max d_i<d$.

Ha $\Sigma=\sigma$, akkor azt mondjuk definicióképpen, hogy az $f(x)$ az ab intervallumban *integrálható függvény*.

Ha ezt a közös számértéket Σ-val jelöljük, akkor tehát ilyen esetben, akárminő kicsiny legyen is az ε, ha csak az osztórészek maximumát egy bizonyos d-nél kisebbre választjuk:

$$\Sigma-\varepsilon<M_1d_1+M_2d_2+\cdots<\Sigma+\varepsilon$$

és éppen így:
$$\Sigma-\varepsilon<m_1d_1+m_2d_2+\cdots<\Sigma+\varepsilon.$$

E két egyenlőtlenségben foglalt állítást, vagyis azt, hogy úgy az S, mint a s összegek a $\Sigma+\varepsilon$ és $\Sigma-\varepsilon$ közé esnek, ha az osztórészeket elég kicsinyekre választjuk, röviden így írjuk:

$$\lim\,(M_1d_1+M_2d_2+\cdots)=\lim\,(m_1d_1+m_2d_2+\cdots)=\Sigma.$$

Ha az egyes szakaszokban megint $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ közbenső helyeket jelöljük meg, akkor nyilván az előbb említett $f(\xi_1)\,d_1+f(\xi_2)\,d_2+\cdots$ összegről is elmondhatjuk, hogy

$$\Sigma-\varepsilon<f(\xi_1)d_1+f(\xi_2)d_2+\cdots<\Sigma+\varepsilon,$$

vagyis rövidebben írva:

$$\lim\left(f(\xi_1)d_1+f(\xi_2)d_2+\cdots\right)=\Sigma.$$

Mindezek az eredmények érvényesek akkor is, ha $f(x)$ akármilyen jelű értékeket vesz fel. $f(x)$ pozitiv voltát csak a hibák kényelmesebb megbecsülése kedvéért tettük fel. De ha $f(x)$ nem mindenütt pozitiv, akkor is $f(x)+C$, ha C már elég nagy, pozitiv és így minden előbbi egyenlőtlenség először $f(x)+C$-re írható fel, ahonnan következik a megfelelő egyenlőtlenség $f(x)$-re.]

[4. **Az integrálhatóság feltétele.** Jelöljük a $d_1, d_2, d_3, \ldots$ szakaszokban az $M_1-m_1, M_2-m_2, M_3-m_3, \ldots$ különbségeket, melyeket az illető szakaszbeli ingadozásoknak neveztünk, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$-al és az $\omega_1 d_1+\omega_2 d_1+\omega_3 d_3+\cdots$ összeget Ω-val.

Azt állítjuk már most, hogy ha $\Sigma=\sigma$, akkor $\lim\Omega=0$ és fordítva, ha $\lim\Omega=0$, akkor $\Sigma=\sigma$; vagyis az integrálhatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\lim\Omega=0$ legyen. Ez a limes úgy értendő, hogy ha egy tetszésszerinti kis ε poz. szám adatik, akkor megállapítható hozzá egy λ küszöbintervallum, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy ha bárminő módon osszuk is be az ab intervallumot $d_1, d_2, d_3, \ldots$ szakaszokra, ha csak e szakaszok mind kisebbek a λ-nál, akkor az $\omega_1 d_1+\omega_2 d_2+\cdots<\varepsilon$.

Először kimutatjuk, hogy ha $\Sigma=\sigma$, akkor $\lim\Omega=0$. Adatik egy tetszésszerinti kis ε. Vegyük a felét. Az előbbiek szerint az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozik egy λ küszöbintervallum oly módon, hogy ha minden osztásrész kisebb a λ-nál, akkor bárminő beosztással keletkező S összegek már a Σ és $\Sigma+\frac{\varepsilon}{2}$ közé esnek. Éppen így az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozik egy más λ' küszöbintervallum úgy, hogy ha csak a beosztások szélessége λ'-nál kisebb, minden s összeg a σ és $\sigma-\frac{\varepsilon}{2}$ közé esik. Válasszuk a λ és λ' közül a kisebbiket. Jelöljük ezt λ-val. Ha már most az osztásrészek mindannyian kisebbek λ-nál, akkor mindenkor:

$$\Sigma<M_1 d_1+M_2 d_2+M_3 d_3+\cdots<\Sigma+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sigma-\frac{\varepsilon}{2}<m_1 d_1+m_2 d_2+m_3 d_3+\cdots<\sigma.$$

Föltételünk szerint $\Sigma=\sigma$; tehát

$$(M_1-m_1)d_1+(M_2-m_2)d_2+(M_3-m_3)d_3+\cdots<\varepsilon,$$

azaz, bárminő beosztás legyen is a $d_1, d_2, d_3, \ldots$, ha csak szakaszai λ-nál kisebb szélességüek, az Ω mindig kisebb az ε-nál, tehát ha $\Sigma=\sigma$, $\lim \Omega=0$.

Most fordítva, mutassuk meg, hogy ha $\Sigma \neq \sigma$, akkor $\lim \Omega$ nem lehet 0. Ez úgy értendő, hogy ha $\Sigma \neq \sigma$, akkor létezik egy oly véges α szám, hogy $\Omega > \alpha$, bárminő kicsinyek legyenek is a beosztások.

Tegyük fel tehát, hogy $\Sigma \neq \sigma$. Minthogy minden S összeg nagyobb Σ-nál és minden s kisebb σ-nál, tehát bárminő beosztást vegyünk is:

$$S-s>\Sigma-\sigma,$$

azaz

$$\omega_1 d_1+\omega_2 d_2+\omega_3 d_3+\cdots>\Sigma-\sigma$$

és így nem lehet $\lim \Omega=0$. Ezzel kimutattuk, hogy az *integrálhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy* $\lim \Omega=0$ *legyen.*]

[5. **Az integrálhatósági feltétel átalakítása.** Láttuk, hogy az $f(x)$ függvény az ab intervallumban akkor és csakis akkor integrábilis (azaz $\Sigma=\sigma$), ha a $\lim \Omega=0$. Ezt a kriteriumot *Riemann*-féle integrálhatósági kriteriumnak nevezzük.

Riemann ezt a kriteriumot könnyebben kezelhető alakra is hozta. Ennek a megértése végett megemlítjük, hogy ha $f(x)$ folytonos az ab-ben, a Riemann-kriterium mindenesetre teljesítve van, mert hiszen bármilyen pozitiv ε számhoz megállapítható olyan δ szakasz, hogy az ingadozás minden ennél keskenyebb szakaszban ε-nál kisebb legyen. Ha ε helyett $\frac{\varepsilon}{b-a}$-t választjuk és az ehhez tartozó küszöbintervallumot δ-val jelöljük, akkor, ha már minden szakasz kisebb δ-nál:

$$\omega_1 d_1+\omega_2 d_2+\omega_3 d_3+\cdots<\frac{\varepsilon}{b-a}(d_1+d_2+d_3+\cdots)=\varepsilon,$$

vagyis valóban a $\Sigma\omega_i d_i<\varepsilon$, tehát $\lim \Omega=0$. A függvény folytonossága még abban is nyilvánul, hogy ha a szakaszokat elég kicsinyeknek választjuk, akkor egy bizonyos megadott α-nál nagyobb ingadozás egyetlen egy szakaszban sem lehetséges. És ha bárminő kis szám is az α, mindig választhatók a szakaszok olyan kicsinyeknek, hogy egyetlen szakaszban sincs α-nál nagyobb ingadozás.

Nem így van a dolog azon esetben, ha $f(x)$ nem folytonos. Így például, ha $f(x)$ gyanánt az $E(x)$ függvényt választjuk, mely az x-ben levő legnagyobb egész számot jelenti és az ab intervallum pl.: a $0\ldots4$ köz, akkor az 1, 2, 3 helyeken mindenütt ugrása van az $f(x)$-nek; mert pl.: minden $0\ldots1$ közötti x-re nézve $E(x)=0$ és minden $1\ldots2$ közötti x esetében $E(x)=1$ s í. t. Ha tehát bármiképpen osztjuk is fel szakaszokra a $0\ldots4$ közt, mindazon (1-nél kisebb szélességű) szakaszokban, melyekben az 1, 2, vagy 3 hely benne van, (de nem szélső hely), az $f(x)$ ingadozása 1. Ha tehát α bármely 1-nél kisebb szám, akkor nem mondhatjuk úgy, mint előbb, hogy olyan intervallum, amelyben az ingadozás α-nál nagyobb, a beosztások kellő sűrítése mellett, egyáltalában nincs.

De itt mindössze három szakadáshely van; tehát ha a szakaszokat elég kicsinyekké tettük, akkor azon szakaszok terjedelme, amelyekben egyáltalában ugrás van, vagyis, amelyekben az ingadozás az α-nál nagyobb, elenyésző kicsinnyé tehető. És éppen ezt állítjuk most egész általánosan:

Ha azon szakaszok terjedelme, melyekben az ingadozás α-nál nagyobb, végtelen kicsinnyé tehető, bárminő szám legyen is az α, akkor az $f(x)$ integrálható. Ellenkező esetben nem integrálható.

Azt jelenti ez más szóval, hogy ha bármely kis α-hoz be tudjuk osztani az ab intervallumot oly módon, hogy azon intervallumok összes terjedelme, melyekben az ingadozás α-nál nagyobb, egy tetszésszerint megadott kis η-nál kisebb legyen, akkor az $f(x)$ integrálható. Ha ellenben van egy olyan α szám, melyre nézve ez nem lehetséges, azaz, ha bárhogyan osztjuk is be az ab intervallumot, az α-nál nagyobb ingadozású helyek terjedelme egy bizonyos véges β-nál mindig nagyobb lesz, akkor az $f(x)$ nem integrábilis az ab intervallumban.

Kimutatjuk, hogy ezen állítások æquivalensek a Riemann-féle integrálhatósági kriteriumokkal. Vagyis, hogy az első esetben $\lim \Sigma\omega_i d_i = 0$ és a másodikban ez nem igaz. Hogy az első esetben $\lim \Sigma\omega_i d_i = 0$, az be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy egy tetszésszerinti kis ε-hoz tartozik oly λ, hogy $\Sigma\omega_i d_i < \varepsilon$, ha max. $d < \lambda$. Adatik tehát ε. A beosztásokat sűrítsük annyira, hogy azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-nál nagyobb, $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$-nél kisebb legyen, ahol M és m az $f(x)$-nek az egész ab intervallumra vonatkozó felső, illetőleg alsó határai.

E beosztásnál tehát az intervallumok egy részében az ingadozás $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-nél kisebb, egy más részében, melynek összes terjedelme azonban $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$-nál kisebb, az ingadozás $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-nál nagyobb.

A $\Sigma\omega_i d_i$ összeg már most így képzelhető. Azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-nál nagyobb, kisebb $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$-nél; tehát, ha a megfelelő ω_i ingadozás helyett $M-m$-et mondanánk, mely mindenesetre nagyobb az illető szakaszbeli ingadozásnál, akkor mindezen $\omega_i d_i$ szorzatok összege helyett $\frac{\varepsilon}{2(M-m)} \cdot (M-m)$-et, azaz $\frac{\varepsilon}{2}$-et kapnánk. Ezen szakaszokra vonatkozó $\Sigma\omega_i d_i$ részösszeg tehát kisebb $\frac{\varepsilon}{2}$-nél.

A többi szakaszban az ingadozás $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-nál kisebb; tehát, ha az ezekre vonatkozó $\Sigma\omega_i d_i$ részösszegben ω_i helyett mindenütt a nagyobb $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-t tesszük, akkor azt találjuk, hogy ez a részösszeg kisebb $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Sigma d_i$-nél. A Σd_i a részösszegben szereplő szakaszok összege; tehát nem nagyobb a $b-a$ teljes intervallumnál; így tehát ez a $\Sigma\omega_i d_i$ részösszeg kisebb $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$-nél.

Azt találtuk tehát, hogy annyira csökkenthetjük az egyes osztásrészeket, hogy úgy azon szakaszokra vonatkozó $\Sigma\omega_i d_i$ összeg, amelyekben az ω_i ingadozás $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$-nál nagyobb, mint azokra vonatkozó, amelyekben az ingadozás ennél kisebb: $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb, tehát a két részösszeg összeadásából keletkező $\Sigma\omega_i d_i < \varepsilon$.

Bebizonyítottuk tehát, hogy ha létesíthető mindig olyan beosztás, hogy azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás a tetszésszerinti α-nál nagyobb, a tetszésszerinti kis β-nál kisebb: akkor $\lim \Sigma\omega_i d_i = 0$.

Ha pedig ellenkezően, van olyan α szám, amelyre nézve ez nem lehetséges, vagyis akárminő módon történjék is a beosztás, azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás α-nál nagyobb, egy véges γ-nál mindig nagyobb marad, akkor $\Sigma\omega_i d_i$ azon része, mely az α-nál nagyobb ingadozású szakaszokra vonatkozik, nagyobb, mint $\alpha\Sigma d_i$, mert minden ω_i helyett a kisebb α-t írtuk. Σd_i azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás α-nál nagyobb, tehát $\Sigma d_i > \gamma$ és így $\Sigma\omega_i d_i > \alpha\gamma$; az egész $\Sigma\omega_i d_i$ is nagyobb a véges $\alpha\gamma$ számnál, akárminő beosztást készítsünk is; tehát nem lehetséges, hogy $\lim \Sigma\omega_i d_i = 0$.

Ezzel kimutattuk, hogy az integrálhatóságnak $\lim \Sigma\omega_i d_i = 0$-ban foglalt szükséges és elégséges feltétele teljesen æquivalens azzal, hogy minden α-hoz tudjunk olyan beosztást találni, amelyre nézve azon szakaszok terjedelme, melyekben az ingadozás α-nál nagyobb, kisebb legyen akármilyen előre megadott kis számnál.

Az integrálhatóság feltételének ezen alakjából azonnal következik, hogy ha az ab intervallumban $f(x)$ korlátos és egyes véges számú helyek kivételével folytonos, akkor integrálható, mert hiszen, ha e helyek száma p, akkor készíthetünk olyan beosztást, hogy bármely α-nál nagyobb ingadozás csak az η összterjedelmű szakaszban legyen; e végből csak addig kell a beosztást folytatni, amíg a szakaszok maximuma $\frac{\eta}{2p}$-nél kisebb. Ekkor ugyanis azon szakaszok terjedelme, amelyekbe egy-egy szakadó pont esik, tehát ahol az ingadozás az α-nál esetleg nagyobb, az η-nál kisebb lesz; a többi szakaszban pedig, ha csak elég kicsinyek e szakaszok, az ingadozás mindenesetre kisebb az α-nál.

De még akkor is integrálható lehet a függvény, ha az ab szakasz végtelen sok helyén van szakadása. Legyen $f(x)$ az ab szakaszban mindenütt véges és például $a=0$, $b=+1$; a függvénynek pedig szakadásai legyenek az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ végtelen sok helyen. Ez alatt azt értjük, hogy az ilyen c helyen a baloldali limes nem egyezik meg a jobboldalival. Egyébként pedig az $f(x)$ folytonos. Ez a függvény is integrálható. Ugyanis ha η egy tetszés szerinti kis szám, akkor elmegyünk az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ sorban olyan messzire, hogy $\frac{1}{n} < \frac{\eta}{2}$ legyen. Véges ingadozás csak olyan szakaszban lehet, amelyben e számok egyike, másika benne van; tehát egyrészt a véges számú n helyen, másrészt az $\frac{1}{k}$ helyeken, ha k n-nél nagyobb egész szám; de ez utóbbi helyek a $0 \ldots \frac{1}{n}$ szakaszban vannak, tehát mindenesetre létezik olyan beosztás, hogy ezen helyeket magukban foglaló szakaszok összes terjedelme a megadott $\frac{\eta}{2}$-nél kisebb legyen. Ha tehát a beosztást elég kicsinyre választjuk (pl. úgy, hogy a maximális szélesség $\frac{\eta}{2n}$-nél kisebb legyen), akkor az $\frac{1}{n}$ és 1 közötti részben azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}$ helyek foglaltatnak, kisebb $\frac{n\eta}{2n} = \frac{\eta}{2}$-nél, a $0 \ldots \frac{1}{n}$ közötti rész egész terjedelme kisebb $\frac{\eta}{2}$-nél, tehát azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás az α számnál nagyobb, mindenesetre kisebb η-nál. És ebből következik, hogy ez az $f(x)$ integrálható.

Így például* a $\sin\frac{1}{x}$ bármely szakaszban integrálható. Ha

* Eddigelé egyszerűség kedveért csakis olyan függvényekről szóltunk, melyeknek minden c helyen volt jobboldali és baloldali határértékük. Az ú. n. szakadó helyeken e határértékek különbözők voltak. Az intervallum szélein elég volt az egyoldalú határérték. A $\sin\frac{1}{x}$ függvény nem tartozik ebbe az

$a \ldots b$ a 0 helyet nem tartalmazza, akkor természetes, mert $\sin \frac{1}{x}$ folytonos; de ha a 0 helyet magában foglalja, akkor az $x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots$ helyek közeiben -1 és $+1$ között ingadozik, de mindig készíthető olyan beosztás, hogy azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás valamely α-nál nagyobb, elenyésző csekély legyen.

Minden monoton korlátos függvény integrálható. Ugyanis, ha $f(x)$ az ab szakaszban például monoton növekedő, akkor minden helyen van jobboldali és baloldali határértéke, mert hiszen ha c egy tetszés szerinti hely és $c_1 < c$, akkor, ha x c_1-től c-ig halad, $f(x)$ mindig nő, de $f(x)$ korlátos, tehát a c helyen meghatározott baloldali limese van. Éppen így mutatható meg, hogy jobboldali limese is van. Ha e kettő megegyezik, akkor tudvalevően $f(x)$ a c helyen folytonos; ha nem egyeznek meg, akkor $f(x)$-nek a c helyen véges szakadása van. Olyan szakadása, mely egy megadott α-nál nagyobb, csak véges számú helyen lehet, mert különben $f(x)$ az ab szakaszban nem lenne korlátos. Ebből következik, hogy az $f(x)$ monoton függvény integrálható.]

[6. **Az integrálható függvények egyszerű összetételei.** Az integrálhatóság átalakított kritériuma nagyon alkalmas néhány egyszerű függvényösszetétel integrálhatóságának eldöntésére. Így például:

1) *Integrálható függvények összege integrálható.* Ha az ab szakaszban $f(x)$ és $\varphi(x)$ integrálhatók, akkor $f(x)+\varphi(x)$ és $f(x)-\varphi(x)$ is integrálhatók. Ugyanis, ha egy tetszés szerinti α és egy tetszés szerinti kis η adatik, készíthetünk olyan beosztást, hogy azon szakaszok összes terjedelme, melyekben $f(x)$ ingadozása $\frac{\alpha}{2}$-nél nagyobb, az $\frac{\eta}{2}$-nél kisebb legyen. Nyilván, ha ezen beosztásnak bárminő consecutiv beosztását (azaz a szakaszok új, kisebb szakaszokra való beosztását) készítjük, e beosztásra még inkább igaz, hogy az $\frac{\alpha}{2}$-nél nagyobb

osztályba, mert az $x=0$ helyen határérték nincsen. Kérdés, hogy ilyen esetben mit értsünk az *ingadozáson*? Mit értsünk az ab szakaszbeli felső (alsó határon), mikor a szakasz valamely c helyén sem elrendelt érték, sem határértékről nem szólhatunk? Ekkor így okoskodunk. A $c+h \ldots b$ szakaszban a függvény felső határa $M(h)$ függ a h-tól. Ha h csökken, $M(h)$ nem csökkenhet, (mert hiszen nagyobb terjedelmű, s az előbbit magában foglaló intervallum felső határa lett) és így $\lim\limits_{h=0} M(h)$ létezik, még pedig véges vagy végtelen. Ezt a határértéket, melyet M-mel jelölünk, nevezzük definicióképpen ilyen esetben a $c \ldots b$ szakaszbeli felső határnak. Ha c belső hely, akkor az $a \ldots b$-ből kihagyjuk a $c-h \ldots c+h$ szakaszt és az így meghatározott $M(h)$ limesét vesszük. Könnyen megalkotható ezek alapján az alsó határ és az ingadozás fogalmának általánosítása. A $\sin \frac{1}{x}$-re alkalmazva a dolgot, felső határa: 1, alsó határa: -1, ingadozása: 2.

ingadozású helyek összes terjedelme $\frac{\eta}{2}$-nél kisebb. Éppen így a $\varphi(x)$-re nézve készíthető beosztás úgy, hogy azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az ingadozás $\frac{\alpha}{2}$-nél nagyobb, szintén $\frac{\eta}{2}$-nél kisebb legyen. Ha már most e két beosztást egyesítjük úgy, hogy mindkettőnek osztópontjait felhasználjuk az ab beosztására, akkor ez az új beosztás a két előbbire nézve egyaránt folytatólagos beosztást jelent, tehát erre nézve még inkább áll, hogy a kérdéses szakaszok összes terjedelme $\frac{\eta}{2}$-nél kisebb. Az $f(x)+\varphi(x)$-nek más szakaszban nem lehet α-nál nagyobb ingadozása, mint olyanban, amelyben vagy az $f(x)$-nek, vagy a $\varphi(x)$-nek $\frac{\alpha}{2}$-nél nagyobb ingadozása van; mert ha $f(x)$ maximuma egy szakaszban M, minimuma m és és $\varphi(x)$-re nézve e számok M_1 és m_1, akkor $f(x)+\varphi(x)$ felső határa e szakaszban nem lehet nagyobb $M+M_1$-nél, alsó határa nem lehet kisebb $m+m_1$-nél és így ingadozása nem lehet nagyobb $M+M_1-$ $-(m+m_1)$-nél, vagy $(M-m)+(M_1-m_1)$-nél. Ha már most ezen ingadozások mindegyike kisebb $\frac{\alpha}{2}$-nél, az összegük sem lehet nagyobb α-nál. Eszerint tehát valóban az $f(x)+\varphi(x)$-nek α-nál nagyobb ingadozása csak olyan szakaszban lehet, ahol vagy $f(x)$-nek, vagy $\varphi(x)$-nek $\frac{\alpha}{2}$-nél nagyobb az ingadozása. E szakaszok terjedelme pedig összesen $\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}=\eta$-nál kisebb.

Így tehát ha egy tetszés szerinti α és ehhez egy tetszés szerinti kis η adatik, mindig van olyan beosztás, hogy az α-nál nagyobb ingadozású szakaszok összes szélessége η-nál kisebb legyen. $f(x)+\varphi(x)$ tehát integrálható, ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ integrálható volt.

Ugyanígy mutatható meg, hogy $f(x)-\varphi(x)$ is integrálható.

Azt, hogy $f(x)$-el $af(x)$ is integrálható, ahol a tetszés szerinti szám, alig szükséges mondani.

Az előbbiekből már most könnyen következik, hogy ha $f_1(x)$, $f_2(x), \dots f_k(x)$ az ab intervallumban integrálhatók, akkor az

$$a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+\cdots+a_k f_k(x)$$

is integrálható, bárminő pozitiv vagy negativ számok legyenek is az itt szereplő $a_1, a_2, \dots a_k$ faktorok.

2. *Integrálható függvények szorzata integrálható.* $f(x)$ és $\varphi(x)$ az ab intervallumban pozitiv, korlátos, integrábilis függvények legye-

nek; meg akarjuk mutatni, hogy ekkor $f(x).\varphi(x)$ is integrálható E végből csak azt kell megmutatnunk, hogy ha egy tetszés szerinti α és ehhez egy tetszés szerinti kis η adatik, akkor az ab intervallumot oly módon oszthatjuk be szakaszokra, hogy azon szakaszok összes terjedelme, amelyekben az ingadozás α-nál nagyobb, a megadott η-nál kisebb.

Ha $f(x)$ integrálható, mondtuk már, hogy $Cf(x)$ is integrálható, ha C állandó Tegyük fel, hogy $f(x)$ és $\varphi(x)$ az ab intervallumban pozitivek és integrálhatók. Ezt mindig feltehetjük, mert ha nem így volna, akkor $C_1+f(x)$ és $C_2+\varphi(x)$ pozitivek lennének, ha C_1 az $|f(x)|$ és C_2 a $|\varphi(x)|$ felső határánál nagyobb. Ha az

$$F(x)=C_1+f(x),\quad \Phi(x)=C_2+\varphi(x)$$

-ről kimutatjuk, hogy $F(x)\,\Phi(x)$ integrálható, akkor ezzel be lesz bizonyítva az is, hogy:

$$F(x)\,\Phi(x)-C_1C_2-C_1\,\varphi(x)-C_2\,f(x),$$

vagyis $f(x).\varphi(x)$ is integrálható.

Legyenek tehát az $f(x)$ és $\varphi(x)$ az egész ab intervallumban pozitivek és integálhatók. Felső határaik közül a nagyobbik: M. Válasszunk olyan beosztást, amelynél azon szakaszok terjedelme, melyekben az $f(x)$-nek ingadozása $\frac{\alpha}{2M}$-nél nagyobb: $\frac{\eta}{2}$-nél kisebb. Ezután olyan beosztást, amelynél ugyanez áll a $\varphi(x)$-re. Egyesítsük e két beosztást. Ezáltal olyanra jutottunk, amelyben azon szakaszok terjedelme, melyekben akár az $f(x)$, akár a $\varphi(x)$ ingadozása $\frac{\alpha}{2M}$-nél nagyobb, mindenesetre kisebb az η-nál.

Szemeljünk ki egy tetszés szerinti szakaszt. Ha ebben az $f(x)$ felső határa M_1 és alsó határa m_1, továbbá $\varphi(x)$ felső határa M_2 és és alsó határa m_2, akkor az $f(x)\,\varphi(x)$ ingadozása nem lehet nagyobb az $M_1M_2-m_1m_2$ különbségnél. De

$$M_1M_2-m_1m_2=M_1(M_2-m_2)+m_2(M_1-m_1)$$

és minthogy M az egész ab szakaszban levő felső határ, tehát a jobboldalon M_1 és m_2 külső szorzók helyébe a nagyobb M-et téve:

$$M_1M_2-m_1m_2<M[(M_2-m_2)+(M_1-m_1)].$$

Ha a kiszemelt szakaszban az $f(x)$ és $\varphi(x)$ ingadozása $\frac{\alpha}{2M}$-nél kisebb, akkor a jobboldali kifejezés α-nál kisebb, vagyis

$$M_1M_2-m_1m_2<\alpha,$$

tehát akkor ez a szakasz olyan, amelyben az $f(x)\varphi(x)$ ingadozása α-nál kisebb. α-nál nagyobb ingadozású csakis akkor lehet a kiszemelt szakasz, ha legalább az egyik függvény ingadozása $\frac{\alpha}{2M}$-nél nagyobb. Igen, de az ilyen szakaszok összes terjedelme η-nál kisebb. Ezzel kimutattuk, hogy azon szakaszok összes terjedelme, melyekben az $f(x)\varphi(x)$ ingadozása α-nál nagyobb, az előre megadott tetszés szerinti kis η-nál kisebb, vagyis az $f(x)\varphi(x)$ integrálható.

Ebből egyúttal az is következik, hogy ha $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$ *integrálhatók, akkor az* $f_1(x).f_2(x)\ldots f_k(x)$ *szorzat is integrálható.*

3. *Integrálható függvények hányadosa.* Ha $f(x)$ pozitiv, korlátos, az ab szakaszban integrálható, és alsó határa 0-tól különböző, akkor az $\frac{1}{f(x)}$ is integrálható. Evégből csak azt kell megmutatni, hogy ha α és η adatik, készíthető mindig olyan beosztás, hogy az $\frac{1}{f(x)}$-nek α-nál nagyobb ingadozása csak olyan szakaszokban lesz, melyek összes terjedelme η-nál kisebb. Legyen az $f(x)$ alsó határa az egész ab intervallumban: $m>0$. Válasszuk a megadott α helyett $m^2\alpha$-t. Minthogy $f(x)$ integrálható, tehát mindenesetre van olyan beosztás, amelynél az $f(x)$-nek $m^2\alpha$-nál nagyobb ingadozású szakaszainak terjedelme kisebb mint η. Szemeljünk ki egy tetszés szerinti szakaszt. Legyen ebben a szakaszban $f(x)$ felső határa M_1, alsó határa: m_1. Akkor e szakaszban az $\frac{1}{f(x)}$ ingadozása:

$$\frac{1}{m_1}-\frac{1}{M_1}=\frac{M_1-m_1}{m_1 M_1}.$$

Ez az ingadozás kisebb, mint $\frac{M_1-m_1}{m^2}$, mert hiszen $m \leq m_1$ és $m<M_1$. Ha tehát a kiszemelt szakasz olyan volt, amelyben az $f(x)$ ingadozása $m^2\alpha$-nál kisebb, akkor e szakaszban az $\frac{1}{f(x)}$ ingadozása kisebb az α-nál. α-nál nagyobb ingadozása az $\frac{1}{f(x)}$-nek tehát csak olyan szakaszban lehet, amelyben az $f(x)$-nek $m^2\alpha$-nál nagyobb volt az ingadozása. Ezen szakaszok összes terjedelme pedig η-nál kisebb. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\frac{1}{f(x)}$ integrábilis.

Ebből egyúttal az előbbi pontban tárgyalt tétel segítségével az is következtethető, hogy ha $f(x)$ alsó határa 0-nál nagyobb az ab

intervallumban és úgy $f(x)$, mint $\varphi(x)$ integrálhatók, akkor $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ is integrálható.]

[7. **Korlátosan változó függvény integrálhatósága.** Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ monoton növekedő korlátos függvények, akkor, miként láttuk, integrálhatók. Ebből következik, hogy

$$\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$$

is integrálható. Monoton függvények különbsége integrálható.

Az ilyen $\psi(x)$ függvényre vonatkozólag egy megjegyzést teszünk. Ha az ab intervallumot szakaszokra osztjuk az $a, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, b$ pontokkal és megalkotjuk a

$$v=|\psi(x_1)-\psi(a)|+|\psi(x_2)-\psi(x_1)|+ \\ +|\psi(x_3)-\psi(x_2)|+\cdots+|\psi(b)-\psi(x_{n-1})|$$

összeget, vagyis az egyes szakaszokra vonatkozó változások abszolut értékeinek összegét, akkor ez így is írható:

$$v=|f(x_1)-f(a)-[\varphi(x_1)-\varphi(a)]|+ \\ +|f(x_2)-f(x_1)-[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)]|+\cdots+ \\ +|f(b)-f(x_{n-1})-[\varphi(b)-\varphi(x_{n-1})]|$$

és így, minthogy $f(x_i)-f(x_{i-1})$, valamint $\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})$ mindannyian pozitivok, mert $f(x)$ és $\varphi(x)$ monoton növekvők, e helyett írható:

$$v\leq f(x_1)-f(a)+\varphi(x_1)-\varphi(a)+f(x_2)-f(x_1)+ \\ +\varphi(x_2)-\varphi(x_1)+\cdots+f(b)-f(x_{n-1})+\varphi(b)-\varphi(x_{n-1}),$$

vagyis $$v\leq f(b)-f(a)+\varphi(b)-\varphi(a).$$

Azt látjuk ebből, hogy a $\psi(x)$ abszolut változásainak összege nem nagyobb az $f(b)-f(a)+\varphi(b)-\varphi(a)$-nál, vagyis az $f(x)$ és $\varphi(x)$ növekedéseinek összegénél. A fontos e körülményben az, hogy az *ab intervallumot akármiképpen osszuk is be szakaszokra, a $\psi(x)$ abszolut változásainak összege mindig kisebb egy véges számnál.*

Ha tehát *valamely $\psi(x)$ függvény két korlátos monoton növekvő függvény különbsége, akkor bárminő beosztás mellett az abszolut változásainak összege korlátos.* Az ilyen függvényt, melynek abszolut változása korlátos, vagyis melyre nézve

$$|\psi(x_1)-\psi(a)|+|\psi(x_2)-\psi(x_1)|+\cdots+|\psi(b)-\psi(x_{n-1})|$$

mindig kisebb egy véges, megadható számnál, akárhogyan válaszszuk is az $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ helyeket: *korlátosan változó függvénynek* (fonction à variation bornée) nevezzük. Eszerint tehát két monoton növekvő függvény különbsége (vagy mondhatjuk egy monoton növekedő $f(x)$ és egy monoton csökkenő $-\varphi(x)$ függvény összege) korlátosan változó.

Fordítva is áll a dolog. *Minden korlátosan változó függvény két monoton növekedő függvény különbségének tekinthető.* Ugyanis, tegyük fel, hogy $\psi(x)$ az ab intervallumban korlátosan változó. Az $x=a$ helyen értéke $\psi(a)$. Az abszolut változása az $a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b$ beosztásnál:

$$v=|\psi(x_1)-\psi(a)|+|\psi(x_2)-\psi(x_1)|+\cdots+|\psi(b)-\psi(x_{n-1})|.$$

A $\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})$ változás az i-ik szakaszban pozitiv, negativ, vagy 0. A pozitiv változás abszolut értéke maga ez a pozitiv érték; a negativ változás abs. értéke e negativ változás ellenkező jellel. Ha tehát a pozitiv változások összegét p-vel, a negativ változások összegét n-nel jelöljük, $(p\geq 0,\ n\leq 0)$, akkor tehát

$$v=p-n;$$

továbbá $\psi(x_1)-\psi(a)+\psi(x_2)-\psi(x_1)+\cdots+\psi(b)-\psi(x_{n-1})=p+n.$

De a baloldali kifejezés $\psi(b)-\psi(a)$, tehát

$$\psi(b)-\psi(a)=p+n$$

és így: $v=2p+\psi(a)-\psi(b)$; $v=-2n+\psi(b)-\psi(a)$.

Ha más beosztást készitenénk, akkor is azt kapnók, hogy a megfelelő abszolut változás a pozitiv és negativ változásokkal ezen egyenletek által függ össze. Nézzük az egyiket:

$$v=2p+\psi(a)-\psi(b).$$

Akárminő beosztást végezzünk is, a v pozitiv szám kisebb lesz egy bizonyos számnál, mert hiszen $\psi(x)$ korlátosan változó; az összes, képzelhető beosztásoknak megfelelő v értékeknek tehát van egy véges felső határuk. Jelöljük ezt V-vel. Ebből következik, hogy az összes képzelhető beosztásoknál a pozitiv változások összegének is van felső határuk, mert hiszen minden p a v-vel a fölírt egyenlettel függ össze. Jelöljük ezt a felső határt P-vel. Azt állítjuk, hogy

$$V=2P+\psi(a)-\psi(b).$$

Ha nem állana ez az egyenlet, akkor fönállana

$$V=2P_1+\psi(a)-\psi(b),$$

ahol $P_1\neq P$. Azt állítjuk, hogy nincs olyan beosztás, melynek megfelelő p a P_1-nél nagyobb lenne. Legyen ugyanis $p>P_1$, akkor ezen beosztáshoz tartozó $v=2p+\psi(a)-\psi(b)$; tehát $v>V$ lenne, holott azt mondtuk, hogy V az összes v számok felső határa, tehát V-nél nagyobb v nincsen. Eszerint tehát P_1-nél nagyobb p nincs. Másrészt, ha ε tetszés szerinti kis szám, határozzunk meg olyan beosztást, amelynek megfelelő v a $V-2\varepsilon$ és V közé esik. Ilyen mindenesetre van, éppen mert V a v számok felső határa. Legyen ezen v-nek megfelelő pozitiv változások összege: p, tehát $v=2p+\psi(a)-\psi(b)$ és ha ezt a $V=2P_1+\psi(a)-\psi(b)$-ből kivonjuk,

$$P_1-p<\varepsilon$$

-ra jutunk. Vagyis a P_1-nél nagyobb p nincsen, ellenben olyan p, mely $P_1-\varepsilon$ és P_1 közé esik, van, bárminő kicsiny legyen is az ε. Ebből az látszik, hogy P_1 a p, számok felső határa; tehát kell, hogy $P_1=P$ legyen, vagyis nem csak minden v és a megfelelő p között áll fenn a $v=2p+\psi(a)-\psi(b)$ egyenlet, hanem egyúttal a felső határok között is érvényes a

$$V=2P+\psi(a)-\psi(b).$$

Ugyanígy, ha az $-n$ számok felső határát $-N$-el jelöljük, akkor

$$V=-2N+\psi(b)-\psi(a).$$

Ha most b helyett x közbenső helyet képzelünk, ugyanezt a meggondolást tehetjük. Ha az $a \ldots x$ intervallumot felosztjuk valami módon és az abszolut változások összegét v-vel, a megfelelő pozitiv változásokét p-vel és a negativ változásokét $-n$-el jelöljük, akkor is fennállanak ezek az egyenletek:

$$v=p-n, \qquad \psi(x)-\psi(a)=p+n,$$
$$v=2p+\psi(a)-\psi(x), \quad v=-2n+\psi(x)-\psi(a).$$

Jelöljük most a v, p, $-n$ számok felső határait $V(x)$, $P(x)$, $-N(x)$-el, hogy megjelöljük azt is, hogy e számértékek az x-től függnek.

A v, p és $-n$ pozitiv számok az x-el monoton nőnek, mert hiszen az előbbi szakaszokhoz új szakaszok járulnak. Ebből következik, hogy $V(x)$, $P(x)$, és $-N(x)$ az x monoton növekvő függvényei. A második egyenletből:

$$\psi(x)=\psi(a)+P(x)+N(x)$$

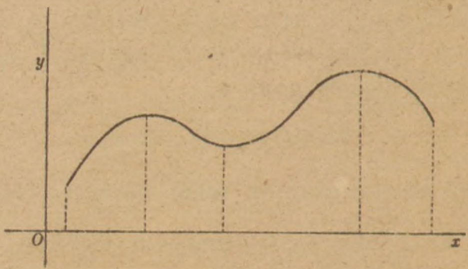
-ből következik, vagyis a $\psi(x)$ korlátosan változó függvény valóban két monoton növekedő függvény különbsége.

Ebből egyúttal az is következik, hogy *minden korlátosan változó függvény integrálható.*

Láthatjuk már eddig is, hogy a monoton függvények sok tekintetben a legkényelmesebben kezelhetők. Ezekből alakult a korlátosan változó függvény is. Igen célszerű azért a függvényt monoton szakaszokra beosztani. Ez a legtöbbször sikerül is; ha t. i. miként a mellékelt ábrában feltüntettük, a függvény minimuma és legközelebbi maximuma közötti részét vesszük egy-egy szakasznak. De nem mindig lehetséges ez. Így például a már annyiszor említett $\sin\frac{1}{x}$ az

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}},\ \frac{1}{\frac{3\pi}{2}},\ \frac{1}{\frac{5\pi}{2}},\ \frac{1}{\frac{7\pi}{2}},\dots$$

helyeken fölváltva $+1$, és -1 értékeket vesz fel, tehát, mint látjuk, a 0 és 1 közötti intervallumban végtelen sok maximuma és minimuma van.



87. ábra.

A szóban forgó felbontás mindig sikerül, ha az ab intervallumban az $f(x)$-nek csak véges számú maximuma és minimuma van. Az ilyen függvényekről rögtön megmutathatjuk, hogy korlátosan változók. Hiszen, ha az egymásután jövő szélső értékek sorban: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ akkor az egész ab szakaszban az abs. változások összege bármely beosztásnál nem lehet nagyobb az

$$|f(a)-\mu_1|+|\mu_1-\mu_2|+|\mu_2-\mu_3|+|\mu_3-\mu_4|+\cdots$$

véges számnál. *A véges számú maximummal és minimummal biró függvények tehát korlátosan változók és így integrálhatók.*]

8. **Az integrálra vonatkozó egyszerű tételek.**

a) Még egyszer megemlítjük, hogy ha $f(x)$ integrálható, akkor

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$

melynek egyik speciális esete:

$$\int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Eddig mindig hallgatagon feltettük, hogy a felső határ b nagyobb az a alsó határnál. A határozott integrál értelmezésére szolgáló

$$\lim\,[f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-a)+\cdots+$$
$$+f(\xi_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})+f(\xi_n)(b-x_{n-1})]$$

így is írható, ha az összeadandókat fordított sorrendben írjuk:

$$\lim\,[f(\xi_n)(b-x_{n-1})+f(\xi_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+f(\xi_1)(x_1-a)]=$$
$$=-\lim\,[f(\xi_n)(x_{n-1}-b)+f(\xi_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-1})+\cdots+f(\xi_1)(a-x_1)].$$

A jobboldali összeg pedig, ha egyáltalában nem tekintünk arra, hogy az a és b közül melyik a nagyobb, ismét egy határozott integrált értelmez. A ba intervallum ugyanis a $b, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_1$ a pontokkal szakaszokra van felosztva és e szakaszokra vonatkozólag ugyanúgy járunk el, mint előbb; tehát ezen összeg limesét így kell jelölnünk:

$$\int_b^a f(x)\,dx.$$

A fenti egyenlet tehát így írható:

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Vagyis: *ha a határokat felcseréljük, az integrál értéke* -1*-gyel szorzódik*. Ebből következik az is, hogy ha az $\int_a^b f(x)\,dx$-nek akkor is akarunk számértéket tulajdonítani, ha $a=b$, ez a számérték csakis 0 lehet.

c) Ha az $f(x)$ az ab intervallumban mindenütt 0, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx=0;$$

ha pedig mindenütt egyenlő c constanssal, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx=c\,(b-a).$$

Mindkét állítás az integrál értelmezéséből következik.

d) Ha a és b között felvesszük a c helyet és $f(x)$ az ac, valamint a cb szakaszokban integrábilis, akkor az ab szakaszban is integrábilis. Ugyanis ha egy tetszés szerinti α adatik, úgy az ac, mint a cb szakaszt úgy oszthatjuk be, hogy az ac-ben, valamint a cb-ben az α-nál nagyobb ingadozású szakaszok összes terjedelme a tetszés szerinti kis η felénél, azaz $\frac{\eta}{2}$-nél kisebb legyen. Ezzel már az ab szakasznak is olyan beosztását készítettük, melyben az α-nál nagyobb ingadozású szakaszok összes terjedelme η-nál kisebb. Ezzel kimutattuk, hogy $f(x)$ az egész ab-ben integrábilis.

Ebből az is következik, hogy ha $c_1, c_2, c_3, \ldots c_k$ sorban az ab szakasz helyei és $f(x)$ az $ac_1, c_1c_2, c_2c_3, \ldots c_kb$ szakaszokban integrálható, akkor az egész ab intervallumban is integrálható.

Fordítva is áll a dolog: Ha $f(x)$ az ab intervallumban integrálható és c az ab valamely közbenső helye, akkor úgy az ac, valamint a cb részekben is integrálható.

e) Ha $f(x)$ az ab intervallumban integrálható és c egy közbenső hely, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

A beosztást ugyanis, amely egészen tetszőleges, mindig úgy készíthetjük, hogy a c osztópont legyen és így, ha az ab szakasz osztópontjai: $a, x_1, x_2, \ldots x_k, c, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_{n-1}, b$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\{\underline{M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)}\underline{+\cdots+M_{k+1}(c-x_k)}+$$
$$+\underline{M_{k+2}(x_{k+1}-c)+M_{k+3}(x_{k+2}-x_{k+1})}\underline{+\cdots+M_{n+1}(b-x_{n-1})}\}$$

és minthogy úgy az első résznek, mint a másodiknak van határértéke és pedig az első $\int_a^c f(x)\,dx$, a második: $\int_c^b f(x)\,dx$, tehát valóban:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ha a és b közé sorban a $c_1, c_2, \ldots c_k$ helyeket iktatjuk, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_k}^b f(x)\,dx.$$

9. Középértéktétel. Az $\int_a^b f(x)\,dx$ számértéket úgy értelmeztük, hogy közös határértéke az

$$M_1d_1+M_2d_2+\cdots+M_nd_n \quad \text{és} \quad m_1d_1+m_2d_2+\cdots+m_nd_n$$

összegeknek. Ha az ab intervallumban az $f(x)$ felső határa M, alsó határa pedig m, akkor nyilván minden beosztásnál

$$M_1d_1+M_2d_2+\cdots+M_nd_n \leq M(b-a);$$

és
$$m_1d_1+m_2d_2+\cdots+m_nd_n \geq m(b-a),$$

tehát a

$$\lim(M_1d_1+M_2d_2+\cdots+M_nd_n) = \lim(m_1d_1+m_2d_2+\cdots+m_nd_n)$$

is e két szám közé esik, azaz:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Ebből következik, hogy m és M között van olyan μ szám (mely esetleg az egyikkel, vagy a másikkal meg is egyezhetik), amelyre

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

Ez a nevezetes tétel azt fejezi ki, hogy az $\int_a^b f(x)\,dx$ számérték egyenlő az ab intervallum hosszának μ-szeresével, ahol μ az $f(x)$ integrándusnak az ab intervallumban birt felső és alsó határa között van. Ezt a tételt *középértéktételnek* mondjuk.

Különösen megemlítjük ezt a tételt abban az esetben, midőn $f(x)$ folytonos függvény. Megemlítjük először is azt, hogy ez esetben az egyenlőségjel elhagyandó; ekkor t. i. csakis

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$$

állhat fenn, kivéve azt az esetet, midőn $f(x)$ az egész ab szakaszban állandó. Ha ugyanis $f(x)$ nem mindenütt egyenlő M-mel, akkor van az ab szakaszban olyan hely, amelyen $f(x)$ értéke: $K<M$ és akkor, mivel $f(x)$ folytonos, e hely környezetében megjelölhető olyan véges $\alpha\beta$ szakasz, melyben $f(x)$ mindenütt kisebb $M-\varepsilon$-nél, tehát bármiképpen történjék is az ab beosztása, erre az $\alpha\beta$ szakaszra eső $\Sigma M_i d_i$ összeg kisebb, mint $(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)$ és így az egész $\Sigma M_i d_i$ sem lehet egyenlő $M(b-a)$-val; tehát az integrál is kisebb, mint $M(b-a)$. Éppen így következik, hogy a baloldali $\leq$ jel helyébe az egyszerű $<$ jel teendő. Így tehát, ha $f(x)$ az ab intervallumban folytonos, akkor

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$$

és így van olyan μ közbenső érték $m<\mu<M$, melyre nézve

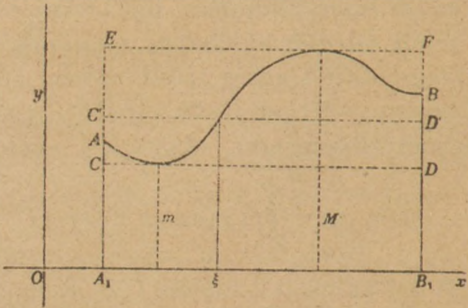
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

De ha $f(x)$ az ab szakaszban folytonos, akkor van e szakaszban olyan ξ közbenső hely, melyen $f(\xi)=\mu$ és így az előbbi egyenlőség így is írható:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Ennek a nevezetes tételnek a geometriai jelentése igen szemléletes. Az $f(x)$-et ábrázoló görbe (88. ábra) és az A_1A, B_1B ordináták, meg az A_1B_1 által meghatározott t területet méri az $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ha az m minimális ordinátával alkotjuk meg az A_1CDB_1 derékszögű négyszöget, ennek a területe kisebb t-nél, ellenben az M maximális ordinátával készített A_1EFB_1 terület t-nél nagyobb. Ha már most a CD egyenest az X tengellyel párhuzamosan fölfelé toljuk, a derékszögű négyszög területe folytonosan növekszik és így a CD elér egy olyan $C'D'$ helyzetet, hogy $A_1C'D'B_1=t$ legyen. Ennek a derékszögű négyszögnek a magassága nem egyéb, mint egy bizonyos közbenső ξ helyhez tartozó $f(\xi)$ ordináta; tehát $t=f(\xi)(b-a)$.



88. ábra.

10. A határozott integrál folytonossága. Ha $f(x)$ az $a'b'$ intervallumban korlátos és integrálható és ab ebben az $a'b'$-ben van, akkor természetesen az ab intervallumban is integrálható; sőt ha b-t megnövesztjük h-val és $b+h<b'$, akkor az $a\ldots b+h$ intervallumban is integrálható. De:

$$\int_a^{b+h} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+h} f(x)\,dx.$$

A második integrál, melynek integráció szakasza: h, az előbbiek szerint így írható: μh, ahol μ valamely véges számérték, mely az $f(x)$ felső határánál M-nél (az $a\ldots b+h$-ban) kisebb és alsó határánál m-nél nagyobb. Így tehát

$$\int_a^{b+h} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \mu h.$$

Ha tehát az integrál felső határát h-val megnövesztjük, akkor az integrál értéke μh-val változik. Ebből következik, hogy az integrál (ha az integrándus korlátos) a felső határával folytonosan változik, a felső határának folytonos függvénye. Ha ugyanis azt akarjuk, hogy a változása egy tetszés szerinti kis ε-nál kisebb legyen, akkor csak $|h|$ kisebbre veendő $\frac{\varepsilon}{|M|}$-nél (ha M az egész $a'b'$ szakaszbeli felső határ); vagyis minden kis ε számhoz tartozik olyan δ küszöbintervallum, hogy a függvény változása ε-nál kisebb, ha a változót δ-nál kevesebbel változtatjuk. De ez éppen a folytonos változás jellemzője.

Minthogy az alsó határ a felsővel fölcserélhető, ha csak az integrál jelét megváltoztatjuk, tehát azt látjuk, hogy az integrál úgy a felső, mint az alsó határával folytonosan változik, ha az integrándus korlátos.

11. A határozott integrál differenciálása. Könnyebb áttekinthetőség végett írjunk a b helyett z betűt, hogy ezzel is jelezzük, hogy most a felső határt változtatni fogjuk. Ezzel az előbbi tétel így írható:

$$\int_a^{z+h} f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + h\mu.$$

Legyen már most az $f(x)$ függvény a z helyen folytonos. Akkor a $(z-h,\ z+h)$ intervallumban

$$f(z)-\varepsilon \leqq f(x) \leqq f(z)+\varepsilon \quad (\lim_{h=0} \varepsilon=0),$$

tehát

$$f(z)-\varepsilon \leqq \mu \leqq f(z)+\varepsilon$$

és így:

$$f(z)-\varepsilon \leqq \frac{\int_a^{z+h} f(x)\,dx - \int_a^z f(x)\,dx}{h} \leqq f(z)+\varepsilon.$$

A $>$, $<$ jelek megfordítandók, ha h negativ. Ha h a 0 felé konvergál, ε is a 0 felé konvergál, tehát:

$$\lim_{h=0} \frac{\int_a^{z+h} f(x)\,dx - \int_a^z f(x)\,dx}{h} = f(z).$$

Ha könnyebb áttekintés végett az $\int_a^z f(x)\,dx$-et, mely (ha a-t állandónak tekintjük) a z felső határtól függ, $F(z)$-vel jelöljük, akkor az előbbi egyenlőség szerint:

$$\lim_{h=0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$

Ha az $f(x)$ integrándus valamely z helyen folytonos, akkor $\int_a^z f(x)\,dx$ a felső határa szerint differenciálható és differenciálhányadosa a z helyen nem egyéb, mint az integrándus értéke a z helyen.

Ugyanígy következik, hogy az alsó határ szerint vett differenciálhányados pedig az integrándus értéke az alsó határnak megfelelő helyen ellenkező előjellel véve; mert hiszen a határok felcserélhetők, ha csak az integrált -1-gyel szorozzuk.

12. **Primitiv függvény.** Mindazokat a függvényeket, amelyek differenciálhányadosa egy bizonyos szakaszban az $f(z)$ függvénynek e szakaszbeli értékeivel megegyezik, vagy röviden mondva azon függvényeket, melyeknek egy bizonyos szakaszban a differenciálhányadosuk: $f(z)$, az $f(z)$ *primitiv függvényeinek* nevezzük. Ilyen értelemben tehát, ha $f(z)$ az $\alpha \ldots \beta$ szakaszban folytonos, akkor

$$\int_a^z f(x)\,dx = F(z),$$

(bárminő számot jelentsen is az a az $\alpha \ldots \beta$ közben) az $f(z)$ primitiv függvénye az $\alpha\beta$ szakaszban. Mert hiszen e szakasz minden helyén az előbbiek szerint

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z).$$

A primitiv függvény ezen értelmezése szerint az adott $f(z)$ függvénynek végtelen sok primitiv függvénye van; mert ha $F_1(z)$ egy ilyen primitiv függvény, akkor $F_1(z)+C$ is ilyen, akárminő állandó számértéket jelentsen is a C; mert hiszen ha $F_1(z)$-nek differenciálhányadosa $f(z)$, akkor $F_1(z)+C$-nek is ugyanez a differenciálhányadosa. Fordítva is áll a dolog: Ha ugyanis $F_1(z)$ és $F_2(z)$ az $f(z)$ primitiv függvényei az $\alpha \ldots \beta$ szakaszra vonatkozólag, akkor $F_1(z)-F_2(z)$ differenciálhányadosa e szakaszban mindenütt 0, tehát $F_1(z)-F_2(z)$ e szakaszban konstans (l. 124. lap).*

* Ha $f(z)$ nem folytonos az ab közben, de $F(z)=\int_a^z f(x)\,dx$ létezik, ha $a \leq z \leq b$, akkor nem mondhatjuk mindig, hogy $F(z)$ primitiv függvénye az $f(z)$-nek, azaz, hogy $\frac{dF(z)}{dz}=f(z)$. Igy például, ha $f(z)$ az $a \ldots b$ közben a $a<c<b$ hely kivételével 0 és a c helyen: 1; akkor, mint az integrál értelmezéséből következik, az

$$\int_a^z f(z)\,dz = 0, \text{ tehát a } c \text{ helyen } \frac{dF(z)}{dz} \neq 1.$$

Ellenben, ha 0 az ab közben van és $f(z)$ mindenütt 0, de az

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

helyeken: 1, akkor $f(z)$ a $z=0$ helyen nem folytonos, (mert az 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \ldots$ helyeken át haladva a 0-hoz, határértéke: 1). Ez esetben

$$\int_a^z f(z)\,dz = 0.$$

[Ugyanis az integrálnak a szakadó helyekből származó része tetszés szerinti kicsinnyé tehető, pl. olyan módon, hogy ha ε tetszés szerinti kis szám és

Tegyük fel a következőkben, hogy $f(x)$ folytonos. Minthogy ez esetben $f(z)$-nek egyik primitiv függvénye $\int_a^z f(x)\,dx$, ahol a egy bizonyos kezdő érték, tehát $f(z)$ minden primitiv függvénye ilyen alakú:

$$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx + C.$$

A primitiv függvény tehát nincs teljesen meghatározva; a tetszés szerinti C konstans határozatlanságot okoz; ezt a bizonyos fokig határozatlan függvényt így is szoktuk jelölni: $\int f(x)\,dx$, vagy $\int f(z)\,dz$. Az $\int f(z)\,dz$ alatt olyan függvényt értünk, melynek z szerinti differenciálhányadosa $f(z)$; [elhallgatjuk, hogy ez egy bizonyos intervallumra vonatkozik]. Ha egy ilyen függvényt megállapítottunk és azt találtuk, hogy ez $F(z)$, akkor $\int f(z)\,dz = F(z) + C$, ahol C tetszés szerinti állandó. *Az*

$$\int f(z)\,dz$$

-t határozatlan integrálnak is nevezzük. Azt az eljárást, mellyel az adott $f(z)$-hez a primitiv függvényt állapítjuk meg, amely tehát a differenciálásnak inverz művelete: *integrálásnak* nevezzük.

13. A határozott integrál kiszámítása a határozatlan integrállal. Eddig a határozott integrál fogalmából kiindulva alkottuk meg a határozatlan integrál (primitiv függvény) fogalmát, most azt mutatjuk meg, hogy miképpen lehet a primitiv függvény segítségével a határozott integrál értékét kiszámítani.

Legyen az adott $f(x)$ folytonos függvény primitiv függvénye $F(x)$, azaz egy bizonyos $\alpha\beta$ szakaszban mindenütt:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Tudjuk, hogy egy ilyen $F(x)$ függvény: az $\int_a^x f(y)\,dy$ határozott integrállal van megadva és hogy bármelyik $F(x)$ ilyen alakú:*

$\varepsilon' < (1-q)\,\varepsilon$, ahol $q<1$, akkor olyan beosztást készítünk, hogy az $\frac{1}{n}$ hely egy $q^n\varepsilon'$-nél kisebb közbe kerüljön. A $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ intervallumból eredő rész kisebb, mint $1 \cdot \frac{1}{n}$ azaz $\frac{1}{n}$; az $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ intervallumból eredő része az integrálnak kisebb, mint $\varepsilon' + \varepsilon' q + \varepsilon' q^2 + \varepsilon' q^3 + \cdots < \frac{\varepsilon'}{1-q} < \varepsilon$. Tehát az integrál 0 és $\frac{1}{n} + \varepsilon$ között van, bármily kicsinyek is $\frac{1}{n}$ és ε.] $F(z)$ tehát 0 és $\frac{dF(z)}{dz} = 0$, a 0 helyen is, vagyis $[F'(z)]_0 = f(0)$. Látjuk tehát már ebből a két példából is, hogy $\int_a^z f(z)\,dz$ létezése még általában nem jelenti azt, hogy $f(z)$-nek van primitiv függvénye.

* Az integrándusban szereplő betű egészen mellékes; legjobb volna a

$$F(x)=\int_a^x f(y)\,dy+C.$$

Legyen már most $F_1(x)$ a végtelen sok primitiv függvény közül egyik. Ez minden esetre ilyen alakú:

$$F_1(x)=\int_a^x f(y)\,dy+C_1,$$

ahol C_1 egy meghatározott számérték. Mekkora ez a C_1? Ezt rögtön megkapjuk, ha x helyébe a-t teszünk.

Ekkor ugyanis a felső határ megegyezik az alsóval, tehát a jobboldalon álló integrál 0 lesz és így:

$$F_1(a)=C_1,$$

vagyis:

$$F_1(x)=\int_a^x f(y)\,dy+F_1(a)$$

és ha most x helyébe az $\alpha\beta$ szakasz b helyét tesszük:

$$F_1(b)=\int_a^b f(y)\,dy+F_1(a).$$

Innen (szokottabb írás kedvéért az y helyett ismét x-et írva):

$$\int_a^b f(x)\,dx=F_1(b)-F_1(a).$$

Ez a nagyfontosságú tétel azt fejezi ki, hogy az $f(x)$ egy tetszésszerinti primitiv függvényéből a következő egyszerű módon határozhatjuk meg az $\int_a^b f(x)\,dx$ értékét: *Vegyük a primitiv függvényt a* ***b*** *helyen és az* ***a*** *helyen és az elsőből vonjuk le a másodikat.*

Újból megemlítjük, hogy ez az eljárás csak arra az esetre van bebizonyítva, midőn $f(x)$ folytonos.

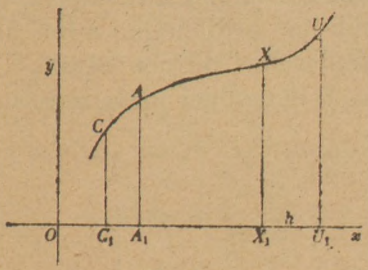
14. A primitiv függvény geometriai jelentése. A mellékelt ábrában feltüntettük az $y=f(x)$ folytonos függvény menetét. Az A_1AXX_1 területe: $\int_a^x f(z)\,dz$. Jelöljük ezt a területet, mely x-től függ, $F_1(x)$-el. Növeljük meg az x-et h-val. Az A_1AUU_1 területe: $F_1(x+h)$ és így az

határozott integrált egyszerűen így jelölni $\int_a^b f$; ezzel már teljesen jellemezve volna, hogy itt minő függvényre vonatkozik az integrálás; de mint később látni fogjuk, a históriai szempontból indokolt régi jelölésnek is van némi előnye. Itt azért tettünk y betűt, nehogy a kezdő összetévessze a határ gyanánt szereplő x-el az integrándus változóját.

X_1U_1UX területrész:

$$F_1(x+h)-F_1(x).$$

E területrész nagysága azonban $h\mu$ alakban is írható, ha μ-vel jelöljük azon derékszögű négyszög magasságát, melynek alapja h



89. ábra.

és melynek területe ugyanakkora, mint X_1XUU_1. Ez a μ magasság mindenesetre az $X_1U_1=h$ szakaszhoz tartozó minimális és maximális ordináta közé esik. Így tehát:

$$\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h}=\mu$$

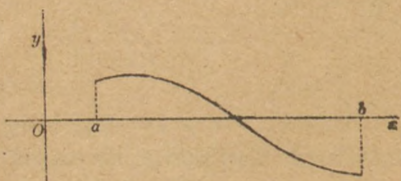
és ha h zérussá válik, azaz U_1 az X_1-el összeesik, akkor μ értéke $f(x)$, vagyis az X_1-hez tartozó ordináta lesz; tehát az $F_1(x)$ *terület differenciálhányadosa: az $f(x)$ ordináta.*

Ha a területet nem az A_1A ordinátától számítjuk, hanem pl.: a C_1C-től és a C_1CXX_1 területet $F_2(x)$-el jelöljük, akkor ugyanerre jutunk: $\frac{dF_2(x)}{dx}$ is: $f(x)$. Ez az $F_2(x)$ terület az $F_1(x)$-től a C_1A_1AC területben különbözik. Ha ezt a területet c-vel jelöljük, akkor $F_2(x)=F_1(x)+c$; vagyis az $F_2(x)$ primitiv függvény az $F_1(x)$-től csakis egy bizonyos konstans értékben különbözik.

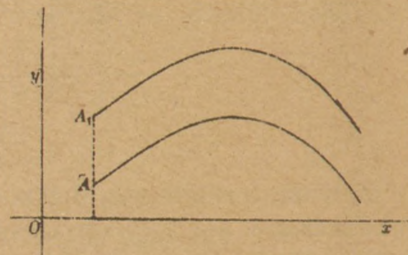
A primitiv függvényt tehát geometriai szempontból az A_1AXX_1 területtel szemléltethetjük. Ha a kezdő ordinátát változtatjuk, akkor más primitiv függvényt ábrázoltunk, mely az előbbitől egy bizonyos konstans számértékkel (a két kezdő ordináta közötti területtel) különbözik.

Az ábrázolásnak még egy másik módját is használhatjuk. Ha ugyanis adatik egy $y=f(x)$ görbe az $\alpha\beta$ szakaszban (90. ábra), akkor egy más koordináta-rendszerben vegyünk fel egy tetszésszerinti A pontot, melynek ordinátája: c. (91. ábra.)

Legyen $F(x)$ az $f(x)$ valamely primitiv függvénye; akkor $F(x)+c-F(a)$ is primitiv függvénye az $f(x)$-nek. Ha $x=a$, akkor ezen függvény értéke éppen c; tehát az $y=F(x)+c-F(a)$ görbe az $f(x)$-nek olyan primitiv függvénye, mely az előre megadott A ponton keresztül megy. Ha egy más pontot jelöltünk volna meg az $x=a$ egyenesen, melynek ordinátája nem c, hanem c_1, akkor ezen át az $y=F(x)+c_1-F(a)$ primitiv függvényt ábrázoló görbe vonulna, mely az előbbitől abban különbözik, hogy minden pontjának c_1-c-vel nagyobb az ordinátája, mint az előbbi megfelelő pontjának. Vagyis mindezek a görbék egyikből azáltal keletkeznek, hogy ezt az egyet az Y tengellyel párhuzamosan eltoljuk.



90. ábra.



91. ábra.

Az $y=F(x)$ görbe az $y=f(x)$ görbével olyan egyszerű viszonyban van, hogy az $y=F(x)$ bármely, x abszcisszához tartozó pontjában húzott érintőjének irányhatározója akkora, mint az $y=f(x)$ görbe x abszcisszájú pontjához tartozó ordináta számértéke.

15. A primitiv függvény néhány egyszerű tulajdonsága. *a)* Ha $f(x)=0$ az $\alpha\beta$ intervallumban, akkor primitiv függvénye: C constans, mert hiszen bármely C differenciálhányadosa: 0.

b) Ha $f(x)$ primitiv függvénye $F(x)$ és c állandó, akkor $cf(x)$ primitiv függvénye: $cF(x)$; azaz:

$$\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx.$$

c) Ha $f(x)$ primitiv függvénye $F(x)$ és $\varphi(x)$-é $\Phi(x)$, akkor $f(x)+\varphi(x)$ primitiv függvénye: $F(x)+\Phi(x)$; és $f(x)-\varphi(x)$ primitiv függvénye: $F(x)-\Phi(x)$; mert hiszen

$$\frac{d\,[F(x)+\Phi(x)]}{dx}=f(x)+\varphi(x);$$

azaz:
$$\int [f(x)+\varphi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int \varphi(x)\,dx;$$

és
$$\int [f(x)-\varphi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx-\int \varphi(x)\,dx.$$

16. Néhány egyszerűbb határozatlan integrál. A differenciálási szabályok segítségével azonnal megállapíthatjuk az integrálási szabályokat. Így pl. azt találtuk, hogy x^m diff. hányadosa, ha m tetszésszerinti poz. vagy negativ számot jelent: mx^{m-1}. (Ha m nem egész szám, akkor pontosabban azt kell mondanunk, hogy x^m-nek csak valós értékeire szorítkozunk és mx^{m-1} diff. hányados $\frac{mx^m}{x}$, ahol x^m ugyanazon érték, mint a differenciálandó.) Ebből következik, hogy mx^{m-1} egyik primitiv függvénye: x^m. Vagy ha m helyett $m+1$-et írunk: $(m+1)x^m$ primitiv függvénye: x^{m+1}, ha $m+1$ poz. vagy neg. szám [$m+1$ nem lehet 0!]. Ebből következik, hogy x^m egyik primitiv függvénye; (ha $m+1$ nem 0): $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ és így:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Első integrálási szabályúl tehát azt kaptuk, hogy ha $m+1 \neq 0$:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Minthogy $(\sin x)' = \cos x$, tehát $\sin x$ egyik primitiv függvénye a $\cos x$-nek; azaz

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Éppen így a $(\cos x)' = -\sin x$-ból következik, hogy

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \text{s í. t.}$$

Ilyen módon, a legegyszerűbb differenciálási szabályok megfordításával a következő integrálási szabályokhoz jutunk;

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x + C = -\text{arc cotg}\, x + C'.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C = -\text{arc cos}\, x + C'.$$

17. Tagonkénti integrálás. Ha az integrandus ilyen alakú:

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x).$$

akkor, miként kéttagú összegnél már láttuk:

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx + \cdots + \int \varphi_n(x)\,dx.$$

Ezt az eljárást tagonkénti integrálásnak nevezzük. Ha a $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ az előbbiekben felsorolt függvények, akkor már az előbbi integrálási szabályok elégségesek az ilyen integrálok kiszámítása. Igy például, ha $f(x)$ racionális egész függvény:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

akkor:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)\,dx =$$

$$= \frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \frac{a_2 x^{n-1}}{n-1} + \cdots + a_n x + C.$$

Látjuk, hogy n-edfokú racionális egész függvény integrálja: $n+1$-edfokú rac. egész függvény.

18. Integrálás helyettesítéssel. Ha $F(x)$ az $f(x)$ valamely primitiv függvénye, azaz $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ és $x = \varphi(t)$ által az x helyébe új változót vezetünk be, akkor az $F(x)$ t szerinti diff. hányadosát úgy kapjuk meg, hogy vesszük $F(x)$-nek x szerinti diff. hányadosát és ezt megszorozzuk x-nek t szerinti diff. hányadosával; azaz:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} \varphi'(t).$$

De $\frac{dF}{dx} = f(x)$, tehát ez az egyenlet így is írható:

$$\frac{dF}{dt} = f(x) \cdot \varphi'(t).$$

Ebből azt látjuk, hogy ha x helyébe $x = \varphi(t)$-t tesszük, akkor az F függvény, mely eredetileg az $f(x)$ primitiv függvénye volt, x változóra vonatkozólag, [azaz $F(x)$-nek x szerinti diff. hányadosa: $f(x)$] ezen helyettesítés után, a t új változónak függvényévé válik, melynek t szerinti diff. hányadosa: $f(x)\varphi'(t)$, vagyis új alakjában az F

függvény a t változóra vonatkozólag az $f(x)\varphi'(t)$ primitiv függvénye lesz.

Ennek a nagyfontosságú eljárásnak a kellő megértésére nehány egyszerűbb példán mutatjuk be az alkalmazását.

1. Példa. Legyen az $f(x)$ integrándus: $\sin 2x$; tehát kiszámítandó

$$\int \sin 2x\, dx = F(x).$$

$2x=t$ tesszük, azaz $x=\frac{t}{2}\cdot$ Ezen helyettesítéssel $\sin 2x$-ből $\sin t$ lesz és $F(x)$ most az $f(x)\varphi'(t)$ primitiv függvénye lesz. $\varphi'(t)=\frac{1}{2}$, tehát $F(x)$ primitiv függvénye az $\frac{1}{2}\sin t$-nek, vagyis

$$F(x)=\frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{\cos t}{2}+C.$$

Ha most meg t helyébe vissza tesszük a $2x$-et, akkor azt kapjuk, hogy a keresett $F(x)$ ez lesz:

$$F(x)=\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}+C.$$

2. *Példa.* Egy másik példa legyen $\int e^{ax}dx$ kiszámítása. Tegyük $ax=t$; vagyis:

$$x=\frac{t}{a},\quad \varphi(t)=\frac{t}{a},\quad \varphi'(t)=\frac{1}{a}\cdot$$

A keresett F primitiv függvény egyúttal az $f(x)\varphi'(t)$-nek, vagyis az $\frac{e^t}{a}$-nak primitiv függvénye, vagyis:

$$\int e^{ax}dx=\int \frac{1}{a}e^t\,dt=\frac{e^t}{a}$$

és ha t helyébe megint visszatesszük az x-et, $\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}\cdot$

3. *Példa.* Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ határozatlan integrált. A nevezőben levő x^2 már azt sejteti, hogy az integrál arc tg függvény lesz. De ehhez az kellene, hogy a nevező $1+x^2$ alakú legyen. Hogy ilyenféle alakra hozzuk, először az a^2-et kiemeljük:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\cdot$$

Tegyük $\frac{bx}{a}$ helyett a t új változót; azaz $x=\frac{at}{b}\cdot$ Ekkor tehát a keresett $F(x)$ függvény t szerint az $f(x)\varphi'(t)$ primitiv függvénye; azaz

$$F(x)=\frac{1}{a^2}\int f(x)\varphi'(t)\,dt=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\, t+C.$$

és ha t helyett megint vissza tesszük a $\frac{bx}{a}$-t, akkor:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\,\frac{bx}{a}+C. \qquad \alpha)$$

Ezek után megmutathatjuk a számítás egy gyorsabb berendezésének módját.

Ha $x=\varphi(t)$ substitutióval a t variabilist vezetjük be, akkor a keresett primitiv függvény, azt mondottuk, az $f(x)\varphi'(t)$ primitiv függvénye lesz, vagyis $F(x)=\int f(x)\varphi'(t)\,dt$. Ha meggondoljuk, hogy ha $x=\varphi(t)$, akkor $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$, vagyis dx differenciál: $dx=\varphi'(t)\,dt$, akkor arra jutunk, hogy az $\int f(x)dx$ transformációja az új t változó bevezetésével egyszerűen úgy történik, hogy $f(x)$-*ben x helyébe $\varphi(t)$-t és ennek megfelelően dx helyébe a vele egyenlő $\varphi'(t)\,dt$-t tesszük.* Így lesz az $\int f(x)\,dx$-ből $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$.

Így például, ha $\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$-et akarjuk kiszámítani, akkor $e^x=t$ tesszük. Innen, ha mindkét oldalon a differenciált vesszük, $e^x dx=dt$, miből: $dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$; tehát az integrál új alakja: $\int\frac{dt}{1+t}$. Még ezt az integrált sem találjuk az előbbi táblázatban; hanem, ha $1+t=z$-t tesszük és ennek megfelelően: $dt=dz$, akkor ez az integrál átmegy $\int\frac{dz}{z}$-be, melyről tudjuk, hogy $\log z+C$. z helyébe most visszatéve $1+t$-t, azután t helyébe e^x-t, azt találjuk, hogy

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\log(1+e^x)+C.$$

E példa is megvilágosította a helyettesítéssel való integrálásnál követett eljárást. Az $\int f(x)\,dx$ kiszámítása végett gyakran tehető $x=\varphi(t)$ és ennek megfelelően: $dx=\varphi'(t)\,dt$, úgy hogy

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

lesz. Ha ezt a primitiv függvényt meg tudjuk határozni, akkor ebben t helyébe újra x-et bevezetve az $x=\varphi(t)$ által, megkapjuk az eredetileg keresett primitiv függvényt.

Látjuk, hogy a számítás mekanismusa szempontjából minő fontossága van az $\int f(x)\,dx$ írásmódnak. A helyettesítést úgy végezzük el, hogy x-et is, dx-et is az új változó segítségével fejezzük ki.

Még bemutatjuk egy-két példán ezt az eléggé nem gyakorolható eljárást. Számítsuk ki ezt az integrált:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

ha b^2-4ac negativ. Az ax^2+bx+c így írható:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}(b^2-4ac)\right],$$

vagy feltüntetve azt, hogy b^2-4ac negativ, tegyük $b^2-4ac=-k^2$ és így:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{k^2}{4a^2}\right]}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{k^2}{4a^2}}.$$

Tegyük $x+\frac{b}{2a}=t$ és megfelelően: $dx=dt$; akkor folytatólag az integrál:

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+\frac{k^2}{4a^2}}=4a\int\frac{dt}{k^2+4a^2t^2}$$

és ez az $\alpha)$ alattiból azonnal következik, ha az ottani a helyett k, és b helyett $2a$ tétetik, vagyis a keresett integrál:

$$\frac{2}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{2at}{k}+C$$

és t helyett visszatéve $x+\frac{b}{2a}$-t; és k helyett $\sqrt{4ac-b^2}$-et

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C.$$

Végre a következő integrál

$$\int\operatorname{cotg}x\,dx=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

így számítható ki: Tegyük $\sin x=t$; innen $\cos x\,dx=dt$; tehát a keresett integrál $\int\frac{dt}{t}$, vagyis $\log t+C$ és ha t helyett vissza tesszük a $\sin x$-et; és C helyett $\log c$-t írunk:

$$\int\operatorname{cotg}x\,dx=\int\frac{dt}{t}=\log t+\log c=\log ct=\log c\sin x.$$

19. A parciális integrálás módszere. Ha u és v az x differenciálható függvényei folytonos diff. hányadosokkal, akkor tudjuk, hogy

$$(uv)'=uv'+u'v,$$

vagyis az uv szorzat primitiv függvénye az $uv'+u'v$-nek; azaz (a konstanst elhagyva)

$$uv=\int uv'dx+\int u'vdx$$

és ebből:

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx.$$

Ez a parciális integrálási módszer. Még áttekinthetőbb lesz e fontos képlet, ha $v'dx$ helyett dv differenciált és $u'dx$ helyett du differenciált írunk. Ezzel a rövidítéssel a képlet ilyen alakú lesz:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

A parciális integrálás módszeréhez akkor folyamodunk, ha az integrál jele alatt egy u függvénynek és egy ismeretes v függvény differenciáljának szorzata áll. Ha az $\int vdu$ ismeretes, akkor tehát e módszerrel $\int udv$-t kiszámíthatjuk.

Néhány példa megvilágosítja e képlet alkalmazásánál követendő eljárást.

1. Példa. Ha

$$\int x\log x\,dx$$

kerestetik, akkor u gyanánt $\log x$-et és dv gyanánt $x\,dx$-et vegyük, vagyis ekkor $v=\frac{x^2}{2}$; tehát:

$$\int x \log x\,dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

2. *Példa.* Ha

$$\int \log x\,dx$$

-et akarjuk kiszámítani, akkor u gyanánt $\log x$-et, dv gyanánt pedig dx-et választjuk, vagyis $v=x$. Eszerint tehát:

$$\int \log x\,.\,dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C.$$

Emlékezzünk rá, hogy az $\int_a^b \log x\,dx$ határozott integrált már közvetlenül kiszámítottuk (262—263. l.):

3. *Példa.* Számítsuk ki ezt az integrált:

$$\int x^2 e^x\,dx.$$

Most u gyanánt x^2 és dv gyanánt $e^x dx$ választassék; ekkor v nem más, mint e^x; tehát:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx.$$

A jobboldalon álló integrált még nem ismerjük; de erre újra alkalmazhatjuk a parciális integrálás módszerét. Most u gyanánt x-et és dv gyanánt $e^x dx$-et választjuk.

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C'.$$

tehát:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

20. Racionális függvény primitiv függvénye. Egyszerűbb esetek. Ha $f(x)$ racionális egész függvény, akkor a primitiv függvény meghatározása semmi nehézséggel sem jár. Láttuk is már, hogy ha $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$, akkor

$$\int f(x)\,dx = \frac{a_0x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1x^n}{n} + \frac{a_2x^{n-1}}{n-1} + \cdots + a_nx + C.$$

Ha azonban $f(x)$ az x-nek tört-függvénye, akkor már nem megy ilyen egyszerűen a dolog, de azért az eddig említett egyszerű függvények segítségével a törtfüggvény primitiv függvénye mindig kiszámítható.

Megjegyezzük általában, hogy mindig redukálhatjuk a feladatot arra az esetre, midőn a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező. Ha ugyanis a számláló m-edfokú: $\varphi(x)$ és a nevező n-edfokú: $\psi(x)$ és $m \geq n$ volna, akkor a $\varphi(x)$-et elosztjuk $\psi(x)$-el. A hányados $q(x)$ $m-n$-edfokú racionális egész függvény és a maradék $r(x)$ legfölebb $n-1$-edfokú, tehát:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{\psi(x)}$$

és
$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{\psi(x)} dx.$$

Minthogy $\int q(x)\,dx$ ismeretes, tehát a feladat olyan $\frac{r(x)}{\psi(x)}$ integrálására redukálódott, melynek számlálója alacsonyabb fokú, mint a nevezője.

a) *A nevező elsőfokú.* Nézzük először azt az esetet, midőn a nevező elsőfokú. A számlálót konstansnak vehetjük fel. Az integrándus tehát ilyen alakú:

$$\int \frac{k}{ax+b} dx.$$

Ez az integrál igen egyszerűen számítható ki. Tegyük ugyanis $ax+b=t$, miből $dx = \frac{dt}{a}$; tehát:

$$\int \frac{kdx}{ax+b} = \frac{k}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{k}{a}\log t + C$$

és ha C helyett $\log c$-t írunk (amit az esetben, ha logarithmus a primitiv függvény, rendszerint megteszünk) és t helyett $ax+b$-t visszatesszük, akkor:

$$\int \frac{kdx}{ax+b} = \frac{k}{a}\log(ax+b) + \log c,$$

vagyis a primitiv függvény:

$$\log c(ax+b)^{\frac{k}{a}}.$$

b) *A nevező másodfokú.* Legyen a nevező a másodfokú: $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ racionális egész függvény; a számláló legfölebb elsőfokú lehet: tehát a szóban forgó integrál ilyen alakú:

$$\int \frac{\delta x+\varepsilon}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx.$$

Ha $\delta \neq 0$, akkor az integrándust a következőképpen alakítjuk át: 2α-val szorzunk és osztunk:

$$\frac{\delta x+\varepsilon}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{\delta}{2\alpha}\cdot\frac{2\alpha x+\frac{2\alpha\varepsilon}{\delta}}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

és $\frac{2\alpha\varepsilon}{\delta}$ helyett $\beta+\left(\frac{2\alpha\varepsilon}{\delta}-\beta\right)$-t teszünk; tehát:

$$\frac{\delta x+\varepsilon}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{\delta}{2\alpha}\,\frac{2\alpha x+\beta+\left(\frac{2\alpha\varepsilon}{\delta}-\beta\right)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=$$

$$=\frac{\delta}{2\alpha}\,\frac{2\alpha x+\beta}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{2\alpha\varepsilon-\beta\delta}{2\alpha(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}.$$

Az első tagban a $\frac{\delta}{2\alpha}$-t nem tekintve, a számláló a nevező diff. hányadosa. Ezt akartuk éppen elérni az átalakítással. Az első tagot most már könnyen integrálhatjuk; ha ugyanis

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=t$$

tesszük, akkor azonnal észrevesszük, hogy az első integrál:

$$\frac{\delta}{2\alpha}\log(\alpha x^2+\beta x+\gamma).$$

Tehát minden olyan racionális függvény integrációja, melynek nevezője másodfokú, végelemzésben ilyen alakú integrál kiszámítására redukálható:

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}.$$

Csak ezzel kell tehát foglalkoznunk.

Ha a nevezőben szereplő másodfokú egész függvény discriminánsa, a $4\alpha\gamma-\beta^2$ pozitiv, akkor az integrál a 300. lapon követett eljárás szerint számítható ki. Ez esetben:

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}+C.$$

Megjegyezzük, hogy a négyzetgyöknek pozitiv vagy negativ értéke vehető, csak mindkét helyen ugyanazon érték szerepeljen. Az arc tg z alatt azt a szöget értjük (absz. mértékszámban), mely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között van; ha tehát a gyökmennyiség jelét megváltoztatjuk, akkor úgy az arc tg, mint az elülálló faktor jele is megváltozván, az integrál változatlan marad.

Ha pedig a $4\alpha\gamma-\beta^2$ negativ, akkor az $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ egyenletnek két valós gyöke van: x_1 és x_2, úgy, hogy:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2).$$

Az $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$ így is írható:

$$\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{x-x_2},$$

tehát: $$\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_2)}\right].$$

Az $\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ racionális függvényt *részlettörtekre* bontottuk.

Most már tehát:

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{1}{\alpha(x_1-x_2)}\int\frac{dx}{x-x_1}+\frac{1}{\alpha(x_2-x_1)}\int\frac{dx}{x-x_2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha(x_1-x_2)}[\log(x-x_1)-\log(x-x_2)]=\frac{1}{\alpha(x_1-x_2)}\log\frac{x-x_1}{x-x_2}.$$

Ha ide $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$-t

bevezetjük, akkor tovább:

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\log\frac{2\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}.$$

Így tehát, ha az integrándus bármely olyan rac. függvény, melynek nevezője másodfokú, e két formula segítségével az integráció mindig elvégezhető.

Így például, ha $\alpha=1$, $\gamma=1$, $\beta=2\cos\varphi$, akkor $4\alpha\gamma-\beta^2=4(1-\cos^2\varphi)=4\sin^2\varphi$ pozitiv, tehát

$$\int\frac{dx}{x^2+2\cos\varphi.x+1}=\frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

és ha $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=-1$, akkor $4\alpha\gamma-\beta^2=-4$ negativ, tehát:

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}.$$

21. Folytatás. A nevező n-edfokú. *1. A nevező gyökei mind különbözők.* Most áttérünk az általános eset tárgyalására. Legyen az integrandus $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, ahol $\psi(x)$ n-edfokú rac. egész függvény és $\varphi(x)$ legfölebb $n-1$-edfokú. Tegyük fel továbbá, hogy a $\psi(x)=0$ egyenletnek csupa különböző valós gyöke van, vagyis $\psi(x)$ ilyen alakban írható (a legmagasabb tag együtthatója 1-nek vehető):

$$\psi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n).$$

A számláló $n-1$-edfokú rac. egész függvény, mely az $x=\alpha_1$ helyen $\varphi(\alpha_1)$, $x=\alpha_2$ helyen $\varphi(\alpha_2)\ldots$ és $x=\alpha_n$ helyen $\varphi(\alpha_n)$ értékeket veszi fel. De tudjuk már (l. 170. lap), hogy olyan $n-1$-edfokú rac. egész függvény, mely ezen az n helyen e megadott értékekkel bir, csak egy van és ez a következő alakban írható:

$$\varphi(x)=\psi(x)\left[\frac{\varphi(\alpha_1)}{\psi'(\alpha_1)(x-\alpha_1)}+\frac{\varphi(\alpha_2)}{\psi'(\alpha_2)(x-\alpha_2)}+\cdots+\frac{\varphi(\alpha_n)}{\psi'(\alpha_n)(x-\alpha_n)}\right],$$

miből:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(\alpha_1)}{\psi'(\alpha_1)}\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{\varphi(\alpha_2)}{\psi'(\alpha_2)}\frac{1}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{\varphi(\alpha_n)}{\psi'(\alpha_n)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_n}.$$

A $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ rac. függvényt ezzel tehát részlettörtekre bontottuk fel. Minden egyes tag a $\psi(x)=0$ egyenlet egy-egy gyökéhez tartozik.

Oly fontos e részlettörtekre való felbontás, hogy még közvetlenül is kiszámítjuk az egyes részlettörteket. Legyen tehát a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ részlettörtekre felbontott alakja a következő:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

Az $A_1, A_2, \ldots A_n$ együtthatókat akarjuk meghatározni. Evégből szorozzunk mindkét oldalon $\psi(x)$-el;

$$\varphi(x)=A_1\frac{\psi(x)}{x-\alpha_1}+A_2\frac{\psi(x)}{x-\alpha_2}+\cdots+A_n\frac{\psi(x)}{x-\alpha_n}.$$

Ha most $x=\alpha_1$ tesszük, akkor $\frac{\psi(x)}{x-\alpha_2}, \frac{\psi(x)}{x-\alpha_3}, \ldots \frac{\psi(x)}{x-\alpha_n}$ mindannyian eltűnnek. A $\frac{\psi(x)}{x-\alpha_1}$ határértékét az $x=\alpha_1$ helyen a L'Hospital szabállyal meghatározván, azt találjuk, hogy $\lim\limits_{x=\alpha_1}\frac{\psi(x)}{x-\alpha_1}=\psi'(\alpha_1)$ és minthogy α_1 a $\psi(x)=0$ egyenletnek egyszerű gyöke, tehát $\psi'(\alpha_1)\neq 0$ és így:

$$A_1=\frac{\varphi(\alpha_1)}{\psi'(\alpha_1)}.$$

Ugyanígy találjuk, ha rendre $x=\alpha_1, x=\alpha_2, \ldots x=\alpha_n$-t tesszük:

$$A_1=\frac{\varphi(\alpha_1)}{\psi'(\alpha_1)},\ A_2=\frac{\varphi(\alpha_2)}{\psi'(\alpha_2)},\ldots A_n=\frac{\varphi(\alpha_n)}{\psi'(\alpha_n)},$$

tehát úgy, mint előbb láttuk:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_1^n{}_i\frac{\varphi(\alpha_i)}{\psi'(\alpha_i)}\frac{1}{x-\alpha_i}.$$

Most már az integrációt tagonkint végezhetjük:

$$\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx=\frac{\varphi(\alpha_1)}{\psi'(\alpha_1)}\log(x-\alpha_1)+$$

$$+\frac{\varphi(\alpha_2)}{\psi'(\alpha_2)}\log(x-\alpha_2)+\cdots+\frac{\varphi(\alpha_n)}{\psi'(\alpha_n)}\log(x-\alpha_n),$$

vagy összevonva:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx = \log (x-\alpha_1)^{A_1} (x-\alpha_2)^{A_2} \dots (x-\alpha_n)^{A_n},$$

ahol $$A_i = \frac{\varphi(\alpha_i)}{\psi'(\alpha_i)}.$$

Így például, ha $\psi(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$ és $\varphi(x)=1$, akkor:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$\psi'(x)=2x,\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=-1,$$

tehát $$A_1 = \frac{\varphi(\alpha_1)}{\psi'(\alpha_1)} = \frac{1}{2},\ A_2 = \frac{\varphi(\alpha_2)}{\psi'(\alpha_2)} = -\frac{1}{2}$$

és így: $$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} = \log \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Ha a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ racionális függvény nevezőjének nem minden gyöktényezője valós (de egymástól mind különbözők), azaz a $\psi(x)=0$ egyenlet gyökei között képzetesek is vannak, akkor, minthogy a $\psi(x)$ együtthatói valósak, a képzetes gyökök mindig párjával lépnek fel; vagyis, ha $\psi(x)=0$ valamelyik gyöke $\alpha+\beta i$, akkor $\alpha-\beta i$, az előbbinek kapcsolt értéke, is gyöke az egyenletnek.

Úgy mint valós gyökök esetében, most is előállítható a $\varphi(x)$ $n-1$-edfokú rac. egész függvény ilyen alakban:

$$\varphi(x) = A_1 \frac{\psi(x)}{x-a_1} + A_2 \frac{\psi(x)}{x-a_2} + \dots + A_n \frac{\psi(x)}{x-a_n}, \qquad \alpha)$$

ahol $a_1, a_2, \dots a_n$ a $\psi(x)=0$ egyenlet gyökei. A jobboldalon valóban $n-1$-edfokú egész függvény áll, mert

$$\psi(x):(x-a_i)=(x-a_1)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n).$$

Csak az $A_1, A_2, \dots$ együtthatókat kell alkalmasan meghatároznunk, hogy az $\alpha)$ alatti identitás fönnálljon. Mielőtt ezt tennők, megmutatjuk, hogy most is, mint valós gyökök esetében $\frac{\psi(x)}{x-a_1}$ az $x=a_1$ helyen $\psi'(a_1)$ s i. t. Most természetesen nem alkalmazható a L'Hospital szabály, mert azt csak valós számok esetében bizonyítottuk be. Megmutatjuk, hogy ha $\psi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$' akkor

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n}.$$

Tegyük fel, hogy ez a tétel érvényes, ha $\psi(x)$ fokszáma $n-2$ és legyen $a_1=\alpha+i\beta$ és $a_2=\alpha-i\beta$, akkor

$$\psi(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\psi_1(x),$$

ahol $$\psi_1(x)=(x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_n).$$

Innen: $$\psi'(x)=2(x-\alpha)\psi_1(x)+[(x-\alpha)^2+\beta^2]\psi_1'(x);$$

tehát $$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}.$$

De az első tag így is írható: $\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}$, mert e törtek összege valóban $\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$; a második tag pedig föltételünk értelmében:

$$\frac{1}{x-a_3}+\frac{1}{x-a_4}+\dots+\frac{1}{x-a_n};$$

tehát valóban:

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\dots+\frac{1}{x-a_n}.$$

Minthogy pedig $n=1$ és $n=2$ esetében a tétel érvényes, tehát $n=3$ és $n=4$ esetében is érvényes s i. t.; szóval egész általánosságban is igaz.

Ebből következik, hogy minden x értékre nézve:

$$\psi'(x)=\frac{\psi(x)}{x-a_1}+\frac{\psi(x)}{x-a_2}+\dots+\frac{\psi(x)}{x-a_n}.$$

Ha x helyébe a_1-et teszünk, a jobboldalon a másodiktól kezdve minden tag: 0. Az első tag az $(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)$-ből $x=a_1$ helyettesítésével keletkező: $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)$. A baloldalon $\psi'(a_1)$-et kapjuk;* tehát $\frac{\psi(x)}{x-a_1}$ az $x=a_1$-nél itt is: $\psi'(a_1)$. Éppen így általában, ha $\frac{\psi(x)}{x-a_i}$-ben $x=a_i$-t tesszük, akkor értéke: $\psi'(a_i)$ lesz.

Ezen megjegyzések után visszatérünk az $\alpha)$ alatti egyenlethez. Ha x helyébe sorban $a_1, a_2, \dots a_n$-t helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$A_1=\frac{\varphi(a_1)}{\psi'(a_1)},\quad A_2=\frac{\varphi(a_2)}{\psi'(a_2)},\dots\quad A_n=\frac{\varphi(a_n)}{\psi'(a_n)},$$

úgy mint valós gyökök esetében. Ha már most $A_1, A_2, \dots A_n$

* Megjegyezzük, hogy itt $\psi'(a_1)$ nem a $\psi(x)$ a_1 helyen való differenciálhányadosát jelenti, (mert hiszen komplex helyen való differenciálásról még nem szóltunk), hanem a $\psi'(x)$ rac. egész függvénynek az a_1 helyen való értékét. A differenciálhányados fogalmának általánosításával rájutunk majd arra, hogy e két érték megegyezik.

helyett ezen számértékeket tesszük, akkor a jobboldalon olyan $n-1$-edfokú rac. egész függvény van, mely az $x=a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken megegyezik a $\varphi(x)$-el. De ha két $n-1$-edfokú rac. egész függvény n különböző helyen megegyező értékű, akkor minden helyen megegyeznek, identikusak és így az $\alpha)$ jobboldala a $\varphi(x)$-el identikus. Ebből az is látszik, hogy $\varphi(x)$-nek csak egyetlen egy ilyen előállítása létezik. Ez az identitás tehát így írható:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(a_1)}{\psi'(a_1)}\,\frac{1}{x-a_1}+\frac{\varphi(a_2)}{\psi'(a_2)}\,\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{\varphi(a_n)}{\psi'(a_n)}\,\frac{1}{x-a_n}. \qquad \beta)$$

Ha a_1 és a_2 kapcsolt értékek, akkor a $\frac{\varphi(a_1)}{\psi'(a_1)}$ és $\frac{\varphi(a_2)}{\psi'(a_2)}$ is kapcsolt értékek. Ha az első $k+li$, a második $k-li$ alakú. Így tehát a két első tag együtt:

$$\frac{k+li}{x-\alpha+i\beta}+\frac{k-li}{x-\alpha-i\beta}=\frac{2k(x-\alpha)+2l\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Minden kapcsolt gyökpárnak a $\beta)$ alatti összegben egy ilyen másodfokú nevezővel biró részlettört felel meg. E törtben már imaginarius tagok nincsenek. *Ha tehát $\psi(x)=0$ egyenletnek n különböző gyöke közül r pár képzetes, akkor a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ olyan valós részlettörtekre bontható fel, melyek közül r-nek másodfokú a nevezője és $n-2r$-nek elsőfokú.*

Minthogy pedig

$$\int\frac{2k(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx=k\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]+C$$

és

$$\int\frac{2l\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}+C,$$

tehát $\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx$ integrációját teljesen elvégezhetjük, vagyis az integrált csupa ismeretes függvénnyel kifejezhetjük.

Példaképpen határozzuk meg az

$$\int\frac{dx}{x^4-1}$$

integrált. $x^4-1=0$ egyenlet gyökei: $1, -1, i, -i$; $\psi'(x)=4x^3$, tehát:

$$\psi'(1)=4,\ \psi'(-1)=-4,\ \psi'(i)=-4i,\ \psi'(-i)=4i$$

és így:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{i}{x-i}-\frac{i}{x+i}\right\}=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}\right\}$$

miből: $$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\log(x-1)-\frac{1}{4}\log(x+1)-\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x+C.$$

2. *A nevezőnek többszörös gyökei is vannak.* Eddigelé mindig feltettük, hogy a $\psi(x)=0$ egyenlet gyökei mind különbözők. Tegyük fel általában, hogy $\psi(x)=0$-nak a α-szoros, b β-szoros,... l pedig λ-szoros gyökei, azaz:

$$\psi(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda}.$$

Hogyan kell meghatároznunk az $\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$-et, ha $\varphi(x)$ legalább eggyel alacsonyabb fokú, mint a $\psi(x)$?

A $\psi(x)$ így írható: $\psi(x)=(x-a)^{\alpha}\psi_1(x)$, ahol

$$\psi_1(x)=(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda}, \quad \text{tehát} \quad \psi_1(a)\neq 0.$$

A $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ törtet ilyen alakban írhatjuk, bárminő számot jelentsen is az A:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}\psi_1(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\varphi(x)-A\psi_1(x)}{(x-a)^{\alpha}\psi_1(x)}.$$

Ez az identitás fönnáll A minden értékénél. Határozzuk meg az A számot úgy, hogy a $\varphi(x)-A\psi_1(x)$ osztható legyen $x-a$-val, azaz tegyük $\varphi(a)-A\psi_1(a)=0$.

Ebből az A okvetlenül kiszámítható, mert $\psi_1(a)\neq 0$. Innen:

$$A=\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}.$$

Ha A gyanánt ezt a számértéket választjuk, akkor a jobboldalon álló második tört $x-a$-val egyszerűsíthető, s utána ilyen alakú lesz: $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi_1(x)}$, ahol a számláló eggyel alacsonyabb fokú, mint $\varphi(x)$ volt [esetleg $x-a$ magasabb hatványával is lehet rövidíteni].

Így már most a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$-et ilyen alakra hoztuk:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi_1(x)},$$

ahol:

$$A=\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}.$$

A második tört nevezője az $x-a$ gyöktényezőt már eggyel alacsonyabb fokban tartalmazza, mint az eredeti $\psi(x)$. És éppen ezt akartuk elérni. Ha ugyanis most erre a törtre megint az előbbi eljárást alkalmazzuk, akkor:

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\psi_1(x)},$$

relációra jutunk, ahol $A_1 = \frac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)}$, vagyis:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\psi_1(x)}$$

és ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor végül a

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{\psi_1(x)}$$

összefüggést kapjuk.

Az utolsó tag nevezőjének már az $x-a$ nem gyöktényezője. Ahogy most az a gyökhöz tartozó részlettörteket határoztuk meg, úgy járunk el a $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\psi_1(x)}$-nek a b gyökhöz tartozó részlettörteinek meghatározásánál s í. t. Azonnal belátjuk, hogy eszerint a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ a következőképpen bomlik fel részlettörtekre:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = & \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \frac{L}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}\end{aligned}$$

és ezzel a részlettörtekre-bontást be is fejeztük. Az $A, A_1 \ldots$ $B, B_1 \ldots L_{\lambda-1}$ együtthatókat a fönt vázolt eljárással lépésenkint meghatároztuk. De nem okoz most már nehézséget ezen együtthatók közvetlen meghatározása sem. Ugyanis ha mindkét oldalon $(x-a)^{\alpha}$-val szorzunk, akkor ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}(x-a)^{\alpha}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} = & A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + \\ & + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha}\left[\frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}\right].\end{aligned}$$

Ha ezt az identitást az x szerint rendre differenciáljuk 0-szor, 1-szer... α—1-szer és azután $x=a$ tesszük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right]_{x=a} = A, \quad \left[\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right]'_{x=a} = A_1,$$

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right]''_{x=a}=2A_2,\ldots\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right]^{(\alpha-1)}_{x=a}=(\alpha-1)!\,A_{\alpha-1}.$$

Ha pedig megfelelően $\psi(x)=(x-b)^\beta\psi_2(x)$ tesszük, mindkét oldalt $(x-b)^\beta$-val szorozzuk és azután rendre 0-szor, 1-szer, 2-szer,... $\beta-1$-szer differenciáljuk és $x=b$-t helyettesítjük, akkor:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_2(x)}\right]_{x=b}=B,\quad\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_2(x)}\right]'_{x=b}=B_1,$$

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_2(x)}\right]''_{x=b}=2B_2,\ldots\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_2(x)}\right]^{(\beta-1)}_{x=b}=(\beta-1)!\,B_{\beta-1}$$

s í. t. relációkat kapjuk, melyek az $A, B,\ldots L$ kœfficienseket közvetlenül szolgáltatják.*

Megvan tehát a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ részlettörtekre bontása; most már az $\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$ meghatározása nem okoz nehézséget.

Ugyanis a jobboldalon ilyen alakú integrálok lépnek fel: $\int\frac{dx}{(x-a)^k}$ és $\int\frac{dx}{x-a}$. Az első: $\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}$, vagyis $\frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$, a második pedig $\log(x-a)$.

Így tehát az $\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$ két részből áll: egy racionális részből és egy logarithmusos részből.

1. Példa. Példaképpen tárgyaljuk az $\int\frac{dx}{x^4-2x^2+1}$ meghatározását. Az

$$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2;$$

tehát a $\psi(x)=0$ egyenletnek $+1$ és -1 kétszeres gyökei. A jelen esetben: $\psi(x)=(x-1)^2(x+1)^2$; tehát $\psi_1(x)=(x+1)^2$ és $\psi_2(x)=(x-1)^2$. Az

$$\frac{1}{\psi(x)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B_1}{x+1}$$

* Ha az $a, b\ldots$ gyökök között képzetesek is vannak, pl. a képzetes, akkor $(x-a)^a\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ differenciálásáról voltaképpen az eddigiek szerint még nem szólhatunk, de igen egyszerüen megállapítható ez az eljárás. Ugyanis ez a függvény ilyen alakú: $f_1(x)+if_2(x)$, ahol $f_1(x)$ és $f_2(x)$ az x változó valós függvényei; tehát ha x valós, akkor $f_1(x)+if_2(x)$ differenciálhányadosa:

$$\lim_{h=0}\frac{f_1(x+h)+if_2(x+h)-f_1(x)-if_2(x)}{h}=f_1'(x)+if_2'(x)$$

és ebből könnyen megmutatható, hogy az eddigi differenciálási szabályok érvényesek. Minthogy pedig a fenti egyenletek fennállanak x minden reális értékére, tehát — minthogy csupa racionális függvényekről van szó — fennállanak komplex x értékekre is, tehát $x=a$ tehető akkor is, ha a komplex. Ezek a megjegyzések a következőkre is vonatkoznak.

alakú, ahol: $$A=\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right]_{x=1}=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=1}=\frac{1}{4}$$

és $$A_1=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]'_{x=1}=\left[\frac{-2}{(x+1)^3}\right]_{x=1}=-\frac{1}{4};$$

továbbá: $$B=\left[\frac{\varphi(x)}{\psi_2(x)}\right]_{x=-1}=\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_{x=-1}=\frac{1}{4};$$

$$B_1=\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]'_{x=-1}=\left[\frac{-2}{(x-1)^3}\right]_{x=-1}=\frac{1}{4};$$

tehát: $$\frac{1}{x^4-2x^2+1}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right]$$

és ebből:

$$\int\frac{dx}{x^4-2x^2+1}=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\log(x-1)+\log(x+1)\right]+C=$$

$$=-\frac{x}{2(x^2-1)}+\frac{1}{4}\log\frac{x+1}{x-1}+C.$$

2. *Példa. A nevező gyökei mindannyian n-szeres gyökök.* Másik példa gyanánt válasszunk integrándusnak általában olyan $\psi(x)$ függvényt, mely $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$ szorzat n-ik hatványa, ahol $a_1, a_2, \ldots a_k$ mind különbözők. Itt az előbbi eljárás meg is rövidíthető. Jelöljük az $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$ racionális egész függvényt $p(x)$-el, vagy röviden p-vel. A számláló, mely tetszés szerinti nk-nál alacsonyabb fokú egész függvény, legyen q. Az integrál: $\int\frac{q}{p^n}dx$.

Minthogy p-nek csupa különböző gyöktényezője van, azaz $p(x)=0$ egyenletnek csupa különböző gyöke van, tehát egy ismeretes tétel szerint $p(x)$-nek és $p'(x)$-nek nincsen x-et tartalmazó közös tényezőjük és így az algebra egy tétele szerint meghatározhatók olyan $a(x)$ és $b(x)$ racionális egész függvények, hogy identikusan:

$$a(x)[p(x)]^n+b(x)p'(x)=1$$

legyen; és innen $$a(x)+b(x)\frac{p'(x)}{[p(x)]^n}=\frac{1}{[p(x)]^n}$$

és $q(x)$-el szorozva: $$aq+bq\frac{p'}{p^n}=\frac{q}{p^n}.$$

Ebből: $$\int\frac{q(x)}{[p(x)]^n}dx=\int a(x)q(x)\,dx+\int b(x)q(x)\frac{p'(x)}{[p(x)]^n}dx.$$

A jobboldalon álló első integrándus racionális egész függvény, tehát az integrál is az. A második integrált párciális integrálással redukáljuk. Jelöljük röviden $b(x).q(x)$-et $c(x)$-el. Minthogy

$$\int\frac{p'}{p^n}dx=-\frac{1}{(n-1)p^{n-1}},$$

tehát: $$\int c(x)\frac{p'}{p^n}dx=-c(x)\cdot\frac{1}{(n-1)[p(x)]^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{c'(x)}{[p(x)]^{n-1}}dx.$$

Látjuk tehát, hogy az $\int\frac{q(x)}{[p(x)]^n}dx$ kiszámítása ugyanilyen alakú integrál kiszámítására van visszavezetve, de a nevező most már a $p(x)$ racionális egész függvénynek nem az n-ik, hanem csak $\overline{n-1}$-ik hatványa.

Ha erre az integrálra megint alkalmazzuk az előbbi redukciós eljárást, akkor az integrándus nevezőjében $p(x)$-nek már csak $n-2$-ik hatványa szerepel. Így haladva tovább, olyan racionális függvény integráljának kiszámítására vezethetjük vissza a feladatot, melynek nevezője $p(x)$, csupa egyszerű gyöktényező szorzata; tehát végelemzésben a párciális törtekre bontás legegyszerűbb esetével van dolgunk.

22. Racionális függvény integrálása Hermite módszerével. Ha $\psi(x)=0$-nak többszörös gyökei vannak, akkor az $\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx$ kiszámítása végett, miként láttuk, a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$-et párciális törtekre bontjuk. Az imént tárgyalt példában láttuk, hogy ha $\psi(x)=[p(x)]^n$, ahol $p(x)=0$-nak csupa különböző gyöke van, vagyis a $\psi(x)=0$ egyenlet mind egyik gyöke n-szeres gyök, akkor egy redukciós eljárással visszavezethettük a feladatot arra, hogy csak a részlettörtekre bontás legegyszerűbb esetével legyen dolgunk. Megmutatjuk most, hogy ezt mindig megtehetjük. Vagyis, hogy tisztán racionális műveletek segítségével az $\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx$ kiszámítását csupa $\int \frac{q(x)}{[p(x)]^n} dx$ alakú integrálok kiszámítására vezethetjük vissza.

Jelöljük $\psi(x)$ azon gyöktényezőinek szorzatát, melyek egyszerűek: $p_1(x)$-el; azon gyöktényezők szorzatát, melyek mindegyike kétszeres, (vagyis a kétszeres gyökökhöz tartozó gyöktényezők szorzatát) $p_2(x)$-el s így tovább, akkor

$$\psi(x)=p_1(x)[p_2(x)]^2[p_3(x)]^3\dots$$

Így például, ha

$$\psi(x)=(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2(x-e)^3(x-f)^4(x-g)^4,$$

akkor

$$p_1(x)=(x-a)(x-b),\quad p_2(x)=(x-c)(x-d),$$

$$p_3(x)=x-e,\qquad p_4(x)=(x-f)(x-g)$$

és

$$\psi(x)=p_1(x)[p_2(x)]^2[p_3(x)]^3[p_4(x)]^4.$$

Azt állítjuk, hogy a $p_1(x), p_2(x), \dots$ racionális egész függvények racionális műveletekkel, tehát az egyenlet megoldása nélkül határozhatók meg.

Mielőtt tovább mennénk, hivatkozunk arra, hogy ha a $\psi(x)=0$ egyenletnek a α-szoros gyöke, akkor a $\psi'(x)=0$ egyenletnek ez az a éppen $\alpha-1$-szeres gyöke.

Ugyanis, ha $\psi(x)=(x-a)^\alpha\psi_1(x)$, ahol $\psi_1(a)\neq 0$, akkor

$$\psi'(x)=\alpha(x-a)^{\alpha-1}\psi_1(x)+(x-a)^\alpha\psi_1'(x)=(x-a)^{\alpha-1}[\alpha\psi_1(x)+(x-a)\psi_1'(x)]$$

és minthogy a zárójelben álló kifejezés az $x=a$ helyen nem 0, tehát valóban $\psi'(x)=0$-nak az a éppen $\alpha-1$-szeres gyöke.

Ebből következik, hogy $\psi'(x)$ osztható p_2-vel, továbbá p_3^2-el, p_4^3-al s í. t. és minthogy ezeknek közös osztójuk nincsen, tehát

$$\psi'(x)=p_2p_3^2p_4^3\dots\varrho(x),$$

ahol már $\varrho(x)=0$-nak a $\psi(x)=0$-al közös gyöke nincsen. Ebből következik, hogy $\psi(x)$ és $\psi'(x)$ racionális egész függvények legnagyobb közös osztója, melyet az ismeretes osztási eljárással meghatározhatunk: $p_2p_3^2p_4^3\dots$ Jelöljük ezt a racionális egész függvényt $\pi(x)$-el. Eszerint tehát:

$$f_1(x)=\frac{\psi(x)}{\pi(x)}=p_1p_2p_3p_4\dots$$

A $\frac{\psi(x)}{\pi(x)}$ racionális egész függvénynek csupa egyszerű gyöktényezője van és pedig ezek a $\psi(x)$ gyöktényezőivel megegyeznek. Most a $\pi(x)=p_2p_3^2p_4^3\ldots$ racionális egész függvénnyel éppen úgy bánunk el, mint előbb a $\psi(x)$-el. Megkeressük a $\pi(x)$ és $\pi'(x)$ legnagyobb közös osztóját. Ez $X(x)=p_3p_4^2p_5^3\ldots$ lesz. Ezzel elosztjuk a $\pi(x)$-et. Hányadosul kapjuk a $p_2p_3p_4\ldots$-et, melyet $f_2(x)$-el jelölünk. A $X(x)$-el most folytatjuk az eljárást. Megkeressük a $X(x)$ és $X'(x)$ legnagyobb közös osztóját. Ezzel elosztjuk a $X(x)$-et. Hányadosul a $p_3p_4\ldots$-et kapjuk, melyet $f_3(x)$-el jelölünk s í. t. Eszerint racionális műveletekkel eljutottunk az

$$f_1(x)=p_1p_2p_3p_4\ldots,\ f_2(x)=p_2p_3p_4\ldots,\ f_3(x)=p_3p_4p_5\ldots,\ \ldots$$

racionális egész függvényekhez és ezekből azt kapjuk, hogy:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=p_1,\ \frac{f_2(x)}{f_3(x)}=p_2,\ \frac{f_3(x)}{f_4(x)}=p_3,\ldots$$

Szóval, pusztán racionális műveletekkel, az adott egyenlet megoldása nélkül, megkaptuk a $p_1(x), p_2(x), p_3(x), \ldots$ tényezőket. Így tehát a $\psi(x)$-et az osztási eljárás segítségével mindig felbonthatjuk ilyen módon:

$$\psi(x)=p_1(x)[p_2(x)]^2[p_3(x)]^3\ldots$$

Most már az $\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$ redukálása a következő módon végezhető: Ha $\psi(x)$-et így írjuk: $\psi(x)=p_1(x)\varrho(x)$, akkor azonnal látjuk, hogy p_1 és ϱ-nak közös osztója nincsen; tehát a már említett tétel szerint meghatározhatók olyan $a(x)$ és $b(x)$ racionális egész függvények, hogy identikusan:

$$a(x)p_1(x)+b(x)\varrho(x)=1$$

legyen és ebből, ha $p_1(x)\varrho(x)$-el osztunk:

$$\frac{a(x)}{\varrho(x)}+\frac{b(x)}{p_1(x)}=\frac{1}{p_1(x)\varrho(x)},$$

vagyis az $\frac{1}{p_1(x)\varrho(x)}=\frac{1}{\psi(x)}$-et felbontottuk részlettörtekre, melyek közül az egyik nevezője $p_1(x)$, a másiké $\varrho(x)$. Ha most $\varphi(x)$-el szorzunk mindkét oldalon és ha lehetséges, az osztást elvégezzük úgy, hogy az egyes tagokban a számláló a nevezőnél alacsonyabb fokú legyen, akkor

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=f(x)+\frac{\alpha(x)}{\varrho(x)}+\frac{\beta(x)}{p_1(x)}$$

alakban áll elő, ahol $f(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ racionális egész függvények. $\alpha(x)$ fokszáma kisebb $\varrho(x)$-énél és $\beta(x)$-é kisebb $p_1(x)$-énél.

Most ugyanilyen módon tovább haladunk. $\varrho(x)=p_2^2(x)\tau(x)$ tesszük, ahol $\tau(x)$ a $p_2(x)$-el relativ prim; tehát található ismét olyan két, megint átmenetileg $a(x)$ és $b(x)$-el jelölt racionális egész függvény, hogy

$$a(x)p_2^2(x)+b(x)\tau(x)=1$$

legyen. Innen pedig:

$$\frac{a(x)}{\tau(x)}+\frac{b(x)}{[p_2(x)]^2}=\frac{1}{\varrho(x)},$$

amiből az előbbi

$$\frac{\alpha(x)}{\varrho(x)}=\frac{\gamma(x)}{[p_2(x)]^2}+\frac{\delta(x)}{\tau(x)}+f_1(x)$$

alakban áll elő, ahol $f_1(x)$, $\gamma(x)$ és $\delta(x)$ racionális egész függvények, melyek közül $\gamma(x)$ alacsonyabb fokú $[p_2(x)]^2$-nél és $\delta(x)$ a $\tau(x)$-nél. Eszerint tehát:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\beta(x)}{p_1(x)}+\frac{\gamma(x)}{[p_2(x)]^2}+\frac{\delta(x)}{\tau(x)}+f(x)$$

alakban állítható elő. Ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ részlettörtekre bomlik, melyek nevezői rendre $p_1(x)$, $[p_2(x)]^2$, $[p_3(x)]^3, \ldots$, vagyis egy racionális egész függvénytől eltekintve, $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ilyen alakra hozható:

$$\frac{\pi_1(x)}{p_1(x)}+\frac{\pi_2(x)}{[p_2(x)]^2}+\frac{\pi_3(x)}{[p_3(x)]^3}+\ldots,$$

ahol a számláló fokszáma mindenütt alacsonyabb a nevezőénél. Az $\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$ kiszámítása most már tehát csupa olyan alakú racionális függvényekre vonatkozó integrálok kiszámítására redukálódott, amilyenekkel előbb foglalkoztunk, melyek nevezői ilyen alakúak: $[p(x)]^k$, ahol $p(x)$-nek csupa különböző gyöktényezője van.

Ennek az eljárásnak a föntebb tárgyalt általános módszer fölött az az előnye, hogy az imaginárius gyököket nem is kell a számítás folyamán külön tekintetbe venni, mert az imaginárius gyökpárok mindig ugyanazon p tényezőben fordulnak elő. Minthogy pedig az $\int\frac{q(x)}{[p(x)]^k}dx$ kiszámítása végső elemzésben $\int\frac{q_1(x)}{p(x)}dx$ számítására van visszavezetve, tehát az imaginárius gyökökhöz tartozó részlettörtek összevonása úgy történik, ahogy a 309. lapon megállapítottuk.

23. Irracionális kifejezések integrálása. Ezt az elnevezést: Irracionális kifejezés, átmenetileg rövidség kedvéért használjuk az olyan racionális kifejezések megjelölésére, melyekben x racionális egész függvényeiből vont gyökök is szerepelnek. Így például, ha $\sqrt{x}$-el ezt a törtet készítjük:

$$\frac{a+b\sqrt{x}}{c+d\sqrt{x}},$$

vagy ha $\sqrt{a+bx+cx^2}$-el ezt a kifejezést alkotjuk:

$$\frac{k+lx}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

vagy általában x és $\sqrt{a+bx+cx^2}$-ből valamely $f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})$ racionális kifejezést készítünk stb.; szóval, ha az x változóból olyan kifejezést készítünk, melynél csakis a négy alapművelet és gyökvonás szerepel. Nem fogjuk ezúttal az ilyen kifejezések integrálásának kimerítő tárgyalását elvégezni, csak inkább a legegyszerűbb esetekkel foglalkozunk.

a) *Az integrandus x elsőfokú kifejezéséből vont gyököket tartalmaz.* Ha az integrandus x-ből vont gyököknek racionális kifejezése, akkor az integrálás ismeretes függvényekre vezet. Így például, ha x-nek különböző rendű gyökeiből, például $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$-ből alkotunk a 4 alapművelet segítségével egy kifejezést, mondjuk ezt:

$$\frac{a+b\sqrt{x}+c\sqrt[3]{x}}{d+e\sqrt{x}+f\sqrt[4]{x}},$$

vagy általában $\sqrt[k]{x}$, $\sqrt[l]{x}, \ldots$-ből alkotunk egy

$$f(\sqrt[k]{x}, \sqrt[l]{x}, \ldots)$$

kifejezést a 4 alapművelet segítségével, akkor az

$$\int f(\sqrt[k]{x}, \sqrt[l]{x}, \ldots)\, dx$$

meghatározásánál úgy járunk el, hogy először is a különböző kitevőjű gyököket egyazon kitevőjű gyökkel fejezzük ki. Elég világos lesz az általános eljárás akkor is, ha csak egyes példákon mutatjuk be az integrálás menetét. Legyen a következő integrál kiszámítandó:

$$\int \frac{1+2\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

$\sqrt{x}$-et és $\sqrt[3]{x}$-et $\sqrt[6]{x}$-el fejezzük ki: $\sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3$, $\sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2$ és ha $\sqrt[6]{x}$-et y-al jelöljük, akkor $x=y^6$ és $dx=6y^5dy$; tehát:

$$\int \frac{1+2\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx = 6\int \frac{1+2y^3}{1-y^2}\, y^5 dy,$$

tehát racionális függvény integrálásával van dolgunk. A számláló magasabb fokú, mint a nevező; de

$$(2y^8+y^5):(-y^2+1) = -2y^6-2y^4-y^3-2y^2-y-2+\frac{y+2}{1-y^2}$$

és minthogy $\int \frac{y+2}{1-y^2}\, dy = -\frac{3}{2}\log(y-1)+\frac{1}{2}\log(y+1)$, tehát y helyébe megint $\sqrt[6]{x}$-et téve

$$\int \frac{1+2\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx = 6\Big[-\frac{2}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{2}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{x^3}+$$

$$-\frac{\sqrt[6]{x^2}}{2}-2\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\log(\sqrt[6]{x}-1)+\frac{1}{2}\log(\sqrt[6]{x}+1)\Big].$$

Ugyanilyen eljárást követünk akkor is, ha az integrandus nem az x gyökeiből alkotott racionális kifejezés, hanem a gyökjelek alatt x-nek ugyanazon elsőfokú kifejezése áll. Így például, ha a gyökjelek alatt mindenütt $ax+b$ szerepel, vagyis az integrandus $\sqrt[k]{ax+b}$, $\sqrt[l]{ax+b}$ stb.-ből a négy alapművelet segítségével alkotott kifejezés, akkor az integrálást könnyen vissza lehet vezetnünk az előbbire. Ha ugyanis $ax+b$ helyett z-t írunk és dx helyett megfelelően $\frac{dz}{a}$ tétetik, akkor az integrandus éppen olyan alakú lesz, mint az előbbi esetben.

Eszerint tehát látjuk, hogy ha *az integrandus az x valamely elsőfokú kifejezéséből vont különböző gyökökből a négy alapművelet segítségével keletkezett kifejezés, akkor az integrál csupa ismeretes függvény által fejezhető ki.*

b) *Az integrándus x másodfokú rac. egész kifejezésének négyzetgyökét tartalmazza.* Most azzal az esettel akarunk foglalkozni, midőn az integrandus az x másodfokú kifejezéséből vont négyzetgyöknek és magának az x-nek racionális kifejezése; tehát olyan tört $\frac{P}{Q}$, melynek számlálója is, nevezője is x-nek és $\sqrt{ax^2+bx+c}$-nek racionális egész függvénye. Minthogy a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ második hatványa már ax^2+bx+c, tehát $\sqrt{ax^2+bx+c}$ minden páros hatványa az x racionális egész kifejezése és minden páratlan hatványt tartalmazó tag így írható: $\alpha(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$, ahol $\alpha(x)$ racionális egész függvény. Ebből következik, hogy $\frac{P}{Q}$ mindenesetre ilyen alakú:

$$\frac{P}{Q}=\frac{A(x)+B(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}{C(x)+D(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

és ha még a számlálót és a nevezőt $C(x)-D(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$-vel szorozzuk, vagyis e tört nevezőjét gyökteleknítjük és az új nevezőt, mely x-nek egész függvénye, $M(x)$-el jelöljük, a $\frac{P}{Q}$ ilyen alakúvá lesz:

$$\frac{P}{Q}=\frac{K(x)+L(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}{M(x)},$$

ahol $K(x)$, $L(x)$ és $M(x)$ az x-nek rac. egész függvényei. A $\frac{K(x)}{M(x)}$ racionális függvény integrálását már el tudjuk végezni. Az egész feladat tehát az

$$\int\frac{L(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}{M(x)}dx$$

meghatározására redukálódik.

Két esetet különböztetünk meg:

α) az x^2 együtthatója pozitiv és *β)* az x^2 együtthatója negativ.

[Föltesszük, hogy $b^2-4ac \neq 0$, mert különben ax^2+bx+c teljes négyzet és így az integrándus x racionális függvénye volna.]

α) x^2 együtthatója pozitiv. Ha a pozitiv, akkor az x helyébe új z variabilist vezetünk be a következő szubsztitucióval:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a}.$$

Ha ugyanis mindkét oldalon négyzetre emelünk, akkor

$$bx+c=z^2-2zx\sqrt{a}$$

egyenletre jutunk, miből:

$$x=\frac{z^2-c}{b+2z\sqrt{a}}$$

és
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\frac{z^2-c}{b+2z\sqrt{a}}\sqrt{a}=\frac{bz+z^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{b+2z\sqrt{a}}.$$

Azt a fontos tüneményt észleljük, hogy a bevezetett z variabilis által úgy az x, valamint a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ racionálisan fejezhető ki. Ezt az észleletet még más alakban is kifejezzük. Ha $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, azaz $y^2=ax^2+bx+c$ (másodrendű görbe), akkor y az x-nek nem rac., hanem gyökkifejezése, vagy mondjuk algebrai kifejezése; de a z által úgy az x, mint az y racionálisan fejezhető ki.

Az $x=\frac{z^2-c}{b+2z\sqrt{a}}$-ből kiszámítjuk a dx-et is.

$$dx=2\frac{bz+z^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{(b+2z\sqrt{a})^2}dz.$$

Ha már most az

$$\int\frac{L(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}{M(x)}dx\text{-be}$$

ezen egyenletek segítségével az új z változót hozzuk be, akkor az integrandus a z racionális függvénye lesz, tehát az integrál z ismeretes függvényei által fejezhető ki és ha azután végül z helyett visszatesszük a $\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$ kifejezést, akkor az integrálást befejeztük. Megjegyezzük, hogy ez az eljárás alkalmazható, anélkül, hogy az integrandust az előbb használt redukciónak alávetnők.

1. Példa. Egy igen egyszerű példán mutatjuk be részletesebben az eljárást. Legyen a kiszámítandó integrál:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

A jelen esetben x^2 együtthatója pozitiv. Tegyük: $\sqrt{1+x^2}=z-x$ és innen:

$$1=z^2-2xz,\text{ vagyis } x=\frac{-1+z^2}{2z};$$

$$\sqrt{1+x^2}=z-\frac{-1+z^2}{2z}=\frac{z^2+1}{2z} \quad \text{és} \quad dx=\frac{1+z^2}{2z^2}dz.$$

A keresett integrál tehát a következő lesz:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\left(\frac{1+z^2}{2z^2}:\frac{1+z^2}{2z}\right)dz=\int\frac{dz}{z}=\log z+C,$$

vagyis:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log[\sqrt{1+x^2}+x]+C$$

és így, ha még C helyett $\log c$-t teszünk,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log c[x+\sqrt{1+x^2}].$$

2. *Példa.* Második példa gyanánt az $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ kiszámítását választjuk, ha $a>0$. Az előbb használt szubsztitució a következő:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a},$$

miből, miként láttuk:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{bz+z^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{b+2z\sqrt{a}} \quad \text{és} \quad dx=2\frac{bz+z^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{(b+2z\sqrt{a})^2}dz$$

és így:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{2dz}{b+2z\sqrt{a}}=+\frac{1}{\sqrt{a}}\log(b+2z\sqrt{a})+C$$

és z helyett visszatéve a $z=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$ értékét, $b+2z\sqrt{a}=$ $=2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$ lesz és így:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log[2ax+b+2\sqrt{a^2x^2+abx+ac}]+C,$$

vagy ha még $\frac{\log 2}{\sqrt{a}}$-t a C-hez csatoljuk, akkor

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left[ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a^2x^2+abx+ac}\right]+C.$$

Ha $a=1$, $b=0$, $c=1$, akkor az

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

előbbi formulát kapjuk; ha $a=1$, $b=0$, akkor pedig

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\log[x+\sqrt{x^2+c}]+C.$$

β) x^2 együtthatója negativ. Ha az x^2 együtthatója negativ, akkor az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökeinek valósaknak kell lenniök; mert ha $ax^2+bx+c=0$ gyökei képzetesek, pl.: $\alpha+\beta i$ és $\alpha-\beta i$, akkor

$$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$$

x minden értékénél negativ lenne, tehát $\sqrt{ax^2+bx+c}$ imaginarius volna x minden értékénél. Imaginarius mennyiségek integrációjával még nem foglalkozunk; tehát, ha az eddigi keretben akarunk megmaradni, föl kell tennünk, hogy $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei valósak. Ekkor ugyanis az ax^2+bx+c értéke a gyökök közötti intervallumban pozitiv. Legyenek e gyökök k és l, úgy, hogy

$$ax^2+bx+c=a(x-k)(x-l)$$

és így:
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-k)\sqrt{\frac{a(x-l)}{x-k}}.$$

(Mindkét oldalon például a pozitiv négyzetgyök veendő, minthogy $x-k$ a kl közben pozitiv.) Ha az x a $k \ldots l$ közben van, akkor $\frac{a(x-l)}{x-k}$ pozitiv; tehát mondhatjuk, hogy:

$$\frac{a(x-l)}{x-k}=z^2,$$

vagyis:
$$x=\frac{al-kz^2}{a-z^2}$$

és innen:
$$x-k=\frac{a(l-k)}{a-z^2} \quad \text{és} \quad dx=-\frac{2az(l-k)}{(a-z^2)^2}\,dz,$$

tehát:
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-k)\sqrt{\frac{a(x-l)}{x-k}}=\frac{a(l-k)}{a-z^2}\,z.$$

Ha már most a szóban forgó integrálba x és $\sqrt{ax^2+bx+c}$ helyébe, valamint dx helyett a most kiszámított értékeket tesszük, akkor z racionális függvényére vonatkozó integrálra jutunk.

1. Példa. Példaképpen számítsuk ki ezt az integrált:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

melyről úgy is tudjuk, hogy arc sin x. Az általános eljárás ezt az ismert eredményt elég hosszadalmasan szolgáltatja. Ugyanis itt $a=-1$, $k=-1$, $l=+1$, tehát az előbbi formulák szerint: $\sqrt{1-x^2}=\frac{2z}{1+z^2}$ és $dx=-\frac{4z\,dz}{(1+z^2)^2}$ és így:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-2\int \frac{dz}{1+z^2}.$$

De
$$-\int \frac{dz}{1+z^2} = -\operatorname{arc\,tg} z + C,$$
tehát:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\operatorname{arc\,tg} z + C = -2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Tegyük $x = \cos u$, akkor $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$ és így:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{u}{2} + C = -u + C = -\arccos x + C.$$

Ha végül C helyett $\frac{\pi}{2} + C$-t tesszük és tekintetbe vesszük, hogy $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$, akkor tehát
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$
ismeretes képletre jutunk.

2. Példa. Második példa gyanánt válasszuk az
$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
kiszámítását, ha $a<0$. De ahelyett, hogy az általános eljárást specializálnók, itt egyszerűbb utat követhetünk.
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = -a\left[\frac{b^2-4ac}{4a^2} - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right].$$

A b^2-4ac mindenesetre pozitiv, mert különben, miként említettük, az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei képzetesek volnának és a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kifejezés mindig képzetes lenne. Jelöljük $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$-et röviden α^2-el; tehát
$$ax^2+bx+c = -a\left[\alpha^2 - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right] = -a\alpha^2\left[1 - \frac{1}{\alpha^2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right].$$

Tegyük most $x+\frac{b}{2a} = \alpha z$ és megfelelően: $dx = \alpha dz$; ekkor:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin z =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

3. Példa. Számítsuk ki az eddigi eljárásokkal ezt az integrált:
$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Ha a pozitiv, akkor az első szubsztituciót alkalmazzuk, vagyis

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\sqrt{a}\,.\,x$$

tesszük, miből:

$$x=\frac{z^2-c}{b+2z\sqrt{a}};\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{bz+z^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{b+2z\sqrt{a}}$$

$$dx=2\frac{bz+z^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{(b+2z\sqrt{a})^2}dz$$

és így:
$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=2\int\frac{(bz+z^2\sqrt{a}+c\sqrt{a})^2}{(b+2z\sqrt{a})^3}dz$$

racionális függvény integrációjára redukáltuk a feladatot. A számláló negyedfokú, a nevező harmadfokú.

Ennek az integrálnak a kiszámítása kissé körülményes, azért az

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

meghatározására egy más eljárást is használunk: a parciális integrálás módszerét. Ez az eljárás az integrált akkor is megadja, ha a negativ. Jelöljük evégből a $\sqrt{ax^2+bx+c}$-t u-val és dx-et dv-vel; ekkor tehát:

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{1}{2}\int\frac{x(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{1}{2}\int\frac{2ax^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Ha még $2ax^2+bx$ helyett ezt írjuk: $2ax^2+2bx+2c-(bx+2c)$ és $\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\sqrt{ax^2+bx+c}$ tesszük, akkor:

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,.\,dx=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,.\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{bx+2c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Ha még a jobboldali második tagot a baloldalra hozzuk, akkor:

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,.\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{1}{4}\int\frac{bx+2c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

A keresett integrál kiszámítását tehát az $\int\frac{bx+2c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$-re vezettük vissza. A számlálót így írjuk:

$$\frac{b}{2a}[2ax+b]+\frac{4ac-b^2}{2a};$$

vagyis a jobboldalon álló integrál

$$\int \frac{bx+2c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{b}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \frac{4ac-b^2}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

A jobboldali első tag könnyen kiszámitható, minthogy $2ax+b$ az ax^2+bx+c differenciálhányadosa; ez a tag tehát:

$$\frac{b}{a}\sqrt{ax^2+bx+c};$$

a második tagban szereplő integrált már meghatároztuk és pedig, ha a pozitiv, ez a tag

$$\frac{4ac-b^2}{2a\sqrt{a}}\log\left[2ax+b+2\sqrt{a^2x^2+abx+ac}\right],$$

ha pedig a negativ, akkor ez a tag

$$\frac{4ac-b^2}{2a\sqrt{-a}}\arc\sin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Így tehát, ha a pozitiv:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}\log\left[2ax+b+2\sqrt{a^2x^2+abx+ac}\right]+C.$$

Ha a negativ:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{-a}}\arc\sin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

Így péld., ha $a=1$, $b=0$

$$\int \sqrt{x^2+c}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+c} + \frac{c}{2}\log\left[x+\sqrt{x^2+c}\right]+C,$$

ha pedig $a=-1$, $b=0$

$$\int \sqrt{c-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{c-x^2} + \frac{c}{2}\arc\sin\frac{x}{\sqrt{c}}+C.$$

A most tárgyalt eljárással meg tudjuk határozni mindazokat az integrálokat, amelyekben az integrándus az x és $\sqrt{ax^2+bx+c}$ rac. függvénye. Ezekre vezethető vissza az integrálás akkor is, ha az integrándus úgy keletkezik az x, $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ és $\sqrt{\frac{ex+f}{cx+d}}$-ből, hogy ezen kifejezéseken a négy alapműveletet végezzük. Ezt a következő egyszerű meggondolással láthatjuk be. Tegyük az $\frac{ax+b}{cx+d}$ helyett z^2-et, vagyis $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ helyett a z-t. Ebből $x=\frac{dz^2-b}{a-cz^2}$ és így a második gyök a következővé válik:

$$\sqrt{\frac{ex+f}{cx+d}}=\sqrt{\frac{(ed-fc)z^2-(eb-af)}{ad-bc}},$$

tehát a z változó bevezetésével az integrandus a z-ből és az $\sqrt{(ed-fc)z^2-(eb-af)}$-ből racionálisan alkotott kifejezéssé válik, és így az integrálás az előbbi módon végezhető.

24. A binom differenciál integrálása. a) *Az integrálhatóság esetei.* Ha az integrál jele alatt álló differenciál-kifejezés ilyen alakú:

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

ahol a, b állandó számértékek és m, n, p exponensek racionális számok, akkor ezt a kifejezést *binom differenciálnak* nevezzük. Ha m, n és p pozitiv vagy negativ egész számok, akkor az $x^m(a+bx^n)^p$ racionális függvénye az x-nek, tehát az integrációját el tudjuk végezni az eddigiek szerint. Ha csak a p egész, az m és n pedig törtszámok, akkor is elvégezhetjük az előbbiek szerint az integrációt, mert ha m-et és n-et közös nevezőre hozzuk és például $m=\frac{\alpha}{\gamma}$, $n=\frac{\beta}{\gamma}$, akkor az $x^m(a+bx^n)^p$ az $x^{\frac{1}{\gamma}}$-nak racionális kifejezése lesz, tehát az integrálás a 316. lap fejtegetései szerint elvégezhető.

De ha p nem egész szám, akkor is átalakíthatjuk az integrál alatti kifejezést oly módon, hogy az m és n törtszámexponensek (mondjuk: a külső és a belső exponensek) helyébe egész számok kerüljenek. Ha ugyanis γ megint az m és n nevezőinek legkisebb közös többese és $x^{\frac{1}{\gamma}}=z$ tesszük, akkor $x^m=z^\alpha$ és $x^n=z^\beta$ és $dx=\gamma z^{\gamma-1}dz$, tehát:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\gamma\int z^{\alpha+\gamma-1}(a+bz^\beta)^p dz.$$

Ezzel a transzformációval tehát elértük, hogy most már úgy a külső, mint a belső exponens egész számmá vált. Még azt is elérhetjük, hogy a belső exponens pozitiv legyen. Ha például β negativ volna, akkor z helyébe $\frac{1}{y}$-t teszünk, ekkor az integrál a következőbe megy át:

$$-\gamma\int y^{-(\alpha+\gamma+p\beta+1)}(b+ay^{-\beta})^p dy,$$

vagyis az integrál megmarad ilyen alakúnak:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

ahol most már m és n egész számok és n pozitiv. Eszerint tehát *csakis olyan integrálokkal kell foglalkoznunk, amelyekben a külső és a belső exponens egész szám és a belső pozitiv.*

a) Említettük, hogy az integrálást el tudjuk végezni, ha p exponens egész szám. Ha tehát az integrált olyanná tudjuk átalakítani, amelyben p helyén egész exponens áll, akkor az integráció elvégezhető. Ezt két esetben tehetjük: ha $\frac{m+1}{n}$, vagy ha $\frac{m+1}{n}+p$ egész szám.

α) Ha ugyanis $a+bx^n$ helyébe a z variabilist tesszük, akkor:

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz$$

és így:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{nb}\int\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}z^p\,dz.$$

A jobboldalon álló integrálban a p exponens helyébe $\frac{m+1}{n}-1$ lépett. Ha tehát $\frac{m+1}{n}$ egész szám, vagyis, ha az eggyel nagyobbított külső exponens a belső exponensnek többese, akkor az integráció elvégezhető.

β) Ha pedig az eredeti integrálban az $(a+bx^n)^p$ helyébe $x^{np}(ax^{-n}+b)$-t írunk, akkor:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx.$$

Ez, mint az imént mondtuk, akkor integrálható, ha az eggyel nagyobbított külső exponens a belsővel osztható, vagyis, ha $\frac{m+1}{n}+p$ egész szám. Ezzel kimutattuk, hogy a szóban forgó integrál az eddigi módszerekkel kiszámítható, ha $\frac{m+1}{n}$, vagy $\frac{m+1}{n}+p$ egész szám. Ha még hozzávesszük, hogy akkor is integrálható, ha p egész szám, akkor tehát azt kapjuk, hogy az

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

*az ismeretes elemi függvényekből a 4 alapművelettel kiszámítható, ha p, vagy $\frac{m+1}{n}$, vagy pedig $\frac{m+1}{n}+p$ egész szám.**

b) *Az integrándus egyszerűsítése.* Az integrálhatóság feltételei áttekinthetőbbek, ha $n=1$, amit feltehetünk, mert az integrándust mindig átalakíthatjuk úgy, hogy n helyébe 1 lépjen. Ugyanis, ha az $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$-ben x^n helyébe z-t teszünk, vagyis x helyébe $z^{\frac{1}{n}}$-et, akkor

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p\,dz.$$

Ezen az alakon látjuk, hogy integrálható (azaz ismeretes függvények által kifejezhető), ha p egész szám, vagy ha $\frac{m+1}{n}$ egész szám. Az első közvetlenül világos, a második pedig azonnal világossá lesz, ha $a+bz$ helyébe

* Tschebitschef kimutatta, hogy más esetben nem lehetséges. Journal de Math. 1853.

új variabilist vezetünk be. Eszerint tehát ha a binom differenciál ilyen redukált alakban szerepel, melyben a belső exponens 1, akkor az

$$\int x^q (a+bx)^p\, dx$$

integrálható, ha vagy q, vagy p egész szám. Ha ezt most ilyen alakban írjuk

$$\int x^{p+q} (ax^{-1}+b)^p\, dx,$$

akkor meg azt látjuk, hogy integrábilis esettel van dolgunk, ha $p+q$ egész szám. Az előbb talált integrábilitási feltételekből is ugyanezen eredményre jutunk, ha e föltételeket e redukált alakú integrálra alkalmazzuk. Az általános föltételek ugyanis azok voltak, hogy vagy $\frac{m+1}{n}$, vagy $\frac{m+1}{n}+p$, vagy pedig p egész szám legyen. Minthogy a jelen esetben $m=q$, $n=1$, tehát e feltételek a következők lesznek: vagy q, vagy $p+q$, vagy p legyen egész szám.

Az $\int x^q (a+bx)^p\, dx$ redukált alak integrálható, ha p vagy q, vagy $p+q$ egész szám.

c) *Az integrálás menete.* Megmutatjuk, hogy miképpen lehet az

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$$

integrált redukálni, hogy azon esetben, midőn az integrálhatóság egyik föltétele teljesítve van, az integrációt be is fejezhessük; de egyúttal más esetekben is egyszerűbb alakra jussunk. Jelöljük rövidség kedveért az $(a+bx^n)$-et y-nal; úgy, hogy az integrál ilyen alakú lesz: $\int x^m y^p\, dx$.

Integráljunk parciálisan és pedig y^p-t tekintsük u-nak, $x^m dx$-et dv-nek; ekkor $du=py^{p-1}\,.\,bnx^{n-1}dx$;

$$\int x^m y^p\, dx = \frac{x^{m+1}y^p}{m+1} - \frac{p\,.\,b\,.\,n}{m+1}\int x^{m+n}y^{p-1}\, dx. \qquad \alpha)$$

Ezzel az eljárással már elértük, hogy y exponense eggyel alább szállott. Ha tehát p pozitiv egész szám, akkor ezen eljárás ismételt alkalmazásával már az integrációt be is fejezhetjük. Ha p negativ egész szám, akkor ugyanezt mondhatjuk. Ugyanis ha ezt az egyenletet a jobboldali integrálra megoldjuk:

$$\int x^{m+n}y^{p-1}\, dx = \frac{x^{m+1}y^p}{p\,.\,b\,.\,n} - \frac{m+1}{p\,.\,b\,.\,n}\int x^m y^p\, dx$$

-re jutunk és ha itt $m+n$ helyett m-et, $p-1$ helyett p-t írunk, akkor:

$$\int x^m y^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}y^{p+1}}{(p+1)\,b\,.\,n} - \frac{m-n+1}{(p+1)\,b\,.\,n}\int x^{m-n}y^{p+1}\, dx, \qquad \beta)$$

amely az adott integrált olyanba viszi át, melyben a p exponens helyébe eggyel nagyobb lépett. Ha tehát p negativ egész szám, akkor ezen reductio p-szer való ismétlésével az integrálást be is fejezzük.

Az $\alpha)$ és $\beta)$ formuláknak az a hátrányuk, hogy mindkét exponenst megváltoztatják. Ezekből azonban olyan rekursiós formulákat vezethetünk le, amelyekben csak egyik exponens változik meg. Ha ugyanis a $\beta)$ alatti egyenlet jobboldalán álló integrálban y^{p+1}-et így irjuk: $y^p(a+bx^n)$, akkor ez az integrál a következőbe megy át:

$$a\int x^{m-n} y^p\,dx + b\int x^m y^p\,dx,$$

tehát, ha még az $\int x^m y^p dx$-et tartalmazó tagot a baloldalra hozzuk és $\frac{np+m+1}{(p+1)n}$ együtthatóval osztunk:

$$\int x^m y^p\,dx = \frac{x^{m-n+1} y^{p+1}}{b.(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n} y^p\,dx. \qquad \text{I.}$$

Ez a formula két olyan integrált kapcsol össze, melyek csak az első exponensben különböznek egymástól. Ha ezt az egyenletet a jobboldali integrálra megoldjuk és m helyett $m+n$-et írunk, akkor a következőre jutunk:

$$\int x^m y^p\,dx = \frac{x^{m+1} y^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n} y^p\,dx. \qquad \text{II.}$$

Míg az I. egyenlet az első exponenst n-nel leszállítja, addig a II. n-nel felemeli.

Ha az $a)$ alatti formulában p helyett $p+1$-et teszünk, akkor észrevesszük, hogy a jobboldalán éppen úgy, mint a II.-ben $\int x^{m+n} y^p dx$ szerepel. Ha ezt elimináljuk, akkor a következő egyenletre jutunk:

$$\int x^m y^p\,dx = -\frac{x^{m+1} y^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+n(p+1)}{n(p+1)a}\int x^m y^{p+1}\,dx \qquad \text{III.}$$

és ha ezt a jobboldalon álló integrálra megoldjuk és $p+1$ helyett p-t teszünk:

$$\int x^m y^p\,dx = \frac{x^{m+1} y^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np}\int x^m y^{p-1}\,dx. \qquad \text{IV.}$$

E III. és IV. egyenletek olyan két integrál közötti kapcsolatot létesítenek, amelyek csakis a második exponensben különböznek és pedig 1 egységgel.

Ha nem csak m és n, hanem p is egész szám, akkor ezen relációk megjelölik az integrálásnál követendő eljárást. Ha ugyanis p negativ egész, akkor a III. formulát addig alkalmazzuk, míg az y exponense -1-re emelkedik. Ekkor már nem alkalmazható tovább e képlet; de ekkor az integrál ilyen alakú

$$\int \frac{x^m}{a+bx^n}\,dx,$$

amelyet parciális törtekre bontással integrálhatunk. Ebből tehát azt látjuk, hogy a III. formula minden $\int \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}dx$ alakú integrálnak az $\int \frac{x^m}{a+bx^n}dx$ alakra visszavezetését eszközli.

Ha p pozitiv egész szám és $m+1$ nem osztható n-el, akkor $m+1+np$ nem lehet 0, tehát a IV. formulával a p exponenst 1-gyel leszállíthatjuk; e formula újabb alkalmazásával $p-2$-re szállítjuk le az exponenst s í. t., míg végre 0 lesz az y exponense; az integráció e rekurziós eljárással befejeződött; ha azonban $m+1+np$, vagy $m+1+np-n, \ldots m+1+np-kn$ zérussá lesz, akkor a redukció nem folytatható. Fenmarad egy ilyen alakú integrál $\int x^m y^p dx$, ahol $m+1+np=0$. Ezen integrálban $m=-1-np$ téve:

$$\int x^m y^p\,dx = \int x^{-1}(ax^{-n}+b)^p\,dx$$

alakú integrálra jutunk, melyet, mint racionális függvény integrálját ismét parciális törtekre bontással számítunk ki. Ha p negativ, de nem egész szám, akkor a III. formulával mindig elérhetjük, hogy az y exponense pozitiv valódi tört legyen; mert soha sem lesz $p+1$ zérussá. Ha p pozitiv, de nem egész szám és np sem egész, akkor $m+1+np$ nem lehet 0, tehát a IV. formulával megint elérhetjük, hogy az y exponense valódi törtté váljon.

d) *Példák.* 1. Néhány példán mutassuk be az eljárás alkalmazását. Legyen m pozitiv egész, $n=2$, $a=1$, $b=-1$, $p=-\frac{1}{2}$; akkor az integrál a következő lesz:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ez mindig integrálható eset. Ugyanis, ha m páratlan szám, akkor $m+1$ osztható n-nel; ha m páros szám, akkor pedig $\frac{m+1}{n}+p$ egész szám.

Alkalmazzuk az I. képletet. Minthogy e formula az m exponenst n-nel csökkenti, tehát ha m páros szám, e képlet $\frac{m}{2}$-szeres alkalmazása után az x exponense zérussá válik és az utolsó integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x$. Ha pedig m páratlan, akkor végül $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ alakú integrálra jutunk; ez pedig: $-\sqrt{1-x^2}$.

Igy például, ha $m=2$, az I. formula szerint:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk az integrál következő, közvetlen számításával is:

Irjuk az integrándust ilyen alakban: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x$ és integráljunk parciálisan. u legyen: x, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, vagyis $v=-\sqrt{1-x^2}$. Eszerint tehát:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int dx\sqrt{1-x^2}.$$

$\sqrt{1-x^2}$ helyett ezt írjuk: $\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, tehát

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

és ha az utolsó tagot a baloldalra hozzuk és 2-vel osztunk:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Legyen $a=1$, $b=1$, $m=1$, $n=3$, $p=\frac{1}{3}$, vagyis a kiszámítandó integrál:

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$$

Ekkor: $\frac{m+1}{n}+p = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$, tehát integrálható esettel van dolgunk. Alkalmazzuk a *b)* alatti eljárást az integrál redukálására, vagyis tegyük: $z=x^3$. Ezzel az integrált erre redukáltuk:

$$I = \frac{1}{3}\int z^{-\frac{1}{3}}(1+z)^{\frac{1}{3}}\,dz$$

és ha ezt az *a)* alatti fejtegetések végén *β)* alatt említett módon átalakítjuk, vagyis a binomból $z^{\frac{1}{3}}$-t kiemeljük:

$$I = \frac{1}{3}\int (1+z^{-1})^{\frac{1}{3}}\, dz$$

lesz. Most már $m=0$, $n=-1$, $p=\frac{1}{3}$, tehát $\frac{m+1}{n}$ egész szám és így ha az *a)* alatti *α)* szerint $1+z^{-1}$ helyett új t variábilist hozunk be, vagyis

$$1+z=zt$$

tesszük, akkor
$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{t^{\frac{1}{3}}}{(t-1)^2}\, dt$$

és ha végül $t^{\frac{1}{3}} = u$ tesszük, akkor

$$I = -\int \frac{u^3}{(u^3-1)^2}\, du$$

és ebben az integrándus már racionális.

25. Trigonometriai függvények integrációja. Egyszerűbb esetek. E fejezetben a $\sin x$, $\cos x$-ből összeadás-, kivonás-, szorzás- és osztással megalkotott kifejezések, tehát a $\sin x$ és $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ racionális függvényeinek integrálásával foglalkozunk. A legegyszerűbbeket már ismerjük. Tudjuk, hogy (a C konstanst mindenütt elhagyva)

$$\int \sin x\, dx = -\cos x, \quad \int \cos x\, dx = \sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad -\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg} x.$$

Helyettesítéssel már meghatároztuk $\int \operatorname{cotg} x\, dx$-et is. Ha ugyanis $\sin x$ helyet y-t képzelünk, akkor

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{y} = \log y = \log \sin x:$$

tehát
$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \log \sin x.$$

Éppen így találjuk, hogy

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\log \cos x = \log \sec x.$$

a) $\int \sin^p x \cos^q x\, dx$ *kiszámítása*. Egy másik, egyszerűen meghatározható és igen gyakran szereplő trigonometriai integrál a következő: $\int \sin^2 x\, dx$ és ennek megfelelően $\int \cos^2 x\, dx$.

E két integrált egyszerre határozzuk meg. Jelöljük az elsőt I_1-gyel, a másodikat I_2-vel; tehát

$$I_1 = \int \sin^2 x\, dx; \quad I_2 = \int \cos^2 x\, dx.$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$I_1 + I_2 = \int (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int dx = x$$

és
$$I_2 - I_1 = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int \cos 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin 2x.$$

E két egyenletet összeadva, megkapjuk I_2-t, kivonással pedig I_1-et, azaz arra jutottunk, hogy

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C; \quad \int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

E két integrált parciális integrálással is kiszámithatjuk; minthogy azonban a követendő módszerrel általánosabb alakú trigonometriai integrálokat is kiszámíthatunk, azért inkább mindjárt az általánosabb eseten mutatjuk be az eljárást. Ha az integrándus ilyen alakú: $\sin^p x . \cos^q x$, ahol p és q pozitiv egész számok, vagy egyikük esetleg 0, azaz ezt az integrált kell meghatároznunk:

$$I = \int \sin^p x \cos^q x\,dx,$$

akkor a következőképpen járunk el: $\cos^2 x$ helyett $1-\sin^2 x$-et írunk; tehát ha q páros szám, akkor $\cos^q x$ helyett $(1-\sin^2 x)^{\frac{q}{2}}$-t tesszük és akkor az I csupa olyan integrálra bomlik, melyekben az integrandus $\sin x$ valamely pozitiv egész hatványa. Ha pedig q páratlan, akkor $\cos^{q-1} x$ helyett $(1-\sin^2 x)^{\frac{q-1}{2}}$-t tesszük és akkor az I integrál olyan integrálokra bomlik, melyeknek az integrándusa $\sin x$ valamely pozitiv egész hatványának és $\cos x$-nek szorzatai. Látjuk tehát, hogy az I integrál meghatározása végett csakis

$$I_1 = \int \sin^p x\,dx, \quad I_2 = \int \sin^p x \cos x\,dx$$

alakú integrálok meghatározásával kell foglalkoznunk.

Nézzük az elsőt. Tegyük $\sin^p x = \sin^{p-1} x . \sin x$ és jelöljük $\sin^{p-1} x$-et u-val, $\sin x$-et pedig v'-sal, vagyis $v = -\cos x$ és integráljunk parciálisan:

$$\int \sin^p x\,dx = -\sin^{p-1} x . \cos x + (p-1)\int \sin^{p-2} x . \cos^2 x\,dx.$$

Ha a jobboldali integrálban $\cos^2 x$ helyett $1-\sin^2 x$-et írunk, akkor

$$\int \sin^p x\,dx = -\sin^{p-1} x \cos x + (p-1)\int \sin^{p-2} x\,dx - (p-1)\int \sin^p x\,dx$$

és a jobboldali utolsó integrált a baloldalra hozva és p-vel osztva:

$$\int \sin^p x\,dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos x}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\int \sin^{p-2} x\,dx.$$

A keresett integrál kiszámítását tehát redukáltuk olyanra, melyben a $\sin x$ exponense 2-vel alacsonyabb; ha ezt most tovább redukáljuk, akkor végül olyan integrálra jutunk, melyben a $\sin x$ exponense 0, vagy 1. Mindkét esetben befejeztük az integrálást.

Így pl.: ha $p=2$, akkor ez a formula az

$$\int \sin^2 x\, dx = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} = -\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}$$

alakra vezet, amint előbb láttuk.

A másodikkal, az I_2-vel, még könnyebben végzünk.

Ugyanis, ha $\sin x$ helyett y-t képzelünk, akkor $\cos x\, dx = dy$, tehát

$$\int \sin^p x \cos x\, dx = \int y^p\, dy = \frac{y^{p+1}}{p+1} = \frac{\sin^{p+1} x}{p+1}.$$

Ha nem a $\cos^2 x$-et helyettesítjük $1-\sin^2 x$-el, hanem az $\int \sin^p x \cos^q x\, dx$-ben $\sin^2 x$ helyett tesszük $1-\cos^2 x$-et, akkor pedig ezen integrál kiszámitása páros p esetében $\int \cos^q x\, dx$ alakú és páratlan p esetében $\int \cos^q x \sin x\, dx$ alakú integrálokra vezet. Az első esetben $\cos^{q-1} x$-et u-nak és $\cos x\, dx$-et dv-nek téve, parciális integrálással azt kapjuk, hogy:

$$\int \cos^q x\, dx = \cos^{q-1} x \sin x + (q-1) \int \cos^{q-2} x \sin^2 x\, dx$$

és $\sin^2 x$ helyébe $1-\cos^2 x$-et téve:

$$\int \cos^q x\, dx = \cos^{q-1} x \sin x + (q-1) \int \cos^{q-2} x\, dx - (q-1) \int \cos^q x\, dx$$

és innen:

$$\int \cos^q x\, dx = \frac{\cos^{q-1} x \sin x}{q} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int \cos^{q-2} x\, dx.$$

Ha $q>1$, akkor a keresett integrál olyanra redukálódott, melyben a $\cos x$ exponense 2-vel alacsonyabb; tehát ezen eljárás ismétlésével végül vagy $\int dx$-re, vagy pedig $\int \cos x\, dx$-re jutunk. Mindkettőt ismerjük; tehát az integrálás be van fejezve.

Az $\int \cos^q x \sin x\, dx$ meghatározása még egyszerűbb; mert ha $\cos x$ helyett y-t teszünk, akkor ez az integrál:

$$-\int y^q\, dy = -\frac{\cos^{q+1} x}{q+1}.$$

Megjegyezzük, hogy e tárgyalásban p és q pozitiv egész számokat jelentettek; de általában, ha negativ egész számok, vagy törtszámok, akkor is bizonyos esetekben az $\int \sin^p x \cos^q x\, dx$ ismeretes függvények által kifejezhető — mondjuk — integrálható.

Ha ugyanis $\sin x$ helyett z-t írunk, akkor $\cos x = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$

$\cos x\,dx = dz$, tehát

$$\int \sin^p x \cos^q x\,dx = \int \sin^p x \,.\, \cos^{q-1} x \,.\, \cos x\,dx = \int z^p (1-z^2)^{\frac{q-1}{2}} dz.$$

A jobboldalon álló integrál alatt binom differenciállal találkozunk, melynek első exponense p, második exponense $\frac{q-1}{2}$ és belső exponense: 2; tehát ismeretes függvények által fejezhető ki, ha

$$\frac{p+1}{2}, \quad \text{vagy} \quad \frac{p+1}{2} + \frac{q-1}{2} \quad \text{azaz} \quad \frac{p+q}{2}, \quad \text{vagy} \quad \frac{q-1}{2}$$

egész szám. Az első vagy harmadik feltétel csakis akkor lehet teljesítve, ha p vagy q páratlan számok, de a középső akkor is teljesítve lehet, ha $p+q$ páros szám, anélkül, hogy p és q egészek volnának. Mindenesetre teljesítve van e feltételek közül egyik, ha p és q egész számok; mert ha egyikük páratlan, akkor az első vagy harmadik feltétel teljesül, ha pedig mindkettő páros, akkor a középső van teljesítve.

26. tg $\frac{x}{2}$ mint racionalizáló. Megmutatjuk most, *hogy általában, ha az integrandus a* $\sin x$ *és* $\cos x$*-ből a négy alapmüvelettel készített kifejezés, tehát* $\sin x$ *és* $\cos x$ *racionális kifejezése, akkor az integrálás mindig elvégezhető, vagyis az integrál csupa ismeretes függvény által fejezhető ki.*

Ez az állítás a következő nevezetes trigonometriai tételen alapszik: *A* $\sin x$ *és* $\cos x$ *a* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *által racionálisan fejezhetők ki.* Ugyanis:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}, \quad \text{tehát} \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Innen:
$$\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

és így:
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

és
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Ezzel kimutattuk, hogy $\sin x$ és $\cos x$ a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ által racionálisan állítható elő. Ebből természetesen már az is következik, hogy $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ és $\operatorname{cosec} x$ is racionális függvényei a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-nek. A $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-et elnevezhetjük a trigonometriai függvényeket racionálissá tevő változónak *(racionalizáló változó)*. Ha $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-et z-vel jelöljük, akkor tehát:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Minden z értékhez egyetlen x tartozik a $0 \ldots 2\pi$ közben, mert ha ismerjük a $\sin x$-et és a $\cos x$-et, akkor az x a $0 \ldots 2\pi$ közben egyértelműen van meghatározva. Fordítva is áll a dolog; ha ismeretes az x, akkor természetesen a $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ is egyértelműen határoztatott meg.

Ha már most az integrált átalakítjuk azzal, hogy x helyébe a z változót hozzuk be, akkor a $\sin x$ és $\cos x$ racionális függvényéből a z racionális függvénye lesz. Most még csak a dx-et kell z és dz által kifejeznünk. Ha

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,$$

akkor mindkét oldalon x szerint differenciálva:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2} = \frac{1+z^2}{2},$$

vagyis dx helyébe $\frac{2dz}{1+z^2}$ teendő. Az integrandus tehát a z racionánális függvénye lesz és így az integrál parciális törtekre bontással kiszámítható. Ha azután végül z helyett $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-et tesszük, akkor tehát az integrál a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ racionális, logarithmikus és arctg függvényével lesz kifejezve.

Egy-két példán mutatjuk meg ezt az eljárást.

1. Példa. Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{\sin x}$-et. Ha a $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ új variabilist vezetjük be, akkor, miként tudjuk:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

és így:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z} = \log z + C = \log \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Ha x helyébe $\frac{\pi}{2} + u$-t teszünk, akkor dx helyébe $+du$ teendő; tehát

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{du}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right) + C,$$

vagyis:
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C.$$

2. *Példa.* Következő példa gyanánt számítsuk ki ezt az integrált:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

Tegyük megint $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyett z-t; akkor:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} = 2\int \frac{dz}{a(1-z^2)+2bz+c(1+z^2)} = 2\int \frac{dz}{(a+c)+2bz+(c-a)z^2}.$$

Ez az integrál a 304. lapon levezetett formulák segítségével kiszámítható. Ha a $c^2-a^2-b^2$ diszcriminans pozitiv, akkor ez az integrál (az ottani formulában α helyett $c-a$, β helyett $2b$, γ helyett $c+a$ teendő)

$$\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c-a)z+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}.$$

Ha pedig $c^2-a^2-b^2$ negativ, akkor az integrál:

$$\frac{1}{\sqrt{-c^2+a^2+b^2}} \log \frac{(c-a)z+b-\sqrt{-c^2+a^2+b^2}}{(c-a)z+b+\sqrt{-c^2+a^2+b^2}}.$$

Ha $c=0$, akkor a második formula érvényes és így:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{-az+b-\sqrt{a^2+b^2}}{-az+b+\sqrt{a^2+b^2}} \qquad z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Ha rövidítés kedveért meghatározunk olyan r és α számokat, hogy

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha$$

legyen, akkor

$$\frac{-a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - \sqrt{a^2+b^2}}{-a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b + \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sin\alpha - 1}{-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sin\alpha + 1}$$

és ha a számlálót és a nevezőt $\cos\frac{x}{2}$-el szorozzuk, akkor tovább a jobboldali kifejezés:

$$\frac{-\cos\alpha\sin\frac{x}{2} + \sin\alpha\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{-\cos\alpha\sin\frac{x}{2} + \sin\alpha\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha-\frac{x}{2}\right) - \cos\frac{x}{2}}{\sin\left(\alpha-\frac{x}{2}\right) + \cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{x}{2}\right) - \cos\frac{x}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{x}{2}\right) + \cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\sin\left(\alpha-\frac{x}{2}\right)$ helyett t. i. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{x}{2}\right)$-et tesszük és a cosinusok összegét és különbségét szorzat alakban fejezzük ki. Eszerint tehát

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}=\frac{1}{r}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-\alpha}{2}\right)+C,\quad \text{ha}\quad a=r\cos\alpha,\quad b=r\sin\alpha.$$

Sokkal egyszerűbben kapjuk ezt az eredményt, ha nem folyamodunk a racionálissá tevő z-hez. Tegyük ismét $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$, akkor

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}=\int\frac{dx}{r[\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x]}=\int\frac{dx}{r\cos(x-\alpha)}$$

és ha $x-\alpha$ helyett y-t írunk, akkor az előbbi példa szerint:

$$\int\frac{dy}{\cos y}=\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right),$$

tehát:
$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}=\frac{1}{r}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-\alpha}{2}\right),$$
úgy mint előbb.

3. Példa. Ha ezt az integrált kell kiszámítani:

$$I=\int\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x},$$

akkor a z bevezetésével a következő integrálra jutunk:

$$2\int\frac{(1+z^2)\,dz}{a(1-z^2)^2+4bz^2}$$

és ez, mint racionális függvény integrálja, parciális törtekre bontással meghatározható. De sokkal egyszerűbbé válik az eljárás a következő módon. Osszuk el az I integrál integrándusában a számlálót és a nevezőt $\cos^2 x$-el, akkor

$$I=\int\frac{\dfrac{dx}{\cos^2x}}{a+b\operatorname{tg}^2x}$$

és ha $\operatorname{tg}x$ helyett y-t képzelünk, akkor $\dfrac{dx}{\cos^2x}=dy$, tehát $I=\int\dfrac{dy}{a+by^2}$ és ha ab pozitiv, akkor

$$I=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{by}{\sqrt{ab}}.$$

Ha ab negativ, akkor

$$I=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{by-\sqrt{-ab}}{by+\sqrt{-ab}}.$$

27. tg x mint racionálizó változó. Az utolsó példában az integrándust nem $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-el, hanem $\operatorname{tg}x$-el fejeztük ki. Megmutatjuk, hogy általában, ha az integrándus a $\sin x$ és $\cos x$ olyan racionális függvénye, mely nem változik, ha x helyett $\pi+x$-et teszünk, akkor az integrálást a $z=\operatorname{tg}x$ szubsztitucióval végezhetjük el. Legyen tehát a szóban forgó integrál:

$$I=\int f(\cos x,\,\sin x)\,dx,$$

ahol az integrándusról tudjuk, hogy

$$f(\cos x, \sin x) = f[\cos(\pi+x), \sin(\pi+x)] = f(-\cos x, -\sin x).$$

Legyen $z = \operatorname{tg} x$, akkor tudvalevően:

$$\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

E formulákban $\sqrt{1+z^2}$ pozitivnak veendő, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ és ha $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, mert az első esetben $\cos x > 0$, $\sin x > 0$, $z > 0$, a második esetben pedig $\cos x > 0$, $\sin x < 0$, de $z < 0$ és $\sqrt{1+z^2}$ negativnak veendő, ha $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; tehát ha x helyett $x+\pi$-t tesszük, akkor $\sqrt{1+z^2}$ jelét meg kell változtatnunk.

Igy tehát $$f(\cos x, \sin x) = \Phi(z, \sqrt{1+z^2}),$$

ahol Φ a z és $\sqrt{1+z^2}$ rac. függvénye és ez egyszerű átalakítással ilyen alakra hozható:

$$f(\cos x, \sin x) = \varphi(z) + \psi(z)\sqrt{1+z^2},$$

ahol $\varphi(z)$, valamint $\psi(z)$ racionális függvények.

Ha már most x helyett $\pi+x$-et teszünk, akkor, miként említettük, $\sqrt{1+z^2}$ jelét meg kell változtatnunk, azaz:

$$f(-\cos x, \sin x) = \varphi(z) - \psi(z)\sqrt{1+z^2},$$

tehát azon föltételünk szerint, hogy $f(\cos x, \sin x)$ nem változik meg, ha x helyett $\pi+x$-et teszünk:

$$f(\cos x, \sin x) = \varphi(z) + \psi(z)\sqrt{1+z^2} = \varphi(z) - \psi(z)\sqrt{1+z^2},$$

vagyis: $$f(\cos x, \sin x) = \varphi(z).$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy $dx = \frac{dz}{1+z^2}$, akkor arra jutunk, hogy

$$I = \int \frac{\varphi(z)}{1+z^2}\, dz.$$

Igy például ha

$$I = \int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\cos x \sin x + c\sin^2 x},$$

akkor a $z = \operatorname{tg} x$ átviszi ezt az integrált ebbe:

$$\int \frac{dz}{a + 2bz + cz^2},$$

amely integrál közvetlenül kiszámítható.

28. Exponenciális függvény integrálása. Most olyan integrálokkal akarunk foglalkozni, melyekben az integrandus e^{ax}-nek és x-nek racionális egész függvénye és megmutatjuk, hogy az ilyen integrálok ismeretes függvényekkel kifejezhetők. A legegyszerűbb esetről, az $\int e^{ax}dx$-ről tudjuk, hogy: $\frac{e^{ax}}{a}$. De már az ilyen integrálokkal, is foglalkozhatunk:

$$I = \int x^k e^{ax}\, dx,$$

ahol k pozitiv egész szám. Ez az integrál parciális integrálással kiszámítható. Ha ugyanis $x^k = u$ és $e^{ax}\, dx = dv$, akkor

$$\int x^k e^{ax}\, dx = \frac{x^k e^{ax}}{a} - \frac{k}{a} \int x^{k-1} e^{ax}\, dx,$$

tehát az I redukálódott olyan integrálra, melyben x exponense eggyel alacsonyabb. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\int x^{k-1} e^{ax}\, dx = \frac{x^{k-1} e^{ax}}{a} - \frac{k-1}{a} \int x^{k-2} e^{ax}\, dx,$$

tehát: $$\int x^k e^{ax}\, dx = \frac{x^k e^{ax}}{a} - \frac{k x^{k-1} e^{ax}}{a^2} + \frac{k(k-1)}{a^2} \int x^{k-2} e^{ax}\, dx,$$

s így tovább. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg az x exponense zérussá válik. De ugyanilyen eljárással redukálhatjuk ezt az általánosabb integrált is:

$$I = \int \varphi(x)\, e^{ax}\, dx,$$

ha $\varphi(x)$ egy n-edfokú racionális egész függvény. Ha itt ismét u-nak választjuk a $\varphi(x)$-et és dv-nek $e^{ax} dx$-et, akkor:

$$\int \varphi(x)\, e^{ax}\, dx = \frac{\varphi(x)\, e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \int \varphi'(x)\, e^{ax}\, dx =$$

$$= \frac{\varphi(x)\, e^{ax}}{a} - \frac{\varphi'(x)\, e^{ax}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \int \varphi''(x)\, e^{ax}\, dx$$

és ha ezt az eljárást n-szer ismételjük:

$$\int \varphi(x)\, e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \left[\varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{a} + \frac{\varphi''(x)}{a^2} - \frac{\varphi'''(x)}{a^3} + \cdots + (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{a^n} \right]$$

-re jutunk. Ha $a = 1$, akkor egyszerűen:

$$\int \varphi(x)\, e^x\, dx = e^x \left[\varphi(x) - \varphi'(x) + \varphi''(x) + \cdots + (-1)^n \varphi^{(n)}(x) \right].$$

Ha $a = -1$,

$$\int \varphi(x)\, e^{-x}\, dx = -e^{-x} \left[\varphi(x) + \varphi'(x) + \varphi''(x) + \cdots + \varphi^{(n)}(x) \right].$$

Ha már most általában $e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}, \ldots$ és x-ből az összeadás-, kivonás- és szorzással alkotunk egy $\psi(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots)$ kifejezést, akkor ebben $e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}, e^{(a+b)x}, e^{(a+c)x}, \ldots$ stb.-vel szorzott tagok lesznek, tehát csupa ilyen alakú kifejezés: $f(x) e^{\gamma x}$, ahol $f(x)$ az x-nek racionális egész függvénye és a γ az $a, b, c, \ldots$ számokból összeadásokkal előállított szám. Tehát az

$$\int \psi(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots)\,dx$$

kiszámítását az előbbire vezethetjük vissza. Ezzel tehát egyúttal megmutattuk, hogy az $x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots$-ből alkotott racionális egész függvények integrálhatók, az integrálban nem is szerepel más, mint x racionális egész és exponenciális függvénye.

29. Más transzcendens függvények integrálása. Miként az $\int \varphi(x)\, e^{ax}$ integrált redukáló eljárással ki tudtuk számítani, éppen így számíthatjuk ki az

$$\int \varphi(x) \cos ax\,dx, \qquad \int \varphi(x) \sin ax\,dx$$

integrálokat, ha $\varphi(x)$ racionális egész függvény. Ugyanis, ha az elsőnél $\varphi(x)$-et u-nak, $\cos ax\,dx$-et dv-nek tekintjük, akkor parciálisan integrálva egymásután kapjuk, hogy:

$$\int \varphi(x) \cos ax\,dx = \frac{\varphi(x) \sin ax}{a} - \frac{1}{a}\int \varphi'(x) \sin ax\,dx =$$

$$= \frac{\varphi(x)\sin ax}{a} + \frac{\varphi'(x)\cos ax}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int \varphi''(x) \cos ax\,dx$$

stb. vagyis:

$$\int \varphi(x) \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\left[\varphi(x) \sin ax + \frac{\varphi'(x)\cos ax}{a} - \frac{\varphi''(x)\sin ax}{a^2} + \cdots\right]$$

azaz, ha $\varphi(x)$ fokszáma: n páros:

$$\int \varphi(x) \cos ax\,dx =$$

$$= \frac{\sin ax}{a}\left[\varphi(x) - \frac{\varphi''(x)}{a^2} + \frac{\varphi^{IV}(x)}{a^4} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{a^n}\right] +$$

$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{\varphi'(x)}{a} - \frac{\varphi'''(x)}{a^3} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{a^{n-1}}\right],$$

ha pedig n páratlan:

$$\int \varphi(x) \cos ax\,dx =$$

$$= \frac{\sin ax}{a}\left[\varphi(x) - \frac{\varphi''(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{a^{n-1}}\right] +$$

$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{\varphi'(x)}{a} - \frac{\varphi'''(x)}{a^3} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{a^n}\right].$$

A második integrált éppen így számítjuk ki és a következőkre jutunk:

$$\int \varphi(x) \sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{\varphi'(x)}{a} - \frac{\varphi'''(x)}{a^3} + \frac{\varphi^{V}(x)}{a^5} - \cdots\right] -$$

$$- \frac{\cos ax}{a}\left[\varphi(x) - \frac{\varphi''(x)}{a^2} + \frac{\varphi^{IV}(x)}{a^4} - \cdots\right].$$

Így például, ha $\varphi(x)=x^n$ és $a=1$.

$$\int x^n \cos x\,dx=\sin x\,[x^n-n(n-1)x^{n-2}+n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}-\cdots]+$$
$$+\cos x\,[nx^{n-1}-n(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots].$$

Nem csak ezeket az egyszerűbb alakú

$$\int\varphi(x)\cos ax\,dx \quad \text{és} \quad \int\varphi(x)\sin ax\,dx$$

integrálokat tudjuk kiszámítani, hanem most már ezek segítségével meghatározhatjuk azokat az integrálokat is, amelyek integrándusa az x-ből, $\sin x$- és $\cos x$-ből összeadás, kivonás és szorzással keletkezik, tehát az

$$I=\int\psi(x, \sin x, \cos x)\,dx$$

integrált, ha ψ az x, $\sin x$ és $\cos x$ racionális egész kifejezése. Hogy ezt beláthassuk, a következőt kell megjegyeznünk. A ψ-ben minden tag ilyen alakú: $\varphi(x)\sin^k x\cos^l x$, ahol $\varphi(x)$ racionális egész függvénye az x-nek és k, meg l pozitiv egész számok. Ha már most a $\sin^k x$-et átalakítjuk úgy, hogy $\sin^2 x$ helyett $1-\cos^2 x$-et tesszük és így $\sin x$ páros hatványa helyett $1-\cos^2 x$ hatványát hozzuk be, akkor azonnal beláthatjuk, hogy új rendezés után a ψ-ben csakis ilyen tagok lesznek:

$$\varphi(x)\cos^k x, \quad \varphi(x)\cos^k x\sin x,$$

tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy az

$$\int\varphi(x)\cos^k x\,dx, \quad \int\varphi(x)\cos^k\sin x\,dx$$

alakú integrálok kiszámíthatók. De $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$-ből $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ következik; tehát $\cos^k x$ helyett ez írható:

$$\cos^k x=\cos^{k-2}x\cos^2 x=\frac{\cos^{k-2}x}{2}+\frac{\cos^{k-2}x\cos 2x}{2}.$$

Tegyük fel, hogy már $\cos^{k-2}x$-re ki tudjuk mutatni, hogy így állítható elő:

$$\cos^{k-2}x=\alpha_0+\alpha_1\cos a_1x+\alpha_2\cos a_2x+\cdots \qquad 1)$$

ahol $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots a_1, a_2, \ldots$ bizonyos meghatározott számértékek, akkor ebből következik, hogy $\cos^k x$ is előállítható ilyen alakban. Ugyanis $\cos^k x$ két részből áll; az első része $\dfrac{\cos^{k-2}x}{2}$, mely a föltételünk szerint ilyen — mondjuk lineáris alakban — előállítható. A második része $\dfrac{\cos^{k-2}x\cos 2x}{2}$; de ez:

$$\frac{\cos^{k-2}x\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\,[\alpha_0+\alpha_1\cos a_1x+\alpha_2\cos a_2x+\cdots]\cos 2x$$

és ha a szorzást elvégezzük és minden tagra a

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

formulát alkalmazzuk, akkor látjuk, hogy a jobboldal szintén olyan lineáris alak lesz, mint az 1) alatti. Ha tehát a $\cos^{k-2}x$ előállítható az 1) formában, akkor $\cos^k x$ is előállítható ilyen alakban. De ha $k-2=1$, a dolog világos, ha $k-2=2$, akkor is $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, tehát ebből következik, hogy az állítás igaz $k=3$ és $k=4$ esetben, ebből megint, hogy $k=5$ és $k=6$ esetben igaz; szóval: általában igaz.

Ebből egyúttal az is következik, hogy a $\cos^k x \sin x$ is előállítható olyanféle lineáris alakban, aminő az 1), csakhogy cosinusok helyett sinusok szerepelnek. Ugyanis

$$\cos^k x = \beta_0 + \beta_1 \cos b_1 x + \beta_2 \cos b_2 x + \cdots$$

relációból ered:

$$\cos^k x \sin x = [\beta_0 + \beta_1 \cos b_1 x + \beta_2 \cos b_2 x + \cdots] \sin x$$

és ha a szorzást elvégezzük és mindenütt a

$$\cos\alpha \,.\, \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

formulát alkalmazzuk, akkor

$$\cos^k x \sin x = \gamma_0 + \gamma_1 \sin c_1 x + \gamma_2 \sin c_2 x + \cdots$$

alakra jutunk ($\gamma_0=0$). Ebből már most azonnal következik, hogy az

$$\int \varphi(x)\cos^k x\,dx \quad \text{és} \quad \int \varphi(x)\cos^k x \sin x\,dx$$

integrálok az előbbiek szerint meghatározhatók, tehát az

$$I = \int \psi(x, \sin x, \cos x)\,dx$$

[és hasonlóan ha ψ x-ből, $\sin a_1 x$, $\sin a_2 x, \ldots \cos b_1 x$, $\cos b_2 x, \ldots$-ből keletkezik összeadás, kivonás és szorzással] kiszámítható.

Most az előbbi eredményeket kombinálhatjuk és megmutathatjuk, hogy ha az x-ből, $e^{ax}, e^{bx}, \ldots$ és a $\sin\alpha x$, $\sin\beta x, \ldots \cos\alpha x$, $\cos\beta x \ldots$-ből alkotjuk meg az összeadás, kivonás és szorzás műveletével a $\psi(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots \sin\alpha x, \ldots \cos\alpha x \ldots)$ kifejezést, ez is integrálható lesz. Először az

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{és} \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

alakú integrálokat határozzuk meg. Jelöljük az elsőt I_1-el, a másodikat I_2-vel. Ha $e^{ax}dx$-et dv-nek, $\cos bx$-et u-nak vesszük és parciálisan integrálunk:

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx=$$
$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}I_2$$

és éppen így:

$$I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx=$$
$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}I_1,$$

vagyis:

$$aI_1-bI_2=e^{ax}\cos bx$$
$$bI_1+aI_2=e^{ax}\sin bx$$

és innen:

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}[a\cos bx+b\sin bx]}{a^2+b^2};$$
$$I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}[a\sin bx-b\cos bx]}{a^2+b^2}. \qquad 2)$$

Most már megmutathatjuk, hogy az általánosabb alakú

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{és} \quad \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx$$

integrálok is kiszámíthatók. Minthogy $n=0$ esetben ezek az integrálok az imént kiszámitottakkal megegyeznek, tehát elég lesz megmutatni, hogy ezek az integrálok redukálhatók olyanokra, melyekben x exponense eggyel kisebb. Ezt pedig a parciális integrálással elérhetjük. Tegyük ugyanis x^n-et u-nak és $e^{ax}\cos bx\,dx$-et dv-nek; akkor a 2) alatti szerint:

$$v=\frac{e^{ax}[a\cos bx+b\sin bx]}{a^2+b^2};$$

tehát:

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{x^n e^{ax}[a\cos bx+b\sin bx]}{a^2+b^2}-$$
$$-\frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\,dx-\frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\,dx$$

és éppen így:

$$\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{x^n e^{ax}[a\sin bx-b\cos bx]}{a^2+b^2}-$$
$$-\frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\,dx+\frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\,dx,$$

tehát valóban redukálódtak az integrálok olyanokra, melyekben az x exponense eggyel kisebb lett.

Ezzel egyúttal azt is megmutattuk, hogy ha az x-ből, e^{ax}, e^{bx},... $\sin\alpha x$, $\sin\beta x$,... $\cos\alpha x$, $\cos\beta x$...-ből alkotjuk a ψ polynomot, akkor $\int\psi dx$ kiszámítható és az integrálás nem is vezet másra, mint ugyancsak az x pozitiv kitevőjű hatványaiból, a trigonometriai és exponenciális függvényekből összeadás-, kivonás- és szorzással összerakott kifejezésekre.

Megemlítjük még, hogy az előbbiekre vezethető vissza az integrálás akkor is, ha az integrándus *a)* az x-ből és $\log x$-ből, *b)* az x-ből és $\arcsin x$-ből összeadással, kivonással és szorzással alkotott kifejezés. Ugyanis ha az *a)* esetben $\log x$ helyett z-t írunk, vagyis $x=e^z$ tesszük, akkor $dx=e^z dz$, tehát az *a)* alatti integrándus a z és e^z egész kifejezése lesz. Ha pedig a *b)* esetben $\arcsin x=z$ tesszük, akkor $x=\sin z$ és $dz=\cos z\, dz$, tehát a *b)* alatti integrándus a z, $\sin z$ és $\cos z$ egész kifejezésévé válik.

30. A $\sqrt{ax^2+bx+c}$ racionális kifejezésének integrálása trigonometriai függvények segítségével. Emelkedettebb szempontból visszatérhetünk most azokra, amiket a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ racionális kifejezéseinek integrációjára vonatkozólag említettünk. Hogy a tárgyalás áttekinthetőbb legyen, egyszerüsítsük a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kifejezést. Tudjuk, hogy

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Ha a pozitiv, akkor tehát a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ helyett a $\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$-et tekinthetjük és ha $x+\frac{b}{2a}$ helyett z-t írunk, akkor mondhatjuk, hogy az integrándus, mely x és $\sqrt{ax^2+bx+c}$ racionális kifejezése, a z és $\sqrt{z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$ racionális kifejezésévé válik. Ha $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ pozitiv, jelöljük α^2-el; tehát az integrándus z-nek és $\sqrt{z^2+\alpha^2}$-nek racionális függvénye. Ha pedig $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ negativ, akkor $-\alpha^2$-el jelöljük és az integrándus z-nek és $\sqrt{z^2-\alpha^2}$-nek racionális függvénye lesz. Végül, ha a negativ, akkor, miként tudjuk, a $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ nem lehet pozitiv, mert akkor a négyzetgyök soha sem lehetne valós; tehát ez esetben $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ helyett $-\alpha^2$-t téve

$$ax^2+bx+c=-a[-z^2+\alpha^2]$$

és így az integrándus a z-nek és $\sqrt{\alpha^2-z^2}$-nek racionális függvénye. Eszerint tehát ezzel az egyszerű átalakítással mindig elérjük, hogy az integrándus [z helyett ismét x betűt írva]

$$1)\ x \text{ és } \sqrt{x^2+\alpha^2},\quad 2)\ x \text{ és } \sqrt{x^2-\alpha^2},\quad 3)\ x \text{ és } \sqrt{\alpha^2-x^2}$$

racionális függvénye lesz. Ha már most az 1) esetben $x=\alpha \operatorname{tg} u$-t tesszük, akkor

$$\sqrt{x^2+\alpha^2}=\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}=\frac{\alpha}{\cos u}$$

lesz és $dx=\frac{\alpha\, du}{\cos^2 u}$, tehát az integrándus a $\sin u$ és $\cos u$ racionális függvényévé válik, amelyet ki tudunk számítani.

Így például ha ezt az egyszerű integrált kell meghatározni:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}},$$

akkor $x=\alpha \operatorname{tg} u$-t téve:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=\int\frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos u}}=\int\frac{du}{\cos u}=$$

$$=\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)=\log\frac{1+\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{u}{2}}.$$

De $$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{u}{2}}=\frac{\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}-\sin\frac{u}{2}}=\frac{1+\sin u}{\cos u}=\frac{1}{\cos u}+\operatorname{tg} u.$$

És minthogy $\operatorname{tg} u=\frac{x}{\alpha}$ és $\frac{1}{\cos u}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{x^2+\alpha^2}$, tehát

$$\frac{1}{\cos u}+\operatorname{tg} u=\frac{1}{\alpha}[x+\sqrt{x^2+\alpha^2}]$$

és így: $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=\log[x+\sqrt{x^2+\alpha^2}]+C.$$

A 2) esetben tegyük $x=\alpha\sec u$; akkor

$$\sqrt{x^2-\alpha^2}=\alpha\sqrt{\sec^2 u-1}=\alpha\operatorname{tg} u,\quad dx=\frac{\alpha\sin u}{\cos^2 u}du$$

és így az integrándus megint trigonometriai függvény racionális kifejezése lesz. Így például:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \int \frac{\frac{\sin u}{\cos^2 u}\,du}{\frac{\sin u}{\cos u}} = \int \frac{du}{\cos u} = \log \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right]$$

vagyis:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \log(x+\sqrt{x^2-\alpha^2}) + C,$$
mint előbb.

Végül a 3) esetben tegyük $x=\alpha \sin u$, akkor $\sqrt{\alpha^2-x^2}=\alpha\cos u$, $dx=\alpha\cos u\,du$, tehát az integrándus ismét racionális kifejezése lesz a $\sin u$ és $\cos u$-nak. Így például:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \int \frac{\cos u\,du}{\cos u} = \int du = \operatorname{arc}\sin\frac{x}{\alpha} + C.$$

Ez a három transzformáció azt mutatta meg, hogy ha $x=k\operatorname{tg}u+l$ vagy $x=k\sec u+l$ vagy $x=k\sin u+l$-t tesszük, ahol k és l alkalmasan választott konstansok, akkor $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ is $\sin u$ és $\cos u$ racionális kifejezése lesz. Más szóval: x és $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ a $\sin u$ és $\cos u$ által racionálisan fejezhetők ki (tehát mondhatjuk: az egyetlen $\operatorname{tg}\frac{u}{2}$ által). A $z=\operatorname{tg}\frac{u}{2}$ tehát az x és $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ racionálizáló változója. Ennek a ténynek geometriai jelentősége abban van, hogy az

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

másodrendű görbe pontjainak koordinátái: x és y a $z=\operatorname{tg}\frac{u}{2}$-el racionálisan fejezhetők ki.

31. A határozott integrál kiszámítása a határozatlan segítségével. Láttuk már, hogy folytonos $f(x)$ függvény esetén az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

kiszámítására a primitiv függvény ismerete után egyszerű eljárásunk van. Ha $F(x)$ az $f(x)$-nek bármelyik primitiv függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ezt rövidebben ezentúl így fogjuk jelölni:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b,$$

amivel azt akarjuk ábrázolni, hogy az $F(x)$-ben x helyébe először b, azután a helyettesítendő és e két számérték különbsége veendő.

Ezt az állítást eddigelé csak azon esetre bizonyítottuk be, midőn $f(x)$ folytonos függvény. De igaz már akkor is, ha $f(x)$ integrálható függvény az illető szakaszban, ha csak létezik olyan $F(x)$ függvény, melynek differenciálhányadosa: $f(x)$, vagyis $f(x)$-nek van primitiv függvénye. Ezt a következőképpen láthatjuk be: Bontsuk fel az $a \ldots b$ közt az $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$-el szakaszokra. Akkor:

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] +$$
$$+ [F(x_3) - F(x_2)] + \cdots + [F(b) - F(x_{n-1})].$$

De $F(x_i) - F(x_{i-1})$ a középérték-tétel szerint: $F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, vagyis: $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, tehát:

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1})$$

és ha a beosztást határtalanul sűrítjük, úgy hogy minden osztásrész végtelen kicsinnyé válik, akkor a jobboldali összeg — függetlenül a ξ közbenső helyek helyzetétől — ez az integrál: $\int_a^b f(x)\,dx$ lesz, vagyis bebizonyítottuk, *hogy ha $f(x)$ integrálható és van primitiv függvénye, akkor* $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$.

Ha tehát van egy olyan $F(x)$ függvény, mely az ab intervallum minden helyére nézve az $f(x)$ primitiv függvénye, azaz, melynek differenciálhányadosa az ab minden helyén $f(x)$ és az $f(x)$ integrálható az ab intervallumban, akkor az $\int_a^b f(x)\,dx$ ezen egyszerű eljárással számítható ki. [De megjegyezzük, hogy ha $f(x)$ nem folytonos, előfordulhat az az eset is, hogy $f(x)$ integrálható, de $F(x)$ primitiv függvény nem is létezik. Így pl., ha $f(x)$ a $-1 \cdots +1$ közben mindenütt 0 és egy helyen, pl. 0 helyen: 1, akkor $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ az integrál értelmezése szerint: 0 és olyan $F(x)$ primitiv függvény, melynek differenciálhányadosa $f(x)$ lenne a $-1 \cdots +1$ közben, nem létezik. Ennek az $F(x)$ függvénynek ugyanis konstansnak kellene lennie -1 és 0, továbbá 0 és 1 között, vagyis (folytonos lévén) -1 és $+1$ között; de akkor differenciálhányadosa a 0 helyen nem 1, hanem 0 volna.]

Néhány egyszerű határozott integrált a primitiv függvény segítségével azonnal kiszámíthatunk:

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}; \qquad \int_a^b e^x dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a;$$

$$\int_0^1 [illegible] = [\operatorname{arc\,tg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}; \qquad \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Megjegyezzük azonban, hogy $-\frac{1}{x}$ csakis olyan intervallumban tekinthető az $\frac{1}{x^2}$ primitiv függvényének, melyben az $\frac{1}{x^2}$ integrándus folytonos; tehát ez a számítás nem érvényes, ha az $a \ldots b$ intervallum a zérust magában foglalja.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^a = \arcsin a;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [\log(x+\sqrt{1+x^2})]_0^1 = \log(1+\sqrt{2}), \quad \text{s í. t.}$$

32. Parciális integrálás. A határozott integrálok kiszámításánál is nagy szerepet játszik az a két eljárás, melyeket a primitiv függvény meghatározásánál megismertünk: a parciális integrálás és a helyettesítés. Az elsőről nem sokat kell mondanunk. Ha az integrándus uv' alakú és u' és v' folytonosak, akkor az

$$uv' = (uv)' - u'v$$

egyenlőség mindkét oldalán a-tól b-ig integrálva,

$$\int_a^b uv'\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\, dx.$$

Ez a parciális integrálásnak a határozott integrálokra alkalmazott formulája.

A parciális integrálás módszerével, miként a határozatlan integrálok kiszámításánál láttuk, sokszor sikerül olyan redukciós eljárás megállapítása, amely az integrál kiszámítására vezet. Ez a parciális integrálásnak egymásután többször való alkalmazásában áll, vagy mondhatjuk: a parciális integrálás azon általánosításában, melynél az integrándus egyik tényezője az u függvény, a másik tényezője pedig a v-nek nem első, hanem magasabbrendű differenciálhányadosa. Ezzel akarunk most. egyúttal a határozott integrál számítására alkalmazva, foglalkozni. Ha az

$$I = \int uv^{(n)}\,dx$$

integrálban $v^{(n)}$-et úgy képzeljük, mint a $v^{(n-1)}$-nek első differenciálhányadosát, akkor a parciális integrálás módszerét alkalmazva, erre jutunk:

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)}\,dx$$

és ha a második integrált tovább is átalakítjuk:

$$\int uv^{(n)}dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)}\,dx =$$

$$= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \int u'''v^{(n-3)}\,dx$$

s í. t., általában az

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} -$$

$$- u'''v^{(n-4)} + \cdots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v\,dx$$

-re jutunk, amely tehát az $\int uv^{(n)}dx$ meghatározását az $\int u^{(n)}v\,dx$-re viszi át. Ez a parciális integrálás általános módszere. Azonnal belátjuk, hogy a határozott integrálokra alkalmazva az eljárást, a következőre jutunk:

$$\int_a^b uv^{(n)}dx = \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}v\,dx.$$

33. **A Legendre-féle polinomok.** Ezt az eljárást példaképpen egy igen nevezetes integrál kiszámítására alkalmazzuk. Legyen az integrándus egyik főtényezője: $u=x^k$, ahol k pozitiv egész szám és $v=(x-a)^n(x-b)^n$ [n pozitiv egész szám]. Keressük tehát a következő integrált:

$$G_n = \int_a^b x^k \frac{d^n[(x-a)^n(x-b)^n]}{dx^n}\,dx.$$

Először állapítsuk meg az $\int x^k D^n[(x-a)^n(x-b)^n]\,dx$ határozatlan integrált az előbbi eljárással. Tegyük fel először, hogy $k>n$, akkor n-szer ismételve a parciális integrálást:

$$\int x^k D^{n)}[(x-a)^n(x-b)^n]\,dx = x^k D^{n-1)}[(x-a)^n(x-b)^n] -$$

$$- kx^{k-1}D^{(n-2)}[(x-a)^n(x-b)^n] + k(k-1)x^{k-2}D^{n-3}[(x-a)^n(x-b)^n] + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-1}k(k-1)\ldots(k-n+2)\,x^{k-n+1}(x-a)^n(x-b)^n +$$

$$+ (-1)^n k(k-1)\ldots(k-n+1)\int x^{k-n}[(x-a)^n(x-b)^n]\,dx.$$

Ha pedig $k<n$, akkor már azok a tagok, amelyekben u-nak k-nál magasabb differenciálhányadosa szerepel, eltűnnek és így (az utolsó integrálban az integrandus $v^{(n-k)}$ lévén, az integrál helyett $v^{(n-k-1)}$ írható):

$$\int x^k D^{(n)}[(x-a)^n (x-b)^n]\,dx = x^k D^{(n-1)}[(x-a)^n (x-b)^n] -$$
$$- kx^{k-1} D^{(n-2)}[(x-a)^n (x-b)^n] + \cdots + (-1)^k k!\, D^{(n-k-1)}[(x-a)^n (x-b)^n]. \quad \alpha)$$

Ha $k=n$, akkor az előbbi formula érvényes. Utolsó tagja tehát

$$(-1)^n n! \int (x-a)^n (x-b)^n\,dx, \quad \text{mert} \quad k-n=0.$$

És most áttérünk a határozott integrálra. Nézzük először azt az esetet, midőn $k<n$; tehát $n=k+1$, vagy $n>k+1$. Ennél a jobboldalon minden tagban ilyen alakú kifejezés szerepel:

$$D^{(i)}[(x-a)^n (x-b)^n],$$

ahol $i\leq n-1$. A határozott integrál kiszámítása végett mindenütt x helyébe b, azután a helyettesítendő és a két érték egymásból kivonandó. Azt állítjuk, hogy minden tagból 0 lesz.

Ugyanis az $(x-a)^n (x-b)^n$-et kell i-szer differenciálnunk; ahol $i\leq n-1$. A differenciálást a Leibniz szabály szerint végezve, csupa olyan tagokat kapunk, melyekben a tényezők differenciálási rendszámainak összege i, azaz $n-1$-nél nem nagyobb; tehát nyilván mindenik tagban bennmarad még az $(x-a)(x-b)$ szorzat. Az $\alpha)$ jobboldalán tehát minden tagban előfordul az $(x-a)(x-b)$ szorzat és így mindenik tag az $x=a$ és $x=b$ helyettesítésnél zérussá lesz. Ezzel tehát arra a nevezetes eredményre jutottunk, hogy ha $k<n$, akkor:

$$\int_a^b x^k D^n [(x-a)^n (x-b)^n]\,dx = 0.$$

Ebből azonnal következik ez az általánosabb tétel: *Ha*

$$\varphi(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

tetszés szerinti, n-nél alacsonyabb fokú racionális egész függvény, akkor:

$$\int_a^b \varphi(x) D^{(n)}[(x-a)^n (x-b)^n]\,dx = 0.$$

Nézzük most azt az esetet, midőn $k=n$. Ekkor is a jobboldalon $x=a$ és $x=b$-t helyettesítve az integrál előtti minden tag 0 lesz. Csakis az utolsó tag, ez az integrál:

$$(-1)^n n! \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n\,dx$$

marad meg. Ezt kell kiszámítanunk. Erre megint a parciális integrálás elvét alkalmazzuk. $(x-b)^n=u$, $(x-a)^n dx=dv$-t tesszük, akkor:

$$\int (x-a)^n (x-b)^n\,dx = \frac{(x-a)^{n+1}(x-b)^n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int (x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}\,dx =$$
$$= \frac{(x-a)^{n+1}(x-b)^n}{n+1} - \frac{n(x-a)^{n+2}(x-b)^{n-1}}{(n+1)(n+2)} +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}(x-a)^{n+3}(x-b)^{n-2} - \cdots +$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}(x-a)^{2n}(x-b) + (-1)^n \frac{n!}{(n+1)\ldots 2n}\int (x-a)^{2n}\,dx$$

és így a határozott integrál:

$$\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots 2n} \int_a^b (x-a)^{2n} dx =$$

$$= (-1)^n \frac{n!\,(b-a)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)},$$

tehát:

$$\int_a^b x^n D^{(n)}[(x-a)^n (x-b)^n]\, dx = \frac{n!\,n!\,(b-a)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)}.$$

Ha $\varphi(x)$ egy tetszés szerinti n-edfokú racionális egész függvény:

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

akkor tehát az
$$\int_a^b \varphi(x)\, D^n[(x-a)^n (x-b)^n]\, dx$$
meghatározásánál csakis az első tag jön tekintetbe, vagyis:

$$\int_a^b \varphi(x)\, D^n[(x-a)^n (x-b)^n]\, dx = \frac{a_0\, n!\, n!}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} (b-a)^{2n+1}.$$

Ha rövidség kedvért a $D^n[(x-a)^n (x-b)^n]$ n-edfokú racionális egész függvényt U_n-el jelöljük, akkor tehát az eddigi eredményeink a következőképpen fejezhetők ki: Ha $\varphi(x)$ n-nél alacsonyabb fokú racionális egész függvény, akkor:

$$\int_a^b U_n\, \varphi(x)\, dx = 0.$$

Ha pedig $\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, éppen n-edfokú racionális egész függvény, akkor

$$\int_a^b U_n\, \varphi(x)\, dx = \frac{a_0\, n!\, n!}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} (b-a)^{2n+1}.$$

Így például, ha $m<n$ és $\varphi(x)$ gyanánt az U_m racionális egész függvényt választjuk, akkor a következő érdekes eredményre jutunk:

$$\int_a^b U_m\, U_n\, dx = 0, \quad \text{ha} \quad m \neq n$$

és ha $m=n$, akkor pedig $\varphi(x)$ helyett az U_n n-edfokú racionális egész függvényt válasszuk. A legmagasabb tag együtthatója:

$$a_0 = 2n\,.\,(2n-1)\dots(n+1),$$

tehát
$$\int_a^b U_n^2\, dx = \frac{n!\, n!}{2n+1} (b-a)^{2n+1}.$$

Az U_n racionális egész függvények, amelyek egy számbeli factorral ellátva ($a=-1$, $b=+1$ esetén) az ú. n. *Legendre-féle polinomok* néven ismeretesek, nagy szerepet játszanak az analizisben,* azért egynehányat ide iktatunk

* A Legendre-féle polinomokat $X_1, X_2, X_2, \dots X_n \dots$-el jelöljük, ahol:

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\dots 2n} U_n.$$

$$U_1 = D[(x-a)(x-b)] = 2x-(a+b);$$
$$U_2 = D''[(x-a)^2(x-b)^2] = 12x^2-12x(a+b)+2(a^2+b^2+4ab);$$
$$U_3 = 120x^3-180x^2(a+b)+72x(a^2+b^2+3ab)-6(a^3+b^3+9a^2b+9ab^2); \quad \text{stb.}$$

34. A Legendre-polinomok gyökei. Az U_n függvényeknek egy nevezetes tulajdonságát már itt megemlítjük és pedig azt, hogy az $U_n=0$ n-edfokú algebrai egyenletnek minden gyöke valós és az $a\ldots b$ intervallumba esik. Ezt nagyon egyszerűen mutathatjuk meg. Ugyanis az

$$(x-a)^n(x-b)^n=0$$

$2n$-edfokú egyenletnek a és b egyaránt n-szeres gyökei; tehát a baloldal deriváltjával alkotott egyenletnek:

$$D[(x-a)^n(x-b)^n]=0$$

-nak baloldala legalább egy közbenső helyen eltűnik; mondjuk a_1 helyen. Minthogy pedig ezen egyenletnek a és b is $n-1$-szeres gyökei, tehát csakis egy ilyen közbenső a_1 helyen tűnhetik el. A $D[(x-a)^n(x-b)^n]$ derivált függvénye, mely $2n-2$-edfokú, most már a és a_1, valamint a_1 és b között legalább egy helyen eltűnik, mondjuk a b_1, b_2 helyeken. Minthogy pedig a és b helyek $n-2$-szeres zérus-helyei és összesen csak $2n-2$ zérushelye van, tehát b_1 és b_2-n kívül más közbenső helyen nem is lehet zérussá. Minthogy a Rolle-tétel szerint a b_1 az $a\ldots a_1$ és b_2 az $a_1\ldots b$ szakasz belsejében van, tehát egymástól különbözők. Eszerint tehát a

$$D''[(x-a)^n(x-b)^n]=0$$

egyenletnek a és b $n-2$-szeres, a b_1, b_2 pedig egyszerű gyökei. Ebből következik ismét, hogy a

$$D'''[(x-a)^n(x-b)^n]=0$$

egyenletnek $a\ldots b_1$, $b_1\ldots b_2$, $b_2\ldots b$ szakaszok mindegyikében legalább egy gyöke van, vagyis az $a\ldots b$ közben legalább 3 különböző gyöke van. Minthogy pedig a és b ezen $2n-3$-adfokú egyenlet $n-3$-szoros gyökei, tehát több, mint 3 gyök az ab-ben nem is lehet; vagyis valóban a $D'''[(x-a)^n(x-b)^n]=0$ egyenletnek az $a\ldots b$ közben éppen 3 különböző gyöke van. Így folytatva az eljárást, azt találjuk, hogy a

$$D^{(n)}[(x-a)^n(x-b)^n]=0$$

n-edfokú egyenletnek az ab közben n különböző gyöke van.

35. A helyettesítés módszerének alkalmazása. A helyettesítés módszere nagy figyelmet igényel, mert felületes alkalmazással helytelen eredményhez juthatunk. Ezért e módszerrel tüzetesebben kell foglalkoznunk.

Legyen a kiszámítandó integrál:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tudjuk, hogy ezt az integrált így is értelmezhetjük: Felosztjuk az ab intervallumot az $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ pontokkal és megalkotjuk a

$$\lim_{\Delta=0}[f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_n)(b-x_n)] \qquad \alpha)$$

összeget, hol a $\Delta=0$ úgy értendő, hogy a szakaszok maximumának a limesze 0 legyen.

Legyen már most $\varphi(t)$ a t variábilisnak az $\alpha\ldots\beta$ szakaszban *monoton növekedő* folytonos (korlátos) és folytonos differenciálhányadossal biró függvénye. A differenciálhányadosról, melyről úgyis tudjuk, hogy pozitiv, még azt is feltesszük, hogy az $\alpha\ldots\beta$ közben minimuma: $m>0$. (Ekkor a $\varphi(x)$ inverz függvénye is ilyen). Legyen $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ és tegyük $x=\varphi(t)$. Ha t az α-tól β-ig nő, akkor x átfutja növekedően az ab szakaszt; minden x helynek egyetlen t érték felel meg a $\varphi(t)$ monoton növekedése folytán.

Legyen az x_1-nek megfelelő t érték: t_1, az x_2-nek feleljen meg a t_2 s í. t. Ekkor tehát

$$x_1-a=\varphi(t_1)-\varphi(\alpha)$$

és a középértéktételt alkalmazva:

$$x_1-a=\varphi(t_1)-\varphi(\alpha)=(t_1-\alpha)\varphi'(\tau_1),$$

ahol τ_1 az $a\ldots t_1$ szakaszban van. Éppen így:

$$x_2-x_1=\varphi(t_2)-\varphi(t_1)=(t_2-t_1)\varphi'(\tau_2)$$
$$x_3-x_2=\varphi(t_3)-\varphi(t_2)=(t_3-t_2)\varphi'(\tau_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b-x_n=\varphi(\beta)-\varphi(t_n)=(\beta-t_n)\varphi'(\tau_{n+1}),$$

tehát az $\alpha)$ alatti kifejezés így írható:

$$\lim\{f[\varphi(\alpha)]\varphi'(\tau_1)(t_1-\alpha)+f[\varphi(t_1)]\varphi'(\tau_2)(t_2-t_1)+$$
$$+f[\varphi(t_2)]\varphi'(\tau_3)(t_3-t_2)+\cdots+f[\varphi(t_n)]\varphi'(\tau_{n+1})(\beta-t_n)\}$$

Az $\alpha)$ alatti limesz úgy értendő, hogy az x_1-a, $x_2-x_1,\ldots$ szakaszok maximumának limese 0 legyen; de ekkor a $t_1-\alpha$, $t_2-t_1\ldots$ szakaszok is végtelen kicsinyekké lesznek, mert

$$t_i-t_{i-1}=\frac{x_i-x_{i-1}}{\varphi'(\tau_i)}$$

és $\varphi'(\tau_i)\geq m$, tehát:

$$t_i-t_{i-1}\leq\frac{x_i-x_{i-1}}{m}$$

és viszont, ha a t szakaszok végtelen kicsinyekké válnak, akkor az x szakaszok is ilyenekké lesznek. Következésként a fönti limesz úgy érthető, hogy a $t_1-\alpha$, $t_2-t_1,\ldots$ $\beta-t_n$ szakaszok maximuma 0 felé konvergál.

Ha az $f[\varphi(t)]$ függvényt, mely a t függvénye, rövidebben $\bar{f}(t)$-vel jelöljük, akkor az előbbi limesz így írható:

$$\lim\,[\bar{f}(\alpha)\varphi'(\tau_1)(t_1-\alpha)+\bar{f}(t_1)\varphi'(\tau_2)(t_2-t_1)+\cdots+$$
$$+\bar{f}(t_n)\varphi'(\tau_{n+1})(\beta-t_n)]. \qquad \beta)$$

Most még azt a kis változtatást tesszük e kifejezésen, hogy a $\varphi'(\tau_1), \varphi'(\tau_2)\ldots$ helyett a φ'-nek a szakaszok kezdőhelyein való értékeit hozzuk be. Föltettük, hogy $\varphi'(t)$ a t folytonos függvénye az $\alpha\beta$ szakaszban; tehát a beosztást annyira sűríthetjük, hogy az egyes szakaszokban a $\varphi'(t)$ egész ingadozása tetszés szerinti kicsiny legyen. Ha már most $|\bar{f}(t)|$ az $\alpha\ldots\beta$ szakaszban M-nél kisebb, akkor a beosztást folytassuk úgy, hogy a $\varphi'(t)$ ingadozása az egyes szakaszokban $\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}$-nál kisebb legyen; akkor tehát

$$\varphi'(\alpha)-\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}<\varphi'(\tau_1)<\varphi'(\alpha)+\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)},$$

$$\varphi'(t_1)-\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}<\varphi'(\tau_2)<\varphi'(t_1)+\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)},\ldots \quad \text{stb.}$$

tehát a $\beta)$ alatti összegre a következő egyenlőtlenség áll:

$$\Sigma\bar{f}(t_i)\varphi'(t_i)(t_{i+1}-t_i)-\varepsilon<\Sigma\bar{f}(t_i)\varphi'(\tau_{i+1})(t_{i+1}-t_i)<$$
$$<\Sigma\bar{f}(t_i)\varphi'(t_i)(t_{i+1}-t_i)+\varepsilon$$

és így: $\lim\Sigma\bar{f}(t_i)\varphi'(\tau_{i+1})(t_{i+1}-t_i)=\lim\Sigma\bar{f}(t_i)\varphi'(t_i)(t_{i+1}-t_i)$.

A baloldali kifejezés nem egyéb, mint az $\alpha)$ alatti, amelyből kiindultunk, vagyis: $\int_a^b f(x)\,dx$, tehát arra jutottunk, hogy:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\,[\bar{f}(\alpha)\varphi'(\alpha)(t_1-\alpha)+$$
$$+\bar{f}(t_1)\varphi'(t_1)(t_2-t_1)+\cdots+\bar{f}(t_n)\varphi'(t_n)(\beta-t_n)]. \qquad \gamma)$$

Még egy kis megjegyzést kell tennünk, mielőtt a jobboldalon álló kifejezést értelmeznők. Ha $f(x)$ az ab szakaszban Riemann-féle értelemben integrálható, akkor az $f[\varphi(t)]$, vagyis $\bar{f}(t)$ is integrábilis az $\alpha\beta$ szakaszban; ugyanis ez az $f(x)$-el megegyezik, továbbá létesíthető olyan t-szerinti beosztás, hogy a tetszés szerinti η-nál nagyobb ingadozású szakaszok összes terjedelme az előre megadott ε-nál kisebb legyen. Ugyanis, ha az x-szerinti beosztásban $x_{i-1}\ldots x_i$ olyan szakasz, melyben $f(x)$ ingadozása η-nál nagyobb, akkor e szakasznak megfelelő $t_{i-1}\ldots t_i$-ben az $f(x)$-el megegyező $\bar{f}(t)$ ingadozása is η-nál nagyobb (és viszont); de ennek a szakasznak a terjedelme

$$t_i-t_{i-1}=\frac{x_i-x_{i-1}}{\varphi'(\tau)}, \quad \text{tehát} \quad t_i-t_{i-1}<\frac{x_i-x_{i-1}}{m},$$

ahol m az egész $\alpha \ldots \beta$ szakaszban az előbb bevezetett meghatározott pozitiv szám. Így tehát azon t-szakaszok összes terjedelme, melyekben az $\bar{f}(t)$ ingadozása η-nál nagyobb, az x-szakaszokkal együtt tetszés szerinti kicsinnyé tehető, vagyis az $\bar{f}(t)$ integrálható az $\alpha \ldots \beta$ szakaszban. Az $\varphi'(t)$-ről pedig, mint folytonos függvényről az integrálhatóság nyilvánvaló; így tehát az $\bar{f}(t)\varphi'(t)$ is integrálható az $\alpha\beta$ szakaszban, tehát $\int\limits_\alpha^\beta \bar{f}(t)\varphi'(t)\,dt$ így is értelmezhető:

$$\int\limits_\alpha^\beta \bar{f}(t)\varphi'(t)\,dt = \lim\left[\bar{f}(\alpha)\varphi'(\alpha)(t_1-\alpha) + \right.$$
$$\left. + \bar{f}(t_1)\varphi'(t_1)(t_2-t_1) + \cdots + f'(t_n)\varphi'(t_n)(\beta-t_n)\right]$$

Minthogy a jobboldali kifejezés ugyanaz, mint a γ) alatti, tehát:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Hátra van még, hogy megszabaduljunk attól a feltevéstől, hogy $\varphi'(t)$ sehol sem 0. Ha valamely $t=\gamma$ helyen $\varphi'(\gamma)=0$ és $c=\varphi(\gamma)$, akkor az előbbiekből következik, hogy az $\alpha \ldots \gamma-\varepsilon$ közben

$$\int\limits_\alpha^{\gamma-\varepsilon} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

ahol $\lim\limits_{\varepsilon=0}\varepsilon'=0$; tehát:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_\alpha^{\gamma-\varepsilon} \bar{f}(t)\varphi'(t)\,dt = \lim_{\varepsilon'=0}\int\limits_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx.$$

De az integrándus korlátos, tehát az integrálok a felső határaik folytonos függvényei és így:

$$\int\limits_\alpha^\gamma \bar{f}(t)\varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Ha tehát az $\alpha \ldots \beta$ szakaszt a γ pontokkal részekre osztjuk, akkor a számításnál a $\varphi'(t)$ eltűnését tekintetbe sem kell vennünk. Ebből egyúttal azt is láthatjuk, hogy ha $\varphi'(t)$ a $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ helyeken eltűnik ugyan, de a $\varphi(t)$ az egész $\alpha \ldots \beta$ szakaszban monoton növekedő marad, akkor a szakasz felosztása e $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ pontokkal nem is szükséges.

Ha $x=\varphi(t)$ helyettesítést végezzük, ahol $\varphi(t)$ az $\alpha\beta$ szakaszban monoton növekedő függvény, melynek folytonos diff. hányadosa van e szakaszban és $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, akkor az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$-et úgy alakíthatjuk át, hogy az $f(x)$-ben x helyett $\varphi(t)$-t teszünk, a dx helyett

*$\varphi'(t)dt$-t és az a és b határok helyett azon α illetőleg β értéket teszszük, melyekre nézve $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.**

Az $\int_a^b f(x)dx$ helyett tehát az $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ számítható ki és ha ezt a határozatlan integrál segítségével akarjuk végezni, akkor előbb meg kell határoznunk az $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ primitiv függvényt és ebből az $\left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right]_\alpha^\beta$ különbséget. Az $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ primitiv függvény nem egyéb, mint az $\int f(x)dx$ az $x=\varphi(t)$ szubsztitucióval transzformálva; tehát a határozott integrált egyszerűen úgy transzformáljuk az $x=\varphi(t)$ szubsztitucióval, hogy a határoktól eltekintve, az $\int f(x)dx$-et a már tanult eljárással transzformáljuk és uj határokul az α és β értékeket választjuk, melyekre nézve $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

De, miként említettük, ez az eljárás sokszor hibás eredményre vezet és éppen azért választottuk a tétel levezetésére most ezt a hosszadalmasabb utat, hogy kidomborítsuk, hogy a $\varphi(t)$-re nézve minő feltételek érvényesek. Ha a $\varphi(t)$ nem monoton növekvő az egész $\alpha\beta$ szakaszban, vagy ha $\varphi'(t)$ nem folytonos, vagy nem korlátos, akkor nem biztos, hogy az eljárás helyes eredményre vezet.

Példák. Igy például, ha ezt az egyszerű integrált kell kiszámítanunk:

$$I=\int_{-1}^{+1} x^2\,dx,$$

tudjuk, hogy a határozatlan integrál: $\frac{x^3}{3}$; tehát

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1}=\frac{2}{3}.$$

Az $y=x^2$ parabolaív, az abszcissza tengely és a $-1\cdots+1$ pontokban vont ordinátàk közé eső területrész: $\frac{2}{3}$.

Tegyük: $x=\sqrt{t}$, vagyis $t=x^2$; akkor tehát, ha $x=-1$, $t=+1$, ha $x=+1$, $t=+1$; tehát $\alpha=\beta=0$ és így a transzformált integrál: 0. Ennek oka abban van, hogy t nem monoton függvénye az x-nek a $-1\cdots+1$ szakaszban.

* Még megjegyezzük, hogy ha $\varphi(t)$ nem monoton növekedő, hanem monoton csökkenő és $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, akkor az $\int_a^b f(x)\,dx$ helyett a $-\int_a^b f(x)\,dx$-e transzformáljuk. Akkor ugyanis, ha t a β-tól α-ig halad, a $\varphi(t)$ monoton növekedő. Megjegyezzük még azt is, hogy $\varphi(t)$-nek valódi növekedőnek kell lennie, állandó szakasza nem lehet, mert akkor nem mondhatnók, hogy minden x értéknek egy t érték felel meg.

Ha határok gyanánt nem —1-et és +1-et választjuk, hanem például ezt az integrált kell kiszámítanunk: $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+1} x^2\,dx$, akkor azt találjuk, hogy

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+1} = \frac{3}{8}$$

és ha ismét $t=x^2$ helyettesítést végezzük, akkor az új határok lesznek: $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta=1$ és az integrál ilyen alakú:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{+1} \sqrt{t}\,.\,dt = \frac{1}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^{+1}.$$

Ha $1^{\frac{3}{2}}=+1$ és $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{8}$ tesszük, akkor helyes eredményt kapunk; de ha más előjellel vesszük ez értékeket, az eredmény helytelen lesz. Miért van ez így? Azért, mert ha x a $-\frac{1}{2}$-től $+1$-ig halad, (tehát a 0-on átmegy), akkor a t az $\frac{1}{4}$-től 1-ig halad; de a $\sqrt{t}$ csak akkor lesz monoton, ha $t=\frac{1}{4}$ helyen $\sqrt{t}$-nek nem $+\frac{1}{2}$-et, hanem $-\frac{1}{2}$ értéket adjuk.

Ha azonban az integráció szakaszában a 0 nincs benne, hanem pl. ezt az integrált számítjuk ki: $\int\limits_{+1}^{2} x^2\,dx$, azt találjuk, hogy $\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$ és ha $x^2=t$ tesszük

$$\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{4} \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{7}{3},$$

ha úgy a $4^{\frac{3}{2}}$, mint az $1^{\frac{3}{2}}$-et pozitivnak vesszük.

Egy másik példa, mely a szubsztituciónál követendő óvatosságra int, ez:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Tegyük $x=\frac{1}{t}$, akkor $dx = -\frac{dt}{t^2}$ és ha $x=-1$, akkor $t=-1$, ha $x=+1$, $t=+1$, tehát az új határok: $\alpha=-1$, $\beta=+1$ és így:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = -\int\limits_{-1}^{+1} \left(\frac{dt}{t^2} : \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\right) = -\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Előbb $+\frac{\pi}{2}$, most pedig $-\frac{\pi}{2}$ adódott. Ennek oka abban van, hogy ha x -1-től $+1$-ig halad, akkor t nem a $-1\cdots+1$ közötti intervallumot futja be, hanem a $-1\cdots-\infty$ és a $+\infty\cdots+1$ két végtelen nagy utat (és ha a $-\int\limits_{-1}^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, $-\int\limits_{\infty}^{+1} \frac{dt}{1+t^2}$ integrálokat a IX. fejezet szerint kiszámítjuk és tekintetbe vesszük, hogy $\operatorname*{arctg}_{x=-\infty} x = -\frac{\pi}{2}$, azt találjuk, hogy mindkét integrál $\frac{\pi}{4}$, összegük tehát a helyes: $\frac{\pi}{2}$).

Ha a szubsztituciónál használt $x=\varphi(t)$ függvény nem monoton változik az x-el, hanem monoton szakaszokra bontható, akkor az

$\int_a^b f(x)\,dx$ kiszámítása végett az ab intervallumot felosztjuk olyan részekre, melyeken belül a $\varphi(t)$ monoton változik és minden egyes részintegrált külön határozunk meg.

Így például $\int_{-1}^{+1} x^2\,dx$, miként láttuk, az $x=\sqrt{t}$ helyettesítéssel nem vezet eredményre, mert a $t=x^2$ a $-1\cdots+1$ szakaszban nem monoton; de a $-1\ldots0$ és $0\ldots+1$ szakaszokban a változás monoton; tehát:

$$\int_{-1}^{+1} x^2\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{+1} x^2\,dx$$

tesszük és ha $t=x^2$-et helyettesítjük az első integrálban, akkor az $x=-1$-nek $t=1$, $x=0$-nak $t=0$ felel meg; tehát $\int_{-1}^{0} x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{0}\sqrt{t}\,dt$.

De itt tekintetbe veendő, hogy ha x a -1-től 0-ig halad, akkor $\sqrt{t}=x$ is -1-től 0-ig megy, vagyis $\sqrt{t}$ az egész integráció folyamán negativ jellel veendő és így ez az integrál: $-\frac{1}{3}[t^{\frac{3}{2}}]_1^0 = \frac{1}{3}$.

A másik integrálban pedig, az $\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$-ben x vagyis $\sqrt{t}$ mindenütt pozitiv, tehát $\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}[t^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{1}{3}$ és így: $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$.

A parciális integrálás és a helyettesítés módszereivel már most néhány határozott integrált kiszámíthatunk.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ kiszámítandó, ha m pozitiv egész szám. A határozatlan integrálra alkalmazva a parciális integrálás módját ($\sin^{m-1} x=u$; $\sin x\,dx=dv$ téve) azt kaptuk (331. l.), hogy:

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx$$

és ebből a határozott integrálra áttérve, minthogy $[\cos x \sin^{m-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, ha $m>1$, tehát:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx.$$

És ha a jobboldalon álló integrálra tovább is alkalmazzuk ezt az eljárást, azt találjuk, hogy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx = \frac{m-3}{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4} x\,dx$$

és ebből:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4} x\,dx$$

és így folytatva az eljárást, ha m páros szám, végre oly integrálra jutunk, melyben már $\sin x$ nem szerepel: az $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx$-re, mely $\frac{\pi}{2}$-vel egyenlő, ha pedig m páratlan, akkor végül $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$-re jutunk. Így tehát a következő két formulát kapjuk:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-5}{2k-4} \cdots \frac{1}{2}\, \frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \cdots \frac{2}{3}.$$

Ezzel egyúttal meghatároztuk az $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx$ integrált is. Ha ugyanis x helyett $\frac{\pi}{2}-y$-t tesszük, akkor $dx=-dy$ és a határok a következők: Minthogy $y = \frac{\pi}{2} - x$, tehát, ha $x=0$, $y = \frac{\pi}{2}$; ha $x = \frac{\pi}{2}$, $y=0$ és így:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^m x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx.$$

Az $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx$ és $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx$ értékeiből igen érdekes közelítő értéket állapíthatunk meg a $\frac{\pi}{2}$-re nézve. Előre bocsátjuk e kis megjegyzést: Ha $\varphi(x)$ az ab intervallumban mindenütt pozitiv és integrálható, akkor az $\int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$ pozitiv, amint az az integrál értelmezéséből azonnal következik. Ebből rögtön ered az is, hogy ha $\psi(x)$ az ab intervallumban minden helyen nagyobb (vagy akkora), mint $\varphi(x)$, akkor $\int\limits_a^b \psi(x)\, dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$; mert hiszen az

$$\int\limits_a^b \psi(x)\, dx - \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx = \int\limits_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx$$

pozitiv (vagy 0).

Minthogy $\sin x$ a $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ intervallumban mindig kisebb az 1-nél, tehát minden x értéknél ($x = \frac{\pi}{2}$-et és $x=0$-t kivéve)

$$\sin^{2k-1} x > \sin^{2k} x > \sin^{2k+1} x$$

és így az előbbi formulákat használva:

$$\frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \cdot \frac{2k-6}{2k-5} \cdots \frac{2}{3} > \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} >$$

$$> \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \cdots \frac{2}{3}.$$

Az első számérték csak abban különbözik az utolsótól, hogy ez utóbbi a $\frac{2k}{2k+1}$-el meg van szorozva. Azt mondhatjuk tehát, hogy a

$$\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdots\frac{2}{3}$$

mellett az első kifejezésnél 1, a másodiknál pedig az 1-nél kisebb $\frac{2k}{2k+1}$ szerepel. A középső kifejezést tehát úgy kapjuk meg a baloldaliból, ha ezt egy olyan számmal szorozzuk, mely $\frac{2k}{2k+1}$ és 1 közé esik. Jelöljük ezt a számot ϑ-val; tehát $\frac{2k}{2k+1}<\vartheta<1$. Ezt még úgy is mondhatjuk, hogy $\vartheta=\frac{2k+\varrho}{2k+1}$, ahol $0<\varrho<1$. És ezen jelöléssel:

$$\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{2k+\varrho}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdots\frac{2}{3},$$

vagyis:
$$\frac{\pi}{2}=\frac{[2.4.6\ldots(2k-2)]^2\,2k}{[3.5.7\ldots(2k-1)]^2\,2k-1}\cdot\frac{2k+\varrho}{2k+1}.$$

2. Számítsuk ki ezt az integrált: $\int_0^{\pi}\sin^m x\,dx$, mely az előbbitől csak abban különbözik, hogy a felső határa nem $\frac{\pi}{2}$, hanem π. Ezt az integrált két részre bontjuk:

$$\int_0^{\pi}\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^m x\,dx.$$

Tegyük a második integrálban x helyett: $\pi-y$-t. Ekkor az új határok: $\frac{\pi}{2}$ és 0 lesznek és $dx=-dy$; tehát

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m y\,dy$$

és ha az y betű helyett x-et teszünk, akkor arra jutunk, hogy:

$$\int_0^{\pi}\sin^m x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx.$$

Ha azonban $\int_0^{\pi}\cos^m x\,dx$-et akarjuk kiszámítani, akkor különbséget kell tennünk páros és páratlan m esetei között. Ha m páros, akkor az $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^m x\,dx$-ben $x=\pi-y$ helyettesítéssel, ugyanúgy, mint előbb, azt kapjuk, hogy:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m y\,dy,$$

vagyis megint:
$$\int_0^{\pi}\cos^{2k} x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k} x\,dx;$$

de páratlan m esetében:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^m x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx$$

és így:
$$\int_0^{\pi}\cos^{2k+1} x\,dx=0.$$

Ha az $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
formulában $k=1$ tesszük, akkor:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{és így:} \quad \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

nevezetes integrálokat kapjuk.

3. Könnyű lesz kiszámítani az ilyen integrálokat:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx,$$

ha m és n egész számok. A

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

formulákból ugyanis következik, hogy:

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

és $$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

tehát az első integrál, ha $m \neq n$:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x\, dx =$$

$$= -\left[\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi},$$

tehát: $$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0.$$

Éppen így kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0.$$

Ha $m=n$, akkor pedig az első integrál: $\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx$.

De $$\sin^2 mx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2mx),$$

tehát: $$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2mx)\, dx = \pi.$$

Ebből azonnal következik, hogy egyúttal

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi.$$

Ha a felső határ nem 2π, hanem π, akkor:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 mx\,dx$$

tehető és ha a második integrálban $x=\pi-y$ tesszük, akkor $\int_0^{\pi} \sin^2 my\,dy$ lesz belőle, vagy [az y betű helyett x-et téve]

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx,$$

miből ismét:
$$\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Éppen így kapjuk, hogy:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Végül, ha $\sin mx \cos mx$ helyett $\frac{1}{2}\sin 2mx$-et tesszük, akkor azt találjuk, hogy

$$\int_0^{\pi} \sin mx \,.\, \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2mx\,dx = \frac{1}{4m}\left[\cos 2mx\right]_0^{\pi} = 0,$$

tehát ezeket a fontos eredményeket kaptuk, hogy ha $m \neq n$,

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0.$$

Ha pedig $m=n$, akkor

$$\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \int_0^{\pi} \sin mx \cos mx\,dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin mx \cos mx\,dx = 0.$$

4. Számítsuk ki ezt az integrált: $\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}\,dx.$

Ha $\cos x = y$ tesszük, akkor $dx = -\frac{dy}{\sin x}$. Az új határok a következők lesznek: Ha $x=0$, $\cos 0=1$, tehát az alsó határ: 1. Ha $x=\pi$, $\cos x=-1$, tehát a felső határ: -1. Még azt is meg kell vizsgálni, hogy e helyettesítés meg van-e engedve. Ha x a 0-tól π-ig halad, akkor a $\cos x$ $+1$-től monoton csökken -1-ig; tehát a helyettesítés monoton változó függvénnyel történik, (mert monoton függvény inverz függvénye is monoton). Így tehát:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x} = -\int_1^{-1} \frac{dy}{1+y^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Határozzuk meg az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$-et, mely az előbbitől csak a felső határban különbözik. Evégből az előzőt felbontjuk két részre:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

és ha a második integrálban $x=\pi-y$ tesszük, akkor $dx=-dy$, az új határok $\frac{\pi}{2}$ és 0 és minthogy: $\sin x=\sin(\pi-y)=\sin y$; és $\cos^2 x=\cos^2 y$, tehát a második tag:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin y\, dy}{1+\cos^2 y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y\, dy}{1+\cos^2 y}$$

és így a két tag egyenlő lévén, következik, hogy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi}{4}.$$

Ugyanezt közvetlenül is megkaphattuk volna az előbb használt $y=\cos x$ helyettesítéssel.

6. Ezen integrálok segítségével ezt a kissé komplikáltabbat is kiszámíthatjuk:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x}.$$

Ez már olyan integrál, melyet határozatlan integrálok segítségével közvetlenül nem számíthatunk ki, mert csak olyan trigonometriai integrálokkal foglalkoztunk, melyek az x-nek és a $\sin x$, $\cos x$-nek egész függvényei. Tegyük itt x helyébe $\pi-y$-t, akkor $dx=-dy$ és a határok π és 0 lesznek; tehát:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin y}{1+\cos^2 y}\, dy - \int_0^{\pi} \frac{y \sin y\, dy}{1+\sin^2 y}.$$

A jobboldali második tag megegyezik a keresett integrállal, az y betű ugyanis teljesen mellékes, helyette, ha tetszik, x betűt is írhatunk. Eszerint tehát:

$$2\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

és minthogy a jobboldali integrál az előbbi számításunk szerint $\frac{\pi}{2}$, tehát:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

36. Az általános középértéktételek. 1. *Az első középértéktétel.* Ha az integrándus primitiv függvényét nem tudjuk meghatározni, akkor a határozott integrál számértékének a megállapítása sokszor nagy nehézséggel jár; azért már gyakorlati szempontból is célszerű lesz, ha megismerkedünk olyan relációkkal, melyek sokszor a határozott integrálok átalakítására, a számítások redukálására szolgálnak. Már láttuk, hogy ha $f(x)$ az ab szakaszban integrálható és M és m értékek között foglaltatik, (pl.: M az $f(x)$ felső határa és m az alsó határa az ab szakaszban), akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

ahol μ az M és m közé eső érték. Ez a formula már némelykor alkalmas az $\int_a^b f(x)\,dx$ számértékének a hozzávetőleges meghatározására. Geometriai értelme tudvalevőleg az, hogy az $y=f(x)$ görbe, az X tengely és az a és b abszcisszájú pontokban vont ordinátáк közé eső terület oly derékszögű négyszög területével egyenlő, melynek alapja az ab szakasz és magassága olyan ordináta, mely az m és M közé esik.

Ezt az igen plauzibilis középértéktételt akarjuk most általánosítani.

Legyen ugyanis az integrándus két integrálható függvénynek, az $f(x)$ és $\varphi(x)$-nek szorzata, melyek közül a $\varphi(x)$ az egész ab intervallumban sehol sem negativ és $f(x)$ felső határa az ab-ben legyen M, alsó határa pedig m. Akkor azt állítjuk, hogy

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

ahol μ az m és M közé esik. (Ha $\varphi(x)=1$, akkor az előbbi speciális esettel van dolgunk.) Ennek a fontos középértéktételnek a bizonyítása, éppen úgy, mint a speciális eseté, közvetlenül az integrál értelmezéséből folyik. Ugyanis tudjuk, hogy az $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ értelmezése a következő:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \lim \Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\,d_i,$$

ha $d_1, d_2, \ldots$ alatt az ab szakasz egyes részeit értjük, melyekre az $a \ldots b$ szakasz felbontatott és ξ_i az i-ik rész valamelyik helyét jelenti. A limes pedig úgy értendő, hogy az egyes osztásrészek elenyésző csekélyekké lesznek. De ha egy tetszés szerinti beosztásnak megfelelő összeget veszünk szemügyre, pl.: a $\Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\,d_i$ összeget, akkor ezt nyilván nagyobbítjuk, ha $f(\xi_i)$ helyett minden tagban M-et írunk, mert hiszen, ha ilyen alakú összegben:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

ahol minden b tényező pozitiv (vagy 0), az a tényezők helyett nagyobbakat teszünk, akkor ezzel az összeg nagyobbodik. És éppen így, ha minden $f(\xi_i)$ helyett m-et írunk, akkor az összeg kisebbedik. Eszerint tehát:

$$m\Sigma\varphi(\xi_i)d_i < \Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)d_i < M\Sigma\varphi(\xi_i)d_i.$$

Ez az egyenlőtlenség minden beosztásra érvényes.

Ebből egyúttal az is következik, hogy (áttérve a $\lim \Delta = 0$ határra, ahol Δ a részek maximuma)

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Az
$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\,dx$$
még így is írható:
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$
ahol $m \leq \mu \leq M$. Ha $f(x)$ az ab szakaszban folytonos, akkor van olyan ξ hely e szakaszban, ahol a μ értéket föl is veszi, vagyis ezen esetben:
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Eddig föltettük, hogy $\varphi(x)$ az ab szakaszban mindenütt pozitiv (vagy 0). A középértéktétel akkor is érvényes, ha $\varphi(x)$ mindenütt negativ (vagy 0); ugyanis akkor a középértéktételt $-\varphi(x)$-re alkalmazva:
$$-\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = -\mu\int_a^b \varphi(x)\,dx$$
és ebből megint:
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Az I. középértéktétel tehát így hangzik: *Ha $\varphi(x)$ az ab szakaszban jelét nem változtatja és $f(x)$ a M és m értékek között marad és úgy a $\varphi(x)$, mint az $f(x)$ integrálható, akkor:*
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$
ahol μ valamely meghatározott számérték az m és M között. Ha $f(x)$ az ab szakaszban folytonos, akkor:
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$
ahol ξ valamely meghatározott közbenső érték az a és b között.

2. *A második középértéktétel.* Mielőtt az integrálokra vonatkozó ezen fontos tétellel megismerkednénk, a következő elemi megjegyzést bocsátjuk előre, melyet még később is igen sokszor használunk. *Legyen az*

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$$

a pozitiv számoknak egy monoton csökkenő sorozata és

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$

tetszés szerinti számok, de az

$$s_i = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_i$$

részletösszegek mindig, akármekkora legyen is az i, az A és B>A közé essenek. Akkor e két sorozat elemeinek összetételéből alkotott

$$U = u_0\varepsilon_0 + u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \cdots + u_n\varepsilon_n$$

összegről azt állítjuk, hogy:

$$A\varepsilon_0 < U < B\varepsilon_0.$$

Ugyanis az U összeg így is írható (*Abel* szerint):

$$U = s_0\varepsilon_0 + (s_1 - s_0)\varepsilon_1 + (s_2 - s_1)\varepsilon_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1})\varepsilon_n,$$

mert hiszen

$$u_0 = s_0, \ u_1 = s_1 - s_0, \ u_2 = s_2 - s_1, \dots \ u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Az U összeget tehát így irhatjuk:

$$U = s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \cdots + s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n\varepsilon_n.$$

De az ε számokról azt mondtuk, hogy pozitivok és csökkenőek; tehát az $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n$ mindannyian pozitivok. Az s_0, $s_1, s_2, \dots s_n$ mind kisebbek a B-nél és nagyobbak az A-nál. Ha tehát ezen összegben mindenik s helyett a nagyobb B számot írjuk, akkor az összeget nagyobbítjuk; ha pedig a kisebb A számot tesszük, az összeget kisebbitjük. Így tehát:

$$A[\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n + \varepsilon_n] < U < B[\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n + \varepsilon_n],$$

azaz:

$$A\varepsilon_0 < U < B\varepsilon_0.$$

Ezek után hozzáfogunk a második középértéktétel tárgyalásához. Legyen a $\varphi(x)$ az ab intervallumban és így tehát ab minden szakaszában integrálható;* továbbá az $f(x)$ az egész ab intervallum-

* Ha a $\varphi(x)$ az ab szakaszban integrálható, akkor e szakasz minden részében is integrálható. Ez majdnem magától értetődik. Ugyanis legyen z az ab szakasz valamely belső pontja. A $\varphi(x)$ integrálhatóságának, mint tudjuk, szükséges feltétele, hogy a tetszésszerinti ε-hoz tartozik oly véges δ köz, hogy ha az ab szakaszt e δ-nál kisebb közökre osztjuk, akkor

$$\Sigma(M_i - m_i)\delta_i < \varepsilon,$$

ha minden $\delta_i < \delta$ és M_i a $\varphi(x)$ felső határa, m_i pedig alsó határa a δ_i közben és az összegezés az egész ab szakaszra vonatkozik és ezenfelül egyik osztóban mindenütt pozitiv, monoton csökkenő függvény. Az az állítás, hogy $\varphi(x)$ az ab minden szakaszában integrálható, azt jelenti, hogy ha z az ab szakasz tetszés szerinti helye, akkor az $\int\limits_a^z \varphi(x)\,dx$ véges és meghatározott szám. Más szóval ez azt jelenti, hogy ha az $a \ldots z$ szakaszt tetszés szerinti módon $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_k$ szakaszokra osztjuk és az egyes szakaszokban tetszés szerint megjelöljük a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ helyeket, akkor

$$\lim\,[\varphi(\xi_1)\delta_1+\varphi(\xi_2)\delta_2+\cdots+\varphi(\xi_k)\delta_k]$$

létezik a már ismert értelemben; ez a limesz: $\int\limits_a^z \varphi(x)\,dx$.

Már most osszuk fel az ab intervallumot tetszés szerinti módon $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ részekre és az egyes részekben jelöljük meg a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ helyeket és alkossuk meg az

$$f(\xi_1)\varphi(\xi_1)\delta_1+f(\xi_2)\varphi(\xi_2)\delta_2+\cdots+f(\xi_n)\varphi(\xi_n)\delta_n=\Sigma$$

összeget. Ha a beosztások elég kicsinyek, akkor ez az összeg elenyésző csekéllyel különbözik az

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

határozott integráltól. Azt állitjuk, hogy ez az összeg olyan fajta, mint az előbb használt

$$u_0\varepsilon_0+u_1\varepsilon_1+\cdots+u_n\varepsilon_n$$

összeg. Ugyanis az $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sorozat szerepét viszi az $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $f(\xi_3), \ldots$ sorozat. Ez ugyanis pozitiv, csökkenő számok sora. Az $u_0, u_1, u_2, \ldots$ szerepét pedig az $\varphi(\xi_1)\delta_1$, $\varphi(\xi_2)\delta_2$, $\varphi(\xi_3)\delta_3, \ldots$ számok viszik.

pont a z pont. Ha most a $\Sigma(M_i-m_i)\delta_i$ összeget csak az $a \ldots z$ közre vonatkozólag vesszük, ez természetesen kisebb ε-nál. Ez pedig a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $\varphi(x)$ az az közben integrálható. Akárhol legyen is a z az ab-ben:

$$\Sigma M_i\delta_i > \int\limits_a^z \varphi(x)\,dx > \Sigma m_i\delta_i$$

(az összegezés az $a \ldots z$ köz szakaszaira vonatkozik) és ha μ_i tetszés szerinti szám M_i és m_i között, akkor egyúttal

$$\Sigma M_i\delta_i > \Sigma \mu_i\delta_i > \Sigma m_i\delta_i,$$

tehát e két egyenlőtlenségből következik, hogy ha csak minden δ_i kisebb az ε-hoz tartozó δ véges köznél:

$$\left|\Sigma\mu_i\delta_i - \int\limits_a^z \varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Ezt még meg kell mutatnunk. Az u számsorról t. i. azt állítottuk, hogy az

$$s_1=u_0,\ s_1=u_0+u_1,\ s_2=u_0+u_1+u_2, \ldots$$

részletösszegek sora két véges szám között van: A és B között. A jelen esetben a k-ik részletösszeg:

$$s_k=\varphi(\xi_1)\delta_1+\varphi(\xi_2)\delta_2+\cdots+\varphi(\xi_k)\delta_k.$$

A $\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\delta_k$ szakaszok összege $z-a$. Föltételünk szerint $\varphi(x)$ az $a \ldots z$ szakaszban integrálható; tehát a beosztást már oly messze haladottnak tekinthetjük [vagyis a max. δ oly kicsiny], hogy az s_k az $\int\limits_a^z \varphi(x)\,dx$-től elenyésző csekéllyel különbözzék.*

Képzeljük most a z felső határt változónak; az $\int\limits_a^z \varphi(x)\,dx$ által fölvett számértékek felső határát jelöljük B-vel, e számértékek alsó határát A-val. Ha már most B' valamicskével nagyobb, mint B, akkor már a beosztást olyannak képzelhetjük, hogy minden $s_k<B'$; mert hiszen az s_k elenyésző csekéllyel különbözik a megfelelő $\int\limits_a^z f(x)\,dx$ integráltól, amely kisebb B-nél, tehát s_k mindenesetre kisebbnek tekinthető B'-nál. Épen így mondhatjuk, hogy minden $s_k>A'$, ahol A' bárminő kevéssel kisebb az A-nál.

Így tehát, miként előbb az $A\varepsilon_0<U<B\varepsilon_0$, most a megfelelő jelöléssel:

$$A'f(\xi_1)<\Sigma<B'f(\xi_1).$$

ξ_1-et minden beosztásban válasszuk a-nak, akkor tehát:

$$A'f(a)<\Sigma<B'f(a).$$

Ha már most a δ részek végtelen kicsinyekké válnak, akkor Σ-ból: $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ lesz; B' tetszés szerinti kevéssel különbözik az $F(z)=\int\limits_a^z f(x)\,dx$ függvény felső határától, ha z az $a \ldots b$ intervallumot futja be; és A' az $F(z)$ alsó határától tér el tetszőleges kevéssel. Így tehát:

$$A'f(a)<\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx<B'f(a),$$

* Az előbbi jegyzetben kifejtettük, hogy ez minden s_k-ra vonatkozik, akármekkora legyen is a z, vagyis $\left|s_k-\int\limits_a^z \varphi(x)\,dx\right|<\varepsilon$, ha csak max $\delta_i<\delta$ akárhol legyen is z az ab közben.

bármilyen közel van is A' az A-hoz és B' a B-hez. Ez csak úgy lehetséges, ha

$$Af(a) \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq Bf(a),$$

vagyis:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = Cf(a),$$

ahol C egy bizonyos A és B közé eső számérték. De az

$$F(z) = \int_a^z \varphi(x)\,dx$$

integrál a saját felső határának, a z-nek folytonos függvénye (mert $\varphi(x)$ az ab intervallumban véges; l. 290. lap), tehát létezik egy közbenső ξ hely, melyre nézve

$$C = F(\xi) = \int_a^\xi \varphi(x)\,dx.$$

Ha C helyett ezt az értéket tesszük, akkor tehát:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx.$$

Ha tehát $f(x)$ az ab intervallumban mindenütt pozitiv, monoton csökkenő és $\varphi(x)$ korlátos és az ab intervallumban integrálható, akkor

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx,$$

ahol ξ valamely meghatározott közbenső hely az a és b között.

Most a tételt az $f(x)$-re vonatkozó feltételektől részben meg akarjuk szabadítani, hogy általánosabbá váljék. Ha $f(x)$ az egész ab intervallumban konstans: c, akkor nyilván

$$\int_a^b c\varphi(x)\,dx = c\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

is e tétel speciális esetének tekinthető: olyannak, amelynél $\xi = b$.

Az $f(x)$-től azt követeltük, hogy pozitiv legyen az egész ab szakaszban. Ha nem mindenütt pozitiv, de monoton csökkenő marad, akkor legkisebb értéke: $f(b)$; tehát ha $-f(b)$ (pozitiv) számot az $f(x)$-hez hozzáadjuk: az így nyert $f(x)-f(b)$ az egész ab intervallumban mindenütt pozitiv.*

Az $f(x)-f(b)$-re alkalmazható tehát a tételünk és így:

* b helyen, vagy ennek egy egész környezetében 0; de az nem okoz bajt.

$$\int_a^b [f(x) - f(b)]\,\varphi(x)\,dx = [f(a) - f(b)]\int_a^\xi \varphi(x)\,dx =$$
$$= f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx - f(b)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx.$$

Ha a baloldali integrált két részre választjuk és a második részt a jobboldalra hozzuk:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\left[\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^\xi \varphi(x)\,dx\right]$$

és ha végre a jobboldali szélső tagban a két integrál különbségét megalkotjuk, a következő végformulára jutunk:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Ez a második középértéktétel azon esetben, midőn $f(x)$ az ab intervallumban monoton csökkenő, de negativ értékeket is fölvehet. Ez a formula természetesen érvényes akkor is, ha $f(b)$ nem negativ.

Ha $f(x)$ nem monoton csökkenő, hanem monoton növekedő az ab szakaszban, akkor $-f(x)$ monoton csökkenő; tehát ha $-f(x)$-re alkalmazzuk e tételt, a negativ jel elhagyásával:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$

-re jutunk, vagyis a tétel ebben az esetben is érvényes.

VIII. FEJEZET.

INTEGRÁLOK KÖZELÍTŐ MEGHATÁROZÁSA.

1. A mechanikus quadratura. A középértéktételeket némelykor fölhasználhatjuk az integrál közelítő meghatározására. Így pl., ha az integrándus $f(x)\varphi(x)$ alakú és $\varphi(x)$ az ab intervallumban az előjelét nem változtatja, akkor az első középértéktétel szerint az $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ értéke $\mu\int_a^b \varphi(x)dx$, ahol μ az $f(x)$ maximuma és minimuma közötti érték. Ha az $f(x)$ változása az ab intervallumban csekély, akkor μ gyanánt $f(a)$, vagy $f(b)$ is választható és így az integrál számértéke közelítőleg

$$f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad \text{vagy} \quad f(b)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

vagy μ helyett az $f(a)$ és $f(b)$ középértékét, $\frac{f(a)+f(b)}{2}$-t véve: $\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \varphi(x)\,dx$ s í. t. Ha nagyobb pontosságot óhajtunk, akkor az integrál közelítő meghatározása céljából más eljáráshoz folyamodunk. Mindezeket a határozott integrál közelítő meghatározására szolgáló ismertetendő eljárásokat: *mechanikus quadraturáknak* nevezzük. E módszerek ismertetésével kapcsolatban egyúttal meg kell határoznunk hozzávetőlegesen azt a hibát is, amelyet elkövetünk, ha az integrált az illető módszerrel számítjuk ki.

A mechanikus quadratura módszereinek jellemző vonása abban van, hogy az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál kiszámítása céljából az $f(x)$ helyett rendszerint olyan $F(x)$ racionális egész függvényt használunk, mely az $f(x)$-el az ab intervallum egyes helyein megegyezik. Az első eljárás, melyet ismertetni óhajtunk, abban áll, hogy $f(x)$ helyett olyan $F(x)$ n-edfokú racionális egész függvényt használunk, mely az $f(x)$-el a megadott $n+1$:

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_{n+1}$$

helyeken megegyezik. Geometriai szempontból tekintve a dolgot, az $y=f(x)$ görbe és az a és b abszcisszájú pontokon átmenő ordináták és az X tengely közé foglalt ABA_1B_1 terület helyett olyan területet határozunk meg, melyet ezen egyenesek és az n-edrendű $y=F(x)$ parabola határolnak.

Az $F(x)$ meghatározására a Lagrange-formula szolgál: Tegyük

$$\omega(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1}),$$

akkor:

$$F(x)=\frac{f(a_1)\,\omega(x)}{(x-a_1)\omega'(a_1)}+\frac{f(a_2)\,\omega(x)}{(x-a_2)\omega'(a_2)}+\dots+\frac{f(a_{n+1})\,\omega(x)}{(x-a_{n+1})\omega'(a_{n+1})}.$$

A hiba, amelyet elkövetünk, ha $f(x)$ helyett $F(x)$-et vesszük az x helyen:

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x),$$

ahol ξ az $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$, x közötti hely. Így tehát:

$$f(x)=\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}\,\frac{\omega(x)}{x-a_1}+\dots+\frac{f(a_{n+1})}{\omega'(a_{n+1})}\,\frac{\omega(x)}{x-a_{n+1}}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)$$

és ebből:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-a_1}\,dx+\frac{f(a_2)}{\omega'(a_2)}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-a_2}\,dx+$$

$$+\dots+\frac{f(a_{n+1})}{\omega'(a_{n+1})}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-a_{n+1}}\,dx+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\,\omega(x)\,dx.$$

Mielőtt e feladat speciális eseteinek részletesebb tárgyalására térnénk át, megemlítjük, hogy az $F(x)$ közelítő függvény megszerkesztése más adatokból is elvégezhető. Így például — és a következőkben főként ilyen esettel lesz dolgunk — az $F(x)$-től azt követelhetjük, hogy az $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ pontokban egyezzék meg az $f(x)$-el, azaz:

$$F(a_1)=f(a_1),\ F(a_2)=f(a_2), \dots\ F(a_{n+1})=f(a_{n+1})$$

legyen; de ezenkívül még az $n+1$ hely közül i számú helyen az $F'(x)$ is megegyezzék az $f'(x)$-el, azaz:

$$F'(a_1)=f'(a_1),\ F'(a_2)=f'(a_2), \dots\ F'(a_i)=f'(a_i)$$

legyen, vagyis az $y=F(x)$ parabola átmenjen az $a_1, f(a_1); a_2, f(a_2); \dots a_{n+1}, f(a_{n+1})$ koordinátákkal biró pontokon és ezenkívül az első i pontban vont érintői megegyezzenek az ugyanezen pontokban az $y=f(x)$-hez vont érintőkkel.

Az $F(x)$ racionális egész függvénynek tehát $n+i+1$ feltételt kell kielégítenie. Ezt az $F(x)$-et már megszerkesztettük (l. 186. lap). Ha

$$\omega(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})$$

és

$$\omega_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_i)$$

és $$\psi(x) = \frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}\,\frac{\omega(x)}{x-a_1} + \frac{f(a_2)}{\omega'(a_2)}\,\frac{\omega(x)}{x-a_2} + \dots + \frac{f(a_{n+1})}{\omega'(a_{n+1})}\,\frac{\omega(x)}{x-a_{n+1}},$$

vagyis $\psi(x)$ azon $n+1$-edfokú racionális egész függvény, mely a megadott $n+1$ helyen $f(x)$-el megegyezik, akkor

$$F(x) = \psi(x) + \omega(x)\,\varrho(x),$$

ahol:

$$\varrho(x) = \frac{f'(a_1)-\psi'(a_1)}{\omega'(a_1)\,\omega_1'(a_1)}\,\frac{\omega_1(x)}{x-a_1} +$$

$$+ \frac{f'(a_2)-\psi'(a_2)}{\omega'(a_2)\,\omega_1'(a_2)}\,\frac{\omega_1(x)}{x-a_2} + \dots + \frac{f'(a_i)-\psi'(a_i)}{\omega'(a_i)\,\omega_1'(a_i)}\,\frac{\omega_1(x)}{x-a_i}.$$

Hogy ez az $F(x)$ $n+i$-edfokú racionális egész függvény valóban teljesíti azokat a kívánságokat, melyeket hozzá fűzünk, arról utólagosan könnyen meggyőződhetünk. Ha ugyanis x helyébe a_r-et teszünk, akkor $F(a_r)=\psi(a_r)$; de $\psi(a_r)=f(a_r)$, tehát $F(a_r)=f(a_r)$. r lehet $1, 2, \dots n+1$.

Legyen most r $i+1$-nél kisebb.

$$F'(x)=\psi'(x)+\omega(x)\,\varrho'(x)+\omega'(x)\,\varrho(x).$$

Innen:

$$F'(a_r)=\psi'(a_r)+\omega'(a_r)\,\varrho(a_r).$$

De

$$\varrho(a_r) = \frac{f'(a_r)-\psi'(a_r)}{\omega'(a_r)\,\omega_1'(a_r)}\,\omega_1'(a_r),$$

tehát

$$F'(a_r)=\psi'(a_r)+f'(a_r)-\psi'(a_r)=f'(a_r),$$

és így az $F(x)$ diff. hányadosai az $a_1, a_2, \dots a_i$ helyeken valóban megegyeznek az $f'(x)$ differenciálhányadosaival ugyanezeken a helyeken.

A $\psi(x)$ ilyen alakban is írható:

$$f(a_1)\,\varphi_1(x) + f(a_2)\,\varphi_2(x) + \dots + f(a_{n+1})\,\varphi_{n+1}(x),$$

ahol:

$$\varphi_r(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(a_r)\,(x-a_r)}.$$

A $\varrho(x)$ pedig így rendezhető:

$$f'(a_1)\,\varrho_1(x) + f'(a_2)\,\varrho_2(x) + \dots + f'(a_i)\,\varrho_i(x) +$$
$$+ f(a_1)\,\chi_1(x) + f(a_2)\,\chi_2(x) + \dots + f(a_{n+1})\,\chi_{n+1}(x),\text{*}$$

ahol a $\varrho_1(x), \dots \varrho_i(x), \quad \chi_1(x), \dots \chi_{n+1}(x)$

* T. i. $\varrho(x)$ homogén lineáris függvénye $f'(a_1), \dots f'(a_i)$ és $\psi'(a_1), \dots \psi'(a_i)$-nek; ez utóbbiak pedig $f(a_1), \dots f(a_{n+1})$-nek.

racionális egész függvények. Következésként az $F(x)$ így is rendezhető:

$$F(x)=f(a_1)F_1(x)+\cdots+f(a_{n+1})F_{n+1}(x)+f'(a_1)\Phi_1(x)+\cdots+f'(a_i)\Phi_i(x),$$

ahol $$F_1(x),\ldots F_{n+1}(x),\quad \Phi_1(x),\ldots \Phi_i(x)$$

$n+i$-edfokú racionális egész függvények. Ezen írásmóddal csakis azt akartuk kiemelni, hogy az $f(a_1),\ldots f(a_{n+1}),\ f'(a_1),\ldots f'(a_i)$-ra nézve az $F(x)$ lineárisan van előállítva.

Ha $f(x)$ helyett $F(x)$-et mondunk, az elkövetett hiba, miként már a 191. lapon meghatároztuk, ilyen alakban írható:

$$R=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_i)^2(x-a_{i+1})(x-a_{i+2})\ldots(x-a_{n+1})\frac{f^{(n+i+1)}(\xi)}{(n+i+1)!},$$

ahol ξ az $a_1, a_2,\ldots a_{n+1}, x$ közötti helyet jelent. Így tehát:

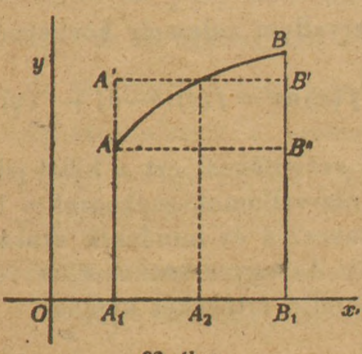
$$f(x)=F(x)+(x-a_1)^2\ldots(x-a_i)^2(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n+1})\frac{f^{(n+i+1)}(\xi)}{(n+i+1)!},$$

tehát: $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b F(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{(n+i+1)!}\int_a^b f^{(n+i+1)}(\xi)(x-a_1)^2\ldots(x-a_i)^2(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n+1})\,dx.$$

A következőkben mindig fel fogjuk tenni, hogy az $f(x)$-nek szereplő differenciálhányadosai léteznek és folytonosak.

2. A mechanikus quadratura egyszerűbb esetei. *1. A derékszögű négyszögek módszere.* A legegyszerűbb esettel akkor van dolgunk, ha $F(x)$ közelítő függvény gyanánt olyant választunk, mely az $f(x)$-el egyetlen egy pontban egyezik meg, vagyis $F(x)$ helyett $f(x)$ vala-



92. ábra.

melyik értékét választjuk. Különösen három ilyen speciális esetet említünk meg. Ha $F(x)$ gyanánt $f(x)$ kezdőértékét: $f(a)$-t vagy $f(x)$ végértékét $f(b)$-t, vagy pedig $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$-et azaz $f(x)$ azon értékét választjuk, amelyet az ab intervallum középpontjában vesz fel. Geometriai jelentése ennek az, hogy az első esetben az A_1ABB_1 terület helyett az $AB''B_1A_1$ derékszögű négyszöget és a harmadik esetben az $A'B'B_1A_1$ derékszögű négyszöget választjuk.

Az első esetben tehát:

$$F(x) = f(a)$$

és a középértéktétel szerint

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$$

lévén,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a)\,dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a)\,dx.$$

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ helyett tehát $f(a)(b-a)$-t mondunk. A hiba, amit ezzel elkövetünk: $\int_a^b f'(\xi)(x-a)\,dx$. Erre az integrálra az első középértéktételt alkalmazhatjuk. [Minthogy feltettük, hogy $f(x)$ az ab intervallumban mindenütt differenciálható, — hiszen különben nem alkalmazhattuk volna a középértéktételt, — tehát $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ab belsejében az x folytonos függvénye.]

Legyen az $f'(\xi)$ maximuma M, minimuma m, akkor:

$$\int_a^b f'(\xi)(x-a)\,dx = \mu\int_a^b (x-a)\,dx = \mu\,\frac{(b-a)^2}{2},$$

ahol μ az m és M közé eső valamely meghatározott érték. Az ab intervallumban van olyan η hely, amelyen $f'(\eta)=\mu$. Így tehát, ha $\int_a^b f(x)\,dx$ helyett $f(a)(b-a)$-t mondjuk, az elkövetett hiba: $\dfrac{f'(\eta)(b-a)^2}{2}$; ahol η az ab intervallum valamely közbenső helye; tehát

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a) + f'(\eta)\,\frac{(b-a)^2}{2}.$$

A gyakorlati számításnál ezt a hibát jelentékenyen kisebbíthetjük, ha az ab intervallumot szakaszokra bontjuk fel. Bontsuk fel pl. k egyenlő szakaszra és mindenik szakaszra alkalmazzuk ezt a közelítő számítást. Az egyes szakaszokra vonatkozó integrálok helyett ezeket a közelítő értékeket kapjuk:

$$\frac{(b-a)f(a)}{k},\quad \frac{(b-a)f\left[a+\dfrac{b-a}{k}\right]}{k},$$

$$\frac{(b-a)f\left[a+\dfrac{2(b-a)}{k}\right]}{k},\ldots\ \frac{(b-a)f\left[a+\dfrac{(k-1)(b-a)}{k}\right]}{k}.$$

Ha az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ helyett, ezek összegét:

$$\frac{b-a}{k}\left\{f(a)+f\left[a+\frac{b-a}{k}\right]+f\left[a+\frac{2(b-a)}{k}\right]+\right.$$
$$\left.+\cdots+f\left[a+\frac{(k-1)(b-a)}{k}\right]\right\}.$$

vesszük, akkor az elkövetett hiba az egyes hibák összege, azaz:

$$\frac{(b-a)^2}{2k^2}[f'(\eta_1)+f'(\eta_2)+\cdots+f'(\eta_k)],$$

ahol η_r az r-ik czakasz valamelyik meghatározott közbenső helye. Minthogy pedig

$$km<f'(\eta_1)+f'(\eta_2)+\cdots+f'(\eta_k)<kM$$

tehát

$$f'(\eta_1)+f'(\eta_2)+\cdots+f'(\eta_k)=k\mu,$$

ahol μ az M és m közötti helyet jelöl. Tudjuk, hogy mindig van egy közbenső η hely, melyen $f'(\eta)=\mu$, tehát

$$f'(\eta_1)+f'(\eta_2)+\cdots+f'(\eta_k)=kf'(\eta)$$

és igy a hiba:
$$H=\frac{(b-a)^2}{2k}f'(\eta),$$
vagyis:
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{k}\left[\sum_0^{k-1}{}_r\, f\left(a+r\frac{b-a}{k}\right)\right]+\frac{(b-a)^2}{2k}f'(\eta).$$

Ha az ab intervallumban az $f'(x)$ nem változik erősen, akkor tehát azt mondhatjuk, hogy az ab intervallum ezen felosztásával a hibát hozzávetőlegesen az előbbinek a k-ad részére redukáltuk.

Nem szükséges külön tárgyalnunk a harmadik esetet, midőn $F(x)=f(b)$. Ez esetben az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ helyett $f(b)(b-a)$-t mondunk és az elkövetett hiba megint $\frac{f'(\eta)(b-a)^2}{2}$.

De külön megemlítjük a második esetet, midőn az $F(x)$ közelítő függvény gyanánt $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$-et vesszük; mert ez az eset rendszerint az előbbieknél nagyobb pontosságú eredményt szolgáltat. Ekkor $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ helyett $f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$-t mondunk. A hiba meghatározása végett megint a differenciálszámítási középértéktétellel

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left[x-\frac{a+b}{2}\right]f'(\xi)$$

téve, azt találjuk, hogy a hiba:

$$\int_a^b \left[x - \frac{a+b}{2}\right] f'(\xi)\, dx.$$

De erre az integrálra az integrálokra vonatkozó középértéktétel nem alkalmazható, mert az $x - \frac{a+b}{2}$ az ab intervallumban az előjelét változtatja. Ezért az $F(x)$ közelítő függvényt mindjárt úgy választjuk, hogy nemcsak

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

hanem egyúttal

$$F'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

legyen; vagyis a véges Taylor-sort alkalmazva:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

-ből az

$$F(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

közelítő függvényt válasszuk.

Észrevesszük, hogy az $\int_a^b F(x)\, dx$ most is ugyanakkora, mint előbb, mert a második tag integrálja: 0.

Ugyanis az

$$\int \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2;$$

és ha előbb b-t, azután a-t helyettesítünk, mindkét esetben $\frac{(a-b)^2}{8}$-at kapunk és így az

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0;$$

tehát most is az integrál közelítő értéke:

$$\int_a^b F(x)\, dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

De a hibának most más alakja van. Ugyanis most e hiba:

$$H = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

és erre az integrálra már alkalmazható a középértéktétel, mert az

$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$ nem változtatja meg az ab intervallumban az előjelét. [Minthogy

$$\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[x-\frac{a+b}{2}\right]}{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

tehát az $a\ldots\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}\ldots b$ minden belső helyén $f''(\xi)$ az x-nek folytonos függvénye; és minthogy $f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$ létezik, a jobboldal az $\frac{a+b}{2}$ helyen is folytonos, tehát $f''(\xi)$ az egész ab intervallumban x folytonos függvényének tekinthető.] Így tehát az előbbi okoskodást használva,

$$H=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{24},$$

ahol η az ab valamely meghatározott közbenső helye. Eszerint tehát, ha $\int_a^b f(x)\,dx$ helyett $f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$-t mondunk, akkor a hiba, amelyet ezzel elkövetünk:

$$\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{24}.$$

Fontos itt az a körülmény, hogy míg előbb a hiba kifejezésében a $(b-a)$ intervallumszélesség négyzete szerepelt, most a harmadik hatványa fordul elő e kifejezésben. Így tehát:

$$\int_a^b f(x)\,dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{24}.$$

Sokkal nagyobb pontosságot érhetünk el megint, ha az ab szakászt részekre osztjuk. Ha k egyenlő részre osztjuk és mindenik részre külön alkalmazzuk ezt az eljárást, akkor $\int_a^b f(x)\,dx$ helyett ezt az összeget tesszük:

$$\frac{b-a}{k}\left[f\left(a+\frac{b-a}{2k}\right)+f\left(a+\frac{3(b-a)}{2k}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{(2k-1)(b-a)}{2k}\right)\right]$$

(az $a\ldots a+\frac{b-a}{k}$ szakasz közepe $a+\frac{b-a}{2k}$, a következő szakasz közepe: $a+\frac{3(b-a)}{2k}$ s í. t.).

A hiba, amit elkövetünk,

$$\frac{(b-a)^3}{24k^3}\,[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)+\cdots+f''(\eta_k)],$$

ha $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ az egyes szakaszok bizonyos meghatározott közbenső helyei. Könnyen belátjuk, hogy ismét:

$$f''(\eta_1)+f''(\eta_2)+\cdots+f''(\eta_k)=kf''(\eta)$$

tehető, ahol η az ab intervallum valamely közbenső helye; tehát a hiba: $\frac{(b-a)^3}{24k^2}f''(\eta)$ hozzávetőlegesen k^2-szerte kisebb, mint az előbb kiszámított hiba.

A mechanikus quadratura ezen három legegyszerűbb esetét a derékszögű négyszögek módszerének hívjuk.

2. A trapéz-módszer. Áttérünk most azon egyszerű eset tárgyalására, midőn $F(x)$ közelítő függvény gyanánt olyan elsőfokú függvényt választunk, mely az a és b helyeken megegyezik az $f(x)$-el, vagyis, midőn az ABB_1A_1 terület helyett az ABB_1A_1 trapéz területét vesszük. Ez a trapézek módszere.

Ha a Lagrange-formulában $\omega(x)=(x-a)(x-b)$ tesszük, akkor az $F(x)$ közelítő függvény:

$$F(x)=\frac{f(a)}{\omega'(a)}\,\frac{\omega(x)}{x-a}+\frac{f(b)}{\omega'(b)}\,\frac{\omega(x)}{x-b}=f(a)+\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$$

és a maradéktaggal együtt:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)]+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b),$$

tehát: $$\int_a^b f(x)\,dx=f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b(x-a)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)\,dx,$$

és így $\int_a^b f(x)\,dx$ közelítően:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

vagyis az ABA_1B_1 trapéz területe. A hiba pedig, amit ezzel elkövetünk:

$$h=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)\,dx.$$

Minthogy az ab intervallumban az $(x-a)(x-b)$ szorzat nem változtatja a jelét, tehát erre az integrálra alkalmazható a középértéktétel és így:

$$h = \frac{\mu}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{\mu(b-a)^3}{12}$$

és ha η olyan hely az ab intervallumban, amelyre nézve $f''(\eta)=\mu$, akkor tehát a hiba ilyen alakban írható:

$$h = -\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{12},$$

vagyis: $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{12}f''(\eta)(b-a)^3.$$

Ha az ab intervallumot megint k egyenlő részre osztjuk és mindenik részre külön alkalmazzuk a trapézek módszerét, akkor rendszerint ismét nagyobb pontosságot érünk el. Jelöljük az egyes osztópontokat rövidség kedvéért így:

$$a = a_0,\ a_1 = a + \frac{b-a}{k},\ a_2 = a + \frac{2(b-a)}{k}, \ldots\ a_k = b,$$

akkor tehát a trapézek módszere a következő területet szolgáltatja:

$$\frac{b-a}{2k}[f(a)+2f(a_1)+2f(a_2)+\cdots+2f(a_{k-1})+f(a_k)],$$

vagy az ordinátákat röviden $y_0, y_1, y_2, \ldots y_k$-val jelölve:

$$\frac{b-a}{2k}[y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\cdots+2y_{k-1}+y_k].$$

A hiba pedig, miként az előbbiekhez hasonlóan kimutatható, ilyen alakban írható:

$$-\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{12k^2},$$

tehát hozzávetőleg k^2-szerte kisebb, mint előbb volt.

Arra jutottunk tehát, hogy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2k}[y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{k-1}+y_k] - \frac{f''(\eta)(b-a)^3}{12k^2},$$

ahol $y_0, y_1, y_2, \ldots$ az ab intervallum k egyenlő részre való osztásánál fellépő osztópontokban húzott ordináták.

3. A Simpson-formula. Most tovább haladva az $f(x)$ helyett olyan másodfokú $F(x)$ függvényt választunk, mely az a, $\frac{a+b}{2}$, b helyeken megegyezik az $f(x)$-el; tehát:

$$f(a)=F(a),\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)=F\left(\frac{a+b}{2}\right),\ f(b)=F(b).$$

Az $F(x)$ közelítő függvény meghatározása céljából bevezetjük az

$$\omega(x)=(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

harmadfokú függvényt, mellyel a Lagrange-szabály szerint megalkotjuk az $F(x)$-et.

$$\omega'(x)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)+(x-b)(x-a)+(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

és ebből:

$$\omega'(a)=\frac{(a-b)^2}{2};\ \omega'\left(\frac{a+b}{2}\right)=-\frac{(a-b)^2}{4};\ \omega'(b)=\frac{(a-b)^2}{2}.$$

Igy a Lagrange-formula szerint:

$$F(x)=\frac{2}{(a-b)^2}\left[f(a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)-\right.$$
$$\left.-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)(x-a)(x-b)+f(b)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

és az $f(x)$ ezen közelítő függvénytől az

$$\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

maradéktagban különbözik; azaz:

$$f(x)=F(x)+\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b).$$

Ebből a keresett integrál:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b F(x)\,dx+\int_a^b\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx.$$

A második tagra megint nem alkalmazhatjuk a középértéktételt, mert az $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$ az ab intervallumban az előjelét változtatja. Ezért megint olyanféleképpen járunk el, mint az imént tettük. Közelítő függvény gyanánt azt a harmadfokú $\Phi(x)$ racionális egész függvényt választjuk, mely az $f(x)$-el az a, $\frac{a+b}{2}$, b helyeken megegyezik és azonkívül még a középső $\frac{a+b}{2}$ helyen a $\Phi(x)$ differenciálhányadosa is egyezzék meg az $f'(x)$-el; tehát:

$$f(a)=\Phi(a),\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right),\ f(b)=\Phi(b),\ f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=\Phi'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Erről a $\Phi(x)$-ről tudjuk a 186. lapon foglalt általános eljárásból, hogy ilyen alakú:

$$\Phi(x) = F(x) + K(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b),$$

ahol $F(x)$ az előbb meghatározott másodfokú függvény és K állandó úgy van meghatározva, hogy

$$\Phi'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

legyen. A K értékét ki sem számítjuk, mert nem lesz rá szükségünk. Azt is tudjuk, hogy az $f(x)$ a $\Phi(x)$ közelítő függvénytől egy ilyen kifejezésben különbözik:

$$\frac{f^{IV}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b);$$

mert az általános esetben a hiba (l. 191. lapon)

$$\frac{f^{(n+i+1)}(\xi)}{(n+i+1)!}(x-a_1)^2\ldots(x-a_i)^2(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n+1});$$

a jelen esetben, midőn: $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $a_2 = a$, $a_3 = b$; $i=1$, ez a kifejezés erre redukálódik. Így tehát:

$$f(x) = F(x) + K(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) +$$

$$+ \frac{f^{IV}(\xi)}{24}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$

és az integrál:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx + K\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx +$$

$$+ \int_a^b \frac{f^{IV}(\xi)}{24}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx. \qquad A)$$

Számítsuk ki sorban ezeket az integrálokat:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(a)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx -\right.$$

$$\left. - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx + f(b)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-a)\,dx\right].$$

Ebben az első tagbeli integrál:

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\right]_a^b -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\right]_a^b-$$

$$-\frac{1}{6}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b=\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Az utolsó tagban szereplő integrál szintén: $\frac{(b-a)^3}{12}$.

A középső tagbeli integrál

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{2}[(x-a)^2(x-b)]_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2 dx=-\frac{(b-a)^3}{6},$$

tehát:
$$\int_a^b F(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

Az *A)* alatti második integrálról, az $\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx$-ről azt állítjuk, hogy: zérus. Ugyanis, ha az ab intervallumot megfelezzük:

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx+$$

$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx.$$

Tegyünk a második integrálban x helyébe $a+b-y$-t; ahonnan $y=a+b-x$. Ha $x=\frac{a+b}{2}$, akkor

$$y=a+b-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Ha $x=b$, akkor $y=a$; tehát az új integrál határai lesznek: $\frac{a+b}{2}$ és a és minthogy $dx=-dy$, tehát

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx=-\int_{\frac{a+b}{2}}^a (b-y)\left(\frac{a+b}{2}-y\right)(a-y)\,dy=$$

$$=\int_{\frac{a+b}{2}}^a (y-a)\left(y-\frac{a+b}{2}\right)(y-b)\,dy,$$

vagy y betű helyett megint x betűt írva és a határokat felcserélve, ez az integrál:

$$-\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx,$$

tehát valóban: $\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx=0.$

Ha tehát $f(x)$ helyett akár azt a másodfokú $F(x)$-et választjuk, mely vele az a, $\frac{a+b}{2}$, b helyeken megegyezik, akár pedig azt a harmadfokú $\Phi(x)$-et, mely még ezenkívül az $\frac{a+b}{2}$ helyen a diff. hányados értékében is megegyezik az $f(x)$-el: az $\int_a^b f(x)\,dx$ határozott integrál közelítő meghatározására nézve ez teljesen mindegy: az integrál közelítő értéke mindig csak $\int_a^b F(x)\,dx$, vagyis:

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

A hibát az *A)* alatti formula utolsó tagja szolgáltatja. Erre az integrálra már alkalmazható a középértéktétel, mert az

$$(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$

éppen azért, mert a középső tényező a második hatványon szerepel, az ab intervallumban a jelét nem változtatja. Így tehát a maradéktag ilyen alakban írható:

$$\frac{f^{IV}(\eta)}{24}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx.$$

Számítsuk ki először az

$$\int (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx$$

határozatlan integrált parciális integrálással. Tegyük:

$$u=(x-a)(x-b); \quad \text{és} \quad dv=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx;$$

ekkor tehát az integrál ilyen alakban írható:

$$\frac{1}{3}(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3(2x-a-b)\,dx$$

és a második integrált újból parciálisan integrálva:

$$\frac{1}{3}(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{1}{12}(2x-a-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4+$$

$$+\frac{1}{6}\int\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4 dx$$

és így a határozott integrál:

$$\frac{1}{3}\left[(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b-\frac{1}{12}\left[(2x-a-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4\right]_a^b+$$
$$+\frac{1}{30}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^5\right]_a^b=-\frac{(b-a)^5}{120}.$$

Arra az eredményre jutottunk, hogy ha $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *helyett*

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

közelítő értéket tesszük, akkor az elkövetett hiba: $-\frac{f^{\mathrm{IV}}(\eta)}{2880}(b-a)^5$.

Ha $f(a)=y_0$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=y_{\frac{1}{2}}$, $f(b)=y_1$ tesszük annak a jelöléseül, hogy a szélső és a középső ordinátákat vesszük tekintetbe, akkor az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ közelítő értékét ez a képlet szolgáltatja:

$$\frac{b-a}{6}\,[y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1].$$

Ez a formula a *Simpson*-féle mechanikus quadratura formulája. A hiba: $-\frac{f^{\mathrm{IV}}(\eta)}{2880}(b-a)^5$, ahol η az ab intervallum valamely meghatározott közbenső helye. Igy tehát a Simpson-formulát használva:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\,[y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1]-\frac{f^{\mathrm{IV}}(\eta)}{2880}(b-a)^5.$$

Még nagyobb pontosságot érünk el, ha az ab intervallumot k egyenlő részre osztjuk fel és mindenik részre alkalmazzuk a Simpson-formulát. Az eredmény, miként az előzők nyomán könnyen kiszámítható, az lesz, hogy ha az egyes osztáspontokhoz tartozó ordinátákat rendre: $y_0, y_1, y_2, \ldots y_k$-val jelöljük és az egyes részek középpontjaihoz tartozó ordinátákat könnyen érthető jelöléssel $y_{\frac{1}{2}}, y_{1\frac{1}{2}}, y_{2\frac{1}{2}}, \ldots$-vel jelöljük, akkor a Simpson-formulának az egyes részekre való alkalmazása után a következő összeget kapjuk:

$$\frac{b-a}{6k}\,[y_0+4y_{\frac{1}{2}}+2y_1+4y_{1\frac{1}{2}}+2y_2+\cdots+2y_{k-1}+4y_{k-\frac{1}{2}}+y_k],$$

a hibát pedig ez a kifejezés adja meg:

$$-\frac{f^{\mathrm{IV}}(\eta)}{2880k^4}(b-a)^5.$$

4. A Simpson-formula néhány egyszerű alkalmazása. A Simpson-formula alkalmazásánál elkövetett hiba okvetlenül zérus, ha $f(x)$

az x-nek harmadfokúnál nem magasabb egész függvénye, mert hiszen ekkor $f^{IV}(x)=0$. Ezen alapszik a formula elterjedt geometriai alkalmazása, főként a köbtartalomszámításnál.

A köbtartalom-számítással tüzetesebben később foglalkozunk ugyan, de nem akarjuk elmulasztani az alkalmat, hogy az elemi mathesis egyes fontos kérdéseit a Simpson-formula segítségével meg ne világítsuk. Evégből röviden ráutalunk a köbtartalom-számítás kérdésére.

Ha egy geometriai testet az S síkkal párhuzamos síkkal metszünk, mely sík az S-től x távolságban van, akkor a metszet területe: $f(x)$. Ha az S síktól $a, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, b$ távolságban vonuló párhuzamos síkokkal történik a metszés, akkor az egyes metszetek területei rendre:

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots f(b).$$

Alkossuk meg ezt az összeget:

$$f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\cdots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}),$$

amelynek geometriai értelme az, hogy az egyes metszetekre rendre az x_1-a, x_2-x_1, $x_3-x_2, \ldots b-x_{n-1}$ magasságú hengereket emeljük és e hengerek térfogatait összeadjuk.

Ha már most föltesszük, hogy $f(x)$ az ab szakaszban integrálható, akkor a fönti összegnek véges és meghatározott határértéke van, ha az egyes részek végtelen kicsinyekké válnak. Az így értelmezett számról, az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

-ról definícióképpen mondjuk, hogy az a és b magasságban vont síkok közé eső réteg köbtartalmának mértékszáma.

Ha az $f(x)$ terület az x-nek harmadfokúnál nem magasabb rac. egész függvénye, akkor az illető test köbtartalmát a Simpson-formulával határozhatjuk meg. Ez a formula a jelen esetben így alakul: $b-a$ jelenti a réteg alsó és felső határsíkja közti távolságot, tehát azt, amit a réteg magasságának nevezhetünk. Jelöljük ezt m-mel. Az $f(a)$ jelenti a réteg alsó lapjának a területét; jelöljük A-val; az $f(b)$ a felső lap területe: B és $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ a középmetszet területe: melyet C-vel jelölünk. Eszerint tehát a Simpson-formula így szól: (V a köbtartalom)

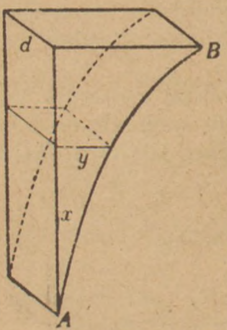
$$V=\frac{m}{6}[A+4C+B].$$

Lássuk e formula néhány alkalmazását. *1. Példa.* Legyen a szóban forgó test csonka gúla, melynek alapja A, teteje B területű és magassága m. Ha a kiegészített gúla magasságát M-mel jelöljük, akkor azonnal látjuk, hogy az alsó alap felett x magasságban az alappal párhuzamosan húzott síkmetszet területe: $\frac{A(M-x)^2}{M^2}$, tehát az x másodfokú függvénye és így a Simpson-formula alkalmazható. A C középmetszetre vonatkozólag könnyen következtethető, hogy $\sqrt{C}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}$ és így:

$$V=\frac{m}{6}[A+4C+B]=\frac{m}{6}[2A+2\sqrt{AB}+2B]=\frac{m}{3}[A+\sqrt{AB}+B].$$

2. *Példa.* Ha a mellékelt ábrában feltüntetett test köbtartalmát kell kiszámítani, melynél az AB és a vele párhuzamosan haladó görbe másod- vagy harmadrendű parabolaív, akkor az x magasságban a tetőlappal párhuzamosan vont sík metszetének területe: yd; de

$$y=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,$$



93. ábra.

tehát e metszet területe:

$$f(x)=d[\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta]$$

és így a köbtartalom kiszámítására ismét a Simpson-formula alkalmazható. Ha a legegyszerűbb esetet vesszük, midőn a görbe az $y=\alpha x^2$ másodrendű parabola íve és a test magasságát m-mel, szélességét d-vel jelöljük, akkor köbtartalma:

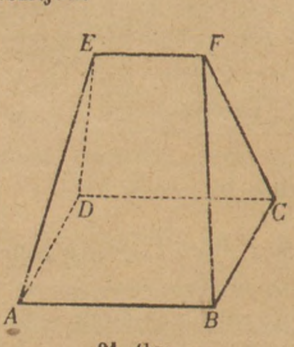
$$V=\frac{md}{6}\left[4\frac{\alpha m^2}{4}+\alpha m^2\right]$$

és minthogy $\alpha m^2 . d$ a felső alap területe, tehát:

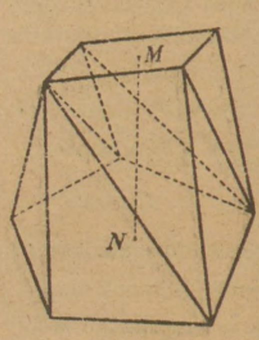
$$V=\frac{Am}{3}$$

éppen úgy, mint a gúlánál.

3. *Példa.* A Simpson-formulát használjuk a *prizmatoid* köbtartalmának megállapításánál is. Prizmatoid keletkezik akkor, ha az S síkon egy n-szöget veszünk fel, a párhuzamos T síkon pedig tetszés szerinti helyzetben egy m-szöget és olyan burkoló háromszögű oldallapokat készítünk, melyek az egyik sokszögnek egyik csúcsán és a másiknak valamelyik oldalán mennek át. A legegyszerűbb esetek közé tartozik az ú. n. teljes obeliszk, mely oly módon keletkezik, hogy az $ABCD$ derékszögű négyszöget és ennek két oldalával párhuzamos EF egyenest vesszük fel az említett oldalaktól egyenlő távolságban és az $ABFE$, BCF, $CDEF$, DEA burkoló oldallapokat (melyek között a négyszögeket, ha úgy tetszik, két háromszögből állónak is képzelhetjük) készítjük.



94. ábra.



95. ábra.

Egy másik prizmatoidot is feltüntetünk. Ennek alsó alapja ötszög, felső alapja pedig a párhuzamos síkon fekvő négyszög és a burkoló síkok az ábrában feltüntetett módon szerkesztettek. A felső lap M pontjából meghúztuk az MN-et merőlegesen az alapra; ez a prizmatoid magassága.

Ha az alapsíktól x távolságban az alappal párhuzamos metszetet készítünk, akkor e metszet területét a következő meggondolással állapíthatjuk meg:

Vetítsük ennek a metszetnek a síkjára orthogonális projekcióval például a felső alapot: B-t. Akkor e metszeten a B-n kívül részint mint összeadandók, részint mint kivonandók lépnek fel egyes háromszög és négyszög alakú területrészek, melyek az oldallapok felső részeinek a vetületei. De az x magasságban vonuló sík minden oldalháromszöget oly két részre metsz, melyek közül a felső rész $\frac{(m^2-x^2)t}{m^2}$ vagy $\frac{(m-x)^2 t}{m^2}$ területű, ha t az illető oldalháromszög területe. Ha ezen háromszög hajlásszöge az alaphoz α, akkor a vetület területe $\frac{(m^2-x^2)t}{m^2}\cos\alpha$ vagy $\frac{(m-x)^2 t\cos\alpha}{m^2}$, tehát x-nek másodfokú függvénye és így az x magasságban készített síkmetszet területe B-ből és csupa ilyen x-ben quadratikus tagok összegéből áll. Csak ezt kellett tudnunk. Mert ebből már következik, hogy a Simpson-szabály alkalmazható, vagyis a prizmatoid köbtartalma:

$$V=\frac{m}{6}[A+4C+B].$$

3. A Cotes-féle mechanikus quadratura. Az $\int_a^b f(x)\,dx$ közelítő kiszámítására az $f(x)$ helyett olyan $F(x)$ rac. egész függvényt választunk mindig, mely bizonyos helyeken az $f(x)$-el megegyezik. Legyen $F(x)$ olyan m-edfokú rac. egész függvény, mely az ab intervallum $m+1$ æquidistans helyén egyezik meg az $f(x)$-el. Ezek a helyek a következők:

$$a,\ a+\frac{b-a}{m},\ a+\frac{2(b-a)}{m},\ldots,\ a+\frac{(m-1)(b-a)}{m},\ b.$$

Jelöljük rövidség kedvéért e helyeket rendre $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, b$-vel és legyen: $\frac{b-a}{m}=h$.

Az $F(x)$-et a Lagrange-formulával határozzuk meg. Legyen evégből:

$$\omega(x)=(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-b)$$

$m+1$-edfokú egész függvény. Innen:

$$F(x)=\frac{f(a)}{\omega'(a)}\frac{\omega(x)}{x-a}+\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}\frac{\omega(x)}{x-a_1}+\cdots+\frac{f(b)}{\omega'(b)}\frac{\omega(x)}{x-b}.$$

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ helyett az $\int_a^b F(x)\,dx$-et számítjuk ki.

$$\int_a^b F(x)\,dx=\frac{f(a)}{\omega'(a)}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-a}dx+\frac{f(a_1)}{\omega'(a_1)}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-a_1}dx+\cdots+$$

$$+\cdots+\frac{f(b)}{\omega'(b)}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-b}dx. \qquad A)$$

Vegyük tekintetbe az i-ik tagot:

$$\frac{f(a_i)}{\omega'(a_i)}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-a_i}dx\text{-et.}$$

Itt az $a_i=a+ih$.

Számítsuk ki részletesen az itt szereplő kifejezéseket:

$$\frac{\omega(x)}{x-a_i}=(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\ldots(x-a-\overline{i-1}h)(x-a-\overline{i+1}h)\ldots(x-a-mh).$$

Tegyük $x=a+th$; ekkor tehát:

$$\frac{\omega(x)}{x-a_i}=th.(t-1)h.(t-2)h\dots(t-i+1)h.(t-i-1)h\dots(t-m)h=$$
$$=h^m t(t-1)(t-2)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-m). \qquad \alpha)$$

Az $\int_a^b \frac{\omega(x)}{x-a_i}dx$ integrálba az x helyébe ezt a t variabilist visszük be; a határok a következők lesznek: ha $x=a$, akkor $t=0$, ha $x=b$, akkor $t=m$. Minthogy még $dx=hdt$, tehát:

$$\int_a^b \frac{\omega(x)}{x-a_i}dx=h^{m+1}\int_0^m t(t-1)(t-2)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-m)\,dt.$$

Ha az $\frac{\omega(x)}{x-a_i}$-ben x helyett a_i-t helyettesítjük, akkor $\omega'(a_i)$ értékét kapjuk meg; tehát ugyanezt kapjuk, ha az $\alpha)$ alattiban t helyébe i-t teszünk, mert akkor x helyébe $a+ih$, vagyis a_i tétetett. Eszerint:

$$\omega'(a_i)=h^m i(i-1)(i-2)\dots1.-1.-2.\dots-(m-i)=(-1)^{m-i}h^m i!(m-i)!$$

Így tehát az $A)$ képletben az i-ik tag:

$$\frac{f(a_i)}{\omega'(a_i)}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x-a_i}dx=\frac{(-1)^{m-i}hf(a+ih)}{i!(m-i)!}\int_0^m t(t-1)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-m)\,dt.$$

Vagy h helyett $\frac{b-a}{m}$-et téve és bevezetve a következő jelölést:

$$H_i^{(m)}=\frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!}\int_0^m t(t-1)\dots(t-i-1)(t-i+1)\dots(t-m)\frac{dt}{m}$$

arra jutunk, hogy a közelítő integrál:

$$\int_a^b F(x)\,dx=(b-a)\left[H_0^{(m)}f(a)+H_1^{(m)}f\left(a+\frac{b-a}{m}\right)+\right.$$
$$\left.+H_2^{(m)}f\left(a+\frac{2(b-a)}{m}\right)+\dots+H_m^{(m)}f(b)\right]. \qquad C)$$

A H számértékek, miként látjuk, függetlenek a szóban forgó $f(x)$-től és csakis az osztásrészek számától, az m-től függnek. Még megjegyezzük, hogy e H számok a szimmetrikus helyeken megegyeznek, azaz $H_i^{(m)}=H_{m-i}^{(m)}$. Ugyanis, ha

$$t(t-1)(t-2)\dots(t-m)=\psi(t)$$

tesszük, akkor

$$H_i^{(m)}=\frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!}\int_0^m\frac{\psi(t)\,dt}{m(t-i)}$$

és

$$H_{m-i}^{(m)}=\frac{(-1)^i}{i!(m-i)!}\int_0^m\frac{\psi(t)}{(t-m+i)}\frac{dt}{m}.$$

Ha ez utóbbiban $z=m-t$ tesszük, vagyis $t=m-z$, akkor

$$\psi(t)=t(t-1)(t-2)\dots(t-m)=(m-z)(m-1-z)(m-2-z)\dots(1-z)(-z)=$$
$$=(-1)^{m+1}z(z-1)(z-2)\dots(z-m)=(-1)^{m+1}\psi(z)$$

és $dt = -dz$, a nevezőben álló $t - m + i = -z + i = -(z - i)$, a határok pedig: m és 0 és így:

$$\int_0^m \frac{\psi(t)}{t-m+i} \frac{dt}{m} = -\int_0^m \frac{(-1)^{m+1}\psi(z)}{z-i} \frac{dz}{m} = (-1)^m \int_0^m \frac{\psi(z)}{z-i} \frac{dz}{m},$$

tehát $[(-1)^{m+i} = (-1)^{m-i}$ téve]:

$$H_{m-i}^{(m)} = \frac{(-1)^{m-i}}{i!\,(m-i)!} \int_0^m \frac{\psi(z)}{z-i} \frac{dz}{m} = H_i^{(m)}.$$

Ha a H konstans szorzókat egyszersmindenkorra kiszámítjuk, akkor a *C)* alatti *Cotes*-féle formula alkalmazása abban [áll, hogy az æquidistans helyeken levő ordinátákat ezekkel a megfelelő faktorokkal megszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk és az így keletkező összeget $b-a$-val szorozzuk. [Ha azt a szokásos kifejezést akarjuk használni, hogy az $a_1, a_2, \ldots a_n$ súlyokkal ellátott $A_1, A_2, \ldots A_n$ számok súlypontjának nevezzük az $\frac{a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ számot, akkor a Cotes-féle szabályt még úgy is kifejezhetjük, hogy a $H_i^{(m)}$ számot tekintjük az i-ik Cotes-féle súlyszámnak és e súlyszámokkal megalkotjuk az egyes ordináták középértékét és ezen középordinátával alkotunk a $b-a$ alapra derékszögű négyszöget. Ez az $\int_a^b F(x)\,dx$. [Itt hallgatagon a

$$H_0^{(m)} + H_1^{(m)} + \cdots + H_m^{(m)} = 1$$

egyenlőségre támaszkodtunk. Ezt így kaphatjuk meg. Legyen

$$f(x) = F(x) = C = \text{const.},$$

a *C)* formula rögtön adja, hogy

$$C(b-a) = C(b-a)\sum_0^m i\, H_i^{(m)}].$$

A Cotes-féle számokat ide iktatjuk $m = 10$-ig.

$m = 1$: $H_0^{(1)} = H_1^{(1)} = \frac{1}{2}$

$m = 2$: $H_0^{(2)} = H_2^{(2)} = \frac{1}{6}$ $\quad H_1^{(2)} = \frac{2}{3}$

$m = 3$: $H_0^{(3)} = H_3^{(3)} = \frac{1}{8}$ $\quad H_1^{(3)} = H_2^{(3)} = \frac{3}{8}$

$m = 4$: $H_0^{(4)} = H_4^{(4)} = \frac{7}{90}$ $\quad H_1^{(4)} = H_3^{(4)} = \frac{16}{45}$ $\quad H_2^{(4)} = \frac{2}{15}$

$m = 5$: $H_0^{(5)} = H_5^{(5)} = \frac{19}{288}$ $\quad H_1^{(5)} = H_4^{(5)} = \frac{25}{96}$ $\quad H_2^{(5)} = H_3^{(5)} = \frac{25}{144}$

$m = 6$: $H_0^{(6)} = H_6^{(6)} = \frac{41}{840}$ $\quad H_1^{(6)} = H_5^{(6)} = \frac{9}{35}$ $\quad H_2^{(6)} = H_4^{(6)} = \frac{9}{280}$

$H_3^{(6)} = \frac{34}{105}$

$m = 7$: $H_0^{(7)} = H_7^{(7)} = \frac{751}{17280}$ $\quad H_1^{(7)} = H_6^{(7)} = \frac{3577}{17280}$ $\quad H_2^{(7)} = H_5^{(7)} = \frac{49}{640}$

$H_3^{(7)} = H_4^{(7)} = \frac{2989}{17280}$

$$m=8:\ H_0^{(8)}=H_8^{(8)}=\frac{989}{28350}\quad H_1^{(8)}=H_7^{(8)}=\frac{2944}{14175}\quad H_2^{(8)}=H_6^{(8)}=-\frac{464}{14175}$$
$$H_3^{(8)}=H_5^{(8)}=\frac{5248}{14175}\quad H_4^{(8)}=-\frac{454}{2835}$$
$$m=9:\ H_0^{(9)}=H_9^{(9)}=\frac{2857}{89600}\quad H_1^{(9)}=H_2^{(9)}=\frac{15741}{89600}\quad H_2^{(9)}=H_7^{(9)}=\frac{27}{2240}$$
$$H_3^{(9)}=H_6^{(9)}=\frac{1209}{5600}\quad H_4^{(9)}=H_5^{(9)}=\frac{2889}{44800}$$
$$m=10:\ H_0^{(10)}=H_{10}^{(10)}=\frac{16067}{598752}\quad H_1^{(10)}=H_9^{(10)}=\frac{26575}{149688}\quad H_2^{(10)}=H_8^{(10)}=-\frac{16175}{199584}$$
$$H_3^{(10)}=H_7^{(10)}=\frac{5675}{12474}\quad H_4^{(10)}=H_6^{(10)}=-\frac{4825}{11088}\quad H_5^{(10)}=\frac{17807}{24948}$$

Megjegyezzük, hogy $m=2$ esetében a Cotes-féle formula a Simpson-formulával megegyezik.

Példaképpen kiszámítjuk a Cotes-féle formulával ezt az integrált:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Ezen integrál számértéke $\log 2$. Ugyanis az

$$\int \frac{dx}{1+x}=\log(1+x),\quad \text{tehát}\quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x}=[\log(1+x)]_0^1=\log 2.$$

Tegyük pl. $m=5$, akkor

$$\int_a^b F(x)\,dx=(b-a)\Big[\frac{19}{288}f(a)+\frac{25}{96}f\Big(a+\frac{b-a}{5}\Big)+\frac{25}{144}f\Big(a+\frac{2(b-a)}{5}\Big)+$$
$$+\frac{25}{144}f\Big(a+\frac{3(b-a)}{5}\Big)+\frac{25}{96}f\Big(a+\frac{4(b-a)}{5}\Big)+\frac{19}{288}f(b)\Big].$$

A jelen esetben:

$$a=0,\ b=1,\ f(0)=1,\ f\Big(\frac{1}{5}\Big)=\frac{5}{6},\ f\Big(\frac{2}{5}\Big)=\frac{5}{7},\ f\Big(\frac{3}{5}\Big)=\frac{5}{8},\ f\Big(\frac{4}{5}\Big)=\frac{5}{9},\ f(1)=\frac{1}{2},$$

tehát $\log 2$ közelítőleg:

$$\frac{19}{288}+\frac{25}{96}\cdot\frac{5}{6}+\frac{25}{144}\,\frac{5}{7}+\frac{25}{144}\,\frac{5}{8}+\frac{25}{96}\cdot\frac{5}{9}+\frac{19}{288}\cdot\frac{1}{2}=0{,}693163\ldots$$

[a 4 első jegy pontos].

4. A Gauss-féle mechanikus quadratura. A Cotes-féle mechanikus quadraturának az a hiányossága, hogy a hiba meghatározása nem könnyű. Ha ugyanis a rendes módon kifejezzük az $f(x)-F(x)$ maradéktagot az

$$R=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-b)$$

formában, akkor az

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b R\,dx$$

hiba kifejezése nem alakítható át az első középértéktétellel, mert az integrándus az ab intervallumban az előjelét változtatja. Hogy ez ne történhessék meg, válasszunk $F(x)$ gyanánt olyan közelítő függvényt, mely az

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n$$

helyeken megegyezik az $f(x)$-el és ezenkívül még ugyanezeken a helyeken a differenciálhányadosa is megegyezik az $f(x)$ differenciálhányadosaival. Láttuk már, hogy az ilyen $F(x)$ ebben az alakban állítható elő (l. 373. lap):

$$F(x) = f(a_1)\,F_1(x) + f(a_2)\,F_2(x) + \dots + f(a_n)\,F_n(x) +$$
$$+ f'(a_1)\,\Phi_1(x) + f'(a_2)\,\Phi_2(x) + \dots + f'(a_n)\,\Phi_n(x), \qquad A)$$

ahol $F_1, \dots F_n, \Phi_1, \dots \Phi_n$ az x racionális egész függvényei. Az $f(x) - F(x)$ hiba kifejezése pedig:

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n!}\,[(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)]^2.$$

Így tehát, ha $\int_a^b f(x)\,dx$ helyett az $\int_a^b F(x)\,dx$-et mondjuk, a hiba:

$$\int_a^b \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n!}\,[(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)]^2\,dx$$

és erre az integrálra az első középértéktétel alkalmazható, mert az $[(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)]^2$ az előjelét nem változtatja. Ha az $f(x)$ $2n$-nél alacsonyabb fokú racionális egész függvény, akkor a hiba: 0.

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ közelítő értéke tehát az $A)$ szerint így írható:

$$\int_a^b F(x)\,dx = f(a_1)\int_a^b F_1(x)\,dx + f(a_2)\int_a^b F_2(x)\,dx + \dots + f(a_n)\int_a^b F_n(x)\,dx +$$
$$+ f'(a_1)\int_a^b \Phi_1(x)\,dx + \dots + f'(a_n)\int_a^b \Phi_n(x)\,dx.$$

Az $F_1, \dots F_n, \Phi_1, \dots \Phi_n$ függvények, tehát az ezekre vonatkozó integrálok is az $a_1, a_2, \dots a_n$ helyek megválasztásától függnek.

És most azt kérdezzük: Hogyan kellene az $a_1, a_2, \dots a_n$ helyeket választani, hogy az

$$\int_a^b \Phi_1(x)\,dx, \ \int_a^b \Phi_2(x)\,dx, \dots \int_a^b \Phi_n(x)\,dx$$

mindannyian eltünjenek, vagyis, hogy az $\int_a^b F(x)\,dx$ csakis erre az első részére redukálódjék:

$$f(a_1)\int_a^b F_1(x)\,dx + f(a_2)\int_a^b F_2(x)\,dx + \dots + f(a_n)\int_a^b F_n(x)\,dx. \qquad B)$$

Ha ez lehetséges, akkor az az előnye van, hogy csak az $f(x)$-nek az értékeit kell ismernünk ezeken a nevezetes $a_1, a_2, \dots a_n$ helyeken, a differenciálhányadosok értékeire nincs is szükségünk. Ezzel azután olyan mechanikus quadraturánk lesz, amely $2n$-nél alacsonyabb fokú egész függvényre nézve pontos eredményt szolgáltat, ámbár csak n helyen fölvett értékeket vettünk figyelembe. Egy $2n-1$-edfokú parabola által alkotott területet pontosan meg tudunk határozni, ha csak ezekhez az érdekes $a_1, \dots a_n$ helyekhez tartozó ordinátákat ismerjük.

Volt is már erre az előzőkben példánk. Midőn t. i. $F(x)$ gyanánt az $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ konstans értéket választottuk, akkor, bár 0-adfokú volt a közelítő függvény, a hiba (l. 377. lap) $\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$ volt, tehát elsőfokú $f(x)$ esetében pontos eredményt kaptunk. Itt az $n=1$, $2n-1=1$ volt. Az a speciális hely, melynek a pontosság ilyen fokozódása köszönhető, az ab intervallum középpontja volt.

Visszatérve most az általános kérdéshez, az $a_1, a_2, \dots a_n$ helyeket úgy akarjuk választani, hogy az $\int_a^b \Phi_1 dx, \dots \int_a^b \Phi_n dx$ mindannyian eltünjenek.

Evégből a $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ rácionális egész függvényeket kell kiszámítanunk. Azt már tudjuk, hogy az

$$F(x)=f(a_1)F_1(x)+\dots+f(a_n)F_n(x)+f'(a_1)\Phi_1(x)+\dots+f'(a_n)\Phi_n(x) \quad A)$$

$2n-1$-edfokú közelítő függvényben szereplő $F_1, F_2, \dots F_n, \Phi_1, \dots \Phi_n$ függvények függetlenek az $f(x)$ értékeitől. Ez a kis megjegyzés alkalmas a Φ függvények közvetlen kiszámítására, nem is kell a 372. lapon már tárgyalt általános képletet használnunk.

Ugyanis válasszunk olyan $f(x)$ függvényt, mely megadott $a_1, a_2, \dots a_n$ helyeken zérus értéket vesz fel, továbbá a differenciálhányadosa az $a_1, a_2, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n$ helyeken zérus, míg az egyetlen a_i helyen a differenciálhányadosa: 1. Akkor tehát az $F(x)$ $2n-1$-edfokú közelítő függvényre is áll, hogy:

$$F(a_1)=F(a_2)=\dots=F(a_n)=0; \; F'(a_1)=\dots=F'(a_{i-1})=0, \; F'(a_i)=1,$$
$$F'(a_{i+1})=\dots=F'(a_n)=0.$$

Igy tehát $A)$ szerint:

$$F(x)=\Phi_i(x).$$

De ez az $F(x)$ az adatokból könnyen megkonstruálható. Az a_1 helyen $F(a_1)=0$ és $F'(a_1)=0$; tehát $F(x)$ tartalmazza az $(x-a_1)^2$ faktort. Ugyanígy következtetjük, hogy az $(x-a_2)^2, \dots$ faktorokat is tartalmazza és hogy az $x-a_i$ tényezőt csak első hatványon tartalmazhatja; tehát:

$$F(x)=C(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_{i-1})^2(x-a_i)(x-a_{i+1})^2\dots(x-a_n)^2.$$

A C konstanst úgy kell meghatározni, hogy $F'(a_i)=1$ legyen: de

$$F'(a_i)=C(a_i-a_1)^2(a_i-a_2)^2\dots(a_i-a_n)^2;$$

tehát $$F(x)=\frac{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_i)\dots(x-a_n)^2}{(a_i-a_1)^2(a_i-a_2)^2\dots\dots(a_i-a_n)^2}.$$

Ha röviden $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$-et $\omega(x)$-el jelöljük, akkor tehát

$$\Phi_i(x)=\frac{[\omega(x)]^2}{(x-a_i)[\omega'(a_i)]^2}.$$

Igy tehát a Φ függvények ismeretes alakúak:

$$\Phi_1(x)=\left[\frac{\omega(x)}{\omega'(a_1)}\right]^2\frac{1}{x-a_1};\quad \Phi_2(x)=\left[\frac{\omega(x)}{\omega'(a_2)}\right]^2\frac{1}{x-a_2},\dots$$

$$\Phi_n(x)=\left[\frac{\omega(x)}{\omega'(a_n)}\right]^2\frac{1}{x-a_n}.$$

Azt kívánjuk, hogy minden $\int_a^b \Phi_i(x)\,dx=0$ legyen, azaz:

$$\frac{1}{\omega'(a_i)}\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-a_i)\omega'(a_i)}\cdot\omega(x)\,dx=0$$

legyen. Ha az elülálló tényezőt elhagyjuk, akkor tehát $\omega(x)$ n-edfokú racionális egész függvény úgy választandó, hogy

$$\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-a_1)\omega'(a_1)}\cdot\omega(x)\,dx=0,\quad \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-a_2)\omega'(a_2)}\omega(x)\,dx=0,\dots$$

$$\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-a_n)\omega'(a_n)}\omega(x)\,dx=0$$

legyen. Az $\omega(x)$-nek tehát ezt az n egyenletet kell kielégítenie. Ezt az n egyenletet összefoglaljuk egyetlenegy, általános követelésbe, ami az $\omega(x)$-et azonnal jellemzi. Ha ugyanis $\varphi(x)$ egy tetszés szerinti $n-1$-edfokú racionális egész függvény, akkor a Lagrange-tétel szerint:

$$\varphi(x)=\varphi(a_1)\frac{\omega(x)}{(x-a_1)\omega'(a_1)}+\varphi(a_2)\frac{\omega(x)}{(x-a_2)\omega'(a_2)}+$$
$$+\dots+\varphi(a_n)\frac{\omega(x)}{(x-a_n)\omega'(a_n)}.$$

Ha már most az előbbi n egyenletet rendre a $\varphi(a_1), \varphi(a_2),\dots\varphi(a_n)$-nel megszorozzuk és összeadjuk, akkor a következő egyenletre jutunk:

$$\int_a^b \omega(x)\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Ez azt mondja, hogy $\omega(x)$ olyan n-edfokú racionális egész függvény, melynek egy tetszés szerinti $n-1$-edfokú racionális egész függvénnyel való szorzata integrálva az $a \ldots b$ közben zérust ad.

Azonnal látjuk, hogy ez az egy feltétel az előbbi n-et is magában foglalja, hiszen $\frac{\omega(x)}{x-a_i}$ is $n-1$-edfokú racionális egész függvény, tehát erre nézve is $\int_a^b \omega(x)\frac{\omega(x)}{x-a_i}dx=0$.

Igy tehát kimondhatjuk, hogy az $\int_a^b \Phi_i(x)\,dx$ *integrálok mindannyian eltünnek, ha az* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *helyeket úgy választjuk, hogy az* $\omega(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$*-re nézve fennálljon az* $\int_a^b \omega(x)\varphi(x)\,dx=0$ *reláció, bárminő* $n-1$*-edfokú racionális egész függvény legyen is a* $\varphi(x)$.

Ilyen $\omega(x)$ függvénnyel már megismerkedtünk. Kimutattuk ugyanis (l. 348. lap), hogy ha (μ valamilyen konstans tényező)

$$\omega(x) = \mu \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n],$$

akkor fennáll minden $n-1$-edfokú $\varphi(x)$-re nézve az $\int_a^b \omega(x)\varphi(x)\,dx=0$ egyenlet. Azt is megmutattuk (l. 351. lap), hogy az $\omega(x)=0$ egyenlet gyökei mindannyian valósak, melyek az $a \ldots b$ szakaszba esnek. *Ha tehát* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *helyek gyanánt az* $\omega(x)=0$ *egyenlet gyökeit választjuk, akkor az* $\int_a^b \Phi_i(x)\,dx$ *integrálok mindannyian eltünnek.*

Még csak az a kérdés merülhet fel, hogy nincs-e még másik, ugyanilyen tulajdonságú $\omega(x)$ függvény is. Ha volna még egy második is: $\omega_1(x)$, akkor természetesen $\omega(x)$ és $\omega_1(x)$ legmagasabb együtthatói egyenlőknek gondolhatók, pl.: 1-nek. Fennállana tehát minden $n-1$-edfokú $\varphi(x)$-re nézve e két egyenlet:

$$\int_a^b \omega(x)\varphi(x)\,dx=0; \quad \int_a^b \omega_1(x)\varphi(x)\,dx=0$$

és ebből:

$$\int_a^b [\omega(x)-\omega_1(x)]\,\varphi(x)\,dx=0$$

és minthogy ez minden $n-1$-edfokú $\varphi(x)$-re érvényes, tehát akkor is áll, ha $\varphi(x)$ helyett az $n-1$-edfokú $\omega(x)-\omega_1(x)$-et választanók:

vagyis:

$$\int_a^b [\omega(x)-\omega_1(x)]^2\,dx=0.$$

De itt az integrándus folytonos és sohasem negativ, tehát az integrál csakis akkor lehet zérus, ha az integrándus mindenütt 0, azaz identikusan: $\omega(x)=\omega_1(x)$. Ezzel kimutattuk, hogy lényegileg csak egyetlen olyan n-edfokú $\omega(x)$ racionális egész függvény van, melyre nézve $\int_a^b \omega(x)\varphi(x)\,dx=0$ minden $n-1$-edfokú $\varphi(x)$-re. Minden más ilyen függvény az $\omega(x)$-nek C konstanssal való szorzata.

Ha már most az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeket úgy választjuk, hogy azok az $\omega(x)=0$ egyenlet gyökei legyenek, akkor [391. l. *B)*]:

$$\int_a^b F(x)\,dx = f(a_1)\int_a^b F_1(x)\,dx + f(a_2)\int_a^b F_2(x)\,dx + \cdots + f(a_n)\int_a^b F_n(x)\,dx.$$

Az $f(a_i)$ szorzója, az $\int_a^b F_i(x)\,dx$, valamint az $F_i(x)$ nem függ az $f(x)$ függvény értékeitől. Ezért az $F_i(x)$ függvények meghatározása végett elég lesz egy egészen speciálisan választott $f(x)$-ből kiindulni. Legyen az $f(x)$ olyan függvény, melynek a differenciálhányadosa az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyeken zérus, azonkívül $f(x)$ maga is eltűnik az $a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n$ helyeken és az a_i helyen: 1.

Ekkor tehát

$$F(a_1)=\cdots=F(a_{i-1})=F(a_{i+1})=\cdots=F(a_n)=F'(a_1)=\cdots=F'(a_n)=0.$$

$$F(a_i)=1.$$

Az $F(x)$ ez esetben (az *A)* képlet szerint) $F_i(x)$-re redukálódik. Az $F_i(x)$ tehát az

$$(x-a_1), (x-a_2), \ldots (x-a_{i-1}), (x-a_{i+1}), \ldots (x-a_n)$$

tényezőket a második hatványon tartalmazza és minthogy $2n-1$-edfokú racionális egész függvény, tehát ilyen alakú:

$$F_i(x) = C(x-\alpha)\,[(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)]^2.$$

Most már csak a C és α olyan meghatározása van még hátra, hogy $F_i(a_i)=1$, $F_i'(a_i)=0$ legyen. Tegyük az

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

helyett $\omega(x)$-et; ekkor

$$F_i(x) = C(x-\alpha)\left[\frac{\omega(x)}{x-a_i}\right]^2.$$

Ebből:

$$F_i'(x) = C\left[\frac{\omega(x)}{x-a_i}\right]^2 + 2C(x-\alpha)\left[\frac{\omega(x)}{x-a_i}\right]\frac{(x-a_i)\,\omega'(x)-\omega(x)}{(x-a_i)^2}.$$

Ha $x=a_i$ tesszük, akkor $\frac{\omega(x)}{x-a_i}$-ból $\omega'(a_i)$ lesz és az utolsó tényezőt a l'Hospital szabály szerint kiszámítva, azt találjuk, hogy ez: $\frac{\omega''(a_i)}{2}$. Az $F_i'(a_i)=0$-ból tehát az α-ra nézve azt találjuk, hogy:

$$\alpha = a_i + \frac{\omega'(a_i)}{\omega''(a_i)}$$

és az $F_i(a_i)=1$-ből a C-re nézve

$$C = -\frac{\omega''(a_i)}{[\omega'(a_i)]^3}$$

számértéket kapjuk; tehát:

$$F_i(x) = -\frac{1}{[\omega'(a_i)]^3}[\omega''(a_i)(x-a_i) - \omega'(a_i)]\left[\frac{\omega(x)}{x-a_i}\right]^2.$$

Így tehát az $F_i(x)$ függvényeket az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyek segítségével meghatároztuk és most már az $f(a_i)$ tényezőjét, az $\int_a^b F_i(x)\,dx$-et ismeretesnek tekinthetjük.

Ha már most az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál helyett a közelítő $\int_a^b F(x)\,dx$-et vesszük, akkor az elkövetett hiba (l. 191. lap)

$$h = \int_a^b \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}[(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)]^2\,dx$$

és ha erre az integrálra az első középértéktételt alkalmazzuk, a már többször használt eljárással azt kapjuk, hogy.

$$h = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_a^b [\omega(x)]^2\,dx.$$

Ezt az $\int_a^b [\omega(x)]^2\,dx$-et kell kiszámítanunk. Láttuk, hogy $\omega(x)$ a $D^n[(x-a)^n(x-b)^n]$-től csakis állandó szorzóban különbözhetik. Minthogy pedig $\omega(x)$-ben az x^n együtthatója: 1 és $D^{(n)}[(x-a)^n(x-b)^n] = D^{(n)}[x^{2n}+\cdots]$-ben x^n együtthatója: $2n.(2n-1)\ldots(n+1)$, tehát

$$\omega(x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\,\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n],$$

vagy a már egyszer használt jelöléssel (l. 348. lap)

$$\omega(x) = \frac{U_n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}.$$

Ugyanott kiszámítottuk, hogy:

$$\int_a^b U_n^2\,dx = \frac{n!\,n!}{2n+1}(b-a)^{2n+1},$$

tehát: $$\int_a^b [\omega(x)]^2\,dx = \frac{n!\,n!}{[(n+1)(n+2)\ldots 2n]^2(2n+1)}(b-a)^{2n+1}$$

és így a Gauss-féle mechanikus quadraturánál elkövetett hiba:

$$h = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n+1)!}\left[\frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\right]^2 (b-a)^{2n+1}.$$

Így például $n=1$ esetében, midőn a középső ordinátával vett derékszögű négyszög területét számítottuk ki az $y=f(x)$ görbe által alkotott terület helyett, ez a hiba:

$$\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{24},$$

ami megegyezik az 377. lapon számított eredménnyel.

A Gauss-féle mechanikus quadratura alkalmazásához tehát szükségünk van először is az $\omega(x)=0$, vagy $U_n=0$ egyenletek gyökeire: az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyekre és azután az $\int_a^b F_i(x)\,dx$ integrálértékekre. Ha ezek megvannak, akkor az $f(x)$-nek az $a_1, a_2, \ldots a_n$ helyekhez tartozó értékeivel megalkotjuk az

$$f(a_1)\int_a^b F_1(x)dx + f(a_2)\int_a^b F_2(x)\,dx + \cdots + f(a_n)\int_a^b F_n(x)\,dx$$

összeget; ez az $\int_a^b f(x)\,dx$ közelítő értéke. A hiba:

$$h = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n+1)!}\left[\frac{n!}{(n+1)\ldots 2n}\right]^2 (b-a)^{2n+1},$$

ahol η az ab intervallum valamely közbenső helye.

$n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$ és $n=6$ esetére ide iktatjuk az a helyek értékeit és a megfelelő $\int_a^b F_i\,dx$ szorzókat: $a=0$, $b=1$ esetében.*

* Ez nem megszorítás, mert ha $y=\frac{x-a}{b-a}$ tesszük, akkor az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál átmegy $(b-a)\int_0^1 f[a+y(b-a)]\,dy$-ba. Megjegyezzük továbbá, hogy itt is, mint a Cotes-féle formula esetén

$$\sum_1^n \int_0^1 F_i(x)\,dx = 1.$$

$n=1.$	$a_1=0{\cdot}5$	$\int_0^1 F_1\,dx=1.$
$n=2.$	$a_1=0{\cdot}21132487$ $a_2=0{\cdot}78867513$	$\int_0^1 F_1\,dx=\int_0^1 F_2\,dx=0{\cdot}5.$
$n=3.$	$a_1=0{\cdot}11270167$ $a_2=0{\cdot}5$ $a_3=0{\cdot}88729835$	$\int_0^1 F_1\,dx=\int_0^1 F_3\,dx=0{\cdot}2777778$ $\int_0^1 F_2\,dx=0{\cdot}4444444.$
$n=4.$	$a_1=0{\cdot}06943184$ $a_2=0{\cdot}33000948$ $a_3=0{\cdot}66999052$ $a_4=0{\cdot}93056816$	$\int_0^1 F_1\,dx=\int_0^1 F_4\,dx=0{\cdot}1739274$ $\int_0^1 F_2\,dx=\int_0^1 F_3\,dx=0{\cdot}3260726.$
$n=5.$	$a_1=0{\cdot}04691008$ $a_2=0{\cdot}23076534$ $a_3=0{\cdot}5$ $a_4=0{\cdot}76923465$ $a_5=0{\cdot}95308992$	$\int_0^1 F_1\,dx=\int_0^1 F_5\,dx=0{\cdot}1184634$ $\int_0^1 F_2\,dx=\int_0^1 F_4\,dx=0{\cdot}2393143$ $\int_0^1 F_3\,dx=0{\cdot}2844444.$
$n=6.$	$a_1=0{\cdot}03376524$ $a_2=0{\cdot}16939531$ $a_3=0{\cdot}38069041$ $a_4=0{\cdot}61930959$ $a_5=0{\cdot}83060469$ $a_6=0{\cdot}96623476$	$\int_0^1 F_1\,dx=\int_0^1 F_6\,dx=0{\cdot}0856622$ $\int_0^1 F_2\,dx=\int_0^1 F_5\,dx=0{\cdot}1803808$ $\int_0^1 F_3\,dx=\int_0^1 F_4\,dx=0{\cdot}2339570.$

5. A véges Taylor sor. A differenciálszámítás egyik legfontosabb tétele a függvénynek Taylor sorba való fejtése; mert ezzel elég egyszerű analitikai alakban tudjuk előállítani az $f(x)$-et az a hely környezetében levő x helyen, ha ismertük az $f(x)$-nek és differenciálhányadosainak az a helyen való értékeit. Nem lesz felesleges e fontos tételnek az integrálszámítás segítségével való megállapítása, amellyel egyrészt némileg általánosabb formában kapjuk a Taylor sort, másrészt pedig a maradéktagnak ismét új alakjára jutunk.

Tegyük fel, hogy $f(x)$, valamint a differenciálhányadosai az $n+1$-ikig az $a \ldots b$ intervallumban mindenütt egyértékűek, végesek és folytonosak [az $n+1$-ikről elég volna feltenni, hogy integrábilis]. Legyen az $\alpha \ldots \beta$ köz az ab intervallumban.

Minthogy az

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

tehát:

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha).$$

Ez már a differenciálszámításban alapvető fontosságú középértéktételt szolgáltatja. Ha ugyanis a baloldali integrálra az első középértéktételt alkalmazzuk, akkor, ha $f'(x)$ felső határa az $\alpha \ldots \beta$ közben: M és alsó határa m:

$$f(\beta) - f(\alpha) = \mu(\beta - \alpha),$$

ahol μ az m és M közé eső meghatározott érték. Ha $f'(x)$ folytonos, akkor van olyan ξ hely az ab szakaszban, melyen a μ értéket fölveszi és így:

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(\xi)$$

az ismeretes középértéktétel.

[Látszólag a középértéktételnek ez a levezetése valamivel szűkebb, mint az eddigi; mert $f'(x)$ folytonosságát is fel kellett tennünk, holott a középértéktételnél csakis arra volt szükségünk, hogy $f(x)$ differenciálható legyen az ab intervallumban; de tudjuk, hogy ha $f'(x)$ nem is folytonos, mégis megvan neki a folytonos függvény azon tulajdonsága, hogy M és m között minden értéket fölvesz (l. 122. lap); tehát a μ értéket is fölveszi valamely ξ helyen és így a középértéktétel ezen levezetése csak annyival megszorítóbb, hogy $f'(x)$ integrábilis voltát követeli, föltéve, hogy $f'(x)$ előbb említett tulajdonsága e középértektételtől függetlenül állapittatik meg.]

Ha az $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$ integrált parciális integrálással határozzuk meg oly módon, hogy u gyanánt $f'(x)$-et és dv gyanánt dx-et választjuk, vagyis $v = x - c$, ahol c egy tetszés szerinti állandó, akkor a következőre jutunk:

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = [f'(x)(x-c)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f''(x)(x-c)\,dx =$$

$$= f'(\beta)(\beta - c) - f'(\alpha)(\alpha - c) - \int_\alpha^\beta f''(x)(x-c)\,dx,$$

vagyis:

$$f(\beta) - f'(\beta)(\beta - c) = f(\alpha) - f'(\alpha)(\alpha - c) - \int_\alpha^\beta f''(x)(x-c)\,dx.$$

Ha a jobboldalon álló integrálra ujból alkalmazzuk a parciális integrálást, u gyanánt $f''(x)$-et, dv-nek pedig $(x-c)\,dx$-et, vagyis v-nek $\frac{(x-c)^2}{2}$-t téve,* akkor:

* Az $\int_\alpha^\beta u\,dv$ kiszámításánál v helyett $v+k$ is tehető, ahol k tetszésszerinti konstans, de ekkor is

$$\int_\alpha^\beta f''(x)(x-c)\,dx = \left[\frac{f''(x)(x-c)^2}{2}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'''(x)(x-c)^2\,dx,$$

tehát:

$$f(\beta) - f'(\beta)(\beta-c) + \frac{f''(\beta)(\beta-c)^2}{2} =$$

$$= f(\alpha) - f'(\alpha)(\alpha-c) + \frac{f''(\alpha)(\alpha-c)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'''(x)(x-c)^2\,dx.$$

Ezt az eljárást folytatva, n lépés után a következő eredményre jutunk:

$$f(\beta) - f'(\beta)(\beta-c) + \frac{f''(\beta)(\beta-c)^2}{2} - \frac{f'''(\beta)(\beta-c)^3}{3!} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(\beta)(\beta-c)^{n-1}}{(n-1)!} = f(\alpha) - f'(\alpha)(\alpha-c) + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(\alpha)(\alpha-c)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_\alpha^\beta f^{(n)}(x)(x-c)^{n-1}\,dx.$$

Ennek a formulának a helyességéről teljes indukcióval könnyen meggyőződhetünk. Ha ugyanis föltesszük a fölírt képlet helyességét és az $\int_\alpha^\beta f^{(n)}(x)(x-c)^{n-1}\,dx$-et újból parciálisan integráljuk, u gyanánt $f^{(n)}(x)$-et, dv-nek $(x-c)^{n-1}\,dx$-et véve, akkor:

$$\int_\alpha^\beta f^{(n)}(x)(x-c)^{n-1}\,dx = \left[\frac{f^{(n)}(x)(x-c)^n}{n}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{n}\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(x-c)^n\,dx =$$

$$= \frac{f^{(n)}(\beta)(\beta-c)^n}{n} - \frac{f^{(n)}(\alpha)(\alpha-c)^n}{n} - \frac{1}{n}\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(x-c)^n\,dx$$

és így:

$$f(\beta) - f'(\beta)(\beta-c) + \frac{f''(\beta)(\beta-c)^n}{2} - \cdots + (-1)^n\frac{f^{(n)}(\beta)(\beta-c)^n}{n!} =$$

$$= f(\alpha) - f'(\alpha)(\alpha-c) + \frac{f''(\alpha)(\alpha-c)^2}{2} - \cdots +$$

$$+ (-1)^n\frac{f^{(n)}(\alpha)(\alpha-c)^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(x-c)^n\,dx,$$

$$\int_\alpha^\beta u\,dv = [u\,(v+k)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (v+k)\,du = u\,(\beta)\,v\,(\beta) - u\,(\alpha)\,v\,(\alpha) + k\,[u\,(\beta) - u\,(\alpha)] -$$

$$- \int_\alpha^\beta v\,du - \int_\alpha^\beta k\,du = u\,(\beta)\,v\,(\beta) - u\,(\alpha)\,v\,(\alpha) + k\,[u\,(\beta) - u\,(\alpha)] - k\,[u\,(\beta) - u\,(\alpha)] -$$

$$- \int_\alpha^\beta v\,du = u\,(\beta)\,v\,(\beta) - u\,(\alpha)\,v\,(\alpha) - \int_\alpha^\beta v\,du,$$

tehát a k-tól teljesen független eredményt kapunk; tehát mindegy, akár v-t, akár $v+k$-t veszünk.

tehát a képlet érvényes eggyel nagyobb n-re is. Minthogy pedig $n=1$ esetében érvényes, tehát (a mondott feltételek mellett) általánosan is be van bizonyítva. Ha e képletben c helyébe β-t tesszük, akkor erre az egyszerűbb alakra jutunk:

$$f(\beta)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{f''(\alpha)(\beta-\alpha)^2}{2}+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(\alpha)(\beta-\alpha)^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^n\,dx.$$

Ez, miként látjuk, a véges Taylor sor, de a maradéktagnak új alakja van:

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^n\,dx.$$

Ha erre az integrálra ismét a középértéktételt alkalmazzuk, amit tehetünk, mert $(\beta-x)^n$ az $\alpha\beta$ intervallumban nem változtatja a jelét, akkor μ-vel megint az $f^{(n+1)}(x)$-nek az $\alpha\beta$ intervallumhoz tartozó M felső és m alsó határa közé eső meghatározott értéket jelölve:

$$R_{n+1}=\frac{\mu}{n!}\int_\alpha^\beta(\beta-x)^n dx=\frac{\mu(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ha megint μ helyett $f^{(n+1)}(\xi)$-t tesszük, [amit mindig tehetünk, mert $f^{(n+1)}(x)$ az M és m között minden értéket felvesz], akkor:

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}$$

és így a maradéktagnak ismeretes Lagrange-féle alakját kapjuk. Itt csak annyival több feltevést tettünk, mint azelőtt, hogy $f^{(n+1)}(x)$-nek integrálhatóságot is tulajdonítottunk.

Ha pedig $\frac{\mu(\beta-\alpha)}{n+1}$ helyett η betűt írunk, akkor a két utolsó tagot összefoglalva:

$$f(\beta)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{f''(\alpha)(\beta-\alpha)^2}{2}+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{[f^{(n)}(\alpha)+\eta](\beta-\alpha)^n}{n!}.$$

Tudjuk, hogy ha β az α-hoz konvergál, akkor η zérussá válik, azaz:

$$\lim_{\beta=\alpha}\eta=0.$$

Az
$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^n\,dx$$

maradéktagot még más alakban is felírhatjuk. Az integrándust ugyanis ketté választhatjuk:

$$f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^k(\beta-x)^{n-k}$$

alakban, ahol k tetszés szerinti pozitiv egész szám és ha most az első középértéktételt alkalmazzuk:

$$\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^k(\beta-x)^{n-k}\,dx=\nu\int_\alpha^\beta(\beta-x)^{n-k}dx=\frac{\nu(\beta-\alpha)^{n-k+1}}{n-k+1},$$

ahol ν az $f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^k$ felső és alsó határa közötti valamely meghatározott érték. Ha föltesszük, hogy $f^{(n+1)}(x)$ az $\alpha\beta$ intervallumban folytonos, akkor $f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^k$ is folytonos és akkor van olyan ξ közbenső hely, amelyen ez a szorzat a ν értéket fölveszi, vagyis:

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(x)(\beta-x)^k(\beta-x)^{n-k}\,dx=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(\beta-\xi)^k(\beta-\alpha)^{n-k+1}}{n!\,(n-k+1)}$$

és ha, mint régebben, $\xi=\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)$ tesszük:

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]\,(1-\vartheta)^k(\beta-\alpha)^{n+1}}{n!\,(n-k+1)}$$

és ez a maradéktagnak ismeretes Schlömilch-féle alakja. Ha $k=n$, akkor

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]\,(1-\vartheta)^n(\beta-\alpha)^{n+1}}{n!}$$

a Cauchy-féle maradéktag és ha $k=0$, akkor:

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]\,(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a Lagrange-féle maradéktag.

IX. FEJEZET.

AZ INTEGRÁL FOGALMÁNAK KITERJESZTÉSE.

1. A határozott integrál fogalmának kiterjesztése. Eddigelé csak olyan határozott integrálról szóltunk, melynek határai: a és b véges számok és melynek integrándusa az ab intervallumban korlátos és így mindenütt véges. Most az integrál fogalmát ki akarjuk terjeszteni olyan esetekre is, midőn a határok közül egyik, vagy mindkettő végtelen és azután szólni akarunk olyan határozott integrálokról is, amelyekben az integrándus az ab közben végtelenné is válik.

Ha az $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ integrált, melynek értéke az x-től függ, $F(x)$-el jelöljük, akkor definicióképpen megállapítjuk, hogy

$$\int\limits_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x=\infty} F(x),$$

vagyis $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$-n a $\lim\limits_{x=\infty}\int\limits_a^x f(t)\,dt$ határértéket értjük. Ha ez a határérték véges és meghatározott szám, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ *konvergens integrál*, ha pedig ez a határérték végtelen, vagy határozatlan (azaz attól függ, hogy x minő úton válik végtelenné), akkor pedig az integrált *divergensnek* mondjuk.

Mikor létezik a $\lim\limits_{x=\infty} F(x)$? Ennek a kritériumáról már szóltunk. Az általános konvergencia-kritérium szerint ugyanis az $F(x)$-nek a végtelenben akkor és csakis akkor van meghatározott véges határértéke, ha bármely kis pozitiv ε-hoz tartozik olyan N küszöbszám, hogy:

$$|F(x') - F(x'')| < \varepsilon,$$

ha csak x' és x'' az N-nél nagyobb számok. (L. 56. lapon.)

Ezt a kritériumot alkalmazva az $\int_a^x f(t)\,dt$ integrálra, azt kapjuk, hogy az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ integrál konvergenciájának szükséges és elégséges kritériuma az, hogy bármely kis ε-hoz tartozzék olyan N küszöbszám, hogy

$$\left|\int_a^{x'} f(t)\,dt - \int_a^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

legyen, ha x' és x'' tetszés szerinti, N-nél nagyobb számok. Ez még így is írható:

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

ha x' és x'' tetszés szerinti, egy meghatározott, ε-hoz tartozó N-nél nagyobb számok.

Így például, ha $f(t) = \frac{1}{t^2}$ és a pozitiv, akkor

$$\int_a^x \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}.$$

A jelen esetben tehát

$$F(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \quad \text{és így} \quad \lim_{x=\infty} F(x) = \frac{1}{a};$$

tehát definiciónk szerint: $\int_a^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{a}$.

Ellenben, ha $f(t) = \frac{1}{t}$, akkor

$$\int_a^x \frac{dt}{t} = \log x - \log a$$

és így $\lim_{x=\infty} F(x)$ nem véges szám, tehát $\int_a^\infty \frac{dt}{t}$ nem konvergens.

Az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergenciájának megállapításánál az alsó határ nem is szerepel. Nyilvánvaló, hogy ha $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens, akkor konvergens az $\int_{a'}^\infty f(t)\,dt$ is, ha csak az $f(t)$ az $a' \ldots a$ szakaszban integrálható. Hiszen $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{a'} f(t)\,dt + \int_{a'}^x f(t)\,dt$ és így

$$\lim_{x=\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{a'} f(t)\,dt + \lim_{x=\infty} \int_{a'}^x f(t)\,dt;$$

tehát ha az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens, akkor az $\int_{a'}^\infty f(t)\,dt$ is az és fordítva.

Az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ integrál tehát akkor és csakis akkor konvergens, ha bármely kis ε számhoz található oly N küszöbszám, hogy $\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$, ha csak $x' > N$ és $x'' > x'$.

2. A konvergencia kritériuma. Az integrál konvergenciájának szükséges és elégséges feltételét megállapítottuk; de ez a kritérium csak ritka esetben alkalmazható, azért könnyebben kezelhető föltételekről kell gondoskodnunk. Ezek nem lesznek ugyan szükséges és elégséges, hanem csak szükséges vagy csak elégséges feltételek; de gyakorlati szempontból rendkívül fontosak az integrálok tárgyalásánál.

A monoton csökkenő, pozitiv értékű függvényekre vonatkozik az első, szükséges föltétel, mely így hangzik:

Ha $f(t)$ egy bizonyos t értéktől kezdve mindig pozitiv, monoton csökkenő függvény, akkor az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergenciájának szükséges feltétele, hogy

$$\lim_{t=\infty} t\,f(t) = 0$$

legyen.

[Azt mondtuk, hogy egy bizonyos t értéktől (pl. b-től) kezdve legyen pozitiv csökkenő az $f(t)$; ez elég is; mert ha $\int_b^\infty f(t)\,dt$ konvergens, akkor már miként említettük, az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ is konvergens, föltéve természetesen, hogy az $f(t)$ az $a \ldots b$ szakaszban integrálható; szóval: az $f(t)$ viselkedése a b-ig, akárminő messze legyen is a b, csak annyiban jön tekintetbe, hogy az $a \ldots b$ közben integrábilis-e, vagy nem. Ezentúl tehát mindig úgy gondolhatjuk, hogy az $f(t)$ az a alsó határtól kezdve teljesíti a szóban forgó kívánságot: a jelen esetben azt, hogy pozitiv, monoton, csökkenő.]

A $\lim\limits_{t=\infty} t\,f(t) = 0$ szükségességét kimutatjuk, midőn bebizonyítjuk, hogy ha $\lim\limits_{t=\infty} t\,f(t) = 0$ nem teljesül, akkor az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ integrál nem konvergens.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{t=\infty} t\,f(t) = 0$ föltétel nincs teljesítve; akkor vagy egyáltalában nem létezik ez a limesz, vagy pedig létezik ugyan, de 0-tól különböző. Akár az egyik, akár a másik esettel legyen dolgunk, kell egy, a 0-tól különböző A számnak lenni, amelynél a $t\,f(t)$ nagyobb is lesz, akárminő messze haladjunk is a t-vel; vagyis bárminő nagy N számon túl még mindig található olyan t, melyre nézve $t\,f(t) > A$.

Legyen egy ilyen t szám: n_1; tehát $n_1 f(n_1) > A$, vagyis $f(n_1) > \frac{A}{n_1}$. Vegyük az n_1 2-szeresét. $2n_1$-en túl is kell olyan t számnak lenni, melyre nézve $t f(t) > A$; legyen egy ilyen szám: n_2; tehát $n_2 > 2n_1$ és $n_2 f(n_2) > A$, azaz $f(n_2) > \frac{A}{n_2}$.

Éppen így $2n_2$-n túl megint van olyan n_3 hely, melyre nézve: $f(n_3) > \frac{A}{n_3}$ s így tovább.

Minthogy az $f(t)$ monoton csökkenő, tehát az n_1-től n_2-ig terjedő $n_2 - n_1$ terjedelmű szakaszban, mely $\frac{n_2}{2}$-nél nagyobb, (mert $n_2 > 2n_1$) az $f(t)$ nagyobb $f(n_2)$-nél, tehát még inkább $\frac{A}{n_2}$-nél és így:

$$\int_{n_1}^{n_2} f(t)\,dt > \frac{n_2}{2} \cdot \frac{A}{n_2} = \frac{A}{2}.$$

Az $n_2 \ldots n_3$ szakaszban, mely $\frac{n_3}{2}$-nél nagyobb, az $f(t)$ nagyobb az $f(n_3)$-nál és így még inkább az $\frac{A}{n_3}$-nál; tehát:

$$\int_{n_2}^{n_3} f(t)\,dt > \frac{A}{2}$$

s í. t. Ebből következik, hogy $\int_a^\infty f(t)\,dt$ nem lehet konvergens, mert ha $x > n_k$, akkor:

$$\int_a^x f(t)\,dt > \int_a^{n_1} f(t)\,dt + \int_{n_1}^{n_2} f(t)\,dt + \cdots + \int_{n_{k-1}}^{n_k} f(t)\,dt > \frac{(k-1)A}{2},$$

tehát bármely számnál nagyobbá válik, vagyis $\int_a^\infty f(t)\,dt$ végtelen nagy.

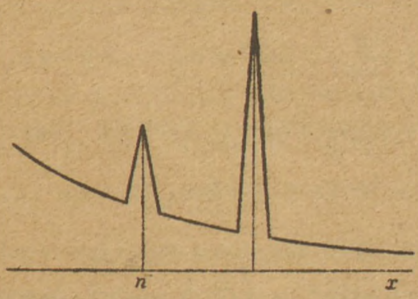
Igy tehát az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergenciájának szükséges feltétele, hogy $\lim_{t=\infty} t f(t) = 0$ legyen, ha $f(t)$ pozitiv, monoton csökkenő függvény.

Alig szükséges mondanunk, hogy ha $f(t)$ nem monoton csökkenő, hanem monoton növekvő pozitiv függvény, akkor az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ mindenesetre divergens. Mert hiszen ekkor az $f(t)$ mindig nagyobb marad pl. az $f(a)$-nál, [ha $f(a)$ éppen 0 volna, a helyett a távolabbi b-t mondanók]; tehát $\int_a^x f(t)\,dt > f(a)(x-a)$ és így $\lim_{x=\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ nem lehet véges szám. Ebből azonnal következik, hogy ha $f(t)$ monoton csökkenő, de nem mindig pozitiv, akkor sem lehet az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens; mert hiszen ez esetben — $f(t)$ egy bizonyos b helytől kezdve [ahol $f(t)$ a jelét változtatja] monoton növekvő, tehát az előbbi szerint — $\int_a^\infty f(t)\,dt$ végtelenné válik.

[Az előbbi bizonyításnál nagyon felhasználtuk az $f(t)$ monoton csökkenő voltát. Enélkül nem mondhattuk volna, hogy az $n_1 \dots n_2$ szakaszban $f(t)$ mindig nagyobb $f(n_2)$-nél, az $n_2 \dots n_3$ szakaszban mindenütt nagyobb $f(n_3)$-nál s í. t. A bizonyítás az $f(t)$-nek ezt a tulajdonságát felhasználta; de kérdés, hogy enélkül a tétel elveszti-e igazságát, vagy csak a bizonyítást kell-e változtatnunk.

Egy példán mutatjuk be, hogy a tétel enélkül általában nem érvényes. Vagyis megmutatjuk, hogy *ha $f(t)$ nem monoton csökkenő, akkor az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens lehet anélkül, hogy $\lim\limits_{t=\infty} tf(t)$ eltűnnék.*

Azt már láttuk, hogy ha $f(t) = \frac{1}{t^2}$, akkor $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens. Válasszuk most $f(t)$ gyanánt azt a függvényt, mely így legyen értelmezve: Az n egész szám körül jelöljük meg az $n-\varepsilon_n \dots n+\varepsilon_n$ szakaszt. Az $f(t)$ az így kijelölt szakaszokat kivéve, mindenütt $\frac{1}{t^2}$ legyen. Az n-ik szakasz baloldalán, az $n-\varepsilon_n$ helyen $f(t)$ értéke a definíció szerint még $\frac{1}{(n-\varepsilon_n)^2}$; éppen így a jobboldali szélen: $\frac{1}{(n+\varepsilon_n)^2}$, de $f(n) = e^n$ legyen és az $\left(n-\varepsilon_n, \frac{1}{(n-\varepsilon_n)^2}\right)$ koordinátákkal bíró ponttól az (n, e^n) koordinátákkal bíró pontig pl.: egyenes vonalat húzzunk, éppen így a jobboldalon (n, e^n)-től, $\left(n+\varepsilon_n, \frac{1}{(n+\varepsilon_n)^2}\right)$-ig. Az $\frac{1}{t^2}$ monoton görbéből ilyen módon kiemelkedő csúcsok keletkeznek. Ez a vonal ábrázolja az $f(t)$ menetét. (96. ábra.) Az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$-re vonatkozólag még nem állapodtunk meg.



96. ábra.

Rögtön belátjuk, hogy az $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ integrált növeljük, ha az n-ik kiemelkedő részben az $f(t)$ helyett az e^n-et vesszük és még az $\int\limits_a^x \frac{1}{t^2}\,dt$-nek e szakaszokban hiányzó részét sem hagyjuk el; vagyis:

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt < \int\limits_a^x \frac{dt}{t^2} + 2\varepsilon_1 e + 2\varepsilon_2 e^2 + 2\varepsilon_3 e^3 + \cdots$$

és ha most az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ fölött úgy rendelkezünk, hogy

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2e}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{(2e)^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{(2e)^3}, \dots$$

legyen, akkor

$$2\varepsilon_1 e + 2\varepsilon_2 e^2 + 2\varepsilon_3 e^3 + \cdots = \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \cdots\right] < 2\varepsilon,$$

tehát
$$\lim_{x=\infty} \int_a^x f(t)\,dt < \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^2} + 2\varepsilon.$$

vagyis az integrál konvergens és egyébként $\int_a^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{a}$-tól tetszés szerinti kevéssel különbözik. Már pedig most nem mondhatjuk, hogy $\lim_{t=\infty} tf(t) = 0$, mert akárminő messze menjünk, mindig találunk egész számú helyeket, melyeken a függvény e^n és így e helyeken $tf(t) = ne^n$.]

Így tehát látjuk, hogy az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens lehet akkor is, ha a $\lim_{t=\infty} tf(t) = 0$ föltétel nem teljesül, *ha az $f(t)$ nem monoton csökkenő függvény.*

De jól megjegyzendő, hogy a monoton csökkenő függvény esetében is csak szükségesnek mutattuk ki a $\lim_{t=\infty} tf(t) = 0$ föltételt. Hogy nem elégséges, azt egy igen egyszerű példán mutatjuk meg.

Monoton csökkenő függvény pl. ez: $f(t) = \frac{1}{t \log t}$.

Legyen $t > e$, akkor az $f(t)$ mindig pozitiv. Határozzuk meg ezt az integrált: $(a > e)$

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t \log t}.$$

Minthogy: $\log \log t$-nek t szerinti differenciálhányadosa éppen: $\frac{1}{t \log t}$, tehát:

$$\lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{dt}{t \log t} = \lim_{x=\infty} [\log \log x - \log \log a] = \infty$$

és így az $\int_a^\infty \frac{dt}{t \log t}$ divergens. Pedig az a feltétel, hogy

$$\lim_{t=\infty} tf(t) = \lim_{t=\infty} \frac{1}{\log t} = 0$$

most is teljesítve van. Most már tehát világosan látjuk, hogy *ha $f(t)$ monoton csökkenő függvény, akkor az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ integrál konvergenciájának szükséges, de nem elégséges feltétele, hogy $\lim_{t=\infty} tf(t) = 0$ legyen.*

3. Az integrálok összehasonlításának elve. Már eddig is alkalmaztunk egyszerűbb esetekben olyan eljárást az integrálok összehasonlítására, amilyent most teljesség kedveért általánosságban is meg akarunk említeni, bár olyan egyszerű, hogy közvetlenül is világossá válik.

a) Ha $f(t)$ és $\varphi(t)$ pozitiv függvények és minden t helyen $\varphi(t) \geq f(t)$, akkor, ha

$$\int_a^\infty \varphi(t)\,dt$$

konvergens integrál, egyúttal az

$$\int_a^\infty f(t)\,dt$$

is konvergens.

Ugyanis, ha egy tetszés szerinti kis ε adatik, ehhez tartozik olyan N küszöbszám, hogy $\int_{x'}^{x''}\varphi(t)\,dt < \varepsilon$, ha $x'' > x' > N$; mert az első integrál konvergens; de másrészt

$$0 < \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt < \int_{x'}^{x''} \varphi(t)\,dt$$

ugyanis a kettő különbsége:

$$\int_{x'}^{x''} [\varphi(t) - f(t)]\,dt$$

pozitiv, mert $\varphi(t)$ minden t helyen nagyobb $f(t)$-nél; az integrándus pozitiv, tehát az integrál is pozitiv és így, ha x' és $x''>x'$ bárminő, N-nél nagyobb számot jelentenek, akkor

$$\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt < \varepsilon,$$

tehát az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens integrál. Ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

b) Ha pedig $f(t)$ és $\varphi(t)$ pozitiv függvények és minden t helyen $f(t) \geq \varphi(t)$, továbbá $\int_a^\infty \varphi(t)\,dt$ divergens integrál, akkor egyúttal $\int_a^\infty f(t)\,dt$ is divergens; ugyanis, miként azonnal beláthatjuk,

$$\int_a^x f(t)\,dt > \int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

de a jobboldali integrál divergens lévén, elmehetünk az x-el olyan messze, hogy az értéke a tetszés szerint megadott M-nél nagyobb legyen és így a baloldali is nagyobb M-nél, vagyis a baloldali integrál is végtelen naggyá válik az x-el.

c) Ha az $f(t)$ abszolut értékével, az $|f(t)|$-vel alkotott integrál

$$\int_a^\infty |f(t)|\,dt$$

konvergens, akkor az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ is konvergens. Ezen állítás bizonyítása végett ki kell mutatnunk, hogy bármely kis ε-hoz található oly N küszöbszám, melyre nézve

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x'' > x' > N.$$

Evegből vegyük az adott ε felét. Minthogy $\int_a^\infty |f(t)|\,dt$ konvergens, tehát az $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozik olyan N küszöbszám, melyre nézve

$$\int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad x'' > x' > N.$$

De az $\int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt$ értelmezése alapján található az $x' \ldots x''$ szakasznak olyan beosztása, hogy

$$S_n = |f(t_1)|\,d_1 + |f(t_2)|\,d_2 + \cdots + |f(t_n)|\,d_n$$

az $\int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt$ integráltól $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kevesebbel különbözzék és minden más beosztással létesitett S_n összeg is $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kevesebbel különbözzék az $\int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt$-től, ha csak az új beosztás szakaszai kisebbek a $d_1, d_2, \ldots d_n$ szakaszok legnagyobbikánál, mondjuk δ-nál és $t_1, t_2, \ldots$ bárminő helyei az egyes szakaszoknak. Eszerint tehát minden ilyen beosztásra nézve

$$S_n - \frac{\varepsilon}{2} < \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt < S_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát
$$\int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt - \frac{\varepsilon}{2} < S_n < \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

s így $S_n < \varepsilon$. Alkossuk meg ugyanezen beosztással az

$$\Sigma_n = f(t_1)\,d_1 + f(t_2)\,d_2 + \cdots + f(t_n)\,d_n$$

összeget. Ennek az abs. értéke minden esetre kisebb lesz az S_n-nél, tehát

$$|\Sigma_n| = |f(t_1)\,d_1 + f(t_2)\,d_2 + \cdots + f(t_n)\,d_n| < \varepsilon$$

minden olyan beosztásra nézve, amelynek szakaszai δ-nál kisebbek. De az $\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt$ értelmezése szerint:

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| = \lim_{\delta=0} |\Sigma_n|,$$

tehát, minthogy $|\Sigma_n|$ mindig kisebb ε-nál, (ha max. $d_i < \delta$) a $\lim_{\delta=0} |\Sigma_n|$ is kisebb az ε-nál, (vagy egyenlő vele), tehát

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon,$$

ami bizonyítja azt, hogy $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens integrál. Ha $\int\limits_a^\infty |f(t)|\,dt$ konvergens, akkor az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ integrált *abszolut konvergens integrálnak* mondjuk. Meglehet azonban, hogy $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens, anélkül, hogy $\int\limits_a^\infty |f(t)|\,dt$ konvergens lenne. Így például $\int\limits_a^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ konvergens integrál. Ugyanis $\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt$-re alkalmazható a második középértéktétel, mert $\frac{1}{t}$ monoton csökkenő és $\sin t$ az $x' \ldots x''$ közben integrálható; tehát:

$$\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{x'}\int\limits_{x'}^{\xi''} \sin t\,dt = \frac{\cos \xi'' - \cos x'}{x'}$$

és így

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leq \frac{2}{x'},$$

tehát x' oly nagyra vehető, hogy

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < \varepsilon.$$

$\left[\text{Evégből csak } x' > \frac{2}{\varepsilon} \text{ veendő.}\right]$ Az $\int\limits_a^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ konvergens integrál. (Később látni fogjuk, hogy ha $a = 0$, az integrál számértéke: $\frac{\pi}{2}$).

De az abszolut értékkel megalkotott $\int\limits_a^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ divergens. Ugyanis, ha az $a \ldots x$ szakaszt a benne levő $k\pi$ helyekkel felosztjuk részekre, akkor ha $m\pi > a$ és $(m+n)\pi \leq x$,

$$\int\limits_a^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt > \int\limits_{m\pi}^{(m+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt + \int\limits_{(m+1)\pi}^{(m+2)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt + \cdots + \int\limits_{(m+n-1)\pi}^{(m+n)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt.$$

Nézzük a jobboldal egy tagját, például az $i\pi \ldots (i+1)\pi$ szakaszhoz tartozót.

Az $\frac{1}{t}$ pozitiv, a $|\sin t|$ e szakaszban integrálható és pozitiv, tehát alkalmazható az első középértéktétel; ha τ az $i\pi$ és $(i+1)\pi$ közötti számot jelent, akkor

$$\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \frac{1}{\tau}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin t|\,dt = \frac{1}{\tau}\left|\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \sin t\,dt\right| = \frac{2}{\tau}$$

és így:

$$\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt > \frac{2}{(i+1)\pi};$$

tehát:

$$\int_{a}^{x} \frac{|\sin t|}{t}\,dt > \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+n}\right].$$

Ha $x=2m\pi$ vesszük, akkor $n=m$ és így a zárójelben álló m tag mindegyike nagyobb az utolsónál: $\frac{1}{2m}$-nél, tehát az összeg nagyobb $m\cdot\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}$-nél, vagyis az a-tól $2m$-ig terjedő integrál $\frac{1}{\pi}$-nél nagyobb. Éppen így a $2m$-től $4m$-ig terjedő integrál is nagyobb $\frac{1}{\pi}$-nél s í. t., tehát, ha $x>2^k m$, akkor

$$\int_{a}^{x} \frac{|\sin t|}{t}\,dt > \frac{k}{\pi},$$

amiből látjuk, hogy x oly nagyra választható, hogy az $\int_{a}^{x} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ a tetszés szerinti M-nél is nagyobbá válik, vagyis az $\int_{a}^{\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ divergens. Ez a példa tehát azt mutatja, hogy az $\int_{a}^{\infty} f(t)dt$ konvergens lehet anélkül, hogy az $\int_{a}^{\infty} |f(t)|dt$ is konvergens lenne. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\int_{a}^{\infty} f(t)dt$ *nem abszolut* konvergens.

4. Az integrál konvergenciájának (divergenciájának) elégséges föltétele. Az integrálok összehasonlításából következtethetünk a konvergencia egy olyan egyszerű elégséges föltételére, amely igen gyakran alkalmazható. Ez így hangzik:

Ha $\alpha>1$ és $t^{\alpha}f(t)$ minden t értékre nézve korlátos, azaz $|t^{\alpha}f(t)|<A$ véges számnál, akkor az $\int_{a}^{\infty} f(t)\,dt$ integrál abszolut konvergens.

Ugyanis ekkor $|f(t)|<\frac{A}{t^{\alpha}}$ minden t értékre nézve. De az $\int_{a}^{\infty} \frac{A}{t^{\alpha}}\,dt$ konvergens integrál; mert

$$F(x)=\int_{a}^{x} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{a^{-\alpha+1}-x^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$$

és így az $\alpha>1$ lévén:

$$\int_{a}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \lim_{x=\infty} F(x) = \frac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1}.$$

Következésképpen az $\int\limits_a^\infty |f(t)|\,dt$, melynek integrándusa minden t értéknél kisebb az $\frac{A}{t^\alpha}$-nál, szintén konvergens és így az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ abszolut konvergens.

E kritérium egy speciális esete a következő: *Ha* $\lim\limits_{t=\infty} t^\alpha f(t)$ *véges és meghatározott szám, akkor az* $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ *konvergens* * (föltettük, hogy $\alpha>1$).

Ez esetben ugyanis, ha $\lim\limits_{t=\infty} t^\alpha f(t)=L$, és ha L' egy az L-nél nagyobb, pozitiv számot jelent, elmehetünk a t-vel olyan messze, hogy azon túl $|t^\alpha f(t)|$ mindenütt kisebb legyen L'-nél. Ha t ezen küszöbértéke N, akkor tehát az előbbi tételünk szerint $\int\limits_N^\infty |f(t)|\,dt$ konvergens és így az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ is konvergens.

Így például az $\int\limits_a^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ konvergens, mert $t^2 \cdot \frac{\sin t}{t^2} = \sin t$ és $|\sin t| \leq 1$, tehát teljesítve van a $|t^\alpha f(t)|<A$ minden t értékre nézve $(\alpha>1)$. $[\alpha=2,\ A=1.]$ A $\lim\limits_{t=\infty} t^2 f(t)$ most nem létezik, mert $\lim\limits_{t=\infty} \sin t$ határozatlan.

Második példa gyanánt említsük a következőt. Ha $f(t)$ a t-nek m-edfokú racionális egész függvénye és $\varphi(t)$ olyan $m+1$-nél magasabb fokú racionális egész függvény, melynek a-nál nagyobb vagy a-val egyenlő gyöke nincsen, akkor az

$$\int\limits_a^\infty \frac{f(t)}{\varphi(t)}\,dt$$

konvergens integrál. A $\varphi(t)$ ugyanis legalább $m+2$-edfokú egész függvény, azaz:

$$\varphi(t)=a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k \quad \text{és} \quad f(t)=b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m$$

$k \geq m+2$; tehát

$$\lim_{t=\infty} t^\alpha \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0,$$

ha $1<\alpha<2$.

Az integrál divergenciájára következtethetünk, ha $t\,f(t)$ bizonyos t-től kezdve mindig nagyobb valamely pozitiv A-nál [vagy kisebb

* Előbb nem mondtuk, hogy $\lim\limits_{t=\infty} t^\alpha f(t)$ létezik; csak éppen azt, hogy $|t^\alpha f(t)|$ mindig A-nál kisebb; de $\lim t^\alpha f(t)$ határozatlan is lehet.

a negativ B-nél]. Ez esetben ugyanis $f(t) > \frac{A}{t}$, de az

$$\int_a^\infty \frac{A dt}{t} = \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{A dt}{t} = \lim_{x=\infty} \log \frac{x}{a}$$

divergens, tehát az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ is divergens.

Ennek a speciális esete, hogy ha $\lim_{t=\infty} t f(t)$ létezik és zérustól különböző, akkor $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergens; mert ha $\lim_{t=\infty} t f(t) = L$ pozitiv szám, akkor elmehetünk a t-vel olyan messze, hogy $t f(t)$ mindig nagyobb legyen az $L' < L$ pozitiv számnál, tehát az előbbi szerint az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergens.

Összefoglalva ezen elégséges kritériumokat, azt látjuk, hogy az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens, ha $t^\alpha f(t)$ korlátos és $\alpha > 1$ (vagy ha $\lim_{t=\infty} t^\alpha f(t)$ véges); és divergens az integrál, ha $t f(t)$ mindig nagyobb egy, a 0-tól különböző számnál (vagy kisebb egy negativ számnál) (vagy $\lim_{t=\infty} t f(t)$ létezik és 0-tól különböző).

Annak eldöntésére, hogy az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens-e, legelőször mindig a $\lim_{t=\infty} t f(t)$-t keressük. Ha ez létezik és nem 0, akkor az integrál divergens. Ha e limes 0, akkor nem dönthetünk. Láttuk, hogy $\int_a^\infty \frac{dt}{t^{1+k}}$, ahol ($k > 0$ lévén) $\lim_{t=\infty} t \, . \, f(t) = 0$, konvergens, ellenben $\int_a^\infty \frac{dt}{t \log t}$, ahol $\lim_{t=\infty} t f(t)$ szintén 0, divergens.

Külön kiemeljük azt az esetet, amikor $\lim_{t=\infty} f(t)$ létezik; ha e limes értéke nem zérus, nyilván $\lim_{t=\infty} t f(t) = \infty$ vagy $-\infty$, aszerint amint $\lim_{t=\infty} f(t)$ pozitiv vagy negativ és így az integrál divergens. Tehát, ha az integrál konvergens és $\lim_{t=\infty} f(t)$ létezik, akkor

$$\lim_{t=\infty} f(t) = 0.$$

Ezeket a kriteriumokat még másként is értelmezhetjük. Említettük már, hogy ha $\lim_{t=\infty} f(t) = \lim_{t=\infty} \varphi(t) = 0$ és $\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)}$ 0-tól különböző véges szám, (vagy ha $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ bizonyos t-n túl mindig két, megegyező jelű szám közé esik), akkor azt mondjuk, hogy egyenlő rangú végtelen kicsinyekké lesznek. Ha pedig e limes: 0, akkor a számláló magasabb rendű végtelen kicsiny lesz, mint a nevező. Így pl., ha $\lim_{t=\infty} t^\alpha f(t) = A$, akkor $f(t)$ és $\frac{1}{t^\alpha}$ egyenlő rangú végtelen kicsinyekké lesznek, vagyis $f(t)$ végtelen kicsinységének rendje: α.

Eszerint tehát, ha $f(t)$ *végtelen kicsinységének rendje 1-nél nagyobb, akkor az* $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ *konvergens, ha pedig 1 vagy 1-nél kisebb, akkor divergens.*

Vannak azonban olyan függvények, melyeknél rendszámról nem szólhatunk. Így pl.: $\frac{1}{\log t}$ a végtelenben eltünik ugyan, de nincs olyan α rendszám, melyre nézve $\lim\limits_{t=\infty}\frac{t^\alpha}{\log t}$ 0-tól különböző véges szám lenne. A $\log t$ végtelenségének, illetőleg az $\frac{1}{\log t}$ végtelen kicsinységének nincs rendszáma. Ugyanígy áll a dolog $\log t$ bármely pozitiv hatványával. t-nek bármely kis pozitiv kitevőjű hatványa erősebben lesz végtelenné, mint $\log t$ bármely nagy pozitiv kitevőjű hatványa. Ha pedig t helyett $\log t$-t mondunk, akkor meg arra jutunk, hogy $\log t$ bármely kis pozitiv kitevőjű hatványa erősebben válik végtelenné, mint $\log\log t$ bármely nagy pozitiv kitevőjű hatványa s í. t.

Ezen szempontból tekintve az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ integrált, azt látjuk, hogy a konvergenicája attól függ, hogy az $f(t)$ a végtelenben miképpen viselkedik. Erre vonatkozólag néhány egyszerűbb példán akarjuk a viszonyokat feltüntetni.

Az $\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ convergens, ha $\alpha>1$ és divergens, ha $\alpha\leq 1$. $(\alpha>0)$ Az $\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t}$ divergens. Ha a nevező végtelenségi rendjét fokozzuk az által, hogy t-nek bármely kis pozitiv kitevőjű hatványával megszorozzuk, akkor az integrál rögtön konvergenssé válik. Az $\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}}$ konvergens, akárminő kis pozitiv szám legyen is az α.

Ha azonban a t-t $\log t$-vel szorozzuk, tehát olyan monoton növekvő függvénnyel, melynek végtelenségi rendje ninesen, akkor* $\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t\log t}$ még mindig divergens marad, mert hiszen:

$$\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t\log t} = \lim_{x=\infty}\int\limits_a^x \frac{dt}{t\log t} = \lim_{x=\infty}(\log\log x - \log\log a)$$

végtelen nagy. Ellenben, ha a t-t nem $\log t$-vel, hanem $\log t$ bármely 1-nél nagyobb kitevőjű hatványával szorozzuk, pl.: $(\log t)^\alpha$-val, akkor az

$$\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t(\log t)^\alpha}$$

integrálra jutunk, melyről kimutatjuk, hogy konvergens.

Ugyanis:

$$D(\log t)^{-k} = -\frac{k(\log t)^{-k-1}}{t},$$

tehát $k+1=\alpha$ téve $(\alpha>1)$:

$$D(\log t)^{-\alpha+1} = -\frac{\alpha-1}{t(\log t)^\alpha}$$

* a alsó határ most 1-nél nagyobb számot jelentsen, hogy $\log t$ pozitiv maradjon.

és így:
$$\int_a^\infty \frac{dt}{t(\log t)^\alpha} = \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{dt}{t(\log t)^\alpha} =$$
$$= \frac{-1}{\alpha-1} \lim_{x=\infty} \left[\frac{1}{x(\log x)^\alpha} - \frac{1}{a(\log a)^\alpha}\right] = \frac{1}{(\alpha-1)\,a(\log a)^\alpha}$$
véges szám; az integrál tehát konvergens.

Ezt a gondolatmenetet tovább is folytathatjuk. Rövidség kedveért vezessük be a következő jelöléseket:
$$\log\log t = \log_2 t,\ \log\log\log t = \log_3 t, \ldots \log\log\ldots\log t = \log_n t$$
és nevezzük e függvényeket 2-szer, 3-szor stb. iterált logarithmusnak.

Láttuk, hogy $\int_a^\infty \frac{dt}{t}$ divergens, de $\int_a^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}}$ convergens, ha $\alpha > 0$, bárminő kicsiny legyen is az α. Ha a nevezőt nem t^α-val, hanem az ennél alacsonyabb rendű $\log t$-vel szorozzuk, akkor is divergens marad az integrál, ellenben, ha $\log t$-nek bármely 1-nél nagyobb kitevőjű hatványával szorozzuk, akkor már konvergenssé válik. Az $\int_a^\infty \frac{dt}{t(\log t)^{1+\alpha}}$ ugyanis konvergens, ha $\alpha > 0$.

Az $\int_a \frac{dt}{t\log t}$ divergens, de ha a nevezőt $\log t$ bármely kis pozitív kitevőjű hatványával szorozzuk, az integrál konvergenssé válik. Hát ha nem $(\log t)^\alpha$-val, hanem az ennél összehasonlíthatlanul alacsonyabb rendű $\log_2 t$-vel, szorozzuk* a nevezőt? Vizsgáljuk meg az
$$\int_a^\infty \frac{dt}{t\log t\log_2 t}$$
integrált. A határozatlan integrál: $\log\log\log t$, tehát a fölírt integrál divergens. Ellenben, ha a nevezőben álló $t\log t$-t nem $\log_2 t$-vel, hanem ennek bármely, 1-nél nagyobb kitevőjű hatványával szorozzuk, akkor azt találjuk, hogy az
$$\int_a^\infty \frac{dt}{t\log t(\log_2 t)^{1+\alpha}}$$
konvergens. Az integrándus ugyanis, miként azonnal láthatjuk;
$$\frac{1}{t\log t(\log_2 t)^{1+\alpha}} = \frac{1}{-\alpha} D(\log_2 t)^{-\alpha},$$
tehát — ha $a > e$, azaz $\log_2 a > 0$ —, akkor
$$\int_a^\infty \frac{dt}{t\log t(\log_2 t)^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha}(\log_2 a)^{-\alpha}$$
konvergens integrál.

* $\log_2 t = \log\log t$ végtelenné válik ugyan a t-vel, de alacsonyabb rendűvé, mint $\log t$ bármely kis pozitiv kitevőjű hatványa. Ugyanis
$$\lim_{t=\infty} \frac{\log\log t}{(\log t)^\alpha} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t\log t} : \frac{\alpha(\log t)^{\alpha-1}}{t} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{\alpha(\log t)^\alpha} = 0.$$
Éppen így mutatható meg, hogy $\log_3 t$ alacsonyabb rendű végtelenné válik, mint $\log_2 t$ bármely kis pozitiv kitevőjű hatványa.

Általában azt tapasztaljuk, hogy ez az integrál:

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t \log t \log_2 t \log_3 t \ldots \log_n t}$$

divergens, mert az integrándus: $D \log_{n+1} t$, ellenben az

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t \log t \log_2 t \ldots (\log_n t)^{1+\alpha}}$$

konvergens, ha $\alpha > 0$, mert az integrándus: $-\frac{1}{\alpha} D(\log_n t)^{-\alpha}$. [Itt $a > e^{e^{\cdot^{\cdot^{e}}}}$, ahol e mint exponens n—2-szer szerepel; mert ha ennél kisebb lenne, akkor már $\log_k(t)$ az a helyen negativ lenne $(k < n)$ és így a következő $\log_{k+1}(t)$ ezen az a helyen nem volna valós].

[5. **Az Ermakoff-féle kriterium.** *Ha $f(t)$ pozitiv minden t értéknél (legalább egy bizonyos t-től kezdve) és egy bizonyos M-től kezdve, mindig:*

$$e^t f(e^t) < kf(t),$$

ahol $k < 1$, akkor az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens. Ha pedig *bizonyos M-től kezdve*

$$e^t f(e^t) > f(t),$$

akkor $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergens.

Ez az Ermakoff-féle kriterium. A tételt a következőképpen bizonyíthatjuk be. Az $f(t)$ pozitiv, tehát az $\int_a^x f(t)\,dt$ integrál az x-el növekszik. Így tehát az integrál konvergenciája be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy $\int_a^x f(t)\,dt$ mindig kisebb egy véges A számnál.

x-et vegyük M-nél, sőt e^M-nél is nagyobbra. Az $\int_a^x f(t)\,dt$ integrált két részre bontjuk. Az első $a \ldots M$ szakaszra, a második $M \ldots x$-re vonatkozzék.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^M f(t)\,dt + \int_M^x f(t)\,dt.$$

Elégséges a második rész vizsgálata. Jelöljük ezt az integrált, amely az x monoton növekvő függvénye: $F(x)$-el. És vezessük be a $t = e^u$ szubsztitucióval a t helyett az u-t. Az új határok $\log M$ és $\log x$ lesznek; tehát:

$$F(x) = \int_M^x f(t)\,dt = \int_{\log M}^{\log x} e^u f(e^u)\,du.$$

A jobboldali integrál megint két részre bontható: a $\log M \ldots M$ és $M \ldots \log x$ szakaszokban vett integrálokra:

$$\int_{\log M}^{\log x} e^u f(e^u)\,du = \int_{\log M}^{M} e^u f(e^u)\,du + \int_M^{\log x} e^u f(e^u)\,du.$$

Az elsőt jelöljük c-vel. A másodiknál vegyük tekintetbe, hogy ha $t > M$, akkor $e^t f(e^t) < kf(t)$; tehát

$$\int_M^{\log x} e^t f(e^t)\,dt < k\int_M^{\log x} f(t)\,dt.$$

A jobboldali integrál ugyanolyan alakú, mint az $F(x)=\int_M^x f(t)\,dt$; a különbség csak az, hogy az x felső határ helyett $\log x$ áll; tehát az értéke: $F(\log x)$ és így:

$$F(x) < c + kF(\log x). \qquad \alpha)$$

Ha ebben az egyenlőtlenségben, mely fönnáll minden e^M-nél nagyobb x-re, x-et az e^{e^M}-nél is nagyobbra vesszük, akkor fönnáll ez az egyenlőtlenség akkor is, ha x helyett $\log x$-et tesszük, vagyis

$$F(\log x) < c + kF(\log\log x)$$

és így:

$$F(x) < c + kc + k^2F(\log\log x)$$

és ha x még az $e^{e^{e^M}}$-nél is nagyobb, akkor x helyett $\log\log x$ is tehető az $\alpha)$-ban, vagyis:

$$F(\log\log x) < c + kF(\log\log\log x)$$

és így:

$$F(x) < c + kc + k^2c + k^3F(\log\log\log x).$$

Ezt az eljárást folytatva, n lépés után azt kapjuk, hogy:

$$F(x) < c\,[1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}] + k^nF[\log_n x], \qquad \beta)$$

ha x akkora, hogy még a $\log_n x$ is nagyobb M-nél.

Ebből az egyenlőtlenségből azt fogjuk következtetni, hogy $F(x)$, mely monoton növekvő, egyúttal korlátos, azaz $\lim\limits_{x=\infty} F(x)$ véges és meghatározott érték. Ugyanis a jobboldalon álló első tag mindig kisebb $\frac{c}{1-k}$-nál, mert $k<1$.

Most megmutatjuk, hogy akármekkora legyen is az x, mindig választhatjuk az n-et olyan nagyra, hogy $k^nF[\log_n x]$ egy állandó véges számnál kisebb legyen.

Ha ugyanis x egy tetszés szerinti, e^M-nél nagyobb szám, akkor mindig két ilyen szám közé esik:

$$e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^M}}}}} \quad \text{és} \quad e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^M}}}}},$$

ahol az egyiknél p-szer, a másiknál $p+1$-szer fordul elő az e a fölfelé haladó exponensekben; azaz

$$M < \log_{p+1} x < e^M.$$

Tehát akármekkora is legyen az x, ha csak e^M-nél nagyobb, találhatunk olyan n rendszámot, hogy

$$M < \log_n x < e^M,$$

Ha az $F(e^M)$ fix számot α-val jelöljük, akkor tehát a $\beta)$ szerint:

$$F(x) < \frac{c}{1-k} + \alpha,$$

vagyis valóban létezik olyan fix $A = \frac{c}{1-k} + \alpha$ szám, melynél $F(x)$ mindig kisebb és így: a $\lim_{x=\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ véges, az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens.

Így például az $\int_a^\infty \frac{dt}{t(\log t)^{1+\alpha}}$ esetében:

$$f(t) = \frac{1}{t(\log t)^{1+\alpha}}$$

és

$$e^t f(e^t) = \frac{e^t}{e^t \cdot t^{1+\alpha}} = \frac{1}{t^{1+\alpha}};$$

és bármely kis k számot vegyünk is, elég nagy t-re már

$$\frac{1}{t^{1+\alpha}} < \frac{k}{t(\log t)^{1+\alpha}}, \quad \text{mert} \quad \lim_{t=\infty} \frac{(\log t)^{1+\alpha}}{t^\alpha} = 0;$$

tehát $e^t f(e^t) < k f(t)$ és így az integrál konvergens.

Az Ermakoff-kriterium másik része így hangzik: *Ha bizonyos M-től kezdve mindig $e^t f(e^t) > f(t)$, akkor az $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergens.*

Legyen megint

$$F(x) = \int_M^x f(t)\,dt \qquad (x > e^M)$$

és tegyük $t = e^u$, miből:

$$F(x) = \int_{\log M}^{\log x} e^u f(e^u)\,du = \int_{\log M}^{M} e^t f(e^t)\,dt + \int_M^{\log x} e^t f(e^t)\,dt.$$

A jobboldali első integrált jelöljük c-vel, a másodiknál pedig vegyük tekintetbe, hogy $e^t f(e^t) > f(t)$, tehát:

$$\int_M^{\log x} e^t f(e^t)\,dt > \int_M^{\log x} f(t)\,dt.$$

Ez utóbbi integrál az $F(x)$-től csakis abban különbözik, hogy a felső határa: $\log x$; tehát ezen integrál: $F(\log x)$ és így:

$$F(x) > c + F(\log x).$$

Ha ezen egyenlőtlenségben x helyett $\log x$-et teszünk [amit tehetünk, ha $x > e^{e^M}$], akkor:

$$F(\log x) > c + F(\log \log x)$$

és így:

$$F(x) > 2c + F(\log \log x);$$

ha ezt az eljárást így folytatjuk, n lépés után arra jutunk, hogy:

$$F(x) > nc + F[\log_n x].$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $F(x)$ minden határon túl növekszik, vagyis, hogy $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergens.

Így pl., ha $f(t) = \frac{1}{t \log t}$, akkor $e^t f(e^t) = \frac{1}{t}$ és bizonyos M-től kezdve $\frac{1}{t} > \frac{1}{t \log t}$, mert hiszen

$$\lim_{t=\infty}\left(\frac{1}{t} : \frac{1}{t\log t}\right) = \infty,$$

az $\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t\log t}$ tehát divergens.

Az Ermakoff-kriterium még jelentékenyen kibővíthető. Így pl.: ha $f(t)$ pozitiv és bizonyos M-től kezdve $e^{e^t} . e^t f(e^{e^t}) < kf(t)$ és $k < 1$, akkor $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens és ha $e^{e^t} e^t f(e^{e^t}) > f(t)$, akkor $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ divergens. Ezen kibővített kriterium éppen úgy bizonyítható be, mint az eredeti.

Sőt még sokkal általánosabb alakban is fogalmazható e kriterium. Ha ugyanis $\varphi(t)$ monoton növekvő függvény, melynek inverz függvénye: $\psi(t)$ enyhébben növekvő, mint t [úgy, hogy minden pozitiv t-re: $\frac{\psi(t)}{t} < \alpha$, ahol $\alpha < 1$], akkor az általánosított Ermakoff-kriterium így fejezhető ki:

Ha $k < 1$ és $\varphi'(t) f[\varphi(t)] < kf(t)$, akkor $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ konvergens és ha $\varphi'(t) f[\varphi(t)] > f(t)$, akkor az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ divergens.

Ugyanis $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$-ben $t = \varphi(u)$-t téve:

$$F(x) = \int\limits_{\psi(a)}^{\psi(x)} \varphi'(u) f[\varphi(u)]\,du = \int\limits_{\psi(a)}^{a} \varphi'(u) f[\varphi(u)]\,du + \int\limits_a^{\psi(x)} \varphi'(t) f[\varphi(t)]\,dt$$

és ha az első tagot c-vel jelöljük, a második tagra pedig a feltételt alkalmazzuk, akkor:

$$F(x) < c + kF[\psi(x)]$$

és ha ezen egyenlőtlenségben x helyett $\psi(x)$-et tesszük, akkor

$$F[\psi(x)] < c + kF[\psi\psi(x)],$$

vagyis $[\psi\psi(x) = \psi^{(2)}(x)$ téve]

$$F(x) < c + kc + k^2 F[\psi^{(2)}(x)]$$

és n lépés után:

$$F(x) < c(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}) + k^n F[\psi^{(n)}(x)].$$

Az $F(x)$ az x-szel együtt nő, de a jobboldal első tagja kisebb $\frac{c}{1-k}$-nál; a második tag pedig, ha n-et kellően választjuk, mindig kisebb egy fix véges számnál, mert $\psi(x) < \alpha x$, $\psi^{(2)}(x) < \psi(\alpha x) < \alpha^2 x, \ldots$ $\psi^{(n)}(x) < \alpha^n x$, tehát ha n elég nagy, (például: $n > \frac{\log A - \log x}{\log \alpha}$), akkor $\psi^{(n)}(x) < A$, ahol A fix szám, tehát $F(x)$ korlátos és így $\lim\limits_{x=\infty} F(x)$ véges. Ezzel az $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ konvergenciáját kimutattuk. Az eljárás ugyanaz volt, mint a $\varphi(t) = e^t$ esetében. A kriterium második része is éppen úgy tárgyalható, mint a $\varphi(t) = e^t$ esetében.]

[6. **Egy új konvergencia-kriterium.** *Ha $f(x)$ pozitiv és található oly $\varphi(x)$ pozitiv függvény és olyan k pozitiv szám, melyekre nézve:*

$$D[f(x)\varphi(x)] < -kf(x),$$

akkor az $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ konvergens. Ha pedig található olyan $\varphi(x)$ pozitiv függvény, *mellyel szorozva $f(x)$-et, az $f(x)\varphi(x)$ egy 0-tól különböző számon felül maradó függvény és ha $\int_a^\infty \frac{dx}{\varphi(x)}$ divergens, akkor $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is divergens.*

A tétel első része a következőképpen bizonyítható be: A fölírt egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\int_a^x f(x)\,dx < -\frac{1}{k}\int_a^x D[f(x)\varphi(x)]\,dx = -\frac{1}{k}[f(x)\varphi(x) - f(a)\varphi(a)],$$

tehát:

$$\int_a^x f(x)\,dx < \frac{f(a)\varphi(a)}{k}.$$

Minthogy pedig a baloldali integrál az x-szel monoton nő és mindig kisebb marad az $\frac{f(a)\varphi(a)}{k}$-nál, tehát $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergens.

A tétel második része is igen egyszerűen bizonyítható be. Jelöljük az $f(x)\varphi(x)$-et $\psi(x)$-szel. $\psi(x)$ tehát föltételünk szerint bizonyos x-től kezdve mindig egy 0-tól különböző, pozitiv számnál nagyobb értékű függvény és így megállapítható egy olyan poz. A szám, melynél, bizonyos x-től kezdve, mindig nagyobb. Így tehát ezen x-től kezdve: $f(x)\varphi(x) > A$, miből: $f(x) > \frac{A}{\varphi(x)}$. De föltételünk szerint $\int_a^\infty \frac{dx}{\varphi(x)}$ divergens, tehát $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is divergens.

E kriterium alkalmazása céljából vizsgáljuk meg az

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t\log t\log_2 t\ldots(\log_n t)^{1+\alpha}}$$

integrált, ha $\alpha > 0$. Itt tehát

$$f(t) = \frac{1}{t\log t\ldots(\log_n t)^{1+\alpha}}.$$

Válasszuk $\varphi(t)$ gyanánt a $t\log t\log_2 t\ldots\log_n t$ pozitiv függvényt [bizonyos M-től kezdve pozitiv]. $f(t)\varphi(t) = \frac{1}{(\log_n t)^\alpha}$ és:

$$D[f(t)\varphi(t)] = -\frac{\alpha}{t\log t\ldots(\log_n t)^{1+\alpha}} = -\alpha f(t),$$

tehát, ha $k < \alpha$ pozitiv számnál, akkor a

$$D[f(t)\varphi(t)] < -kf(t)$$

teljesítve van, tehát a szóban forgó integrál konvergens.]

7. **Az integrándus végtelenné válik.** Eddigelé csakis olyan integrálokkal foglalkoztunk, melyeknél az integrándus az integráció egész szakaszában véges volt. Megeshetik, hogy az $f(t)$ az ab szakaszban levő c helyen, vagy a szakasz határain végtelenné válik. Nézzük, miképpen lehet az integrál fogalmát erre az esetre is kiterjeszteni. Tegyük fel, hogy $f(t)$ a b helyen végtelenné válik. Mit értsünk az

$$\int^b f(t)\,dt$$

kifejezésen? Föltesszük, hogy az $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ integrál véges és meghatározott, ha $a<x<b$, azaz, hogy az $f(t)$ az $a \ldots x$ intervallumban integrálható. Ha már most az

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$$

-nek a b helyen van meghatározott limesze, ha az x a b-hez konvergál a kisebb számokon keresztül, vagyis az $F(x)$-nek a b helyen létezik baloldali limesze, akkor definicióképpen megállapítjuk, hogy

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=\lim_{x=b}\int\limits_a^x f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(t)\,dt.$$

[Ez valóban általánosítása az integrál eredeti fogalmának, mert ha $f(t)$ a b helyen is véges és az ab intervallumban integrábilis, akkor $\lim\limits_{x=b}\int\limits_a^x f(t)\,dt$ csakugyan egyenlő $\int\limits_a^b f(t)\,dt$-vel, mert az integrál a felső határ folytonos függvénye; ha tehát x a b-hez konvergál, akkor az $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ függvény az $F(b)$-hez, azaz $\int\limits_a^b f(t)\,dt$-hez konvergál.]

Ha c hely az ab szakaszban van és $f(t)$-nek a c nem kivételes helye, akkor általános tételeink értelmében:

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=\int\limits_a^c f(t)\,dt+\int\limits_c^b f(t)\,dt.$$

Már most, ha c helyen az $f(t)$ végtelenné válik, ellenben úgy az $a \ldots c-\varepsilon$, mint az $c+\varepsilon' \ldots b$ szakaszban $f(t)$ integrábilis, bárminő kis pozitiv számok legyenek is az ε és ε', akkor megint definicióképpen megállapítjuk, hogy:

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt+\lim_{\varepsilon'=0}\int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(t)\,dt.$$

Meglehet, hogy nincs mindenik tagnak külön határértéke, ellenben az összegnek van limese, ha ε'-t úgy választjuk, hogy $\varepsilon'=\varepsilon$ legyen. Ilyenkor a

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(t)\,dt\right]$$

tekinthető az $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ általánosított integrálnak. Ezt az előbbi általánosabb esettől megkülönböztetésül gyakran az integrál *főértékének* nevezzük.

[Így például az $\frac{1}{x}$ a 0 helyen végtelenné válik; az $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$ tehát az első értelmezés szerint:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\lim_{\varepsilon'=0}\int\limits_{\varepsilon'}^{+1}\frac{dx}{x}\cdot$$

Tegyük az első integrálban $x=-y$; akkor ez $\int\limits_{+1}^{\varepsilon}\frac{dy}{y}=\log\varepsilon-\log 1=\log\varepsilon$ lesz; és $\lim\limits_{\varepsilon=0}\log\varepsilon$: végtelen.

Éppen így a második integrál is végtelenné válik; tehát az integrálnak így nincs értelme; de

$$\lim_{\varepsilon=0}\Big[\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\varepsilon}^{+1}\frac{dx}{x}\Big]=\lim_{\varepsilon=0}\Big[\int\limits_{1}^{\varepsilon}\frac{dy}{y}+\int\limits_{\varepsilon}^{+1}\frac{dx}{x}\Big]=\lim_{\varepsilon=0}[\log\varepsilon-\log\varepsilon]=0.]$$

Ezt a definiciót arra az esetre állítottuk fel, midőn $f(t)$ a c helyen végtelenné válik. De alkalmazható egyéb esetben is. Megeshetik ugyanis, hogy az $f(t)$ olyan, hogy az ab intervallumban nem integrálható; de ha kivesszük ebből az intervallumból a $c-\varepsilon \ldots c+\varepsilon$ kis szakaszt, bárminő kicsiny legyen is az ε pozitiv szám, akkor integrábilis,* vagyis az $\int\limits_a^b f(t)\,dt$-nek nincs ugyan az integráció eredeti értelmezése szerint jelentése, de úgy az $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt$, mint $\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(t)\,dt$-nek van értelme, akárminő kicsiny legyen is az ε, akkor definicióképpen az $\int\limits_a^b f(t)\,dt$-nek tulajdoníthatunk értelmet, ha létezik ez a két határérték;

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt \quad \text{és} \quad \lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt,$$

és pedig akkor

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt+\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt,$$

sőt, ha az egyes limeszek nem léteznek, de az összegnek van limesze, akkor is azt mondjuk, hogy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon=0}\Big[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\Big].$$

Ha $f(t)$ nemcsak egyetlen helyen, hanem több helyen válik végtelenné, például a $c_1, c_2, \ldots c_k$ helyeken, az integrál főértékén akkor is a következő határértéket értjük:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int\limits_a^{c_1-\varepsilon} f(t)\,dt+\int\limits_{c_1-\varepsilon}^{c_2+\varepsilon} f(t)\,dt+\cdots+\int\limits_{c_k-\varepsilon}^{b} f(t)\,dt\right].$$

8. A konvergencia és divergencia kriteriumai. Az $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ integrált abban az esetben, midőn $f(t)$ a b helyen válik végtelenné, így értel-

* Ha az $f(x)$ a $c-\varepsilon\ldots c+\varepsilon$ szakaszban korlátos, akkor korlátos minden, c közepű kisebb szakaszban is és akkor a Riemann-féle integrál-kriterium szerint az $f(x)$ az egész ab szakaszban integrábilis volna. Igy tehát a szóban forgó eset csakis akkor fordulhat elő, ha a c pont tetszés szerinti kis környezetében $f(x)$ bármely nagy M-nél is nagyobbá válik, a nélkül azonban, hogy $\lim f(x)=\infty$ volna. (Ilyen például a $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}$ függvény az $x=0$ helyen.)

meztük: $\lim\limits_{x=b}\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Kérdés, mi a szükséges és elégséges föltétele e határérték létezésének? A du Bois-Reymond-féle kriteriuma* annak, hogy a $\lim\limits_{x=b} F(x)$ létezzék, az, hogy bármely kis ε-hoz tartozzék oly ξ küszöbszám, hogy ha $b > x'' > x' > \xi$, akkor:

$$|F(x') - F(x'')| < \varepsilon,$$

bárminő két szám legyen is az x' és x'' (l. 56. lapon), azaz:

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Ha $f(t)$ az $a \ldots t < b$ szakaszban integrálható és a b helyen úgy válik végtelenné, hogy

$$|(b-t)^\alpha f(t)|$$

minden, b-nél kisebb t értékre kisebb egy bizonyos véges M-nél és $\alpha < 1$, akkor az $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ integrál konvergens. Ugyanis, ha $a < x' < x'' < b$, akkor az $x' \ldots x''$ közben $|f(t)| < \frac{M}{(b-t)^\alpha}$ és így:

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < M\int\limits_{x'}^{x''} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{M}{-\alpha+1}\left[(b-x')^{-\alpha+1} - (b-x'')^{-\alpha+1}\right],$$

vagyis kisebb, mint: $\frac{M}{1-\alpha}(b-x')^{1-\alpha}$.

A ξ-t oly közel választhatjuk a b-hez, hogy $\frac{M}{1-\alpha}(b-\xi)^{1-\alpha} < \varepsilon$ legyen. Ezen ξ-től kezdve mindig igaz lesz, hogy:

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

ha $\xi < x' < x'' < b$, bárminő számok legyenek is x' és x'', vagyis $\lim\limits_{x=b}\int\limits_a^x f(t)\,dt$ létezik. az $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ konvergens.

Ha pedig $f(t)$ a b helyen úgy válik végtelenné, hogy $(b-t)f(t)$ bizonyos, b közelében levő t-től kezdve mindig nagyobb abszolut értékű, mint M, ($M > 0$) akkor az

$$\int\limits_a^b |f(t)|\,dt$$

divergens [és így, ha $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ konvergens is, abszolut konvergens nem lehet].

* *P. du Bois Reymond:* Die allgemeine Functionentheorie, Tübingen 1882. p. 232.

Ugyanis ez esetben, ha az $|f(t)|(b-t)>M$ feltétel pl. k-tól kezdve ($a<k<b$) teljesül és ha $k<x<b$, akkor:

$$\int_k^x |f(t)|dt > \int_k^x \frac{M}{b-t}dt = M[\log(b-k) - \log(b-x)].$$

De ha x a b-hez konvergál, akkor $-\log(b-x)$ végtelenné válik és így $\lim\limits_{x=b}\int_k^x |f(t)|dt$ is végtelenné lesz, az $\int_a^b |f(t)|dt$ divergens. Ha $f(t)$ pozitiv függvény, akkor az $\int_a^b f(t)dt$, mely az $\int_a^b |f(t)|dt$-vel megegyező, divergens, ha pedig $\int_a^b f(t)dt$ konvergens, nem lehet abszolut konvergens.

E kritériumokat legtöbbször olyankor alkalmazzuk, midőn $\lim\limits_{t=b}(b-t)^\alpha f(t)$ véges és meghatározott számérték. Ha $\alpha<1$ és $\lim\limits_{t=b}(b-t)^\alpha f(t)=h$, akkor* a t-vel oly közel juthatunk a b-hez, hogy onnan kezdve mindig $|(b-t)^\alpha f(t)|<h'$ legyen, ha $h'>h$; tehát az előbbi föltétel van teljesítve és így az $\int_a^b f(t)dt$ konvergens. Ha pedig $\alpha\geq 1$ és $\lim\limits_{t=b}(b-t)^\alpha f(t)=h$, ($h \neq 0$) akkor meg választunk egy h-nál kisebb abszolut értékű h' számot és a limesz létezése folytán oly közel férkőzünk a b-hez, hogy onnan kezdve mindig teljesül a $(b-t)|f(t)|>h'$, tehát ismét az előbbi tételünk szerint: $\int_a^b |f(t)|dt$ divergens. De ez esetben még többet is mondhatunk, t. i.: ha $\lim\limits_{t=b}(b-t)^\alpha f(t)=h$ pozitiv (negativ), akkor ebből az is következik, hogy $f(t)$ a b közelében mindig pozitiv (negativ), tehát nemcsak az abszolut értékkel alkotott $\int_a^b |f(t)|dt$, hanem az eredeti $\int_a^b f(t)dt$ is divergens.

Ezen eseteket összefoglalva, azt látjuk, *hogy ha*

$$\lim_{t=b}(t-b)^\alpha f(t)$$

létezik és $\alpha<1$, *akkor az* $\int_a^b f(t)dt$ *konvergens, ha pedig* $\alpha\geq 1$ *és a limesz nem* 0, *akkor az integrál divergens*. [Természetesen föltettük, hogy az $f(t)$ az $a\ldots x$ szakaszban, ha $x<b$, integrálható.]

Amit a felső határra vonatkozólag megállapítottunk, ugyanaz érvényes az alsó határra is és nagyon könnyen kiterjeszthető arra

* Természetesen mindig baloldali limes értendő. h pozitivnak gondolható (vagy 0), mert ellenkező esetben $-f(t)$-ről szólhatunk.

az esetre is, midőn $f(t)$ az $a \ldots b$ szakasz valamely közbenső c helyén válik végtelenné. Ez esetben is azt látjuk, hogy ha $\lim\limits_{t=c}(c-t)^{\alpha} f(t)$ létezik és $\alpha<1$, vagyis az $f(t)$ a c helyen az elsőnél alacsonyabb rendű végtelenné válik, akkor az $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ konvergens, ha azonban $\alpha \geq 1$ és a szóban forgó limesz nem 0, vagyis $f(t)$ végtelenségének rendszáma 1 vagy 1-nél magasabb, akkor $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ divergens.

Igy például az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ az $x=1$ helyen végtelenné válik, de

$$\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

és így
$$\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

[csakis a baloldali limes veendő tekintetbe], tehát az $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ konvergens. Értéke: $[\arc\sin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

Ellenben az $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ divergens, mert:

$$\lim_{x=1}(1-x) \cdot \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x=1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}. -$$

X. FEJEZET.

HATÁROZOTT INTEGRÁLLAL ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNY.

1. A folytonosság vizsgálata. Ha az integrándus pl.: e^{yx} és az integrál: $\int_0^1 e^{yx}dx$, akkor az integrál értéke: $\frac{e^y-1}{y}$. Ez az integrál, miként látjuk, az y függvénye. Ha általában az integrándus egy y parametert (mely változó mennyiség, de nem a szóban forgó integráloperáció szempontjából változó) tartalmaz, akkor az integrál rendszerint ezen y függvénye. Így az integrál sokszor a függvény kényelmes előállítására is szolgálhat. Az ilyen integrálokat akarjuk vizsgálni főként abból a szempontból, hogy az általuk előállított függvény mikor folytonos, mikor és hogyan differenciálható stb. Az integrándus tehát ez esetekben voltaképpen két változónak, az x és y-nak függvénye gyanánt tekintendő, azért az olvasó, ha még eddig nem tette, a többváltozós függvényekre vonatkozó elemi tételeket olvassa előbb át.

Legyen tehát az integrándus $f(x, y)$, melyről föltesszük, hogy ha y az $\alpha \ldots \beta$ szakaszból vétetik, akkor az $f(x, y)$ az $a \ldots b$ közben x szerint integrálható. Ez azt jelenti, hogy ha y helyébe az $\alpha \ldots \beta$ szakasz tetszés szerinti γ számát tesszük, akkor az $\int_a^b f(x, \gamma)\, dx$ véges és meghatározott számérték. Ha már most y az $\alpha \ldots \beta$ számköz helyeit jelenti, akkor minden egyes helyhez tartozik egy $\int_a^b f(x, y)\, dx$ számérték. Ha ezen értékrendszert $F(y)$-nal jelöljük, akkor tehát az $\int_a^b f(x, y)\, dx$ integrál az $F(y)$ függvény értelmezésére szolgál:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Ha $f(x, y)$ az (x, γ) helyen folytonos, bárminő számértéke legyen is az x-nek az ab szakaszban (a határokat is beleértve), *akkor az $F(y)$ is folytonos az $y=\gamma$ helyen.*

Föltételünk szerint $f(x, y)$ folytonos, ha x, y az $y=\gamma$ egyenes bármely pontját jelenti, mely az $x=a$ és $x=b$ közé esik. Ekkor (l. II. kötet) az $y=\gamma$ egyenes szóban forgó szakasza mentén egyenletesen folytonos az $f(x, y)$, azaz bármely kis ε-hoz található olyan σ véges küszöbszám, hogy az $y=\gamma$ egyenes e szakaszának bármelyik pontja körül σ rádiussal leírt körőcske belsejébe eső tetszés szerinti két $x'y'$, $x''y''$ helyen

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Válasszuk az adott ε helyett $\frac{\varepsilon}{b-a}$-t és határozzuk meg az ehhez tartozó σ küszöbszámot és legyen $|\Delta\gamma|<\sigma$. Ekkor:

$$F(\gamma+\Delta\gamma)=\int_a^b f(x,\gamma+\Delta\gamma)\,dx$$

és így az $F(y)$ növekménye, mely a γ parameterérték $\Delta\gamma$ nagyságú növeléséből ered:

$$F(\gamma+\Delta\gamma)-F(\gamma)=\int_a^b [f(x,\gamma+\Delta\gamma)-f(x,\gamma)]\,dx.$$

De a zárójelben álló kifejezés absz. értéke minden, itt szóba jövő x érték mellett $\frac{\varepsilon}{b-a}$-nál kisebb és így:

$$|F(\gamma+\Delta\gamma)-F(\gamma)|<\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx=\varepsilon.$$

Ezzel kimutattuk, hogy az $F(y)$ az $y=\gamma$ *helyen folytonos*. Ha pedig az $f(x, y)$ az $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$ egész derékszögű négyszögben folytonos, akkor $F(y)$ is folytonos minden $\alpha<y<\beta$ helyen.

Megjegyezzük, hogy az $y=\gamma$ egyenes mentén nem is kell az $f(x, y)$-nak mindenütt folytonosnak lennie. Megeshetik, hogy ezen egyenes mentén véges számú helyen véges nagyságú szakadása van. Ha például az $x=c$ helyen van ilyen szakadása, akkor a c helyet egy tetszés szerinti kis közbe foglaljuk és az $\int_a^b f(x,\gamma)\,dx$ integrált így bontjuk fel:

$$\int_a^b f(x,\gamma)\,dx=\int_a^{c-\eta} f(x,\gamma)\,dx+\int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x,\gamma)\,dx+\int_{c+\eta}^b f(x,\gamma)\,dx$$

és

$$\int_a^b f(x,\gamma+\Delta\gamma)\,dx-\int_a^b f(x,\gamma)\,dx=\int_a^{c-\eta}[f(x,\gamma+\Delta\gamma)-f(x,\gamma)]\,dx+$$

$$+\int_{c-\eta}^{c+\eta}[f(x,\gamma+\Delta\gamma)-f(x,\gamma)]\,dx+\int_{c+\eta}^{b}[f(x,\gamma+\Delta\gamma)-f(x,\gamma)]\,dx.$$

Az első és harmadik integrál az előbbiek szerint végtelen csekéllyé lesz a $\Delta\gamma$-val. Ha már most az $f(x, y)$ mindenütt véges, tehát amennyiben ugrása van is egyes helyeken, sohasem szünik meg véges lenni, vagyis megadható egy bizonyos M véges szám, melynél mindig kisebb absolut értékű, akkor a $c-\eta\ldots c+\eta$ közben is $|f(x,\gamma+\Delta\gamma)-f(x,\gamma)|<2M$ és így a második integrál absolut értéke $4M\eta$-nál kisebb; tehát η-val elenyésző csekéllyé válik.

Ha az $y=\gamma$ egyenes mentén véges számú ilyen szakadó helye van is az $f(x, y)$-nak, azért az $F(y)$ a γ helyen folytonos.

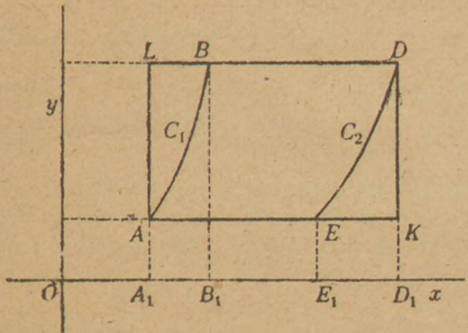
Ebből az is következik, hogy ha az $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$ által határolt derékszögű négyszögben egy C görbe mentén (mely görbének minden egyenessel csak véges számú metszéspontja lehet) akár e görbe egyes pontjaiban, akár a görbe minden pontján van is az $f(x, y)$-nak véges ugrása [a $z=f(x, y)$ felület meredeken szakad le], azért $F(y)$ mégis folytonos, ha egyébként az $f(x, y)$ mindenütt folytonos. Mert hiszen az $y=\gamma$ egyenes mentén csakis véges számú szakadó hely van (ezen egyenesnek a C görbével való metszéspontjai).

Eddig csak olyan integrálról szóltunk, melynek határai: a, b állandó számértékek voltak. Meglehet, hogy a és b az y függvényei. Legyen

$$a=\varphi(y),\quad b=\psi(y).$$

Képzeljük az $x=\varphi(y)$ és $x=\psi(y)$ görbék által ábrázolva e függvényeket. E görbéknek, mondjuk C_1 és C_2-nek csakis azon szakaszai jönnek tekintetbe, amelyek az $y=\alpha$ és $y=\beta$ párhuzamosak közé esnek. Az integrál tehát, amellyel foglalkoznunk kell:

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx,$$



97. ábra.

ha $\alpha < y < \beta$. Ezen integrál vizsgálatát azonnal visszavezethetjük az előbbiére. Képzeljünk az $f(x, y)$ helyett egy másik $f_1(x, y)$ függvényt, mely a következőképpen van meghatározva:

Az $AKDL$ derékszögű négyszögben legyen az $f_1(x, y)$ meghatározva oly módon, hogy a C_1 és C_2 görbék közötti $AEDB$ belsejében mindenütt megegyezzék az $f(x, y)$-al; a kívül levő ABL és DEK részekben mindenütt 0 legyen. Így tehát az $f_1(x, y)$-nak a C_1 és C_2 mentén van csak véges szakadása, tehát az

$$F(y) = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x, y)\, dx,$$

ahol $a_1 = OA_1 = \varphi(\alpha)$ és $b_1 = OD_1 = \psi(\beta)$, az előbbiek szerint az y-nak folytonos függvénye, ha $\alpha < y < \beta$. De ez az integrál az $f_1(x, y)$ ilyen értelmezésénél megegyezik a szóban forgó $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$ integrállal; tehát, ha $f(x, y)$ a C_1 és C_2 és $y=\alpha$, $y=\beta$ által határolt négyszögszerű területben folytonos (vagy csak véges számú görbe mentén van véges szakadása), akkor az

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$$

is folytonos.

Ezt az esetet, melynél az integrál határai az y parameter függvényei, közvetlenül is vissza vezethetjük arra az esetre, midőn a határok állandók. Ha ugyanis az integrált a következő szubsztitucióval transzformáljuk;

$$u = a + [x - \varphi(y)] \frac{a - b}{\varphi(y) - \psi(y)},$$

azaz:

$$x = \varphi(y) + (u - a) \frac{\varphi(y) - \psi(y)}{a - b}$$

tesszük, akkor, ha $x=\varphi(y)$, $u=a$; ha pedig $x=\psi(y)$, akkor $u=b$; tehát az

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$$

integrál átmegy ebbe:

$$\int_a^b f\left[\varphi+(u-a)\frac{\varphi-\psi}{a-b}, y\right]\frac{\varphi-\psi}{a-b}\, du$$

és ha az $f\left[\varphi+(u-a)\frac{\varphi-\psi}{a-b}, y\right]\frac{\varphi-\psi}{a-b}$ függvényt egyszerűen $\Phi(u, y)$-al jelöljük, akkor

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx = \int_a^b \Phi(u, y)\, du.$$

2. A határok nem végesek. Eddigelé olyan határozott integrált vizsgáltunk, amelynek integrándusa az y parameter függvénye, de a határai végesek voltak. Az ilyen integrálról megmutattuk, hogy ha $f(x, y)$ integrándus az

$$a \leq x \leq b, \quad \alpha < y < \beta$$

által ábrázolt derékszögű négyszög belsejében mindenütt folytonos, akkor az

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = F(y)$$

az y-nak az $\alpha < y < \beta$ szakaszban folytonos függvénye. Most azon esettel akarunk foglalkozni, midőn az integrál egyik, vagy mindkét határa végtelen. Erre az esetre az előbbi bizonyítás nem alkalmazható, mert a folytonosság bizonyítását azzal kezdtük, hogy a megadott ε-ból $\frac{\varepsilon}{b-a}$-t készítettük és az ehhez tartozó küszöbintervallumot határoztuk meg. A jelen esetben a $b-a$ nevező nem volna véges. Ezért tehát némi változtatást kell tennünk a tétel bizonyításán. Legyen a felső határ végtelen.

Föltesszük, hogy $f(x, y)$ az $a\ldots\infty$ szakaszban integrábilis, ha y bárminő, az $\alpha\ldots\beta$ közbe eső értéket jelent; azaz $\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ ezen y értékekre nézve véges és meghatározott számérték. Ebből következik, hogy bármely ε-hoz található olyan l küszöbszám, hogy az $\int_{l'}^\infty f(x, y)\, dx$ maradékintegrál abszolut értéke ε-nál kisebb, ha csak $l' > l$. Ennél még valamivel többet is föltételezünk; t. i. azt, hogy az adott ε-hoz található olyan l küszöbszám, hogy az $\left|\int_{l'}^\infty f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$, ha $l' > l$, *bárminő* számértéket jelentsen is az y az $\alpha\ldots\beta$ közben; vagyis, *egy és ugyanazon l* küszöbszámmal beérjük minden y-ra nézve; ezt úgy fogjuk mondani, hogy az $f(x, y)$ *egyenletesen integrábilis* az $\alpha\ldots\beta$ közben.

Föltesszük továbbá, hogy az $f(x, y)$ az x, y folytonos függvénye, ha x bármely véges $a\ldots b$ közben van és $\alpha \leq y \leq \beta$.

Bebizonyítjuk, hogy ha e két föltétel teljesítve van, *vagyis ha* $\int_a^\infty f(x, y)\, dx$

az $\alpha \leq y \leq \beta$ közben egyenletesen integrálható és ha $f(x, y)$ minden $a < x < b$, $\alpha < y < \beta$ véges derékszögű négyszögben folytonos, akkor az

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

is folytonos az $\alpha < y < \beta$ közben.

Ki kell tehát mutatnunk, hogy bármely ε-hoz található olyan σ küszöbintervallum, hogy

$$|F(y+\Delta y) - F(y)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |\Delta y| < \sigma.$$

Vegyük az adott ε harmadrészét és menjünk el az l-el olyan messzire, hogy $F_2(y) = \int_l^\infty f(x, y)\, dx$ absolut értéke:

$$\left| \int_l^\infty f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen, bármit jelentsen is y. Ez lehetséges, mert $f(x, y)$ egyenletesen integrálható. Az $\int_a^l f(x, y)\, dx = F_1(y)$ integrál, mivel véges határok között vettük, y-nak folytonos függvénye, mert az integrándus x és y folytonos függvénye; tehát az $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz tartozik olyan σ küszöbintervallum, hogy:

$$|F_1(y+\Delta y) - F_1(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha} \quad |\Delta y| < \sigma.$$

Az $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$-et két részre bontjuk:

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^l f(x, y)\, dx + \int_l^\infty f(x, y)\, dx.$$

Az első rész $F_1(y)$, a második: $F_2(y)$. Az $F(y)$ növekménye:

$$F(y+\Delta y) - F(y) = [F_1(y+\Delta y) - F_1(y)] + [F_2(y+\Delta y) - F_2(y)],$$

tehát: $$|F(y+\Delta y) - F(y)| \leq |F_1(y+\Delta y) - F_1(y)| + |F_2(y+\Delta y)| + |F_2(y)|.$$

A jobboldalon álló első tag kisebb $\frac{\varepsilon}{3}$-nál, mert $F_1(y)$, miként láttuk, folytonos; a második és harmadik tag mindegyike kisebb $\frac{\varepsilon}{3}$-nál, mert l-el már elég messzire haladtunk; tehát

$$|F(y+\Delta y) - F(y)| < \varepsilon,$$

ami bebizonyítandó volt.

3. A határozott integrál differenciálása. a) *A határok állandók.* Legyen $f(x, y)$ az $a \leq x \leq b$, $\alpha < y < \beta$ értékrendszerre nézve az y szerint differenciálható az $\alpha \ldots \beta$ köz minden helyén és az $f'_y(x, y)$ differenciálhányados az x, y változók folytonos függvénye.

Ekkor a középértéktétel szerint: minthogy $f(x, y)$ az $\alpha < y < \beta$ közben differenciálható,

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y+\vartheta\Delta y)\, \Delta y, \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

továbbá, minthogy a diff. hányados egyenletesen folytonos, ezért bármely kis ε-hoz választható olyan σ küszöb, hogy

$$f'_y(x,y)-\varepsilon<f'_y(x,y+\vartheta\Delta y)<f'_y(x,y)+\varepsilon,$$

ha $|\Delta y|<\sigma$ és x az $a\ldots b$ köz bármelyik helye.

Ezek előrebocsátása után állítsuk elő az $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ diff. hányadosát y szerint. E végből kiszámítjuk az $F(y)$ növekményét, ha y-t Δy-nal növeljük:

$$F(y+\Delta y)-F(y)=\int_a^b [f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\,dx=\int_a^b f'_y(x,y+\vartheta\Delta y)\,\Delta y\,.\,dx$$

és ha $f'_y(x,y+\vartheta\Delta y)$ helyett a második megjegyzés szerint: $f'_y(x,y)+\eta$-t tesszük, akkor $\lim\limits_{\Delta y=0}\eta=0$, tehát:

$$\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx+\int_a^b \eta\,dx$$

és így $$F'(y)=\lim_{\Delta y=0}\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx,$$

minthogy $\left|\int_a^b \eta\,dx\right|<\varepsilon(b-a)$, tehát $\lim\limits_{\Delta y=0}\int_a^b \eta\,dx=0$.

Ha tehát *az* $f(x,y)$ *az* $a\leq x\leq b$, $\alpha<y<\beta$ *tartományban mindenütt* y *szerint differenciálható és a differenciálhányados az* x,y *változók folytonos függvénye, akkor az* $\int_a^b f(x,y)\,dx$ y *szerint egyszerűen úgy differenciálható, hogy az integrándust* y *szerint differenciáljuk.*

b) *A határok is függnek az* y *parametertől.* Ha az a és b határok is függnek az y parametertől, akkor az előbbi differenciálási szabály közvetlenül nem alkalmazható. Ekkor, ha y parametert Δy-nal megnövesztjük, az a-ból $a+\Delta a$ lesz, b-ből: $b+\Delta b$. Föltesszük, hogy $f(x,y)$-ra nézve az előbbi feltételek érvényesek és a meg b az y differenciálható függvényei. Ez esetben:

$$F(y+\Delta y)=\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,y+\Delta y)\,dx,$$

tehát az integrál növekménye:

$$F(y+\Delta y)-F(y)=\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,y+\Delta y)\,dx-\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Az első integrált fölbonthatjuk három részre:

$$\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,y+\Delta y)=\int_{a+\Delta a}^{a}+\int_a^b+\int_b^{b+\Delta b}$$

és így:
$$F(y+\Delta y)-F(y)=\int_{a+\Delta a}^{a} f(x, y+\Delta y)\,dx+$$
$$+\int_{a}^{b}[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]\,dx+\int_{b}^{b+\Delta b} f(x, y+\Delta y)\,dx.$$

Az első integrálra alkalmazzuk az első középértéktételt. Eszerint:
$$\int_{a+\Delta a}^{a} f(x, y+\Delta y)\,dx=-\Delta a\,.\,f(\xi, y+\Delta y),$$
ha ξ az $a\ldots a+\Delta a$ köz valamely meghatározott helyét jelenti. Éppen így a harmadik integrál:
$$\int_{b}^{b+\Delta b} f(x, y+\Delta y)\,dx=\Delta b f(\xi', y+\Delta y),$$
ha ξ' a $b\ldots b+\Delta b$ valamelyik közbenső helye.

A második integrál azon a módon, amint az állandó határok esetében tettük, átalakítható. Ugyanis:
$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\Delta y\, f_y'(x, y+\vartheta\Delta y)=(f_y'(x, y)+\eta)\,\Delta y,$$
ahol $\lim\limits_{\Delta y=0}\eta=0$; tehát ez az integrál így bontható fel:
$$\int_{a}^{b} f_y'(x, y)\,\Delta y\,.\,dx+\int_{a}^{b}\eta\,\Delta y\,.\,dx.$$

Így tehát:
$$\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}=\frac{\Delta b}{\Delta y}\cdot f(\xi', y+\Delta y)-$$
$$-\frac{\Delta a}{\Delta y} f(\xi, y+\Delta y)+\int_{a}^{b} f_y'(x, y)\,dx+\int_{a}^{b}\eta\,dx.$$

Ha már most Δy zérussá válik, akkor föltételünk szerint $\frac{\Delta b}{\Delta y}$ átmegy a b függvénynek y szerinti differenciálhányadosába $\frac{db}{dy}$-ba; éppen így $\frac{\Delta a}{\Delta y}$-ból $\frac{da}{dy}$ válik. A ξ', mely a $b\ldots b+\Delta b$ valamely közbenső helyét jelenti, átmegy b-be, ha Δy zérussá lesz, éppen így a ξ átmegy az a-ba, η pedig egyenletesen zérussá lesz, tehát:
$$F'(y)=\lim_{\Delta y=0}\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}=f(b)\frac{db}{dy}-f(a)\frac{da}{dy}+\int_{a}^{b} f_y'(x, y)\,dx.$$

4. Végtelen határokkal biró integrál differenciálása. Az előbbi tárgyalás megint nem alkalmazható közvetlenül arra az esetre, midőn az integrál egyik határa végtelen; mert az $\int_{a}^{b}\eta\,dx$ integrálról nem mondhatjuk közvetlenül, hogy zérussá válik ebben az esetben is; mert az η lehet végtelen csekély, de az integrál szakaszának terjedelme végtelen nagy. Ez esetben még föltesszük, hogy az $f'_y(x, y)$ x bármely véges közében minden $\alpha < y < \beta$-ra (tehát egyenletesen) folytonos, továbbá, hogy $f'_y(x, y)$ egyenletesen integrábilis az $a \dots \infty$ szakaszban, azaz, hogy ha y az $\alpha \dots \beta$ köz bármelyik helyét jelenti, adott ε-hoz található egy és ugyanaz az l küszöbszám, hogy az

$$\left| \int_l^\infty f'_y(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség fönnáll minden y-ra nézve.* Ekkor az

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

integrál differenciálhatóságának a megmutatása végett azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$F'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y)\, dx,$$

azaz, hogy
$$\left| \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} - \int_a^\infty f'_y(x, y)\, dx \right|$$

bármely kis számnál kisebb, ha Δy elég kicsiny. Legyen ε tetszés szerinti kis szám. Vegyük ennek a harmadrészét és menjünk el az l-el olyan messzire, hogy

$$\left| \int_l^\infty f'_y(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen, bármit jelentsen is az y az $\alpha \dots \beta$ közben a jegyzetben említett értelemben. Ezt elérvén, bontsuk fel az $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$ integrált két részre:

$$F(y) = \int_a^l f(x, y)\, dx + \int_l^\infty f(x, y)\, dx.$$

Ebből:

$$\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \int_a^l \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\, dx + \int_l^\infty \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\, dx. \quad A)$$

De $f(x, y)$-nak y szerinti differenciálhatóságából következik a középértéktétel szerint, hogy minden x-nél

$$\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y+\vartheta\Delta y).^{**}$$

A második integrál tehát feltételünk szerint (lásd a jegyzetet) $\frac{\varepsilon}{3}$-nál kisebb, mert

$$\left| \int_l^\infty f'_y(x, y+\vartheta\Delta y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

* Ezt most úgy értjük, hogy $f'_y(x, y)$ akkor is egyenletesen integrálható, ha y az x-től is függ, csak az y számértéke az $\alpha \dots \beta$ közben maradjon. Ez például teljesítve van, ha $|f'_y(x, y)| < \frac{M}{x^n}$ valamely x-en túl és y az $\alpha \dots \beta$ közben van és $n > 1$.

** Megjegyezzük, hogy ϑ általában az x-től is függ, de mindenesetre pozitiv és 1-nél kisebb, úgy, hogy azért $y+\vartheta\Delta y$ az $\alpha \dots \beta$ közben van.

Az első integrálban, minthogy $f'_y(x, y)$ az $\alpha < y < \beta$ szakaszban feltételünk szerint folytonos, a folytonosságnak már említett egyenletessége következtében Δy egy h küszöbnél kisebbre vehető úgy, hogy

$$|\eta| = |f'_y(x, y+\vartheta\Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3(l-a)}$$

legyen, ha x az $a \ldots l$ és y az $\alpha \ldots \beta$ bármely helye. Az *A)* alatti egyenlőség tehát így írható:

$$\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \int_a^l f'_y(x, y)\,dx + \int_a^l \eta dx + \int_l^\infty f'_y(x, y+\vartheta\Delta y)\,dx,$$

vagy ha még a jobboldalhoz $\int_l^\infty f'_y(x, y)\,dx$-et hozzátesszük és elvesszük:

$$\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx + \int_a^l \eta dx +$$
$$+ \int_l^\infty f'_y(x, y+\vartheta\Delta y)\,dx - \int_l^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

Ha már most l oly nagyra és a h küszöb, melynél Δy kisebb, oly kicsinyre vétetik, hogy

$$\left|\int_l^\infty f'_y(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{és} \quad |\eta| < \frac{\varepsilon}{3(l-a)}$$

legyen, akkor a jobboldalon álló második, harmadik és negyedik integrál külön-külön kisebb absolut értékű $\frac{\varepsilon}{3}$-nál, tehát:

$$\left|\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} - \int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |\Delta y| < h.$$

következésképpen: $$F'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

XI. FEJEZET.

NÉHÁNY FONTOS INTEGRÁL KISZÁMÍTÁSA.

1. Dirichlet-tétel. Legyen $\psi(x)$ az a-tól jobbra minden közben integrálható és

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx = A$$

véges és meghatározott szám. Azt állítjuk, hogy ha y pozitiv szám és $\psi(x)$-et e^{-yx}-el megszorozzuk, akkor az így nyert

$$\int_a^\infty e^{-yx}\psi(x)\,dx$$

is konvergens integrál. Ez az állítás nagyon plauzibilis, hiszen az integrándust e^{-yx}-el, tehát egy monoton, erősen csökkenő függvénnyel szoroztuk meg. Pontosabban így bizonyíthatjuk be a tételt:

Az $\int_a^\infty \psi(x)\,dx$ konvergens; tehát tetszés szerinti kis ε-hoz tartozik olyan N küszöb, hogy azon túl levő minden l és $l' > l$-re nézve

$$\left|\int_l^{l'} \psi(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Azt akarjuk megmutatni, hogy található oly N_1 küszöb, amelyen túl levő minden k és $k' > k$-ra nézve:

$$\left|\int_k^{k'} e^{-yx}\psi(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

akárminő pozitiv szám legyen is az y. Ezzel be lesz bizonyítva, hogy az $\int_a^\infty e^{-yx}\psi(x)\,dx$ konvergens. Válasszuk N_1 gyanánt az előbbi N-et, vagyis azt a küszöböt, amelyen túl mindig:

$$\left|\int_l^{l'} \psi(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Ekkor az $\int_l^{l'} e^{-yx}\psi(x)\,dx$-re alkalmazzuk a második középértéktételt. Alkalmazhatjuk, mert $\psi(x)$ az egész intervallumban integrábilis és e^{-yx} monoton csökkenő.

$$\int_l^{l'} e^{-yx}\psi(x)\,dx = e^{-yl}\int_l^{\xi}\psi(x)\,dx,$$

ahol ξ az l és l' közé esik; tehát az $\int_l^{\xi}\psi(x)\,dx$ absolut értéke is kisebb ε-nál, mert $\xi > l$ és így a jobboldali kifejezés is kisebb abszolut értékű, mint ε, vagyis valóban:

$$\left|\int_l^{l'} e^{-yx}\psi(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

ha l és $l' > l$ bármely két, N-nél nagyobb számot jelent. De ez éppen az $\int_a^{\infty} e^{-yx}\psi(x)\,dx$ konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele. Ezzel kimutattuk, hogy ha az $\int_a^{\infty}\psi(x)\,dx$ konvergens, akkor $\int_a^{\infty} e^{-yx}\psi(x)\,dx$ is konvergens. [Megjegyezzük, hogy e^{-yx} szorzó helyett bármely $f(y, x)$ monoton csökkenő függvényt is választhattunk volna.]

Az

$$\int_a^{\infty} e^{-yx}\psi(x)\,dx$$

integrálról egyebet is kimutatunk. Jelöljük ezt az integrált, mely az y függvénye: $F(y)$-nal. Ha ebben y helyett 0-t teszünk, akkor belőle $\int_a^{\infty}\psi(x)\,dx$ lesz, az A-val jelölt eredeti számérték. Az $F(y)$-nak helyettesítési értéke tehát a 0 helyen: A. Kérdés, vajjon ez egyúttal határértéke-e? Vagyis, ha y a pozitiv oldalról konvergál a 0-hoz [mert hiszen y csakis pozitiv számot jelentett], vajjon

$$\lim_{y=0} F(y) = A$$

teljesűl-e, vagyis az $F(y)$ az $y=0$ helyen (pozitiv oldalról) folytonos-e? Kimutatjuk, hogy igen, vagyis, hogy:

$$\lim_{y=0}\int_a^{\infty} e^{-yx}\psi(x)\,dx = \int_a^{\infty}\psi(x)\,dx.$$

Meg kell tehát mutatnunk, hogy egy tetszésszerinti ε-hoz található oly δ küszöb, hogy ha $y < \delta$, akkor

$$\left|\int_a^{\infty} e^{-yx}\psi(x)\,dx - \int_a^{\infty}\psi(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

vagyis, hogy $\left|\int_a^{\infty}\psi(x)\,(e^{-yx}-1)\,dx\right| < \varepsilon$, ha $y < \delta$.

Ennek a megmutatása végett vegyük az ε harmadrészét és l-el menjünk el olyan messzire, hogy ha csak $l' > l$, $\left|\int_l^{l'}\psi(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor már az előbbi szerint

$$\left|\int_l^{l'} e^{-yx}\psi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is teljesítve van. Most bontsuk fel az integrált két részre:

$$\int_a^\infty \psi(x)(e^{-yx}-1)\,dx = \int_a^l \psi(x)(e^{-yx}-1)\,dx + \int_l^\infty \psi(x)(e^{-yx}-1)\,dx. \qquad \alpha)$$

A második integrál:

$$\int_l^\infty \psi(x)e^{-yx}\,dx - \int_l^\infty \psi(x)\,dx$$

mindenik tagja abszolut értékre nézve kisebb $\frac{\varepsilon}{3}$-nál, tehát az egész integrál kisebb $\frac{2\varepsilon}{3}$-nál. Eddig még az y-ra nézve semmiféle megszorítást sem tettünk.

Ha $\left|\int_a^z \psi(x)\,dx\right|$ felső határa M, ha $a<z<l$, akkor válasszuk a δ számot úgy, hogy

$$|e^{-\delta l}-1|<\frac{\varepsilon}{3M}$$

legyen. Ehhez csak az kell, hogy

$$\delta<\frac{1}{l}\log\left(\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{3M}}\right)$$

legyen. Ha y ennél a δ-nál kisebb, akkor (ha $x>l$)

$$1>e^{-yx}>e^{-\delta x}>e^{-\delta l}$$

és így

$$1-e^{-yx}<1-e^{-\delta l}<\frac{\varepsilon}{3M},$$

tehát az első integrál (megint a második középértéktétel szerint):

$$\left|\int_a^l \psi(x)(e^{-yx}-1)\,dx\right| < \left|\frac{\varepsilon}{3M}\int_a^z \psi(x)\,dx\right| = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kimutattuk tehát, hogy ha $0<y<\delta$, akkor az α) alatti egyenlet jobb oldalán ε-nál kisebb abszolut értékű szám áll, vagyis valóban:

$$\left|\int_a^\infty \psi(x)(e^{-yx}-1)\,dx\right|<\varepsilon$$

és így:

$$\lim_{y=0}\int_a^\infty \psi(x)e^{-yx}\,dx=\int_a^\infty \psi(x)\,dx,$$

ami bebizonyítandó volt.*

2. A Wallis-formula. Ezt az integrált

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$$

már kiszámítottuk (l. 357. lapon) és azt találtuk, hogy

* Ez a bizonyítás lényegben *Franel*-től való. L. *Hurwitz*: Sur l'application géométrique des séries de Fourier. Ann. de l'Ecole norm. sup. 1902. p. 364.

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}=$$

$$=\cdots=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

és $$I_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}.$$

Ha az I_{2n-1}-ben $\sin x$ helyébe $\sqrt{1-u^2}$-t tesszük [a gyöknek pozitiv értékét], akkor átalakul ebbe: $\int\limits_0^1(1-u^2)^{n-1}du$; tehát [$n$ helyett $n+1$-et mondva:]

$$I_{2n+1}=\int\limits_0^1(1-u^2)^n\,du=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}.$$

E formulákat felhasználtuk a $\frac{\pi}{2}$-nek igen érdekes előállítására. A 358. lapon közölt tárgyalásból következik, hogy:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n=\infty}\frac{2n.[(2n-2)(2n-4)\ldots 2]^2}{[(2n-1)(2n-3)\ldots 3]^2}.$$

Ez a Wallis-féle formula a $\frac{\pi}{2}$-re nézve.

Megemlítjük ennek kapcsán, hogy a jobboldali határérték létezéséből következik, hogy adott η pozitiv számhoz tartozik olyan N küszöbszám, melyen túl levő n-ekre:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}=\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}+\frac{\varrho}{\sqrt{2n}},$$

ahol $|\varrho|<\eta$, vagyis $\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}$ mindig $\frac{c}{\sqrt{n}}$ alakban írható, ahol a c valamely N-en túl eső n-ekre tetszés szerinti kevéssel különbözik a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$-től.

3. **Az $I=\int\limits_0^1 f(z)\,[1-(z-x)^2]^n\,dz$ integrál egy fontos alkalmazása.** Legyen $f(z)$ a $0..1$ intervallumban, (a határokat is beleértve), korlátos, folytonos, egyértékű függvény. E közben mindenütt $|f(z)|<g$. Legyen x e köz valamely helye. A szóban forgó integrált igen nagy pozitiv egész n értékekre keressük. Az $1-(z-x)^2$ tényező az egész $0\ldots1$ közben kisebb 1-nél, az egyetlen x helyet kivéve; tehát $[1-(z-x)^2]^n$ az x hely kis környezetétől eltekintve, n növekedtével tetszés szerinti kicsinnyé válik és így az integrál értékére — előre sejthetjük — csakis az x pont környezetére eső rész lesz befolyás-

sal. Már ez is ráutal arra, hogy az I-t három részre bontsuk ily módon: $I=I_1+I_2+I_3$, ahol:

$$I_1=\int\limits_0^{x-\sigma} f(z)\,[1-(z-x)^2]^n\,dz\,;$$

$$I_2=\int\limits_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(z)\,[1-(z-x)^2]^n\,dz\,;$$

$$I_3=\int\limits_{x+\sigma}^{1} f(z)\,[1-(z-x)^2]^n\,dz.$$

(Ha $x-\sigma<0$, akkor helyette 0 teendő és ha $x+\sigma>1$, akkor helyette 1-et tegyünk.)

A σ-t úgy választjuk, hogy az $f(z)$ ingadozása minden σ terjedelmű közben kisebb legyen egy előre megadott δ felénél. Ezt elérhetjük, bármekkora legyen is a δ, mert feltételünk szerint $f(z)$ az egész $0\ldots1$ közben, a határokat is beleértve, folytonos.

Az első integrálról azonnal látjuk, hogy:

$$|I_1|<g\int\limits_0^{x-\sigma}[1-(z-x)^2]^n\,dz.$$

Ha $z-x$ helyébe $-u$-t tesszük, akkor

$$|I_1|<g\int\limits_\sigma^{x}(1-u^2)^n\,du$$

és minthogy $1-u^2$ az egész $0\ldots1$ közben pozitiv, még inkább:

$$|I_1|<g\int\limits_\sigma^{1}(1-u^2)^n\,du. \qquad \alpha)$$

Éppen így mutatjuk meg, hogy a harmadik integrál:

$$|I_3|<g\int\limits_\sigma^{1}(1-u^2)^n\,du. \qquad \beta)$$

Áttérünk az I_2 számításához. Minthogy az $x-\sigma\ldots x+\sigma$ köz igen kicsiny, közelfekvő gondolat, hogy az $f(z)$ helyett az egész intervallumban az állandó $f(x)$-et vegyük, vagyis I_2 helyett ezt a

$$K_2=f(x)\int\limits_{x-\sigma}^{x+\sigma}[1-(z-x)^2]^n\,dz$$

-et számítsuk, illetőleg az ezzel elkövetett I_2-K_2 hibát határozzuk meg. Ha K_2-ben $z-x$ helyett u-t vezetünk be, akkor $K_2=f(x)\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}(1-u^2)^n\,du$ lesz; tehát ezt a különbséget kell kiszámítanunk:

$$I_2-K_2=\int\limits_{x-\sigma}^{x+\sigma}f(z)\,[1-(z-x)^2]^n\,dz-f(x)\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}(1-u^2)^n\,du.$$

Ha az első integrálban is $z-x$ helyébe u-t teszünk, akkor

$$I_2-K_2=\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}[f(x+u)-f(x)]\,(1-u^2)^n\,du$$

-ra jutunk, miből:

$$I_2 = K_2 + \int_{-\sigma}^{\sigma} [f(x+u) - f(x)]\,(1-u^2)^n\,du.$$

Minthogy pedig a σ-t úgy választottuk meg, hogy minden σ nagyságú közben $f(x)$ ingadozása $\frac{\delta}{2}$-nél kisebb legyen, tehát a $-\sigma \ldots +\sigma$ közben, akárhol legyen is a $0 \ldots 1$ köz x pontja, $|f(x+u) - f(x)| < \frac{\delta}{2}$, és így a jobboldali integrál abszolut értéke kisebb: $\frac{\delta}{2}\int_{-\sigma}^{\sigma}(1-u^2)^n\,du$-nál, vagyis tekintetbe véve, hogy $\int_{-\sigma}^{0}(1-u^2)^n\,du = \int_{0}^{\sigma}(1-u^2)^n\,du$, ez az integrál kisebb, mint:

$$\delta\int_0^{\sigma}(1-u^2)^n\,du,$$

vagyis:

$$I_2 = K_2 + \varrho,$$

ahol $|\varrho| < \delta\int_0^1(1-u^2)^n\,du$. A K_2-t így alakítjuk át:

$$K_2 = f(x)\int_{-\sigma}^{\sigma}(1-u^2)^n\,du = 2f(x)\int_0^{\sigma}(1-u^2)^n\,du =$$

$$= 2f(x)\int_0^1(1-u^2)^n\,du - 2f(x)\int_{\sigma}^1(1-u^2)^n\,du,$$

tehát:

$$I_2 - 2f(x)\int_0^1(1-u^2)^n\,du = \varrho + 2f(x)\int_{\sigma}^1(1-u^2)^n\,du$$

és ebből:

$$I - 2f(x)\int_0^1(1-u^2)^n\,du = I_1 + \varrho - 2f(x)\int_{\sigma}^1(1-u^2)\,du + I_3.$$

Ha tekintetbe vesszük az I_1 és I_3-ra $\alpha)$ és $\beta)$ alatt megállapított és a ϱ-ra vonatkozó egyenlőtlenségeket és $2\int_0^1(1-u^2)^n\,du$-val osztunk, arra jutunk, hogy

$$\left|\frac{I}{2\int_0^1(1-u^2)^n\,du} - f(x)\right| < \frac{\delta}{2} + 4g\frac{\int_{\sigma}^1(1-u^2)^n\,du}{\int_0^1(1-u^2)^n\,du}.$$

A $\int_0^1(1-u^2)^n\,du$-ról a 3. pont alatti tárgyalásból tudjuk, hogy értéke:

$$\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}$$

és hogy ez bizonyos N-en túl levő n-ekre $\frac{c}{\sqrt{n}}$ alakban írható, ahol c kevéssel különbözik $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$-től, a számlálóról pedig látjuk, hogy:

$$\int_{\sigma}^1(1-u^2)^n\,du < (1-\sigma^2)^n\int_0^1 du = (1-\sigma^2)^n$$

és így a fönti egyenlőtlenség második tagja kisebb, mint

$$4gc'\sqrt{n}\,(1-\sigma^2)^n,$$

ahol c' egy, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$-től kevéssel különböző, véges, n-től független szám.

Minthogy pedig, miként a L'Hospital-szabállyal azonnal igazolhatjuk, $\lim_{x=\infty} x^\alpha k^x=0$, ha $0<k<1$ és α bármely pozitiv szám, tehát $\lim_{n=\infty} \sqrt{n}(1-\sigma^2)^n=0$, vagyis elmehetünk az n-el olyan messzire, hogy N-en túl mindig

$$4gc'\sqrt{n}(1-\sigma^2)^n<\frac{\delta}{2}$$

legyen, miből azután következik, hogy N-en túl levő n-ekre minden $0\ldots1$ közbe eső x helyen:

$$\left|\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots3}{2.2n.(2n-2)\ldots2}\int_0^1 f(z)\,[1-(z-x)^2]^n dz - f(x)\right|<\delta.$$

A szóban forgó integrált (egy tényezővel ellátva) tehát tetszés szerinti pontossággal kiszámíthatjuk a pontosságnak megfelelő N-en túl.

Ezen eredménynek igen nagy elvi jelentősége van. Ha megadatik a δ pontosság, ehhez a tárgyalás folyamán meghatározott módon megállapítjuk a hozzátartozó N küszöböt. Legyen $n>N$.

Az $[1-(z-x)^2]^n$ az x-nek $2n$-edfokú racionális egész függvénye és így az integrandus ilyen alakban írható:

$$a_0(z)\,x^{2n}+a_1(z)\,x^{2n-1}+a_2(z)\,x^{2n-2}+\cdots+a_{2n}(z),$$

ahol az $a_0(z)$, $a_1(z)$, ... együtthatók a z folytonos függvényei [$f(z)$ szorozva a z valamely racionális egész függvényeivel] és így tagonkint integrálva:

$$\left|\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots3}{2.2n.(2n-2)\ldots2}\left\{x^{2n}\int_0^1 f(z)\,a_0(z)\,dz+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,x^{2n-1}\int_0^1 f(z)\,a_1(z)\,dz+\cdots+\int_0^1 a_{2n}(z) f(z)\,dz\right\}-f(x)\right|<\delta,$$

vagyis arra az eredményre jutunk, hogy $f(x)$ folytonos függvény az egész $0\ldots1$ közben tetszés szerinti pontossággal egy racionális egész függvénnyel megközelíthető.

Ez az eljárás természetesen nemcsak $0\ldots1$ közre, hanem bármely más $\alpha\ldots\beta$ közre is vonatkozik, mert hiszen ha z helyett $\zeta=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ és x helyett $\xi=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ tesszük, akkor az $\alpha\ldots\beta$ köz a $0\ldots1$-be megy át. Ez a fontos tétel *Weierstrass* tétele.*

4. Az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integrál meghatározása. Az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ miként már megmutattuk, nem abszolut konvergens integrál. Most látni fogjuk, hogy konvergens és hogy értéke: $\frac{\pi}{2}$. Ez igen nevezetes integrál, melynek később a *Fourier*-sorok elméletében jó hasznát vesszük. Kiszámítása végett a 411. lapon előfordult fejtegetéseket használjuk. Először is megmutatjuk, hogy valóban konvergens integrállal van dolgunk. Evégből csak azt kell megmutatnunk, hogy

* A Weierstrass-tétel ezen bizonyítására nézve l. *Landau* értekezését a Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo XXV. kötet p. 337.

elmehetünk olyan messzire, hogy azon túl

$$\left|\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| < \varepsilon$$

bárminő számokat jelentenek is x' és $x'' > x'$. Általában az $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx$ integrál a következőképpen osztható részekre.

Megkeressük a π többszörösei közül azt, amely a-nál közvetlenül nagyobb. Legyen ez $k\pi$ és megkeressük azt az utolsót, amelynél b nagyobb. Legyen ez $l\pi$. Úgy hogy tehát:

$$(k-1)\pi \leq a < k\pi, \quad l\pi < b \leq (l+1)\pi.$$

Az $a \ldots b$ szakaszt úgy osztjuk fel részekre, hogy rajta az:

$$a, k\pi, (k+1)\pi, (k+2)\pi, \ldots l\pi, b$$

helyeket megjelöljük. Az elülálló és az utolsó szakaszok csonkák, a többi mind π szélességű. Nézzünk egy ilyen szakaszt, pl:

$$\int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Az $\frac{1}{x}$ e szakaszban monoton csökken, a $\sin x$ állandó előjelű, tehát

$$\left|\int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| < \frac{1}{h\pi}\left|\int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \sin x\, dx\right| < \frac{2}{h\pi}.$$

A csonka szakaszokra vonatkozó integrál kisebb abszolut értékű, mint az egész szakaszokra vonatkozó, tehát ha a elég nagy, ezek az integrálok tetszés szerinti kicsinyekké tehetők. Az egyes részintegrálok abszolut értékre nézve csökkennek. Ugyanis azt állítjuk, hogy

$$\left|\int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| > \left|\int_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\right|. \qquad \alpha)$$

Ezt azonnal beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a $|\sin x|$ a $h\pi \ldots (h+1)\pi$ szakaszban ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint a $(h+1)\pi \ldots (h+2)\pi$ szakaszban; de az $\frac{1}{x}$, amivel a $\sin x$-et szorozzuk, mindig kisebb, mint az előző szakaszban. Ezt a dolgot pontosabban így bizonyíthatjuk be. Tegyük a második integrálban $x=y+\pi$, akkor:

$$\int_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{\sin y}{\pi+y} dy$$

és így:

$$\left|\int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx\right| - \left|\int_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx\right| = \int_{h\pi}^{(h+1)\pi} |\sin x| \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\pi+x}\right) dx,$$

amiből látjuk, hogy az integrándus mindenütt pozitiv, tehát az α) alatti egyenlőtlenség fennáll.

Ha az $\left|\int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx\right|$ integrált röviden i_h-val jelöljük és az $a \dots b$ szakaszt az előbb említett módon $a \dots k\pi, k\pi \dots (k+1)\pi, \dots, l\pi \dots b$ részekre bontjuk, továbbá az első csonka integrált i-vel, az utolsót i'-val jelöljük, akkor:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| = \left|i - i_k + i_{k+1} - i_{k+2} \cdots \pm i_l \mp i'\right|.$$

Az a-val menjünk el olyan messze, hogy az i_{k-1}, tehát még inkább az első csonka integrál absz. értéke kisebb legyen $\frac{\varepsilon}{2}$-nél. Ezt könnyen elérhetjük, mert hiszen $i_k < \frac{2}{k\pi}$, tehát csak k-t kell olyan nagyra választani, hogy $\frac{2}{(k-1)\pi} < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen. Az egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés a második tagtól az utolsóig számítva így is írható: [az előjelet egyelőre tekinteten kívül hagyva]

$$i_k - (i_{k+1} - i_{k+2}) - (i_{k+3} - i_{k+4}) \cdots - (\varrho),$$

[ha i_l negativ jellel veendő, akkor $\varrho = i_l - i'$, ha i_l előtt pozitiv jel áll, akkor $\varrho = i'$] és minthogy az i számok csökkenők, mindenik zárójelben pozitiv szám áll, tehát ez a kifejezés i_k-nál kisebb. Ha pedig így írjuk ezt a kifejezést:

$$(i_k - i_{k+1}) + (i_{k+2} - i_{k+3}) + \cdots + (\varrho),$$

[ahol ϱ megint vagy $i_l - i'$, vagy pedig csak i'], akkor meg azt látjuk, hogy ez a kifejezés nagyobb $i_k - i_{k+1}$-nél; tehát i_k és $i_k - i_{k+1}$ közé esik; abszolut értékre nézve tehát i_k-nál kisebb. Igy tehát az elhagyott csonka i-vel együtt abs. értékben kisebb ez a kifejezés ε-nál.

Azt látjuk tehát, hogy a-val oly messze mehetünk, hogy az

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon$$

legyen, bárminő, a-nál nagyobb szám is a b. Ezzel kimutattuk, hogy a $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integrál konvergens.

Határozzuk meg ezen integrál számértékét. Evégből az

$$I = \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

integrált vegyük szemügyre, amely az előbbiből úgy keletkezik, hogy az integrándust e^{-yx}-szel szorozzuk. Ha y pozitiv, akkor az 1) alatti tétel szerint I is konvergens integrál és

$$\lim_{y=0} \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Tehát ha az I integrált kiszámítjuk, akkor abból a keresettet is megállapíthatjuk. Az I integrál kiszámítása végett állítsuk elő $\frac{dI}{dy}$ differenciálhányadost. Az I integrálra ugyanis teljesítve vannak a differenciálhatóság feltételei, tehát

$$\frac{dI}{dy} = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\,dx = \left[\frac{e^{-yx}\sin x}{y}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-yx}\cos x}{y}\,dx =$$

$$= \left[\frac{e^{-yx}\sin x}{y}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-yx}\cos x}{y^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-yx}\sin x}{y^2}\,dx.$$

A jobboldalon az első kifejezés 0; mert, ha x végtelenné válik, akkor $\sin x$ határozatlan ugyan, de véges és e^{-yx} zérussá lesz. Ha pedig $x=0$ tesszük, akkor $\sin x$ lesz zérussá és e^{-yx} véges. A második tag értéke: $-\frac{1}{y^2}$; a harmadik tag pedig: $-\frac{1}{y^2}\frac{dI}{dy}$; tehát:

$$\frac{dI}{dy} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2}\frac{dI}{dy},$$

vagyis:

$$\frac{dI}{dy} = -\frac{1}{1+y^2},$$

miből:

$$I = \operatorname{arc\,cotg} y + C,$$

ahol arc cotg y pl. azt a $0\ldots\pi$ közötti számot jelenti (a felső határ kizárásával), melynek cotangense: y.

A C konstans meghatározása végett képzeljük az y-t minden határon túl növelve; ekkor az $I=\int\limits_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ integrál zérussá válik,* de $\operatorname{arc\,cotg}\infty=0$, tehát $C=0$; vagyis

$$I=\operatorname{arc\,cotg} y.$$

Ebből végül $\lim\limits_{y=0} I=\operatorname{arc\,cotg} 0=\frac{\pi}{2}\cdot$ Igy tehát a kérdéses integrált kiszámítottuk:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\cdot$$

5. $\int\limits_0^\infty (e^{-x}-e^{-tx})\frac{dx}{x}$ **integrál meghatározása.** A felírt integrálban t pozitiv számot jelent. Ha az alsó határ nem 0, hanem pl. a pozitiv szám, akkor azonnal beláthatjuk, hogy úgy az $\int\limits_a^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}$, mint az $\int\limits_a^\infty e^{-tx}\frac{dx}{x}$ konvergens integrálok. Ugyanis, ha az integrándust: $\frac{e^{-x}}{x}$-et megszorozzuk x^α-val, ahol $\alpha>1$, akkor $\lim\limits_{x=\infty} x^{\alpha-1}.e^{-x}=0$ és épen így $\lim\limits_{x=\infty} x^{\alpha-1}e^{-tx}=0$. Eszerint tehát csak arról kell meggyőződnünk, hogy a szóban forgó integrálnak $\int\limits_0^a (e^{-x}-e^{-tx})\frac{dx}{x}$ része is konvergens. Ha az e^{-x} és e^{-tx}-et előállítjuk véges Taylor soraikkal, azt kapjuk, hogy:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}e^{-\vartheta x},\quad e^{-tx}=1-tx+\frac{t^2x^2}{2}e^{-\vartheta_1 tx},$$

tehát:
$$\frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}=t-1+\frac{x}{2}[e^{-\vartheta x}-e^{-\vartheta_1 tx}],$$

vagyis az integrándus az egész $0\ldots a$ közben, (a határhelyeket is beleértve) egy könnyen megjelölhető véges M számnál kisebb és így a szóban forgó integrál konvergens. A keresett integrál helyett most ezt számítsuk ki:

* Ugyanis $\int\limits_0^\beta e^{-yx}\frac{\sin x}{x}=\int\limits_0^\alpha e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx+\int\limits_\alpha^\beta e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$, ahol $0<\alpha<\beta$. Az első integrál nyilván 0-sá lesz, ha y végtelenné válik. A második integrálra pedig, melyet I_2-vel jelölünk, a második középértéktétel alkalmazható. $I_2=e^{-y\alpha}\int\limits_\alpha^\xi\frac{\sin x}{x}dx$, tehát, minthogy $\int\limits_\alpha^\xi\frac{\sin x}{x}dx$ minden ξ-re véges, $\lim\limits_{y=\infty} I_2=0$.

$$I(\delta)=\int\limits_{\delta}^{\infty}(e^{-x}-e^{-tx})\frac{dx}{x}$$

és azután vegyük $\lim\limits_{\delta=0} I(\delta)$, miáltal a kívánt integrált kapjuk meg.

A második részt, az $\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-tx}\frac{dx}{x}$-et átalakítjuk úgy, hogy x helyett $\frac{y}{t}$-t tesszük. Az új határok: $t\delta$ és ∞; tehát:

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-tx}\frac{dx}{x}=\int\limits_{t\delta}^{\infty} e^{-y}\frac{dy}{y}$$

és így:
$$I(\delta)=\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}-\int\limits_{t\delta}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}=\int\limits_{\delta}^{t\delta}\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Minthogy pedig e^{-x} a $\delta \ldots t\delta$ közben $e^{-\delta}$ és $e^{-t\delta}$ közötti értékeket veszi fel, tehát $I(\delta)$ az $e^{-\delta}\log t$ és $e^{-t\delta}\log t$ közé esik és így:

$$\lim_{\delta=0} I(\delta)=\log t.$$

Arra az eredményre jutottunk, hogy:

$$\int\limits_{0}^{\infty}(e^{-x}-e^{-tx})\frac{dx}{x}=\log t.$$

Ebből azonnal meghatározhatjuk ezt az integrált is:

$$\int\limits_{0}^{\infty}(e^{-ax}-e^{-bx})\frac{dx}{x},$$

ahol a és b pozitiv számok. Ha ugyanis ax helyet y-t írunk, akkor:

$$\int\limits_{0}^{\infty}(e^{-ax}-e^{-bx})\frac{dx}{x}=\int\limits_{0}^{\infty}(e^{-y}-e^{-\frac{b}{a}y})\frac{dy}{y}=\log\frac{b}{a}.$$

6. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx$ **integrál kiszámítása.** Az előbbi pont végén említett

$$\int\limits_{0}^{\infty}(e^{-ax}-e^{-bx})\frac{dx}{x}$$

integrál speciális esete annak, amelyet most akarunk tárgyalni. Feltesszük, hogy ez az integrál: $\int\limits_{\xi}^{\infty}\varphi(x)\,dx$ létezik, ha csak $\xi \geqq 0$ és mindig kisebb abszolut értékű egy véges M számnál. Legyenek továbbá a és b pozitiv számok. Ekkor egyúttal ez az integrál

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(ax)}{x}\,dx$$

is konvergens, ha $\delta>0$.

Ugyanis, ha ε egy tetszés szerinti kis pozitiv szám és N-et akárminő pozitiv számnak választjuk, akkor a $\int_\delta^\infty \varphi(ax)\,dx$ konvergens voltából következik, hogy az εN-hez tartozik olyan L küszöbszám, hogy az

$$\left|\int_\eta^{\eta'} \varphi(ax)\,dx\right| < \varepsilon N,$$

ha csak $\eta > L$ és $\eta' > \eta$. Az L-et az N-nél nagyobbra vehetjük. Ebből azután következik, hogy

$$\left|\int_\eta^{\eta'} \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx\right| < \frac{1}{N}\left|\int_\eta^{\eta'} \varphi(ax)\,dx\right| < \varepsilon,$$

ami a szóban forgó $\int_\delta^\infty \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx$ integrál konvergenciáját bizonyítja. Ugyanez áll a $\int_\delta^\infty \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx$-re is. De ha ax helyett y-t vezetünk be, akkor (y helyett megint x-et írva):

$$\int_\delta^\infty \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx = \int_{a\delta}^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \qquad \int_\delta^\infty \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx = \int_{b\delta}^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

tehát:

$$\int_\delta^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(\delta x)}{x}\,dx,$$

ha x helyett δy-t tesszük (és y helyett x-et írunk). Ha erre az integrálra a középértéktételt alkalmazzuk, μ-vel jelölve egy bizonyos, a $\varphi(\delta x)$-nek felső és alsó határai közötti értékét (ha x az $a \ldots b$ közben mozog)

$$\int_\delta^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x} = \mu \log\frac{b}{a}\cdot$$

Ha $\lim\limits_{x=0} \varphi(x) = \varphi(0)$ létezik, akkor egyúttal $\lim\limits_{\delta=0} \varphi(\delta x) = \varphi(0)$ és így:

$$\lim_{\delta=0} \int_\delta^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x} = \varphi(0)\log\frac{b}{a},$$

vagyis:

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx = \varphi(0)\log\frac{b}{a}\cdot$$

Ha $\varphi(x) = e^{-x}$, akkor az 5) alatt tárgyalt integrálra jutunk.

7. Integrálok határértéke. Legyen adva egy $f(x, n)$ egyértékű integrálható függvény, mely tehát nemcsak x-től, hanem az n pozitiv egész számú paramétertől is függ, vagyis mondhatjuk, adva van az $f(x, n)$ függvénysor. [Ilyen volt például a 3-ik pontban előfordult $[1-(1-x^2)]^n$ függvénysor.] Ha egy tetszés szerinti $\alpha \ldots \beta$ közt szemelünk ki és az x e köz valamely meghatározott helye (a határokat is beleértve), akkor az $f(x, 1)$, $f(x, 2)$, $f(x, 3)$, ... egy számsorozat. Tegyük fel, hogy ez a sorozat szabályos sorozat és az általa értelmezett számot jelöljük $g(x)$-el. Ez a $g(x)$ az x-nek egyértékű függvénye. Nevezzük ezt a $g(x)$-et az $f(x, n)$ sorozat határfüggvényének; akkor tehát: $\lim\limits_{n=\infty} f(x, n) = g(x)$. Ha az $f(x, n)$ sorozat olyan, hogy egy tetszés szerint megadott ε-hoz található olyan N küszöb, hogy $|f(x, n) - g(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$ és x az $\alpha \ldots \beta$ köz *bármelyik* helye, akkor azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{n=\infty} f(x, n) = g(x)$ az $\alpha \ldots \beta$ közben *egyenletesen* és az $f(x, n)$ sorozatról azt mondjuk, hogy e közben egyenletesen konvergál a $g(x)$ határfüggvényhez.

Legyen már most 1) *az $f(x, n)$ sorozat olyan, hogy az $a \ldots \infty$ vonalon akárhol felvett $\alpha \ldots \beta$ közben egyenletesen konvergál a $g(x)$ határfüggvényhez* és 2) *akárminő pozitiv egész szám legyen is az n, az $f(x, n)$ abszolut értéke mindig kisebb legyen egy $M(x)$-nél, amelyről feltesszük, hogy $\int\limits_a^\infty M(x)\,dx$ konvergens-integrállal bir.**

Ha már most $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ egy tetszés szerinti monoton korlátlanul növekvő számsorozat (tehát $\lim \lambda_n = \infty$), akkor azt állítjuk, *hogy ezek az integrálok*

$$\int\limits_a^{\lambda_1} f(x, 1)\,dx, \quad \int\limits_a^{\lambda_2} f(x, 2)\,dx, \ \ldots \quad \int\limits_a^{\lambda_n} f(x, n)\,dx \ldots$$

szabályos sorozatot alkotnak, melynek határértéke: $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$, vagyis:

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_a^{\lambda_n} f(x, n)\,dx = \int\limits_a^\infty g(x)\,dx.$$

Először is azonnal beláthatjuk, hogy a jobboldali integrál konvergens; mert hiszen abból, hogy minden n-nél az $|f(x, n)| < M(x)$, következik, hogy $|g(x)| \leq M(x)$ és $\int\limits_a^\infty M(x)\,dx$ feltételünk szerint konvergens. Most már tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy ha adatik az ε pontosság, akkor ehhez tartozik N küszöb úgy, hogy

$$\left| \int\limits_a^{\lambda_n} f(x, n)\,dx - \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

ha $n > N$.

Evégből vegyük az adott ε harmadrészét és határozzuk meg először a

---

* Ebből a feltevésből az is következik, hogy $\int\limits_a^\infty f(x, n)\,dx$ konvergens, mert hiszen $|f(x, n)| < M(x)$ és $\int\limits_a^\infty M(x)\,dx$ konvergens; sőt azt is látjuk, hogy egy tetszés szerinti ε-hoz megállapítható olyan N küszöb, hogy $\left|\int\limits_\xi^\eta f(x, n)\,dx\right| < \varepsilon$, ha $\xi > N$ és $\eta > \xi$, *akárminő értéke legyen is n-nek;* mert hiszen csak N-et úgy kell választani, hogy a $\int\limits_\xi^\eta M(x)\,dx < \varepsilon$ legyen, ha $\xi > N$.

c számot úgy, hogy

$$\int_{\xi}^{\infty} M(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen, ha csak $\xi \geq c$. Ezt elérhetjük, mert $\int_a^{\infty} M(x)\,dx$ konvergens. És most menjünk el az n-el olyan messze, hogy az $a \ldots c$ közben minden x-re

$$|f(x, n) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(c-a)}$$

legyen, ha csak $n > N$. Ezt is elérhetjük, mert az első feltevésünk szerint az $a \ldots c$ közben $f(x, n)$ egyenletesen konvergál a $g(x)$-hez. És végül válasszuk az n-et olyan nagyra, hogy ne csak az előbb említett N-nél legyen nagyobb, hanem egyúttal λ_n is nagyobb legyen a c számnál. Ezt is megtehetjük, mert $\lim \lambda_n = \infty$. Ekkor:

$$\left| \int_a^{\lambda_n} f(x, n)\,dx - \int_a^{\infty} g(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^c f(x, n)\,dx + \int_c^{\lambda_n} f(x, n)\,dx - \int_a^c g(x)\,dx - \int_c^{\infty} g(x)\,dx \right| <$$

$$< \int_a^c \left| f(x, n) - g(x) \right| dx + \int_c^{\lambda_n} \left| f(x, n) \right| dx + \left| \int_c^{\infty} g(x)\,dx \right|.$$

Az első integrálban az integrándus kisebb $\frac{\varepsilon}{3(c-a)}$-nál, tehát az integrál kisebb $\frac{\varepsilon}{3}$-nál. A második integrálban az integrándus kisebb $M(x)$-nél és minthogy $\lambda_n > c$ és $M(x)$ pozitiv, tehát

$$\int_c^{\lambda_n} |f(x, n)|\,dx < \int_c^{\lambda_n} M(x)\,dx < \int_c^{\infty} M(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

A harmadik integrálra ugyanez áll, mert

$$\left| \int_c^{\infty} g(x)\,dx \right| \leq \int_c^{\infty} M(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3};$$

tehát valóban $$\left| \int_a^{\lambda_n} f(x, n)\,dx - \int_a^{\infty} g(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

ha csak n olyan nagy, hogy $\lambda_n > c$ (és $n > N$). Ezzel tehát kimutattuk, hogy:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{\lambda_n} f(x, n)\,dx = \int_a^{\infty} g(x)\,dx.$$

8. A $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_0^a f(x) \frac{\sin^2 nx}{x^2}\,dx$ **kiszámítása.** Legyen a pozitiv szám és $f(x)$ a $0 \ldots a$ közben (a határokat beleértve) korlátos, abszolut értékre egy M számnál kisebb, integrálható, a 0 helyen (jobboldalról) meghatározott határértékű, melyet $f(0)$-al jelölünk. Az a-tól jobbra eső x helyeken $f(x)$-et 0-sal egyenlővé tegyük. Ha x helyett nx-et vezetjük be az integrálba, akkor:

$$\frac{1}{n} \int_0^a f(x) \frac{\sin^2 nx}{x^2}\,dx = \int_0^{na} f\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

Ha a 0-tól jobbra egy $\alpha \ldots \beta$ szakaszt jelölünk meg, akkor, ha $\alpha < x < \beta$

$$\lim_{n=\infty} \frac{x}{n} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n=\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = f(0);$$

tehát az előbbi pontban $g(x)$-el jelölt határfüggvény most: $f(0)\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ és teljesítve van, hogy bármely $\alpha \ldots \beta$ közben az $f\left(\dfrac{x}{n}\right)\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ egyenletesen konvergál e határfüggvényhez. Az előbb $M(x)$-el jelölt függvény most a következő legyen: a $0 \ldots \gamma$ közben, ahol γ tetszés szerinti pozitiv szám: $M(x)$ mindenütt M legyen, a $\gamma \cdots \infty$ közben pedig $\dfrac{M}{x^2}$. Ugyanis $f\left(\dfrac{x}{n}\right)\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ abszolut értéke a $0 \ldots \gamma$ szakaszban akárminő n-re kisebb M-nél, (mert $\dfrac{\sin x}{x}$ maximuma e közben 1 és $\left|f\left(\dfrac{x}{n}\right)\right|$ feltevésünk szerint M-nél kisebb); a $\gamma \ldots \infty$ közben pedig kisebb: $\dfrac{M}{x^2}$-nél, tehát az előbbi pontban $M(x)$-el jelölt függvény a 2) alatti feltételt teljesíti. Végül pedig az $a, 2a, 3a, \ldots na, \ldots$ sorozat korlátlanul növekvő, mely az előbbi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$-nek felel meg és így a 7) alatt megállapított tétel értelmében:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{na} f\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = f(0) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

A jobboldalon álló integrál parciális integrálással átalakítható:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x}\, dx.$$

Az első tag 0, a második pedig, ha $2x$ helyett x-et teszünk, átmegy $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$-be, melyről már tudjuk, hogy: $\dfrac{\pi}{2}$; tehát eredményül ezt kaptuk:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_0^{a} f(x) \frac{\sin^2 nx}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Még egyszer megemlítjük, hogy $f(x)$-ről csak azt tettük fel, hogy a $0 \ldots a$ közben korlátos, integrálható és a 0 helyen jobboldali határértéke van. Minthogy a tetszés szerinti pozitiv szám, tehát

$$\lim \frac{1}{n}\left[\int_0^{a} f(x) \frac{\sin^2 nx}{x^2}\, dx - \int_0^{b} f(x) \frac{\sin^2 nx}{x^2}\, dx\right] = 0,$$

vagyis a és b akárminő pozitiv számok:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_a^{b} f(x) \frac{\sin^2 nx}{x^2}\, dx = 0.$$

Könnyen kiterjeszthető a talált eredmény erre a határértékre is:

$$\lim \frac{1}{n} \int_0^{a} f(x) \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx.$$

Ugyanis:

$$\frac{1}{n} \int_0^{a} f(x) \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{1}{n} \int_0^{a} f(x) \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 nx}{x^2}\, dx,$$

amely az imént tárgyalttól csak abban különbözik, hogy az előbbi $f(x)$ helyett

$f(x)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$ áll; minthogy pedig $\lim\limits_{x=0}\frac{x}{\sin x}=1$, tehát arra jutottunk, hogy

$$\lim \frac{1}{n}\int_0^a f(a)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}f(0).$$

Eddigelé a pozitiv számot jelentett; de azonnal belátható, hogy jelenthet negativ számot is. Ugyanis, ha x helyett $-x$-et tesszük, akkor

$$\lim \frac{1}{n}\int_0^{-a} f(x)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=\lim_{n=\infty}\left[-\frac{1}{n}\int_0^a f(-x)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx\right]=-\frac{\pi}{2}\lim_{x=0}f(-x).$$

Ha x a 0-hoz konvergál jobboldalról, akkor $-x$ baloldalról konvergál a 0-hoz; tehát, ha ezt a határértéket (mely az előbb $f(0)$-al jelölttől különbözhetik) $f(-0)$-al jelöljük [a jobboldalit, ennek megfelelően $f(+0)$-al] akkor tehát, ha a pozitiv szám,

$$\lim \frac{1}{n}\int_0^{-a} f(x)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=-\frac{\pi}{2}\lim f(-0).$$

Ebből egyúttal következik, hogy ha az alsó határ negativ, a felső pedig pozitiv, akkor

$$\lim \frac{1}{n}\int_{-a}^{+b} f(x)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=$$

$$=\lim_{n=0}\left[\frac{1}{n}\int_a^0 f(x)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx+\frac{1}{n}\int_0^b f(x)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 da\right]=\frac{\pi}{2}[f(+0)+f(-0)].$$

Ha az $f(x)$ a 0 helyen folytonos, akkor a két határérték megegyezik és így a jobboldalon $\pi f(0)$ lesz.*

Más, nevezetes integrálok kiszámításával később foglalkozunk.

* Az ilyen integrálokkal még tovább is foglalkozunk majd a Fourier-sorok elméletében, ahol *Fejér Lipót* szummáló eljárásában szerepelnek.

XII. FEJEZET.

HIPERELLIPTIKUS INTEGRÁLOK.

1. A hiperelliptikus integrál definiciója. Láttuk, hogy ha az integrándus x-nek és x első vagy másodfokú egész függvényéből vont négyzetgyöknek, a $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$-nak racionális kifejezése, akkor az integrál mindig kifejezhető az ismeretes függvényekkel. Legközelebbi feladatunk az olyan integrál vizsgálata, melynek integrándusa x-ből és x-nek 2-nél magasabb fokú racionális egész függvényéből vont négyzetgyökből a négy alapművelet segítségével keletkezik; tehát ha pl.:

$$X=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,$$

ahol m a 2-nél nagyobb egész szám, ilyenkor meghatározandó az

$$I=\int f(x, \sqrt{X})\,dx,$$

ahol az f integrándus az x és $\sqrt{X}$ racionális függvénye. Az ilyen integrált *elliptikus integrálnak* nevezzük, ha $m=3$, vagy $m=4$ és *hiperelliptikus integrálnak,* ha $m>4$.

Az $f(x, \sqrt{X})$ minden esetre ilyen alakú:

$$\frac{\varphi(x, \sqrt{X})}{\psi(x, \sqrt{X})},$$

ahol φ és ψ az x és $\sqrt{X}$ racionális egész függvényei. Minthogy pedig $\sqrt{X}$ minden páros kitevőjű hatványa racionális egész függvénye az x-nek és minden páratlan fokú hatványa ilyen alakú: $\varrho(x)\sqrt{X}$, ahol $\varrho(x)$ racionális egész függvény, tehát az integrál mindig ilyen alakra hozható

$$I=\int\frac{A+B\sqrt{X}}{C+D\sqrt{X}}\,dx,$$

ahol A, B, C, D racionális egész függvényei az x-nek. Ha még a számlálót és nevezőt $C-D\sqrt{X}$-el szorozzuk, akkor a nevező x rac. egész függvénye lesz és az integrál ilyen alakú:

$$\int \frac{M+N\sqrt{X}}{P}\,dx,$$

ahol M, N és P egész függvények. A racionális függvény integrálját már ismerjük, tehát a feladat ilyen integrálra vezet:

$$\int \frac{N\sqrt{X}}{P}\,dx,$$

vagy ha még $\sqrt{X}$-el szorzunk a számlálóban és nevezőben, a hiperelliptikus integrál ilyen alakú lesz:

$$\int \frac{A}{B\sqrt{X}}\,dx$$

és ha $\frac{A}{B}$-t parciális törtekre bontjuk — a $\varphi(x)$ egész részt külön választva — akkor azt látjuk, hogy voltaképpen csak *ilyen alakú integrálokkal kell foglalkoznunk:*

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{X}}, \quad K_r = \int \frac{dx}{(x-a)^r\sqrt{X}}.$$

A hiperelliptikus integrál tehát mindig előállítható (egy racionális és logarithmikus függvénytől eltekintve) az I_n és K_m alakú integrálokból ilyen alakban:

$$\Sigma\alpha_n I_n + \Sigma\beta_r K_r,$$

ahol α és β konstansok és n, r pozitiv egész számok.

2. Az I_n integrálok redukálása. Az $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{X}}\,dx$ integrált a következőképpen redukálhatjuk. Kiindulunk ebből a relációból:

$$(x^p\sqrt{X})' = px^{p-1}\sqrt{X} + \frac{1}{2}\frac{x^pX'}{\sqrt{X}} = \frac{px^{p-1}X + \frac{1}{2}x^pX'}{\sqrt{X}},$$

ahol p tetszés szerinti pozitiv egész szám, vagy 0.

A jobboldali szélső kifejezés számlálója x-nek $m+p-1$-edfokú egész függvénye. Az x^{m+p-1} együtthatója: $pa_0 + \frac{ma_0}{2}$, tehát 0-tól különböző és igy a fölírt reláció ilyen alakú:

$$(x^p\sqrt{X})' = \alpha_0\frac{x^{m+p-1}}{\sqrt{X}} + \alpha_1\frac{x^{m+p-2}}{\sqrt{X}} + \cdots + \alpha_{m+p-1}\frac{1}{\sqrt{X}},$$

ahol $\alpha_0 \neq 0$. Ha már most mindkét oldalon integrálunk, akkor egy tetzsés szerinti konstanstól eltekintve, erre jutunk:

$$x^p\sqrt{X} = \alpha_0 I_{m+p-1} + \alpha_1 I_{m+p-2} + \cdots + \alpha_{m+p-1} I_0$$

és ez azt mondja, hogy I_{m+p-1} egyszerűen (lineárisan) kifejezhető az $I_0, I_1, I_2, \ldots I_{m+p-2}$ által. Minthogy p 0, vagy pozitiv egész szám, tehát arra jutottunk, hogy az

$$I_0, I_1, I_2, \ldots I_{m-2}$$

által minden I_n kifejezhető, ha $n > m-2$. Eszerint tehát *minden* I_n *integrál kifejezhető ezen* $m-1$ *hiperelliptikus integrállal:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{X}}.$$

3. A K_r integrálok redukálása. A $K_r = \int \frac{dx}{(x-a)^r \sqrt{X}}$ integrált a következőképpen redukáljuk. Kiindulunk ebből a relációból:

$$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{1}{2} \frac{X'}{(x-a)^p \sqrt{X}} - p \frac{\sqrt{X}}{(x-a)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{2}(x-a)X' - pX}{(x-a)^{p+1}\sqrt{X}},$$

ahol p pozitiv egész szám.

Tegyük fel, hogy a nem gyöke az $X=0$ m-edfokú egyenletnek; akkor a jobboldali kifejezés számlálója, mely x-ben m-edfokú, nem tűnik el, ha $x=a$ tesszük. Jelöljük ezt a számlálót $\varphi(x)$-el, akkor $\varphi(x)$ Taylor-sorba fejtve:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m,$$

ahol feltételünk szerint $\varphi(a) \neq 0$. Ha a $p+1$-ik tag után jövő tagokat összefoglalva $(x-a)^{p+1}F(x)$-el jelöljük, vagyis

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + F(x)(x-a)^{p+1}$$

tesszük, ahol $F(x)$ racionális egész függvény, akkor tehát:

$$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{p+1}\sqrt{X}} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^p\sqrt{X}} + \cdots +$$
$$+ \frac{\varphi^{(p)}(a)}{p!(x-a)\sqrt{X}} + \frac{F(x)}{\sqrt{X}} \qquad \alpha)$$

és ha mindkét oldalon integrálunk:

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p} = \alpha_0 K_{p+1} + \alpha_1 K_p + \cdots + \alpha_p K_1 + \int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}\,dx$$

-re jutunk, ahol $\alpha_0 \neq 0$. Minthogy az utolsó integrál az előbbiek szerint $I_0, I_1, \ldots I_{m-2}$ által kifejezhető, tehát K_{p+1} kifejezhető lineárisan a $K_1, K_2, \ldots K_p$, $I_0, I_1, \ldots I_{m-2}$ által, akárminő pozitiv egész szám is a p; tehát K_2 kifejezhető K_1 és az I-k által és így K_3 is a K_1 és

I-k által stb., vagyis minden K_r *hiperelliptikus integrál ezen egyetlen:*

$$K_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$$

hiperelliptikus integrállal és az $I_0, I_1, \ldots I_{m-2}$ *integrálokkal fejezhető ki.*

Ha a az $X(x)=0$ egyenlet gyöke, akkor természetesen csak egyszeres gyöke lehet, mert ha $X=0$-nak többszörös gyöke volna, akkor $\sqrt{X}$-ből a gyöktényezők páros hatványait előre kiemelnők és ezzel a $\sqrt{X}$-et mindjárt kezdetben olyan $\sqrt{X_1}$-el helyettesítenők, melyben X_1-nek csak egyszerű gyöktényezői volnának. Feltehetjük tehát, hogy $\varphi(a)=0$, de $\varphi'(a)\neq 0$, mert

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)X' - pX$$

és ebből:
$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}X' + \frac{1}{2}(x-a)X'' - pX',$$

tehát
$$\varphi'(a) = \left(\frac{1}{2} - p\right)X'(a) \neq 0.$$

Az előbbi $\alpha)$ alatti egyenlet tehát most így írható:

$$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^p}\right]' = \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^p\sqrt{X}} + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(a)}{p!(x-a)\sqrt{X}} + \frac{F(x)}{\sqrt{X}}$$

és ha ismét integrálunk mindkét oldalon, azt kapjuk, hogy a K_p kifejezhető (lineárisan) $K_{p-1}, K_{p-2}, \ldots$ és $I_0, I_1, \ldots I_{m-2}$ által. Vagyis ebben az esetben már K_1 kifejezhető $I_0, I_1, \ldots I_{m-2}$-vel és így valamennyi K integrál előállítható az I integrálokkal. Ha tehát *a az $X=0$ egyenlet gyöke, akkor minden*

$$K_r = \int \frac{dx}{(x-a)^r\sqrt{X}}$$

integrál előállítható az $I_0, I_1, I_2, \ldots I_{m-2}$ *segítségével.*

4. Az X páratlan fokúnak tekinthető. Ha X páros fokú és gyökei rendre: $a_1, a_2, \ldots a_{2s}$, azaz

$$X = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2s}),$$

akkor vezessük be az x helyett a z variábilist ezzel a szubstitucióval:

$$z = \frac{1}{x-a_1}, \quad \text{vagyis:} \quad x = a_1 + \frac{1}{z},$$

tehát az
$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx$$

hyperelliptikus integrálban:

$$\sqrt{X} = \sqrt{\frac{1}{z}\left(a_1 - a_2 + \frac{1}{z}\right)\left(a_1 - a_3 + \frac{1}{z}\right) \cdots \left(a_{1s} - a_2 + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^s}\sqrt{Z},$$

ahol Z a z-nek $2s-1$-edfokú racionális egész függvénye. És ha még $dx = -\frac{dz}{z^2}$ tesszük, arra jutunk, hogy az adott hiperelliptikus integrál ilyen alakú:

$$\int \varphi(z, \sqrt{Z})\, dz$$

ahol Z már csak $2s-1$-edfokú. *Mindig feltehető tehát, hogy az integrálban szereplő X páratlan fokú.* Az előbbiekkel egybevetve ezt az eredményt, mondhatjuk tehát, hogy *lényegben csakis ilyen hiperelliptikus integrálokkal kell foglalkozni:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}},\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{x^{2s-3}\,dx}{\sqrt{X}},\ \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}},$$

ahol X $2s-1$-edfokú racionális egész függvény.

Ez integrálok algebrai, trigonometriai, logarithmusos stb. ismeretes függvényekkel rendszerint nem fejezhetők ki, hanem új függvények.

5. Az elliptikus integrál redukálása. Ha az előbb használt X az x-nek harmad- vagy negyedfokú függvénye, akkor az x-ből és $\sqrt{X}$-ből a négy alapművelettel készített $f(x, \sqrt{X})$ integrálja:

$$\int f(x, \sqrt{X})\, dx$$

elliptikus integrál. A 4. alatt láttuk, hogy ha X negyedfokú, akkor ez az integrál mindig átalakítható új változó bevezetésével, mely az x-el lineárisan függ össze, úgy, hogy az elliptikus integrálban szereplő X harmadfokú legyen. A 2. és 3. alattiból következik, hogy ez esetben voltaképpen csak a következő elliptikus integrálok szerepelnek:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}},\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}},\ \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}},$$

melyeket *első-, másod- illetőleg harmadfajú elliptikus integráloknak nevezünk.* Ezekkel, valamint a belőlük inverzióval keletkező új függvényekkel, az ú. n. elliptikus függvényekkel majd a függvénytanban tüzetesebben foglalkozunk.

A gyakorlati számításokban még mindig gyakran szerepelnek azok az elliptikus integrálok, amelyekben X negyedfokú és valós együtthatójúak. Az ilyen integrálokat egyszerűbb alakra szoktuk redukálni, az ú. n. *kanonikus alakra.* Ugyanis, legyen

$$X = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$

ahol az együtthatók valós számok. Azt állítjuk, hogy *az x változó lineáris reális transzformációjával mindig elérhetjük, hogy az X átmegy az*

$$Y = b_0 y^4 + b_2 y^2 + b_4$$

alakba, melyben az y^3 és y együtthatói eltűnnek. Ezt a következőként láthatjuk be: Legyenek az $X=0$ egyenlet gyökei: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Ha mind a 4 valós és $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$, akkor

$$X = a_0 [x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) x + \alpha_1 \alpha_2] [x^2 - (\alpha_3 + \alpha_4) x + \alpha_3 \alpha_4]$$

tesszük; ha pedig a gyökök között képzetesek is vannak, akkor a konjugált párokkal készítjük el a quadratikus tényezőket, melyek tehát mégis valós együtthatójúak lesznek. Mindenképpen mondhatjuk tehát, hogy

$$X = a_0 (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

ahol a, b, c, d valósak. Két esetet különböztetünk meg:

a) Ha $a = c$, akkor tegyük:

$$x = y - \frac{a}{2}.$$

Ezzel elérjük, hogy:

$$x^2 + ax + b = y^2 + c, \quad x^2 + cx + d = y^2 + e$$

lesz, vagyis: $$X = a_0 (y^2 + g)(y^2 + e),$$

tehát a kívánt alakú.

b) Legyen $a \neq c$, azaz $\alpha_1 + \alpha_2 \neq \alpha_3 + \alpha_4$. Még egyszer megjegyezzük, hogy ha mind a négy gyök valós, akkor a gyökök megnevezése úgy választandó, hogy $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$, ha pedig képzetesek is vannak közöttük, akkor α_1 és α_2, vagy α_3 és α_4 legyenek a konjugált párok.

Az x helyett bevezetjük az

$$x = \frac{p + qt}{1 + t}$$

substitucióval az új t variábilist, akkor az

$$\int f(x, \sqrt{X})\, dx$$

integrál ilyen alakú lesz:

$$\int \varphi(t, \sqrt{T})\, dt,$$

ahol T az X-ből keletkezik a jelzett szubsztitucióval [ha még $(1+t)^4$-el szorozzuk], azaz:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = \frac{1}{(1+t)^4} [a_0 (p + qt)^4 + a_1 (p + qt)^3 (1 + t) +$$
$$+ a_2 (p + qt)^2 (1 + t)^2 + a_3 (p + qt)(1 + t)^3 + a_4 (1 + t)^4] = \frac{T}{(1+t)^4}.$$

A $T=0$ egyenlet gyökei az

$$x=\frac{p+qt}{1+t}$$

relációból azonnal kiadódnak. Ugyanis innen:

$$t=\frac{p-x}{x-q}$$

és így a $T=0$ gyökei a következők:

$$\beta_1=\frac{p-\alpha_1}{\alpha_1-q},\quad \beta_2=\frac{p-\alpha_2}{\alpha_2-q},\quad \beta_3=\frac{p-\alpha_3}{\alpha_3-q},\quad \beta_4=\frac{p-\alpha_4}{\alpha_4-q}.$$

Azt fogjuk már most megmutatni, hogy p *és* q*-ra találunk olyan valós értékeket, hogy a* $T=0$ *ezen gyökei közül:*

$$\beta_1=-\beta_2,\quad \beta_3=-\beta_4$$

legyen, vagyis, hogy T*-ben a* t^3 *és* t *együtthatói eltünjenek, tehát* T *ilyen alakú legyen:*

$$T=a_0\,[t^4+ct^2+d].$$

Ezt az állítást a következőképpen bizonyíthatjuk be: Legyenek először is az α_1, α_2, α_3, α_4 gyökök valósak és így, miként említettük: $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4$. p és q tehát úgy határozandók meg,* hogy:

$$\frac{p-\alpha_1}{\alpha_1-q}+\frac{p-\alpha_2}{\alpha_2-q}=0;\quad \frac{p-\alpha_3}{\alpha_3-q}+\frac{p-\alpha_4}{\alpha_4-q}=0$$

legyen. Ha mindegyik törthöz 1-et adunk, ezek az egyenletek ilyen alakúak lesznek:

$$(q-p)\left[\frac{1}{q-\alpha_1}+\frac{1}{q-\alpha_2}\right]=2,\quad (q-p)\left[\frac{1}{q-\alpha_3}+\frac{1}{q-\alpha_4}\right]=2,$$

miből: $$\frac{1}{q-\alpha_1}+\frac{1}{q-\alpha_2}=\frac{1}{q-\alpha_3}+\frac{1}{q-\alpha_4}=\frac{2}{q-p}$$

és így először is a q meghatározására ez az egyenletünk van:

$$f(q)=\frac{1}{q-\alpha_1}+\frac{1}{q-\alpha_2}-\frac{1}{q-\alpha_3}-\frac{1}{q-\alpha_4}=0.$$

Azt kell csak megmutatnunk, hogy ennek, a q-ban másodfokú egyenletnek valós gyökei vannak. Ezt minden számítás nélkül azonnal beláthatjuk. Ugyanis ha q-nak ezt az értéket adjuk: $\alpha_1+\varepsilon$, ahol ε igen kis pozitiv szám, akkor az első tag igen nagy pozitiv szám lesz, mely az ε kellő választásával nagyobbá tehető a többi tag abs. értékeinek összegénél, tehát a baloldalon álló kifejezés

* L. Hermite: Cours réd. par Andoyer p. 12.

pozitiv. Ha pedig q-nak ezt az értéket adjuk: $\alpha_2-\varepsilon$, akkor a második tag igen nagy absz. értékű negativ szám lesz és az egész kifejezés negativ lesz, tehát az egyenletnek $\alpha_1+\varepsilon$ és $\alpha_2-\varepsilon$ között van gyöke, bárminő kis szám legyen is az ε, vagyis α_1 és α_2 között van gyöke. Éppen így mutathatjuk meg, hogy α_3 és α_4 között is van gyöke. Már az első állítás is elég annak a bizonyítására, hogy az $f(q)=0$ gyökei valósak. Ebből már az

$$\frac{1}{q-\alpha_1}+\frac{1}{q-\alpha_2}=\frac{2}{q-p}$$

felhasználásával az is következik, hogy p valós. Így tehát kimutattuk, hogy ha mind a négy gyök valós, akkor vannak olyan p és q valós értékek, melyek a $T=0$ egyenlet gyökei között a $\beta_1=-\beta_2$, $\beta_3=-\beta_4$ egyenlőségeket hozzák létre.

Ha pl. α_3 és α_4 kapcsolt értékek, de α_1 és α_2 valósak, az előbbi okoskodással akkor is célhoz jutunk. Ugyanis az $f(q)=0$ egyenletnek, miként láttuk, α_1 és α_2 között van gyöke, tehát kell, hogy a másik gyöke is valós legyen, mert hiszen az $f(q)=0$ együtthatói valósak. Ugyanígy áll a dolog, ha α_1 és α_2 kapcsoltak és α_3 meg α_4 valósak.

Hátra van még az az eset, midőn α_1 és α_2, valamint α_3 és α_4 is konjugáltak. $f(q)$ így írható:

$$f(q)=\frac{q^2(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)+\cdots}{q^4-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)q^3+\cdots},$$

tehát, ha q-t elég nagy absz. értékűnek vesszük, akkor $f(q)$ olyan jelű, mint

$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$$

és pedig q akár pozitiv, akár negativ.

Ezt megjegyezvén, tegyük a q helyett ezt a valós számot: $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Ekkor:

$$f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)=-\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}{\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\alpha_3\right)\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\alpha_4\right)}.$$

A nevező, amelyben két konjugált szám szorzata áll, pozitiv, tehát

$$\operatorname{sgn} f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)=-\operatorname{sgn}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4).$$

Éppen így következik, hogy:

$$\operatorname{sgn} f\left(\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\right)=-\operatorname{sgn}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4),$$

minthogy pedig $\operatorname{sgn} f(q) = \operatorname{sgn}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)$ ha $|q|$ elég nagy, tehát az $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \dots \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}$ közön kívül mindkét oldalon egy-egy valós gyöke van az $f(q)=0$ egyenletnek. Ezzel tehát minden esetre kimutattuk, hogy p és q valósak. Tehát mindig meghatározhatjuk a p és q valós számokat úgy, hogy a velük megalkotott

$$x = \frac{p+qt}{1+t}$$

szubsztitució az $X(x)$ negyedfokú függvényt átviszi a $T(t)$-be, melyben t^3 és t együtthatói eltűnnek.

Ezzel a szubsztitucióval tehát, miként említettük, minden elliptikus integrál átvihető ilyen alakúba:

$$\int f(t, \sqrt{T})\, dt,$$

ahol $T=t^4+ct^2+d$.

A hiperelliptikus integrálokra levezetett általános tételből következik, hogy minden ilyen integrál kifejezhető algebrai, logarithmusos stb. ismeretes alakú függvényekkel és ilyen integrálokkal:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{T}}.$$

Ezek közűl a második egyszerű transzformációval redukálható ismeretes alakú integrálra. Ugyanis, ha: $t^2=z$ tesszük, akkor

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^4+ct^2+d}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+cz+d}},$$

melynél a négyzetgyök jele alatt csak másodfokú függvény áll.

A negyedik integrált még egy kissé átalakítjuk. Ugyanis, ha $t+a$-val szorzunk a számlálóban és nevezőben, erre jutunk:

$$\int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{T}} = \int \frac{t\,dt}{(t^2-a^2)\sqrt{T}} + a\int \frac{dt}{(t^2+a^2)\sqrt{T}}.$$

A jobboldali első integrált a $t^2=z$ szubsztitucióval transzformáljuk ilyen alakúra:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z-a^2)\sqrt{z^2+cz+d}}$$

és ha itt megint $z-a^2=u$ tesszük, az integrál ilyen alakú lesz:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+\alpha u+\beta}}.$$

Ha erre az integrálra a 318. lapon tárgyalt transzformációt alkalmazzuk, akkor ismeretes függvényekkel (arcsin vagy logarithmus segítségével) kiszámíthatjuk.* Így tehát csakis ez a háromféle integrál marad:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^2+\beta}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^2+\beta}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+\gamma)\sqrt{x^4+\alpha x^2+\beta}},$$

amelyek a *Legendre*-féle első-, másod- és harmad-fajú elliptikus integrálok.

* Igy pl., ha β pozitiv, akkor $\sqrt{u^2+\alpha u+\beta}=\sqrt{\beta}+vu$ tesszük, miből:

$$u^2+\alpha u+\beta=\beta+2\sqrt{\beta}\,.\,vu+v^2u^2,$$

vagyis:

$$u=\frac{2\sqrt{\beta}\,.\,v-\alpha}{1-v^2}.$$

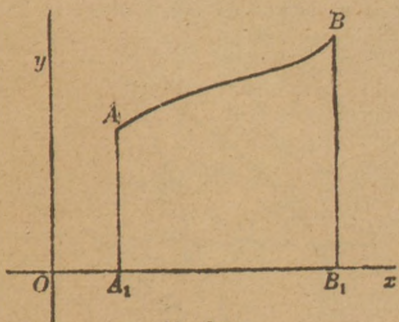
XIII. FEJEZET.

AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA.

1. Az integrálszámítás alkalmazása a terület meghatározására. Ha az $y=f(x)$ egyértékű függvény az $a \ldots b$ közben pozitiv, akkor az x tengely, az AA_1 és BB_1 ordináták és az AB görbe által bezárt területet az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integrállal értelmeztük (l. 268. lap). Az ott követett eljárást könnyen alkalmazhatjuk abban az esetben is, midőn a görbe egyenlete ferde-



98. ábra.

szögű koordinátarendszerben van megadva. Legyen a koordinátatengelyek hajlásszöge ω (99. ábra). Osszuk fel az A_1B_1 közt tetszés szerinti részekre az:

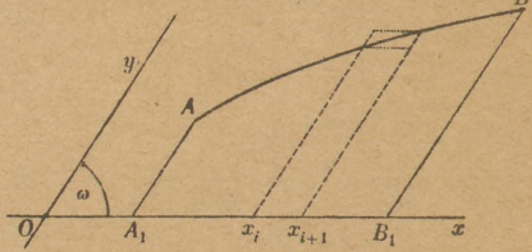
$$a,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ b$$

pontokkal. Az $x_i \ldots x_{i+1}$ szakaszban a függvény maximuma legyen M_i, minimuma pedig m_i és alkossuk meg a

$$\sin\omega\,[M(x_1-a)+M_1(x_2-x_1)+\cdots+M_n(b-x_n)]$$

és a
$$\sin\omega\,[m(x_1-a)+m_1(x_2-x_1)+\cdots+m_n(b-x_n)]$$

összeget. Az első olyan paralellogrammokból áll, melyekből alkotott idom a görbe vonal által határolt területet magában foglalja, a második pedig benne van az A_1ABB_1 idomban. E két összegre alkal-



99. ábra.

mazhatjuk a 268. lapon megállapitott eljárást és ha az ottani értelemben véve a limeszt, a

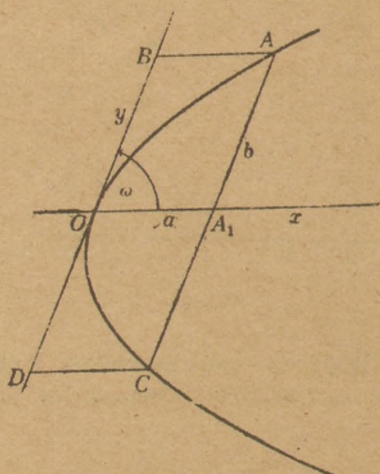
$$\lim \Sigma m_i(x_{i+1}-x_i) = \lim \Sigma M_i(x_{i+1}-x_i),$$

akkor e közös limeszt $\int_a^b f(x)\,dx$-el jelöljük és az A_1ABB_1 terület mértékszáma gyanánt

$$\sin\omega \int_a^b f(x)\,dx$$

-et tekintjük.

Példák: a) *Parabola-rész területe.* Ha a parabolát egyik átmérőjére és az átmérő végpontjában vont érintőjére vonatkoztatjuk, akkor egyenlete: $y^2=2px$ és ha a tengelyek szöge: ω, akkor az OA_1A idom területe: $[OA_1=a]$



100. ábra.

$$t = \sin\omega \int_0^a \sqrt{2p}\,.\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,.\sin\omega\, x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sin\omega\,.\,x\sqrt{2px}\right]_0^a = \left[\frac{2}{3}\sin\omega\, xy\right]_0^a = \frac{2}{3}\sin\omega\, ab,$$

vagyis e parabola rész területe az OA_1AB parallelogramm $\frac{2}{3}$ része.

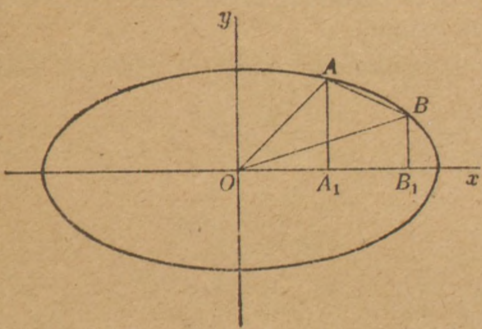
Ha ugyanezt a számítást a tengely alatti részre is elvégezzük, azt kapjuk, hogy az AC húr által elvágott terület, a parabolaszegmentum, az $ABCD$ parallelogramm $\frac{2}{3}$ része.

b) *Ellipszis-rész területe.* Határozzuk meg az ABB_1A_1 ellipszis rész területét. Az ellipszis egyenlete:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

[a a nagy tengely, b a kis tengely fele], tehát a kérdéses terület:

$$t = \frac{b}{a}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$



101. ábra.

De $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ parciálisan integrálva:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx +$$
$$+ a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

és ebből:
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},$$

tehát:
$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x_2}{2}\sqrt{a^2-x_2^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x_2}{a} - \frac{x_1}{2}\sqrt{a^2-x_1^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x_1}{a}.$$

és így:
$$t = \frac{x_2y_2 - x_1y_1}{2} + \frac{ab}{2}\left[\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right].$$

A negyedellipszis területét ebből megkapjuk, ha $x_1=0$, $x_2=a$ tesszük. Ha $x_1=0$, akkor $y_1=b$, ha $x_2=a$, akkor $y_2=0$, tehát az első tag: 0. A második pedig:

$$\arcsin\frac{x_2}{a} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin\frac{x_1}{a} = \arcsin 0 = 0,$$

tehát a negyedellipszis területe: $\frac{ab\pi}{4}$ és így az egész ellipszis területe: $ab\pi$.

A t-re vonatkozó formulát még egy kissé átalakítjuk; ugyanis az első tagban:

$$\frac{x_2y_2 - x_1y_1}{2} = \frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2} - \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{2}.$$

A jobboldali első tag nem más, mint az A_1ABB_1 trapéz területe, a második tag pedig az OAB háromszög területe, negativ jellel. Jelöljük a trapéz területét tr-el, az AB húr fölötti ellipszis-segmentum területét: sg-vel, az OAB háromszögét h-val és vegyük tekintetbe, hogy a kiszámított t terület: a trapézből és segmentumból áll; akkor tehát az előbbi formula így hangzik:

$$tr + sg = tr - h + \frac{ab}{2}\left[\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right],$$

vagyis:
$$sg + h = \frac{ab}{2}\left[\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right].$$

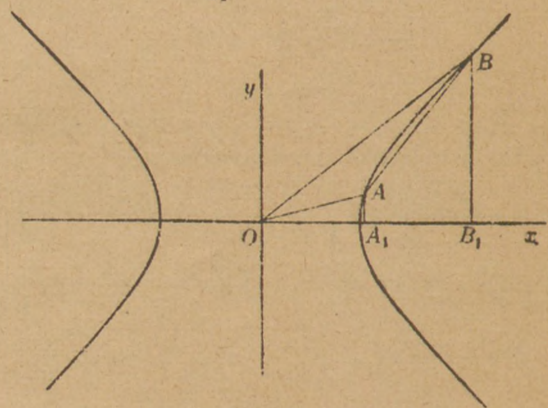
Azt látjuk ebből, hogy az $\frac{ab}{2}\left[\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right]$ nem más, mint az AOB ellipsziscikk területe.

c) *Hiperbola-rész területe.* A hiperbola egyenlete derékszögű koordinátákban:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Az A_1ABB_1 rész területe:

$$\frac{b}{a}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$



102. ábra.

Az $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ határozatlan integrál:

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right],$$

tehát a keresett terület:

$$t = \frac{x_2y_2 - x_1y_1}{2} - \frac{ab}{2}\log\frac{\frac{x_2}{a}+\frac{y_2}{b}}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}}.$$

Ha megint tekintetbe vesszük, hogy $t = tr + sg$ (trapéz + segmentum) és hogy az első tag: $\frac{x_2y_2 - x_1y_1}{2} = tr + h$ (trapéz + OAB háromszög és pedig most h pozitiv jellel, mert OAB a pozitiv forgási iránynak felel meg), akkor arra jutunk, hogy az OAB hiperbolacikk területe:

$$OAB \text{ cikk} = \frac{ab}{2} \log \frac{\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b}}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}.$$

Ha a cikket a hiperbola csúcsától számítjuk, akkor $x_1 = a$, $y_1 = 0$ és így a cikk területe:

$$OPB = \frac{ab}{2} \log \left(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b}\right).$$

Ha a hiperbola egyenlő szárú és $a = b = 1$ és x_2, y_2 helyett egyszerűen x, y tétetik, akkor a hiperbolacikk területére a következő egyszerű formulát kapjuk:

$$OPB = \frac{1}{2} \log (x + y).$$

Jelöljük az *OPB* cik területét u-val: akkor tehát

$$x + y = e^{2u}.$$

De a jelen esetben a hiperbola egyenlete:

$$x^2 - y^2 = 1, \quad \text{azaz} \quad (x-y)(x+y) = 1;$$

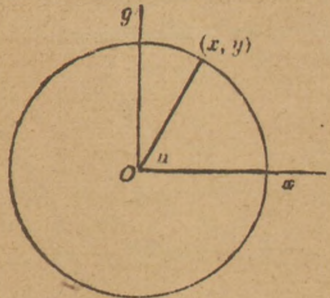
tehát

$$x - y = e^{-2u},$$

miből:

$$x = \frac{e^{2u} + e^{-2u}}{2}; \quad y = \frac{e^{2u} - e^{-2u}}{2}.$$

A szegmentum végpontjának koordinátái tehát ilyen egyszerű alakban fejezhetők ki a szegmentum területe által. [Megjegyezzük, hogy az egység sugarú körben hasonlóan áll a dolog. Ha a körcikk területét u-val jelöljük,



103. ábra.

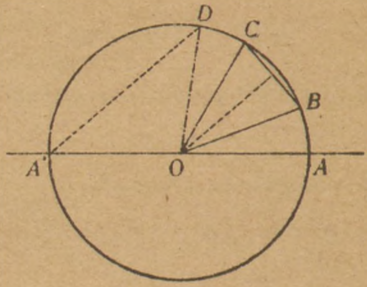
akkor $2u$ a megfelelő középponti szög absz. mértékszáma és így: $x = \cos 2u$, $y = \sin 2u$, vagy tudva (II. kötet, *Végtelen sorok*), hogy

$$\cos 2u = \frac{e^{2iu} + e^{-2iu}}{2} \quad \text{és} \quad \sin 2u = \frac{e^{2iu} - e^{-2iu}}{2i},$$

az analogiát azonnal észrevesszük. Az analogia jobb feltüntetése céljából már itt bevezetjük azokat a jelöléseket, amelyeket később gyakrabban használunk; t. i.: az $\frac{e^u + e^{-u}}{2}$ függvényt $\operatorname{Cos} u$-val jelöljük és hiperbolás cosinusnak mondjuk. Az $\frac{e^u - e^{-u}}{2}$ pedig $\operatorname{Sin} u$-val jelöljük és hiperbolás sinus-nak mondjuk. A Cos u és Sin u között ez a reláció áll fönn:

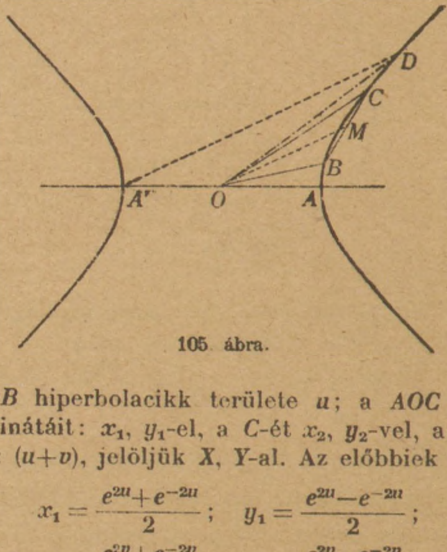
$$\mathrm{Cos}^2 u - \mathrm{Sin}^2 u = \frac{e^{2u}+2+e^{-2u}}{4} - \frac{e^{2u}-2+e^{-2u}}{4} = 1.]$$

Felhasználjuk ezt az alkalmat arra, hogy megismertessük a *hiperbolás függvények összeadási tételét* és e tételnek igen érdekes geometriai értelmezését, mely a kör és az egyenszárú hiperbola analogiájára újabb adattal szolgál. Az $AOB=u$ középponti szög meghatározza a körön a B pontot; az $AOC=v$ pedig a C pontot. Keressük meg azt a D pontot, melynek $u+v$ középponti szög felel meg. Ez a kör esetében igen egyszerűen végezhető; nem kell egyebet tennünk, mint az u szöghöz folytatólag felmérni a v szö-



104. ábra.

get. A D pont meghatározásának egy másik egyszerű módja a következő: \ BC húr középpontját kössük össze O-val. Ez az egyenes az OA-hoz $\frac{u+v}{2}$ szög alatt hajlik. Ehhez vonjunk az A ellenpontjából A'-ből párhuzamosat, mely a kört D-ben metszi. Minthogy az $AA'D$ kerületi szög $\frac{u+v}{2}$, tehát a AOD középponti szög $u+v$ lesz. Megmutatjuk, hogy ez a szerkesztés az egyenlőszárú hiperbola esetében is alkalmazható.



105. ábra.

Legyen az AOB hiperbolacikk területe u; a AOC cikk területe: v és jelöljük a B koordinátáit: x_1, y_1-el, a C-ét x_2, y_2-vel, a D-ét, melyre nézve AOD cikk területe: $(u+v)$, jelöljük X, Y-al. Az előbbiek szerint tehát:

$$x_1 = \frac{e^{2u}+e^{-2u}}{2}; \quad y_1 = \frac{e^{2u}-e^{-2u}}{2};$$

$$x_2 = \frac{e^{2v}+e^{-2v}}{2}; \quad y_2 = \frac{e^{2v}-e^{-2v}}{2};$$

$$X=\frac{e^{2(u+v)}+e^{-2(u+v)}}{2}; \quad Y=\frac{e^{2(u+v)}-e^{-2(u+v)}}{2}.$$

Ezen egyenletekből:

$$e^{2u}=x_1+y_1; \quad e^{-2u}=x_1-y_1$$

$$e^{2v}=x_2+y_2; \quad e^{-2v}=x_2-y_2$$

és így:

$$X=\frac{e^{2(u+v)}+e^{-2(u+v)}}{2}=\frac{(x_1+y_1)(x_2+y_2)+(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{2}=x_1x_2+y_1y_2$$

és hasonlóképpen:

$$Y=x_1y_2+x_2y_1.$$

[Ezen képletek a hiperbolikus függvények összeadási tételei, melyek így írhatók az előbbi jelölés szerint: $2u$ és $2v$ helyett α és β-t téve:

$$\mathrm{Cos}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta,$$

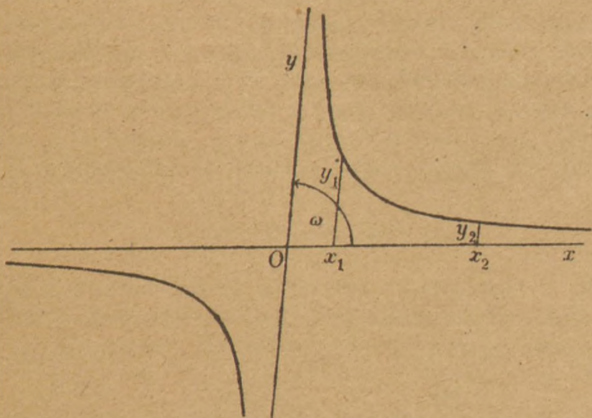
$$\mathrm{Sin}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta.]$$

Ha X és Y ezen kifejezéseit tekintetbe vesszük, akkor könnyen igazolhatjuk azt, hogy:

$$Y=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}(X+1).$$

Az $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$ az OM egyenes irányhatározója, ha M a BC felező pontja; tehát a fölírt egyenlet azt fejezi ki, hogy (X, Y) pont az A' e lencsúcson át az OM-mel párhuzamos egyenesnek a hiperbolával való metszéspontja. Az $u+v$ hiperbolacikkhez tartozó D pontot tehát éppen úgy határozhatjuk meg, mint az $u+v$ körcikkhez tartozó D pontot.

Ha a hiperbolát az aszimptotáira, mint koordináta tengelyekre vonatkoztatjuk, akkor nagyon egyszerű alakú az egyenlete. Ez az egyenlet ugyanis:



106. ábra.

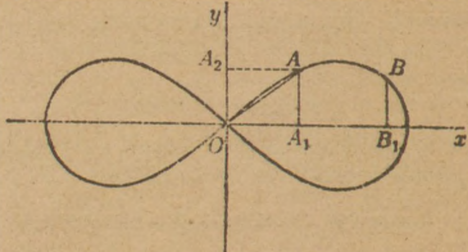
$xy=k^2$ és így az ábrában feltüntetett terület, ha az aszimptoták hajlásszöge: ω:

$$\sin\omega\int_{x_1}^{x_2} y\,dx=k^2\sin\omega\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x}=k^2\sin\omega\log\frac{x_2}{x_1}.$$

d) *A lemniszkáta-rész területe.* A lemniszkáta egyenlete a koordinátarendszer és a hosszegység alkalmas választásával:

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2.$$

Az A_1ABB_1 rész területét akarjuk meghatározni. Nagyon körülményes lenne ezen egyenletnek y-ra való megoldása. Azért az x helyett új variabilist vezetünk be, azaz x-et és ezzel együtt y-t is mint egy új t változó függvényeit állítjuk elő. Erre a következő meggondolással jutunk. Képzel-



107. ábra.

jünk egy oly kört, mely a kezdőponton megy át és centrumának koordinátái: $\frac{t}{2}$, $\frac{t}{2}$, tehát rádiusa $\frac{t}{\sqrt{2}}$. E kör egyenlete:

$$x^2+y^2=t(x+y).$$

Határozzuk meg e kör metszését a lemniszkátával. Evégből tegyük az x^2+y^2 helyébe a lemniszkáta egyenletében a $t(x+y)$-t, miből

$$t^2(x+y)^2=x^2-y^2$$

keletkezik és $x+y$-nal egyszerűsítvén:

$$t^2(x+y)=x-y. \qquad \alpha)$$

Ez azt jelenti, hogy eltekintve azon pontoktól, amelyekben az (elhagyott) $x+y=0$ egyenes metszi a lemniszkátát, vagyis a kezdőponttól eltekintve, a körnek és a lemniszkátának ugyanott van a metszése, ahol a most nyert $t^2(x+y)=x-y$ egyenes a kört (vagy a lemniszkátát) metszi. A körnek ezen egyenessel, mely a kezdőponton átmegy, ezen a ponton kívül csak egy metszéspontja van, amely könnyen meghatározható. E metszéspont koordinátái:

$$x=\frac{t+t^3}{1+t^4}, \quad y=\frac{t-t^3}{1+t^4}. \qquad \beta)$$

Íme tehát a szerkesztett körnek a lemniszkátával a kezdőponttól eltekintve csak egy metszéspontja van. Ez a metszéspont változik a t-vel; de az az érdekes, hogy e metszéspont koordinátái: t-nek igen egyszerű racionális függvényei.

A kívánt területet az $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ integrál szolgáltatja. De most x helyett a t változót vezetjük be a $\beta)$ alatti egyenletek segítségével. A transzformáció céljából meg kell határoznunk a dx-et; ez:

$$dx=\frac{(1-t^2)(1+4t^2+t^4)}{(1+t^4)^2}\,dt.$$

Az új határok is könnyen kiszámíthatók. Ugyanis az $x^2+y^2=t(x+y)$-ból, mely a transzformációra szolgált, azt kapjuk, hogy az x_1-hez, illetőleg x_2-hez tartozó t értékek:

$$t_1 = \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1+y_1}, \quad t_2 = \frac{x_2^2+y_2^2}{x_2+y_2}.$$

Már most tehát y helyébe: $\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}$-t és dx helyébe $\frac{(1-t^2)(1+4t^2+t^4)}{(1+t^4)^2}dt$-t téve, a keresett integrál:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{t(1-t^2)^2(1+4t^2+t^4)}{(1+t^4)^3}\,dt, \qquad \gamma)$$

amely a racionális függvények integrációjára vonatkozó eljárásunk szerint kiszámítható.

De jelentékenyen egyszerűsítjük a számítást, ha az OAA_1 területet keressük és még inkább, ha az OAA_1 terület helyett csak az OA szegmentum S területét határozzuk meg.* Jelöljük az A pont koordinátáit x_1, y_1-el; ekkor az egész OAA_1 rész területe $\int_0^{x_1} y\,dx$. Ugyanilyen meggondolással állíthatjuk azt is, hogy az OAA_2 kiegészítő rész területét megkapnók, ha $\int x\,dy$ integrált számítanók ki és pedig y szerint integrálva 0-tól y_1-ig, ha $OA_2 = y_1$. De ha az integrálokat a t bevezetésével transzformáljuk, akkor mindkét integrál, úgy az $\int y\,dx$, mint az $\int x\,dy$ határai ugyanazok lesznek: 0 és t_1, mert hiszen ha t_1 az x_1-hez tartozó értéke a t-nek, ugyanez tartozik az y_1-hez is. Az S szegmentum e két terület által egyszerűen fejezhető ki. Az ábrából látjuk, hogy

$$S + \frac{x_1 y_1}{2} = \int_0^{x_1} y\,dx$$

és

$$\frac{x_1 y_1}{2} - S = \int_0^{y_1} x\,dy,$$

tehát:

$$S = \frac{1}{2}\Big[\int_0^{x_1} y\,dx - \int_0^{y_1} x\,dy\Big].$$

Az első integrált már transzformáltuk. A $\gamma)$ alattiból következik, hogy (x_1 helyett 0, x_2 helyett x_1-et és megfelelően t_1 helyett 0 és t_2 helyett t_1-et téve)

$$\int_0^{x_1} y\,dx = \int_0^{t_1} \frac{t(1-t^2)^2(1+4t^2+t^4)}{(1+t^4)^3}\,dt.$$

Most a második integrált is transzformáljuk a t által, vagyis:

$$x = \frac{t+t^3}{1+t^4}; \qquad dy = \frac{1-3t^2-3t^4+t^6}{(1+t^4)^2}\,dt = \frac{(1+t^2)(1-4t^2+t^4)}{(1+t^4)^2}\,dt$$

-t tesszük, akkor

$$\int_0^{y_1} x\,dy = \int_0^{t_1} \frac{t(1+t^2)^2(1-4t^2+t^4)}{(1+t^4)^3}\,dt$$

következik, miből:

$$\int_0^{x_1} y\,dx - \int_0^{y_1} x\,dy = \int_0^{t_1} \frac{4t^3}{(1+t^4)^2}\,dt$$

* Ha y''-t kiszámítanók, akkor a szemlélettől függetlenül is meggyőződhetnénk arról, hogy az OA ív felülről nézve domború, tehát az OAA_1 terület nagyobb az OAA_1 háromszög területénél.

integrálra jutunk, de az $\int \frac{4t^3}{(1+t^4)^2}\,dt$ határozatlan integrál $-\frac{1}{1+t^4}$, tehát

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+t_1^4)}=\frac{t_1^4}{2(1+t_1^4)}$$

és ha t_1^2 helyébe visszatesszük az *α)* alatti egyenletből a

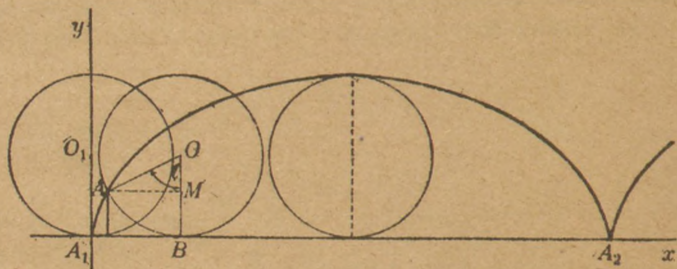
$$t_1^2=\frac{x_1-y_1}{x_1+y_1}$$

eredeti értéket, akkor azt találjuk, hogy:

$$S=\frac{(x_1-y_1)^2}{4(x_1^2+y_1^2)}.$$

Ha $x_1=1$, $y_1=0$, akkor $S=\frac{1}{4}$ a lemniszkáta negyedrészének a területe; az egész lemniszkáta területe: 1.

e) *A cyklois területe.* Képzeljük, hogy az r sugarú kör az X tengely mentén gördül. Bizonyos idő mulva a B pontban érinti a tengelyt. Ez alatt elgördült a kör A_1B-vel, ha A_1B éppen akkora, mint az AB ív. Az A_1 pont ez alatt felemelkedett A-ba, ahol A_1B ív $=AB$ ív. Az A pont a kör gördülése



108. ábra.

alatt leírja a *cykloist.* Határozzuk meg az A pont koordinátáit az X, és az A_1 ponton át vont Y tengelyre vonatkozólag.

Legyen az $AOB=t$. Az AOB szög íve az $AB=A_1B=rt$. Látjuk, hogy az A pont abszcisszája:

$$x=A_1B-AM=rt-r\sin t=r(t-\sin t);$$

az ordinátája pedig:

$$y=BO-BM=r-r\cos t=r(1-\cos t).$$

Eszerint a cyklois jellemezve van e két egyenlettel:

$$x=r(t-\sin t); \quad y=r(1-\cos t).$$

Ha ugyanis az elfordulás szöge, t ismeretes, akkor az A pont helyzetét ezek az egyenletek adják meg. Ez a két egyenlet a cyklois paraméteres egyenlete. [Így például az r sugarú, O középpontú kör paraméteres egyenlete: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, az O középpontú, a és b féltengelyekkel biró ellipszis paraméteres egyenletei: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, mert innen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1.$$

Az $y=f(x)$ alakban írt egyenlet is tekinthető paraméteres egyenletnek, ha $x=t$, $y=f(t)$ alakban írjuk.]

A cyklois egyik ágán az A pont által a gördülő kör egy teljes körülforgása alatt leírt utat értjük. Ilyen ág végtelen sok képzelhető. Határozzuk meg egy cyklois-ág területét (a cyklois-ág és az X tengely közé fogott részt). A területet az $\int_0^{2r\pi} y\,dx$ integrál szolgáltatja. A felső határ azért $2r\pi$, mert az A_1A_2 hossza éppen a gördülő kör kerülete. Hogy ezt az integrált kiszámíthassuk, ismernünk kellene y-nak x által való kifejezését, vagy x-nek y-nal való kifejezését. Ez nagyon komplikált eljárás volna. Azért tehát az x-et [és ezzel az y-t is] az új t változó segítségével fejezzük ki, vagyis az $\int_0^{2r\pi} y\,dx$ integrált transzformáljuk: $x = r(t - \sin t)$ tesszük. Ez a t-nek monoton növekvő függvénye, mert differenciálhányadosa $r(1-\cos t)$ soha sem negativ. A t-re vonatkozó határokat így kapjuk: $x = r(t - \sin t)$-ből következik, hogy ha $t = 0$, akkor $x=0$ és ha $t=2\pi$, $x=2r\pi$; tehát a határok 0 és 2π.

$$\int_0^{2r\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1-\cos t)\,.\,r(1-\cos t)\,dt = r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt.$$

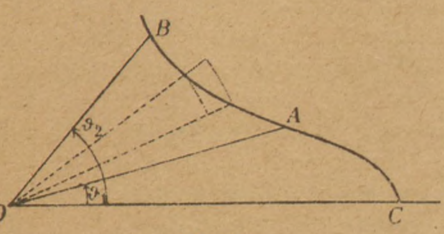
$$= r^2\Big[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big]_0^{2\pi} = 3r^2\pi.$$

A cyklois-ág területe 3-szor akkora, mint a gördülő köré. [A középre rajzolt gördülő körtől jobbra és balra eső háromszög-féle részek tehát éppen akkorák mint a gördülő kör.]

2. A területszámítás poláris koordinátákban. A görbe egyenlete poláris koordinátákban

$$r = f(\vartheta)$$

alakú, ahol r a görbe valamely pontjának az O-tól való távolsága és ϑ e radiusvectornak a tengelyhez való hajlásszöge.



109. ábra.

Ha meg akarjuk határozni az AOB cikk területét, akkor így járunk el: Felosztjuk a $\vartheta_2 - \vartheta_1$ szöget részekre az X tengelyhez $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ szög alatt hajló egyenesekkel. Az i-ik rész szög: $x_i - x_{i-1}$. Ezen i-ik részben a maximális radiusvector legyen M_i, a minimális m_i. Megalkotjuk az

$$\frac{1}{2}\Sigma M_i^2(x_i - x_{i-1}) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\Sigma m_i^2(x_i - x_{i-1})$$

összegeket. $\frac{1}{2}M_i^2(x_i - x_{i-1})$ jelenti azon körcikkecske területét, amelyet az M_i rádiusszal és $x_i - x_{i-1}$ nyílással alkothatunk. Ez a körcikk nagyobb, mint a görbéhez tartozó cikkecske, mert hiszen M_i ezen $x_i - x_{i-1}$ szakaszban a maximalis radiusvector. Éppen így $\frac{1}{2} m_i^2 (x_i - x_{i-1})$ kisebb, mint a görbéhez tartozó cikk. Ugyanolyan okoskodással, mint amellyel a határozott integrál létezésére jutottunk, itt is megmutathatjuk, hogy ha r a ϑ integrálható függvénye, akkor a két összegnek ugyanaz a határértéke lesz, ha az egyes szakaszok végtelen kicsinyekké válnak. Általában mindazon esetekben, amelyekben

$$\lim \frac{1}{2} \Sigma M_i^2 (x_i - x_{i-1}) = \lim \frac{1}{2} \Sigma m_i^2 (x_i - x_{i-1}),$$

ha a szakaszok végtelen kicsinyekké lesznek, e közös határértéket

$$\frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \, d\vartheta$$

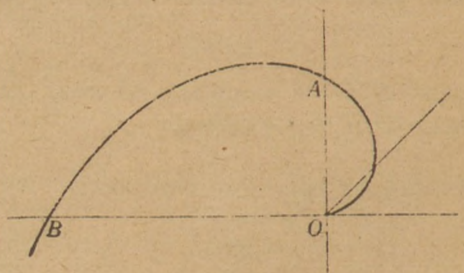
-vel jelöltük. Ez a közös határérték az AOB cikk területe.

Példák: a) *Az Archimedesi spirális területe.* E spirális egyenlete: $r = a\vartheta$. A ϑ fordulásnak megfelelő terület:

$$t = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} r^2 \, d\vartheta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\vartheta} \vartheta^2 \, d\vartheta = \frac{a^2 \vartheta^3}{6}.$$

és $r = a\vartheta$ téve:
$$t = \frac{r^3}{6a}.$$

Egy egész körülfordulásnak megfelelő terület: $\frac{4}{3} \pi^3 a^2$.



110. ábra.

b) *A logarithmusos spirális területe.* E spirális egyenlete: $r = ae^{k\vartheta}$. A ϑ fordulásnak megfelelő terület:

$$t = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} r^2 \, d\vartheta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\vartheta} e^{2k\vartheta} \, d\vartheta = \frac{a^2}{4k} (e^{2k\vartheta} - 1) = \frac{r^2 - a^2}{4k}.$$

c) *A lemniszkáta területe.* A lemniszkáta területét sokkal egyszerűbben határozhatjuk meg mint előbb, ha e görbe egyenletét poláris koordinátákban képzeljük megadva. Ha ugyanis $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ tesszük, akkor az

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

egyenlet [az előbb $a = 1$ volt számítás egyszerűsítése végett] átmegy a következőbe:

$$r^2 = a^2 \cos 2\vartheta.$$

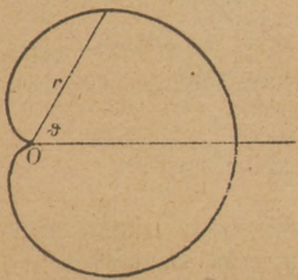
Ez a lemniszkáta egyenlete poláris koordinátákban.

A tengelyhez ϑ_1 és ϑ_2 szögek alatt hajló radiuszvektorok közé foglalt terület:

$$\frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2\,d\vartheta = \frac{a^2}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\cos 2\vartheta\,d\vartheta = \frac{a^2}{4}(\sin 2\vartheta_2 - \sin 2\vartheta_1)$$

és ha $\vartheta_2 = \frac{\pi}{4}$, $\vartheta_1 = 0$, akkor megkapjuk a negyedlemniszkáta területét, [mert a csúcsban vont érintő $\frac{\pi}{4}$ szöget alkot a tengellyel]: $\frac{a^2}{4}$-et. Eszerint a lemniszkáta területe: a^2.

d) *A csigavonal (Pascal-féle limaçon) területe.* A csigavonal egyenlete: $r = a\cos\vartheta + b$. A ϑ_1 és ϑ_2 alatt hajló radiusvectorok közé zárt terület:



111. ábra.

$$\frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}(a\cos\vartheta + b)^2\,d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}(a^2\cos^2\vartheta + 2ab\cos\vartheta + b^2)\,d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2\vartheta}{2} + \frac{a^2\sin 2\vartheta}{4} + 2ab\sin\vartheta + b^2\vartheta\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

és így egy fél fordulásnak megfelelő cikk területe:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right).$$

A rajz azt az esetet tünteti fel, amikor $a = b > 0$.

3. Az ivhosszúság kiszámítása.

Legyenek adva az

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

függvények és $t = t_1$-hez az $x = a_1$, $y = b_1$ pont tartozzék, $t = t_2$-hez pedig az $x = a_2$, $y = b_2$, azaz:

$$a_1 = f(t_1),\ b_1 = \varphi(t_1);\quad a_2 = f(t_2),\ b_2 = \varphi(t_2).$$

Ha a t változó, melyet most paraméternek akarunk nevezni, a $t_1 \ldots t_2$ szakaszban változik, akkor, ha $f(t)$ és $\varphi(t)$ a t-nek folytonos függvényei, az (x, y) koordinátákkal biró pont P-től Q-ig halad folytonosan (azaz t végtelen kis változásának úgy az x, mint az y végtelen kis változása felel meg). (A t paramétert legcélszerűbb az időnek képzelnünk és akkor a PQ a P pont által a $t_1 \ldots t_2$ időközben leirt út.)

Képzeljük most a $t_1 \dots t_2$ szakaszt közbeiktatott értékekkel felosztva bizonyos számú részre ilyen módon:

$$t_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots \tau_{n-1}, t_2$$

a közbeiktatott $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{n-1}$ értékekkel. (Egyszerűség kedvéért némelykor t_1-et τ_0-al és t_2 végpontot τ_n-el jelöljük.) Ezen $n+1$ paraméterértéknek a görbén a

$$P, P_1, P_2, P_3, \dots P_{n-1}, Q$$

pontok feleljenek meg, azaz, ha P_i koordinátáit ξ_i, η_i-vel jelöljük:

$$\xi_i = f(\tau_i), \; \eta_i = \varphi(\tau_i).$$

Készítsük el a $PP_1P_2 \dots Q$ törtvonalat, melyet a szóban forgó C görbébe írt poligonrésznek mondhatunk. E poligonrész hosszasága kiszámítható:

$$L = \sum_0^{n-1} i \sqrt{(\xi_{i+1} - \xi_i)^2 + (\eta_{i+1} - \eta_i)^2}.$$

Ha már most a $t_1 \dots t_2$ szakaszt más, meg más módon osztjuk be, akkor L-re más meg más számértékeket kapunk. Meglehet, hogy az így előálló számértékek halmazának nincs is véges felső határa. Ezzel az esettel nem foglalkozunk.

Minthogy a $\sqrt{(\xi_{i+1}-\xi_i)^2+(\eta_{i+1}-\eta_i)^2} < |\eta_{i+1}-\eta_i| + |\xi_{i+1}-\xi_i|$, tehát ez az eset nem állhat be, ha az $f(t)$ és $\varphi(t)$ függvények olyan természetűek, hogy $\Sigma |f(\tau_{i+1})-f(\tau_i)|$ és $\Sigma |\varphi(\tau_{i+1})-\varphi(\tau_i)|$, vagyis bármely beosztásnak megfelelő abszolut növekmények összege egy véges számnál kisebb (fonction à variation bornée). Így pl., ha $f(t)$ és $\varphi(t)$ monoton növekvő (csökkenő) függvények, vagy ha $f(t)$ és $\varphi(t)$ véges számú szélső értékkel biró folytonos függvények.

Ha tehát $f(t)$ és $\varphi(t)$ korlátosan változó függvények, akkor e felső határ mindenesetre véges. Másrészt azonban a

$$\sqrt{(\xi_{i+1}-\xi_i)^2+(\eta_{i+1}-\eta_i)^2} > |\xi_{i+1}-\xi_i| \quad (\text{vagy} > |\eta_{i+1}-\eta_i|);$$

tehát $$L > \Sigma |\xi_{i+1}-\xi_i|, \quad (\text{vagy } L > \Sigma |\eta_{i+1}-\eta_i|).$$

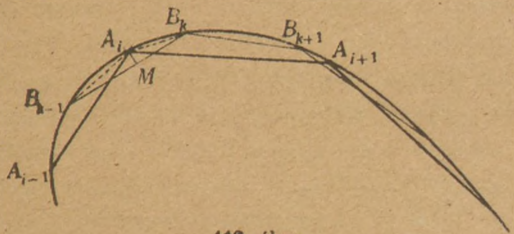
Ha tehát az $f(t)$ vagy $\varphi(t)$ nem korlátosan változó, akkor a $\Sigma |\xi_{i+1}-\xi_i|$ vagy $\Sigma |\eta_{i+1}-\eta_i|$ minden határon túl nő a t beosztásainak a sűrítésével, tehát az L számok felső határa nem lehet véges; tehát az $f(t)$ és $\varphi(t)$ korlátos változása szükséges és elégséges feltétele véges felső határ létezésének.

Ha a képzelhető összes beosztásoknak megfelelő L értékek halmazának van véges felső határa: S és ha egyúttal a beosztások korlátlan sűrítésével [vagyis ha az összes $\tau_{i+1} - \tau_i$ szakaszok végtelen kicsinyekké válnak] a húrok is mindannyian végtelen kicsinyekké lesznek,* akkor definicióképpen ezt az S-et a C görbe PQ

* Ez a követelés, hogy t. i. a szakaszokkal együtt a hurok is végtelen kicsinyekké váljanak, úgy értendő, hogy adott ε-hoz található d küszöb úgy, hogy ha minden $|\tau_{i+1} - \tau_i| < d$, akkor minden $P_i P_{i+1}$ hur kisebb, mint ε. Ez

közötti ívhosszúságának nevezzük és a görbét rektifikálható görbének mondjuk.

Még el kell döntenünk, hogy mennyiben jogosult az S-nek az ívhosszúság mértékszámául tétele. Megmutatjuk, hogy ha a t szakaszait elég kicsinyeknek választjuk, akkor a poligonrész *minden* beosztásnál tetszés szerinti kevéssel tér el az S-től. Pontosabban ez azt jelenti, hogy ha adatik egy kis ε szám, ehhez meghatározhatunk olyan λ számot, hogy ha minden $\tau_{i+1}-\tau_i$ szakasz kisebb λ-nál, akkor bárminő módon történjék is a $t_1 \ldots t_2$ beosztása, a poligonrész L hosszúsága $S-\varepsilon$ és S közé esik.



112. ábra.

S a felső határa az L számok halmazának; tehát van olyan L szám, mely $S-\frac{\varepsilon}{2}$-nél nagyobb. (S-nél valamennyi L kisebb.) Ezen L-hez tartozó beosztásnak megfelelő poligoncsúcsok: $\ldots A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots$ legyenek, melyeknek megfelelő paraméterértékek $\ldots t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots$ Az osztópontok száma $n-1$ legyen. Az egyes poligonoldalak: $d_1, d_2 \ldots d_n$, tehát $\Sigma d_i > S-\frac{\varepsilon}{2}$.

---

a követelés akkor és csakis akkor teljesül, ha úgy az $f(t)$, mint a $\varphi(t)$ a $t_1 \ldots t_2$ szakaszban (a határokat is beleértve) folytonosak. Ugyanis tudjuk, hogy az i-ik húr kisebb, mint $|\xi_{i+1}-\xi_i|+|\eta_{i+1}-\eta_i|$, tehát az $f(t)$ és $\varphi(t)$ egyenletes folytonosságából következik, hogy $\frac{\varepsilon}{2}$-hez tartozik olyan d küszöb, hogy ha minden $|\tau_{i+1}-\tau_i|<d$, akkor úgy a $|\xi_{i+1}-\xi_i|<\frac{\varepsilon}{2}$, mint az $|\eta_{i+1}-\eta_i|<\frac{\varepsilon}{2}$, tehát minden P_iP_{i+1} húr is kisebb ε-nál.

Másrészt pedig az $f(t)$ és $\varphi(t)$ korlátosan változók levén (tehát mindegyik két monoton függvény összege), minden helyen úgy jobboldali, mint baloldali határérték létezik, tehát, ha pl. $f(t)$ valamely α helyen nem folytonos, e helyen véges szakadása van és ha elég kis $\alpha-h, \ldots \alpha+h$ közt jelölünk meg, ha τ_i az $\alpha-h \ldots \alpha$-ból, τ_{i+1} az $\alpha \ldots \alpha+h$-ból vétetik, a $|\xi_{i+1}-\xi_i|$ egy véges számnál mindig nagyobb lesz és minthogy az i-ik húr nagyobb $|\xi_{i+1}-\xi_i|$-nél, tehát ez a húr nem válhatik végtelen kicsinnyé. A görbe rektifikálhatóságának szükséges és elégséges feltételei tehát: 1) hogy $f(t)$ és $\varphi(t)$ korlátosan változók és 2) hogy $f(t)$ és $\varphi(t)$ folytonosak.

Tegyük fel, hogy $f(t)$ és $\varphi(t)$ folytonosak és legyen (x_1, y_1) és (x_2, y_2) a görbe két pontja, melyek t_1, t_2 parameterekhez tartoznak és (ξ, η) egy közöttük levő pontja a görbének, mely a τ parameterhez tartozik, ahol $t_1<\tau<t_2$. A $(\xi\eta)$ távolsága az (x_1y_1), (x_2y_2) húrtól:

$$d<|\xi-x_1|+|\eta-y_1|,$$

tehát az f és φ függvények egyenletes folytonosságánál fogva található oly δ, hogy

$$d<\varepsilon, \text{ ha } |t_1-t_2|<\delta \text{ és } t_1 \leq \tau \leq t_2.$$

Ha az $f(t)$ és $\varphi(t)$ a szóban forgó közben (a határokat is beleértve) folytonosak, akkor a tetszésszerinti ε-hoz tartozik olyan δ küszöbintervallum, hogy bárminő két paraméterérték legyen is t' és t'', a hozzájuk tartozó pontokat összekötő húr e pontok között vonuló ív pontjaitól $\frac{\varepsilon}{4n}$-nél kisebb távolságra vannak, ha csak $|t''-t'|<\delta$. [Ez a * jegyzetben foglaltakból (utolsó bekezdés) következik.]

Már most válasszuk az új osztópontokat a görbén úgy, hogy két régi, szomszédos osztópont közé legalább egy új pont essék és az egyes húrokhoz tartozó íveken levő pontok távolsága az illető húrtól kisebb legyen $\frac{\varepsilon}{4n}$-nél. Ehhez csak az kell, hogy minden $|t'-t''|$ szakasz egy bizonyos λ-nál kisebb legyen.

Az új beosztás pontjai legyenek: $\ldots, B_{i-2}\,B_{i-1}\,B_i\,B_{i+1}\,B_{i+2}\ldots$ Az új húrok között lesznek olyanok, amelyeknek mindkét végpontja régi ívszakaszra esik és olyanok, amelyek végpontjai különböző ívszakaszokra esnek. Az első fajta húrok összegét jelöljük Σ'-al, a második fajta *átmenő* húrok összegét jelöljük Σ''-vel. Így tehát az új beosztásnak megfelelő húrok összege:

$$L'=\Sigma'+\Sigma''.$$

(Így például $B_k B_{k+1}$ az első fajtához tartozik, $B_{k-1}B_k$ a másodikhoz. B_{k-1} és B_k között van az A_i pont.) És most ott, ahol átmenő húrok vannak, kössük össze a régi A_i pontokat a szomszédos B csúcsokkal, (mint például $B_{k-1}A_iB_k$). Az így keletkezett törtvonalakkal helyettesítsük az átmenő húrokat. E törtvonalak összegét jelöljük Σ'''-al. Nyilván:

$$\Sigma'''>\Sigma'' \quad \text{és} \quad \Sigma'+\Sigma'''>L>S-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha az A_i csúcsokból az átmenő húrokra meghúzzuk a δ_i merőlegeseket, (melyekről tudjuk, hogy $\frac{\varepsilon}{4n}$-nél kisebbek), akkor látjuk, hogy pl.

$$B_{k-1}\,B_k>B_k\,A_i+B_{k-1}\,A_i-2\delta_i$$

és így az átmenő húrok összege $\Sigma''>\Sigma'''-2n\delta$ (ha δ a legnagyobb a δ_i-k között), vagyis:

$$\Sigma''>\Sigma'''-\frac{\varepsilon}{2},$$

tehát:
$$L'=\Sigma'+\Sigma''>\Sigma'+\Sigma'''-\frac{\varepsilon}{2}>S-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=S-\varepsilon$$

és ezzel kimutattuk, hogy ha λ-t alkalmasan választjuk és minden t szakasz ennél kisebb, akkor *minden* ilyen beosztásnak megfelelő polygon hossza $S-\varepsilon$-nál nagyobb.

Tegyük fel, hogy az $f(t)$ és $\varphi(t)$ függvények a $t_1\ldots t_2$ szakaszban mindenütt véges, folytonos differenciálhányadossal birnak, melyek egyszerre sehol sem tűnnek el. Ekkor a görbe ívhosszúságát a következőképpen számíthatjuk ki:

A beirt poligon i-ik oldala:

$$d_i = \sqrt{(\xi_{i+1}-\xi_i)^2+(\eta_{i+1}-\eta_i)^2} = \sqrt{[f(\tau_{i+1})-f(\tau_i)]^2+[\varphi(\tau_{i+1})-\varphi(\tau_i)]^2}.$$

De az $f(t)$ mindenütt differenciálható, tehát $f(\tau_{i+1})-f(\tau_i)$ a középértéktétellel fejezhető ki:

$$f(\tau_{i+1})-f(\tau_i)=f'(\theta_i)(\tau_{i+1}-\tau_i),$$

ahol θ_i a τ_i és τ_{i+1} között levő, valamely meghatározott érték. Éppen így:

$$\varphi(\tau_{i+1})-\varphi(\tau_i)=\varphi'(\theta'_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)$$

és így:

$$d_i=(\tau_{i+1}-\tau_i)\sqrt{[f'(\theta_i)]^2+[\varphi'(\theta'_i)]^2}.$$

A θ_i és θ'_i középértékek helyett a τ_i-t akarjuk behozni. Ez lehetséges, mert föltettük, hogy az $f'(t)$ és $\varphi'(t)$ diff. hányadosok folytonosak. Eszerint tehát a $\tau_i \dots \tau_{i+1}$ szakaszokat olyan kicsinyekre választhatjuk, hogy a

$$\sqrt{[f'(\theta_i)]^2+[\varphi'(\theta'_i)]^2}-\sqrt{[f'(\tau_i)]^2+[\varphi'(\tau_i)]^2}$$

hiba tetszés szerinti kicsiny legyen.* Azt állítjuk már most, hogy a PQ ív hossza:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\,dt.$$

Ugyanis az értelmezés szerint az ívhosszúság a beírt poligonrészek hosszának felső határa: S. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ez

* Ezt pontosabban így láthatjuk be:

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}=$$

$$=\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{b^2-d^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Az első tagot így írhatjuk:

$$(a-c)\frac{a+c}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}$$

és minthogy $\sqrt{a^2+b^2}>|a|$ és $\sqrt{c^2+d^2}>|c|$, tehát az első tag absz. értéke kisebb:

$$|a-c|\frac{|a|+|c|}{|a|+|c|}$$

-nél, vagyis kisebb $|a-c|$-nél. Éppen így a második tag abs. értéke kisebb $|b-d|$-nél, tehát

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|<|a-c|+|b-d|.$$

Ha $a=f'(\theta_i)$, $b=\varphi'(\theta'_i)$ és $c=f'(\tau_i)$, $d=\varphi'(\tau_i)$ tesszük, akkor a kívánt

$$\left|\sqrt{f'(\theta_i)^2+\varphi'(\theta'_i)^2}-\sqrt{f'(\tau_i)^2+\varphi'(\tau_i)^2}\right|<|f'(\theta_i)-f'(\tau_i)|+|\varphi'(\theta'_i)-\varphi'(\tau_i)|$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A jobboldal az $f'(t)$ és $\varphi'(t)$ folytonossága okából tetszés szerinti kicsinnyé tehető.

az S az I integráltól *nem* különbözik, vagyis hogy a különbségük bármely számnál kisebb. Elmehetünk a beosztással oly messze, hogy a polygon hossza

$$L = \Sigma d_i > S - \frac{\varepsilon}{4}$$

legyen, mert hiszen ezen L számok felső határa S. (És, miként előbb kifejtettük, nemcsak L, hanem ettől kezdve, elég kis beosztással nyert *minden* összeg is már S és $S-\varepsilon$ közé esik.) Másrészt pedig

$$\Sigma d_i = \Sigma(\tau_{i+1}-\tau_i)\sqrt{f'(\theta_i)^2+\varphi'(\theta'_i)^2}$$

és előbbi megjegyzésünk szerint θ_i és θ'_i helyett tetszés szerinti pontossággal τ_i vehető. Pontosabban kifejezve: válasszuk a beosztásokat olyan kicsinyekre, hogy

$$\left|\sqrt{f'(\theta_i)^2+\varphi'(\theta'_i)^2}-\sqrt{f'(\tau_i)^2+\varphi'(\tau_i)^2}\right| < \frac{\varepsilon}{4(t_2-t_1)}$$

legyen; ekkor tehát

$$\Sigma d_i = \Sigma(\tau_{i+1}-\tau_i)\sqrt{f'(\tau_i)^2+\varphi'(\tau_i)^2} + \eta,$$

ahol $|\eta| < \frac{\varepsilon}{4}$; tehát

$$\left|S-\Sigma(\tau_{i+1}-\tau_i)\sqrt{f'(\tau_i)^2+\varphi'(\tau_i)^2}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis, ha az ívhosszúság helyett ezen beosztásnak megfelelő $\Sigma(\tau_{i+1}-\tau_i)\sqrt{f'(\tau_i)^2+\varphi'(\tau_i)^2}$ összeget vesszük, akkor a hiba, amelyet ezzel elkövetünk, abszolut értékre nézve $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb.

Másrészt pedig az I integrál értelmezése szerint a $t_1 \ldots t_2$ szakaszt oly módon oszthatjuk fel, hogy

$$\left|I-\Sigma(\tau_{i+1}-\tau_i)\sqrt{f'(\tau_i)^2+\varphi'(\tau_i)^2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen. Ha ezt az előbbivel összevetjük, azt kapjuk, hogy

$$|I-S| < \varepsilon,$$

vagyis, valóban az ívhosszúság:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'(t)^2+\varphi'(t)^2}\,dt.$$

Ha a görbe vonal egyenlete ebben az egyszerűbb,

$$y = f(x)$$

alakban adatik, akkor mindig úgy képzelhetjük, mintha az

$$x = t,\ y = f(t)$$

parameteres alakban volna megadva; parameter gyanánt az x-et tekintjük. Ha P pont abscissája x_1, Q-é pedig x_2, akkor tehát a görbének PQ íve:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Ha az előbbi formulában a felső határt, t_2-t változónak képzeljük és t-vel jelöljük, akkor a P fix ponttól a Q változó pontig terjedő ív hosszúsága:

$$S = \int_{t_1}^{t} \sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\,dt.$$

Az S ívhosszúság a változó t felső határ függvénye: $S = s(t)$ és minthogy az integrándus folytonos, tehát az S-nek a felső határ szerinti diff. hányadosa (S helyett a szokásos s betűt téve):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

A tetszés szerinti fix P helytől számított ívhosszúságnak a t változó szerinti differenciálhányadosát tehát ez az egyszerű formula fejezi ki:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

amelyet szimbolikusan még így is szoktunk írni:

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

vagy

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Itt ds az ív végtelen kis elemét jelenti. A végtelen kis ívelem e formula szerint az abscissa- és ordináta-növekedésekkel úgy fejeződik ki, mint a derékszögű háromszög átfogója a befogók által. Ez más szóval azt mondja, hogy az ív végtelen kis eleme a hozzá tartozó végtelen kis húrral megegyezik.

Megjegyezzük még, hogy e fejtegetések szóról-szóra alkalmazhatók az

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

térgörbe esetére is, vagyis a térgörbe ívhossza:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Ha az x-et tekintjük független változónak, vagyis a t parameter x-el megegyezik, akkor — síkgörbe esetében —

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

egyenletből* még más, geometriai szempontból igen fontos következtetést is vonunk. Ugyanis $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\omega$, ha ω a görbe (xy) pontjában vont érintőnek az abszcissza-tengellyel alkotott szöge; tehát:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega}=\frac{1}{\cos\omega}.$$

Ha pedig y-t választanók független változónak, akkor arra jutnánk, hogy

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{1}{\sin\omega}.$$

Ha a görbén egy kezdőpontot megjelölünk, ahonnan az ívhosszúságot számitjuk, akkor a görbe bármely pontjának koordinátái az s függvényének tekinthetők és így: $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dx}}$; tehát:

$$\frac{dx}{ds}=\cos\omega,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\omega.$$

4. Az ívhosszúság poláris koordinátákban. Ha a görbe egyenletét $r=f(\vartheta)$ alakban adják meg, ahol r jelenti a görbe pontjának az O-tól való távolságát és ϑ e rádiuszvektornak a tengellyel való hajlásszögét, akkor ívhosszúságát a következő meggondolással határozhatjuk meg.

Fejezzük ki a derékszögű koordinátákat a poláris koordináták által:

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta.$$

Minthogy $r=f(\vartheta)$, tehát x és y mint a ϑ változó függvényei vannak előállítva; tehát a PQ ív hosszúsága:

$$S=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta.$$

De: $\frac{dx}{d\vartheta}=\frac{dr}{d\vartheta}\cos\vartheta-r\sin\vartheta$; és $\frac{dy}{d\vartheta}=\frac{dr}{d\vartheta}\sin\vartheta+r\cos\vartheta$; és így:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2},$$

tehát az ív:
$$s=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta.$$

* A négyzetgyök pozitivnak, vagy negativnak veendő, a mint az ív az x-el nő, vagy fogy. Ez attól függ, hogy az ív kezdőpontját hol vesszük fel, vagyis a görbe melyik pontjától kezdjük az ívet számítani.

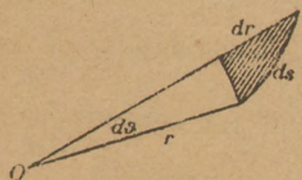
Ha a felső határt megint változónak képzeljük és ϑ-val jelöljük, akkor:

$$\frac{ds}{d\vartheta}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2},$$

vagyis megint a differenciálhányadosról a differenciálra áttérve, ezt a szimbolikus alakot kapjuk:

$$ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\vartheta)^2}$$

és ebben az alakban könnyen áttekinthető az összefüggés, miként a mellékelt ábrán látjuk. Ugyanis ha a radiuszvektor $d\vartheta$-val elfordul, akkor az r-ből



113. ábra.

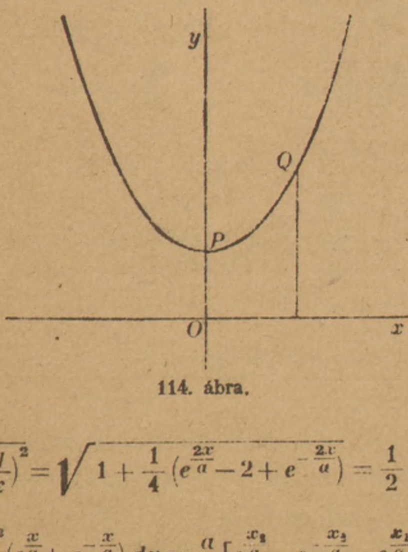
$r+dr$ lesz és a beárnyékolt háromszögben a belső oldal a $d\vartheta$ középponti szögnek megfelelő végtelen kis körív: $rd\vartheta$ az egyik befogó; dr a másik befogó és ds az átfogó; tehát Pythagoras tétele szerint: $ds=\sqrt{dr^2+(rd\vartheta)^2}$.

Példák. a) *A láncgörbe ívhossza.* A láncgörbe egyenlete:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{Cos}\frac{x}{a}.$$

Innen:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]$$



114. ábra.

és így: $$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

miből: $$S=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left[e^{\frac{x_2}{a}}-e^{-\frac{x_2}{a}}-e^{\frac{x_1}{a}}+e^{-\frac{x_1}{a}}\right].$$

Ha $x_1=0$ és $x_2=x$ tesszük, akkor a PQ ívhosszúság:

$$\frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]=a\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{a}.$$

b) *A parabola ívhosszúsága.* Legyen a parabola egyenlete: $y=ax^2$; akkor $y'=2ax$ és így:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx.$$

A határozatlan integrál parciális integrálással számítva:

$$\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=x\sqrt{1+4a^2x^2}-\int\frac{4a^2x^2\,dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+4a^2x^2}-\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}},$$

vagyis:
$$\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+4a^2x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\right\}.$$

A zárójelben álló integrál:

$$\frac{1}{2a}\log\left\{2ax+\sqrt{1+4a^2x^2}\right\}+C,$$

tehát a keresett ívhosszúság:

$$S=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+4a^2x^2}+\frac{1}{4a}\log\left\{2ax+\sqrt{1+4a^2x^2}\right\}\right]_{x_1}^{x_2},$$

vagy $x_1=0$ és $x_2=x$ téve

$$S=\frac{x}{2}\sqrt{1+4a^2x^2}+\frac{1}{4a}\log\left\{2ax+\sqrt{1+4a^2x^2}\right\}.$$

c) *A ciklois ívhossza.* Legyen a ciklois egyenlete paraméteres alakban:

$$x=r(t-\sin t),\quad y=r(1-\cos t),$$

akkor:
$$\frac{dx}{dt}=r(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=r\sin t$$

és így:
$$S=r\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2r\int_{t_1}^{t_2}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4r\left[\cos\frac{t}{2}\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Ha $t_1=0$, akkor az ívhosszúság innen $t_2=t$-ig számítva:

$$S=4r\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)$$

és egy egész cikloiság ($t=0$-tól $t=2\pi$-ig): $8r$.*

* Megjegyezzük, hogy ha pl. $0\ldots4\pi$ közben számítottuk volna az integrált, nem kaptuk volna meg az ívhosszúságot, mert a $2\pi\ldots4\pi$ közben $\sin\frac{t}{2}$ negativ. Ügyelnünk kell arra, hogy az ívhosszúság számításánál szereplő $\sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}$ mindig pozitiv legyen.

d) *Az ellipszis ívhossza.* Az ellipszis parameteres egyenletei:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Innen valóban: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; tehát:

$$x' = -a\sin t, \qquad y' = b\cos t$$

és így az ívhosszúság:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt.$$

[A fél ellipszis ívhosszúsága tehát:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt,$$

vagy ha az előző formulában $c^2 = a^2 - b^2$ tesszük:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}\, dt.$$

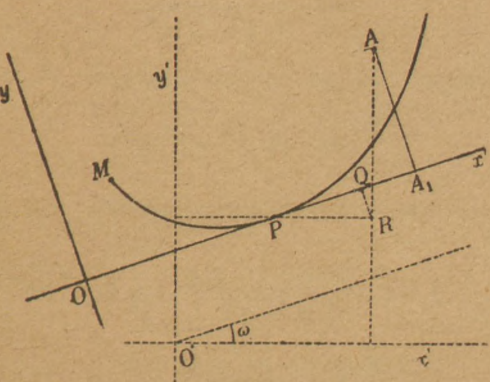
Ha $\cos t = u$ tesszük és $\cos t_1 = u_1$, $\cos t_2 = u_2$, akkor az új határok: u_1 és u_2 lesznek. Minthogy

$$dt = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

tehát:

$$s = -\int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{a^2 - c^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int_{u_2}^{u_1} \frac{a^2 - c^2u^2}{\sqrt{(1-u^2)(a^2-c^2u^2)}}\, du.$$

Ez az integrál, melyben az integrándus u negyedfokú egész függvényéből vont második gyököt tartalmazza (racionálisan) az eddig tárgyalt elemi függvények segítségével nem fejezhető ki: *elliptikus integrál.*]



115. ábra.

e) *A ruletta-görbe ívhosszúsága.* Ha egy (szilárdnak, pl. erős drótból valónak képzelt) görbe egy másik görbén gördül, akkor az első görbével szilárd összeköttetésben levő *A* pont pályája a *ruletta-görbe.* Ennek egyik speciális esetével — a cikloisszal — már foglalkoztunk. A ciklois esetében a gördülő görbe kör. A gördülés egyenesen történik és az A pont a gördülő kör egy pontja. Most sem az általános esettel akarunk foglalkozni, hanem feltesszük, hogy a szóban forgó görbe egy adott egyenesen gördül. Legyen ez az egyenes az x tengely, a kezdőpont O és legyen a P pont e pillanatban a görbe és az x tengely érintéspontja.

Jelöljük meg a görbén az M pontot úgy, hogy PM ív éppen akkora legyen, mint az OP köz, vagyis, ha a görbe balfelé gördülne, M pont egy pillanatban éppen az O kezdőpontba esnék.

Képzeljünk továbbá egy (x', y') derékszögű koordinátarendszert a gördülővel szilárd összeköttetésben, vagyis úgy, hogy ez a koordinátarendszer a görbével együtt mozogjon.

Az A pontnak e mozgó koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái legyenek: (α, β). Az A pontnak az állandó (xy) koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái pedig $(X. Y)$ és P érintéspontnak a mozgó rendszerre vonatkozó koordinátái legyenek: (xy).

Húzzunk az O' ponton át az x tengellyel párhuzamosat. Ez az x'-el ω szöget alkot.

Az A ponton át y-al és y'-al, a P ponton át x'-al párhuzamosakat vonunk. Az ábrából látjuk, hogy:

$$Y = AR \cos\omega - PR \sin\omega = (\beta - y)\cos\omega - (\alpha - x)\sin\omega,$$

$$X = OP + PA_1 = s + PR\cos\omega + AR\sin\omega = s + (\alpha - x)\cos\omega + (\beta - y)\sin\omega.$$

De (x, y) a görbe P pontjának koordinátái, tehát pl. a t parameter megadott függvényei, ω pedig az (xy) pontban vont érintőnek az x'-el alkotott szöge, tehát:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\omega, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\omega,$$

vagyis:

$$\cos\omega = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

és

$$\sin\omega = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

ahol x' és y' a t szerint vett differenciálhányadosok. Ha még

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

tesszük [amivel egyúttal az M pont parameterértékéül $t=0$ tettük], akkor a ruletta egyenlete:

$$X = \frac{(\alpha - x)x' + (\beta - y)y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

$$Y = \frac{(\beta - y)x' - (\alpha - x)y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Így például, ha a gördülő vonal R sugarú *kör*, akkor ennek egyenlete a vele mozgó koordinátarendszerre vonatkozólag, melynek centruma az O' kezdőpont:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t$$

és így az $(\alpha\beta)$ koordinátákkal bíró pont által leírt ruletta-görbe egyenlete:

$$X = \beta \cos t - \alpha \sin t + Rt,$$

$$Y = R - \beta \sin t - \alpha \cos t.$$

Ha A pont gyanánt a gördülő kör kerületének egy pontját, például az $\alpha=R$, $\beta=0$ pontot választjuk, akkor

$$X = R(t - \sin t), \quad Y = R(1 - \cos t)$$

közönséges cikloist kapjuk; ha pedig $(\alpha\beta)$ pont a körön kívül van, akkor a megnyúlt cikloist, ha pedig a körön belül van az A pont, a megrövidült cikloist kapjuk.

Az általános ciklois ívhosszúságát e formulákból meghatározhatjuk. Egyszerűség kedveért vegyük fel az A pontot az x' tengelyen, amivel az általánosságot nem csorbítjuk, mert ezzel csak a görbe helyzetét specializáljuk. Ekkor tehát egy egész fordulásnak megfelelő ívhosszúság

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R-\alpha\cos t)^2 + \alpha^2 \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + \alpha^2 - 2\alpha R \cos t}\, dt,$$

vagy $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$ (és $\frac{t}{2} = \varphi$) téve;

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(R-\alpha)^2 \cos^2 \varphi + (R+\alpha)^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Ez, amint a 485. lapon közölt formulával egybevetve látjuk, ugyanakkora, mint azon ellipszis kerülete, melynek fél nagy tengelye: $R+\alpha$, fél kis tengelye: $R-\alpha$.

Feladatok és gyakorlatok a VII—XIII. fejezetekhez.

1. Kiszámítandók ezek az integrálok:

$a)$ $\int x^n dx$, $b)$ $\int \frac{dx}{x}$, $c)$ $\int \cos mx\, dx$, $d)$ $\int \sin mx\, dx$,

$e)$ $\int \operatorname{tg} x\, dx$, $f)$ $\int \operatorname{cotg} x\, dx$, $g)$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $h)$ $\int \frac{dx}{1+x^2}$,

$i)$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, $j)$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

2. Meghatározandók ezek az integrálok:

$a)$ $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ (így pl.: $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

$= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; folytassuk!);

$b)$ $\int \sin^2 x\, dx$ [tegyük $u = \sin x$, $dv = \sin x\, dx$, vagyis $v = -\cos x$;

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx.$$

A második integrál helyett $\int (1 - \sin^2 x)\, dx$ téve és az $\int \sin^2 x\, dx$-et a baloldalra vive, azt kapjuk, hogy

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C = -\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

c) $\int \cos^2 x\,dx$; *d)* $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}\ \left(= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x}\right)$;

e) $\int \frac{dx}{x} \sqrt{1 + \log x}$. (Tegyük $1 + \log x = z$)

f) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Tegyük $x = \cos z$).

g) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. (Tegyük $x = \log y$).

h) $\int \frac{dx}{e^x+1} = \left(\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx.\right.$ Folytassuk$\left.\right)$.

3. Határozzuk meg parciális integrálással ezeket az integrálokat:

a) $\int x^3 \log x\,dx$, *b)* $\int x \arcsin x\,dx$,

c) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$ $\left(\text{Tegyük } \frac{dx}{(1+x)^2} = dv \text{ és } xe^x = u\right)$;

d) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ [$u = \sqrt{1-x^2}$, $dv = dx$ teendő:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A jobboldali integrálban x^2 helyett $1-(1-x^2)$-et írjunk; ekkor:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx;$$

tehát $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

és ha az utolsó integrált a baloldalra hozzuk,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin x}{2} + C.]$$

e) $\int \sin \log x\,dx$ és $\int \cos \log x\,dx$ együtt határozható meg.

$$\int \sin \log x\,dx = x \sin \log x - \int \cos \log x\,dx;$$

$$\int \cos \log x\,dx = x \cos \log x + \int \sin \log x\,dx.$$

Ha e két egyenletet kivonjuk, illetőleg összeadjuk:

$$\int \sin \log x\,dx = \frac{x}{2}(\sin \log x - \cos \log x) + C;$$

$$\int \cos \log x\,dx = \frac{x}{2}(\sin \log x + \cos \log x) + C'.$$

f) $\int e^x \sin x\,dx$ és $\int e^x \cos x\,dx$ ugyanilyen módon határozandók meg.

g) $\int x \cos x\,dx$ [$u = x$, $dv = \cos x\,dx$]. *h)* $\int x^2 \sin x\,dx$.

i) Mutassuk meg, hogy

$$\int x^n \cos x\,dx = [x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \cdots] \sin x +$$
$$+ [nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \cdots] \cos x$$

(akár teljes indukcióval, akár annak igazolásával, hogy a jobboldal diff. hányadosa: $x^n \cos x$).

j) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ $[u = \operatorname{arc\,tg} x,\ dv = dx]$;

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

k) $$\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x \log(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x \cdot \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$
$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

l) $\int x^m \log x\,dx$, $\int x^m (\log x)^2\,dx$, $\int x^m (\log x)^3\,dx$ kiszámítandók, ha m a -1-nél nagyobb egész szám és bebizonyítandó, hogy ha m nem negativ és n pozitiv egész számok, akkor:

$$\int x^m \log^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big[\log^n x - \frac{n}{m+1}\log^{n-1} x +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log^{n-2} x \cdots + (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n}\Big].$$

m) Számítsuk ki az $\int xe^{-x}\,dx$, $\int x^2 e^{-x}\,dx$, $\int x^3 e^{-x}\,dx$ integrálokat és bizonyítsuk be, hogy

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!]\,e^{-x} + C,$$

ha n pozitiv egész szám.

4. Határozzuk meg parciális integrálással ezeket az integrálokat:

a) $\int \arcsin x\,dx$, *b)* $\int xe^{ax}\,dx$, *c)* $\int e^{ax} \sin \beta x\,dx$;

d) $\int e^{ax} \cos \beta x\,dx$, *e)* $\int e^{ax} \sin^2 x\,dx$; *f)* $\int e^{x} \sin^3 x\,dx$,

g) $\int e^{ax} \cos^2 x\,dx$, *h)* $\int e^{ax} \cos^3 x\,dx$.

5. *a)* $\int \sin^3 x\,dx$, $\int \sin x \cos^2 x\,dx$, $\int \cos^3 x\,dx$, $\int \cos x \sin^2 x\,dx$ kiszámítandók.

b) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ redukálandó, ha n és m pozitiv egész számok oly módon, hogy a $\cos x$ exponense alacsonyabbá váljék és $\sin x$ exponense megmaradjon.

6. Határozzuk meg szubsztitucióval ezeket az integrálokat:

a) $\int \dfrac{dx}{\alpha^2+\beta^2 x^2}$, *b)* $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$; *c)* $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (Tegyük $x = \dfrac{1}{u}$).

d) $\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx$ (az integrálást végezzük először úgy, hogy a számlálót és nevezőt $\sqrt{1-x}$-el szorozzuk, azután pedig $x = \cos u$ helyettesítéssel).

e) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ ($x=\sin u$ szubsztitutióval).

f) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (ugyanezen szubsztitucióval).

g) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ($x=\operatorname{cotg} u$ szubsztitucióval).

h) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ kiszámítása végett gyöktelenítsük a törtet:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}.$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Az első és harmadik integrált $x=\frac{1}{u}$ szubsztitucióval alakítsuk át!

7. $\int\cos x\cos 2x\cos 3x dx$ kiszámítása végett vegyük figyelembe ezt a formulát:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad\frac{\alpha+\beta}{2}=2x,\quad\frac{\alpha-\beta}{2}=x$$

téve, $\alpha=3x$, $\beta=x$; tehát

$$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}[\cos x+\cos 3x]$$

és így
$$\cos x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}[\cos x\cos 3x+\cos^2 3x].$$

Erre alkalmazzuk újra a felírt formulát!

Számítsuk ki ilyen módon a $\int\cos kx\cos lx\cos mx dx$ integrált!

8. Számítsuk ki szubsztitucióval ezeket az integrálokat:

a) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ (Tegyük $x^2=y$, akkor $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

b) $\int\frac{xdx}{1+x^4}$ (ugyanúgy, mint előbb: $x^2=y$ tegyük).

c) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}.\sqrt{b^2-x^2}}$ (Tegyük $\sqrt{x^2-a^2}=y$, miből $xdx=ydy$ és $\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{b^2-a^2-y^2}$; tehát az integrál transzformálva: $\int\frac{dy}{\sqrt{b^2-a^2-y^2}}$).

d) $\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx.$

e) $\int\frac{dx}{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}}$ (Tegyük $\sqrt{a+x}=y$; miből $dx=2y\,dy$ és

$$\sqrt{b+x}=\sqrt{b-a+y^2};$$

tehát az integrál: $\int\frac{2y\,dy}{y+\sqrt{b-a+y^2}}$. Gyöktelenítsük az integrándust!).

f) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}$. (Emeljük ki a nevezőben levő gyökből x^2-et; az integrál lesz:

$$\int \frac{\frac{dx}{x^3}}{\sqrt{\left(\frac{a}{x^2}+b\right)^3}};$$

tegyük

$$\frac{a}{x^2}+b=y;$$

akkor: $-\frac{2a}{x^3}dx=dy$; tehát az integrál: $-\frac{1}{2a}\int\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}$).

g) Általában: $\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}$-nél éppen így járunk el. Kiemeljük a nevezőben $a+bx^n$-ből x^n-et.

h) $\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}}$. Átalakítjuk az *f)* alattira oly módon, hogy

$$a+bx+cx^2=c\left[\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4c^2}\right]$$

tesszük és $x+\frac{b}{2c}$ helyett y-t írunk.

i) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ (tegyük $e^x=u$). *j)* $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ ($\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$-et tegyük).

k) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. *l)* $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

m) $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ (a rendes módon, $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ szubsztitucióval).

n) $\int \frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$. *o)* $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x}$.

p) $I=\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ integrálása végett vezessük be az: $y=\arcsin x$ új változót, vagyis $x=\sin y$; innen: $1-x^2=1-\sin^2 y=\cos^2 y$; $dx=\cos y\,dy$; tehát

$$I=\int\frac{y\cos y\,dy}{\cos^3 y}=\int\frac{y\,dy}{\cos^2 y}$$

és ezt integráljuk parciálisan: $\frac{dy}{\cos^2 y}=d\operatorname{tg} y$ téve:

$$I=y\operatorname{tg} y-\int\operatorname{tg} y\,dy=y\operatorname{tg} y-\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=y\operatorname{tg} y+\log\cos y;$$

vagy $\operatorname{tg} y=\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\cos y=\sqrt{1-x^2}$ téve:

$$I=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\log(1-x^2).$$

q) $I=\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ parciálisan a következőképpen integrálható: Minthogy

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\sqrt{1-x^2},$$

tehát $\quad I = -\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int dx = x - \arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}.$

r) $I = \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\, dx$ így alakítható át:

$$I = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\, dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot dx = \int \operatorname{arctg} x\, dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx.$$

Az elsőt már ismerjük (489. l. *j.*). A második pedig

$$\int \operatorname{arctg} x\, d \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$$

9. Határozzuk meg ezeket az integrálokat, melyek integrándusai racionális függvények:

a) $\int \frac{dx}{x^2-1}$. *b)* $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\, dx$. (A nevező gyökei $+2$, -2, $+1$, -1; az integrándus parciális törtekre bontandó.)

c) $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}\, dx$. *d)* $\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x^2+1)}\, dx$.

e) $\int \frac{dx}{x^5+2x^3+3x^2}\, dx$. *f)* $\int \frac{dx}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}$.

g) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x^2-x+1)(x-1)^2}\, dx$. *h)* $\int \frac{dx}{1+x^4}$,

i) $\int \frac{dx}{1-x^4}$. *j)* $\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx$.

10. Határozzuk meg ezeket az integrálokat:

a) $I = \int \frac{dx}{a^2e^x+b^2e^{-x}}$. (Számlálót és nevezőt szorozzuk e^x-el, akkor

$I = \int \frac{e^x\, dx}{b^2+a^2e^{2x}}$ és tegyük $e^x = u$. Folytassuk!)

b) $I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ a rendes módon $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$ téve: $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$,

$dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$, tehát $I = \int \frac{(1+u^2)\,du}{1+u^4}$, vagy egyszerűbben: $I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+\frac{1}{\cos^2 x}}$

és $\operatorname{tg} x = u$ téve, $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + u^2$, tehát $I = \int \frac{du}{2+u^2}$.

c) $\int \frac{\arcsin (1-2x)}{\sqrt{x-x^2}}\, dx$. Tegyük $\arcsin (1-2x) = u$.

d) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$. (A rendes eljárás szerint $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$ téve kissé hosszadalmas; azért írjuk:

$$\frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x \cos x}$$

és ezeket külön integráljuk.

e) $\int \frac{dx}{a+be^x}$. (A rendes módon exponenciális függvény racionális függvényére vonatkozó szabály szerint tegyük $e^x=u$.)

f) $\int e^{\alpha \arcsin x}\,dx$. *g)* $\int x \cos ax\,dx$. *h)* $\int x^2 \cos ax\,dx$.

i) $\int x \sin ax\,dx$. *j)* $\int x^2 \sin ax\,dx$.

k) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ (parciálisan integráljuk $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d \operatorname{cotg} x$ téve).

l) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. *m)* $\int \sqrt{1+e^{ax}}\,dx$ ($e^{ax}=u$ szubsztitucióval).

11. Határozzuk meg ezeket a trigonometriai integrálokat:

a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$, [Tegyük $\sin^3 x = \sin x\,(1-\cos^2 x)$].

b) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ (parciálisan integráljuk $\frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x$ téve). *c)* $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

d) $\int \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{5}{2}} x}\,dx$ $\left[\frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{1}{2}} x} = \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x\right.$ téve $\int \frac{\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x}{\cos^2 x}\,dx$ könnyen integrálható$\left.\right]$.

e) $\int \sin^4 x\,dx$. *f)* $\int \sin^5 x\,dx$. *g)* $\int \cos^4 x\,dx$.

h) $\int \cos^5 x\,dx$. *i)* $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$. *j)* $\int \cos^6 x\,dx$.

k) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$ [$\operatorname{tg}^4 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x$ téve, parciálisan integrálunk].

l) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}$. *m)* $\int \operatorname{cotg}^4 x\,dx$.

12. Redukáljuk a következő integrálokat parciális integrációval:

a) $\int e^{ax} x^n\,dx$, hol n pozitiv egész szám.

b) Ha n negativ egész szám, akkor redukálhatjuk

$$\int \frac{e^{ax}\,dx}{x}$$

-re; de ezt tovább nem redukálhatjuk; az eddig ismeretes függvények által ez ki nem fejezhető; új függvény: az *integrallogarithmus*. Neve onnan ered, hogy az $e^{ax}=y$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{e^{ax}\,dx}{x} = \int \frac{dy}{\log y}.$$

c) $\int a^x x^n\,dx$ redukálandó.

d) $\int x^m (\log x)^n\,dx$ redukálandó úgy, hogy a $\log x$ exponense csökkenjen.

e) $\int x^3 e^{ax}\,dx$. *f)* $\int x^3 (\log x)^2\,dx$. *g)* $\int x^2 (\log x)^3\,dx$.

h) $\int \frac{e^x}{x^4}$ redukálandó $\int \frac{e^x}{x}\,dx$-re.

i) $\int x^n \cos ax\,dx$ redukálandó úgy, hogy x exponense csökkenjen.

j) $\int x^n \sin ax\,dx$ szintén.

k) $\int x^3 \sin 2x\, dx$. *l)* $\int x^5 \cos 3x\, dx$ kiszámítandók.

m) $\int e^{\alpha x} \cos^n x\, dx$ redukálandó úgy, hogy $\cos x$ exponense csökkenjen.

n) $\int e^{\alpha x} \cos^4 x\, dx$. *o)* $\int e^{\alpha x} \sin^4 x\, dx$ kiszámítandók.

p) $I = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}}$ redukálandó, hogy a számlálóban x exponense alacsonyabb legyen. Ezt így végezhetjük: Szorozzuk a számlálót és a nevezőt $\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}$-val és az $\frac{x^m}{x^2+\alpha x+\beta}$ osztást végezzük el. A hányados $m-2$-edfokú lesz, a maradék pedig ilyen alakú: $(\gamma x+\delta)$, tehát az I integrál részekre bontható, melyekben a számlálóban x-nek m-nél alacsonyabb hatványai szerepelnek. Ezekre újból alkalmazzuk ezt az eljárást, míg végre $\int \frac{\gamma x+\delta}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}} dx$ alakú integrálra jutunk. Hogyan kell ezt integrálni?

q) Végezzük el e redukciót az $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$ eseteiben.

13. Számítsuk ki ezeket a határozott integrálokat:

a) $\int_\alpha^\beta x^k\, dx$. *b)* $\int_0^\pi \cos ax\, dx$. *c)* $\int_0^\pi \sin^2 kx\, dx$.

d) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx$. *e)* $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$.

f) $\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx\, dx$ $(k \neq l$; alkalmazzuk a

$$\sin kx \sin lx = -\frac{1}{2} [\cos (k+l) x - \cos (k-l) x])$$

formulát.

g) Éppen így számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin kx \cos lx\, dx, \quad \text{ha } k \neq l.$$

h) $\int_0^a \frac{dx}{x^k}$ $(k<1)$; *i)* $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ $(k<1)$.

14. Határozzuk meg ezen integrálok számértékeit:

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$, *b)* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, *c)* $\int_0^\infty \frac{dx}{k^2+l^2x^2}$, *d)* $\int_0^1 \frac{dx}{\alpha^2-\beta^2x^2}$.

e) $\int_0^1 \frac{dx}{a+bx}$, *f)* $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ $(k>1)$, *g)* $\int_0^1 \frac{dx}{\alpha+\beta x+x^2}$, *h)* $\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x}$,

(a határozatlan integrált l. 8. *m)* feladatban).

i) Mutassuk meg, hogy ha $a>0$, akkor

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}; \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2};$$

j) Bizonyítsuk be, hogy $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2} dx$, abszolut konvergens integrál.

k) Mutassuk meg, hogy $\int_0^a \frac{\sin x}{x^n}$ abszolut konvergens, ha $n<2$ és *l)* hogy $\int\limits_0^a \frac{\cos x}{x^n}\,dx$ abszolut konvergens, ha $n<1$.

m) Mutassuk meg, hogy $\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x^n}\,dx$ abszolut konvergens, ha $n>1$ és hogy

n) $\int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x^n}\,dx$ abszolut konvergens, ha $n>1$. $(a>0)$

15. Számítsuk ki ezt az integrált.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx.$$

Ha $x=0$, akkor $\log\sin x$ végtelen ugyan, de az integrál konvergens. Erről így győződhetünk meg: $\sin x$ helyett $\frac{\sin x}{x}\cdot x$-et tegyünk; ekkor

$$\log(\sin x)=\log x+\log\frac{\sin x}{x};$$

tehát
$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log x\,dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

A második integrálban az integrándus mindenütt véges, folytonos függvény; tehát csak az elsőt kell vizsgálnunk; de $\log x$ úgy válik végtelenné az $x=0$ helyen, hogy $x^a \log x$ véges marad, bárminő kis pozitiv szám is az a, tehát az integrál konvergens.

Miután meggyőződtünk arról, hogy a szóban forgó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$ konvergens, a kiszámítása végett tekintsük ezt az integrált: $\int\limits_0^{\pi} \log\sin x\,dx$ melynek konvergenciája az előbbire való visszavezetéssel úgyis nyilvánvalóvá lesz.

Tegyük most $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, akkor tehát:

$$\int\limits_0^{\pi} \log\sin x\,dx=\int\limits_0^{\pi}\left(\log 2+\log\sin\frac{x}{2}+\log\cos\frac{x}{2}\right)dx=\pi\log 2+$$
$$+\int\limits_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx+\int\limits_0^{\pi} \log\cos\frac{x}{2}\,dx.$$

Ha a jobboldali második integrálban $x=\pi-z$-t tesszük, akkor az átmegy a következőbe: $\int\limits_0^{\pi} \log\sin\frac{z}{2}\,dz$ és z helyett megint x-et írva, a két integrált összevonva:

$$\int\limits_0^{\pi} \log\sin x\,dx=\pi\log 2+2\int\limits_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx$$

és ha most a jobboldali integrálban $\frac{x}{2}=z$ tesszük:

$$\int\limits_0^{\pi} \log\sin x\,dx=\pi\log 2+4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$$

-et kapjuk. A baloldali integrált bontsuk két részre, $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2} \ldots \pi$ határok közötti integrálokra:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin x \, dx.$$

A második tag az $x = \pi - z$ transzformációval az elsővel megegyezővé válik, vagyis:

$$\int_0^{\pi} \log \sin x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx,$$

tehát:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \pi \log 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx,$$

miből végül:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

nevezetes integrálra jutunk.

Ha tekintetbe vesszük a kiindulásunknál felállított

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin x}{x} \, dx$$

egyenletet és hogy az első tag, miként parciális integrálással azonnal láthatjuk: $\frac{\pi}{2}\left(\log \frac{\pi}{2} - 1\right)$, akkor azt is kapjuk, hogy a második tag:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin x}{x} \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2 - \frac{\pi}{2} \log \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} [1 - \log \pi].$$

16. Megmutatjuk még, hogyan lehet ugyancsak az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

formulához eljutnunk az integrál eredeti definiciója alapján. Evégből megemlítjük, hogy az $x^n - 1 = 0$ egyenlet gyökei ezek: (n pozitiv egész szám)

$$1, \ \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \ \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \ldots$$
$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \ldots \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

vagyis az $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = 0$ gyökei a $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, ha k-nak $1, 2, \ldots n-1$ értékeket adjuk, tehát a gyöktényezők ezek:

$$x - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

és így:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = \prod_{1}^{n-1} \left(x - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

és ha mindkét oldalon $x=1$ tesszük:

$$n=\prod_{1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Ha
$$1-\cos\frac{2k\pi}{n}=2\sin^2\frac{2k\pi}{2n}=2\sin^2\frac{k\pi}{n}$$

és
$$\sin\frac{2k\pi}{n}=2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\cos\frac{k\pi}{n}$$

tesszük és $2\sin\frac{k\pi}{n}$-et kiemeljük: akkor tehát:

$$n=\prod_{1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

Vegyük mindkét oldalnak az abszolut értékét. A baloldal valós szám, abszolut értéke: n. A jobboldalon a k-ik tényező abszolut értéke: $2\sin\frac{k\pi}{n}$, mert a mellette levő tényező abszolut értéke: 1 ($\sin\frac{k\pi}{n}$ poz., mert $k<n$); tehát

$$n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

tehát:
$$P=\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Számítsuk most ki a következő sinus szorzatot:

$$P_1=\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Alakítsuk ezt át cosinus szorzattá azáltal, hogy

$$\sin\frac{k\pi}{2n}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)$$

tesszük, azaz:
$$\sin\frac{k\pi}{2n}=\cos\frac{(n-k)\pi}{2n}.$$

Ha k 1-től $n-1$-ig megy, akkor $n-k$ $n-1$-től 1-ig halad, tehát $n-k$ ugyanazokat az értékeket kapja, mint k. Ebből következik, hogy az átalakítás ilyen egyszerű eredményre vezet:

$$P_1=\cos\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

De tekintetbe véve, hogy

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{n},$$

azt látjuk, hogy:
$$P=P_1^2\,.\,2^{n-1},$$

vagyis:
$$P_1^2=\frac{n}{2^{2n-2}}$$

és így: (tudva, hogy P_1 pozitiv),

$$P_1 = \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

és ebből még:

$$\log\sin\frac{\pi}{2n} + \log\sin\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \log\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2}\log n - (n-1)\log 2.$$

De az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx$-et úgy számíthatjuk ki, hogy a $0\cdots\frac{\pi}{2}$ szakaszt felosztjuk n egyenlő részre és mindenik rész végpontjához tartozó értékeit vesszük az integrándusnak és megalkotjuk a következő összeget:

$$\frac{\pi}{2n}\left[\log\sin\frac{\pi}{2n} + \log\sin\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \log\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} + \log\sin\frac{n\pi}{2n}\right]$$

(az utolsó tag $\log\sin\frac{\pi}{2} = \log 1$ úgyis 0, tehát elhagyható), és ennek a limeszét vesszük. De a zárójelben álló kifejezés éppen az imént kiszámított: $\frac{1}{2}\log n - (n-1)\log 2$, tehát

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx = \lim_{n=\infty}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\log n}{n} - \frac{\pi}{2}\frac{n-1}{n}\log 2\right) = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

miként előbb találtuk.

17. Ha az előbbi integrálban $\sin x = y$ írjuk, akkor $\cos x\, dx = dy$, azaz $dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$. Ha $x=0$, akkor $y=0$, ha $x=\frac{\pi}{2}$, akkor $y=\sin\frac{\pi}{2} = 1$, tehát az integrál új alakja:

$$\int_0^1 \frac{\log y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx$-et parciális integrálással alakítjuk át, $\log\sin x$-et u-nak, dx-et dv-nek téve, akkor:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx = [x\log\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{cotg} x\, dx.$$

Az első tagban $\frac{\pi}{2}$ helyettesítése 0-t ad, ha pedig x helyett 0-t teszünk, akkor azt kapjuk, hogy $\lim_{x=0} x\log\sin x = 0$, mert $\sin x = \frac{\sin x}{x}\cdot x$ téve: $x\log\sin x = x\log\frac{\sin x}{x} + x\log x$; tehát:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{cotg} x\, dx = \frac{\pi}{2}\log 2.$$

18. Számítsuk ki ezt az integrált:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x\, dx.$$

Evégből integráljunk parciálisan $x - \frac{\pi}{2} = u$, $\operatorname{tg} x\, dx = dv$ téve, akkor

$$v = -\log \cos x;$$

tehát
$$I = -\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \log \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx =$$
$$= -\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

Az első tagról azon a módon, mint előbb, kimutatjuk, hogy: 0. A második tagban $\frac{\pi}{2} - x = y$ szubsztituciót végezzük.

19. Határozzuk meg ezt az integrált:

$$\int_0^1 \frac{\log (1+x)}{1+x^2} dx.$$

Tegyük $x = \operatorname{tg} y$. Ekkor $1+x = 1 + \operatorname{tg} y = \frac{\sin y + \cos y}{\cos y}$ és így:

$$\log (1+x) = \log (\sin y + \cos y) - \log \cos y.$$

De
$$\sin y + \cos y = \sin y + \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - y\right);$$

továbbá: $1+x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ és $dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$. Az új határok: 0 és $\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{\log (1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \frac{2 \,.\, \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{\cos y} dy = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos y \, dy +$$
$$+ \frac{\pi}{4} \log \left(2 \sin \frac{\pi}{4}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos \left(\frac{\pi}{4} - y\right) dy.$$

A jobboldali első és utolsó integrál ellenkezően egyenlő; tehát:

$$\int_0^1 \frac{\log (1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2.$$

20. Határozzuk meg ezt az integrált:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{ha } a>1.$$

Tegyük $x = \sin y$, akkor:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{a - \sin y}.$$

Az $\int \frac{dy}{a - \sin y}$ határozatlan integrál kiszámítása végett a rendes módon vezessük be az $u = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$-et. Az integrál átmegy ebbe: $2 \int \frac{du}{au^2 - 2u + a}$. Az új határok azonban: -1 és $+1$ lesznek; tehát:

$$I = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{du}{au^2 - 2u + a} = \left[\frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{au-1}{\sqrt{a^2-1}}\right]_{-1}^{+1} =$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

minthogy
$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Az
$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$
még így is írható:
$$\frac{1}{a}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{a}\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}$$

és ha $\frac{1}{a}=y$ tesszük, akkor, minthogy $a>1$, $y<1$;
$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-xy)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Mutassuk meg, hogy ha mindkét oldalon y szerint a $2n$-ik differenciálhányadost vesszük és $y=0$ tesszük, a következő egyenletre jutunk:
$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\pi.$$

21. Bizonyítsuk be, hogy ezen összeg:
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$
limesze, ha n végtelenné válik: $\log 2$. Evégből számítsuk ki ezt az integrált:
$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}.$$

Ezen integrál értéke: $\log 2$. Másrészt azonban az integrál értelmezése szerint osszuk fel a $0\ldots1$ szakaszt n egyenlő részre; az integrándusnak az egyes szakaszok baloldali határpontjához tartozó értékei:
$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1+\frac{1}{n}},\ldots\ \frac{1}{1+\frac{n-1}{n}},\ \text{vagyis}\ 1,\ \frac{n}{n+1},\ \frac{n}{n+2},\ \frac{n}{n+3},\ldots\ \frac{n}{2n-1},$$

tehát:
$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

22. Legyen
$$L(u)=p\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dp}{dx}\,\frac{du}{dx}+qu,$$
ahol p, q az x differenciálható függvényei az $a\ldots b$ szakaszban. Parciális integrációval alakítsuk át az
$$\int_a^b[uL(v)-vL(u)]\,dx$$
integrált.

Az $L(u)$ még így is írható: $\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]+qu$; tehát:

$$\int_a^b [uL(v)-vL(u)]\,dx=$$

$$=\int_a^b \left\{u\frac{d}{dx}\left[p\frac{dv}{dx}\right]+quv-v\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]-quv\right\}dx=$$

$$=\int_a^b \left\{u\frac{d}{dx}\left[p\frac{dv}{dx}\right]-v\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]\right\}dx=\left[pu\frac{dv}{dx}-pv\frac{du}{dx}\right]_a^b-$$

$$-\int_a^b \left(p\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}-p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right)dx=\left[pu\frac{dv}{dx}-pv\frac{du}{dx}\right]_a^b,$$

tehát $$\int_a^b [uL(v)-vL(u)]\,dx=\left[pu\frac{dv}{dx}-pv\frac{du}{dx}\right]_a^b.$$

23. Mutassuk meg, hogy ha

$$f(x)=-f(-x),$$

[vagyis az $y=f(x)$ görbe a kezdőpontra nézve szimmetrikus], akkor:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=0,$$

ha k egész szám. Ugyanis a $-\pi\ldots\pi$ szakaszt két részre bonthatjuk:

$$I=\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx+\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

és az első integrálban tegyük $x=-y$; ekkor a határok π és 0 lesznek, és $dx=-dy$, tehát, ha tekintetbe vesszük, hogy $f(-y)=-f(y)$, akkor az első integrál: $-\int_0^{\pi} f(y)\cos ky\,dy$; és így [$y$ betű helyett x-et téve] azonnal látjuk, hogy $I=0$.

Mutassuk meg, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=2\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$

24. Ha $f(x)=f(-x)$, vagyis az $y=f(x)$ görbe az y tengelyre nézve szimmetrikus, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=0 \quad \text{és} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=2\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

25. Ha $f(x)=f(\pi-x)$, vagyis az $y=f(x)$ görbe a $0\ldots\pi$ szakaszban az $x=\frac{\pi}{2}$ egyenesre nézve szimmetrikus, akkor az $\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$ k (egész szám!) tovább egyszerűsíthető: az intervallum ismét felére redukálható. Ugyanis

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin kx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

A második integrálban tegyük $x=\pi-y$; ekkor a határok $\frac{\pi}{2}$ és 0 lesznek. Ez a második integrál ilyen alakú:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-y)\sin(k\pi-ky)\,dy=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y)\sin(k\pi-ky)\,dy$$

és tekintetbe véve, hogy $f(\pi-x)=f(x)$, a két integrál összevonható:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,[\sin kx+\sin(k\pi-kx)]\,dx.$$

A zárójelben álló kifejezés: $2\sin\frac{k\pi}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}-kx\right)$; tehát:

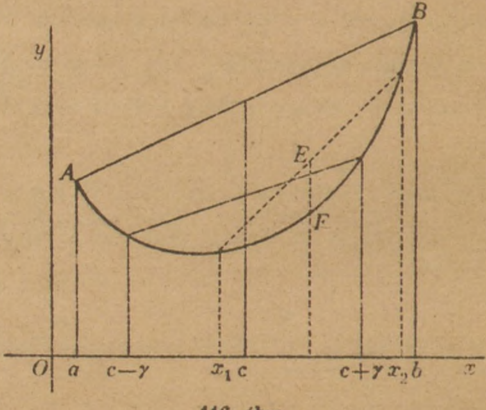
$$\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=2\sin\frac{k\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{2}-kx\right)dx.$$

Ha k páros szám, akkor az elül álló $\sin\frac{k\pi}{2}=0$, tehát, ha $k=2n$, akkor: $\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx=0$. Ha pedig k páratlan szám, $k=2n+1$, akkor

$$\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}=(-1)^n \quad \text{és} \quad \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}-(2n+1)x\right]=(-1)^n\sin(2n+1)x,$$

tehát
$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n+1)x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)x\,dx.$$

26. Alakítsuk át ilyen módon a $\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$-et, ha $f(x)=f(\pi-x)$.



116. ábra.

27. *Egy fontos középértéktétel* (Fejér L.-féle középértéktétel). Ha $y=f(x)$ az $a\ldots b$ szakaszban mindenütt egyértékű konkav, akkor e szakasz bármely két pontjára nézve áll, hogy:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

mert az E pont magasabban van, mint az F (116. ábra). Az ilyen görbét bármely egyenes (az ab közben) legfölebb két pontban metszheti. (Bizonyítsuk be ezt az állítást!) Ebből egyúttal az is következik, hogy ha az ab szakasz közepét c-vel jelöljük és e középponthoz szimmetrikusan fekvő két pont $c-\gamma$, $c+\gamma$, akkor $f(c-\gamma)+f(c+\gamma)$ a γ-val együtt nő és az ab-ben maximummá válik, ha $c-\gamma=a$, $c+\gamma=b$, azaz, ha $\gamma=\frac{b-a}{2}$.

Ez az állítás is közvetlenül folyik a konkavitás értelmezéséből. Ezek megemlítése után legyen $\varphi(x)$ az ab szakaszban mindenütt pozitiv és a $c=\frac{a+b}{2}$ középpontban emelt merőlegesre nézve szimmetrikus, azaz:

$$\varphi(x)=\varphi(a+b-x).$$

Az $I=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ integrált osszuk két részre: $\left[c=\frac{a+b}{2} \text{ középpont}\right]$

$$I=\int_a^c f(x)\varphi(x)\,dx+\int_c^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

A második integrálban $x=b+a-y$ lesszük. Az új határok lesznek: c és a; tehát e második integrál új alakja (y helyett megint x-et téve):

$$\int_a^c f(a+b-x)\varphi(a+b-x)\,dx;$$

és a $\varphi(x)$ szimmetriáját tekintetbe véve: $\int_a^c f(a+b-x)\varphi(x)\,dx$. Eszerint:

$$I=\int_a^c \varphi(x)\,[f(x)+f(a+b-x)]\,dx.$$

Erre az integrálra alkalmazhatjuk az első középértéktételt, mert $\varphi(x)$ feltételünk szerint pozitiv. Az $f(x)+f(a+b-x)$, [mely $x=c-\gamma$-t téve, ilyen alakú: $f(c-\gamma)+f(c+\gamma)$], miként előbb mondottuk, maximumát akkor veszi fel, ha $x=a$. E maximuma: $f(a)+f(b)$. Az $f(x)$ konkav voltából pedig következik, hogy:

$$f(x)+f(a+b-x)>2f\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

tehát:

$$[f(a)+f(b)]\int_a^c \varphi(x)\,dx>I>2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^c \varphi(x)\,dx.$$

A $\varphi(x)$ szimmetriájából azonnal következik, hogy

$$\int_a^c \varphi(x)\,dx=\int_c^b \varphi(x)\,dx, \quad \text{vagyis} \quad \int_a^c \varphi(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b \varphi(x)\,dx;$$

tehát a szóban forgó középértéktétel erre az egyszerűen áttekinthető alakra hozható:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \varphi(x)\,dx>\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx>f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Mégegyszer megjegyezzük, hogy $f(x)$ az ab szakaszban konkav, $\varphi(x)$ pozitiv és a szakasz közepén emelt merőlegesre nézve szimmetrikus. Vezessük le a megfelelő középértéktételt, ha $f(x)$ nem konkav, hanem konvex. Hogyan alakul a tétel, ha $\varphi(x)$ nem pozitiv, hanem negativ?

Mutassuk meg ezzel a középértéktétellel, hogy

$$\left|\int\limits_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \frac{\sin nx}{x}\,dx\right| < \frac{(2k+1)}{k(k+1)\pi}.$$

28. Az $(u_1+\lambda v_1)^2+(u_2+\lambda v_2)^2+\cdots+(u_n+\lambda v_n)^2$ alak λ minden értékénél pozitiv (u_i, v_i, λ valósak); ha rendezzük,

$$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2+2\lambda(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)+\lambda^2(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2)$$

alakra jutunk. Hogy az $A+2B\lambda+C\lambda^2$ quadratikus alak sohase lehessen negativ, ahhoz szükséges és elégséges $\alpha)$ hogy C pozitiv legyen és $\beta)$ hogy B^2-AC negativ legyen. Ha ezt az elemi tételt alkalmazzuk a jelen esetre, azt kapjuk, hogy $u_1 \ldots u_n$ és $v_1 \ldots v_n$ minden értékére nézve fönnáll ez az egyenlőtlenség:

$$(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)^2-(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2)<0.$$

Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ integrálhatók és az előbbi egyenlőtlenségbe

$$u_1=f\left(\frac{1}{n}\right),\ u_2=f\left(\frac{2}{n}\right),\ldots\ u_n=f(1);\ v_1=\varphi\left(\frac{1}{n}\right),\ v_2=\varphi\left(\frac{2}{n}\right),\ldots\ v_n=\varphi(1)$$

tesszük és $\frac{1}{n^2}$-tel szorzunk és n végtelen naggyá lesz, akkor erre az egyenlőtlenségre jutunk:

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 \leq \int_0^1 [f(x)]^2\,dx \,.\int_0^1 [\varphi(x)]^2\,dx$$

(Schwarz-féle egyenlőtlenség).

29. Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $a \ldots b$ szakaszban folytonosak és a szakaszt felosztjuk az a, x_1, x_2, $\ldots x_{n-1}$, b részekre és az $x_i \ldots x_{i+1}$ részben két különböző pontot szemelünk ki: ξ_i és η_i-t és megalkotjuk a

$$\sum_0^n f(\xi_i)\,\varphi(\eta_i)\,(x_i-x_{i-1})$$

összeget (tehát nem ugyanazon a helyen vesszük az $f(x)$ és $\varphi(x)$ értékét), akkor

$$\lim \Sigma f(\xi_i)\,\varphi(\eta_i)\,(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

ha, mint a rendes eljárásnál, a szakaszok maximális terjedelme 0 felé konvergál. Bizonyítsuk be ezt az állítást.

30. Számítsuk ki ezt az integrált:

$$I=\int_{-1}^{+1} x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

ha

$$y=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\xi}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi}},$$

ahol arctg a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti értékét jelenti.

31. Mutassuk meg, hogy ha

$$y = \frac{1}{n!}\int_a^x \varphi(z)(x-z)^n\,dz,$$

akkor:
$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \varphi(x).$$

32. Mutassuk meg, hogy ha $\varphi(x)$ folytonos és $a<x<b$, továbbá

$$y = \int_a^b G(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

ahol
$$G(x,\xi) = \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a}, \quad \text{ha} \quad \xi<x,$$

$$G(x,\xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a}, \quad \text{ha} \quad \xi>x,$$

akkor: $\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0$ és y az $x=a$ és $x=b$ helyeken: 0.

[Ugyanis az integrált két részre bontjuk:

$$y = \int_a^x \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a}\varphi(\xi)\,d\xi + \int_x^b \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a}\varphi(\xi)\,d\xi$$

és tagonkint differenciálunk.]

Vezessük le a tételt az előbbi feladatban szereplő formulából is.

33. *Az e transcendens szám.* *Hurwitz* a határozott integrálok segítségével rendkívül szellemes módon bizonyította be, hogy e nem lehet algebrai szám (olyan algebrai egyenlet gyöke, melynek együtthatói egész számok). Hogy a bizonyítás alapgondolatát jobban megértessük, először kimutatjuk, hogy nem lehet racionális szám.

Legyen $f(y)$ az y racionális egész függvénye (pl. k-adfokú). Számítsuk ki ezt az integrált:

$$\int_0^x e^{-y}f(y)\,dy.$$

Parciálisan integrálva:

$$\int_0^x e^{-y}f(y)\,dy = -\left[e^{-y}f(y)\right]_0^x + \int_0^x e^{-y}f'(y)\,dy = -e^{-x}f(x) + f(0) + \int_0^x e^{-y}f'(y)\,dy.$$

Újra parciálisan integrálva és ezt az eljárást k-szor ismételve, azt kapjuk, hogy:

$$\int_0^x e^{-y}f(y)\,dy = -e^{-x}[f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(k)}(x)] +$$
$$+f(0)+f'(0)+f''(0)+\cdots+f^{(k)}(0),$$

vagy ha a zárójelben álló racionális egész függvényt $F(x)$-el jelöljük:

$$\int_0^x e^{-y}f(y)\,dy = -e^{-x}F(x) + F(0),$$

ami így is írható:

$$e^x\int_0^x e^{-y}f(y)\,dy = -F(x) + e^x F(0).$$

Ez az egyenlet fennáll x minden értékére és minden $f(y)$ racionális egész függvényre nézve, ha

$$F(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots$$

Tegyük fel már most, hogy $e=\frac{a}{b}$ racionális szám és válasszuk $f(y)$ gyanánt a következő racionális egész függvényt:

$$f(y)=\frac{y^{r-1}(y-1)^r}{(r-1)!},$$

ahol az r exponenst egyelőre nem állapítjuk meg; a tárgyalás folyamán majd alkalmasan választjuk. x gyanánt válasszuk az 1-et. Ekkor tehát, tekintetbe véve, hogy föltételünk szerint $e=\frac{a}{b}$:

$$a\int_0^1 e^{-y}f(y)\,dy=-bF(1)+aF(0). \qquad \text{I.}$$

Azt fogjuk kimutatni, hogy ez az egyenlet abszurdumra vezet; mert majd r-et úgy választjuk, hogy a jobboldalon egy 0-tól különböző egész szám lesz, a baloldalon pedig 1-nél kisebb (sőt tetszés szerinti kis) szám.

Tudjuk, hogy

$$F(y)=f(y)+f'(y)+f''(y)+\cdots+f^{(2r-1)}(y).$$

Nézzük az $f^{(i)}(y)$-t. Ha $i\leq r-1$, akkor az $f^{(i)}(y)$ minden tagjában (melyeket a Leibniz-szabály szerint állítunk elő) van legalább egy $(y-1)$ tényező; tehát $f^{(i)}(y)$ az $y=1$ helyen eltűnik.

Ha $i=r$, akkor az $f^{(r)}(y)$-ban egyetlen tag lesz, mely az $y-1$-et nem tartalmazza tényezőül: az, amelyet úgy kapunk, hogy az $(y-1)^r$-t differenciáljuk r-szer. Ez a tag: ry^{r-1} lesz; minden más tagban $y-1$ tényezőül szerepel, tehát $f^{(r)}(1)=r$.

Ha $i>r$, akkor az $f^{(i)}(y)$-ban megint csak egyetlen tag lesz, amelyben $y-1$ nem szerepel tényező gyanánt; az, amelyet úgy kapunk, hogy a második tényezőt r-szer, az elsőt pedig $i-r$-szer differenciáljuk. Ez a tag ilyen alakú:

$$r(r-1)(r-2)\ldots(2r-i)\,y^{2r-i-1}$$

minden más tagban előfordul az $y-1$ mint tényező és így

$$f^{(i)}(1)=r(r-1)(r-2)\ldots(2r-i)$$

r-rel osztható. Azt látjuk tehát, hogy $F(1)$ r-rel osztható szám.

Ha $i<r-1$, akkor $f^{(i)}(y)$ minden tagjában van egy y tényező; tehát az ilyen $f^{(i)}(y)$ az $y=0$ helyen eltűnik.

Ha $i=r-1$, akkor egyetlen tagban nem lesz y tényező: abban, mely az által keletkezett, hogy a $f(y)$ első tényezőjét differenciáltuk $r-1$-szer. Ez a tag lesz: $(y-1)^r$, tehát $f^{(r-1)}(0)=(-1)^r$.

Ha pedig $i\geq r$, akkor csak olyan tagjai lesznek az $f^{(i)}(y)$-nak, amelyek vagy tartalmazzák az y-t, vagy ha nem tartalmazzák (vagyis az első tényezőt éppen $r-1$-szer differenciáltuk), akkor már a második tényező differenciálhányadosát is tartalmazzák, vagyis $y=0$ helyettesítésnél r-rel oszthatók lesznek. Azt látjuk tehát, hogy $F(0)$-nak első tagja $(-1)^r$, minden további tagja r-el osztható, vagyis $F(0)\equiv\pm1 \bmod r$.

Ha már most r-et úgy választjuk, hogy a-nak ne legyen osztója, akkor az I) jobboldalán álló kifejezés első tagja r-el osztható, második tagja r-el nem osztható, tehát e jobboldal *0-tól különböző egész szám*. A baloldalon álló integrálban pedig az integrándusban $e^{-y}<1$, (y a $0\ldots 1$ intervallumban van) $|f(y)|<\frac{1}{(r-1)!}$, tehát az

$$\left|\int_0^1 e^{-y} f(y)\, dy\right| < \frac{1}{(r-1)!}.$$

Ha tehát $r>a+1$, akkor a baloldal 1-nél kisebb abs. értékű, a jobboldal pedig 0-tól különböző egész szám, ami képtelenség. Így tehát e nem lehet racionális szám.

Kimutatjuk most, hogy e nem lehet algebrai szám. Tegyük fel ugyanis, hogy e valamely

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

n-edfokú algebrai egyenlet gyöke volna, ahol a c együtthatók egész számok.

Az előbb megállapított:

$$e^x \int_0^x e^{-y} f(y)\, dy = -F(x) + e^x F(0) \qquad A)$$

egyenletben tegyük sorban: $x=0$, $x=1$, $x=2, \ldots x=n$ és az így nyert egyenleteket szorozzuk meg sorban a $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_0$ együtthatókkal és adjuk össze. Ezzel a következőre jutunk: $(c_n + c_{n-1}e + c_{n-2}e^2 + \cdots + c_0 e^n = 0)$.

$$\sum_0^n {}^k c_{n-k} e^k \int_0^k e^{-y} f(y)\, dy = -\sum_0^n {}^k c_{n-k} F(k).$$

Válasszuk most $f(y)$ gyanánt a következő $(n+1)r-1$-edfokú racionális egész függvényt:

$$f(y) = \frac{y^{r-1}(y-1)^r(y-2)^r(y-3)^r \ldots (y-n)^r}{(r-1)!}.$$

Ha $i<r-1$, akkor az $f^{(i)}(y)$ minden tagjában lesz y tényező, tehát $f^{(i)}(0)=0$.

Ha $i=r-1$, akkor $f^{(r-1)}(y)$ egyetlen tagjában nem lesz y mint tényező. Ez a tag a következő:

$$(y-1)^r(y-2)^r \ldots (y-n)^r$$

és így:

$$f^{(r-1)}(0) = (-1)^{nr}(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n)^r,$$

tehát, ha r az n-nél nagyobb primszám, akkor *Fermat* tétele szerint

$$f^{(r-1)}(0) \equiv (-1)^n\, n!$$

tehát $f^{(r-1)}(0)$ nem osztható r-rel.

Ha pedig $i>r-1$, akkor már az $f^{(i)}(y)$ azon tagjaiban, amelyekben az y már kifogyott, a többi tényezőnek valamely differenciálhányadosa szerepel és így (minthogy y^{r-1}-nek $\overline{r-1}$-ik differenciálhányadosa $(r-1)!$) ezen tagok mindegyikében r mint tényező fordul elő; tehát minden $f^{(i)}(0)$ osztható r-rel, ha $i>r-1$, vagyis:

$$F(0) \equiv \pm n! \bmod r.$$

Nézzük most a jobboldalon álló többi $F(k)$ tagokat, ha $k \neq 0$. Azonnal látjuk, hogy $f^{(i)}(y)$-nak csak azon tagjaiban nem szerepel az $y-k$ tényező gyanánt, amelyekben $(y-k)^r$ tényező éppen r-szer differenciáltatott; de $(y-k)^r$ r-ik differenciálhányadosa: $r!$; tehát $f^{(i)}(y)$ minden tagjában, amely

$(y-k)$-t nem tartalmazza, r mint tényező fordul elő, vagyis $f^{(i)}(k)$ osztható r-el, azaz

$$F(k) \equiv 0 \bmod r.$$

És így a jobboldalon álló

$$\sum_0^n c_{n-k} F(k) = c_n F(0) + \sum_1^n c_{n-k} F(k)$$

első tagja r-el nem osztható, ha r-et úgy választjuk, hogy c_n-nek ne legyen osztója, de második tagja r-el osztható; tehát a $\sum_0^n c_{n-k} F(k)$ a *0-tól különböző egész szám.*

Az *A)* formula baloldalán álló integrálban az integrándusra nézve tudjuk, hogy a $0 \ldots k$ intervallumban $e^{-y} \leq 1$, továbbá a másik tényező

$$f(y) = \frac{y^{r-1}(y-1)^r(y-2)^r \ldots (y-n)^r}{(r-1)!},$$

ha y a $0 \ldots k \leq n$ határok között változik, mindenesetre kisebb, mint ha a számláló minden tényezője helyett n-et tennénk, vagyis

$$|f(y)| < \frac{n^{(n+1)r-1}}{(r-1)!},$$

vagy (ha az exponenst így írjuk: $(n+1)r-1=(n+1)(r-1)+n$, akkor)

$$|f(y)| < \frac{n^{(n+1)(r-1)}}{(r-1)!} \cdot n^n.$$

De $\lim\limits_{r=\infty} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} = 0$, bárminő szám legyen is az x; tehát, ha $x = n^{n+1}$ tesszük, akkor következik, hogy $\lim\limits_{r=\infty} \frac{n^{(n+1)(r-1)}}{(r-1)!} = 0$. Ez azt mondja, hogy az r mindig választható oly nagy primszámnak, hogy az $|f(y)|$ kisebb legyen egy tetszés szerinti kis számnál. [Ha ugyanis az állíttatnék, hogy e egy n-edfokú egyenlet gyöke, akkor α számot úgy választjuk, hogy $\alpha \,.\, n^n < \varepsilon$ legyen és azután r-et úgy, hogy $\frac{n^{(n+1)(r-1)}}{(r-1)!} < \alpha$ legyen; ezzel elértük, hogy $|f(y)| < \varepsilon$.]

Visszatérve már most a

$$\sum_0^n c_{n-k} e^k \int_0^k e^{-y} f(y)\, dy = -\sum_0^n c_{n-k} F(k)$$

egyenletre, azt látjuk, hogy a jobboldalon egy, a 0-tól különböző egész szám van. A baloldal abs. értéke kisebb a

$$\sum_0^n \left| c_{n-k} e^k \right| \left| \int_0^k e^{-y} f(y)\, dy \right|$$

-nál. Ha a $|c_{n-k}|$ együtthatók legnagyobbikát C-vel jelöljük, akkor, minthogy $\left| \int_0^k e^{-y} f(y)\, dy \right| < \varepsilon$, ez a kifejezés kisebb, mint

$$C\varepsilon \sum_0^n e^k,$$

tehát az ε kellő választásával olyan kicsinnyé tehető, amint csak óhajtjuk; tehát a baloldal abszolut értékben 1-nél kisebb, a jobboldalon pedig 0-tól különböző egész szám van, ami abszurdum. Ezzel tehát kimutattuk, hogy az e nem lehet algebrai szám.

34. Rajzoljuk meg az $y^2=ax^3$ *semicubicus parabolát* és határozzuk meg az Y tengellyel vont két párhuzamos közé eső területet!

35. A másodrendű görbe egyenlete azon esetben, midőn az x tengely az egyik főátmérő és a kezdőpont egyik csúcspont:

$$y^2=2px+qx^2.$$

Határozzuk meg az Y tengellyel párhuzamosan vont két egyenes és a görbe által határolt területet!

36. A *cissoid* egyenlete: $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. Rajzoljuk meg e görbét és határozzuk meg az ABA_1B_1 alakú területet!

37. A *láncgörbe* egyenlete: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Határozzuk meg az ABA_1B_1 alakú területet!

38. Határozzuk meg az $r^2\cos 2\varphi=1$ görbe valamely cikkének a területét!

39. Határozzuk meg az $r=\frac{a}{\cos\varphi}+b$ (conchoid) valamely cikkének a területét!

40. Számítsuk ki az $r^2=a^2\frac{\sin 3\varphi}{\cos\varphi}$ valamely cikkének a területét!

41. Határozzuk meg az $y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ görbe ívhosszát $x=0$-tól $x=a$-ig!

42. Számítsuk ki az $r^2=\frac{a^2}{\varphi}$ ívhosszúságát φ_1-től φ_2-ig?

43. Bizonyítsuk be, hogy a láncgörbe (l. 37. feladat) ABA_1B_1 területének aránya AB ívhosszúsághoz állandó.

44. Alkalmazzuk a 486. lapon megállapított egyenleteket arra az esetre, midőn a gördülő görbe az $y=ax^2$ parabola és határozzuk meg az $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{4a}$ pontnak, (vagyis a parabola gyujtópontjának) a ruletta görbéjét. [Ez esetben a t parameter gyanánt x teendő.] Mutassuk meg, hogy ez a rulettagörbe láncgörbe.

45. $\Gamma(a)$ *értelmezése.* (Gamma-függvény.) Mutassuk meg, hogy ez az integrál:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

konvergens, ha a pozitiv. Ezen integrál számértékét így jelöljük: $\Gamma(a)$. A $\Gamma(a)$ tehát ezen értelmezéssel minden pozitiv a értékre meg van adva.

46. Ha $a>1$, mutassuk meg (parciális integrálással), hogy

$$\Gamma(a)=(a-1)\,\Gamma(a-1)$$

és vezessük le ebből azt, hogy:

$$\Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1),$$

ha n pozitiv egész szám.

47. Ha m pozitiv szám, akkor:

$$\frac{1}{m^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-mx}x^{a-1}\,dx.$$

[A 45. alattiban tegyük x helyett my-t.]

48. *$B(p, q)$ értelmezése* (Beta-függvény). Mutassuk meg, hogy ez az integrál

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

konvergens, ha $p>0$ és $q>0$. Ezt a számértéket $B(p, q)$-val jelöljük. A B tehát minden (p, q) pozitiv értékpárra adottnak tekinthető.

49. Tegyük a 48-ban: $x=\frac{y}{1+y}$ és mutassuk meg, hogy:

$$B(p, q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$$

Mutassuk meg, hogy ez konvergens integrál, ha $p>0$ és $q>0$.

50. Bontsuk fel a $B(p, q)$ integrált két részre így:

$$B(p, q)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx+\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$$

és tegyük a második integrálban: $x=\frac{1}{y}$. Mutassuk meg, hogy ezzel a transzformációval $B(p, q)$ erre az alakra hozható:

$$B(p, q)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx,$$

amiből azt látjuk, hogy $B(p, q)=B(q, p)$.

IRODALOM.

Kiegészítésül és gyakorlásul ajánlom a már említett munkáknak az integrálszámításra vonatkozó fejezeteit, különösen pedig:

1. Jordan: Cours d'Analyse I., II. Paris 1909.
2. Genocchi-Peano: Calcolo differenziale. Torino 1884 és német fordításban Leipzig 1898.
3. Vallée-Poussin: Cours d'Analyse. Paris 1909. (Különösen a rektifikációra vonatkozó részét.)
4. Dini: Fondamenti della teoria delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878. Németül Leipzig 1892. (Különösen a fogalmak szabatos meghatározása szempontjából.
5. Hobson: The theory of functions of a real variable etc. Cambridge 1907. (A legújabb vizsgálatok szabatos egybeállítása.)
6. Serret: Lehrbuch der Diff. u. Integralrechnung. II. kötet. Leipzig 1909. (A függeléket külön is megemlítem.)
7. Cesaro-Kowalewsky: Lehrbuch der alg. Analysis. Leipzig 1904. (Gazdag anyaga és jó példái miatt.)
8. Goursat: Cours d'Analyse. Paris 1902.
9. Markoff: Differenzenrechnung. Leipzig 1896.
10. Seliwanoff: Differenzenrechnung. Leipzig 1904.
11. Riemann's Werke. Leipzig 1876. p. 213 (ahol az integrál szabatos meghatározása először szerepel).
12. Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen. Braunschweig 1901.

13. G. F. Meyer: Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. Leipzig 1871.
14. Kronecker-Netto: Vorlesungen über die Theorie der einfachen u. mehrfachen Integrale. Leipzig 1894.
15. Borel: Leçons sur les séries à termes positifs (az integrálok konvergenciájára vonatkozó rész).
16. Lebesgue: Leçons sur l'intégration etc. Paris 1904. az integrál legújabb elméletét tartalmazza; de az olvasónak előbb némi halmazelméleti ismeretre kell szert tennie, pl. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions, vagy Baire: Leçons sur la théorie des fonctions discontinues, vagy Vivanti-Gutzmer Functionentheorie-jából. (E munka második kötetében függelékben ismertetjük majd ezt az újabb elméletet.)
17. Picard: Traité d'Analyse, 2e éd. t. I. 1901.
18. Bromwich: An introduction to the theory of infinite series. London 1908.

A feladatok nagy része a már említett feladatgyűjteményekből, az említett kézikönyvekből (azokon kívül csak még Bertrand nagy munkáját említem) és egyes értekezésekből vétettek.

XIV. FEJEZET.

A KOMPLEX SZÁM.

1. Bevezetés. A számlálás az egész számokhoz vezetett. A kivonás rávezet arra a követelésre, hogy olyan számot keressünk, mely a-hoz adva, b összeget eredményezzen, vagyis az $x+a=b$ egyenlet megoldására. Hogy ezt az egyenletet minden esetben megoldhassuk, ki kellett bővítenünk a számfogalmat: be kellett hoznunk a negativ számokat is. Az osztás művelete új bővítést kivánt. Az a követelés, hogy az a és b egész számokhoz mindig tartozzék oly c szám, mely a-val szorozva b-t adjon eredményül, vagyis, hogy az $ax=b$ egyenletnek [ha csak $a \neq 0$] mindig legyen megoldása, rávezetett a törtszámokra. Az egész számok és a törtszámok együttesen a *racionális* számok. De a racionális számokkal sem érhettük be; már a legegyszerűbb feladatok, mint pl. $x^2=2$ egyenlet megoldása szükségessé tette, hogy a számfogalmat tovább bővítsük és bevezessük az irracionális számokat. A racionális és irracionális számok egy névvel: *reális (valós)* számok. Eddig csakis ilyenekkel foglalkoztunk behatóan. De még mindig akadunk egész egyszerű feladatokra, amelyek megoldása reális számokkal nem sikerül. Így például, hogy csak a legegyszerűbbet említsük, olyan reális szám, melynek négyzete: -1 volna, nem létezik. A számfogalmat ismét tágítanunk kell, ha csak nem akarjuk azt mondani, hogy pl. az $x^2+A=0$ egyenletnek van megoldása, ha A negativ szám és nincs megoldása, ha A pozitiv. Látni fogjuk, hogy úgy, miként a negativ és irracionális szám bevezetése a mathematikai fogalmak általánosításán kívül, tehát a tisztán mathematikai célon kívül, gyakorlati szempontból is igen nagy szolgálatot tett, amennyiben bizonyos tünemények leírására és tárgyalására a mathematikát alkalmassá tette, úgy a komplex számok is a szorosan vett mathematikai rendeltetésükön, a fogalmak általánosításán felül igen jó szolgálatokat tesznek főként geometriai (és fizikai) jelenségek leírásánál.

A komplex számot is minden geometriai és más szemlélettől függetlenül kell bevezetnünk, hogy azután éppen a geometriai szemlélet elemzésére és támogatására használhassuk. Ezáltal tárgyalásunk kissé absztrakttá válik és megállapodásaink első pillanatra önkényeseknek tetszenek. Ennek elkerülése végett tisztán methodikai okokból helyenkint ráutalunk a geometriai szemléletre is.

2. A számpár. a és b reális számokat *egy fogalommá* foglaljuk össze és (a, b)-vel jelöljük ezt az új fogalmat, melyet az a, b számokból alakított *számpár*nak nevezünk. [Éppen úgy, mint ha egy P pont abscisszáját a-t és ordinátáját b-t a P pont helyzetének jellemzésére használjuk. Ekkor az (a, b) számpár voltaképpen a P pont helyzetének értelmezésére szolgál.] Az (a, b) számpár *elemei*: a, b, melyeket az (a, b) számpár koordinátáinak is mondunk és pedig a az első koordináta, b a második. Sokszor ezt a számpárt, mely egyetlen egy fogalom, egy betűvel is jelöljük és azt mondjuk: $P=(a, b)$, vagyis az (a, b) számpár neve: P. Ezt a P-t, tehát az (a, b) számpárt, ha a mindjárt megjelölendő tulajdonságokkal rendelkezik, *szám*nak fogjuk tekinteni és pedig az a, b koordinátákkal biró *komplex* számnak; vagyis inkább a számfogalmat kibővítjük úgy, hogy az eddigiekhez ezek az újak lépjenek. Ezeket az új számokat bizonyos tulajdonságokkal akarjuk felruházni oly módon, hogy ezen új számok a régieket is maguk közé foglalják, vagyis a számfogalomnak ne csak bővítése, hanem általánosítása is történjék. Ezért tehát megállapítjuk először is, hogy az a számpár, melynek mindkét eleme: 0, a 0 értelmezésére szolgáljon; azaz

$$1) \quad (0, 0)=0.$$

Ha pedig csak egyik elem és pedig a *második* elem 0, akkor a számpár valós számot értelmezzen, azaz*

$$2) \quad (a, 0)=a.$$

[E két megállapítás geometriai célzata világos; a sík minden pontjához tartozik egy (a, b) számpár, a kezdőponthoz tartozó számpár: $(0, 0)$, az X tengely, az úgynevezett valós tengely pontjaihoz tartozó számpárok mind ilyen alakúak: $(a, 0)$, mert a második koordináta: 0.]

Megállapítjuk továbbá, hogy két komplex szám akkor és csakis akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlők; azaz akkor és csakis akkor lesz

$$3) \quad (a, b)=(c, d), \quad \text{ha} \quad a=c, \quad b=d.$$

Ezen megállapítások után az új számokkal való műveleteket kell értelmeznünk. E tekintetben teljes szabadsággal rendelkezünk. Két számból (a, b) és (c, d)-ből bizonyos törvényszerűséggel készített számot nevezhetjük a két szám összegének stb. és magát az eljárást összeadásnak stb. Szabadságunkat csak két dolog korlátozza. Ugyanis a műveleteket úgy kell értelmeznünk, hogy ha csak lehetséges, az illető műveletekre a reális számok esetében megállapított alaptörvények [mint pl. az összeadás és szorzás kommutativ és associativ törvénye, továbbá a szorzás distributiv elve] érvényben maradjanak és hogy a műveletek úgy értelmeztessenek, hogy

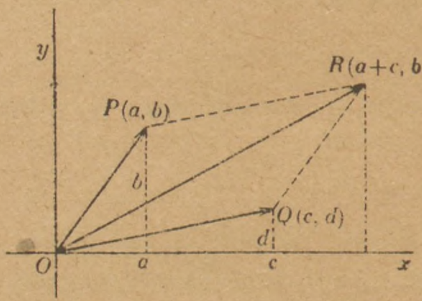
* A második megállapodásból az első is következik, mert ha $a=0$, akkor $(0, 0)=0$.

azon esetben, midőn az új számok speciális eseteivel: a régi számokkal van dolgunk, eredményeink a régi eredményekkel megegyezzenek. Mert ha nem így volna, akkor az új műveleteket nem is volna szabad a régi néven neveznünk.

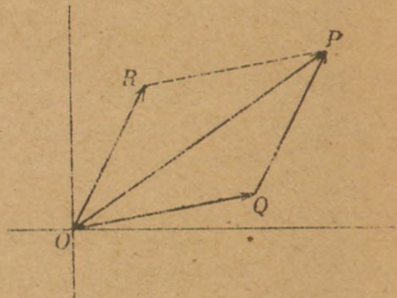
3. A műveletek értelmezése. a) *Összeadás és kivonás.* Eszerint tehát megállapítjuk, hogy a $P=(a,b)$ és $Q=(c,d)$ számok összegén azt az R számot értjük, melynek koordinátái: $a+c$, $b+d$, azaz:

$$4)\quad (a, b)+(c, d)=(a+c, b+d).$$

[Geometriai értelme ennek az, hogy két pont összegét értelmezzük oly módon, hogy az összeg az OP és OQ által meghatározott parallelogramm negyedik csúcsa legyen; ezt az összeadást geometriai összeadásnak nevezzük. Legtöbbször azonban nem azt



117. ábra.



118. ábra.

mondjuk, hogy az (a, b) számnak a P pont felel meg, hanem azt, hogy e számnak az OP vektor (az OP nagyság és irány szerint) felel meg és így az összeadás voltaképpen a vektorok összeadása.]

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az összeadás alaptörvényei érvényesek és azt is látjuk, hogy ha $b=0$, $d=0$, akkor

$$(a, 0)+(c, 0)=(a+c, 0),$$

ami azt fejezi ki, hogy az összeadás új módja a régit magában foglalja.

Az összeadás ezen megállapításából rögtön következik, hogy ha adva van az egyik összeadandó és az összeg, a másik összeadandó teljesen meg van határozva, vagyis a $P+X=R$ egyenletnek mindig van egyértelmű megoldása; ugyanis ha $P=(a,b)$, $R=(u,v)$, akkor $X=(u-a, v-b)$, mert $x=u-a$, $y=v-b$ az $a+x=u$ és $b+y=v$ egyenletek *egyetlen* megoldásai. Ezzel tehát a kivonást is értelmeztük.

b) *A szorzás.* Egyelőre önkényesnek látszik a szorzás értelmezése. Ugyanis az (a, b) és (c, d) számok szorzata alatt azt a számot akarjuk érteni, mely e kettő koordinátáiból úgy alakul, hogy első koordinátája: $ac-bd$, második koordinátája $ad+bc$ legyen: azaz;

$$5)\quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Így pl. $(1, 2) \cdot (3, 4) = (-5, 10)$. Ha az egyik tényező 0, azaz pl. $a=0$, $b=0$, akkor ezen értelmezés szerint a szorzat is 0 és fordítva is áll a dolog. Ha a szorzat 0, akkor egyik tényezőnek 0-nak kell lennie, ugyanis ha

$$ac-bd=0, \quad ad+bc=0,$$

akkor ha az első egyenletet c-vel, a másodikat d-vel szorozzuk és a két egyenletet összeadjuk:

$$a(c^2+d^2)=0$$

-ra jutunk; ha pedig az elsőt $-d$-vel, a másodikat c-vel szorozzuk és a két egyenletet ismét összeadjuk,

$$b(c^2+d^2)=0$$

-ra jutunk. E két egyenletből következik, hogy vagy $c^2+d^2=0$, azaz külön $c=0$, $d=0$, vagy pedig $c^2+d^2 \neq 0$ és akkor $a=0$ és $b=0$; tehát vagy az (a, b), vagy a (c, d) szám 0. A szorzás értelmezéséből tehát következtettük, hogy a szorzat akkor és csakis akkor lehet 0, ha egyik tényezője: 0.

A szorzás ezen értelmezéséből azonnal következik, hogy a szorzás alaptörvényei: a kommutativ, associativ és distributiv elvek érvényben maradtak. Lássuk ezen állítás igazolását pl. a distributiv elvre nézve. Azt akarjuk kimutatni, hogy ha:

$$P=(a, b), \quad Q=(c, d), \quad R=(u, v),$$

akkor
$$(P+Q)R = PR+QR.$$

Tudjuk, hogy: $\quad P+Q=(a+c, b+d)$;

tehát $\quad (P+Q)R = [(a+c)u-(b+d)v, (a+c)v+(b+d)u]$

és $\quad PR=(au-bv, av+bu), \quad QR=(cu-dv, cv+du)$;

tehát $\quad PR+QR=[(a+c)u-(b+d)v, (a+c)v+(b+d)u]$,

vagyis valóban: $\quad (P+Q)R = PR+QR.$

Különösen egyszerű a szorzás azon esetben, midőn az egyik tényező valós szám. Legyen pl. $b=0$, akkor $(a, 0)=a$ valós szám. Ez esetben a szorzás értelmezése szerint [5)-ben $b=0$ téve]

$$a(c, d) = (ac, ad),$$

vagyis a komplex számot valós számmal úgy szorozzuk, hogy a koordinátáit egyszerűen e valós számmal megszorozzuk. Akkor is jelentékenyen egyszerűsödik a szorzás, ha az első koordináta: 0.

Az ilyen számokat: $(0, b)$, melyekben az első koordináta: 0, *tiszta képzetes* (imaginarius) számoknak nevezzük.

[Megint a geometriai szemléletet véve segítségül, e tiszta képzetes számoknak megfelelő pontok az y tengelyen vannak; ezért ezt sokszor az imaginarius számok tengelyének is nevezzük.]

A szorzásnak egyes speciális eseteit külön szemügyre vesszük:

$$a)\ (1,0)(c,d); \quad b)\ a(0,1), \quad c)\ (0,1).(0,1).$$

Az *a)* alatti szorzat: (c, d); ami egyszerűen az az előbbi megjegyzésünkből már ismeretes tény, hogy 1-gyel úgy kell szorozni a komplex számot, mint a valósat. A *b)* alatti szorzat: $(0, a)$, a *c)* alatti pedig: $(-1, 0)$, vagyis: -1.

4. Az imaginarius egység bevezetése. Az eddigiek most már arra indítanak, hogy a $(0, 1)$ tiszta imaginarius szám részére külön jelet vezessünk be. Ez a jel: i, az ú. n. imaginarius egység. A *c)* alatti szerint $i^2 = -1$. Az összeadás és szorzás megállapításai szerint most már az i jel felhasználásával az (a, b) komplex számot más, szokottabb alakban is felírhatjuk. Ugyanis (a, b) összegnek tekinthető ilyen módon:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

A második tag szorzatnak tekinthető: $(0, b) = b(0, 1)$; tehát $(a, b) = a + b(0, 1)$ vagy az i jel bevezetésével:

$$(a, b) = a + bi.$$

Ha már most az $(a+bi)$ és $(c+di)$ komplex számokat az algebrai összeadás rendes módja szerint, vagyis az i jelet is számnak tekintve, adjuk össze, akkor azt kapjuk, hogy

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+i(b+d)$$

és ha az algebrai szorzásnál követett rendes eljárással szorozzuk és tekintetbe vesszük, hogy $i^2 = -1$, akkor azt kapjuk, hogy:

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc),$$

tehát a 4) és 5) alatti megállapodás szerinti eredményekre jutottunk. Láthatjuk ebből, hogy ezentúl a komplex számokkal úgy végezhetjük az összeadás (kivonás) és szorzás műveletét, hogy a komplex számot az $a+bi$ alakban írjuk és ezen kifejezéssel úgy számolunk, mint az algebrában szokás, csak arra ügyelünk, hogy a számítás folyamán fellépő i^2 helyett mindenütt -1-et tegyünk.

Így például $(2+3i)(5+6i) = -8+27i$.

Az $a+bi$ és $a-bi$ számokat konjugált komplex számoknak nevezzük. Ez a viszony kölcsönös. $a+bi$ konjugáltja: $a-bi$ és fordítva $a-bi$-é $a+bi$. Fontos tudnunk, hogy

$$(a+bi)+(a-bi)=2a \quad \text{és} \quad (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2;$$

azaz, hogy a konjugált komplex számok összege és szorzata valós. Az utóbbi szorzatnak, az a^2+b^2-nek pozitiv négyzetgyökét az $a+bi$ szám *abszolut értékének*, vagy *modulusának* is nevezzük. [Geometriai értelme: a komplex szám által ábrázolt pontnak a kezdőponttól való távolsága $OP=\sqrt{a^2+b^2}$].

Fölvetjük azt a kérdést, hogy egyáltalában mikor lehet két komplex szám szorzata valós? Hogy az

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$

valós legyen, ahhoz kell, hogy $ad+bc=0$ legyen, vagyis $\frac{a}{c}=-\frac{b}{d}\cdot$ Ha ezt a közös valós számértéket k-val jelöljük, akkor tehát

$$a=kc,\ b=-kd \quad \text{és így} \quad a+bi=k(c-di),$$

vagyis az egyik tényező a másiknak konjugáltjától csak egy valós szorzóban különbözik.

5. Komplex számok osztása. Most már a komplex számok osztását is értelmezhetjük. Ha adva van a $c+di$ és az $a+bi$, akkor mindig találhatunk egy és csak egy számot (ha $a+bi$ nem 0), amely $a+bi$-vel szorozva: $c+di$-t adja szorzatul. Erről azonnal meggyőződhetünk. A keresett tényező legyen $x+iy$; akkor tehát kell, hogy:

$$(a+bi)(x+iy)=c+di$$

legyen, vagyis hogy az x és y kielégítsék ezen egyenletrendszert:

$$ax-by=c, \quad ay+bx=d.$$

E rendszer determinánsa: $a^2+b^2\neq 0$, tehát

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}; \quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

Ebből egyúttal azt is látjuk, hogy a keresett hányadost úgy is előállíthattuk volna, ha a $\frac{c+di}{a+bi}$ törtalakú kifejezést úgy alakítjuk át, hogy a számlálót és a nevezőt $a-bi$-vel szorozzuk. Ekkor ugyanis e törtből

$$\frac{ac+bd+i(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

lesz, tehát éppen az imént meghatározott: $x+iy$.

6. A komplex szám modulusa. Az $a+bi$ szám modulusának vagy absz. értékének neveztük a $\sqrt{a^2+b^2}$ pozitiv értékét. Ezt így jelöljük: $|a+bi|$. Ha $a+bi$ reális szám, akkor ezen megállapítás megegyezik az absz. érték eddigi fogalmával. Most komplex számok összegének, szorzatának és hányadosának absz. értékeiről akarunk szólni.

a) *A szorzat modulusa egyenlő a tényezők modulusainak szorzatával.* Képletben:

$$|(a+bi)(c+di)| = |a+bi|\,|c+di|.$$

Ugyanis $$(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(bc+ad),$$

tehát modulusának négyzete:

$$(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2$$

és $$|a+bi|^2 = a^2 + b^2, \quad |c+di|^2 = c^2 + d^2,$$

tehát a modulusok szorzatának a négyzete szintén

$$a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$$

és így a pozitiv gyökök is megegyeznek.

b) *Az összeg abszolut értéke kisebb a tagok abszolut értékeinek összegénél (vagy bizonyos esetben egyenlő vele).* Ezt az állítást így bizonyíthatjuk be. Vegyük először az egyszerűbb esetet, midőn az egyik tag valós szám: c. Tehát:

$$|(a+bi)+c| = |a+c+bi| = \sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2}.$$

A jobboldalon álló szám pozitiv értéke az összeg abs. értéke. Ellenben a tagok abs. értékei:

$$+\sqrt{a^2+b^2} \text{ és } |c|,$$

tehát csak azt kell megmutatni, hogy

$$\sqrt{a^2+b^2} + |c| > \sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2}.$$

Ha ez nem volna igaz, akkor a $>$ jel helyett $\leq$ állana; és akkor a két szám négyzeteire is ugyanez a jel volna érvényes, azaz:

$$a^2 + b^2 + 2|c|\sqrt{a^2+b^2} + c^2 \leq a^2 + 2ac + c^2 + b^2$$

volna, vagyis $$|c|\sqrt{a^2+b^2} \leq ac$$

volna, ami lehetetlenség, mert $\sqrt{a^2+b^2} > |a|$, ha csak $b \neq 0$.* Kimutattuk tehát, hogy ha egy komplex számhoz valós számot adunk, akkor az összeg absz. értéke kisebb, mint a tagok absz. értékeinek összege.

Ha már most $P=a+bi$-hez $Q=c+di$-t adunk, akkor előbb szo-

* Ha $b=0$, azaz két valós számot kell összeadnunk, akkor tudjuk, hogy az összeg absz. értéke egyenlő a tagok abs. értékeinek összegével, ha az összeadandók egyező jelűek.

rozzuk meg mindkét tagot $\bar{Q}$-val, a Q konjugáltjával, hogy megint valós legyen az egyik összeadandó. Eszerint tehát:

$$\bar{Q}(P+Q) = P\bar{Q} + Q\bar{Q}.$$

De azt már tudjuk, hogy

$$|P\bar{Q}+Q\bar{Q}| \leq |P\bar{Q}| + |Q\bar{Q}|.$$

Az egyenlőségjel, miként a jegyzetben említettük, csakis akkor állhat fönn, ha $P\bar{Q}$ is pozitiv (minthogy $Q\bar{Q}$ pozitiv). Minden más esetben a $<$ jel érvényes. Ebből következik, hogy:

$$|\bar{Q}|\,|P+Q| < |\bar{Q}|(|P|+|Q|),$$

vagyis

$$|P+Q| < |P| + |Q|,$$

ha csak, miként említettük, $P\bar{Q}$ nem pozitiv. Mikor lehet $P\bar{Q}$ pozitiv? Általában, miként láttuk, $P\bar{Q}$ valós csakis akkor lehet, ha $P=kQ$, vagyis $a+bi=k(c+di)$, ahol k valós szám; és pozitiv csakis akkor lehet a $P\bar{Q}$, ha k pozitiv szám, vagyis az egyenlőségjel csakis akkor állhat fenn, ha $a=kc$, $b=kd$, ahol k pozitiv szám. [Ennek geometriai jelentése, hogy az $a+bi$ és $c+di$ összeadandókat ábrázoló pontokat összekötő egyenes a kezdőponton megy át és a két pont a kezdőpontnak egyazon oldalán van.]

[A modulusra vonatkozó tétel geometriai jelentése igen egyszerű: Ha a két komplex számot a nekik megfelelő vektorokkal ábrázoljuk, akkor az összeget a két vektorból alkotható parallelogramm átlója ábrázolja és tételünk egyszerűen azt fejezi ki, hogy a háromszögben 2 oldal összege nagyobb a harmadiknál.]

Az összeg modulusára levezetett egyenlőtlenség többtagú összegre is könnyen kiterjeszthető.

c) Ebből az egyenlőtlenségből azonnal következik a különbség modulusára vonatkozó egyenlőtlenség. Ugyanis a

$$(P-Q) + Q = P$$

egyenletből következik, hogy

$$|P| = |(P-Q)+Q| \leq |P-Q| + |Q|$$

(az egyenlőségjel csakis akkor érvényes, ha $P-Q=kQ$, ahol k pozitiv, vagyis ha $P=(k+1)Q$, tehát ha P és Q a kezdőponttal egy egyenesen vannak és pedig a kezdőpontnak ugyanazon az oldalán; minden más esetben a $<$ jel érvényes). Ezen egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|P-Q| > |P| - |Q|.$$

Meglehet, hogy $|P| < |Q|$ és akkor voltaképpen ez az egyenlőtlenség semmit sem mond; mert hogy a $|P-Q|$ pozitiv szám nagyobb a $|P|-|Q|$ negativ számnál, az magától értetődik. Ezen esetben cseréljük meg a P és Q számokat; akkor a $(Q-P)+P=Q$-ból következik: $|Q-P|+|P|\geq|Q|$ és minthogy $|Q-P|=|P-Q|$, tehát:

$$|P-Q|\geq|Q|-|P|,$$

vagyis azt látjuk, hogy $P-Q$ különbség absz. értéke nagyobb (és csakis az említett speciális esetben egyenlő) a kisebbítendő és kivonandó abszolut értékeinek pozitiv különbségénél, amit így is írhatunk:

$$|P-Q|\geq\big||P|-|Q|\big|$$

a külső $|\ |$ jellel azt jeleztük, hogy e különbség abszolut (pozitiv) értéke veendő.

[Ezen állítás geometriai értelme (l. a 118. képet az 514. lapon) megint nagyon egyszerű:

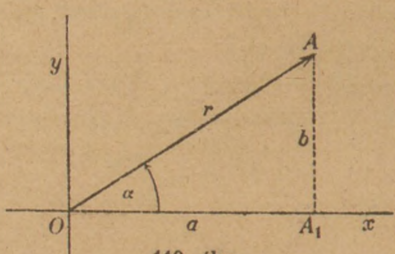
Ha $P=a+bi$ és $Q=c+di$ a P és Q pontokat, illetőleg az OP és OQ vektorokat ábrázolják, akkor a $P-Q$ különbségét az OR ábrázolja, (mert hiszen $OR+OQ=OP$) és az ORP háromszögben az OR oldal nagyobb a másik két oldal különbségénél.]

d) Végül a $\frac{P}{Q}=R$-ből következik, hogy $P=QR$ és ebből:

$$|P|=|Q|.|R|, \quad \text{vagyis} \quad |R|=\frac{|P|}{|Q|}$$

a hányados abs. értékére vonatkozó egyszerű tétel.

7. **A komplex szám trigonometriai alakja.** A komplex szám geometriai ábrázolása rávezet a komplex szám trigonometriai elő-



119. ábra.

állítására. Ha ugyanis $A=a+bi$ és az OA-nak az X tengellyel képezett szöge: α, továbbá $OA=+\sqrt{a^2+b^2}=r$, akkor:

$$a=OA_1=r\cos\alpha, \quad b=A_1A=r\sin\alpha,$$

tehát
$$a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Ha tehát r és α ismeretes, akkor az $a+bi$ egyértelműen van meghatározva, mert:

$$a=r\cos\alpha, \quad b=r\sin\alpha.$$

Fordítva, ha a és b koordináták ismeretesek, r és α is egyértelműen vannak meghatározva, ha megállapodunk abban, hogy α mindig $-\pi$ és π közötti szöget jelentsen. Ugyanis az $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$ egyenletekből következik $r = \sqrt{a^2+b^2}$ és minthogy r-en mindig pozitiv számot értünk, tehát e gyök pozitiv értéke veendő r gyanánt; továbbá α meghatározására szolgálnak a $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ és $\sin\alpha = \frac{b}{r}$ egyenletek. Ha ugyanis $\cos\alpha$ pozitiv, akkor α vagy $0 \ldots \frac{\pi}{2}$, vagy $0 \ldots -\frac{\pi}{2}$ szakaszban van; e kettő közül melyikben, azt eldönti a $\sin\alpha$. Ha ez is pozitiv, akkor az elsőben, ha negativ a sinus, akkor a $0 \ldots -\frac{\pi}{2}$ szakaszban van s í. t.

Az r, miként már tudjuk, a komplex szám modulusa, vagy absz. értéke, az α pedig az *argumentuma, irányszöge.*

8. **Komplex számok szorzása és hatványozása** Különösen egyszerűvé válik a komplex számok szorzása, (osztása), hatványozása, ha e számok trigonometriai alakját használjuk. Ugyanis ha:

$$A_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1), \quad A_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

akkor, mint a szorzás elvégzésével azonnal meggyőződhetünk:

$$A_1 A_2 = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

vagyis: a komplex számok szorzatát úgy állíthatjuk elő, hogy *az absz. értékeket megszorozzuk és az irányszögeket összeadjuk.* Ezt az állítást több tényező esetére is könnyen igazolhatjuk. Továbbá:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)].$$

Ha n pozitiv egész szám, akkor a szorzás imént megállapított szabályából következik, hogy:

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

a hatványozás egyszerű szabálya. (Moivre szabály.)

Ha n negativ egész szám, $n = -k$, akkor

$$[r\cos\alpha + i\sin\alpha)]^{-k} = r^{-k} \cdot \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k} = r^{-k} \cdot \frac{1}{\cos k\alpha + i\sin k\alpha}$$

és ha a számlálót és nevezőt $\cos k\alpha - i\sin k\alpha$-val szorozzuk:

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^{-k} = r^{-k}(\cos k\alpha - i\sin k\alpha) =$$
$$= r^{-k}[\cos(-k\alpha) + i\sin(-k\alpha)]$$

-ra jutunk; tehát akár pozitiv, akár negativ egész szám az n, minden esetben áll a hatványozásnak Moivre szabálya.

Ha n exponens nem egész szám, akkor a hatványozás nem egyértékű művelet. Egyelőre azt az esetet nézzük, midőn n törtszám: $\frac{k}{m}$, vagy először még ennél is egyszerűbb: $\frac{1}{m}\cdot$ Az A szám $\frac{1}{m}$-ik hatványán olyan számot értünk, melynek m-ik hatványa: A. Keressünk ilyen komplex számot. Ha van, akkor mindenesetre ilyen alakú:

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kell tehát, hogy:

$$\varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

legyen, azaz:

$$\varrho^m\cos m\varphi = r\cos\alpha,\quad \varrho^m\sin m\varphi = r\cos\alpha.$$

Ebből: $\varrho^{2m} = r^2$, vagyis, mivel ϱ pozitiv számot jelent, ϱ nem lehet más, mint r pozitiv m-ik gyöke: $\varrho = +\sqrt[m]{r}$. (Ilyen csak egy van.) Most az irányszöget kell meghatároznunk:

$$\cos m\varphi = \cos\alpha,\quad \sin m\varphi = \sin\alpha,$$

tehát $m\varphi$ az α-tól csakis 2π valamely többszörösében különbözhetik, azaz

$$m\varphi = \alpha + 2k\pi,$$

ahol k tetszés szerinti egész szám; vagyis:

$$\varphi = \frac{\alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}\cdot$$

Adjuk a k-nak rendre ezeket az értékeket:

$$0, 1, 2, \ldots m-1,$$

akkor φ-re nézve a következő irányszögeket kapjuk:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{m},\quad \varphi_2 = \frac{\alpha}{m} + \frac{2\pi}{m},$$

$$\varphi_3 = \frac{\alpha}{m} + \frac{4\pi}{m}, \ldots \varphi_m = \frac{\alpha}{m} + \frac{2(m-1)\pi}{m}\cdot$$

Ezek egymástól mindannyian különböznek és kettő-kettő különbsége kisebb, mint 2π, vagyis az összes φ irányszögek az $\frac{\alpha}{m}$ és $\frac{\alpha}{m} + 2\pi$ között vannak, tehát a

$$\varrho(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \varrho(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \ldots\ \varrho(\cos\varphi_m + i\sin\varphi_m) \qquad \alpha)$$

mind különböznek egymástól. Ha pedig k-nak a felírtak valamelyikével m-re nézve kongruens értéket adunk, akkor megint az előbbi sorban levő értéket kapunk, mert hiszen ha k_1 a $0, 1, 2, \ldots m-1$ számok valamelyike és $k = k_1 + lm$, ahol l egész szám, akkor

$$\varphi = \frac{\alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m} = \frac{\alpha}{m} + \frac{2k_1\pi}{m} + 2l\pi,$$

tehát $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ az α) alatti sor k_1-ik tagjával megegyezik. Ebből látjuk, hogy olyan komplex szám, melynek m-ik hatványa $A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, éppen m különböző van. Ezek az A komplex szám m-ik gyökei. (Így pl., ha $A = 1$, akkor az m-ik *egységgyökök*: ($r = 1$, $\alpha = 0$ téve)

$$\alpha_1 = 1, \; \alpha_2 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}, \; \alpha_3 = \cos 2\cdot\frac{2\pi}{m} + i\sin 2\cdot\frac{2\pi}{m}, \ldots$$

$$\alpha_m = \cos(m-1)\frac{2\pi}{m} + i\sin(m-1)\frac{2\pi}{m}.)$$

Visszatérve a kiinduló pontunkhoz, azt látjuk, hogy ha

$$A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

akkor $A^{\frac{1}{m}}$ *egyik* értéke: $r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right)$ és ebből következik, hogy $A^{\frac{k}{m}}$ egyik értéke:

$$r^{\frac{k}{m}}\left(\cos\frac{k\alpha}{m} + i\sin\frac{k\alpha}{m}\right),$$

tehát, hogy a Moivre-féle hatványozási formula a jelzett megszorítással (t. i. hogy a hatványnak csak *egyik* értékét vesszük), akkor is alkalmazható, ha az exponens törtszám.

9. Komplex számok szabályos sorozata. A komplex számokra vonatkozólag még utolsó (6-ik) megállapításnak vehetjük a következőt: Ha

$$c_1 = a_1 + b_1 i, \; c_2 = a_2 + b_2 i, \; c_3 = a_3 + b_3 i, \ldots \; c_n = a_n + b_n i, \ldots$$

végtelen sok komplex szám adatik, melyeknek úgy első, mint második koordinátái szabályos sorozatot alkotnak, akkor azt fogjuk mondani, hogy a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozat is szabályos sorozat és pedig ha az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozat az a számot, a $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sorozat a b számot értelmezi, azaz $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, akkor azt mondjuk, hogy a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozat a

$$c = a + bi$$

számot értelmezi, vagyis a szokásos jelöléssel:

$$\lim(a_n + b_n i) = \lim a_n + i\lim b_n.$$

Ezen értelmezés jogosult, mert egyrészt, ha minden $b_k=0$, akkor az új értelmezés a régibe megy át, másrészt a szabályos sorozat alaptulajdonsága ezen sorozatra a fogalmak megfelelő általánosításával érvényes marad. Ugyanis kimutatjuk, hogy ha egy tetszés szerinti pozitiv ε szám adatik, elmehetünk a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban olyan messze, hogy

$$|c-c_n| < \varepsilon,$$

ha csak n nagyobb egy bizonyos N küszöbszámnál. Hogy ezt megmutassuk, vegyük az ε helyett az $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ számot és menjünk el az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ szab. sorozatban olyan messze, hogy onnan kezdve mindig

$$|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

és a $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sorozatban is olyan messzire, hogy

$$|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

legyen. Mondjuk, hogy mindkét eset bekövetkezik, ha $n > N$. De

$$|(a_n+b_n i)-(a+bi)| = |a_n-a+(b_n-b)\,i| =$$
$$= \sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2} < \sqrt{2\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

és ezzel az állításunkat igazoltuk.

Nézzük ennek az állításnak: $\lim c_n = c$ geometriai jelentését. Kimutattuk, hogy egy bizonyos N küszöbszámon túl csupa olyan c_n tagja van a sorozatnak, melyre nézve $|c_n-c| < \varepsilon$, azaz $\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2} < \varepsilon$, vagyis a c_n számot ábrázoló pontnak a c számot ábrázoló ponttól való távolsága kisebb, mint ε, tehát ha a c pont körül, mint középpont körül az ε sugárral kört rajzolunk, az N-iken túl levő c_n számok mind e kis körbe esnek: a c pontban összesűrűsödnek.

Fordítva, ha a $c_1=a_1+b_1 i$, $c_2=a_2+b_2 i$, $c_3=a_3+b_3 i, \ldots$ sorozat az egyetlen $c=a+bi$ helyen sűrűsödik össze, vagyis, ha bármely pozitiv ε-hoz tartozik egy N küszöbszám úgy, hogy $|c_n-c| < \varepsilon$, ha $n>N$, akkor az $a_1, a_2, \ldots$ az a és $b_1, b_2, b_3, \ldots$ a b helyen sűrűsödnek; mert hiszen:

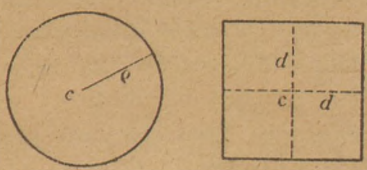
$$|c_n-c| = |a_n-a+i(b_n-b)| \geq |a_n-a| \quad \text{és} \quad |c_n-c| \geq |b_n-b|,$$

tehát $|c_n-c| < \varepsilon$-ből következik, hogy $|a_n-a| < \varepsilon$, $|b_n-b| < \varepsilon$, ha $n>N$. Így tehát a két állítást összefoglalva, mondhatjuk, hogy ha

$$\lim a_n=a, \quad \lim b_n=b, \quad \text{akkor:} \quad \lim(a_n+ib_n) = a+bi$$

és ha $\lim(a_n+ib_n) = a+bi$, akkor: $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$.

10. Komplex változó függvénye. Határérték. Ha z-nek különböző komplex értékeket tulajdoníthatunk, melyeket mintegy a z mennyiség különböző állapotainak tekintünk, akkor a z mennyiséget változónak és pedig megkülönböztetésül a reális változótól, komplex változónak mondjuk. Megeshetik, hogy $z=x+iy$ minden értéket fölvehet, vagyis x és y reális számoknak minden számértéket tulajdoníthatunk; de meglehet, hogy nem minden érték adható az x és y reális számoknak; hanem például csak egész számok lehetnek. Ilyenkor a $z=x+iy$ is komplex egész számnak neveztetik. A leggyakrabban előforduló eset az, midőn a z komplex szám egy, vagy több zárt görbével határolt terület belsejében levő pontok által ábrázolt számértékeket veszi fel, vagy pedig egyes zárt görbék által határolt területek kivételével a sík többi pontja által ábrázolt számértékeket kaphatja. Ilyenkor külön megjelöljük, hogy a görbék pontjai hozzászámíttatnak-e az illető területhez, vagy nem. A z változó által fölvehető számértékek e változó *értékrendszerét* alkotják. Az alkalmazásokban igen sokszor szerepel a következő két egyszerű értékrendszer:



120. ábra.

a) A $c=a+bi$ komplex számot ábrázoló pont körül, mint középpont körül ϱ sugárral kört rajzolunk. E kör belsejében levő z pontokat jellemzi, hogy

$$|z-c|<\varrho$$

és ha a kerületet is hozzászámítjuk: $|z-c|\leq\varrho$. A körön kívül levő pontok összességét $|z-c|>\varrho$ által ábrázolja.

b) A $c=a+bi$ ponttól jobbra és balra, a d távolságra az y tengellyel és fölötte meg alatta szintén d távolságra az X tengellyel párhuzamosat vonunk. Az így keletkezett négyzet belsejében levő $z=x+iy$ pontok azzal jellemeztetnek, hogy

$$|x-a|<d, \quad |y-b|<d.$$

Ezen értékrendszerekről azt szoktuk mondani, hogy a c pont (c szám) *környezetét* alkotják. Egyéb értékrendszerekkel, illetőleg a z változó egyéb tartományaival a függvénytan részletesebb tárgyalásánál lesz alkalmunk foglalkozni.

Ezen megjegyzések után értelmezhetjük a komplex változó függvényét. Ha a z változó bizonyos értékrendszere, értékhalmaza, valamiképpen meg van határozva (pl. z jelenti egy háromszög, vagy egy kör, vagy egy adott ellipszis, vagy körgyűrű stb. belsejében levő pontoknak megfelelő számértékeket) és z minden ilyen értékéhez valamely meghatározott eljárással egy komplex számot rendelünk, akkor e hozzárendelt számok ismét egy számhalmazt alkotnak, melyeket egy mennyiség különböző állapotainak tekinthetünk. Ezt a mennyiséget $f(z)$-vel jelöljük és z változónak az illető értékhalmazához tartozó függvényének nevezzük. Látjuk tehát, hogy egyelőre a komplex változó függvényének értelmezése teljesen megegyezik a valós változóknál szerepelt értelmezéssel.

A hozzárendelés többféleképpen történhetik. A leggyakoribb eset, midőn ez formula segítségével eszközöltetik. Így például, ha $f(z)=z^2$, vagy általában $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$, akkor azt mondjuk, hogy $f(z)$ a z változó racionális egész függvénye. Ha $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, ahol $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ a z változó racionális egész függvényei, akkor $f(z)$ a z változó tört függvénye. Racionális egész és tört függvény egyszóval racionális függvény. Egyelőre más, formulában adott függvényekről nem is igen beszélhetünk. De azért mégis átvihetjük a határérték és megfelelően a folytonosság fogalmát a komplex változó függvényére is.

Ha az $f(z)$ a z valamely tartományára nézve értelmezve van, azaz, minden z értékhez egyetlen egy $f(z)$ érték van rendelve, de a tartománynak egy helye, a c (mely esetleg a határon is lehet) kivételes hely, vagyis a c helyhez tartozó függvényértéket a hozzárendelés módja nem értelmezi, akkor a c helyhez tartozó függvényértékről voltaképpen nem is beszélhetünk, mert a hozzárendeléssel történt értelmezés erre az esetre felmondja a szolgálatot. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a c helyhez a függvény erédeti értelmezése szerint függvényérték nem tartozik, vagy $f(c)$ *helyettesítési* érték nem létezik. De sokszor beszélhetünk *határértékről*. Ugyanis, ha egy tetszés szerinti kis pozitiv ε-hez meg tudunk jelölni olyan ϱ radiust, hogy az adott tartomány mindazon z értékeire nézve, melyek a c középponttal biró, ϱ rádiusu körben vannak, (a c középpontot természetesen kivéve), vagyis, melyekre nézve $|z-c|<\varrho$, fönnáll ez az egyenlőtlenség:

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

akkor definicióképpen azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{z=c} f(z)=A$, vagyis az A számot az $f(z)$ függvénynek a c helyen való határértékének nevezzük. A definició, miként látjuk, analog azzal, amellyel a valós változóknál megismerkedtünk. Azonnal beláthatjuk, hogy ha

$\lim_{z=c} f(z)=A$ és $z_1, z_2, z_3, \ldots$ egy tetszés szerinti szabályos sorozat, mely a c számot értelmezi, akkor $f(z_1), f(z_2), f(z_3), \ldots$ is szabályos sorozat, mely az A számot értelmezi; mert ha ε tetszés szerinti szám, akkor megkeressük az ε-hoz tartozó ϱ számot úgy, hogy $|f(z)-A|<\varepsilon$ legyen, ha $|z-c|<\varrho$. Ha már megvan ez a ϱ, akkor elmegyünk a $z_1, z_2, z_3, \ldots$ sorozatban olyan messze, hogy minden z tag ebbe a ϱ sugarú körbe essék, vagyis, hogy $|z_n-c|<\varrho$ legyen; ha ez az N-ik tagtól teljesítve van és $n>N$, akkor

$$|f(z_n)-A|<\varepsilon$$

minden ilyen n-re nézve, vagyis valóban az $f(z_1), f(z_2), f(z_3), \ldots$ az A számot értelmező szabályos sorozat.

Az $f(z)$ határértékéről szóltunk abban az esetben, midőn a c helyen helyettesítési érték valamely okból nem létezett. De ha létezik is helyettesítési érték, azért mégis beszélhetünk határértékről. Ugyanis általában, ha bármely ε-hoz tartozik a c helynek egy ϱ sugarú környezete, melyre nézve: $|f(z)-A|<\varepsilon$, ha csak $|z-c|<\varrho$, akkor mindig azt fogjuk mondani, hogy $\lim_{z=c} f(z)=A$. Ha már most $A=f(c)$, azaz a c helyen való határérték megegyezik a függvénynek a c helyen való helyettesítési (elrendelt) értékével, akkor éppen úgy, mint a valós változó esetében, azt mondjuk, hogy $f(z)$ *a c helyen folytonos*. Ha z helyett $c+h$-t írunk, akkor tehát

$$|f(c+h)-f(c)|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad |h|<\varrho,$$

a folytonosság kritériuma, (azaz minden ε-hoz tartozik olyan ϱ, hogy a fönti egyenlőtlenség teljesítve legyen).

A komplex változó függvényeivel részletesebben később foglalkozunk; egyelőre csakis ezen alapfogalmakat kellett megismernünk, hogy további tárgyalásaink általánosabbak lehessenek.

Feladatok és gyakorlatok.

1. Adva van két komplex szám z_1 és z_2 az őket ábrázoló pontok, illetőleg vektorok által és adva van a mértékegység hossza. Szerkesszük meg a $z_1 z_2$, és a $\frac{z_1}{z_2}$ számokat körző és vonalzó segítségével!

2. Adva vannak a $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ pontok. Szerkesszük meg a

$$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n$$

pontot.

3. Adva van a z pont. Szerkesszük meg a $z^2, z^3, z^4, z^{\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{4}}$ pontokat.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha z_1, z_2, z_3 complex számok és l_1, l_2, l_3 valósak (melyek között 0-tól különböző is van) és fönnáll ez a két egyenlet:

$$l_1 z_1+l_2 z_2+l_3 z_3=0, \quad l_1+l_2+l_3=0,$$

akkor a z_1, z_2, z_3 pontok egy egyenesbe esnek.

5. Bizonyítsuk be, hogy $z^0=1, z, z^2, z^3, z^4, \ldots$ pontokat e sorrendben összekötő egyenesek oly törtvonalat (poligonvonal) alkotnak, melynek szögei egyenlők és szakaszainak hosszai geometriai sort alkotnak.

6. Bizonyítsuk be, hogy a $z^{\frac{1}{n}}$-nek n értéke egy szabályos n szög csúcsait alkotják.

7. Ha m pozitiv egész szám, akkor Moivre-tétele szerint:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi;$$

de a binomiális tétel szerint:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos^m\varphi - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi +$$

$$+\binom{m}{4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots + i\left(m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots\right)$$

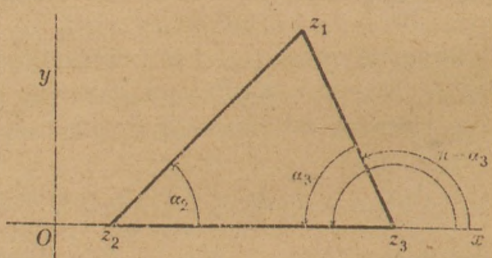
tehát: $$\cos m\varphi = \cos^m\varphi - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots$$

$$\sin m\varphi = m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi \cdots$$

8. Mutassuk meg, hogy az egyenlő átfogóval biró derékszögű háromszögek közül a befogók összege a legnagyobb az egyenszárú derékszögű háromszögben. Ennek a tételnek a következménye gyanánt bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a|+|b|) \leq |a+bi|.$$

9. A $(z_1-z_2)+(z_2-z_3)=z_1-z_3$ identitás geometriai értelmezésében benne van az egész trigonometria. Legyen egyszerűség kedveért z_2 és z_3 két valós szám. $|z_1-z_2|=r_3$, $|z_2-z_3|=r_1$, $|z_3-z_1|=r_2$. Az argumentum megállapítására



121. ábra.

nézve megjegyezzük, hogy a $P-Q$ vektor pozitiv iránya alatt a QP egyenes irányát értjük. Így például P számnak megfelelő vektor felfogható mint $P-O$ és így pozitiv iránya OP irány. Ezen megjegyzés után egy vektorhoz tartozó argumentumot így határozzuk meg: a pozitiv X tengelyt az óramutatóval ellenkezően addig forgatjuk, míg az illető vektor pozitiv irányával összeesik. Így például az ábránkban z_1-z_2 argumentuma: α_2, z_2-z_3 argumentuma: π, (mert a pozitiv X tengelyt z_3 körül 180°-kal kell forgatnunk, hogy z_2-z_3 pozitiv irányával (a z_3z_2 irányával) összeessék, z_1-z_3 argumentuma: $\pi-\alpha_3$, ha α_3 a háromszög belső szöge. Eszerint

$$z_1-z_2=r_3(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2), \quad z_2-z_3=-r_1, \quad z_1-z_3=r_2(-\cos\alpha_3+i\sin\alpha_3)$$

és így, ha a $(z_1-z_2)+(z_2-z_3)=(z_1-z_3)$ egyenletben a valós és képzetes részek egyenlőségét külön fölírjuk:

$$r_3 \cos \alpha_2 - r_1 = - r_2 \cos \alpha_3, \quad r_3 \sin \alpha_2 = r_2 \sin \alpha_3$$

egyenletekre jutunk; vagyis, ha szimmetria kedveért a háromszög oldalait a, b, c-vel és megfelelően a szögeit α, β, γ-val jelöljük:

$$a \cos \beta + b \cos \alpha = c; \quad a \sin \beta = b \sin \alpha$$

tételekre jutunk, melyekből az egész trigonometria megállapítható.

10. Ha c egy komplex állandó és z a sík tetszés szerinti helye, akkor $z+c$ a z-ből úgy keletkezik, hogy a z pontot a c vektorral eltoljuk. Ha minden z szám helyett $z+c$-t mondunk, akkor ez megfelel annak, mint ha az egész síkot irányra és nagyságra nézve a c vektorral eltoltuk volna. Így tehát a $z+c$ operációnak a sík eltolása felel meg. Ezt még némelykor úgy is mondjuk, hogy a síkot transzformáltuk, ami kétféleképpen értelmezhető: vagy úgy, hogy a sík minden z pontjának a sík egy másik pontját, a $z'=z+c$ pontot feleltetjük meg, a síkot magát nyugvásban képzelve, vagy pedig úgy, hogy a z pont a sík eltolása által átment az előbbi $z'=z+c$ pontba. Ez a transzformáció az *egybevágósági transzformáció,* mert ha ezt a transzformációt alkalmazzuk valamely idomra, ezzel egybevágó idomot kapunk.

Ha a valós szám, akkor $z'=az$ a z számból egyszerűen úgy keletkezik, hogy modulusát a-val szorozzuk, vagyis minden pontnak olyan pontot feleltünk meg a síkon, amely vele a kezdőponton átmenő egyazon egyenesen van a-szor akkora távolságban. Ha ezt a transzformációt alkalmazzuk egy tetszés szerinti idomra, akkor a kezdőpontra, mint hasonlósági centrumra vonatkozó hasonló idomot kapunk. Ez a *hasonlósági transzformáció.*

Ha az a szorzó komplex szám és pedig olyan, melynek modulusa: 1, pl. $a=\cos \alpha + i \sin \alpha$, akkor a $z=r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$-ból a

$$z' = az = r(\cos \overline{\varphi + \alpha} + i \sin \overline{\varphi + \alpha})$$

lesz, vagyis a z pont a kezdőpont mint centrum körül α szöggel tovább fordult. Ha z a sík minden pontját jelenti, akkor a $z'=az$ transzformáció abban áll, hogy a síkot a kezdőpont körül α szöggel (pozitiv irányban, mert mindig feltehetjük, hogy $0 \leq \alpha < 2\pi$) elforgattuk. Ha $|a| \neq 1$, hanem $a=\varrho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, akkor elforgatást és hasonlósági transzformációt is végzünk.

Minő transzformáció a $z'=az+b$? (Forgatás, hasonlósági transzformáció és végül eltolás.) Ha egy tetszés szerinti idom minden pontjára nézve az $az+b$ transzformációt alkalmazzuk, akkor az eredeti idomhoz hasonló idomra jutunk.

11. Ha az $az+b$ transzformációt alkalmazzuk egy háromszög csúcsaira, akkor hasonló háromszögre jutunk és fordítva, ha két háromszög hasonló, az egyik a másikba elforgatással, hasonlósági transzformációval és eltolással mindig átvihető. (Bizonyítsuk ezt be.) Legyenek az adott háromszög csúcsai: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_3=x_3+iy_3$, melyek átmennek a $z'=az+b$ transzformációval a $z'_1=x'_1+iy'_1$, $z'_2=x'_2+iy'_2$, $z'_3=x'_3+iy'_3$-ba, akkor tehát

$$z'_1=az_1+b, \quad z'_2=az_2+b, \quad z'_3=az_3+b$$

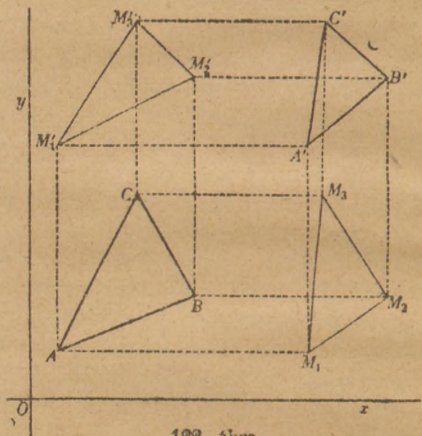
vagyis:

$$\begin{vmatrix} z'_1 & z_1 & 1 \\ z'_2 & z_2 & 1 \\ z'_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ha e determinánsban $z_1=x_1+iy_1, \ldots z'_1=x'_1+iy'_1, \ldots$ helyettesítjük és a valós részt és a képzetes részt külön-külön zérussá tesszük, akkor a következő egyenletekre jutunk:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x_1 & 1 \\ x'_2 & x_2 & 1 \\ x'_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y'_1 & y_1 & 1 \\ y'_2 & y_2 & 1 \\ y'_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 & 1 \\ x'_2 & y_2 & 1 \\ x'_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y'_1 & x_1 & 1 \\ y'_2 & x_2 & 1 \\ y'_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A második egyenlet geometriailag egyszerűen értelmezhető: Ha az ABC háromszög hasonló az $A'B'C'$-vel és az A ponton át az X tengellyel, az A'-en át az Y tengellyel párhuzamosat vonunk és ezek metszését M_1-gyel jelöljük, azután a B ponton át az X-el és B'-en át az Y-nal húzott párhuzamosak



122. ábra.

metszését: M_2-vel jelöljük és végül hasonlóan állítjuk elő az M_3-at. Továbbá fordítva, az A ponton át az Y-nal és A'-en át az X-el húzott párhuzamosak metszéspontja M'_1 és hasonlóan a B és B'-ből M'_2, a C és C'-ből M'_3 pontokat állítjuk elő, akkor az $M_1M_2M_3$ háromszög területe egyenlő az $M'_1M'_2M'_3$ területével.

12. Ha a P_1, P_2, P_3, ... P_k komplex számokat ábrázoló pontok mindannyian az X tengely fölött vannak, akkor az összegüket ábrázoló P pont is az X tengely fölött van. Bizonyítsuk be ezt az állítást *α)* a geometriai összeadás segítségével, *β)* számítással. (A számítás azon alapszik, hogy $a+b$ argumentuma mindig a és b argumentumai között van.)

Ebből következik, hogy olyan komplex számok összege, melyek mindannyian az X-tengely fölött vannak (a pozitiv félsíkon), nem lehet 0.

Bizonyítsuk be, hogy általában, ha c_1, c_2, ... c_k komplex számok argumentumai egymástól π-nél kevesebbel különböznek, összegük nem lehet 0.

Ezt az egyszerű gondolatot szépen alkalmazta *Desaint* az algebrai egyenletre, midőn meghatározza a legnagyobb abs. értékű gyök felső határát; vagyis midőn meghatároz egy olyan számot, amelynél nagyobb abs. értékű gyöke az egyenletnek nem lehet. Ha a $\varphi(z)=0$ algebrai egyenlet gyökei: a_1, a_2, a_3, ... a_k, akkor az algebra alaptétele szerint:

$$\varphi(z) = (z-a_1)^{r_1}(z-a_2)^{r_2} \ldots (z-a_k)^{r_k}$$

[az első együtthatót 1-nek vettük]. Ha a gyökök mindannyian a C körön belül vannak és z egy, a körön kívül felvett pont és a z-ből a körhöz vont érintők az X tengellyel α, illetőleg β szöget alkotnak, akkor, miként az ábrából is látjuk, minden $z-a_i$ argumentumára áll, hogy:

$$\beta < \arg(z-a_i) < \alpha.$$

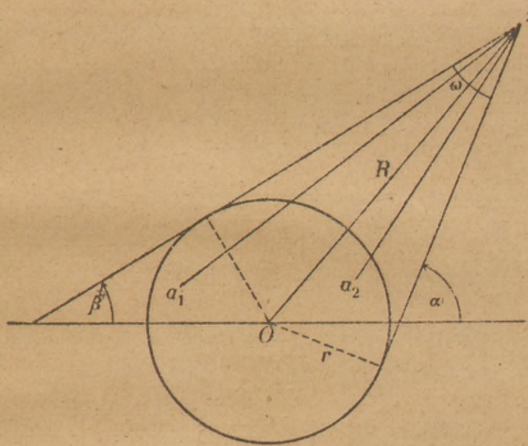
De: $$\arg\varphi(z) = r_1 \arg(z-a_1) + r_2 \arg(z-a_2) + \cdots + r_k \arg(z-a_k),$$

tehát, ha $\varphi(z)$ m-edfokú, akkor

$$m\beta < \arg\varphi(z) < m\alpha.$$

Legyen már most adva az $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n = 0$ n-edfokú algebrai egyenlet. Ezt így írjuk:

$$nz^n + nc_1 z^{n-1} + nc_2 z^{n-2} + \cdots + nc_n =$$
$$= (z^n + nc_1 z^{n-1}) + (z^n + nc_2 z^{n-2}) + (z^n + nc_3 z^{n-3}) + \cdots + (z^n + nc_n) = 0.$$



123. ábra.

Az i-ik tag: $z^n + nc_i z^{n-i}$, vagyis $z^{n-i}(z^i + nc_i)$, melynek $n-i$ gyöke: 0, a többi pedig a $|\sqrt[i]{nc_i}|$ sugarú körön van. Ha tehát az

$$|nc_1|, \; |\sqrt{nc_2}|, \; |\sqrt[3]{nc_3}|, \ldots \; |\sqrt[n]{nc_n}|$$

számok közül a legnagyobbat vesszük és r ennél bármily kevéssel nagyobb számot jelent, akkor elmondhatjuk, hogy a $z^n + nc_i z^{n-i} = 0$ gyökei mind az r sugarú körön belül vannak és ha ezen r sugarú körön kívül felveszünk egy z pontot és α, β a z-ből az r sugarú körhöz vont érintők hajlásszögei, akkor az előbbi megjegyzésünk szerint mindenik i-re nézve áll, hogy:

$$n\beta < \arg(z^n + nc_i z^{n-i}) < n\alpha,$$

tehát két különböző i-re nézve az argumentumok különbsége mindenesetre kisebb, mint $n\alpha - n\beta$, vagyis kisebb, mint $n\omega$, ha ω a két érintő hajlásszöge. Ha tehát $n\omega < \pi$, vagyis két-két tag argumentumainak különbsége π-nél kisebb, akkor a fölvett z hely nem lehet az $f(z) = 0$ egyenletnek gyöke.

Minthogy pedig, miként az ábrából látjuk, a z abszolut értéke, az Oz, amit R-rel jelölünk, így fejezhető ki:

$$R = \frac{r}{\sin\dfrac{\omega}{2}},$$

tehát arra jutottunk, hogy ha

$$R > \frac{r}{\sin \frac{\pi}{2n}},$$

akkor z nem lehet az $f(z)=0$ gyöke. Így tehát, ha sorban megalkotjuk az

$$\frac{|nc_1|}{\sin \frac{\pi}{2n}}, \frac{|\sqrt{nc_2}|}{\sin \frac{\pi}{2n}}, \frac{|\sqrt[3]{nc_3}|}{\sin \frac{\pi}{2n}}, \ldots \frac{|\sqrt[n]{nc_n}|}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

pozitiv számokat és a legnagyobbikkal az O körül kört rajzolunk, akkor az $f(z)=0$ egyenletnek e körön kívül gyöke nem lehet.

13. Ha $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ a t reális változónak az $a \ldots b$ közben integrábilis függvényei, azaz, ha $\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$, $\int\limits_a^b \psi(t)\,dt$ véges és meghatározott számértékek, akkor egyúttal

$$\int\limits_a^b [\varphi(t)+i\psi(t)]\,dt = \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt + i\int\limits_a^b \psi(t)\,dt.$$

Ugyanis az $\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$ értelmezése szerint:

$$\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt = \lim_{n=\infty}[\varphi(\tau_1)(t_1-a)+\varphi(\tau_2)(t_2-t_1)+\cdots+\varphi(\tau_n)(b-t_{n-1})],$$

ha az $a \ldots b$ intervallumot a $t_1, t_2, \ldots$ által szakaszokra osztjuk és $\tau_1, \tau_2, \ldots$ e szakaszok helyei, továbbá a szakaszok terjedelme zérussá válik. Éppen így:

$$\int\limits_a^b \psi(t)\,dt = \lim_{n=\infty}[\psi(\tau_1)(t_1-a)+\psi(\tau_2)(t_2-t_1)+\cdots+\psi(\tau_n)(b-t_{n-1})]$$

és ha megfelelően értelmezzük a

$$\int\limits_a^b [\varphi(t)+i\psi(t)]\,dt = \lim\,([\varphi(\tau_1)+i\psi(\tau_1)](t_1-a)+$$
$$+[\varphi(\tau_2)+i\psi(\tau_2)](t_2-t_1)+\cdots+[\varphi(\tau_n)+i\psi(\tau_n)](b-t_{n-1})])$$

határértéket, akkor az imaginarius határérték értelmezése szerint

$$\int\limits_a^b [\varphi(t)+i\psi(t)]\,dt = \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt + i\int\limits_a^b \psi(t)\,dt.$$

Ez a valós változó komplex függvényére vonatkozó integrál. Minthogy

$$|\Sigma[\varphi(\tau_i)+i\psi(\tau_i)](t_i-t_{i-1})| \leq \Sigma|\varphi(\tau_i)+i\psi(\tau_i)|(t_i-t_{i-1}),$$

mert az összeg absz. értéke a tagjai abszolut értékeinek összegénél kisebb (vagy vele egyenlő), tehát a két oldalon álló kifejezések limeszei között is ugyanilyen egyenlőtlenség áll fenn, vagyis:

$$\left|\int\limits_a^b [(\varphi(t)+i\psi(t)]\,dt\right| \leq \int\limits_a^b |\varphi(t)+i\psi(t)|\,dt.$$

14. *A Darboux-féle középértéktétel.* Legyen most $\varrho(t)$ egy, az $a \ldots b$ szakaszban pozitiv, integrábilis függvény és jelöljük a $\varphi(t)+i\psi(t)$-t, a t valós

változó komplex függvényét $f(t)$-vel; akkor az első középértéktétel szerint, ha $f(t)$ folytonos

$$\int_a^b |f(t)|\,\varrho(t)\,dt = |f(\xi)| \int_a^b \varrho(t)\,dt,$$

ahol ξ az $a \ldots b$ szakaszban van. Minthogy pedig az előbbiek szerint:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\varrho(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\varrho(t)\,dt$$

tehát egyúttal $$\left|\int_a^b f(t)\,\varrho(t)\,dt\right| \leq |f(\xi)| \int_a^b \varrho(t)\,dt.$$

Ezen egyenlőtlenségből egyenlőséget készíthetünk, ha a jobboldalt egy l számmal megszorozzuk, mely 0 és 1 közé esik, azaz:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\varrho(t)\,dt\right| = l\,|f(\xi)| \int_a^b \varrho(t)\,dt,$$

$$0 < l \leq 1.$$

De ha $|A| = |B|$, akkor ebből következik, hogy $\frac{A}{B}$ egy olyan komplex szám, melynek abs. értéke: 1; a jelen esetre alkalmazva tehát arra az eredményre jutunk, hogy:

$$\int_a^b f(t)\,\varrho(t)\,dt = l(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,f(\xi) \int_a^b \varrho(t)\,dt,$$

ahol $0 < l \leq 1$, vagy röviden:

$$\int_a^b f(t)\,\varrho(t)\,dt = \lambda f(\xi) \int_a^b \varrho(t)\,dt,$$

ahol $|\lambda| \leq 1$. Ez a *Darboux*-féle középértéktétel.

15. *A Weierstrass-féle középértéktétel.* Tartsuk meg az előbbi feltételeket. $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ folytonos az $a \ldots b$ közben és $\varrho(t)$ pozitiv, integrálható. Osszuk fel az $a \ldots b$ közt a $t_1, t_2, \ldots$ által szakaszokra és válasszuk a $\tau_1, \tau_2, \ldots$ helyeket e szakaszokban. Akkor az

$$\int_b^a f(t)\,\varrho(t)\,dt = \lim \Sigma f(\tau_i)\,\varrho(\tau_i)\,(t_i - t_{i+1}).$$

Jelöljük a $\varrho(\tau_i)\,(t_i - t_{i-1})$ pozitiv számokat m_i-vel, $\varphi(\tau_i)$-t ξ_i-vel és $\psi(\tau_i)$-t η_i-vel.

Rajzoljunk olyan zárt konvex görbét, mely — bizonyos beosztástól kezdve — bárminő beosztásnak megfelelő $(\xi_i \eta_i)$ koordinátákkal biró pontokat magába zárja. [Ezt könnyen megtehetjük, ha a $\xi = \varphi(t)$, $\eta = \psi(t)$ görbének az $a \ldots b$ közbe eső szakaszát egy konvex görbével körülvesszük.] Ismeretes, hogy ha egy konvex görbe belsejében (vagy akár a felületen is) pozitiv tömegek vannak, akkor ezek tömegközéppontja is e görbe belsejében lesz. Tekintsük a $(\xi_i \eta_i)$ pontokat az m_i tömeggel ellátott pontoknak. Akkor a tömegközéppont koordinátái:

$$x = \frac{\Sigma m_i \xi_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma \varphi(\tau_i)\, \varrho(\tau_i)\, (t_i - t_{i-1})}{\Sigma \varrho(\tau_i)\, t_i - t_{i-1})}$$

$$y = \frac{\Sigma m_i \eta_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma \psi(\tau_i)\, \varrho(\tau_i)\, (t_i - t_{i-1})}{\Sigma \varrho(\tau_i)\, t_i - t_{i-1})}$$

a rajzolt görbe belsejében levő pont koordinátái. Innen:

$$\Sigma [\varphi(\tau_i) + i\psi(\tau_i)]\, \varrho(\tau_i)\, (t_i - t_{i-1}) = (x + iy)\, \Sigma \varrho(\tau_i)\, (t_i - t_{i-1})$$

és ha a beosztást határtalanúl sűrítjük, úgy, hogy $\max(\tau_i - \tau_{i-1}) = 0$ legyen, akkor $x+iy$-nak egy $X+iY$ határhelyzet felel meg [mert úgy a baloldali limesz, mint a jobboldali második tényező limesze létezik], tehát:

$$\int_a^b f(t)\, \varrho(t)\, dt = (X + iY) \int_a^b \varrho(t)\, dt,$$

ahol $X+iY$ az említett konvex zárt görbe egy belső pontja.

IRODALOM.

A komplex szám bevezetésére vonatkozólag csak a következőket említem:

1. König: Analizis 134. l. (A számpárokra vonatkozó, Hamiltontól származó vizsgálatok rendszeresen tárgyaltatnak.)
2. Hankel: Theorie der complexen Zahlen. Leipzig 1867.
3. Osgood: Lehrbuch der Functionentheorie. I. Leipzig 1907.
4. Pasch: Uber die Einführung des Imaginären. (Archiv. der Math. u. Physik. (3). VII. p. 102.)
5. Study cikkét a Math. Encyd. I. kötetében, ahol a komplex szám általánosítására vonatkozó Weierstrass-Dedekind és Lie-féle emléletre vonatkozó irodalom is megtalálható.

TARTALOM.

I. FEJEZET.

Az irracionális szám. Szabályos sorozat.

II. FEJEZET.

A függvény fogalma.

III. FEJEZET.

A differenciálhányados.

IV. FEJEZET.

A differenciálhányadosra vonatkozó fontos tételek. A magasabbrendű diff. hányadosok.

V. FEJEZET.

A véges Taylor-sor. Interpolacio.

VI. FEJEZET.

Határértékek kiszámítása.

VII. FEJEZET.

A határozott integrál.

VIII. FEJEZET.

Integrálok közelítő meghatározása.

IX. FEJEZET.

Az integrál fogalmának kiterjesztése.

X. FEJEZET.

Határozott integrállal értelmezett függvény.

XI. FEJEZET.

Nehány fontos integrál kiszámítása.

XII. FEJEZET.

Hiperelliptikus integrálok.

XIII. FEJEZET.

Az integrálszámítás nehány alkalmazása.

XIV. FEJEZET.

A komplex szám.