

**GELEJI SÁNDOR**  
**A FÉMEK**  
**KÉPLÉKENY**  
**ALAKÍTÁSÁNAK**  
**ELMÉLETE**

**AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST**



GELEJI SÁNDOR

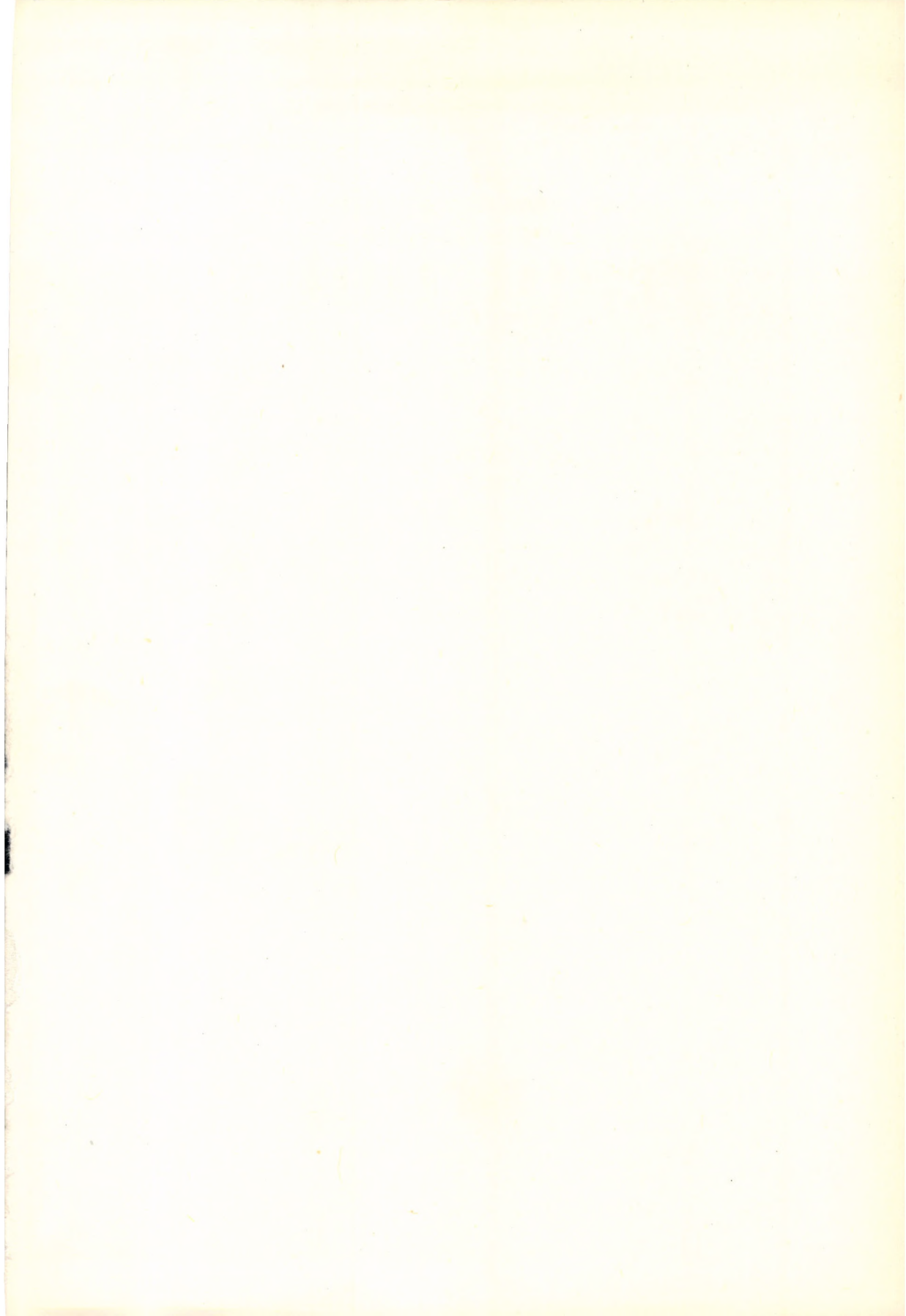
A FÉMEK KÉPLÉKENY  
ALAKÍTÁSÁNAK  
ELMÉLETE

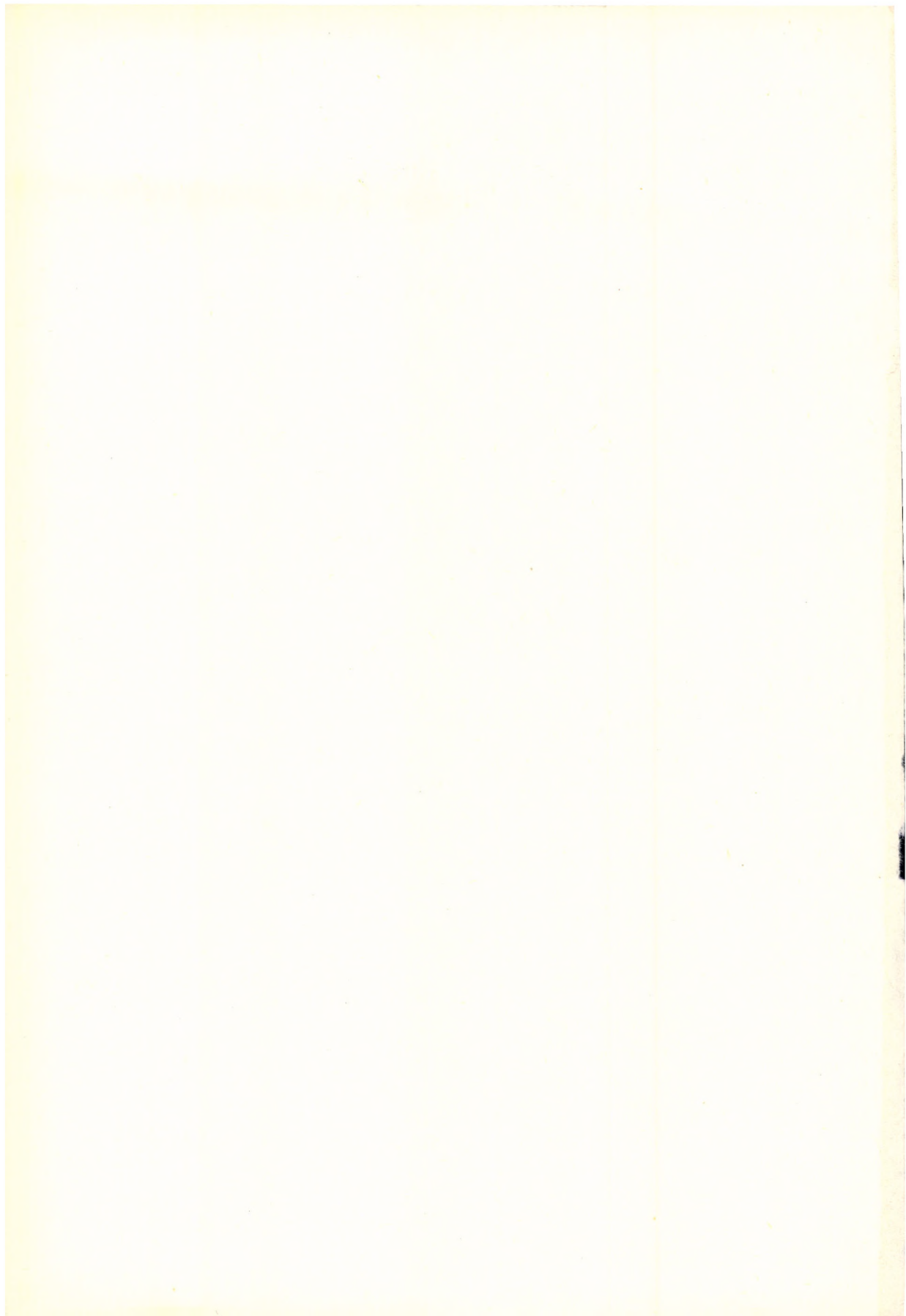
A könyv a fémek képlékeny alakításánál (kovácsolás, sajtolás, húzás, hengerlés) fellépő erők és munkaszükségletek, továbbá az alakítás folyamán mutatkozó anyagáramlási jelenségek alapvető kérdéseinek számitás útján történő meghatározásával foglalkozik.

A bevezető rész azokat az általános alapokat tárgyalja, amelyeken a képlékeny alakításra vonatkozó elméleti és kísérleti kutatás felépül. Nemcsak a szükséges mechanikai alapokat adja meg, hanem azokat a fizikai jelenségeket is ismerteti, amelyek a problémakör megértéséhez és feltáráshoz nélkülözhetetlenül szükségesek. A további fejezetek az egyszerű képlékeny alakítási műveletekkel, az elasztikus-plasztikus hajlítással és csavarással, a rúd-húzással, csőhúzással, a rúd-sajtolással, a süllyesztékes sajtolással, a hengerlés alapvető problémáival, a lemezek hajlításával és mélyhúzásával foglalkoznak.



AKADÉMIAI KIADÓ  
BUDAPEST





A FÉMEK  
KÉPLÉKENY ALAKÍTÁSÁNAK  
ELMÉLETE



# A FÉMEK KÉPLÉKENY ALAKÍTÁSÁNAK ELMÉLETE

Dr., Dr. h. c. GELEJI SÁNDOR

EGYETEMI TANÁR

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA R. TAGJA

A LÉNGYEL TUDOMÁNYOS AKADÉMIA T. TAGJA



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1967

LEKTORÁLTA  
Dr. VOITH MÁRTON

© AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1967

PRINTED IN HUNGARY



AJÁNLOM EZT A KÖNYVET FELESÉGEM EMLÉKÉNEK,  
AKI HÁROM ÉS FÉL ÉVTIZEDEN KERESZTÜL HŰSÉGES  
MUNKATÁRSAM VOLT



## ELŐSZÓ

E könyv anyaga huszonöt éven át tartott egyetemi előadásaim során alakult ki, és túlnyomórészt saját tudományos kutatásaim eredményét foglalja magába. A könyv a fémek képlékeny alakításánál (kovácsolás, sajtolás, húzás, hengerlés) fellépő erőknél és munkaszükségleteknél, továbbá az anyagáramlási jelenségek alapvető kérdéseinek számítás útján történő meghatározásával foglalkozik. A bonyolultabb alakítási eljárások (profilhengerlés, csőhengerlés stb.) hasonló problémáinak megoldását és a megoldások gyakorlati alkalmazását más könyveimben tárgyalom.

A fémek képlékeny alakításának problémakörével először az 1920-as években, egyetemi hallgató koromban találkoztam, amikor ez a tudományág még csak kialakulóban volt. Később, több mint két évtizedes üzemi gyakorlatom folyamán naponta kellett a fémalakítás megoldatlan kérdéseivel birkóznom, és mint egyetemi októnak szintén keresnem kellett a képlékeny alakítással kapcsolatos problémák megoldását, amellet, hogy az ipar továbbra is gyakran adott fel igen bonyolult kérdéseket számomra.

A fémek képlékeny alakításának kérdéseivel tudományosan először FRIEDRICH KICK (1885) és REJTŐ SÁNDOR (1918) foglalkozott. KICK első-sorban a képlékeny alakváltozási folyamatok leírására szorítkozott, de REJTŐ már megkísérelte azt is, hogy megállapítsa a technológiai alakítási folyamatoknál fellépő erők közötti összefüggéseket. REJTŐ munkáival megelőzte korát, s így nem juthatott kielégítő eredményekhez, mert abban az időben a képlékeny alakváltozás jelenségei sem elméletileg, sem kísérletileg nem voltak úgy feltárva, hogy általános érvényű összefüggéseket lehetett volna már felállítani.

Az alakítási műveletek és folyamatok kísérleti és elméleti alapjait a következő időszakban főleg NÁDAI ÁRPÁD (1927), ERICH SIEBEL (1931) és GEORG SACHS (1932) dolgozták ki. Közben KÁRMÁN TÓDOR felállította hengerlési elméletét (1925), amely nem oldotta ugyan teljesen meg a problémát, de sok további kutatásnak és számos hengerlési elméletnek lett az indulási alapja.

A képlékeny alakváltozás alapproblémáinak elméleti matematikai megoldását keresték H. HENCKY (1923), L. PRANDTL (1923), R. HILL (1950), V. V. SZOKOLOVSKIJ (1950), A. FREUDENTHAL (1950), W. PRAGER és P. G. HODGE (1951), valamint NÁDAI Á. (1950, 1963), hogy csak a legfontosab-

bakat említsem. Ha könyveiket áttanulmányozzuk, akkor azt látjuk, hogy nagy matematikai apparátussal tárgyalják a képlékeny alakváltozások elemi problémáit, ameddig az alakváltozások a csak rugalmas alakváltozások nagyságrendjébe tartoznak. E szerzők elméleteit együttesen általában képlékenységtani vagy plaszticitási elméletnek szokás nevezni. Ez az elmélet azonban a gyakorlati technológiai alakítóműveletek problémáinak megoldására nem alkalmas.

Minthogy a műszaki világirodalomban nem találtam olyan elméletet, amelynek segítségével a gyakorlati technológiai képlékeny alakítási műveletek kérdései számítással megoldhatók volnának, magam is nekivágtam a nagy feladatnak. Először mások kísérleteiből (Kais. Wilh. Institut für Eisenforschung, The Iron and Steel Institute stb.) próbáltam konklúziókat levonni és számítási eljárásokat kidolgozni. Ilyen módon több dolgozatot születtett, amelyek azonban mai szemmel nézve csak tapogatózások voltak. Kerestem az utat. Természetesen velem egy időben mások is felfedezték ezt a tudományos szűzterületet, és több-kevesebb sikerrel igyekeztek problémáit feltárni.

Magam első eredményeimet 1948-ban egy a Mérnöki Továbbképző Intézet kiadásában megjelent 130 oldalas könyvben foglaltam össze: „A fémek képlékeny alakításánál fellépő erők és erőszükséglet meghatározása számítás útján”. Azóta tulajdonképpen mindig e könyvecske tökéletesítésén és problémakörének tágításán dolgoztam. Ez volt a célja 1952-ben kiadott német nyelvű „Die Berechnung der Kräfte und des Kraftbedarfs bei der Formgebung im bildsamen Zustande der Metalle” című könyvemnek is, melynek második kiadása 1955-ben jelent meg. Ebben az időben rendelkeztem már saját kísérletezéshez szükséges berendezéssel, ami a könyv tartalmán és terjedelmén is meglátszott. Ezt a könyvet cseh (1955) és orosz (1958) nyelven is kiadták.

A következő időkben sokat kísérleteztem; tanszékemen volt tanítványaimból munkatársaim nevelődtek, akikkel együtt dolgoztam, és ma is együtt dolgozom. Igyekeztem feltárni a képlékeny alakítási folyamatok fenomenológiáját és kísérletekkel alátámasztani és ellenőrizni elméleti vizsgálataimat. Ennek a korszaknak eredményeképpen írtam az 1960-ban Berlinben megjelent „Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch” című könyvemet, amely 1961-ben már második kiadást ért meg, és japánul is megjelent (1964).

Azóta tanszéki munkatársaimmal együtt sok és eredményes kísérletet folytattam, ezeket feldolgoztam, és közben átdolgoztam az eddigi könyveimben már kifejtett problémák matematikai tárgyalási módját. Ennek a munkásságnak eredményeképpen születtett a Berlinben 1967 elején ki-

adásra kerülő legújabb könyvem, amelynek címe: „Bildsame Formgebung der Metalle — Versuch, Theorie und Anwendung” lesz.

Felsorolt műveimen kívül a képlékeny alakítás témakörében száztíznel több publikációm jelent meg különböző folyóiratokban.

Elméleteim és számítási módszereim gyakorlati felhasználásának módját tárgyaltam „Kohógéptan” című könyvemben (1950 és 1953), majd még részletesebben „Walzwerks- und Schmiedemaschinen” címmel 1954-ben és 1961-ben Berlinben megjelent művemben. (E könyv angol nyelvű kiadása sajtó alatt van.)

„A fémek képlékeny alakításának elmélete” című jelen könyvem tudományos munkáimnak alapvető elméleti fejtegetéseit tartalmazza, a magyar műszaki egyetemi hallgatóknak is megfelelő formában feldolgozva. De természetesen megtalálhatók benne más kutatóknak a tárgyra vonatkozó tudományos eredményei is.

Ezt a könyvet elsősorban egyetemi tankönyvnek szántam, de ezenfelül mindazokhoz szól, akiket a fémek képlékeny alakításának kérdése érdekel. Remélem, hogy könyvemet a szakemberek szívesen fogadják, és haszonnal fogják olvasni.

1966. július

*A szerző*



## TARTALOMJEGYZÉK

Előszó . . . . .	7
1. Bevezetés . . . . .	15

### I. ÁLTALÁNOS ELVEK

2. Szilárd és folyékony állapot. Képlékenység . . . . .	17
3. Hideg- és melegalakítás . . . . .	18
4. Az alakítás mértéke és a keményedés . . . . .	18
5. A maradó alakváltozást létrehozó erőket befolyásoló tényezők . . . . .	19
6. Az anyag rugalmas és képlékeny tulajdonságai . . . . .	19
7. Az anyag szövetségében lefolyó változások . . . . .	24
8. A rugalmas feszültségi állapot egyenletei . . . . .	26
9. A feszültségi állapot ábrázolása O. Mohr szerint . . . . .	29
10. Az alakváltozás Mohr-féle ábrázolása . . . . .	34
11. Képlékeny tömeg stacionárius áramlása . . . . .	39
12. A végtelen kis alakváltozás . . . . .	39
13. A folyás megindulásának feltételei . . . . .	42
14. Képlékeny alakváltozások . . . . .	46
a) Kis képlékeny alakváltozások . . . . .	46
b) Nagy képlékeny alakváltozások . . . . .	51
15. A síkprobléma . . . . .	53
16. Viszkózus tömegek (szívós testek) . . . . .	59
17. Egyszerű alakváltozások . . . . .	60
a) Húzással maradóan alakított rúd . . . . .	60
b) Nyomással maradóan alakított rúd . . . . .	64
c) Csavarással maradóan alakított hengeres rúd . . . . .	66
18. Az alakváltozást létrehozó külső munka . . . . .	69
19. Az alakváltozás sebessége . . . . .	70
20. Az alakítási szilárdság . . . . .	71
21. A súrlódás és a súrlódási tényező . . . . .	73
22. Az alakítási ellenállás . . . . .	75
23. Melegvetetés szilárd fémek testek érintkezésekor . . . . .	77

### II. AZ EGYSZERŰ KÉPLÉKENY ALAKÍTÁSI MŰVELETEK

24. Összenyomás . . . . .	79
25. Képlékeny anyag összenyomása két durva nyomófelület között . . . . .	82
26. A részlegesen terhelt képlékeny féltér . . . . .	90
27. A képlékeny anyagoszlopok összenyomásakor fellépő erők. . . . .	93
28. A nyomott prizma keresztmetszetének változása magasságcsökkenés követ- keztében . . . . .	113

### III. HAJLÍTÁS

29. Tetszőleges keresztmetszetű rúd elasztikus-plasztikus hajlítása . . . . .	117
30. Négyzetes keresztmetszetű rúd elasztikus-plasztikus hajlítása . . . . .	120
31. Az elasztikus-plasztikusan hajlított rúd alakja . . . . .	125
32. A négyzetes keresztmetszetű rúd elasztikus-plasztikus hajlításához szükséges munka . . . . .	130
33. A négyzetes rúdkeresztmetszet alakjának változása hajlítás következtében . . . . .	135
34. Kőrszelvényű rúd elasztikus-plasztikus hajlítása . . . . .	138
35. Háromszög keresztmetszetű rudak elasztikus-plasztikus hajlítása . . . . .	144

### IV. CSAVARÁS

36. Rudak plasztikus és elasztikus-plasztikus csavarása . . . . .	151
37. Ellipszis keresztmetszetű rúd maradó csavarása . . . . .	156
38. Derékszögű négyzög keresztmetszetű rúd maradó csavarása . . . . .	161
39. Egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű rúd maradó csavarása . . . . .	166

### V. RÚDHÚZÁS

40. A drót- és rúdhúzásnál fellépő erők és munkaszükséglet meghatározása . . . . .	170
a) A húzásnál fellépő erők megállapítása, ha feltételezzük, hogy az alakítási ellenállás a húzóüregben állandó . . . . .	170
b) A húzásnál fellépő erők megállapítása, ha feltételezzük, hogy az alakítási szilárdság a húzóüregben a helytől függő változó . . . . .	181
41. Az anyag áramlása a húzóüregben rúdhúzásnál . . . . .	189
42. A legkedvezőbb húzószög . . . . .	193
43. Feszültségeloszlás a húzott rúd keresztmetszete és nyomott felülete mentén . . . . .	196
44. Súrlódás és kenés drót- és rúdhúzásnál . . . . .	198
45. Melegfejlődés a hideghúzás folyamán . . . . .	201
46. Melegeloszlás a húzott rúdban . . . . .	204

### VI. CSŐHÚZÁS

47. A csőhúzásról általában . . . . .	208
48. Anyagáramlás a csőhúzóüregben . . . . .	208
49. A csőhúzásnál fellépő erők és teljesítményszükségletek . . . . .	208
A) A csőhúzásnál fellépő erők meghatározása, ha feltételezzük, hogy az alakítási ellenállás és az alakítási szilárdság a húzóüregben belül állandó	
a) Csőhúzás dugó nélkül . . . . .	208
b) Csőhúzás dugóval . . . . .	212
$\alpha$ ) A külső átmérő változik, a belső átmérő nem . . . . .	212
$\beta$ ) A csőhúzás folyamán mind a külső, mind a belső átmérő változik . . . . .	213
c) Csőhúzás (-tolás) rúdon . . . . .	214
B) A csőhúzásnál fellépő erők meghatározása, ha feltételezzük, hogy az alakítási szilárdság és az alakítási ellenállás a húzóüregben a helytől függő változó . . . . .	219



a) Csőhúzás dugó nélkül . . . . .	219
b) Csőhúzás dugóval . . . . .	223
$\alpha$ ) A húzott cső belsőát mérője a húzás folyamán nem változik	223
$\beta$ ) A húzott csőnek mind a belső, mind a külső átmérője kisebb lesz . . . . .	228
c) Csőhúzás (-tolás) rúdon . . . . .	230
$\alpha$ ) A húzott cső belső átmérője a húzás folyamán nem változik . .	230
$\beta$ ) A húzott cső külső és belső átmérője is változik a húzás folyamán . . . . .	232

#### VII. SAJTOLÁS

50. Rúdsajtolás . . . . .	234
51. A rúdsajtolásnál fellépő erők meghatározása . . . . .	235
52. A csősaajtolásnál fellépő erők meghatározása . . . . .	241
53. A rúdsajtolás jelenségeinek vizsgálata . . . . .	243
54. Sajtolás süllyesztékben . . . . .	250

#### VIII. HENGERLÉS

55. A hengerlésről általában . . . . .	273
56. Az anyagmozgás a hengerrésben . . . . .	273
57. Az elemi hengerlés fogalma s kinematikai viszonyai . . . . .	276
58. A nyomott ív kiszámítása . . . . .	282
59. Négyzetes keresztmetszetű darab hengerlésénél fellépő erők . . . . .	284
60. Nyomáseloszlás a hengerrésben . . . . .	285
61. A tapadási tartomány nagyságának kísérleti meghatározása . . . . .	286
62. A különbözően nyomott részek kölcsönhatása valamely darab hengerlésekor . . . . .	291
63. A hengerlésnél fellépő szélesedés . . . . .	294
64. Az előresietés meghatározása . . . . .	311
65. Az anyagáramlás irányai a hengerrésben . . . . .	314
66. A hengerlés elmélete . . . . .	320
67. A fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás) térbeli eloszlása . . . . .	351
68. A hengerlési nyomatók és a hengerlési nyomás . . . . .	353
69. A hengerlési nyomatók és teljesítményszükséglet kiszámítása, ha feltételezzük, hogy az alakítási ellenállás a nyomott ív mentén állandó. . . . .	360
70. A közepes alakítási ellenállás kiszámítása . . . . .	362
71. A hengerek belapulása . . . . .	369
72. A hengerek behajlása . . . . .	374
73. A befogás feltétele hengerlésnél . . . . .	376
74. A hengerlésnél fellépő súrlódás . . . . .	376
75. Melegfejlődés a hideghengerlésnél . . . . .	381

#### IX. LEMEZEK HAJLÍTÁSA

76. Lemez ráhajlítása $\rho_1$ sugárral legömbölyített élre . . . . .	386
77. Lemezek vagy négyzetes keresztmetszetű rudak felcsavarása egy hengerre	387
78. L profilok sajtolása lemezből . . . . .	388
79. U profilok sajtolása lemezből . . . . .	390
80. Lemezprofilok húzása . . . . .	392

X. LEMEZEK MÉLYHÚZÁSA

81. Mélyhúzással kapcsolatos kísérletek . . . . .	394
82. A lemezmélyhúzás mechanikája . . . . .	397
83. Ráncképződés és ránytartónyomás a lemezmélyhúzásnál . . . . .	460
84. Edények mélyhúzása ránytartó nélkül. . . . .	411
Irodalom . . . . .	417

## 1. BEVEZETÉS

A fémből készült testekben és szerkezetekben terhelés következtében fellépő feszültségeket és alakváltozásokat — mindaddig, amíg e testek és szerkezetek alakja nem változik meg szabad szemmel is láthatóan — idealizált, ún. Hooke-féle anyagot tételezve fel, a rugalmasság elméletének segítségével ki lehet számítani. A valóságos anyagok viselkedése azonban az idealizálténál sokkal komplikáltabb. A fémek egy részénél a terhelés kezdetétől fogva nincs lineáris összefüggés a feszültség és az alakváltozás között, más fémeknél ez a lineáris összefüggés csak az arányossági határig mutatkozik, és utána vagy a feszültség és alakváltozás nem lineáris monoton növekedése, vagy folyás (állandó feszültség mellett történő alakváltozás-növekedés) lép fel.

Egy szerkezet vagy géprész tervezésekor a tervezőmérnök számításaival arról akar meggyőződni, hogy egy bizonyos terhelésnél a különböző részekben fellépő feszültségek nem érik-e el, vagy nem lépik-e túl a rugalmassági határt; tudni akarja, hogy a konstrukció az ún. képlékeny tartományban nem mondja-e fel a szolgálatot, s hogy mennyire szabad terhelni anélkül, hogy megengedhetetlenül nagy maradó alakváltozások lépjenek fel benne. Ezeket a kérdéseket a konstruktőr a rugalmasságtani és a képlékenységtani (plaszticitási) elmélettel megnyugtatóan meg tudja oldani.

A tervezőmérnök tehát géprészek és szerkezetek tervezésekor azt akarja tudni, mekkora az a megengedett terhelés, amely mellett nem lépnek fel meg nem engedhető maradó deformációk. Ezzel szemben az alakító technológus a technológiai képlékeny alakításkor azokat az erőket akarja kiszámítani, amelyeknek hatására a megmunkálandó fémtest képlékeny állapotba kerül és folyik; ki akarja számítani, milyen erők lépnek fel valamely képlékeny alakítási műveletnél, illetve milyen erők szükségesek a művelet elvégzéséhez.

Míg terhelés alatt álló géprészek és szerkezetek alakváltozásai a rugalmas alakváltozások nagyságrendjénél nagyobbak nem lehetnek, addig a technológiai képlékeny alakításnál a maradó alakváltozások nagysága mellett a rugalmas alakváltozások elhanyagolhatók.

Az ún. képlékenységtani (plaszticitási) elmélet a rugalmasságtan konklúzióira épül, és a képlékeny folyás megindulását a rugalmas alakváltozás határesetének tekintti. Ez az elmélet szerkezetek és géprészek számítására kitűnően alkalmazható. Ezzel szemben alkalmazása technológiai alakítási műveletekre legtöbbször rendkívüli nehézségekbe ütközik, és gyakorlatilag használhatatlan eredményekhez vezet. Ennek részben az az oka, hogy ez az elmélet elhanyagolja azt a tényt, hogy egy test képlékeny alakváltozása rendkívül komplex jelenség, mivel az anyag tulajdonságai, az alakítás alatt álló darab alakja és hőmérséklete (alakítási hőmérséklet), a szerszámok

dolgozó felületének állapota, a darab és a szerszám felülete között fellépő súrlódási tényező, az alakítási sebesség stb. egyidejűleg játszanak szerepet.

Ennek folytán a plaszticitási elmélet az alakító műveletekre csak olyan erős egyszerűsítésekkel alkalmazható, hogy számítási eredményei a kísérlettel megállapított eredményektől igen távol esnek. Nem lehet a fémek képlékeny alakításának kérdéseit tiszta elméleti mechanikai problémákként kezelni. Egy olyan elméletnek, amelyet nagy alakváltozásokkal kapcsolatos alakító technológiai folyamatokra akarunk alkalmazni, legalábbis közelítőleg helyesen meg kell adnia mindazokat a befolyásokat, amelyek az alakításra hatással vannak. Szem előtt kell továbbá tartani azt is, hogy az anyag folyásának kezdő pillanataiban fellépő csúsztási vonalrendszer (amelyet a rugalmassági elmélet segítségével mint a kis deformációk határállapotát lehet meghatározni), az alakváltozás növekedésével eltorzul, vagyis hogy a csúsztási vonalrendszer a deformáció előhaladásával alig hasonlít kezdeti állapotára.

A fémek képlékeny alakításával kapcsolatos problémák feltárásánál és megoldásánál a kísérleteknek igen nagy jelentőségük van. Az elméleti megfontolásokból levezetett számítási eljárások helyességét és használatosságát csak kísérletekkel, illetve mérésekkel lehet igazolni. Ahol a számítási és a kísérleti eredmények között lényeges eltérés van, ott az elmélet hibás.

Számos alakítási műveletnél a fellépő erők, munkaszükségletek és anyagáramlási jelenségek mind a mai napig csak kísérletekkel határozhatók meg, de sok esetben ezek a problémák már számítással is hozzáférhetők és megoldhatók. Gyakran közelítő eljárásokat kell alkalmaznunk, amelyek azonban a kísérleti eredményekkel kombinálva, a gyakorlatban jól felhasználhatók.

A fémek képlékeny alakítása mechanikai technológiai művelet, és kérdései — mint rámutattunk — nem foghatók fel tiszta elméleti mechanikai feladatok gyanánt. Így a fémek képlékeny alakításának elméletét nem az elméleti mechanikához, hanem az elméleti mechanikai technológiához tartozónak kell tekinteni. Természetesen a mechanikai technológia elmélete problémáinak megoldásához, amennyire lehetséges, felhasználja a tiszta elméleti mechanika, a kísérleti fizika, valamint a képlékenységtani (plaszticitási) elmélet módszereit és eredményeit.

# I. ÁLTALÁNOS ELVEK

## 2. SZILÁRD ÉS FOLYÉKONY ÁLLAPOT. KÉPLÉKENYSÉG

A mechanikában folytatott vizsgálatok számára célszerűnek bizonyult, hogy az anyagokat bizonyos ideális alaptulajdonságokkal ruházzák fel. Ezért bevezették a merev testek, a rugalmas-izotróp testek s a tökéletes és szívós folyadékok fogalmát.

A folyadékok mechanikai jellemzője részeiknek — még a legkisebbeknek is — rendkívüli mozgékonyága. Ezt a tulajdonságot a mechanika nyelvén úgy fejezzük ki, hogy a folyadék belsejében működő nyomás minden elképzelhető keresztmetszetre mindig merőlegesen hat. Ezzel szemben a szilárd testekre jellemző, hogy ha a test terhelés alatt áll, a bármely tetszőleges irányú keresztmetszetre merőlegesen ható húzó- vagy nyomóerők mellett, a három főkeresztmetszet kivételével, minden keresztmetszet síkjában jelentékeny nagyságú csúsztatóerők is fellépnek.

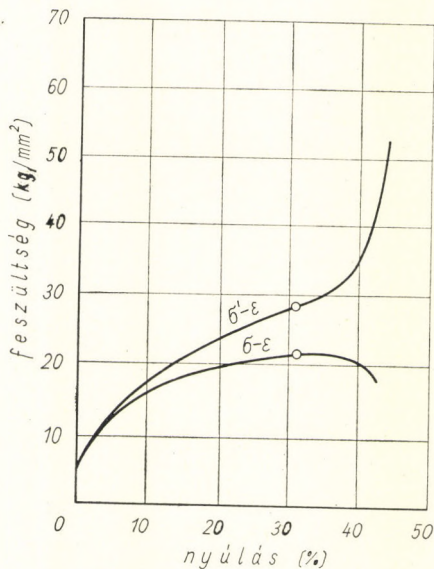
A szívós folyadékok (viszkózus tömegek) középhelyzetet foglalnak el a szilárd testek és a folyadékok között. Nyugalmi állapotban mint tökéletes folyadékok viselkednek, míg mozgás közben egymáson csúszó rétegeik között belső súrlódási erők lépnek fel. Ezek az erők annál nagyobbak, mennél nagyobb a két réteg közötti relatív sebesség, és mennél kisebb a két réteg közötti távolság. A szívós folyadékok e tulajdonságát legjobban az ún. belső súrlódási erő fejezi ki:

$$f_{xy} = \eta s \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (2.1)$$

ahol  $v_x$  a sebesség,  $y$  a két szomszédos réteg egymástól való távolsága,  $\eta$  a belső súrlódás tényezője. A két réteg  $s$  nagyságú felület mentén érintkezik.

A folyadékokon és a szilárd testeken kívül vannak olyan tulajdonságú anyagok, amelyek merőben különböznek tőlük. A szerkezet nélküli, szurokszerű anyagoknak — a szilárd testektől eltérőleg — nincs definiált olvadáspontjuk; emellett aránylag alacsony hőmérsékleten, amelyen szilárd testeknek látszanak, aránylag kis erők (pl. saját súlyuk) hatására alakjukat igen lassan megváltoztatják, amennyiben ennek külső akadályja nincs, mintegy szétfolynak.

A kristályos felépítésű anyagokból való testek alakja külső erők hatására szintén maradónan megváltoztatható. Az ún. képlékeny fémek húzhatók, nyomhatók, hajlíthatók, kovácsolhatók, hengerelhetők mind meleg, mind hideg állapotban. A képlékenyen alakítható fémek e tulajdonságát az alakítási technológia a fémek megmunkálásánál alaposan ki is használja.



4.1. ábra. Húzódiagramok, a) konvencionális, b) valódi

Képlékenységnek nevezzük bizonyos anyagoknak azt a tulajdonságát, hogy a belőlük készült testek alakja külső erőkkel repedés és szakadás nélkül megváltoztatható. Az alakíthatóság mértéke minden anyagnál minden hőmérsékleten más és más. A fémes anyagok hidegalakítás következtében keménységüket megnövelik. Ez az alakító megmunkálásból eredő keményedés lágyítással eltüntethető [2.1].

### 3. HIDEG- ÉS MELEGALAKÍTÁS

A fémekre és ötvözeteikre jellemző, hogy az alakítás folyamán legtöbb tulajdonságuk megváltozik, köztük mechanikai tulajdonságaik is; ezek a mechanikai változások azonban csak akkor maradnak meg, ha az alakítás az egyes fémes anyagokra jellemző hőmérsékletnél, az ún. lágyulási hőmérsékletnél alacsonyabb hőmérsékleten folyik le. Az ilyen alakítás után az alakított fémen teljes mértékben megtalálhatók az alakváltozás összes következményei. Aszerint, hogy az alakítás a lágyulási hőmérséklet alatt vagy felett történik-e, hideg- vagy melegalakítással állunk szemben.

### 4. AZ ALAKÍTÁS MÉRTÉKE ÉS A KEMÉNYEDÉS

A mechanikai tulajdonságoknak a hidegen történő alakítás esetében bekövetkező változását a keményedés fogalma fejezi ki. Ez azt jelenti, hogy az alakítás folyamán az anyag ellenállása az alakváltozást okozó igénybevétellel szemben megnövekszik, és újabb alakváltozást csak az előzőnél nagyobb feszültség alkalmazásával lehet elérni. Egyszerű alakításnál — mint a húzás, nyomás vagy csavarás — a keményedés, melyet

a folyási határ növekedése mér, a valódi feszültség—alakváltozás görbéjének változásával van megadva (4.1. ábra).

Megjegyzendő, hogy a keményedés szempontjából közömbös, milyen módon jött létre az alakváltozás, ha ennek mértéke ugyanaz. Erre nézve ugyanis P. LUDWIK [4.1] megállapította, hogy egyforma keményedést érünk el, ha valamilyen anyagot  $l_0$  hosszúságról  $l_1$  hosszúságra nyújtunk, vagy  $l_1$  hosszúságról  $l_0$  hosszúságra összenyomunk. Ha a húzással elért meghosszabbodást  $l_1/l_0 = 1 + \lambda$  értékkel, az összenyomást  $l_1/l_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon}$  értékkel és a keresztmetszetcsökkenést

$$\frac{q_0}{q_1} = \frac{1}{1 - q} \quad (4.1)$$

értékkel fejezzük ki, akkor ugyanakkora keményedés esetében a következő egyenlőség érvényes:

$$1 + \lambda = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \varepsilon} = s. \quad (4.2)$$

Az  $s$  értéke azt fejezi ki, hogy a darab hosszúsága az eredetinek hány-szorosára vagy hányadrésére változott, és ezért a nyújtás vagy összenyomás, egy szóval az alakítás mértékét jelenti.

## 5. A MARADÓ ALAKVÁLTOZÁST LÉTREHOZÓ ERŐKET BEFOLYÁSOLÓ TÉNYEZŐK

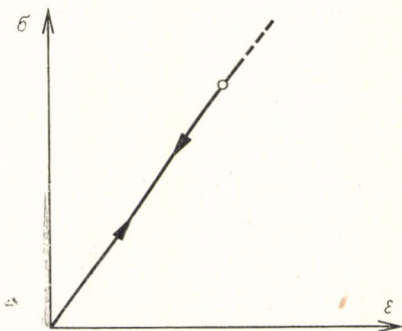
A szilárd testek maradó alakváltozását létrehozó erők nagyságát a következő tényezők befolyásolják:

1. az anyag összetétele, 2. a kristályok nagysága, amelyekből az anyag fel van építve, 3. a rácsegyenlőtlenségek és rácszavarok, 4. az alakítószerszám felületének minősége, 5. a kenés, 6. a hőmérséklet, 7. az alakítás időtartama.

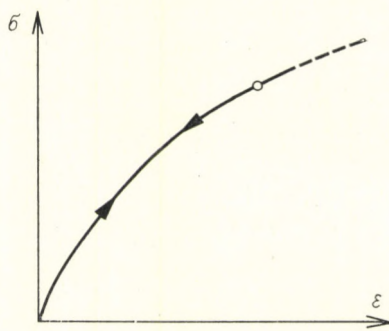
## 6. AZ ANYAG RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY TULAJDONSÁGAI

Az anyag szilárdságtani tulajdonságait legegyszerűbb módon a húzásra, illetőleg a nyomásra igénybevett próbatest viselkedéséből állapíthatjuk meg. Attól függően, hogy a próbatestben ébredő feszültség és a fajlagos megnyúlás között milyen összefüggés áll fenn, az alábbi fajta anyagokat különböztetjük meg [4.1; 6.1]:

Ha a próbatest terhelésekor és tehermentesítésekor a normálfeszültségek és a fajlagos nyúlások között ugyanaz az összefüggés érvényes, és így a tehermentesítés után a próbatest visszanyeri eredeti hosszát, akkor az anyagot rugalmasnak nevezzük. Ha az említett összefüggés lineáris, akkor lineárisan (ideálisan) rugalmas, a Hooke-féle törvényt követő anyagról van



6.1. ábra. Ideálisan rugalmas (Hooke-féle) anyag húzódiagramja



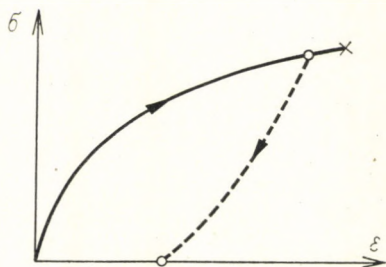
6.2. ábra. Nem lineárisan rugalmas anyag húzódiagramja

szó (6.1. ábra), ellenkező esetben viszont nem lineárisan rugalmas anyagról (6.2. ábra).

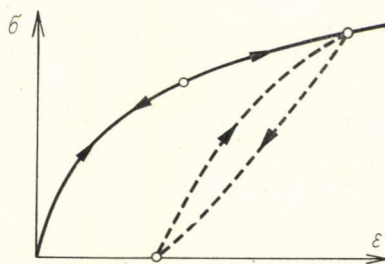
Ha a próbatestben ébredő normálfeszültség és a fajlagos megnyúlás között a terhelés és tehermentesítés során különböző az összefüggés, és emiatt a próbatest teljes tehermentesítés után sem nyeri vissza eredeti hosszát, akkor az anyagot képlékenynek nevezzük. A képlékeny anyagok törés nélkül alakíthatók. Ezekre az anyagokra rendszerint még az is jellemző, hogy náluk egy bizonyos nagyságú feszültség elérése után már a feszültség kis növekedésével is nagymérvű alakváltozás jön létre, és a próbatest csak jelentős mértékű megnyúlás után megy tönkre (6.3. ábra).

Azokat az anyagokat, amelyek kis terhek működésekor rugalmasan viselkednek, egy bizonyos határon túl azonban képlékenynek mutatkoznak, rugalmas-képlékeny anyagoknak nevezzük (6.4. ábra). Van azonban olyan anyag is, mely a teher nagyságától függetlenül, csak rugalmasan viselkedik, és melynél a próbatest jelentősebb mértékű hosszváltozás nélkül, hirtelen törik. Az ilyen esetekben rugalmas-rideg anyagokról beszélünk (6.5. ábra).

Minden szilárdságtani számításnak a feszültségek és az alakváltozások közötti összefüggés az alapja. A tényleges diagram figyelembevétele azonban már a legegyszerűbb feladatoknál is igen komoly nehézségekbe ütközik,



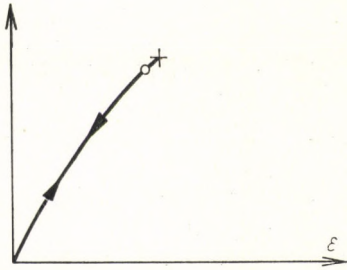
6.3. ábra. Nem ideálisan rugalmas anyagú húzópróbadarabok tehermentesítés következtében fellépő maradó alakváltozása



6.4. ábra. A húzókísérlet megszakítása és továbbfolytatása (rugalmas-képlékeny anyag esetében)



6.5. ábra. Rugalmas-rideg anyag húzódiagramja  $\sigma$



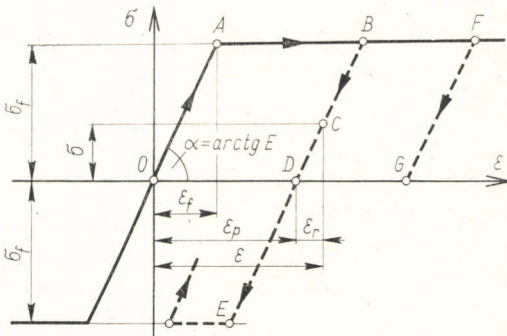
és rendszerint lehetetlenné teszi a matematikai tárgyalást. Éppen ezért már abban az esetben is, amikor az anyag szerkezetét csupán rugalmas állapotban vizsgáljuk, a feszültség—nyúlás diagramot általában egy ferde egyenessel helyettesíthetjük, tehát ideálisan rugalmas, a *Hooke*-törvényt követő anyagokkal számolunk.

Még fokozottabban szükség van az idealizálásra, ha az anyagnak rugalmas-képlékeny tulajdonságai vannak, és viselkedését egészen a folyási határig, sőt azon túl is kívánjuk követni.

Az egyszerűsítésnek az az egyik leggyakoribb módja, hogy a valódi húzó-nyomó diagramot a rugalmas állapotnak megfelelő egyetlen ferde és a képlékeny állapotot jellemző két vízszintes egyenessel helyettesítjük. Azt az anyagot, amelynek tulajdonságai megfelelnek az így módon létrejött diagramnak, ideálisan rugalmas-képlékeny anyagnak nevezzük (6.6. ábra). Tulajdonságai a következők:

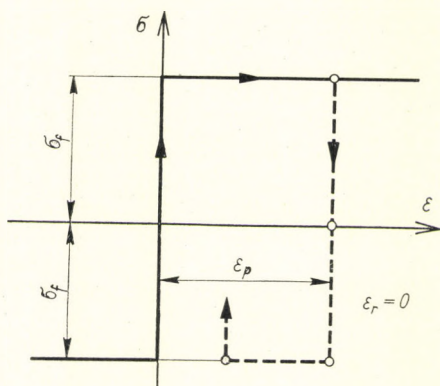
A húzásra vagy nyomásra igénybevett, ideálisan rugalmas-képlékeny anyagú próbatest mindaddig rugalmas állapotban van, míg a feszültség el nem éri a húzásnál és nyomásnál egyforma nagynak feltételezett folyási feszültséget ( $\sigma_f$ ). Ezt az ideálisan rugalmas állapotot az jellemzi, hogy terheléskor, valamint tehermentesítéskor a feszültségek és az alakváltozások ugyanolyan kölcsönös és egyértelmű, a *Hooke*-féle törvény által megszabott lineáris kapcsolatban állnak egymással.

Ha a feszültségek elérik a folyási határt, a próbatest képlékeny állapotba kerül, folyni kezd. Ennek az ideálisan képlékeny állapotnak az a jellemzője, hogy a megnyúlás a feszültségek növelése nélkül is tetszőleges mértékben növekedhetik. Ha a folyás közben eljutunk pl. a diagram *B* pontjába, majd a feszültséget csökkentjük, akkor tehermentesítéskor az anyag ismét



6.6. ábra. Ideálisan rugalmas-képlékeny anyag húzódiagramja

6.7. ábra. Ideálisan merev-képlékeny anyag húzódiagramja



rugalmasan viselkedik ( $B-C$  egyenes). A teljes tehermentesítés után ( $D$  pont) a próbatestben a feszültség zérus, viszont  $\varepsilon_p$  megnyúlás marad benne vissza. Ha a próbatestet ezután nyomásra vesszük igénybe, akkor egészen az  $E$  pont eléréséig rugalmasan viselkedik, azután pedig ellenkező irányban ismét folyni kezd. Ha viszont a tehermentesítés után újra húzóerőt működtetünk, akkor a feszültségek és alakváltozások közötti összefüggést a diagram  $D-B-F$  szakasza írja le.

Egy közbeeső  $C$  pontnak megfelelő állapotban a próbatest megnyúlása két részből, rugalmas ( $\varepsilon_r$ ) és maradó vagy más néven képlékeny ( $\varepsilon_p$ ) megnyúlásból tevődik össze. A rugalmas megnyúlás a tehermentesítés után eltűnik; nagysága a feszültségből a *Hooke*-féle törvény alapján egyértelműen meghatározható:  $\varepsilon_r = \frac{\sigma}{E}$ . A megnyúlás másik része azonban a teher-

mentesítés után visszamarad, és nagysága a feszültségtől teljesen független, egyedül a terhelési folyamat lefolyása (története) határozza meg. Így pl.  $\varepsilon_p$  az  $O-A-B-D$  terhelési folyamat esetében az  $OD$  távolsággal, az  $O-A-B-F-G$  terhelési folyamat esetében pedig az  $OG$  távolsággal egyenlő.

Fentiek alapján a próbatest képlékeny állapotának tulajdonságait a következőképpen foglalhatjuk össze:

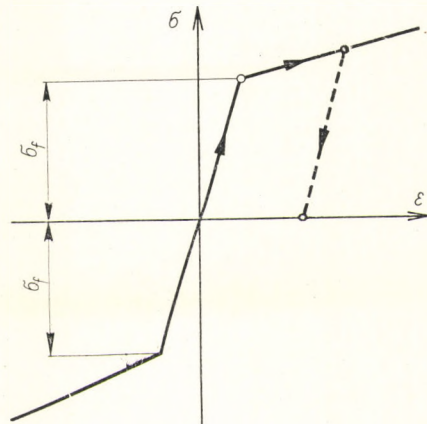
1. Képlékeny állapotban a feszültségek növelése nélkül tetszőlegesen nagy, növekvő megnyúlások jöhetnek létre.

2. A képlékeny alakítás után, a tehermentesítés folyamán csak a rugalmas alakváltozás tűnik el, a képlékeny alakváltozás megmarad.

3. Ha a próbatest képlékeny állapotban van, vagy megelőzően már ilyen állapotban volt, akkor csak a feszültségek és a megnyúlások rugalmas része között van egyértelmű kapcsolat, a megnyúlások maradó részét azonban csupán a terhelési folyamat ismeretében tudjuk meghatározni.

Vannak olyan feladatok, amelyeknél a rugalmas alakváltozások elenyészően kicsik a maradó alakváltozásokhoz képest, és ezért a számítások figyelmen kívül hagyhatók. Ide tartozik a fémek alakításának (sajtolás, hengerlés, húzás stb.) vizsgálata. Ilyen esetben a számítási munka egyszerűsítése érdekében ideálisan merev-képlékeny anyagot szokás feltételezni (6.7. ábra).

6.8. ábra. Ideálisan rugalmas és keményedés mellett képlékeny anyag húzódiagramja



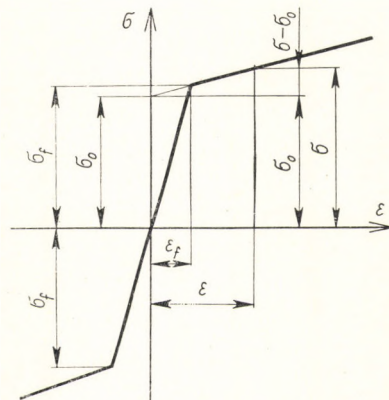
Az ideálisan merev-képlékeny anyagú próbatest kis terhelésnél semmiféle alakváltozást nem mutat, ha azonban a folyási feszültséget (folyási határt) elérjük, akkor képlékeny állapotba kerül, és így tetszőlegesen nagy, növekvő megnyúlást szenvedhet. Tehermentesítéskor nem keletkezik alakváltozás, tehát a tehermentesítés után a folyáskor elszenvedett megnyúlások a próbatestben megmaradnak. Röviden úgy foglalthatjuk össze, hogy a merev-képlékeny anyag csak annyiban különbözik a rugalmas-képlékeny anyagtól, hogy rugalmassági modulusa végtelen nagy.

A fémek bizonyos hőmérséklet (lágyulási hőmérséklet) alatt a képlékeny alakváltozás következtében megkeményednek, szilárdságuk növekedik. Ezt a jelenséget számítások során közelítően úgy vesszük figyelembe, hogy a feszültség–nyúlás diagramban a képlékeny szakaszt két ferde egyenessel adjuk meg (6.8. ábra), [6.2].

A keményedés kiszámítására a 6.9. ábrát használhatjuk, mely szerint:

$$D = \frac{\sigma - \sigma_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma_f - \sigma_0}{\varepsilon_f} \quad (6.1)$$

$$E = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} \quad (6.2)$$



6.9. ábra. Ideálisan rugalmas és keményedés mellett képlékeny anyag húzódiagramja

A (6.1) és a (6.2) egyenletről következik:

$$\varepsilon_f D = \sigma_f - \sigma_0, \quad (6.3)$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E}, \quad (6.4)$$

és

$$\sigma_0 = \sigma_f \left( 1 - \frac{D}{E} \right). \quad (6.5)$$

A 6.9. ábrán látható alakváltozási görbe tehát három anyagállandóval fejezhető ki: a  $\sigma_f$  folyási határral, amely húzásnál és nyomásnál azonos nagyságú, egy  $E$  rugalmassági együtthatóval és egy  $D$  képlékenységi állandóval. ( $E$  az anyag rugalmassági modulusa,  $D$  pedig a keményedés mértéke az anyag képlékeny alakváltozása folyamán.)

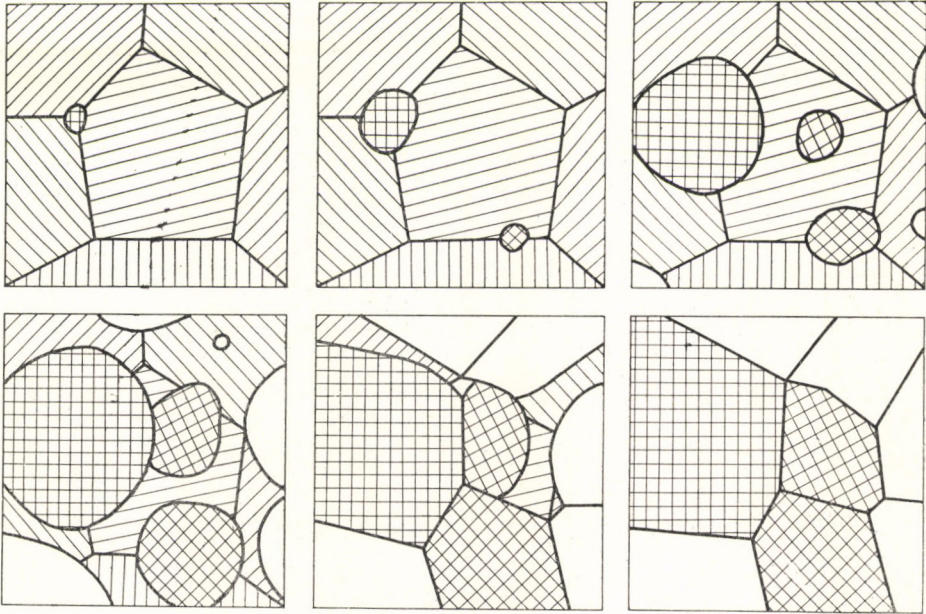
## 7. AZ ANYAG SZÖVETÉBEN LEFOLYÓ VÁLTOZÁSOK

A fémek sokkristályos állapotban kerülnek felhasználásra. A fémek olvadékaikból kristályosan merevednek meg, és ezt a felépítésüket mindenféle mechanikai és termikus behatás ellenére is megtartják. A megmerevedés után a fém a kristályoknak (a krisztallitoknak) egy szabálytalan aggregátuma, mert a kristályok sem alakjukban, sem felépítésükben semmiféle szabályosságot vagy szimmetriát nem mutatnak. Ha a kristályos szerkezet elegendő finomságú, akkor az ilyen anyag bizonyos vonatkozásokban úgy viselkedik, mint egy homogén, izotrop test, és kváziizotropnak is nevezik. Ebben a kváziizotrop anyagban azonban alakítással anizotrópiát lehet előidézni.

Egy öntvény felületén a megmerevedési feltételek egyenlensége következtében egyenlőtlen kristályosodás ismérvei mutatkoznak; az öntvény belsejének törete általában egyenletes, láthatóan homogén szövet. Az anyag igazi felépítése az öntött test valamely keresztmetszetében csak csiszolás és bizonyos kémiai reagensekkel történő maratás révén állapítható meg.

Ha egy fémtest a rugalmassági határon túl van igénybe véve, akkor az egyes krisztallitok egyformán változtatják alakjukat. Képlékeny alakításakor minden krisztallit egy vagy több paralel csúszási vonalrendszer mentén osztódik fel, ennek folytán a metszetben párhuzamos vonalrendszerek mutatkoznak.

Ha egy hidegen alakított fémet egy bizonyos hőmérséklet fölé melegítünk, tehát izzítunk, akkor az anyagban a deformált kristályokon belül új kristályok képződnek (rekrisztallizáció, 7.1. ábra). Izzítással (lágýtással) mindazok a mechanikai tulajdonságváltozások (pl. keményedés), amelyek az alakítás következtében az anyagban jelentkeztek, eltüntethetők.



7.1. ábra. Az újrakristályosodás sémája

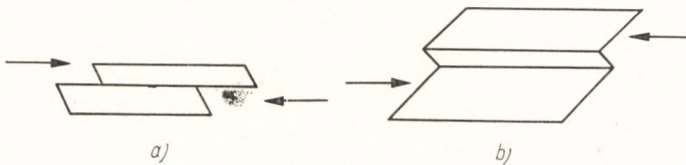
Sok anyagnak a rekrisztallizáció után jelentkező új kristályai ikerkristályok. (7.2. ábra)

A képlékeny alakítás jelenségeinek atomos magyarázata (diszlokáció) nem tartozik tárgyalásunk keretébe.

A legnagyobb hajlam maradó alakváltozásokra a legnagyobb csúsztatófeszültségek síkjaiban mutatkozik, vagy pedig azokban a síkokban, amelyek a legnagyobb normálfeszültségekkel bizonyos meghatározott szöget zárnak be.

Sok fémnél az alakváltozás megindulásának útját az alakított test tükörfényes felületén keletkező ún. „folyási figurákon” pusztán szemmel is követni lehet. Az erősebben alakított fémtestek fényes felülete az alakítás folyamán eldurvul, és tompafényű lesz. A test belsejében az alakváltozási irányok acéloknál az ún. *Fry*-féle maratással láthatóvá tehetők.

Az interkristallin alakváltozásnál egyes különösen kedvezőtlen fekvésű kristallitok belsejében csúszási vonalak lépnek fel. Növekedő alakítással



7.2. ábra. Kristályok alakítása; a) csúszás (transzláció), b) ikerképződés

ezek a csúszási vonalak mindinkább beállnak az alakváltozást létrehozó erő irányába.

Öntött fémekben a krisztallitok rendkívül változatos alakot mutatnak. Melegen alakított vagy hidegalakítás után izzított (lágýtott) fémek szövete rendszeren csaknem egyforma nagyságú gömbölyű krisztallitokból áll. Hidegalakítás következtében a krisztallitok hosszúkás alakot nyernek. Ez a hidegalakítással megnyújtott szövet izzítással ismét olyan szövetté alakítható, melyben a kristályok gömbölyűek.

A krisztallitok a melegalakítás folyamán is megnyúlnak, azonban itt a test saját melege következtében azonnal rekrisztallizáció jön létre. Melegalakítás folyamán — az alakítás sebességétől és az anyag tulajdonságaitól függően — a rekrisztallizáció az alakváltozáshoz képest több-kevesebb időbeli elmaradással lép fel. Egyes fémeknél ez az időbeli lemaradás nagyon kicsi, másoknál pedig megfigyelhetően nagy. Ez a késés az alakítási szilárd-ságnak az alakítási sebességtől való függésében jelentkezik [7.1; 7.2].

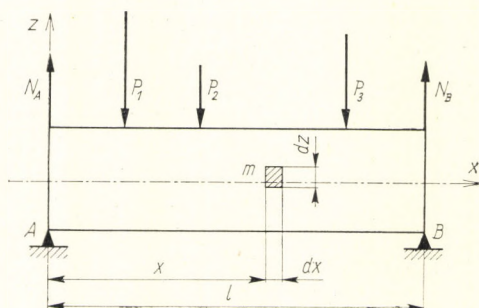
#### 8. A RUGALMAS FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT EGYENLETEI

Vágjunk ki egy egyensúlyban levő állandó szelvényű tartóból, mely hajlításra van igénybevéve, egy differenciális prizmat (8.1. ábra). A hajlítónyomaték húzó- és nyomófeszültséget ébreszt:  $\sigma = \pm \frac{Mz}{J}$  (ahol  $M$  az abszcissa függvénye), a nyíróerő pedig csúsztatófeszültséget hoz létre. Vizsgáljuk meg a kimetszett differenciális prizma egyensúlyi állapotát [8.1; 8.2; 8.3].

A differenciális prizma egyik csúcsa  $m$  (8.1. ábra), élei pedig  $dx$ ,  $dy$  és  $dz$  a megfelelő koordinátengellyel párhuzamosak. Az  $m$  ponton átfektethető és a koordinátengelyekre merőleges három síkon — a prizma oldal-lapjain —  $\sigma_x$ ,  $\tau_y$  és  $\tau_z$  feszültség keletkezik. A szelvény síkjában feszültségei ugyancsak  $\sigma_x$ ,  $\tau_y$  és  $\tau_z$ ; az  $xy$  síkkal párhuzamos síkokban csak  $\tau_y$ , az  $xz$  síkkal párhuzamos síkokban csak  $\tau_z$  feszültség lép fel.

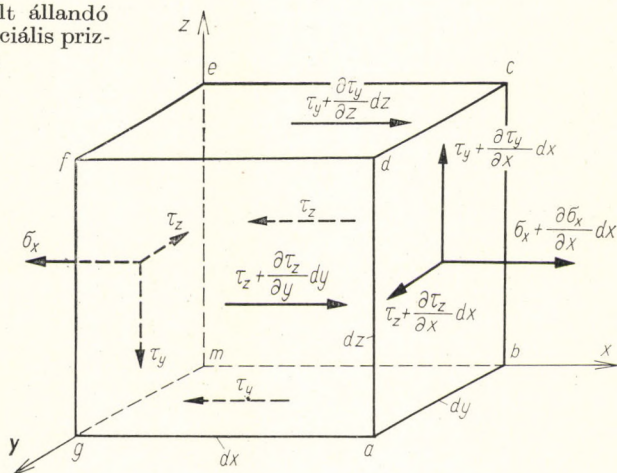
A feszültség egy-egy differenciális oldallap minden pontjában ugyanazon értékű. Két paralel oldallap feszültségei azonban nem egyenlők, mert köztük differenciális különbség van, és irányuk ellentétes (8.2. ábra).

A feszültségek minden pontban az illető pont koordinátáinak függvényei.



8.1. ábra. Hajlításra terhelt állandó szelvényű tartó egy differenciális prizmájára ható erők meghatározása

8.2. ábra. Hajlításra terhelt állandó szelvényű tartó egy differenciális priz-  
májára ható erők



Ha  $efgm$  síkról áttérünk  $abcd$  síkra, csakis az  $x$  koordináta változik meg, mégpedig  $dx$ -szel. Ha tehát az első síkon a feszültség  $\sigma_x$ ,  $\tau_y$  és  $\tau_z$ , akkor  $abcd$  lap feszültségei:

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz \text{ és } \tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy. \quad (8.1)$$

Az  $xz$  síkon a feszültség csak  $\tau_z$ , a tőle  $dy$  távolban fekvő  $adfg$  síkon:  $\tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy$ . Hasonlóképpen a vízszintes oldallapokon a feszültségek:  $\tau_y$  és  $\tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz$ .

Mint hogy a differenciális prizma egyensúlyban van, kell hogy az  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengely irányában minden erő egyenként zérussal legyen egyenlő, vagyis az egyensúly feltételei:

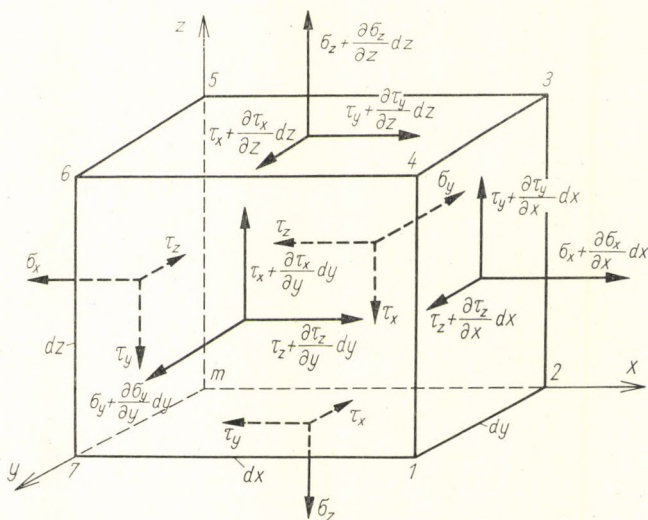
$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \\ &+ \left( \tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_y dx dy + \\ &+ \left( \tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_z dx dz = 0, \\ \Sigma Y &= \left( \tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_z dy dz = 0, \\ \Sigma Z &= \left( \tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_y dy dz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Ha ezekben az egyenletekben a zárójeleket feloldjuk, a kellő összevonás után a közös  $dx \cdot dy \cdot dz$  szorzattal osztunk, megkapjuk a differenciális prizma egyensúlyi feltételeit síkbeli feszültségi állapot esetén:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

A legáltalánosabb esetben az  $m$  ponton átfektetett három egymásra merőleges sík mindegyikében normál- és csúsztatófeszültségek keletkeznek (8.3. ábra). A differenciális prizma egyensúlyának feltételei térbeli feszültségi állapot esetén is az előbbihez teljesen hasonló módon határozhatók meg, és az eredmény:

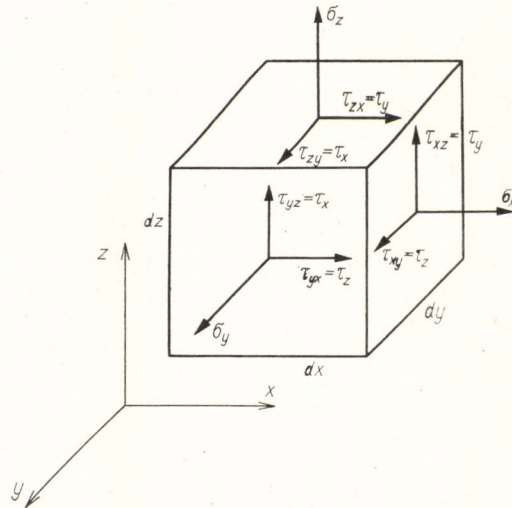
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$



8.3. ábra. A háromtengelyű feszültségi állapotban egyensúlyban levő differenciális prizma ható erők



8.4. ábra. A háromtengelyű feszültségi állapotban egyensúlyban levő differenciális prizma ráható erők



vagyis az első egyenletből egyszerű ciklikus transzformációval nyerjük a másik kettőt.

Az irodalomban az elemi prizma csúsztatófeszültségeit kétféleképpen ábrázolják (8.4. ábra).

A 8.3. ábrában a csúsztatófeszültségek indexeit aszerint választjuk meg, hogy a két összetartozó csúsztatófeszültség melyik képsíkkal párhuzamos. A  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  csúsztatófeszültségek egy, az  $xz$  képsíkkal párhuzamos síkot határoznak meg. Az első index azt mutatja, hogy  $\tau$  melyik koordinátatengelyre merőleges, a második index pedig azt, hogy melyikkel párhuzamos ( $\tau_{zx}$   $z$ -re merőleges és  $x$ -szel párhuzamos,  $\tau_{xz}$  esetében ez fordítva van).

A 8.4. ábra esetében az összetartozó csúsztatófeszültségeket azonos indexszel jelöljük; az index azt mutatja, hogy  $\tau$  melyik koordinátatengelyre merőleges ( $\tau_y$  esetében mindkét csúsztatófeszültség az  $y$  koordinátatengelyre merőleges).

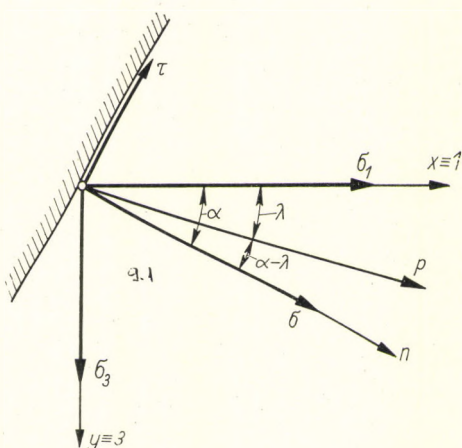
Egyébként a 8.3. és 8.4. ábra indexei között a következő összefüggés áll fenn:

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \tau_{yz} = \tau_{zy}, \\ \tau_y &= \tau_{xz} = \tau_{zx}, \\ \tau_z &= \tau_{xy} = \tau_{yx}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

## 9. A FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT ÁBRÁZOLÁSA O. MOHR SZERINT

Tegyük fel, hogy a három főfeszültség  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  között a következő feltétel érvényes:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Kísérleti eredmények nagy közelítéssel azt bizonyítják, hogy a maradó alakváltozás létrejöttében csak a legnagyobb és legkisebb főfeszültség nagysága döntő, a közepes főfeszültség hatása

9.1. ábra. Kéttengelyű feszültségi állapot



elhanyagolható. A gyakorlat számára tehát elegendő, ha csak az egyszerű kéttengelyű feszültségi állapottal foglalkozik (9.1. ábra).

Állapítsuk meg a  $\sigma_x$  és  $\tau$  feszültséget egy olyan keresztmetszetben, amely az egyik főirányra merőleges, amikor a test síkbeli feszültségi állapotban van. Ilyenkor a Mohr-féle feszültségi kör a feszültségi állapotról igen szemléletes képet ad (9.3. ábra) [9.1]. Kéttengelyű, illetőleg síkbeli feszültségi állapotban, amelyet az jellemez, hogy az összes feszültségek egy síkban működnek ( $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_x = \tau_y = 0$  és  $\tau_z = \tau$ ), a bármelyik síkban fellépő  $\sigma$  és  $\tau$  feszültség, továbbá a  $\sigma_1$  és  $\sigma_3$  főfeszültség között a következő összefüggés áll fenn (9.2. ábra):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x df \cos \alpha + \tau df \sin \alpha &= \sigma_1 df \cos \alpha, \\ \sigma_x df \sin \alpha - \tau df \cos \alpha &= \sigma_3 df \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) \cos \alpha + \tau \sin \alpha &= 0, \\ -\tau \cos \alpha + (\sigma_x - \sigma_3) \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Ennek determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau \\ -\tau & \sigma_x - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (9.3)$$

amiből

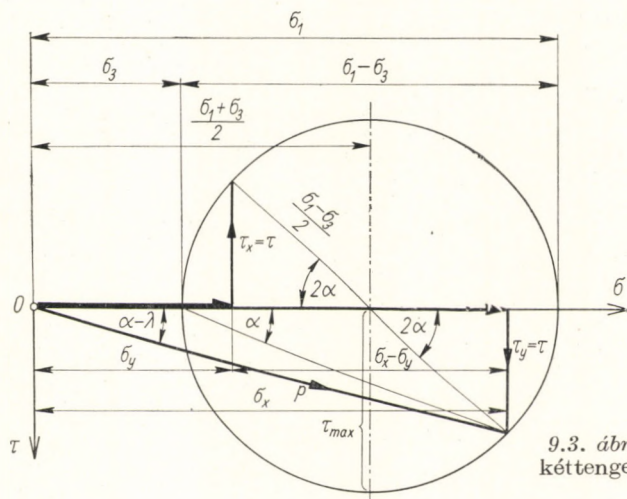
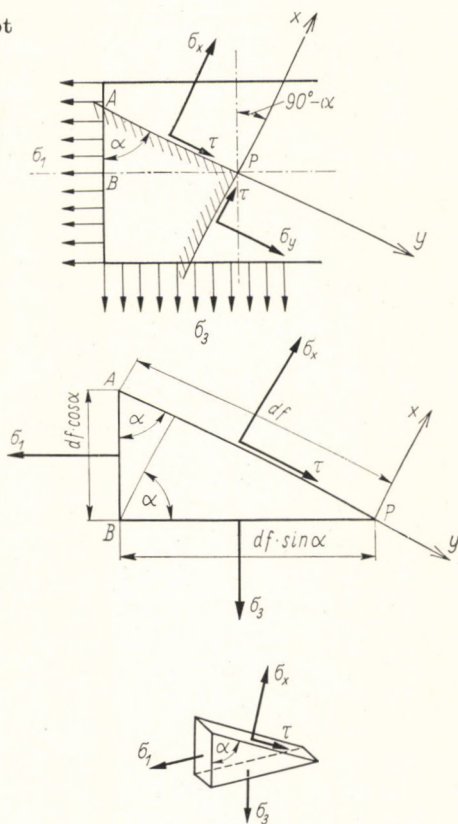
$$(\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_x - \sigma_3) + \tau^2 = 0. \quad (9.4)$$

A műveleteket elvégezve:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_1 - \sigma_3 \sigma_x + \sigma_1 \sigma_3 + \tau^2 = 0, \quad (9.5)$$

$$\sigma_x^2 - \sigma_x(\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_1 \sigma_3 + \tau^2) = 0. \quad (9.6)$$

9.2. ábra. Kéttengelyű feszültségi állapot



9.3. ábra. Mohr-féle feszültségi kör, kéttengelyű feszültségi állapot esetére

Ebből (ha  $\sigma_y$ -ra ugyanígy elvégezzük a számítást):

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_3)^2 - 4(\sigma_1 \sigma_3 + \tau^2)}, \quad (9.7)$$

továbbá:

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad (9.8)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (9.9)$$

Ahogy a 9.3. ábrából látható, a (9.8) és a (9.9) egyenlet egy kört fejez ki, amelynek középpontja

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

távolságra van a koordináta-rendszer kiindulópontjától.

A (9.8) egyenletből

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y \quad (9.10)$$

és a 9.3. ábrából

$$\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2, \quad (9.11)$$

következésképpen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_1 + \sigma_3 &= \sigma_x + \sigma_y, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \quad (9.13)$$

H. TRESCA és O. MOHR feltevése szerint a képlékeny anyagok folyása akkor indul meg — mint azt később látni fogjuk —, ha [l. (9.9) egyenlet;  $\alpha = 45^\circ$ ]

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (9.14)$$

A (9.12) egyenlet értelmében tehát

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \quad (9.15)$$

Ezt a folyási feltételt a következő módon is fel szokták írni:

$$4 \tau_{\max}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2. \quad (9.16)$$

Ha a síkbeli feszültségi állapotnál nem a főfeszültségekből, hanem a valamely helyen működő  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  és  $\tau$  feszültségből indulunk ki, akkor egy kis prizmatikus elemre ható erők egyensúlyi egyenletét a következőképpen írhatjuk fel (9.4. ábra):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n \cos \alpha - \tau_n \sin \alpha &= \sigma_x \cos \alpha + \tau \sin \alpha, \\ \sigma_n \sin \alpha + \tau_n \cos \alpha &= \sigma_y \sin \alpha + \tau \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Itt  $\sigma_n$  a normálfeszültség,  $\tau_n$  a csúsztatófeszültség a ferde síkban,  $\alpha$  a ferde sík normálisa és az  $x$  tengely által bezárt szög;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  azok a feszültségi komponensek, amelyeket ismertnek tételezünk fel. Ha a (9.17) egyenletet  $\sigma_n$ -re és  $\tau_n$ -re megoldjuk, akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha, \\ \tau_n &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Ha az első egyenletben a  $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)$  tagot a bal oldalra visszük, s mind a két egyenletet négyzetre emeljük és összegezzük, akkor a feszültségi kör egyenletét kapjuk meg:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \tau_{\max}^2, \quad (9.19)$$

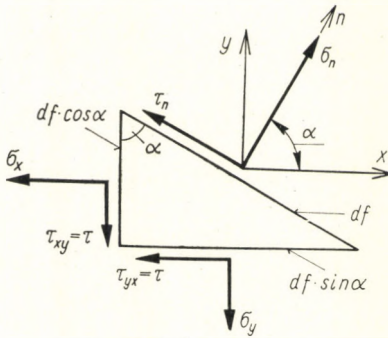
ahol [l. (9.16) egyenlet]

$$\tau_{\max}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2. \quad (9.20)$$

A  $\sigma_n$  normálfeszültség az  $S_1$  és az  $S_2$  pontban éri el szélső értékeit (9.5. ábra), amikor

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 0, \quad \operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (9.21)$$

9.4. ábra



A  $\tau_n$  csúsztatófeszültség ott éri el szélső értékeit, ahol

$$\frac{d\tau_n}{d\alpha} = 0, \quad \operatorname{tg} 2\alpha'' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \quad (9.22)$$

Mint ahogy

$$\operatorname{tg} 2\alpha' \cdot \operatorname{tg} 2\alpha'' = -1, \quad (9.23)$$

a csúsztatófeszültség azokban a síkokban éri el szélső értékeit, amelyek a főfeszültségi síkokkal  $45^\circ$ -ot zárnak be. A feszültségi kör egyenletéből (9.19)  $\tau_n = 0$ -nál a főfeszültségek értéke (a gyök pozitív értékénél  $\sigma_n = \sigma_1$ , negatív értékénél  $\sigma_n = \sigma_3$ ):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{\max}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{\max}. \quad (9.24)$$

A fő csúsztatófeszültségeket a Mohr-féle kör rádiuszai határozzák meg:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (9.25)$$

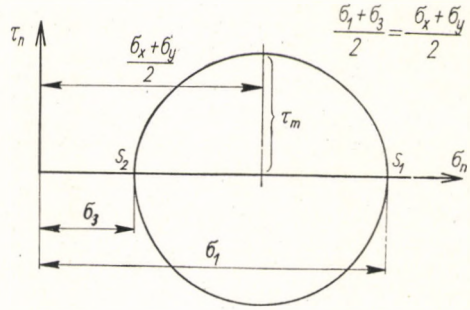
A három fő csúsztatófeszültség összege:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0. \quad (9.26)$$

## 10. AZ ALAKVÁLTOZÁS MOHR-FÉLE ÁBRÁZOLÁSA

Az egységprizma alakváltozása síkbeli feszültségi állapot és rugalmas vagy kicsi maradó alakváltozások esetében ugyancsak a Mohr-féle körből határozható meg [10.1].

9.5. ábra



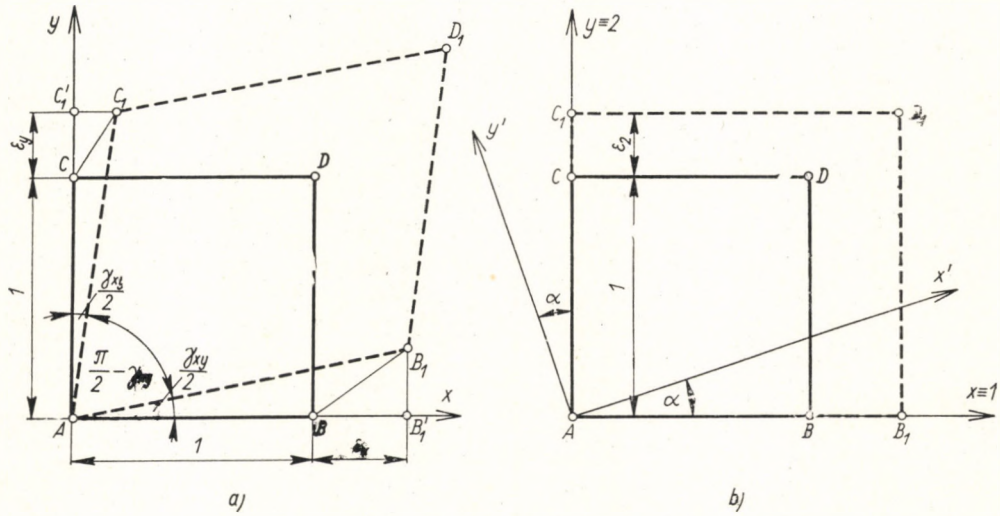
A 10.1. ábra szerint az egységprizma egyes oldalainak fajlagos nyúlása a síkbeli alakváltozás után:

$$BB_1 = \varepsilon_x \text{ az } x \text{ irányban,}$$

$$CC_1 = \varepsilon_y \text{ az } y \text{ irányban,}$$

és a derékszög változása az  $A$  pontban:

$$B_1B_2 + C_1C_1 (=) \gamma_{xy}.$$



10.1. ábra. Az egységprizma oldalainak megnyúlása alakváltozás után

A Mohr-féle kör értelmében:

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad (9.8)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (9.9)$$

A képzelt feszültségek a három főirányban:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k1} &= E \varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}, \\ \sigma_{k2} &= E \varepsilon_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m}, \\ \sigma_{k3} &= E \varepsilon_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Síkbeli feszültségi állapotban  $\sigma_2 = 0$ , tehát

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k1} &= \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{m}, \\ \sigma_{k2} &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m}, \\ \sigma_{k3} &= \sigma_3 - \frac{\sigma_1}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1a)$$

Ebből következik, hogy

$$E \varepsilon_1 + Em \varepsilon_3 = m \sigma_3 - \frac{\sigma_3}{m} = \sigma_3 \frac{m^2 - 1}{m}, \quad (10.2)$$

$$\sigma_3 = \frac{Em}{m^2 - 1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3 m), \quad (10.3)$$

$$\sigma_1 = \frac{Em}{m^2 - 1} (\varepsilon_3 + m \varepsilon_1). \quad (10.4)$$



Ha a (10.1) egyenletrendszer első egyenletéhez hozzáadunk és ugyanakkor belőle kivonunk  $\sigma_1/m$ -t, akkor

$$E \varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} + \frac{\sigma_1}{m} - \frac{\sigma_1}{m} = \left(\frac{m+1}{m}\right) \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m}. \quad (10.2)$$

Mint hogy a síkbeli feszültségi állapot esetében  $\sigma_2 = 0$ , következik, hogy  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_3 = \text{konstans}$ , és a (10.2) egyenletből az általános Hooke-féle törvény alakja lesz:

$$E \varepsilon = \left(\frac{m+1}{m}\right) \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m}, \quad (10.5)$$

illetve az adott esetben:

$$\begin{aligned} E \varepsilon_x &= \left(\frac{m+1}{m}\right) \sigma_x - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m} = \\ &= \left(\frac{m+1}{m}\right) \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha\right) - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m} = \\ &= (\sigma_1 + \sigma_3) \left(\frac{m+1}{2m} - \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{m+1}{m}\right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \cos 2\alpha = \\ &= (\sigma_1 + \sigma_3) \left(\frac{m-1}{2m}\right) + \left(\frac{m+1}{2m}\right) (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\alpha = \\ &= \left(\frac{m-1}{2m}\right) \left(\frac{Em}{m^2-1}\right) (\varepsilon_1 + m\varepsilon_3 + \varepsilon_3 + m\varepsilon_1) + \\ &+ \left(\frac{m+1}{2m}\right) \left(\frac{Em}{m^2-1}\right) (\varepsilon_3 + m\varepsilon_1 - \varepsilon_1 - m\varepsilon_3) \cos 2\alpha = \\ &= \frac{E}{2(m+1)} (1+m) (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \\ &+ \frac{E}{2(m-1)} (m-1) (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Tehát

$$\varepsilon_{x,y} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \cos 2\alpha. \quad (10.7)$$

Az általános *Hooke*-féle törvény második részének értelméből  $\tau = G \gamma$ , ahol  $G = \frac{mE}{2(m+1)}$ , következik, hogy

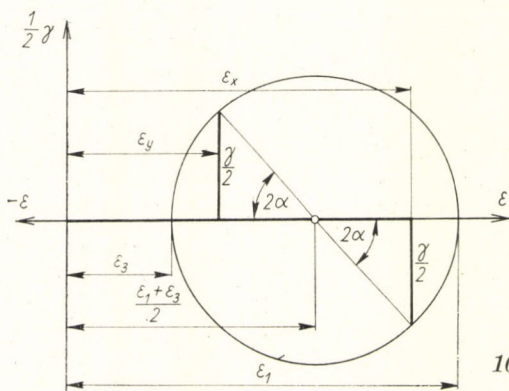
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma &= \left( \frac{m+1}{mE} \right) \tau = \left( \frac{m+1}{mE} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \right) = \\ &= \left( \frac{m+1}{mE} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{mE}{m^2 - 1} \right) (\varepsilon_3 + m\varepsilon_1 - \varepsilon_1 - m\varepsilon_3) \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{m+1}{m^2 - 1} \right) [\varepsilon_3(1-m) + \varepsilon_1(m-1)] \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{m+1}{m^2 - 1} \right) (m-1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Tehát

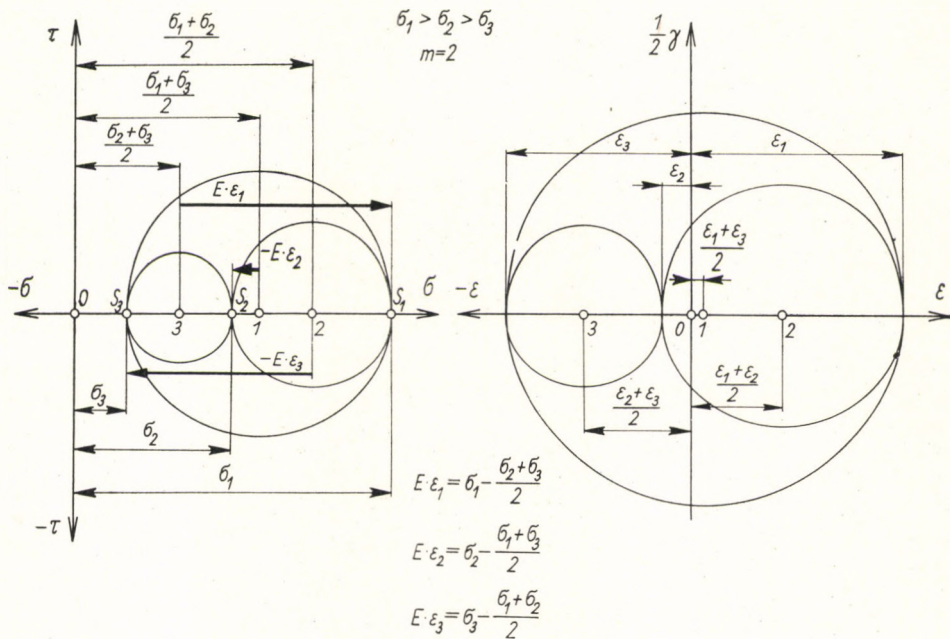
$$\frac{1}{2} \gamma = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (10.9)$$

A (10.7) és (10.9) egyenlettel megadott összefüggés  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  és  $\gamma$  között a *Mohr*-féle körrel ábrázolható (10.2. ábra).

Ha a főfeszültségi körök segítségével megszerkesztjük a főnyúlások köreit (10.3. ábra), akkor azt látjuk, hogy a főnyúlások  $\varepsilon\gamma$ -síkjában ábrázolt körei hasonlóak a főfeszültségek  $\sigma\tau$  síkjában ábrázolt köreihez.



10.2. ábra. Az alakváltozás MOHR szerint való ábrázolása



10.3. ábra. A főfeszültségi és főnyúlási körök hasonlósága

## 11. KÉPLÉKENY TÖMEG STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSA

A legegyszerűbb esetben, amikor egy képlékeny tömeg állandó (stacionárius) sebességgel folyik, amikor a test alakjának változása még viszonylag kicsi, de amikor a maradék alakváltozások már olyan nagyok, hogy a rugalmas alakváltozások elhanyagolhatók, a test elemi prizmájának alakváltozására vonatkozólag a következő megállapításokat tehetjük [11.1]:

1. A fő alakváltozási irányok mindig egybeesnek a főfeszültségek irányával.
2. Az alakított test térfogata nem változik [1. a (14.2b) egyenletet].
3. A főnyúlások Mohr-féle köreinek ábrája az  $\varepsilon\gamma$ -síkbán hasonló a főfeszültségek köreinek ábrájához a  $\sigma\tau$  síkban.

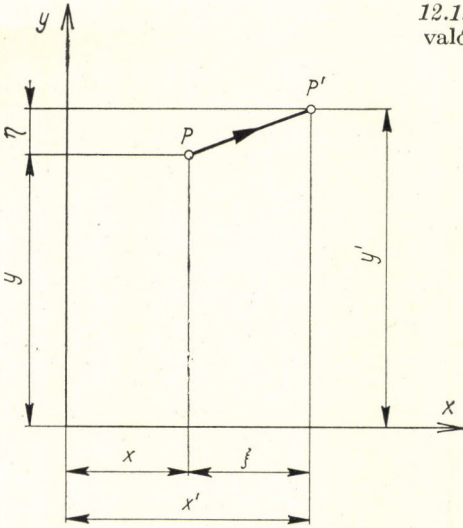
Az 1. pont azt a tapasztalati tényt fejezi ki, hogy a legnagyobb csúsztatások iránya egybeesik a legnagyobb csúsztatófeszültségek irányával.

## 12. A VÉGTELEN KIS ALAKVÁLTOZÁS

Itt is először a síkbeli alakváltozást tárgyaljuk [8.3].

Ha egy test alakjának változását le akarjuk írni, akkor az alakított test egyik anyagi pontjának alakítás előtti helyzetét összehasonlítjuk ugyanennek a pontnak a helyzetével a már deformált testben. Az alak-

12.1. ábra. A test egy  $P$  pontjának  $P'$  pontba való elmozdulása az alakváltozás folyamán



változás folyamán a test egyik  $P$  pontja  $P'$  helyzetbe kerül. Az elmozdulás komponensei (12.1. ábra):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x' - x, \\ \eta &= y' - y. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

A *Hooke-féle* rugalmas anyagban az elmozdulás lineáris függvény, és ezt a következő formában lehet kifejezni:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

A *Hooke-féle* törvény és a 12.2. ábra értelmében:

$$\tau = G\gamma = G(\gamma_1 + \gamma_2), \quad (12.3)$$

$$\gamma_1 (=) \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{d\eta}{dx}, \quad (12.4)$$

$$\gamma_2 (=) \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{d\xi}{dy}. \quad (12.5)$$

A (12.3) egyenlet szerint:

$$\tau = G\gamma = G \left( \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy} \right). \quad (12.6)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = a_{11} = \varepsilon_x, \quad (12.7)$$

$$\frac{d\xi}{dy} = a_{12} (=) \gamma_2, \quad (12.8)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = a_{21} (=) \gamma_1, \quad (12.9)$$

$$\frac{d\eta}{dy} = a_{22} = \varepsilon_y. \quad (12.10)$$

Ezek szerint

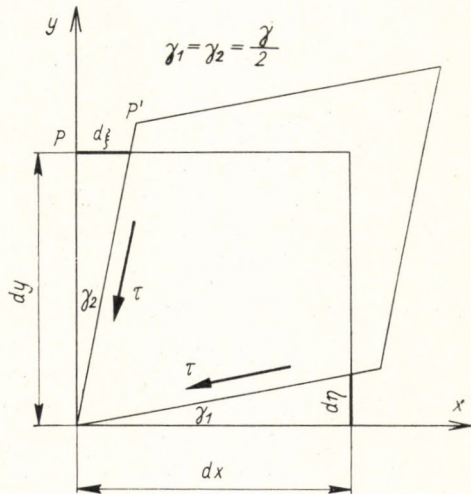
$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon_x x + \gamma_2 y = \varepsilon_x x + \frac{\gamma}{2} y, \\ \eta &= \gamma_1 x + \varepsilon_y y = \frac{\gamma}{2} x + \varepsilon_y y. \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Az elmozdulás komponenseit még így is felírhatjuk:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u(x,y), \\ \eta &= v(x,y), \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

és így

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x' - x = u(x,y), \\ \eta &= y' - y = v(x,y), \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$



12.2. ábra. Az elemi alakváltozás

illetve

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon_x \quad \text{és} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \varepsilon_y. \quad (12.14)$$

Ezek szerint

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial v}{\partial x} y, \\ \eta &= \frac{\partial u}{\partial y} x + \frac{\partial v}{\partial y} y. \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

A fentiekben az alakváltozás problémáját azt feltételezve tárgyaltuk, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja nem mozdul el.

### 13. A FOLYÁS MEGINDULÁSÁNAK FELTÉTELEI

H. TRESCA (1868) megfigyelte, hogy képlékeny anyagok alakításakor az alakváltozást nem a legnagyobb főfeszültségek, hanem a közöttük mutató legnagyobb különbség idézi elő. TRESCA előtt majdnem száz évvel CH. A. COULOMB (1773) már feltételezte, hogy nyomókísérleteknél az alakváltozás oly módon áll elő, hogy az anyag a nyomásiránnyal bizonyos szöveget alkotó síkok mentén elmozdul. TRESCA és mások nézete szerint az anyagelmozdulások a legnagyobb csúsztatófeszültségnek azokban a síkjaiban következnek be, amelyek a legnagyobb  $\sigma_1$  és legkisebb  $\sigma_3$  főfeszültséggel  $45^\circ$ -os szöveget zárnak be. Eszerint a folyás megindulásának feltétele a legnagyobb csúsztatófeszültség elméletének alapján a következőképpen fogalmazható meg [(9.14) egyenlet]:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{k_f}{2} = \text{konst}, \quad (13.1)$$

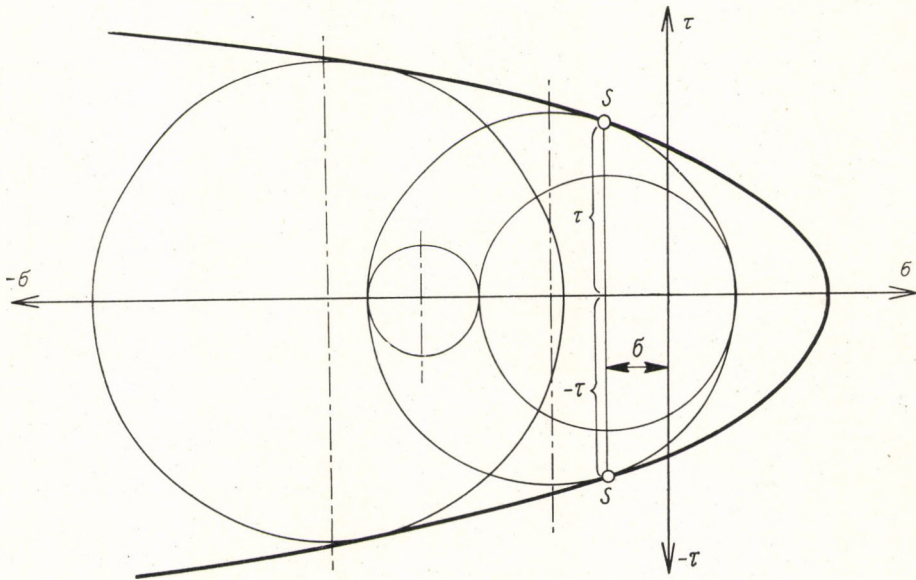
ideálisan merev-képlékeny anyag (6.7. ábra) esetén  $k_f$  állandó, illetve

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k_f, \quad (13.2)$$

ahol  $k_f = 2 \tau_{\max}$  az egytengelyű feszültségi állapotban fellépő folyási határ, másképpen alakítási szilárdság.

A legnagyobb csúsztatófeszültség elmélete jól jellemzi az anyag viselkedését nyomás hatására. A folyási vonalrendszerekkel kapcsolatos megfigyelések is megfelelnek ennek az elméletnek. A folyási vonalak (vonalrendszerek) olyan rajzok az anyag felszínén, amelyek az alakított test felületén a folyás megindulásának kezdeti stádiumában megfelelően kedvező körülmények létrehozásával láthatóvá tehetőek.

A kísérletek azt bizonyítják, hogy a képlékeny állapot lágy fémeknél a csúszási felületeken egy meghatározott csúszófeszültség fellépése folytán következik be; O. MOHR ennek a feltételnek egy más, általánosabb megfogalmazását adta, amennyiben feltette, hogy a csúsztatófeszültségen kívül

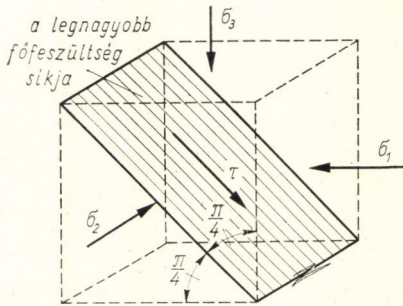


13.1. ábra. A Mohr-féle határgörbe

a csúszósíkokra ható normálfeszültség nagysága is befolyással van a képlékeny állapot bekövetkezésére [9.1].

Ha a  $\sigma\tau$  síkban (13.1. ábra) a különböző terhelési állapotnak megfelelő feszültségi köröket felrajzoljuk, akkor azt látjuk, hogy minden feszültségállapotnak három főkör felel meg. Az a feltétel, hogy a  $\tau$  csúsztatófeszültség a csúszási síkban működő normálfeszültség függvénye legyen, a  $\sigma\tau$  síkban egy  $\tau = f(\sigma)$  görbével fejezhető ki. Ez a görbe a Mohr-féle körök burkológörbéje, „határgörbéje”, amelyet sehol sem szabad főkörnek metszenie. Ha ui. egy legnagyobb feszültségkör metszené a határgörbét, akkor lennének olyan csúsztatófeszültségek, amelyek nagyobbak, mint azok a csúsztatófeszültségek, melyeket a határgörbe meghatároz; ezért kell, hogy ez a határgörbe a legnagyobb főkörök burkológörbéje legyen. Tehát a folyási határhoz tartozó legkülönbözőbb terhelési állapotoknak megfelelő főkörök burkoló görbéje az a határgörbe, amely a  $\tau = f(\sigma)$  függvényt adja. A határfeltétel egyenlete azt fejezi ki, hogy  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  a  $(\sigma_1 + \sigma_3)$  függvénye kell legyen. Minden határállapothoz két csúszási felület tartozik, amelyek a második főfeszültség,  $\sigma_2$  irányában metszik egymást, és amelyek a legnagyobb,  $\sigma_1$  és a legkisebb,  $\sigma_3$  főfeszültség irányával egyforma szöget zárnak be. A közepes főfeszültségnek eszerint nincs hatása az anyag folyásának bekövetkezésére (13.2. ábra).

A Mohr-féle hipotézis ez általános megfogalmazásának az az előnye, hogy a mindenkori kísérleti eredményekhez jól hozzáidomítható. Az elmélet alkalmazásához azonban először is a vizsgált anyag határgörbéjét kell ismernünk. Azoknak a feszültségi állapotoknak számára, amelyek a gyakorlatban előfordulnak, a határgörbét első megközelítésben legtöbbször egy-



13.2. ábra. A legnagyobb csúsztatófeszültség síkja

egy olyan egyenessel lehet helyettesíteni, amely a húzó- és a nyomókört érinti (13.3. ábra). Azoknál az anyagoknál, melyeknél a húzó- és a nyomókör egyforma nagy (tehát a képlékenyen alakítható anyagoknál), a viszonyok különösen egyszerűek, amennyiben a két határgörbét helyettesítő egyenesek párhuzamosak a  $\sigma$  tengellyel. Ha a 13.3/b ábrában még a tiszta csúsztatófeszültségre való igénybevétel feszültségi körét is felrajzoljuk (középpont: 0), akkor  $\tau_{\max} = 1/2 \sigma_f = 1/2 k_f$ , ahol  $\sigma_f \equiv k_f$  a folyási határ, illetve az alakítási szilárdság. Ebben az esetben MOHR feltevése azonos COULOMB és TRESCA feltevésével.

A Mohr-féle hipotézisnek az a hátránya, hogy nem általános fizikai alapelvekből van levezetve, tehát nem természettörvényt fejez ki.

A Tresca—Mohr-féle hipotézis a középső főfeszültség hatását elhanyagolja. W. LODE, M. ROŠ, A. EICHINGER és M. ENSLIN kísérletei azonban rávilágítottak arra, hogy a  $\sigma_1$  és  $\sigma_3$  főfeszültség mellett a  $\sigma_2$  főfeszültség is hatással van a folyás megindulására. W. LODE kísérleti eredményei a 13.4. ábrán vannak feltüntetve [13.1]. Ebben  $\mu$  egy a középső főfeszültséget meghatározó segédfüggvény, amely  $-1$  és  $+1$  között változhat:

$$\mu = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \quad (13.3)$$

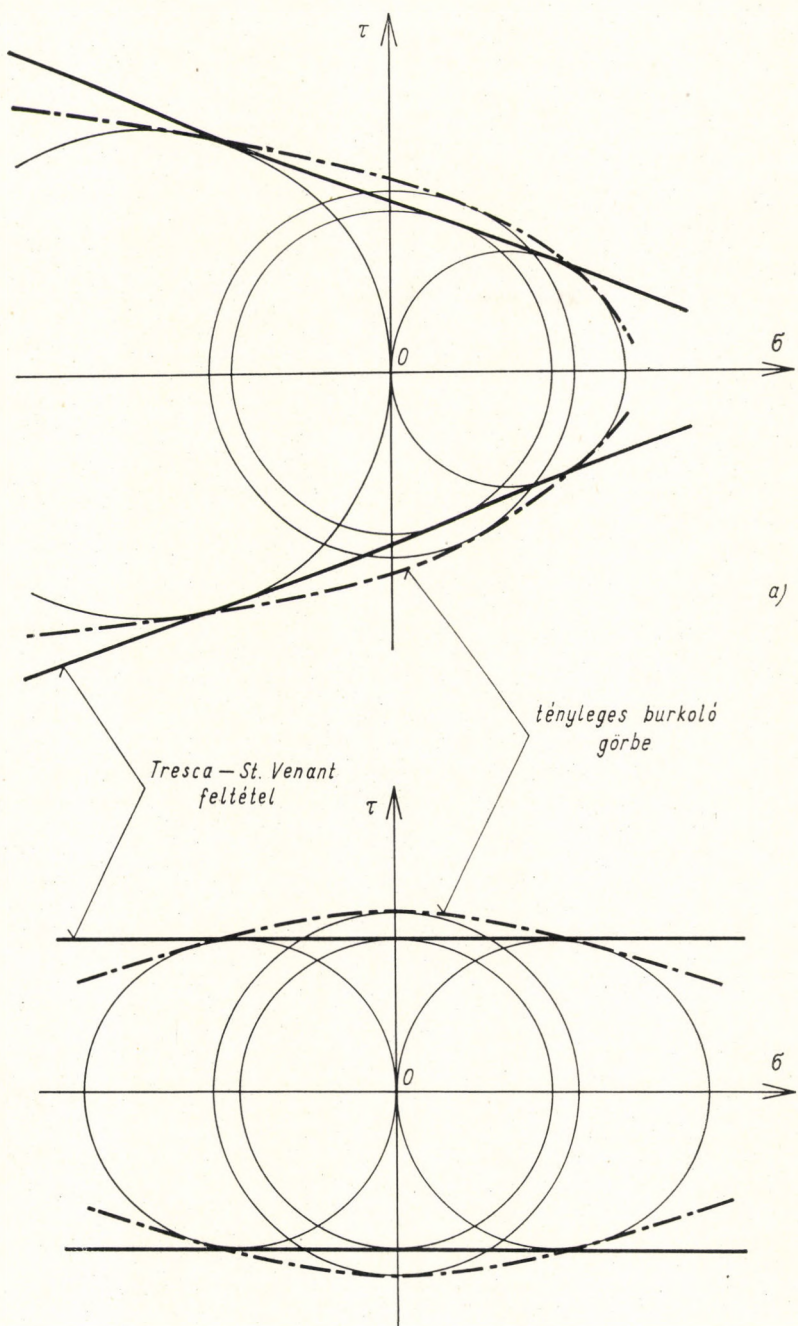
A diagramban (13.4. ábra) egytengelyű húzófeszültség esetében az ordináta a  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  viszonya  $\sigma_f$ -hez, azaz a folyási határhoz.

A folyás megindulásának feltételét a második főfeszültség figyelembevételével az ún. alakváltozási munka hipotézis adja meg, amelyet A. T. HUBER [13.2], H. HENCKY [13.3] és R. MISES [13.4] állított fel.

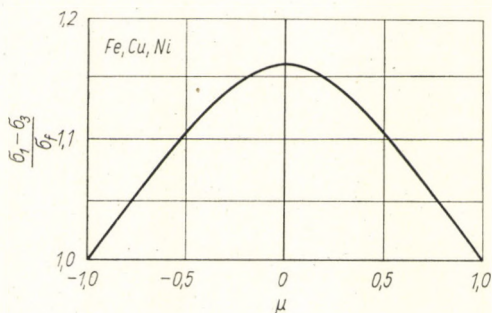
Itt az elmélet részletezésére nem térünk ki. A folyási feltétel HUBER—HENCKY—MISES szerint:

$$k_f = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (13.4)$$





13.3. ábra. A közelítő határgörbe a) rideg, b) szívós anyagok esetében



13.4. ábra. A folyási határ változása a második főfeszültség függvényében. LOBE kísérletei rézzel, acéllal és nikkellel

Ezt az egyenletet még a következő formában is fel lehet írni:

$$k_f = \sqrt{\frac{3}{2} [(\sigma_1 - \sigma_k)^2 + (\sigma_2 - \sigma_k)^2 + (\sigma_3 - \sigma_k)^2]}, \quad (13.5)$$

ahol

$$\sigma_k = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

a három főfeszültség középértéke. Az eltérés a legnagyobb csúsztatófeszültség elmélete által és az alakváltozási munka elmélete által kifejezett folyási feltétel között legfeljebb 15 %, amit a következő formában lehet kifejezni:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq 1,15 k_f. \quad (13.6)$$

## 14. KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSOK

### a) Kis képlékeny alakváltozások

A fémek képlékeny alakításánál a három főirányban fellépő alakváltozás között határozott összefüggés áll fenn [14.1]. Ha feltesszük, hogy egy elemi prizma oldalai a főfeszültségekkel párhuzamosan vannak az alakított testből kivágva és egységnyi hosszúságúak, akkor az alakváltozásra vonatkozó összefüggés a térfogat állandósága, ill. változatlansága alapján a következőképpen írható fel (14.1. ábra):

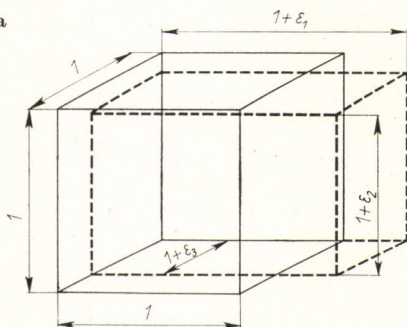
$$(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = 1 \cdot 1 \cdot 1. \quad (14.1)$$

Ha  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$  elhanyagolhatóan kicsi, akkor érvényes a következő összefüggés:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad (14.2a)$$

ahol  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  és  $\varepsilon_3$  az elemi prizma kis elemi elmozdulásai a főfeszültségek irányában. A (14.1) egyenlet kimondja, hogy a három alakváltozás közül az egyik nagysága egyenlő a másik kettő nagyságának összegével, de elő-

14.1. ábra. Az elemi prizma alakváltozása



jele ellenkező. Vagy más szavakkal: a három főirányban történő alakváltozás közül a legnagyobb abszolút értéke mindig egyenlő a másik kettő abszolút értékének összegével.

Minthogy a képlékeny alakváltozás főleg csúszások eredménye, nagyobb térfogatváltozás nem következhet be. A képlékeny alakváltozásokra a következő összefüggés érvényes [1. (14.1) egyenlet]:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (14.2b)$$

Emellett teljesen közömbös, hogy a csúszás homogén-e, vagy rétegekben következik-e be (14.2. ábra). Egy  $\Delta V$  elemi térfogatban felhasznált csúszási munka:

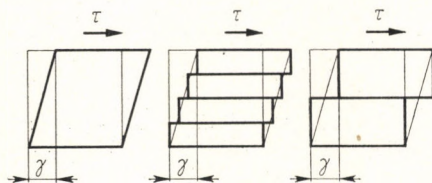
$$\Delta A_i = \tau \gamma \Delta V, \quad (14.3)$$

illetve a térfogategységre vonatkoztatva:

$$A_i = \tau \sum_{V=1} \gamma \Delta V. \quad (14.4)$$

$\tau$  azért tehető a summajel elé, mert a csúszási ellenállás minden kristallográfiai felület mentén ugyanaz. A belső alakváltozási munka mindig egyenlő a külső erők alakító munkájával:

$$A_a = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3. \quad (14.5)$$



14.2. ábra. Az alakváltozási munka homogén csúszás és változatlan csúszórétegek mozgása esetén

Rugalmas testekre vonatkozó feszültségi állapotban az általános *Hooke*-féle törvény érvényes. Képlékeny alakváltozásoknál (kicsiny alakváltozások esetében) egy a *Hooke*-félehez hasonló egyenletrendszer használható, azzal a különbséggel, hogy ebben  $m = 2$  vagy  $\nu = 1/2$ , és hogy az  $E$  rugalmassági modulus minden értéket felvehet. Ez esetben az  $E$  együtthatót  $D$ -vel jelöljük, és F. KÖRBER és A. EICHINGER szerint a főfeszültségek és főalakváltozások között a következő összefüggések írhatók fel:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{D} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{D} \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{D} \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Ebben az egyenletrendszerben a  $D$  képlékenységi együtthatónak a képlékeny alakítás szempontjából ugyanaz a jelentősége, mint az  $E$  rugalmassági együtthatónak a rugalmas alakításnál, azzal a különbséggel, hogy  $D$  növekedő alakváltozással változik, éspedig az alakított anyagra jellemző függvény szerint (14.3. ábra). Kváziizotrópia mellett  $D$  minden irányban egyforma.

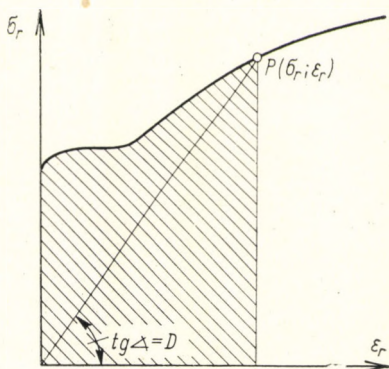
A (14.6) egyenletrendszerből adódik, hogy

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)}}_{\varepsilon_r} = \frac{1}{D} \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}}_{\sigma_r}, \quad (14.7)$$

ahol  $\varepsilon_r$  a redukált nyúlás,  $\sigma_r$  a redukált feszültség.

A (14.5) egyenlet szerint, mint láttuk:

$$A_a = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3, \quad (14.5)$$



14.3. ábra. A redukált feszültség mint a redukált nyúlás függvénye bizonyos anyagoknál, KÖRBER és EICHINGER szerint

ez az egyenlet a megfelelő behelyettesítések után [l. a (14.6) egyenleteket] a következő alakot veszi fel:

$$A_a = \frac{1}{D} \left[ \sigma_1^2 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \sigma_1 + \sigma_2^2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sigma_2 + \sigma_3^2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sigma_3 \right] =$$

$$= \frac{1}{D} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1]. \quad (14.8)$$

Az alakváltozási munka hipotézise szerint ui.:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 k_f^2, \quad (14.9)$$

kifejtve:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 = k_f^2. \quad (14.10)$$

Ezek szerint a (14.5), illetve a (14.8) egyenlet a következőképpen is felírható:

$$A_a = \frac{1}{D} k_f^2. \quad (14.11)$$

Mint hogy  $\sigma_r = k_f$  esetén

$$\frac{k_f}{D} = \varepsilon_r, \quad (14.12)$$

írható:

$$A_a = k_f \varepsilon_r. \quad (14.13)$$

Ha a főirányok nem ismeretesek, akkor még a képlékeny csúszást is hozzá kell számítani (képlékeny alakváltozáskor  $E = D$  és  $m = 2$ ):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{mE}{2(m+1)}} = \frac{3}{D} \tau_{xy}, \quad (14.14)$$

és így

$$\varepsilon_r = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{3} \gamma_{xy}^2}, \quad (14.15)$$

és

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z + 3 \tau_{xy}^2}. \quad (14.16)$$

Ezek a képlékeny alakváltozások a rugalmas alakváltozásokkal egyidejűleg lépnek fel; a teljes alakváltozás tehát a rugalmas és maradó (képlékeny) alakváltozás összege.

Húzókísérlet esetén:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2}, \quad \text{és így} \quad \varepsilon_r = \varepsilon_1,$$

továbbá:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_r = \sigma_1.$$

Ugyanez áll a nyomókísérletre is. Ezzel szemben tiszta csúsztatás esetén (pl. csavarásnál):

$$\sigma_r = \tau \sqrt{3} \quad \text{és} \quad \varepsilon_r = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}.$$

A tiszta csúsztatás esetén tehát

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma}{2}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{\gamma}{2}, \quad \varepsilon_3 = 0,$$

és így

$$\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}.$$

A képlékeny alakváltozás alapegyenletét (14.7) fel lehet írni a legegyszerűbb alakjában:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{D} = \frac{k_f}{D}. \quad (14.17)$$

Viszont a feszültségkomponenseket felírhatjuk a *Hooke*-törvény átrendezésével:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_k &= \frac{2}{3} D \varepsilon_x, \\ \sigma_y - \sigma_k &= \frac{2}{3} D \varepsilon_y, \\ \sigma_z - \sigma_k &= \frac{2}{3} D \varepsilon_z. \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

Ezekben az egyenletekben

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (14.19)$$

az ún. közepes feszültség, minthogy a testre minden oldalról ható húzás vagy nyomás a képlékeny alakváltozást gyakorlatilag nem befolyásolja; ez az érték egyelőre ismeretlen, és csak a peremfeltétel alapján határozható meg.

Az eddigiekből következik, hogy a térfogategységre vonatkoztatott alakváltozási munka:

$$\int (\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3). \quad (14.20)$$

Ez a (14.7) egyenlet szerint a következőképpen is felírható:

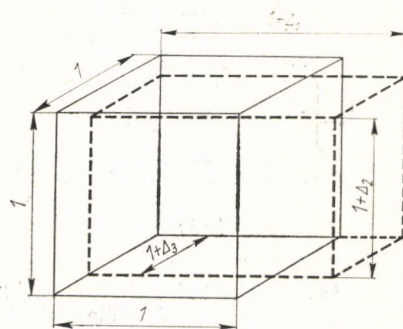
$$\dot{A} = \int_0^{\varepsilon_r} \sigma_r d\varepsilon_r = \int_0^{\varepsilon_r} k_f d\varepsilon_r. \quad (14.21)$$

Ha valamely anyag húzási diagramja ismeretes (14.3. ábra), úgy a diagram területét,  $\dot{A}$ -t a  $\sigma_r = f(\varepsilon_r)$  görbe határozza meg. Egy tetszőleges feszültségi állapotban, amennyiben  $\varepsilon = \varepsilon_r$  és  $\sigma_f = k_f$ , az alakváltozási munka egyenlő a szokásos húzókísérlet munkájával.

#### b) Nagy képlékeny alakváltozások

Nagy alakváltozásoknál a feszültségeket és nyúlásokat az alakított test mindenkori méreteire kell vonatkoztatni. Ez a megállapítás csak viszkózus anyagú testekre és kristályosan felépített anyagokra nézve érvényes minden esetben, olyanokra tehát, amelyeknél az alakváltozás csúszáson alapul. A következő levezetések csak azokban az esetekben érvényesek, amikor a feszültségi és alakváltozási állapot fő tengelyei egymással egybeesnek (14.4. ábra). Ha az egységkocka egyes oldalainak bekövetkezett hosszúságváltozása a kocka tengelyeinek irányában  $\Delta$ , és ennek a hosszúságváltozásnak a növekedése  $d\Delta$ , akkor a fajlagos nyúlás növekedése valamelyik tengely irányában:

$$d\varepsilon = \frac{d\Delta}{1 + \Delta}, \quad (14.22)$$



14.4. ábra. Egy elemi test nagy képlékeny alakváltozása a főnyúlásokkal ábrázolva

és így általában a fajlagos nyúlás

$$\varepsilon = \int \frac{d\Delta}{1 + \Delta} = \ln(1 + \Delta), \quad (14.23)$$

illetve az egyes főirányokban:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \ln(1 + \Delta_1), \\ \varepsilon_2 &= \ln(1 + \Delta_2), \\ \varepsilon_3 &= \ln(1 + \Delta_3). \end{aligned} \right\} \quad (14.24)$$

Mint hogy a térfogat sem változik, írható:

$$V = (1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)(1 + \Delta_3) = 1, \quad (14.25)$$

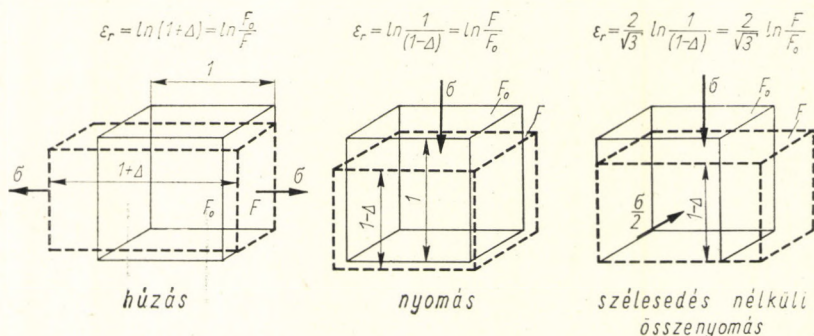
amiből következik, hogy

$$\ln(1 + \Delta_1) + \ln(1 + \Delta_2) + \ln(1 + \Delta_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (14.26)$$

A főnyúlások összege nagy képlékeny alakváltozások esetében is zérussal egyenlő.

A mindenkor alakított keresztmetszetekre vonatkoztatott főfeszültségek:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_1}{(1 + \Delta_2)(1 + \Delta_3)} (=) P_1(1 + \Delta_1), \\ \sigma_2 &= \frac{P_2}{(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_3)} (=) P_2(1 + \Delta_2), \\ \sigma_3 &= \frac{P_3}{(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)} (=) P_3(1 + \Delta_3). \end{aligned} \right\} \quad (14.27)$$



14.5. ábra. Redukált feszültség és redukált nyúlás egytengelyű nyomás és szélesedésmentes összenyomás esetén



$P_1, P_2, P_3$  itt az eredeti egységkocka oldalain a főirányokban működő főerőket jelenti.

A redukált nyúlások a képlékeny alakváltozások különböző eseteiben (14.5. ábra):  
tisztá húzásnál

$$\varepsilon_r = \ln(1 + \Delta) = \ln \frac{F_0}{F},$$

tiszta összenyomásnál

$$\varepsilon_r = \ln \left( \frac{1}{1 - \Delta} \right) = \ln \frac{F}{F_0},$$

szélesedésmentes húzásnál

$$\varepsilon_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln(1 + \Delta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{F_0}{F},$$

szélesedésmentes nyomásnál

$$\varepsilon_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left( \frac{1}{1 - \Delta} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{F}{F_0}.$$

(14.28)

Ha a főirányok ismeretlenek, akkor ezek a nyúlások csak igen körülményes úton,  $\Delta_x, \Delta_y$  és a  $\varphi$  csúszási szög segítségével határozhatók meg.

## 15. A SÍKPROBLÉMA

Mindaz, amit az alábbiakban elmondunk, csak nagyon kis alakváltozásokra érvényes, vagyis akkor, amikor a maradó alakváltozások és a rugalmas alakváltozások nagyságrendje azonos. Ez megfelel annak az állapotnak, amelyben az anyag alakváltozása éppen megindul [15.1; 15.2].

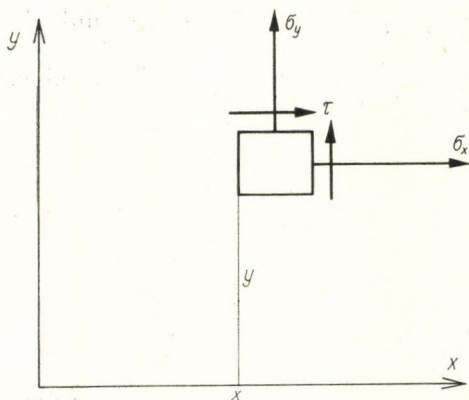
Síkproblémával van dolgunk, ha az összes feszültségek és nyúlások csak két koordinátától ( $x$ -től és  $y$ -től) függenek. Két esetet különböztetünk meg (15.1 ábra):

1. Az elsőfajta síkprobléma. Ilyenkor az  $xy$  síkra merőlegesen fellépő főalakváltozás vagy állandó:  $\varepsilon_z = \text{konst}$ , vagy zérussal egyenlő:  $\varepsilon_z = 0$ . Ebben az esetben a testnek  $z$  irányban igen kiterjedtnek kell lennie. (Ez a síkbeli alakváltozási probléma.)

2. A másodikfajta síkprobléma esetében az  $xy$  síkra merőleges főfeszültség zérus:  $\sigma_z = 0$ . (Ez a síkbeli feszültségi állapot problémája.)

ad 1. Egy síkbeli alakváltozási állapotban (feltételezve, hogy a test mind az  $x$ , mind az  $y$  irányban nagyon kiterjedt), amikor  $\varepsilon_z = 0$ , akkor az ismert összefüggések alapján írható:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{D} \left[ \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right] = 0, \quad (15.1)$$



15.1. ábra

és így

$$\sigma_3 = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (15.2)$$

Síkbeli feszültségi állapot esetén a főfeszültségeket a Mohr-féle kör segítségével is felírhatjuk (9.5. ábra):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{\max}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{\max}, \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

ahol

$$\tau_{\max}^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2. \quad (15.4)$$

Az alakváltozási munka hipotézise szerint a folyás feltétele [(13.4) egyenlet]:

$$2 k_f^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2, \quad (15.5)$$

$k_f$  az alakítási szilárdság (folyási határ).

Ha a (15.5) egyenletbe a főfeszültségek értékeit a (15.2), (15.3) és (15.4) egyenlet szerint behelyettesítjük, kapjuk:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{\max} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{\max} \right)^2 + \\ & + \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{\max} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \\ & + \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{\max} \right)^2 = 2k_f^2. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Ebből az egyenletből következik, hogy

$$\tau_{\max}^2 = \frac{k_f^2}{3}, \quad (15.7)$$

illetőleg

$$\tau_{\max} = \frac{k_f}{\sqrt{3}}. \quad (15.8)$$

A (15.4) egyenlet a következőképpen fejezhető ki:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \frac{4k_f^2}{3}. \quad (15.9)$$

A Mohr-féle körből látható (9.3. ábra), hogy

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y, \quad (15.10)$$

és a (15.4) egyenlet szerint

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2, \quad (15.11)$$

így a (15.9) egyenlet fejezi ki a folyási feltételt a kéttengelyű feszültségi állapotban. A (15.8) egyenletbe O. MOHR és H. TRESCA feltevését [(9.14) egyenlet] behelyettesítve:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} k_f = 1,15 k_f, \quad (15.12)$$

ahogy az az alakváltozási munka hipotéziséből adódik.

ad 2. A síkbeli feszültségi állapotban a második főfeszültség  $\sigma_2 = \sigma_z = 0$ . A Huber-Hencky-Mises-féle folyási feltétel [(13.4) egyenlet], ha a főfeszültségekkel fejezzük ki, a következő alakot veszi fel:

$$k_f = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1)^2 + (-\sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (15.13)$$

A műveletek elvégzése után:

$$k_f = \sqrt{\frac{1}{2} [\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_1^2]}. \quad (15.14)$$

Rendezve az egyenletet:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 = k_f^2. \quad (15.15)$$

A (15.15) egyenletben főfeszültségek szerepelnek. A síkbeli feszültségi állapot (15.15) alapegyenletét tetszőleges irányú síkon működő  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  és  $\tau$  feszültségekkel is kifejezhetjük. Ennek érdekében a (9.13) egyenletet a (15.15) egyenletbe behelyettesítjük:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} \right]^2 - \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} \right] \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} \right] + \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} \right]^2 = k_f^2. \end{aligned} \quad (15.16)$$

A műveleteket elvégezve:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{2}{4} (\sigma_x + \sigma_y) \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} + \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2 - \\ & - \frac{1}{4} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2 + \frac{1}{4} (\sigma_x + \sigma_y)^2 - \\ & - \frac{2}{4} (\sigma_x + \sigma_y) \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} + \frac{1}{4} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + \tau^2 = k_f^2. \end{aligned} \quad (15.17)$$

$$\frac{3}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{4} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + 3 \tau^2 = k_f^2, \quad (15.18)$$

$$\frac{3}{4} \sigma_x^2 - 2 \frac{3}{4} \sigma_x \sigma_y + \frac{3}{4} \sigma_y^2 + \frac{1}{4} \sigma_x^2 + \frac{2}{4} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{4} \sigma_y^2 + 3 \tau^2 = k_f^2. \quad (15.19)$$

Rendezés után:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau^2 = k_f^2. \quad (15.20)$$

A (15.15) egyenlet egy ellipszis egyenlete, amelynek félátmérői  $\sqrt{2} k_f$  és  $\sqrt{\frac{2}{3}} k_f$  (15.2. ábra).

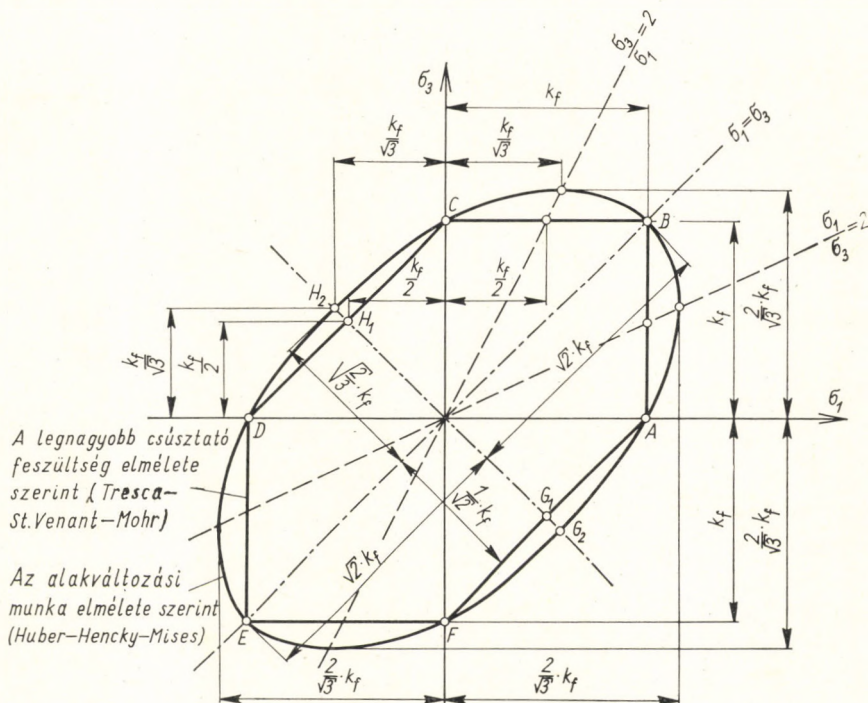
A síkbeli feszültségi állapotban a három feszültségi komponens  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  és  $\tau$  kifejezhető a főfeszültségekkel [(9.8) és (9.9) egyenlet]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Itt  $\alpha$  az a szög, amelyet  $\sigma_1$  az  $x$  tengellyel bezár, feltéve, hogy  $\sigma_1 > \sigma_3$  (9.2. ábra). A legnagyobb csúsztatófeszültség [(9.15) egyenlet]:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (15.22)$$

Egy képlékenyen alakítható ideálisan merev-képlékeny anyagban (6.7. ábra), amelyben a feszültségek a folyási határt elérték, a (13.1) egyenlet



15.2. ábra. A Huber-Hencky-Mises-féle folyási feltétel (ellipszis) és a Tresca-St. Venant-féle folyási feltétel (hatszög)

szerint a

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (15.23)$$

összefüggésnek állandónak kell lennie. Minthogy a (9.10) egyenlet szerint a főfeszültségek közepes értéke

$$\sigma_k = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad (15.24)$$

a (15.21) egyenletrendszer a következőképpen lehet felírni:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_k + \tau_{\max} \cos 2\alpha, \\ \sigma_y &= \sigma_k - \tau_{\max} \cos 2\alpha, \\ \tau &= \tau_{\max} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (15.25)$$

A sík bármely tetszőszerinti  $P$  pontjában két olyan főirány van, amelyben a csúsztatófeszültségek a legnagyobb értéküket ( $\pm \tau_{\max}$ ) veszik fel. A csúsztatófeszültségek főirányai  $45^\circ$ -os szöget zárnak be a  $\sigma_1$  és a  $\sigma_3$  főfeszültség irányával (15.3. ábra). Ha a (15.25) egyenletrendszerbe  $\alpha$  helyett

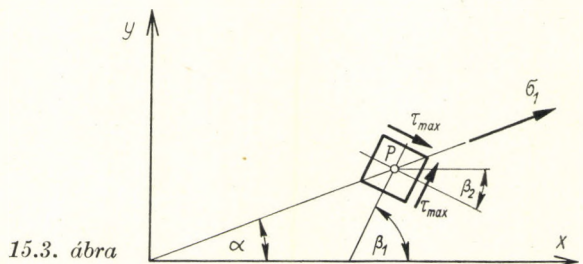
$$\beta_1 = \alpha + 45^\circ \quad (15.26)$$

vagy

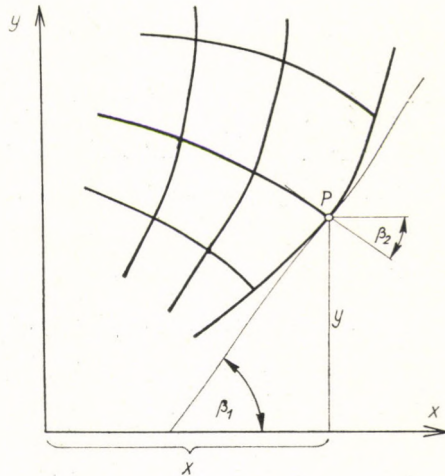
$$\beta_2 = \alpha - 45^\circ \quad (15.27)$$

van behelyettesítve, akkor a következő egyenletrendszeret kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_k + \tau_{\max} \sin 2\beta_1, \\ \sigma_y &= \sigma_k - \tau_{\max} \sin 2\beta_1, \\ \tau &= -\tau_{\max} \cos 2\beta_1. \end{aligned} \right\} \quad (15.28)$$



15.4. ábra



Ha mindkét irányt az  $xy$  sík bármely  $P$  pontjában két görbesereg érintőjének fogjuk fel, akkor két csúszási vonalrendszert kapunk, amelyek összes ívelemei minden pontban egybeesnek a fő csúszási irányokkal, és egymást mindenütt derékszögben metszik. Ezt a görberendszert a sík feszültségi állapot csúszási vonalainak nevezzük.

Ha a csúszási vonal egyenlete  $y = f(x)$  a  $P(x, y)$  pontban, amelynek érintője az  $x$  tengellyel  $\beta_1$ , illetve  $\beta_2$  szöget zár be, akkor a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta_1 \quad (15.29)$$

differenciálegyenlet érvényes az első és a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \beta_1 \right) = -\operatorname{ctg} \beta_1 \quad (15.30)$$

differenciálegyenlet a második csúszóvonalrendszerre (15.4. ábra). A (15.29) egyenlet jobb oldalán levő  $\beta_1$  szög adott feszültségállapotnál

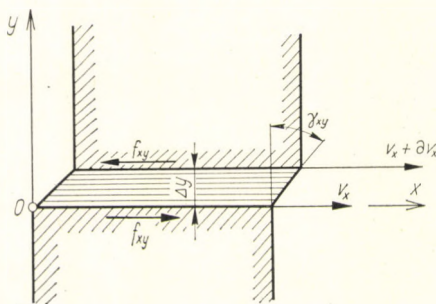
$$\operatorname{tg} 2\beta_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \quad (15.31)$$

egyenlet segítségével kiszámítható.

Itt  $\beta$ -t az  $x$  és az  $y$  függvényének kell tekinteni.

## 16. VISZKÓZUS TÖMEGEK (SZÍVÓS TESTEK)

Nemcsak a folyadékokban és gázokban, hanem a viszkózus tömegek belsejében is fellép belső súrlódás. A belső súrlódásra vonatkozó tétel



16.1. ábra. Belső súrlódás

általánosan a következőképpen szól (16.1. ábra):

$$f_{xy} = \eta s \frac{\Delta v_x}{\Delta y}. \quad (16.1)$$

Ebben az egyenletben  $\eta$  a belső súrlódás tényezője, a két szomszédos réteg  $s$  nagyságú felület mentén érintkeznek,  $\Delta v_x$  a sebességváltozás  $y$  irányban az  $s$  felületre merőlegesen,  $f_{xy}$  az az erő, amely egyik réteg sebességét növeli, a másik réteg sebességét pedig visszatartja,  $x$  és  $y$  a derékszögű koordináták. A viszkózus anyagoknál  $f_{xy} = \tau_{xy}$  a csúsztatófeszültség, ha  $s = 1 \text{ cm}^2$ . Ha a sebességváltozás két egymástól végtelen kicsi  $\Delta y$  távolságra levő réteg között  $\partial v_x$ , akkor a belső súrlódásra vonatkozó tétel viszkózus anyagok esetén:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{x}{t} = \eta \frac{\gamma_{xy}}{t}, \quad (16.2)$$

minthogy

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial x}{\partial y}. \quad (16.3)$$

Az  $\eta$  itt is a belső súrlódás tényezőjét jelenti,  $\tau_{xy}$  a csúsztatófeszültség,  $\gamma_{xy}$  a csúszás,  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$  az ún. nyírási lépcső,  $\frac{\gamma_{xy}}{t}$  a csúszási sebeség,  $t$  az idő.

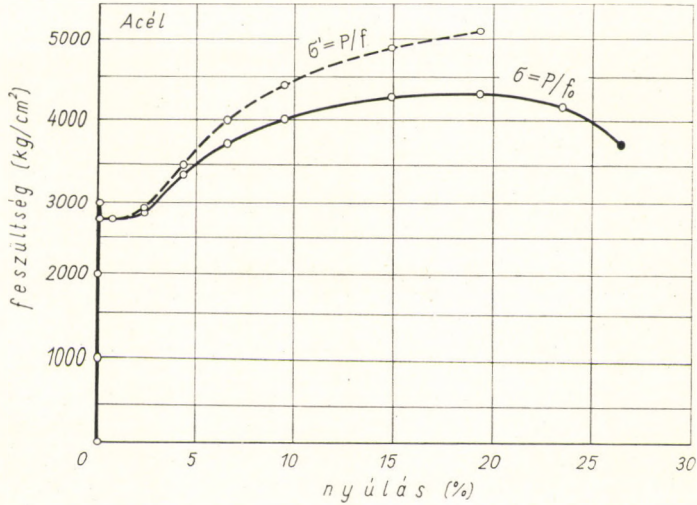
## 17. EGYSZERŰ ALAKVÁLTOZÁSOK

### a) Húzással maradón alakított rúd

Ha egy prizmatikus vagy hengeres fém próbadarabot, amelynek anyaga alakítható, szakítógéppben húzásra terhelünk, és az  $l_0$  hosszúságú terheletlen rúd  $\Delta l$  meghosszabbodásait egy koordináta-rendszerben mint abszcisszát, a  $P$  terheléseket mint ordinátát felrakjuk, akkor olyan görbét kapunk, amilyent a 17.1. és 17.2. ábrán látunk. Hogy ezeket a görbéket a próba-



17.1. ábra. Húzóki-  
sérlet acéllal



darab méreteitől függetlenül, az abszcisszára a fajlagos nyúlást:

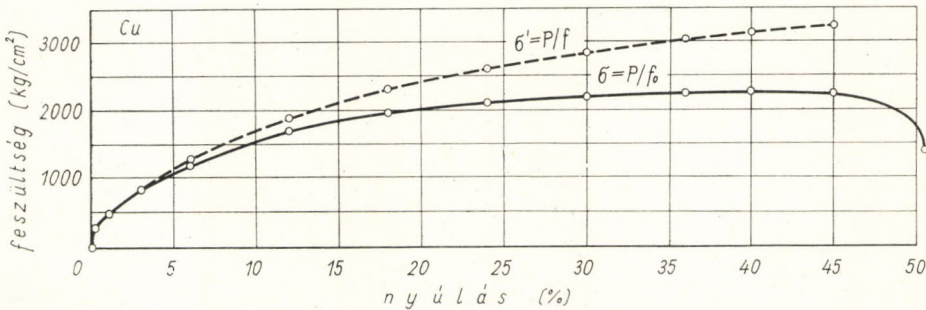
$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (17.1)$$

az ordinátára pedig az eredeti  $f_0$  keresztmetszetre vonatkoztatott fajlagos feszültséget

$$\sigma = \frac{P}{f_0} \quad (17.2)$$

rakjuk fel.

Ha a fajlagos feszültséget a rúd mindenkor legkisebb keresztmetszetére vonatkoztatjuk, akkor az ún. valódi feszültség-fajlagos nyúlás diagramját



17.2. ábra. Húzóki-  
sérlet rézzel

kapjuk (17.3. ábra). A valódi feszültség:

$$\sigma' = \frac{P}{f}. \quad (17.3)$$

Mint hogy az igen kicsi rugalmas térfogatváltozások elhanyagolhatók:

$$fl = f_0 l_0, \text{ és a (17.1) egyenlet alapján írható: } l/l_0 = 1 + \varepsilon.$$

A mindenkori legkisebb keresztmetszet:

$$f = \frac{f_0 l_0}{l} = \frac{f_0}{1 + \varepsilon}, \quad (17.4)$$

és így a valódi feszültség:

$$\sigma' = \frac{(1 + \varepsilon)P}{f_0} = (1 + \varepsilon)\sigma. \quad (17.5)$$

Ilyen módon egy konvencionális húzódiagramból  $\left(\sigma = \frac{P}{f_0}\right)$  a valódi feszültség-fajlagos nyúlás diagramot mint  $\varepsilon$  függvényét a következőképpen kapjuk meg:

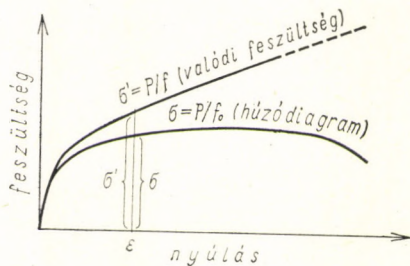
$$\sigma' = F(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)\sigma. \quad (17.6)$$

Egy ismert  $\sigma' = F(\varepsilon)$  alakváltozási görbéből a  $P$  változását  $\varepsilon$  függvényében a

$$P = \frac{f_0 \sigma'}{1 + \varepsilon} = \frac{f_0 F(\varepsilon)}{1 + \varepsilon} \quad (17.7)$$

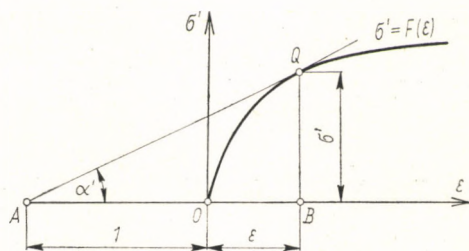
függvény adja meg. Ebből következik, hogy a legnagyobb húzóerő ( $P_{\max}$ ) fellépésének pillanatában

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{f_0}{(1 + \varepsilon)^2} \left[ (1 + \varepsilon) \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} - \sigma' \right] = 0, \quad (17.8)$$



17.3. ábra. Konvencionális és valódi húzódiagramok

17.4. ábra. Az egyenletes nyúlás határa a valódi feszültség görbéjén, РЕЖТŐ szerint



amiből

$$\frac{d\sigma'}{d\varepsilon} = \frac{\sigma'}{1 + \varepsilon}. \quad (17.9)$$

Ha az eredeti  $f_0$  keresztmetszetre vonatkoztatott  $\sigma$  feszültséget és a valódi  $\sigma'$  feszültséget mint az  $\varepsilon$  fajlagos nyúlás függvényét, egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor a 17.3. ábrát kapjuk. A 17.4. ábrán a valódi feszültség görbéjén a legnagyobb  $P_{\max}$  húzóerőnek megfelelő  $\sigma'$  feszültséget, amelyet a  $Q$  pont ad meg, a következőképpen határozhatjuk meg: az  $O$  kezdőponttól balra az egységnyi távolságot rakjuk fel, amelynek a határolópontjai az  $O$  és  $A$  pont. Az  $A$  pontból érintőt húzunk a  $\sigma' = F(\varepsilon)$  görbéhez.  $Q$  az érintési pont. A  $QB$  ordináta adja meg azt a valódi feszültséget, amelynél a kontrakció megindul [lásd a (17.8) és a (17.9) egyenletet]:

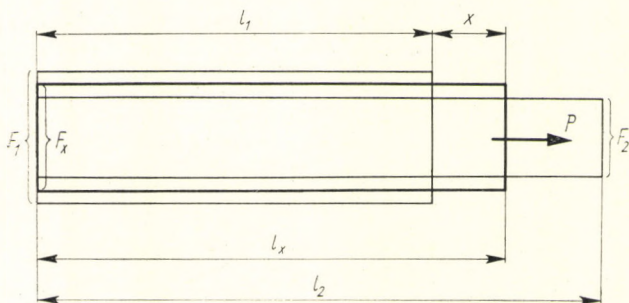
$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{QB}{AB} = \frac{\sigma'}{1 + \varepsilon} = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon}. \quad (17.10)$$

Ha egy rudat, amelynek anyaga ideálisan rugalmas-képlékeny, húzással  $l_0$  hosszúságúról  $l_1$  hosszúságúra alakítunk, akkor az alakítási munkát a következőképpen számíthatjuk ki (17.5. ábra). Az alakítási munka két részből tevődik össze: a rugalmas alakítási munkából, amely ahhoz szükséges, hogy a terheletlen rúd anyaga egész a folyási határig terhelve legyen, és a képlékeny alakítási munkából:

$$A = \frac{\sigma_f^2}{2E} V + \int_0^{l_1 - l_0} F_x \sigma_f dx = \frac{\sigma_f^2}{2E} V + \sigma_f V \ln \frac{l_1}{l_0}. \quad (17.11)$$

itt

$$F_x = \frac{V}{l_0 + x}. \quad (17.12)$$



17.5. ábra. Húzott rúd méretei

b) Nyomással maradón alakított rúd

Egy ideális nyomókísérletnél, ahol csak egytengelyű feszültségi állapot lép fel, illetve ahol az oldalirányú kiterjedés akadálytalan, ott, amennyiben a rúd hengeres, a térfogatállandóság következtében:

$$\pi r^2 h = \pi r_1^2 h_1, \quad (17.13)$$

e képletben  $r$  a henger rádiusza,  $h$  a henger magassága,  $r_1$  és  $h_1$  a kiinduló méretek.

A (17.13) egyenletből

$$h = \frac{r_1^2 h_1}{r^2}. \quad (17.14)$$

A fajlagos megrövidülés  $h$  irányában:

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h}{h_1}, \quad (17.15)$$

a fajlagos rádiusznövekedés:

$$\varepsilon_r = \frac{r - r_1}{r_1}. \quad (17.16)$$

A (17.15) és a (17.16) egyenletből következik, hogy

$$r = (1 + \varepsilon_r) r_1 \quad (17.17)$$

és

$$h = (1 - \varepsilon) h_1 = \frac{h_1}{1 + \varepsilon}. \quad (17.18)$$

A (17.14), a (17.17) és a (17.18) egyenlet alapján felírható:

$$h = \frac{r_1^2 h_1}{r^2} = \frac{r_1^2 h_1}{(1 + \varepsilon_r)^2 r_1^2} = \frac{h_1}{1 + \varepsilon}, \quad (17.19)$$

és ebből

$$\varepsilon = (1 + \varepsilon_r)^2 - 1 = (2 + \varepsilon_r) \varepsilon_r. \quad (17.20)$$

A mindenkori keresztmetszetre vonatkoztatott  $\sigma'$  nyomófeszültség a fajlagos megrövidülésnek,  $\varepsilon$ -nak a függvénye (lásd a folyási görbét), tehát

$$\sigma' = f(\varepsilon). \quad (17.21)$$

Ezt a függvényt E. SIEBEL és A. POMP szerint kúpos nyomólapokkal végzett nyomókísérlet útján lehet kísérletileg meghatározni.

Egy  $h_1$  magas henger  $h$  magasságra való egyenletes összenyomásához szükséges munka:

$$A = \pi \int_h^{h_1} r^2 \sigma' dh = \pi r_1^2 h_1 \int_h^{h_1} \sigma' \frac{dh}{h} = V \int_h^{h_1} \sigma' \frac{dh}{h}. \quad (17.22)$$

Mint hogy  $h = \frac{h_1}{1 + \varepsilon}$ , következésképpen

$$\frac{dh}{h} = - \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad (17.23)$$

és a (17.22) egyenlet így is felírható:

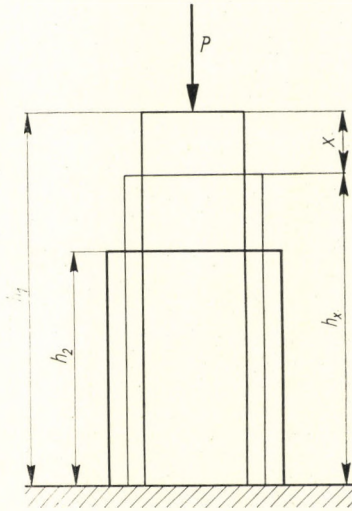
$$A = V \int_0^\varepsilon \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (17.24)$$

A lágyszénacélok, a réz, az alumínium húzási kísérlettel felvett alakváltozási görbéje  $F(\varepsilon)$  és nyomókísérlettel felvett alakváltozási görbéje  $f(\varepsilon)$  kevéssé tér el egymástól.

Ha a rudat, amelynek anyaga ideálisan rugalmas-képlékeny, az egytengelyű feszültségi állapotot megtartva alakítjuk, akkor az alakítási munka két részből tevődik össze: a folyási határig a rugalmas alakváltozásból, a folyási határon túl a tisztán képlékeny alakváltozásból (17.6. ábra):

$$A = \frac{\sigma_f^2 V}{2E} + \sigma_f V \ln \frac{h_1}{h_2}. \quad (17.25)$$

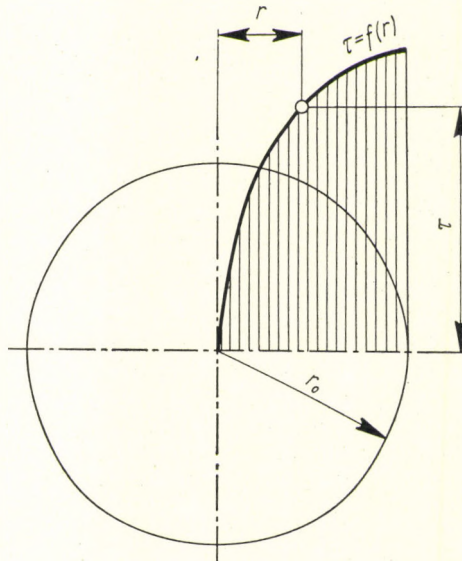
17.6. ábra. Nyomott rúd méretei



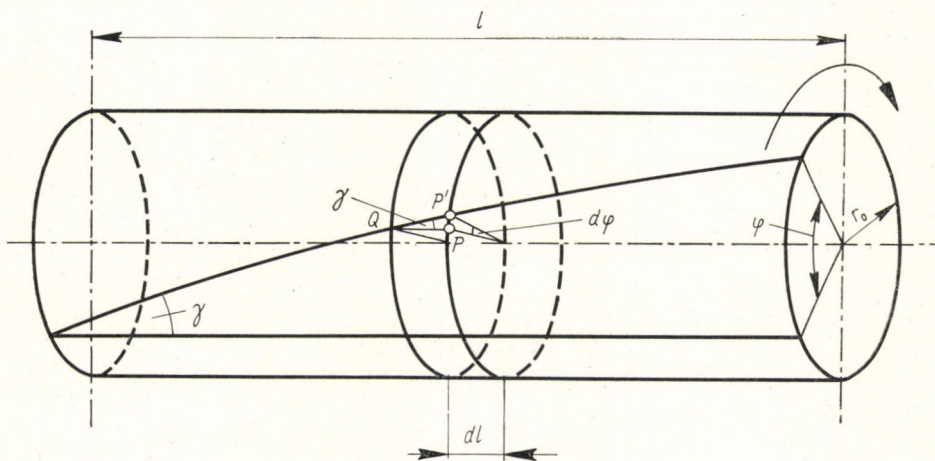
c) Csavarással maradón alakított hengeres rúd

Egy hengeres rúdban, amelyet két erőpár a tengelye körül megcsavar, a feszültségi állapotot a folyási határ túllépése után az alábbi alakváltozási törvény szerint adhatjuk meg.

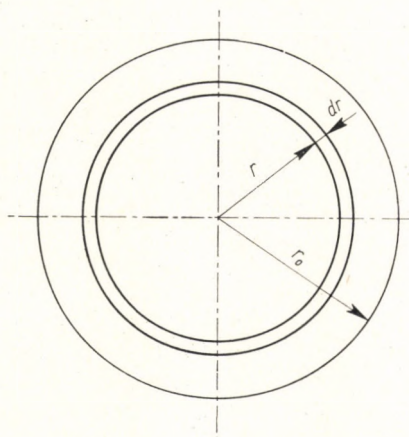
Legyen valamely keresztmetszetben  $\tau$  a csúsztatófeszültség  $r$  távolságban a rúd tengelyétől, és  $r_0$  a rúd félátmérője (17.7. ábra). Két, egymástól  $l$  távolságban levő keresztmetszet  $\varphi$  szöggel fordul el egymáshoz képest,



17.7. ábra. A csúsztatófeszültség változása a csavart körszelvényű rúd keresztmetszetében



17.8. ábra. Körszelvényű rúd csavarása



17.9. ábra

amely  $\varphi$  szög arányos az  $l$  távolsággal:

$$\varphi = \vartheta l. \quad (17.26)$$

Itt  $\vartheta$  a rúd fajlagos elfordulási szöge. Csavarásnál két szomszédos, egymástól  $dl$  távolságban levő keresztmetszet (17.8. ábra) egymáshoz képest oly módon mozdul el, hogy a rúd felületén levő  $P$  pont a  $P'$  helyre kerül. Ennél az elcsúszásnál a felületelem  $QP$  oldala  $\gamma$  szöggel fordul el a rúd alkotójához képest. Ezért írható:

$$r d\varphi = \gamma dl = PP', \quad (17.27)$$

amiből

$$r \frac{d\varphi}{dl} = \gamma, \quad (17.27a)$$

ahol  $\gamma$  a fajlagos csúszás és  $\frac{d\varphi}{dl} = \vartheta$  a fajlagos elfordulási szög. A  $\tau$  csúszási feszültség a  $\gamma$  fajlagos csúszás függvénye:  $\tau = f(\gamma)$ . A  $\tau = f(\gamma)$  függvényt a tiszta csúszás alakváltozási görbéjének nevezzük.

Ha az anyag  $\tau = f(\gamma)$  alakváltozási törvénye ismeretes, akkor egy csavarókísérletnél az  $M$  nyomatékváltozás tényleges lefolyását a fajlagos elfordulási szög függvényében  $M = f(\vartheta)$  meg lehet adni. Az elemi nyomaték (17.9. ábra):

$$dM = \underbrace{2r\pi dr}_{\text{erő}} \underbrace{\tau}_{\text{kar}} = 2\pi r^2 \tau dr. \quad (17.28)$$

A (17.28) egyenletből a teljes nyomaték:

$$M = 2\pi \int_0^{r=r_0} r^2 \tau dr. \quad (17.29)$$

Minthogy a fajlagos csúszás  $\gamma$  adott [(17.27a) egyenlet]:

$$\gamma = r \left( \frac{d\varphi}{dl} \right) = r \vartheta, \quad (17.30)$$

az integrálban  $r$  helyett is a  $\gamma$ -t vezethetjük be,

$$\left. \begin{aligned} r\vartheta &= \gamma; & r &= \frac{\gamma}{\vartheta}; \\ \vartheta dr &= d\gamma; & \tau &= f(\gamma); & dr &= \frac{d\gamma}{\vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (17.31)$$

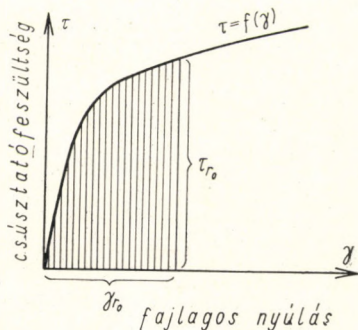
$$M = \frac{2\pi}{\vartheta^3} \int_0^{\gamma_{r_0}} f(\gamma) \gamma^2 d\gamma. \quad (17.32)$$

Az integrál felső határa  $\gamma_{r_0} = r_0 \cdot \vartheta$ . Szavakban kifejezve: egy rúd csavarásakor az adott fajlagos  $\vartheta$  csavarási szöghöz tartozó  $M$  nyomaték azonos a  $\tau = f(\gamma)$ , 0 és  $\gamma_{r_0}$  által bezárt területnek a  $\tau$  tengelyre vonatkoztatott és  $2\pi/\vartheta^3$ -nal szorzott tehetetlenségi nyomatékával.

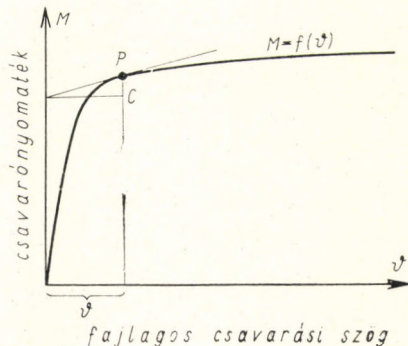
Lehetséges azonban a (17.32) egyenletet fordítva úgy is felhasználni, hogy a csavarási kísérlet lefolyásából megfigyelésekkel megállapítjuk az  $M = F(\vartheta)$  függvényt, melyből meghatározható az ismeretlen  $\tau = f(\gamma)$  függvény a csavart rúd anyagára vonatkozólag. A (17.32) egyenletet a következőképpen írhatjuk fel (17.10. ábra):

$$M \vartheta^3 = 2\pi \int_0^{\gamma_{r_0}} f(\gamma) \gamma^2 d\gamma. \quad (17.33)$$





17.10. ábra. Alakváltozási görbe, csúsztatás esetén



17.11. ábra. Nyomatéki görbe

Az egyenlet jobb oldala  $\gamma_{r_0}$  függvénye, vagy minthogy  $\gamma_{r_0} = r_0 \vartheta$  a  $\vartheta$  függvénye:

$$\frac{d}{d\vartheta} (M \vartheta^3) = 2 \pi \underbrace{f(r_0 \vartheta)}_{\tau = f(\gamma)} r_0^3 \vartheta^2 = 2 \pi r_0^3 \vartheta^2 \tau_{r_0}, \quad (17.34)$$

Amennyiben  $\tau_{r_0} = f(r_0, \vartheta)$  és  $r = r_0$ , írható:

$$\begin{aligned} \gamma_{r_0}^2 &= r_0^2 \vartheta^2, \\ r_0^3 \vartheta^2 &= \frac{r_0^2 \vartheta^2}{\gamma_{r_0}^2} r_0, \\ r_0 &= \frac{d\gamma_{r_0}}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} (r_0 \vartheta) = r_0 \frac{d\vartheta}{d\vartheta} = r_0, \\ \frac{d\gamma_{r_0}}{d\vartheta} &= r_0, \end{aligned} \quad (17.35)$$

és így a rúd felületén fellépő csúsztatófeszültség (17.11. ábra):

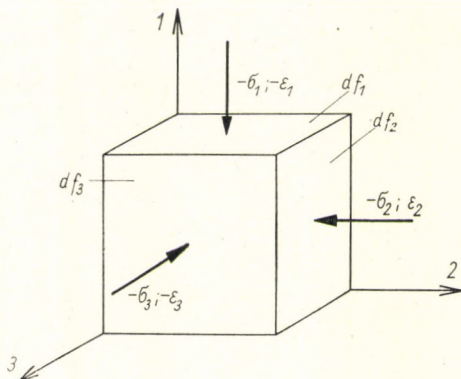
$$\tau_{r_0} = \frac{1}{2 \pi r_0^3 \vartheta^2} \frac{d}{d\vartheta} (M \vartheta^3) = \frac{1}{2 \pi r_0^3} \left( \vartheta \frac{dM}{d\vartheta} + 3 M \right). \quad (17.36)$$

## 18. AZ ALAKVÁLTOZÁST LÉTREHOZÓ KÜLSŐ MUNKA

Alakításkor az alakítási munka egyenlő a külső (alakító) erők munkájával.

Ha a testre ható erő (feszültség) vektorának előjele az alakváltozás folyamán megegyezik a támadófelület elmozdulásának előjelével, akkor

18.1. ábra. Az alakváltozást létrehozó külső erők munkája



külső alakító erővel, ha pedig a támadófelület elmozdulásának előjele ellenkezik a reá ható erő vektorának előjelével, akkor reakcióerővel állunk szemben. Az alakítási munka meghatározásakor csak a külső erők munkáját szabad figyelembe venni, mert hiszen a reakcióerők ellen irányuló munkát is a külső erők végzik. Eszerint háromtengelyű feszültség esetén az elemi alakítási munkát úgy kapjuk meg, hogy az elemi hasáb oldallapjaira ható külső erők munkáját összegezzük.

Terhelje az alakítás alatt álló elemi hasáb  $df_1$ ,  $df_2$  és  $df_3$  oldallapjait (18.1. ábra)  $-\sigma_1$ ,  $-\sigma_2$  és  $-\sigma_3$  feszültség, és az egyes oldallapok elmozdulása legyen  $-\varepsilon_1$ ,  $+\varepsilon_2$ ,  $-\varepsilon_3$ . Ebben az esetben az elemi munka:

$$dL = \sigma_1 df_1 \varepsilon_1 - \sigma_2 df_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 df_3 \varepsilon_3 = \sigma_1 df \varepsilon_1 + \sigma_3 df_3 \varepsilon_3. \quad (18.1)$$

A második tag  $\sigma_2 df_2 \varepsilon_2$  által kifejezett munka bennefoglaltatik az első és harmadik tag munkájában, tehát nem szabad figyelembe venni.

## 19. AZ ALAKVÁLTOZÁS SEBESSÉGE

Az alakváltozás nagyságát a fajlagos alakváltozás méri (19.1. ábra). Egy elemi prizma összenyomásakor a fajlagos alakváltozás:

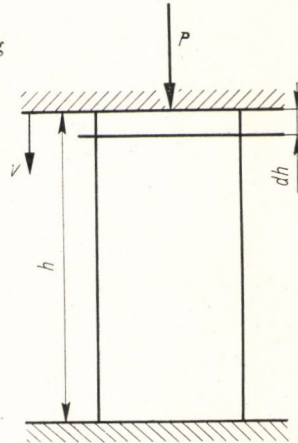
$$d\varepsilon = \frac{dh}{h}. \quad (19.1)$$

Az összenyomás alakváltozási sebességét a fajlagos alakváltozásnak és az alakítás időtartamának hányadosa adja meg:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dh}{dt} \frac{1}{h} = \frac{v}{h}. \quad (19.2)$$

Ha tehát egy prizma alakú test  $P$  erő hatására  $dt$  idő alatt  $dh$  hosszúsággal megnyúlik vagy megrövidül, akkor az erő hatását felvevő nyomólap

19.1. ábra. Az alakváltozási, illetve alakítási sebesség meghatározása



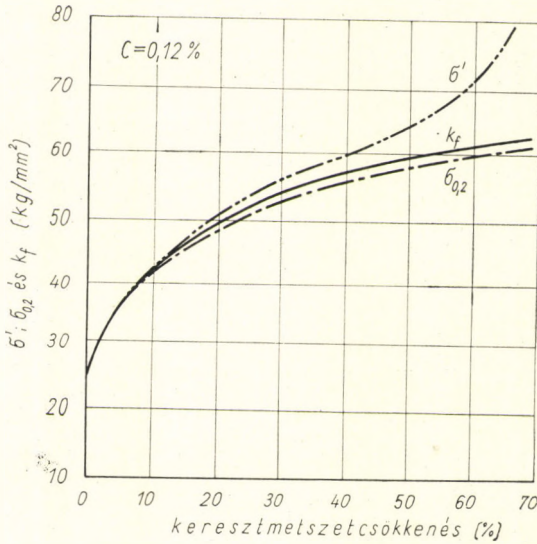
$\frac{dh}{dt} = v$  sebességgel mozdul el. Mondhatjuk úgy is, hogy a két egymástól  $h$  távolságban működő nyomólap  $v$  sebességgel közeledik egymáshoz vagy távolodik egymástól.

## 20. AZ ALAKÍTÁSI SZILÁRDSÁG

Valamely fém alakítási szilárdságán ( $k_f$ ) a fém egytengelyű feszültségi állapotában fellépő folyási határt értjük. Az alakítási szilárdság anyagtulajdonság, amely függ az anyag előzetes megmunkálásától (alakváltozásától), hőmérsékletétől és az alakítási sebességtől. Hidegalakításnál az alakítási szilárdság a bekövetkezett alakváltozás mértékének megfelelően növekedik, vagyis az anyag keményedik. Melegalakításnál bonyolultabb a helyzet, mert az érzékelhető alakítási szilárdság a keményedés és az egyidejű lágyulás folyamatának eredményeképpen lép fel, és így függ az alakítás sebességétől.

Hidegalakításkor a  $k_f$  nagysága szakítókéssel állapítható meg; ennél a kísérletnél a kontrakció fellépéséig egytengelyű feszültségi állapot van, és az alakváltozáson belül a folyási határ közvetlenül mérhető. Ha a kontrakció megkezdődik, és a próbapálcát terhelését folyamatosan megszüntetjük, a próbapálcát ismét hengeresre esztergályozzuk, majd ismét húzásnak vetjük alá, mindaddig míg kontrakció nem kezdődik s i. t., akkor egy fémre folyamatosan megszerkeszthetjük a folyási határ—alakváltozás görbét.

A  $k_f$ — $q$  görbe  $\left( \text{keresztmetszetcsökkenés: } q = \frac{f_1 - f_2}{f_1} 100\% \right)$  a hidegalakításra egyszerűbben is megállapítható. Kísérleti eredmények azt mutatják, hogy hidegalakításnál a  $k_f$ — $q$  görbe a kéttizedes folyási határ—keresztmetszetcsökkenés ( $\sigma_{0,2} - q$ ) görbéjével igen jó megközelítéssel helyettesíthető (20.1. ábra).



20.1. ábra. 0,12 C acél folyási görbéi

A fentiekből tehát következik, hogy gyakorlati számításokhoz a  $k_f$  alakítási szilárdság a kéttizedes folyási határral  $\sigma_{0,2}$ -val azonosnak vehető.

Hidegalakításkor az alakítási sebesség befolyása az alakítási szilárdság nagyságára csekély. Nem is igen szokás ezt figyelembe venni. Ellenben melegalakításkor a sebességnek nagy befolyása van az alakítási szilárdságra. Ezt a körülményt sok kutató vizsgálta A. NÁDAI és M. I. MANJOINE [20.1], I. F. ALDER és V. A. PHILLIPS [20.2], K. FINK, W. LUEG és G. BÜRGER [20.3], és azt találták, hogy valamely alakítási folyamat alatt az alakítási szilárdság:

$$k_f = k_{f_0} \left( \frac{d\varepsilon}{di} \right)^n = k_{f_0} \dot{\varepsilon}^n. \quad (20.1)$$

Ebben az egyenletben  $k_{f_0}$  az alkított fém alakítási szilárdsága, ha az alakítási sebesség  $\left( \frac{d\varepsilon}{di} = 1 \text{ s}^{-1} \right)$ ;  $n$  olyan együttható, amely függ az alkított test hőmérsékletétől (alakítási hőmérséklet) és az alakítás mértékétől. A (20.1) egyenlet összenyomáskor felírható a következő formában is [(19.2) egyenlet]:

$$k_f = k_{f_0} \left( \frac{v}{h} \right)^n. \quad (20.2)$$

Itt  $h$  az alakított prizma magassága,  $v$  a nyomólap sebessége; az  $n$  együttható az alakítási hőmérséklet és az alakítás mértékének függvénye. — Különböző anyagok melegszilárdsága és  $\sigma_{0,2} - q$  görbéje az irodalomban megtalálható és a számításokhoz felhasználható [20.5].

## 21. A SÚRLÓDÁS ÉS A SÚRLÓDÁSI TÉNYEZŐ

A fémek alakításakor az alakított anyag és az alakító szerszám érintkező felülete között súrlódás lép fel. A súrlódás rontja az alakítási munka hatásfokát. Ezenfelül a súrlódási munka átalakulása meleggé az alakított anyagra nem kívánatos módon is hathat. Magától értetődő tehát, hogy a különböző alakítóműveletek folyamán a súrlódást kenőanyagokkal igyekezünk csökkenteni.

Háromféle száraz súrlódási állapotot különböztetünk meg, éspedig: tapadó, csúszó és gördülő súrlódást, aszerint, hogy az egymással érintkező két test egymáson nyugszik (tapad), csúszik vagy gördül; eközben súrlódási ellenállás lép fel az egymáson mozgó felületeken mindig jelenlevő kisebb-nagyobb egyenetlenségek következtében. Ilyen egyenetlenségek még köszörlült és polírozott felületeken is vannak, és csak megnagyítva lehet őket látni. Amikor a testek egymáson csúsznak, ezek az egyenetlenségek vagy rugalmasan, vagy képlékenyen deformálódnak, megkeményednek vagy leszakadnak, miközben az egyik testet a másik egyenetlenségei felett át kell emelni. Ezenkívül a két test felületén működő molekuláris vonzóerőket is le kell győzni.

A tapadási súrlódási ellenállás:  $R = \mu_0 N$ , amely csak az  $N$  normális erőttől függ, és független az érintkező felületek nagyságától;  $\mu_0$  a tapadási súrlódás tényezője és csak az érintkező felületek minőségétől és természetétől függ. A csúszó súrlódási ellenállást  $R' = \mu N$  kifejezéssel, a gördülő súrlódási ellenállást  $R'' = \mu' \frac{N}{r}$  kifejezéssel szokás megadni;  $r$  itt a gördülő

henger, görgő vagy tengely rádiusza.

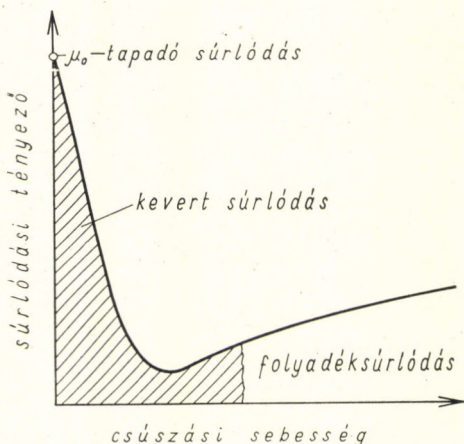
Ezek az összefüggések természetesen csak közelítések, minthogy egy ilyen sokrétű jelenséget, mint a súrlódás, alig lehet pontosan leírni, de semmi esetre sem ilyen egyszerű összefüggésekkel. A  $\mu$  súrlódási tényező például változik az egymáson csúszó felületek viszonylagos sebessége szerint.

A száraz súrlódásnál fellépő súrlódási tényező megállapítására igen beható kísérletek folytak.

Minden fémtest felülete rétegekkel van határolva, amelyek összetétele, felépítése a környezettől és a test előállítási módjától függ. Gázok vagy folyadékok bediffundálhatnak a test felületébe, és kémiai kapcsolatba léphetnek vele (oxid képződik), vagy esetleg a felület a gázt vagy a folyadékot abszorbeálja. A kutatások azt bizonyítják, hogy az ilyen felületi rétegek súrlódási tényezője egészen más, mint a súrlódó testek anyagáé. A felületi rétegek gyakran kenőanyagokként működnek. Igazi száraz súrlódás két fém között csak akkor van, ha a súrlódási kísérlet a próbáknak vákuumban való izzítása után történik. Ha két „száraz” testnek a levegő-atmoszférában való súrlódásáról beszélünk, akkor csak „technikailag száraz súrlódás”-ról van szó.

A súrlódás következtében az eredeti súrlódó felületek a legkisebb terhelés mellett is elroncsolódnak. Kis darabkák letörnek a kristályokról, és ez kopást idéz elő.

A súrlódó felületeken súrlódási oxidáció és nitrogénfelvétel léphet fel, ha a képlékeny alakítás oxigén vagy nitrogén jelenlétében történik.



21.1. ábra. A súrlódási tényező változása a súrlódó felületek relatív sebességének függvényében

A súrlódási tényező függését a csúszási sebességtől a 21.1. ábra szemlélteti. Először is a tapadó súrlódást kell legyőzni. Ha a csúszófelületek kenve vannak, akkor a mozgás megindulásával a hidrodinamikai hatások érvényesülni kezdenek; ezek többé-kevésbé csökkentik a fémes vagy látszólag fémes érintkezést a két egymáson csúszó fémfelület között. Ennek következtében a súrlódás is csökken, mert a fémes és látszólag fémes súrlódás helyett folyadéksúrlódás lép fel, amely jelentékenyen kisebb a fémes súrlódásnál. Növekedő sebességgel csökken a súrlódási tényező, majd egy minimum elérése után lassan kissé emelkedik. A minimum akkor következik be, amikor a két egymáson csúszó fémes felület elválik egymástól.

Újabb felfogás szerint a kenésnek három olyan fajtáját különböztetjük meg, amelyek a hidegalakítás szempontjából fontosak. Ezek: a hidrodinamikus kenés, a határkenés és a kevert kenés.

Ha az egymáson csúszó felületek egy olyan kenőréteggel vannak elválasztva egymástól, amely a hidrodinamika törvényei szerint viselkedik, hidrodinamikus kenésről beszélünk. A fémfelületek nem érintkeznek egymással a kopás nagyon csekély, és a súrlódási tényező kisebb 0,1-nél. Bizonyos különleges alakítási esetekben a kenőanyag hidrodinamikai viselkedésének is lehet jelentősége.

Alakítás szempontjából általában a határsúrlódás miatt szükséges kenés a fontosabb. Itt az egymáson csúszó felületeket a kenőréteg nem választja tökéletesen el, már sok helyen fémes érintkezés is van, és a kopás jelentékeny lehet. A kenőanyagréteg ebben az esetben csak néhány molekula vastagságú, és a súrlódási tényező,  $\mu_G$ , nagyobb 0,1-nél. Határkenés esetében mindenekelőtt a felületaktív kenőanyagoknak, tehát a szabad zsírsavaknak, továbbá a klórnak, arzénnek, foszfornek és kénvegyületeknek van jelentőségük. A kenőanyagok fizikai tulajdonságainak, mint pl. a viszkozitásnak, nincs számbavehető befolyásuk a súrlódási viszonyokra, mint-hogy a rétegvastagság igen kicsi. Több kísérletező azt találta, hogy a súrlódási tényező kis csúszási sebességeknél állandó marad, nagyobb sebességeknél azonban határozottan kisebbedik. A súrlódási tényezőnek

ez az esése arra mutat, hogy nagyobb sebességek mellett hidrodinamikai befolyás is érvényesül.

Kísérletek bizonyítják, hogy a szerszámfelületen fellépő súrlódás sem a hideghengerlésnél, sem a dróthúzásnál nem tiszta határsúrlódás. Amikor ezek az alakító műveletek kenés mellett folynak le, akkor a súrlódási tényező 0,01 és 0,10 között mozog, és kevert súrlódás, illetve kevert kenés van jelen. Vagyis ebben az esetben helyenként határkenés, helyenként pedig hidrodinamikusan kenés van a két egymáson csúszó réteg között. A kevert kenés súrlódási tényezőjét a következőképpen adhatjuk meg:

$$\mu_M = a\mu_G + (1 - a)\mu_H \quad (21.1)$$

Ebben a képletben  $\mu_M$  a kevert súrlódásnak,  $\mu_G$  a határsúrlódásnak és  $\mu_H$  a hidrodinamikusan súrlódásnak a súrlódási tényezője. A (21.1.) képlet szerint

$$a = \frac{\mu_M - \mu_H}{\mu_G - \mu_H} \quad (21.2)$$

Ha  $\mu_M = 0,05$ ,  $\mu_G = 0,1$  és  $\mu_H$  kicsi, akkor  $a \approx 0,5$ , azaz akkor a hidrodinamikusan és a határsúrlódás hatása egymással egyenlő.

W. LUEG és K. H. TREPTOW kísérletei azt bizonyítják, hogy acéldrót húzásakor növekedő fajlagos felületi nyomás mellett a húzóüregben a súrlódási tényező növekedik. GELEJI S. vizsgálatai is azt mutatják, hogy hideghengerléskor a hengerrésben fellépő fajlagos felületi nyomás növekedésével a súrlódási tényező növekszik [21.1; 21.2; 21.3].

## 22. AZ ALAKÍTÁSI ELLENÁLLÁS

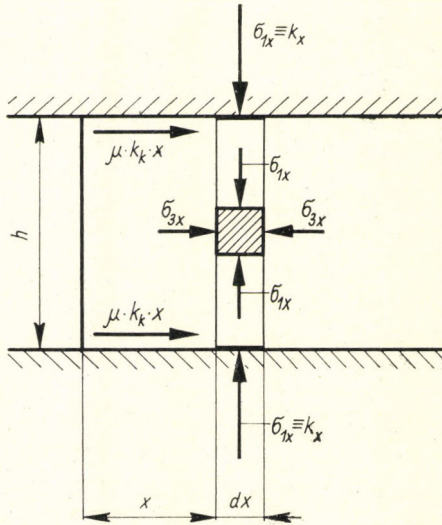
Alakítási ellenálláson az alakító szerszám dolgozó felületén fellépő fajlagos felületi nyomást értjük.

Hogy képlékeny alakváltozás következék be, ahhoz az anyag részecskéiben olyan feszültségi állapotot kell előidézni, hogy

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \psi k_f \quad (22.1)$$

legyen, ahol  $1 \leq \psi \leq 1,15$ .

A fémek képlékeny alakítása általában úgy történik, hogy az alakítandó anyagot az alakító szerszám segítségével megfelelő külső erővel terhelik. Ez az erő létesíti az anyagban a  $\sigma_1$  főfeszültséget, amely a szerszám dolgozó felülete mentén azonos az alakítási ellenállással:  $\sigma_1 = k$ . A terhelő erő elől az anyag kitér, szabad folyásában azonban többé-kevésbé akadályozva szokott lenni. Ezek a szabad alakváltozást akadályozó tényezők (pl. súrlódás a szerszám felületén, a szerszám felületének nem sík volta stb.) hozzák létre az anyagban a másik két főfeszültséget. A legkisebb ellenállás irányában lép fel a  $\sigma_3$  főfeszültség, és amennyiben ebben az irányban  $\sigma_1 - \sigma_3 = \psi k_f$ , megindul az anyag folyása. Az alakító szerszám mozgása irányában a szerszám felületegységén működő erő, mint azt már előbb mondtuk,



22.1. ábra. Az alakítási ellenállás kiszámítása

egyenlő a  $\sigma_1$  főfeszültséggel. Minthogy ez olyan erő, amely az alakítást létrehozó erő ellen működik, alakítási ellenállásnak ( $k$ ) nevezzük. Az alakítási ellenállás nagysága ezek szerint:

$$k \equiv \sigma_1 = \psi k_f + \sigma_3. \quad (22.2)$$

Az alakítási ellenállás tehát az alakítási szilárdság (folyási határ)  $\psi$ -szere-  
sének és a harmadik főfeszültségnek az összegéből áll.

A harmadik főfeszültség szerepét és jelentőségét az alakítási ellenállás  
képletében az alábbiakban világíthatjuk meg.

Ha egy prizmatikus testet két sík nyomólap között összenyomunk,  
akkor az alakítási ellenállás ( $k$ ) magában foglalja az alakítási szilárdság  
( $k_f$ ) legyőzéséhez szükséges erőt és az alakváltozás következtében a nyomó-  
felületek mentén működő súrlódási erők legyőzéséhez szükséges ( $\sigma_3$ ) erőt  
(22.1. ábra).

Ha egy  $h$  magasságú hasáb alakú testet két párhuzamos nyomólap  
között összenyomunk, akkor a prizma oldallapjától  $x$  távolságban levő  
 $h$  magasságú és  $dx$  szélességű elemi prizma, amelynek a rajzlapra merő-  
leges harmadik dimenziója 1,

$$R = 2 k_k \mu x \quad (22.3)$$

vízszintes erő hat. A rajz felületére merőleges dimenzió azonban sokkal  
nagyobb 1-nél. Ebben a képletben  $k_k$  a közepes alakítási ellenállás az  $x$   
távolság mentén,  $\mu$  pedig a súrlódási tényező. A  $P$  erő a  $h \cdot 1$  területű oldal-  
lapra

$$\frac{R}{h} = \sigma_3 = 2 k_k \mu \frac{x}{h} \quad (22.4)$$



fajlagos nyomást gyakorol. A nyomólapnak a nyomott testre a test határfelületétől  $x$  távolságban gyakorolt nyomása:

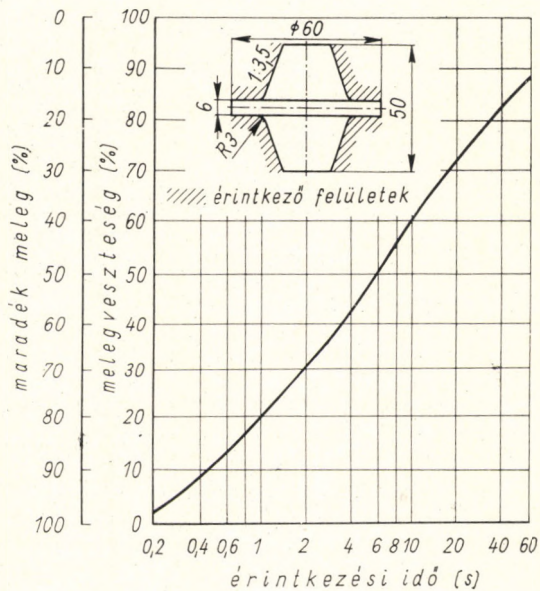
$$k_x = \psi k_f + \sigma_3 = \psi k_f + 2 k_k \mu \frac{x}{h}. \quad (22.5)$$

$k_x$  a megadott helyen a nyomófelületre ható fajlagos nyomás, vagyis az alakítási ellenállás.

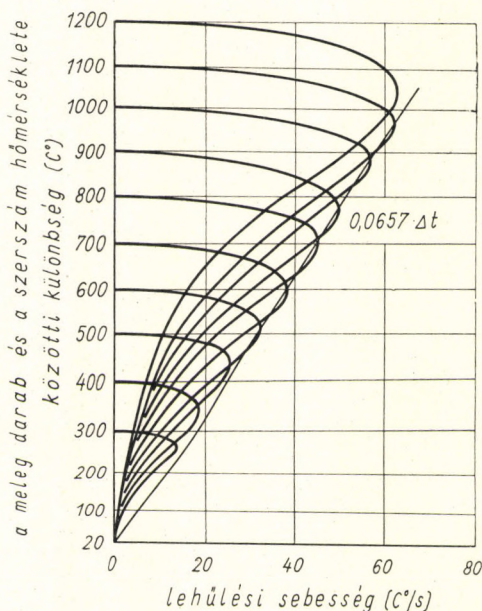
### 23. MELEGELVEZETÉS SZILÁRD FÉMES TESTEK ÉRINTKEZÉSEKOR

A fémek alakítása gyakran meleg állapotban történik. Alakítás alatt a meleg darab érintkezik a szerszámmal, amely hidegebb az alakítandó tárgynál, sőt a szerszámot igen gyakran még külön hűtik is. Minthogy a darab és a szerszám között hőmérsékletkülönbség van, a szerszám mindig jelentős mennyiségű meleget von el az alakítandó testtől. Az elvont melegmennyiség sok tényezőtől függ: a darab és a szerszám között fennálló hőmérsékletkülönbségtől, az érintkező felületek nagyságától a melegtartalomhoz képest, a melegátadás időtartamától stb.

Az érintkezési időtartam befolyása a hővesztésre egy sajtolási folyamatnál a 23.1. ábrán látható; ez a melegvesztés különösen nagy a kis érintkezési idők tartományában, úgyhogy gyors alakításhoz kívánatos a nagy alakítási sebesség. A közbeeső rétegnek, pl. a reverétegnek a befolyása a hideg szerszám hűtőképességére a 23.2. ábrán van bemutatva. Ebből



23.1. ábra. Melegvezetés szilárd fémek érintkezésekor



23.2. ábra. A meleg darab és az alakító szerszám hőmérséklete közötti különbség a lehülési sebesség függvényében

az ábrából látható, hogy a darabnak a süllyesztékbe helyezése után a lehülési sebesség igen gyorsan növekszik, majd egy maximum elérése után fokozatosan lassul. A legnagyobb sebesség annál nagyobb, mennél nagyobb a kezdeti hőmérsékletkülönbség a darab és a szerszám között; a lehülés és ezzel a melegvesztés a  $\Delta t$  hőmérsékletkülönbséggel lineárisan változik. A legnagyobb a lehülési sebesség abban az esetben, amikor két sík nyomólap között egy hengeres prizmat nyomnak össze, és nagysága a következő egyenlettel fejezhető ki:

$$v_{\text{Amax}} = 0,0657 \Delta t [C^\circ/s] . \quad (23.1)$$

Ebből az egyenletből látható, hogy a hőmérsékletvesztés a kezdeti hőmérséklet nagyságától független, és csak a hőmérsékletkülönbségtől függ. Ez arra mutat, hogy helyes a szerszámot előmelegíteni.

A melegátadási tényező két szilárd fémes test érintkezésekor (meleg kovácsdarab, hideg kalapács vagy sajtolófelület)

$$5000 \dots 10\,000 \frac{\text{kcal}}{m^2 h C^\circ} \quad (23.2)$$

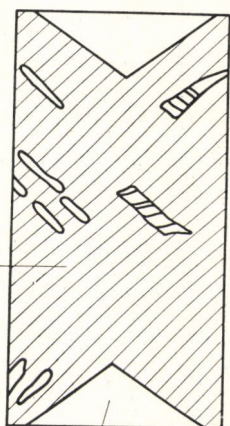
között van.

A melegátadási tényező a lehülés folyamán változatlan [23.1].

## II. AZ EGYSZERŰ KÉPLEKENY ALAKÍTÁSI MŰVELETEK

### 24. ÖSSZENYOMÁS

Tiszta összenyomásról akkor beszélünk, ha egy prizmatikus testet két párhuzamos nyomólap között összenyomunk, és közben a prizma oldal-lapjait semmiféle erő nem terheli. Ilyenkor a prizma anyaga a nyomás-irányra merőlegesen szélesedik, miközben magassága csökken. Ha egy olyan prizmatikus testet nyomunk össze két párhuzamos nyomólap között, amelynek keresztmetszeti méretei magassági méreteihez képest kicsinyek, akkor a prizma középső szakaszában megközelítően egytengelyű feszültségi állapot lép fel. A nyomófelületeken fellépő súrlódás következtében a nyomólapok közelében az egytengelyű feszültségi állapot meg van zavarva. Rugalmas állapotban a csúsztatófeszültség a nyomott prizma oldallapjai és a nyomó-lapok által képezett élben éri el a maximumot. A nyomóerő növekedésével ezen a helyen lépnek fel az első maradó alakváltozások. Ezek a maradó alakváltozások acélprizmák összenyomása esetén a hasáb tengelyével  $45^\circ$ -ot bezáró síkokban a test felületén ún. folyási vonalakban jelentkeznek, amelyeket az *F. Fry*-féle maratósi eljárással lehet láthatóvá tenni (24.1. és 24.2. ábra). A nyomott prizmának a nyomófelületekkel érintkező két végén, a csúszási felületekkel határolt kúpos részben az anyag az alakítás kezdetén kimarad az alakításból (24.1. és 24.2. ábra). Azonban ez az ún. „csúszási kúp” az alakítás folyamán nem marad meg mereven eredeti

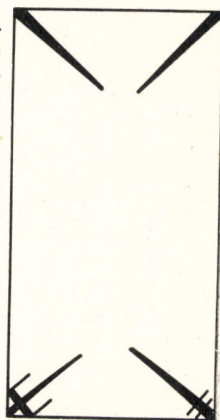


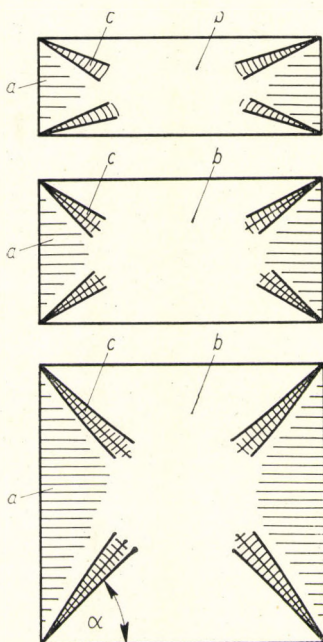
képlekeny

nem alakított

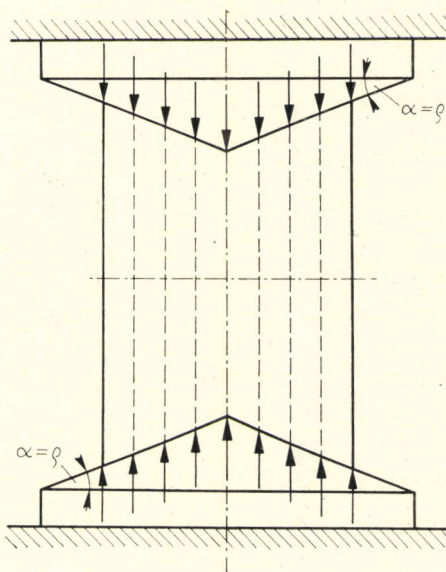
24.1. ábra. Maradón alakított tartomány egy összenyomott acélhengerben

24.2. ábra. A nyomólapok közelében keletkező kúpos csúszási felületek (csúszási kúp)





24.3. ábra. A darabmagasság befolyása a csúszási kúpok  $\alpha$  szögének nagyságára, hengeres fémprizmák összenyomásakor



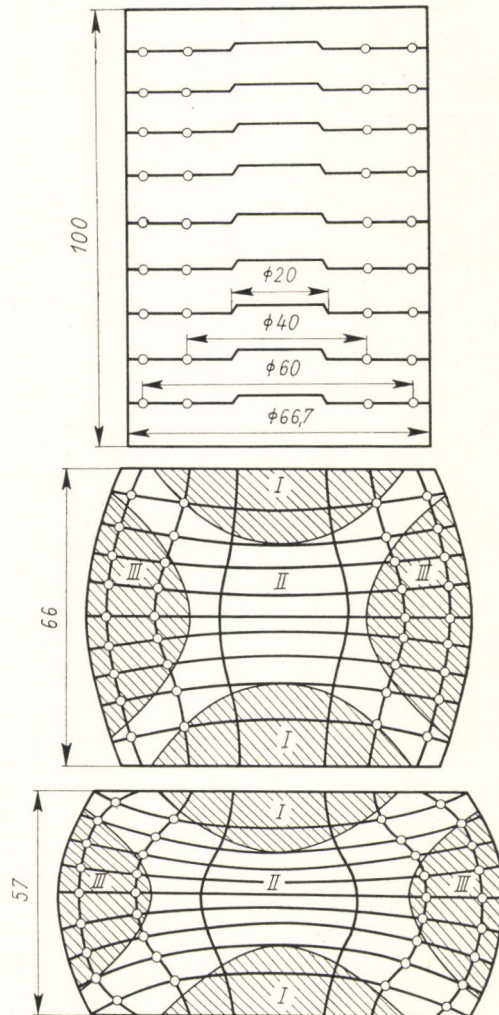
24.4. ábra. Kúpos nyomópróba SIEBEL és POMP szerint

alakjában, hanem a nyomott hasáb csökkenő magasságával tompább lesz (24.3. ábra), ahogy ezt NÁDAI Á. kísérletei bizonyítják [24.4].

A nyomókísérletnél a nyomólapokon fellépő súrlódás általában elég nagy ahhoz, hogy a darab szabad szélesedését akadályozza, és ennek következtében a hengeres prizma hordó alakot vegyen fel.

Súrlódásmentes összenyomás gyakorlatilag nem fordul elő. Csak kísérletileg, laboratóriumban lehet gondos kenés és kismértékű összenyomás esetén bizonyos mértékig súrlódásmentes összenyomást létrehozni. E. SIEBELnek és A. POMPNak sikerült kúpos nyomólapok segítségével, amelyeknek lejtési szöge a súrlódási szöggel egyenlő volt, az összenyomási kísérletet oly módon végrehajtani, hogy az összenyomott prizma megközelítően hengeres maradt, vagyis olyan, mintha súrlódási erő nem lépett volna fel (24.4. ábra) [24.2]. Ilyen esetben a kísérleti darabban elvileg egytengelyű feszültségi állapot jön létre.

Nagyobb alakváltozásoknál a súrlódás hatása a nyomófelületeken abban nyilvánul, hogy a prizmatikus próbadarab az összenyomás következtében



24.5. ábra. Alakváltozási zónák kialakulása nyomott hengeres prizma esetében, TRESCA szerint

hordó alakot vesz fel. Szépen szemléltetik az anyagelmozdulásokat egy nyomott prizmán belül H. TRESCA kísérletei egy acélhengerrel (24.5. ábra), amely tárcsákból volt felépítve, két-két tárcsa között egy-egy vörösréz-lemez-betéttel. Ennél a kísérletnél alakváltozás után a keresztmetszetben három zóna különböztethető meg. Az I. zónában a nyomófelületeken felépő súrlódás következtében egyáltalán nem vagy alig mozdul el az anyag. A fő alakváltozások a II. zónában állnak elő. A III. zóna anyaga meglehetősen egyenletes alakváltozáson megy keresztül.

## 25. KÉPLÉKENY ANYAG ÖSSZENYOMÁSA KÉT DURVA NYOMÓFELÜLET KÖZÖTT

A probléma itt következő megoldása L. PRANDTLTól származik [25.1]. Ez a megoldás csak a folyás megindulásának kezdőstádiumában érvényes.

*Képlékeny állapot két párhuzamos nyomófelület között.* A feszültségi síkprobléma ( $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$ ) alapegyenletei [(8.4) egyenlet, 25.1. ábra]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.4a)$$

A folyás feltétele [l. a (9.16) egyenletet]:

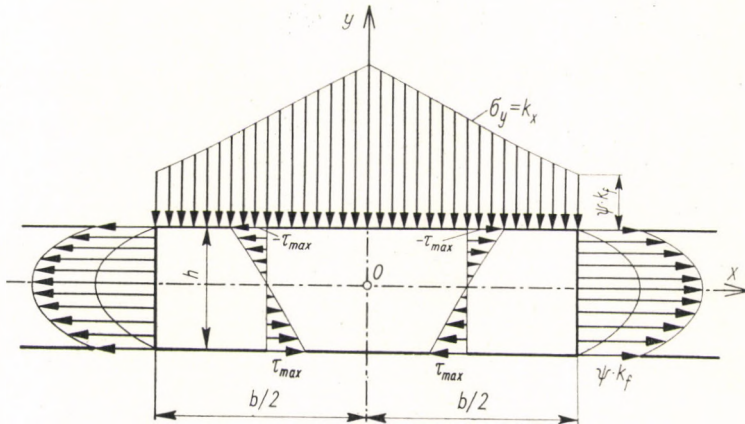
$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4\tau_{\max}^2. \quad (9.16)$$

Ha a (8.4a) első egyenletét  $y$  szerint, második egyenletét  $x$  szerint differenciáljuk, és a kapott differenciálegyenletek különbségét felírjuk, a következő egyenleteket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y) &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

Ha a (25.1) harmadik egyenletébe behelyettesítjük a (9.16) egyenletből ( $\sigma_x - \sigma_y$ ) értékét,

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm \sqrt{4(\tau_{\max}^2 - \tau^2)}, \quad (25.2)$$



25.1. ábra. Képlékeny anyagú nyomott prizmában fellépő feszültségek paralel, súrlódó nyomófelületek esetén, PRANDTL szerint

akkor a  $\tau$  csúsztatófeszültségre vonatkozólag a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\pm \frac{\partial^2 \sqrt{\tau_{\max}^2 - \tau^2}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}. \quad (25.3)$$

Ha feltesszük, hogy  $\tau = f(y)$  lineáris függvény, akkor a (25.3) egyenletre azonnal kapunk megoldást. Az egyenletből

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0, \quad \tau = c_1 + c_2 y. \quad (25.4)$$

A  $\tau$  csúsztatófeszültség nem lehet  $\tau_{\max}$ -nál nagyobb. Tegyük fel, hogy  $c_1 = 0$ , ez esetben két egyenes vonalat kapunk:  $y = \pm \frac{h}{2}$ , amelyek mentén a  $\tau$  tangenciális csúsztatófeszültség a lehető legnagyobb értékét,  $\tau_{\max}$ -t éri el. Aszerint, hogy  $y = \frac{h}{2}$  mentén  $\tau = +\tau_{\max}$  vagy  $\tau = -\tau_{\max}$  legyen-e, kell a  $c_2$  állandó előjelét megválasztani. Ha azt írjuk elő, hogy  $y = \frac{h}{2}$ -nél  $\tau = -\tau_{\max}$  legyen, akkor  $\tau = -\frac{\tau_{\max} y}{(h/2)}$ . A két egyenes:  $y = \pm \frac{h}{2}$  a képlékeny tömeg természetes határa. Ezen a két határvonalon túl az  $xy$  síkban a feszültségi állapot analitikailag nem követhető, csak a két határvonal között  $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq +\frac{h}{2}\right)$  van fizikai értelme. A  $\sigma_x$  és

a  $\sigma_y$  feszültséget a differenciális prizma egyensúlyi egyenleteiből [(8.4a) egyenletrendszer] kapjuk meg. [Lásd a (8.4a) egyenletrendszer első egyenletét]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{\partial \tau}{\partial y} = +\frac{2 \tau_{\max}}{h}, \\ \sigma_x &= +\frac{2 \tau_{\max} x}{h} + f_1(y), \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \\ \sigma_y &= f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

[lásd a (8.4a) egyenletrendszer második egyenletét]:

A két önkényesen felvett függvényt,  $f_1(y)$ -t és  $f_2(x)$ -et úgy kell meghatározni, hogy a folyási feltétel ki legyen elégítve:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &\equiv \pm 2 \sqrt{\tau_{\max}^2 - \tau^2} ; \\ \frac{2 \tau_{\max} x}{h} + f_1(y) - f_2(x) &\equiv \pm 2 \tau_{\max} \sqrt{1 - 4 \left( \frac{y^2}{h^2} \right)}, \end{aligned} \quad (25.2)$$

amiből a feszültségi komponensek:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c + \frac{2 \tau_{\max} x}{h} \pm 2 \tau_{\max} \sqrt{1 - 4 \left( \frac{y^2}{h^2} \right)}, \\ \sigma_y &= c + \frac{2 \tau_{\max} x}{h}, \\ \tau &= -\frac{2 \tau_{\max} y}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

A (25.6) egyenletrendszer megoldásánál PRANDTL feltételezte, hogy  $x = \frac{b}{2}$ -nél  $\sigma_y = 0$ ; ez a feltevés azonban ellentmond a kísérleti tényeknek.  $x = \frac{b}{2}$ -nél  $\sigma_y = -\psi k_f$ , vagyis egyenlő az anyag folyási határának  $\psi$ -szere- sével. Tehát ha  $x = \frac{b}{2}$ , akkor

$$\sigma_y = -\psi k_f = -1,15 k_f. \quad (25.7)$$



Ha ezt behelyettesítjük a (25.6) első és második egyenletébe, akkor az integrálállandó a (25.6) második egyenletéből

$$c = -\psi k_f \left(1 + \frac{b}{2h}\right) = -1,15 k_f \left(1 + \frac{b}{2h}\right), \quad (25.8)$$

és így

$$\sigma_x = -1,15 k_f \left[1 + \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right)}{h} \mp \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2}\right], \quad (25.9)$$

$$\sigma_y = k_x = -1,15 k_f \left[1 + \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right)}{h}\right]. \quad (25.10)$$

Itt meg kell még jegyeznünk, hogy az alakítási ellenállásnak a (25.10) egyenlettel való kiszámítása csak megközelítő számítás, minthogy az alakítási ellenállás változása lineárisnak van feltételezve. A számítási eljárás továbbá csak olyan helyeken érvényes, ahol a nyomott anyag tapad a nyomólapokhoz. A nyomólapok mentén ui., ahol  $y = \frac{h}{2}$ , a csúsztatófeszültség a (25.6/3) egyenlet szerint:

$$\tau = -\frac{1,15 k_f y}{h} = \frac{1,15 k_f h}{2h} = 0,577 k_f = \tau_{\max}. \quad (25.11)$$

Mindkét csúszási vonalrendszer meghatározására a (15.25) egyenletrendszer használható fel:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_k + \tau_{\max} \cos 2\alpha, \\ \sigma_y &= \sigma_k - \tau_{\max} \cos 2\alpha, \\ \tau &= \tau_{\max} \sin 2\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (15.25)$$

ahol

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (15.24)$$

Ezek szerint az egyenletek szerint

$$\tau = -\tau_{\max} \cos 2\beta_1 \quad (15.28/3)$$

és

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_{\max} \sin 2\beta_1, \quad (25.12)$$

másrészt

$$\tau = -\frac{2\tau_{\max} y}{h}, \quad (25.6/3)$$

továbbá a (25.6) egyenletrendszerből:

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm 2 \tau_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2}. \quad (25.13)$$

A (15.28/3) és (25.6/3) egyenletből

$$-\frac{2 \tau_{\max} y}{h} = -\tau_{\max} \cos 2 \beta_1, \quad (25.14)$$

és így

$$\cos 2 \beta_1 = \frac{2y}{h}. \quad (25.15)$$

A (25.13) egyenletben + vagy - előjelet választunk aszerint, hogy

$$0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{2} \leq \beta_1 \leq \pi.$$

A (25.15) egyenletből következik, hogy

$$y = \frac{h}{2} \cos 2 \beta_1, \quad (25.16)$$

és ebből

$$\frac{dy}{dx} = -h \sin 2 \beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x}. \quad (25.17)$$

Az egyik vonalrendszer a (15.29) egyenlet szerint:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta_1, \quad (15.29)$$

tehát

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -h \sin 2 \beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x}, \quad (25.18)$$

és a másik vonalrendszer a (15.30) egyenlet szerint:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \beta_1 = -h \sin 2 \beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x}. \quad (25.19)$$

A (15.29) és a (25.18) egyenletből az első csúszási vonalrendszer a következőképpen adódik:

A (25.18) egyenletet így lehet felírni:

$$\frac{\sin \beta_1}{\cos \beta_1} = -h \sin 2\beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} = -2h \sin \beta_1 \cos \beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x}, \quad (25.20)$$

és ebből

$$\frac{\partial x}{\partial \beta_1} = -2h \cos^2 \beta_1. \quad (25.21)$$

Így az első csúszási vonalrendszer (I) egyenletei a következőképpen szólnak:

$$x = -2h \int \cos^2 \beta_1 \partial \beta_1 = -h \left( \beta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 \right) + \text{konst}, \quad (25.22)$$

$$y = \frac{h}{2} \cos 2\beta_1. \quad (25.16)$$

A (25.19) egyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = h \sin 2\beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} = 2h \sin \beta_1 \cos \beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x}, \quad (25.23)$$

ebből következik, hogy

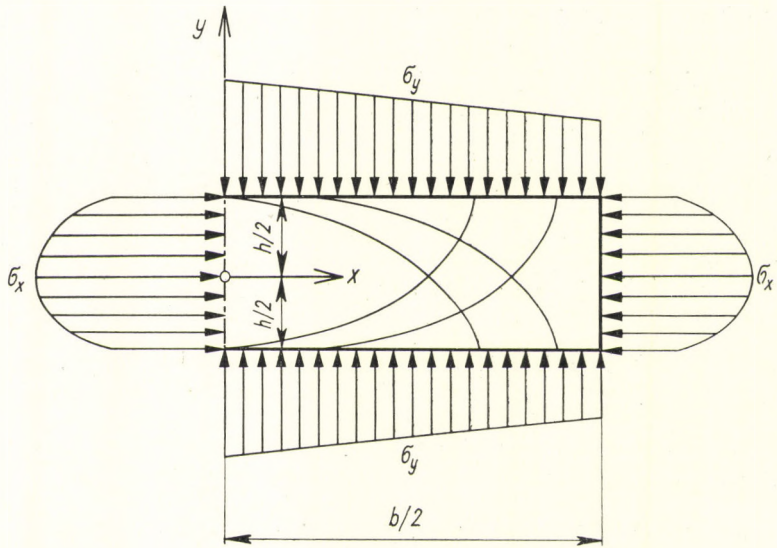
$$\frac{\partial x}{\partial \beta_1} = 2h \sin^2 \beta_1, \quad (25.24)$$

és így a második csúszási vonalrendszer (II) egyenletei:

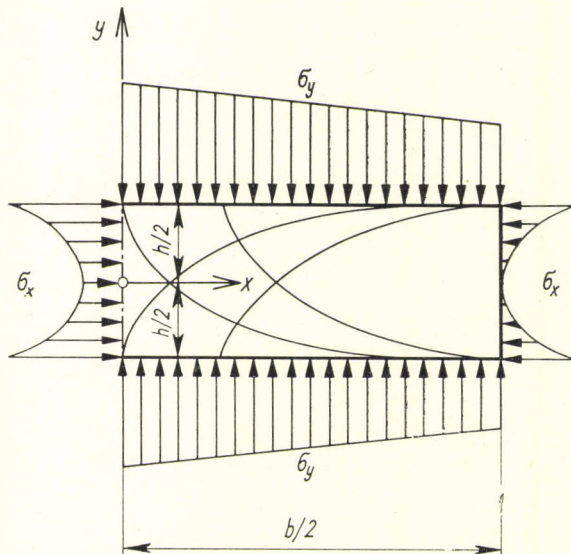
$$x = 2h \int \sin^2 \beta_1 \partial \beta_1 = \frac{h}{2} [2\beta_1 - \sin 2\beta_1] + \text{konst}, \quad (25.25)$$

$$y = \frac{h}{2} \cos 2\beta_1. \quad (25.16)$$

Ha a (25.22) és (25.16), illetve a (25.25) és (25.16) egyenletekből álló két egyenletrendszerben  $2\beta_1$  helyett  $i$  időt helyettesítünk be, akkor felismerhető, hogy ezek az egyenletek a közös ciklois egyenletei. A két vonalrendszer derékszögben metszi egymást. A két egyenes:  $y = \pm \frac{h}{2}$  egy-egy csúszási vonalrendszer burkolói. Ha  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , akkor az első (I) csúszási vonalrendszert kapjuk, melyet a 25.2. ábra mutat be. Ha  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ , akkor a második (II) csúszási vonalrendszer áll elő, amely a 25.3. ábrán látható.



25.2. ábra. A képlékeny anyagú nyomott prizmában fellépő feszültségek és esúzási vonalak paralel súrlódó nyomófelületek esetén. (Passzív állapot.) PRANDTL szerint



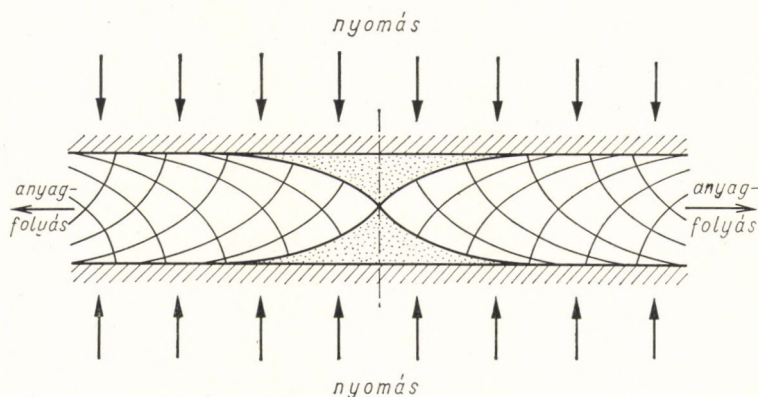
25.3. ábra. A képlékeny anyagú nyomott prizmában fellépő feszültségek és esúzási vonalak paralel súrlódó nyomófelületek esetén. (Aktív állapot.) PRANDTL szerint

A 25.2. és 25.3. ábra szerint egy puha, nyúlós plasztikus tömeg két párhuzamos nyomólap között terjed ki, miközben a nyomólapok és a nyomott anyag között teljes tapadás lép fel; a nyomott anyag eláramlása csak egy irányban lehetséges. Az I. feszültségi állapot úgy jön létre, hogy az  $y = \pm \frac{h}{2}$  nyomólapok egymás felé közelednek, a II. feszültségi állapot pedig úgy, hogy a két nyomólap egymástól távolodik. Mivel a feszültségekre vonatkozó határfeltételek az  $y = \pm \frac{h}{2}$  vízszintes nyomólapok mentén

mindkét esetben egyformák, azért, hogy a két feszültségi állapotot egymástól megkülönböztessük, mondhatjuk, hogy az I. feszültségi állapotban egy passzív és a II. feszültségi állapotban egy aktív nyomás működik. Az első esetben a nyomólapok hozzák létre a feszültséget, a második esetben a tömeg hajtja szét a nyomólapokat.

Aszerint tehát, hogy a plasztikus anyag a nyomólapok szomszédságában hogyan viselkedik, két feszültségi állapotot különböztetünk meg: az aktív (II) és a passzív (I) feszültségi állapotot. Az aktív és passzív feszültségi állapot szemléltetésére a legalkalmasabb a csúszási vonalak hálózatának ábrázolása. Az I. feszültségi állapot (melynél a gyökjel előtt pozitív előjel van, és ahol  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) a síkban a 25.2. ábra szerint szemléltethető, a II. feszültségi állapotot (melynél a gyökjel előtt negatív előjel van, és ahol  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ) a síkban a 25.3. ábra szerint rajzolhatjuk fel.

Ha a plasztikus tömeg síkbeli egyensúlyi állapotban van, de a két nyomólap közötti anyag mindkét oldal felé elfolyhat, akkor a réteg közepén (a kísérleti darab tengelyében) lesz egy tartomány (25.4. ábra), amelyben a csúszási feszültségek (súrlódási erők) a nyomófelület mentén nem érik



25.4. ábra. Két súrlódó nyomófelület között összenyomott képlékeny tömeg. Anyagelfolyás kétfelé. PRANDTL és NÁDAI szerint

el a maximális értéket. Szimmetriai okokból itt a súrlódási erők kiegyenlítik egymást. A középső részen az anyag nem éri el a folyási határt. Ez a rész a rajzon pontozva van.

## 26. A RÉSZLEGESEN TERHELT KÉPLÉKENY FÉLTÉR

A merev-képlékeny anyagú féltérlet egy végtelen merev, tökéletesen sima prizmatikus test közvetítésével függőleges irányú, egy vonal mentén megoszló teher terheli (26.1. ábra). Meg kell határozni azt a nyomást, amely a folyást megindítja. Az itt közölt levezetések L. PRANDTLTÓL származnak [25.1].

Feltételezzük, hogy a test az ábra síkjára merőlegesen végtelen kiterjedésű, és hogy a féltérlet síkbeli alakváltozási állapotban van.

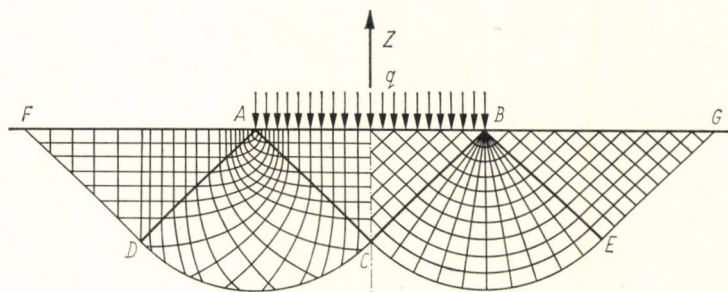
A 15. fejezetben felírtuk, hogy síkbeli feszültségi állapot esetén a plasztikus egyensúlyi állapotot a (15.25) egyenletrendszer fejezi ki:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_k + \tau_{\max} \cos 2\alpha, \\ \sigma_y &= \sigma_k - \tau_{\max} \cos 2\alpha, \\ \tau &= \tau_{\max} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (26.1)$$

A  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  és  $\tau$  feszültség között síkbeli feszültségi állapot esetén a következő egyensúlyi feltételek állnak fenn [(8.4a) egyenlet]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

Mint hogy a (26.1) egyenletrendszer által megadott feszültségkomponenseket a  $\sigma_k$ -val és  $\alpha$ -val ki lehet fejezni, a feladat megoldásához elégséges a (26.2) egyenletrendszer.



26.1. ábra. Egy sajtoló szerszám hatására fellépő folyási tartományok, PRANDTL szerint

Ha a (26.2) egyenletrendszerbe a (26.1) egyenleteket behelyettesítjük, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} - 2\tau_{\max} \sin 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\tau_{\max} \cos 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_k}{\partial y} + 2\tau_{\max} \sin 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + 2\tau_{\max} \cos 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.3)$$

A 15.3. ábrában feltüntetett feszültségi trajektóriák helyett a velük  $45^\circ$ -ot bezáró csúszási vonalrendszert fogjuk ábrázolni a 15.4. ábra szerint. Ha  $\beta$ , ill.  $\beta + 90^\circ$  jelöli a csúszási vonalak érintőinek szögét az  $x$  tengellyel, akkor  $\alpha$  és  $\beta$  között a következő összefüggés áll fenn:

$$\beta = \alpha \pm 45^\circ, \quad (26.4)$$

és a (26.3) egyenletrendszer helyett a következő egyenleteket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} + 2\tau_{\max} \cos 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2\tau_{\max} \sin 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_k}{\partial y} - 2\tau_{\max} \cos 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2\tau_{\max} \sin 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.5)$$

Vezessük be a csúszási vonalak mentén mért vonalelemeket:

$$ds = h_1 du \text{ és } dn = h_2 dv. \quad (26.6)$$

Az egymást derékszögben metsző két vonalrendszer mindegyike megfelel annak a feltételnek, hogy  $u = \text{konst.}$  és  $v = \text{konst.}$ ;  $h_1$  és  $h_2$  a helynek általános függvényei.

Ha a (26.5) egyenleteket a csúszási vonalak derékszögű hálójára vonatkoztatjuk, akkor — amennyiben a (26.5) egyenleteiben  $dx$ -et  $ds$ -sel és  $dy$ -t  $dn$ -nel helyettesítjük, továbbá  $\beta = 0$ -t bevezetjük — a következő egyenleteket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (\sigma_k + 2\tau_{\max} \beta) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial n} (\sigma_k - 2\tau_{\max} \beta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

Ez azt jelenti, hogy  $\sigma_k$  egy csúszási vonal mentén oly mértékben változik, mint a csúszási vonalak érintőjének egy meghatározott iránnyal bezárt és  $2\tau_{\max}$ -mal szorzott hajlási szöge.

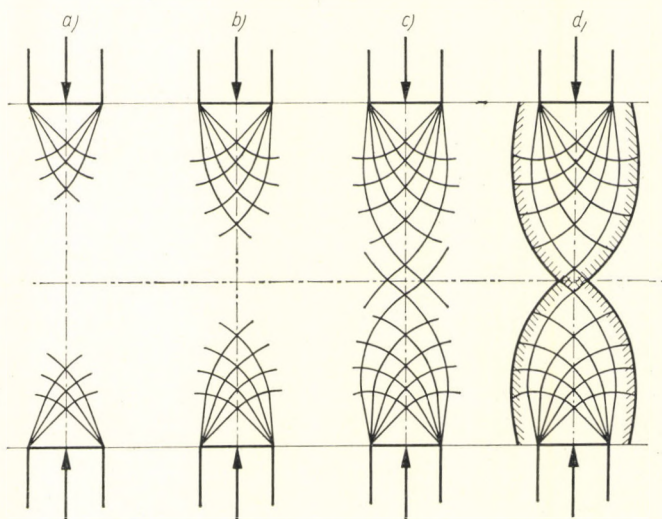
Vegyük példának azt a megoldást, melyet A. FÖPPL és L. FÖPPL [26.1] után L. PRANDTL adott legegyszerűbben. Egy sík határfelületre  $AB$  távolság mentén egyenletesen megoszló  $p$  terhelés hat (26.1. ábra). A csúszási vonalak két rendszere a következő egyenleteknek felel meg:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sigma_k + 2\tau_{\max} \beta = \text{konst.} \\ \kappa &= \sigma_k - 2\tau_{\max} \beta = \text{konst.} \end{aligned} \right\} \quad (26.8)$$

A csúszási vonalak megszerkesztése ezek után könnyen végrehajtható.  $ABC$ , továbbá  $ADF$  és  $BEG$  derékszögű háromszögek alkotják a derékszögű egyenesvonalú hálót, és egyeneseik az egyenesvonalú határral  $45^\circ$ -os szöget zárnak be. A 26.1. ábrának a jobb oldala csúszási vonalakat, bal oldala a feszültségi trajektóriák derékszögű hálózatát ábrázolja. A  $BCE$ , illetve  $ADC$  szeletben a kifutócsúszási vonalak  $\frac{\pi}{2}$ -vel elhajlanak. A csúszási vonalak itt körök  $A$  és  $B$  körül.

Az a  $p$  nyomás, amelynél a képlékeny állapot bekövetkezik, könnyen kiszámítható. A  $\sigma_k$  közepes feszültség az  $AB$  határvonal mentén, és így az egész  $ABC$  háromszögre vonatkozóan:  $(p - \tau_{\max})$ , míg az  $ADF$  és  $BEG$  háromszögekre vonatkozóan:  $\tau_{\max}$ . A csúszási vonalak  $\frac{\pi}{2}$  szöggel való elgörbüléséből következik, hogy a közepes nyomások az  $ABC$ ,  $BEG$  és  $ADF$  háromszögben  $\tau_{\max}\pi$ -vel különböznek egymástól:

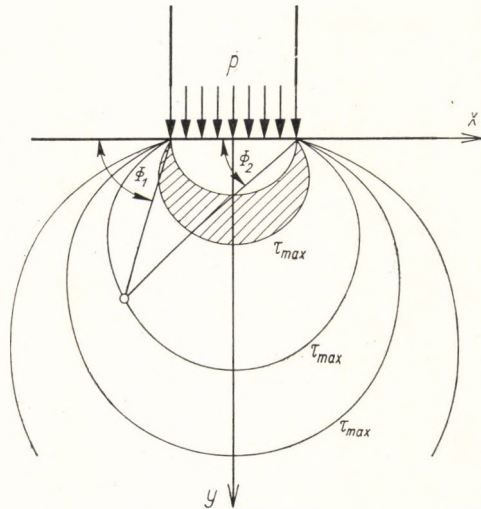
$$p - \tau_{\max} = \tau_{\max} + \tau_{\max} \pi, \quad (26.9)$$



26.2. ábra. A csúszási vonalrendszer behatolása egy kétoldalról keskeny sajtolóbélyeggel nyomott testbe, SIEBEL szerint



26.3. ábra. A maximális csúszófeszültségek körei ( $\tau_{\max} = \text{konst}$ ) egyenletesen eloszló nyomóerő esetén



ebből

$$p = 2\tau_{\max} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right), \quad (26.10)$$

vagy a folyási feltételből:

$$p = k_f \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right). \quad (26.11)$$

$p$  az a fajlagos nyomás  $AB$  mentén, amely a folyást megindítja. Ilyen fajlagos nyomás mellett a nyomó prizma élei behatolnak a nyomott testbe, és kialakul a fent leírt csúszási rendszer. E. SIEBEL lágy folytvás rúdon megvizsgálta, milyen mélyen hat a nyomás. A vizsgálatot úgy végezte, hogy a rudat két szembenálló nyomóbéllyeggel kismértékű deformációknak vetette alá, így a 26.2. ábrát kapta.

A legnagyobb csúsztatófeszültségek ( $\tau_{\max} = \text{konst.}$ ) geometriai helyei körök (26.3. ábra) [26.2]:

$$\tau_{\max} = \frac{p}{\pi} (\Phi_1 - \Phi_2). \quad (26.12)$$

A  $\tau_{\max} = \text{konst.}$  görbái olyan körök, amelyek a nyomóbéllyeg végpontjain mennek át.

## 27. A KÉPLÉKENY ANYAGOSZLOPOK ÖSSZENYOMÁSAKOR FELLÉPŐ ERŐK

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor egy prizmatikus testet két párhuzamos nyomólap között összenyomunk.

A nyomóerő a test tengelye irányában hat. Az oszlop oldallapjai nincsenek erőkkel terhelve. A nyomólapok mentén súrlódási erők működnek.

Hogy a számításban ezeknek a súrlódási erőknek a hatását figyelembe tudjuk venni, feltesszük, hogy a súrlódási erők hatása az oszlop egész oldal-lapján, illetve metszetein egyenletesen oszlik el. Ez a feltevés annál elfo-gadhatóbb, mennél kisebb az oszlop magassága szélességi méreteihez képest. A gyakorlatban úgysis az alacsony testek összenyomásának van nagyobb jelentősége.

Először is határozzuk meg az alakítási ellenállást az oszlop oldallapjaitól  $x$  távolságban (27.1. ábra).

Az alakítási ellenállást a folyási feltételből határozhatjuk meg, amely szerint

$$\sigma_{1x} - \sigma_{3x} = 2\tau_{\max} = \varphi k_f, \quad (27.1)$$

ahol  $1 < \varphi < 1,15$ .

Az alakítási ellenállás nem más, mint a nyomólap felületére eső fajlagos nyomás, amely egyúttal ezen a helyen az első főfeszültség is; ebből következik, hogy az oldallaptól  $x$  távolságban  $\sigma_{1x} \equiv k_x$ , és így

$$k_x = \varphi k_f + \sigma_{3x}, \quad (27.2)$$

feltételezve, hogy  $k_f$  az alakváltozás folyamán nem változik.

Az  $ABCD$  elemi prizmára, amelynek a rajzokra merőleges mérete 1, a következő egyensúlyi egyenletet írhatjuk fel:

$$\sigma_{3x} h + 2k_x \mu dx - (\sigma_{3x} + d\sigma_{3x}) h = 0, \quad (27.3)$$

kifejtve:

$$2k_x \mu dx - h d\sigma_{3x} = 0; \quad (27.4)$$

minthogy  $k_x = \sigma_{3x} + \varphi k_f$ , írható:

$$\frac{d\sigma_{3x}}{dx} = 2 \frac{\mu}{h} k_x = 2 \underbrace{\left(\frac{\mu}{h}\right)}_a \sigma_{3x} + 2 \underbrace{\left(\frac{\mu}{h}\right) \varphi k_f}_b, \quad (27.5)$$

vagyis

$$\frac{d\sigma_{3x}}{dx} - \underbrace{(a \sigma_{3x} + b)}_u = 0. \quad (27.6)$$

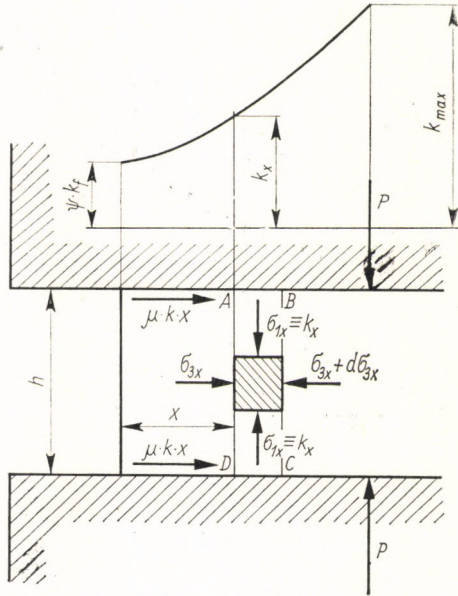
Az  $u$ -t differenciálva:

$$d\sigma_{3x} = \frac{1}{a} du, \quad (27.7)$$

és így a (27.6) egyenletből

$$\frac{1}{a} du = d\sigma_x. \quad (27.8)$$

27.1. ábra. Az alakítási ellenállás nagysága egy prizma összenyomásánál



Ebből az alakítási ellenállás a baloldali (I) határlaptól  $x$  távolságban:

$$k_{xI} = \psi k_f e^{2 \frac{\mu}{h} x} \quad (27.8a)$$

Mint hogy a nyomott négyzetkeresztmetszetű prizma mindkét oldalra folyik, a  $k_x$  eléri maximumát, és pedíg ott, ahol a jobb (II) és a bal oldali (I) síkrész  $k_x$  görbéje egymást metszi (27.2. ábra).

A jobb oldali (II) határlaptól  $(b - x)$  távolságban működő  $k_x$  alakítási ellenállás:

$$k_{xII} = \psi k_f e^{2 \frac{\mu}{h} (b - x)} \quad (27.9)$$

A  $k_{xI}$  és  $k_{xII}$  görbe ott metszi egymást, ahol

$$k_{xI} = k_{xII} = k_{\max}, \quad (27.10)$$

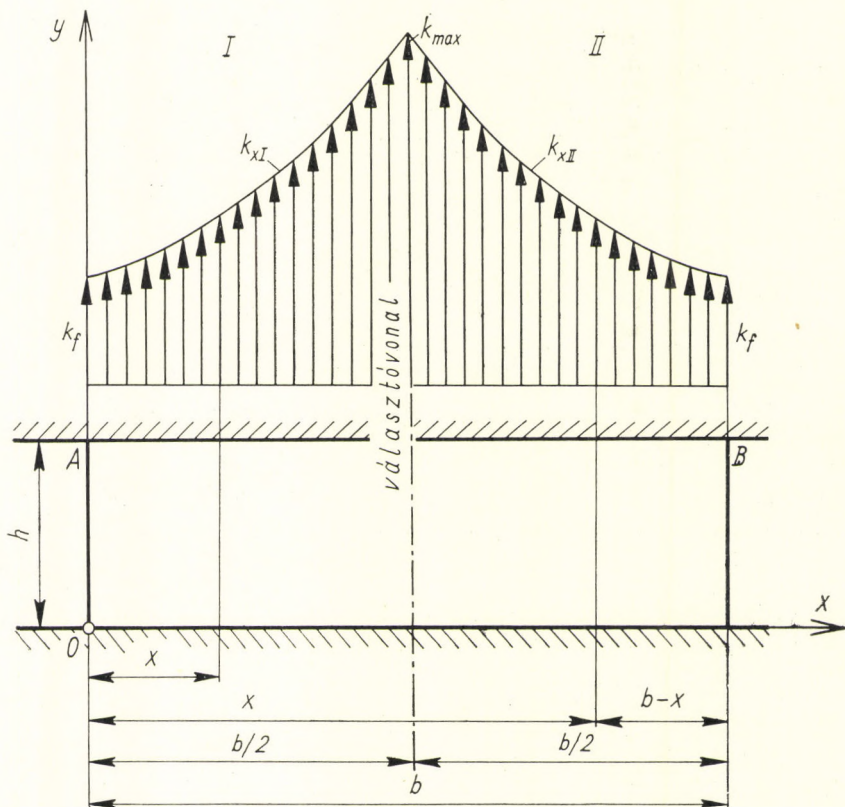
vagyis ahol

$$2 \frac{\mu}{h} (b - x) = \frac{2\mu}{h} x, \quad (27.11)$$

amiből

$$x_s = \frac{b}{2} \quad (27.12)$$

a választóvonal (semleges keresztmetszet) távolsága az  $O$  ponttól.



27.2. ábra. Az alakítási ellenállás eloszlása a nyomófelületeken egy prizma összenyomásakor

Az alakítási ellenállás eloszlása a nyomólap mentén a 27.2. ábrán látható. Eddigi tárgyalásaink folyamán feltettük, hogy a súrlódási tényező olyan kicsi, hogy a nyomott anyag sehol sem tapad a nyomófelülethez.

A tapadás határa ott van, ahol

$$\mu k_x = 0,578 k_f = \tau_{\max}; \quad (27.13)$$

ahol  $\mu \cdot k_x < \tau_{\max}$  ott nincs tapadás, ahol  $\mu \cdot k_x > \tau_{\max}$  ott van (27.3. ábra).

A (27.13) egyenlet az egyszerűsítés után:

$$e^{\frac{2\mu}{h} x_0} = \frac{0,5}{\mu} \quad (27.14)$$

ebből a tapadás tartományának távolsága a nyomott prizma oldallapjától (27.3. ábra):

$$x_0 = \frac{h}{2\mu} \ln \left( \frac{0,5}{\mu} \right). \quad (27.15)$$

A folyási feltétel általános fogalmazása szerint [(27.1) egyenlet]:

$$k_x - \sigma_{3x} = \psi k_f. \quad (27.16)$$

Ezt  $x$  szerint differenciálva:

$$\frac{dk_x}{dx} - \frac{d\sigma_{3x}}{dx} = 0. \quad (27.17)$$

A (27.5) egyenlet szerint

$$\frac{d\sigma_{3x}}{dx} = 2 \frac{\mu}{h} k_x, \quad (27.5)$$

tehát a (27.17) egyenlet így is írható:

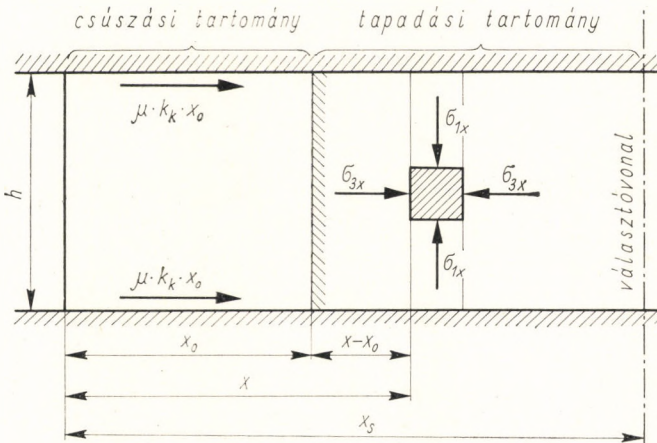
$$\frac{dk_x}{dx} - 2 \frac{\mu}{h} k_x = 0. \quad (27.18)$$

Mint hogy a tapadás határán a prizma oldalától  $x_0$  távolságban (27.3. ábra)  $\mu \cdot k_x = \tau_{\max}$  (27.13), a (27.18) egyenlet így is írható:

$$\left( \frac{dk_x}{dx} \right)_{x=x_0} = \frac{2\tau_{\max}}{h}, \quad (27.19)$$

és a tapadási tartományban általánosságban:

$$\frac{dk_x}{dx} = \frac{2\tau_x}{h}. \quad (27.20)$$



27.3. ábra. A szabad csúszási és a tapadási tartományok meghatározása a nyomófelületek mentén

A tapadási tartományban az elemi hasábot terhelő harmadik főfeszültség első megközelítésben:

$$\sigma_{3x} = \frac{2\mu}{h} k_k x_0 + \frac{2\tau_k}{h} (x - x_0). \quad (27.21)$$

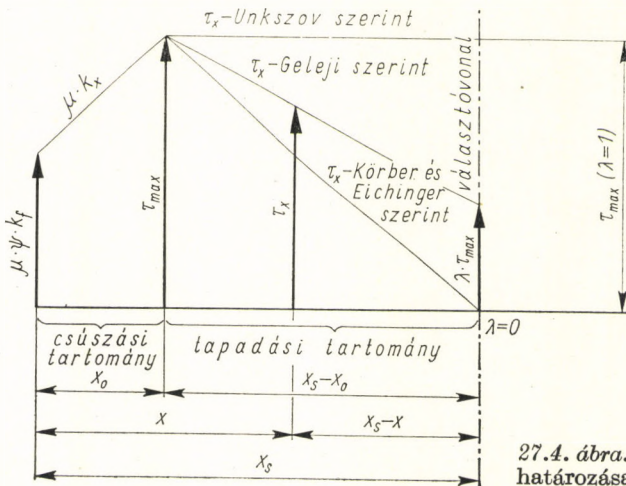
Ebben a képletben  $k_k$  a közepes alakítási ellenállás  $x_0$  mentén:

$$k_k = \frac{\psi k_f \int_0^{x_0} e^{\frac{2\mu}{h} x} dx}{x_0} = \frac{\psi k_f h}{2\mu x_0} (e^{\frac{2\mu}{h} x_0} - 1), \quad (27.22)$$

és  $\tau_k$  a közepes csúsztatófeszültség ( $x - x_0$ ) mentén (27.4. ábra):

$$\tau_k = \frac{\tau_{\max} + \tau_x}{2}. \quad (27.23)$$

A  $\tau_x$  csúsztatófeszültség változásának törvényszerűségét a tapadási tartományban nem ismerjük. F. KÖRBER és A. EICHINGER felteszi, hogy  $\tau_x$  a választóvonalban (semleges keresztmetszetben) zérussal egyenlő,  $\tau_{\max}$  és zérus között pedig lineárisan változik (27.4. ábra). Ezzel szemben E. P. UNKSZOV azt állítja, hogy  $\tau_x$  a választóvonalban is  $\tau_{\max}$ -mal egyenlő. Mi tegyük fel, hogy  $\tau_x$  a tapadási tartományban lineárisan változik, és nagysága a választóvonalban  $\lambda \cdot \tau_{\max}$ , ez a  $\lambda$  tényező viszont  $0 \leq \lambda \leq 1$  között lehet (27.4. ábra).



27.4. ábra. A csúsztatófeszültség meghatározása a tapadási tartományban

A 27.4. ábra szerint

$$\frac{\tau_x - \lambda \tau_{\max}}{\tau_{\max} - \lambda \tau_{\max}} = \frac{x_s - x}{x_s - x_0}, \quad (27.24)$$

és ebből

$$\tau_x = \left( \frac{x_s - \lambda x_0}{x_s - x_0} \right) \tau_{\max} - \frac{(1 - \lambda) \tau_{\max}}{x_s - x_0} x. \quad (27.25)$$

Mintthogy

$$\frac{dk_x}{dx} = \frac{2\tau_x}{h}, \quad (27.20)$$

írható, hogy

$$\frac{dk_x}{dx} = \frac{2\tau_{\max}}{h} \left( \frac{x_s - \lambda x_0}{x_s - x_0} \right) - \frac{2\tau_{\max}}{h} \left( \frac{1 - \lambda}{x_s - x_0} \right) x. \quad (27.26)$$

Mivel  $\mu \cdot k_{x_0} = \tau_{\max} = \xi \cdot k_f$ , ahol  $\xi = 0,5\psi$ , a (27.26) egyenletet a következőképpen lehet felírni:

$$\frac{dk_x}{dx} = \frac{\psi k_f}{h} \left( \frac{x_s - \lambda x_0}{x_s - x_0} \right) - \frac{\psi k_f}{h} \left( \frac{1 - \lambda}{x_s - x_0} \right) x. \quad (27.27)$$

Az alakítási ellenállás a tapadási tartományban:

$$k_x - k_{x_0} = \frac{\psi k_f}{h} \left( \frac{x_s - \lambda x_0}{x_s - x_0} \right) \int_{x_0}^x dx - \frac{\psi k_f}{h} \left( \frac{1 - \lambda}{x_s - x_0} \right) \int_{x_0}^x x dx, \quad (27.28)$$

illetőleg

$$k_x = k_{x_0} + \frac{\psi k_f}{h (x_s - x_0)} \left[ (x_s - \lambda x_0) (x - x_0) - (1 - \lambda) \left( \frac{x^2 - x_0^2}{2} \right) \right]. \quad (27.29)$$

Ha  $\lambda = 0$  (27.5. ábra), akkor

$$k_x = k_{x_0} + \frac{\psi k_f}{h (x_s - x_0)} \left[ x_s (x - x_0) - \left( \frac{x^2 - x_0^2}{2} \right) \right], \quad (27.30)$$

ha  $\lambda = 1$  (27.5. ábra), akkor

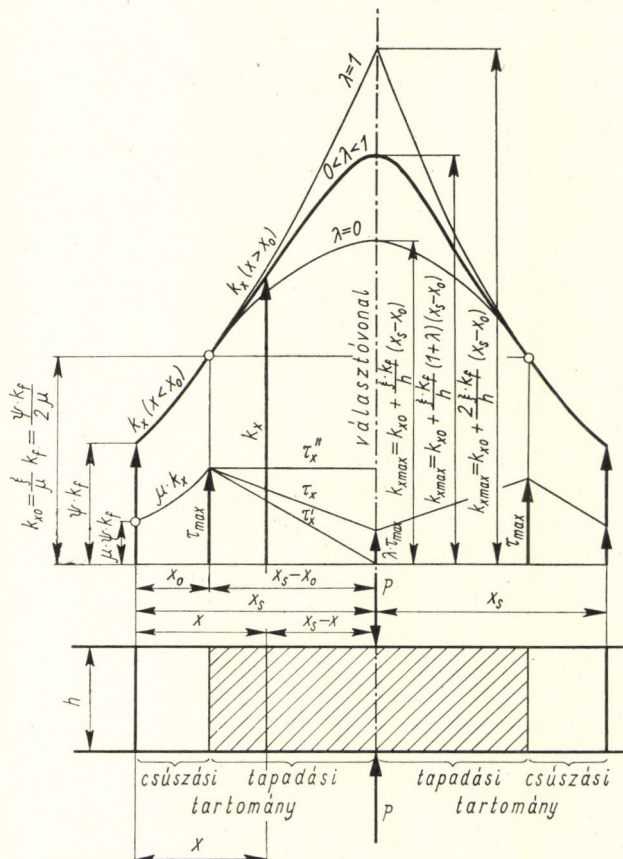
$$k_x = k_{x_0} + \frac{\psi k_f}{h (x_s - x_0)} [(x_s - x_0) (x - x_0)] = k_{x_0} + \frac{\psi k_f}{h} (x - x_0). \quad (27.31)$$

Az alakítási ellenállás legnagyobb értékét a választóvonalban éri el, tehát ott, ahol  $x = x_s$ :

$$k_{x \max} = k_{x_0} + \frac{\psi k_f}{h(x_s - x_0)} \cdot \left[ (x_s - \lambda x_0)(x_s - x_0 - 1 - \lambda) \left( \frac{x_s^2 - x_0^2}{2} \right) \right], \quad (27.32)$$

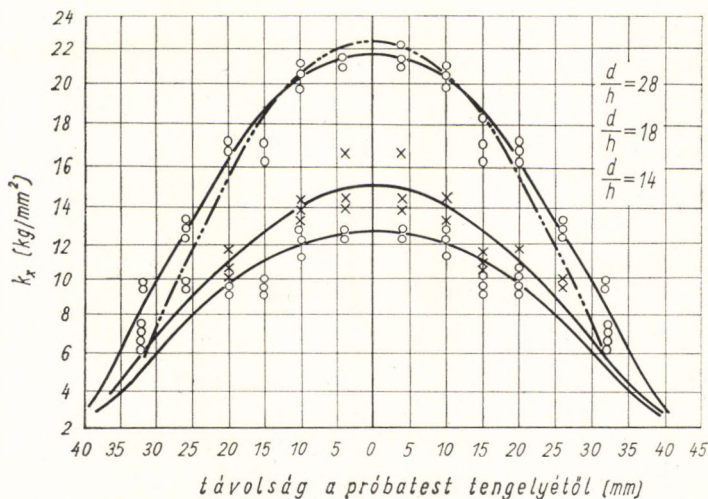
vagyis az alakítási ellenállás legnagyobb értéke:

$$k_{x \max} = k_{x_0} + \frac{0,5 \psi k_f}{h} (1 + \lambda)(x_s - x_0). \quad (27.33)$$



27.5. ábra. Az alakítási ellenállás eloszlásának meghatározása számítással a nyomófelületek mentén, GELEJI szerint





27.6. ábra. Az alakítási ellenállás eloszlásának kísérleti meghatározása a nyomófelületek mentén, UNKSZOV szerint

Ha  $\lambda = 0$ , akkor

$$k_{x\max} = k_{x_0} + \frac{0,5 \psi k_f}{h} (x_s - x_0), \quad (27.34)$$

ha  $\lambda = 1$ , akkor

$$k_{x\max} = k_{x_0} + \frac{\psi k_f}{h} (x_s - x_0). \quad (27.35)$$

Gyakorlati számításokhoz  $\lambda = 0,5$ -nek vehető fel. A 27.5. ábrán láthatjuk, hogyan oszlik el az alakítási ellenállás a nyomólapok felületén egy prizmatikus test összenyomása esetében, ha a nyomófelületek mentén egyidejűleg csúszási és tapadási tartomány is van. Ennek kísérleti igazolása a 27.6. ábrán látható [27.2].

Ha a nyomott prizma a nyomófelületen nem tapad, mert a súrlódási tényező nagyon kicsi, vagyis amikor a prizma szabadon szélesedik, akkor a prizma keresztmetszetei sík lapok maradnak (27.7. ábra).

Ha a nyomott anyag a nyomófelületek mentén tapad, a hengeres acéloszlop véges nagyságú összenyomása esetén hordóalakat vesz fel (27.8. és 27.9. ábra).

FR. KÖRBER és A. EICHINGER felteszi, hogy az oldallapok parabolikusan görbülnek meg (27.10. ábra). Ez a feltevés egy bizonyos alakítási mértéken túl már nem helytálló.

Összenyomásakor a függőleges keresztmetszetek elgörbülnek, és a prizma egész tömegében anyagelmozdulás lép fel, amelynek létrehozásához mind meleg-, mind hidegalakításnál járulékos erőre van szükség. Ha feltételezzük,

hogy a prizma oldallapjai parabolikusan görbülnek el, akkor a belső munkát a következőképpen számíthatjuk ki:

Alakváltozáskor az összenyomott prizmának abban a részében, amelynek nyomófelületei nem csúsznak a nyomólapon, a keresztmetszetek elgörbülése annál nagyobb, mennél távolabb vannak a választóvonalától. A kihasasodó rész térfogata azonos a nyomás által kiszorított térfogattal (27.10. ábra). A 27.10. ábra szerint egy hengeres prizma összenyomásakor a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{2}{3} (h - \Delta h) m 2\rho\pi = r^2 \pi \Delta h = V_v. \quad (27.36)$$

$V_v$  az elnyomott anyag térfogata a tapadási zónában.

A súlypont távolsága a tengelytől:

$$e = r + \frac{2}{5} m. \quad (27.37)$$

A (27.36) és (27.37) egyenlet segítségével a következő összefüggéshez jutunk:

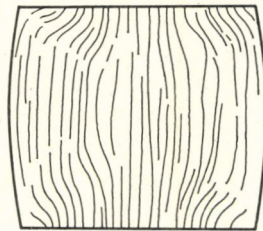
$$\frac{2}{5} m^2 + mr - \left[ \frac{r^2 \Delta h}{\frac{4}{3} (h - \Delta h)} \right] = 0, \quad (27.38)$$

és ebből

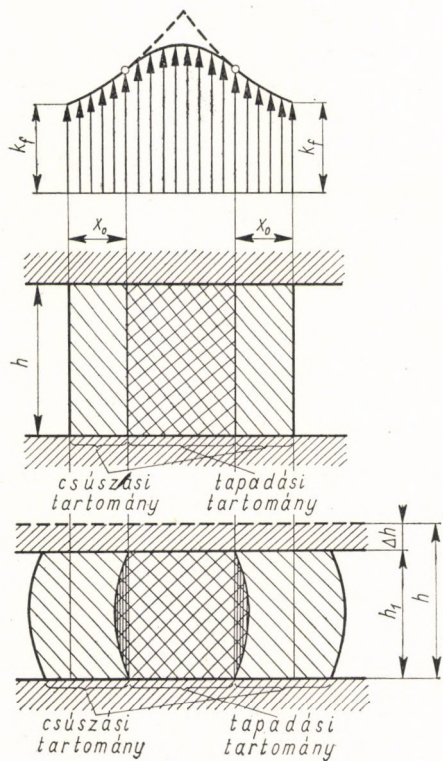
$$m = 1,25 r \left[ \pm \sqrt{1 + 1,2 \left( \frac{\Delta h}{h - \Delta h} \right) - 1} \right]. \quad (27.39)$$



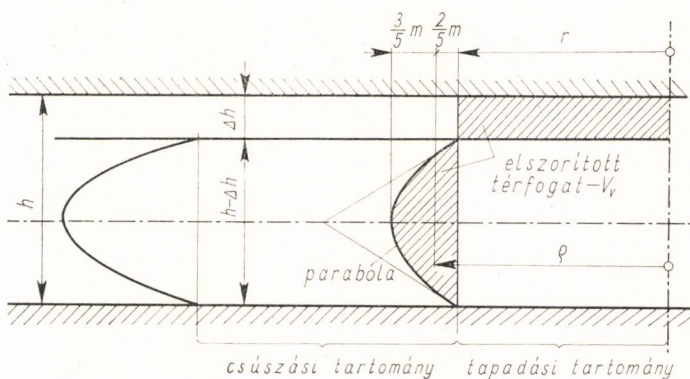
27.7. ábra. Egy nyomott fémhenger keresztmetszete. A nyomólapok kenve vannak



27.8. ábra. Egy nyomott fémhenger keresztmetszete. A nyomólapok szárazak



27.9. ábra. A nyomott prizma oldallapjainak kihasadása a tapadási tartományok hatására



27.10. ábra. A két párhuzamos nyomólap között nyomott prizma alakváltozása a tapadási tartományban

A (27.39) egyenlet és a 27.11. ábra értelmében

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (27.40)$$

és

$$\Delta V_v = (r_1^2 - r_2^2) \pi \Delta h. \quad (27.41)$$

Ha a nyomott prizma nem hengeres, hanem paralelepipedikus, akkor a 27.12. ábra szerint:

$$\frac{2}{3} am (h - \Delta h) = \frac{1}{2} ab \Delta h, \quad (27.42)$$

és ebből

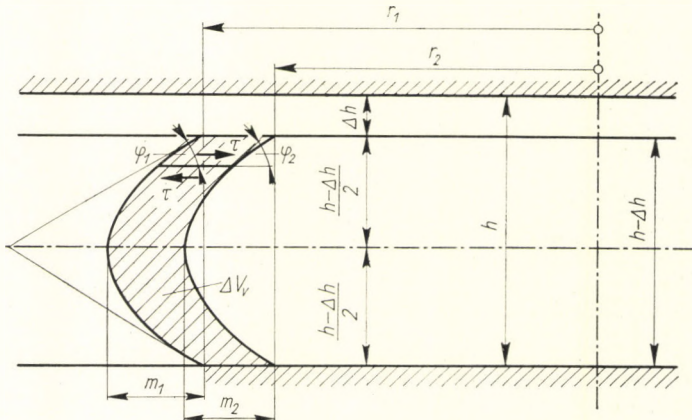
$$m = \frac{b \Delta h}{\frac{4}{3} (h - \Delta h)}. \quad (27.43)$$

A térfogategységre eső belső munka:

$$A_b = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \varphi. \quad (27.44)$$

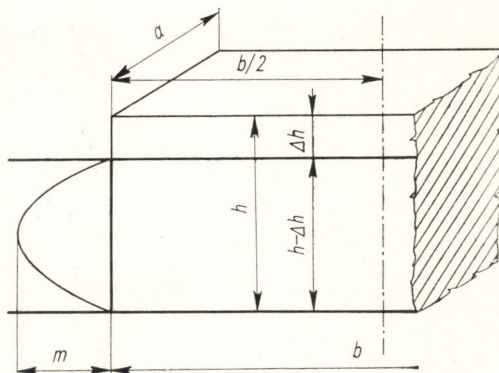
A csúszási szög a nyomófelületek közelében:

$$\varphi_0 = \arctg \frac{4m}{(h - \Delta h)}. \quad (27.45)$$



27.11. ábra. A belső anyagmozdulások létrehozásához szükséges külső munka meghatározása, ha a nyomott prizma hengeres

27.12. ábra. A belső anyagmozdulások létrehozásához szükséges külső munka meghatározása, ha a nyomott prizma négyzetes keresztmetszetű



Az anyagmozdulásokat létrehozó összes belső munka:

$$A_{b\ddot{o}} \approx \frac{k_f}{\sqrt{3}} \frac{\varphi_0}{2} V. \quad (27.46)$$

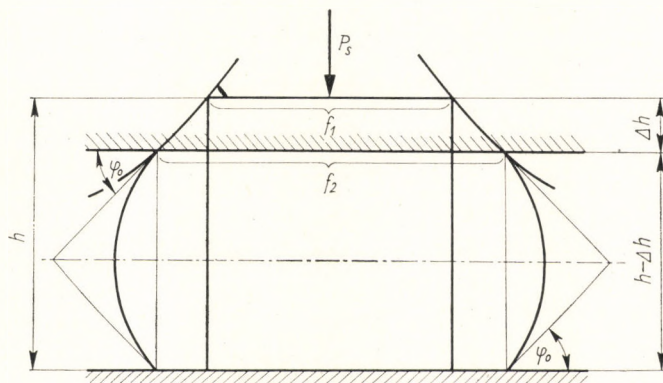
$V$  az összenyomott hengeres test ösztérfogata,  $\varphi_0$  a csúszási szög a nyomófelületek közelében (27.13. ábra).

A belső munka létrehozásához szükséges nyomóerőt a (27.46) egyenlettel megadott belső munkából lehet meghatározni (27.13. ábra):

$$P_s \Delta h = \frac{k_f}{2\sqrt{3}} \varphi_0 V, \quad (27.47)$$

vagyis

$$P_s = \frac{k_f}{2\sqrt{3}} \varphi_0 \frac{V}{\Delta h}, \quad (27.48)$$



27.13. ábra. A nyomóerő kiszámítása

azaz a fajlagos nyomás a nyomófelületen:

$$k_s = \frac{k_f}{2\sqrt{3}} \frac{\varphi_0}{f_m} \frac{V}{\Delta h}, \quad (27.49)$$

ahol

$$f_m = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (27.50)$$

a közepes nyomófelület.

A fentiek szerint egy nyomólap mentén működő alakítási ellenállás mindenkor a  $k_x$  és a  $k_s$  fajlagos felületi nyomás összege. Tehát a közepes alakítási ellenállást a nyomólap mentén a 27.14. ábra segítségével állapíthatjuk meg. Eszerint

$$k_k = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{x_s}, \quad (27.51)$$

ahol

$$T_1 = \psi k_f \int_0^{x_0} e^{\frac{2\mu}{h}x} dx = \frac{\psi k_f h}{2\mu} \left( e^{\frac{2\mu}{h}x_0} - 1 \right), \quad (27.52)$$

$$T_2 = k_{x_0} (x_s - x_0) = \psi k_f e^{\frac{2\mu}{h}x_0} (x_s - x_0) = \frac{\psi k_f}{2\mu} (x_s - x_0), \quad (27.53)$$

$$T_3 = \frac{2}{3} (k_{\max} - k_{x_0}) (x_s - x_0) = \frac{2}{3} \psi k_f \frac{(x_s - x_0)^2}{h}, \quad (27.54)$$

$$T_4 = k_s x_s = \frac{k_f}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\varphi_0 V}{f_m \Delta h} x_s, \quad (27.55)$$

[l. a (27.49) egyenletet].

Eddigi tárgyalásaink négyzetes keresztmetszetű prizmákra vonatkoztak. Körkeresztmetszetű prizmáknak párhuzamos nyomólapok között történő összenyomásakor (27.15. ábra) az elemi hengeres gyűrű egyensúlyi egyenlete:

$$-(\sigma_r + d\sigma_r) 2(r + dr) \pi h - 4 r \pi dr k_r \mu + \sigma_r 2 r \pi h = 0, \quad (27.56)$$

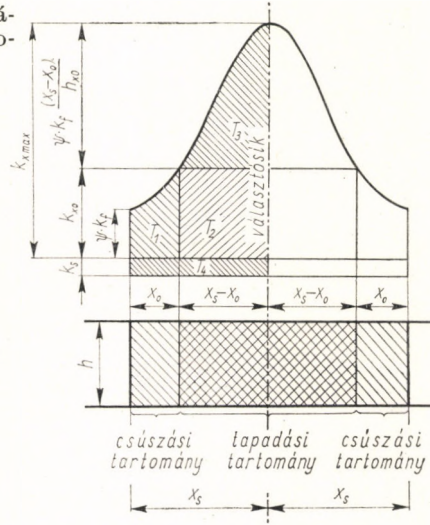
s ebből

$$2 \pi \sigma_r dr h + 2 \cdot 2 r \pi dr k_r \mu + 2 r \pi h d\sigma_r = 0. \quad (27.57)$$

Rendezés és a  $\frac{\sigma_r}{r}$ -es tag elhanyagolása után:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 2 \frac{\mu}{h} k_r = 0. \quad (27.58)$$

27.14. ábra. A közepes alakítási ellenállás kiszámítása, amikor a prizmat két párhuzamos nyomóalapot között nyomják össze



A folyási feltétel szerint:  $k_r = \sigma_r + \psi k_f$ . Ezt behelyettesítve a (27.58) egyenletbe:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \left(2 \frac{\mu}{h}\right) \sigma_r + \left(2 \frac{\mu}{h} \psi k_f\right) = 0. \quad (27.59)$$

Legyen

$$u = a\sigma_r + b, \quad (27.60)$$

ahol

$$a = 2 \frac{\mu}{h} \text{ és } b = 2 \frac{\mu}{h} \psi k_f, \quad (27.61)$$

a (27.60) egyenletből

$$d\sigma_r = \frac{1}{a} du. \quad (27.62)$$

Ezek szerint a (27.59) egyenlet így alakul:

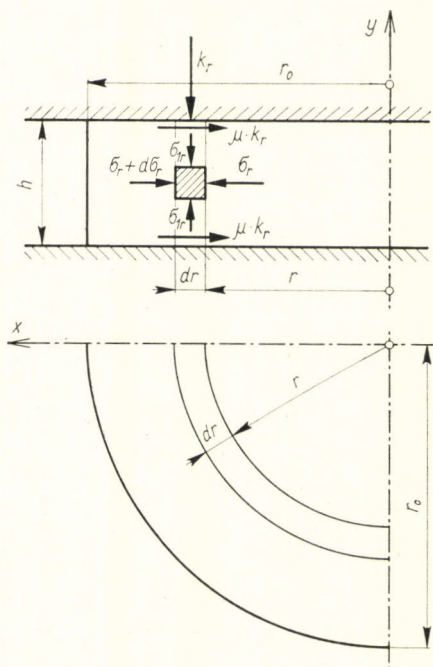
$$\frac{1}{a} \frac{du}{dr} + u = 0, \quad (27.63)$$

és ebből

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u} = -a \int_0^r dr = -ar. \quad (27.64)$$

Az integrálást elvégezve:

$$\ln \frac{a\sigma_r + b}{a\sigma_{max} + b} = -ar, \quad (27.65)$$



27.15. ábra. Az alakítási ellenállás kiszámítása körszelvényű prizma összenyomása esetében

amiből

$$\sigma_r = k_{r \max} e^{-ar} - k_f. \quad (27.66)$$

Mint ahogy

$$\sigma_r + \psi k_f = k_r = k_{r \max} e^{-ar}, \quad (27.67)$$

a fentiekből az következik, hogy ha

$$r = r_0, \quad \sigma_r = 0$$

és

$$k_f = \psi k_{r \max} e^{-ar_0}, \quad (27.68)$$

azaz

$$k_{r \max} = \psi k_f e^{\frac{2\mu}{h} r_0}, \quad (27.69)$$

akkor

$$k_r = \psi k_f \left( e^{\frac{2\mu}{h} r_0} \right) e^{-2 \frac{\mu}{h} r}, \quad (27.70)$$

vagyis

$$k_r = \psi k_f e^{\frac{2\mu}{h} (r_0 - r)}. \quad (27.71)$$



Amennyiben a nyomófelület mentén tapadás lép fel, a tapadási tartományon belül  $k_r$  [(27.20) egyenlet] a

$$\frac{dk_r}{dr} = \frac{2 \tau_r}{h} \quad (27.72)$$

differenciálegyenlettel határozható meg, mint ahogy azt a 27.5. ábrával kapcsolatban láttuk.

Ha négyzetes keresztmetszetű prizmat nyomunk össze, akkor  $k_x$  eloszlását a nyomott felület mentén oldal- és felülnézetben első megközelítésben a 27.16. ábra mutatja. A  $k_{\max}$ -ok mindenütt a választóvonalba, illetve a választósíkokba esnek. Ebben az esetben a prizma nyomólapjára ható eredő nyomás, amely a képlékeny alakváltozáshoz szükséges:

$$P = \frac{b^2 (k_{\max} - \psi k_f)}{3} + \frac{b(l-b)(k_{\max} - \psi k_f)}{2} + lb \psi k_x. \quad (27.73)$$

Ha a nyomott prizma keresztmetszete egyenlő oldalú háromszög (27.17. ábra), akkor az összenyomáshoz szükséges nyomóerőt a következőképpen lehet kiszámítani:

$k_{\max}$  a beírt kör középpontjába ( $K$  pontba) esik. Az  $OK$  választósíkba eső  $k_y$  alakítási ellenállások nagyságai által meghatározott görbe egyenlete (27.17. ábra):

$$k_y = \psi k_f e^{\frac{2\mu}{h} y}. \quad (27.74)$$

Ebben az egyenletben

$$\left. \begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} 30^\circ = 0,577x, \\ r &= 0,29a, \end{aligned} \right\} \quad (27.75)$$

tehát

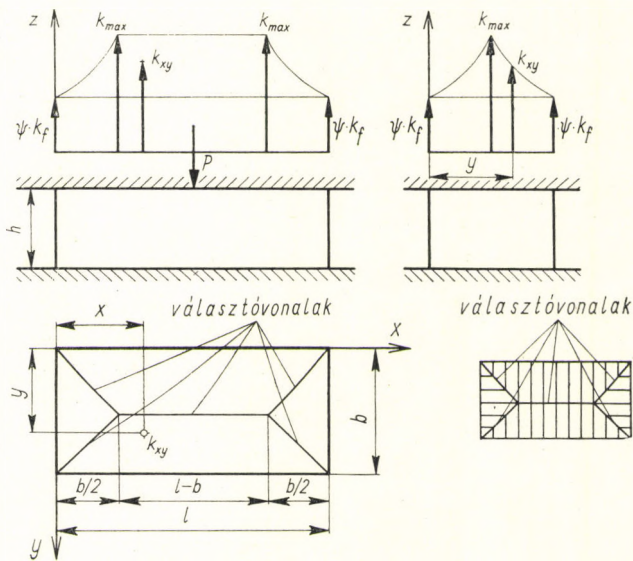
$$k_y = \psi k_f e^{1,154 \frac{\mu}{h} x}. \quad (27.76)$$

A legnagyobb alakítási ellenállás a  $K$  pontban

$$k_{\max} = \psi k_f e^{0,577 \frac{\mu}{h} a}, \quad (27.77)$$

minthogy itt

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{és} \quad y = r.$$



27.16. ábra. A téglalap keresztmetszetű prizma összenyomásához szükséges nyomóerő kiszámítása

Az egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű prizma összenyomásához szükséges erő:

$$P = \psi k_f T + \frac{T (k_{\max} - \psi k_f)}{3}, \quad (27.78)$$

ahol a háromszög területe

$$T = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}. \quad (27.79)$$

Ha a nyomott prizma olyan sokszög, amelybe kört lehet írni, akkor a  $P$  összenyomóerőt hasonló gondolatmenettel állapíthatjuk meg (27.18. ábra).

Ha beírható egy  $r$  sugarú kör, akkor  $k_{\max}$  kiszámítható:

$$k_{\max} = \psi k_f e^{\frac{2\mu}{h} x \operatorname{tg} \alpha} = \psi k_f e^{\frac{2\mu}{h} r}, \quad (27.80)$$

minthogy  $r = x \operatorname{tg} \alpha$ .

A szükséges összenyomóerő:

$$P = T \psi k_f + \frac{T (k_{\max} - \psi k_f)}{3}, \quad (27.81)$$

ahol  $T$  a sokszög területe.

A közepes alakítási ellenállás (fajlagos felületi nyomás) általánosságban közelítőleg így írható:

$$k_k = \psi k_f + \frac{k_{\max} - \psi k_f}{3}. \quad (27.82)$$

A prizmatikus test összenyomásához szükséges munka:

$$L = \int_{h_1}^{h_2} P \, dh, \quad (27.83)$$

ahol

$$P = k_k f. \quad (27.84)$$

Ebben az egyenletben  $k_k$  a közepes alakítási ellenállás a prizma nyomófelülete mentén és  $f$  a prizma nyomófelülete. A közepes alakítási ellenállás a csúszási tartományban [(27.22) egyenlet]:

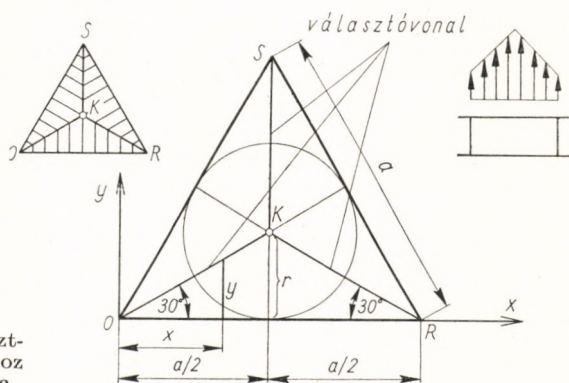
$$k_k = \frac{\psi k_f h}{2 \mu x_0} \left( e^{\frac{2\mu}{h} x_0} - 1 \right), \quad (27.85a)$$

illetve, ha  $b$  a darab szélessége és  $x = \frac{b}{2}$ :

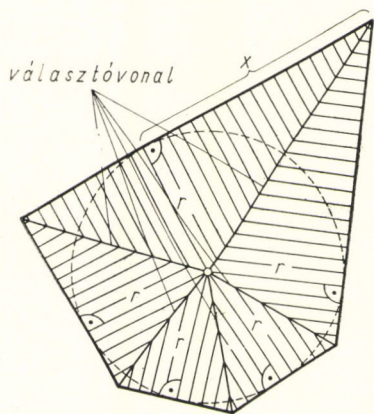
$$k_k = \frac{\psi k_f h}{\mu b} \left( e^{\frac{\mu b}{h}} - 1 \right). \quad (27.85b)$$

A prizma térfogata  $V$ ; ha a darab kihasasodását nem tekintjük, a mindenkori keresztmetszet:

$$f = \frac{V}{h}. \quad (27.86)$$



27.17. ábra. A háromszög keresztmetszetű prizma összenyomásához szükséges nyomóerő kiszámítása



27.18. ábra. A sokszög keresztmetszetű prizma összenyomásához szükséges erő kiszámítása

Ezek szerint a prizma összenyomásához szükséges elemi munka:

$$dL = k_k V \frac{dh}{h}, \quad (27.87)$$

illetve

$$dL = \frac{\psi k_f h}{\mu b} V \left( \frac{e^{\frac{\mu b}{h}} - 1}{h} \right) dh. \quad (27.88)$$

Ha tehát a prizmát  $h_1$  magasságról  $h_2$  magasságra nyomjuk össze, az ehhez szükséges munka, amennyiben feltételezzük, hogy a prizmaiban csak egytengelyű feszültségi állapot lép fel, továbbá hogy a nyomólapon nincs tapadás:

$$L = \frac{\psi k_f V}{\mu b} \int_{h_1}^{h_2} h \left( \frac{e^{\frac{\mu b}{h}} - 1}{h} \right) dh. \quad (27.89)$$

Ez az integrál így is felírható:

$$L = \frac{\psi k_f V}{\mu b} \left[ \int_{h_1}^{h_2} e^{\frac{\mu b}{h}} dh - (h_2 - h_1) \right]. \quad (27.90)$$

A zárójelben levő második tagot nem lehet zárt alakban kiszámítani, csak sorbafejtés útján.

Tegyük fel, hogy  $\frac{\mu b}{h} = \frac{\omega}{h} = y$ , ill.  $h = \frac{\omega}{y}$ , akkor  $h = \omega y^{-1}$  és  $dh = -\omega \cdot y^{-2} dy$ ; az integrál sorbafejtve a következőképpen alakul:

$$\int e^{\frac{\mu b}{h}} dh = -\mu b \int \frac{1}{y^2} e^y dy =$$

$$= -\mu b \left[ -\frac{e^{\frac{\mu b}{h}}}{\frac{\mu b}{h}} + \ln \left| \frac{\mu b}{h} \right| + \frac{\mu b}{h} + \frac{\left(\frac{\mu b}{h}\right)^2}{2 \cdot (2!)} + \frac{\left(\frac{\mu b}{h}\right)^3}{3 \cdot (3!)} + \dots \right] \quad (27.91)$$

Ez az integrál a gyakorlatban előforduló  $h_1$  és  $h_2$  határok között elhanyagolható, és így az alakváltozási munkát egy prizmatikus test összenyomásánál

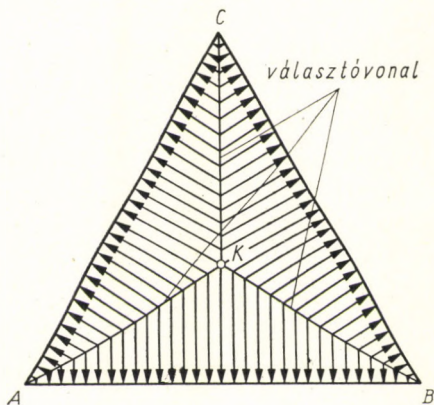
$$L = \frac{\psi k_f}{\mu b} V (h_1 - h_2) \quad (27.92)$$

képlettel lehet kifejezni abban az esetben, ha a prizma az összenyomás folyamán nem hasasodik ki. Ha kihasasodik, akkor az  $L$ -vel kifejezett munkához a (27.46) képlettel kifejezett belső munkát is hozzá kell adni.

## 28. A NYOMOTT PRIZMA KERESZTMETSZETÉNEK VÁLTOZÁSA A MAGASSÁGCSÖKKENÉS KÖVETKEZTÉBEN

Már a 27.7.—27.12. ábránál rámutattunk, hogy a nyomott prizma nyomásirányba eső függőleges metszetei az alakítás folytán nem maradnak síkok, hanem elgörbülnek, a nyomott prizma kihasasodik, hordó alakot vesz fel. Ha a nyomott test keresztmetszete kör alakú, akkor a keresztmetszet alakja a nyomás folyamán nem változik, ha viszont a nyomott test négyzetes keresztmetszetű, akkor a keresztmetszet oldalai elgörbülnek. Egy prizma összenyomásakor az anyag a nyomásirányra merőleges keresztmetszet oldalai felé áramlik. Ha a keresztmetszet nem kör, hanem például négyzet, akkor az alakváltozás megindulásakor a keresztmetszeten olyan vonalakat fedezünk fel, amelyek mentén az áramlás iránya megváltozik. Ezért ezeket a vonalakat választóvonalaknak nevezzük. Azonban nemcsak az állapítható meg, hogy az áramlás iránya más a választóvonal két oldalán, hanem az is, hogy itt az alakítási ellenállás kisebb, mint a választóvonalban.

Egy háromszögű keresztmetszetben a háromszögbe írt kör középpontját a háromszög csúcsaival összekötő vonalak rendszere teszi a választóvonal-rendszert (28.1. ábra). Az anyag áramlása az alakváltozás elején merőleges a háromszög oldalaira.



28.1. ábra. Feltételezett választóvonalak egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű prizma összenyomásánál

Négyzetes keresztmetszetű prizmák összenyomására vonatkozólag a választóvonalak és a kezdeti anyagáramlások iránya a 28.2. ábrán láthatók.

Valamely választóvonal, illetve választósík mindkét oldalára ható erők egyensúlyban tartják egymást.

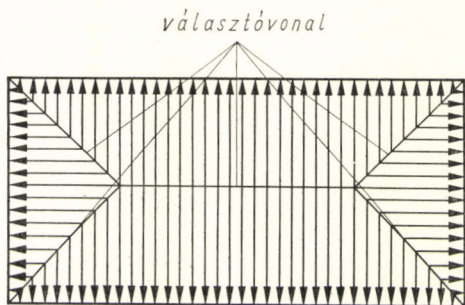
Egy összenyomott prizma keresztmetszetének alakváltozását a következő elgondolás alapján kell elképzelni (28.3. ábra):

$AO$  és  $OB$  a nyomott prizma keresztmetszetének egy-egy oldala. A két oldal egymással  $\alpha$  szöget zár be, az  $OC$  választóvonal pedig az  $OA$  és az  $OB$  oldallal  $\frac{\alpha}{2}$  szöget. A  $dz$  vastagságú  $dx \cdot dy \cdot dz = dV$  térfogatú elemi prizma képlékeny alakváltozására jellemző, hogy  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ . Tehát a prizma összenyomásakor a magasságirányú fajlagos alakváltozás:

$$|\varepsilon_z| = |\varepsilon_x + \varepsilon_y|. \quad (28.1)$$

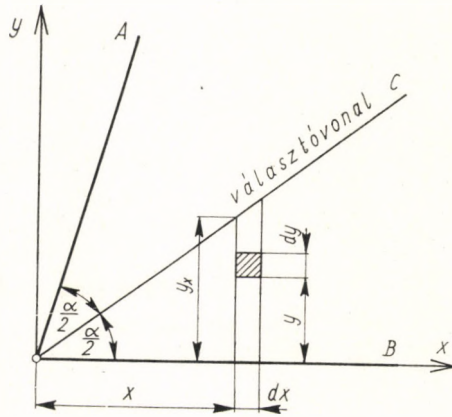
Mint hogy az  $OC$  választósík a prizma alakváltozásakor helyét nem változtatja, az  $y_x$  koordináta az alakváltozás folyamán  $\lambda_x$ -szel növekedik

$$\lambda_x = y_x \varepsilon_y, \quad (28.2)$$



28.2. ábra. Feltételezett választóvonalak egy téglalap keresztmetszetű prizma összenyomásánál

28.3. ábra



illetve

$$\lambda_x = y_x |\varepsilon_z + \varepsilon_x|. \quad (28.3)$$

Ha feltételezzük, hogy  $\varepsilon_x = 0$ , akkor

$$\lambda_x = y_x \varepsilon_z. \quad (28.4)$$

Az  $y_x$  hosszúságokból

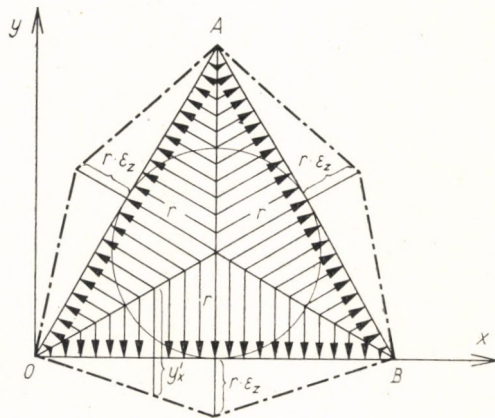
$$y'_x = y_x (1 + \varepsilon_z) \quad (28.5)$$

hosszúságok lesznek (28.4. ábra).

Ha a prizma magassága  $h$ , akkor a fenti képletekben

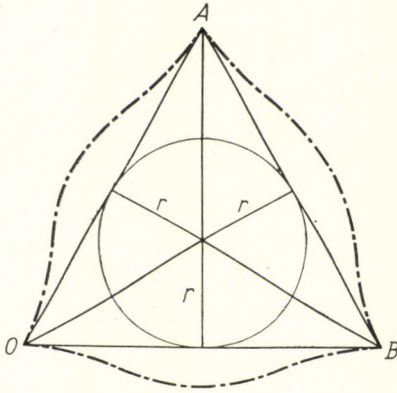
$$\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} \quad \text{és} \quad y_x = x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (28.6)$$

itt  $\Delta h$  a magasságesökkenés.



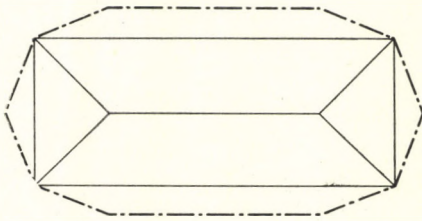
28.4. ábra. Az egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű nyomott prizma keresztmetszetének változása első közelítésben

28.5. ábra. Az egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű nyomott prizma keresztmetszetének alakja

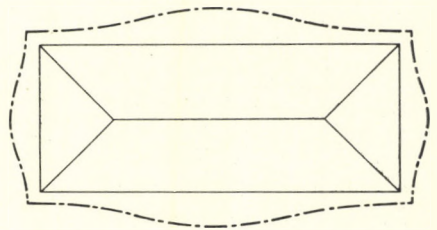


Mint hogy azonban  $\varepsilon_x \neq 0$ , a háromszög alakú keresztmetszetből nem egyenesoldalú hatszög lesz, hanem alakja a 28.5. ábra szerint változik.

Négyzetes keresztmetszetű prizma keresztmetszete összenyomás hatására első megközelítésben a 28.6. ábra szerint alakulna. A négyzetes keresztmetszet tényleges alakulása a 28.7. ábrán látható.



28.6. ábra. A téglalap keresztmetszetű nyomott prizma keresztmetszetének alakja első megközelítésben



28.7. ábra. A téglalap keresztmetszetű nyomott prizma keresztmetszetének alakja



### III. HAJLÍTÁS

#### 29. TETSZŐLEGES KERESZTMETSZETŰ RÚD ELASZTIKUS-PLASZTIKUS HAJLÍTÁSA

Ha egy rudat, amelynek keresztmetszete a hossza mentén állandó, fokozatos terhelés mellett hajlítunk, akkor először csak rugalmas feszültségek lépnek fel benne. A terhelés növekedésével a feszültség a rúd szélső szálaiban eléri a rúd anyagának folyási határát. A terhelés további növekedésével a rúd keresztmetszeteinek mind nagyobb és nagyobb része deformálódik maradón. Vizsgáltaink folyamán feltesszük, hogy a rúd anyaga rugalmas-képlékeny (29.1. ábra). [29.1].

A rúd keresztmetszetében képlékenyen alakított tartományokat ( $F''$  és  $F'''$ ) és csak rugalmasan alakított tartományt ( $F'$ ) kell megkülönböztetni. A képlékeny tartományokban fellépő feszültség  $\sigma_f$ . A rúdkeresztmetszet középső  $F'$  részében, ahol a hajlítófeszültség a folyási határt nem érte el, a feszültség  $\sigma$ , amely a rugalmas tartományon belül  $y$  ordináta lineáris függvénye:

$$\sigma = a + cy \quad (29.1)$$

Az  $F$ ,  $F'$  és  $F''$  keresztmetszetnek a  $OO$  egyenesre vonatkoztatott statikus nyomatéka  $S$ ,  $S'$  és  $S''$ , inercianyomatéka  $J$ ,  $J'$  és  $J''$ . A plasztikus zónák határain  $y = y'$  és  $y = y''$ , a feszültség  $\sigma = \pm \sigma_f$  vagyis

$$\left. \begin{aligned} a + cy' &= \sigma_f, \\ a + cy'' &= -\sigma_f. \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

A (29.2/1) egyenletből:

$$a = \sigma_f - cy', \quad (29.3)$$

ezt behelyettesítve a (29.2/2) egyenletbe:

$$\sigma_f - cy' + cy'' = -\sigma_f, \quad (29.4)$$

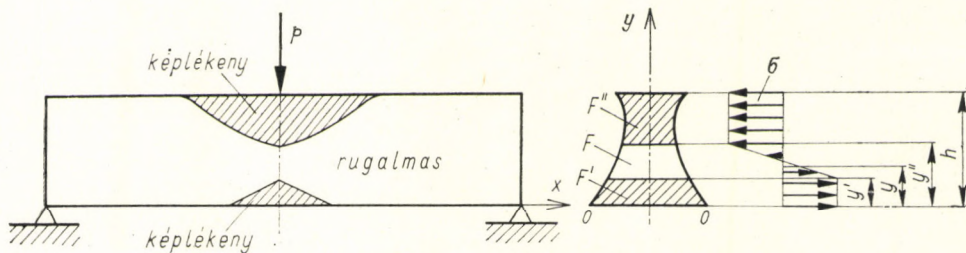
$$2\sigma_f - c(y' - y'') = 0, \quad (29.5)$$

és így

$$c = \frac{2\sigma_f}{y' - y''}. \quad (29.6)$$

A (29.2/1) egyenletből:

$$c = \frac{\sigma_f - a}{y'}. \quad (29.7)$$



29.1. ábra. A hajlított rúd elasztikus és plasztikus tartományai

Ezt behelyettesítve a (29.2/2) egyenletbe

$$a + \frac{\sigma_f - a}{y'} y'' = -\sigma_f, \quad (29.8)$$

vagyis

$$a + \sigma_f \frac{y''}{y'} - a \frac{y''}{y'} = -\sigma_f. \quad (29.9)$$

Az egyenlet rendezve:

$$a \left(1 - \frac{y''}{y'}\right) = -\sigma_f - \sigma_f \frac{y''}{y'} = -\sigma_f \left(1 + \frac{y''}{y'}\right), \quad (29.10)$$

és ebből

$$a = -\sigma_f \left(\frac{y' + y''}{y' - y''}\right). \quad (29.11)$$

A hajlított keresztmetszetre vonatkoztatott egyensúlyi feltétel, ha  $q(y)$  a keresztmetszetet határoló görbe egyenlete:

$$\int_{y'}^{y''} \sigma q \, dy + \sigma_f (F' - F'') = 0. \quad (29.12)$$

Ha  $\sigma$ -t a (29.1) egyenletből behelyettesítjük, akkor

$$\int_{y'}^{y''} (a + cy) q \, dy + \sigma_f (F' - F'') = 0, \quad (29.13)$$

vagy

$$\int_{y'}^{y''} aq \, dy + \int_{y'}^{y''} qcy \, dy + \sigma_f (F' - F'') = 0. \quad (29.14)$$

A (29.14) egyenlet írható a következő formában:

$$aF + cS + \sigma_f (F' - F'') = 0. \quad (29.15)$$

ugyanis

$$\int_{y'}^{y''} a q \, dy = a \int_{y'}^{y''} q \, dy = a F, \quad (29.16)$$

$$\int_{y'}^{y''} c q y \, dy = c \int_{y'}^{y''} q y \, dy = S, \quad (29.17)$$

ahol  $S$  a rugalmas tartomány statikus nyomatéka az  $OO$  tengelyre.

Ezek szerint a (29.12) egyensúlyi egyenlet a következőképpen írható fel:

$$aF + cS + \sigma_f(F' - F'') = 0. \quad (29.18)$$

Ez az egyenlet azonban a (29.6) és a (29.11) egyenlet segítségével így is felírható:

$$-\sigma_f \left( \frac{y' + y''}{y' + y''} \right) F + \frac{2\sigma_f}{y' - y''} S = \sigma_f(F'' - F'). \quad (29.19)$$

A hajlítónyomaték,

$$M = \frac{P}{2} x \quad (29.20)$$

két részből tevődik össze:

$$M = \int_{y'}^{y''} \sigma y q \, dy + (S' - S'') \sigma_f; \quad (29.21)$$

az első tag a rugalmas erők tartományának, a második tag a képlékeny tartományoknak a nyomatéka.

A (29.21) egyenlet további behelyettesítések után a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} M &= \int_{y'}^{y''} (a + cy) y q \, dy + (S' - S'') \sigma_f = \\ &= \int_{y'}^{y''} a y q \, dy + \int_{y'}^{y''} c y^2 q \, dy + (S' - S'') \sigma_f. \end{aligned} \quad (29.22)$$

A (29.22) egyenletben:

$$\int_{y'}^{y''} a y q \, dy = S a, \quad (29.23)$$

és

$$\int_{y'}^{y''} c y^2 q \, dy = b J. \quad (29.24)$$

A nyomatéki egyenlet általánosságban:

$$M = S a + J c + (S' - S'') \sigma_f, \quad (29.25)$$

ahol  $S$  a rugalmas tartomány statikus nyomatéka,  $J$  a rugalmas tartomány inercianyomatéka az  $OO$  tengelyre.

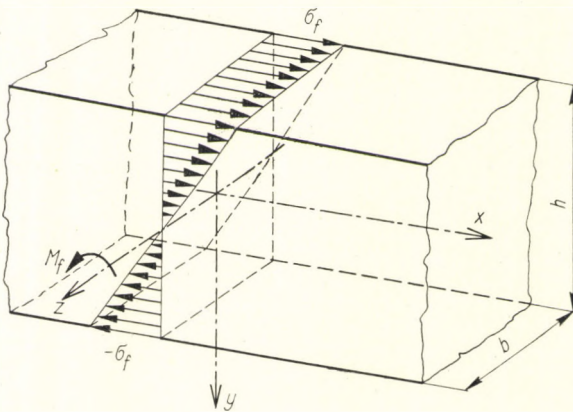
### 30. A NÉGYZETES KERESZTMETSZETŰ RÚD ELASZTIKUS-PLASZTIKUS HAJLÍTÁSA

A hajlításra igénybevett rúdban fellépő feszültségeket annak a követelésnek alapján számítjuk ki, hogy a keresztmetszet egyik oldalán ható erőknek egyensúlyt kell tartaniok a keresztmetszetben keletkező erőkkel. Tiszta hajlítás esetén a külső erőkkel egy  $M_f$  nyomatékú erőpár egyenértékű, amely az  $xy$  síkban a  $z$  tengely körül fordul el [30.1] (30.1. ábra).

Legyen a hajlításra igénybevett rúd magassága  $h$  és szélessége  $b$ . A rúd szélső szálaiban  $\sigma_f$  folyási határnak megfelelő feszültség lép fel, ha a  $z$  tengely körül fellépő nyomaték:

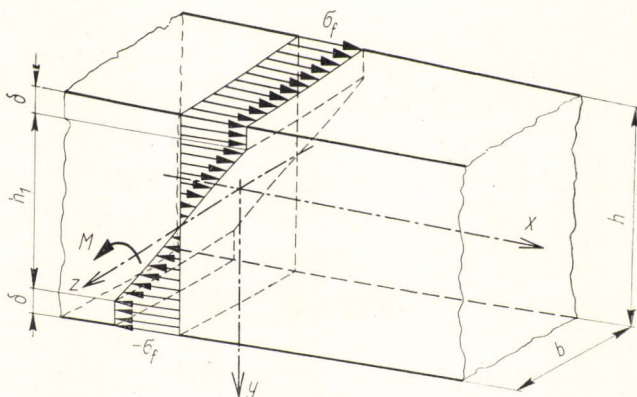
$$M_f = \sigma_f \frac{2J}{h} = \sigma_f \frac{h^2 b}{6}, \quad (30.1)$$

$J$  a hajlított rúd tehetetlenségi nyomatéka. Ha ennél az  $M_f$  nyomatéknál kisebb a hajlítónyomaték, akkor csak rugalmas alakváltozás lép fel a rúdban. Ha a  $z$  tengely körüli forgatónyomaték nagyobb  $M_f$ -nél, akkor a rúd szélső rétegeiben  $\delta = 0,5 (h - h_1)$  vastagságú maradéan alakított rétegek keletkeznek (30.2. ábra).  $h_1$  a csak rugalmasan deformált réteg vastagságát jelenti.



30.1. ábra. Négyzetes keresztmetszetű rúd hajlítása a folyási határig

30.2. ábra. Négyzetes keresztmetszetű rúd hajlítása a folyási határon túl



Az ahhoz szükséges hajlítónyomaték, hogy a hajlított rúd  $\delta$  vastagságú szélső rétegében maradó alakváltozás keletkezzék:

$$M = \sigma_f \left[ \frac{h_1^2 b}{6} + \frac{h - h_1}{2} b \left( h_1 + \frac{h - h_1}{2} \right) \right] = \sigma_f \left( \frac{3h^2 - h_1^2}{12} \right) b. \quad (30.2)$$

Ebből az egyenletből a csak rugalmasan deformált réteg vastagsága:

$$h_1 = \sqrt{3h^2 - \frac{12M}{\sigma_f b}}. \quad (30.3)$$

A maradóan deformált rétegek vastagsága:

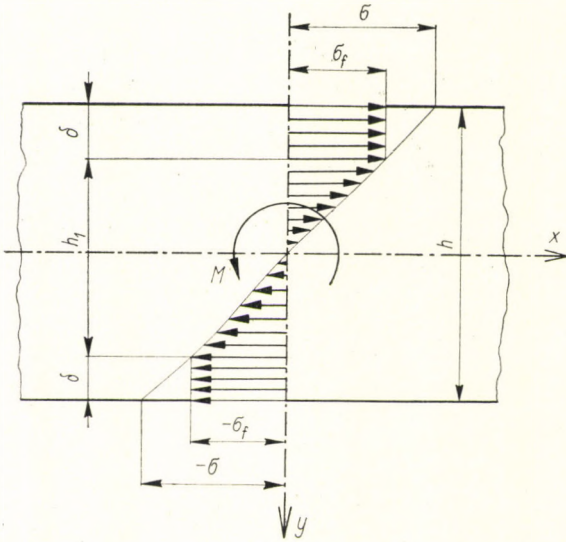
$$\delta = \frac{h - h_1}{2}. \quad (30.4)$$

Amikor a rúd külső szálaiban a feszültség eléri a folyási határt (30.1. ábra), a görbületi sugár:

$$\rho_f = \frac{JE}{M_f} = \frac{Eh}{2\sigma_f}. \quad (30.5)$$

Ez az a legkisebb görbületi sugár, amelynél a szélső rétegekben maradó alakváltozás még nem keletkezik, de a feszültség már elérte a folyási határt. Amikor tehát a görbületi sugár  $\rho_f$ -nél kisebb, a rúd felső és alsó szélén kialakul egy maradóan deformált réteg. Ha a rúd kisebb görbületi sugár mellett is csak rugalmasan változtatná alakját, akkor a szélső szálakban olyan rugalmas feszültség lépne fel, hogy  $\sigma$  nagyobb lenne  $\sigma_f$ -nél (30.3. ábra). Annak a feltételezésnek segítségével azonban, hogy kisebb görbületi

30.3. ábra. Hajlítás a folyási határon túl



sugár mellett is csak rugalmas feszültség lép fel, meg lehet határozni a csak rugalmas alakváltozást szenvedő réteg vastagságát. A 30.3. ábra szerint ugyanis

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = \frac{h}{h_1}, \quad (30.6)$$

és ebből

$$h_1 = \frac{\sigma_f}{\sigma} h. \quad (30.7)$$

A  $\sigma$  rugalmas feszültség

$$M = K\sigma \quad (30.8)$$

nyomaték mellett lépne fel;  $K$  a rúd keresztmetszeti tényezője. Ha tehát a rudat  $M > M_f$  nyomatékkal  $\varrho < \varrho_f$ -re görbíténénk, és a rúd csak rugalmasan változtatná alakját, akkor a szélső szálakban fellépő rugalmas feszültség

$$\sigma = \frac{M}{K} \quad (30.9)$$

lenne. Minthogy

$$M = \frac{JE}{\varrho}, \quad (30.10)$$

ahol  $E$  az anyag rugalmassági együtthatója, a szélső szálban fellépő rugalmas feszültség [(30.9) egyenlet] a következőképpen is felírható:

$$\sigma = \frac{JE}{\varrho K} = \frac{hE}{2\varrho}, \quad (30.11)$$

mivel

$$K = \frac{2J}{h}. \quad (30.12)$$

Az alakját csak rugalmasan változtató keresztmetszet vastagsága [(30.7) egyenlet, 30.3. ábra]:

$$h_1 = \frac{\sigma_f}{\sigma} h = \sigma_f \frac{2\varrho}{E}. \quad (30.13)$$

A (30.3) és a (30.13) egyenletből megkapjuk a rúd görbületi sugarát, amikor valamely keresztmetszetét  $M > M_f$  nyomaték terheli:

$$h_1 = \sigma_f \frac{2\varrho}{E} = \sqrt{3h^2 - \frac{12M}{\sigma_f b}}, \quad (30.14)$$

ebből

$$\varrho = \pm \frac{E}{2\sigma_f} \sqrt{3h^2 - \frac{12M}{\sigma_f b}}. \quad (30.15)$$

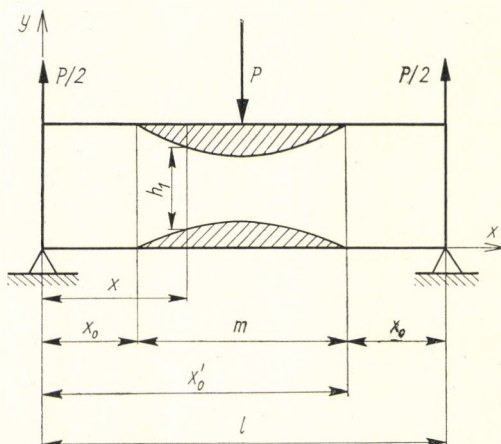
Ha egy kéttámaszú rúd  $M$  állandó nyomatékkal van terhelve, vagyis ha a rúd minden keresztmetszetét ugyanakkora nyomaték terheli, akkor a rúd semleges vonalának alakja  $\varrho$  sugarú kör lesz. Ha azonban a rudat egy közepén támaszó  $P$  erő terheli, akkor a rúd minden keresztmetszetében más a nyomaték (30.4. ábra):

$$M = \frac{Px}{2}. \quad (30.16)$$

Ennek az a következménye, hogy a rúdon lesznek olyan részek, ahol  $M < M_f$ , vagyis ahol csak rugalmas alakváltozás lép fel, és lesznek olyan részek, amelyekben maradó alakváltozás jelentkezik. Ahhoz, hogy a rúd alakját megállapíthassuk, illetve hogy a rúd semleges szálának egyenletét kiszámíthassuk, tudnunk kell, hogy a rúd melyik része változtatta alakját csak rugalmasan és melyik maradóan.

A csak rugalmasan deformált rúdrész ott végződik, illetve a maradóan deformált rész ott kezdődik, ahol  $h_1 = h$  [(30.3) egyenlet], tehát

$$h = h_1 = \sqrt{3h^2 - \frac{12M}{\sigma_f b}}. \quad (30.3a)$$



30.4. ábra. A hajlított rúd elasztikus és plasztikus tartományai

Ez a helyzet ott következik be, ahol

$$M = \frac{h^2 b}{6} \sigma_f. \quad (30.17)$$

A nyomaték a  $P$  erőtől balra eső rúdrész bármely keresztmetszetében:

$$M_b = \frac{Px}{2}, \quad (30.18)$$

a jobbra eső rúdrész bármely keresztmetszetében pedig

$$M_j = P \left( \frac{l-x}{2} \right). \quad (30.19)$$

A nyomaték ez értékeit tegyük egyenlővé a (30.17) egyenletben kifejezett nyomatékkal; az így létrejövő egyenletből megkapjuk az  $x_0$  hosszúságot, amely a csak rugalmasan deformálódó rúdrész hosszúságát jelenti:

$$\frac{Px_0}{2} = \frac{h^2 b}{6} \sigma_f, \quad (30.20)$$

és így

$$x_0 = \frac{h^2 b}{3} \cdot \frac{\sigma_f}{P}. \quad (30.21)$$



Ha ugyanezt a számítást evégezzük a (30.19) egyenlet segítségével, akkor

$$P \left( \frac{l - x'_0}{2} \right) = \frac{h^2 b}{6} \sigma_f. \quad (30.22)$$

A (30.4) ábra alapján:

$$x'_0 = l - x_0. \quad (30.23)$$

### 31. AZ ELASZTIKUS-PLASZTIKUSAN HAJLÍTOTT RÚD ALAKJA

A rúd semleges vonalának közelítő egyenletét az ismert másodrendű differenciálegyenlet segítségével határozhatjuk meg, mely szerint (30.4. ábra)

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (31.1)$$

A csak rugalmasan deformált rúdrészben a semleges vonal egyenlete:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{JE} = - \frac{Px}{2JE}, \quad (31.2)$$

s ebből

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{Px^2}{4JE} + C_u, \quad (31.3)$$

$$y = - \frac{Px^3}{12JE} + C_u x + C_w. \quad (31.4)$$

A maradéan deformált rúdrész semleges szálának egyenletét pedig a (30.15) egyenlet segítségével lehet meghatározni. Tehát:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{2 \sigma_f}{E \sqrt{3 h^2 - \frac{12 M}{\sigma_f b}}}. \quad (31.5)$$

Ez az egyenlet integrálható. Könnyebb áttekinthetőség végett legyen

$$M = \frac{Px}{2}; \quad a = 3 h^2; \quad d = \frac{6 P}{\sigma_f b}; \quad c = \frac{2 \sigma_f}{E},$$

így a (31.5) egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{c}{\sqrt{a - dx}}, \quad (31.6)$$

s ebből

$$\frac{dy}{dx} = - \int \frac{c dx}{\sqrt{a - dx}} + C_1 = \frac{2c}{d} \sqrt{a - dx} + C_1; \quad (31.7)$$

ahol

$$x = \frac{l}{2}, \quad \text{ott} \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

tehát

$$C_1 = - \frac{2c}{d} \sqrt{a - \frac{dl}{2}}. \quad (31.8)$$

A maradóan deformált rész besüllyedése:

$$y = \frac{2c}{d} \int \sqrt{a - dx} dx + C_1 x + C_2 = \frac{4}{3} \frac{c}{d^2} (a - dx)^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2. \quad (31.9)$$

Ebben az egyenletben  $C_1$  ismeretes [(31.8) egyenlet],  $C_2$ -t pedig meg kell határozni.  $C_2$  meghatározása azon az alapon történik, hogy az  $x = x_0$  és az  $x = l - x_0$  helyen a csak rugalmasan deformált rész első differenciáhányadosa és a maradóan deformált rész semleges szálának első differenciáhányadosa egymással egyenlő, illetve azonos, továbbá, hogy a besüllyedés nagysága is egyenlő, illetve azonos. A maradóan deformált részre vonatkozólag tehát:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = \frac{2c}{d} \sqrt{a - dx_0} + C_1 = C_i. \quad (31.10)$$

A rugalmasan deformált részre vonatkozólag:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = - \frac{P}{4JE} x_0^2 + C_u = C_i, \quad (31.11)$$

$$- \frac{P}{4JE} x_0^2 + C_u = \frac{2c}{d} \sqrt{a - dx_0} + C_1, \quad (31.12)$$

$$C_u = \frac{P}{4JE} x_0^2 + \frac{2c}{d} \sqrt{a - dx_0} + C_1. \quad (31.13)$$

A rugalmasan deformált rész semleges szálának egyenlete [(31.4) egyenlet]:

$$y = - \frac{P}{12JE} x^3 + C_u x + C_w, \quad (31.14)$$

ha  $x = 0$ ,  $y = 0$ , tehát  $C_w = 0$ , akkor

$$y = -\frac{P}{12JE}x^3 + C_u x, \quad (31.14a)$$

ha  $x = x_0$ , akkor a rugalmas vonal besüllyedése:

$$y_0 = -\frac{P}{12JE}x_0^3 + C_u x_0. \quad (31.15)$$

A maradón deformált rész semleges szálának egyenlete [(31.9) egyenlet]:

$$y = -\frac{4}{3} \frac{c}{d^2} (a - dx)^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2, \quad (31.9)$$

$x = x_0$ -nál a besüllyedés:

$$y_0 = -\frac{4}{3} \frac{c}{d^2} (a - dx_0)^{\frac{3}{2}} + C_1 x_0 + C_2. \quad (31.16)$$

A (31.15) és a (31.16) egyenlettel kifejezett besüllyedések egymással egyenlők:

$$-\frac{P}{12JE}x_0^3 + C_u x_0 = -\frac{4}{3} \frac{c}{d^2} (a - dx_0)^{\frac{3}{2}} + C_1 x_0 + C_2, \quad (31.17)$$

s ebből

$$C_2 = \frac{4}{3} \frac{c}{d^2} (a - dx_0)^{\frac{3}{2}} + \frac{2c}{d} x_0 (a - dx_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{P}{JE} \frac{x_0^3}{6}. \quad (31.18)$$

Itt felvetődik az a kérdés, hogy milyen alakot vesz fel a rúd, ha a  $P$  terhelő erőtől megszabadítjuk, miután maradó alakváltozás keletkezett rajta.

A terhelés megszüntetése után a rúd kisebb görbületi alakot igyekszik felvenni, szóval a görbületi sugár mindenütt növekedni fog. A rugalmasan deformált belső rétegben levő feszültségek forgatónyomatéka a külső forgatónyomatékkal ellenkező értelemben működik, és arra törekszik, hogy a rudat kiegyenesítse. A maradón deformált részekben a külső erők megszűnése után nincs rugalmas feszültség. Ezek a rétegek a külső erők megszűnése után a rugalmas rétegekben működő feszültségek forgatónyomatékának hatása alatt rugalmasan, esetleg maradón is megváltoztatják alakjukat, de a külső erők által létrehozott alakváltozásokkal ellenkező értelemben. Ahol külső erők hatására meghosszabbodás volt, ott megrövidülés következik be, ahol pedig rövidülés volt, ott meghosszabbodás lép fel (31.1. ábra).

Egyensúlyi állapot bekövetkezése esetén:

$$\sigma_1 \frac{h_1^2 b}{6} = \sigma_2 b \delta (h_1 + \delta). \quad (31.19)$$

Vagyis a maradóan deformált rétegekben keletkező rugalmas feszültségek nyomatéka egyenlő a csak rugalmasan deformált rétegek forgatónyomatékával.

Ha a rudat  $\rho$  sugárra hajlítottuk, akkor a  $\delta$  vastagságú külső rétegben keletkező rugalmas feszültséget a következő megfontolással lehet meghatározni (31.2. ábra). A rúd külső deformált rétege  $x$  hosszúságon  $\lambda$ -val nyúlik, illetve rövidül meg, ha  $\rho$  a görbület. Az ábra szerint érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{x}{\rho} = \frac{\lambda}{y},$$

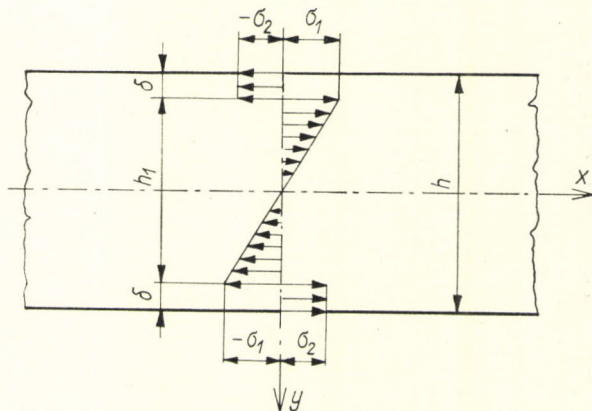
$$\frac{y}{\rho} = \frac{\lambda}{x} = \varepsilon \text{ (a fajlagos nyúlás),}$$

de

$$y = \frac{h}{2},$$

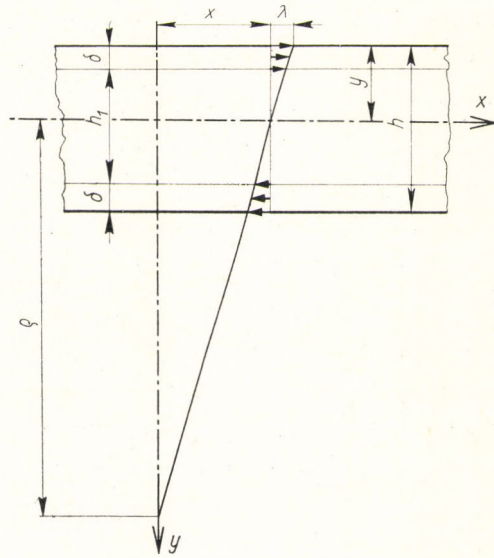
tehát

$$\varepsilon = \frac{h}{2\rho}. \quad (31.20)$$



31.1. ábra. Feszültségek a terheléstől megszabadított, előzetesen a folyási határon túl terhelt rúdban

31.2. ábra. Egy előzetesen a folyási határon túl terhelt rúdban visszamaradt feszültségek



A  $\delta$  vastagságú réteg fajlagos nyúlását közelítőleg a (31.20) egyenlet adja meg. Vagyis a keletkező feszültség:

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{Eh}{2\rho} . \quad (31.21)$$

Ha egy  $\rho_1$  sugarú görbe rudat  $\rho_2$  sugarra görbítünk (egyenesítünk, amikor  $\rho_1 < \rho_2$ ), a rúd szélő rétegeiben keletkező feszültség:

$$\sigma_2 = \frac{hE}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) . \quad (31.22)$$

A hajlított rúd két szélő  $\delta$  vastagságú rétegében keletkező rugalmas feszültség nyomatéka [(31.19) egyenlet]:

$$M_{sz} = \sigma_2 \delta b (\delta + h_1) = \sigma_2 b \frac{h^2 - h_1^2}{4} . \quad (31.23)$$

A belső  $h_1$  vastagságú rugalmasan deformált réteg nyomatéka  $\rho_2$  görbületi sugar mellett:

$$M_{h_1} = - \frac{JE}{\rho_2} = - \frac{E}{\rho_2} \frac{h_1^3 b}{12} . \quad (31.24)$$

Egyensúly esetében:

$$M_{sz} + M_{h_1} = 0 . \quad (31.25)$$

Minthogy

$$\sigma_2 = \frac{hE}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right), \quad (31.22)$$

írható:

$$\frac{hE}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \left( \frac{h^2 - h_1^2}{4} \right) b - \frac{E}{\varrho_2} \frac{h_1^3 b}{12} = 0, \quad (31.26)$$

s ebből

$$\varrho_2 = \varrho_1 \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{h_1^3}{h} \frac{1}{(h^2 - h_1^2)} \right]. \quad (31.27)$$

Ebben az egyenletben  $h$  a hajlított rúd vastagsága,  $h_1 = \sigma_f \frac{2\varrho_1}{E}$  pedig a rugalmasan deformált keresztmetszet vastagsága.

Ezek szerint, ha egy négyzetes keresztmetszetű rudat olyan hajlítónyomatékkal terhelünk, amely maradó alakváltozást idéz elő rajta, majd a külső erőktől megszabadítjuk, akkor a rúd azon a helyen, ahol a külső erők hatása alatt  $\varrho_1$  görbületi sugara volt,  $\varrho_2 > \varrho_1$  görbületi sugarú alakot vesz fel.

### 32. A NÉGYZETES KERESZTMETSZETŰ RÚD ELASZTIKUS-PLASZTIKUS HAJLÍTÁSÁHOZ SZÜKSÉGES MUNKA

A feladat megoldásakor a következőket tételezzük fel:

A rúd anyaga rugalmas-plasztikus (a 6.6. ábra szerint).

A nyomaték a rúd minden keresztmetszetében ugyanaz,  $M = \text{konst.}$ , ebből következik, hogy

$$h_1 = \text{konst.}, \quad h_1 = \sqrt{3h^2 - 12 \frac{M}{b\sigma_f}}, \quad (30.3)$$

tehát a görbületi sugár a semleges szál mentén mindenütt egyforma.

A hajlítás elasztikus-plasztikusan történik.

A 32.1. ábra *a*) része a feszültség eloszlását ábrázolja a rúd keresztmetszetében; a rúd  $\delta$  vastagságú felső és alsó rétegében csak maradó alakváltozás lép fel, a középső  $h_1$  vastagságú rétegben pedig csak rugalmas alakváltozás, tehát itt csak rugalmas feszültségek keletkeznek.

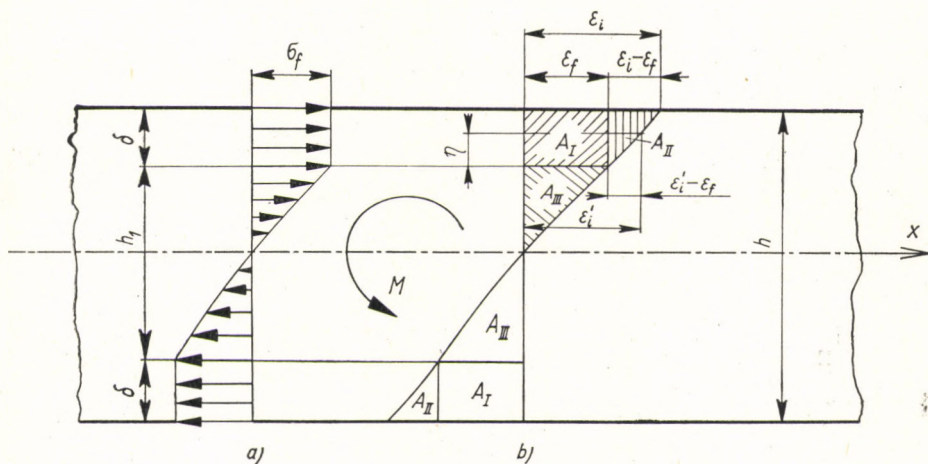
A 32.1. ábra *b*) része a fajlagos nyúlásokat mutatja a rúd valamely keresztmetszetében.

$\sigma_f$  az alakított anyag folyási határa,

$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E}$  a folyási határhoz tartozó fajlagos nyúlás.

A rúd  $\varrho$  sugarra való hajlításához szükséges elemi munka (32.1/b ábra):

$$dA = 2(dA_I + dA_{II} + dA_{III}), \quad (32.1)$$



32.1. ábra. A hajlítási munka kiszámítása

ahol a szélső rétegben végzett maradó alakváltozási munka első része:

$$dA_I = \frac{1}{2} dF \sigma_f \varepsilon_f dx, \quad (32.2)$$

a szélső rétegben végzett maradó alakváltozási munka második része:

$$dA_{II} = dF \sigma_f (\varepsilon'_i - \varepsilon_f) dx, \quad (32.3)$$

a  $h_1$  vastag rugalmas rétegben végzett elemi munka (32.2. és 32.3. ábra):

$$dA_{III} = \frac{1}{2} dF \sigma \varepsilon dx. \quad (32.4)$$

Itt  $dA_I$  a következőképpen értelmezendő:

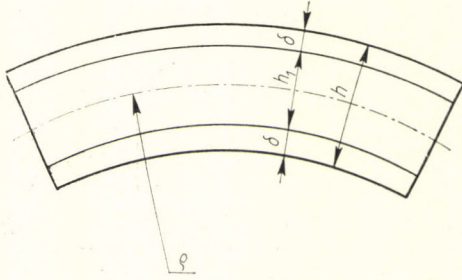
$$dA_I = \frac{1}{2} dF \sigma_f \varepsilon_f dx, \quad (32.2)$$

$$dA_I = \frac{1}{2} dF \sigma_f \frac{\sigma_f}{E} dx, \quad (32.5)$$

ebből

$$A_I = -\frac{\sigma_f^2}{2E} \int_{\frac{h_1}{h_2}}^h dF \int_0^l dx = \frac{\sigma_f^2}{2E} \int_0^l dx \int_{\frac{h_1}{h_2}}^{\frac{h}{2}} b dy = \frac{\sigma_f^2}{2E} bl \left( \frac{h - h_1}{2} \right). \quad (32.6)$$

32.2. ábra.  $\varrho$  sugárral meghalított rúd



A  $dA_{II}$  alakváltozási munka abból adódik, hogy a rúd szélső szálai a  $\delta$  vastagságú rétegen belül az  $\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E}$  fajlagos megnyúlásnál nagyobb fajlagos megnyúlásokkal ( $\varepsilon_f \leq \varepsilon \leq \varepsilon_i$ ) nyúlnak meg; a (32.6) egyenlettel kifejezett munka tehát csak egy része annak a munkának, amely a képlékenyen alakított szélső rétegek deformációjához szükséges.

A  $\delta$  vastagságú rétegekben a fajlagos nyúlástöbbletek a 32.4. ábrából határozhatók meg. Ebből az ábrából

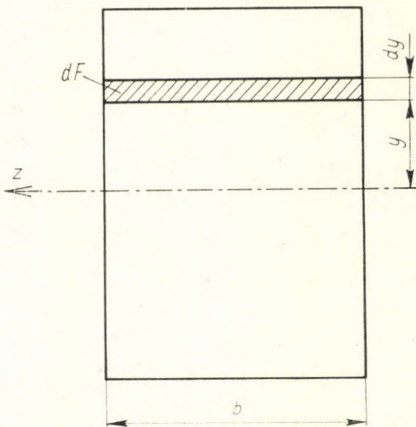
$$\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_f}{\delta} = \frac{\varepsilon'_i - \varepsilon_f}{\eta}, \quad (32.7)$$

de a 32.1. ábra szerint

$$\frac{\varepsilon_i}{h} = \frac{\varepsilon_f}{h_1}, \quad (32.8)$$

és így

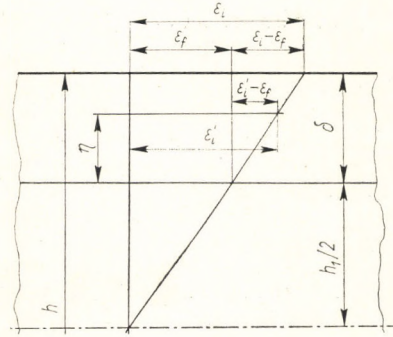
$$\varepsilon_i = \varepsilon_f \frac{h}{h_1}. \quad (32.9)$$



32.3. ábra



32.4. ábra



Következésképpen

$$\varepsilon'_i - \varepsilon_f = (\varepsilon_i - \varepsilon_f) \frac{\eta}{\delta} = \varepsilon_f \left( \frac{h}{h_1} - 1 \right) \frac{\eta}{\delta}. \quad (32.10)$$

Az elemi munka tehát:

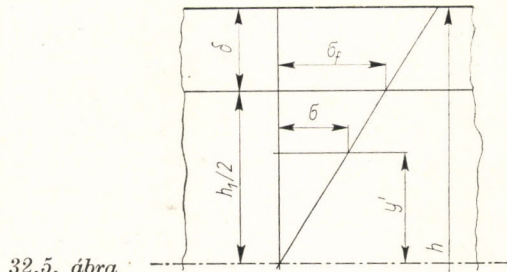
$$\begin{aligned} dA_{II} &= dF \sigma_f (\varepsilon'_i - \varepsilon_f) dx = dF \sigma_f \frac{\sigma_f}{E} \left( \frac{h}{h_1} - 1 \right) \frac{\eta}{\delta} dx = \\ &= b d\eta \frac{\sigma_f^2}{E} \left( \frac{h}{h_1} - 1 \right) \frac{2\eta}{(h - h_1)} dx, \end{aligned} \quad (32.11)$$

illetve

$$\begin{aligned} A_{II} &= \frac{2b}{h_1} \frac{\sigma_f^2}{E} \int_0^l dx \int_0^\delta \eta d\eta = \\ &= \frac{\sigma_f^2}{2E} \left[ \frac{bl(h - h_1)^2}{2h_1} \right]. \end{aligned} \quad (32.12)$$

Az elasztikus-plasztikus hajlítási munka elasztikus munkájának elemi része (32.5. ábra):

$$dA_{III} = \frac{1}{2} dF \sigma \varepsilon dx, \quad (32.13)$$



32.5. ábra

a 32.5. ábra szerint

$$\frac{\sigma}{y'} = \frac{\sigma_f}{\left(\frac{h_1}{2}\right)}, \quad (32.14)$$

ebből

$$\sigma = \sigma_f \left(\frac{2y'}{h_1}\right). \quad (32.15)$$

Mintegy

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (32.16)$$

írható, hogy az elemi rugalmas munka:

$$\begin{aligned} dA_{\text{III}} &= \frac{1}{2} b dy' \frac{\sigma^2}{E} dx = \frac{\sigma^2}{2E} b dy' dx = \\ &= \frac{\sigma_f^2}{2E} \left(\frac{2y'}{h_1}\right)^2 b dy' dx = \frac{\sigma_f^2}{2E} \frac{4b}{h_1^2} y'^2 dy' dx. \end{aligned} \quad (32.17)$$

Ebből az  $A_{\text{III}}$  munka:

$$\begin{aligned} A_{\text{III}} &= \frac{\sigma_f^2}{2E} \frac{4b}{h_1^2} \int_0^l dx \int_0^{\frac{h_1}{2}} y'^2 dy' = \frac{\sigma_f^2}{2E} \frac{4bl}{h_1^2} \int_0^{\frac{h_1}{2}} y'^2 dy' = \\ &= \frac{\sigma_f^2}{2E} \frac{bl}{2} \left(\frac{h_1}{3}\right). \end{aligned} \quad (32.18)$$

Ezek szerint egy  $l$  hosszúságú,  $b$  szélességű és  $h$  magasságú rúd  $\rho$  sugarú görbületre való elasztikus-plasztikus hajlításához szükséges munka:

$$A = 2(A_I + A_{\text{II}} + A_{\text{III}}), \quad (32.19)$$

ahol

$$\begin{aligned} A_I &= \frac{\sigma_f^2}{2E} bl \frac{(h - h_1)}{2}, \\ A_{\text{II}} &= \frac{\sigma_f^2}{2E} bl \frac{(h - h_1)^2}{2h_1}, \\ A_{\text{III}} &= \frac{\sigma_f^2}{2E} \frac{bl}{2} \left(\frac{h_1}{3}\right). \end{aligned}$$

Összevonva:

$$A = \frac{\sigma_f^2}{2E} bl 2 \left[ \frac{(h - h_1)^2}{2} + \frac{(h - h_1)^2}{2h_1} + \frac{h_1}{6} \right], \quad (32.20a)$$

illetőleg

$$A = \frac{\sigma_f^2}{2E} bl \left[ \frac{h}{h_1} (h - h_1) + \frac{h_1}{3} \right]. \quad (32.20b)$$

### 33. A NÉGYZETES RÚDKERESZTMETSZET ALAKJÁNAK VÁLTOZÁSA HAJLÍTÁS KÖVETKEZTÉBEN

Vizsgáljuk meg először is a rideg-képlékeny anyagú négyzetes keresztmetszetű rudak hajlítását.

Ha egy ilyen négyzetes keresztmetszetű rudat  $r_0$  sugarú görbületre meghajlítunk, akkor a rúd hosszirányába eső fajlagos nyúlást a következő elgondolással kapjuk meg (33.1. ábra):

A 33.1/a ábra szerint a  $\Delta x_0$  elemi hosszúságú rúd  $y$  magasságban levő  $\Delta x_0$   $b$   $dy$  térfogatelemének fajlagos megnyúlása  $x$  irányban:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x_y - \Delta x_0}{\Delta x_0}. \quad (31.1)$$

Mint ahogy

$$\Delta x_0 = r_0 \varphi_0 \quad \text{és} \quad \Delta x_y = (r_0 + y) \varphi_0,$$

az  $x$  irányú fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_x = \frac{(r_0 + y) \varphi_0 - r_0 \varphi_0}{r_0 \varphi_0} = \frac{y}{r_0}. \quad (33.1a)$$

Ha teljesen képlékeny anyagot hajlítunk, akkor mindenütt

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_x}{2}, \quad (33.2)$$

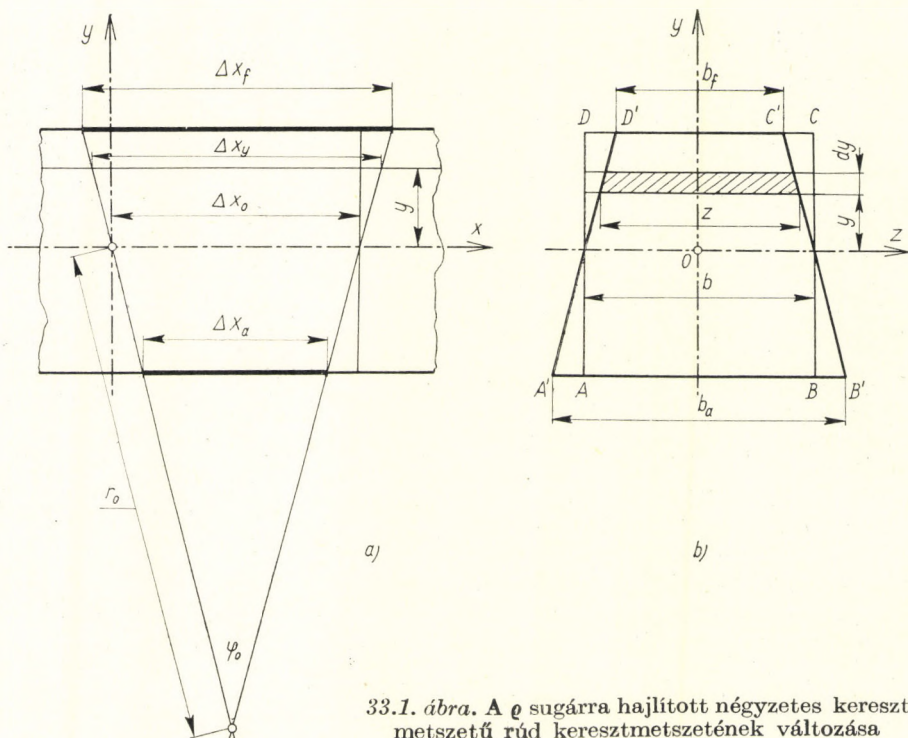
ilyenkor ugyanis a *Poisson*-féle szám,  $m = 2$ .

Ezek szerint a négyzetes rúdkeresztmetszet  $b$  szélessége  $y$  magasságban a  $z$  tengely felett a kezdő helyzetben azonos a semleges vonal síkjával:

$$z_f = b \left( 1 - \frac{y}{2r_0} \right), \quad (33.3)$$

a  $z$  tengely alatt:

$$z_a = b \left( 1 + \frac{y}{2r_0} \right). \quad (33.4)$$



33.1. ábra. A  $r_0$  sugarra hajlított négyzetes keresztmetszetű rúd keresztmetszetének változása

Így tehát a trapézra alakult négyzetes keresztmetszet  $z$  mérete mindenütt az  $y$  lineáris függvénye.

Négyzetes keresztmetszetű rúd hajlításakor azonban a rúd minden  $y$  magasságú mérete is megváltozik. A keresztmetszet minden  $dy$  magasságú részéből  $dy' \cong dy$  rész lesz aszerint, hogy a semleges vonal felett vagy alatt van-e.

A semleges vonal ( $z = z$ ) felett:

$$dy' = dy \left( 1 - \frac{y}{2r_0} \right), \quad (33.5)$$

a semleges vonal alatt:

$$dy' = dy \left( 1 + \frac{y}{2r_0} \right), \quad (33.6)$$

a (33.5) és a (33.6) egyenletben

$$\frac{y}{2r_0} = \varepsilon_y. \quad (33.7)$$

Eszerint a négyzetes keresztmetszet minden  $y$  magasságú méretéből  $y'$  magasság lesz:

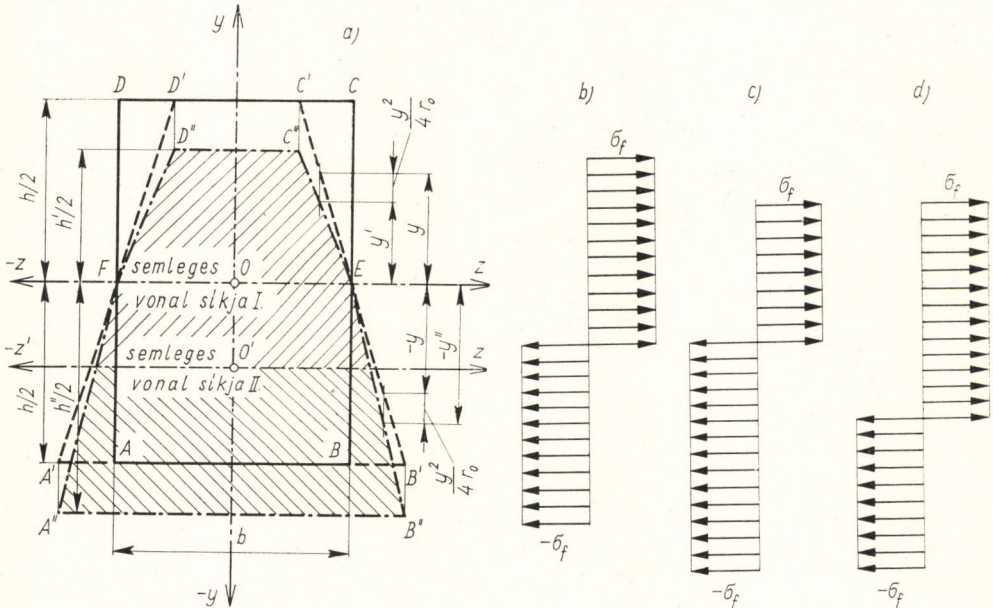
$$y' = \int_0^y 1 \pm \left( \frac{y}{2r_0} \right) dy, \quad (33.8)$$

azaz

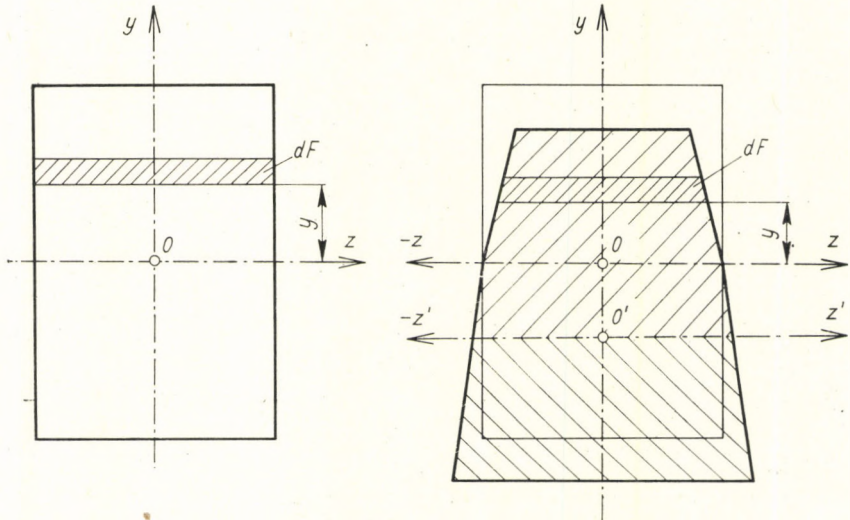
$$y' = y \mp \frac{y^2}{4r_0} = y \left( 1 \mp \frac{y}{4r_0} \right). \quad (33.9)$$

A semleges vonal felett, illetve alatt, minden  $y$  méret  $\mp \frac{y^2}{4r_0}$  mérettel csökken, illetve növekedik.

A 33.2. ábra az itt levezetett gondolatmenet szerint van megszerkesztve. Az  $ABCD$  négyzet alakú keresztmetszet  $AB$  oldala a hajlítás következtében  $A'B'$ -re hosszabbodik [(33.4) egyenlet],  $CD$  oldala  $C'D'$ -re rövidül [(33.3) egyenlet]. Ugyanakkor a  $DC$  oldal  $\frac{h}{2}$  távolsága a  $z-z$  semleges vonaltól  $\frac{h'}{2}$ -re csökken, az  $AB$  oldal távolsága a  $z-z$  semleges vonaltól  $\frac{h''}{2}$  távolságról  $\frac{h''}{2}$  távolságra nő [(33.9) egyenlet].



33.2. ábra. A  $\rho$  sugarúra hajlított négyzetes keresztmetszetű rúd semleges vonalának elmozdulása



33.3. ábra. A hajlított négyzetes keresztmetszetű rúd keresztmetszetében fellépő feszültségegyensúly meghatározása

Merev-képlékeny anyag hajlításakor, a hajlítás kezdő pillanatában érvényes az a nyomatéki egyensúlyi feltétel, amely szerint (33.3. ábra):

$$\int_{(F)} \sigma_f y dF = 0. \quad (33.10)$$

Mihelyt azonban megindult a keresztmetszet alakváltozása, ez a nyomatéki egyensúlyi feltétel csak abban az esetben lehet érvényes, ha a  $z-z$  semleges vonal úgy tolódik el a  $z'-z'$  új semleges vonalba, hogy ott

$$\int_{(F)} y' \sigma_f dF = 0 \quad (33.11)$$

legyen. Kísérletekből ismert tény, hogy rúd hajlításakor a semleges vonal eltolódik a nyomott oldal felé.

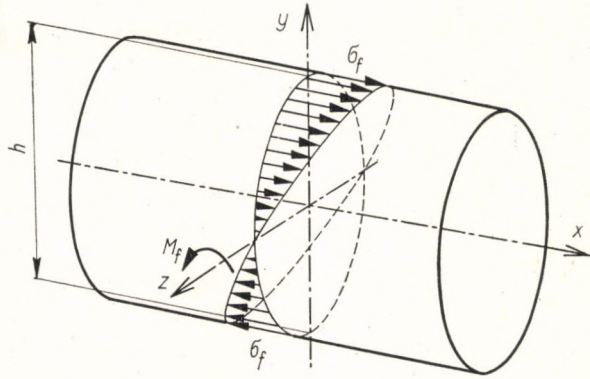
Ezzel kapcsolatban meg kell még jegyeznünk, hogy a négyzet keresztmetszet  $AD$  és  $BC$  oldalai a meghajlítás következtében nem maradnak egyenesek, hanem kifelé domborodó görbéké lesznek, amint ez a 33.2. ábrából is kiviláglik.

#### 34. A KÖRSZELVÉNYŰ RÚD ELASZTIKUS-PLASZTIKUS HAJLÍTÁSA

A hajlításra igénybe vett kör keresztmetszetű rúd átmérője  $h$ . A rúd szélső szálaiban  $\sigma_f$  folyási határnak megfelelő feszültség lép fel, ha a  $z$  tengely körül fellépő nyomaték (34.1. ábra):

$$M_f = \sigma_f \frac{2J}{h} \quad (34.1)$$

34.1. ábra. Kör keresztmetszetű rúd hajlítása a folyási határig



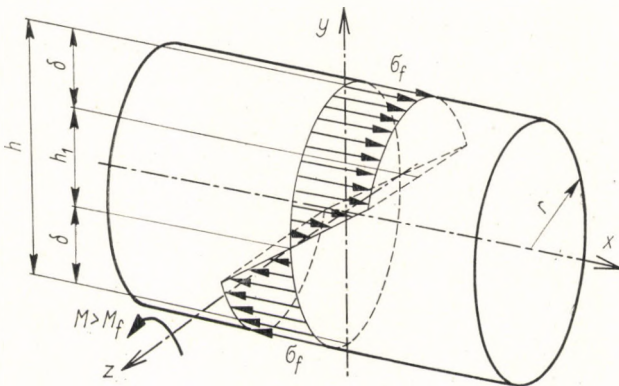
és

$$J = \frac{\pi h^4}{64} \quad (34.2)$$

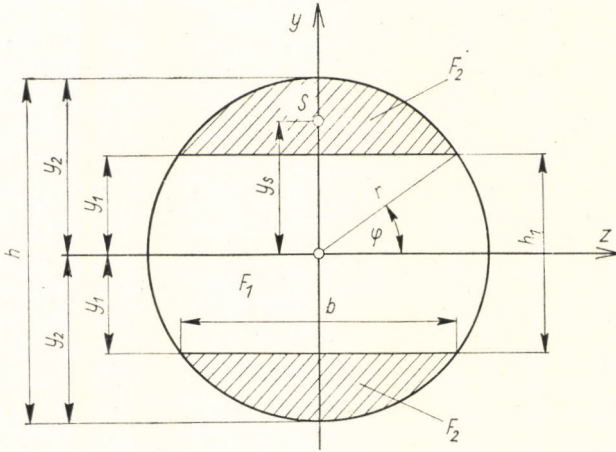
a hajlított rúd tehetetlenségi nyomatéka. Ha ennél az  $M_f$  nyomatéknál kisebb a hajlítónyomaték, akkor csak rugalmas alakváltozás lép fel a rúdban, ha  $M_f$ -nél nagyobb a hajlítónyomaték, akkor rugalmas és képlékeny alakváltozás is keletkezik. Ha a  $z$  tengely körüli forgatónyomaték nagyobb  $M_f$ -nél, akkor a rúd szélső rétegeiben  $\delta = 0,5 (h - h_1) = (r - y_1)$  vastagságú maradón deformált rétegek jönnek létre (34.2. ábra).  $h_1$  a csak rugalmasan deformált réteg vastagságát jelenti.

Ahhoz, hogy a rúd  $\delta$  vastagságú szélső rétegeiben maradó alakváltozás keletkezzék, a következő hajlítónyomaték szükséges (34.3. ábra):

$$M = \sigma_f (W_1 + 2 F_2 y_s). \quad (34.3)$$



34.2. ábra. Kör keresztmetszetű rúd hajlítása a folyási határon túl



Ebben az egyenletben:

$$W_1 = \frac{2J_1}{h_1}, \quad (34.4)$$

ahol

$$J_1(=) = y_1(r^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y_1 r^2 (r^2 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} r^4 \arcsin\left(\frac{y_1}{r}\right). \quad (34.5)$$

A maradón deformált terület nagy közelítéssel:

$$F_2(=) 0,78 b \left(\frac{h - h_1}{2}\right) = 0,78 b \delta, \quad (34.6)$$

$$b = 2\sqrt{r^2 - y_1^2}, \quad (34.7)$$

$$\delta = \frac{h - h_1}{2}, \quad (34.8)$$

$$y_s(=) y_1 + \frac{r - y_1}{4}, \quad (34.9)$$

$$r = \frac{h}{2}. \quad (34.10)$$

Ezeket az értékeket a (34.3) egyenletbe behelyettesítve, a hajlító nyomaték a következőképpen fejezhető ki:

$$M = \sigma_f \left\{ \left[ \frac{1}{2} r^2 (r^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - (r^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{2} \frac{r^4}{y_1} \arcsin\left(\frac{y_1}{r}\right) + \right. \\ \left. + \pi (r^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} (r - y_1) \left[ y_1 + \left(\frac{r - y_1}{4}\right) \right] \right\}. \quad (34.11)$$



Ebből az egyenletből a csak rugalmasan deformált réteg ( $h_1 = 2y_1$ ) vastagságát kell meghatároznunk.

Ha a (34.11) egyenletbe a következő behelyettesítéseket hajtjuk végre:

$$(r^2 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} = r \left[ 1 - \left( \frac{y_1}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (34.12)$$

$$(r^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} = r^3 \left[ 1 - \left( \frac{y_1}{r} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (34.13)$$

$$(r - y_1) = r \left[ 1 - \left( \frac{y_1}{r} \right) \right], \quad (34.14)$$

$$\left[ y_1 + \frac{r - y_1}{4} \right] = \frac{r}{4} \left[ 1 + 3 \left( \frac{y_1}{r} \right) \right], \quad (34.15)$$

akkor a (34.11) egyenlettel kifejezett nyomaték a következő alakban írható fel:

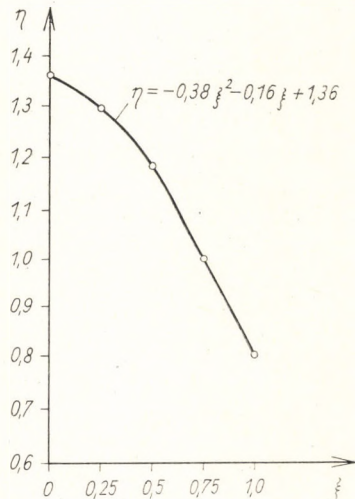
$$M = \sigma_f r^3 \left\{ 0,5 \left[ 1 - \left( \frac{y_1}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 0,34 \left[ 1 - \left( \frac{y_1}{r} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} + 0,5 \frac{\arcsin(y_1/r)}{(y_1/r)} \right\}. \quad (34.16)$$

Egyszerűbb formában:

$$M = \sigma_f r^3 f \left( \frac{y_1}{r} \right) = \sigma_f r^3 w_0. \quad (34.17)$$

Ha a

$$w_0 = f \left( \frac{y_1}{r} \right) \quad (34.18)$$



34.4. ábra

függvényt felrajzoljuk, és a *Lagrange*-féle interpolációs képlet segítségével egy parabolával helyettesítjük, akkor a (34.11) illetve a (34.16) nyomatéki egyenletet egyszerű formában írhatjuk fel.

Feltesszük, hogy

$$\eta = f\left(\frac{y_1}{r}\right) \quad \text{és} \quad \xi = \left(\frac{y_1}{r}\right),$$

azaz

$$\eta = f(\xi), \quad (34.19)$$

ekkor a 34.4. ábra  $\xi - \eta$  koordinátarendszerében a bemutatott görbét kapjuk.

A (34.19) összefüggésből:

$\xi = 0$	$\eta = 1,36$
$\xi = 0,25$	$\eta = 1,29$
$\xi = 0,50$	$\eta = 1,18$
$\xi = 0,75$	$\eta = 1,00$
$\xi = 1,00$	$\eta = 0,8$

Helyettesítsük a (34.19) összefüggést egy *Lagrange*-féle parabolával, amikor

$\xi_1 = 0,0$	$\eta_1 = 1,36$
$\xi_2 = 0,5$	$\eta_2 = 1,18$
$\xi_3 = 1,0$	$\eta_3 = 0,80$

$$\eta = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \eta_1 + \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} \eta_2 + \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \eta_3. \quad (34.20)$$

A  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2$  és  $\eta_3$  értékek behelyettesítése után a parabola egyenlete:

$$\eta = \underbrace{\frac{(\xi - 0,5)(\xi - 1)}{(0,1 - 0,5)(0,1 - 1)}}_{0,36} 1,36 + \underbrace{\frac{(\xi - 0,1)(\xi - 1)}{(0,5 - 0,1)(0,5 - 1)}}_{0,20} 1,183 + \underbrace{\frac{(\xi - 0,1)(\xi - 0,5)}{(1 - 0,1)(1 - 0,5)}}_{0,45} 0,8. \quad (34.21)$$

A műveleteket elvégezve:

$$\eta = -0,38 \xi^2 - 0,16 \xi + 1,36; \quad (34.22)$$

ennek felhasználásával a nyomatéki egyenlet a következőképpen írható:

$$M = \sigma_f r^3 [-0,38 \xi^2 - 0,16 \xi + 1,36], \quad (34.23)$$

vagy  $\xi = \frac{y_1}{r}$  behelyettesítésével:

$$M = \sigma_f r^3 \left[ -0,38 \left( \frac{y_1}{r} \right)^2 - 0,16 \left( \frac{y_1}{r} \right) + 1,36 \right]. \quad (34.23a)$$

Az ilyen módon kiszámított nyomaték értéke a valóságos nyomatéktól  $\pm(1 \sim 5)\%$ -kal tér el.

A (34.23a) egyenletből kiszámítható a csak rugalmasan terhelt  $h_1 = 2 y_1$  réteg nagysága:

$$h_1 = 2 y_1 = h \left[ \sqrt{3,58 - 21,2 \left( \frac{M}{\sigma_f h^3} \right)} - 0,212 \right]. \quad (34.24)$$

Ha egy kéttámaszú gömbölyű rudat a közepén  $P$  koncentrált erővel terhelünk, akkor lesznek a rúdon olyan keresztmetszetek, amelyek csak rugalmasan és olyanok, amelyek rugalmas-képlékenyen vannak igénybevéve. A tisztán rugalmas rész addig terjed, illetve a rugalmas-képlékeny-rész ott kezdődik, ahol  $h = h_1$  [(34.24) egyenlet, 34.5. ábra]. Eszerint

$$x_0 = 0,2 \left( \frac{\sigma_f h^3}{P} \right). \quad (34.25)$$

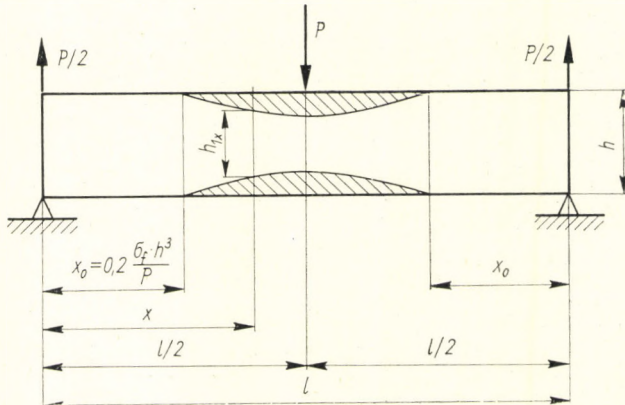
Az az erő, amely ahhoz szükséges, hogy a rúd középső keresztmetszetében mindenütt a folyási határnak megfelelő  $\sigma_f$  feszültség lépjen fel, a (34.24) egyenletből számítható ki:

$$h_{1x} = 0 = h \left[ \sqrt{3,58 - 10,6 \left( \frac{P \frac{l}{2}}{\sigma_f h^3} \right)} - 0,212 \right], \quad (34.26)$$

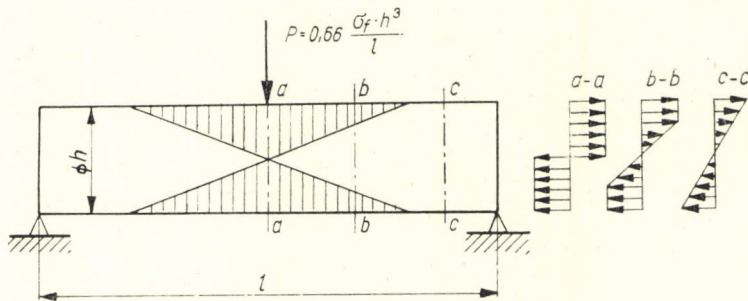
és így (34.6. ábra):

$$P = 0,66 \left( \frac{\sigma_f h^3}{l} \right). \quad (34.27)$$

A rúd meghatározása terhelés alatt ugyanúgy történik, mint azt a négyzetes keresztmetszetű rúd hajlításánál láttuk. Ha a nyomaték  $M > \bar{M}_f$ ,



34.5. ábra. Az elasztikus tartomány és a plasztikus tartományok közötti határok



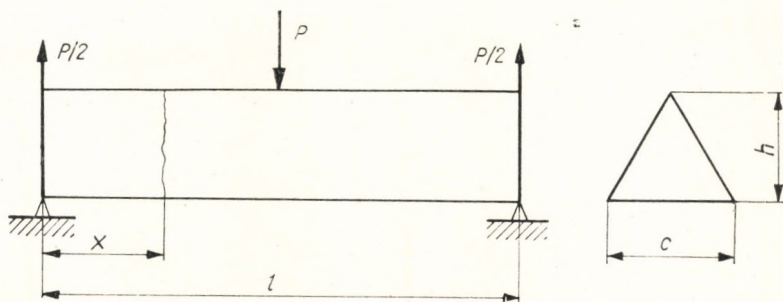
34.6. ábra. Annak az erőnek a meghatározása, mely ahhoz szükséges, hogy a rúd középső keresztmetszetében mindenütt a folyási határnak megfelelő  $\sigma_f$  feszültség lépjen fel

akkor a nyomatékhoz tartozó keresztmetszetre merőleges síkban a rúd görbületi rádiusza [(30.15) egyenlet]:

$$\rho = \pm \frac{E}{2\sigma_f} \left[ \sqrt{3,58 h^2 - 21,2 \left( \frac{M}{\sigma_f h} \right)} - 0,212 h \right]. \quad (34.28)$$

### 35. HÁROMSZÖG KERESZTMETSZETŰ RUDAK ELASZTIKUS-PLASZTIKUS HAJLÍTÁSA

A feladat NÁDAI Á. [35.1] szerint az, hogy egy közepén  $P$  koncentrált erővel terhelt kéttámaszú, háromszög keresztmetszetű, tehát hajlításra igénybevett rúdban meghatározzuk a különböző keresztmetszetekben felépő feszültségeket (35.1. ábra).



3 5.1. ábra. Koncentrált erővel terhelt háromszög keresztmetszetű kéttámaszú rúd

A nyomatéki egyenlet felállítása a (29.25) egyenlet alapján történik.

A rugalmas alakváltozások tartományában fellépő feszültségek a következők:

A nyomaték valamely keresztmetszetben:

$$M = \frac{P}{2} x = W \sigma, \quad (35.1)$$

itt

$$W = \frac{ch^2}{24}, \quad (35.2)$$

vagyis a nyomaték:

$$M = \frac{ch^2}{24} \sigma = \frac{P}{2} x. \quad (35.3)$$

A felső szélső szálban fellépő feszültség  $\sigma_f$ -fel egyenlő (35.2. ábra):

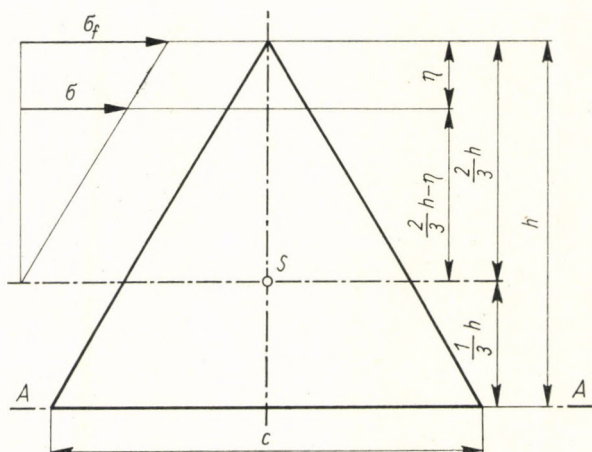
$$\sigma_f = \frac{12 Px}{ch^2}. \quad (35.4)$$

Mint hogy

$$\frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{\frac{2}{3} h}{\frac{2}{3} h - \eta}, \quad (35.5)$$

írható, hogy a háromszög csúcsától  $\eta$  távolságban fellépő feszültség:

$$\sigma = \sigma_f \frac{\left(\frac{2}{3} h - \eta\right)}{\frac{2}{3} h} = \sigma_f \left(1 - \frac{3\eta}{2h}\right). \quad (35.6)$$



A (35.4) egyenlet felhasználásával:

$$\sigma = \frac{12 Px}{ch^2} \left( 1 - \frac{3\eta}{2h} \right). \quad (35.7)$$

Ha  $x = \frac{l}{2}$  és  $\eta = 0$ , továbbá  $\sigma = \sigma_f$ , akkor a (35.7) egyenletből:

$$P = P_f = \frac{ch^2 \sigma_f}{6l}. \quad (35.8)$$

Ha  $P > P_f$ , akkor a háromszög csúcsa körül kialakul egy  $F''$  terület, amelyen a háromszög maradón van alakítva (35.3. ábra).

A nem vonalkázott terület ( $F'$ ) mentén, ahol csak rugalmas feszültség lép fel:

$$\sigma = a + b\eta. \quad (35.9)$$

Az  $F'$  és  $F''$  határán, ahol  $\eta = \eta''$ :

$$-\sigma_f = a + b\eta''. \quad (35.10)$$

Mint ahogy itt  $F' = 0$ , azaz a háromszög alsó részén még nincs képlékenyen alakított terület, ezért a (29.15) egyenlet,

$$aF + bS + \sigma_f(F' - F'') = 0 \quad (29.15)$$

felírható a következő alakban:

$$aF + bS = \sigma_f F''. \quad (35.11)$$

A 35.3. ábra értelmében

$$F'' = \frac{c' \eta''}{2}. \quad (35.12)$$

Mint ahogy

$$\frac{c'}{c} = \frac{\eta''}{h}, \quad (35.13)$$

$$c' = c \frac{\eta''}{h}, \quad (35.14)$$

tehát

$$F'' = \frac{c \eta''^2}{2h}. \quad (35.15)$$

A csak rugalmasan deformált terület:

$$F = \frac{ch}{2} - \frac{c \eta''^2}{2h} = c \left( \frac{h^2 - \eta''^2}{2h} \right). \quad (35.16)$$

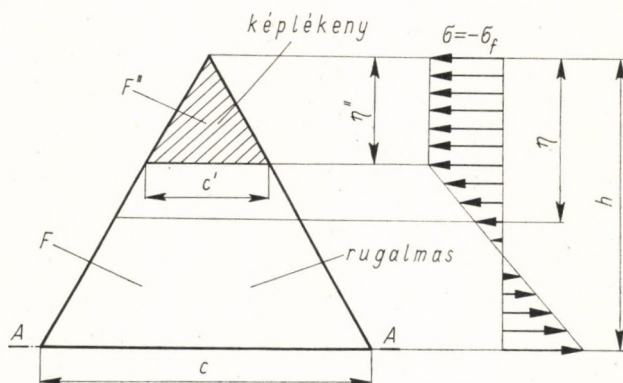
A (29.15) egyenletben szereplő  $S$  az  $F$  elsőrendű nyomatéka a  $\xi$  tengelyre (35.4. ábra):

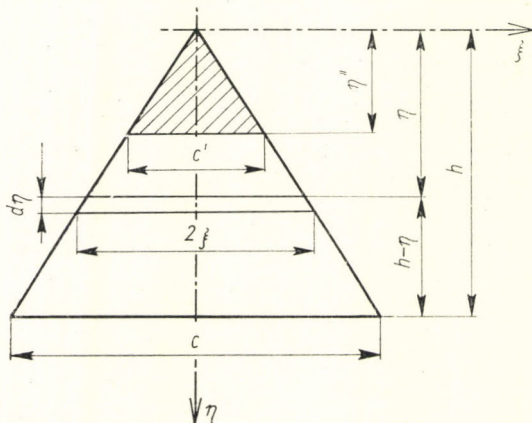
$$S = \int_{\eta''}^h 2 \xi \eta d\eta = \int_{\eta''}^h \frac{c}{h} \eta^2 d\eta = \frac{c}{3h} (h^3 - \eta''^3). \quad (35.17)$$

$F$ ,  $F''$  és  $S$  itt megadott értékeivel és a következő egyszerűsítő képletekkel:

$$a = \sigma_f \alpha, \quad b = \sigma_f \beta / h \quad \text{és} \quad u'' = \eta'' / h \quad (35.18)$$

35.3. ábra. A rugalmas és a maradó alakváltozás tartománya a hajlított háromszög keresztmetszetű rúd keresztmetszetében (a eset)





35.4. ábra. A hajlítófeszültségek meghatározása

a (35.10) és a (35.11) egyenletről azt kapjuk, hogy

$$\alpha = \frac{2 + u''^3}{2 - 3u'' + u''^3}, \quad (35.19)$$

$$\beta = \frac{3}{3 - 3u'' + u''^3}. \quad (35.20)$$

Ily módon a feszültségeloszlás a keresztmetszetben ismeretes; ha ugyanis

$$u'' < u < 1,$$

akkor

$$\sigma = (\alpha + \beta u) \sigma_f, \quad (35.21)$$

ha  $0 < u < u''$ , akkor  $\sigma = -\sigma_f$ ; a nyomaték pedig:

$$M = \frac{ch^2 \sigma_f}{12} \cdot \frac{3u''^4 - 4u''^3 + 1}{u''^3 - 3u'' + 2}. \quad (35.22)$$

A fenti képletek csak addig érvényesek, amíg

$$0 < u'' < \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 0,366. \quad (35.23)$$

Amikor  $u'' > 0,366$  és  $P > 1,8 P_f$ , akkor megindul a képlékeny alakváltozás a háromszög húzott rétegeiben (alul). Ha  $P > 1,8 P_f$ , a háromszög keresztmetszetben háromféle deformált mezőt, és pedig két maradón, középütt pedig egy rugalmasan deformált mezőt lehet megkülönböztetni.



A feszültségeloszlás megállapításához ez esetben három egyenlet áll a rendelkezésünkre:

$$a + b\eta' = \sigma_f, \quad (35.24)$$

$$a + b\eta'' = -\sigma_f, \quad (35.25)$$

$$Fa + Sb = \sigma_f(F'' - F'). \quad (35.26)$$

Itt

$$F' = c(h^2 - \eta'^2)/2h, \quad (35.27)$$

$$F'' = c\eta''^2/2h, \quad (35.28)$$

$$F = \frac{c}{2h}(\eta'^2 - \eta''^2), \quad (35.29)$$

$$S = c(\eta'^3 - \eta''^3)/3h. \quad (35.30)$$

A következő rövidítő képletek segítségével (35.5. ábra):

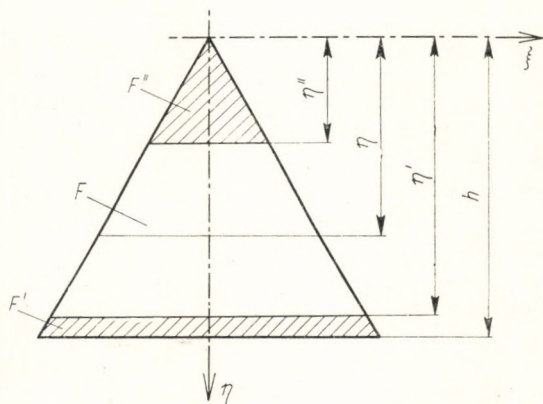
$$u = \eta/h, \quad u' = \eta'/h \quad \text{és} \quad u'' = \eta''/h \quad (35.31)$$

a (35.24) és a (35.25) egyenletből:

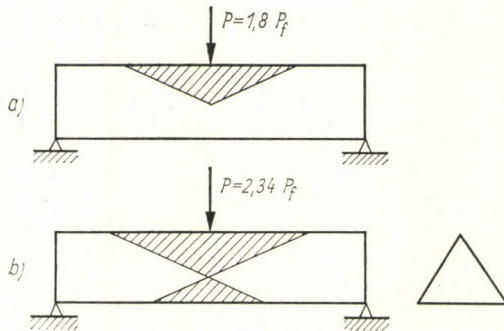
$$\alpha = -\frac{u' + u''}{u' - u''}, \quad \beta = \frac{2}{u' - u''}, \quad (35.32)$$

a (35.26) egyenletből pedig:

$$u'^2 + u'u'' + u''^2 = 3/2. \quad (35.33)$$



35.5. ábra. A rugalmas és a maradó alakváltozások tartományai erősebben hajlított háromszög keresztmetszetű rúd keresztmetszetében (b eset)



35.6. ábra. A koncentrált erővel terhelt háromszög keresztmetszetű kéttámaszú tartó rugalmasan és plasztikusan terhelt tartományai

Ez egy ellipszis egyenlete, amelynek a kisebbik féltengelye  $a = 1$ , a féltengely iránya egybeesik a szögfelező  $u' = u''$ -tel, és az ellipszis nagy féltengelye  $b = \sqrt{3}$ . A mi szempontunkból az ellipszisnek csak az a része érdekes, amely

$$u' = 1, \quad u'' = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad \text{és} \quad u' = u'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

közé esik. Az egyik határpont megfelel a rúd azon helyének, ahol a második folyási tartomány kezdődik. Ha azonban

$$u' = u'' = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

akkor a rúdhajlításban egy határeset következik be. A két, eddig egymástól elválasztott folyási tartomány ( $F'$  és  $F''$ ) a rúd középső keresztmetszetében érintkezésbe kerül egymással. Ez akkor következik be, amikor  $P = 2,34 P_f$ .

A rúd középső részében, ahol a keresztmetszet húzott és nyomott részében is a folyási határnak megfelelő feszültség lép fel, a hajlítónyomaték:

$$M = \frac{ch^2 \sigma_f}{6} \left( 2 - \frac{u'^4 - u''^4}{u' - u''} \right) = \frac{Px}{2} \quad (35.34)$$

abban az esetben, ha

$$1,80 P_f < P < 2,34 P_f. \quad (35.35)$$

A plasztikus tartományok a levezetett képletek alapján  $P = 1,8 P_f$ -nek és  $P = 2,34 P_f$ -nek megfelelően a 35.6/a és 35.6/b ábrán vannak feltüntetve. Az ábrákon a képlékenyen alakított tartományok vonalkázva vannak.

Az itt közölt számítási eljárás természetesen csak megközelítőleg ábrázolja a valóságos viszonyokat.

## IV. CSAVARÁS

### 36. RUDAK PLASZTIKUS ÉS ELASZTIKUS-PLASZTIKUS CSAVARÁSA

A 17. fejezetben már foglalkoztunk a rudak csavarásának legegyszerűbb esetével, a hengeres rúd csavarásával. A következőkben ezt a problémát általánosabb formában tárgyaljuk.

Vegyünk fel egy  $xyz$  egyenes vonalú, derékszögű koordinátarendszert; az  $x$  tengely legyen párhuzamos a rúd tengelyével. Éppen úgy, mint a prizmatikus rudak rugalmas csavarásának elméletében, itt is feltesszük, hogy

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{zy} = 0,$$

a feszültségi állapotot  $\tau_{xz}$  és  $\tau_{xy}$  csúsztatófeszültségi komponens határozza meg, és ezek a komponensek  $x$ -től függetlenek (36.1. ábra).

Az egyensúly differenciálegyenletei közül [(8.4) egyenletrendszer] a vizsgált feladat esetében csak egy marad meg:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (36.1)$$

Fejezzük ki a  $\tau_{xz}$  és  $\tau_{xy}$  feszültségi komponenseket a  $\tau$  csúsztatófeszültségi vektor és az  $y$  tengely által bezárt  $\varphi$  szög segítségével a következőképpen:

$$\tau_{xz} = \tau \cos \varphi, \quad \tau_{xy} = \tau \sin \varphi. \quad (36.2)$$

Egy tiszta képlékeny feladat megoldásánál (pl. melegcsavarásnál), amikor  $\tau = \tau_f$  az egész keresztmetszet mentén, a csavarónyomaték:

$$M = \tau_f \iint (z \sin \varphi - y \cos \varphi) dz dy, \quad (36.3)$$

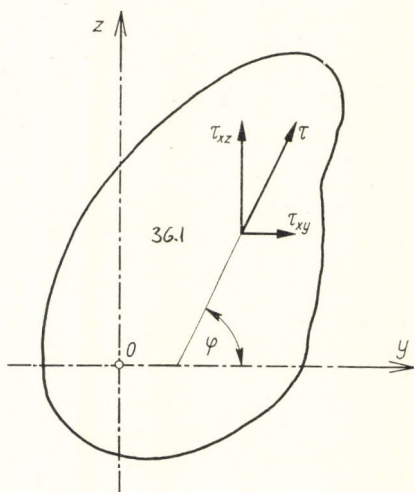
itt az integrálást a keresztmetszet egész területére ki kell terjeszteni.

A tisztán képlékeny prizmatikus rudak csavarásának problémája mindig megoldható.

A körkeresztmetszetű rúd csavarásával már a 17. fejezetben foglalkoztunk. Ha feltételezzük, hogy a csúsztatófeszültség vektora a csavart rúd minden pontjában  $\tau_f$ , akkor a csavarónyomatékot a következőképpen írhatjuk fel (36.2. ábra):

$$dM = \tau_f 2 r \pi dr = 2 \pi \tau_f r^2 dr. \quad (36.4)$$

36.1. ábra. A csavart rúd keresztmetszetében fellépő feszültségek



A rúd csavarásához szükséges nyomaték:

$$M = \frac{2 \pi \tau_f r_k^3}{3} . \quad (36.5)$$

Melegalakításnál ekkora csavarónyomaték szükséges egy hengeres rúd megcsavarásához.

A csavarás munkaszükséglete, ha  $\varphi$  szöggel csavarjuk el a rudat:

$$L = M\varphi . \quad (36.6)$$

Ellipszis keresztmetszetű rúd csavarásához szükséges nyomaték (36.3. ábra):

$$M = \frac{2}{3} \pi \tau_f \left( a^3 - \frac{9}{2} ab^2 + 4 b^3 \right) . \quad (36.7)$$

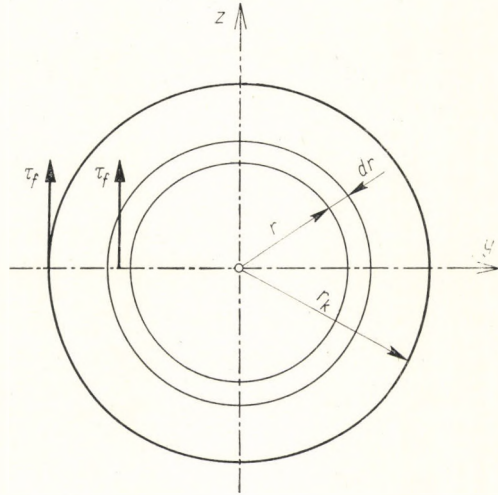
Négyzet keresztmetszetű rúd csavarásához szükséges nyomaték (36.4. ábra):

$$M = \frac{8}{3} \tau_f a^3 . \quad (36.8)$$

Derékszögű négyszög keresztmetszetű rúd csavarásához szükséges nyomaték teljesen képlékeny állapotban (36.5. ábra):

$$M = \frac{4}{3} \tau_f b (3a + b) . \quad (36.9)$$

36.2. ábra

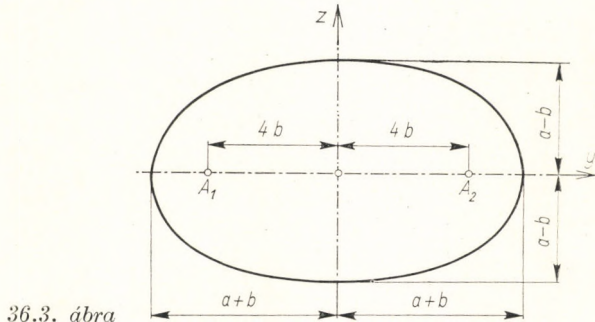


Rugalmas-képlékeny esavarásnál először meg kell határoznunk mind a rugalmas, mind a képlékeny tartományban a feszültségi állapotot és a két tartomány közötti határt. Az  $M$  csavarónyomaték kifejezhető egy integrállal, mely könnyen felbontható két integrállá:

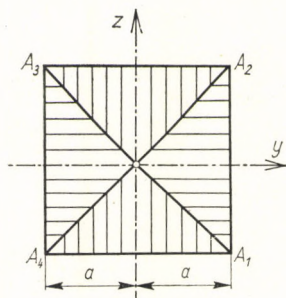
$$M = \iint_{S_e} (z\tau_{xy} - y\tau_{xz}) dz dy + \tau_f \iint_{S_p} (z \sin \varphi - y \cos \varphi) dz dy . \quad (36.10)$$

Az integrálást mind az  $S_e$  rugalmas tartomány, mind az  $S_p$  képlékeny tartomány területére ki kell terjeszteni (36.6. ábra).

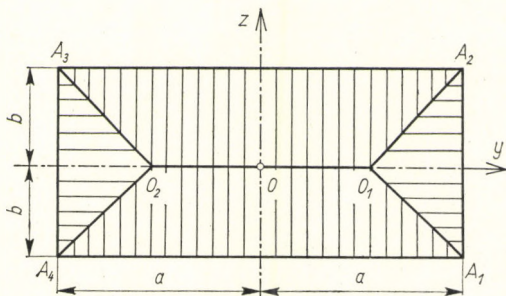
A vegyes rugalmas-képlékeny feladatok megoldása ezen az úton nagy matematikai nehézségekbe ütközik. A rugalmas-képlékeny esavarásnak csak két olyan példája van, amelyre vonatkozólag az analitikai megoldás ezen az úton teljesen végrehajtható. Más úton kell tehát a megoldást keresnünk. GELEJI szerint bizonyos előfeltételek mellett a torziós nyomaték és az alakváltozási munka meghatározása más keresztmetszetű rudak torziójával kapcsolatosan is analitikailag végrehajthatóvá válik [36.1].



36.3. ábra



36.4. ábra



36.5. ábra

Ehhez először is az szükséges, hogy a rúdkeresztmetszetnek legalább egy szimmetriatengelye legyen, másodsor az, hogy ismerjük a

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_y = f_1(y, z, M), \\ \tau_{xy} = \tau_z = f_2(y, z, M) \end{aligned} \right\} \quad (36.11a)$$

függvényeket [36.2]. Itt  $M$  a keletkező csavarónyomaték.

Az eredő csúsztatófeszültség a keresztmetszet bármely pontjában:

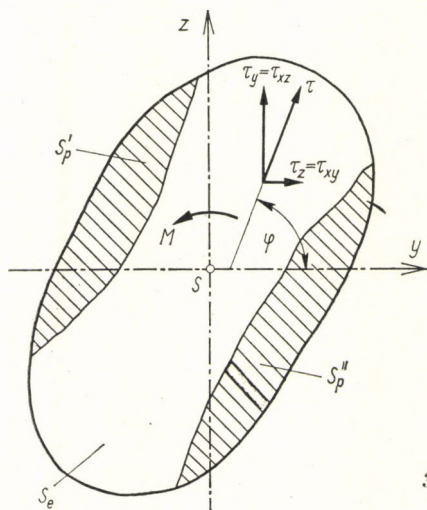
$$\tau_y^2 + \tau_z^2 = \tau^2, \quad (36.11b)$$

vagyis írható:

$$\tau = f_3(y, z, M). \quad (36.12)$$

A csavarással alakított keresztmetszet képlékenyen és rugalmasan deformált tartományainak határgörbéi mentén

$$\tau = \tau_f,$$



36.6. ábra. Az elasztikus-plasztikusan csavart rúd keresztmetszetében fellépő feszültségek

azaz

$$\tau_f = f_3(y, z, M_f), \quad (36.12a)$$

tehát írható:

$$F(y, z, \tau_f, M_f) = 0. \quad (36.13)$$

Ez a határgörbék egyenlete.

Ez az egyenlet aszerint, hogy hányadfokú, több görbét fejez ki.  $M_f$  jelöli benne azt a nyomatóékat, amely a képlékeny-rugalmas állapotot létrehozza.

A harmadik feltétel, hogy a (36.13) egyenlettel kifejezett határgörbéknek legalább egyike úgy messe a szimmetriatengelyt, hogy a görbe érintője a  $C$  metszéspontban (36.7. ábra) merőleges legyen a szimmetriatengelyre.

Ha ui. az  $F_1 = 0$  görbe érintője a  $C$  pontban merőleges az  $y$  tengelyre, akkor az ebben a pontban ébredő  $\tau_f$  legnagyobb csúsztatófeszültség a rugalmasan és a képlékenyen deformált tartományhoz is tartozik. A  $C$  pontban  $z = 0$ , és a  $C$  pont távolsága az  $S$  csavarási tengelytől  $y = y_0$ . A (36.13) egyenlet a  $C$  pontra vonatkoztatva:

$$F_1(y_0, z = 0, \tau_f, M_f) = 0. \quad (36.14)$$

Ebben a függvényben  $\tau_f$  ismert,  $y_0$ -t felvesszük, s így kiszámíthatjuk azt az  $M_f$  csavarónyomatékot, amely szükséges ahhoz, hogy a képlékenységi tartománya  $y_0$  mélységbe hatoljon:

$$M_f = \Phi(y_0). \quad (36.15)$$

A csavarás munkáját a következő megfontolás alapján számíthatjuk ki: A  $C$  pontban, mihogya az a rugalmas tartományhoz is tartozik, fennáll a következő összefüggés:

$$\tau_f = G\gamma = G\left(\frac{\varphi}{l}\right)y_0. \quad (36.16)$$

Ebben a képletben  $G$  a csúsztatófeszültség modulusa,  $\gamma$  a fajlagos csúszás,  $\varphi$  az elcsavarási szög,  $l$  a csavart rúd hossza.

Hogy a  $C$  pontban  $\tau_f$  maximális csúsztatófeszültség lépjen fel, ahhoz

$$\varphi = \left(\frac{\tau_f l}{G}\right) \frac{1}{y_0} \quad (36.17)$$

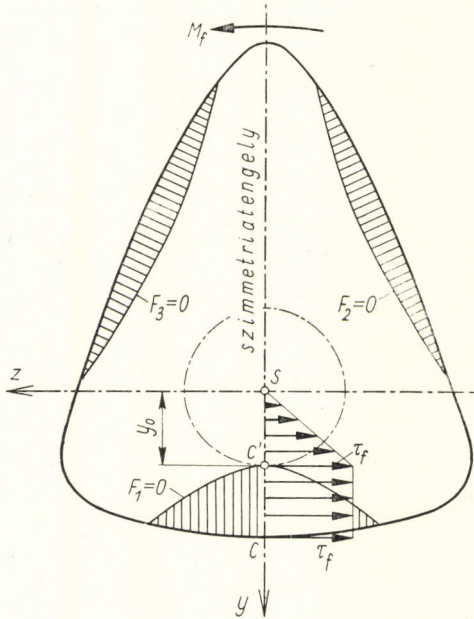
elcsavarásra van szükség.

Az elemi csavarási munka a képlékenységi tartományában:

$$dA = M_f d\varphi, \quad (36.18)$$

ahol

$$d\varphi = -\left(\frac{\tau_f l}{G}\right) y_0^{-2} dy_0. \quad (36.19)$$



36.7. ábra. Olyan rúd elasztikus-plasztikus csavarása, melynek keresztmetszete legalább egy szimmetriatengellyel bír. GELEJI szerint

A teljes csavarási munka tehát:

$$A = \int_{y_{o1}}^{y_{o2}} M_f d\varphi = - \left( \frac{\tau_f l}{G} \right) \int_{y_{o1}}^{y_{o2}} \Phi(y_0) y_0^{-2} dy_0. \quad (36.20)$$

A továbbiakban a fenti gondolatmenet alapján bemutatjuk az ellipszis, a négyzet, a téglalap és az egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű rúd maradélecsavarásához szükséges nyomaték és alakítási munka kiszámítását [36.1].

### 37. ELLIPSZIS KERESZTMETSZETŰ RÚD MARADÓ CSAVARÁSA

Ha a rudat elcsavaráskor csak rugalmasan vesszük igénybe, akkor az ellipszis keresztmetszet egy tetszőleges pontjában a csúsztatófeszültség (37.1. ábra):

$$\tau_y = \frac{2M}{\pi c b^3} y, \quad (37.1)$$

$$\tau_z = - \frac{2M}{\pi b c^3} z. \quad (37.2)$$



Az eredő csúsztatófeszültség pedig:

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2, \quad (37.3)$$

illetve

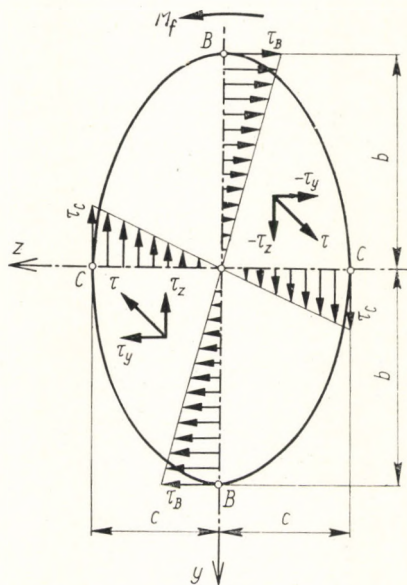
$$\tau = \frac{2M}{\pi bc} \sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}. \quad (37.4)$$

Ha a nyomaték és vele az elcsavarási szög annyira megnövekszik, hogy a keresztmetszeten keletkeznek olyan helyek, amelyek csak rugalmasan és olyanok, amelyek maradón vannak deformálva, akkor a határgörbe a (37.4) egyenletből meghatározható:

$$\tau_f = \left( \frac{2M_f}{\pi bc} \right) \sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}, \quad (37.4a)$$

amiből a határgörbe egyenlete:

$$\frac{y^2}{b^4 \left( \tau_f \frac{\pi bc}{2M_f} \right)^2} + \frac{z^2}{c^4 \tau_f \left( \frac{\pi bc}{2M_f} \right)^2} = 1. \quad (37.5)$$



37.1. ábra. Az elliptikus keresztmetszetű rúd csavarásánál fellépő feszültségek

Ez egy olyan ellipszis, amelynek féltengelyei:

$$b_1 = b^2 \left( \tau_f \frac{\pi b c}{2 M_f} \right), \quad (37.6)$$

$$c_1 = c^2 \left( \tau_f \frac{\pi b c}{2 M_f} \right). \quad (37.7)$$

Ha azt akarjuk, hogy a  $C(0, c)$  pontban keletkező csúsztatófeszültség a legnagyobb csúsztatófeszültséggel legyen egyelő, azaz (37.2. ábra)

$$\tau_c = \tau_f = - \frac{2 M_f}{\pi b c^2} \quad (37.8)$$

legyen, akkor a csavarónyomatékot a rúd csavarásakor

$$M_{fC} = \frac{\tau_f \pi b c^2}{2} \quad (37.9)$$

nagyságig kell fokozni. Ekkor a határgörbe imaginárius (37.2. ábra). Ilyenkor csak a  $C$  pontban ébred  $\tau_f$  csúsztatófeszültség, az egész keresztmetszet csak rugalmasan deformálódik.

A határgörbe (ellipszis) féltengelyeinek nagysága a (37.6) és a (37.7) egyenlettel kiszámítható, ha ezekbe az egyenletekbe a (37.9) egyenletet behelyettesítjük:

$$b_1 = b \left( \frac{b}{c} \right), \quad (37.10)$$

és

$$c_1 = c. \quad (37.11)$$

Ha azt akarjuk, hogy a  $B$  pontban is keletkezzék a folyási határnak megfelelő csúsztatófeszültség (37.3. ábra), akkor az ehhez szükséges nyomaték a

$$\tau_b = \tau_f = \frac{2 M_{fB}}{\pi c b^2} \quad (37.12)$$

egyenlet alapján:

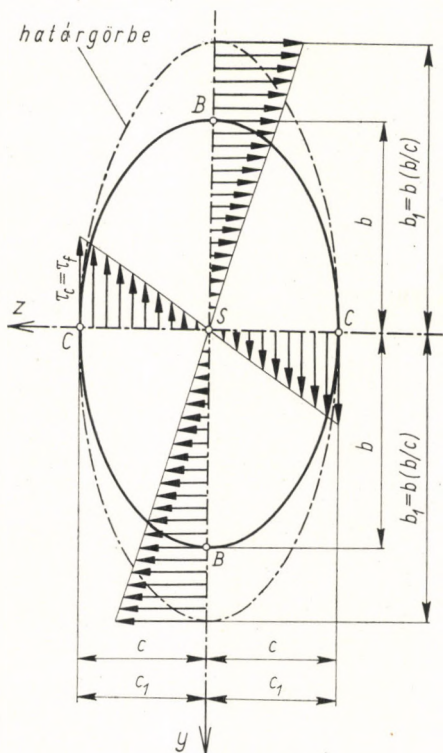
$$M_{fB} = \frac{\tau_f \pi c b^2}{2}. \quad (37.13)$$

A határgörbe (ellipszis) félátmérői a (37.6) és (37.7) egyenletből a (37.13) egyenlet behelyettesítése után

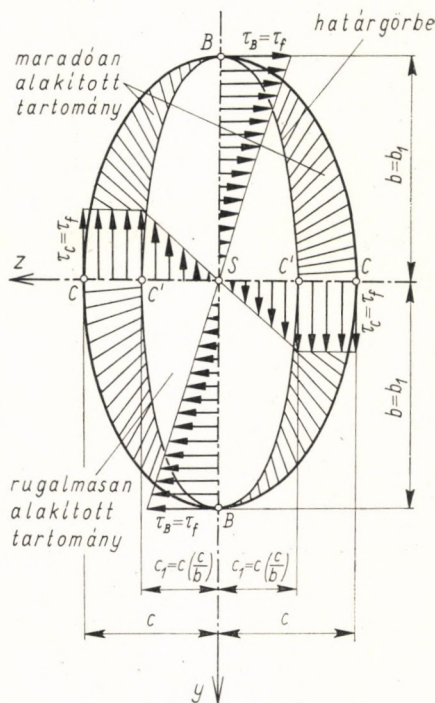
$$b_1 = b \quad (37.14)$$

és

$$c_1 = c \left( \frac{c}{b} \right). \quad (37.15)$$



37.2. ábra. Elliptikus keresztmetszetű rúd csavarása oly módon, hogy a  $z$  tengelynek csak a  $C, C'$  pontjaiban lépjen fel  $\tau_f$  csúsztatató feszültség



37.3. ábra. Elliptikus keresztmetszetű rúd elasztikus-plasztikus csavarása oly módon, hogy az  $y$  tengelynek csak a  $B, B'$  pontjaiban lépjen fel  $\tau_f$  csúsztatató feszültség

Ha  $M_f > M_{fB}$ , akkor a határgörbe félátmérői tovább kisebbednek (37.4. ábra) és

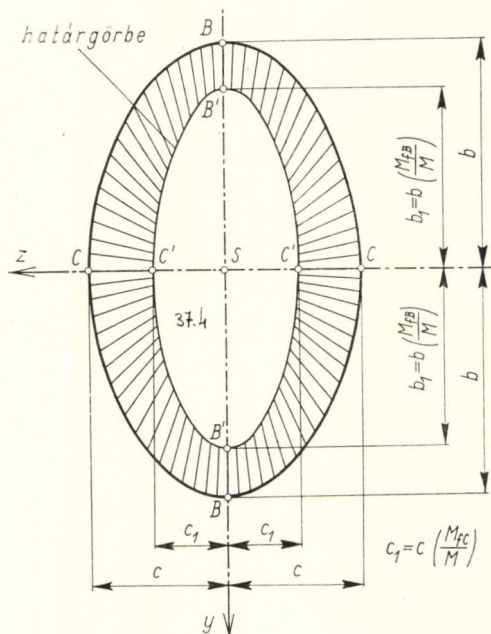
$$b_1 = b \left( \frac{M_{fB}}{M} \right), \quad (37.16)$$

$$c_1 = c \left( \frac{M_{fC}}{M} \right) \quad (37.17)$$

nagyságúak lesznek (37.4. ábra).

Az elcsavarási szög nagyságát a (36.15) egyenletből lehet meghatározni. Hogy az ellipszisznél a képlekenyen deformált tartomány határgörbéje az  $S$  csavarási tengelyt  $z_0$  távolságra megközelítse, ahhoz

$$\varphi = \left( \frac{\tau_f l}{G} \right) \frac{1}{z_0} \quad (36.17a)$$



37.4. ábra. Elliptikus keresztmetszetű rúd elasztikus-plasztikus csavarása

szöggel kell elcsavarni a rudat. Amikor a rudat  $\varphi$  szöggel elcsavarjuk, a nyomaték [(37.2) egyenlet]

$$M_{f\varphi} = \frac{\tau_f \pi b c^3}{2 z_0} \quad (37.18)$$

értékűre növekszik.

Az alakváltozási munka kiszámítása ellipszis keresztmetszetű rúd maradé elcsavarásánál a következőképpen történik:

Ha azt kívánjuk, hogy az  $S$  csavarási ( $x$ ) tengelytől  $z_0$  távolságban legyen a  $\tau_f$  maximális folyási feszültség, akkor ehhez  $M > M_{fc}$  [(37.9) egyenlet] nyomatékra van szükség. Ekkor érvényes, hogy

$$z = c \left( \frac{M_{fc}}{M} \right), \quad (37.19)$$

vagyis a szükséges nyomaték:

$$M = \left( \frac{c}{z} \right) M_{fc}. \quad (37.20)$$

Az elemi alakváltozási munka:

$$dA = M d\varphi, \quad (36.18)$$

ahol

$$d\varphi = - \left( \frac{\tau_f l}{G} \right) z^{-2} dz \quad (36.19a)$$

és

$$dA = - (M_{fC} c) \left( \frac{\tau_f l}{G} \right) \frac{dz}{z^3}. \quad (37.21)$$

Így az elcsavarási munka a képlékeny tartományban:

$$A = - \left( \frac{\tau_f^2 \pi b c^3 l}{G} \right) \int_c^{z_0} \frac{dz}{z^3} = + \frac{\tau_f^2 \pi b c^3 l}{2 G} \left[ z^{-2} \right]_c^{z_0}. \quad (37.22)$$

Az ellipszis területe:

$$T = c b \pi, \quad (37.23)$$

és az elliptikus keresztmetszetű rúd térfogata:

$$Tl = V. \quad (37.24)$$

Ezek behelyettesítése után a (37.22) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{c^2}{z_0^2} - 1 \right) V \left( \frac{\tau_f^2}{G} \right) = o V \left( \frac{\tau_f^2}{G} \right), \quad (37.25)$$

itt

$$o = \frac{1}{2} \left( \frac{c^2}{z_0^2} - 1 \right). \quad (37.26)$$

### 38. DERÉKSZÖGŰ NÉGYSZÖG KERESZTMETSZETŰ RÚD MARADÓ CSAVARÁSA

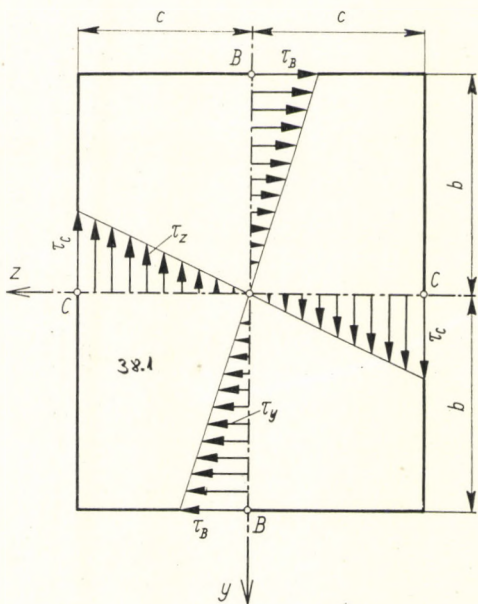
Ha elcsavaráskor a derékszögű négyszög keresztmetszetű rudat csak rugalmasan vesszük igénybe, akkor a keresztmetszet egy tetszőleges pontjában a csúsztatófeszültség közelítő értéke (38.1. ábra):

$$\tau_y = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{l^3 c} \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) y, \quad (38.1)$$

$$\tau_z = - \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{c^3 b} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) z. \quad (38.2)$$

Az eredő csúsztatófeszültség pedig:

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2, \quad (38.3)$$



38.1. ábra. Négyzetes keresztmetszetű rúd csavarása

illetve

$$\tau^2 = \left( \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{bc^2} \right)^2 \left[ \frac{c^2 y^2}{b^4} \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \right]. \quad (38.4)$$

Ha ebben az egyenletben az együtthatókat nagy betűkkel jelöljük, vagyis

$$A = \left( \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{bc^2} \right)^2; \quad B = \left( \frac{c^2}{b^4} \right); \quad D = \left( \frac{1}{c^2} \right); \quad E = \left( \frac{1}{b^2} \right)$$

jelöléseket vezetjük be, akkor a (38.4) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\tau^2 = A [By^2 (1 - Dz^2)^2 + Dz^2 (1 - Ey^2)^2]. \quad (38.5)$$

A műveleteket elvégezzük, és az egyszerűség kedvéért a következő jelöléseket használjuk:

$$B = a; \quad 2BD = b; \quad BD^2 = c; \quad D = d; \quad 2ED = e; \quad DE^2 = f,$$

így a (38.5) egyenletet a következő egyszerű alakban írhatjuk fel:

$$\left( \frac{\tau^2}{A} \right) = y^2 (a - bz^2 + cz^4) + z^2 (d - ey^2 + fy^4). \quad (38.6)$$

Ha keressük azoknak a pontoknak geometriai helyét, melyekben  $\tau = \tau_f$ , azaz keressük a rugalmas és képlékeny tartományok határgörbéjét, akkor a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\left(\frac{\tau_f^2}{A}\right) = K = y^2(a - bz^2 + cz^4) + z^2(d - ey^2 + fy^4). \quad (38.7)$$

Amikor  $y = 0$ , akkor (38.2. ábra)

$$z_0 = \pm \sqrt{\frac{K}{d}} = \pm \frac{16}{9} \tau_f \frac{bc^3}{M_f}, \quad (38.8)$$

amikor  $z = 0$ , akkor (38.2. ábra)

$$y_0 = \pm \sqrt{\frac{K}{a}} = \pm \frac{16}{9} \tau_f \frac{b^3 c}{M_f}. \quad (38.9)$$

Ha  $z = \pm c$  (vagyis a  $C$  pontokban), akkor a (38.4) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\tau_f^2 = \left(\frac{9}{16} \frac{M_f}{bc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2, \quad (38.10)$$

ebből

$$y = \pm b \sqrt{1 \mp \frac{16}{9} \cdot \frac{bc^2 \tau_f}{M_f}}, \quad (38.11)$$

illetve

$$y = \pm b \sqrt{1 \mp \frac{z_0}{c}}. \quad (38.12)$$

Az  $E, C', F$  pontokon átmenő hiperbola (határgörbe) egyenlete:

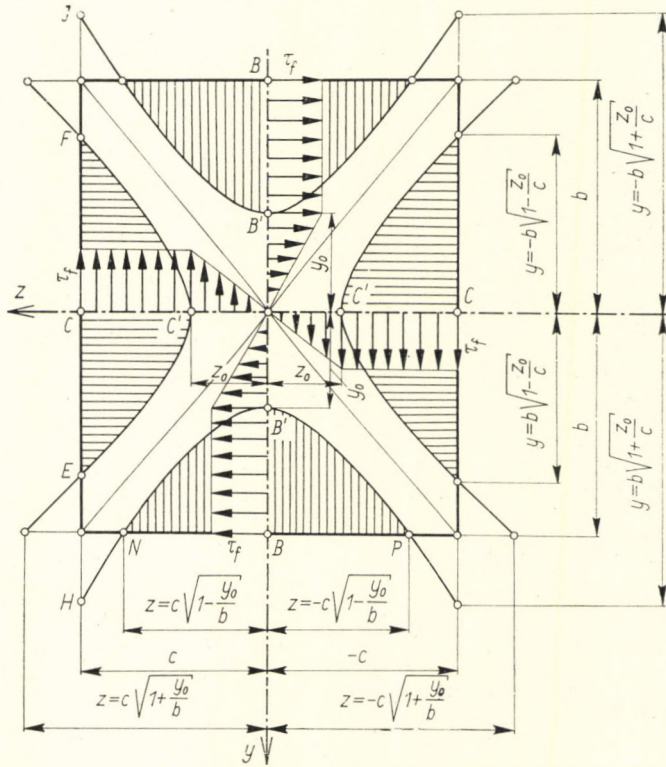
$$\frac{z^2}{z_0^2} - \frac{y^2}{y_0'^2} = 1. \quad (38.13)$$

A (38.11) és (38.12) egyenlet szerint azonban

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{16}{9} \cdot \frac{bc^2 \tau_f}{M_f}\right) = b^2 \left(1 - \frac{z_0}{c}\right). \quad (38.14)$$

Az  $E$  és az  $F$  pontban érvényes:

$$\frac{c^2}{z_0^2} - \frac{b^2 \left(1 - \frac{z_0}{c}\right)}{y_0'^2} = 1, \quad (38.15)$$



38.2. ábra. Az elasztikus és a plasztikus tartományok kialakulása négyzetes keresztmetszetű rúd csavarásakor

ebből

$$\frac{c^2}{z_0^2} - 1 = \frac{b^2 \left(1 - \frac{z_0}{c}\right)}{y_0'^2} \quad (38.16)$$

és

$$y_0'^2 = \frac{b^2 \left(1 - \frac{z_0}{c}\right)}{\left(\frac{c}{z_0} + 1\right) \left(\frac{c}{z_0} - 1\right)} = \frac{z_0^2}{c} \frac{b^2}{(c + z_0)} \quad (38.17)$$

Tehát az  $E, C', F$  pontokon átmenő hiperbolikus határgörbe egyenlete:

$$\frac{z^2}{z_0^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{z_0^2 b^2}{c(c + z_0)}\right)} = 1 \quad (38.18)$$



Hasonlóképpen az  $N B' P$  pontokon átmenő hiperbolikus határgörbe egyenlete:

$$\frac{z^2}{\left(\frac{y_0^2 c^2}{b(b+y_0)}\right)} - \frac{y^2}{y_0^2} = 1. \quad (38.19)$$

A csavarás maradó elemi munkája a (36.18) egyenlet szerint

$$dA = M_f d\varphi.$$

Az  $M_f$  nyomatékot a (38.8) egyenletből fejezzük ki:

$$M_f = \pm \frac{16}{9} \cdot \frac{\tau_f b c^3}{z_0}, \quad (38.20)$$

a differenciális elcsavarási szöget pedig a (36.19) egyenletből:

$$d\varphi = - \left( \frac{\tau_f l}{G} \right) z^{-2} dz. \quad (36.19a)$$

számítjuk. Így a  $dA$  elemi munka egyenlete a következő alakot kapja:

$$dA = \mp \frac{16}{9} \left( \frac{\tau_f^2 b c^3 l}{G} \right) \frac{dz}{z^3}. \quad (38.21)$$

A maradó csavarási munka:

$$A = \frac{16}{9} \cdot \frac{\tau_f^2 T}{G 4} \cdot l c^2 \int_c^{z_0} \frac{dz}{z^3} = \frac{2}{9} \left( \frac{c^2}{z_0^2} - 1 \right) V \frac{\tau_f^2}{G}; \quad (38.22)$$

ha

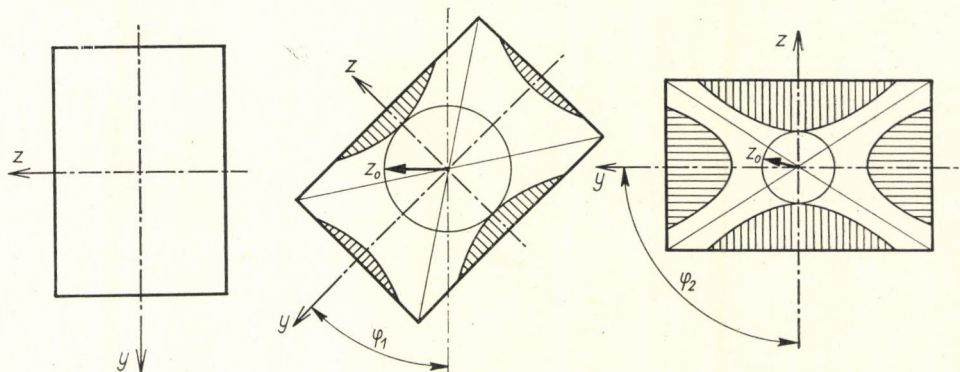
$$o = \frac{2}{9} \left( \frac{c^2}{z_0^2} - 1 \right),$$

akkor a munka

$$A = \frac{\tau_f^2}{G} o V \quad (38.23)$$

alakban írható.

A  $z_0$  és a  $\varphi$  elcsavarási szög között határozott összefüggés van, a (36.17) egyenletből, tehát az elcsavarás szögéből a  $c - z_0$  behatolási mélység mindig meghatározható (38.3. ábra).



38.3. ábra. Az elasztikus és a plasztikus tartományok kialakulása négyzetes keresztmetszetű rúd csavarásakor

### 39. EGYENLŐ OLDALÚ HÁROMSZÖG KERESZTMETSZETŰ RÚD MARADÓ CSAVARÁSA

Ha az egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű rudat az elcsavarásnál csak rugalmasan vesszük igénybe, akkor a keresztmetszet egy tetszőleges pontjában a csúsztatófeszültség (39.1. ábra):

$$\tau_{xz} = \tau_y = \frac{160 M}{3 b^5} (3 yz + hy), \quad (39.1)$$

$$\tau_{xy} = \tau_z = \frac{80 M}{3 b^5} (3 z^2 - 2 hz - 3 y^2), \quad (39.2)$$

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2. \quad (39.3)$$

Legyen

$$\left( \frac{80 M}{3 b^5} \right) = A, \quad \text{és} \quad \left( \frac{160 M}{3 b^5} \right) = B, \quad (39.4)$$

akkor felírható:

$$\left( \frac{\tau_z}{A} \right) = 3 z^2 - 2 hz - 3 y^2. \quad (39.5)$$

Azoknak a pontoknak a geometriai helyét, ahol  $\tau_z = \tau_f$ , a következő egyenlettel lehet kifejezni:

$$\left( \frac{\tau_f}{A} \right) = 3 z^2 - 2 hz - 3 y^2. \quad (39.6)$$

Ha  $y = 0$ , akkor

$$\left( \frac{\tau_f}{A} \right) = 3 z_0^2 - 2 h z_0, \quad (39.7)$$

és ebből az egyenletből:

$$z_0 = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 + 12 \left( \frac{\tau_f}{A} \right)}}{6}; \quad (39.8)$$

illetve

$$z_0 = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 + \frac{9}{20} \left( \frac{\tau_f}{M_f} \right) b^5}}{6}; \quad (39.9)$$

itt  $z_0$  a határgörbe távolsága az  $S$  forgatási tengelytől.

Ha feltesszük, hogy az eredő csúsztatófeszültség  $\tau_f$ , akkor írható:

$$[A(3z^2 - 2hz - 3y^2)]^2 + [B(3yz + hy)]^2 = \tau_f^2. \quad (39.10)$$

$z = -\frac{h}{3}$  behelyettesítése után a (39.10) egyenletnek a következő alakja lesz:

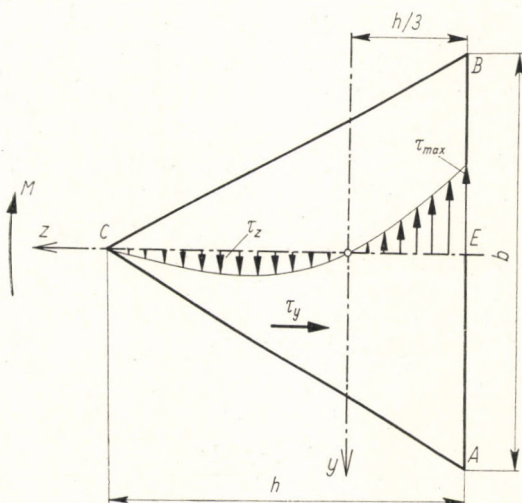
$$A^2 \left[ \frac{h^2}{3} + \frac{2}{3}h^2 - 3y^2 \right]^2 + B^2 \underbrace{[-yh + yh]}_{=0}^2 = \tau_f^2, \quad (39.11)$$

azaz

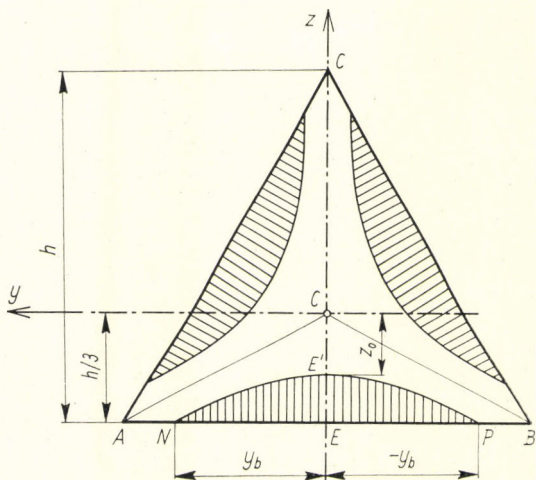
$$A(h^2 - 3y^2) = \pm \tau_f, \quad (39.12)$$

ebből (39.2. ábra):

$$y_b = \pm \sqrt{\frac{h^2 - \left( \frac{\tau_f}{A} \right)}{3}}, \quad (39.13)$$



39.1. ábra. Az egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű rúd keresztmetszetében a csavaráskor fellépő feszültségek



39.2. ábra. Az elasztikus és a plasztikus tartományok kialakulása egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű rúd csavarásakor

vagyis az  $N, E', P$  pontokon keresztülmű határgörbe (hiperbola) az  $AB$  oldalt a szimmetria tengelytől  $\pm y_b$  távolságban metszi.

Az ahhoz szükséges nyomatékot, hogy a maradón deformált tartomány a rúd keresztmetszetébe  $\frac{h}{3} - z_0$  mélységbe behatoljon, a (39.7) egyenletből kell meghatározni:

$$M = \frac{3}{80} \left( \frac{\tau_f b^5}{3 z_0^2 - 2 z_0 h} \right). \quad (39.14)$$

Az elemi maradó csavarási munka [(36.18) képlet]:

$$dA = \frac{3}{80} \left( \frac{\tau_f^2}{G} \right) b^5 \left[ \frac{dz}{z^2 (3 z^2 - 2 h z)} \right]. \quad (39.15)$$

A teljes maradó csavarási munka:

$$A = \frac{3}{80} \cdot \frac{\tau_f^2}{G} b^5 \int_{-\frac{h}{3}}^{-z_0} \frac{dz}{3 z^4 - 2 h z^3}. \quad (39.16)$$

A műveletek elvégzése után:

$$A = 0,0845 \left( \frac{\tau_f^2}{G} \right) V \left( \frac{b}{h} \right)^4 \left[ \ln \left| 1 + \left( \frac{\frac{2}{3} h}{z_0} \right) \right| + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2}{3} h}{z_0} \right)^2 - \left( \frac{\frac{2}{3} h}{z_0} \right) - 1,1 \right], \quad (39.17)$$

amit felírhatunk így is:

$$A = \frac{\tau_f^2}{G} oV, \quad (39.18)$$

ahol

$$o = 0,0845 \left(\frac{b}{h}\right)^4 \left[ \ln \left| 1 + \left(\frac{\frac{2}{3}h}{z_0}\right) \right| + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{2}{3}h}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{\frac{2}{3}h}{z_0}\right) - 1,1 \right] \quad (39.19)$$

és

$$V = \frac{hbl}{2}. \quad (39.20)$$

Az itt bemutatott számítási eljárást még számos különböző keresztmetzetű rúdra ki lehet terjeszteni, és ilyen módon a deformációs munka számítását a technikailag fontos rudakra vonatkozóan el lehet végezni.

## V. RÚDHÚZÁS

### 40. A DRÓT- ÉS RÚDHÚZÁSNÁL FELLÉPŐ ERŐK ÉS MUNKASZÜKSÉGLET MEGHATÁROZÁSA

A hidegen húzott drótot (huzalt) és rudat úgy állítják elő, hogy az előhengerelt vagy elősajtolt nyers drótot vagy rudat — anyagának és keménységi állapotának megfelelő keresztmetszet-csökkentésekkel — megfelelően kiképzett, folytonosan kisebbedő keresztmetszetű húzószerszám-sorozaton húzzák keresztül. Az ismételt húzások (keresztmetszet-csökkentések) számának a húzások folyamán fellépő keményedés határt szab. Bizonyos számú keresztmetszet-csökkentés után az anyagot, hogy továbbhúzható legyen, ki kell lágyítani. A húzásonként elérhető keresztmetszet-csökkenés ritkán 50 %, általában 20 és 30% között szokott lenni.

Meg kell azt is jegyeznünk, hogy a húzószerszám anyaga és a húzóüreg kiképzése nagy befolyással van a húzott anyag tulajdonságaira, továbbá az alkalmazható húzási fokozatok lépcsőzésére.

A húzószerszám dolgozó felülete vagy konikusan, a be- és kilépésnél megfelelő legömbölyítéssel, vagy változó húzószöggel trombitacsőszerűleg van kiképezve.

A húzószerszám húzófelületét gondosan kell polírozni, és a húzáshoz kenőanyagot kell használni, különben a szerszám gyorsan berágódik. A szerszám anyaga lehet edzett acél, volfrám-karbid vagy gyémánt.

Miközben a drótot vagy rudat egy húzószerszámon keresztül húzzák, a hossza megnövekszik, a keresztmetszete pedig csökken. Az alakítást a szerszám falán a darab hossz tengelyére csaknem merőlegesen működő  $K_q$  erő hozza létre, amely a darab hossz tengelyében működő  $Z$  húzóerő következtében lép fel (40.1. ábra).  $2\alpha$  húzóüregnyílás és  $\varrho$  súrlódási szög esetében a  $Z$  erő és a  $K_q$  erő között a következő összefüggés áll fenn:

$$Z = K_q \sin(\alpha + \varrho) \quad (40.1)$$

és

$$K_q = \frac{Z}{\sin(\alpha + \varrho)}. \quad (40.2)$$

Általában  $\alpha = 10^\circ \sim 20^\circ$ ,  $\varrho (=) 3^\circ$  és  $\mu (=) 0,05$ , (ami azt jelenti, hogy  $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{tg} 3^\circ$ ).

*a) A húzásnál fellépő erők megállapítása, ha feltételezzük, hogy az alakítási ellenállás a húzóüregben állandó [40,5]*

A húzáshoz szükséges húzóerőt az alábbi megfontolás alapján lehet meghatározni.



A tiszta alakítási munka létrehozásához szükséges húzóerő:

$$Z_a = 0,5 k_k \pi \int_{h_2}^{h_1} h dh = \frac{h_1^2 - h_2^2}{4} \pi k_k . \quad (40.6)$$

Mint hogy a húzott rúd keresztmetszete húzás előtt  $\frac{h_1^2 \pi}{4} = f_1$  és húzás után  $\frac{h_2^2 \pi}{4} = f_2$ , a (40.6) egyenletet a következőképpen is felírhatjuk:

$$Z_a = k_k (f_1 - f_2) = k_k F , \quad (40.7)$$

itt  $F = f_1 - f_2$  a keresztmetszet-csökkenés vagy fogyás.

Az az erő, amely a húzófelületen fellépő súrlódási munka elvégzéséhez szükséges:

$$Z_s = \frac{(h_1 + h_2) \pi b}{2 \cos \alpha} k_k \mu = Q k_k \mu , \quad (40.8)$$

ha a húzóüreg dolgozó felülete:

$$Q = \frac{(h_1 + h_2) \pi b}{2 \cos \alpha} = \frac{F}{\sin \alpha} (=) \frac{F}{\alpha} . \quad (40.9)$$

A belső anyagelmozdulások legyőzéséhez szükséges erőt F. KÖRBER és A. EICHINGER módján fogjuk kiszámítani [40,8]. Szerintük a 40.3. ábra alapján meghatározható az az erő, mely szükséges ahhoz, hogy a rúdnak a tengelyével párhuzamos szálait belépéskor a húzási szögnek megfelelő irányba hajlítsa, majd a kilépési keresztmetszetben ismét a rúd tengelye irányába állítsa.

Ezt a folyamatot a húzóüregbe való belépéskor fellépő nyírási folyamatnak foghatjuk fel, mely akkor is jelentkezik, amikor a darab az üregből kilép. A térfogategységre vonatkoztatott belső munka:

$$A_b = \sigma_r \varepsilon_r . \quad (40.10)$$

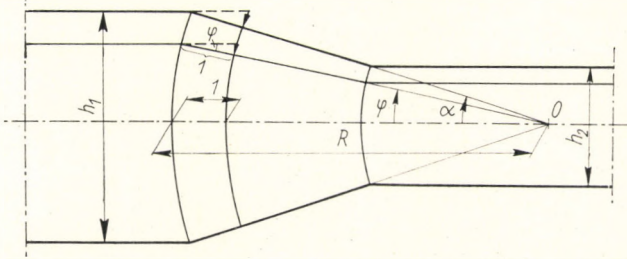
Abból, hogy a redukált feszültség [(15.7) egyenlet] az üregbe való belépés előtt  $\sigma_r = \tau \sqrt{3} = k_f$ , és a redukált nyúlás

$$\varepsilon_r = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} , \quad (40.11)$$

következik, hogy

$$A_b = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \varphi . \quad (40.12)$$





40.3. ábra. A szálak átvezetésével kapcsolatos belső járulékos csúszások a ki- és a belépő keresztmetszetben, KÖRBER és EICHINGER szerint

Az egységnyi hosszúságú rúddarabra vonatkoztatva a belső munkát a (40.13) egyenlettel számíthatjuk ki. (A térfogat:

$$V = (R\varphi)^2 \pi l; \quad dV = 2 R^2 \pi \varphi \, d\varphi).$$

$$\int A_b \, dV = 2 R^2 \pi \frac{k_{fk}}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha \varphi^2 \, d\varphi = 2 R^2 \pi \frac{k_{fk}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\alpha^3}{3}. \quad (40.13)$$

Itt feltettük, hogy

$$\sin \varphi (=) \operatorname{tg} \varphi (=) \varphi. \quad (40.14)$$

Azonban  $R^2 \alpha^2 \pi = f_1$ , s így a  $V$  térfogatra vonatkoztatott belső munka:

$$A_b = \frac{2}{3} \cdot \frac{k_{fk}}{\sqrt{3}} \alpha V. \quad (40.15)$$

Ugyanennyi belső munkát kell a kilépési helyen is számításba venni. Az összes belső munka tehát

$$A'_b = \frac{4}{3} \frac{k_{fk}}{\sqrt{3}} \alpha V = 0,77 \alpha V k_{fk}. \quad (40.16)$$

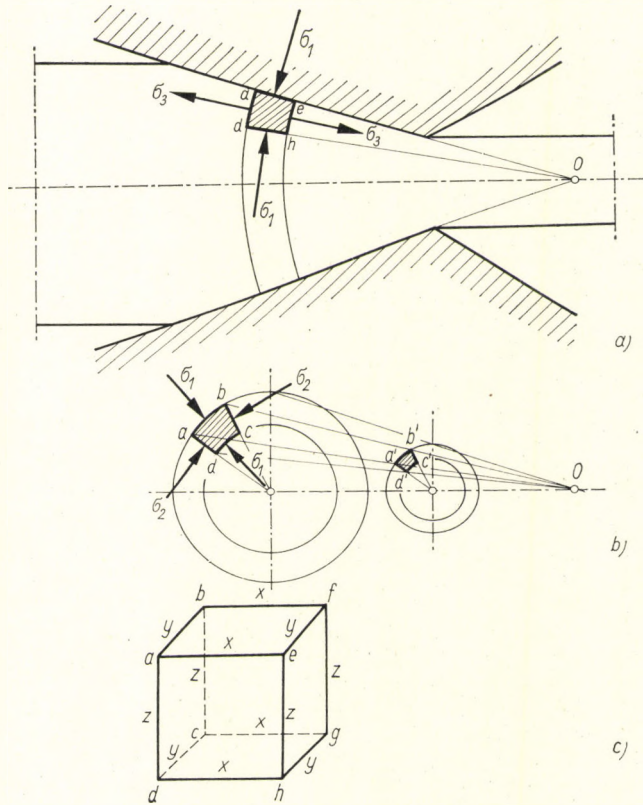
E munka elvégzéséhez a húzóerő:

$$Z_b = 0,77 k_{fk} f_2 \alpha. \quad (40.17)$$

A húzás után a rúd hossza  $l_2$ , és teljes térfogata  $V_{\bar{v}} = f_2 l_2$ .

A fentiek szerint a rúdhúzáshoz szükséges összes húzóerő:

$$Z = Z_a + Z_s + Z_b = k_k (F + \mu Q) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha. \quad (40.18)$$



40.4. ábra. A húzóüregben fellépő főfeszültségek és főalakváltozások közötti összefüggés meghatározása

Mint hogy az  $\alpha$  húzószög figyelembevételével a húzóüreg dolgozó felülete:

$$Q = \frac{F}{\sin \alpha} (=) \frac{F}{\alpha},$$

a (40.18) képletet a következőképpen is fel lehet írni:

$$Z = k_k F \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha. \quad (40.19)$$

A kilépő keresztmetszetben fellépő húzófeszültség:

$$\sigma_z = \frac{Z}{f_2} = k_k \frac{F}{f_2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + 0,77 k_{fk} \alpha. \quad (40.20)$$

A rúdhúzás teljesítményszükséglete:

$$N = Zv = \left[ k_k F \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha \right] v. \quad (40.21)$$

A közepes alakítási ellenállást az alábbi gondolatmenet alapján határozzuk meg.

A húzóüregben az alakváltozást a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  és  $\sigma_3$  feszültség együttesen okozza (40.4. ábra). Ezek a főfeszültségek a húzóüregben levő darab minden elemi prizmáján  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  és  $\varepsilon_3$  főalakváltozást hoznak létre (40.4/c ábra). Minden elemi prizmát, ha elegendő kicsiny, paralelepipedonnak tekinthetünk.

A főfeszültségek és főalakváltozások közötti összefüggés a Mohr-féle feszültségi körrel ábrázolható a legszemléletesebben (40.5. ábra).

Minden elemi prizma a húzóüregben úgy változtatja alakját, hogy (40.4/a, b, c ábra):

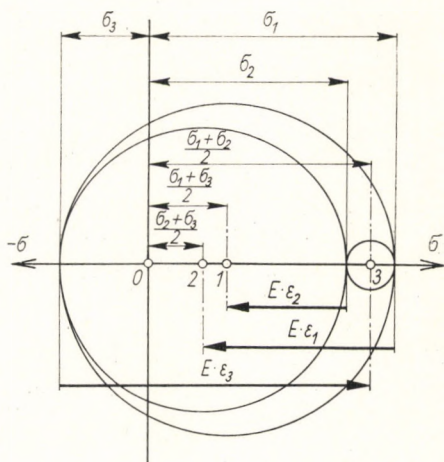
$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2} = \text{konst}, \quad (40.22)$$

vagyis ez a hányados állandó marad, ami azt jelenti, hogy az  $abcd$  oldal fajlagos alakváltozása is állandó marad:

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}, \quad (40.23)$$

vagy

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (40.24)$$



40.5. ábra. A húzóüregben fellépő főfeszültségek és főalakváltozások közötti összefüggés ábrázolása a Mohr-féle körrel

Ezt az egyenletet a következőképpen is fel lehet írni:

$$1 - \frac{y_2}{y_1} = 1 - \frac{z_2}{z_1}, \quad (40.25)$$

vagyis

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1}. \quad (40.26)$$

Továbbá

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1} = \varepsilon_2 \quad (40.27)$$

és

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1} = \varepsilon_1, \quad (40.28)$$

ezért a (40.26) egyenlet értelmében

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2. \quad (40.29)$$

A húzóüregben tehát az elemi prizmák oly módon változtatják alakjukat, hogy az első és második főirányban a fajlagos alakváltozások egymással egyenlők.

Az általános *Hooke*-féle egyenletek szerint [(14.6) egyenlet]:

$$\left. \begin{aligned} D \varepsilon_1 &= \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \\ D \varepsilon_2 &= \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (40.30)$$

ebből következik:

$$\left. \begin{aligned} 2 D \varepsilon_1 &= (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3), \\ 2 D \varepsilon_2 &= (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3). \end{aligned} \right\} \quad (40.31)$$

Mint hogy  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , tehát

$$(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3), \quad (40.32)$$

és ebből

$$\sigma_1 = \sigma_2. \quad (40.33)$$

Tehát a főfeszültségeket a húzóüregben a 40.5. ábra szerint jó megközelítéssel ábrázolhatjuk.

A folyási feltétel [(13.2) egyenlet]:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2 \tau_{\max} = k_f. \quad (40.34)$$

Rúdhúzásnál a  $\sigma_3$  előjele a  $\sigma_1$  előjeléhez képest negatív (40.6. ábra), a folyási feltétel ez esetben így alakul:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = k_f. \quad (40.34a)$$

Mint ahogy a szerszám felülete mentén  $\sigma_1 \equiv k_k$ , írható, hogy

$$k_k + \sigma_3 = k_f. \quad (40.35)$$

A harmadik főfeszültség középértéke a húzóüregben belül:

$$\sigma_{3k} = \frac{Z}{2f_2}, \quad (40.36)$$

minthogy a belépési keresztmetszetben  $\sigma_3 = 0$ , és a kilépési keresztmetszetben:

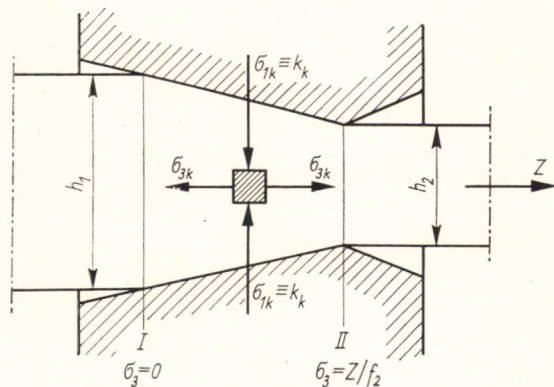
$$\sigma_3 = \frac{Z}{f_2}. \quad (40.37)$$

Ha a (40.35) egyenletbe a  $\sigma_{3k}$ -nak ezt az értékét behelyettesítjük, akkor a (40.36) egyenlet segítségével a folyási feltételt a következőképpen írhatjuk fel:

$$k_{fk} = k_k + \frac{Z}{2f_2}. \quad (40.38)$$

Ha ebbe az egyenletbe a  $Z$  húzóerőnek a (40.18) egyenlettel kifejezett értékét behelyettesítjük, akkor a (40.38) egyenlet a következő alakot vesz fel:

$$k_{fk} = k_k \left( 1 + \frac{F + \mu Q}{2f_2} \right) + 0,385 \alpha k_{fk}, \quad (40.39)$$



40.6. ábra. A közepes főfeszültségek meghatározása a húzóüregben

és ebből a közepes alakítási ellenállás a húzóüreg falán:

$$k_k = \frac{k_{fk}(1 - 0,385\alpha)}{1 + \frac{F + \mu Q}{2f_2}}, \quad (40.40)$$

vagy a (40.19) egyenlet felhasználásával:

$$k_k = \frac{k_{fk}(1 - 0,385\alpha)}{1 + \frac{F}{2f_2} \left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right)}. \quad (40.41)$$

Ha egy húzott rudat a befutási oldalon  $P$  húzóerővel terhelünk (40.7 ábra), akkor csökken az alakítási ellenállás. Ebben az esetben ui.

$$k_{fk} = \sigma_{1k} + \sigma_{3k} + p_k, \quad (40.42)$$

ahol

$$p_k = \frac{2P}{f_1 + f_2}. \quad (40.43)$$

A (40.42) egyenletből következik, hogy

$$\sigma_{1k} + \sigma_{3k} = k_{fk} - p_k, \quad (40.44)$$

és minthogy  $\sigma_{1k} = k_k$ , írható:

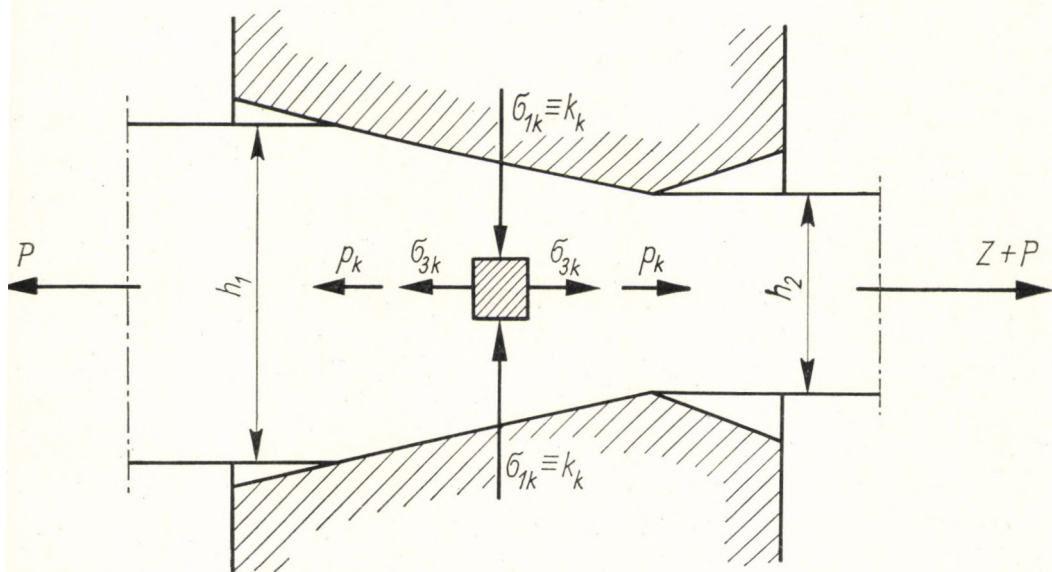
$$k_k + \sigma_{3k} = k_{fk} - p_k. \quad (40.45)$$

A  $\sigma_{3k}$ , a harmadik főfeszültség középvértéke:

$$\sigma_{3k} = \frac{Z}{2f_2} = \frac{k_k(F + \mu Q) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha}{2f_2}. \quad (40.46)$$

Ha ezt az értéket behelyettesítjük a (40.45) egyenletbe és az egyenletet rendezzük, megkapjuk a közepes alakítási ellenállást a húzóüreg fala mentén  $P$  nagyságú ellenhúzás esetében:

$$k_k = \frac{k_{fk}(1 - 0,385\alpha) - p_k}{1 + \frac{F + \mu Q}{2f_2}}, \quad (40.47)$$



40.7. ábra. A közepes főfeszültségek meghatározása a húzórügben ellenhúzás esetén

vagy a (40.19) egyenlet felhasználásával:

$$k_k = \frac{k_{fk} (1 - 0,385 \alpha) - p_k}{1 + \frac{F}{2f_2} \left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right)}. \quad (40.48)$$

Ha az alakítandó rudat nem húzzuk, hanem átnyomjuk a húzóüregben (40.8. ábra), akkor az üregben a közepes alakítási ellenállás az alakítási szilárdságnál nem kisebb, hanem nagyobb.

A folyási feltétel ebben az esetben:

$$\sigma_{1k} - \sigma_{3k} = k_{fk}. \quad (40.49)$$

A belépő keresztmetszetben (I):

$$\sigma_3 = \frac{Z}{f_1} \quad (40.50)$$

a kilépő keresztmetszetben (II):

$$\sigma_3 = 0. \quad (40.51)$$

A közepes harmadik főfeszültség az üregben eszerint:

$$\sigma_{3k} = \frac{Z}{2f_1} . \quad (40.52)$$

A folyási feltétel pedig:

$$k_{fk} = \sigma_{1k} - \sigma_{3k} = k_k - \frac{Z}{2f_1} . \quad (40.53)$$

Mint hogy a rúd alakításához szükséges erő:

$$Z = k_k (F + \mu Q) + 0,77 f_2 k_{fk} \alpha , \quad (40.54)$$

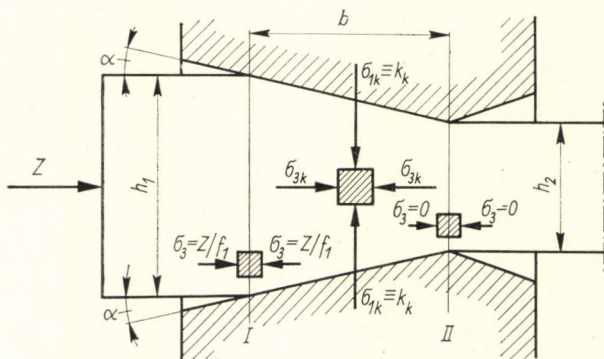
a (40.53) egyenlet a következőképpen alakul:

$$k_{fk} = k_k - \left[ \frac{k_k (F + \mu Q) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha}{2f_1} \right] . \quad (40.55)$$

Ebből a közepes alakítási ellenállás a húzóüregben, ha a darabot a szerzőn keresztül nyomják:

$$k_k = \frac{k_{fk} \left[ 1 + 0,385 \frac{f_2}{f_1} \alpha \right]}{1 - \frac{F + \mu Q}{2f_1}} . \quad (40.56)$$

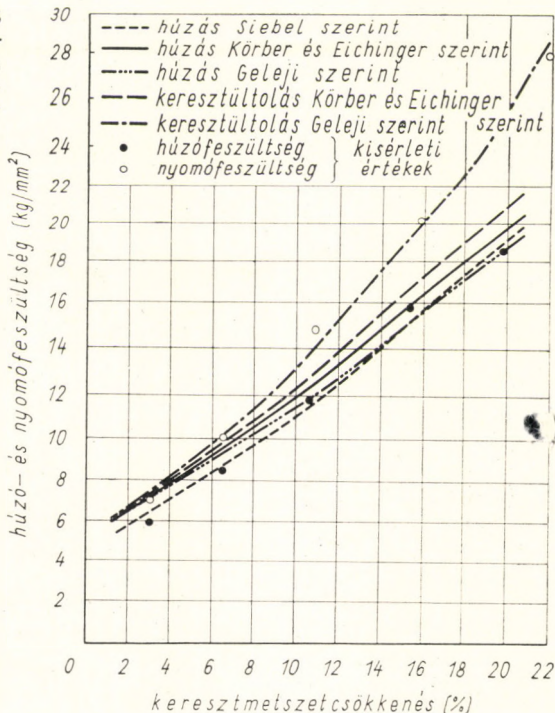
Eddigi vizsgálataink folyamán a húzóerőt arra az esetre vonatkozólag vezettük le, amelyben a húzóüreg alkotója egyenes vonal. Azt is feltételeztük, hogy ebben az esetben a közepes alakítási szilárdság ( $k_{fk}$ ) az üregbe



40.8. ábra. A közepes főfeszültségek meghatározása a húzóüregben a rúd keresztülnyomása esetén



40.9. ábra. Kísérleti és különböző szerzők képleteivel számított húzó- és nyomófeszültségek. (A 00.12, kilépő rúdátmérő 17 mm, húzóüregnyílásszög 18°.) LUEG és TREPTOW szerint



befutó és az üregből kifutó darab anyaga alakítási szilárdságának ( $k_{f1}$  és  $k_{f2}$ ) számtani közepével vehető egyenlőnek:

$$k_{fk} = \frac{k_{f1} + k_{f2}}{2} . \quad (40.57)$$

Ha a húzóüreg alkotója nem egyenes, hanem görbe vonal (pl. körvonal), akkor a közepes alakítási szilárdságot a húzóüregben a következő képlettel lehet kifejezni:

$$k_{fk} = k_{f1} + 0,75 (k_{f2} - k_{f1}) . \quad (40.58)$$

Mint előljáróban már mondtuk, a rúd húzásához szükséges húzóerők kiszámítására több kutató dolgozott ki számítási eljárást. W. LUEG és K. H. TREPTOW a különböző számítási eljárások egyezését kísérletekkel ellenőrizte, és a 40.9. ábrán bemutatott diagramokat kapta [40.6].

b) A húzásnál fellépő erők megállapítása, ha feltételezzük, hogy az alakítási szilárdság a húzóüregben a helytől függő változó [40.7]

A húzóüregben egy  $abcd$  elemi csonka kúp alakú tárcsát (40.10. ábra) képzelünk el, mely az alakváltozás állapotában levő rúdrészről van kivágva, s melyet két egymástól  $dx$  távolságban levő sík lap és egy  $dx$  magasságú

csoncka kúp palást határol. A csoncka kúp palástot, amely érintkezik a húzóüreg falával,  $k_x$  fajlagos felületi nyomás (alakítási ellenállás) terheli. Az elemi tárcsa  $bd$  fedőlapját  $\sigma_x$ ,  $ac$  fedőlapját pedig  $(\sigma_x + d\sigma_x)$  feszültség terheli.

Az  $abcd$  térfogatelemre ható erők egyensúlyi feltételét  $x$  irányban a következő egyenlet adja meg:

$$-\sigma_x y^2 \pi + (\sigma_x + d\sigma_x)(y + dy)^2 \pi + k_x \sin \alpha df + k_x \mu \cos \alpha df = 0. \quad (40.58)$$

Ebben az egyenletben  $df$  az elemi tárcsa (csoncka kúp) palástja:

$$df = \frac{dx}{\cos \alpha} 2 \left( y + \frac{dy}{2} \right) \pi, \quad (40.59)$$

ahol  $\alpha$  a húzószög,

$(y + dy)^2 = y^2 + 2y dy$ , ha a másodrendű végtelen kicsit  $(dy)^2 = 0$ -nak vesszük,

$\mu$  a súrlódási tényező a húzóüreg fala mentén, továbbá

$$y = y_2 + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Ha a (40.58) egyenletben a műveleteket elvégezzük:

$$\begin{aligned} \sigma_x 2y dy + y^2 d\sigma_x + k_x \operatorname{tg} \alpha dx 2 \left( y + \frac{dy}{2} \right) + \\ + k_x \mu dx 2 \left( y + \frac{dy}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (40.60)$$

illetőleg

$$\begin{aligned} \sigma_x 2y dy + y^2 d\sigma_x + 2k_x \operatorname{tg} \alpha dx y + \\ + 2k_x \mu dx y = 0 \left| \cdot \frac{1}{y dx} \right. \end{aligned} \quad (40.61)$$

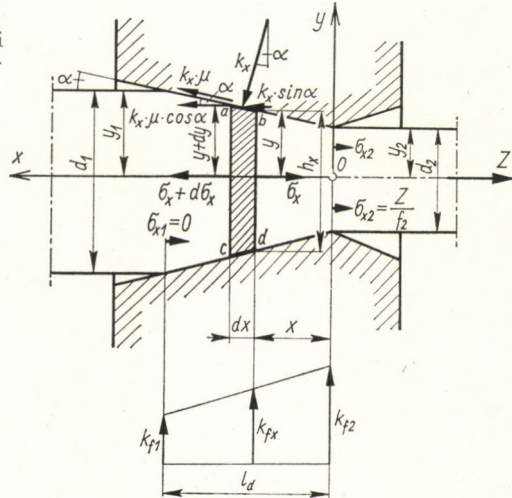
A szorzás elvégzése után:

$$2\sigma_x \left( \frac{dy}{dx} \right) + y \left( \frac{d\sigma_x}{dx} \right) + 2k_x \operatorname{tg} \alpha + 2k_x \mu = 0. \quad (40.62)$$

Mintfogyn  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ , a (40.62) differenciálegyenlet alakja a következő lesz:

$$2\operatorname{tg} \alpha \sigma_x + y \frac{d\sigma_x}{dx} + 2k_x (\operatorname{tg} \alpha + \mu) = 0. \quad (40.63)$$

40.10. ábra. Az alakváltozás állapotában levő rúdrészből kivágott elemi csonka kúpra ható erők egyensúlyának meghatározása



A szerszám falán fellépő  $k_x$  fajlagos nyomás, illetve alakítási ellenállás a folyás feltétele értelmében:

$$k_x = k_{fx} - \sigma_x, \quad (40.64)$$

ahol  $k_{fx}$  az alakítási szilárdság a hely függvényében (40.10. ábra):

$$k_{fx} = k_{f2} - \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) x. \quad (40.65)$$

A (40.65) egyenletben  $l_d$  az alakításban közreműködő húzókúp felületének magassága.

Ha a (40.64) és (40.65) egyenletet a (40.63) differenciálegyenletbe behelyettesítjük, és a műveleteket elvégezzük, továbbá feltesszük, hogy

$$A_1 = -2\mu, \quad (40.66)$$

$$A_2 = 2k_{f2}(\operatorname{tg} \alpha + \mu), \quad (40.67)$$

$$A_3 = 2 \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) (\operatorname{tg} \alpha + \mu), \quad (40.68)$$

akkor a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$y \frac{d\sigma_x}{dx} + A_1 \sigma_x + A_2 - A_3 x = 0. \quad (40.69)$$

Legyen

$$u = A_1 \sigma_x + A_2, \quad (40.70)$$

ebből

$$d\sigma_x = \frac{1}{A_1} du. \quad (40.71)$$

Ezek után a (40.69) differenciálegyenlet a következőképpen írható fel:

$$\frac{1}{A_1} \frac{du}{dx} y - A_3 x + u = 0. \quad (40.72)$$

Mint ahogy (40.10. ábra)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + y_2, \quad (40.73)$$

$$dy = dx \operatorname{tg} \alpha, \quad (40.74)$$

azaz

$$dx = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} dy, \quad (40.75)$$

továbbá a (40.73) egyenletből

$$x = \frac{y - y_2}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (40.76)$$

a (40.72) differenciálegyenlet a következő lépésben így alakul:

$$\left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{A_1} \right) \frac{du}{dy} y - A_3 \left( \frac{y - y_2}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + u = 0, \quad (40.77)$$

rendezve:

$$\left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{A_1} \right) \frac{du}{dy} y - \left( \frac{A_3}{\operatorname{tg} \alpha} \right) y + \left[ \left( \frac{A_3 y_2}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + u \right] = 0. \quad (40.78)$$

Alkalmazzunk egyszerűsítő jeleket:

$$m_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{A_1}, \quad (40.79)$$

$$m_2 = \frac{A_3}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (40.80)$$

$$m_3 = \frac{A_3 y_2}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (40.81)$$

ennek folytán a (40.78) differenciálegyenlet alakja a következő lesz:

$$m_1 \frac{du}{dy} y - m_2 y + (m_3 + u) = 0. \quad (40.82)$$

Legyen továbbá

$$w = (m_3 + u), \quad (40.83)$$

akkor a (40.82) egyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$m_1 \frac{dw}{dy} y - m_2 y + w = 0. \quad (40.84)$$

A (40.83) egyenletből

$$dw = du, \quad (40.85)$$

ennek behelyettesítése után a (40.84) differenciálegyenlet így írható fel:

$$m_1 \frac{dw}{dy} y - m_2 y + w = 0, \quad (40.86)$$

vagy  $y$ -nal osztva:

$$m_1 \left( \frac{dw}{dy} \right) - m_2 = - \left( \frac{w}{y} \right), \quad (40.86a)$$

illetőleg

$$m_1 \left( \frac{dw}{dy} \right) = m_2 - \left( \frac{w}{y} \right), \quad (40.87)$$

vagy

$$\frac{dw}{dy} = \frac{1}{m_1} \left( m_2 - \frac{w}{y} \right) = f \left( \frac{w}{y} \right). \quad (40.88)$$

Ez egy homogén lineáris differenciálegyenlet, amely sablonosan megoldható.

Legyen

$$w = y\tau, \quad \tau = \frac{w}{y}, \quad (40.89)$$

tekintve, hogy a (40.89) egyenletből

$$\frac{dw}{dy} = y \frac{d\tau}{dy} + \tau, \quad (40.90)$$

a (40.88) egyenlet a (40.89) egyenletben megadott jelöléssel

$$f \left( \frac{w}{y} \right) - \tau = \frac{1}{m_1} (m_2 - \tau) - \tau \quad (40.91)$$

lesz, és ebből a (40.90) egyenlet segítségével a következő egyenletet kapjuk:

$$y \frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{m_1} (m_2 - \tau) - \tau. \quad (40.92)$$

A (40.92) egyenlet rendezve:

$$\frac{d\tau}{\frac{1}{m_1} (m_2 - \tau) - \tau} = \frac{dy}{y}, \quad (40.93)$$

$$\frac{d\tau}{\frac{m_2}{m_1} - \tau \left( \frac{m_1 + 1}{m_1} \right)} = \frac{dy}{y}. \quad (40.94)$$

Ismét egyszerűsítő jeleket használunk:

$$n_1 = \frac{m_2}{m_1}, \quad (40.95)$$

$$n_2 = \frac{m_1 + 1}{m_1}, \quad (40.96)$$

ezekkel a (40.94) egyenlet a következőképpen írható fel:

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{d\tau}{n_1 - n_2} = \int_{y_2}^{y_x} \frac{dy}{y}. \quad (40.97)$$

Minthogy

$$y_2 = \frac{h_2}{2} \quad \text{és} \quad y_x = \frac{h_x}{2}, \quad (40.98)$$

a (40.97) egyenlet jobb oldalát így írhatjuk fel:

$$\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \frac{dy}{y} = \left[ \ln y \right]_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_x}{2}} = \ln \frac{h_x}{h_2}. \quad (40.99)$$

A (40.97) egyenlet baloldalának integrálásánál vegyük, hogy

$$\eta = n_1 - n_2 \tau, \quad (40.100)$$

amiből

$$d\tau = -\frac{1}{n_2} d\eta, \quad (40.101)$$

és így

$$-\frac{1}{n_2} \int_{\eta_2}^{\eta_x} \frac{d\eta}{\eta} = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{\eta_x}{\eta_2}, \quad (40.102)$$

ahol

$$\eta_x = n_1 - n_2 \tau_x. \quad (40.103)$$

$$\eta_2 = n_1 - n_2 \tau_2. \quad (40.104)$$

Ezek szerint a (40.97) egyenlet az integrálás elvégzése után a következő alakot veszi fel:

$$\ln \frac{h_x}{h_2} = -\frac{1}{n_2} \ln \frac{\eta_x}{\eta_2}. \quad (40.105)$$

Ebből az egyenletből

$$\eta_x = \eta_2 e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)}, \quad (40.106)$$

illetve

$$n_1 - n_2 \tau_x = (n_1 - n_2 \tau_2) e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)}, \quad (40.107)$$

és ebből

$$\tau_x = \frac{w_x}{y_x} = \frac{n_1}{n_2} (1 - e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)}) + \tau_2 e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)}. \quad (40.108)$$

Ha az  $x = 0$  helyen  $h_x = h_2$ , akkor  $\tau_x = \tau_2$ , és így

$$w_x = y_x \left[ \frac{n_1}{n_2} (1 - e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)}) + \tau_2 e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)} \right]. \quad (40.109)$$

Mint hogy a (40.83) és a (40.70) egyenlet értelmében

$$w_x = m_3 + A_1 \sigma_x + A_2, \quad (40.110)$$

a (40.109) és a (40.110) egyenletből a  $\sigma_x$  tengelyirányú feszültség a húzóüregben levő húzott rúdban a kilépési keresztmetszettől  $x$  távolságra:

$$\sigma_x = \frac{y_x}{A_1} \left[ \frac{n_1}{n_2} (1 - e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)}) + \tau_2 e^{-n_2 \ln(h_x/h_2)} \right] - \left( \frac{m_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \right). \quad (40.111)$$

Ha a megfelelő behelyettesítéseket elvégezzük, a  $\sigma_x$  feszültségre a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{y_x}{2\mu} \left\{ \frac{4\mu(k_{f2} - k_{f1})(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{l_d \operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha - 2\mu)} \left( 1 - e^{-\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - 2\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) \ln(y_2/y_x)} \right) - \right. \\ & - 2 \left[ \frac{(k_{f2} - k_{f1})(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{l_d \operatorname{tg}\alpha} - \frac{\mu\sigma_{x2}}{y_2} + k_{f2} \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{y_2} \right] \times \\ & \times e^{-\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - 2\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) \ln(y_2/y_x)} \left. \right\} + \left[ \frac{(k_{f2} - k_{f1})(\operatorname{tg}\alpha + \mu)y_2}{l_d \mu \operatorname{tg}\alpha} + \right. \\ & \left. + \frac{k_{f2}(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{\mu} \right]. \end{aligned} \quad (40.112)$$

Ha feltesszük, hogy

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - 2\mu}{\operatorname{tg}\alpha} = \omega, \quad (40.113)$$

minthogy továbbá

$$l_d \operatorname{tg}\alpha = y_1 - y_2, \quad (40.114)$$

a (40.112) egyenlet a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{y_x}{2\mu} \left\{ \frac{4\mu(k_{f2} - k_{f1})(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{(y_1 - y_2)(\operatorname{tg}\alpha - 2\mu)} \left[ 1 - \left(\frac{y_2}{y_x}\right)^\omega \right] - \right. \\ & - 2 \left[ \frac{(k_{f2} - k_{f1})(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{(y_1 - y_2)} - \frac{\sigma_{x2}\mu}{y_2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{f2}(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{y_2} \right] \left(\frac{y_2}{y_x}\right)^\omega \right\} + \\ & + \left[ \frac{(k_{f2} - k_{f1})(\operatorname{tg}\alpha + \mu)y_2}{\mu(y_1 - y_2)} + \frac{k_{f2}(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{\mu} \right], \end{aligned} \quad (40.112a)$$

itt  $\sigma_{x2}$  a kilépő keresztmetszetben a húzott rúd keresztmetszet-csökkentése következtében fellépő tengelyirányú feszültség.

Ha  $x = 0$ , akkor  $y_x = y_2$  és  $\sigma_x = \sigma_{x2}$ ; ha  $x = l_d$ , akkor  $y_x = y_1$  és  $\sigma_x = 0$ ; ez utóbbi feltevés segítségével a (40.112a) egyenletből  $\sigma_{x2}$  kiszámítható:

$$\sigma_{x2} = k_{f2} \left( \frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{\mu} \right) \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^{\frac{2\mu}{\operatorname{tg}\alpha}} \right] - \left[ 2(k_{f2} - k_{f1}) \left( \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right) \right]. \quad (40.115)$$



F. KÖRBER és A. EICHINGER szerint a belépő keresztmetszet mögött a feszültség, amely megfelel az ahhoz szükséges erőknek, hogy az anyag hosszirányú szálait a húzási szögnek megfelelően átvezesse:

$$\sigma_{xb} = 0,192 (k_{f2} + k_{f1}) \alpha, \quad (40.116)$$

úgyhogy a hossz tengely irányában a belépési és kilépési keresztmetszet között

$$\sigma'_x = \sigma_x - 0,192 (k_{f1} + k_{f2}) \alpha \quad (40.117)$$

feszültséggel kell számolni. Ennek következtében a szerszám falán fellépő fajlagos nyomás (alakítási ellenállás):

$$k'_x = k_{fx} - \sigma'_x, \quad (40.118)$$

azaz

$$k'_x = k_{fx} - [\sigma_x - 0,192 (k_{f1} + k_{f2}) \alpha], \quad (40.119)$$

ahol  $\sigma_x$  a (40.112a) és  $k_{fx}$  a (40.65) egyenlettel van megadva.

A kilépő keresztmetszetben KÖRBER és EICHINGER szerint

$$\sigma''_x = \sigma_{x2} + 2 \sigma_{xb} \quad (40.120)$$

feszültség lép fel, és így a rúdhúzáshoz szükséges húzóerő:

$$Z = f_2 \sigma''_x, \quad (40.121)$$

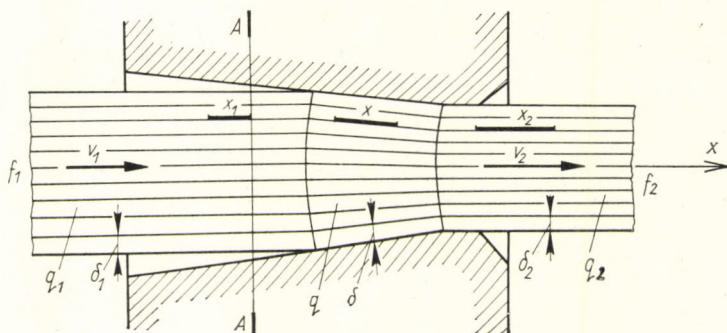
azaz

$$Z = \left\{ k_{f2} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\mu} \right) \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^{\frac{2\mu}{\operatorname{tg} \alpha}} \right] - \right. \\ \left. - \left[ 2 (k_{f2} - k_{f1}) \left( \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right) - 0,385 (k_{f1} + k_{f2}) \alpha \right] f_2, \right. \quad (40.122)$$

ahol  $f_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4}$  a kilépő rúd keresztmetszete.

#### 41. AZ ANYAG ÁRAMLÁSA A HÚZÓÜREGBEN RÚDHÚZÁSNÁL

Ha képet akarunk kapni az anyag áramlásáról a húzóüregben, akkor a rudat áramlási csövekre kell felbontanunk, mint ahogy az a 41.1. ábrán látható [40.1]. Feltételezhetjük, hogy az áramlási csövek az alakító zónán kívül a rúd tengelyével párhuzamosak, és hogy e csövek falvastagsága a



41.1. ábra. Az anyag áramlása a húzóüregben, SIEBEL szerint

belépő keresztmetszettől a kilépő keresztmetszetig arányosan kisebbedik. A belépési keresztmetszet előtt az anyag az áramlási csövek összes keresztmetszetében egyforma  $v_1$  és a kilépési keresztmetszet után egyforma  $v_2$  sebességgel áramlik. Az egyes áramlási csövek keresztmetszete az üregben belül  $q$  és áramlási sebessége  $v$ . A térfogatállandóság feltételezésével írható:

$$q_1 v_1 = q v = q_2 v_2. \quad (41.1)$$

Ezt az egyenletet a következőképpen is írhatjuk:

$$q_1 \frac{dx_1}{dt} = q \frac{dx}{dt} = q_2 \frac{dx_2}{dt}. \quad (41.2)$$

Ebből

$$dx = dx_1 \frac{q_1}{q}, \quad (41.3)$$

vagy

$$dx_1 = dx \frac{q}{q_1}, \quad (41.4)$$

ahol  $dx_1$  egy csódarab húzás előtti végtelen kis kiinduló hossza, amely az alakítási zónán belül  $dx$  hosszúra válik. Képezzük az

$$x_1 = \int_0^x \frac{q}{q_1} dx \quad (41.5)$$

integrált, így meg tudjuk határozni azt a kiinduló  $x_1$  hosszúságot, amely az alakítási zónában  $x$  hosszúságnak felel meg. Ha az  $x$  és  $x_1$  hosszúságot a belépési keresztmetszet előtt egy  $A-A$  sík keresztmetszetre vonatkoztatjuk, akkor meg tudjuk állapítani, hogy az eredetileg  $x_1$  távolságban

volt keresztmetszet az üregeen való áthaladás folyamán milyen alakot vesz fel.

Az egyik áramlási cső kezdő keresztmetszete (41.2. ábra):

$$q_1 = 2 r_1 \pi b_1. \quad (41.6)$$

Ugyanennek az áramlási csőnek a keresztmetszete  $x$  távolságban a belépési keresztmetszettől:

$$q = 2 r \pi b. \quad (41.7)$$

$b$  nagysága megállapítható abból a feltevésből, hogy

$$\frac{b_1}{m} = \frac{b}{m-x}, \quad (41.8)$$

tehát

$$b = b_1 \left( \frac{m-x}{m} \right). \quad (41.9)$$

Ugyanígy az  $r$  rádiusz:

$$r = r_1 \left( \frac{m-x}{m} \right). \quad (41.10)$$

Ezekben az egyenletekben (41.2. ábra)

$$m = \frac{d_1 l_d}{d_1 - d_2}. \quad (41.11)$$

A (41.5) integrálban szereplő  $q/q_1$  hányados ezek szerint:

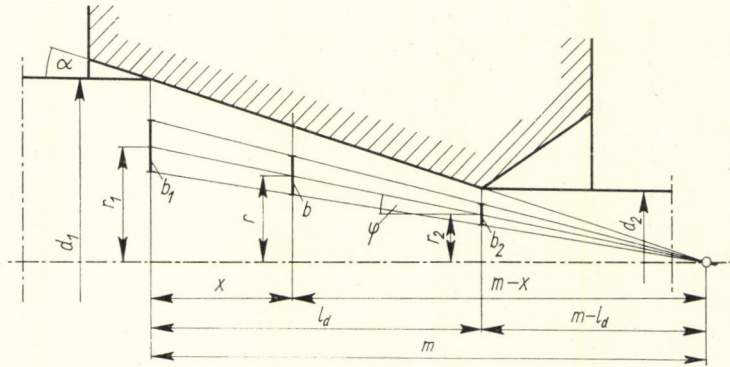
$$\frac{q}{q_1} = \frac{2 r \pi b}{2 r_1 \pi b_1} = \frac{r b}{r_1 b_1}, \quad (41.12)$$

illetőleg

$$\frac{q}{q_1} = \frac{r_1 b_1 \left( \frac{m-x}{m} \right)^2}{r_1 b_1} = \left( \frac{m-x}{m} \right)^2. \quad (41.13)$$

A (41.5) integrál tehát:

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^x \left( \frac{m-x}{m} \right)^2 dx = \int_0^x \left[ 1 - \left( \frac{2}{m} \right) x + \left( \frac{1}{m^2} \right) x^2 \right] dx = \\ &= x - \left( \frac{1}{m} \right) x^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{m^2} \right) x^3. \end{aligned} \quad (41.14)$$



41.2. ábra

$m$  értékét a (41.11) egyenletből behelyettesítve, a (41.14) egyenlet a következőképpen írható fel:

$$x_1 = x + \left( \frac{d_1 - d_2}{d_1 l_d} \right) x^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{d_1 - d_2}{d_1 l_d} \right)^2 x^3. \quad (41.15)$$

A fenti összefüggések segítségével megállapíthatjuk az anyagáramlás kvalitatív képét egy dróthúzó üregben. Például az acélhuzal átmérője  $d_1 = 10$  mm, és az üregben  $d_2 = 8$  mm átmérőjűre húzzák le. A keresztmetszet-csökkenés a húzás folyamán 36 %, a húzószög  $\alpha = 12^\circ$ , a súrlódási tényező  $\mu = 0,05$ . Az I–V-tel jelölt áramlási csöveket (41.3 ábra) a fent leírt módon állapítottuk meg;

$$l_d = \frac{d_1 - d_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{2 \cdot 0,21} = 4,75; \operatorname{tg} 12^\circ = 0,21;$$

$$m = \frac{d_1 l_d}{d_1 - d_2} = \frac{10 \cdot 4,75}{2} = 22,05 \text{ mm}.$$

A (45.15) egyenlet a behelyettesítések és a kijelölt műveletek után a következő alakot veszi fel:

$$x_1 = x - 0,042 x^2 + 0,000 59 x^3. \quad (41.16)$$

$x$  és  $x_1$  összetartozó értékei az alábbi táblázatban láthatók:

$x$	$x_1$
1	0,959
2	1,837
3	2,638
4	3,367
5	4,024

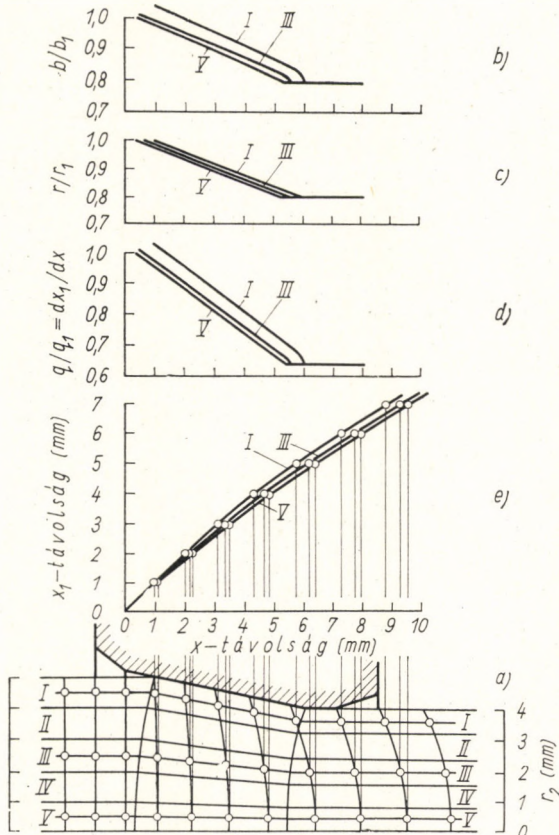
Az  $x$  és  $x_1$  összetartozó értékei egy görbét határoznak meg; ez a görbe a 41.3. ábrán látható. Az ábra megmutatja azt is, hogy a húzal sík keresztmetszetei hogyan görbülnek meg, miközben az üregeken keresztülhaladnak.

#### 42. A LEGKEDVEZŐBB HÚZÓSZÖG

Azt a húzószöget nevezzük a legkedvezőbbnek, melynél a húzóerő [(40.19) egyenlet] [40.5]:

$$Z = k_k F \left( 1 + \frac{\mu}{a} \right) + 0,77 k_{fk} f_2 a \quad (42.1)$$

a legkisebb. A húzóerő e szerint az egyenlet szerint az  $\alpha$ -szög függvénye.



41.3. ábra. Az alakváltozás lefolyása a húzóüregben, SIEBEL szerint

Ennek a függvénynek szélső értéke ott van, ahol

$$\frac{dZ}{d\alpha} = 0. \quad (42.2)$$

A differenciálhányados kifejtve:

$$\frac{dZ}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left( k_k F + k_k F \frac{\mu}{\alpha} + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha \right) = -k_k F \mu \alpha^{-2} + 0,77 f_2 k_{fk}. \quad (42.3)$$

Ez a differenciálhányados ott zérus, ahol

$$k_k F \mu \alpha^{-2} = 0,77 f_2 k_{fk}, \quad (42.4)$$

vagy

$$\alpha^2 = \frac{k_k F \mu}{0,77 f_2 k_{fk}}. \quad (42.5)$$

Mint hogy a közepes alakítási ellenállás rúdhúzásnál:

$$k_k (=) \frac{k_{fk}}{1 + \frac{F}{2 f_2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right)}, \quad (42.6)$$

a (42.5) egyenlet a következőképpen is felírható:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{k_{fk} F \mu}{\left[ 1 + \frac{F}{2 f_2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) \right] 0,77 f_2 k_{fk}} = \\ &= \frac{F \mu}{0,77 f_2 + 0,385 F \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right)}, \end{aligned} \quad (42.7)$$

és így

$$\alpha^2 = \frac{(f_1 - f_2) \mu}{0,385 (f_1 + f_2) + 0,385 (f_1 - f_2) \frac{\mu}{\alpha}}; \quad (42.8)$$

ebből

$$\left[ 0,385 \left( \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} \right) \right] \alpha^2 + (0,385 \mu) \alpha - \mu = 0. \quad (42.9)$$

Ezek szerint a legkedvezőbb húzószög:

$$\alpha = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 10,5 \mu \left( \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} \right)}}{2 \left( \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} \right)}. \quad (42.10)$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a legkedvezőbb húzószög a húzott anyag jellemző értékeitől független, és csak a súrlódási tényezőtől és a húzott rúd befutó és kifutó keresztmetszetétől függ.

Ha a rudat nem húzzák, hanem keresztülnyomják a húzóüregen, akkor a (42.7) egyenletnek a következő alakja lesz:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{F\mu}{0,77 f_2 \left[ 1 - \frac{F}{2f_2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) \right]} = \\ &= \frac{(f_1 - f_2) \mu}{1,155 f_2 - 0,385 f_1 - 0,385 (f_1 - f_2) \frac{\mu}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (42.11)$$

Ebből

$$\alpha^2 [1,155 f_2 - 0,385 f_1] - [0,385 (f_1 - f_2) \mu] \alpha - [(f_1 - f_2) \mu] = 0. \quad (42.12)$$

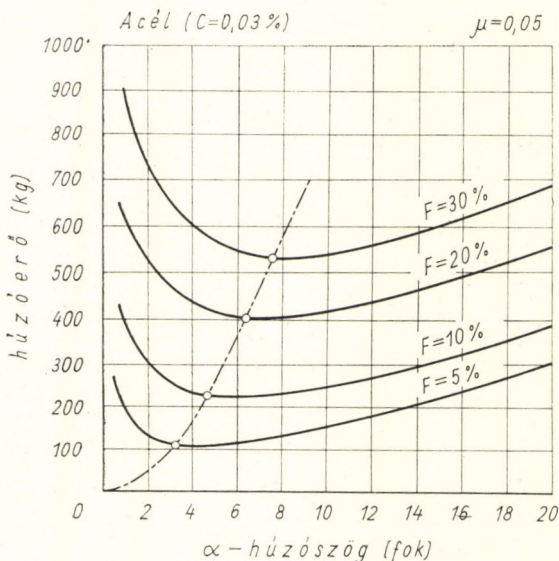
A legkedvezőbb húzószög pedig:

$$\alpha = \frac{0,385 F\mu \pm \sqrt{[0,385 F\mu]^2 + 4 F\mu (1,15 f_2 - 0,385 f_1)}}{2 (1,15 f_2 - 0,385 f_1)}. \quad (42.13)$$

Az, hogy  $\frac{d^2 Z}{d\alpha^2}$  előjele pozitív, azt bizonyítja, hogy a (42.13) egyenletből meghatározott,  $\alpha$ -val számított húzóerő a legkisebb az összes lehetséges húzóerők között:

$$\frac{d^2 Z}{d\alpha^2} = + \frac{2 k_k F\mu}{\alpha^3}. \quad (42.14)$$

A 42.1. ábrán látható a húzóerő különböző fogyásoknál,  $\alpha$  függvényében ábrázolva. Az ábra acélrót húzására vonatkozik.



42.1. ábra. A legkedvezőbb húzószög a fogyás függvényében GELEJI szerint

#### 43. FESZÜLTSEGELOSZTLÁS A HÚZOTT RÚD KERESZTMETSZETE ÉS NYOMOTT FELÜLETE MENTÉN

Mint a 40. fejezetben láttuk, a rúd, illetve a drót húzásához szükséges húzóerő:

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_a + Z_s + Z_b = k_k F + k_k \mu \frac{F}{\alpha} + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha = \\
 &= k_k F \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha, \quad (43.1)
 \end{aligned}$$

itt  $k_k$  a közepes alakítási ellenállás,  $Z_a$  a tiszta alakításhoz szükséges húzóerő,  $Z_s$  a szerszám falán fellépő súrlódás legyőzéséhez szükséges erő,  $Z_b$  a belső anyagmozdulásokat létrehozó erő.

A  $Z$  húzóerő a kilépő keresztmetszetben a hossz tengely irányában működő  $\sigma_{zk}$  közepes feszültséget hozza létre:

$$\sigma_{zk} = \frac{Z}{f_2} = k_k \frac{F}{f_2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + 0,77 k_{fk} \alpha. \quad (43.2)$$

A közepes húzófeszültség az üregeken belül egy tetszés szerinti  $f_x$  keresztmetszetben (43.1. ábra):

$$\sigma_{zkx} = \frac{Z_x}{f_x} = k_{kx} \frac{F}{f_x} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + 0,385 k_{fkx} \alpha. \quad (43.3)$$



Ebben az egyenletben  $F_x$  a rúd fogyása a belépési keresztmetszettől  $x$  távolság mentén,  $f_x$  a rúd keresztmetszete az üregben a belépési keresztmetszettől  $x$  távolságban,  $k_{fkx}$  a közepes alakítási szilárdság az  $x$  távolság mentén.

E. SIEBEL szerint a húzófeszültség a húzóüregben a rúd keresztmetszete mentén parabolikusan változik [40.1]. Általában a közepes hosszirányú feszültség és a maximális és minimális hosszirányú feszültség között közelítőleg a következő összefüggés áll fenn (43.1. ábra):

$$\sigma_{z\max} = 2\sigma_{zk} - \sigma_{z\min} \quad (43.4)$$

A rúd felületén működő húzófeszültségek és a rúd tengelyében működő feszültség a közepes  $\sigma_{zkx}$ -től a következőkben különböznek:

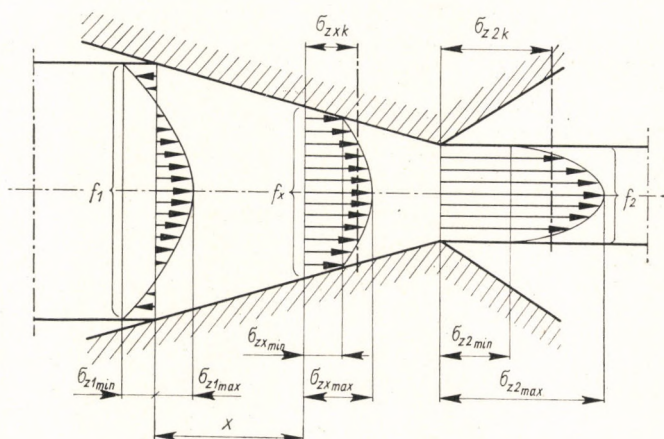
$$\sigma_d = \pm 0,5 k_{fk} \alpha \left[ 1 + \frac{2 f_x}{F_x \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right)} \right] \quad (43.5)$$

Eszerint a rúd felületén működő húzófeszültség [l. a (43.3) egyenletet]:

$$\sigma_{zx\min} = k_{kx} \frac{F_x}{f_x} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) - k_{fk} \alpha \left[ 0,115 + \frac{f_x}{F_x \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right)} \right] \quad (43.6)$$

a rúd tengelyében működő húzófeszültség:

$$\sigma_{zx\max} = k_{kx} \frac{F_x}{f_x} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + k_{fk} \alpha \left[ 0,885 + \frac{f_x}{F_x \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right)} \right] \quad (43.7)$$



43.1. ábra. Feszültségeloszlás a húzóüreg egyes keresztmetszeteiben, SIEBEL szerint

A legnagyobb húzófeszültség a rúd kilépő keresztmetszetének tengelyében lép fel, s a (43.2) és a (43.5) egyenlet segítségével megállapítható:

$$\sigma_{z \max} = k_k \frac{F}{f_2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + k_{fk} \alpha \left[ 1,27 + \frac{f_2}{F \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right)} \right]. \quad (43.8)$$

A rúd felületén működő húzófeszültség a kilépő keresztmetszetben a (43.2) és a (43.5) egyenlet alapján:

$$\sigma_{z \min} = k_k \frac{F}{f_2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) - k_{fk} \alpha \left[ -0,27 + \frac{f_2}{F \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right)} \right]. \quad (43.9)$$

Hogy egy húzással mekkora keresztmetszet-csökkenés érhető el, annak az a követelmény szab határt, hogy a kilépő keresztmetszetben a közepes húzófeszültség ( $\sigma_{z2k}$ ) a húzott anyag szakítószilárdságánál ( $\sigma_B$ ) ne legyen nagyobb. A gyakorlatban azonban üzembiztonság okából  $\sigma_{z2k}/\sigma_B \leq 0,4$ .

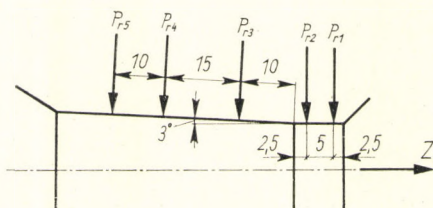
Túlhúzás szempontjából pedig döntő a kifutó huzal magjában fellépő feszültség [(43.7) egyenlet]. Belső szakadások akkor következnek be, ha a tengelyben fellépő húzófeszültség eléri a szakítószilárdságot.

A húzóüreg falán fellépő fajlagos felületi nyomás (alakítási ellenállás) nagyságának és eloszlásának kísérleti meghatározására GELÉJI S., GULYÁS J. és JUHÁSZ S. kidolgozott egy kísérleti módszert és berendezést. A mérések végrehajtásához kétféle húzószerszám készült  $\alpha = 3^\circ$ , illetőleg  $5^\circ 31'$  húzószöggel. A húzóprofilok és a mérőhelyek elhelyezése a 43.2. ábrán látható. A radiálisan fellépő felületi nyomásokat mérőcsapok közvetítették a hüvelyszerű mérőtestekhez (43.3. ábra). A húzófelületek felületi finomsága  $0,3 \sim 0,35 \mu$  volt. A hidegen húzott alumíniumrudak (Al 99,5) átmérője  $D = 20,1$  mm volt, az alakítás mértéke  $\varepsilon = 34,2\%$ . Kenőanyagnak húzózsírt és szappanport használtak.

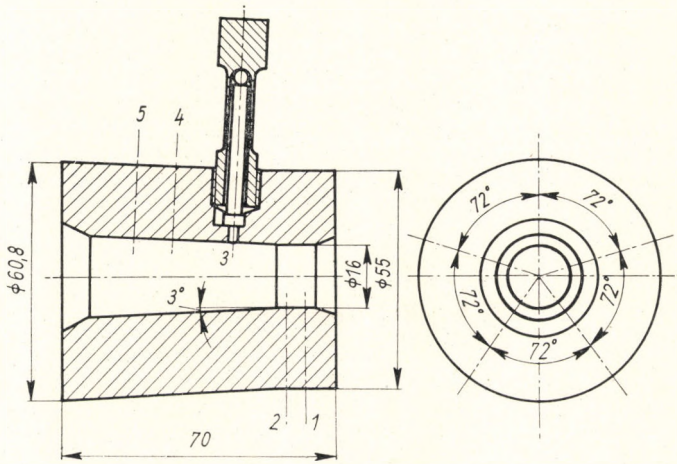
A fajlagos felületi nyomások kísérletekkel meghatározott nagysága és eloszlása a 43.4. és 43.5. ábrán látható.

#### 44. SÚRLÓDÁS ÉS KENÉS DRÓT- ÉS RÚDHÚZÁSNÁL

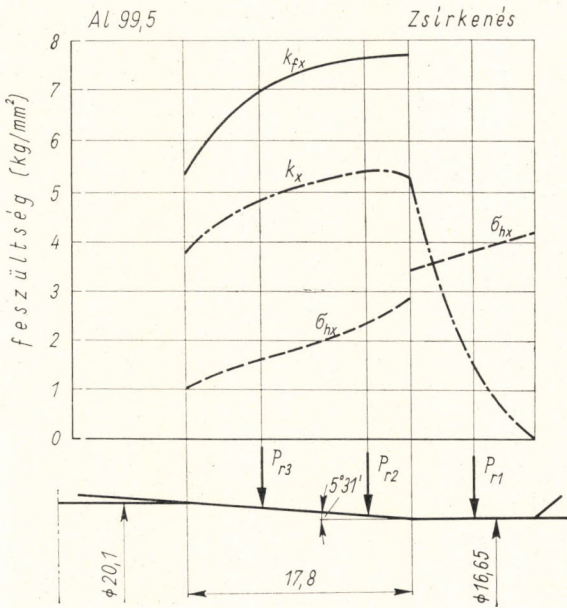
Sem az alakítási ellenállás, sem a húzóerő nem számítható ki, ha nem ismerjük a súrlódási tényezőt. Különböző kutatók számos kísérletet végeztek ebben az irányban, így W. LINICUS—G. SACHS [44.1], E. SIEBEL [40.1], W. LUEG—K. H. TREPTOW [44.2] és mások. A súrlódási tényezőt a felületi



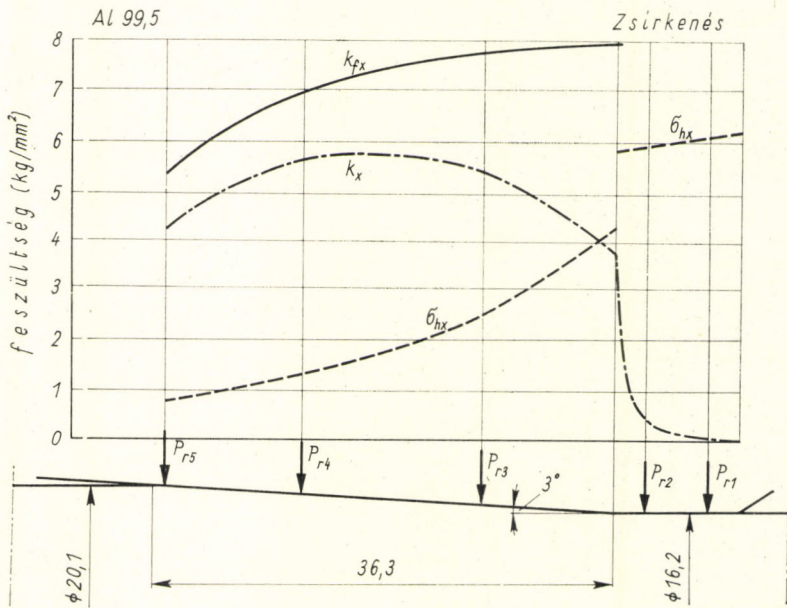
43.2. ábra. A mérőhelyek eloszlása a húzóüregben



43.3. ábra. A radiálisan fellépő felületi nyomásokat mérő szerszám



43.4. ábra. A  $k_{fx}$  alakítási szilárdság, a  $k_x$  alakítási ellenállás (felületi fajlagos nyomás) és a keresztmetszetekben fellépő  $\sigma_x$  közepes húzófeszültség eloszlása a húzóüregben. Húzószög  $5^\circ 31'$



43.5. ábra. A  $k_{fx}$  alakítási szilárdság, a  $k_x$  alakítási ellenállás (felületi fajlagos nyomás) és a keresztmetszetekben fellépő  $\sigma_x$  közepes húzófeszültség eloszlása a húzóüregben. Húzószög  $5^\circ 31'$

fajlagos nyomásból és a húzóerőből számították ki. G. D. S. MACLELLAN — J. G. WISTREICH [44.3] a közepes felületi nyomást kétrészes szerszám segítségével határozta meg, amikor a Z-t és a  $K_q$ -t mérte (44.1. ábra), SIEBEL és GELEJI [40.5] pedig a húzóerőt mérte, és a húzóerő képletéből kiszámította a súrlódási tényezőt.

A 44.1. ábra szerint a következő összefüggés áll fenn:

$$Z = (f_1 - f_2) (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) q_k, \quad (44.1)$$

$$K_q = \frac{1}{2} (f_1 - f_2) (\operatorname{ctg} \alpha - \mu) q_k, \quad (44.2)$$

ahol  $q_k$  a közepes fajlagos felületi nyomás,  $\alpha$  a húzószög. A két egyenletből a súrlódási tényező:

$$\mu = \operatorname{tg} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Z}{2 K_q} - \alpha \right), \quad (44.3)$$

a közepes fajlagos felületi nyomás pedig:

$$q_k = \frac{2 K_q}{(f_1 - f_2) (\operatorname{ctg} \alpha - \mu)}. \quad (44.4)$$

A súrlódási tényezőt kifejezhetjük a drót-, illetve rúdhúzás képletéből (42.1 egyenlet) is, amely szerint [40.5]:

$$\mu = \left[ \frac{Z - 0,77 k_{fk} \alpha f_2 - F \left( k_{fk} - \frac{Z}{2f_2} \right)}{F \left( k_{fk} - \frac{Z}{2f_2} \right)} \right] \alpha. \quad (44.5)$$

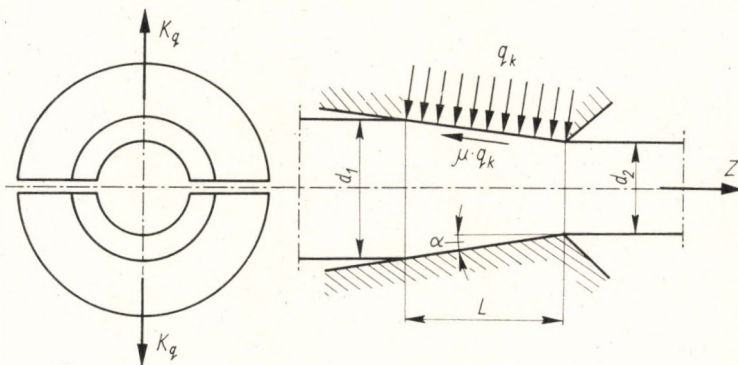
A kísérleti eredmények azt mutatják, hogy drót- és rúdhúzásnál a súrlódási tényező, amennyiben a kenés olajjal vagy olajos emulzióval történik, 0,01 és 0,15 között van. Általában kevert kenéssel állunk szemben, néha azonban határkenés, sőt fémes érintkezés is fennállhat. G. SACHS azt találta, hogy amikor acéldrótot keményfém húzószerszámon húznak keresztül, akkor a súrlódási tényező  $\mu \cong 0,04$ .

Korábbi kísérletekkel szemben újabb kísérletek arra mutatnak, hogy a  $\mu$  súrlódási tényező nem állandó szám, hanem függ a kenőanyagtól és a fajlagos felületi nyomástól. Mennél nagyobb a fajlagos felületi nyomás, annál nagyobb a súrlódási tényező. Nagyobb nyomás mellett a kenőréteg elvékonyodik, és a kenés a határkenés, sőt a fémes érintkezés felé tolódik el. Igen érdekesek ilyen szempontból W. LUEG és K. H. TREPTOW kísérletei (44.2. ábra) [44.2].

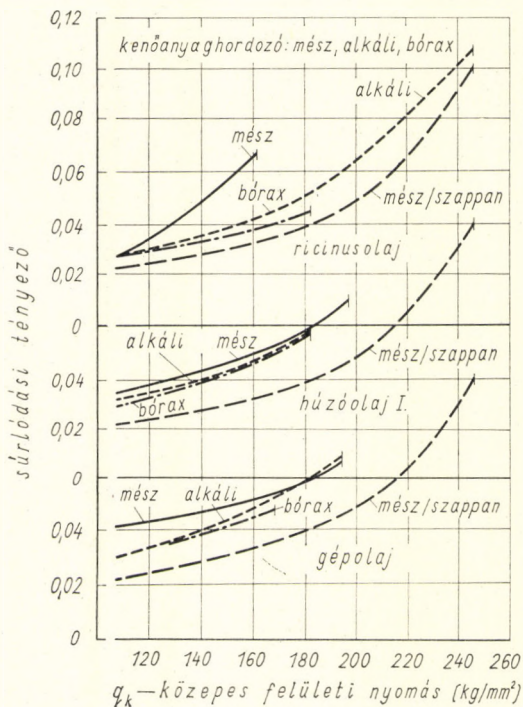
Kevert kenés esetében a húzóerő független a húzósebességtől, de ugyanakkor a növekedő viszkozitással csökken a súrlódási tényező. Hidrodinamikusan kenés esetén a kenőanyag növekedő viszkozitásával a húzóerőnek növekednie kell. Határkenésnél a húzóerő független a kenőanyag viszkozitásától.

#### 45. MELEGFEJLŐDÉS A HIDEGHÚZÁS FOLYAMÁN

Képlékeny alakításkor az alakításra fordított munka teljes egészében meleggé alakul át [40.5]. Az így keletkező meleget az üzemi gyakorlatban a gyártás zavartalansága érdekében legtöbbször valamilyen módon — hűtéssel — el kell vezetni.



44.1. ábra. A dróthúzásnál fellépő erők mérése, McLELLAN és WISTREICH szerint



44.2. ábra. A súrlódási tényező és a közepes felületi nyomás közötti összefüggés patentírozott acéldrót (0,53% C) húzásánál különböző kenőanyag alkalmazása mellett, LUEG és TREPTOW szerint

A melegfejlődés forrásai a következők:

A húzási munkával egyenértékű meleg ( $W$ ) húzószerszámokként kcal-ban, ha a húzás  $i$  ideig tart és a húzási sebesség  $v$ :

$$\begin{aligned}
 W_h &= \frac{1}{A} \left[ k_k F \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha \right] v i = \\
 &= \frac{1}{A} \left[ k_k (F + \mu Q) + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha \right] v i.
 \end{aligned} \tag{45.1}$$

Ez a melegmennyiség három komponensből tevődik össze. Az első a tiszta alakítási munkával egyenértékű meleg:

$$W_a = \frac{1}{A} F k_k v i, \tag{45.2}$$

a második a szerszám dolgozó felületén előálló súrlódási munkával egyenértékű meleg:

$$W_s = \frac{1}{A} k_k Q \mu v i, \tag{45.3}$$

és a harmadik a rúd belső anyagelmozdulásainak létrehozásához szükséges munkával egyenértékű meleg:

$$W_b = \frac{1}{A} 0,77 k_{fk} f_2 \alpha v i. \quad (45.4)$$

A szerszám felmelegedésének különös figyelmet kell szentelnünk. E felmelegedésnek két oka van: az egyik az a meleg, mely az alakítási munkából származik, és a rúdból vagy a huzalból átáramlik a szerszámába [(45.2) és (45.4) egyenlet], a másik az a meleg, amely a szerszámon fellépő súrlódásból származik, és szintén felmelegíti a szerszámot.

Ha a húzott darab hőmérséklete a húzószerszám előtt  $t_1$  és a szerszám mögött  $t_2$ , akkor a hőmérsékletemelkedést, amennyiben annak tisztán az alakítási munka és a belső anyagelmozdulások létrehozásához szükséges munka az oka, a következőképpen lehet kiszámítani (45.1. ábra):

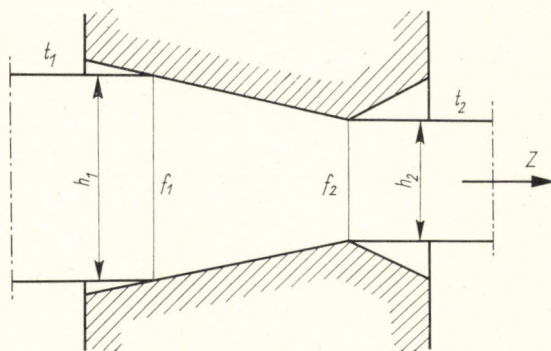
$$M c (t_2 - t_1) = \frac{1}{A} (F k_k + 0,77 f_2 \alpha k_{fk}) v i. \quad (45.5)$$

Ebben az egyenletben  $M$  az  $i$  másodperc alatt húzott rúd súlya:

$$M = f_2 l \delta i. \quad (45.6)$$

A (45.5) és a (45.6) egyenletben  $c$  a húzott rúd anyagának fajmelege (acélnál  $c = 0,115$  kcal/kg C°);  $\delta$  a húzott rúd anyagának fajsúlya (acélnál  $\delta = 7,8 \cdot 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>);  $A = 42\,700$  kgcm/kcal a munka mechanikai meleg egyenértéke. A (45.5) és a (45.6) egyenlet szerint:

$$\begin{aligned} f_2 v \delta i c (t_2 - t_1) &= \\ &= \frac{1}{A} (F k_k + 0,77 f_2 k_{fk} \alpha) v i, \end{aligned} \quad (45.7)$$



45.1. ábra. A húzott anyag felmelegedése a húzóüregben

ebből az előálló hőmérsékletkülönbség:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{A} \left[ \frac{F k_k + 0,77 k_{fk} f_2 \alpha}{f_2 \delta c} \right], \quad (45.8)$$

és a szerszámból kifutó darab hőmérséklete:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{A} \left[ \frac{F k_k + 0,77 k_{fk} \alpha f_2}{f_2 \delta c} \right]. \quad (45.9)$$

A húzott anyag felmelegedése következtében a húzószerszám is felmelegszik. Ha feltennők, hogy  $\mu = 0$ , és a szerszám melegedése pusztán az alakítási munkából keletkező meleg eredménye, akkor egy bizonyos idő múlva egy hőmérséklet-egyensúlynak kellene beállnia, azaz a darab hőmérséklete egy meghatározott  $t_2$  hőmérsékletnél nem emelkedhetne magasabbra. A valóságban azonban a  $\mu$  súrlódási tényező nem zérus, hanem nagyobb annál; a szerszám dolgozó felületén keletkező súrlódási munka állandóan meleggé alakul át [(45.3) egyenlet], amely — függetlenül a húzott anyag és a szerszám hőmérsékletétől — a húzott anyag és a szerszám melegmennyiségéhez hozzáadódik. Ha a húzószerszám nincs külön hűtve, akkor a húzószerszám hőmérséklete állandóan növekszik, végül olyan meleg lesz, hogy a kenőanyag kenőképessége megszűnik, s ennek folytán a húzal vagy a drót a szerszámba berágódik, és elszakad. A szerszám falán keletkező súrlódási meleg részben a szerszám, részben a húzott anyag hőmérsékletét emeli. Hogy mennyi meleg halmozódik fel a szerszámban és mennyi a húzott anyagban, az mindkettő hőmérsékletétől és melegvezetőképességétől függ. Irodalmi adatok szerint acéldrót húzásánál 80% meleg a drótba és 20% meleg a szerszámba megy át. A hűtővíz által elvezetendő melegmennyiség:

$$HW = r \frac{1}{A} k_k Q \mu v i, \quad (45.10)$$

ahol  $r = 0,2$ .

#### 46. MELEGELŐSZLÁS A HÚZOTT RÚDBAN

Mint hogy a húzóüregben a rúd felületének és a tőle vékony kenőréteggel elválasztott húzóüreg dolgozó felületének a hőmérséklete gyakorlatilag egyforma, a rúd felületi rétegeiben a húzás folyamán rendkívül nagy hőmérséklet-különbségek állnak elő; ezek azonban a húzóüreg mögött gyorsan kiegyenlítődnek.

Miközben a rudat a húzóüregen keresztülhúzzák, a rúd alakítás alatt álló részének térfogategységére eső összes alakítási munka E. SIEBEL és R. KOBITZSCH [46.1] szerint:

$$a = k_{fk} \left( \varphi_h + 2 \alpha \frac{r}{d} \right), \quad (46.1)$$



és az ennek megfelelő átlagos hőmérséklet-emelkedés:

$$t_1 = \frac{a}{Ac\gamma} = k_{fk} \frac{\varphi_h + 2\alpha \frac{r}{d}}{Ac\gamma}, \quad (46.2)$$

itt  $A = 427$  mkg/kcal a meleg mechanikai egyenértéke,  $c$  a rúd anyagának fajhője,  $\gamma$  a fajsúlya,  $r$  a vizsgált térfogatelem távolsága a rúd tengelyétől,  $d$  a rúd átmérője.

A határrétegben a súrlódás az időegységben felületegységenként

$$\frac{dq}{di} = \frac{\mu k_{fk} v}{A} \quad (46.3)$$

meleget hoz létre. Itt  $v$  a húzási sebesség. A keletkező  $q$  melegből a húzott rúd anyaga  $q_1 = m \cdot q$  meleget vesz fel. Ez az eláramló melegmennyiség a határrétegben hőmérsékletesést idéz elő:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{m}{\lambda} \frac{dq}{di} = \frac{m}{\lambda} \frac{\mu k_{fk} v}{A}. \quad (46.4)$$

Ebben az egyenletben  $\lambda$  a húzott anyag melegvezető képességének együtthatója,  $m (=) 0,8 \dots 0,9$ , ha a húzósebesség 1 m/s vagy ennél nagyobb.

A súrlódási meleg egy  $b$  vastagságú vékony réteget melegít át, és feltehető, hogy ebben a rétegben a hőmérséklet eloszlása egy parabola szerint történik (46.1. ábra) oly módon, hogy a hőmérséklet  $b$  mélységben  $t_j$ , a felületen pedig  $t_a$ -ra emelkedik. A parabola iránytangensét a (46.4) egyenlet adja meg.

A (46.4) egyenlet és a 46.1. ábra szerint a felülettől  $b - x$  távolságban a hőmérséklet növekedése  $t_j$ -hez képest:

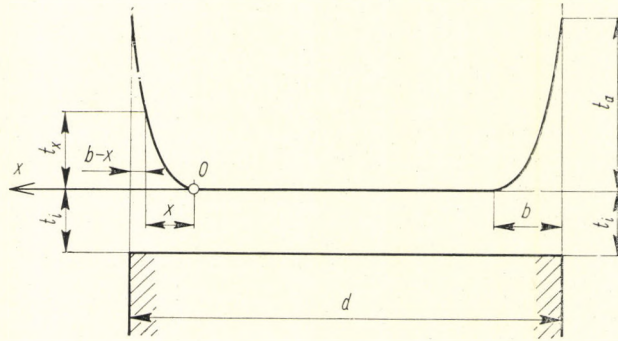
$$t_x = \frac{m}{\lambda} \frac{dq}{di} \frac{x^2}{2b} = \frac{m}{\lambda} \frac{\mu k_{fk} v}{A} \cdot \frac{x^2}{2b}. \quad (46.5)$$

Ennek a  $b-x$  vastag rétegnek a melegmennyiség-tartalma felületegységenként:

$$q_1 = \int_0^b t_x c \gamma dx = \frac{\mu k_{fk} v}{A} \cdot \frac{m}{\lambda} c \gamma \frac{b^2}{6}. \quad (46.6)$$

Ez a melegtartalom megfelel annak a

$$q_1 = \underbrace{\frac{\mu k_{fk} l}{A}}_q m \quad (46.7)$$



46.1. ábra. Hőmérsékleteloszlás a húzott rúd keresztmetszetében, SIEBEL és KOBITZSCH szerint

melegmennyiségnek, amely felületegységenként az  $l$  hosszúságú húzott rúd áramlik, miközben az a húzóüregén átszalad.

A (46.6) és a (46.7) egyenlet szerint

$$\frac{m}{\lambda} \frac{\mu k_{fk} v}{A} c \gamma \frac{b^2}{6} = \frac{\mu k_{fk} l}{A} m, \quad (46.8)$$

ebből a rétegvastagság:

$$b = \sqrt{\frac{6l\lambda}{vc\gamma}} = 2,44 \sqrt{\frac{l\lambda}{vc\gamma}}. \quad (46.9)$$

Mint ahogy az áthúzási idő:

$$i = \frac{l}{v}, \quad (46.10)$$

írható:

$$b = 2,44 \sqrt{\frac{\lambda}{c\gamma}} i. \quad (46.11)$$

A rúd súrlódás okozta hőemelkedése (46.5):

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{\mu k_{fk} v}{A} \cdot \frac{m}{\lambda} \cdot \frac{b}{2} = 1,22 \frac{\mu k_{fk}}{A\lambda} m \sqrt{\frac{\lambda l v}{c\gamma}} = \\ &= 1,22 m \frac{\mu k_{fk} v}{A} \sqrt{\frac{i}{\lambda c \gamma}}. \end{aligned} \quad (46.12)$$

A rúd felületének hőmérséklete ezek szerint a  $t_1$  és  $t_2$  összege:

$$\begin{aligned}
 t &= t_1 + t_2 = k_{fk} \frac{\varphi_h + 2\alpha \frac{r}{d}}{A c \gamma} + \\
 &+ 1,22 \frac{\mu k_{fk}}{A} \frac{m}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda l v}{c \gamma}} = \\
 &= \frac{k_{fk}}{A} \left[ \frac{\varphi_h + 2\alpha(r/d)}{c \gamma} + \right. \\
 &\left. + 1,22 \mu \frac{m}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda l v}{c \gamma}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{46.13}$$

Miután a rúd a húzóüreget elhagyta, nincs többé megleghozzávezetés, és a rúd keresztmetszetében a hőmérséklet-különbségek eltűnnek, a hőmérséklet kiegyenlítődik. A darab felmelegedése nagy befolyással van a kenésre és a rúd belső feszültségeinek kialakulására.

## VI. CSŐHÚZÁS

### 47. A CSŐHÚZÁSRÓL ÁLTALÁBAN

Csőhúzáskor sajtolt vagy *Mannesmann*-féle eljárással hengerelt, vagy pedig egyéb lyukasztóeljárással előállított nyerscsőből vékonyfalú csövet húznak hidegen egy külső húzóüreg és egy együttdolgozó belső húzó dugó segítségével. Az egymás után következő falvastagság-csökkentések, illetve keresztmetszet-csökkentések a rúdanyag keménységi állapotának megfelelő, folyton kisebbedő keresztmetszetű húzószerszám-sorozaton történnek. A húzások számának, illetve a keresztmetszet-csökkentésnek a húzások folyamán fellépő keményedés szab határt. Bizonyos nagyságú keresztmetszet-csökkentés után az anyagot, hogy tovább legyen húzható, ki kell lágyítani. Hogy ez az állapot mikor következik be az elsősorban a húzott cső anyagától függ. Három csőhúzási módot különböztetünk meg, ezek:

1. A csőhúzás dugó nélkül. Ilyenkor a csőnek csak a külső átmérőjét csökkentik. A falvastagság ez alatt a művelet alatt nem csökken.
2. A csőhúzás dugóval. Ebben az esetben a csőnek mind a külső, mind a belső átmérője és egyúttal a falvastagság is csökken.
3. A csőhúzás rúdon. Ennél a műveletnél a belső átmérő gyakorlatilag nem változik, de a falvastagság csökken.

### 48. ANYAGÁRAMLÁS A CSŐHÚZÓÜREGBEN

Az anyag áramlását a csőhúzóüregben E. SIEBEL és E. WEBER vizsgálta meg [48.1]. Hogy miként alakul az anyagáramlás a súrlódás hatására különböző húzási eljárások folyamán, arról a feszültségi trajektoriak adnak képet. SIEBEL és WEBER kutatásainak eredménye a 48.1. ábrán látható.

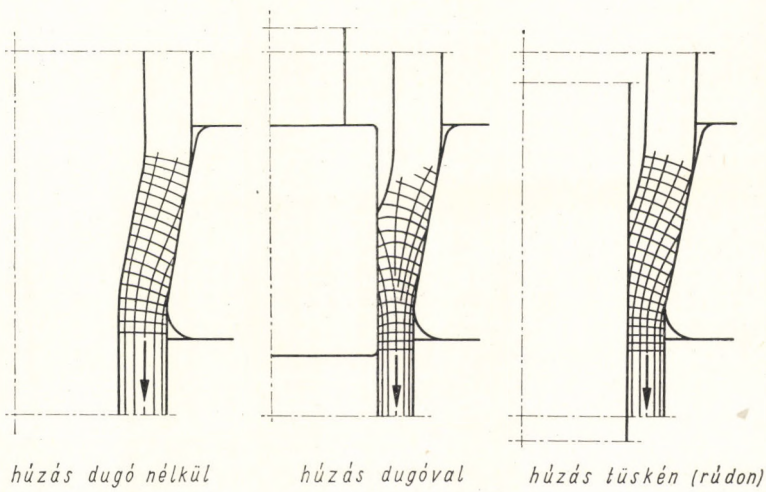
### 49. A CSŐHÚZÁSNÁL FELLÉPŐ ERŐK ÉS TELJESÍTMÉNYSZÜKSÉGLETEK

A) A CSŐHÚZÁSNÁL FELLÉPŐ ERŐK MEGHATÁROZÁSA, HA FELTÉTELEZZÜK, HOGY AZ ALAKÍTÁSI ELLENÁLLÁS ÉS AZ ALAKÍTÁSI SZILÁRDSÁG A HÚZÓÜREGEN BELÜL ÁLLANDÓ [40.7]

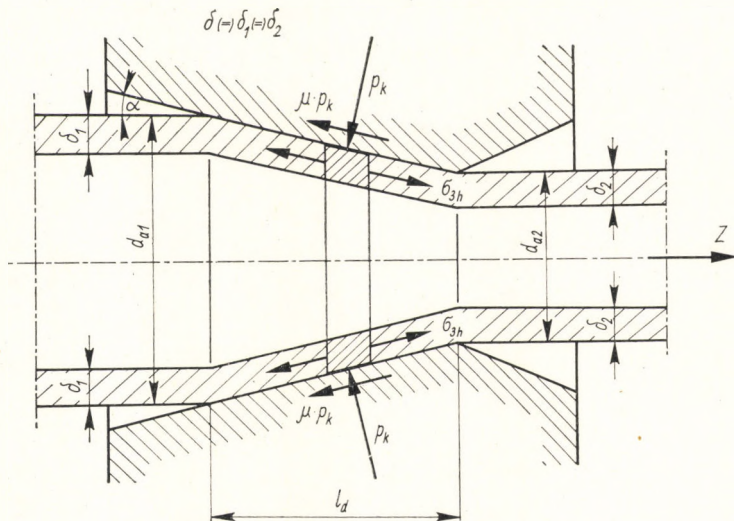
#### a) Csőhúzás dugó nélkül

Ebben az esetben a csövet a húzóüregben úgy húzzák keresztül, hogy a csőnek csak a külső átmérője csökken, a falvastagság alig változik, inkább egy keveset vastagszik (49.1. ábra).

A radiálisan működő közepes fajlagos  $p$  felületi nyomást, amely ahhoz szükséges, hogy a csövet radiális irányban összenyomja, azaz átmérőjét



48.1. ábra. Feszültségi trajektoriak különböző esőhúzó eljárásoknál, SIEBEL szerint



49.1. ábra. A dugó nélküli esőhúzásnál fellépő erők meghatározása

megkisebítse, a 49.2. ábra segítségével az alakítási munkából számíthatjuk ki:

$$p \cdot 2 \pi r \, dr = [2 r \pi - 2(r - dr) \pi] \delta \sigma_1; \quad (49.1)$$

ebből

$$p = \frac{\delta}{r} \sigma_1 \quad (49.2)$$

az alakváltozást létrehozó fajlagos felületi nyomás. Ezekben az egyenletekben  $r$  a befutó cső rádiusza,  $\delta$  a cső falvastagsága,  $\sigma_1$  az első főfeszültség.

A cső tengelyére merőleges, egymással párhuzamos két sík által a csőből kivágott gyűrű két homloklapjára  $\sigma_{3k}$  harmadik főfeszültség hat (49.1. és 49.3. ábra).

A (49.2) egyenlet értelmében a  $p$  fajlagos erő a  $\sigma_1$  főfeszültségnek, a falvastagságnak és a cső rádiuszának függvénye.

A folyás feltétele értelmében itt, minthogy  $\sigma_1$  és  $\sigma_3$  előjele egymással ellentétes,

$$\sigma_1 + \sigma_3 = k_f, \quad (49.3)$$

vagy a közepes főfeszültségekre vonatkoztatva:

$$\sigma_{1k} + \sigma_{3k} = k_{fk}. \quad (49.4)$$

A közepes felületi fajlagos nyomást pedig a következőképpen fejezhetjük ki:

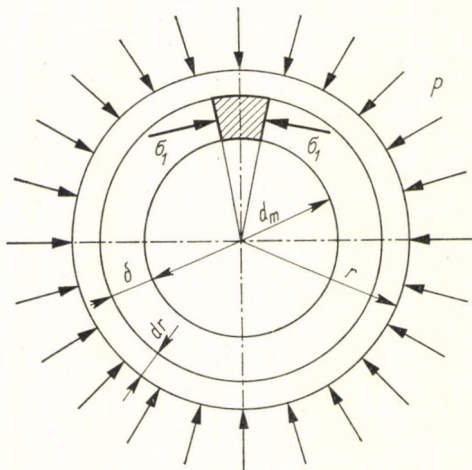
$$p_k = \frac{\delta}{r} \sigma_{1k} = \frac{\delta}{r} (k_{fk} - \sigma_{3k}). \quad (49.5)$$

Ha  $Z$  a húzóerő és  $f_2$  a csőfal kilépő keresztmetszete, akkor

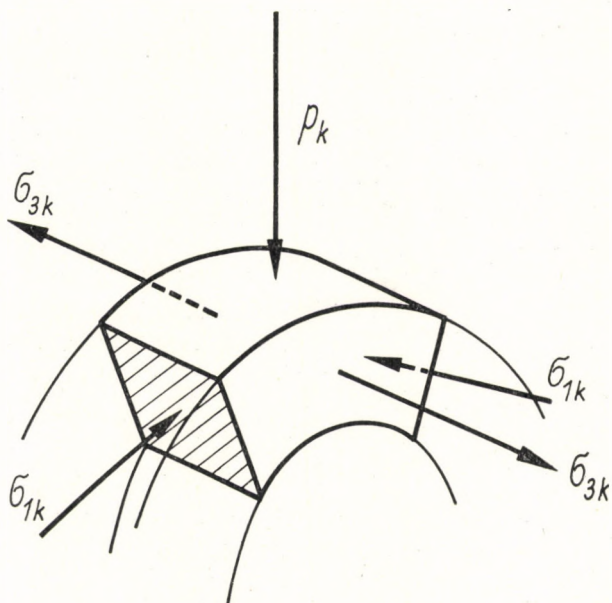
$$\sigma_{3k} = \frac{Z}{2f_2}, \quad (49.6)$$

mint ezt már a rúdhúzásnál is láttuk, tehát

$$p_k = \frac{\delta}{r} \left( k_{fk} - \frac{Z}{2f_2} \right). \quad (49.7)$$



49.2. ábra. A dugó nélküli csőhúzásnál fellépő feszültségek kiszámítása



49.3. ábra. Háromtengelyű feszültségi állapot a cső falában

A húzóerő általában felírható (lásd a rúdhúzást):

$$Z = p_k(F + \mu Q) + 0,58 k_{fk} f_2 \alpha, \quad (49.8)$$

és így

$$\sigma_{3k} = \frac{p_k(F + \mu Q)}{2 f_2} + 0,29 k_{fk} \alpha. \quad (49.9)$$

A (49.9) egyenletet a (49.5) egyenletbe behelyettesítve:

$$p_k = \frac{k_{fk}(1 - 0,29 \alpha)}{\left( \frac{r}{\delta} + \frac{F + \mu Q}{2 f_2} \right)}. \quad (49.10)$$

Ebben az egyenletben

$k_{fk} = \frac{k_{f1} + k_{f2}}{2}$  a húzott cső anyagának közepes alakítási szilárdsága  
( $k_{f1}$  a húzás előtti,  $k_{f2}$  a húzás utáni alakítási szilárdság),

$F = \left( \frac{d_{a1}^2 - d_{a2}^2}{4} \right) \pi$  a fogyás,

$Q = \frac{F}{\sin \alpha}$  (=)  $\frac{F}{\alpha}$  a szerszám dolgozó felülete,

$f_1$  a csőfal keresztmetszete húzás előtt,  
 $f_2$  a csőfal keresztmetszete húzás után,

$r = \frac{d_{a1} + d_{a2}}{4}$  a cső közepes rádiusza a húzószerszámban.

Ezek szerint a dugó nélküli csőhúzásnál a húzáshoz szükséges erő a (49.8) egyenlettel, a közepes alakítási ellenállás ( $p_k$ ) a (49.10) egyenlettel számítható ki.

### b) Csőhúzás dugóval

α) A külső átmérő változik, a belső átmérő nem

A húzóerő ebben az esetben (49.4. ábra) a rúd húzásával analóg, csupán az a különbség, hogy a dugó felületén is képződik súrlódási erő [(40.18) egyenlet]:

$$\begin{aligned} Z &= Z_a + Z_s + Z_b = \\ &= k_k(F + \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2) + 0,58 f_2 k_{fk} \alpha. \end{aligned} \quad (49.11)$$

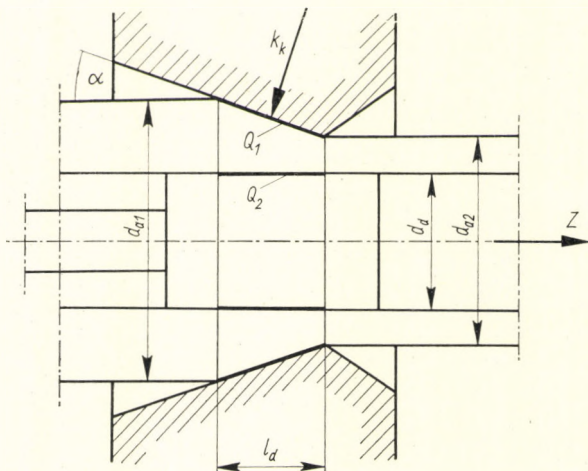
Általában  $\mu_1 (=) \mu_2 (=) \mu$ .

Ebben a képletben

$F = f_1 - f_2 = \left( \frac{d_{a1}^2 - d_{a2}^2}{4} \right) \pi$  a fogyás,

$Q_1 = \frac{F}{\alpha}$  a szerszám dolgozó felülete,

$Q_2 = d_d \pi l_d$  a dugó dolgozó felülete,



49.4. ábra. Csőhúzás dugóval, amikor csak a külső átmérő és a falvastagság csökken





A fajlagos felületi nyomás (alakítási ellenállás) a II. szakaszban:

$$k_k = \frac{k_{fk} (1 - 0,29 \alpha) - \frac{Z_I}{2f_A}}{1 + \frac{F_{II} + (Q_{1II} + Q_{2II})}{2f_2}}; \quad (49.15)$$

$d_A = d_{i2} + 2 \delta_1$  a cső külső átmérője az  $\overline{AA}$  metszetben (49.5. ábra),

$f_A = \left( \frac{d_A^2 - d_{i2}^2}{4} \right) \pi$  a csőfal keresztmetszete az  $\overline{AA}$  metszetben.

A többi tényező a fentiekből értelemszerűleg megállapítható.

### c) Csőhúzás (-tolás) rúdon

A húzóerő és a teljesítményszükséglet itt is három tényezőbből van összetéve (49.6. ábra):

A tiszta alakítási munka teljesítményszükségletéből:

$$N_a = k_k F v_2, \quad (49.16)$$

a szerszám dolgozó felületén és a tolórúd dolgozó felületén fellépő súrlódási munka teljesítményszükségletéből:

$$N_s = k_k \mu Q_{sz} \left( \frac{v_1 + v_2}{2} \right) + k_k \mu Q_d \left( \frac{v_2 - v_1}{2} \right), \quad (49.17)$$

végül a belső anyageltolásokhoz szükséges munka teljesítményszükségletéből:

$$N_b = 0,58 f_2 \alpha k_{fk} v_2. \quad (49.18)$$

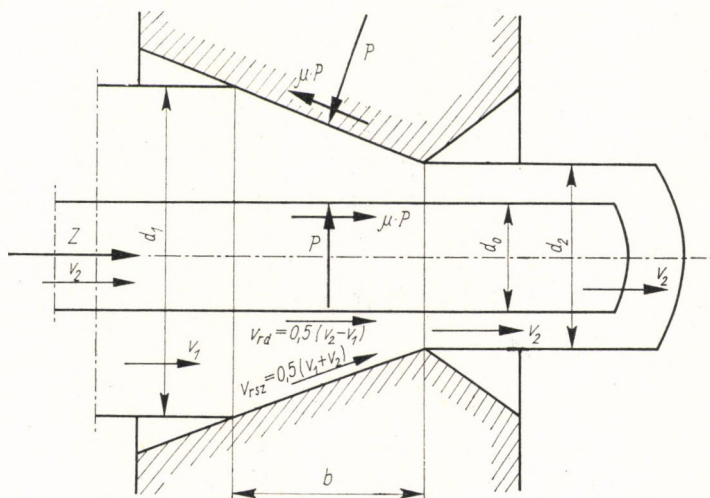
Ezekben az egyenletekben  $v_2$  a tolórúd sebessége és  $v_1$  az  $f_1$  keresztmetszeten keresztül a húzóüregbe futó rúd sebessége (49.6. ábra), a többi tényező ismeretes.

Fogyás a húzóüregben:

$$F = f_1 - f_2 = \left( \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} \right) \pi, \quad (49.19)$$

ahol

$$f_1 = \frac{d_1^2 - d_0^2}{4} \pi \quad \text{és} \quad f_2 = \frac{d_2^2 - d_0^2}{4} \pi. \quad (49.20)$$



49.6. ábra. Csőtolás rúdon, amikor csak a külső átmérő és a falvastagság csökken

Az üreg dolgozó felülete:

$$Q_{sz} = \frac{F}{\sin \alpha} (=) \frac{F}{\alpha}, \quad (49.21)$$

a rúd  $b$  hosszúságú dolgozó felülete:

$$Q_d = d_0 \pi b = \xi \frac{F}{\alpha}. \quad (49.22)$$

Ebben az egyenletben

$$\xi = \frac{d_0 \pi b \alpha}{F}. \quad (49.23)$$

Míthogy

$$F = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} \pi, \quad (49.24)$$

tehát

$$\xi = \frac{4 d_0 \pi b \alpha}{\pi (d_1^2 - d_2^2)}. \quad (49.25)$$

Míthogy

$$\alpha = \frac{d_1 - d_2}{2b}, \quad (49.26)$$

tehát

$$b \alpha = \frac{d_1 - d_2}{2}, \quad (49.27)$$

és így

$$\xi = \frac{2 d_0}{d_1 + d_2}. \quad (49.28)$$

Az anyagmozgás közepes relatív sebessége a húzószerszám fala mentén:

$$v_{rsz} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (49.29)$$

Az anyag relatív csúszási sebessége a dolgozó rúd felületén:

$$v_{rd} = \frac{v_2 - v_1}{2}. \quad (49.30)$$

Az összes teljesítményszükséglet:

$$\begin{aligned} N &= N_a + N_s + N_b = k_k F v_2 + k_k \mu Q_{sz} \left( \frac{v_1 + v_2}{2} \right) + \\ &+ k_k \mu Q_d \left( \frac{v_2 - v_1}{2} \right) + 0,58 f_2 \alpha k_{fk} v_2 = \\ &= k_k F \left[ v_2 + \frac{\mu}{\alpha} \left( \frac{v_1 + v_2}{2} \right) + \xi \frac{\mu}{\alpha} \left( \frac{v_2 - v_1}{2} \right) \right] + 0,58 f_2 \alpha k_{fk} v_2. \end{aligned} \quad (49.31)$$

Mint hogy

$$v_1 f_1 = v_2 f_2, \quad (49.32)$$

következik, hogy

$$v_1 = v_2 \frac{f_2}{f_1}, \quad (49.33)$$

és így

$$v_{rsz} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2} v_2 \left( 1 + \frac{f_2}{f_1} \right) \quad (49.34)$$

és

$$v_{rd} = \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{1}{2} v_2 \left( 1 - \frac{f_2}{f_1} \right). \quad (49.35)$$

Ha a sebességeknek így kapott értékeit a (49.31) egyenletbe behelyettesítjük, akkor:

$$N = k_k F \left[ v_2 + \frac{\mu}{\alpha} \frac{v_2}{2} \left( 1 + \frac{f_2}{f_1} \right) + \xi \frac{\mu}{\alpha} \frac{v_2}{2} \left( 1 - \frac{f_2}{f_1} \right) \right] + 0,58 f_2 \alpha k_{fk} v_2, \quad (49.36)$$

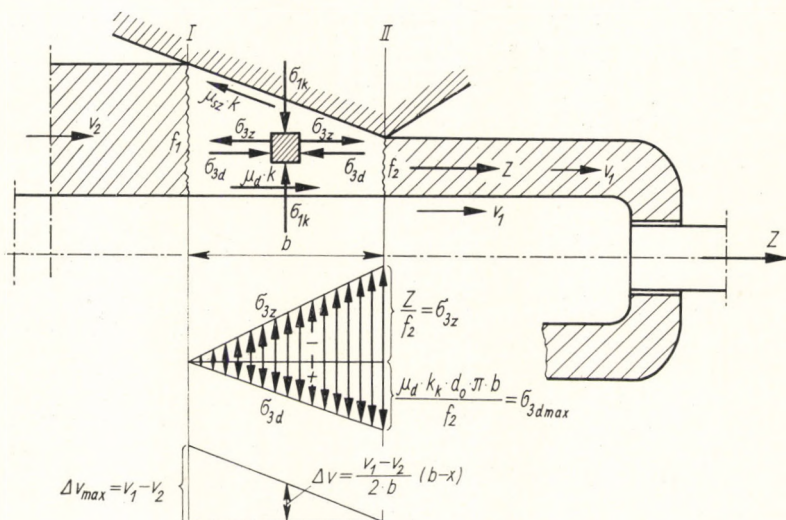
illetve

$$N = k_k F v_2 \left\{ 1 + 0,5 \frac{\mu}{\alpha} \left[ (1 + \xi) + \frac{f_2}{f_1} (1 - \xi) \right] \right\} + 0,58 f_2 \alpha k_{fk} v_2. \quad (49.37)$$

A húzóerő, illetőleg a nyomóerő csőnek rúdon való húzásakor:

$$Z = k_k F \left\{ 1 + 0,5 \frac{\mu}{\alpha} \left[ (1 + \xi) + \frac{f_2}{f_1} (1 - \xi) \right] \right\} + 0,58 f_2 k_{fk} \alpha. \quad (49.38)$$

A közepes alakítási ellenállás rúdon való csőhúzásakor a 49.7. ábra segítségével határozható meg. A húzóüregben ui. a tolrúd sebessége a húzás irányában nagyobb, mint azé a csőanyagé, amely a húzóüregben keresztülhalad. Ennek következtében az üregben levő elemi hasábnak a húzási irányra merőleges oldalára hat az a nyomófeszültség, melyet a rúd felületén keletkező súrlódási erő hoz létre. A húzóüregben levő csőanyag elemi hasábjára a csőhúzóerő pedig húzófeszültség alakjában hat. Ez a két feszültség összeadódik, és mint harmadik főfeszültség működik.



49.7. ábra. Csőhúzás rúdon, amikor csak a külső átmérő és a falvastagság csökken

A csőhúzóerő által létrehozott közepes harmadik főfeszültség:

$$\sigma_{3z} = \frac{Z}{2f_2} = k_k \frac{F}{2f_2} \left( 1 + \frac{\mu_{sz}}{\alpha} \right) + 0,29 \alpha k_{f_2}, \quad (43.39)$$

$\mu_{sz}$  a szerszám falán fellépő súrlódási tényező.

A tolórúd felületén fellépő súrlódási erő által létrehozott közepes harmadik főfeszültség:

$$\sigma_{3d} = \frac{k_k \mu_d d_0 \pi b}{2f_2}. \quad (49.40)$$

Az eredő közepes harmadik főfeszültség tehát:

$$\sigma_{3k} = -\sigma_{3z} + \sigma_{3d} = -k_k \frac{F}{2f_2} \left( 1 + \frac{\mu_{sz}}{\alpha} \right) - 0,29 \alpha k_{f_k} + \frac{k_k \mu_d d_0 \pi b}{2f_2}. \quad (49.41)$$

A folyási feltétel szerint húzásnál a közepes alakítási ellenállás:

$$k_k = k_{f_k} + \sigma_{3k} = k_{f_k} - k_k \frac{F}{2f_2} \left( 1 + \frac{\mu_{sz}}{\alpha} \right) - 0,29 \alpha k_{f_k} + \frac{k_k \mu_d d_0 \pi b}{2f_2}, \quad (49.42)$$

és ebből a közepes alakítási ellenállás rúdon való csőhúzásnál

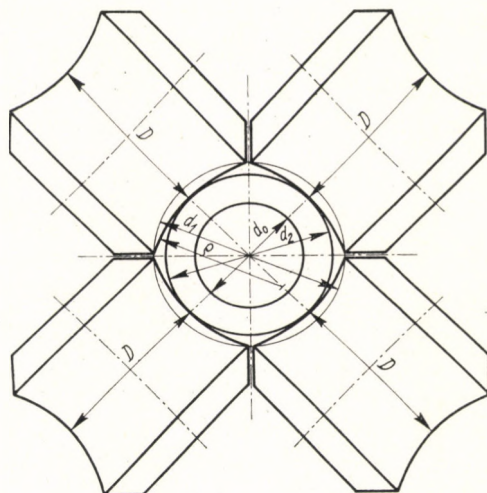
$$k_k = \frac{k_{f_k} (1 - 0,29 \alpha)}{1 + \frac{F}{2f_2} \left( 1 + \frac{\mu_{sz}}{\alpha} \right) - \frac{\mu_d d_0 \pi b}{2f_2}}. \quad (49.43)$$

Minthogy  $b (=) \frac{d_1 - d_2}{2\alpha}$ , írható:

$$k_k = \frac{k_{f_k} (1 - 0,29 \alpha)}{1 + \frac{F}{2f_2} \left( 1 + \frac{\mu_{sz}}{\alpha} \right) - \left( \frac{\mu_d}{\alpha} \right) \cdot \frac{d_0 \pi (d_1 - d_2)}{4f_2}}. \quad (49.44)$$

Amennyiben húzóüreg helyett görgős húzószerszámokat használnánk, akkor  $\mu_{sz} (=) 0$ -nak vehető, és így a közepes alakítási ellenállás a következő lesz (49.8. ábra):

$$k_k = \frac{k_{f_k} (1 - 0,29 \alpha)}{1 + \frac{F}{2f_2} - \left( \frac{\mu_d}{\alpha} \right) \frac{d_0 \pi (d_1 - d_2)}{4f_2}}. \quad (49.45)$$



B) A CSŐHÚZÁSNÁL FELLÉPŐ ERŐK MEGHATÁROZÁSA, HA FELTÉTELEZZÜK, HOGY AZ ALAKÍTÁSI SZILÁRDSÁG ÉS AZ ALAKÍTÁSI ELLENÁLLÁS A HÚZÓÜREGBEN A HELYTŐL FÜGGŐ VÁLTOZÓ [40.7]

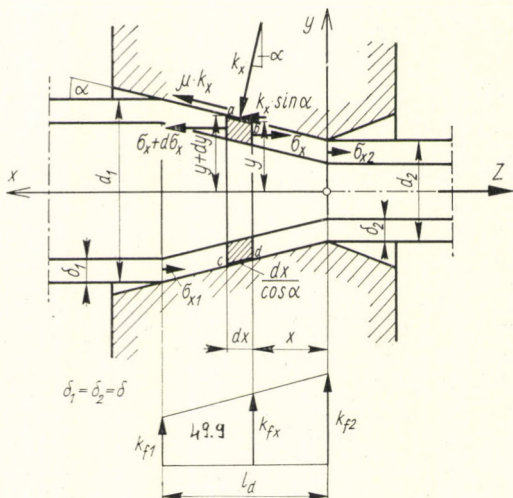
a) Csőhúzás dugó nélkül

Képzeljünk el egy  $abcd$  elemi csonka kúp alakú gyűrűt (49.9. ábra), melyet a húzóüregben alakváltozás állapotában levő csőrészből két egymástól  $dx$  távolságban levő sík lap vágott ki. A gyűrűnek van két sík gyűrű alakú fedőlapja és két csonka kúp palást alakú oldala. A külső csonka kúp alakú palástot, amely a húzóüreg falával érintkezik,  $k_x$  felületi fajlagos nyomás (alakítási ellenállás) terheli. A kifutási keresztmetszet felé néző sík gyűrű alakú fedőlapot  $\sigma_x$  feszültség, a belépő keresztmetszet felé néző sík gyűrű alakú fedőlapot  $\sigma_x + d\sigma_x$  feszültség terheli. A  $dx$  magasságú csonka kúp alakú elemi gyűrűre ható erők egyensúlyi feltételét  $x$  irányban a következő egyenlet fejezi ki, feltételezve, hogy  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , azaz a cső falvastagsága a húzás folyamán nem változik:

$$-\sigma_x [y^2 - (y - \delta)^2] \pi + (\sigma_x + d\sigma_x) [(y + dy)^2 - (y + dy - \delta)^2] \pi + k_x \sin \alpha df + k_x \mu \cos \alpha df = 0. \quad (49.46)$$

Ebben az egyenletben:

$$\begin{aligned} y^2 - (y - \delta)^2 &= 2y\delta - \delta^2, \\ (y + dy)^2 - (y + dy - \delta)^2 &= 2(y + dy)\delta - \delta^2, \\ df &= \frac{dx}{\cos \alpha} 2 \left( y + \frac{dy}{2} \right) \pi. \end{aligned}$$



49.9. ábra. Csőhúzás dugó nélkül, feltételezve, hogy az alakítási szilárdság és az alakítási ellenállás a húzóüregben helytől függő változók

A behelyettesítések és a műveletek elvégzése után, minthogy  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ , a következő differenciálegyenlethez jutunk:

$$2 \sigma_x \delta \operatorname{tg} \alpha + \frac{d\sigma_x}{dx} 2 y \delta - \frac{d\sigma_x}{dx} \delta^2 + k_x (\operatorname{tg} \alpha + \mu) 2 y = 0. \quad (49.47)$$

Ebben az egyenletben az alakítási ellenállás:

$$k_x = (k_{fx} - \sigma_x) \frac{\delta}{y} \quad (49.48)$$

és az alakítási szilárdság:

$$k_{fx} = k_{f2} - \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) x. \quad (49.49)$$

Ha a (49.48) és a (49.49) egyenletet a (49.47) differenciálegyenletbe behelyettesítjük, és a műveleteket elvégezzük, majd feltesszük, hogy

$$B_1 = -2 \mu, \quad (49.50)$$

$$B_2 = 2 k_{f2} (\operatorname{tg} \alpha + \mu), \quad (49.51)$$

$$B_3 = 2 \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) (\operatorname{tg} \alpha + \mu), \quad (49.52)$$



akkor a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$B_1 \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} (2y - \delta) + B_2 - B_3 x = 0. \quad (49.53)$$

Továbbá

$$y = y_x = x \operatorname{tg} \alpha + y_2,$$

és

$$x = \frac{y - y_2}{\operatorname{tg} \alpha},$$

valamint

$$B_4 = \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha} \right), \quad (49.54)$$

$$B_5 = B_4 y_2, \quad (49.55)$$

$$B_6 = B_2 + B_5; \quad (49.56)$$

ezeknek a (49.53) egyenletbe való behelyettesítése után a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} [(2 \operatorname{tg} \alpha) x + (2 y_2 - \delta)] + [B_6 - (B_4 \operatorname{tg} \alpha) x - B_4 y_2 + B_1 \sigma_x] = 0. \quad (49.57)$$

Legyen

$$B_7 = 2 \operatorname{tg} \alpha, \quad (49.58)$$

$$B_8 = 2 y_2 - \delta, \quad (49.59)$$

$$B_9 = B_6 - B_4 y_2, \quad (49.60)$$

$$B_{10} = B_4 \operatorname{tg} \alpha, \quad (49.61)$$

akkor a (49.57) differenciálegyenlet a következőképpen írható fel:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} (B_7 x + B_8) + (B_9 - B_{10} x + B_1 \sigma_x) = 0, \quad (49.62)$$

illetve ez írható úgy is, hogy

$$\underbrace{(B_9 - B_{10} x + B_1 \sigma_x)}_{P'} dx + \underbrace{(B_7 x + B_8)}_{Q'} d\sigma_x = 0. \quad (49.63)$$

Ez az egyenlet integrálszorzó segítségével megoldható, és így a húzott cső egyes keresztmetszeteiben a keresztmetszet csökkentéséhez szükséges feszültség:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) \left\{ \left[ k_{f2} - \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \mu) l_d - (2 y_2 - \delta)}{(3 \operatorname{tg} \alpha - \mu)} \right] \times \right. \\ & \times \left[ \frac{(2 y_2 - \delta) + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot l_d}{(2 y_2 - \delta) + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot x} \right]^{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{2 \operatorname{tg} \alpha}} - \\ & \left. - \left[ k_{f2} - \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \mu) x - (2 y_2 - \delta)}{(3 \operatorname{tg} \alpha - \mu)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (49.64)$$

Ha  $x = l_d$ , akkor  $\sigma_x = 0$ , ha  $x = 0$ , akkor a kilépő keresztmetszetben:

$$\begin{aligned} \sigma_{x2} = & \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) \left\{ \left[ k_{f2} - \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \mu) l_d - (2 y_2 - \delta)}{(3 \operatorname{tg} \alpha - \mu)} \right] \times \right. \\ & \times \left[ \frac{(2 y_2 - \delta) + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot l_d}{(2 y_2 - \delta)} \right]^{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{2 \operatorname{tg} \alpha}} - \\ & \left. - \left[ k_{f2} + \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \left( \frac{2 y_2 - \delta}{3 \operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (49.65)$$

A belépő keresztmetszet mögött az anyag hosszirányú szálainak a húzási szög irányában való átvezetéséhez szükséges erőnek megfelelő feszültség:

$$\sigma_{xs} = 0,145 (k_{f1} + k_{fx}) \alpha, \quad (49.66)$$

úgyhogy a hossz tengely irányában a belépési és kilépési keresztmetszet között

$$\sigma'_x = \sigma_x + 0,145 (k_{f1} + k_{fx}) \alpha \quad (49.67)$$

feszültséggel kell számolni. Ennek következtében a szerszám falán fellépő fajlagos nyomás (alakítási ellenállás):

$$k'_x = (k_{fx} - \sigma'_x) \frac{\delta}{y}, \quad \text{illetve} \quad (49.68)$$

$$k'_x = \{ k_{fx} - [\sigma_x + 0,145 (k_{f1} + k_{fx}) \alpha] \} \frac{\delta}{y}, \quad (49.69)$$

ahol  $\sigma_x$  a (49.64) és  $k_{fx}$  a (49.49) egyenlettel van megadva.

A kilépő keresztmetszet mögött a húzófeszültség:

$$\sigma'_{x2} = \sigma_{x2} + 0,29 (k_{f1} + k_{f2}) \alpha, \quad (49.70)$$

és így a csőhúzáshoz szükséges erő:

$$Z = f_2 \sigma'_{x2}, \quad (49.71)$$

ahol

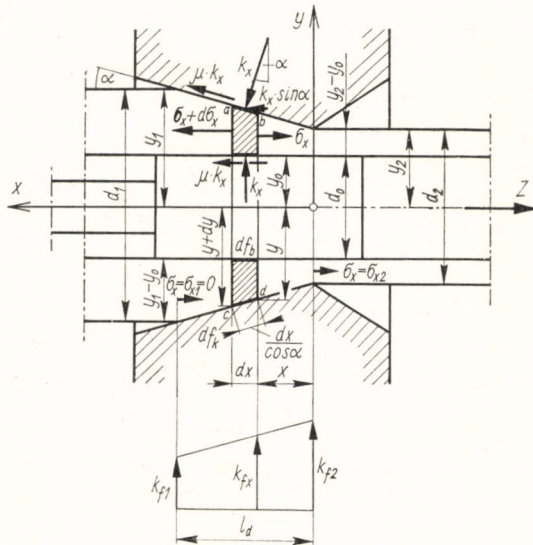
$$f_2 = \left[ \frac{d_2^2 - (d_2 - 2\delta)^2}{4} \right] \pi = (d_2 \delta - \delta^2) \pi.$$

b) Csőhúzás dugóval

α) A húzott cső belső átmérője a húzás folyamán nem változik

Képzeljünk el egy *abcd* elemi gyűrű alakú térfogatot, melyet a húzóüregben alakváltozás állapotában levő csőrészből két egymástól  $dx$  távolságban levő sík lap vágott ki (49.10. ábra). A gyűrű alakú elemi csőrész kívülről egy csonka kúp palást ( $df_k$ ) határolja, amelynek mentén a csőrész a húzóüreg felületével érintkezik, belülről egy hengerpalást ( $df_b$ ) határolja, amelynek mentén a dugó felületével érintkezik. A gyűrű fedőlapja és alaplapja egy-egy körgyűrű. A térfogatelemre ható erők egyensúlyi feltételét  $x$  irányban a következő egyenlet adja meg:

$$\begin{aligned} -\sigma_x (y^2 - y_0^2) \pi + (\sigma_x + d\sigma_x) [(y + dy)^2 - y_0^2] \pi + \\ + k_x \sin \alpha df_k + k_x \mu df_k \cos \alpha + k_x \mu df_b = 0. \end{aligned} \quad (49.72)$$



49.10. ábra. Csőhúzás dugóval, feltételezve, hogy az alakítási szilárdság és az alakítási ellenállás a húzóüregben helytől függő változók

Ebben az egyenletben

$$d_{fk} = \frac{dx}{\cos \alpha} 2 \left( y + \frac{dy}{2} \right) \pi, \quad (49.73)$$

$$df_b = dx 2 y_0 \pi, \quad (49.74)$$

$$k_{fx} = k_{f2} - \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) x, \quad (49.75)$$

továbbá

$$(y + dy)^2 = y^2 + 2 y dy, \quad (49.76)$$

$$(y + dy)^2 - y_0^2 = (y^2 - y_0^2) + 2 y dy.$$

A behelyettesítések és a műveletek elvégzése után a következő egyenletet kapjuk:

$$2 y dy \sigma_x + d\sigma_x(y^2 - y_0^2) + 2 k_x(\operatorname{tg} \alpha + \mu) y dx + \\ + 2 k_x \mu y_0 dx = 0. \quad (49.77)$$

Mint hogy  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ , a (49.77) egyenlet a következőképpen írható:

$$(2 \operatorname{tg} \alpha) \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} \left( \frac{y^2 - y_0^2}{y} \right) + 2 k_x(\operatorname{tg} \alpha + \mu) + \\ + 2 k_x \left( \frac{y_0}{y} \right) \mu = 0. \quad (49.78)$$

A 49.10. ábrából

$$y = y_x = y_2 + x \operatorname{tg} \alpha, \quad (49.79)$$

$$\frac{y_0}{y} = \varphi - \psi x, \quad (48.80)$$

ahol

$$y_1 = \frac{d_1}{2}, \quad y_x = \frac{d_x}{2}, \quad y_2 = \frac{d_2}{2} \quad \text{és} \quad y_0 = \frac{d_0}{2}.$$

Továbbá

$$\varphi = \frac{y_0}{y_2} = \frac{d_0}{d_2}, \quad (49.81)$$

$$\psi = \left( \frac{y_0}{y_2} - \frac{y_0}{y_1} \right) \frac{1}{l_d} = \left( \frac{d_0}{l_d} \right) \left( \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \right) = \frac{y_0}{l_d} \left( \frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2} \right), \quad (49.82)$$

és így

$$\frac{y_0}{y} (=) \varphi - \psi x. \quad (49.83)$$

tegyük fel továbbá, hogy

$$C_1 = 2 \operatorname{tg} \alpha, \quad (49.84)$$

$$C_2 = y_2 - y_0 \varphi, \quad (49.85)$$

$$C_3 = (\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi), \quad (49.86)$$

$$C_4 = 2 (\operatorname{tg} \alpha + \mu), \quad (49.87)$$

$$C_5 = k_{f2} C_4, \quad (49.88)$$

$$C_6 = \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) C_4, \quad (49.89)$$

$$C_7 = 2 \mu k_{f2} \varphi, \quad (49.90)$$

$$C_8 = 2 \mu k_{f2} \psi, \quad (49.91)$$

$$C_9 = 2 \mu \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \varphi, \quad (49.92)$$

$$C_{10} = 2 \mu \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \psi, \quad (49.93)$$

$$C_{11} = 2 \mu \varphi, \quad (49.94)$$

$$C_{12} = 2 \mu \psi, \quad (49.95)$$

$$C_{13} = (C_1 - C_4 - C_{11}), \quad (49.96)$$

$$C_{14} = (C_5 + C_7), \quad (49.97)$$

$$C_{15} = (C_6 + C_8 + C_9). \quad (49.98)$$

Ha a behelyettesítéseket és a műveleteket elvégezzük, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$(C_{13} + C_{12} x) \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} (C_2 + C_3 x) + C_{14} - C_{15} x + C_{10} x^2 = 0. \quad (49.99)$$

Legyen

$$u = C_2 + C_3 x, \quad (49.100)$$

továbbá

$$C_{16} = \frac{1}{C_3}, \quad (49.101)$$

$$C_{17} = \frac{C_2}{C_3}, \quad (49.102)$$

$$C_{18} = C_{12} C_{16}, \quad (49.103)$$

$$C_{19} = C_{12}C_{17}, \quad (49.104)$$

$$C_{20} = C_{15}C_{16}, \quad (49.105)$$

$$C_{21} = C_{15}C_{17}, \quad (49.106)$$

$$C_{22} = C_{10}C_{16}^2, \quad (49.107)$$

$$C_{23} = 2 C_{10}C_{16}C_{17} \quad (49.108)$$

$$C_{24} = C_{10}C_{17}^2, \quad (49.109)$$

$$C_{25} = C_{13} - C_{19} \quad (49.110)$$

$$C_{26} = C_{14} + C_{21} + C_{24}, \quad (49.111)$$

$$C_{27} = C_{20} + C_{23}. \quad (49.112)$$

A műveletek elvégzése után a (49.99) egyenletből a következő egyenlethez jutunk:

$$C_3 \frac{d\sigma_x}{du} u + C_{26} + C_{25} \sigma_x - C_{27} u + C_{22} u^2 + \\ + C_{18} u \sigma_x = 0, \quad (49.113)$$

illetve

$$\underbrace{(C_3 \lambda u)}_P d\sigma_x + \lambda \underbrace{(C_{26} + C_{25} \sigma_x - C_{27} u + C_{22} u^2 + C_{18} u \sigma_x)}_Q du = 0, \quad (49.114)$$

ahol  $\lambda$  az integrálszorító. Minthogy

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x}, \quad (49.115)$$

a (49.114) egyenletből  $\sigma_x$  meghatározható:

$$\sigma_x = \frac{-C_{26} \int u^r e^{su} du + C_{27} \int u^{(r+1)} e^{su} du - C_{22} \int u^{(r+2)} e^{su} du - K_a}{C_3 u^{(r+1)} e^{su}}, \quad (49.116)$$

ahol

$$C_3 = (\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi), \quad (49.86)$$

$$C_{22} = 2 \mu \left( \frac{k_{i2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{\psi}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2}, \quad (49.117)$$

$$\begin{aligned}
 C_{26} = & 2k_{f2} [\operatorname{tg} \alpha + \mu(1 + \varphi)] + \left\{ 2(\operatorname{tg} \alpha + \mu) \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + \right. \\
 & \left. + 2\mu \left[ k_{f2} \psi + \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \varphi \right] \right\} \left( \frac{y_2 - y_0 \varphi}{\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi} \right) + \\
 & + 2\mu \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \psi \left( \frac{y_2 - y_0 \varphi}{\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{49.118}$$

$$\begin{aligned}
 C_{27} = & \frac{2(\operatorname{tg} \alpha + \mu) \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + 2\mu \left[ k_{f2} \psi + \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \varphi \right]}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)} + \\
 & + 4\mu \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \psi \frac{(y_2 - y_0 \varphi)}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2}.
 \end{aligned} \tag{49.119}$$

A (49.116) egyenlet segítségével a  $K_a$  kiszámítható abból a feltételből, hogy  $x = l_d$ -nél  $\sigma_x = 0$ :

$$-C_{26} \int_u u^r e^{su} du + C_{27} \int_u u^{(r+1)} e^{su} du - C_{22} \int_u u^{(r+2)} e^{su} du - K_a = 0, \tag{49.120}$$

A (49.116) egyenletben:

$$u = (y_2 - y_0 \varphi) + (\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi) x, \tag{49.100}$$

$$r = -1 - 2\mu \left[ \left( \frac{1 + \varphi}{\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi} \right) + \psi \frac{(y_2 - y_0 \varphi)}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2} \right], \tag{49.121}$$

$$s = \frac{2\mu\psi}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2}. \tag{49.122}$$

$\varphi$  és  $\psi$  értékét a (49.81) és (49.82) egyenlet adja meg.

A szerszám falán fellépő fajlagos nyomás (alakítási ellenállás)  $l_d \geq x \geq 0$  között a folyási feltétel szerint [(49.69) egyenlet]:

$$k'_x = k_{fk} - [\sigma_x + 0,145(k_{f1} + k_{fx}) \alpha]; \tag{49.123}$$

itt  $k_{fx}$ -t a (49.75),  $\sigma_x$ -t a (49.116) egyenlettel kell meghatározni.

A kilépő keresztmetszet mögött a tengelyirányú húzófeszültség:

$$\sigma'_{x2} = \sigma_{x2} + 0,29(k_{f1} + k_{f2}) \alpha. \tag{49.124}$$

A csőhúzáshoz szükséges húzóerő pedig:

$$Z = \sigma'_{x2} f_2, \tag{49.125}$$

ahol

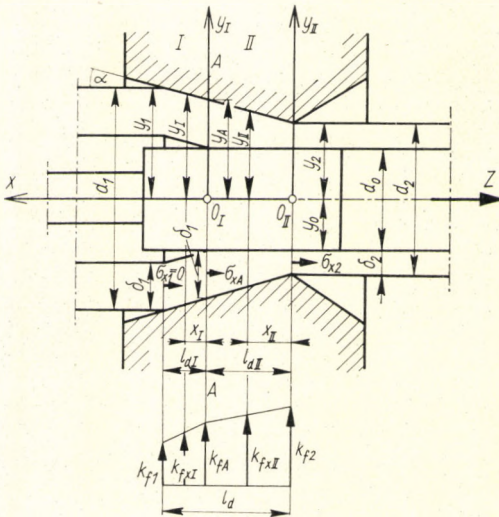
$$f_2 = \left( \frac{d_2^2 - d_0^2}{4} \right) \pi. \quad (49.126)$$

$\beta)$  A húzott csőnek mind a belső, mind a külső átmérője kisebb lesz

A csőhúzásnak ez a módja (49.11. ábra) a dugó nélküli (49. B. a) csőhúzásnak és a dugós csőhúzás (49. B. b)  $\alpha$  esetének kombinációjaképpen fogható fel. A I. szakaszban, amely a belépési keresztmetszettől az  $\overline{AA}$  egyenesig tart, amikor az  $x, y_I$  koordináta-rendszer origója  $O_I$  pont, a cső húzása dugó nélkül történik, a II. szakaszban pedig, amely az  $\overline{AA}$  egyenestől a kilépési keresztmetszetig tart, amikor az  $x, y_{II}$  koordináta-rendszerben  $O_{II}$  az origó, a cső húzása dugóval megy végbe a dugós csőhúzás  $\alpha$ ) esetének megfelelően.

Az  $\overline{AA}$  egyenesnek megfelelő keresztmetszetben a tengelyirányú feszültség a (49.65) egyenlettel határozható meg, amely ez esetben a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} \sigma_{xA} = & \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) \left\{ \left[ k_{fA} - \left( \frac{k_{fA} - k_{fI}}{l_{dI}} \right) \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \mu) \cdot l_{dI} - (2y_A - \delta_1)}{(3 \operatorname{tg} \alpha - \mu)} \right] \times \right. \\ & \times \left[ \frac{(2y_A - \delta_1) + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot l_{dI}}{(2y_A - \delta_1)} \right] \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) - \\ & \left. - \left[ k_{fA} + \left( \frac{k_{fA} - k_{fI}}{l_{dI}} \right) \left( \frac{2y_A - \delta_1}{3 \operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) \right] \right\}. \quad (49.127) \end{aligned}$$



9.11. ábra. A dugós és dugó nélküli csőhúzás kombinációja, feltételezve, hogy az alakítási szilárdság és az alakítási ellenállás a húzóüregben helytől függő változó



Az I. szakaszban a cső egyes keresztmetszeteiben a tengelyirányú feszültség [(49.64) egyenlet]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xI} = & \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) \left\{ \left[ k_{fA} - \left( \frac{k_{fA} - k_{fI}}{l_{dI}} \right) \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \mu) l_{dI} - (2 y_A - \delta_1)}{(3 \operatorname{tg} \alpha - \mu)} \right] \times \right. \\ & \times \left[ \frac{(2 y_A - \delta_1) + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot l_{dI}}{(2 y_A - \delta_1) + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot x} \right]^{\left( \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right)} - \\ & \left. - \left[ k_{fA} - \left( \frac{k_{fA} - k_{fI}}{l_{dI}} \right) \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \mu) x_I - (2 y_A - \delta_1)}{(3 \operatorname{tg} \alpha - \mu)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (49.128)$$

Az I. szakaszban a szerszám falán fellépő fajlagos nyomás (alakítási ellenállás) a (49.69) egyenlet alapján:

$$k'_{xI} = \{ k_{fxI} - [\sigma_{xI} + 0,145 (k_{fI} + k_{fxI}) \alpha] \} \frac{\delta_1}{y_{xI}}, \quad (49.129)$$

ebben

$$k_{fxI} = k_{fA} - \left( \frac{k_{fA} - k_{fI}}{l_{dI}} \right) x_I. \quad (49.130)$$

A II. szakaszban a cső egyes keresztmetszeteiben fellépő tengelyirányú feszültséget a (49.116) egyenlet segítségével kell kiszámítani. Ebben az esetben a  $C_3$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{26}$  és  $C_{27}$  állandókat oly módon kell meghatározni, hogy ahol a (49.86), (49.117), (49.118) és (49.119) képletben  $k_{fI}$  szerepel, ott  $k_{fA}$ -t, ahol  $y_1$  szerepel, ott  $y_A$ -t, ahol  $l_d$  szerepel, ott  $l_{dII}$ -t kell behelyettesíteni (49.11. ábra). A  $\varphi$ -t és a  $\psi$ -t is ugyanilyen módon kell meghatározni a (49.81) és a (49.82) egyenletből.

A (49.116) egyenletben szerepel egy  $K_a$  állandó. A dugós csőhúzás (49. B. b)  $\beta$  esetében az ennek megfelelő  $K_b$  állandót azzal a feltételezéssel kell meghatározni, hogy  $x_{II} = l_{dII}$ -nél  $\sigma_{xII} \equiv \sigma_{xA}$ . Tehát

$$\begin{aligned} K_b = & \sigma_{xA} C_3 u^{(r+1)} s^{su} + C_{26} \int_u u^r e^{su} du - \\ & - C_{27} \int_u u^{(r+1)} e^{su} du + C_{22} \int_u u^{(r+2)} e^{su} du. \end{aligned} \quad (49.131)$$

A kilépő keresztmetszetben az alakításból eredő  $\sigma_{x2}$  tengelyirányú feszültséget a (49.116) egyenlettel  $x_{II} = 0$  helyen kell meghatározni a most felsorolt feltételek mellett.

A II. szakaszban a szerszám falán fellépő fajlagos nyomás (alakítási ellenállás) a (49.123) egyenlet alapján:

$$k'_{xII} = k_{fxII} - [\sigma_{xII} + 0,145 (k_{fA} + k_{fxII}) \alpha], \quad (49.132)$$

ebben

$$k_{f_{xII}} = k_{f_2} - \left( \frac{k_{f_2} - k_{fA}}{l_{dII}} \right) x_{II} . \quad (49.133)$$

A csőhúzáshoz szükséges húzóerő

$$Z = f_2 \sigma'_{x2} , \quad (49.134)$$

ahol

$$\sigma'_{x2} = \sigma_{x2} + 0,29 (k_{fA} + k_{f_2}) \alpha , \quad (49.135)$$

$f_2$  a cső keresztmetszete húzás után.

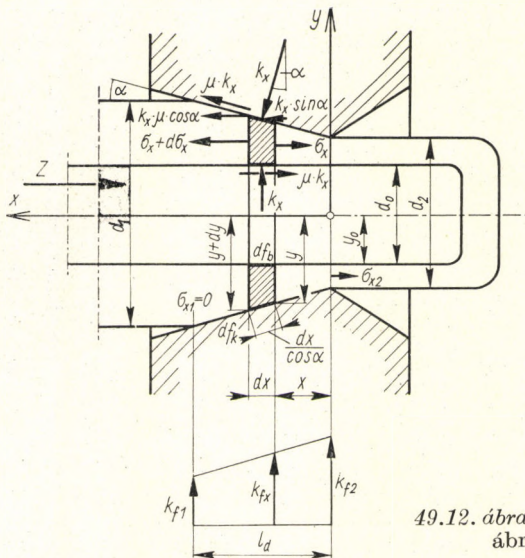
### c) Csőhúzás (-tolás) rúdon

a) A húzott cső belső átmérője a húzás folyamán nem változik

A csőhúzásnak ez az esete (49.12. ábra) a dugós csőhúzás (49. B. b)  $\alpha$  esetétől annyiban tér el, hogy a gyűrű alakú elemi térfogatra ható erők közül a dugó felületén működő súrlódási erő előjele negatív. Az erők egyensúlyi egyenlete tehát:

$$\begin{aligned} -\sigma_x (y^2 - y_0^2) \pi + (\sigma_x + d\sigma_x) [(y + dy)^2 - y_0^2] \pi + \\ + k_x \sin \alpha df_k + k_x \mu \cos \alpha df_k - k_x \mu df_b = 0 . \end{aligned} \quad (49.136)$$

A  $k_x$  kifejezéshez szükséges  $k_{f_{x2}}$ -et a (49.75) egyenlet,  $df_k$ -t a (49.73) egyenlet,  $df_b$ -t a (49.74) egyenlet adja meg.



49.12. ábra. Csőtolás rúdon a 49.9. ábra feltételei szerint

A (49.136) differenciálegyenlet  $\sigma_x$ -re megoldva, a (49.116) egyenletet kapjuk, amikor

$$u = (y_2 - y_0 \varphi) + (\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi) x, \quad (49.100a)$$

$$r = 2\mu \left[ \left( \frac{\varphi - 1}{\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi} \right) + \psi \frac{(y_2 - y_0 \varphi)}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2} \right] - 1, \quad (49.137)$$

$$s = - \frac{2\mu\psi}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2}. \quad (49.138)$$

A (49.116) egyenletben szereplő állandók pedig a jelen esetben:

$$C_3 = \operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi, \quad (49.139)$$

$$C_{22} = -2\mu \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{\psi}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2}, \quad (49.140)$$

$$\begin{aligned} C_{26} = & 2k_{f2} [\operatorname{tg} \alpha + \mu(1 - \varphi)] + \left\{ 2(\operatorname{tg} \alpha + \mu) \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \right. \\ & \left. - 2\mu \left[ k_{f2}\psi + \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \varphi \right] \right\} \frac{(y_2 - y_0 \varphi)}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)} - \\ & - 2\mu \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \psi \left( \frac{y_2 - y_0 \varphi}{\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi} \right)^2, \end{aligned} \quad (49.141)$$

$$\begin{aligned} C_{27} = & \frac{\left[ 2(\operatorname{tg} \alpha + \mu) \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - 2\mu \left[ k_{f2}\psi + \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \varphi \right] \right]}{\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi} - \\ & - 4\mu \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \psi \frac{(y_2 - y_0 \varphi)}{(\operatorname{tg} \alpha + y_0 \psi)^2}. \end{aligned} \quad (49.142)$$

A  $\sigma_x$  egyenletében (49.116) szereplő  $K_a$  állandót a (49.120) egyenlet segítségével kell meghatározni, abból a feltevésből, hogy ahol  $x = l_d$ , ott  $\sigma_x = 0$ . A rúdon való csőhúzás esetében a változók és állandók a (49.100), (49.137), (49.138), illetve a (49.86), (49.140), (49.141) és (49.142) egyenlettel határozandók meg.

Az alakítási ellenállást a (49.123) és (49.124) egyenlet, az alakítási szilárd-ságot a (49.75) egyenlet segítségével kell meghatározni.

A húzóerő:

$$Z = \sigma'_{x2} f_2, \quad (49.143)$$

ahol  $\sigma'_{x2}$ -t a (49.124) egyenlet határozza meg.

β) A húzott cső külső és belső átmérője is változik a húzás folyamán

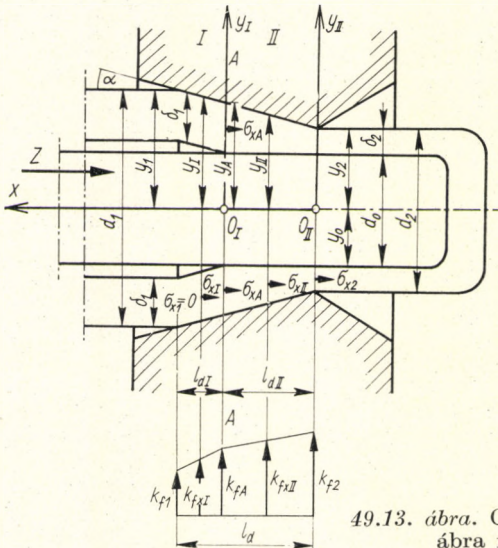
A rúdon való csőhúzásnak ez az esete (49.13. ábra) a dugó nélküli csőhúzásnak (49. B. a) és a rudas csőhúzás (49. B. c)  $\alpha$  esetének kombinációjaképpen fogható fel. Az I. szakaszban, amely a belépési keresztmetszettől az  $\overline{AA}$  egyenesig tart, amikor az  $xy_I$  koordináta-rendszer origója  $O_I$  pont, a cső húzása dugó nélkül történik. A II. szakaszban pedig, amely az  $\overline{AA}$  egyenestől a kilépési keresztmetszetig tart, amikor az  $xy_{II}$  koordináta-rendszer origója  $O_{II}$ , a cső húzása rúdon történik, a rúdon való csőhúzás (-tolás)  $\alpha$  esetének megfelelően.

Ezek szerint az I. szakaszban a  $\sigma_x$  tengelyirányú feszültség bármelyik keresztmetszetben a (49.64) egyenlettel határozható meg, amelybe itt  $l_d$  helyett  $l_{dI}$  és  $k_{f2}$  helyett  $k_{fA}$ , továbbá  $\delta$  helyett  $\delta_1$  helyettesítendő be. A felületi fajlagos nyomás (alakítási ellenállás) az I. szakaszban a (49.69) egyenlettel határozható meg, amelyben  $k_{fx}$  a (49.49) egyenlettel van megadva.

Az  $\overline{AA}$  egyenesnek megfelelő keresztmetszetben a tengelyirányú feszültség,  $\sigma_{xA}$  a (49.65), illetve (49.127) egyenlettel határozható meg.

A II. szakaszban, a cső egyes keresztmetszeteiben a tengelyirányú  $\sigma_x$  feszültséget a (49.116) egyenlet segítségével kell meghatározni. A benne előforduló  $u$  változó és az állandók a (49.100), (49.137), (49.138), (49.86), (49.140), (49.141) és (49.142) egyenlettel határozandók meg.

A (49.116) egyenletben szereplő  $K_a$  állandót pedig, ugyanúgy mint a (49.131) egyenlet esetében a  $K_b$ -t, abból a feltételből lehet meghatározni, hogy  $x = l_{dII}$ -nél  $\sigma_{xII} = \sigma_{xA}$ . Az állandókat itt is a rúdon való csőhúzás (49. B. c)  $\alpha$  esetének megfelelően kell megválasztani.



49.13. ábra. Csőtolás rúdon a 49.11. ábra feltételei szerint

A II. szakaszban a szerszám felületén fellépő fajlagos nyomás a (49.132) és a (49.133) egyenlet segítségével határozható meg.

A húzáshoz szükséges húzóerő:

$$Z = \sigma'_{x_2} f_2, \quad (49.144)$$

ahol  $\sigma'_{x_2}$  az a feszültség, mely  $x_{II} = 0$ -nál, azaz a kilépő keresztmetszetben lép fel.  $f_2$  a húzott rúd keresztmetszete a húzás után. A húzóerő képletében:

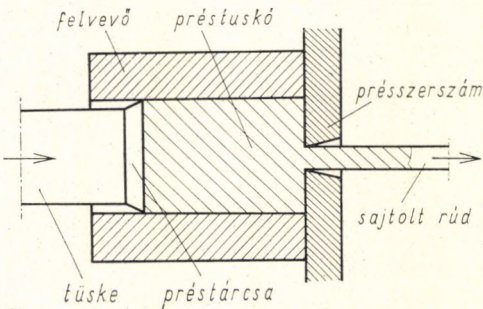
$$\sigma'_{x_2} = \sigma_{x_2} + 0,29 (k_{fA} + k_{f_2}) \alpha. \quad (49.145)$$

## VII. SAJTOLÁS

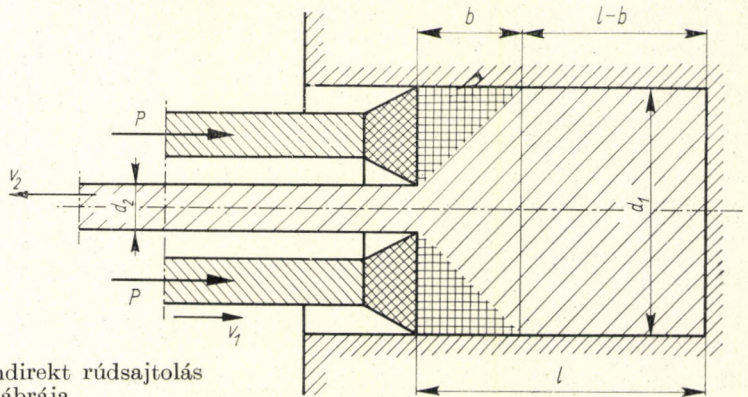
### 50. RÚDSAJTOLÁS

Rúdsajtolásakor egy hengeres kamrában, ún. felvevőben (recipiensben) elhelyezett hengeres tuskóra (blokkra) egy sajtoltüskével akkora nyomást gyakorolunk, hogy a felvevőben levő anyag a felvevő fenekét elzáró fedél (a sajtolószerszám) alakos nyílásán keresztül kifolyjék (50.1. ábra). A nyíláson kifolyó anyag rúd alakú, és keresztmetszete megegyezik a nyílás keresztmetszetével.

Ennél a műveletnél a keresztmetszetváltozás igen nagy, éppen ezért az alakítás túlnyomórészt melegen történik. A rúdsajtolás elve az 50.1. ábrán látható. Ezt a rúdsajtolási módot közvetlen (direkt) sajtolásnak nevezik. Az 50.2. ábrán az ún. közvetett (indirekt) sajtolás látható. A különbség a két sajtolási mód között az, hogy míg a direkt sajtolással a sajtoló tüske ugyanabban az irányban mozog, mint a kisajtolt rúd, addig az indirekt rúdsajtolásnál a sajtoltüske és a kisajtolt rúd mozgásiránya egymással ellenkező [50.1–50.12].



50.1. ábra. A direkt rúdsajtolás elvi ábrája



50.2. ábra. Az indirekt rúdsajtolás elvi ábrája

## 51. A RÚDSAJTOLÁSNÁL FELLÉPŐ ERŐK MEGHATÁROZÁSA

A rúdsajtolás erőinek meghatározásával többen foglalkoztak, de az eddigi elméleti vizsgálatok nem vezettek kielégítő eredményhez. Az egyetlen út, amelyen a rúdsajtolási folyamattal kapcsolatban elfogadható összefüggésekhez lehetett jutni, a kísérletek útja.

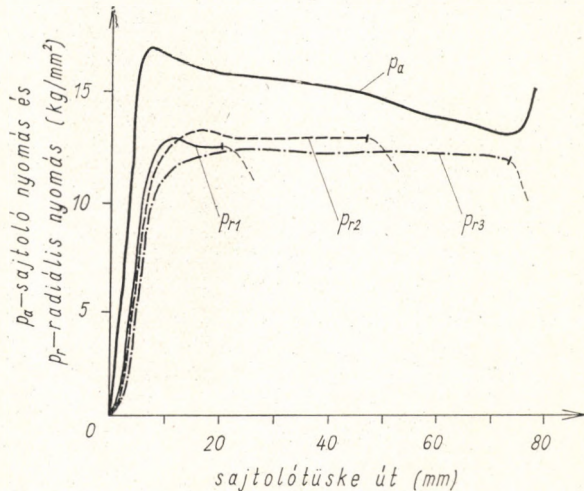
A rúdsajtolásra vonatkozólag számos üzemi kísérlet folyt, sokan pedig igyekeztek a rúdsajtoláskor lejátszódó folyási jelenségeket és a fellépő erőket laboratóriumi kísérletekkel felderíteni.

Mind e kísérletek a sajtolótüskére ható erőt vizsgálták a sajtolótüske útjának függvényében. Nem vizsgálták azonban a hengeres felvevő (recipiens) falára merőlegesen ható radiális erőt a sajtolótüske útjának függvényében. Ezeknek a radiális erőknek a meghatározására GELEJI S., DÉVÉNYI GY. és GULYÁS J. egy laboratóriumi rúdsajtoló berendezést építettek [50.7]. E berendezés segítségével a sajtolási folyamat alatt a felvevő falára ható radiális erők a sajtolótüske útjának függvényében a felvevő falán három helyen megmérhetők.

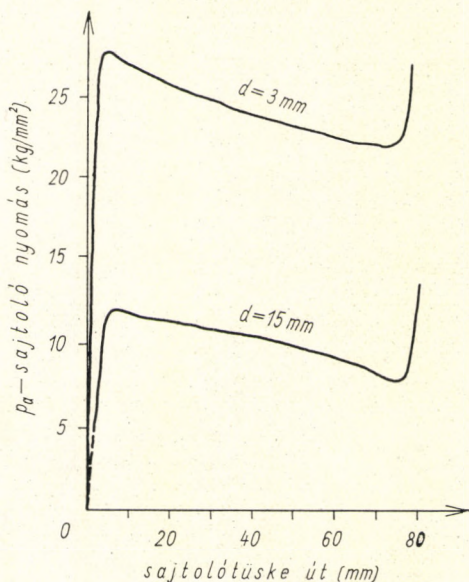
A sajtolóerő szabatos számítását legelőször H. HENCKY [13.3], majd utána más kutatók is megkísérelték. Ezeket a megoldásokat egyelőre csak matematikai szempontból lehet értékelni, mert praktikus értékük nincs.

W. EISBEIN és G. SACHS [50.3], továbbá S. A. GUBKIN [50.8] voltak az elsőek, akik a kiömlő nyílás előtt fellépő holtcsarok által képzett tölesérszerű nyílásban fellépő erők és a dróthúzáskor fellépő erők között hasonlóságot láttak. EISBEIN és SACHS ezenkívül a felvevő falán fellépő súrlódást is igyekeztek számításba venni.

Később többek között R. HILL [50.9], P. FELTHAM [50.10], J. F. W. BISHOP [50.11] és W. A. BACKOFEN [50.12] kísérelték meg, hogy a problé-



51.1. ábra. A radiális ( $p_r$ ) és az axiális ( $p_a$ ) fajlagos nyomás változása a rúdsajtoló felvevőjében a sajtolótüske útjának függvényében



51.2. ábra. A fajlagos sajtolóerő változása rúdsajtolásnál a sajtolótüske útjának és a sajtoló rúd átmérőjének függvényében

mát elméletileg megfogják, de nem jutottak gyakorlatilag használható eredményekhez.

EISEIN és SACHS a sajtolóerő kiszámításának problémáját oly módon igyekeztek megoldani, hogy a felvevőben lejátszódó folyamatot azonosították egy rúd húzóüregben való keresztülnyomásának folyamatával. Rúdsajtolásakor a felvevő fenéke a sajtolószerszám (51.3. ábra). A fenékben levő nyílás alakja és mérete azonos a kisajtoló rúd keresztmetszetének alakjával és méretével. Sajtolásakor a felvevőben levő sajtolási tuskóra a sajtoló tuskóval  $P$  nyomást gyakorolunk, amely a tuskót a szerszámnak szorítja. Megfelelő nagyságú nyomásnál a képlékeny anyag a szerszám nyílásán keresztül rúd alakban kifolyik. A tuskónak a szerszám mögött levő, a rajzban kockásan vonalkázott része, a holtzarok a folyásban alig vesz részt. Magában a sajtoló tuskó anyagában a szerszámnyílás mögött egy kúpos nyílás keletkezik, és az anyag ezen keresztül folyik a szerszám nyílása felé. A sajtoló anyagban keletkező kúpos nyílást egy húzóüregnek foghatjuk fel. Ha ezt a feltételezést mint munkahipotézist elfogadjuk, akkor a közepes alakítási ellenállást ebben a húzóüregben, amelyiken keresztül az anyagot kinyomjuk, GELEJI szerint kiszámíthatjuk [50.5, 50.7]. (A súrlódási tényezőt ebben az esetben az anyag belső súrlódási tényezőjével azonosnak kell venni.)

Ezek szerint a közepes alakítási ellenállás a sajtolószerszám mögött keletkező kúpos húzóüregben:

$$k_k = \frac{k_f}{1 - \frac{F + Q \mu_i}{2 f_1}} = \frac{k_f}{1 - \frac{F}{2 f_1} \left( 1 + \frac{\mu_i}{\sin \alpha} \right)} \quad (51.1)$$





Az (51.3) egyenlettel kiszámítható az I. keresztmetszetben működő  $P_1$  erő, amely az anyagot a szerszámmnyílás előtt keletkező üregegen keresztül nyomja:

$$P_1 = p_a f_1. \quad (51.4)$$

Ez a  $P_1$  erő azonban nem elég arra, hogy a teljes sajtolási munkát elvégezze. Az I. keresztmetszet és a sajtolótárcsa között levő  $l - b$  hosszúságú tuskórész egész tömegében belső anyagmozgások vannak, vagyis itt belső csúszási munka és a felvevő falán súrlódási munka lép fel.

Az 51.3. ábrán a sajtolóerő változását a sajtolótüske útjának függvényében ábrázoltuk; ez az ábra a sajtolás munkadiagramja, melyet három részre bonthatunk fel. Az  $A_3$  mező megadja azt a duzzasztási munkát, amely ahhoz szükséges, hogy a tuskó a felvevőt teljesen kitöltse. Az  $A_1$  mező megadja azt a deformációs munkát, amely ahhoz szükséges, hogy az  $f_1$  keresztmetszetű tuskóból  $f_2$  keresztmetszetű rúd legyen. Az  $A_2$  mező egyenértékű azzal a munkával, amely a belső anyagmozdulások és a felvevő falán fellépő súrlódási munka legyőzéséhez szükséges.

A  $P_1$  erő hozza létre az  $A_1$  deformációs munkát, és az (51.4) képlet segítségével kiszámítható. Az itt bemutatott kísérletek és más kutatók kísérletei alapján kidolgozható egy eljárás, amelynek alapján ki lehet számítani a  $P_2$  erőt, amely az  $A_2$  mezővel egyenértékű munkát hozza létre.

Ha GELEJI—DÉVÉNYI—GÜLYÁS kísérleteinek és J. SUCHOVERSKY [51.1] kísérleteinek az eredményeit feltüntetett 51.2. és 51.4. ábrát megvizsgáljuk, akkor azt látjuk, hogy a  $P_2$  erő annál nagyobb, mennél nagyobb a  $p_a$  feszültség az I. keresztmetszetben:

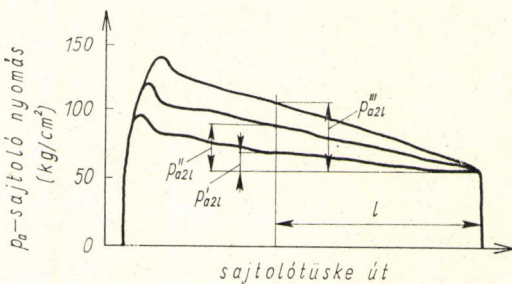
$$P_2 = \psi_1 p_a f_1 \quad [\text{kg}]. \quad (51.5)$$

Az 51.3. ábra pedig azt mutatja, hogy

$$P_2 = \psi_2 (l - b); \quad (51.6)$$

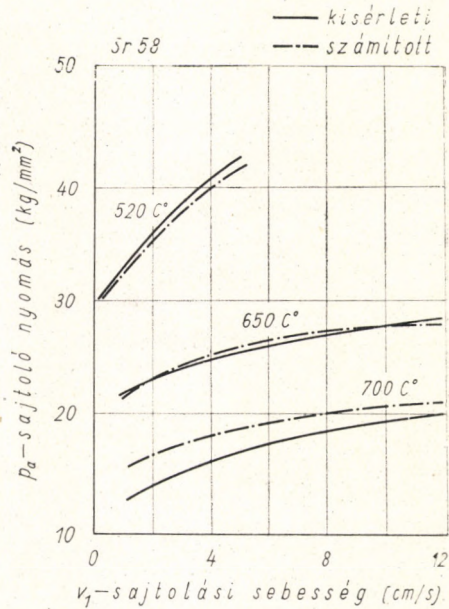
SACHS sajtolási kísérletei (51.5. ábra) pedig azt mutatják, hogy  $P_2$  erő a sajtolási sebességtől is függ, amit a következőképpen lehet kifejezni:

$$P_2 = \psi_2 \sqrt[4]{\frac{v_1}{l - b}} \quad [\text{kg}]. \quad (51.7)$$



51.4. ábra. A sajtolási nyomás a sajtolási tüske útjának és az I. keresztmetszetben fellépő  $p_a$  feszültség nagyságának függvényében

51.5. ábra. A kezdeti failagos sajtolási nyomás változása 50 mm átmérőjű sárgaréz rúd sajtolásánál, különböző sajtolási sebességek és különböző sajtolási hőmérsékletek függvényében. A felvevő átmérője 170 mm, a tuskóhosszúság 750 mm. Kísérleti és számított értékek összehasonlítása GELEJI szerint



Ezekben az egyenletekben  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  és  $\psi_3$  együtthatók függvények;  $v_1$  a sajtolótüske sebessége [cm/s].

Az (51.5), (51.6), (51.7) egyenlet segítségével  $P_2$  erő a következőképpen írható fel:

$$P_2 = \psi_1 \psi_2 \psi_3 p_a f_1 (l - b) \left( \sqrt[4]{\frac{v_1}{l - b}} \right) = \psi V p_a \quad [\text{kg}]. \quad (51.8)$$

Itt

$$V = f_1 (l - b) \quad [\text{cm}^3] \quad (51.9)$$

az I. keresztmetszet mögötti tuskótérfogat,

$$\psi = \psi_1 \psi_2 \psi_3 \left( \sqrt[4]{\frac{v_1}{l - b}} \right) \left[ \frac{\text{kg}}{\text{kg cm}} \right] \quad (51.10)$$

az együttható, amely azt az erőt adja meg, amely 1 cm<sup>3</sup> sajtolt anyagban 1 kgcm belső súrlódási munkát hoz létre, ha az axiális nyomás  $p_a = 1 \text{ kg/cm}^2$ .

Számos kísérleti eredmény alapján gyakorlati számítások részére közelítőleg felvehető, hogy

$$\psi_1 \psi_2 \psi_3 = C = \text{konst}, \quad (51.11)$$

ennélfogva írható:

$$\psi = C \sqrt[4]{\frac{v_1}{l - b}} = 0,025 \sqrt[4]{\frac{v_1}{l - b}} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{kg cm}} \right]. \quad (51.12)$$

A  $C$  állandó, mely sok kísérletből visszafelé meghatározható, különböző anyagokra más-más értéket ad, amelyek azonban csak kevésé különböznek egymástól. 0,025 jó közepes érték mind hideg-, mind melegsajtolásnál.

Az összes sajtolási erő:

$$P = P_1 + P_2 = p_a f_1 + \psi p_a V \quad [\text{kg}]. \quad (51.13)$$

A gyakorlatban a

$$p_0 = \frac{P}{f_1} \quad [\text{kg/cm}^2] \quad (51.14)$$

hányadost fajlagos sajtolási nyomásnak nevezik. Az irodalom legtöbbször a kezdeti fajlagos sajtolási nyomást adja meg.

Amikor a sajtolótárcsa homloklapja eléri az I. keresztmetszetet,  $V = 0$  lesz, és akkor a sajtoló erő  $P = P_1$ . Ezen a helyen a sajtolóerőnek minimuma van. Mihelyt a préstárcsa homloklapja az I. keresztmetszeten túljut, a holtcsőben levő anyag a préstárcsa közvetlen nyomása alá kerül, aminek az a következménye, hogy a  $P$  alakító erő folyamatosan nagymértékben megnövekedik (51.6. ábra). Ha a préstárcsa az I. keresztmetszetet  $s$  távolsággal túlhaladja, akkor a holtcsőben levő anyag  $s$  szélességben közvetlen nyomás alá kerül, ami a sajtolási nyomás növekedését eredményezi. Az így fellépő  $P_3$  nyomás hozzáadódik a sajtolási nyomáshoz. A sajtolási nyomás az I. és II. keresztmetszet között:

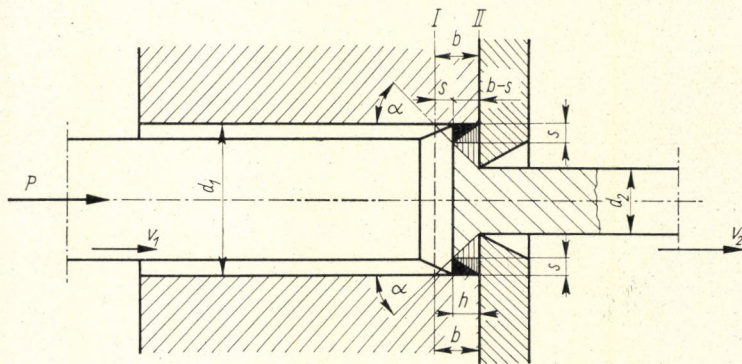
$$P = P_1 + P_3 \quad [\text{kg}], \quad (51.15)$$

ahol

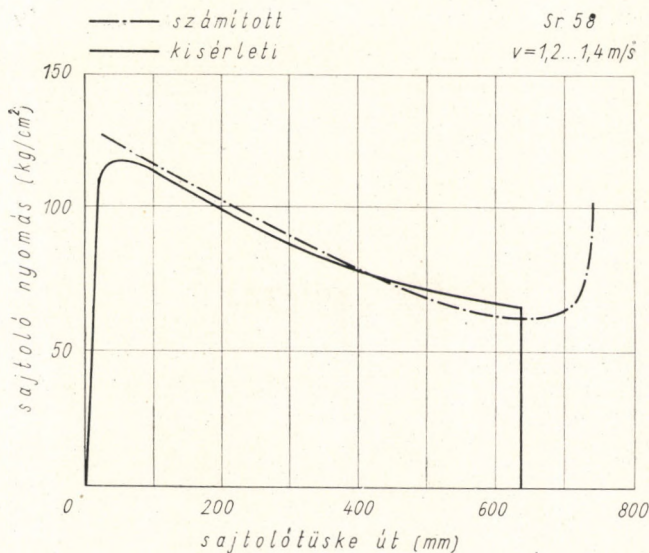
$$P_3 = f_s k_3 \quad [\text{kg}]. \quad (51.16)$$

Ebben az egyenletben

$$f_s = \frac{[d_1^2 - (d_2 + 2h)^2] \pi}{4} = \frac{[d_1^2 - (d_1 - 2s)^2] \pi}{4} \quad [\text{cm}^2], \quad (51.16a)$$



51.6. ábra. A sajtolótárcsa nyomófelülete túlhalad az I. keresztmetszeten, és  $b$  távolságnál kisebb távolságra kerül a présszerszám II. ki-lépő keresztmetszetéhez



51.7. ábra. A présvíz nyomásának változása egy 1500 t direkt működésű présen a sajtoltötüske útjának függvényében, 50 mm átmérőjű Sr 50-es sárgaréz rúd sajtolásánál. A présdugattyú átmérője 800 mm, a felvevő átmérője 170 mm. Kísérleti és számított értékek összehasonlítása GELEJI szerint

és

$$k_3 = \frac{k_f}{1 - \mu \frac{s}{h}} \quad [\text{kg/cm}^2], \quad (51.17)$$

itt

$$h = b - s = \left( \frac{d_1 - d_2}{2} \right) - s \quad [\text{cm}]. \quad (51.18)$$

Az 51.7. ábrán a G. SACHS kísérletei által meghatározott kísérleti görbe és az itt kifejtett számítási eljárással számított présnyomás—présút diagram összehasonlítása látható.

## 52. A CSÓSAJTOLÁSNÁL FELLÉPŐ ERŐK MEGHATÁROZÁSA

A csósajtolás folyamán fellépő sajtolóerőt elvileg ugyanúgy kell kiszámítani, mint a rúdsajtoláshoz szükséges erőt (52.1. ábra) [52.1]. A sajtolt anyagban a sajtolószerszám mögött képződő húzóképzésben a közepes alakítási ellenállást a csőhúzásnál alkalmazott (49.12) és a rúdnak ürege való

keresztülnyomásánál használt (40.56) képlet figyelembevételével kell meghatározni:

$$k_k = \frac{k_f}{1 - \frac{F + \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2}{2f_1}}, \quad (52.1)$$

amikor is a (49.12) képletben  $(1 - 0,29\alpha) = 1$ -nek, és a (40.56) képletben  $\left(1 + 0,385 \frac{f_2}{f_1} \alpha\right) = 1$ -nek veendő.

Az (52.1) egyenletben:

$k_f$  az anyag alakítási szilárdsága,

$D$  a felvevő belső átmérője,

$d$  a sajtolt cső külső átmérője,

$d_0$  a cső belső átmérője, illetve a lyukasztótüske külső átmérője,

$f_1 = (D^2 - d_0^2) \frac{\pi}{4}$  a lyukasztott tuskó keresztmetszete,

$f_2 = (d^2 - d_0^2) \frac{\pi}{4}$  a sajtolt cső falának keresztmetszete,

$F = f_1 - f_2$  a keresztmetszet-csökkenés vagy fogyás,

$Q_1 = \frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{(D^2 - d^2) \pi}{4 \sin \alpha}$  az anyagban keletkező húzókúp dolgozó felülete,

$Q_2 = d_0 \cdot \pi \cdot b$  a lyukasztótüske felülete a húzókúpon belül,

$\alpha$  a holtcsarok szöge (kb.  $45^\circ$ ),

$\mu_1 = \mu_i (=) 0,6$  a belső súrlódási tényező,

$\mu_2$  a súrlódási tényező a sajtolt anyag és a lyukasztótüske érintkező felülete mentén,  $0,4 \sim 0,6$ -nak vehető.

Ezeknek az értékeknek a behelyettesítése után a húzókúpban fellépő közepes alakítási ellenállás:

$$k_k = \frac{k_f}{1 - \left(0,93 \frac{F}{f_1} + \mu_2 \frac{d_0 \pi b}{2f_1}\right)}. \quad (52.2)$$

A fajlagos tengelyirányú feszültség az I. keresztmetszetben:

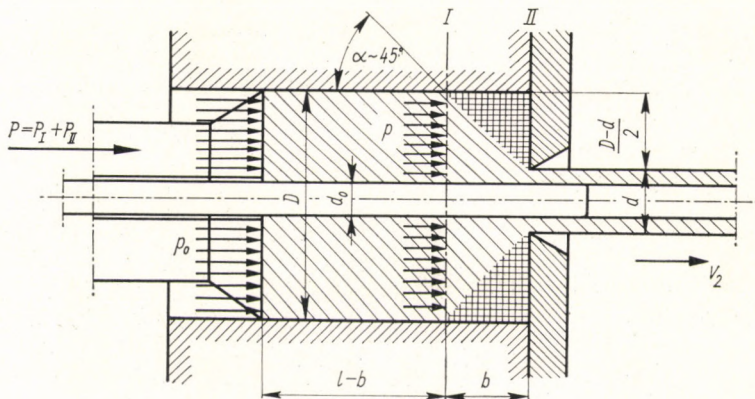
$$\sigma_3 \equiv p_a = 2k_k - k_f, \quad (52.3)$$

az I. keresztmetszetre ható nyomás:

$$P_1 = p_a f_1. \quad (52.4)$$

A belső súrlódások és anyagelmozdulások létrehozásához szükséges erő:

$$P_2 = \psi p_a V, \quad (52.5)$$



52.1. ábra. A rúdsajtolás elvi ábrája

ahol

$$V = (l - b)f_1, \quad (52.6)$$

és

$$\psi = C \sqrt[4]{\frac{v_1}{l - b}}. \quad (52.7)$$

Fémeknél  $C$  nagy megközelítéssel általában 0,025-nek vehető. Az összes sajtolóerő:

$$P = P_1 + P_2 = p_a f_1 + \psi p_a V. \quad (52.8)$$

### 53. A RÚDSAJTOLÁS JELENSÉGEINEK VIZSGÁLATA

Rúdsajtolásakor a felvevőben lefolyó kinematikai jelenségek meghatározására KÁLDOR MIHÁLY [53.1] dolgozott ki kísérleti matematikai kombinált eljárást. A kísérletek során az volt a fő célkitűzése, hogy az áramlási képet meghatározza.

Egy ilyen kísérleti meghatározásnak kétségtől az a hátránya, hogy nem általános, azaz minden levont következtetés csak olyan méretek és körülmények esetén érvényes, amilyenek között az áramlási képet meghatároztuk.

Az áramlási kép akkor tekinthető ismertnek, ha meg tudjuk határozni a felvevőben (recipientsben) elhelyezett fém axiális metszetében minden pont pillanatnyi sebességének nagyságát és irányát, illetve — ami ezzel lényegében egyenértékű —, minden pont ugyanannyi idő alatti kicsiny elmozdulásának nagyságát és irányát.

A vizsgálati módszerek közül KÁLDOR MIHÁLY a „háló módszer”-t, azaz az axiális síkba karcolt hálóval való mérést választotta. Ez ugyanis egyrészt nem bontja meg az anyag homogenitását, másrészt megbízható és mérésre a legalkalmasabb.

KÁLDOR a nagymértékű deformációk helyett, mint amilyeneket E. SIEBEL [40.1], W. EISBEIN és G. SACHS [50.3] alkalmazott, olyan kismértékű választott, amely még elég közel áll a pillanatnyi sebességek irányát megmutató, végtelenül kicsiny deformációhoz, elmozdulásokhoz, de már mérhető. A pillanatnyi sebességek eloszlása akkor mutatja hűen az áramlási képet, ha a kis deformációt a stacioner állapotnak megfelelően hozzák létre; ezért KÁLDOR a kísérletekhez a recipiens belső átmérőjével azonos átmérőjű hengeres ólomtuskókat öntött. Az így kapott tuskókat az axiális síkban kettévágta, és a vágásfelületeket megcsiszolta.

Ezután a próbadarabokat annyira elősajtolta, hogy a szerszám üregén egy kis mennyiségű fém folyjon ki, azaz a próbatesten egy kis „csap” jöjjön létre. A csap kialakulása után alkalmazott alakítás nyilván a stacioner állapotnak megfelelő torzulást mutatja.

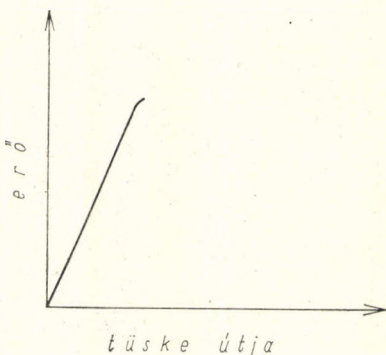
Ezen előalakítás után a próbatestet a recipiensből kiemelte, és az egyik félhenger axiális metszetébe derékszögű hálót karcolt.

A háló bekarcolása után a két félhengert összeillesztette, a recipiensbe helyezte, majd addig sajtolta, míg a szakítógéppel felrajzolt diagram szerint a folyás éppen megindult, mert ez felel meg leginkább a stacioner állapotnak (53.1. ábra).

A háló torzulását legegyszerűbben fényképek segítségével lehetett követni. A hálóról a sajtolás előtt, majd a sajtolás után is fénykép készült, mégpedig oly módon, hogy a próbadarab és a fényképezőgép mindkét esetben ugyanúgy volt beállítva. Így a negatívokon a próbadarabra karcolt háló sajtolás előtti és utáni képe azonos kicsinyítéssel jelent meg. A két negatív viszonylag könnyen egymásra illeszthető, szélein összeragasztható, így lehetőség nyílt olyan nagyítás készítésére, amelyen az eredeti és a torzult háló egyaránt jól látható, és amelyen minden pont elmozdulásának iránya és nagysága viszonylag jól követhető (53.2. ábra).

Az 53.2. ábrán a háló torzulatlan és torzult képe közelítően jól mutatja az anyag mozgását. Tisztán látszik a „holt sarok” kialakulása, a fémtuskónak az a része, amely csak a sajtolás végén, a stacionernál nagyobb erő hatására folyik ki a recipiensből.

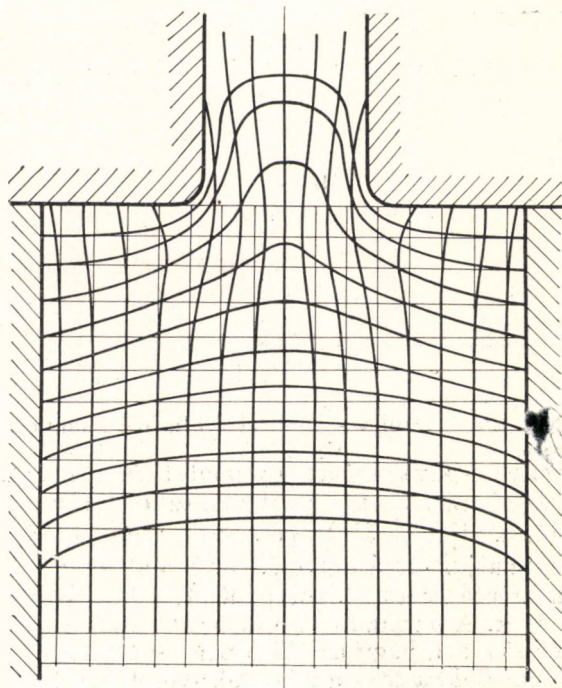
A fényképek azonban kvantitatív meghatározásokra is lehetőséget nyújtanak.



53.1. ábra. Lineáris összefüggés a sajtolóerő és a tüske útja között



53.2. ábra. A próbatest hossz-  
metszetébe karcolt háló eltor-  
zulása az alakváltozás megin-  
dulásakor



a) Az áramvonalak meghatározása. A fényképek alapján lehetővé vált az adott esetben az áramvonalak meghatározása.

A két háló fényképe, illetve rajza alapján a rácsponatok radiális és axiális elmozdulása jól követhető és mérhető.

A kapott értékek diagramokban vannak összefoglalva; a koordináta-rendszer kezdőpontját a tengelynek a szerszám felfekvési felülete síkjával való metszéspontja adja (53.3. ábra).

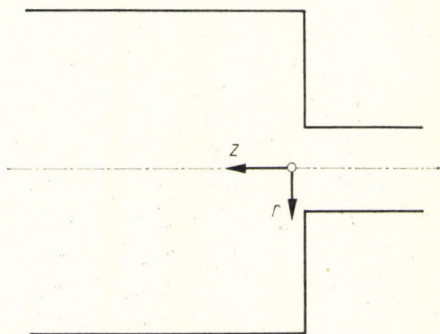
Mint az szokásos, KÁLDOR is dimenziómentes értékek megadására törekedett. Ezért a rács minden pontjában lemért  $u$  axiális irányú és  $v$  radiális irányú elmozdulási komponens hosszát az  $r = 0$ ,  $z = 0$  pontban mért  $u_1$  elmozdulási komponens hosszával való elosztás után vitte fel a diagramra.

Mind az  $\frac{u}{u_1}(r, z)$ , mind a  $\frac{v}{u_1}(r, z)$  függvény egy-egy felülettel ábrázolható az  $(r, z)$  síkon. Ezeknek a felületeknek  $r = \text{konst}$  és  $z = \text{konst}$  metszeteit megrajzolva, minden mért érték két görbén szerepel. Ez a módszer lehetővé teszi a gyakorlati szempontból megfelelő kiegyenlítést és ellenőrzést.

Az 53.4 ábra e diagramok egyikét mutatja.

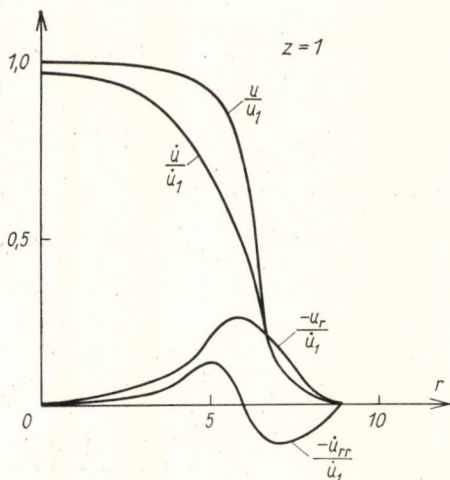
Az elmozdulás-komponensek meghatározásával lehetőség nyílt az áramvonalak közelítő megszerkesztésére (53.5. ábra). Tekintettel arra, hogy az áramvonal egy tömegpont útja, viszont egy tetszés szerinti helyen kiválasztott pont elmozdulását a diagramok segítségével meg lehet szerkeszteni, a szerkesztés módja adott. KÁLDOR a szerszámtól elég nagy távol-

53.3. ábra. A  $(z,r)$  koordinátarendszer kezdőpontja a szerszámnyílás síkjában



és ahol a  $\frac{v}{u_1}$  radiális elmozdulási komponens már igen kicsiny vagy zérus — kiválasztott egy pontot, és meghatározta annak a helynek koordinátáit, ahová ez a pont elmozdult. Így már ismertté vált az áramvonal két pontja. Az újabb ponthoz tartozó elmozdulási értékek segítségével megkaphatjuk az áramvonal harmadik pontját, és így tovább a teljes vonal meghatározott számú pontját, tehát az áramvonal húrjai megszerkeszthetők. A harmadik és minden további pont meghatározásánál már nehézséget okoz, hogy az előző pontok általában nem rácspontok, és így a pont elmozdulása csak a négy környezetében levő pont elmozdulásából, interpoláció útján határozható meg. Tekintettel arra, hogy már az elmozdulás értékeit is a leolvasás, mérés hibája terheli, KÁLDOR megalázkodott lineáris interpolációval. Az 53.5. ábra mutatja az ilyen módon megszerkesztett áramvonalakat.

b) A sebességek meghatározása. A sebességek meghatározására KÁLDOR szerint az alábbi megfontolás ad módot:



53.4. ábra

Az adott koordináta-rendszerben az axiális sebességi komponens az

$$\dot{u} = - \frac{dz}{dt}$$

differenciálhányadossal képezhető, amiből a sajtolás ideje, mely az egész tartományra nézve konstans:

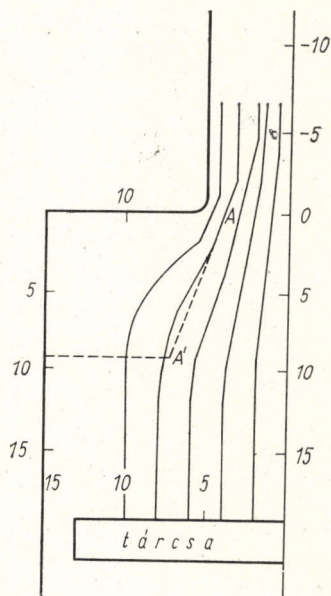
$$t = \int_0^t dt = - \int_z^{\zeta} \frac{dz}{\dot{u}} = \text{konst},$$

ahol  $\zeta$  a tömegpont elmozdulás utáni  $z$  koordinátája:

$$\zeta = \zeta(r, z) = z - u(r, z) = z - \frac{u(r, z)}{u_1} u_1.$$

Az integrál  $z$  szerinti differenciálásával

$$- \frac{1}{\dot{u}(\zeta)} \zeta' + \frac{1}{\dot{u}(z)} = 0$$



53.5. ábra. Az elmozdulás-komponensek segítségével meghatározott áramvonalak közelítő megszerkesztése

egyenlet adódik, melyből két egymásnak megfelelő pont axiális sebesség-hányadosa között az

$$\frac{\dot{u}(z)}{\dot{u}_1} = \frac{1}{\zeta' \dot{u}_1} = \frac{1}{1 - u_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{u}{u_1}} \frac{\dot{u}(\zeta)}{\dot{u}_1}$$

összefüggés vezethető le.

Az összefüggés módot ad egy pont sebességének meghatározására, ha az az elmozdulás során olyan helyre került, ahol a sebesség már ismert. Ilyen pont pedig elég sok van, mert a sajtolás során a szerszám nyílásának közelében fekvő pontok tekintélyes része a szerszámon kívül fekvő részbe került, ahol a sebesség-hányados egységnyinek tekinthető. A szerszámtól távolabb eső pontok sebessége csak az után határozható meg, miután a szerszámhoz közelebb eső pontok sebessége már ismeretes.

A korrekciót természetesen egy áramvonal mentén haladva kell végrehajtani, tehát a kérdéses  $(r, z)$  koordinátájú rácspontban a sebesség meghatározásához először  $\zeta$  értékét kell megkeresni, majd az áramvonalak alapján azt a  $z = \zeta$  koordinátájú pontot, amelynek  $\frac{\dot{u}(\zeta)}{\dot{u}_1}$  sebesség-hányadosából

a fenti összefüggés szerint az  $\frac{\dot{u}(z)}{\dot{u}_1}$  sebesség-hányados már számítható.

A sebességi értékeket először az  $r = 0$  koordinátájú áramvonal mentén kell számítani, majd azokon a  $z$  koordinátájú helyeken, amelyekhez tartozó  $\zeta$  értéknél a sebesség-hányados értéke egységnyi; az így kapott  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  értékek  $r$  változó szerinti diagramjának ismerete lehetővé teszi a sebesség meghatározását abban az esetben, ha a  $\zeta$  helyen a kérdéses  $z$  koordinátájú pont áramvonala nem egész számú  $r$  koordinátájú helyen megy keresztül.

A  $\zeta$  érték grafikusán is könnyen meghatározható, ugyanis a

$$\zeta = z - u_1 \frac{u}{u_1}$$

összefüggésből és az

$$\frac{u_1 \frac{u}{u_1}}{z - \zeta} = 1 = \operatorname{tg} 45^\circ$$

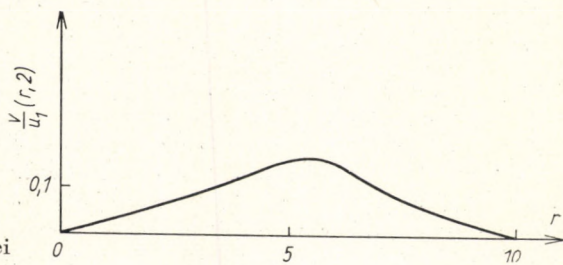
összefüggés alapján az  $\frac{u}{u_1}(r_0, z)$  görbéknek a kérdéses  $z$  koordinátájú helyhez tartozó pontjából kiinduló, egységnyi irántangensű egyenes az abszcisszatengelyt a megfelelő  $\zeta$  koordinátánál metszi. (Ez ilyen egyszerűen csak megfelelő léptékű diagramoknál hajtható végre.)

Ilyen számítás alapján jöttek létre az  $\frac{u}{u_1}$  értékek görbéiből az  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  görbék (53.4. ábra). Ezek az  $\frac{u}{u_1}$  görbék alatt futnak, majd nagy  $r$ , illetve nagy  $z$  koordinátájú helyeken az  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  és az  $\frac{u}{u_1}$  görbék egymáshoz simulnak, annak megfelelően, hogy az átlagsebesség, amely az  $\frac{u}{u_1}$ -gyel egyenlő, nagyobb vagy közelítőleg egyenlő a valóságos  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  sebességgel. Ha a pont elmozdulása során kisebb sebességű helyről nagyobb sebességű helyre kerül, akkor az átlagsebesség értéke nagyobb a kezdeti sebesség értékénél. Ebből következik, hogy  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  görbéje nem mehet az  $\frac{u}{u_1}$  görbéje fölé, mert az anyag áramlás közben mindig úgy halad, hogy sebességének axiális komponense nő. Az  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}(r_0, z)$  görbékből grafikus differenciálással képezhető az  $\frac{1}{\dot{u}_1} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}$  értékek görbéje, ezeket hasznos az esetleges kiegyenlítés érdekében konstans  $z$  értékeknél  $r$  függvényében újra felrakni. Majd az  $r \frac{1}{\dot{u}_1} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}$  görbék grafikus integrálásával, az integrálgörbe  $r$ -rel történő osztásával meghatározható  $\frac{\dot{v}}{\dot{u}_1}(r, z_0)$  a

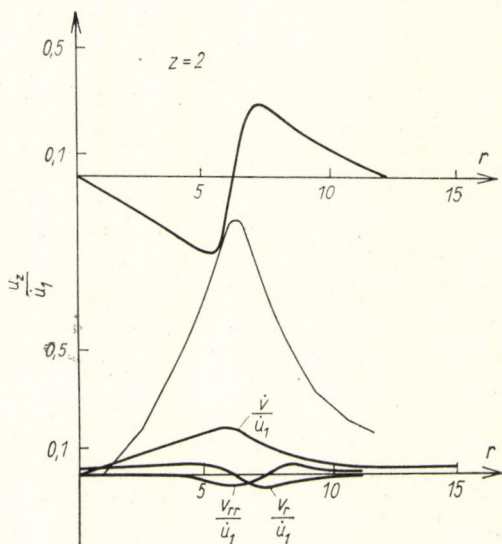
$$\frac{\dot{v}}{\dot{u}_1} = \frac{1}{r} \int_0^r r \frac{1}{\dot{u}_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} dr$$

összefüggés szerint.

Az ily módon számítás útján meghatározott  $\frac{\dot{v}}{\dot{u}_1}$  értékek igen jól egyeztek a mérés útján kapott  $\frac{v}{u_1}$  értékekkel (53.6. és 53.7. ábra).



53.6. ábra.  $\frac{v}{u_1}$  mért értékei



53.7. ábra.  $\frac{\dot{v}}{\dot{u}_1}$  számított értékei

A számított  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  értékeket elég megbízhatóknak lehet tekinteni, mert az  $r$  függvényében felrajzolt  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}(r, z_0)$  függvények alatti területnek az ordináta-tengelyre vonatkoztatott statikus nyomatéka, amely a számított térfogat-tal arányos, különböző  $z$  értékeknél elég jó közelítéssel konstansnak vehető. Ez arra enged következtetni, hogy hézag a tuskó belsejében csak jelentéktelen mértékben volt, s valószínűleg a szerszám közvetlen közelében kissé ferde csiszolás vagy a recipiens faltágulása következtében jött létre.

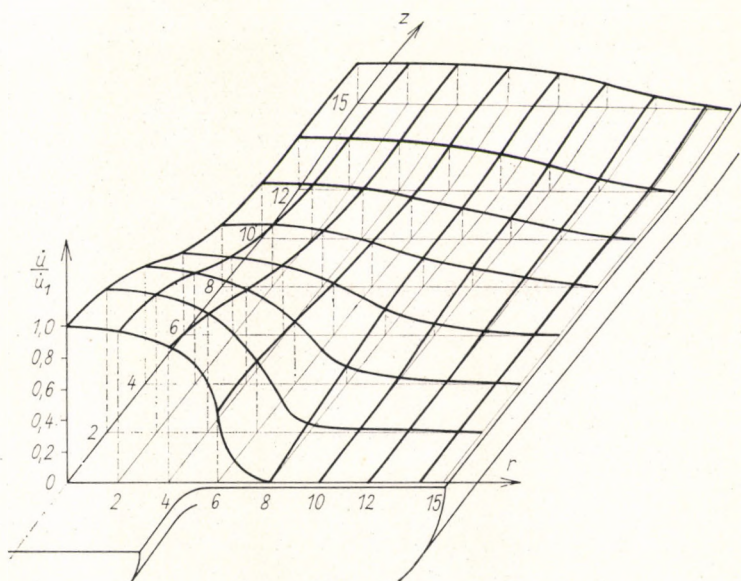
Az  $\frac{u}{u_1}$  értékének az  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  értéktől való jelentős eltérését inkább az magyarázhatja, hogy a deformáció túlságosan nagyra sikerült ahhoz, hogy az elmozdulás közvetlenül sebességnek legyen tekinthető.

Ennek megfelelően a további számítások során helyesebb a számítással meghatározott  $\frac{\dot{v}}{\dot{u}_1}$  értékeit alapul venni.

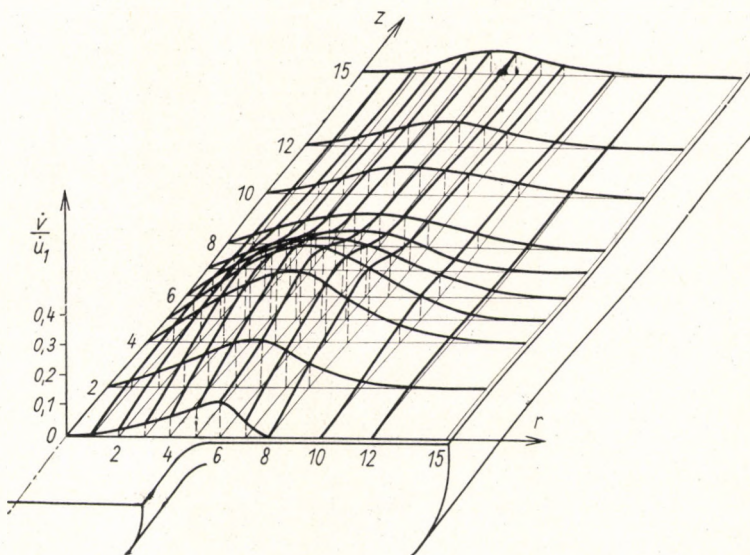
Az 53.8. és 53.9. ábra  $\frac{\dot{u}}{\dot{u}_1}$  és  $\frac{\dot{v}}{\dot{u}_1}$  értékeit ábrázoló felületeket mutatja be.

#### 54. SAJTOLÁS SÜLLYESZTÉKBEN

A süllyesztékben való sajtolás és kovácsolás erőszükségletének meghatározása, illetve kiszámítása teljesen tisztázatlan kérdés. Néhány igen korlátozott értékű empirikus formulán és gyakorlati adaton kívül az irodalom jóformán semmit sem nyújt ennek a kérdésnek a megoldására vonatkozólag. Sőt kísérletezés is igen kevés folyt ezen a téren, és az a néhány kísérlet-



53.8. ábra. Az áramlási sebességek axiálkomponenseinek eloszlása a próbatest hosszmetzetében



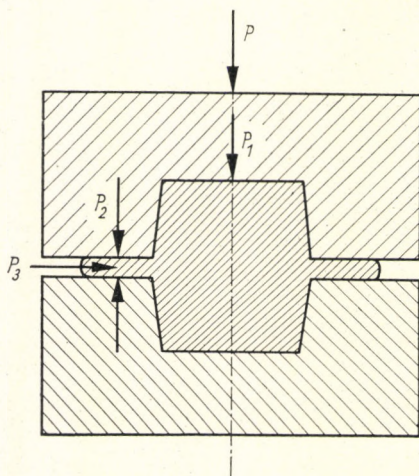
53.9. ábra. Az áramlási sebességek radiálkomponenseinek eloszlása a próbatest hosszmetzetében

sorozat, melyet végeztek, inkább a süllyesztékben történő anyagmozgás felderítésére irányult, és az erőszükséglet meghatározását semmivel sem vitte előre. Ezeknek a kísérleteknek az a legfőbb hibájuk, hogy a sorja kialakulását és az ezzel kapcsolatosan keletkező erők visszahatását (a sorjareakciót) a sajtolási folyamatra nem kapcsolták ki, és így minden kísérleti eredmény zavaros képet mutat.

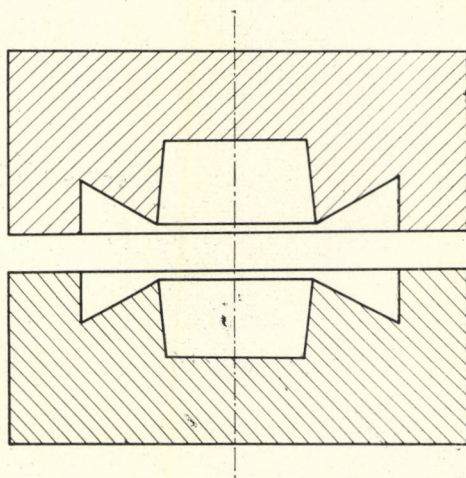
Süllyesztékben való sajtolásnál a  $P$  sajtolóerő több erőből tevődik össze (54.1. ábra): a  $P_1$  erőből, amely a valódi alakítást végzi, és amely a süllyesztékből a sorjanyíláson keresztül kinyomja a felesleges anyagot, a sorját, továbbá a sorjára ható  $P_2$  összenyomó erőből és a  $P_3$  erőből, amely a sorja szabad terjedését, növekedését akadályozza. Márpedig ahhoz, hogy a  $P_1$  főerőt tisztán, minden zavaró körülménytől mentesen, önmagában meg tudjuk határozni, az kell, hogy olyan süllyesztékben sajtoljunk, amelyben nem mutatkozik sorjavisszahatás. Az eddigi kísérletezők erre nem voltak figyelemmel, és ezért nem is jutottak elméletileg megfogható kísérleti eredményhez. GELEJI sajt kísérleteinél tehát mindenekelőtt a sorjareakciót kapcsolta ki [54.3].

Ahhoz, hogy a  $P_1$  erő magában legyen vizsgálható, olyan süllyesztéket kellett szerkeszteni, amelyben sorjavisszahatás nem keletkezhetik. Ilyen süllyeszték vázlata az 54.2. ábrán látható. Ezen a sajtolószerszámon a sorjahorony úgy van kiképezve, hogy sem  $P_2$ , sem  $P_3$  erő nem keletkezhetik. Ha ilyen üregbe helyezünk el egy próbadarabot, és a sajtolást végrehatjuk, akkor a folyamat az 54.3. ábra szerint folyik le. Az 54.3/a ábra mutatja a sajtolási folyamat kezdetét, az 54.3/b ábra a sorjaképződés kezdetét, az 54.3/c ábrán pedig látjuk a sorja kiléptét a sorjanyílásból, az 54.3/d ábrán a sajtolás befejeztét.

A jelenségsorozat megfigyelésére és a sajtolás közben keletkező erők meghatározására szerkesztett süllyeszték egy nyomó-szakítógépre volt szerelve.



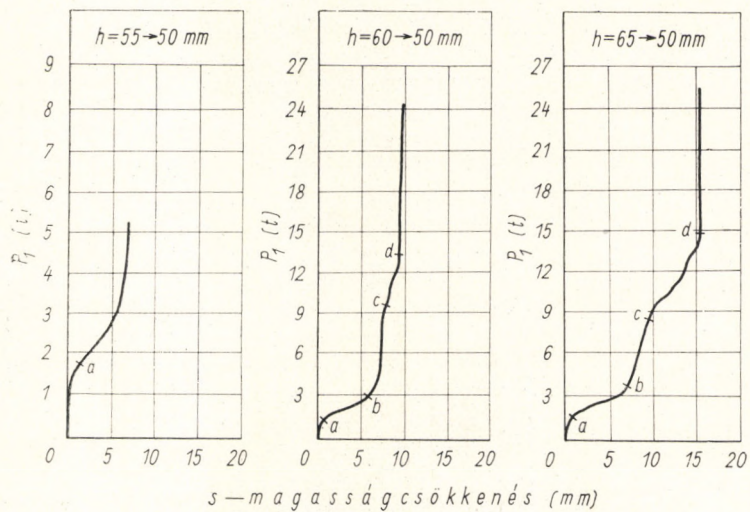
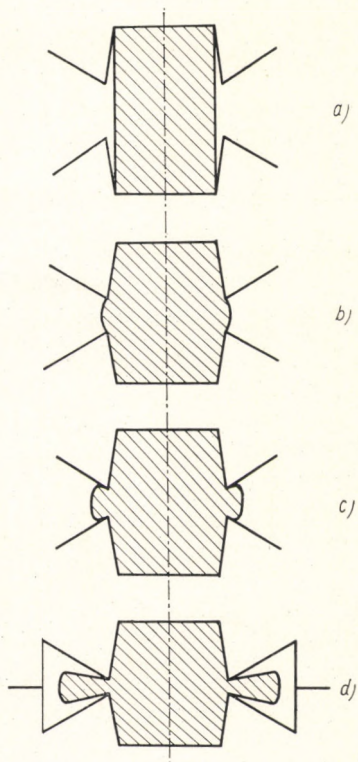
54.1. ábra. A süllyesztékes sajtolásnál fellépő erők



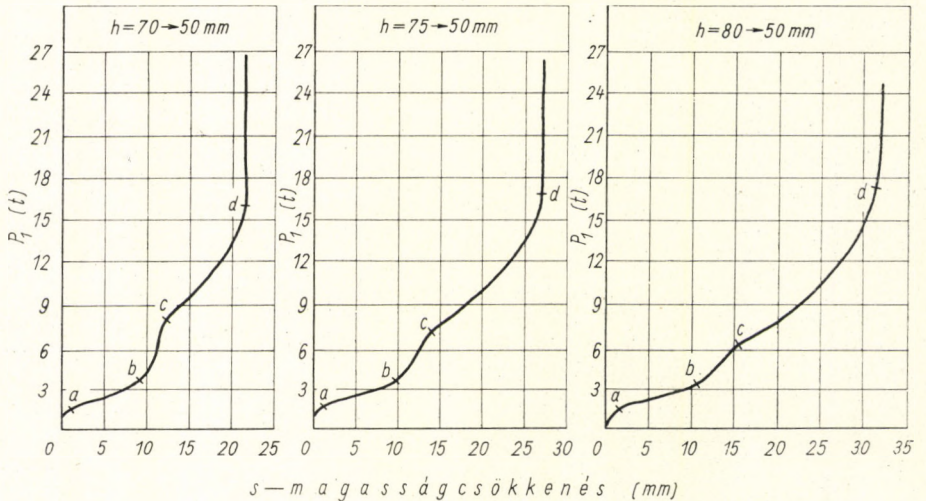
54.2. ábra. Süllyeszték sorjareakció nélkül



54.3. ábra. Sajtolás süllyesztékben sorjareakció nélkül. A sorja kialakulása



54.4. a) b) c) ábra.



54.4. ábra. A sajtolóerő változása a sajtolás folyamán sorjareakció nélkül, különböző vastagságú sorják esetében

A kísérletek első sorozatában különböző présdarabokat nyomtunk össze. A kísérletekhez 40 mm átmérőjű különböző magasságú (50–85 mm) ólomtesteket használtunk. Sajtoláskor mértük a sajtolóerő változását a sajtolószerszám útjának függvényében. Az első kísérletnél (54.3/a–b ábra), amikor a préstest 55 mm magas, még nem lép ki sorja a sorjarésen keresztül, csupán kitöltődik a sülyeszték ürege. Amikor a próbatest 60 mm magas (54.3/c–d ábrák), a sorja már kilép a sorjarésből. Az erődiagram (54.4/b ábra) itt már felmutatja azokat a pontokat, amelyek az egész sajtolási folyamatot határozott szakaszokra osztják.

Az  $a$  pont adja meg azt az erőt, amelynek jelenlétekor az anyag teljesen kitölti a sülyeszték üregét, a  $b$  pontnál kezdődik meg az anyag kilépése a sorjarésből, és a  $c$  pontnál a sorja már teljesen ki is lépett; a  $d$  pontnál a szerszám összezáródott, további alakváltozás nem lehetséges.

Az 54.4/a–f ábraszorozat azt is mutatja, hogy a  $b$  és  $c$  ponttal meghatározott erők között annál nagyobb a különbség, mennél vékonyabb a sorja-üregből kilépő sorja, illetve a két erő között annál kisebb a különbség, mennél vastagabb a sorja a sorjarésből való kilépés pillanatában. Az is megfigyelhető, hogy a  $b$ – $c$  vonalszakasz annál meredekebb, mennél kisebb a sorjavastagság a kilépés pillanatában, illetve annál kevésbé meredek, mennél vastagabb a sorja a kilépés pillanatában. Mielőtt ugyanis a sorja kilépne a résből, a próbadarab oldalfelülete fokozatosan kidomborodik. A  $c$ – $d$  szakasz annál hosszabb, mennél vastagabb a sorja a kezdő pillanatban.

A kísérletek folyamán megfigyeltük a sajtolt darab belső anyagmozgását is. A próbadarabot hossz tengelye irányában szétfűrészeltük, és a metszfelületbe négyzetes hálót karcoltunk bele, majd a két felet ismét összeil-

lesztve, a próbadarabot visszahelyeztük a süllyesztékbe. Különböző magasságú próbatestekkel végeztük el a kísérleteket. A belső anyagmozgás lefolyása az 54.5.—7. ábrán látható. Ezeknél a kísérleteknél a sorja teljes kifejlődéséig nyomtuk össze a két szerszámot.

A kísérletek folyamán azonban nemcsak az anyagmozgás lefolyását akarta vizsgálni a szerző, hanem azt is, hogy miként változik az erő a sajtolás folyamán a deformációs út függvényében. Meg kellett továbbá állapítani, hogy miképpen lehet számítás útján meghatározni a sajtolóerő nagyságát. Ha végignézzük az 54.4/a—f ábrán bemutatott diagramokat, akkor azokon, mint már fentebb is láttuk, négy fontos pontot (*a, b, c, d*) fedezünk fel. További eszme-futtatásunk szempontjából legfontosabb a *c* pont, melynél a sorja kilép a sorjarésből és a *c—d* vonal, amelynek — mint látni fogjuk — minden pontja kiszámítható.

Most térjünk át a választott egyszerű alakú süllyesztékben való sajtolásnál keletkező erők kiszámítására.

Az egész probléma visszavezethető a rúdsajtolás problémájára. Vessünk egy pillantást az 54.8. ábrára. Itt egymás mellé van rajzolva a rúdsajtolás és a süllyesztékben való sajtolás elvi ábrája. A két eset azonossága kézenfekvő. Mindkettőben az I—I keresztmetszet mentén működő *p* nyomja keresztül az anyagot a *h<sub>2</sub>* magasságú kilépő nyílás mögött keletkező kúpos ürege (húzóürege), amelyet a holsarkok alkotnak a szerszámnyílás, illetve a sorjarés mögött.

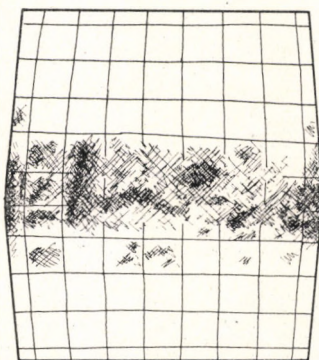
Ez a *p* nyomás az (51.3) egyenlet értelmében:

$$p = 2k_k - k_f, \quad (51.3)$$

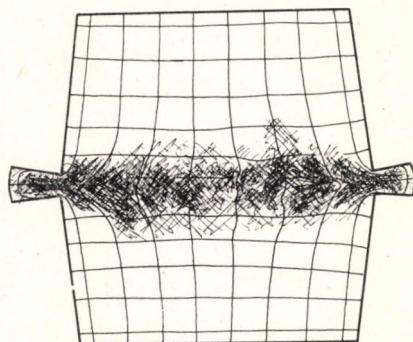
ahol

$$k_k = \sigma_{1k},$$

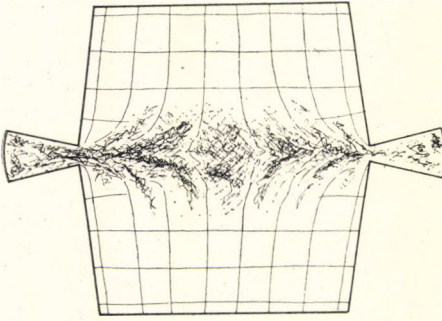
azaz a közepes alakítási ellenállás azonos az első főfeszültséggel.



54.5. ábra. A deformált tartomány kialakulása a sajtoló darab hosszmetézetében (lásd 54.3/b ábrát)



54.6. ábra. A deformált tartomány és a sorja kialakulása a sajtoló darab hosszmetézetében (lásd 54.3/c ábrát)



54.7. ábra. A deformált tartomány és a sorja kialakulása a sajtolt darab keresztmetszetében (lásd 54.3/c ábrát)

A közepes alakítási ellenállás a szerszámnyílás, illetve a sorjarés mögötti kúpos üregben az (51.2) képlet szerint:

$$k_k = \frac{k_f}{1 - 0,93 \frac{F'}{f_1}} \quad (51.2)$$

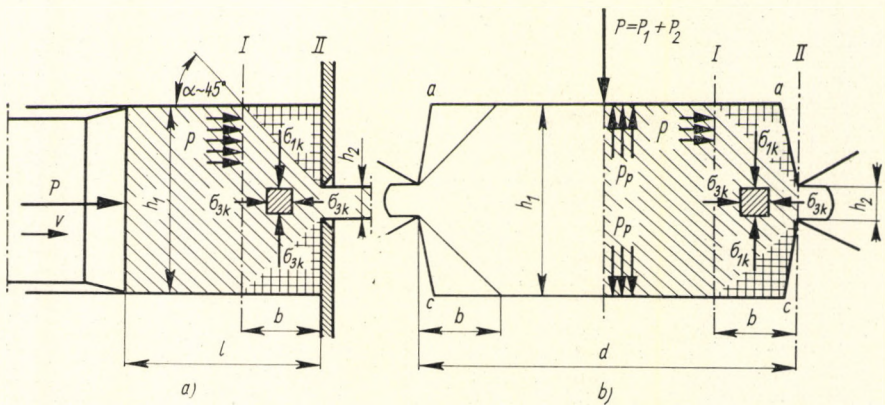
A választott egyszerű üregben való sajtolásnál (54.8/b ábra):

$$f_1 = (d - 2b)h_1\pi \quad (54.1)$$

A sorjarés pedig:

$$f_2 = d\pi h_2 \quad (54.2)$$

Ezekben az egyenletekben  $d$  a csomkakúp – forgásfelületből álló üreg átmérője a sorjanyílásban,  $b$  a holtarok vízszintes hosszúsága,  $h_1$  az üreg fenéklapjainak egymástól való távolsága,  $h_2$  a sorjarés mindenkori vastagsága.  $h_1$  és  $h_2$  a sajtolás folyamán állandóan változik, kisebb lesz.



54.8. ábra. A rúdsajtolás és a süllyesztékes sajtolás összehasonlítása

Az (51.2) egyenlet nevezőjében szereplő  $F$  fogyás a süllyesztékben való sajtolásnál:

$$F = f_1 - f_2 = (d - 2b)h_1\pi - d\pi h_2. \quad (54.3)$$

A sorját a sorjarés mögötti kúpos ürege (húzóürege) és a sorjarésen keresztül, mint mondtuk, az I–I hengerpalást mentén ( $f_1$  mentén) működő  $p$  feszültség, illetőleg

$$P_0 = h_1(d - 2b)\pi p \quad (54.4)$$

erő nyomja ki. Ezt a  $P_0$  erőt azonban a szerszám  $a-a$  és  $c-c$  lapjára ható

$$P_1 = \frac{d^2 \pi}{4} p_p \quad (54.5)$$

erő hozza létre. Itt  $p_p$  egy, a  $P$  függőleges sajtolóerő irányában az  $a-a$  és a  $c-c$  lapra ható feszültség.

A folyási feltétel értelmében

$$p_p = p + k_f, \quad (54.6)$$

azaz

$$p_p = (2k_k - k_f) + k_f = \frac{2k_f}{1 - 0,93 \frac{F}{f_1}}, \quad (54.7)$$

vagyis  $p_p$  egyenlő a kétszeres közepes alakítási ellenállással, és

$$P_1 = 2k_k \frac{d^2 \pi}{4}. \quad (54.8)$$

Sajtolás folyamán a süllyesztékben levő anyagnak az  $a$  része, amely a holsarkok és a szerszám  $(d - 2b)$  átmérőjű nyomólapjai közé esik, teljes térfogatában mozgásba jön. E mozgás folyamán az anyag belső elmozdulásainak legyőzéséhez a külső  $P_2$  erőre van szükség. Ezt a  $P_2$  erőt ugyanolyan módon lehet kiszámítani, mint a rúdsajtolásnál a belső elmozdulások legyőzéséhez szükséges erőt:

$$P_2 = \psi p_p V, \quad (54.9)$$

ahol

$$\psi = C \sqrt[4]{\frac{v}{h_1}}. \quad (54.10)$$

E képletekben  $V$  a mozgásba jövő anyag térfogata  $\text{cm}^3$ -ben,  $v$  a sajtolószerszám zárásának sebessége  $\text{cm/s}$ -ban,  $h_1$  az üreg fenéklapjainak minden-

kori egymástól való távolsága cm-ben,  $C = 0,025$  egy állandó,  $\psi$  a belső munka tényezője.

A sorja kinyomásához szükséges sajtolóerő:

$$P = P_1 + P_2, \quad (54.11)$$

azaz

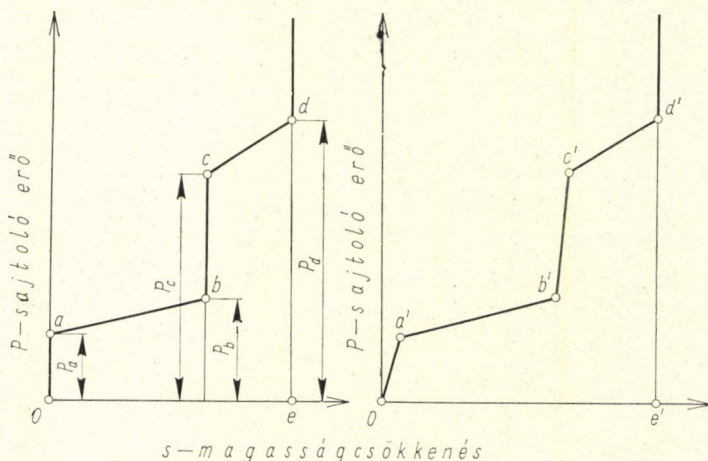
$$P = 2k_k \left[ \frac{d^2 \pi}{4} + \psi V \right]. \quad (54.12)$$

$P$  tehát az a sajtolóerő, amely ahhoz szükséges, hogy a teljesen kitöltött szerszámüregből a sorját kinyomja, ha sorjavisszahatás nem mutatkozik. A  $P$  erő a szerszám záródása folyamán állandóan növekszik, mindaddig, míg a szerszám teljesen be nem zárult. A szerszám záródása után — amennyiben a prés tovább dolgozik — a nyomóerő, amely már nem végez alakítást a próbadarabon, hirtelen felszökik.

Az eddig elmondottak alapján egyszerű süllyesztékben való sajtoláskor a sajtolóerő változása az alakváltozási út függvényében meghatározható, és egyúttal a sajtolási munka kiszámítható.

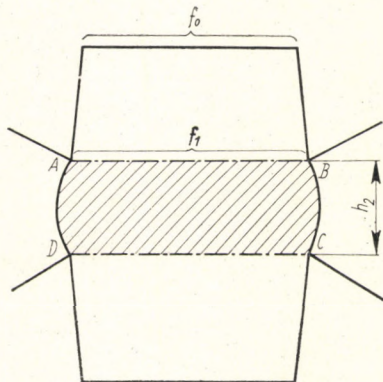
Az 54.9/a ábrán látható sajtolási erő—alakítási út diagram  $a$  pontja az alakváltozás kezdő pillanatában keletkező nyomóerőt jelenti, amely azonos a sajtolási darab alakítási (nyomó) szilárdságának ( $k_f$ ) és keresztmetszetének ( $f_0$ ) szorzatával ( $P_a$ ).

Az alakváltozás előrehaladásával a sajtolási darab keresztmetszete növekedik, a csonka kúp alakú süllyesztékfelek kitöltődnek. A sajtolóerő ekkor is közelítőleg egyenlő a sajtolási darab  $f_1$  keresztmetszetének és a nyomószilárdságnak a szorzatával ( $P_b$ ). A tisztán a szerszám kitöltéséhez szükséges sajtolóerő akkor éri el a maximumot, amikor a két csonka kúp



54.9. ábra. A sajtolóerő változása sorjareakció nélküli süllyesztékes sajtolásnál

54.10. ábra



alakú szerszámfél teljesen kitöltődött. Ekkor a  $P_b$  erő a diagram  $b$  pontját határozza meg (54.9. és 54.10. ábra).

Ha a szerszámot tovább zárjuk, megindul a sorja kialakulása, a sajtoló-erő hirtelen felszökik, és mindaddig meredeken növekszik, míg a sorja ki nem lép a sorjarésből (54.9/a ábra). Ekkor éri el a sajtolóerő a  $c$  pontnak megfelelő  $P_c$  sajtolóerőt az (54.12) egyenlet segítségével lehet kiszámítani.

A további összenyomás folyamán a szerszám mindjobban záródik, a sorja oldalt mindjobban kifolyik, és ugyanekkor mindinkább vékonyodik. A sorja vékonyodásával a szükséges sajtolóerő [az (54.12) egyenlet értelmében is] mindinkább növekedik. A  $d$  pontnak megfelelő erő a legkisebb sorjavastagság mellett keletkezik, amikor a szerszám pereme záródik (54.9. ábra).

Ettől kezdve már nem mutatkozik alakváltozás, viszont ha a prést tovább működtetjük, a  $P$  nyomóerő — mint már mondtuk — hirtelen tovább növekedik.

Az 54.9/a ábra ( $OabcdeO$ ) területe arányos az alakító munkával.

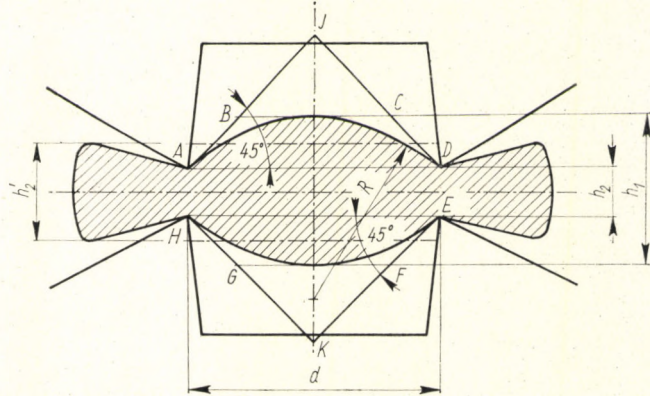
Ha a próbadarab (présdarab) kezdetben nem tölti ki teljesen a szerszámot, akkor az erődiagram egy kissé eltorzul, mint ahogy azt az 54.9/b ábra mutatja.

Az 54.12. ábrán egy sajtolási erődiagram kísérleti és számított görbéjének egybevetését láthatjuk.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$  a kísérleti görbének,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  és  $d'$  a számított görbének kiemelt pontjai.

Az 54.13. ábrán különböző kiinduló magasságú, tehát különböző kezdő sorjavastagságú darabok sajtolási diagramjainak  $c$  és  $c'$ , azaz kísérleti és számított pontjaival meghatározott görbék vannak egybevetve. A kísérleti és számított görbék  $1,6 \text{ kg/mm}^2$  szilárdságú ólompróbatesteken az 54.2. ábrán látható süllyesztékkel végzett kísérletekre vonatkoznak.

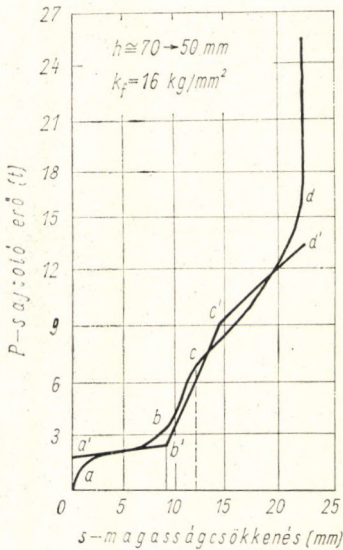
Mielőtt továbbmennénk, még a  $P$  sajtolási erő kiszámítására szolgáló (54.12) képletben előforduló  $V$  térfogat kiszámításával kapcsolatban kell néhány megjegyzést tennünk.

Ha végignézzük a sajtolt próbadarabok metszeteit, akkor azt látjuk, hogy amennyiben a süllyeszték mélysége egy bizonyos mértéket meghalad, a süllyeszték üregét kitöltő anyagnak nem az egész tömege vesz részt a sorja



kialakulását előidéző belső anyagmozgásban, hanem általában csak az a térfogata, amelynek keresztmetszetét az 54.11. ábra  $ABCDEFGH$  nyolcszöge határozza meg.

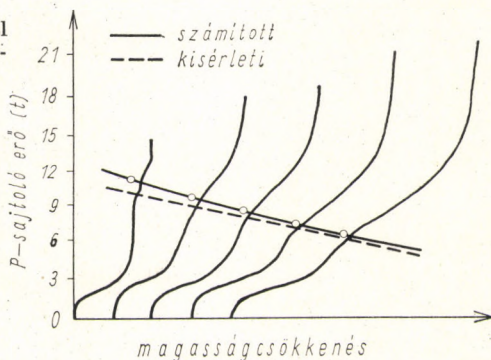
Ehhez a következtetéshez egyébként elméleti megfontolás alapján is el lehet jutni. Az anyag ugyanis csakis a holsarkok  $45^\circ$ -os szögével meghatározott kúpos térfogattól ( $AJD$ ) folyhat ki. De nem az egész kúptérfogat jön mozgásba, hanem legfeljebb csak az az  $R$  sugarú gömbsüveggel meghatározott tartomány, amely az  $A$  és  $D$ , ill.  $E$  és  $H$  pontokban érintőlegesen simul az  $AJD$ , ill. az  $E, K$  és  $H$  pontokkal meghatározott kúpba. A sorja keletkezésének kezdő pillanatában (54.3/b ábra) olyan a helyzet, mintha az  $AB$  és  $CD$  nyomólapok között egy  $h_2$  vastagságú  $ABCD$  testet nyomnánk



54.12. ábra. A sajtolóerő változása sorjareakció nélkül. A kísérlet és számítás összehasonlítása



54.13. ábra. A kísérlettel és a számítással meghatározott sajtolóerő a sorja megindulásának kezdő pillanatában



össze (54.10. ábra). Az anyagmozgatás tehát a két nyomólap közé korlátozódik. Az alakváltozás előrehaladásával azonban az  $AB$  és  $CD$  síkok a holt-sarok kialakulása következtében behorpadnak (54.11. ábra), és érintőlegesen gömbsüveggé alakulnak át.

A mozgásba jövő  $V$  anyagterefogatot tehát az érintőleges gömbsüveg magassága, a holt-sarkok szöge és a süllyeszték átmérője határozza meg.

Eddig a sorjareakciótól mentes egyszerű süllyesztékes sajtolás esetét vizsgáltuk. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen befolyása van a sorjareakciónak a sajtolási erőre és a sajtolási munkára.

Sorjareakció akkor keletkezik, amikor a sorja közvetlen nyomás alá kerül (54.14. ábra). Ebben az esetben megnövekedik a sorjának a sorjarésből való kinyomásához szükséges erő, de ezenkívül még további sajtolóerő-többletre van szükség a sorja összenyomásához.

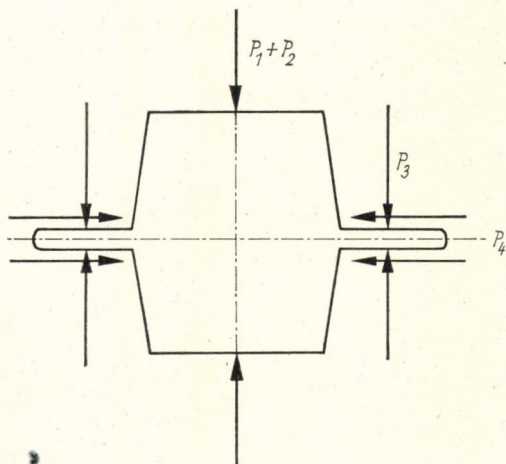
A vizsgálat elvégzéséhez két tökéletesen egyforma méretű süllyeszték készült, az egyik nyitott sorjahoronnyal, amelyben sorjareakció nem keletkezhetik (54.15/a ábra), a másik olyan sorjahoronnyal, amelyben a sorja már kilépésének pillanatától kezdve állandó nyomás alatt van (54.15/b ábra). A kísérletek a rendelkezésre álló 30 tonnás szakítógépen különböző magasságú, 30 mm átmérőjű kör keresztmetszetű ólom próbatestekkel ( $k_f = 1,6 \text{ kg/mm}^2$ ) folytak.

A nagyszámú kísérlet közül itt csak két párhuzamos kísérlet eredményét nézzük meg összehasonlítás céljából. Az 54.16/a–b ábrán két 58 mm magas próbatest sajtolási erődiagramja látható. Az 54.16/a ábra a nyitott sorjaüregben való sajtolásnál keletkező sajtolóerő változását, az 54.16/b diagram pedig a nyomott sorja mellett keletkező sajtolóerő változását mutatja be. Míg az 54.16/b ábrán az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$  pontok határozottan felismerhetők, addig az 54.16/a ábrán a  $d$  pont nem található meg, mert a  $c$  ponttól kezdve a sajtolóerő rohamosan nő. A maximális sajtolóerőt, minthogy az meghaladja a 30 tonnát, ezzel a kísérlettel nem sikerült megállapítani.

Az 54.17. ábrán az 54.16. ábrához hasonló sajtolóerő diagramot látunk. Ez utóbbi egy 55 mm kiinduló magasságú próbadarab erődiagramja.

Az 54.18. ábrán az 54.17. ábra  $a$  és  $b$  diagramja egymásra van rajzolva, a sajtolási erőben és munkában mutatkozó különbség szemléltetésére. A sajtolási út nagyobb hosszát az 54.17/a diagramban a szakítógép nagyobb rugalmas alakváltozása okozza.

54.14. ábra. A süllyesztékben való sajtolásnál fellépő erők



Általában közvetlenül nyomott sorja esetében a sajtolóerő sokszorosa annak a sajtolóerőnek, amely a sorjareakció kikapcsolása esetén elégséges. Nyomott sorja mellett legtöbbször a pontos magassági méret sem érhető el, mert ehhez olyan nagy sajtolóerőre lenne szükség, amilyent a sajtolóberendezés már csak igen nagy rugalmas alakváltozás mellett tud kifejteni.

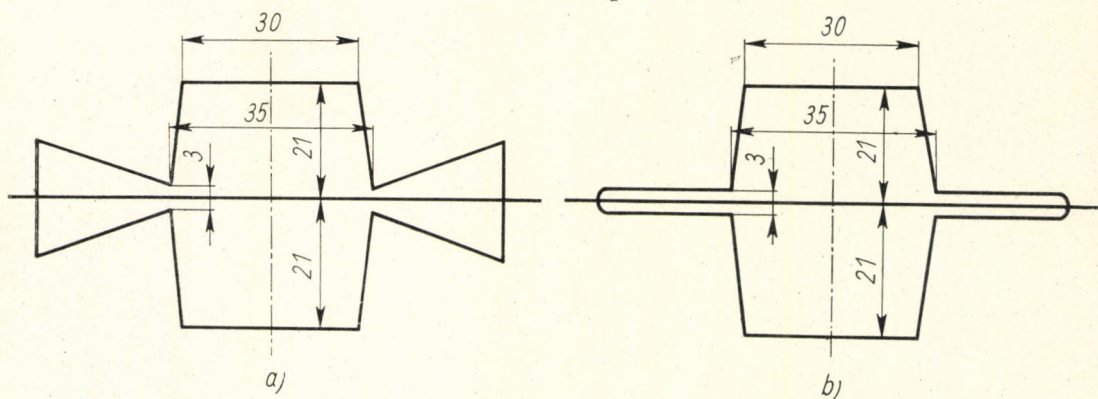
A sorjareakció fellépése esetében a szükséges sajtolóerőt következőképpen lehet kiszámítani:

A sorja összenyomásához szükséges erő (54.19. ábra):

$$P_3 = k_{sk} \frac{D^2 - d^2}{4} \pi, \quad (54.13)$$

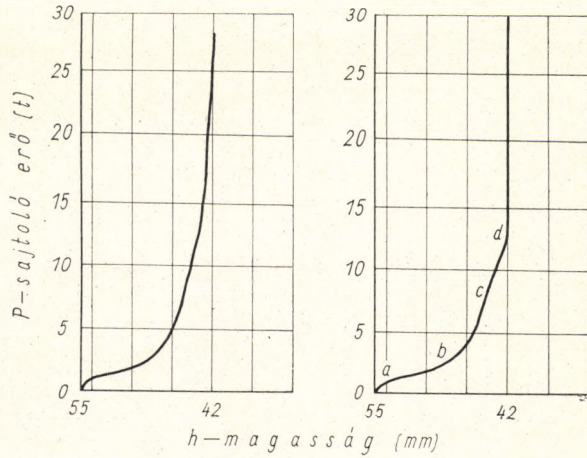
itt  $k_{sk}$  a sorja összenyomásakor keletkező közepes alakítási ellenállás:

$$k_{sk} = \frac{k_f}{1 - \mu \frac{x}{h_2}}, \quad (54.14)$$



54.15. ábra. Sorjareakció nélkül és sorjareakcióval sajtoló szerszámok

54.16. ábra. A sajtolóerő változása sorjareakció esetén



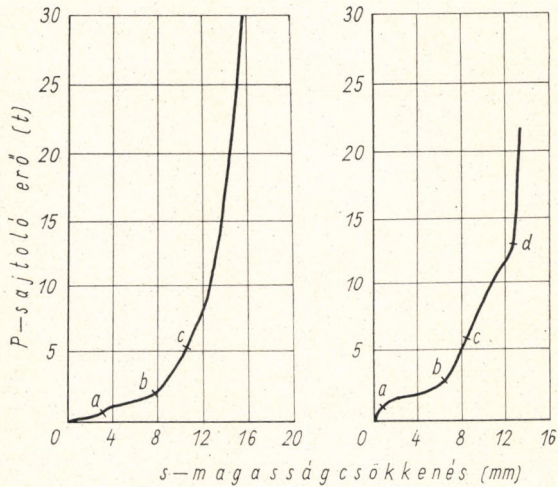
vagy pontosabban:

$$k_{sk} = k_f e^{\frac{2\mu}{2} x} \quad (54.15)$$

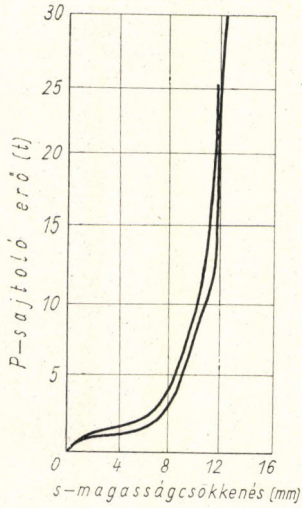
$D$  a kör alakú sorja külső,  $d$  a belső átmérője, azaz  $\frac{D^2 - d^2}{4} \pi$  a sorja felülete,  $\mu$  a súrlódási tényező a sorjahorony fala mentén.

A sorjarésből kinyomott anyag, a sorja kiáramlásának  $2 P_2 \mu$  erő áll ellen, amely a  $d$  átmérőjű  $h_2$  magasságú sorjarésben  $\sigma_r$  feszültséget ébreszt (54.20. ábra). Általában írható, hogy

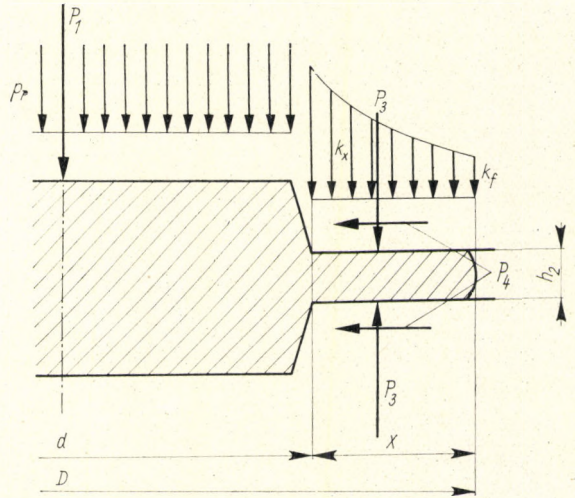
$$\sigma_r h_2 d \pi = 2 P_2 \mu, \quad (54.16)$$



54.17. ábra. A sajtolóerő változása sorjareakció nélkül



54.18. ábra. A sajtolóerő változása sorjareakcióval és sorjareakció nélkül



54.19. ábra. A sajtolóerő kiszámítása sorjareakció esetén

vagy

$$\sigma_r h_2 d\pi = 2 k_{sk} (D^2 - d^2) \frac{\pi}{4} \mu . \quad (54.17)$$

Ebből a sorjarésben keletkező feszültség:

$$\sigma_r = k_{sk} \mu \frac{D^2 - d^2}{2 dh_2} . \quad (54.18)$$

A sorjarés mögött az anyagban képződött húzóüregben ez a  $\sigma_r$  sorjafeszültség

$$\sigma_{rk} = \frac{\sigma_r}{2} \left( 1 + \frac{f_2}{f_1} \right) \quad (54.19)$$

közepes feszültséget ébreszt. Ebben az egyenletben

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= h_1(d - 2b)\pi , \\ f_2 &= h_2 d\pi . \end{aligned} \right\} \quad (54.20)$$



Bonyolultabb a feladat, ha olyan súllyesztékről van szó, amilyent az 54.21. ábrán láttunk. Ha a sorjareakciót itt is kiküszöböljük, akkor a legnagyobb erő a sorja kilépése pillanatában lép fel. Amikor a sorja kilép a sorjarésen, akkor az I. keresztmetszetre  $p$  feszültség hat. Ez a feszültség, mint ezt már az 54.20. ábrával kapcsolatosan láttuk, az (52.3) egyenlet szerint:

$$p = 2k_k - k_f,$$

ahol  $k_k = \sigma_{1k}$ .

A közepes alakítási ellenállás a sorjarés mögötti kúpos üregben:

$$k_k = \frac{k_f}{1 - 0,93 \frac{F'}{f_1}}. \quad (51.2)$$

A példának választott súllyesztékben történő sajtolásnál az (54.1) egyenlet szerint:

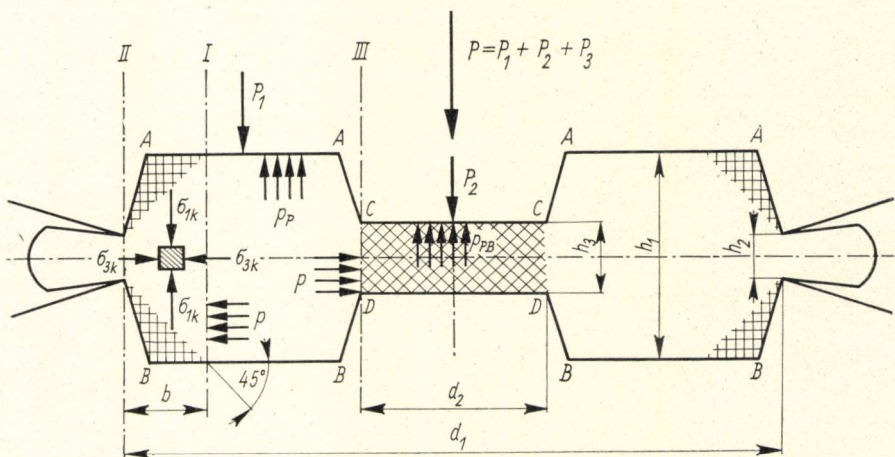
$$f_1 = (d_1 - 2b)h_1\pi,$$

a sorjarés pedig az (54.2) egyenlet szerint:

$$f_2 = d_1\pi h_2.$$

Az (51.2) egyenlet nevezőjében szereplő  $F'$  fogyás ez esetben is az (54.3) egyenlettel fejezhető ki:

$$F' = f_1 - f_2 = (d_1 - 2b)\pi h_1 - d_1\pi h_2.$$



54.21. ábra. A sajtolóerő kiszámítása alakos üregben való sajtolásnál

A sorját, mint már említettük, az I—I hengerpalást mentén ( $f_1$  mentén) működő feszültség, illetve az (54.4) egyenletnek megfelelő

$$P_0 = (d_1 - 2b)\pi h_1 p \quad (54.6)$$

erő nyomja ki a sorjarés mögötti kúpos üregeken át. Ezt a  $P_0$  erőt azonban a szerszám  $A-A$ , illetve  $B-B$  lapjára ható

$$P_1 = p_p (d_1^2 - d_2^2) \frac{\pi}{4} \quad (54.25)$$

erő hozza létre. Itt  $p_p$  egy olyan feszültség, mely a  $P$  függőleges sajtolóerő irányában az  $A-A$  és a  $B-B$  lapra hat.

A folyási feltétel értelmében itt is felírható [(54.6) egyenlet]:

$$p_p = p + k_f,$$

azaz [(54.7) egyenlet]:

$$p_p = (2k_k - k_f) + k_f = \frac{2k_f}{1 - 0,93 \frac{F}{f_1}}, \quad (54.26)$$

vagyis  $p_p$  egyenlő a kétszeres közepes alakítási ellenállással, és

$$P_1 = p_p (d_1^2 - d_2^2) \frac{\pi}{4} = \frac{2k_k}{p_p} (d_1^2 - d_2^2) \frac{\pi}{4}. \quad (54.27)$$

A sajtolt darabba behatoló  $C-C$  és  $D-D$  lapra a  $p_{PB}$  feszültségnek megfelelő  $P_2$  erő hat (54.21. ábra). A  $p_{PB}$  feszültség nagysága a következőképpen számítható ki:

$$p_{PB} = k_f e^{\frac{\mu}{h_3} d_2} + p. \quad (54.28)$$

Ezek szerint a  $P_2$  erő:

$$P_2 = p_{PB} \frac{d_2^2 \pi}{4}. \quad (54.29)$$

Itt  $p$  és az I—I, illetve III—III keresztmetszetben fellépő feszültség is az (52.3) egyenlettel számítható ki.

A sajtolás folyamán a süllyesztékben levő anyag, a holsarkokat kivéve, teljes tömegében mozgásba jön. A darab anyagának belső elmozgatásához egy  $P_3$  erőre van szükség. Ezt a  $P_3$  erőt itt is ugyanolyan módon lehet kiszámítani, mint a rúdsajtolásnál a belső elmozdulások legyőzéséhez szükséges erőt, vagyis

$$P_3 = \psi_1 p_p V_1 + \psi_2 p_{PB} V_2. \quad (54.30)$$

Ebben a képletben

$$V_1 = \left( \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} \right) \pi h_1, \quad (54.31)$$

$$V_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} h_3, \quad (54.32)$$

$$\psi_1 = C \sqrt[4]{\frac{v}{d_1 - d_2 - 2b}}, \quad (54.33)$$

$$\psi_2 = C \sqrt[4]{\frac{v}{d_2}}. \quad (54.34)$$

Ez egyenletekben  $V_1$  és  $V_2$  a mozgásba jövő anyag térfogata  $\text{cm}^3$ -ben,  $v$  a sajtolószerszám zárásának sebessége  $\text{cm/s}$ -ben,  $h_1$  és  $h_3$  az üreg fenéklapjainak mindenkori egymástól való távolsága  $\text{cm}$ -ben,  $C = 0,025$  egy állandó,  $\psi_1$  és  $\psi_2$  a belső munka tényezői.

A sorja kinyomásához szükséges sajtolóerő pedig:

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (54.35)$$

$P_1$ ,  $P_2$  és  $P_3$  nagysága az (54.27), az (54.29) és az (54.30) képlettel van megadva.

A süllyesztékes kovácsolás problémakörébe tartozik a dagadólyukasztás is. Ennél a lyukasztandó, kör keresztmetszetű tuskót egy majdnem azonos átmérőjű felvevőbe (recipiensbe) helyezik, és a tuskóba tengelye irányában egy tuskét sajtolnak bele (54.22. ábra). Minthogy a préstuskó a felvevő keresztmetszetét teljesen kitölti, a préstuskóé a tuskóba való behatolása következtében a sajtoló lyukból kiszorított anyag a tüske és a recipiens fala között a tüske haladásával ellenkező irányban áramlik.

A dagadólyukasztásnál lejátszódó folyamat lényegében azonos a rúd-sajtolás folyamatával. A különbség a kettő között csak annyi, hogy a dagadólyukasztásnál a szerszámnyílás nem kör alakú nyílás a recipiens fenekén, hanem gyűrű alakú nyílás a lyukasztótüske fala és a felvevő fala között. Ezek szerint a szerszámnyílás a II. keresztmetszetben (54.22. ábra):

$$f_2 = (d_1^2 - d_0^2) \frac{\pi}{4}. \quad (54.36)$$

A fogyás a dagadósajtolásnál:

$$F = f_1 - f_2 = \frac{d_0^2 \pi}{2}, \quad (54.37)$$

mivel

$$f_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} \quad (54.36a)$$



a felvevő, illetve a tuskó keresztmetszete. A holtarok szerepét itt a túske homloklapfelülete előtt képződő anyagkúp tölti be, amelynek magassága

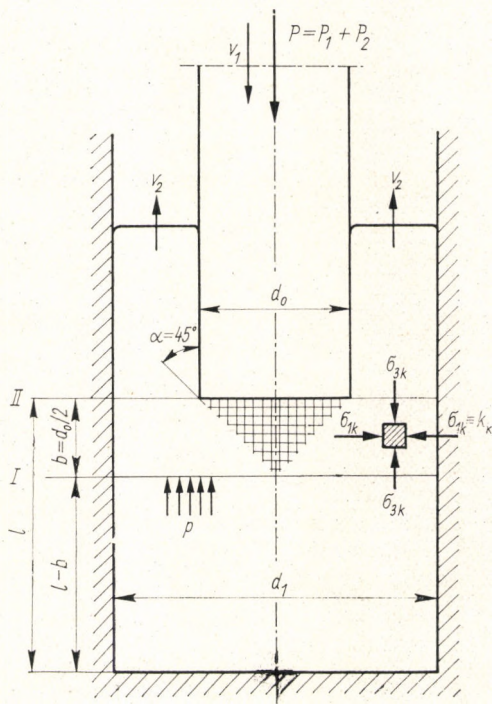
$$b = \frac{d_0}{2}.$$

Így a  $P$  sajtolótüskét mozgóató erőt ugyanazzal az egyenlettel kell kiszámítani, mint a rúdsajtoláshoz szükséges erőt [(51.13) egyenlet].

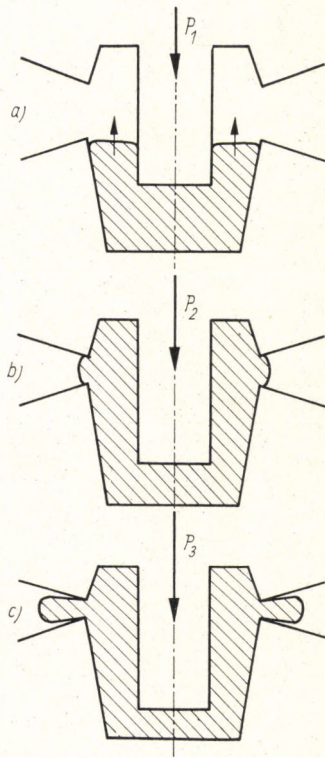
Ha a lyukasztást zárt üregben hajtjuk végre, a sajtoláshoz szükséges erők a fenti alapelvek szerint akkor is meghatározhatók. A sajtolási folyamatot az 54.23. ábra szemlélteti.

A sajtolóerőt a sajtolás első fázisában (54.23/a ábra) a dagadólyukasztásnál is a rúdsajtolásnál használatos képletekkel kell meghatározni. A sorja kilépésének pillanatától kezdve (54.23/b ábra) az erőket az 54.24. ábra alapján lehet kiszámítani.

A sorja itt is ugyanúgy keletkezik, mint az előző példában. A  $h_2$  magasságú sorjare mögött az anyagban egy kúp keletkezik. A kúpos üreg alapját a túske  $h_1$  magasságú palástja alkotja. A süllyeszték felső részének mélyebbre hatolása következtében a túske  $h_1$  magasságú palástja mentén (II' metszet)  $p'$  feszültség lép fel. A  $p'$  feszültség nyomja ki a kúpos üreg-



54.22. ábra. A sajtolóerő kiszámítása dagadó lyukasztásnál



54.23. ábra. Sajtolás sorjareakció nélkül, alakos üregben

ből a sorjarésen keresztül a kúpos üregben levő anyagot. Ez a feszültség:

$$p' = 2k'_2 - k_f; \quad (54.38)$$

itt  $k'_k$  a közepes alakítási ellenállás a sorjarés mögötti részben,  $k_f$  a sajtolt anyag alakítási szilárdsága. A közepes alakítási ellenállás a fentiek értelmében:

$$k'_k = \frac{k_f}{1 - 0,93 \frac{F'}{f'_1}}. \quad (54.39)$$

A közepes alakítási ellenállás egyébként a sorjarésben fellépő első főfeszültséggel azonos, vagyis

$$k'_k \equiv \sigma'_{1k}. \quad (54.40)$$

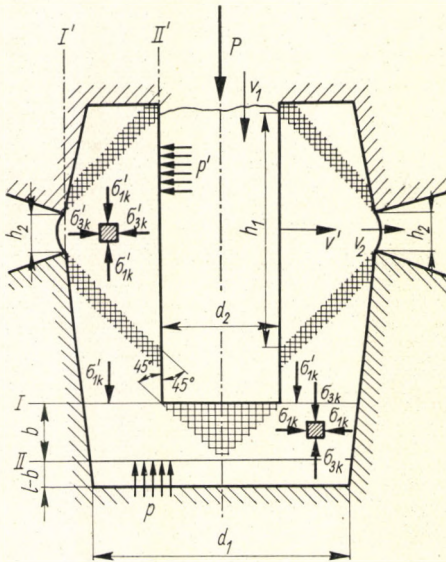
Az (54.38) és az (54.39) egyenletben

$$f'_1 = d_2 \pi h_1, \quad (54.41)$$

$$f'_2 = d_1 \pi h_2, \quad (54.42)$$

$$F' = f'_1 - f'_2. \quad (54.43)$$

A  $d_2$  átmérőjű túske előtt az I. és II. keresztmetszet közötti kúpos térben, ahol az alakítás fő része lefolyik, a legnagyobb közepes főfeszültség:  $\sigma_{1k} \equiv k'_k$ , azaz a legnagyobb közepes főfeszültség azonos az ebben az alakí-



54.24. ábra. A sajtolóerő kiszámítása süllye-  
tékben való sajtolásnál (lásd 54. 23. ábrát)

tási zónában fellépő közepes alakítási ellenállással. A II. keresztmetszetben fellépő  $p$  feszültség, amely az alakított anyagot a recipiens fala és a tüske fala között felfelé nyomja:

$$p = 2 k_k - k_f, \quad (54.44)$$

mint azt már a rúdsajtolásnál is láttuk. A folyás feltételét az I. és II. keresztmetszet között a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\sigma_{1k} - [\sigma_{3k} + 1,5 \sigma'_{1k}] = k_f. \quad (54.45)$$

Ebből következik:

$$\sigma_{1k} - \sigma_{3k} = k_f + 1,5 \sigma'_{1k}. \quad (54.46)$$

A közepes alakítási ellenállás ebben az alakítási zónában:

$$\sigma_{1k} \equiv k_k = \frac{k_f + 1,5 \sigma'_{1k}}{1 - 0,93 \frac{F}{f_1}}, \quad (54.47)$$

vagy kifejtve:

$$k_k = \frac{k_f \left[ 2,5 - 0,93 \left( \frac{F'}{f'_1} \right) \right]}{\left[ 1 - 0,93 \left( \frac{F}{f_1} \right) \right] \left[ 1 - 0,93 \left( \frac{F'}{f'_1} \right) \right]} =$$

$$= \frac{k_f [2,5 - 0,93 (F'/f'_1)]}{1 - 0,93 [(F/f_1) + (F'/f'_1)] + 0,86 (F \cdot F'/f_1 \cdot f'_1)}. \quad (54.48)$$

Ebből következik, hogy ha az 54.24. ábra szerinti süllyesztékben történik a sajtolás, akkor a sorja kilépésének pillanatában, amikor a sorjarés magassága  $h_2$ , a sajtoló erő:

$$P = (p' f'_1 + p' \psi' V') + (p f_1 + p \psi V). \quad (54.49)$$

Ebben a képletben

$$p = 2 k_k - k_f, \quad (54.50)$$

$$p' = 2 k'_k - k_f, \quad (54.51)$$

$$V = (l - b) f_1, \quad (54.52)$$

$$V' = (l' - b') f'_1. \quad (54.53)$$

A I.—II. közötti zónában:

$$\psi = 0,025 \sqrt[4]{\frac{v_1}{(l - b)}}, \quad (54.54)$$

a sorja  $h_2$  magas része mögött  $\psi'$  együttható a következő módon számítható ki:

$$\left. \begin{aligned} v' f'_1 &= v_2 f'_2, \\ v_1 f_1 &= v_2 f_2, \\ v' f'_1 &= v_1 f_1, \end{aligned} \right\} \quad (54.55)$$

és így

$$v' = v_1 \frac{f_1}{f'_1}. \quad (54.56)$$

Abból, hogy

$$\left. \begin{aligned} f'_1 &= d_2 \pi h_1, \\ f'_2 &= d_1 \pi h_2, \\ f_1 &= \frac{d_1^2 \pi}{4}, \\ f_2 &= \left( \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} \right) \pi, \end{aligned} \right\} \quad (54.57)$$

következik:

$$v' = v_1 \frac{f_1}{f'_1} = v_1 \left( \frac{0,25 d_1^2}{d_2 h_1} \right). \quad (54.58)$$

Továbbá:

$$\psi' = 0,025 \sqrt[4]{\frac{v'}{(l' - b')}}}, \quad (54.59)$$

itt az 54.24. ábra szerint

$$V' = (l' - b') f'_1 = h_x f_2, \quad (54.60)$$

azaz

$$(l' - b') = \frac{h_x f_2}{f'_1} = \frac{h_x}{h_1} \left( \frac{d_1^2 - d_2^2}{4 d_2} \right). \quad (54.61)$$

A sajtolási példákat még folytathatnánk. Természetesen a süllyesztékben fellépő erők és az alakítási munka kiszámításának problémája a bemutatott számítási eljárással még nem tekinthető véglegesen megoldottnak, de ezzel a módszerrel igen sok esetben lehet az erőt és a munkát kiszámítani.

## VIII. HENGERLÉS

### 55. A HENGERLÉSRŐL ÁLTALÁBAN

A hengerlés műveletét és a hengersorok működését általában a következőképpen írhatjuk le. A lemez- és rúdhengersorok alakítószerszámai hengeres, görgős vagy tárcsa alakú forgótestek, amelyek párosával működnek együtt. Az együttműködő hengerek egymással ellenkező irányban forognak; tengelyeik egy síkban fekszenek és általában párhuzamosak. A dolgozó hengerpár nem szalad egymáson, hanem közöttük ún. hengerrés vagy egy üreg van. Ha ebbe a hengerrésbe vagy üregbe bevezetjük, vagyis beszúrjuk a hengerlendő darabot, amely vastagabb, mint a hengerrés, illetve amelynek keresztmetszete nagyobb, mint az üreg keresztmetszete, akkor a darab és a hengerek között fellépő súrlódási erő a darabot a hengerrésbe vagy az üregbe behúzza. Miközben a darab a hengerek között keresztülzalad, keresztmetszete megváltozik, kisebb lesz, viszont hossza jelentősen megnövekszik.

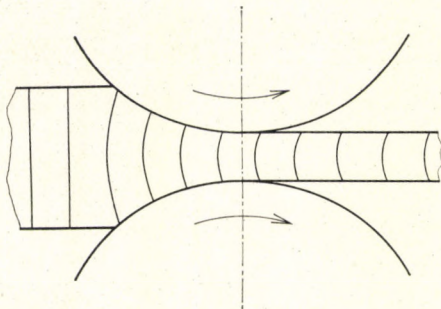
COTEL E. szerint a hengerlés művelete nem más, mint a hengerek forgása következtében folytonossá tett nyújtókovácsolás [55.1], H. HOFF és TH. DAHL [55.2] szerint pedig a hengerek forgásával folyamatossá tett összenyomó művelet. Persze, a hengerlés művelete távolról sem ilyen egyszerű, bár mind a két meghatározás a dolog lényegére mutat rá.

### 56. AZ ANYAGMOZGÁS A HENGERRÉSBEN

Sokan foglalkoztak azzal a kérdéssel, miképpen áramlik a hengerelt anyag a hengerrésen keresztül. Úgy találták, hogy hengerléskor a darabnak a hengerlés irányára merőleges keresztmetszetei a hengerrésben az 56.1. ábra szerint meggyöngyöskednek. E. SIEBEL és H. HÜHNE is vizsgálták, mégpedig hideghengerlésnél, a hengerrésben bekövetkező alakváltozásokat, és azt találták, hogy kis fogyások mellett a keresztmetszetek alig hajolnak meg, és az alakváltozás majdnem paralelepipedikusan folyik le [56.1].

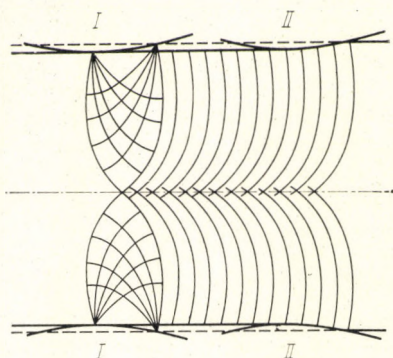
F. KÖRBER és E. SIEBEL [56.2] megvizsgálta hideghengerlésnél, kis hengerlési nyomások mellett, a hengerrésben keletkező csúszási vonalrendszert is, és azt látta, hogy a keletkező csúszási vonalrendszer rendkívül hasonlít ahhoz a vonalrendszerhez, mely a nyomott prizmaon található. Ez is a hengerlés és az összenyomás műveletének alapvető hasonlóságát mutatja. Az 56.2. ábrán látható KÖRBER és SIEBEL hengerlési kísérleteinek eredménye. Ezen az ábrán a I mutatja a csúszási vonalrendszer keletkezését összenyomáskor, a II pedig a forgó hengerek munkavégzésének eredményeképpen jelentkező csúszási vonalrendszert a hengerelt darabon.

A hengerrésben azonban az anyag nemcsak a hengerlés irányában folyik, illetve alakváltozás nem csupán a hengerek tengelyére merőleges síkban figyelhető meg; a két nyomófelülettel párhuzamos síkban van oldalirányú



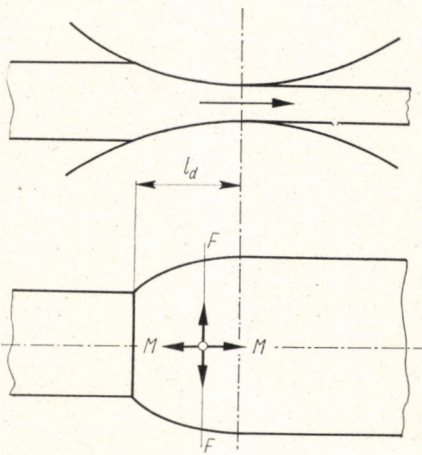
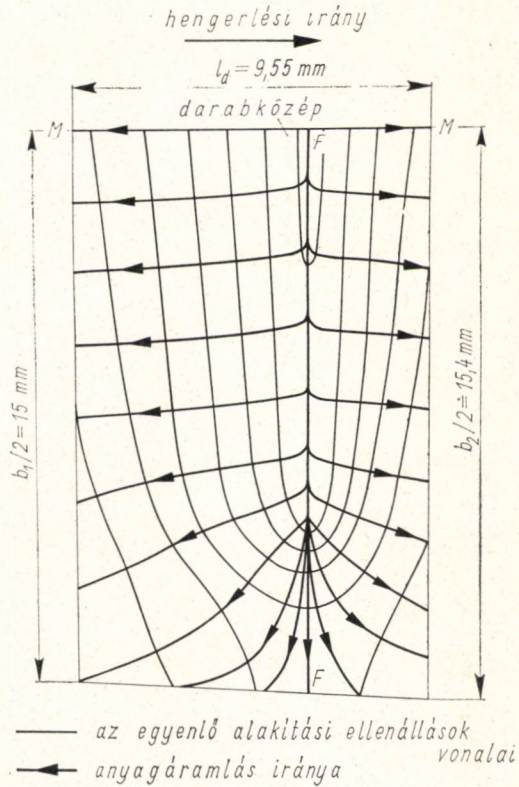
56.1. ábra. A darab függőleges keresztmetszeteinek elhajlása a hengerrésben

anyagmozgás is, aminek eredménye a darab szélesedése, amennyiben sima hengerek között történik a hengerrés. E. SIEBEL és W. LUEG [56.3] kísérleteiknél azt találták, hogy a fajlagos hengerrési nyomás a hengerek felületén a belépő és kilépő keresztmetszetenél csaknem azonos a hengerről anyag alakítási szilárdságával, közben azonban erősen változik, és pedig oly módon, hogy az ún. választósíkban, a semleges keresztmetszetben egy maximális értéket ér el, ahogy ezt egy későbbi fejezetben látni fogjuk (66.7. ábra). A hengerrésben az anyag az alakító nyomás elől minden irányban kitér (56.3. és 56.4. ábra). Az anyagáramlás irányait a választóvonal, a semleges keresztmetszet (FF) két fő részre, zónára osztja. A választósíkban az anyag ugyanolyan sebességgel mozog a hengerrés irányában, mint a hengerek felülete. A választósík előtt, a visszamaradási zónában az anyag haladása a hengerrés irányában kisebb, a választósík mögött, az előresietési zónában pedig nagyobb, mint a választósíkba eső anyag haladása a hengerrés irányában. A darab a hengerek közül nagyobb sebességgel lép ki, mint a hengerek kerületi sebessége. Ezt a jelenséget előresietésnek nevezzük. Viszont a darab kisebb sebességgel lép a hengerrésbe, mint az a hengerek kerületi sebességéből következne, ez az ún. visszamaradás.



56.2. ábra. A csúszási vonalrendszer kialakulása a hengerrésben kis alakítás mellett, KÖRBER és SIEBEL szerint

56.3. ábra. Az anyagmozgás fő irányai a hengerrésben



56.4. ábra. Az anyagáramlás irányai a hengerrésben alumínium hengerrésnél, SIEBEL és LUEG szerint

57. AZ ELEMI HENGERLÉS FOGALMA S KINEMATIKAI  
VISZONYAI

Elemi hengerlésről akkor beszélünk [57.1], ha a hengerelt darab keresztmetszete derékszögű négyszög, a henger alkotói ennek a négyszögnek két párhuzamos oldalával egybe esnek, a darabot oldalról semmiféle borda nem érinti, teljesen egynemű anyagból áll, és egyenletes sebességgel fut keresztül a hengerek között. Hogy a viszonyokat könnyebben megérthessük, először is azt az elméleti határesetet tárgyaljuk, amelyben a hengerelt darab felületelemei a belépés pillanatától a kilépés pillanatáig a hengerek ugyanazon felületelemeivel érintkeznek, ami azt jelentené, hogy a hengerek felülete a hengerlés irányában nem csúszik a darabon.

Legyen  $v_k$  a hengerek kerületi sebessége (57.1. ábra),  $h_1$  a darab magassága a szűrés előtt,  $h_2$  a szűrés után,  $b_1$  a darab szélessége a szűrés előtt,  $b_2$  a szűrés után, és  $\Phi$  a befogás szöge. A csúszásmentes keresztülfutást a következő egyenlet jellemzi:

$$v_k b_1 h_1 \cos \Phi = v_k b h \cos \varphi = v_k b_2 h_2 . \quad (57.1)$$

Ebben az esetben a darab, miközben a hengerek között keresztülhalad,  $b_1$ -ről  $b_2$ -re szélesedik. Hogy minden keresztmetszet szélessége nagyobb az utána következőnél, azt a következő megfontolás alapján lehet bebizonyítani.

Az (57.1) egyenlet értelmében

$$b_1 h_1 \cos \Phi = b h \cos \varphi = b_2 h_2 ; \quad (57.2)$$

minthogy pedig

$$h + 2r \cos \varphi = 2r + h_2 ,$$

következésképpen

$$h = 2r + h_2 - 2r \cos \varphi \quad (57.3)$$

és

$$h \cos \varphi = (2r + h_2) \cos \varphi - 2r \cos^2 \varphi . \quad (57.4)$$

Ez az egyenlet bizonyítja, hogy  $\Phi = 45^\circ$ -ig  $h \cos \varphi$  a  $\varphi$  növekedésével folytonosan növekedik, tehát

$$h_1 \cos \Phi > h \cos \varphi . \quad (57.5)$$

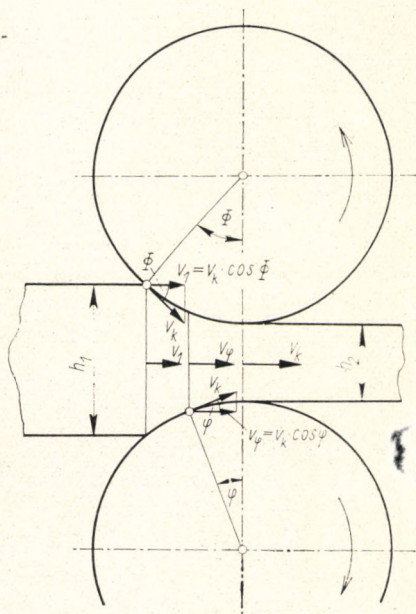
Amennyiben az (57.2) egyenlet érvényes:

$$b_2 > b > b_1 , \quad (57.6)$$

tehát a darab hengerek között levő részének minden egyes keresztmetszete nagyobb szélességű, mint az utána következő keresztmetszet.



57.1. ábra. Az egyes függőleges keresztmetszetek sebessége a hengerlés irányában



A darab összes szélesedése:

$$b_2 - b_1 = b_1 \left( \frac{h_1}{h_2} \cos \Phi - 1 \right), \quad (57.7)$$

mert (57.2) egyenlet szerint:

$$b_2 = b_1 \frac{h_1}{h_2} \cos \Phi. \quad (57.8)$$

A szélesedés a valóságban azonban sohasem olyan nagy, mint csúszásmentes hengerlés esetén az (57.7) egyenlet értelmében lenne.

A másik szélső elméleti eset a szélesedésmentes keresztülfutás. Ha semmi szélesedés nincs, akkor  $b_1 = b_2 = b$ , s akkor a hengerek közé befogott darab-részre a következő egyenlet érvényes:

$$h_1 v_1 = h v = h_2 v_2. \quad (57.9)$$

Ha feltesszük, hogy  $v_2 = v_k$ , akkor az (57.9) egyenletből következik, hogy egy  $\varphi$  szöghöz tartozó közbeeső keresztmetszet sebessége a hengerlés irányában (57.2. ábra):

$$v = \frac{h_2}{h} v_k = v_{II}. \quad (57.10)$$

A  $df$  felületelem, amely a darab  $h$  magasságú keresztmetszetéhez tartozik, a henger felülete mentén  $v'$  sebességgel mozog az érintő irányában:

$$v' = \frac{v_{II}}{\cos \varphi} = \frac{h_2}{h} \frac{v_k}{\cos \varphi}; \quad (57.11)$$

ez a sebesség kisebb a henger kerületi sebességénél.

A darab csúszásmentes keresztülfutását az (57.1) egyenlettel jellemeztük. Ennek az egyenletnek értelmében a hengerek közé belépő keresztmetszet sebessége a hengerlés irányában:

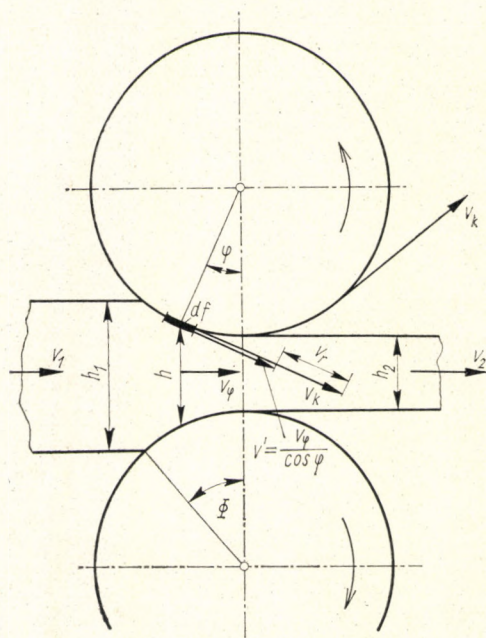
$$v_1 = v_k \cos \Phi = \frac{b_2 h_2}{b_1 h_1} v_k. \quad (57.12)$$

A  $\varphi$  szöghöz tartozó keresztmetszet sebessége a hengerlés irányában ugyan-  
csak az (57.1) egyenlet értelmében:

$$v = v_k \cos \varphi = \frac{b_2 h_2}{b_1 h} v_k = v_I \quad (57.13)$$

ha  $b_I$  a csúszásmentesen keresztülfutó darab  $\varphi$  szöghöz tartozó kereszt-  
metszetének szélessége.

A hengerek közül kilépő keresztmetszet sebességére vonatkozólag fel-  
tételtünk, hogy  $v_2 = v_k$ . Ha azonban feltételezzük azt is, hogy szélesedés



57.2. ábra. Az egymáson csúszó darab-  
és hengerfelületelemek relatív sebessége

nem lép fel, azaz  $b_I = b_{II} = b_2$  ( $b_{II}$  a  $\varphi$  szöghöz tartozó keresztmetszet szélessége szélesedésmentes keresztülfutás esetében), akkor a  $\varphi$  szöghöz tartozó keresztmetszet sebessége a hengerlés irányában többé nem  $v_I$ , hanem

$$v_{II} = \frac{b_2 h_2}{h b_2} v_k = \frac{h_2}{h} v_k \quad (57.14)$$

[1. az (57.10) egyenletet]. De

$$v_{II} < v_I,$$

mert

$$\frac{h_2 b_2}{h b_I} > \frac{h_2}{h}, \quad \text{minthogy} \quad \frac{b_2}{b_I} > 1. \quad (57.15)$$

Ezek szerint, ha a darab a hengerek között szélesedésmentesen halad keresztül, és a kilépési sebesség,  $v_2$  egyenlő a hengerek kerületi sebességével,  $v_k$ -val, akkor a henger minden felületeleme előresúszik a darab vele érintkező felületelemén. Ez a relatív előresúzási sebesség:

$$v_r = v_k - \frac{v_{II}}{\cos \varphi} = v_k \left( 1 - \frac{h_2}{h} \frac{1}{\cos \varphi} \right) \quad (57.16)$$

[(57.11) egyenlet és 57.2. ábra].

Ha nincs szélesedés, azonban előresietés van, minthogy ez szükségszerűen mindig fellép, azaz, ha  $v_2 > v_k$ , akkor

$$v_2 = \delta v_k; \quad (57.17)$$

$\delta$  itt az előresietési koefficiens. Ebben az esetben a henger felületelemeinek relatív csúzási sebessége a darab velük érintkező felületelemein az (57.9), (57.10), (57.11) és (57.16) egyenlet értelmében:

$$\begin{aligned} v_r &= v_k - v' = v_k - \frac{v_2}{\cos \varphi} \cdot \frac{h_2}{h} = v_k - \frac{\delta v_k}{\cos \varphi} \cdot \frac{h_2}{h} = \\ &= v_k \left( 1 - \frac{h_2}{h} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi} \right). \end{aligned} \quad (57.18)$$

Ha tehát a hengerléskor előresietés lép fel, akkor a  $v_r$  relatív csúzási sebesség a befogási ív mentén megváltoztatja előjelét, azaz lesz egy hely, ahol  $v_r = 0$ , azaz

$$1 - \frac{h_2}{h_s} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi} = 0. \quad (57.19)$$

$\varphi_s$  az a szög, amelyhez tartozó felületelem mentén  $v_r = 0$ . A darabnak azt a keresztmetszetét, amely a  $\varphi_s$ -hez tartozik, semleges vagy választó

keresztmetszetnek nevezzük (57.3. ábra). A hengerek tengelyére merőleges síkban ez mint vonal jelentkezik, s ez a vonal az úgynevezett választóvonal.

Az (57.19) egyenletből következik, hogy

$$\frac{h_2}{h_s} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi_s} = 1. \quad (57.20)$$

Mintthogy (57.3. ábra):

$$h_s = 2r + h_2 - 2r \cos \varphi_s, \quad (57.21)$$

az (57.20) egyenletből:

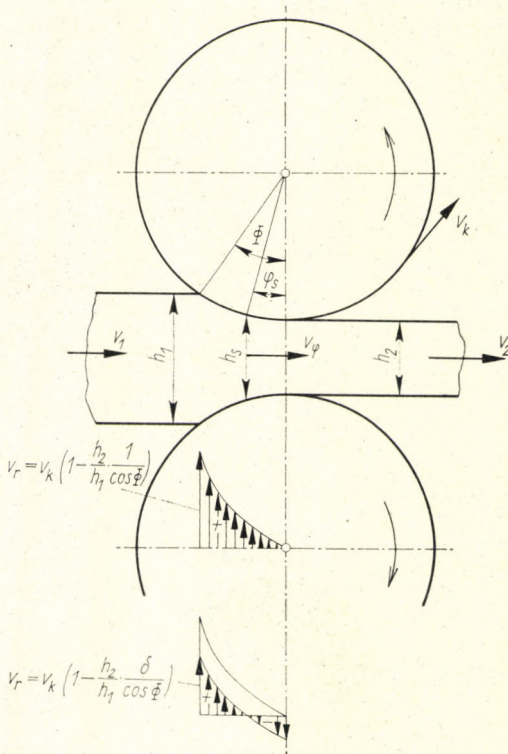
$$\cos \varphi_s (2r + h_2 - 2r \cos \varphi_s) = h_2 \delta. \quad (57.22)$$

Ebből

$$(2r + h_2) \cos \varphi_s - 2r \cos^2 \varphi_s = h_2 \delta,$$

azaz

$$2r \cos^2 \varphi_s - (2r + h_2) \cos \varphi_s + h_2 \delta = 0,$$



57.3. ábra. A  $v_r$  relatív csúszási sebesség változása a nyomott ív mentén, GELEJI szerint

amiből

$$\cos \varphi_s = \frac{(2r + h_2) \pm \sqrt{(2r + h_2)^2 - 8r h_2 \delta}}{4r}, \quad (57.23)$$

és így

$$\varphi_s = \arccos \varphi_s. \quad (57.24)$$

A választó (semleges) keresztmetszet előtt levő részt visszamaradási zónának, az utána következő részt előresietési zónának nevezzük.

A  $v_r$  relatív csúszási sebességet azonban nemcsak az előresietés, hanem a szélesedés is befolyásolja.

A csúszásmentes hengert az (57.1) egyenlettel jellemeztük. Ebből

$$b = b_\varphi = \frac{b_2 h_2}{h \cos \varphi} \quad (57.25)$$

és

$$b_1 = \frac{b_2 h_2}{h_1 \cos \Phi}. \quad (57.26)$$

A  $\varphi$  szöghöz tartozó szélesedés csúszásmentes hengerekkor:

$$\Delta b_\varphi = b_\varphi - b_1 = b_2 h_2 \left( \frac{1}{h \cos \varphi} - \frac{1}{h_1 \cos \Phi} \right). \quad (57.27)$$

$\varphi = \Phi$ -nál  $h = h_1$ , és

$$\Delta b_\Phi = b_2 h_2 \left( \frac{1}{h_1 \cos \Phi} - \frac{1}{h_1 \cos \Phi} \right) = 0. \quad (57.28)$$

$\varphi = 0$ -nál  $h = h_2$ , és

$$\Delta b_0 = b_2 h_2 \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1 \cos \Phi} \right) = b_1 \left( \frac{h_1}{h_2} \cos \Phi - 1 \right). \quad (57.29)$$

A tényleges szélesedés azonban kisebb, mint  $\Delta b_0$ :

$$\Delta b = \psi \Delta b_0; \quad (57.30)$$

itt  $\psi$  a szélesedési együttható.

Állapítsuk meg, hogy a  $\psi$  szélesedési együttható milyen befolyással van a  $v_r$  relatív csúszási sebességre abban az esetben, ha az előresietési együttható,  $\delta = 1$ .

$\psi = 0$ -nál:

$$v_r = v_k \left( 1 - \frac{h_2}{h} \frac{1}{\cos \varphi} \right), \quad (57.31)$$

és  $\psi = 1$ -nél:

$$v_r = 0.$$

Ha a  $v_r$  relatív sebességet a  $\psi$  szélesedési és a  $\delta$  előresietési együttható függvényeként is fel akarjuk írni, akkor jó megközelítéssel írhatjuk:

$$v_r = (1 - \psi) \left( 1 - \frac{h_2}{h} \frac{\delta}{\cos \varphi} \right). \quad (57.32)$$

Ha a tényleges szélesedés,  $\Delta b$  ismeretes, akkor a szélesedési együtthatót az (57.29) és az (57.30) egyenlet segítségével a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\psi = \frac{\Delta b}{\Delta b_0} = \frac{\Delta b}{b_1 \left( \frac{h_1}{h_2} \cos \Phi - 1 \right)}. \quad (57.33)$$

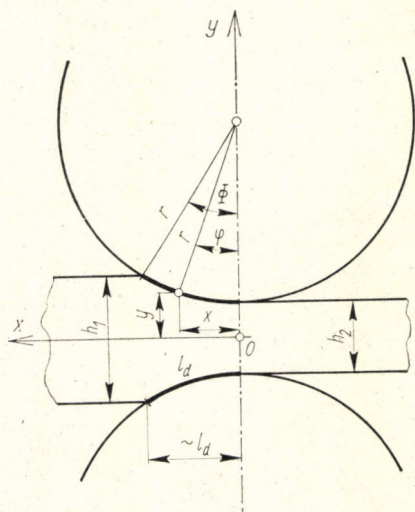
A szélesedés kiszámítására a 63. fejezetben térünk rá.

## 58. A NYOMOTT ÍV KISZÁMÍTÁSA

Nyomott ívnek az  $r$  rádiuszú hengerkeresztmetszet  $\Phi$  szögéhez tartozó  $r\Phi = l_d$  ívet nevezünk (58.1. ábra). A nyomott ív nagyságát a következő gondolatmenet segítségével számíthatjuk ki:

A körkeresztmetszet görbületi sugarát ez a differenciálegyenlet adja meg:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{r}. \quad (58.1)$$



58.1. ábra. A nyomott ív nagyságának kiszámítása

Integrálva az egyenletet, megkapjuk a kör érintőjének iránytangensét:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{r} + C_1. \quad (58.2)$$

Ha  $x = 0$ ;  $\frac{dy}{dx} = 0$ , akkor  $C_1 = 0$ .

Másodszori integrálás után kapjuk meg a nyomott ív egyenletét az  $xy$  koordináta-rendszerben:

$$y = \frac{x^2}{2r} + C_2, \quad (58.3)$$

ha  $x = 0$ , akkor  $y = \frac{h_2}{2}$  és  $C_2 = \frac{h_2}{2}$ ,

ha  $x (=) l_d$ , akkor  $y = \frac{h_1}{2}$ .

A darab magasságcsökkenése a hengerlés folyamán:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 2(y_1 - y_2) = 2\left(\frac{l_d^2}{2r} + \frac{h_2}{2} - \frac{h_2}{2}\right) = \frac{l_d^2}{r}, \quad (58.4)$$

ebből a nyomott ív:

$$l_d = \sqrt{r \Delta h}, \quad (58.5)$$

vagy pontosabban az 58.2. ábra szerint:

$$l_d^2 = x^2 + \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2. \quad (58.6)$$

Ebből az egyenletből

$$x^2 = l_d^2 - \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2, \quad (58.7)$$

az (58.3) egyenlet pedig a következő alakot veszi fel:

$$\frac{h_1}{2} = \frac{1}{2r} \left[ l_d^2 - \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2 \right] + \frac{h_2}{2}, \quad (58.8)$$

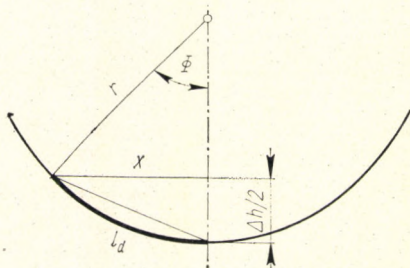
tehát

$$(h_1 - h_2)r = l_d^2 - \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2. \quad (58.9)$$

Így a nyomott ív:

$$l_d = \sqrt{(h_1 - h_2)r + \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2}. \quad (58.10)$$

58.2. ábra



Ha a két henger átmérője nem egyforma nagy, akkor a közepes nyomott ívet hasonló gondolatmenet alapján a következő képlettel lehet kiszámítani:

$$l_d = \sqrt{\frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \Delta h} . \quad (58.11)$$

A nyomott ív vékony darabok hengerlésénél, amikor nagy fajlagos nyomások lépnek fel, a hengerek belapulása következtében megnagyobbodik (l. a 71. fejezetet).

#### 59. NÉGYZETES KERESZTMETSZETŰ DARAB HENGERLÉSÉNÉL FELLÉPŐ ERŐK

Az alábbiakban a hengerlésnél fellépő erők és a hengerlési munka nagyságának megállapításához a következő egyszerűsítő feltevésekkel élünk [59.1]:

a) A hengerelt darab keresztmetszete derékszögű négyzög, a hengerek alkotói ennek két párhuzamos oldalával egybeesnek, a darabot oldalról semmiféle borda nem érinti, anyaga teljesen homogén, a hengerek között egyenletes sebességgel halad keresztül.

b) A  $\mu$  súrlódási tényező a hengerek felülete mentén állandó.

Az az erő, amely az eredetileg  $b_1$  szélességű és  $h_1$  magasságú négyzetes keresztmetszvényű rudat a hengerek között áthúzza, a hengerek felülete mentén fellépő súrlódás. Magát a hengerlést felfoghatjuk úgy, hogy a darab áll, a henger pedig az  $O_1x$  egyenes mentén gördül (59.1. ábra). Ilyenkor a gördülő kör minden egyes pontja egy cikloid mentén mozog, tehát ugyanakkor, amikor a henger az  $O$  pont körül  $d\varphi$  szöggel fordul el, a  $df$  felületelem az  $O_1$  középpont körül a  $\rho$  sugarú körön  $\frac{d\varphi}{2}$  szöggel fog elfordulni. A  $df$  felületelemre ható normális erő:

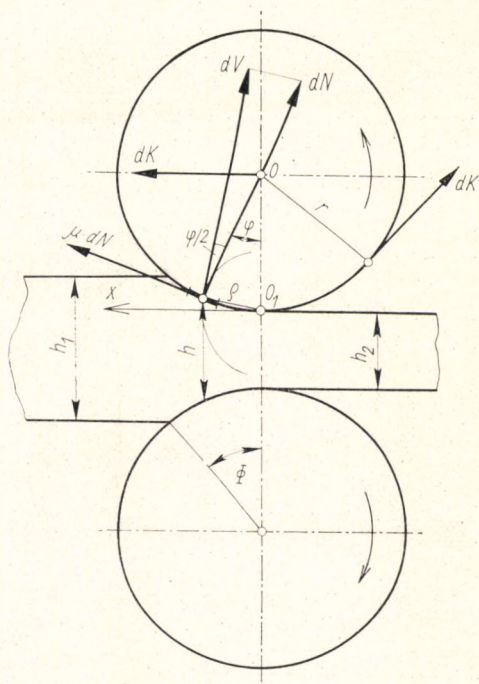
$$dN = k df = kbr d\varphi . \quad (59.1)$$

A  $df$ -nek  $dV$  irányú, azaz az  $O_1A$  körhöz érintő irányú elmozdulásakor a  $df$  felületelemre ható erő:

$$dV = k df \cos \frac{\varphi}{2} = kbr \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi . \quad (59.2)$$



59.1. ábra. Az elemi hengerlésnél fellépő erők



Ezekben a képletekben  $k$  a hengerfelületre ható fajlagos nyomást, az alakítási ellenállást jelenti. A  $df$  felületelem mentén ébredő súrlódási erő, ha  $\mu$  a súrlódási tényező:

$$dR = \mu dN = \mu k b r d\varphi . \quad (59.3)$$

Az elemi hengerlési nyomaték, amely szükséges a tiszta alakítási munka létrehozásához:

$$dM = 2dK r = 2dV \varrho , \quad (59.4)$$

ahol  $dK$  az elemi kerületi erő, amely a forgatónyomatékot létrehozza.

$$\varrho = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \quad (59.5)$$

az  $O_1$  körül működő forgatónyomaték karja.

## 60. NYOMÁSELOSZTLÁS A HENGERRÉSBEN

Annak a megállapítására, hogy a  $k$  fajlagos felületi nyomás, illetve az alakítási ellenállás hogyan oszlik el a hengerrésben a nyomófelületek mentén, először E. SIEBEL és W. LUEG végzett kísérleteket [60.1]. A kísérletek leírását itt mellőzzük.

E. SIEBEL és W. LUEG kísérleteikkel meghatározták, hogy a henger felületére ható fajlagos nyomás, alakítási ellenállás miképpen változik a nyomott ív mentén a darab szélétől különböző távolságban. A 60.1., 60.2. és 60.3. ábra azt mutatja, hogy az alakítási ellenállás miképpen változik azonos súrlódási viszonyok, azonos nyomott ív és azonos abszolút magasságsökkenés mellett, különböző kiinduló darabmagasság esetén.

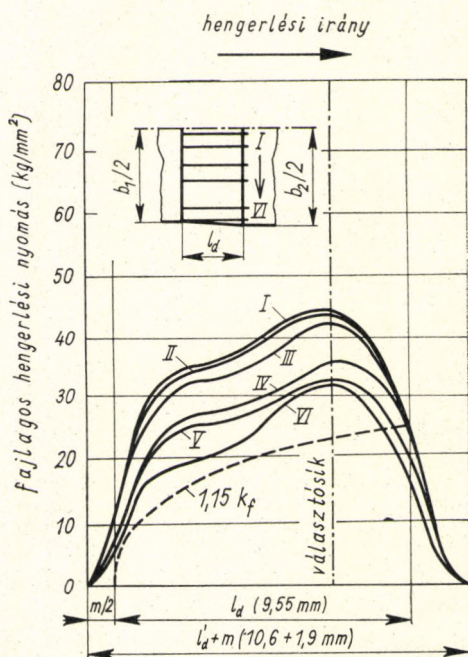
A súrlódási tényező nagyságának befolyását azonos geometriai viszonyok között a 60.4. és a 60.5. ábra mutatja. Ugyanezt térbelileg a 60.6. és a 60.7. ábra szemlélteti.

#### 61. A TAPADÁSI TARTOMÁNY NAGYSÁGÁNAK KÍSÉRLETI MEGHATÁROZÁSA

Ha egy prizrát két nyomólap között összenyomunk (l. a 27. fejezetet), akkor azokon a helyeken, ahol

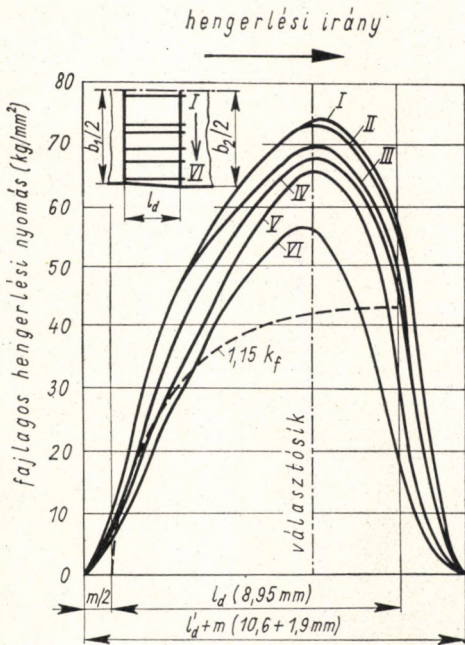
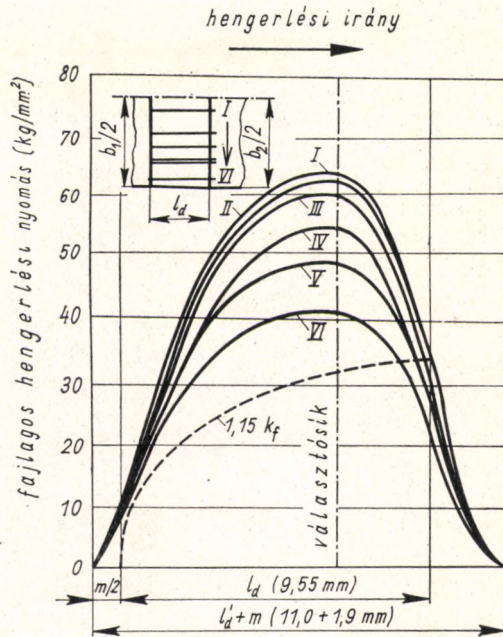
$$\mu k_x \geq 0,578 k_f, \quad (27.13)$$

a nyomott anyag tapad a nyomófelülethez. Az alakított anyag a nyomófelület mentén ezeken a helyeken szabad csúszásában akadályozva van. Ugyanez a helyzet a hengerrésben (61.1. ábra). Ha a tapadás feltétele beáll, a nyomott ív mentén egy tapadási és két csúszási zóna keletkezik. A tapadási zóna fellépését I. JA. TARNOWSKI kísérletekkel igazolta; kísérleti eredményeit több diagramban dolgozta fel.

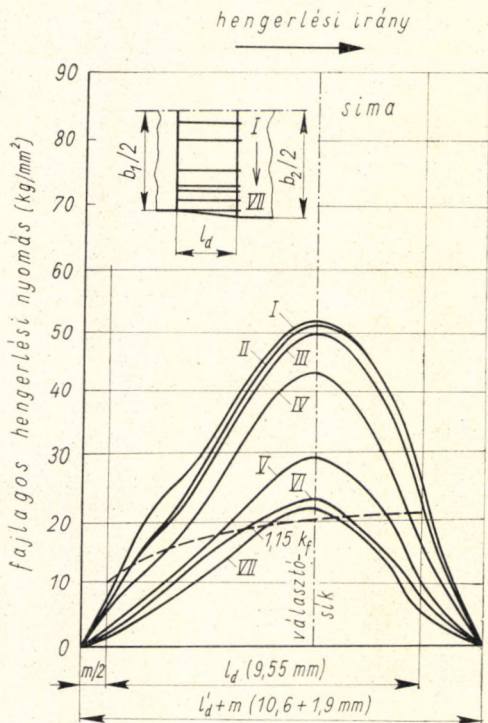


60.1. ábra. A fajlagos hengerrési nyomás (alakítási ellenállás) változása a hengerrésben rézszalag (30 × 2 mm<sup>2</sup>) hengerrésénél, SIEBEL és LUEG szerint

60.2. ábra. A fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás) változása a hengerlésben rézszalag ( $30 \times 2 \text{ mm}^2$ ) hengerlésénél, SIEBEL és LUEG szerint

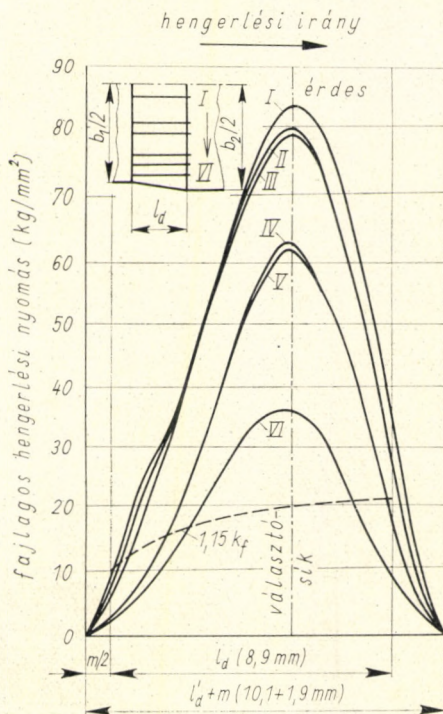


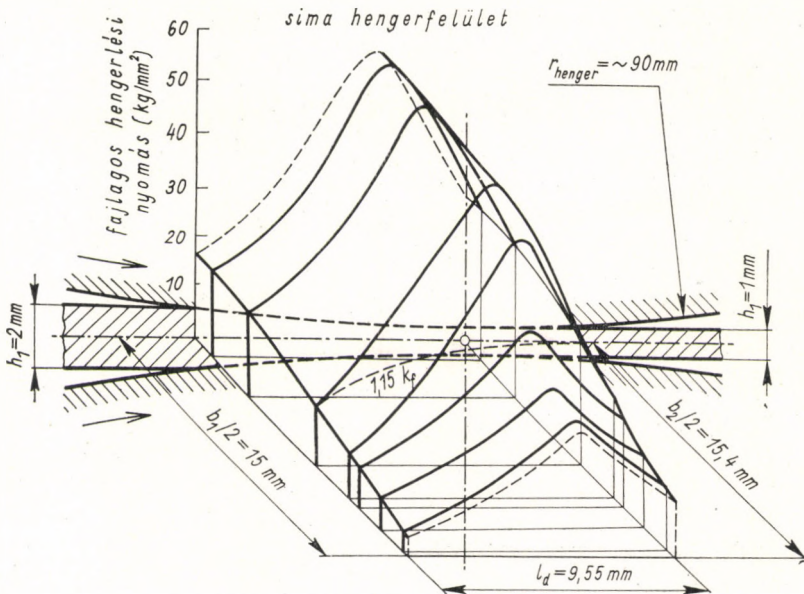
60.3. ábra. A fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás) változása a hengerlésben rézszalag ( $30 \times 2 \text{ mm}^2$ ) hengerlésénél, SIEBEL és LUEG szerint



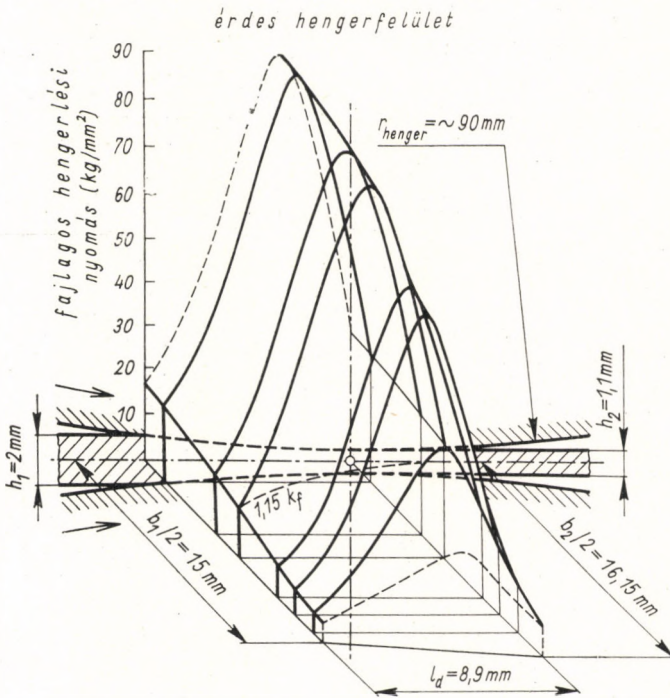
60.4. ábra. A fajlagos hengelési nyomás (alakítási ellenállás) változása a hengerrésben alumínium szalag ( $30 \times 2 \text{ mm}^2$ ) hengelésénél, SIEBEL és LUEG szerint. A hengerek felülete csiszolt

60.5. ábra. A fajlagos hengelési nyomás (alakítási ellenállás) változása a hengerrésben alumínium szalag ( $30 \times 2 \text{ mm}^2$ ) hengelésénél, SIEBEL és LUEG szerint. A hengerek felülete mesterségesen durvított



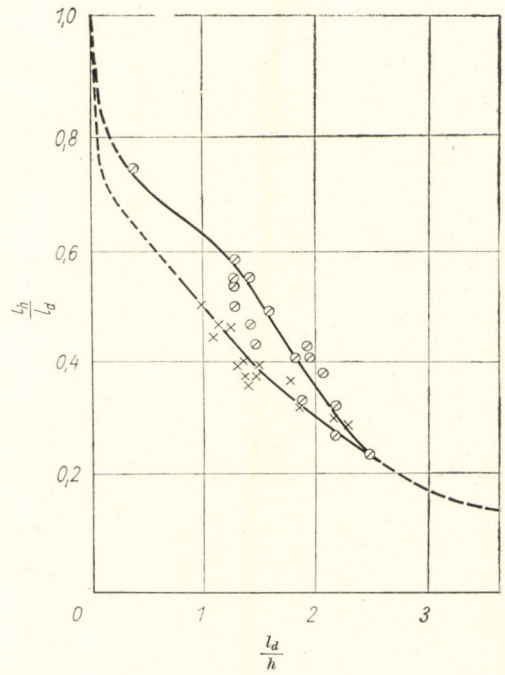
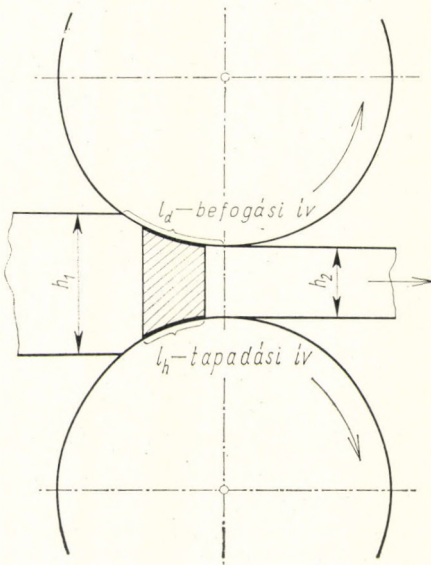


60.6. ábra. Az alakítási ellenállás eloszlása a nyomott felület mentén. A hengerek simák, a hengerelt anyag alumínium. SIEBEL és LUEG szerint

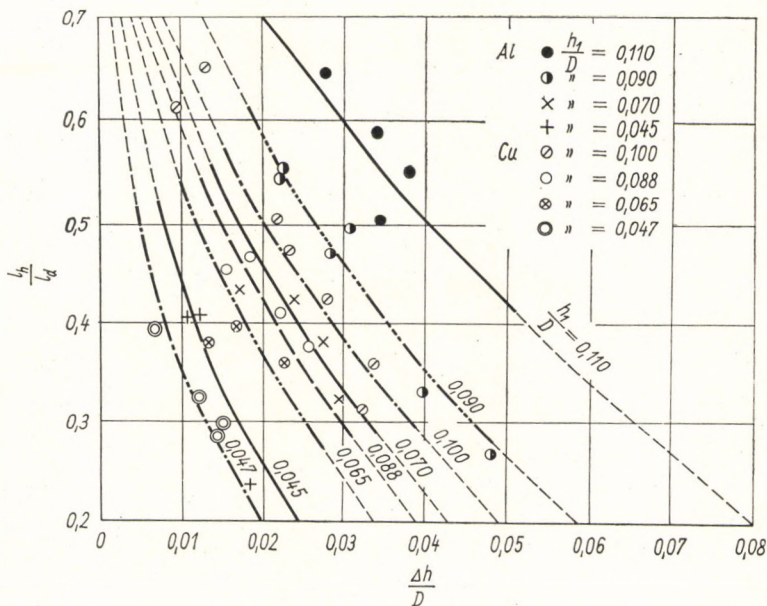


60.7. ábra. Az alakítási ellenállás eloszlása a nyomott felületek mentén. A hengerfelület durvított, a hengerelt anyag alumínium. SIEBEL és LUEG szerint

61.1. ábra. Tapadási tartomány a henger-  
részben



61.2. ábra. A tapadási ív viszonylagos  
hossza  $l_h/l_d$  függvényében



61.3. ábra. A tapadási ív viszonylagos hossza  $\Delta h/D$  függvényében

A 61.2. ábrán  $l_d$  a befogási ív,  $l_h$  a tapadási ív,

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

a darab közepes magassága a hengerrésben,  $\frac{l_h}{l_d}$  a tapadási ív relatív hossza,

$\frac{l_d}{h}$  a hengerrés alaktényezője.

A 61.2. ábrán a tapadási tartomány relatív hosszúsága mint a hengerrés alaktényezőjének függvénye van megrajzolva.

A 61.3. ábrán a tapadási ív relatív hosszúsága mint a  $\frac{\Delta h}{D}$  és a  $\frac{h_1}{D}$  függvénye látható alumínium és réz hengerrésénél.

TARNOWSKI kísérletei igen határozottan azt mutatták, hogy a súrlódási tényező növekedésével a tapadási ív növekszik, csökkenésével pedig a tapadási ív is csökken [61.1].

## 62. A KÜLÖNBÖZŐEN NYOMOTT RÉSZEK KÖLCSÖNHATÁSA VALAMELY DARAB HENGERLÉSEKOR

A hengerrés alakítási jelenségeinek megértéséhez feltétlenül tudnunk kell, hogy hengerréskor a darab különbözően nyomott részei milyen kölcsönhatással vannak egymásra. Üregben való hengerrésnél például a darab

eredő hosszúsága csak a kölcsönhatások ismeretében határozható meg (62.1. ábra). Négyzetes keresztmetszetű darab (pl. lemez) hengerlésénél a darab különböző részei különbözőképpen szélesednek, és így, ha ezek a részek szabadon hosszabbodhatnának meg, a hengerlés után különböző lenne a hosszúságuk. A hengerek közül kifutó darabnak azonban csak egy eredő hossza van.

Kísérleti megfigyelések szerint a hengerelt darab eredő hosszúságát az üreg (kaliber) mögött, a szúrás után a következő munkatételből lehet jó megközelítéssel meghatározni:

Az a munka, amely egy egyenlőtlenül nyomott darab eredő fajlagos nyúlását létrehozza, GELEJI szerint [62.1] egyenlő azoknak a munkáknak összegével, amelyek az egyes részek természetes fajlagos megnyúlását hoznák létre, ha az egyes részek egymástól függetlenek lennének:

$$\sum_{i=1}^n k_f \left( \frac{f_{1i} + f_{2i}}{2} \right) \left( \frac{\Delta l_i}{l_1} \right) = k_f \left( \frac{\Delta l_e}{l_1} \right) \left( \frac{F_1 + F_2}{2} \right); \quad (62.1)$$

itt  $k_f$  a hengerelt anyag alakítási szilárdsága,

$f_{1i} = \Delta b_i H_i$  az  $i$ -ik elemi keresztmetszet területe (62.1. ábra) a szúrás előtt,

$f_{2i} = \Delta b_i h_i$  az  $i$ -ik elemi keresztmetszet területe (62.1. ábra) a szúrás után,

$\Delta l_i$  a hengerelt darab  $i$ -ik részének természetes meghosszabbodása,

$l_1$  a hengerelt darab hossza a szúrás előtt,

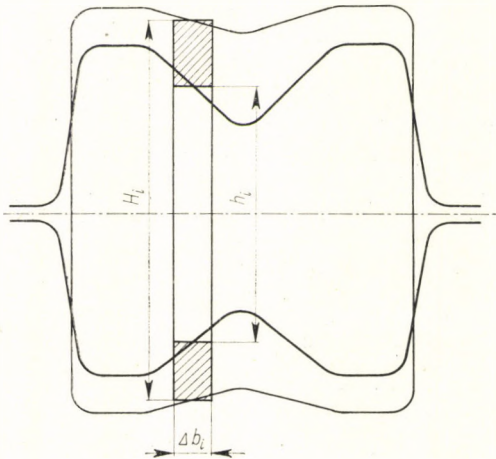
$\frac{\Delta l_i}{l_1}$  a  $\Delta b_i$  szélességű  $i$ -ik darabrész természetes meghosszabbodása,

$l_1$

$\Delta l_e$  a hengerelt darab eredő meghosszabbodása ( $l_2 - l_1 = \Delta l_e$ ),

$\frac{\Delta l_e}{l_1}$  a hengerelt darab eredő fajlagos meghosszabbodása,

$l_1$



62.1. ábra. A különbözően nyomott részek kölcsönhatása valamely darab üregben történő hengerlésénél



$F_1$  a hengerelt darab keresztmetszete a szűrés előtt,  
 $F_2$  a hengerelt darab keresztmetszete a szűrés után.  
A (62.1) egyenletből a darab eredő fajlagos megnyúlása:

$$\frac{\Delta l_e}{l_1} = \frac{\sum_{i=1}^n (f_{1i} + f_{2i}) \frac{\Delta l_i}{l_1}}{F_1 + F_2}, \quad (62.2)$$

a darab hossza a szűrés után:

$$l_2 = l_1 \left( 1 + \frac{\Delta l_e}{l_1} \right). \quad (62.3)$$

A (62.2) egyenlettel megadott eredő fajlagos megnyúlás felvilágosítást ad arról is, hogy milyen volt vagy milyen az üreg töltése.

Hengerlés folyamán a darab térfogata állandó:

$$V = F_1 l_1 = F_2 l_2, \quad (62.4)$$

azaz a darab hossza a szűrés után:

$$l_2 = l_1 \frac{F_1}{F_2}. \quad (62.5)$$

Írható, hogy

$$l_2 = l_1 \left( 1 + \frac{\Delta l_e}{l_1} \right) = l_1 \frac{F_1}{F_2}, \quad (62.6)$$

és ebből

$$1 + \frac{\Delta l_e}{l_1} = \frac{F_1}{F_2}, \quad (62.7)$$

illetőleg

$$\frac{\Delta l_e}{l_1} = \frac{F_1 - F_2}{F_2}. \quad (62.8)$$

Ha  $F_2$  az üreg keresztmetszete, akkor a (62.8) egyenlet így is írható:

$$\frac{\Delta l_e}{l_1} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{F_1 - F_2}{F_2}. \quad (62.9)$$

Ez azt jelenti, hogy a (62.8) egyenlet akkor érvényes, ha az üreg helyesen van töltve; ha az eredő fajlagos megnyúlás,  $\frac{\Delta l_e}{l_1}$  nagyobb, mint a (62.9) egyenlet jobb oldala, akkor az üreg üresen szalad, ha viszont kisebb mint az egyenlet jobb oldala, akkor az üreg túl van töltve.

### 63. A HENGERLÉSNÉL FELLÉPŐ SZÉLESEDÉS

Hengerlésnél szélesedésen azt a jelenséget értjük, hogy a hengerrésből kifutó darab, amennyiben valami külső körülmény ezt nem akadályozza, szélesebb, mint a hengerrésbe befutó darab (63.1. ábra).

Több kutató megkísérelte, hogy a szélesedés nagyságát meghatározza. Számos empirikus vizsgálat alapján képleteket állítottak fel a szélesedés kiszámítására. Ezek a próbálkozások azonban nem vezettek megnyugtató eredményhez.

A számos empirikus formula közül itt kettőt említünk meg. Az egyik a legrégebb, a L. GEUZE képlete, amely szerint az abszolút szélesedés:

$$\Delta b = b_2 - b_1 = 0,35 (h_1 - h_2) = 0,35 \Delta h. \quad (63.1)$$

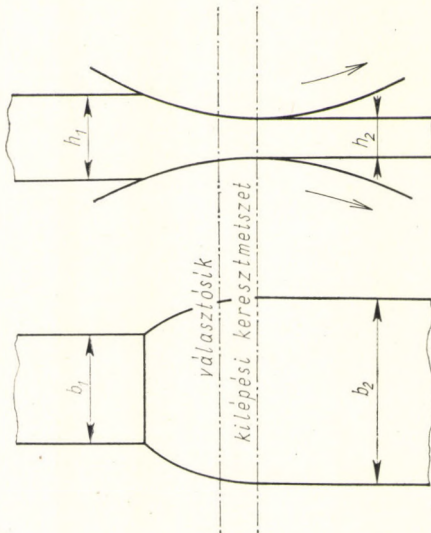
Ebben a képletben  $b_1$  és  $b_2$  a darab szélessége,  $h_1$  és  $h_2$  pedig a darab vastagsága a szűrés előtt és után.

E. SIEBEL gondos kísérletei alapján a szélesedés kiszámítására a következő formulát állította fel [63.1]:

$$\Delta b = b_2 - b_1 = Cl_d \frac{\Delta h}{h_1} = C \sqrt{r \Delta h} \frac{\Delta h}{h_1}; \quad (63.2)$$

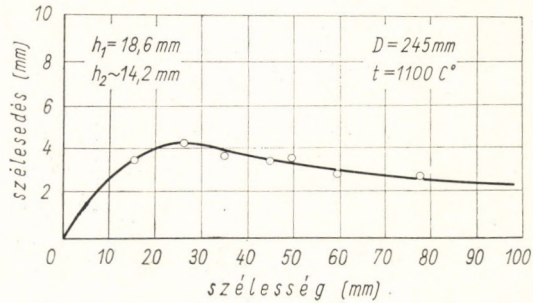
itt  $l_d$  a nyomott ív hossza,  $r$  a hengerek sugara,  $C$  egy együttható. SIEBEL úgy találta, hogy ez az állandó  $C = 0,35$ . SIEBEL formulája tehát a következő alakban használatos:

$$b_2 - b_1 = 0,35 l_d \frac{\Delta h}{h_1}. \quad (63.3)$$



63.1. ábra. A választósík kialakulása a hengerrésben

63.2. ábra. Szélesedés a hengerelt darab kiinduló szélességének függvényében, TAFEL és KNOLL szerint

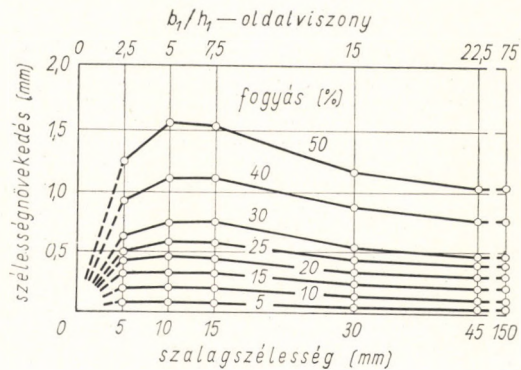


G. SACHS [62.3], W. TAFEL [63.3], majd W. TRINKS [63.4] felhívta a szakvilág figyelmét arra, hogy az abszolút szélesedés a darab szélességétől függ, és így SIEBEL formulája korrekcióra szorul. A szélesedés függését a szélességtől igen jól szemléltetik meleghengerrésnél W. TAFEL és W. KNOLL kísérletei [63.3] (63.2. ábra), hideghengerrésnél pedig W. LUEG és A. POMP kísérletei [63.5] (63.3. ábra).

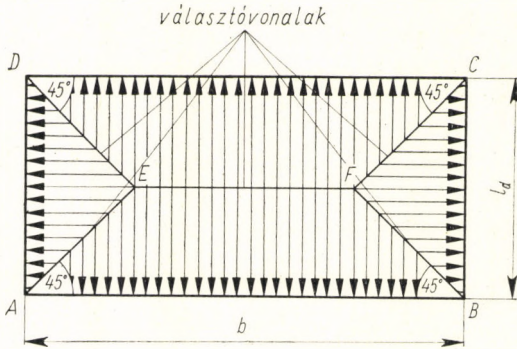
Az alábbiakban ismertetjük a szélesedés keletkezését és nagyságát megmagyarázó Geleji-féle elméletet [63.6]. A szélesedés kiszámítására szolgáló képletek levezetése egyszerűsítő előfeltételek mellett történt.

A 28. fejezetben foglalkoztunk a nyomott prizma keresztmetszetének a magasság csökkentése következtében beálló változásával. Láttuk, hogy a paralelepipedon alakú prizma keresztmetszetében választóvonalak lépnek fel (28.2. és 63.4. ábra), amelyek mentén az anyag folyásiránya megváltozik. A választóvonal-rendszer párhuzamos nyomólapok esetén szimmetriát mutat a keresztmetszet hossz- és kereszt tengelyére vonatkoztatva. Ha a nyomólapok nem párhuzamosak, hanem szöget zárnak be egymással, akkor ez a szimmetria azonnal megbomlik. Ha a két nyomólap metszésvonala a prizma hossz tengelyével párhuzamos, akkor a választóvonal a nyomólapok szögétől függően eltolódik a nyomólapok metszésvonala felé (63.5. ábra).

Ha megnézzük az 56.4. ábrát, amely az anyagáramlás kísérletileg meghatározott irányait tünteti fel a hengerrésben, akkor azt látjuk, hogy az



63.3. ábra. Szélesedés a darab kiinduló szélességének függvényében acélszalagok hideg hengerrésnél, LUEG és POMP szerint



63.4. ábra. A párhuzamos nyomólapok között nyomott prizma keresztmetszetében feltételezett anyagáramlás és választóvonalak

56.4. és a 63.5. ábra lényegileg hasonló egymáshoz. A hengerrésben levő anyag egy prizma, amely ferde nyomólapok között deformálódik (63.6. ábra).

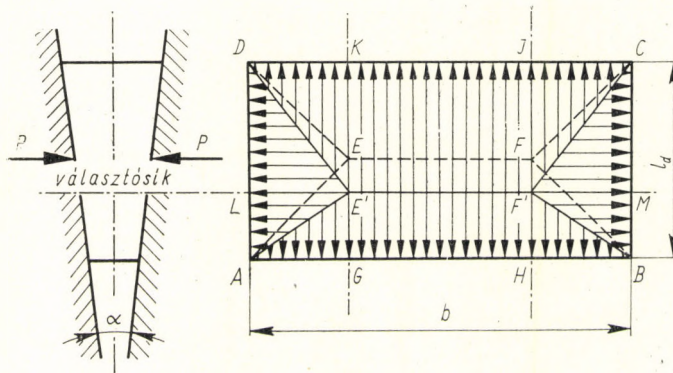
Az anyagáramlás sebessége a hengerrés irányában a választó keresztmetszeten (a semleges keresztmetszeten) keresztül  $v_s$ ; ez a sebesség a 63.7. ábra szerint:

$$v_s = v_k \cos \varphi_s ; \quad (63.4)$$

$\varphi_s$  a választó keresztmetszethez tartozó szög és  $v_k$  a hengerek kerületi sebessége [(57.24) és (66.41) egyenlet].

A választó (semleges) keresztmetszetben, mint már fent láttuk, a darabnak a választósíkhöz tartozó, hengerrel érintkező felületelemei és a hengernek ezekkel érintkező felületelemei egymáson nem csúsznak, hanem együtt szaladnak.

A választósík a szűrés folyamán nem változtatja helyzetét. A  $\varphi_s$  szög a szűrés folyamán nem változik.



63.5. ábra. A ferde nyomólapok között nyomott prizma keresztmetszetében feltételezett anyagáramlás és választóvonalak. A választósík eltolódása a nyomólapok metszővonalára felé

Szúráskor a  $h_1 b_1$  keresztmetszetű darab belép a hengerrésbe. Ha szélesedés nem lenne, akkor a választó keresztmetszeten csak egy  $h_s b_1$  keresztmetszetű darab tudna keresztülfutni, amikor is  $h_s$  a választó keresztmetszet magassága (63.7. ábra):

$$h_s = h_2 + 2r(1 - \cos \varphi_s). \quad (63.5)$$

Mint ahogy sima hengerek között mindig lép fel szélesedés, a választó keresztmetszeten másodpercenként keresztülfutó anyagmennyiség térfogata:

$$V_s = h_s b_s v_s = h_s b_s v_k \cos \varphi_s. \quad (63.5a)$$

A (63.5a) egyenlet a következőképpen is írható:

$$V_s = b_1 h_s v_s + (b_s - b_1) h_s v_s. \quad (63.6)$$

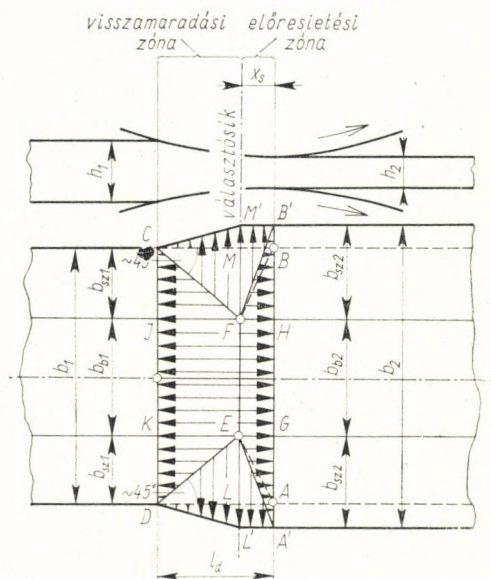
Itt

$$\Delta V = (b_s - b_1) h_s v_s = (b_s - b_1) h_s v_k \cos \varphi_s \quad (63.7)$$

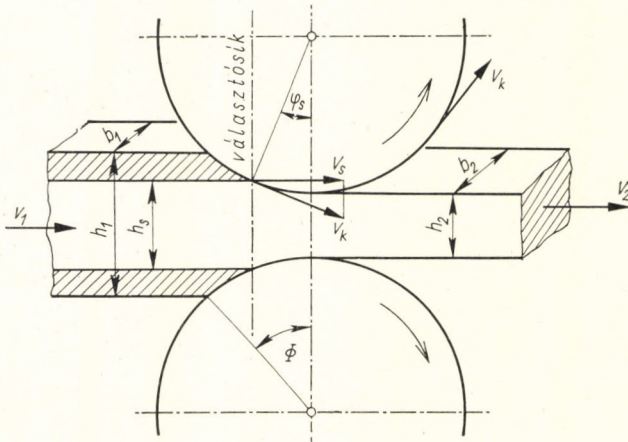
az az anyagtérfogat, amely szélesedésbe megy át. A szélesedés tehát:

$$\Delta b_s = (b_s - b_1) = \frac{\Delta V}{h_s v_s}. \quad (63.8)$$

Gyakorlatilag a szélesedés a választó keresztmetszetig teljes mértékben kifejlődik. Ez a szélesedés a következőképpen határozható meg:



63.6. ábra. A hengerrésben levő prizmat ferde nyomólapok nyomják össze



63.7. ábra. A választósík szerepe a szélesedés kialakulásában

A hengerrésbe befogott anyag térfogata közelítőleg (63.8. ábra):

$$V(=) \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right) \left( \frac{b_1 + b_2}{2} \right) l_d. \quad (63.9)$$

Ez a térfogat két részből tevődik össze:

$$V = V_I + V_{II}; \quad (63.10)$$

$V_I$  a választó (semleges) keresztmetszet előtt levő és  $V_{II}$  a választó keresztmetszet mögött levő anyag térfogata.

Tegyük fel közelítéssel, hogy a  $V_I$  térfogat ( $V_I = abcd \square \times b_1$ ) egy  $h$  magasságú paralelepipedonra van átalakítva ( $V_I = a'b'c'd' \square \times b_1 = b_1 l_1 h$ ). Miközben a hengerek  $(\alpha - \varphi_s)$  szöggel elfordulnak, és az  $a$  pont a  $d$  pontba jut, a  $h$  magasságú paralelepipedon  $h - h_s = \Delta h$  magassággal kisebb lesz. Minthogy a hengereknek  $(\alpha - \varphi_s)$  szöggel való elfordulása alatt csak a  $h_s b_1 l_1$  anyagterefogat folyhat szélesedés nélkül a választó keresztmetszeten keresztül, a  $V_I$  térfogat egy részének szélesedésbe, többi részének a hengerlés irányával ellenkező irányba (visszafelé) kell áramolnia.

Egyelőre vizsgáljuk csak a hengerelt darab  $b_{sz1}$  szélességű külső zónáját, és tételezzük fel, hogy alakváltozása a  $b_{b1} = b_{b2} = b_b$  belső zóna alakváltozásától teljesen függetlenül megy végbe (63.7. ábra). A  $b_{sz1}$  szélességű külső zóna szélesedése az ábra szerint csak egyirányú. A  $b_{b1} = b_{b2} = b_b$  zónának elvben nincs szélesedése. (Erre a kérdésre még visszatérünk.)

Ha feltesszük, hogy a külső zóna  $h$  magasságú, négyzetes keresztmetszetű ( $DLEK$ ; 63.8. ábra),  $b_{sz1} l_1 h$  térfogatú prizmjának összenyomásakor az anyag mind az  $l_1$ , mind a  $b_{sz1}$  irányban, azaz mind a hengerlés, mind a szélesedés irányában egyforma fajlagos oldalhosszváltoztatással deformálódik, akkor a  $h$  magasságú prizma  $\Delta h$  magasságcsökkenése esetén az  $l_1$  oldalhosszúságból

$$l_s = l_1 + \Delta l_1 \quad (63.11)$$

és a  $b_{sz1}$  szélességből

$$b_{sz2} = b_{sz1} + \frac{l_{k1}}{l_1} \Delta l_1 \quad (63.12)$$

lesz, minthogy feltételeztük, hogy

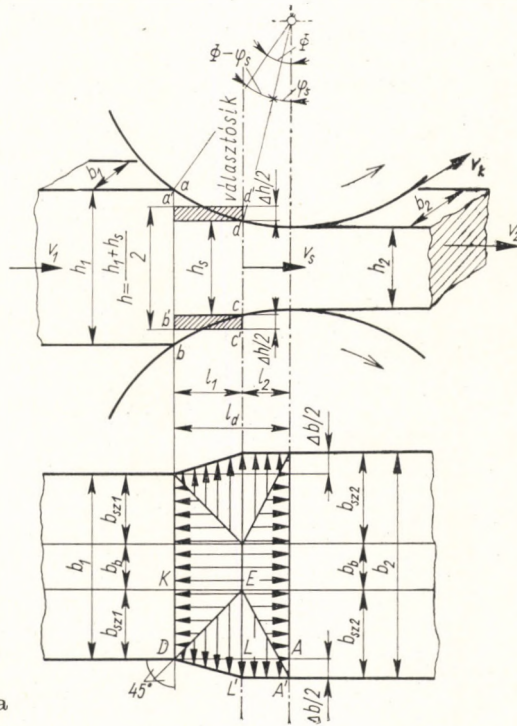
$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta b_{sz1}}{b_{sz1}} \quad (63.13)$$

Az alakváltozás folyamán a  $h$  magasságú prizma térfogata nem változik:

$$V_{Ik} = (h - \Delta h) (l_1 + \Delta l_1) \left( b_{sz1} + \frac{b_{sz1}}{l_1} \Delta l_1 \right) = h b_{sz1} l_1 \quad (63.14)$$

A műveletek elvégzése után egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\left[ \frac{b_{sz1}}{l_1} (h - \Delta h) \right] (\Delta l_1)^2 + [2 b_{sz1} (h - \Delta h)] \Delta l_1 - l_1 b_{sz1} \Delta h = 0 \quad (63.15)$$



63.8. ábra. A szélesedés oka a hengerrésben

Mint hogy  $h - \Delta h = h_s$ , a (63.15) egyenlet így is írható:

$$\left( \frac{b_{sz1}}{l_1} h_s \right) (\Delta l_1)^2 + (2 b_{sz1} h_s) \Delta l_1 - l_1 b_{sz1} (h_1 - h_s) = 0. \quad (63.16)$$

Mint hogy pedig

$$h - h_s = \frac{h_1 + h_s}{2} - h_s = \frac{h_1 - h_s}{2}, \quad (63.17)$$

a (63.16) másodfokú egyenlet a következőképpen is írható:

$$\left( \frac{b_{sz1}}{l_2} h_s \right) (\Delta l_1)^2 + (2 b_{sz1} h_s) \Delta l_1 - l_1 b_{sz1} \left( \frac{h_1 - h_s}{2} \right) = 0. \quad (63.18)$$

Ebből az egyenletből:

$$\Delta l_1 = \frac{-2 b_{sz1} h_s \pm \sqrt{(2 b_{sz1} h_s)^2 + 4 \frac{b_{sz1}}{l_1} h_s l_1 b_{sz1} \frac{h_1 - h_s}{2}}}{2 \frac{b_{sz1}}{l_1} h_s}. \quad (63.19)$$

Az egyik külső  $b_{sz1}$  sáv szélesedése tehát:

$$\Delta b_{sz1} = \frac{b_{sz1}}{l_1} \Delta l_1 = \frac{-b_{sz1} h_s \pm \sqrt{(b_{sz1} h_s)^2 + b_{sz1} h_s \frac{h_1 - h_s}{2}}}{h_s},$$

$$\Delta b_{sz1} = b_{sz1} \left( \sqrt{1 + \frac{h_1 - h_s}{2 h_s}} - 1 \right). \quad (63.20)$$

Ha a darab szélessége  $b_1 = 2 b_{sz1}$ , azaz ha  $b_b = 0$  (63.9. ábra), akkor a darab összes szélesedése:

$$\Delta b = b_2 - b_1 = 2 b_{sz1} \left( \sqrt{1 + \frac{h_1 - h_s}{2 h_s}} - 1 \right), \quad (63.21)$$

minthogy a két szélső sáv szélesedését összegezni kell.

Tekintve, hogy a  $b_1 l_d$  nyomott felületen a  $C$  és  $D$  pontból kiinduló  $DE$  és  $CF$  választóvonalakat közelítésben úgy vettük fel, hogy a darab oldalával  $45^\circ$ -os szöget alkossanak, következik, hogy

$$b_{sz1} (=) l_1 = l_d - x_s, \quad (63.22)$$



ahol  $x_s = l_2$  a semleges keresztmetszetnek a kifutó keresztmetszettől való távolsága [(66.43) egyenlet]; így az abszolút szélesedést GELEJI szerint a következő formában is írhatjuk:

$$\Delta b = 2(l_d - x_s) \left( \sqrt{1 + \frac{h_1 - h_s}{2h_s}} - 1 \right), \quad (63.23)$$

ha feltételezzük, hogy az  $l_1 b_1$  nyomott felület csak olyan széles, hogy az  $E$  és az  $F$  pont egymásba esik, azaz  $b_1 = 2l_1$ . Ha a hengerelt darab szélessége  $b_1 > 2l_1$ -nél, vagyis ha az  $E$  és az  $F$  pont nem esik egybe, akkor a két külső  $b_{sz1}$  szélességű sáv között van egy  $b_b$  szélességű sáv; ha ez a belső sáv nem függne szervesen össze a két szélső sávval, akkor csak hosszirányban nyúlna meg. Már W. TRINKS [63.4] megfigyelte, s W. LUEG és A. POMP [63.5] kísérletekkel igazolta, hogy a négyzetes keresztmetszetű darab szélesedése sima hengerek között a darab szélességétől függ (63.2. és 63.3. ábra). A szélső, szabadon szélesedő zónák és a középső, nem szélesedő zóna kölcsönhatással vannak egymásra, és ilyen módon a darabnak egy eredő meghosszabbodása és eredő szélesedése van.

Az eredő hosszúságot a (62.3) egyenlettel lehet meghatározni, amelyet az egyenlőtlenül nyomott darab eredő hosszúságának kiszámítására állapítottunk meg. Az eredő hosszúság segítségével azután az eredő szélesedés is kiszámítható.

Egy lemez alakú darab eredő alakváltozása a 63.10. ábrán látható. Ezen az ábrán:

$l_1$  a lemez hosszúsága,  $b_1$  a lemez szélessége,  $h_1$  a lemez vastagsága a szúrás előtt,

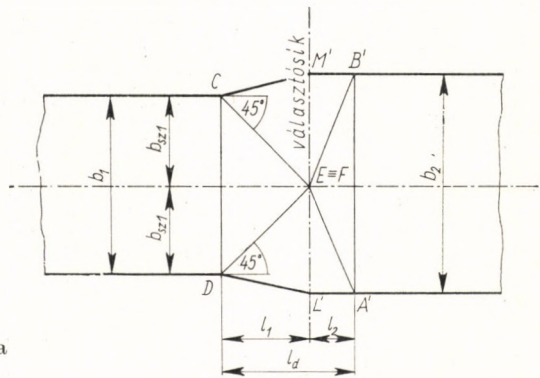
$l_2$  a lemez hosszúsága,  $b_2$  a lemez szélessége,  $h_2$  a lemez vastagsága a szúrás után,

$b_{b1}$  a lemez belső (középső) sávjának szélessége a szúrás előtt,

$b_{b2}$  a lemez belső sávjának szélessége a szúrás után ( $b_{b2} = b_{b1}$ ),

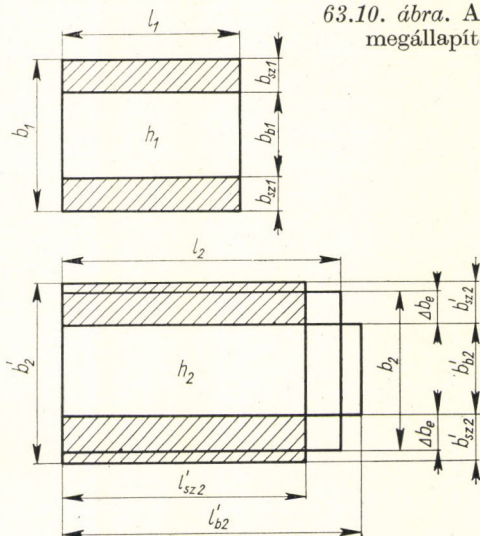
$l'_{sz2}$  a szélső sávok természetes hossza a szúrás után,

$l'_{b2}$  a belső sáv természetes hossza a szúrás után.



63.9. ábra. Anyagáramlás és választóvonalak a hengerrésben, ha  $l_d - l_s = l_d - l_2 = b_{k1}$

63.10. ábra. Az eredő meghosszabbodás megállapítása lemezhengerlésnél



A lemez fajlagos eredő megnyúlása a szűrés következtében [(62.2) egyenlet]:

$$\frac{\Delta l_e}{l_1} = \frac{(f_{b1} + f_{b2}) \frac{\Delta l_b}{l_1} + (f_{sz1} + f_{sz2}) \frac{\Delta l_{sz}}{l_1}}{F_1 + F_2}, \quad (63.24)$$

$f_{b1} = b_{b1} h_1 = (b_1 - 2 b_{sz1}) h_1$  a belső zóna keresztmetszete a szűrés előtt,  
 $f_{sz1} = 2 b_{sz1} h_1$  a két szélső zóna összkéretmetszete a szűrés előtt,  
 $f_{b2} = b_{b2} h_2$  a belső zóna keresztmetszete a szűrés után,  
 $f_{sz2} = 2 b_{sz2} h_2$  a két külső szabadon szélesedő zóna keresztmetszete a szűrés után,

$\frac{\Delta l_b}{l_1} = \frac{l'_{b2} - l_1}{l_1}$  a belső zóna fajlagos megnyúlása,

$l_2 = l_1 \left[ 1 + \frac{\Delta l_e}{l_1} \right]$  a lemez eredő hossza a szűrés után,

$\Delta l_e = l_2 - l_1$  a lemez eredő meghosszabbodása,

$b_2 = \frac{l_1 b_1 h_1}{l_2 h_2}$  a lemez eredő szélessége a szűrés után,

$\Delta b_e = b_2 - b_1$  a lemez eredő szélesedése,

$F_1 = h_1 b_1 = f_{b1} + f_{sz1}$  a lemez keresztmetszete a szűrés előtt,

$F_2 = b_2 h_2 = f_{b2} + f_{sz2}$  a lemez keresztmetszete a szűrés után.

Ha tehát valamely lemez alakú darab hengerlésénél ki akarjuk számítani a szélesedést, akkor először a (63.23) egyenlettel kiszámítjuk a két szélső szabadon szélesedő sáv természetes szélesedését, majd a fent leírt módon kiszámítjuk az eredő szélesedést:  $\Delta b_e$ -t.

Itt rá kell még mutatnunk a hengerlésnek arra az esetére, amikor  $l_d > b_1$ -nél (63.11. és 63.12. ábra). Ebben az esetben a választóvonalak rendszere a 63.11. ábra szerint helyeződik el, és az  $A'EFD$  és a  $B'CFE$  trapéz anyaga az alakváltozás folyamán a szélesedésbe áramlik.

Ebben az esetben az I. szakaszban a szélesedést a (63.20) egyenlettel számítjuk ki, amennyiben  $h_s \equiv h_I$ -nek vesszük. A II. szakaszban pedig a szélesedést annak a feltételezésével határozzuk meg, hogy itt a két választóvonal között minden kiszorított anyag a szélesedésbe áramlik:

$$\Delta h_{II} l_b b_I = \Delta b_{II} h_{II} l_b, \quad (63.25)$$

ahol  $\Delta h_{II} = \frac{h_I - h_{II}}{2}$ ;  $\Delta b_{II} = b_{II} - b_I$ .

A (63.25) egyenletből

$$\Delta b_{II} = \Delta h_{II} \frac{b_I}{h_{II}} \quad (63.26)$$

és

$$b_{II} = b_I + \Delta b_{II}. \quad (63.27)$$

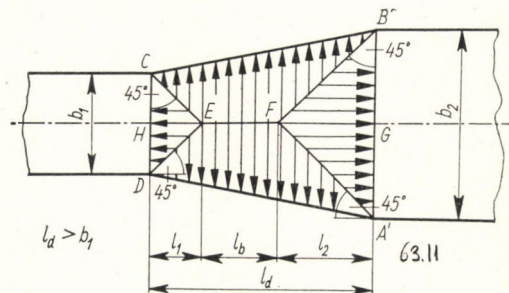
A III. szakaszban  $b_{II}$  további szélesedését ugyancsak a (63.20) egyenlettel kell kiszámítani. Az eredő szélesség pedig:

$$b_2 = b_{II} + \Delta b_{III}. \quad (63.28)$$

Ha a szélesedést egzaktabb módszerrel akarjuk meghatározni, gondolatmenetünk alapja a 63.13. ábra lesz. Itt A. I. CELIKOV [63.7] elgondolásából indulunk ki, és azt erősen kiegészítjük. A természetes szélesedést itt is a  $b_{sz}$  szélességű külső sávokra vonatkozólag határozzuk meg. Feltételezzük, hogy a  $CF$  és az  $FD$  vonal anyagáramlás szempontjából egy-egy választóvonal.

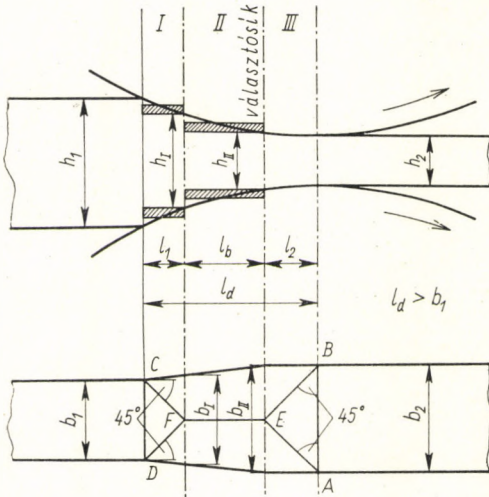
Az  $FM$  választósík előtt, tehát a visszamaradási zónában ( $x < l_1$ ) a kiszorított anyag térfogata:

$$dV_1 = 2 \frac{dh_x}{4} (y_1 + y) dx. \quad (63.29)$$



63.11. ábra. Anyagáramlás és választóvonalak négyzetes rúd hengerlésénél, ha  $b_1 < l_d$

63.12. ábra. A szélesedés kiszámítása, ha  $b_1 < l_d$



A szélesedésbe átmenő anyag térfogata:

$$dV_2 = \frac{dy}{2} h_x dx . \quad (63.30)$$

A két térfogat között GELEJI szerint a következő összefüggés áll fenn [63.6]:

$$\psi_I dV_1 = - dV_2 , \quad (63.31)$$

(tekintve, hogy  $dV_2$  növekszik, miközben  $dV_1$  csökken); itt  $\psi_I \leq 1$ , minthogy ténylegesen a kiszorított anyagnak csak egy része áramlik át a szélesedésbe, a másik része a hengerlés irányával ellenkező irányban visszafolyik az  $FM$  választósík előtt a visszamaradási zónába. Ha ebben a zónában a szélesedésbe és visszafelé egyforma nagy térfogat áramlik, akkor  $\psi_I = \frac{1}{2}$ .

A (63.31) egyenletet a visszamaradási zónára vonatkozólag a következőképpen is felírhatjuk:

$$\psi_I \frac{dh_x}{2} (y_I + y) dx + \frac{dy}{2} h_x dx = 0 , \quad (63.32)$$

illetőleg

$$\psi_I (y_I + y) dh_x + h_x dy = 0 . \quad (63.33)$$

Ha feltesszük, hogy  $\alpha_I = 45^\circ$ , akkor  $y_I = x$ ; ha  $\alpha_I \neq 45^\circ$ , akkor

$$y_I = x \operatorname{tg} \alpha_I = e_I x . \quad (63.34)$$

A (63.33) egyenlet a következőképpen is felírható:

$$\psi_I (e_I x + y) dh_x + h_x dy = 0. \quad (63.35)$$

Tegyük fel, hogy

$$h_x = a_I x + b_I = u \quad (63.36)$$

[a (63.36) egyenletben szereplő  $a_I$  és  $b_I$  együttható nagyságát a (63.62) egyenlet adja meg], akkor

$$dx = \frac{dh_x}{a_I} = \frac{du}{a_I}, \quad (63.37)$$

és akkor a (63.35) egyenletnek a következő alakja lesz:

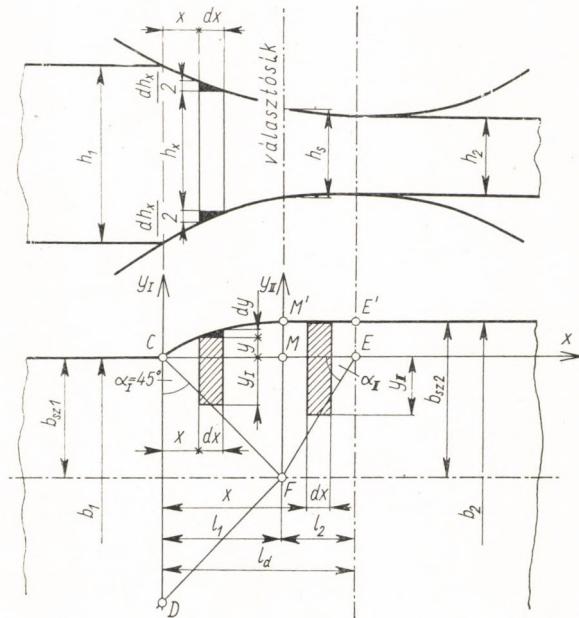
$$\psi_I (e_I x + y) a_I dx + (a_I x + b_I) dy = 0, \quad (63.38)$$

ebből

$$(a_I x + b_I) \frac{dy}{dx} + a_I \psi_I (e_I x + y) = 0. \quad (63.39)$$

Mint hogy a (63.36) egyenletből

$$x = \frac{u - b_I}{a_I}, \quad (63.40)$$



63.13. ábra. A szélesedés egzakt kiszámítása

a (63.39) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$u \frac{dy}{dx} + (\psi_I e_I) u - (\psi_I e_I b_I) + (a_I \psi_I) y = 0 . \quad (63.41)$$

Ha a következő jelöléseket használjuk:

$$C_1 = \psi_I e_I , \quad (63.42)$$

$$C_2 = \psi_I e_I b_I , \quad (63.43)$$

$$C_3 = \psi_I a_I , \quad (63.44)$$

akkor a (63.41) egyenlet így alakul:

$$u \frac{dy}{dx} + C_1 u - C_2 + C_3 y = 0 . \quad (63.45)$$

Mint hogy  $dx = \frac{du}{a_I}$  a (63.45) egyenlet a következőképpen írható:

$$a_I u \frac{dy}{du} + C_1 u - \underbrace{(C_2 - C_3 y)}_w = 0 . \quad (63.45a)$$

Ha

$$w = C_2 - C_3 y , \quad (63.46)$$

akkor

$$dy = - \frac{dw}{C_3} . \quad (63.47)$$

Ezek szerint a (63.45a) egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$- C_4 u \frac{dw}{du} + C_1 u - w = 0 , \quad (63.48)$$

ahol

$$C_4 = \frac{a_I}{C_3} . \quad (63.49)$$

Ha a (63.48) egyenletet  $u$ -val osztjuk, akkor

$$- C_4 \frac{dw}{du} + C_1 - \left( \frac{w}{u} \right) = 0 , \quad (63.50)$$

és

$$\frac{dw}{du} = \frac{1}{C_4} \left[ C_1 - \left( \frac{w}{u} \right) \right] . \quad (63.51)$$

Ha

$$w = uz, \quad (63.52)$$

akkor

$$\frac{dw}{du} = u \frac{dz}{du} + z = \frac{1}{C_4} (C_1 - z), \quad (63.53)$$

azaz

$$u \frac{dz}{du} = \frac{1}{C_4} (C_1 - z) - z = C_5 - C_6 z. \quad (63.54)$$

Ebben az egyenletben

$$C_5 = \frac{C_1}{C_4}, \quad (63.55)$$

$$C_6 = \frac{1 + C_4}{C_4}. \quad (63.56)$$

A (63.54) egyenlet alapján felírható:

$$\frac{dz}{C_5 - C_6 z} = \frac{du}{u}, \quad (63.57)$$

illetőleg

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{C_5 - C_6 z} = \int_{u_0}^u \frac{du}{u}, \quad (63.58)$$

ebből

$$\ln \frac{u}{u_0} = - \frac{1}{C_6} \ln \frac{C_5 - C_6 z}{C_5 - C_6 z_0}, \quad (63.59)$$

vagyis

$$\left( \frac{u}{u_0} \right)^{C_6} = \frac{C_5 - C_6 z_0}{C_5 - C_6 z}. \quad (63.60)$$

A műveletek elvégzése után az első, vagyis a visszamaradó zónára vonatkozólag azt kapjuk, hogy

$$y = \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right) \left\{ \frac{h_x}{\psi_I C_6} \left[ C_5 - (C_5 - C_6 \Psi_I e_I) \left( \frac{h_1}{h_x} \right)^{C_6} \right] - e_I h_1 \right\}. \quad (63.61)$$

Ebben az egyenletben

$$\left. \begin{aligned} h_x &= a_I x + b_I = h_1 - \left( \frac{h_1 - h_s}{l_1} \right) x, \\ \text{és így [(63.14) ábra]} \\ a_I &= - \left( \frac{h_1 - h_s}{l_1} \right), \\ b_I &= h_1, \end{aligned} \right\} \quad (63.62)$$

ahol  $h_s$  a darab keresztmetszetének magassága a választósíkban.

Ha feltesszük, hogy

$$\psi_I = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad e_I = 1,$$

akkor

$$C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{h_1}{2}; \quad C_3 = - \left( \frac{h_1 - h_s}{2l_1} \right); \quad C_4 = 2;$$

$$C_5 = \frac{1}{4} \quad \text{és} \quad C_6 = \frac{3}{2}.$$

A számítások elvégzése után a (63.61) egyenlet alakja:

$$({}_1)y = \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right) \left\{ \frac{h_x}{3} \left[ 1 + 2 \left( \frac{h_1}{h_x} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - h_1 \right\}. \quad (63.63)$$

Ez felületnézetben a darab határgörbéjének egyenlete, éspedig a választóvonal előtt, azaz a visszamaradási zónában a  $C$  és az  $M'$  pont között (63.13 ábra).

Az előresietési zónában ( $l_d \geq x \geq l_1$ ) a (63.62) egyenlethez hasonló egyenlet írható fel a határgörbére:

$$\psi_{II} \frac{dh_x}{2} (y_{II} + y) dx + \frac{dy}{2} h_x dx = 0, \quad (63.32a)$$

és ebből

$$\psi_{II} (y_{II} + y) dh_x + h_x dy = 0. \quad (63.64)$$

Minthogy az előresietési zónában

$$e_{II} = \operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{y_{II}}{l_d - x} = \frac{b_{sz1}}{l_2}, \quad (63.65)$$

és így

$$y_{II} = e_{II} (l_d - x), \quad (63.66)$$



a (63.64) egyenlet alakja a behelyettesítések elvégzése után;

$$\psi_{II} [e_{II} (l_d - x) + y] dh_x + h_x dy = 0. \quad (63.67)$$

Ha feltesszük, hogy (63.12. ábra):

$$h_x = a_{II} x + b_{II}, \quad (63.68)$$

$$b_{II} = h_2 + \frac{h_s - h_2}{l_2} l_d, \quad (63.69)$$

$$a_{II} = -\frac{h_s - h_2}{l_2}, \quad (63.70)$$

úgy

$$h_x = -\frac{h_s - h_2}{l_2} x + h_2 + \frac{h_s - h_2}{l_2} l_d, \quad (63.71)$$

és ebből

$$dh_x = -\left(\frac{h_s - h_2}{l_2}\right) dx = a_{II} dx. \quad (63.72)$$

Ezeknek az egyenleteknek a felhasználásával a (63.67) egyenlet a következő alakot kapja:

$$\psi_{II} [e_{II} (l_d - x) + y] a_{II} dx + (a_{II} x + b_{II}) dy = 0, \quad (63.73)$$

és ebből következik az alábbi differenciálegyenlet:

$$(a_{II} x + b_{II}) \frac{dy}{dx} + a_{II} \psi_{II} [e_{II} (l_d - x) + y] = 0. \quad (63.74)$$

Ha a számításokat elvégezzük, az előresietési zónára (II) vonatkozólag a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} (II)y = & \frac{e_{II} h_2 l_2}{(h_s - h_2)} - \frac{h_x l_2}{\psi_{II} (1 + \psi_{II}) (h_s - h_2)} \left\{ \psi_{II}^2 e_{II} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{h_s}{h_x}\right)^{(1+\psi_{II})} \left[ \psi_{II}^2 e_{II} - \psi_{II} (1 + \psi_{II}) \frac{1}{h_s} \left( e_{II} h_2 - \frac{\Delta b_I}{2} \cdot \frac{(h_s - h_2)}{l_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (63.74a)$$

Az előresietési zónában, amikor ugyanis  $l_1 \leq x \leq l_d$ , feltesszük, hogy  $\psi_{II} = \frac{1}{2}$  és  $e_{II} \neq 1$ ; itt a (63.65) egyenlet szerint:

$$e_{II} = \operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{y_{II}}{l_d - x} = \frac{b_{sz1}}{l_2}, \quad (63.75)$$

tehát a (63.74a) egyenlet így alakul:

$$(II)y = \frac{3 b_{sz1} h_2 - 2 h_x l_2}{3 (h_s - h_2)} \left\{ \frac{b_{sz1}}{4 l_2} - \left( \frac{h_s}{h_x} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{b_{sz1}}{4 l_2} - \frac{3}{2} \frac{1}{h_s} \left[ \frac{b_{sz1} h_2}{l_2} - \frac{\Delta b_I}{2} \cdot \left( \frac{h_s - h_2}{l_2} \right) \right] \right] \right\}. \quad (63.76)$$

Ebben az egyenletben  $b_{sz1}$  a külső zóna szélessége (63.13. ábra) és  $\Delta b_I$  a választóvonalig fellépő szélesedés [(63.63) egyenlet]:

$$\Delta b_I = 2 \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right) \left\{ \frac{h_s}{3} \left[ 1 + 2 \left( \frac{h_1}{h_s} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - h_1 \right\}. \quad (63.77)$$

Az összélesedés a belépési keresztmetszettől a kilépési keresztmetszetig GELEJI S. szerint [63.6]:

$$\begin{aligned} \Delta b = (\Delta b_I + \Delta b_{II}) = & 2 \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right) \left\{ \frac{h_s}{3} \left[ 1 + 2 \left( \frac{h_1}{h_s} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - h_1 \right\} + \\ & + 2 \frac{3 b_{sz1} h_2 - 2 h_s l_2}{3 (h_s - h_2)} \left\{ \frac{b_{sz1}}{4 l_2} - \left( \frac{h_s}{h_2} \right)^{\frac{3}{2}} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{b_{sz1}}{4 l_2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{h_s} \left[ \frac{b_{sz1} h_2}{l_2} - \frac{\Delta b_I}{2} \cdot \left( \frac{h_s - h_2}{l_2} \right) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (63.78)$$

Ebben az egyenletben  $h_s$  a darab magassága a semleges keresztmetszetben ismeretlen; ez a (66.41) egyenlet értelmében:

$$h_s = h_2 \left[ \frac{\operatorname{tg} \Phi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \Phi - (\operatorname{tg}^2 \Phi - \mu^2) (h_1/h_2)^\mu / \operatorname{tg} \Phi}}{(\mu + \operatorname{tg} \Phi)} \right]^{\operatorname{tg} \Phi / \mu}$$

ahol  $\Phi$  a befogás íve,  $\mu$  a súrlódási tényező a hengerrésben,  $h_1$  és  $h_2$  a darab magassága szűrés előtt és után.

Ezt az egyenletet a hengerrésben fellépő erők egyensúlyi egyenletéből vezettük le, mint ahogy azt a 66. fejezetben látni fogjuk.

A hengerelt darab eredő szélesedését a 63.9. ábra és a (63.23) egyenlet segítségével kell meghatározni.

#### 64. AZ ELŐRESIETÉS MEGHATÁROZÁSA

Az előresietés azt jelenti, hogy a hengerrésből kifutó darab sebessége nagyobb a hengerek kerületi sebességénél. Az előresietést tehát a hengerek kerületi sebességére vonatkoztatjuk, és legtöbbször százalékosan fejezzük ki.

Az előresietés problémájával számos kutató foglalkozott, így E. KIRCHBERG [64.1], J. PUPPE [64.2], W. TRINKS [64.3], COTEL ERNŐ [64.4], E. SIEBEL [64.5]. A 64.1., 64.2. és 64.3. ábra E. SIEBEL és E. FANGMEIER [64.6] kísérleti eredményeit meleghengерlésnél, a 64.4., 64.5. és 64.6. ábra W. LUEG és A. POMP [64.7] kísérleti eredményeit hideghengерlésnél mutatja be.

Hengерléskor a hengerrésből másodpercenként annyi anyag lép ki, mint amennyi másodpercenként a semleges keresztmetszeten keresztül áramlik (64.7. ábra):

$$h_s b_s v_s = h_2 b_2 v_2. \quad (64.1)$$

Itt

$$v_s = v_k \cos \varphi_s, \quad (64.2)$$

ahol  $v_k$  a hengerek kerületi sebessége,  $\varphi_s$  a választó (semleges) keresztmetszethez tartozó központi szög. Írható továbbá a fentiek szerint:

$$h_s b_s v_k \cos \varphi_s = h_2 b_2 v_2. \quad (64.3)$$

Mint hogy a szélesedés a választóvonalig teljesen kifejlődik, írható:

$$b_s (=) b_2. \quad (64.4)$$

Ennek alapján a (64.3) egyenletből

$$v_2 = v_k \cos \varphi_s \frac{h_s}{h_2} = v_k \cos \varphi_s \left[ \frac{h_2 + 2r(1 - \cos \varphi_s)}{h_2} \right], \quad (64.5)$$

ahol

$$h_s = h_2 + 2r(1 - \cos \varphi_s), \quad (64.6)$$

és a 64.7. ábra szerint:

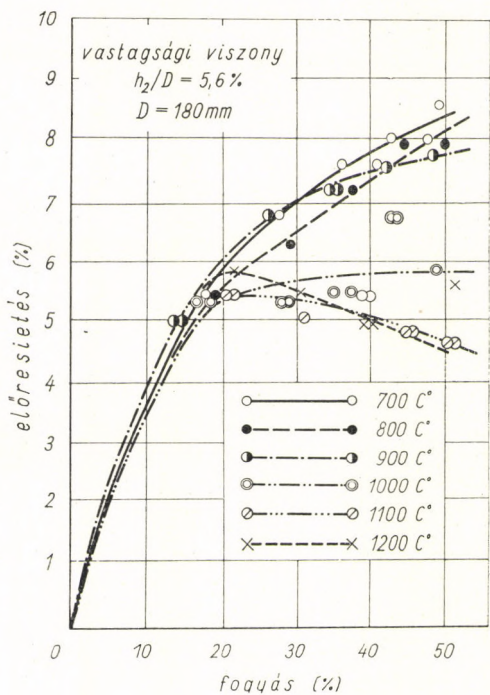
$$\varphi_s (=) \sin \varphi_s = \frac{l_2}{r} = \frac{x_s}{r}. \quad (64.7)$$

Az előresietési tényező:

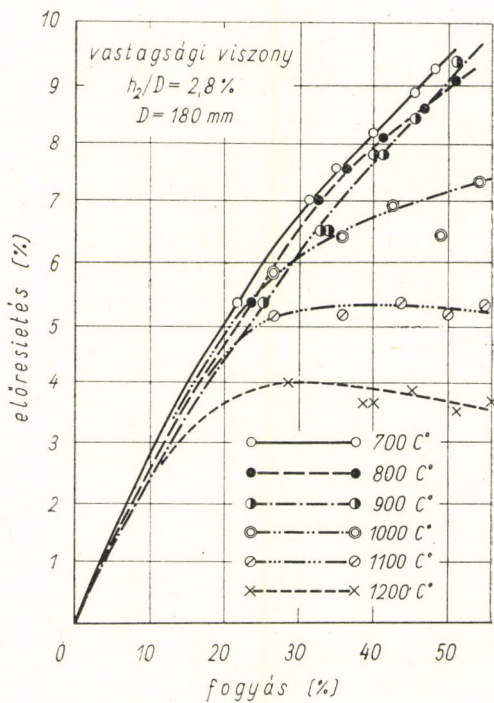
$$\delta = \frac{v_2}{v_k} = \cos \varphi_s \left[ \frac{h_2 + 2r(1 - \cos \varphi_s)}{h_2} \right], \quad (64.8)$$

és a százalékos előresietés:

$$e\% = (\delta - 1) 100\%. \quad (64.9)$$



64.1. ábra. Százalékos előresietés a fogyás függvényében szénzegény acél meleghengerrlésénél, SIEBEL és FANG-MEIER szerint



64.2. ábra. Százalékos előresietés a fogyás függvényében szénzegény acél meleghengerrlésénél, SIEBEL és FANG-MEIER szerint

A kilépési sebesség (64.5) egyenlete, valamint az előresietési tényező (64.8) egyenlete legtöbbször magas értékeket ad, és a kísérletek szerint az előresietésnek a keresztmetszetcsökkenés és a súrlódási tényező függvényében maximuma van, ami azonban a (64.5) és a (64.8) egyenletben nincs kifejezve. A jelenséget okozhatja

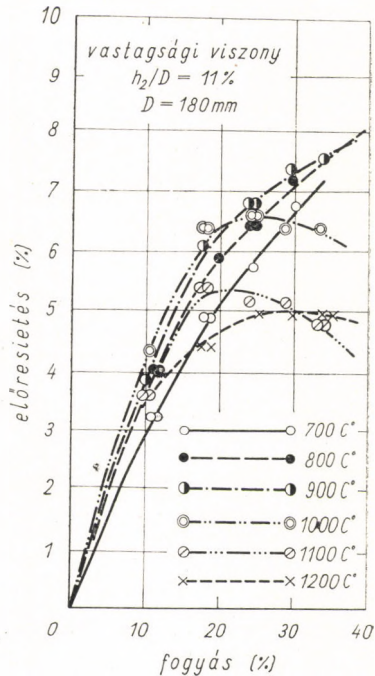
1. a semleges keresztmetszet eltolódása a kilépési keresztmetszet felé,
2. tapadási tartomány kialakulása a nyomófelületeken a semleges keresztmetszet körül.

Ha a nyomófelületeken a darab és a hengerfelületek között nem lép fel tapadás, akkor a hengerek közül kilépő darab sebessége a (64.5) egyenlettel, az előresietési tényező a (64.8) egyenlettel határozható meg. Ha azonban van tapadási tartomány, akkor a (64.5) és a (64.8) egyenletben  $h_s$  helyébe  $h_{h2}$ -t, a tapadási tartomány határához tartozó darab magasságát kell behelyettesíteni (64.8. ábra).  $h_s$ -hez a  $\varphi_s$  központi szög,  $h_{h2}$ -höz a  $\varphi_{h2}$  központi szög tartozik ( $\varphi_{h2} < \varphi_s$ ).

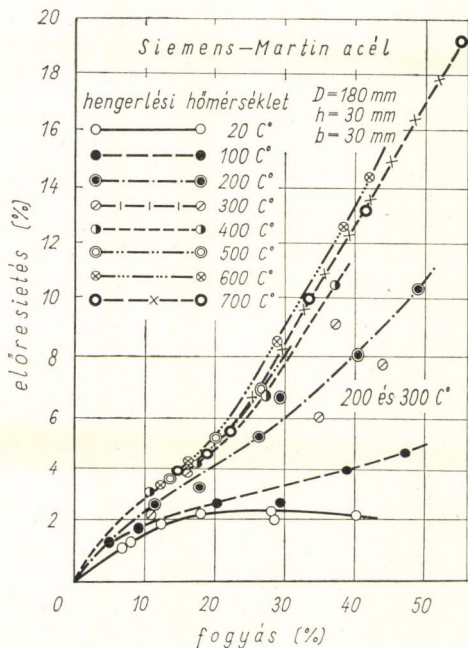
A tapadási tartomány határai ott vannak, ahol

$$\mu k_x = \xi k_f = 0,578 k_f, \quad (64.10)$$

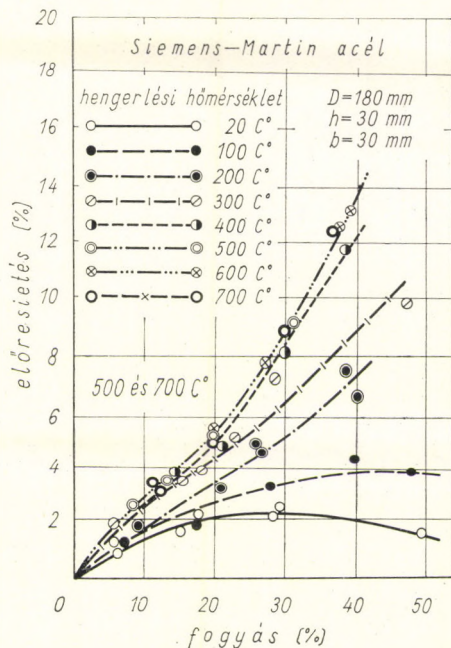
azaz, ahol a fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás)  $\mu$ -szöröse a  $k_f$  alakítási szilárdságnak 0,578-ad része ( $\tau_{\max}$ );  $k_x$  alakítási ellenállás a  $k_x = f(x)$  függvényből számítható ki (lásd a 66. fejezetet). A tapadási



64.3. ábra. Százalékos előresietés a fogyás függvényében szénszegény acél meleghengerlésénél, SIEBEL és FANGMEIER szerint



64.4. ábra. Százalékos előresietés a fogyás függvényében acélszalag közepes hőmérsékleten történő hengrelésénél, POMP és LUEG szerint



64.5. ábra. Százalékos előresietés a fogyás függvényében acélszalag közepes hőmérsékleten történő hengrelésénél, POMP és LUEG szerint

tartomány határa tehát ott van (64.8. ábra), ahol

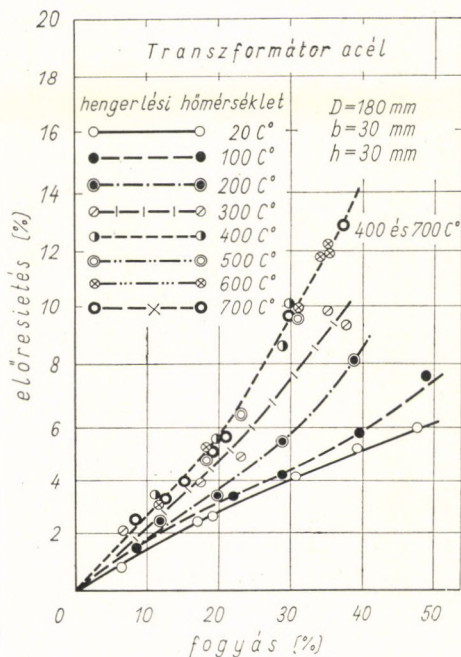
$$k_{xi} = 0,578 \frac{k_f}{\mu} . \quad (64.11)$$

Tapadási tartomány van mindenhol, ahol  $k_x > k_{xi}$ . A tapadási tartomány szélességének növekedésével  $\varphi_{h2}$  egyre kisebb lesz  $\varphi_s$ -nél, tehát az előresietés is egyre kisebb lesz. A hengrelt darab tapadási tartományba eső része ugyanis a henger kerületi sebességének megfelelő sebességgel mozog. A hengerrészen a darabnak csak az a része szalad nagyobb sebességgel keresztül, amely a tapadási tartomány határa és a kilépő keresztmetszet közé esik.

## 65. AZ ANYAGÁRAMLÁS IRÁNYAI A HENGERRÉSBEN

Az anyagáramlás irányait a hengerrésben E. SIEBEL és W. LUEG [65.1] kísérletekkel állapította meg (56.4. ábra). Az egyes elemi térfogatok mozgásirányait a hengerrésben kétféle sebesség határozza meg (65.1. ábra) [65.2].

64.6. ábra. Százalékos előresietés a fogyasztás függvényében acélszalag közepes hőmérsékleten történő hengerlésénél, POMP és LUEG szerint



Az egyik darab és a hengerek érintkező felületeinek egymáson való relatív csúszási sebessége (57.18):

$$v_{rx} = v_k \left( 1 - \frac{h_2}{h_x} \frac{\delta}{\cos \varphi_x} \right). \quad (65.1)$$

A másik sebességi komponens a szélesedés következtében lép fel (65.1. ábra):

$$v_{xY} = \frac{dy}{di} \cdot \frac{Y}{b_{sz1}}. \quad (65.2)$$

Ebben az egyenletben  $y$  a határgörbe függvénye [(63.63) és (63.74)];  $Y$  az elemi térfogatnak az  $xO_Y$  abszcisszától való távolságát,  $i$  az időt ( $s$ ),  $b_{sz1}$  a darab határsávjának szélességét (65.1. ábra) jelenti. Ezek szerint a visszamaradási zónában:

$$y = \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right) \left\{ \frac{h_x}{3} \left[ 1 + 2 \left( \frac{h_1}{h_x} \right)^{\frac{2}{3}} \right] - h_1 \right\}. \quad (63.63)$$

Az áramlási vonal iránytangense valamely  $xY$  pontban (65.1. ábra):

$$\operatorname{tg} \vartheta_{xY} = - \frac{v_{xY}}{v_{rx}}, \quad (65.3)$$

és az eredő sebesség ebben a pontban:

$$v_{eI} = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{xy}^2}. \quad (65.4)$$

A  $b_b$  szélességű nem szélesedő középső sávban az anyagáramlás iránya megközelítőleg azonos a hengerlés irányával. Ez a középső sáv az alakítás folyamán csak annyit szélesedik, amennyi a külső sávok és a középső sáv egyenlőtlen nyúlásának kölcsönhatása következtében jön létre (62. fejezet). A  $b_{sz1}$  és a  $b_{sz2}$  szélső sávban az anyag az áramlási vonalak mentén mozog, amit a következőképpen fejezhetünk ki [(65.3) egyenlet]:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{v_{xY}}{v_{rx}}. \quad (65.3a)$$

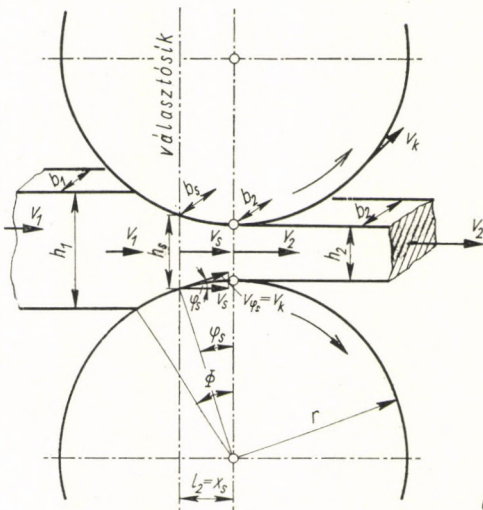
A be- és kilépési keresztmetszetben, ahol  $v_{xY} = 0$ ,

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta_{xY} = 0; \quad (65.5)$$

ez azt jelenti, hogy az áramlási vonalak iránvtangensei ezeken a helyeken párhuzamosak az  $x$  tengellyel.

A választósíkokban  $v_{rx} = 0$ , és így itt

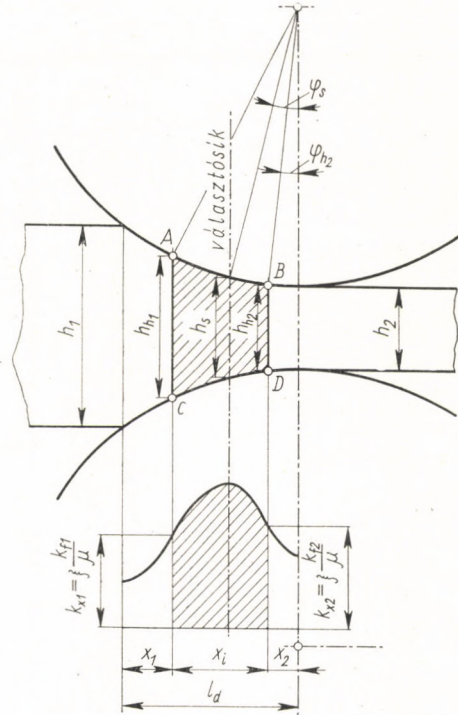
$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta_{xY} = \infty, \quad (65.6)$$



64.7. ábra.



64.8. ábra



vagyis az áramlási vonalak iránytangensei merőlegesek az  $x$  tengelyre. Az áramlási vonalak itt aszimptotikusan beleszaladnak a választóvonalba.

Ha a (65.2) és a (65.3) függvényt számítással meg akarjuk határozni, akkor a következőképpen kell eljárunk. A (63.63) egyenletben

$$h_x = (2r + h_2) - (2r) \cos \varphi_x, \quad (65.7)$$

és

$$\varphi_x = \Phi - \psi_x. \quad (65.8)$$

Legyen

$$A_1 = \frac{Y}{b_{sz1}}, \quad (65.9)$$

$$A_2 = \frac{l_1}{h_1 - h_s}, \quad (65.10)$$

$$A_3 = \frac{A_2}{3} = \frac{l_1}{3(h_1 - h_s)}, \quad (65.11)$$

$$A_4 = \frac{2}{3} \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right) h_1^{\frac{3}{2}}, \quad (65.12)$$

$$A_5 = h_1 A_2 = \frac{h_1 l_1}{h_1 - h_s}. \quad (65.13)$$

E jelölések felhasználásával a (63.63) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$y = A_3 h_x + A_4 h_x^{-\frac{1}{2}} - A_5. \quad (65.14)$$

Legyen továbbá

$$A_6 = (2r + h_2), \quad (65.15)$$

$$A_7 = 2r, \quad (65.16)$$

akkor írható:

$$h_x = A_6 - A_7 \cos \varphi_x; \quad (65.17)$$

és minthogy (65.1. ábra)

$$\varphi_x = \Phi - \psi_x,$$

írhatjuk:

$$h_x = A_6 - A_7 \cos (\Phi - \psi_x). \quad (65.18)$$

Ha felvesszük, hogy

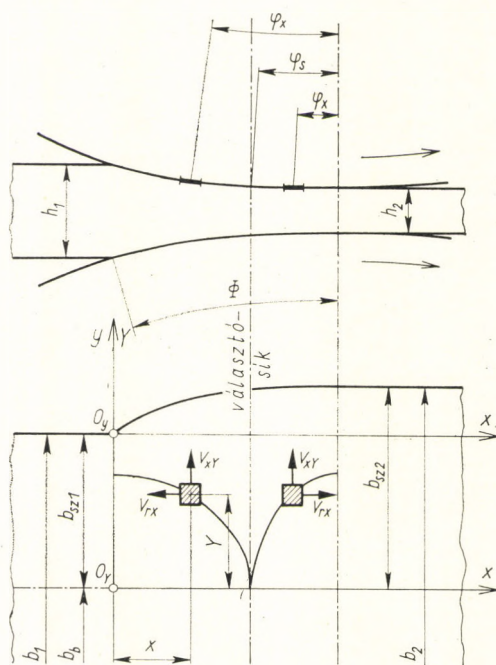
$$A_8 = A_3 A_6, \quad (65.19)$$

$$A_9 = A_3 A_7, \quad (65.20)$$

$$A_{10} = A_8 - A_5, \quad (65.21)$$

akkor a (65.14) egyenlet a következő alakra hozható:

$$y = A_{10} - A_9 \cos (\Phi - \psi_x) + A_4 [A_6 - A_7 \cos (\Phi - \psi_x)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (65.22)$$



65.1. ábra. Az áramlási vonalak meghatározása a hengerrésben

Ahhoz, hogy a  $v_{xy}$  sebességi komponenst meghatározhassuk, a (65.22) függvényt az idő szerint differenciálnunk kell.

Míthogy továbbá

$$\psi_x = \omega i, \quad (65.23)$$

és

$$A_{11} = \frac{A_4 A_7}{2}, \quad (65.24)$$

a keresett differenciálhányados:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{di} &= \frac{A_{11} \omega \sin(\Phi - \omega i)}{[A_6 - A_7 \cos(\Phi - \omega i)]^{\frac{3}{2}}} - A_9 \omega \sin(\Phi - \omega i) = \\ &= \omega \sin(\Phi - \omega i) \left\{ \frac{A_{11}}{[A_6 - A_7 \cos(\Phi - \omega i)]^{\frac{3}{2}}} - A_9 \right\}. \end{aligned} \quad (65.25)$$

Ebben az egyenletben

$$A_{11} = \frac{4r}{3} h_1^{\frac{3}{2}} \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right), \quad (65.26)$$

$$A_6 = (2r + h_2), \quad (65.15)$$

$$A_7 = 2r, \quad (65.16)$$

$$A_9 = \frac{2r l_1}{3(h_1 - h_s)}, \quad (65.27)$$

ebből következik:

$$\frac{dy}{di} = \frac{2r l_1}{3(h_1 - h_s)} \omega \sin(\Phi - \omega i) \left\{ \left[ \frac{h_1}{h_2 + 2r[1 - \cos(\Phi - \omega i)]} \right]^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}. \quad (65.28)$$

A (65.1), (65.2), (65.3), (65.23) és (65.28) egyenletek segítségével az áramlási vonalak iránytangense a nyomófelület visszamaradási zónájának valamely  $xY$  pontjában (65.1. ábra) a következőképpen írható fel:

$$\operatorname{tg} \vartheta_{xY} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Y}{b_{sz1}} \left( \frac{l_1}{h_1 - h_s} \right) \sin \varphi_x \frac{\left[ \left( \frac{h_1}{h_x} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]}{\left[ \frac{h_2}{h_x} \frac{\delta}{\cos \varphi_x} - 1 \right]}. \quad (65.29)$$

Az áramlási vonalak iránytangenseinek egyenlete az előresietési zóna bármelyik pontjára vonatkozólag hasonló módon vezethető fel.

A hengerlésnél fellépő erők számítás útján való meghatározására először HERRMANN MIKSA magyar műegyetemi tanár állított fel képletet [66.1]. HERRMANN a maga elméletét J. PUPPE [66.13] klasszikus üzemi kísérleteihez kapcsolódva fejtette ki; képletét LÁNG KÁROLY [66.2] fejlesztette tovább, majd az általuk kijelölt alapokra építette fel elméletét KÁRMÁN TÓDOR [66.3].

KÁRMÁN a hengerlés differenciálegyenletét 1925-ben állította fel. Ezt a lineáris differenciálegyenletet először K. HUBER oldotta meg. Ez a megoldás azonban olyan körülményes és nehezen kezelhető, hogy a hengerlési erő gyakorlati kiszámítására nem lehetett felhasználni. Hogy használható képlethez jussanak, többen bizonyos egyszerűsítő feltételek alkalmazásával keresték a Kármán-féle differenciálegyenlet megoldását. Így E. SIEBEL [66.4], NÁDAI ÁRPÁD [66.5], A. I. CELIKOV [66.6], A. TROOST és K. HÖLLING [66.7], továbbá egy grafikus megoldást dolgozott ki W. TRINKS [66.8].

KÁRMÁN TÓDOR hengerlési elméletének érvényességéhez a következő előfeltételeket tartotta szükségesnek:

1. A  $h_1$  kiinduló vastagságú darabot két sima, párhuzamos tengelyű  $R$  sugarú henger között hengerlik  $h_2$  vastagságra, anélkül, hogy a darabra húzás vagy fékezés hatna (66.1. ábra).

2. A darab nem szélesedik.

3. A súrlódási tényező a darab és a hengerek között a nyomott ív mentén mindenütt egyforma.

4. A darab hossztengelyére merőleges keresztmetszetek a hengerlés folyamán síkok maradnak.

5. A nyomott ív mentén a hengerek nem deformálódnak rugalmasan.

6. Az alakított anyag homogén, és nincs rugalmas deformációja.

7. A plasztikus folyás feltétele ( $\sigma_1 - \sigma_3 = k_f$ ) érvényes az alakítás alatt álló anyagra.

8. A hengerelt anyag alakítási szilárdsága a nyomott ív mentén nem változik.

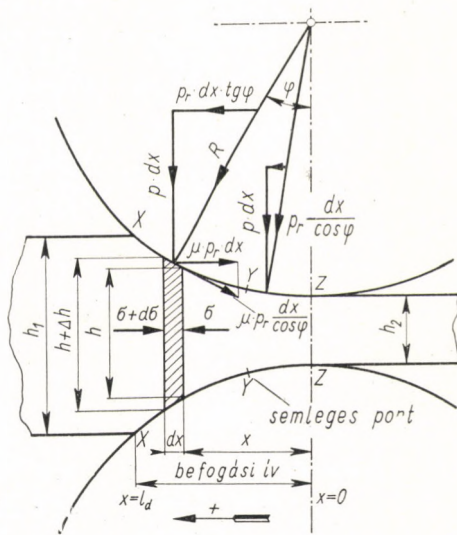
9. A hengerek kerületi sebessége egyenletes, a hengerek se nem gyorsulnak, se nem lassulnak.

10. A darab tengelye irányában működő  $\sigma$  feszültségek a függőleges keresztmetszetek mentén egyenletesen vannak eloszolva.

KÁRMÁN a hengerek között levő négyzetes darab elemi függőleges részére ható erőket vizsgálva, első megközelítésként a  $p_r$  radiális nyomást (alakítási ellenállást)  $p$  vertikális nyomással helyettesítette, és feltételezte, hogy  $x$  kicsiny  $R$ -hez képest (66.1. ábra). Így a következő egyenletet kapta:

$$\frac{d\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{dx} = p(\sin \varphi \mp \mu \cos \varphi), \quad (66.1)$$

66.1. ábra. A feszültségállapot levezetése a hengerrésben, KÁRMÁN TÓDOR szerint



ami ilyen alakban is felírható:

$$\frac{d\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{dx} = p \cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi \mp \operatorname{tg} \varrho). \quad (66.2)$$

Ezután feltételezte, hogy  $\cos \varphi$  közelítően az egységgel vehető egyenlőnek, úgyhogy

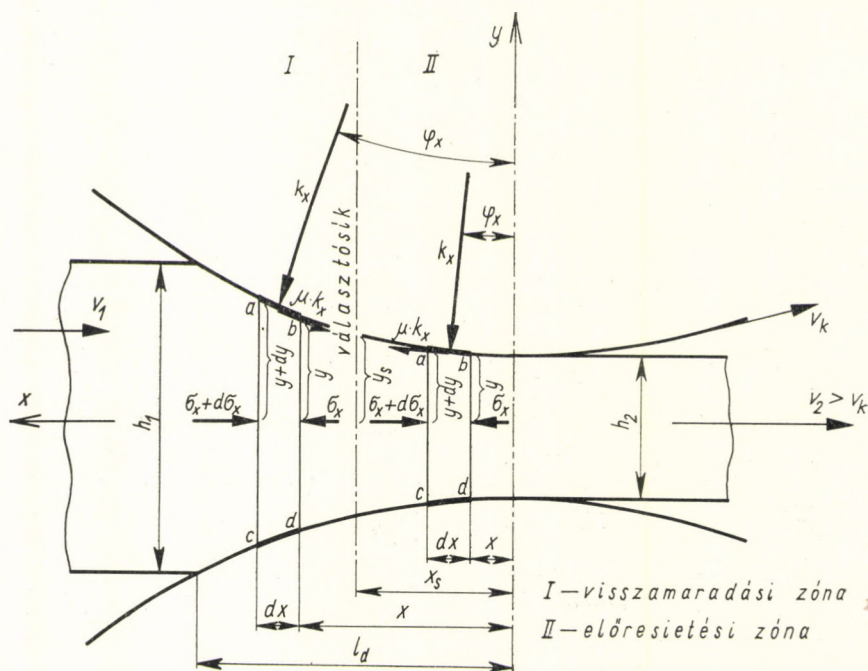
$$d\left(\frac{\sigma h}{2}\right) = p (\operatorname{tg} \varphi \mp \operatorname{tg} \varrho) dx. \quad (66.3)$$

Ezeket az egyenleteket nevezzük *Kármán-féle* egyenleteknek. Ezek szolgálták számos hengerrési elmélet (TRINKS, CELIKOV, NÁDAI stb.) kiindulási alapjául.

Itt rá kell mutatnunk arra, hogy a *Kármán-féle* differenciálegyenletek és e differenciálegyenletek eddigi megoldásai a problémának csak kvalitatív megoldását adják. A számított hengerrési nyomások igen kicsik. A következőkben ezt a körülményt is vizsgálmi fogjuk.

KÁRMÁN differenciálegyenleteit a 66.1. ábrával kapcsolatosan mutattuk be. A *Geleji-féle* 66.2. ábra lényegileg azonos a 66.1. ábrával, de az eredeti *Kármán-féle* jelölésektől eltér, és némileg ki van egészítve az alábbi gondolat kifejtése érdekében [66.11].

A hengerrésben az *abcd* térfogatelem két hengerfelülettel és két, a hengerrés irányára merőleges síkkal van határolva, amely két sík egymástól végtelen kicsiny  $dx$  távolságnyira van. Ha az erre a térfogatelemre ható



66.2. ábra. A hengerrésben levő darabrészt térfogateleire ható erők

erőket a hengerrés irányára vetítjük, akkor a  $bd$  felületre jobbról

$$2 \sigma_x y \quad (66.4)$$

erő hat, ahol  $\sigma_x$  a hengerrés irányában a  $bd$  felületre ható feszültség; ezen a helyen a hengerrés darab félmagassága

$$y = \frac{h_x}{2}.$$

A hengerrés darab szélessége 1. További egyszerűsítés érdekében feltételezzük, hogy szélesedés nem lép fel, azaz, hogy a darab szélessége nagyon nagy a vastagságához képest.

Az  $ac$  felületre az  $x$  irányban  $\sigma_x + d\sigma_x$ , a  $bd$  felületre  $\sigma_x$  feszültség hat. Ezen a helyen a hengerrés darab félmagassága  $y + dy$ . A vizsgált térfogatelemre eszerint balról

$$2(\sigma_x + d\sigma_x)(y + dy) \quad (66.5)$$

erő hat.

Ha a térfogatelem a választó- (semleges) sík előtt, azaz a visszamaradási zónában van, akkor lassabban halad a hengerrés irányában, mint ahogy

az a henger kerületi sebességének hengerlés irányú vetülete alapján várható volna. A visszamaradási zónában a henger felületelemei előre csúsznak a darab felületelemein, amint azt az 57. fejezetben láttuk (57.3. ábra). Ezek szerint a térfogatelemre az abszcisszatengely irányában ható erő:

$$2 \left( k_x \frac{dx}{\cos \varphi_x} \sin \varphi_x - \mu k_x \frac{dx}{\cos \varphi_x} \cos \varphi_x \right). \quad (66.6)$$

Itt  $k_x$  a fajlagos felületi nyomás a hengerek és a darab között a hengerlésben,

$\varphi_x$  az  $ab$  ívelemhez tartozó központi szög,

$\mu$  a surlódási tényező.

Ha a térfogatelem az előresietési zónában van, akkor a darab gyorsabban halad a hengerlés irányában, mint ahogy az a hengerek kerületi sebességéből következne. Itt a hengerek felületelemei visszamaradnak a darab felületelemein (57.3. ábra). A darab térfogatelemeire ebben a zónában a hengerlés irányában a következő erő hat:

$$2 \left( k_x \frac{dx}{\cos \varphi_x} \sin \varphi_x + \mu k_x \frac{dx}{\cos \varphi_x} \cos \varphi_x \right). \quad (66.7)$$

A térfogatelemre vízszintes irányban ható erők egyensúlyi egyenlete ezek szerint:

$$2(\sigma_x + d\sigma_x)(y + dy) - 2\sigma_x y - 2k_x \operatorname{tg} \varphi_x dx \pm 2k_x \mu dx = 0. \quad (66.8)$$

Mint hogy  $x$  és  $y$  az  $ab$  ívelem koordinátái, írható:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dy}{dx}. \quad (66.9)$$

Ha  $\operatorname{tg} \varphi_x$ -nek ezt az értékét a (66.8) egyenletbe behelyettesítjük, és a másodrendű végtelen kicsiket elhanyagoljuk, akkor a következő differenciál-egyenlethez jutunk:

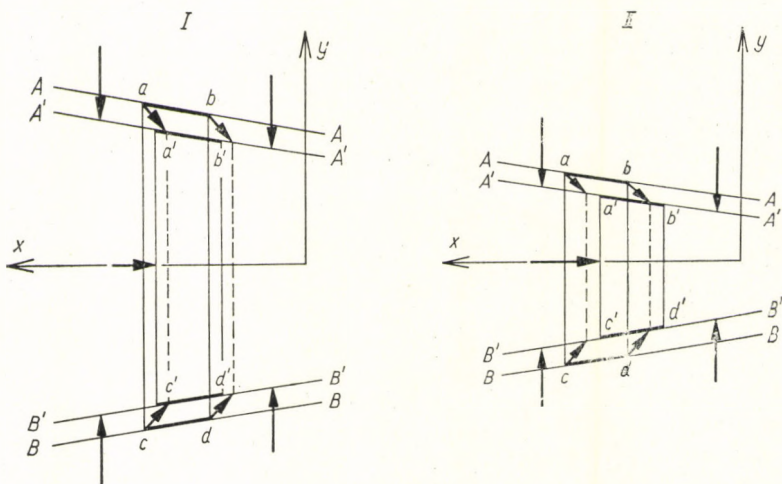
$$\frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{k_x - \sigma_x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \pm \frac{\mu}{y} \cdot k_x = 0. \quad (66.10)$$

Ha a folyási feltételt a következőképpen írjuk fel:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k_x - \sigma_x = 1,15 k_f = k_0 = \text{konst}, \quad (66.11)$$

akkor a (66.10) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{dk_x}{dx} - \frac{k_0}{y} \frac{dy}{dx} \pm \frac{\mu}{y} k_x = 0. \quad (66.12)$$



66.3. ábra. I. A hengerrésben levő darabrészt egy térfogatelemének mozgása a visszamaradási zónában. II. A hengerrésben levő darabrészt egy térfogatelemének mozgása az előresietési zónában

Mint említettük, a Kármán-féle differenciálegyenlet megoldásával több kutató foglalkozott egyszerűsítő feltételek mellett anélkül, hogy e megoldások kielégítő eredményhez vezettek volna. Ez azzal magyarázható, hogy a  $k_x$  alakítási ellenállás kiszámításakor nem vették figyelembe, hogy a hengerlés komplex folyamat. Az egyensúlyi egyenlet (66.8) felállításához az alakváltoztatási folyamatnak csak egy részét vették figyelembe, holott a hengerlés folyamata nemcsak az összes térfogatelemek  $y$  tengelyirányú összenyomásából, hanem egyidejűleg az  $x$  tengely irányában történő eltolásból is áll (66.3. ábra), miközben a hengerelt darab nyomott felületei a hengerek felületén a hengerek kerületi sebességétől eltérő sebességgel csúsznak. A két folyamatot az elemi térfogatra ható erők egyensúlya szempontjából egymástól függetlennek kell tekinteni.

Nem szabad továbbá elfelejtenünk, hogy ha feltételezzük, hogy a hengerrésben a nyomófelületek mentén nem lép fel tapadás, akkor a relatív csúszási sebesség a darab és a nyomóhengerek minden egyes érintkezési pontjában a következő egyenlettel fejezhető ki (66.4. ábra):

$$v_r = v_k \left( 1 - \frac{h_2}{h_x} \frac{\delta}{\cos \varphi_x} \right), \quad (57.18)$$

ahol  $v_r$  a relatív csúszási sebesség a darab felületelemei és a velük érintkező hengerfelületelemek között,  $v_k$  a hengerek kerületi sebessége,  $\delta = \frac{v_2}{v_k}$  az előresietési tényező,  $h_x$  a  $\varphi_x$  központi szöghöz tartozó darabmagasság,  $h_1$  a darab magassága a hengerlés előtt,  $h_2$  a darab magassága a hengerlés után.



A (66.8) egyenlet a térfogatelemekre ható erőknek azt az egyensúlyi állapotát fejezi ki, melynél a hengerek nyomófelületei az  $y$  tengely irányában egymás felé közelednek, anélkül hogy közben a hengerek forognának. A (66.8) egyenletből ez esetben meghatározható az összenyomásból eredő fajlagos felületi nyomás. Ha azonban a tényleges fajlagos felületi nyomást akarjuk megállapítani, akkor azt a fajlagos felületi nyomást is meg kell határoznunk, amely azért lép fel, mert a hengerelt darab a hengerrésen más sebességgel nyomódik keresztül, mint amely a hengerek kerületi sebességének megfelelően. A ténylegesen fellépő fajlagos hengerlési nyomás a két hengerlési nyomás összege.

A következőkben ezzel a kérdéssel foglalkozunk. Emellett alkalmazzuk A. I. CELIKOV egyszerűsítő feltételét, amely szerint a nyomott körívet egy egyenessel helyettesítjük.

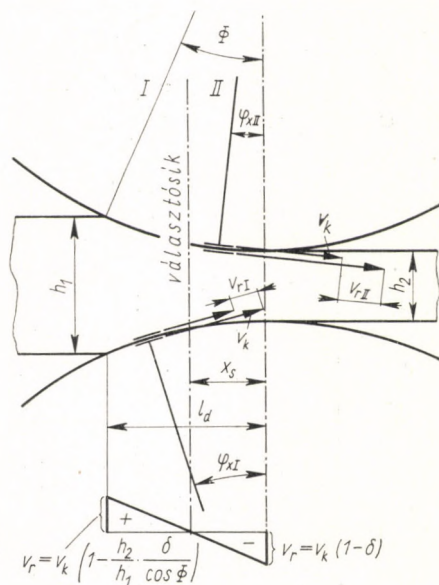
Először feltesszük, hogy  $k_0 = \text{állandó}$ , vagyis először a meleghengerlés problémáját vizsgáljuk.

Az előresietési zónában (66.2. ábra;  $0 \leq x \leq x_s$ ) a (66.8) egyenlet a megfelelő műveletek elvégzése után a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} y + \sigma'_x \frac{dy}{dx} - (k_0 + \sigma'_x)(\mu + \text{tg } \varphi_x) = 0. \quad (66.13)$$

Ha a nyomott ívet egyenessel helyettesítjük, írható:

$$y = \frac{h_x}{2} = ax + b, \quad (66.14)$$



66.4. ábra. A  $\varphi$  szöghöz tartozó hengerfelületelem relatív mozgása a visszamaradási és az előresietési zónában

$$b = \frac{h_2}{2}, \quad (66.15)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = a = \frac{h_1 - h_2}{2l_d}, \quad (66.16)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \operatorname{tg} \alpha = a. \quad (66.17)$$

Ezek után pedig a (66.13) egyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} y - [\sigma'_x \mu + k_0 (\mu + \operatorname{tg} \alpha)] = 0. \quad (66.18)$$

Ebből az egyes keresztmetszetekben az  $x$  tengely irányában fellépő  $\sigma'_x$  feszültség, amely a darab összenyomásából ered:

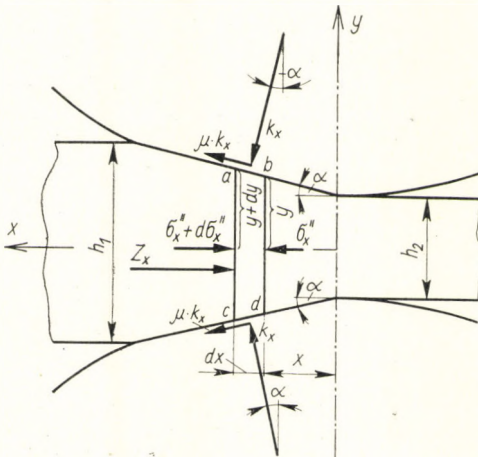
$$\sigma'_{xII} = 1,15 k_f \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left( e^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{h_x}{h_2}} - 1 \right). \quad (66.19)$$

Az előresietési zónában a darab nagyobb sebességgel halad, mint amekkorá a hengerek kerületi sebessége. A hengereelt darabot a hengerrési irányban egy  $Z_x$  erő nyomja ki a hengerrésen. Ez az erő (66.5. ábra):

$$Z_x = (\sigma'_x + d\sigma''_x) 2(y + dy). \quad (66.20)$$

Az  $abcd$  térfogatelem egyensúlyi egyenlete:

$$(\sigma'_x + d\sigma''_x)(y + dy) - \sigma''_x y - \mu k''_x dx - k''_x dx \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad (66.21)$$



66.5. ábra. Az  $abcd$  térfogatelemre az előresietési zónában ható erők, amelyek a  $Z$  nyomóerő következtében lépnek fel.  
GELEJI szerint

A számítások elvégzése után a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d\sigma_x''}{dx} y + \sigma_x'' \frac{dy}{dx} - (k_0 + \sigma_x'') (\mu + \operatorname{tg} \alpha) = 0 \quad (65.22)$$

vagy, ha  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ , akkor

$$\frac{d\sigma_x''}{dx} y - [\sigma_x'' \mu + k_0 (\mu + \operatorname{tg} \alpha)] = 0. \quad (66.23)$$

Ebből a  $\sigma_x''$  tengelyirányú feszültség, amely a  $Z_x$  nyomóerőt létrehozza:

$$\sigma_{xII}'' = 1,15 k_f \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left( e^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_2}} - 1 \right). \quad (66.24)$$

A (66.19) és a (66.24) egyenlet egymással egyenlő, és így az előresietési zóna bármely keresztmetszetében a darab tengelye irányában működő feszültség:

$$\sigma_{xII} = \sigma_{xII}' + \sigma_{xII}'' = 2,3 k_f \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left( e^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_2}} - 1 \right). \quad (66.25)$$

A folyási feltétel szerint [(66.11) egyenlet] a fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás) az előresietési zónában:

$$k_{xII} = k_0 + \sigma_{xII} = 1,15 k_f \left[ 1 + 2 \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left( e^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_2}} - 1 \right) \right]. \quad (66.26)$$

A visszamaradási zónában (66.2. ábra;  $x_s \leq x \leq l_d$ ) a (66.8) egyenlet a műveletek elvégzése után a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d\sigma_x'}{dx} y + \sigma_x' \frac{dy}{dx} + (k_0 + \sigma_x') (\mu - \operatorname{tg} \alpha) = 0, \quad (66.27)$$

vagy, minthogy  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ , írható:

$$\frac{d\sigma_x'}{dx} y + [\sigma_x' \mu + k_0 (\mu - \operatorname{tg} \alpha)] = 0. \quad (66.28)$$

Mint hogy a visszamaradási zóna a választósíknál ( $x = x_s = l_2$ ) kezdődik, a választósíkban a darab hossz tengelye irányában működő feszültség  $\sigma'_{xI}$ , amely a hengerek tiszta összenyomó hatására ébred:

$$\sigma'_{xI} = 0,5 \sigma_s e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}} + 1,15 k_f \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left( e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}} - 1 \right). \quad (66.29)$$

A visszamaradási zónában a hengerektől anyag éppen úgy van keresztülnyomva a hengerrésen, mint az előresietési zónában, vagyis a hengerfelületelemek a hengerektől darab velük érintkező felületelemein ebben a zónában is csúsznak, tehát a darab mind a két zónában más sebességgel halad a hengerrésen keresztül, mint az a hengerek kerületi sebességéből következne. Az előretolással való alakítás független az összenyomással való alakítástól. A hosszfeszültségeket ez esetben is ugyanúgy lehet kiszámítani, mint az előresietési zónában és a kilépési keresztmetszettől  $x$  távolságban a darab tengelyirányú  $\sigma''_{xI}$  feszültsége egyenlő nagyságú azzal a  $\sigma'_{xI}$  feszültséggel, melyet a hengerek a darab összenyomásával hoznak létre [(66.29) egyenlet]. Az eredő  $\sigma_{xI}$  feszültség eszerint:

$$\sigma_{xI} = \sigma'_{xI} + \sigma''_{xI} = \sigma_s e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}} + 2,3 k_f \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left( e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}} - 1 \right). \quad (66.30)$$

A folyási feltétel értelmében [(66.11) egyenlet], a fajlagos hengerrési nyomás (alakítási ellenállás) a visszamaradási zónában:

$$k_{xI} = k_0 + \sigma_{xI} = 1,15 k_f \left[ 1 + 2 \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left( e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}} - 1 \right) \right] + \sigma_s e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}}. \quad (66.31)$$

Mind a (66.26), mind a (66.31) egyenlet csak akkor számítható ki, ha az  $x_s$  hosszúság, a választó keresztmetszet távolsága a kilépési keresztmetszettől ismeretes.

A választó keresztmetszet helyét a hengerrésben abból a feltevésből lehet megállapítani, hogy  $x = l_d$ -nél a hosszirányú feszültség,  $\sigma_{xI} = 0$  és  $h_x = h_1$ .

Alkalmazzuk a következő egyszerűsítő összefüggéseket:

$$d = (\mu + \operatorname{tg} \alpha), \quad (66.32)$$

$$d' = (\mu - \operatorname{tg} \alpha), \quad (66.33)$$

$$A = \mu, \quad (66.34)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a. \quad (66.34a)$$

Ezzel a (66.30) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$d \left( e^{\frac{A}{a} \ln \frac{h_s}{h_2}} - 1 \right) e^{-\frac{A}{a} \ln \frac{h_1}{h_s}} + d' \left( e^{-\frac{A}{a} \ln \frac{h_1}{h_s}} - 1 \right) = 0, \quad (66.35)$$

vagy

$$\frac{d}{(h_1 h_2)^{\frac{A}{a}}} \cdot h_s^{2\frac{A}{a}} + \left( \frac{d' - d}{h_1^{\frac{A}{a}}} \right) h_s^{\frac{A}{a}} - d' = 0. \quad (66.36)$$

Legyen

$$\begin{aligned} \frac{d}{(h_1 h_2)^{\frac{A}{a}}} &= U, \\ \left( \frac{d' - d}{h_1^{\frac{A}{a}}} \right) &= V, \\ -d' &= W, \end{aligned}$$

akkor a (66.36) egyenletnek a következő formája lesz:

$$U h_s^{2\frac{A}{a}} + V h_s^{\frac{A}{a}} + W = 0. \quad (66.37)$$

Amennyiben feltesszük, hogy

$$\xi = h_s^{\frac{A}{a}}, \quad (66.38)$$

akkor a (66.37) egyenlet a következőképpen alakul:

$$U \xi^2 + V \xi + W = 0. \quad (66.39)$$

Ebből következik, hogy a választósíkban a darab magassága:

$$h_s = \left[ \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U} \right]^{\frac{a}{A}}. \quad (66.40)$$

Ha a behelyettesítéseket elvégezzük, akkor  $h_s$ -re a következő kifejezést kapjuk:

$$h_s = h_2 \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - (\operatorname{tg}^2 \alpha - \mu^2)(h_1/h_2)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}}}}{(\mu + \operatorname{tg} \alpha)} \right]^{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}}. \quad (66.41)$$

Mínthogy

$$h_s = 2 x_s \operatorname{tg} \alpha + h_2, \quad (66.42)$$

a választósík (semleges keresztmetszet) távolsága a kilépési keresztmetszettől:

$$x_s = \frac{h_s - h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (66.43)$$

Mindeddig meleghengelerlésről volt szó; és feltételeztük, hogy a  $k_f$  alakítási szilárdság az alakváltozás folyamán nem változik. Hideghengelerlésnél azonban az alakítási szilárdság a hengerrésben helytől függő változó, s ezt egyszerűsített formában a következőképpen lehet felírni:

$$k_{fx} = k_{f_2} - \left( \frac{k_{f_2} - k_{f_1}}{l_d} \right) x. \quad (66.44)$$

Itt  $k_{f_1}$  és  $k_{f_2}$  az alakítási szilárdság a szűrés előtt, illetve a szűrés után,  $k_{fx}$  az alakítási szilárdság a hengerrésben  $x$  távolságra a kilépési keresztmetszettől.

A folyási feltétel ezek szerint:

$$k_x = 1,15 k_{fx} + \sigma_x, \quad (66.45)$$

vagy

$$k_x = k_{0x} + \sigma_x. \quad (66.46)$$

A következőkben írjuk:

$$c = 1,15 \left( \frac{k_{f_2} - k_{f_1}}{l_d} \right) = \frac{k_{02} - k_{01}}{l_d}, \quad (66.47)$$

akkor a (66.44) egyenletből lesz:

$$k_{0x} = 1,15 k_{fx} = 1,15 k_{f_2} - cx = k_{02} - cx. \quad (66.44a)$$

Ezek szerint az előresietési zónában (66.2. ábra;  $0 \leq x \leq x_s$ ) a (66.13) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} y + \sigma'_x \frac{dy}{dx} - (k_{0x} + \sigma'_x) (\mu + \operatorname{tg} \varphi_x) = 0. \quad (66.48)$$

Mint ahogy feltételezzük, hogy  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = a$  és  $\operatorname{tg} \varphi_x = \operatorname{tg} \alpha = a$ ; a (66.48) egyenlet a következő formában írható:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} y - \sigma'_x \mu + c (\mu + \operatorname{tg} \alpha) x - k_{02} (\mu + \operatorname{tg} \alpha) = 0. \quad (66.49)$$

Az előresietési zónában a darab összenyomása következtében fellép egy  $\sigma'_{xII}$  tengelyirányú feszültség, azonkívül fellép a darabnak a hengerrésből a henger kerületi sebességénél nagyobb sebességgel való kitolásához szükséges  $\sigma''_{xII}$  tengelyirányú feszültség is. Fentebb már láttuk, hogy  $\sigma'_{xII} = \sigma''_{xII}$ , és így az eredő tengelyirányú feszültség a kilépési keresztmetszettől  $x$  távolságban levő keresztmetszetben:

$$\sigma_{xII} = \sigma'_{xII} + \sigma''_{xII} = 2 \sigma'_{xII} . \quad (66.50)$$

A megfelelő behelyettesítések és műveletek elvégzése után a (66.49) egyenletből a hosszirányú feszültség a darabban:

$$\begin{aligned} \sigma_{xII} = 2,3 \left\{ \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \Phi} \times \right. \right. \\ \times \left. \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) + k_{f2} \right] e^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_2}} + \frac{h_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu - \operatorname{tg} \alpha} \right) \times \\ \times \left. \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + k_{f2} \right] \right\} . \quad (66.51) \end{aligned}$$

Ha  $k_{f1} = k_{f2} = k_f$ , akkor a (66.51) egyenlet azonossá válik a (66.25) egyenlettel.

A folyási feltétel szerint [(66.45) egyenlet], ha az alakítási szilárdság a hengerrésben helytől függő változó, akkor a fajlagos hengerrés nyomás (alakítási ellenállás) az előresietési zónában a következőképpen fejezhető ki:

$$k_{xII} = k_{0x} + \sigma_{xII} = 1,15 k_{fx} + \sigma_{xII} , \quad (66.52)$$

azaz

$$\begin{aligned} k_{xII} = 1,15 k_{fx} + 2,3 \left\{ \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \times \right. \right. \\ \times \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) + k_{f2} \left. \right] e^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_2}} + \\ + \frac{h_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu - \operatorname{tg} \alpha} \right) \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \times \\ \times \left. \left[ \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + k_{f2} \right] \right\} . \quad (66.53) \end{aligned}$$

A visszamaradási zónában (66.2. ábra;  $x_s \leq x \leq l_d$ ), ha az alakítási szilárdság a hengerrésben helytől függő változó, a (66.8) egyenlet a megfelelő

behelyettesítések és műveletek elvégzése után a következő alakot ölti:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} y + \sigma'_x \frac{dy}{dx} + (k_{0x} + \sigma'_x) (\mu - \operatorname{tg} \alpha) = 0, \quad (66.54)$$

vagy a (66.46) egyenlet felhasználásával:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} y + \sigma'_x a + (\mu - \operatorname{tg} \alpha) [(k_{02} - cx) + \sigma'_x] = 0. \quad (66.55)$$

A (66.55) egyenletből  $\sigma'_{xI}$  kiszámítható. A  $\sigma'_{xI}$  feszültséggel egyidejűleg a darab hengerrezen való keresztütlolása következtében fellép egy  $\sigma''_{xI}$  feszültség is:  $\sigma''_{xI} = \sigma'_{xI}$ . Az eredő tengelyirányú feszültség:

$$\sigma_{xI} = \sigma'_{xI} + \sigma''_{xI} = 2 \sigma'_{xI}, \quad (66.56)$$

azaz

$$\begin{aligned} \sigma_{xI} = \sigma_s e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_2}} + 2,3 \left\{ \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{\mu (h_2 - h_s) + h_2 \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha (\mu + \operatorname{tg} \alpha)} + k_{f2} \right] e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}} + \\ + \frac{h_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu + \operatorname{tg} \alpha} \right) \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \times \right. \\ \left. \left. \times \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} + k_{f2} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (66.57)$$

Ha  $x = x_s$ , akkor  $\sigma_{xI} = \sigma_s$  [(66.51) egyenlet],

$$\begin{aligned} \sigma_s = 2,3 \left\{ \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{f2} \right] e^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_s}{h_2}} + \frac{h_s}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu - \operatorname{tg} \alpha} \right) \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + k_{f2} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (65.58)$$

A visszamaradási zónában az alakítási ellenállás a folyási feltétel [(66.45) és a (66.46) egyenlet] szerint, ha az alakítási szilárdság a helytől függő



változó:

$$\begin{aligned}
 k_{xI} = 1,15 k_{fx} + \sigma_{xI} = 1,15 k_{fx} + \left\{ \sigma_s + 2,3 \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \times \right. \right. \\
 \times \left. \left. \frac{\mu (h_2 - h_s) + h_2 \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha (\mu + \operatorname{tg} \alpha)} + k_{f2} \right] \right\} e^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_x}{h_s}} + \\
 + 2,3 \left\{ \frac{h_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu + \operatorname{tg} \alpha} \right) \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \times \right. \\
 \times \left. \left[ \left( \frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \frac{h_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} + k_{f2} \right] \right\}. \quad (66.59)
 \end{aligned}$$

A (66.57), a (66.58) és a (66.59) egyenletet csak akkor lehet kiszámítani, ha a választósík (semleges keresztmetszet) távolsága a kilépési keresztmetszettől ismeretes.

$x_s$ -t abból a feltételből lehet meghatározni, hogy  $x = l_d$ -nél  $\sigma_{xI} = \sigma'_{xI} + \sigma''_{xI} = 2 \sigma'_{xI} = 0$ . Tehát  $x_s$ -t a (66.57) és a (66.58) egyenletből meleghengerlés tárgyalásakor alkalmazott eljárás szerint [(66.30)–(66.41) egyenletek] lehet kiszámítani.

A választósík távolsága a kilépési keresztmetszettől:

$$x_s = \left( \frac{h_s - h_2}{h_1 - h_2} \right) l_d. \quad (66.59a)$$

Ha  $x_s$  és  $h_s$  ismeretes, a (66.57) és a (66.58) függvény kiszámítható, és így meghatározható az alakítási ellenállás függvénye a nyomott ív mentén.

Az alakítási ellenállás nagyságának és eloszlásának kiszámításához a fent levezetett (66.26) és (66.31), illetőleg (66.53) és (66.59) egyenlet csak akkor adhat a valóságnak megfelelő értékeket, ha a hengerelt darabnak a hengerlési irányra merőleges keresztmetszetei a szűrés folyamán nem görbülnek el, hanem síkok maradnak. A keresztmetszetek elgörbítéséhez alakítási ellenállástöbblet van szükség. Az az alakítási ellenállástöbblet, amely a belső anyagmozdulásokat létrehozza, a következőképpen írható fel:

$$k_{sm} = \frac{2}{3 \sqrt{3}} k_f \left( \frac{l_d}{r} \right) \left( \frac{h_2}{h_1 - h_2} \right). \quad (66.60)$$

A (66.26) és (66.31), illetőleg (66.53) és (66.59) egyenlettel kiszámított fajlagos hengerlési nyomásokat a (66.60) egyenlet által megadott értékkel meg kell növelni, azaz ezt az értéket hozzájuk kell adni.

Ha hideghengerlésnél a hengerrésből kiszaladó darabot  $Z_2$  húzóerővel, illetőleg

$$\sigma_2 = \frac{Z}{h_2 b_2} \quad (66.61)$$

húzófeszültséggel terheljük, akkor ennek megfelelően az előresietési zónában  $\sigma_{xII}$  feszültség, a visszamaradási zónában pedig  $\sigma_{xI}$  feszültség lép fel; a választósík  $x_s$  távolsága a kilépési keresztmetszettől megnagyobbodik (66.6. ábra), egyúttal  $k_{\max}$  kisebb lesz.

Ha a hengerelt darabot a befutási oldalon  $Z_1$  húzóerővel, illetve

$$\sigma_1 = \frac{Z}{h_1 b_1} \quad (66.62)$$

húzófeszültséggel terheljük, akkor a visszamaradási zónában  $\sigma_{xI}$ , az előresietési zónában  $\sigma_{xII}$  kisebb lesz, egyúttal az  $x_s$  távolság is csökken.

Ha csak a kifutó oldalt terheli húzóerő, akkor a fajlagos hosszirányú feszültségek az előresietési zónában (66.51) így alakulnak:

$$\sigma_{xII}^* = \sigma_{xII} - \sigma_2, \quad (66.63)$$

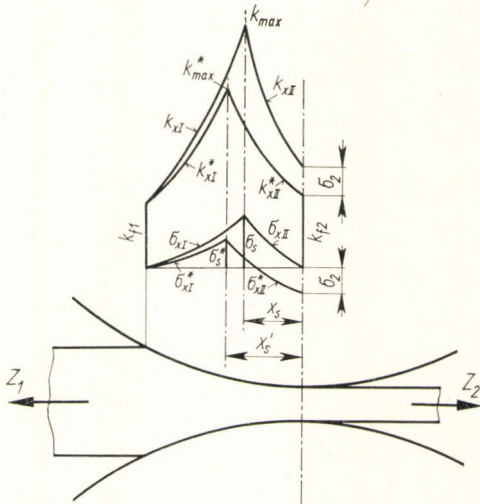
és az alakítási ellenállás, a fajlagos felületi nyomás (66.52) a következőképpen fejezhető ki:

$$k_{xII}^* = 1,15 k_{fx} + (\sigma_{xII} - \sigma_2). \quad (66.64)$$

Ha a hengerelt darabot a befutó oldalról  $\sigma_1$  húzófeszültség terheli, akkor a hosszirányú feszültségek a visszamaradási zónában (66.57):

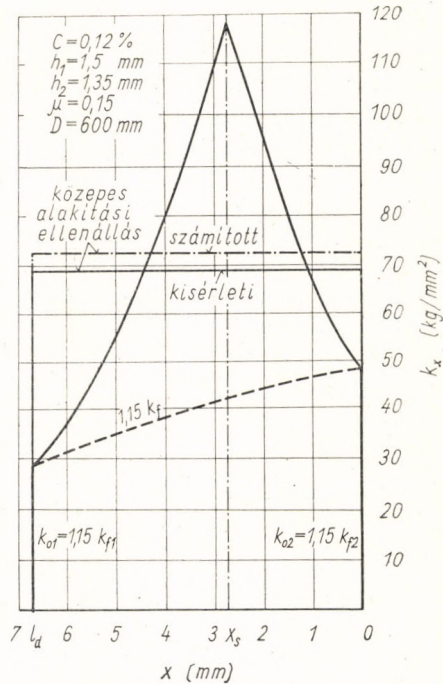
$$\sigma_{xI}^* = \sigma_{xI} - \sigma_1. \quad (66.65)$$

Természetesen, ha a hengerelt darabot a befutási oldalon  $\sigma_1$ , a kifutási oldalon  $\sigma_2$  húzófeszültség terheli, akkor ezeket a hengerrésben működő hosszfeszültségek kiszámításánál figyelembe kell venni.



66.6. ábra. A szalaghúzás befolyása a fajlagos hengernyomás (alakítási ellenállás) eloszlására a nyomott ív mentén, GELEJI szerint

66.7. ábra. Az alakítási ellenállás számított eloszlása a nyomott ív mentén egy konkrét hengerlési esetben. GELEJI szerint



A 66.7. ábra az alakítási ellenállásnak az itt levezetett számítási eljárás alapján kiszámított nagyságát és eloszlását mutatja egy hideghengerlési példával kapcsolatosan. A diagramba be van rajzolva a közepes alakítási ellenállásnak a diagramból kiszámított, valamint a kísérlettel meghatározott közepes értéke.

A hengerrésben fellépő alakítási ellenállást és eloszlását egyszerűsítő feltételek mellett is meg lehet határozni [66.12].

Az 59. fejezetben (59.1. ábra) már láttuk a henger elemi felületére ható erőket. Ennek alapján a 66.8. ábra bemutatja a darab nyomott felületének elemi részére ható erőket a választósík előtt és után. Az ábra szerint a  $h_x$  magasságú egységnyi szélességű keresztmetszetre ható elemi horizontális erő, mely a tiszta összenyomásból származik, a visszamaradási zónában (I):

$$dH_I = 2 dN (\mu \cos \varphi - \sin \varphi), \quad (66.66)$$

az előresietési zónában (II) pedig:

$$dH_{II} = 2 dN (\mu \cos \varphi + \sin \varphi); \quad (66.67)$$

itt a  $dN$  elemi normálerő az (59.1) egyenlet értelmében:

$$dN = kbr d\varphi. \quad (59.1)$$

Mint fentebb már láttuk, a darab ugyanolyan sebességgel szalad keresztül az előresietési zónában, mint a visszamaradási zónában, ezért minden keresztmetszetre egy plusz  $p_{xI}$ , illetve  $p_{xII}$  feszültség hat, amely a darabot a henger kerületi sebességétől eltérő sebességgel szorítja keresztül a hengerrészen.

Ezek szerint a visszamaradási zóna bármely egységnyi szélességű keresztmetszetére

$$\sigma_{3xII} = \frac{2r}{h_x} \int_{\Phi}^{\varphi} k_{kI} (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi + p_{xI} \quad (66.68)$$

hosszirányú feszültség hat, az előresietési zóna bármely egységnyi széles keresztmetszetére pedig

$$\sigma_{3xII} = \frac{2r}{h_x} \int_0^{\varphi} k_{kII} (\mu \cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi + p_{xII} \quad (66.69)$$

hosszirányú feszültség.

Ebben a két egyenletben [(66.68) és (66.69)]  $k_{kI}$  és  $k_{kII}$  a közepes alakítási ellenállást jelenti az  $(\Phi - \varphi_{II})$ , illetve  $\varphi_I$  központi szögnek megfelelő nyomott ívek mentén. A közepes alakítási ellenállás jó megközelítéssel a visszamaradási zónában:

$$k_{kI} = \frac{k_{f1} + k_{xI}}{2} \quad (66.70)$$

és az előresietési zónában:

$$k_{kII} = \frac{k_{f2} + k_{xII}}{2} \quad (66.71)$$

A közepes alakítási ellenállás e közelítő értékeit a (66.68) és (66.69) egyenletbe behelyettesítve, a befogott darab valamely keresztmetszetére ható hosszirányú feszültség a hengerrésben így fejezhető ki:

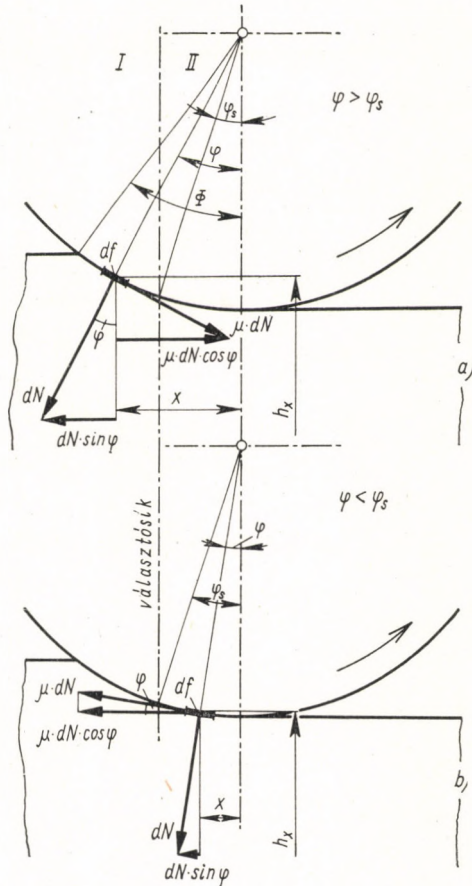
$$\sigma_{3xI} = (k_{f1} + k_{xI}) \frac{r}{h_x} \int_{\Phi}^{\varphi} (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi + p_{xI} \quad (66.72)$$

$$\sigma_{3xII} = (k_{f2} + k_{xII}) \frac{r}{h_x} \int_0^{\varphi} (\mu \cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi + p_{xII} \quad (66.73)$$

Az alakítási ellenállás a belépő keresztmetszettől  $x$  távolságra:

$$k_{xI} = k_{fxI} + \sigma_{3xI} = k_{fxI} + (k_{f1} + k_{xI}) \frac{r}{h_x} \int_{\Phi}^{\varphi} (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi + p_{xI}, \quad (66.74)$$

66.8. ábra. A hengerelt darab egy felület-  
elemére ható erők a választószik előtt és  
után



a kilépési keresztmetszettől  $x$  távolságra:

$$k_{xII} = k_{fxII} + (k_{f2} + k_{xII}) \frac{r}{h_x} \int_0^{\varphi} (\mu \cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi + p_{xII}. \quad (66.75)$$

A műveletek elvégzése után az alakítási ellenállás a visszamaradási zónában:

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f1} \frac{r}{h_x} [\mu (\sin \Phi - \sin \varphi) - (\cos \varphi - \cos \Phi)]}{1 - \frac{r}{h_x} [\mu (\sin \Phi - \sin \varphi) - (\cos \varphi - \cos \Phi)]} + p_{xI}, \quad (66.76)$$

és az előresietési zónában:

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{fx} \frac{r}{h_x} [\mu \sin \varphi + (1 - \cos \varphi)]}{1 - \frac{r}{h_x} [\mu \sin \varphi + (1 - \cos \varphi)]} + p_{xII}. \quad (66.76a)$$

Megfelelő átalakítások után

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f1} \frac{x}{h_x} \left[ \mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2} \right]}{1 - \frac{x}{h_x} \left[ \mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2} \right]} + p_{xI}, \quad (66.77)$$

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{f2} \frac{x}{h_x} \left[ \mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right]}{1 - \frac{x}{h_x} \left[ \mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right]} + p_{xII}. \quad (66.78)$$

Ezekben az egyenletekben  $g_I = \Phi + \varphi$  és  $\beta_{II} = \varphi$ , továbbá

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2} = \frac{2l_d - x}{2r}, \quad (66.79)$$

és

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} = \frac{x}{2r}. \quad (66.80)$$

A  $p_{xI}$  és a  $p_{xII}$  feszültség kiszámítása abból a feltételezésből indul ki, hogy a választósíkokban (semleges keresztmetszetben) a feszültségek egyenlők egymással, de ellenkező előjelűek, és itt érik el maximális értéküket:

$$p_{xI} = p_{xII} = p_s. \quad (66.81)$$

$p_{xI}$  és  $p_{xII}$  értéke a belépő, illetve kilépő keresztmetszetben zérus, egyébként pedig zérus és  $p_s$  között lineárisan változik (66.9. ábra).

Az előresietést egy  $P_1$  erő hozza létre, amely a választósík és a kilépési keresztmetszet között levő anyagot a kilépési keresztmetszeten nagyobb sebességgel tolja ki, mint a hengerek kerületi sebessége. Ezt az erőt hasonlóan fejezhetjük ki, mint a húzóúregeen való keresztülnyomásnál működő erőt [(40.54) és (40.56) egyenlet]. Azonban itt a belső anyagelmozdulások létrehozásához szükséges erőt  $(0,77 k_{fk} f_2 \alpha)$  nem kell figyelembe venni, mert az úgyis számításba kerül a hengerelt darabra vonatkozólag [(66.142a) képlet]. Az előresietést létrehozó hengerlés irányú sajtolóerő:

$$P_1 = p_s h_s b_s = k_{zk} (F + \mu Q). \quad (66.82)$$



ebben

$$f_s = h_s b_2 \quad (66.90)$$

a semleges keresztmetszet nagysága a választósíkban.

A fentiek szerint a  $k_{zk}$  közepes alakítási ellenállás így is írható:

$$k_{zk} = \frac{k_{fk}}{1 - \frac{(h_s - h_2) + 2\mu x_2}{2h_s}}, \quad (66.91)$$

ahol

$$k_{fk} = \frac{k_{fs} + k_{f2}}{2}. \quad (66.92)$$

Itt  $k_{fs}$  az alakítási szilárdság a választósíkban (semleges keresztmetszetben),  $k_{f2}$  az alakítási szilárdság a kilépő keresztmetszetben.

Ezek után az alakítási ellenállás a visszamaradási zónában (I):

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f1} \frac{x}{h_x} \left( \mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2} \right)}{1 - \frac{x}{h_x} \left( \mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2} \right)} + x \left\{ \frac{(k_{fs} + k_{f1}) [(1 - \cos \varphi_s) + \mu \sin \varphi_s]}{\sin \varphi_s (h_2 - 2r \mu \sin \varphi_s)} \right\}, \quad (66.93)$$

és az előresietési zónában (II):

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{f2} \frac{x}{h_x} \left( \mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right)}{1 - \frac{x}{h_x} \left( \mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right)} + x \left\{ \frac{(k_{fs} + k_{f2}) [(1 - \cos \varphi_s) + \mu \sin \varphi_s]}{(\sin \Phi - \sin \varphi_s) (h_2 - 2r) \mu \sin \varphi_s} \right\}. \quad (66.94)$$

Ez a két egyenlet [(66.93) és (66.94)] azonban csak akkor érvényes, ha

$$k_x \mu \leq \xi k_f, \quad (66.95)$$

azaz, ha a hengerek és a darab között nincs tapadás, minthogy a tapadás feltétele

$$\mu' k_x = \xi k_f = \tau_{\max}. \quad (66.96)$$



Itt  $\xi = 0,578$  és

$$\mu' = \mu \pm \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2}, \quad (66.97)$$

ahol  $i = I$  vagy  $II$  (66.10. ábra).

A tapadási tartomány határa a visszamaradási zónában:

$$k_{x_{01}} \leq \frac{\xi k_f}{\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2}}, \quad (66.98)$$

és az előresietési zónában:

$$k_{x_{02}} \leq \frac{\xi k_f}{\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2}}. \quad (66.99)$$

A tapadási tartomány határa a visszamaradási zónában a belépési keresztmetszettől  $x_{01}$  távolságra van, az előresietési zónában pedig a kilépési keresztmetszettől  $x_{02}$  távolságra (66.11. ábra). A tapadási zóna térbeli határai az  $ad$  és  $bc$  síkok. Az az anyag, mely e határfelületek közé esik, összenyomáskor részben szélesedésbe megy át, részben pedig az  $ad$  és a  $bc$  határfelületre gyakorol nyomást, mégpedig az  $ad$  határfelületre:

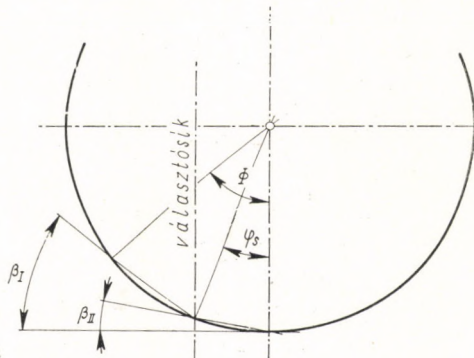
$$P_1 = p_1 b_{x_{01}} h_{x_{01}}, \quad (66.100)$$

a  $bc$  határfelületre:

$$P_2 = p_2 b_{x_{02}} h_{x_{02}} \quad (66.101)$$

nyomást.  $p_1$  és  $p_2$  a határfelületekre ható fajlagos nyomás.

A  $p_x$  nyomás a tapadási tartományt kettéválasztó választósíkokban (a választó keresztmetszetben) éri el maximális értékét. Ha feltételezzük,



66.10. ábra

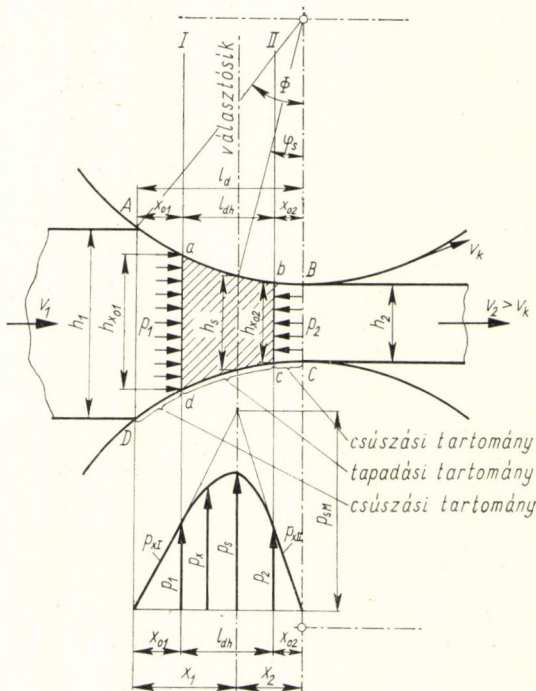
hogy  $p_x$  a belépő és a kilépő keresztmetszetben nullával egyenlő, és hogy mindkét zónában lineárisan változik, akkor a  $p_x$  nyomás maximális értéke a választósíkban:

$$p_{sM} = \frac{p_2}{x_{02}} x_2. \quad (66.102)$$

Nagyon valószínű az a feltevés, hogy  $p_x$  legnagyobb értékét a semleges keresztmetszetben éri el, és a tapadási tartományban nem lineárisan, hanem parabolikusan változik, ahogy azt a 66.12. ábra mutatja. A parabola ezen az ábrán az  $AC$  és a  $BC$  egyenest a  $D$  és az  $E$  pontban érinti; a  $DE$  egyenes a parabolának egy konjugált átmérője. A parabolát abból a feltételezésből szerkesztjük meg, hogy  $CG = GF$  és  $DF = FE$ ; a  $tt$  egyenes, amely a  $G$  ponton megy keresztül és párhuzamos a  $DE$  egyenessel, a parabola érintője.

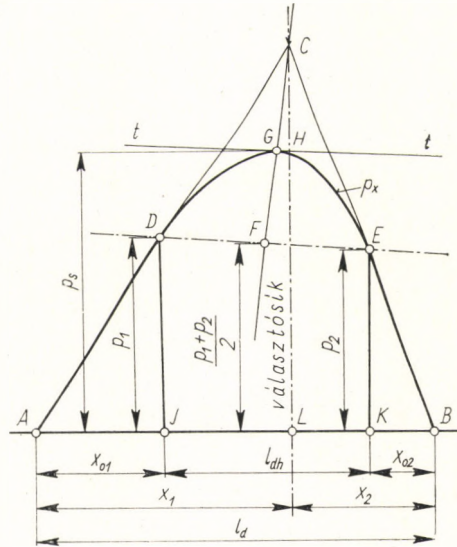
Az alakítási ellenállást (a fajlagos hengerlési nyomást) a tapadási tartományon kívül, tehát a belépési keresztmetszettől a tapadási tartomány határáig tartó  $x_{01}$  távolság mentén és a tapadási tartomány másik határától a kilépési keresztmetszetig tartó  $x_{02}$  távolság mentén a (66.93) és a (66.94) egyenlettel lehet kiszámítani. Mint már mondtuk, ezek a képletek csak a két szélső csúszási tartományban érvényesek, tehát addig, amíg

$$k_x \leq \frac{\xi}{\mu'} k_f. \quad (66.103)$$



66.11. ábra. Tapadási és csúszási tartományok a nyomott ív mentén

66.12. ábra



A tapadási tartomány határain

$$\mu' k_{x_{oi}} = \xi k_f = \tau_{\max}. \quad (66.104)$$

Ha a  $p_x$  nyomófeszültséget egyelőre nem vesszük figyelembe, akkor a tapadási tartományban

$$\frac{dk_x^*}{dx} = \frac{2\tau}{h_x}, \quad (66.105)$$

(l. a 27. fejezetet).

A tapadási tartomány határain, ahol  $x = x_{oi}$ :

$$\left( \frac{dk_x^*}{dx} \right)_{x=x_{oi}} = \frac{2\tau_{\max}}{h_{x_{oi}}}, \quad (66.106)$$

az indexekben  $i = 1$  vagy  $2$ .

Ugyancsak a tapadási tartomány határain

$$\mu' k_x = \tau_{\max} = \tau_0.$$

$\tau_x$  eloszlása a tapadási felületek mentén napjainkig nem ismeretes. Egyes kutatók felfogása szerint (E. P. UNKSZOV)  $\tau_x$  a választósíkban  $\tau_{\max} = \tau_0$ , mások szerint (F. KÖRBER és A. EICHINGER)  $\tau_x$  értéke a választósíkban zérus. Első közelítésben azonban a szerzők egyhangúan feltételezik, hogy a tapadási tartomány határa és a választósík között  $\tau_x$  lineárisan

változik. Ha feltételezzük, hogy a választósíkban

$$\tau_s = \lambda \tau_0, \quad (66.107)$$

akkor feltehetjük, hogy a tapadási tartomány valamely  $x$  helyén

$$\tau_x = \frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \cdot \tau_0 + \frac{(1 - \lambda) \tau_0}{x_i - x_{0i}} \cdot x, \quad (66.108)$$

ahol  $i = 1$  vagy  $2$ , aszerint, hogy a visszamaradási vagy az előresietési zónát vizsgáljuk-e (66.13. ábra).

A (66.105) egyenletet tehát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{dk_x^*}{dx} = \frac{2 \tau_0}{h_x} \left( \frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) - \frac{2 \tau_0}{h_x} \left( \frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) x. \quad (66.109)$$

Mint hogy  $\mu k_{x_0} = \tau_0 = \xi k_f$ , írható:

$$\frac{dk_x^*}{dx} = \frac{2 \xi k_f}{h_x} \left( \frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) - \frac{2 \xi k_f}{h_x} \left( \frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) x, \quad (66.110)$$

ahol  $i = 1$  vagy  $2$ .

Nem követünk el nagy hibát, ha a (66.110) egyenletben első közelítésben feltesszük, hogy

$$h = h_x = \frac{h_{x_{0i}} + h_s}{2} = \text{konst.} \quad (66.111)$$

Ez esetben a (66.110) egyenlet megoldása a következő:

$$\begin{aligned} k_x^* - k_{x_{0i}}^* &= \frac{2 \xi k_{fk}}{h} \left( \frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) \int_{x_{0i}}^x dx - \frac{2 \xi k_{fk}}{h} \left( \frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) \int_{x_{0i}}^x x dx = \\ &= \frac{2 \xi k_{fk}}{h} \left[ \left( \frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) (x - x_{0i}) - \left( \frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) \left( \frac{x^2 - x_{0i}^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (66.112)$$

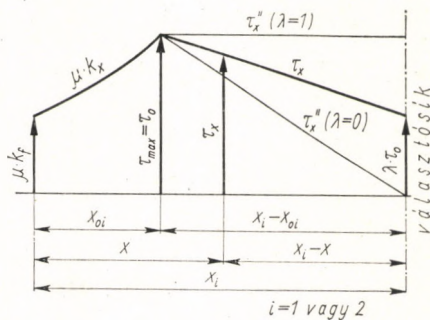
Eszerint

$$k_x^* = k_{x_{0i}}^* + \frac{2 \xi k_{fk}}{h (x_i - x_{0i})} \left[ (x_i - \lambda x_{0i})(x - x_{0i}) - (1 - \lambda) \frac{(x^2 - x_{0i}^2)}{2} \right]. \quad (66.113)$$

A (66.113) egyenletben

$$k_{fk} = \frac{k_{fx_{0i}} + k_{fx}}{2} \quad (66.114)$$

66.13. ábra



a közepes alakítási szilárdság az  $x - x_{0i}$  távolság mentén.

A tényleges alakítási ellenállás a (66.113) egyenletről úgy kapható meg, ha a  $p_x$  nyomófeszültséget is számításba vesszük:

$$k_x = k_x^* + p_x, \quad (66.115)$$

tehát

$$k_x = k_{x_{0i}}^* = \frac{2 \xi k_{fk}}{h(x_i - x_{0i})} \left[ (x_i - \lambda x_{0i})(x - x_{0i}) - (1 - \lambda) \left( \frac{x^2 - x_{0i}^2}{2} \right) \right] + p_x, \quad (66.116)$$

ahol  $i = 1$  vagy  $2$ , aszerint, hogy melyik zónát vizsgáljuk. Ebben az egyenletben

$$k_{x_{0i}}^* = \frac{\xi k_{fk}}{\mu'}, \quad (66.117)$$

és

$$\mu' = \mu \pm \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2}; \quad (66.118)$$

$k_{fk}$  a közepes alakítási szilárdság a csúszási tartományban.

Az alakítási ellenállás [(66.116) egyenlet] legnagyobb értékét  $x = x_1$ -nél, vagy  $x = x_2$ -nél éri el az I., illetve a II. zónában:

$$k_{x \max} = k_{x_{0i}}^* + \frac{2 \xi k_{fk}}{h(x_i - x_{0i})} \left[ (x_i - \lambda x_{0i})(x_i - x_{0i}) - (1 - \lambda) \frac{(x_i^2 - x_{0i}^2)}{2} \right] + p_s, \quad (66.119)$$

tehát

$$k_{x \max} = k_{x_{0i}}^* + \frac{\xi k_{fk}}{h} (1 + \lambda) (x_i - x_{0i}) + p_s. \quad (66.120)$$

Ha  $\lambda = 0$ , akkor

$$k_{x\max} = k_{x_{0i}}^* + \frac{\xi k_{fk}}{h} (x_i - x_{0i}) + p_s, \quad (66.121)$$

ha  $\lambda = 1$ , akkor

$$k_{x\max} = k_{x_{0i}}^* + \frac{2\xi k_{fk}}{h} (x_i - x_{0i}) + p_s. \quad (66.122)$$

Gyakorlati számításoknál  $\lambda = 0,5$ -tel számolhatunk (66.14. ábra).

A  $k_x$ , illetve a  $k_{x\max}$  függvényt csak akkor tudjuk pontosan meghatározni, ha a  $\varphi_s$  szöveget, továbbá az  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_{01}$  és  $x_{02}$  távolságot ismerjük. A  $\varphi_s$  szög, a választósíkhöz tartozó központi szög kiszámítható a (66.41) egyenlet segítségével. Ha  $\Phi$  és  $\varphi_s$  ismeretes, akkor ismeretes  $x_1$  és  $x_2$  is.  $x_{01}$  és  $x_{02}$  a tapadási tartomány határai, és a (66.127) egyenlettel számíthatók ki.

Mínthogy

$$k_{xI\max} = k_{xII\max}, \quad (66.123)$$

a (66.120) egyenletből az következik, hogy

$$\begin{aligned} k_{x_{01}}^* + \frac{\xi k_{fkx_{01}}}{h_I} (1 + \lambda) (x_1 - x_{01}) &= \\ &= k_{x_{02}}^* + \frac{\xi k_{fkx_{02}}}{h_{II}} (1 + \lambda) (x_2 - x_{02}). \end{aligned} \quad (66.124)$$

Ebben az egyenletben az alakítási szilárdság a tapadási tartomány határain:

$$k_{x_{01}} = \frac{\xi}{\mu'} k_{fkx_{01}} = \frac{\xi k_{fkx_{01}}}{\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2}}, \quad (66.125)$$

illetve

$$k_{x_{02}} = \frac{\xi}{\mu''} k_{fkx_{02}} = \frac{\xi k_{fkx_{02}}}{\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2}}; \quad (66.126)$$

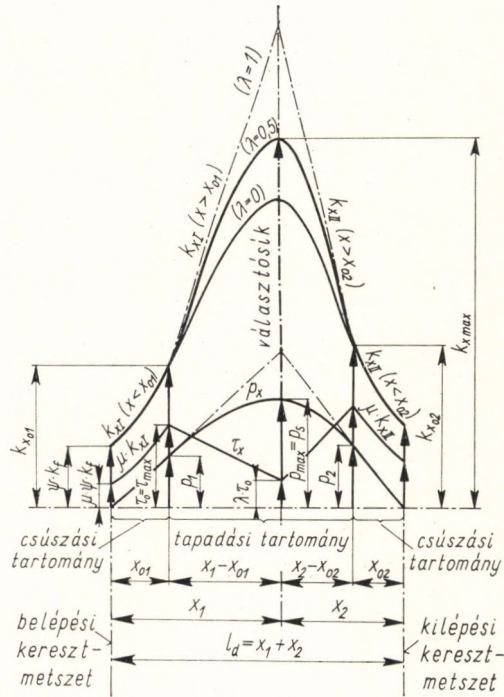
itt  $k_{kf x_{01}}$  és  $k_{kf x_{02}}$  a közepes alakítási szilárdság az I., illetve a II. csúszási zónában.

A tapadási tartományok (csúszási tartományok) határai a következő formulával számíthatók ki:

$$x_{0i} = \frac{h_i (\xi - \mu)}{\mu \left( \mu \pm \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} \right) + \xi \left( \mu \pm \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} \right)}, \quad (66.127)$$

ahol  $i = 1$  vagy  $2$  aszerint, hogy az I. vagy a II. zónáról van-e szó.

66.14. ábra. Az alakítási ellenállás eloszlásának kiszámítása a nyomott ív mentén, GELEJI szerint



A (66.124) egyenletben

$$h_I = \frac{h_1 + h_s}{2}, \quad (66.128)$$

$$h_{II} = \frac{h_2 + h_s}{2} \quad (66.129)$$

és

$$l_d = x_1 + x_2. \quad (66.130)$$

A (66.93), a (66.94) és a (66.116) egyenlet csak akkor ad helyes értékeket, ha a keresztmetszetek a hengerrésben a hengerlés folyamán nem görbülnek meg, hanem síkok maradnak (66.15/a–b ábra).

Ténylegesen azonban a keresztmetszetek meggörbülnek a hengerrésben. Ennek a meggörbülésnek a létrejöttéhez alakítási ellenállástöbblet van szükség, mint azt már fentebb is láttuk [(66.60) egyenlet]. Az alakítási ellenállás, illetve a hengerlési nyomás kiszámításakor tehát azt az erőttöbbletet is figyelembe kell venni, amely a darab hosszirányú szálait a hengerrésbe való belépéskor megtöri, majd a kilépési keresztmetszet előtt ismét kiegyenesíti. Ez az erőttöbblet a keresztmetszetek elgörbítésével kapcsolatban belső anyagelmozdulásokat hoz létre (66.16. ábra).

Ezt a folyamatot a belépési keresztmetszetben mint nyírást foghatjuk fel. Az ehhez szükséges belső munka a térfogategységre vonatkoztatva:

$$A_i = \sigma_r \varepsilon_r . \quad (66.131)$$

A redukált feszültség a hengerrésbe való belépés előtt:

$$\sigma_r = \tau \sqrt{3} = k_f , \quad (66.132)$$

és a redukált fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_r = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} , \quad (66.133)$$

tehát a térfogategységre eső belső munka:

$$A_i = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \varphi . \quad (66.134)$$

A darab egységnyi hosszúságú teljes vastagságára vonatkoztatva (térfogat  $V = 2\alpha R l$ ) a 66.16. ábra szerint:

$$\int_{(V=2\Phi R)} A_i dV = \frac{2}{\sqrt{3}} k_f R \int_0^\Phi \varphi d\varphi = \frac{k_f}{\sqrt{3}} R \Phi^2 , \quad (66.135)$$

és az egész  $V$  anyagtérfogatra vonatkoztatva:

$$\int_{(V)} A_i dV = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \Phi V . \quad (66.136)$$

Az összes hengerrészi munka és hengerrési erő két-két részből tevődik össze. A hengerrési erő egyik része ( $P_1$ ) a darab vastagságcsökkentését, a másik része ( $P_2$ ) a belső anyagelmozdulásokat hozza létre:

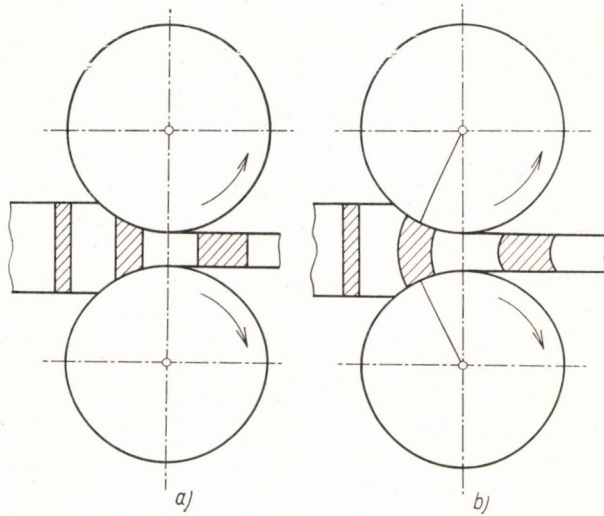
$$P = P_1 + P_2 . \quad (66.137)$$

Ezek szerint a közepes alakítási ellenállás is két részből áll:

$$k_k = k_{ak} + k_{sk} . \quad (66.138)$$



66.15. ábra. A hengerelt darab függőleges keresztmetszeteinek elgörbülése a hengerrésben



Itt  $k_k = \frac{P}{l_d}$  az összes közepes alakítási ellenállás;  $k_{ak} = \frac{P_1}{l_d}$  a közepes alakítási ellenállásnak az a része, amely az alakítási munkát,  $k_{sk} = \frac{P_2}{l_d}$  pedig az a része, amely a belső anyagmozdulásokat hozza létre.

A  $P_2$  hengerlési nyomás, mely a belső anyagmozdulások létrehozásához szükséges, a következő egyenletből számítható ki:

$$P_2 \Delta h (=) \frac{k_f}{\sqrt{3}} \Phi V. \quad (66.139)$$

Ebből következik, hogy

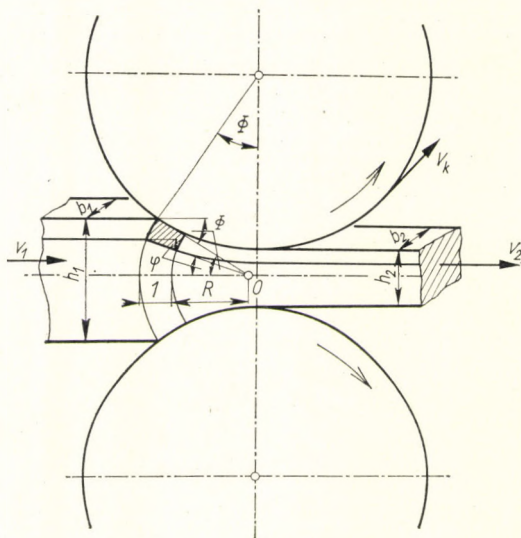
$$P_2 = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot \Phi \cdot \frac{V}{\Delta h}. \quad (66.140)$$

Mint ahogy feltételeztük, hogy a darab szélessége  $b = 1$ , a hengerrésben befogott anyagterfogat közelítőleg:

$$V = h_1 l_d - 2 \frac{\Delta h}{2} l_d \frac{2}{3} = l_d \left( h_1 - \frac{2}{3} \Delta h \right). \quad (66.141)$$

Ennek megfelelően a közepes alakítási ellenállás:

$$k_{sk} = \frac{P_2}{l_d b} = \frac{P_2}{l_d} = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot \Phi \cdot \frac{V}{l_d \Delta h} = \frac{k_{fk}}{\sqrt{3}} \cdot \Phi \cdot \frac{\left( h_1 - \frac{2}{3} \Delta h \right)}{\Delta h}. \quad (66.142)$$



66.16. ábra. A keresztmetszetek elgörbülésének létrehozásához szükséges munka kiszámítása

Mint ahogy

$$\Phi = \frac{l_d}{r},$$

a (66.142) egyenlet így is írható:

$$k_{sk} = \frac{k_{fk}}{\sqrt{3}} \left( \frac{l_d}{r} \right) \frac{\left( h_1 - \frac{2}{3} \Delta h \right)}{\Delta h}. \quad (66.142a)$$

A közepes alakítási ellenállást a 66.17. ábra alapján lehet kiszámítani. Az ábra szerint a közepes alakítási ellenállás:

$$k_k = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7}{l_d}, \quad (66.143)$$

ahol

$$T_1 = \left( \frac{k_{f1} + k_{x_{01}}}{2} \right) x_{01}, \quad (66.144)$$

$$T_2 = k_{x_{01}} (x_1 - x_{01}), \quad (66.145)$$

$$T_3 = \frac{2}{3} (k_{x_{\max}} - k_{x_{01}}) (x_1 - x_{01}), \quad (66.146)$$

$$T_4 = \left( \frac{k_{f2} + k_{x_{02}}}{2} \right) x_{02}, \quad (66.147)$$

$$T_5 = k_{x_{02}} (x_2 - x_{02}), \quad (66.148)$$

$$T_6 = \frac{2}{3} (k_{x_{\max}} - k_{x_{02}}) (x_2 - x_{01}), \quad (66.149)$$

$$T_7 = k_{sk} l_d. \quad (66.150)$$

A 66.18. ábra bemutatja az alakítási ellenállás eloszlását a nyomott ív mentén alumínium hideghengerlésénél. Ezen az ábrán E. SIEBEL és W. LUEG kísérleti görbéi és GELEJI számított görbéje vannak összehasonlítva.

#### 67. A FAJLAGOS HENGERLÉSI NYOMÁS (ALAKÍTÁSI ELLENÁLLÁS) TÉRBELI ELOSZLÁSA

A 66. fejezetben feltételeztük, hogy a hengerrésben működő fajlagos hengerlési nyomás, vagyis az alakítási ellenállás síkban ábrázolható. Ha a sima hengerek között hengerelt négyzetes keresztmetszetű darab vastagságához képest nagyon széles, akkor a  $b_b$  szélességű belső övön belül (65.1. ábra), ahol az anyag — mind a visszamaradási, mind az előresietési zónában — csak a hengerlés irányában áramlik, a nyomáseloszlást valóban lehet síkban ábrázolni. A darab szélső  $b_{sz1}$  és  $b_{sz2}$  sávjaiban az áramlási vonalak olyan görbék, amelyek érintői a be- és kilépési keresztmetszetben párhuzamosak a hengerlési iránnyal, a hengerlési irányra merőleges választósíkban viszont e síkkal párhuzamosak, vagyis a hengerlési irányra merőlegesek (65.3a egyenlet). A hengerlési nyomás eloszlása a szélső sávokban nem ábrázolható síkban, hanem csak térbelileg, ahogyan az SIEBEL és LUEG kísérleteiből látható (60.1.—60.7. ábrák).

Ha a  $\Phi$  befogási ív kicsi, az alakítási ellenállás térbeli eloszlása első megközelítésben a 27.16. és a 63.5. ábrával adható meg. Ha egzaktabban akarjuk meghatározni az alakítási ellenállás eloszlását a hengerrésben, akkor kis  $\Phi$  befogási ív esetén GELEJI szerint feltehetjük, hogy a fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás)  $k_{xY} \equiv k_P$  a folyási vonalak mentén jó megközelítéssel a következőképpen írható fel (67.1. ábra):

$$k_{xY} \equiv k_P = C k_{fP} e^{\frac{2(\mu \mp \beta)}{h_x} l_{EP}}. \quad (67.1)$$

A (67.1) egyenletben és a 67.1. ábrán  $l_{EP}$  az áramlási vonal hossza az  $E$  és a  $P$  pont között.  $k_{fP}$  az alakítási szilárdság a  $P$  pontban:

$$k_{fP} = k_{fE} + \left( \frac{k_{fS} - k_{fE}}{l_{EF}} \right) l_{EP}. \quad (67.2)$$

Itt  $k_{fE}$  a hengerelt anyag alakítási szilárdsága az  $E$  pontban.  $k_{fE}$ -t annak az alakváltozásnak a segítségével lehet meghatározni, amelyen az anyag



az  $O_{XY}$  és az  $E$  pont között keresztülmegy:

$$k_{fS} = \frac{k_s}{1,15 e^{\frac{2\mu}{h_x} l_{EF}}} . \quad (67.3)$$

Ebben a képletben  $k_s \equiv k_{xII \max}$  a maximális alakítási ellenállás a választósíkban, melyet a (66.53) egyenletből számíthatunk ki, ha  $h_x$ -et  $h_s$ -sel helyettesítjük;  $h_s$  a (66.41) egyenletből határozható meg.  $l_{EF}$  az áramlási vonal hossza az  $E$  és az  $F$  pont között,  $C = 1,15$  egy állandó, melyet a folyási feltételből határoztunk meg,  $\beta$  egy szög, amely az áramlási vonalnak a  $P(xY)$  ponton keresztülmenő  $\vartheta_{xY}$  iránytangensétől és a  $\varphi_x$  szögtől függ:

$$\beta = f(\vartheta_{xY}, \varphi_x) . \quad (67.4)$$

Ha  $\vartheta_{xY} = 0$ , akkor  $\beta = \varphi_x$ ; ha  $\vartheta_{xY} = \infty$ , akkor  $\beta = 0$ .

A  $\beta$  szöget jó közelítéssel a következő egyenlet adja meg:

$$\beta = \varphi_x \left( \frac{l_{E'F} - l_{E'P}}{2 l_{E'P}} \right) . \quad (67.5)$$

Itt  $l_{E'F}$  az áramlási vonal hossza az  $E'$  pont (belépési keresztmetszetben) és az  $F$  pont (választósíkban) között (67.1. ábra).

Ha a  $P$  pont a belépési keresztmetszetbe esik, akkor  $l_{E'P} = l_{E'E} = 0$ , és  $\beta = \frac{\varphi_x}{2} = \frac{\Phi}{2}$ ; ha a  $P$  pont összeesik az  $F$  ponttal, akkor  $\beta = 0$ .

A (67.1) egyenletben a kitevőben mínuszjel teendő, ha a vizsgált áramlási vonal a visszamaradási zónában, és pluszjel, ha az áramlási vonal az előresietési zónában van.

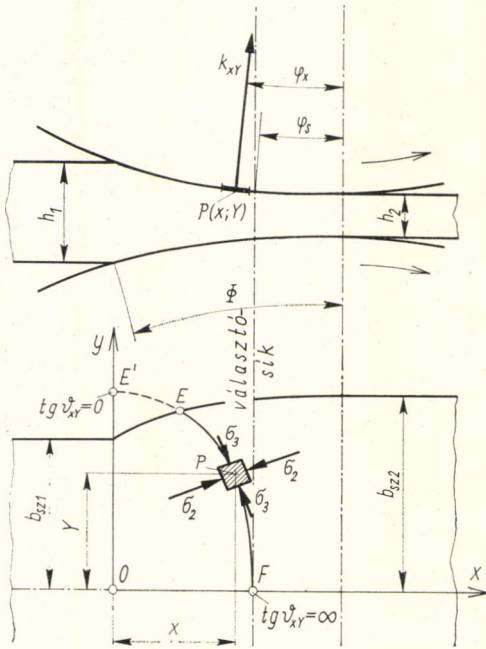
A fenti megfontolásokból következik, hogy az alakítási ellenállás eloszlása a nyomófelületeken, az ún. erődomb, első megközelítésben a választósíkban a 67.2. ábrával és a hosszmeteszet síkjában a 67.3. ábrával szemléltethető.

## 68. A HENGERLÉSI NYOMATÉK ÉS A HENGERLÉSI NYOMÁS

A hengerléskor működő alakító erők létrehozásához hengerlési nyomaték szükséges. Az 59. fejezetben már tárgyaltuk, hogy egy négyzetes keresztmetzetű darab sima, cilindrikus hengerek között történő hengerlésénél milyen erők hatnak az elemi nyomófelületre (59.1. és 68.1. ábra) [68.1]. A  $df$  felületelemre ható normálerő

$$dN = k df = kbr d\varphi . \quad (68.1)$$

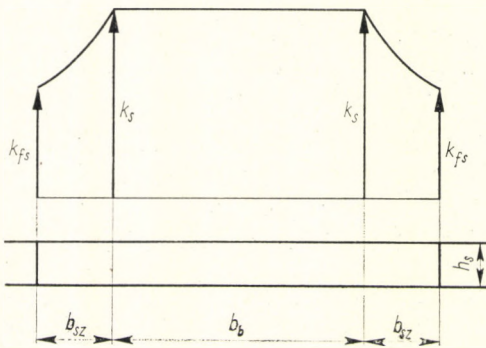
67.1. ábra. A fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás) változása a nyomott felületnek egy áramlási vonala mentén



Amikor a henger  $df$  felületeleme az  $O_1A = \rho_a$  sugarú körön mozog, akkor a tangenciális irányban működő erő

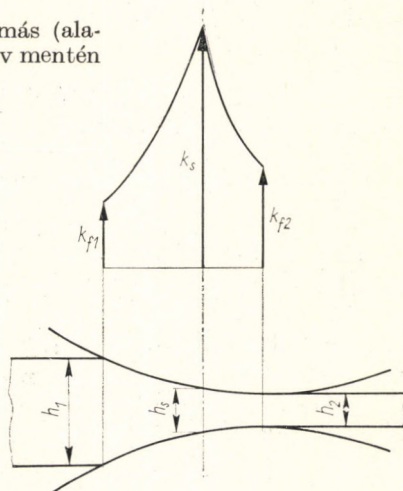
$$dV = k df \cos \frac{\varphi}{2} = kbr \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi. \quad (68.2)$$

Ezekben az egyenletekben  $k$  a fajlagos hengerlési nyomás, illetve a hengerlési alakítási ellenállás. A henger  $df$  felületelemén fellépő súrlódási erő,



67.2. ábra. A fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás) eloszlása a választósíkon

67.3. ábra. A fajlagos hengerlési nyomás (alakítási ellenállás) eloszlása a nyomott ív mentén



ha  $\mu$  a súrlódási tényező:

$$dR = \mu dN = \mu k b r d\varphi . \quad (68.3)$$

Az elemi hengerlési nyomaték a 68.1. ábra szerint:

$$dM = dM_a + dM_s , \quad (68.4)$$

ahol

$$dM_a = 2 dV \varrho_a \quad (68.5)$$

a tiszta alakítási munkához szükséges elemi hengerlési nyomaték, és

$$dM_s = 2\mu dN \varrho_s \quad (68.6)$$

az az elemi hengerlési nyomaték, mely a nyomófelületen fellépő súrlódási munka legyőzéséhez szükséges.

A két utolsó egyenletben:

$$\varrho_a = 2 r \sin \frac{\varphi}{2} , \quad (68.7)$$

és

$$\varrho_s = \varrho_a \sin \frac{\varphi}{2} ; \quad (68.8)$$

és így az alakításhoz szükséges elemi hengerlési nyomatékok:

$$dM_a = 2 k b r \cos \frac{\varphi}{2} 2 r \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2 k r^2 b \sin \varphi d\varphi , \quad (68.9)$$

$$dM_s = 4 r \mu k b r \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4 k r^2 b \mu \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi , \quad (68.10)$$

tehát

$$dM = 2kr^2 b \sin \varphi d\varphi + 4kr^2 b \mu \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi. \quad (68.11)$$

Mint hogy négyzetes keresztmetszetű darab hengerlésénél

$$M_s = \int_0^\varphi dM_s, \quad (68.12)$$

a hengerfelületen fellépő súrlódási munkához szükséges nyomaték a legkedvezőtlenebb esetben is kevesebb az összhengerlési nyomaték 5 százaléknál, a probléma egyszerűbb megoldása kedvéért feltesszük, hogy  $M_s (=) 0$ , és így a hengerlési nyomatékot a következőképpen vehetjük számításba:

$$M (=) \int dM_a (=) \int 2kr^2 b \sin \varphi d\varphi. \quad (68.13)$$

A nyomott ív mentén a  $k$  alakítási ellenállás (fajlagos hengerlési nyomás) úgy oszlik el, hogy a nyomott ív elején és végén egyenlő a hengerrésbe belépő, illetve kilépő darab anyagának folyási határával, maximális értékét pedig a választósíkban éri el (66.7. és 66.14. ábra). Meleghengerlésnél a 66. fejezet szerint az alakítási ellenállás (más formában írva) a választósík előtt:

$$k_{xI} = 1,15 k_f \left\{ 1 + 2 \left( \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{h_x}{h_s} \right)^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \sigma_s \left( \frac{h_x}{h_s} \right)^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}} \right\}, \quad (66.31a)$$

a választósík mögött:

$$k_{xII} = 1,15 k_f \left\{ 1 + 2 \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{h_x}{h_2} \right)^{-\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}} - 1 \right] \right\}, \quad (66.26a)$$

és a választósíkban, vagyis ahol a legnagyobb az alakítási ellenállás:

$$k_{s\max} = 1,15 k_f \left\{ 1 + 2 \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{h_s}{h_2} \right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}} - 1 \right] \right\}, \quad (66.26b)$$

ahol  $k_f$  a hengerelt anyag alakítási szilárdsága,  $k_{f1}$  a hengerelt anyag alakítási szilárdsága szűrés előtt,  $k_{f2}$  a hengerelt anyag alakítási szilárdsága szűrés után,  $k_s$  az alakítási szilárdság a választósíkban,  $\mu$  a súrlódási tényező



a darab és a hengerek között,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1 - h_2}{2r \sin \Phi}, \quad (68.14)$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h_1 - h_2}{2r \sin \Phi}, \quad (68.15)$$

$\Phi$  a befogási szög,  $r$  a hengerek rádiusza,

$$l_d = \Phi r, \quad (68.16)$$

$$l_{d1} = l_d - \varphi_s r, \quad (68.17)$$

$$l_{d2} = \varphi_s r, \quad (68.18)$$

$$h_x = 2x \operatorname{tg} \alpha + h_2 \quad (68.19)$$

a darab keresztmetszetének magassága a kilépési keresztmetszettől  $x$  távolságra,

$h_s = 2x_s \operatorname{tg} \alpha + h_2$  a hengerelt darab keresztmetszetének magassága a kilépési keresztmetszettől  $x_s = l_{d2}$  távolságra (68.2. ábra),

$$h_s = h_2 \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - (\operatorname{tg}^2 \alpha - \mu^2) \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}}}}{\mu + \operatorname{tg} \alpha} \right]^{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu}} \quad (66.41)$$

$$x_s = \left( \frac{h_s - h_2}{h_1 - h_2} \right) r \sin \Phi, \quad (68.20)$$

$x_s$  a választósík távolsága a kilépési keresztmetszettől,

$h_2$  a darab magassága a szűrés után,

$$\varphi_s = \operatorname{arc} \sin \left[ \left( \frac{h_s - h_2}{h_1 - h_2} \right) \sin \Phi \right] \quad (68.21)$$

a választósíkhöz tartozó középponti szög,

$$\sigma_s = 2,3 k_f \left( \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ \left( \frac{h_s}{h_2} \right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}} - 1 \right] \quad (68.22)$$

a választósíkra ható hosszirányú feszültség.

Hideghengerlés esetében  $k_{xI}$  és  $k_{xII}$  a (66.53) és a (66.59) egyenlettel,  $\sigma_s$  a (66.58) egyenlettel határozható meg,  $x_s$  pedig abból a feltételből, hogy a választósíkokban  $k_{xI} = k_{xII}$ . (A számítás menetét lásd a 66. fejezetben.)

Az elemi hengerlési nyomatékot e fejezet elején a (68.13) egyenlettel felírtuk. Ebből a hengerlési nyomaték:

$$M = \int_0^{\Phi} dM = \int_0^{\Phi} 2 k_x b r^2 \sin \varphi d\varphi = \int_0^{\varphi_s} dM_{II} + \int_{\varphi_s}^{\Phi} dM_I =$$

$$= \int_0^{\varphi_s} 2 k_{xII} b r^2 \sin \varphi d\varphi + \int_{\varphi_s}^{\Phi} 2 k_{xI} b r^2 \sin \varphi d\varphi. \quad (68.23)$$

A hengerlési nyomatékot gyakorlati célból egyszerűsítve is ki lehet számítani, ha az alakítási ellenállás eloszlását a 68.2. ábra szerint linearizáljuk. Gyakorlati céloknak kitűnően megfelel, ha az alakítási ellenállást az I. és II. zónában a következőképpen írjuk fel:

$$k_{xI} = (k_s - k_{f1}) \left( \frac{\Phi - \varphi}{\Phi - \varphi_s} \right) + k_{f1} \quad (68.24)$$

és

$$k_{xII} = (k_s - k_{f2}) \frac{\varphi}{\varphi_s} + k_{f2}. \quad (68.25)$$

Ha a (68.24) és (68.25) egyenletet a (68.23) egyenletbe behelyettesítjük, akkor a hengerlési nyomaték számára a következő kifejezést kapjuk:

$$M = \int_{\varphi_s}^{\Phi} \left[ (k_s - k_{f1}) \left( \frac{\Phi - \varphi}{\Phi - \varphi_s} \right) + k_{f1} \right] 2r^2 b \sin \varphi d\varphi +$$

$$+ \int_0^{\varphi_s} \left[ (k_s - k_{f2}) \frac{\varphi}{\varphi_s} + k_{f2} \right] 2r^2 b \sin \varphi d\varphi. \quad (68.26)$$

Az integrálás elvégzése után a hengerlési nyomaték:

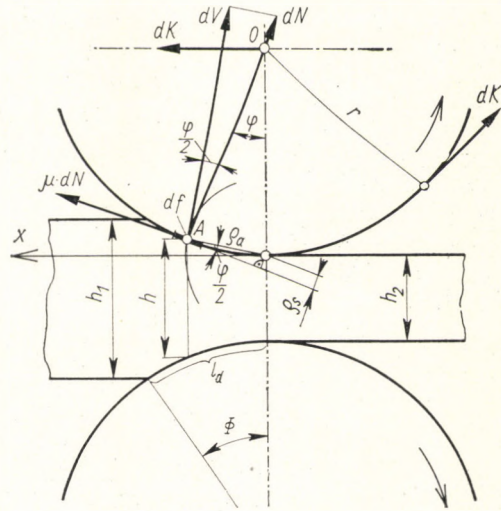
$$M = 2r^2 b \left\{ (k_s - k_{f2}) \left( \frac{\sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s}{\varphi_s} \right) + k_{f2} (1 - \cos \varphi_s) + \right.$$

$$+ \left. \left[ (k_s - k_{f1}) \left( \frac{\Phi}{\Phi - \varphi_s} \right) + k_{f1} \right] (\cos \varphi_s - \cos \Phi) - \right.$$

$$\left. - (k_s - k_{f1}) \left[ \frac{(\sin \Phi - \sin \varphi_s) + (\varphi_s \cos \varphi_s - \Phi \cos \Phi)}{\Phi - \varphi_s} \right] \right\}. \quad (68.27)$$

Hideghengerlés, főleg vékony lemezek hideghengerlése esetén, amikor a fellépő erők és a hengerlési nyomaték kiszámításához figyelembe kell venni a hengerek belépülését is, nem a névleges  $r$  hengerrádiusszal [68.2.

68.1. ábra. A hengerlésnél fellépő erők



ábra], hanem a megnövekedett  $R$  rádiusszal kell a hengerlési nyomást és nyomatékot [(70.18) egyenlet] kiszámítani.

A hengerlési nyomás is kiszámítható a 68.2. ábra szerint. A hengerlési nyomás, amely a két henger síkjában működik, a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{\varphi_s} k_{xI1} br \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi + \int_{\varphi_s}^{\Phi} k_{xI} \cos \frac{\varphi}{2} br d\varphi = \\
 &= \int_0^{\varphi_s} \left[ (k_s - k_{f2}) \frac{\varphi}{\varphi_s} + k_{f2} \right] br \cos \varphi d\varphi + \\
 &+ \int_{\varphi_s}^{\Phi} \left[ (k_s - k_{f1}) \left( \frac{\Phi - \varphi}{\Phi - \varphi_s} \right) + k_{f1} \right] br \cos \varphi d\varphi.
 \end{aligned} \tag{68.28}$$

Mintthogy  $\Phi$  maximálisan  $30^\circ$ , legfeljebb 4–5 százalékos hibát követünk el, ha a hengerlési nyomást a következőképpen írjuk fel:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{\varphi_s} \left[ (k_s - k_{f2}) \frac{\varphi}{\varphi_s} + k_{f2} \right] br d\varphi + \\
 &+ \int_{\varphi_s}^{\Phi} \left[ (k_s - k_{f1}) \left( \frac{\Phi - \varphi}{\Phi - \varphi_s} \right) + k_{f1} \right] br d\varphi.
 \end{aligned} \tag{68.29}$$

Ha az integrálást elvégezzük, akkor a hengerlési nyomás kifejezése így alakul:

$$P = \frac{br}{2} [k_s \Phi + k_{f1} (\Phi - \varphi_s) + k_{f2} \varphi_s]. \quad (68.30)$$

Gyakorlati számításoknál a hengerlési nyomás és a forgatónyomaték kiszámításának alapja a közepes alakítási ellenállás (lásd a 70. fejezetet). A közepes alakítási ellenállás vagy számítás, vagy kísérlet útján határozható meg. A legnagyobb alakítási ellenállás  $k_s$ ; a  $k_k$  közepes alakítási ellenállás, továbbá a  $k_{f1}$  és a  $k_{f2}$  alakítási szilárdság között a következő összefüggés áll fenn (68.2. ábra):

$$k_s = 2k_k - \frac{k_{f1} l_{d1} + k_{f2} l_{d2}}{l_d}. \quad (68.31)$$

Mínt hogy meleghengerlésnél  $k_{f1} = k_{f2} = k_f$ , tehát

$$k_s = 2k_k - k_f. \quad (68.32)$$

A hengerlési nyomást gyakorlati célokra a következő módon lehet egyszerűen felírni:

$$P = k_k b l_d. \quad (68.33)$$

#### 69. A HENGERLÉSI NYOMATÉK ÉS TELJESÍTMÉNY-SZÜKSÉGLET KISZÁMÍTÁSA, HA FELTÉTELEZZÜK, HOGY AZ ALAKÍTÁSI ELLENÁLLÁS A NYOMOTT ÍV MENTÉN ÁLLANDÓ

Az elemi nyomatékot az (59.4) és (68.13) egyenlet adja meg (68.1 ábra):

$$dM = 2kr^2 b \sin \varphi \, d\varphi. \quad (68.13a)$$

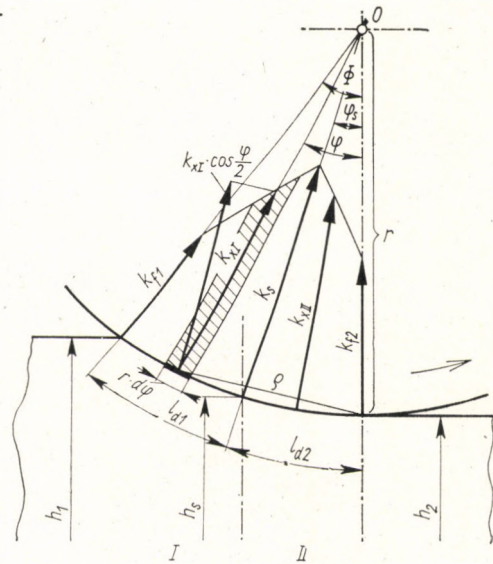
Ha feltesszük, hogy a  $k$  alakítási ellenállás a nyomott felület mentén állandó, akkor a (68.33) egyenletből a közepes alakítási ellenállás:

$$k_k = \frac{P}{b l_d}. \quad (69.1)$$

Ezzel az egyenlettel a közepes alakítási ellenállás definiálva is van. Ha úgy vesszük, hogy a (68.13/a) egyenletben  $k = k_k =$  állandó, akkor a hengerlési nyomatéokra a következő kifejezést kapjuk:

$$M = 2k_k b r^2 \int_0^\Phi \sin \varphi \, d\varphi = k_k 2b r^2 (1 - \cos \Phi) = k_k F r, \quad (69.2)$$

68.2. ábra. A hengerlési nyomaték meghatározása



vagyis

$$M = k_k F r, \quad (69.2a)$$

ahol

$$2 r b (1 - \cos \Phi) = \Delta h b = F \quad (69.3)$$

a keresztmetszet-csökkenés vagy fogyás.

A 68.1. ábrából meghatározhatjuk a hengerlés teljesítményszükségletét is:

$$dL = 2 dV v_\varrho. \quad (69.4)$$

Minthogy

$$v_\varrho = v_k \frac{\varrho}{r} = 2 v_k \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (69.5)$$

ahol  $v$  a hengerek kerületi sebessége, továbbá

$$dV = dN \cos \frac{\varphi}{2} = k_k b r d\varphi \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (69.6)$$

tehát

$$dL = 2 k_k b r \cos \frac{\varphi}{2} 2 v_k \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2 k_k b r v_k \sin \varphi d\varphi; \quad (69.7)$$

ezek szerint a hengerlés teljesítményszükséglete:

$$L = 2 k_k b r v_k \int_0^\Phi \sin \varphi d\varphi = F k_k v_k. \quad (69.8)$$

A tiszta hengerlési teljesítményszükséglet:

$$N = \frac{F k_k v_k}{102} \quad [kW]. \quad (69.9)$$

Ha a hengerlési nyomatékot és teljesítményszükségletet azzal az egyszerűsítő feltételezéssel számítjuk ki, hogy az alakítási ellenállás állandó, a számítás pontosságának növelésére szükségesnek mutatkozik egy korrekciós faktor bevezetése. Igen jól megfelel a célnak a következő korrekciós faktor:

$$\eta = 1,05 - 0,8 \frac{\Delta h}{h_1}. \quad (69.10)$$

Ezek szerint az  $M$  nyomaték és az  $N$  teljesítményszükséglet gyakorlati kiszámítására a következő képleteket kell felhasználnunk:

$$M = \eta F k_k r \quad (69.11)$$

és

$$N = \eta \frac{F k_k v_k}{102}. \quad (69.12)$$

Igen gyakran csakis ezekkel az erősen leegyszerűsített képletekkel (69.11) és (69.12) tudjuk a hengerlési problémákat számítás útján megközelíteni.

#### 70. A KÖZEPES ALAKÍTÁSI ELLENÁLLÁS KISZÁMÍTÁSA

A hengerlésnél fellépő közepes alakítási ellenállás (fajlagos hengerlési nyomás):

$$k_k = \frac{P}{bl_d}, \quad (70.1)$$

azaz a közepes alakítási ellenállás a hengerekre ható  $P$  nyomás és az  $l_d b$  nyomott felület hányadosa (70.1. ábra).

Az alakítási ellenállás az alakítási szilárdság és a harmadik főfeszültség összege [(22.2) egyenlet] [70.1].

A hengerlésnél két nagy alakváltozás jön létre: az egyik a hengerlési nyomás irányában és a másik erre merőlegesen, vagyis a hengerlés irányában. A hengerlési nyomás irányában a legnagyobb fajlagos alakváltozás  $\varepsilon_1$  és a legnagyobb feszültség  $\sigma_1 \equiv k$ ; a hengerlés, azaz a darab hossztengetelye irányában pedig a második legnagyobb fajlagos alakváltozás:  $\varepsilon_3$  és a legkisebb főfeszültség:  $\sigma_3$  lép fel (70.2. ábra).

Nyomással való alakításnál a harmadik főfeszültség közepes értékét a következő képlettel lehet meghatározni:

$$\sigma_{3k} = \Phi k_{fk} \mu \frac{l_d}{h_k}. \quad (70.1a)$$

Mint hogy a hengerlés egy folyamatosan ismétlődő nyomóigénybevétel, ez a képlet alkalmas a harmadik főfeszültség kiszámítására. Nagyszámú kísérleti adat alapján a hengerrésben fellépő  $\sigma_{3k}$  közepes harmadik főfeszültség a legmegfelelőbb formában így írható fel:

$$\sigma_{3k} = C k_{fk} \mu \frac{l_d}{h_k} \sqrt[4]{v}. \quad (70.2)$$

Ennek alapján a közepes alakítási ellenállás GELEJI szerint [70.1]:

$$k_k = k_{fk} \left( 1 + C \mu \frac{l_d}{h_k} \sqrt[4]{v} \right). \quad (70.3)$$

Ebben a képletben

$k_k$  a közepes alakítási ellenállás, illetőleg a közepes fajlagos felületi nyomás a nyomott felületeken [kg/mm<sup>2</sup>],

$k_{fk}$  a közepes alakítási szilárdság a hengerrésben [kg/mm<sup>2</sup>],

$C$  egy változó tényező, amely az  $\left( \frac{l_d}{h_k} \right)$  viszonytól függ [(m/s)<sup>-1/4</sup>],

$\mu$  a súrlódási tényező,

$l_d$  a nyomott ív [mm],

$h_k = \frac{h_1 + h_2}{2}$  a hengerrésbe befogott darab közepes magassága [mm],

$v$  a hengerlési sebesség [m/s].

A (70.3) képletben  $\mu \frac{l_d}{h_k}$  egy dimenzió nélküli szám. Ha  $\frac{l_d}{h_k} = 1$ , akkor a közepes alakítási ellenállást a következő képlettel lehet kifejezni:

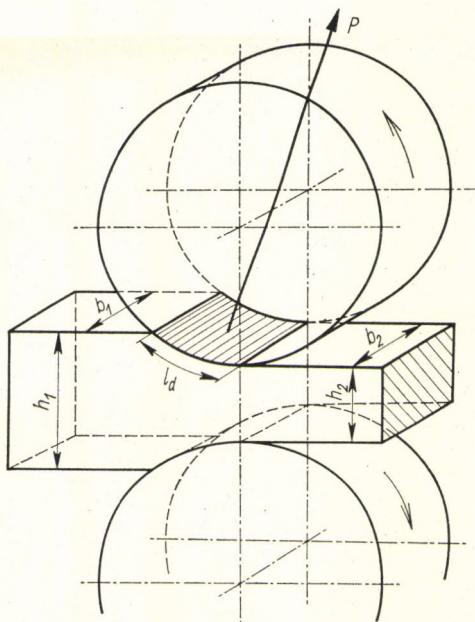
$$k_k = k_{fk} (1 + C \sqrt[4]{v}) = k_{fk} + k_{fk} C \sqrt[4]{v}. \quad (70.4)$$

A folyási feltétel értelmében közelítőleg felvehető (70.2. ábra):

$$\sigma_{1k} = k_k = k_{fk} + \sigma_{3k}. \quad (70.5)$$

A 66. fejezetben részletesen kifejtettük, hogy az alakítási ellenállás, illetőleg a harmadik főfeszültség függ attól a relatív csúszási sebességtől is, amellyel a henger felületelemei a darab felületelemein csúsznak, tehát

70.1. ábra. A hengerlési nyomás



a harmadik főfeszültség végeredményben a hengerlési sebességtől is függ:

$$\sigma_{3k} = f(k_f, C, v), \quad (70.6)$$

ez a függvény kísérleti tapasztalatok alapján a következőképpen írható fel:

$$\sigma_{3k} = k_f C \sqrt[4]{v}. \quad (70.7)$$

Ha  $v = 1$  m/s, akkor

$$\sigma_{3k} = k_{fk} C. \quad (70.8)$$

Ha tehát a hengerlési sebesség  $v = 1$  m/s és  $\mu \left( \frac{l_d}{h_k} \right) = 1$ , akkor  $C$  megadja, hogy  $\sigma_{3k}$  hányszor nagyobb a közepes alakítási szilárdságnál,  $k_{fk}$ -nál.

A fenti fejtegetésekből is következik, hogy  $C$  az  $\left( \frac{l_d}{h_k} \right)$  viszonyszám függvénye. Igen sok kísérleti eredmény alapján a  $C = f \left( \frac{l_d}{h_k} \right)$  függvényre a 70.3. ábra görbéjét kapjuk.

A  $C$  együtthatót számítással is meg lehet határozni. Ugyanis ha  $0,25 \leq \frac{l_d}{h_k} \leq 1$ , akkor

$$C_{0,25-1} = 17,0068 \left( \frac{l_d}{h_k} \right)^2 - 29,847 \left( \frac{l_d}{h_k} \right) + 18,3402; \quad (70.9)$$



ha  $1 \leq \frac{l_d}{h_k} \leq 3$ , akkor

$$C_{1-3} = 0,8 \left( \frac{l_d}{h_k} \right)^2 - 4,9 \left( \frac{l_d}{h_k} \right) + 9,6; \quad (70.10)$$

ha  $3 \leq \frac{l_d}{h_k} \leq 15$ , akkor

$$C_{3-15} = 0,013 \left( \frac{l_d}{h_k} \right)^2 - 0,293 \left( \frac{l_d}{h_k} \right) + 2,862. \quad (70.11)$$

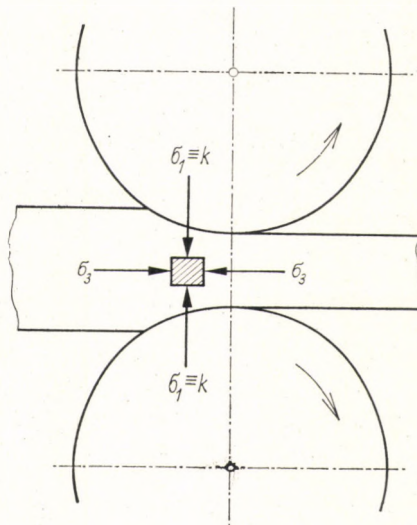
A  $k_f$  alakítási szilárdság szintén az alakítási sebességtől és az alakítás nagyságától függő anyagjellemző (1. a 20. fejezetet):

$$k_f = k_{f0} \dot{\varphi}^n. \quad (70.12)$$

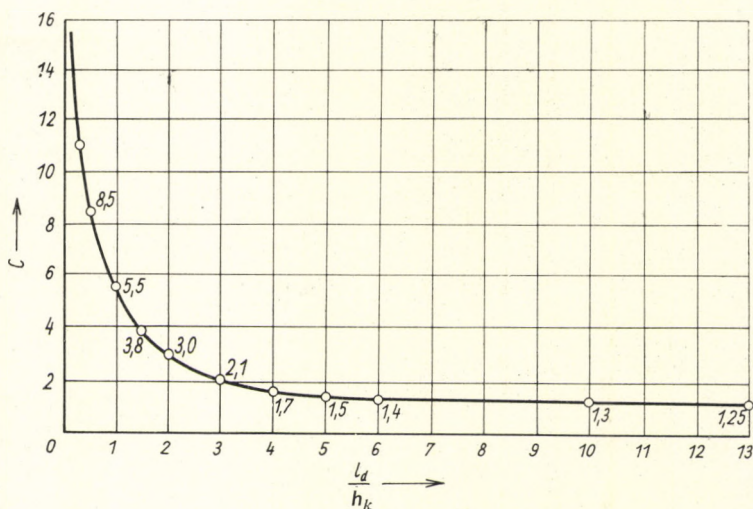
Ha tehát nagyobb sebességeknél meg akarjuk határozni az alakítási ellenállást, akkor a (70.3) képletben szereplő  $k_{fk}$  közepes alakítási szilárdságot a (70.12) képlettel kell kiszámítani. Négyzetes keresztmetszetű darab hengerlésénél  $\dot{\varphi}$  értéke a (70.12) képletben a következő lesz:

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta h}{h_k} \frac{v}{l_d}. \quad (70.13)$$

Az  $n$  kitevő értékeit, melyeket J. F. ALDER és V. A. PHILLIPS [20.2], továbbá W. LUEG és H. C. MÜLLER [20.4] határoztak meg, a 20. fejezetben



70.2. ábra. Főfeszültségek a hengerrésben



70.3. ábra. A  $C$  együttható  $l_d/h_k$  függvényében

találjuk. Acélok melegehengerlésénél gyakorlatilag alkalmazott sebességekkel az alakítási szilárdságot VOITH M. [70.2] szerint a következő közelítő képlettel lehet kiszámítani:

$$k_f = k_{f0} \left( 1 + 0,05 \frac{\Delta h}{h_k} \frac{v}{l_d} \right); \quad (70.14)$$

itt  $k_{f0}$  a szokványos szakítógépssebességekkel meghatározott alakítási szilárdság.

Egyes anyagok (pl. alumínium) hideghengerlésénél bizonyos hengerlési sebesség felett, ha nem elég nagymérvű a hűtés, a hengerelt anyag a hengerlésben annyira felmelegszik, hogy a fellépő közepes alakítási ellenállás kisebb lesz, mint amekkora a tisztán hidegalakításnál fellépő  $\sigma_{0,2} - q$  folyási görbe alapján várható lenne. A  $k_{fk}$  közepes alakítási szilárdságot hideghengerlésnél ugyanis a  $\sigma_{0,2} - q$  görbéből (70.5. ábra) úgy lehet meghatározni, hogy a tisztán hidegalakításnak megfelelő  $\sigma_{0,2} - q$  görbe és az abszcissza által bezárt területet osztjuk az alakítás mértékével; a mi esetünkben tehát az OFAQO által bezárt területet osztjuk az OQ távolsággal. Mármost, ha alumínium hengerlésekor a hengerlési sebesség túllépi azt a sebességet, a hűtés pedig alatta marad annak a mértéknek, amely a tiszta hideghengerlési keményedést biztosítja, akkor a darab egy térfogatelemének hőmérséklete, miközben a hengerlésben a belépési keresztmetszettől a kilépési keresztmetszet felé halad, folytonosan emelkedik; márpedig a darab hőmérsékletének növekedésével keményedőképessége csökken. Így a keményedés, illetve a folyási határ vonala a hidegalakításra jellemző  $\sigma_{0,2} - q$  görbe alatt jár, és olyan görbe lesz, amelynek maximuma van, s

amelyet parabolával lehet ábrázolni (70.5. ábra). Ha számítás vagy üzemi tapasztalat alapján helyesen meg tudjuk állapítani a hengerrésből kifutó anyag hőmérsékletét (l. a 75. fejezetet), akkor közelítéssel felvehetjük a hengerrésből kifutó anyag  $\sigma_{0,2}$  folyási határát ( $A'$  pont). Ehhez segítséget ad a 70.6. ábra, amely az alumíniumnak és ötvözeteinek melegszilárdságát ábrázolja a hőmérséklet függvényében. A kifutó anyag folyási határát ismerve, felvesszük a  $\sigma_{0,2} - q$  görbét. Az  $OFA'QO$  terület és az  $OQ$  távolság hányadosa adja a közepes alakítási szilárdságot a hengerrésben, ha a hengerelt anyag annyira felmelegszik, hogy az a folyási határ esésével jár.

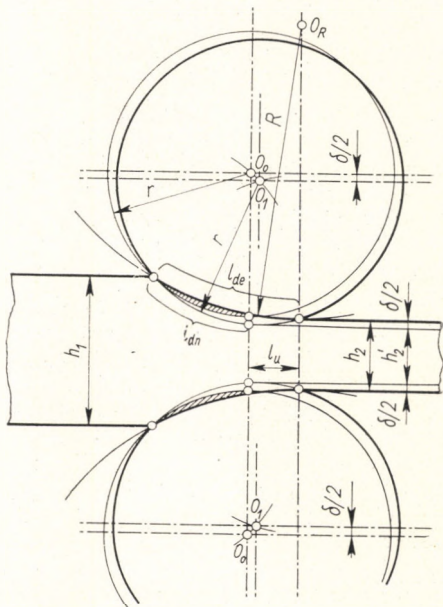
A közepes sűrűdési tényező értékének helyes megállapítása szintén fontos a számítás szempontjából. Ezzel a 74. fejezetben foglalkozunk.

Lemezek hideghengerlésénél az alakítási ellenállás kiszámítására ugyancsak alkalmazható a (70.3) egyenlet. A számítás annyiban lesz bonyolultabb, hogy a nyomott ív névleges hossza [(58.5) egyenlet]:

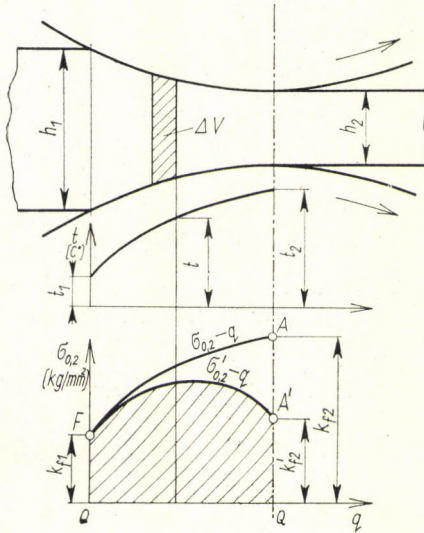
$$l_{dn} = \sqrt{r \Delta h} \quad (70.15)$$

helyett a henger rugalmas deformációja következtében tényleg fellépő befogási ívet kell számításba venni:

$$l_{de} = \sqrt{r \Delta h + \frac{l_u^2}{4}} + \frac{l_u}{2}, \quad (70.16)$$



70.4. ábra. A nyomott ívek megnagyob-  
bodása a hengerek rugalmas alakválto-  
zása következtében



70.5. ábra. Egyes anyagok (pl. alumínium) hideghengerlésénél bizonyos hengerlési sebesség felett, ha a hűtés nem elégséges, a közepes alakítási szilárdság kisebb lesz, mint amekkora a tisztán hidegalakítás keményedési görbéjéből adódna

ahol, amint a 71. fejezetben levezetjük:

$$l_u = \frac{4,7 \left( \frac{r}{E} \right) k_{fk} \left( 1 + C_n \mu \frac{l_{dn}^4}{h_k} \sqrt{v} \right)}{1 - 2,35 k_{fk} C_n \left( \frac{r}{E} \right) \left( \frac{\mu}{h_k} \right)^4 \sqrt{v}}, \quad (71.9)$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{mE_2} \right). \quad (71.9a)$$

Itt  $C_n$  az  $(l_{dn}/h_k)$  segítségével megállapított koeficiens.  $E$  a közepes rugalmassági modulus,  $E_1$  a hengerek,  $E_2$  a hengerelt anyag rugalmassági modulusa,  $m$  egy együttható, amely a hengerelt anyag vastagságától függ. Acélszalag hengerlése esetén  $mE_2 = E_1 = E$ .

A nyomott ív megnövekedése azt jelenti, hogy az  $r$  sugarú henger nyomott íve úgy működik, mintha a henger rádiusza megnövekedett volna. Tehát

$$l_{de} = \sqrt{r \Delta h + \frac{l_u^2}{4}} + \frac{l_u}{2} = \sqrt{R \Delta h}, \quad (70.17)$$

és ebből a megnövekedett hengerrádiusz (70.4. ábra):

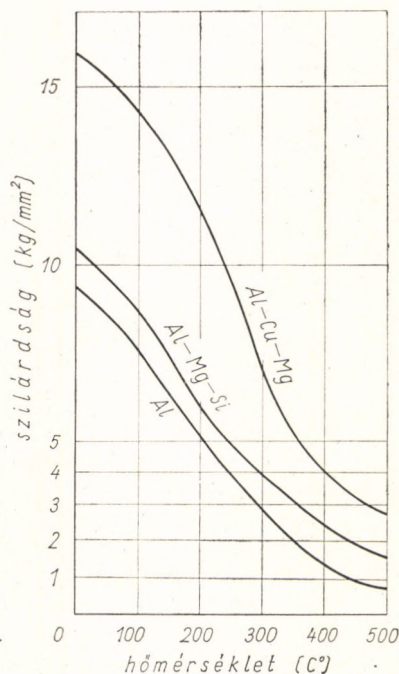
$$R = \frac{l_{de}^2}{\Delta h}. \quad (70.18)$$

## 71. A HENGEREK BELAPULÁSA

Vékony lemezek és szalagok hengerlése többféleképpen történhetik. A szokásos eljárás abban áll, hogy a melegen előhengerelt szalagot először egy duohengersoron közbeeső méretre hengerlik, majd kilágyítják, azután pedig egy másik duohengerállványon kisebb átmérőjű munkahengerekkel készméretre hengerlik. Ehhez az eljáráshoz újabban olyan hengerállványokat használnak, melyeknek igen kicsi a hengerátmérőjük, és így a 2 ~ 4 mm vastag nyers szalagokat — esetleg közbeeső lágyítás nélkül — néhány század milliméter vastagságra hengerlik. Ilyen módon a hengerművekben dolgozóknak azt a régi tapasztalatát hasznosítják, hogy annál könnyebben lehet vékony szalagokat hengerelni, mennél kisebb az alkalmazott hengerek átmérője; vékony lemezek hengerlésekor ugyanis a hengerek annál jobban belapulnak, mennél nagyobb a hengerek átmérője (71.1. ábra) [71.1].

A belapulás mértéke függ a hengerlési nyomástól, illetve a hengerrésben fellépő alakítási ellenállástól is. Mennél nagyobb az alakítási ellenállás, annál nagyobb a hengerek belapulása. Mennél nagyobb a hengerek belapulása, annál nagyobb lesz a nyomott ív és ezzel az alakítási ellenállás. A belapulás és az alakítási ellenállás között tehát kölcsönhatás áll fenn, és ennek a kölcsönhatásnak következtében beáll egy egyensúlyi állapot.

A közepes alakítási ellenállás és a nyomott ív közötti összefüggés a közepes alakítási ellenállás kiszámítására szolgáló képletből világosan érzé-



70.6. ábra. Az alumínium és ötvözetei nyomószilárdsága a hőmérséklet függvényében

kelhető:

$$k_k = k_{fk} \left( 1 + C\mu \frac{l_d}{h_k} \sqrt[4]{v} \right). \quad (70.3)$$

A nyomott ív rugalmasan nem deformálódó henger esetében az (58.5) képlettel számítható ki, amely szerint

$$l_{dn} = \sqrt{r \Delta h}. \quad (58.5)$$

A (70.3) és az (58.5) képlet azt mutatja, hogy azonos lemezvastagság és azonos magasságsökkenés mellett, ha a hengerátmérők ( $2r$ ) nagyok, akkor az alakítási ellenállás is nagy, ha a hengerátmérők kicsik, akkor az alakítási ellenállás is kicsi. Ha a hengerelt lemez vékony, akkor azonos hengerátmérő mellett az alakítási ellenállás annál nagyobb, mennél kisebb a lemez vastagsága a hengerátmérőhöz képest.

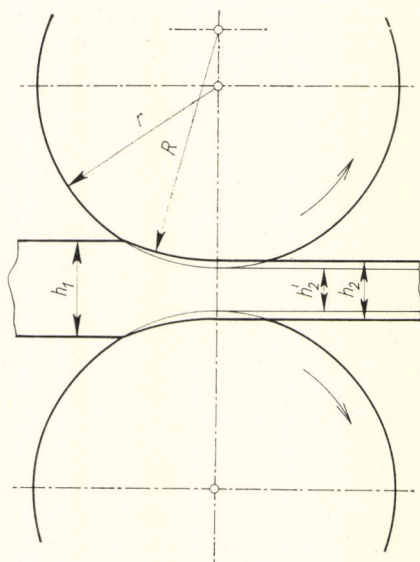
A hengerek alakváltozását nyomóerő hatására H. HERTZ képleteivel lehet kiszámítani.

A Hertz-féle képletek szerint a hengerek belapulásának szélessége, ha a hengereket a közös alkotó mentén  $P$  erővel nyomjuk össze (71.2. ábra):

$$l_u = 3,04 \sqrt{\frac{P \varrho}{Eb}}, \quad (71.1)$$

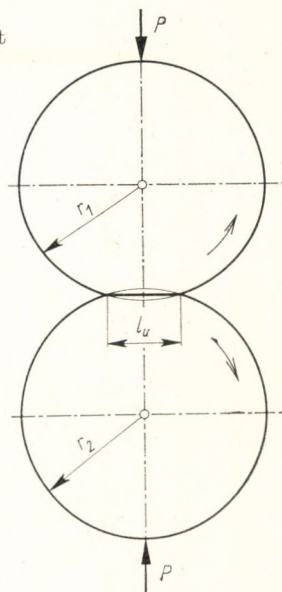
ahol  $b$  az egymásra nyomott hengerek hossza,  $E$  a rugalmassági modulus és

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}. \quad (71.2)$$



71.1. ábra. A hengerek belapulása

71.2. ábra. A belapulás szélességének megállapítása, ha két acélhengert alkotójuk mentén  $P$  erővel összenyomunk



Ha  $r_1 = r_2 = r$ , akkor

$$l_u = 3,04 \sqrt{\frac{Pr}{2Eb}} = 2,15 \sqrt{\frac{Pr}{Eb}}. \quad (71.3)$$

Ha az egymásnak nyomott hengerek forognak és a hengerrésbe egy  $h_1$  vastagságú lemezt szúrunk be, akkor első megközelítésben egy  $l_u$  hosszúságú hatástalan behorpadás lép fel a hengerrésben. Minthogy azonban a hengerek közé beszúrt lemez a hengerek forgása következtében megvékonyodik, kell, hogy a nyomott ívnek egy  $l_w$  hosszúságú hatásos része is legyen (71.3. ábra). A hatástalan ívrész függ a befogott darab keménységétől és vastagságától, a súrlódási tényezőtől, a hengerek átmérőjétől, tehát a hengerrésben fellépő alakítási ellenállástól.

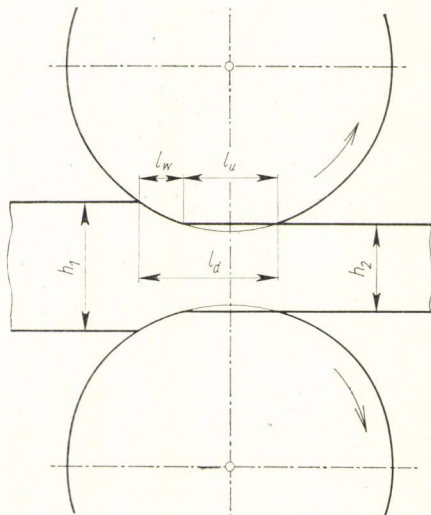
Természetesen annak a feltételezése, hogy a nyomott ív hatásos és hatástalan részből áll, csak egy segédfeltevés. A nyomott ív valójában egy egyetlen folyamatos parabolikus ív, azonban az említett segédfeltevéssel a probléma matematikailag megközelíthető, emellett az eltérés elhanyagolhatóan kicsi.

A (71.3) egyenlet a következő módon is kifejezhető:

$$l_u^2 = 4,7 \frac{P_u r}{Eb}. \quad (71.4)$$

Ebben az egyenletben  $P_u$  az a nyomás, amely az  $l_u$  hosszúságú hatástalan ívet létrehozza. Ha a hengerrésben a közepes alakítási ellenállás  $k_k$ , akkor

$$P_u = k_k l_u b. \quad (71.5)$$



71.3. ábra. Hatásos ( $l_w$ ) és hatástalan ( $l_u$ ) nyomott ív lemezhengrelésnél

Ha  $P_u$ -nak ezt az értékét a (71.4) egyenletbe behelyettesítjük, akkor

$$l_u = 4,7 \left( \frac{r}{E} \right) k_k. \quad (71.6)$$

Ha a nyomott ívet első megközelítésben így vesszük:

$$l_{de} = 0,5 l_u + \sqrt{r \Delta h}, \quad (71.7)$$

akkor a közepes alakítási ellenállás a hengerrésben:

$$k_k = k_{fk} \left\{ 1 + C \mu \left( \frac{0,5 l_u + \sqrt{r \Delta h}}{h_k} \right)^4 \sqrt{v} \right\}. \quad (71.8)$$

Ha a közepes alakítási ellenállásnak ezt az értékét a (71.6) egyenletbe behelyettesítjük, akkor a következő kifejezést kapjuk [71.2]:

$$l_u = \frac{4,7 \left( \frac{r}{E} \right) k_{fk} \left( 1 + C_n \mu \frac{l_{dn}}{h_k} \sqrt{v} \right)}{1 - 2,35 k_{fk} C_n \left( \frac{r}{E} \right) \left( \frac{\mu}{h_k} \right)^4 \sqrt{v}}. \quad (71.9)$$

Itt  $C_n = f \left( \frac{l_{dn}}{h_k} \right)$  a 70.3. ábráról leolvasható, vagy a (70.9), a (70.10) és a (70.11) egyenlettel kiszámítható. Az  $E$  közepes rugalmassági modulus



a (71.9a) képlet adja meg:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{mE_2} \right). \quad (71.9a)$$

$E_1$  a hengerek (acél),  $E_2$  a hengerelt anyag rugalmassági modulusa,  $m$  egy együtttható, amely a hengerelt anyag vastagságától függ. Acél hengerlésénél  $mE_2$  ( $= E_1$ ) és  $E = E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$ , és ha ezt a (71.9) egyenletbe behelyettesítjük, akkor  $l_u$ -t a következőképpen fejezhetjük ki:

$$l_u = \frac{2 k_{fk} r 10^{-4} \left[ 1,12 + 6,1 \left( \frac{\mu}{h_k} \right) \sqrt{r \Delta h} \sqrt[4]{v} \right]}{1 - 6,1 \cdot 10^{-4} r k_{fk} \left( \frac{\mu}{h_k} \right)^4 \sqrt[4]{v}}. \quad (71.10)$$

Ha  $l_u$  már ismeretes, akkor az  $l_w$  hatásos nyomott ívhosszat kell meghatározni (71.3. ábra). Ehhez azonban előbb meg kell még állapítanunk a belépülés mélységét (71.4. ábra). Kis szögeknél írható:

$$m_1 (=) m_2 (=) m = \frac{l_u}{2}, \quad (71.11)$$

$$\frac{a}{m_1} (=) \frac{a}{m_2} (=) \frac{\varphi}{2}. \quad (71.12)$$

Mintegy hasonlóképpen közelítően

$$\varphi (=) \frac{m_2}{r}, \quad (71.13)$$

írható:

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{2r}, \quad (71.14)$$

és ebből a belépülés mélysége:

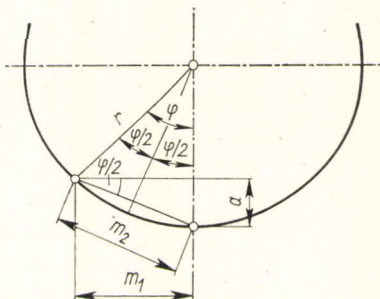
$$a = \frac{m^2}{2r} = \frac{l_u^2}{8r}, \quad (71.15)$$

és a hatásos ívhossz:

$$l_w = \sqrt{(\Delta h + 2a)r}. \quad (71.16)$$

Ezek után jó közelítéssel kiszámíthatjuk a teljes  $l_{de}$  nyomott ívet:

$$l_{de} = l_w + \frac{1}{2} l_u = \sqrt{(\Delta h + 2a)r} + \frac{l_u}{2}, \quad (71.17)$$



71.4. ábra

illetőleg

$$l_{de} = \sqrt{r \cdot \Delta h + \frac{l_u^2}{4}} + \frac{l_u}{2}. \quad (71.18)$$

Vékony szalagok hengerlésénél az alakítási ellenállást a (71.18) egyenlettel kifejezett nyomott ívvel kell kiszámítani.

A megnövekedett nyomott ívhez tartozó rádiusz a (70.18) képlettel számítható ki.

A hengerek behorpadása következtében megnövekedő hengerrádiusz kiszámítására J. H. HITCHCOCK-tól is származik egy számítási eljárás. HITCHCOCK szerint ilyenkor a nyomott ív rádiusza [71.3]:

$$R' = R \left[ 1 + \frac{16(1 - S^2)P}{L \pi E (h_1 - h_2)} \right], \quad (71.19)$$

$R'$  a balapulás következtében megnövekedett hengerrádiusz [mm],

$R$  a hengerek eredeti rádiusza [mm],

$S = \frac{1}{m} = 0,33$  a Poisson-féle szám (acél esetében),

$E = (2,0 \sim 2,2) 10^4$  [kg/mm<sup>2</sup>],

$\Delta h = h_1 - h_2$  a lemez vastagságcsökkenése [mm],

$P$  a hengerlési nyomás [kg].

A Hitchcock-féle és a Geleji-féle számítási eljárással meghatározott  $R'/R$  viszony a különböző  $P/\Delta h$  viszonyszámok függvényében a 71.5. ábrán van összehasonlítva.

A 71.5. ábrán bemutatott vizsgálatok 2,1 és 30, továbbá 70 m/perc sebesség mellett történtek.

## 72. A HENGEREK BEHAJLÁSA

A hengerek behajlását a hengerlésnél fellépő hajlítónyomatékok és nyíróerők idézik elő. J. S. CASWELL [72.1] szerint az összes behajlás két részből tevődik össze:

$$f = f_1 + f_2, \quad (72.1)$$

ahol  $f_1$  a nyomatékok által előidézett behajlás,  $f_2$  a nyíróerők létesítette behajlás. Mindkét behajlást A. CASTIGLIANO munkatételéből lehet meghatározni (72.1. ábra).

Cilindrikus hengereknél (lemezhangereknél):

$$f_1 = \frac{P}{18,8 ED^4} \left\{ 8a^3 - 4ab^2 + b^3 + 64c^3 \left[ \left( \frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right] \right\}, \quad (72.2)$$

$$f_2 = \frac{P}{G\pi D^2} \left\{ a - \frac{b}{2} + 2c \left[ \left( \frac{D}{d} \right)^2 - 1 \right] \right\}. \quad (72.3)$$

Ezekben a képletekben  $D$  a hengerek átmérője,  $d$  a csapátmérő,  $E$  a rugalmassági modulus,  $G$  a csúsztató modulus. A képletekben előforduló többi betű jelentése a 72.1. ábrából kitűnik.

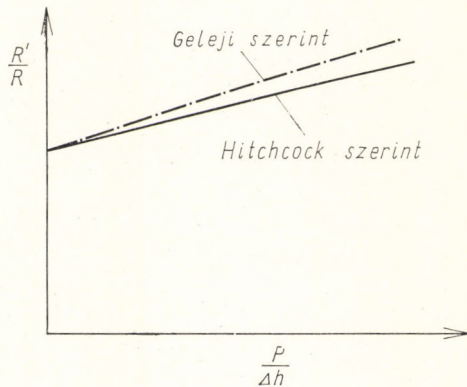
A szükséges domborítást (bombírozást) nem lehet megnyugtató módon kiszámítani.

Ha a hengerállványba támhengerek vannak beépítve, akkor a munkahengerek jelentősen tehermentesülnek. Ha sem a munkahengerek, sem a támasztó hengerek nincsenek bombírozva, azaz mind a négy henger cilindrikus, akkor a behajlásuk egyforma nagy. Ebben az esetben a behajlást, amennyiben a nyíróerőket elhanyagoljuk, a következőképpen lehet meghatározni:

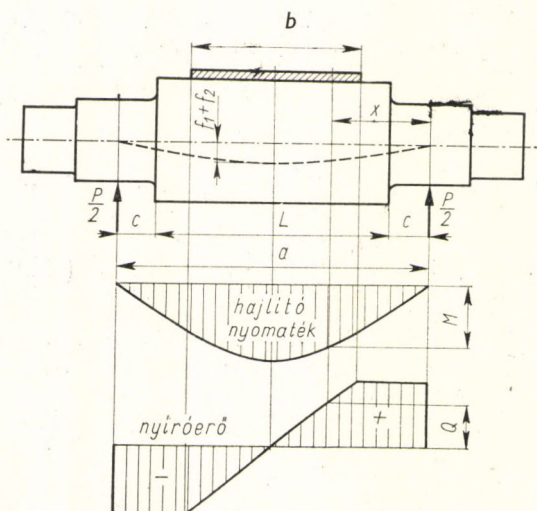
$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{P_1}{384 E_1 J_1} (12 aL^2 - 7 L^3) (=) \\ & (=) \frac{P_2}{384 E_2 J_2} (12 aL^2 - 8 L^3 + b^3), \end{aligned} \quad (72.4)$$

$P_1$  és  $P_2$  a támasztóhengereket, illetve a munkahengereket terhelő hajlítóerő,  $E_1$  és  $E_2$  a támasztóhengerek, illetve a munkahengerek rugalmassági modulusa,

$J_1$  és  $J_2$  a támasztóhengerek, illetőleg a munkahengerek tehetetlenségi nyomatéka.



71.5. ábra. Az összenyomott hengerek belapulásának nagysága GELEJI és HITCHCOCK szerint



72.1. ábra. A nyomatékok és nyíróerők a hengerekben lemezhen-gerlésnél

### 73. A BEFOGÁS FELTÉTELE HENGERLÉS NÉL

Már rámutattunk arra, hogy a hengerek a darabot a hengerrésbe a darab és a hengerek között fellépő súrlódás következtében fogják, illetve húzzák be. A hengerrésben a választósík mögött a hengerral irányában a következő erő működik [(66.66) egyenlet, 73.1. ábra]:

$$H_1 = 2 \int dN (\mu \cos \Phi - \sin \Phi) . \quad (73.1)$$

Szélső helyzet az, amikor  $dH_1 = 0$ , illetve amikor

$$\mu \cos \Phi - \sin \Phi = 0; \quad (73.2)$$

ebből következik, hogy

$$\mu = \operatorname{tg} \Phi . \quad (73.3)$$

A befogás szöge tehát a súrlódás szögétől,  $\varrho$ -tól, vagyis a súrlódási tényező nagyságától függ. Ha a befogási szög nagyobb mint a súrlódási szög, azaz ha  $\Phi > \varrho$ , akkor bármilyen nagy is a kerületi erő, a hengerek a darabot nem tudják befogni, hanem a beszűraskor visszalökik. Ilyenkor a befogást csak külső erővel lehet elérni.

### 74. A HENGERLÉS NÉL FELLÉPŐ SÚRLÓDÁS

A súrlódási koefficiens és különösen a változását befolyásoló tényezőket gyakorlati szempontból igen fontos ismernünk. A súrlódási tényező nagyságának helyes meghatározása egyike a legnehezebb problémáknak azok közül, amelyekkel a fémek képlékeny alakításával kapcsolatos számítások

területén meg kell bírkozni. A súrlódási koefficiens befolyásoló tényezők bonyolultsága rendkívüli módon megnehezíti az egyértelmű meghatározást. W. TAFEL [74.1] acél melehengerlésénél, különböző minőségű hengerek és különböző hengerlési sebességek mellett, meghatározta a befogás szögét (74.1. ábra). Minthogy a befogás szögének tangense azonos a súrlódási számmal, ezzel tulajdonképpen az acélok melehengerlésének súrlódási tényezőjét határozta meg.

SVEN EKELUND [74.2], majd GELEJI SÁNDOR [74.3] vizsgálta behatóan a súrlódási tényezőt acélok melehengerlésénél, és GELEJI e két kísérlet-sorozat alapján a következő összefüggéseket állapította meg: acélhengerekkel való hengerlésnél

$$\mu = 1,05 - 0,0005 t - 0,056 v, \quad (74.1)$$

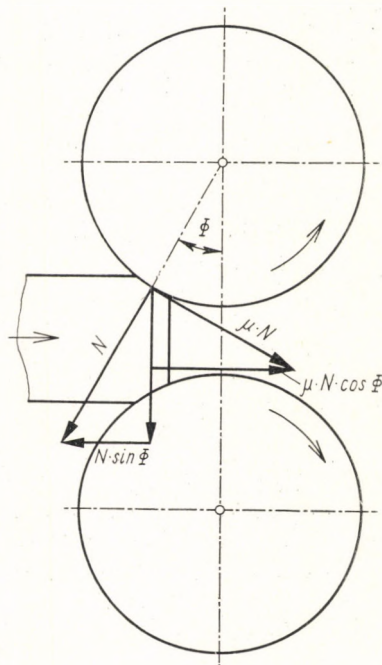
kéregöntésű hengerek esetén

$$\mu = 0,94 - 0,0005 t - 0,056 v, \quad (74.2)$$

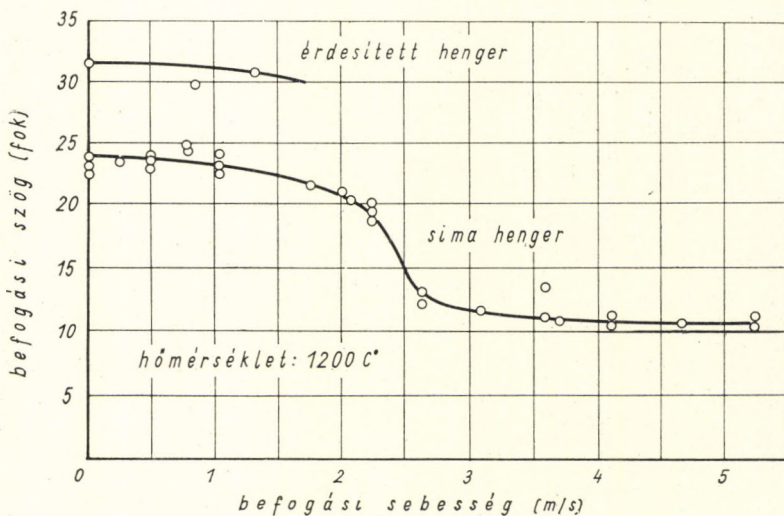
köszörült acél- vagy kéregöntésű hengerek esetében

$$\mu = 0,82 - 0,0005 t - 0,056 v. \quad (74.3)$$

Ezekben a képletekben  $t$  [C°] a hengerlési hőmérséklet és  $v$  [m/s] a hengerlési sebesség.



73.1. ábra. A befogási szög meghatározása



74.1. ábra. A súrlódási tényező és a hengерlési sebesség befolyása a befogási szög nagyságára

A (74.1), (74.2) és (74.3) képlettel meghatározott súrlódási tényezőknek azonban van egy alsó határjuk. Ez az alsó határ 0,2 és 0,3 között van, és pedig acél- és kéregöntésű hengereknél 0,25—0,30 között, kőszőrült acél- és kéregöntésű hengereknél 0,20—0,25 között. Ennek a minimális értéknek az elérése után a súrlódási tényező se növekedő hengерlési sebességgel, se növekedő hengерlési hőmérséklettel nem csökken (74.2. ábra).

A hideghengерlésnél fellépő súrlódási tényezőre vonatkozólag az irodalomban sokféle adat ismeretes, anélkül azonban, hogy a probléma véglegesen le volna zárva. A közepes súrlódási tényezőt csak indirekt úton, a közepes alakítási ellenállásból lehet meghatározni. Azok a súrlódási tényezők, amelyeket egyes kutatók ún. direkt eljárással határoztak meg, a hengерlésben hengерlés közben ténylegesen fellépő közepes súrlódási tényezővel nem azonosak. Irodalmi adatok szerint hideghengерlésnél, ha az száraz hengerekkel és száraz, olajozásmentes darabbal történik, a közepes súrlódási tényező 0,07 és 0,15 között van a hengerek minősége szerint, de közepesen 0,1-nek vehető.

Fémszalagoknak enyhén polírozott krómaccélhengerekkel történő hengерléséhez a súrlódási tényező értékeit a 74.1. táblázatból vehetjük ki.

A táblázat számait azonban legfeljebb tájékoztató adatoknak tekinthetjük, minthogy a legfontosabb paraméterek (hengерlési sebesség, alakítási ellenállás stb.), amelyek befolyással vannak a súrlódási tényezőre, a táblázatban nincsenek feltüntetve.

R. B. SIMS és D. F. ARTHUR [74.4] acélszalagok hengерlésénél vizsgálták behatóan a sebesség hatását a súrlódási tényezőre, miközben olajjal kenték a hengерelt szalagot. SIMS és ARTHUR a súrlódási tényezőt kísérleti adataik

74.1. táblázat

A hengerelt fém	Száraz hengerlés	Hengerlés petróleumkenéssel	Hengerlés híg kenőolajjal
Réz	0,2—0,25	0,13—0,15	0,10—0,13
Alumínium	0,2—0,3	0,10—0,15	0,08—0,09
Sárgaréz	0,12—0,15	0,06	0,05
Cink	0,25—0,30	0,12—0,15	

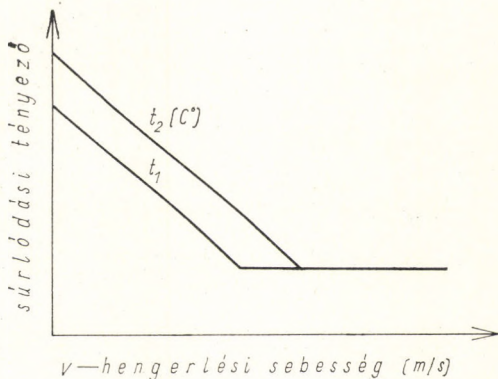
alapján B. D. BLAND és H. FORD [74.7] hengerlési nyomás képletéből visszafelé állapították meg. A súrlódási tényező értékei, melyeket ilyen módon kaptak, a 74.3. ábrán láthatók.

H. FORD hideghengerlési kísérletei, amelyeket acél- és fémszalagokkal különböző sebességek és olajkenés mellett végzett, igen szemléletes képet adnak a hengerlési nyomás változásáról a hengerlési sebesség függvényében (74.4. ábra) [74.5]. A hengerelt anyag  $80 \times 0,8 \text{ mm}^2$  méretű, 0,07% C tartalmú acélszalag volt, melyet négy szűrással, szűrasonként 30%-os vastagságcsökkentéssel és 80 m/perc sebességig változó hengerlési sebességgel hengereltek.

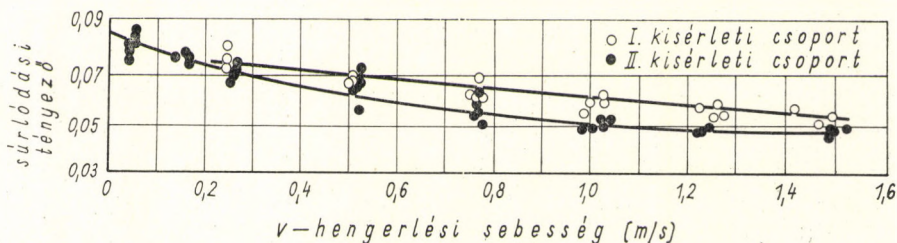
A 74.4. ábrán a hengerlési nyomás változásának a hengerlési sebesség függvényében bemutatott képe arra mutat, hogy a hengerlési nyomás változása csak a súrlódási tényezőnek a hengerlési sebességgel való változásától függ.

A Ford-féle kísérletek értékelésével a súrlódási tényező változása szempontjából GELEJI foglalkozott [74.3]. A közepes súrlódási tényezőt a (70.3) képletből számította ki. Ezek szerint a közepes effektív súrlódási tényező:

$$\mu_{ke} = \frac{k_{ke} - k_{fk}}{k_{fk} C_e \frac{l_{de}}{h_k} \sqrt[4]{v}}, \quad (74.4)$$



74.2. ábra. A súrlódási tényező változása meleghengerlésnél a hengerlési sebesség függvényében



74.3. ábra. A sűrűlási tényező változása hideghengerlésnél a hengerlási sebesség függvényében, SIMS és ARTHUR szerint

melyben

$$C_e = f\left(\frac{l_{de}}{h_k}\right) \quad (74.5)$$

a 70.3. ábráról olvasható le. A (74.4) képletben a közepes effektív alakítási ellenállás:

$$k_{ke} = k_{fk} \left(1 + C_e \mu_{ke} \frac{l_{de}}{h_k} \sqrt[4]{v}\right). \quad (74.6)$$

Itt megismételjük: a névleges alakítási ellenállás a névleges befogási ívre ( $l_{dn} = \sqrt{r\Delta h}$ ) vonatkoztatott közepes fajlagos hengerlási nyomás ( $k_{kn} = \frac{P}{b\sqrt{r\Delta h}} = \frac{P}{l_{dn} b}$ ); az effektív alakítási ellenállás az effektív, azaz a megnagyobbodott befogási ívre ( $l_{de} = \sqrt{r\Delta h + \frac{l_u^2}{4} + \frac{l_u}{2}}$ ) vonatkoztatott közepes fajlagos hengerlási nyomás ( $k_{ke} = \frac{P}{l_{de} b}$ ).

A közepes effektív alakítási ellenállásból a közepes névleges alakítási ellenállás:

$$k_{kn} = k_{ke} \frac{l_{de}}{l_{dn}}. \quad (74.7)$$

A (74.4) egyenlettel meghatározott közepes sűrűlási tényezők a 74.5. ábrán a sebesség és a fajlagos hengerlási nyomás függvényében vannak feltüntetve. Az elmondottak alapján meghatározott sűrűlási tényező az első szúrásnál növekedő hengerlási sebességgel nagyon keveset változik, esik. Növekedő keménységgel, és így növekedő alakítási ellenállással a sűrűlási tényező nő, azonban a tovább növekedő hengerlási sebességgel először meredeken, majd mind laposabban esik, és a határsebesség elérése után alig változik. A sűrűlási tényező kenés esetében a hengerlási sebéségen kívül a hengerlási nyomástól is függ (74.5. ábra).

Az ábra tanúsága szerint egész kis hengerlási sebességeknél majdnem száraz sűrűládással kell számolni. Növekedő hengerlási sebességnél vegyes



súrlódás, majd egy bizonyos hengerlési sebességen túl tisztán folyadék-súrlódás lép fel.

Y. YOKOTE és S. NOMURA alumíniumszalag hideghengerlésénél vizsgálták a súrlódási tényező változását [74.6]. Az ő vizsgálataik eredménye a 74.6. ábrán látható.

## 75. MELEGFEJLŐDÉS A HIDEGHENGERLÉS NÉL

Képlékeny alakításkor az összes alakítási munka és a súrlódási munka meleggé alakul át. Ez vonatkozik a hideghengerlésre is. A keletkező meleg bizonyos esetekben igen tekintélyes lehet. Emiatt a fejlődő meleget hűtőberendezéssel el kell távolítani.

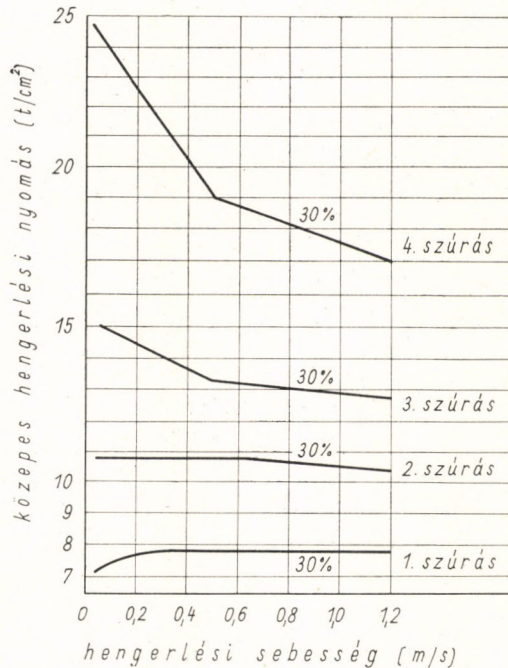
A melegfejlődés nagysága és forrásai a következők [75.1]:

Az  $i$  másodperc alatt keletkező tiszta hengerlési munkával egyenértékű meleg:

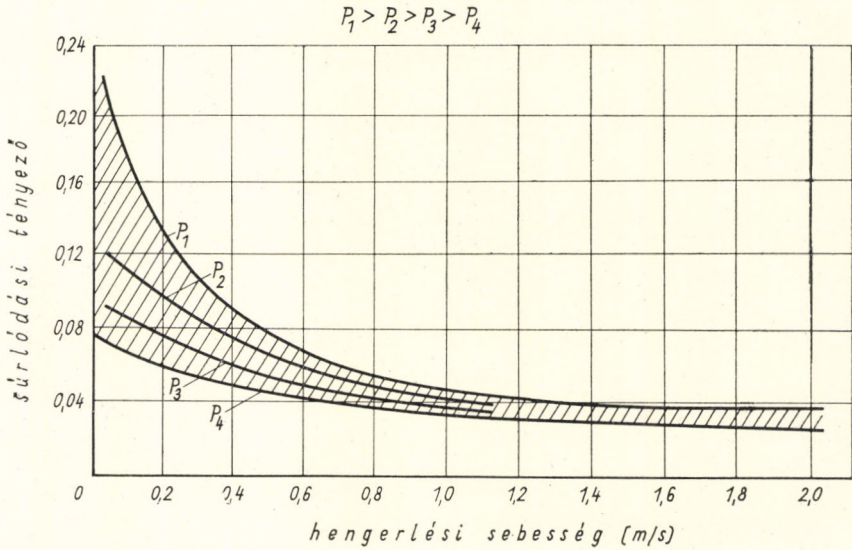
$$Q = \eta F k_k v \frac{1}{A} i \text{ [kal]}. \quad (75.1)$$

Ha feltételezzük, hogy a hengerlés folyamán sem hűtési, sem sugárzási melegevlonás nincs, hanem az összes keletkező meleg a darab hőmérsékletének emelésére szolgál, akkor érvényes a következő egyenlet:

$$G_d c_d (t_2 - t_1) = \eta F k_k v \frac{1}{A} i. \quad (75.2)$$

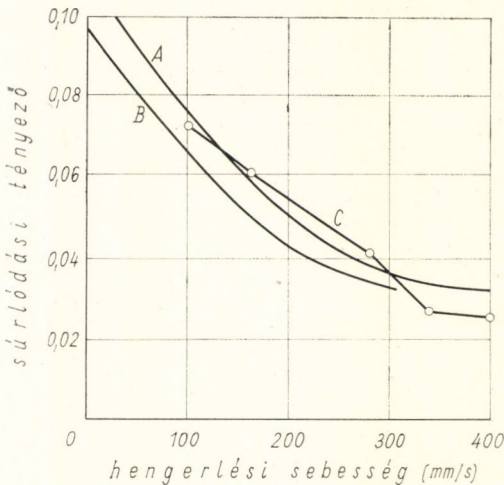


74.A. ábra. A közepes hengerlési nyomás változása a hengerlés függvényében acéllemez hideghengerlésénél olajkenés mellett, FORD szerint



74.5. ábra. Az effektív közepes súrlódási tényező változása a hengерlési sebesség és a hengерlési nyomások függvényében olajkenés mellett, GELEJI szerint

- $G_d$  az  $i$  másodperc alatt hengерelt darab súlya kg-ban,  
 $c_d$  a hengерelt anyag fajmelege (acélnál  $c_d = 0,115$  kcal/kg C°, alumíniumnál  $c_d = 0,22$  kcal/kg C°),  
 $t_1$  a hengерrésbe befutó darab hőmérséklete [C°],  
 $t_2$  a hengерrésből kifutó darab hőmérséklete [C°],  
 $k_k$  a közepes hengерlési alakítási ellenállás [kg/mm<sup>2</sup>],  
 $v$  a hengерlési sebesség [m/s],



74.6. ábra. A súrlódási tényező változása alumíniumszalag hideghengерlésénél, YOKOTE és NOMURA szerint:  
 A: pálmaolaj + víz, B: feltételezett értékek, C: kiszámított értékek

$\eta$  korrekciós tényező,

$A$  a munka melegegyenértéke = 42 700 kgcm/kcal,

$i$  a hengerlés tartama.

Az  $i$  másodperc alatt hengerelt anyag súlya:

$$G_d = f_2 v \gamma i \text{ [kg]}, \quad (75.3)$$

$f_2$  a hengerrészből kifutó anyag keresztmetszete,

$\gamma$  a hengerelt anyag fajsúlya (acél esetében  $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>,  
alumínium esetében  $\gamma = 2,7 \cdot 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>).

Az eddig elmondottak szerint írható:

$$f_2 v \gamma i c_d (t_2 - t_1) = \frac{\eta F k_k v i}{A}, \quad (75.4)$$

és ebből hővesztesség nélküli hengerlésnél a darab hőmérsékletének emelkedése:

$$t_2 - t_1 = \frac{\eta F k_k}{A c_d \gamma f_2}. \quad (75.5)$$

A hengerelt darabból, amelynek közepes hőmérséklete  $t_d$ , a  $G_h$  súlyú és  $t_h$  hőmérsékletű hengerek a  $2 l_d b$  nyomott felület mentén meleget vonnak el (75.1. ábra), és ennek következtében a darab hőmérséklete a hengerrés mögött  $t'_2$  lesz.

Ha a melegítási tényező a nyomott felületek mentén  $\varkappa$ , akkor a (75.2) egyenlet a következőképpen írható fel:

$$G_d c_d (t'_2 - t_1) + 2 l_d b \varkappa (t_d - t_h) i = \frac{1}{A} \eta F k_k v i. \quad (75.7)$$

A hengerelt darab hőmérsékletének emelkedése tehát független az időtartamtól:

$$f_2 v \gamma c_d (t'_2 - t_1) + 2 l_d b \varkappa (t_d - t_h) = \frac{1}{A} \eta F k_k v. \quad (75.8)$$

Ebben az egyenletben a darab közepes hőmérséklete:

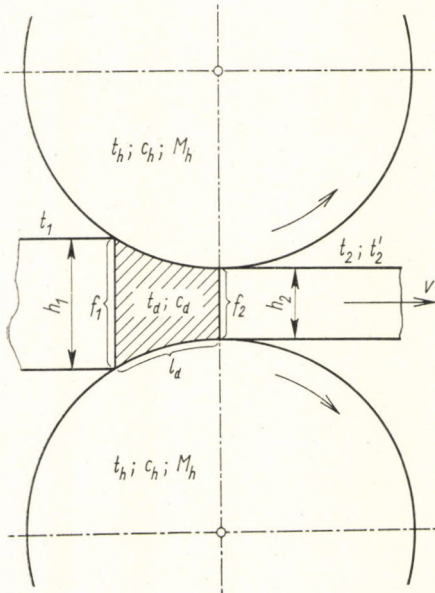
$$t_d = \xi \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad (75.9)$$

$\xi$  egy tapasztalati tényező, melyet minden egyes hengersorra külön kell kísérletekkel meghatározni. Ezek szerint

$$f_2 v \gamma c_d (t'_2 - t_1) + 2 l_d b \varkappa \left[ \xi \frac{t_1 + t_2}{2} - t_h \right] = \frac{1}{A} \eta F k_k v, \quad (75.10)$$

$t'_2$  ebből az egyenletből kiszámítható.

75.1. ábra. A hengerlésnél keletkező meleg meghatározása



A hengerek melegedését ugyancsak ki lehet számítani. A nyomott felületeken keresztül  $i$  másodperc alatt

$$Q_2 = l_d b \varkappa (t_d - t_h) i \quad (75.11)$$

melegmennyiség áramlik a darabból egy hengerbe. A két henger súlya  $2G_h$ , a hengerek hőmérséklete  $i$  másodperc alatt  $t_{h1}$ -ről  $t_{h2}$ -re emelkedik. A hőmérsékletemelkedés  $di$  idő alatt:

$$2G_h c_h dt_h = 2l_d b \varkappa (t_d - t_h) di, \quad (75.12)$$

ha  $c_h$  a hengerek anyagának fajmelege. A (75.11) egyenletből:

$$t_d - t_h = \left( \frac{G_h c_h}{l_d b \varkappa} \right) \frac{dt_h}{di}, \quad (75.13)$$

s ebből

$$\left( \frac{l_d b \varkappa}{G_h c_h} \right) di = \frac{dt_h}{t_d - t_h}. \quad (75.14)$$

Ha feltételezzük, hogy a hengerek hőt csak felvesznek, de le nem adnak, azaz hogy az összes meleg a hengerek hőmérsékletének emelésére szolgál, akkor a felmelegedési idő:

$$i = \left( \frac{G_h c_h}{l_d b \varkappa} \right) \int_{t_{h1}}^{t_{h2}} \frac{dt_h}{t_d - t_h}. \quad (74.15)$$

Ha továbbá feltesszük, hogy

$$t_d = \xi \frac{t_1 + t_2}{2} = \text{konst.}, \quad (75.16)$$

akkor

$$\int_{t_{h1}}^{t_{h2}} \frac{dt_h}{t_d - t_h} = \ln \frac{t_d - t_{h1}}{t_d - t_{h2}}. \quad (75.17)$$

Ha a (75.17) egyenlet jobb oldalát a (75.15) egyenletbe behelyettesítjük, megkapjuk az ahhoz szükséges időt, hogy a hengerek  $t_{h1}$  hőmérsékletéről  $t_{h2}$  hőmérsékletre melegedjenek:

$$i = \left( \frac{G_h c_h}{l_d b \kappa} \right) \ln \frac{t_d - t_{h1}}{t_d - t_{h2}}. \quad (75.18)$$

A (75.18) egyenletet a következőképpen is felírhatjuk:

$$(t_d - t_{h2}) = (t_d - t_{h1}) e^{-\left(\frac{l_d b \kappa}{G_h c_h}\right) i}. \quad (75.19)$$

Ebből

$$t_{h2} = t_d - (t_d - t_{h1}) e^{-\left(\frac{l_d b \kappa}{G_h c_h}\right) i}. \quad (75.20)$$

Ez az egyenlet azt mondja, hogy hideghengerlésnél a hengerek hőmérséklete sohasé nagyobb, mint a hengerek között futó darab közepes hőmérséklete.

Meg kell vizsgálnunk azt is, hogy a fenti hengerlési körülmények között az alakítási munkából származó melegből mennyi megy át a hengerekbe, és mennyi marad a darabban.

$i$  idő alatt a hengerekbe

$$Q_2 = 2\kappa l_d b i (t_d - t_h) \quad (75.21)$$

meleg megy át.

Az összes alakítási munkával egyenértékű melegmennyiség:

$$G_d c_d (t_2 - t_1) = f_2 \gamma v i c_d (t_2 - t_1). \quad (75.22)$$

A hideghengerlés folyamán a darabban

$$\psi = \frac{2 \kappa l_d b (t_d - t_h)}{f_2 \gamma v c_d (t_2 - t_1)} 100 [\%] \quad (75.23)$$

meleg marad vissza.

## IX. LEMEZEK HAJLÍTÁSA

### 76. LEMEZ RÁHAJLÍTÁSA $\rho_1$ SUGÁRRAL LEGÖMBÖLYÍTETT ÉLRE

A lemezek hajlításának problémái visszavezethetők a négyzetes keresztmetszetű rudak maradó hajlításának problémáira (30.—33. fejezet).

Ha a lemezt vagy négyzetes keresztmetszetű rudat egy  $\rho_1$  sugárral legömbölyített élre rá akarjuk hajlítani, akkor a maradó alakváltozáshoz szükséges munkát igen egyszerűen lehet kiszámítani (76.1. ábra). Az alakításhoz szükséges hajlítónyomaték (30.2. ábra):

$$M = \sigma_f \left[ \frac{3h^2 - h_1^2}{12} \right] b. \quad (30.2)$$

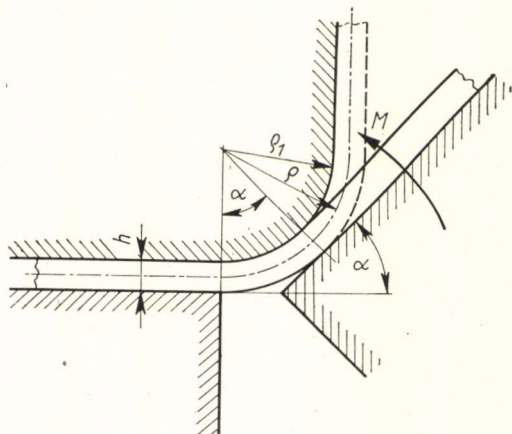
A hajlítási munka

$$A = M \alpha, \quad (76.1)$$

tehát

$$A = \sigma_f \left[ \frac{3h^2 - h_1^2}{12} \right] b \alpha. \quad (76.2)$$

Ebben a képletben  $\sigma_f$  a hajlított lemez anyagának folyási határa,  $h$  a lemez vastagsága,  $b$  a lemez szélessége,  $\alpha$  a hajlítási szög,  $h_1$  a belső rugalmas



76.1. ábra. Lemez ráhajlítása egy legömbölyített élre

réteg vastagsága, amelyet a következő képlettel lehet kifejezni:

$$h_1 = \sigma_f \frac{2\varrho}{E}. \quad (30.13)$$

Ezek szerint a (30.2) nyomatéki egyenlet így is írható:

$$M = \frac{\sigma_f b}{12} \left[ 3h^2 - \left( \frac{2\sigma_f \varrho}{E} \right)^2 \right]. \quad (76.3)$$

A (76.2), illetőleg a (76.3) egyenlet csak akkor érvényes, ha  $\varrho < \varrho_f$ , mint-hogy

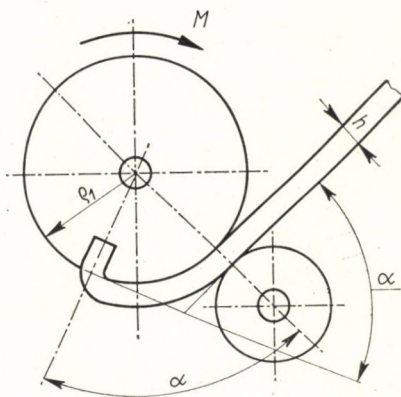
$$\varrho_f = \frac{Eh}{2\sigma_f} \quad (76.4)$$

az a legkisebb görbületi sugár, amely mellett csak rugalmas feszültségek lépnek fel a hajlított lemezben [76.1].

#### 77. LEMEZEK VAGY NÉGYZETES KERESZTMETSZETŰ RUDAK FELCSAVARÁSA EGY HENGERRE

A 77.1. ábrával bemutatott eset, amikor a rudat vagy lemezt egy hengerre akarjuk felcsavarni, a 76. fejezetben bemutatott esettel azonos. Az alakítási munkaszükségletet itt is a (76.2) egyenlettel, a felcsavaráshoz szükséges nyomatékot pedig a (76.3) egyenlettel kell meghatározni. Általában az utóbbi képletben szereplő

$$\left( \frac{2\sigma_f \varrho}{E} \right)^2$$



77.1. ábra. Lemez felcsavarása egy hengerre

elhanyagolható, és így a felcsavarási nyomatékot

$$M = \frac{\sigma_f b h^2}{4} \quad (77.1)$$

képlettel lehet kiszámítani [77.1].

#### 78. L PROFILOK SAJTOLÁSA LEMEZBŐL

A  $\varrho_1$  legömbölyítésű  $L$  profil sajtolásához szükséges erőt a következő meggondolás alapján számíthatjuk ki (78.1. ábra).

Ahhoz, hogy a lemez semleges szála az élben  $\varrho$  sugarú legyen (78.2. ábra)

$$M = \frac{\sigma_f b}{12} \left[ 3 h^2 - \left( \frac{2 \sigma_f}{E} \right)^2 \varrho^2 \right] \quad (76.3)$$

nyomatékra van szükség. De

$$M = P_1 x, \quad (78.1)$$

ebből

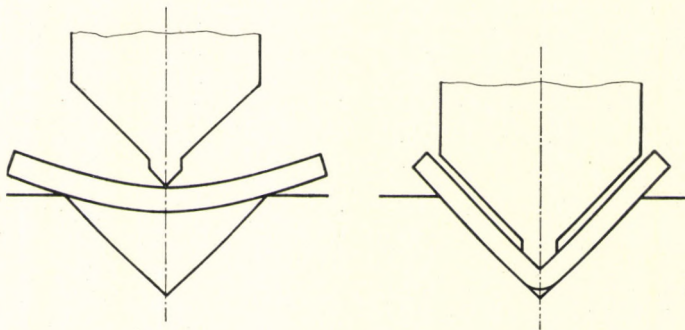
$$P_1 = \frac{\sigma_f b}{12 x} \left[ 3 h^2 - \left( \frac{2 \sigma_f}{E} \right)^2 \varrho^2 \right], \quad (78.2)$$

ahol

$$x = \varrho \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (78.3)$$

Az alakváltozáshoz szükséges erő pedig:

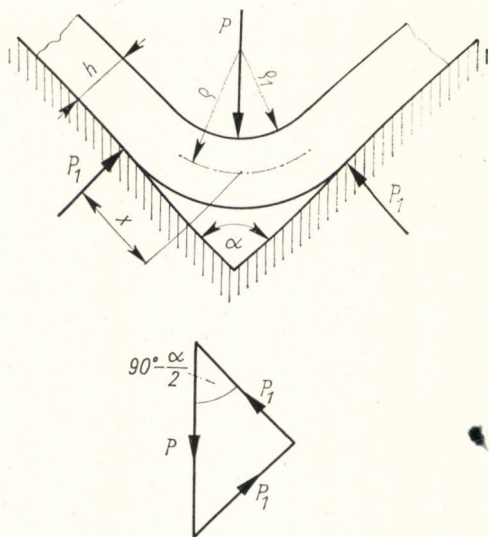
$$P = 2 P_1 \cos \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 P_1 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (78.4)$$



78.1. ábra.  $L$  profil hajlítása



78.2. ábra. Az L profil hajlításánál fellépő erők



A (78.2) egyenletben szereplő  $\frac{2\sigma_f \varrho}{E}$  lemezprofilok sajtolásánál elhanyagolhatóan kicsi, úgyhogy a (78.2) egyenlet számításainkban a következő alakot ölti:

$$P_1 = \frac{\sigma_f b h^2}{4 \varrho} \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (78.5)$$

vagyis az alakváltozáshoz szükséges erő:

$$P = \frac{\sigma_f b h^2}{2 \varrho} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sigma_f b h^2}{2 \varrho} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (78.6)$$

Amikor  $\alpha = 90^\circ$ , akkor

$$P = \frac{\sigma_f b h^2}{2 \varrho}; \quad (78.7)$$

tehát ekkora erő szükséges egy  $\varrho_1 = \left( \varrho - \frac{h}{2} \right)$  belső legömbölyítésű éllel bíró,  $b$  hosszúságú,  $h$  vastagságú lemezprofil sajtolásához [78.1].

79. U PROFILOK SAJTOLÁSA LEMEZBŐL

Az U profilok sajtolása lényegileg azonos a 76.1. ábrán megadott hajlítási esettel. A sajtolás süllyesztékben történik oly módon, hogy a lemez két szélső részét (szárát) adott görbületi sugár körül a középső lemezrészre (gerincére) merőleges helyzetbe felhajlítjuk (79.1. és 79.2. ábra).

Ha azt akarjuk, hogy a lemez gerincrésze egyenes legyen, akkor a sajtolást ellentartó segítségével kell végezni. A felhajlító nyomaték itt is (79.2. ábra):

$$M = \sigma_f \left( \frac{3h^2 - h_1^2}{12} \right) b, \quad (30.2)$$

illetve

$$M = \frac{\sigma_f b}{12} \left[ 3h^2 - \left( \frac{2\sigma_f \varrho}{E} \right)^2 \right]. \quad (76.3)$$

Az U profil felhajlításához szükséges  $P$  erőt a 79.2. ábra alapján számíthatjuk ki:

$$P = 2P_r \cos \alpha + 2P_r \mu \sin \alpha. \quad (79.1)$$

Ebben az egyenletben  $P$  a deformációt létrehozó erő,  $P_r$  a hajlítószerszám élére feltámaszkodó lemez által a támaszkodás helyén létrehozott reakcióerő,  $P_r \mu$  a támaszkodási élen befelé csúszó lemez felületén keletkező súrlódási erő.

A lemez felhajlítását a

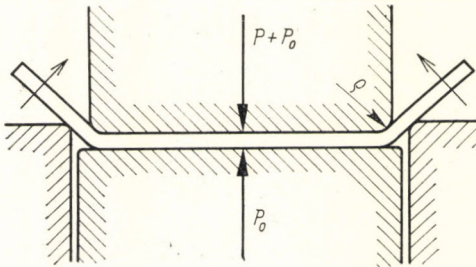
$$P_r x = M = \frac{\sigma_f b}{12} \left[ 3h^2 - \left( \frac{2\sigma_f \varrho}{E} \right)^2 \right] \quad (79.2)$$

nyomaték hozza létre. Az egyenlet jobb oldalán a szögletes zárójelben a második tag gyakorlati szempontból elhanyagolhatóan kicsi, és így az egyenlet számításainkban a következő alakban szerepel:

$$P_r x = \frac{\sigma_f b h^2}{4}. \quad (79.3)$$

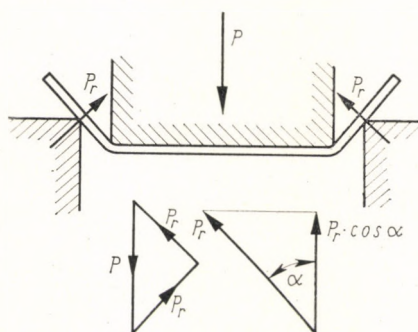
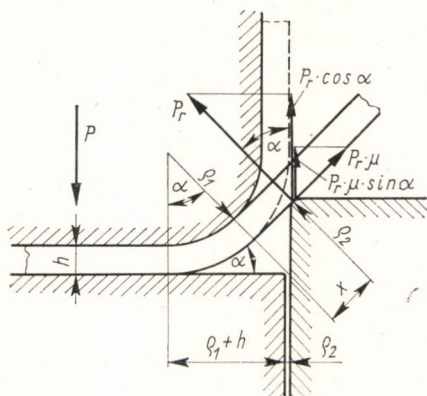
Mint ahogy

$$\varrho_1 + h = (\varrho_1 + h) \sin \alpha + x \cos \alpha, \quad (79.4)$$



79.1. ábra. U profil hajlítása

79.2. ábra. Az U profil hajlításánál fellépő erők



és ebből

$$x = (\rho_1 + h) \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (79.5)$$

következik, hogy

$$P_r = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma_f b h^2}{(\rho_1 + h)} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}, \quad (79.6)$$

tehát a (79.1) egyenlet a következőképpen alakul:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_f b h^2}{(\rho_1 + h)} \left[ \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} + \mu \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right]. \quad (79.7)$$

Ebben az egyenletben szereplő  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$  az  $\alpha$  növekedésével állandóan nő, és  $90^\circ$ -nál  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = 2$ . Ugyancsak növekszik  $\alpha$  növekedésével  $\frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$  is, éspedig  $85^\circ$ -nál 10,  $89^\circ$ -nál 115 az értéke. Minthogy a

hajlítószer számnak mindig van egy bizonyos játéka, gyakorlati megfigyelések alapján  $\frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$  közepesen 14-nek vehető fel. Így azután a (79.7) egyenlet alakja gyakorlati számításoknál a következő lesz [79.1; 79.2]:

$$P = (1 + 7\mu) \frac{\sigma_f b h^2}{(\rho_1 + h)}. \quad (79.8)$$

### 80. LEMEZPROFILOK HÚZÁSA

Lemezprofilokat nemcsak sajtolni, hanem alakos üregből húzni és alakos görgők segítségével hengerelni is szoktak. Az alakítás mind a húzásnál, mind a hengerlésnél az élszög kisebbitéséből áll (80.1. ábra). Az élszög változása:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (80.1)$$

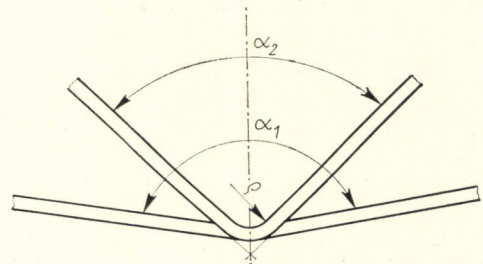
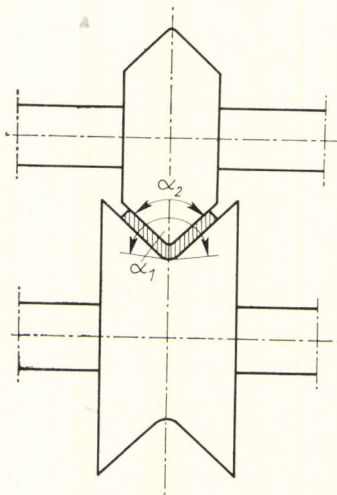
Az alakítási munka:

$$L = M \alpha = \frac{\sigma_f b}{12} \left[ 3 h^2 - \left( \frac{2 \sigma_f \rho}{E} \right)^2 \right] \alpha, \quad (80.2)$$

$b$  a felhajlított profil élének hosszúsága,  $\rho$  pedig a legömbölyítés, amelyről feltesszük, hogy az alakítás alatt állandó.

Az alakítási munka teljesítményszükséglete, ha  $v$  a húzási sebesség:

$$N = \frac{L}{i} = \frac{\sigma_f}{12} \left[ 3 h^2 - \left( \frac{2 \sigma_f \rho}{E} \right)^2 \right] \frac{b}{i} \alpha = \frac{\sigma_f}{12} \left[ 3 h^2 - \left( \frac{2 \sigma_f \rho}{E} \right)^2 \right] \alpha v. \quad (80.3)$$



80.1. ábra. Lemezprofil húzása

80.2. ábra. Lemezprofil húzása görgők között

Abból, hogy  $N = Zv$ , következik, hogy a húzóerő, amely az üregen való áthúzásnál a tiszta alakítási munka elvégzéséhez szükséges:

$$Z = \frac{\sigma_f}{12} \left[ 3 h^2 - \left( \frac{2 \sigma_f \rho}{E} \right)^2 \right] \alpha. \quad (80.4)$$

Hogy a teljes húzóerőt megkapjuk, ehhez hozzá kell még adni a profil falán keletkező súrlódás legyőzéséhez szükséges erőt.

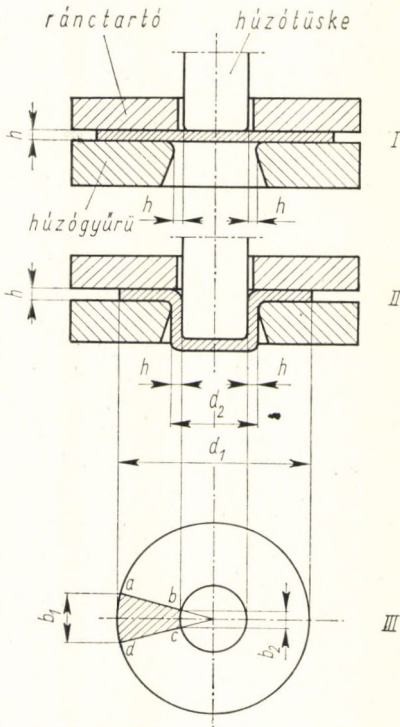
Az alakítási munkát, illetve a teljesítményszükségletet akkor is a (80.2) és a (80.3) egyenlettel kell kiszámítani, ha a profilt nem üregből húzzák, hanem alakos hengerekkel hengerlik (80.2. ábra). A teljes alakítási munkát és teljesítményszükségletet természetesen ez esetben is úgy kapjuk meg, hogy a tiszta alakítási munkához hozzáadjuk a súrlódási munkát [80.1; 80.2].

## X. LEMEZEK MÉLYHÚZÁSA

### 81. MÉLYHÚZÁSSAL KAPCSOLATOS KÍSÉRLETEK

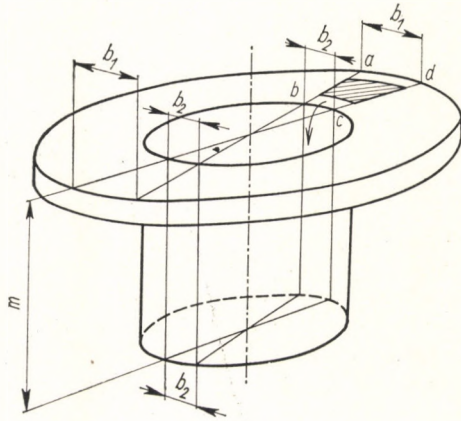
A lemezmélyhúzás célja az, hogy egy megfelelő módon kivágott lemezből valamilyen edényt állítsunk elő. A mélyhúzásnak az a legegyszerűbb esete, amikor egy kör alakú lemeztárcsából hengeres edényt hoznak létre. Vizsgálataink folyamán először is ezt az egyszerű esetet fogjuk tanulmányozni, minthogy az így kapott eredményeket minden nehézség nélkül lehet bonyolultabb esetekre is kiterjeszteni.

Ha a lemezmélyhúzás kérdését behatóan vizsgáljuk, látjuk, hogy az visszavezethető a rúdhúzás kérdésére. Mélyhúzásnál a  $h$  vastagságú lemeztárcsa koncentrikusan be van fogva a húzószerszám és a ránc tartó felületei közé (81.1/I. ábra). A húzótüske keresztülhalad a húzógyűrű és a ránc tartó koncentrikus nyílásán, és közben a lemezt keresztülhúzza a húzógyűrű és a húzótüske közötti  $h$  vastagságú résen. Így a lemezből egy edény keletkezik (81.1/II. ábra). Képzeljük a lemeztárcsát  $abcd$  elemi szegmensekre felosztva (81.1/III. ábra). A húzás folyamán minden egyes ilyen



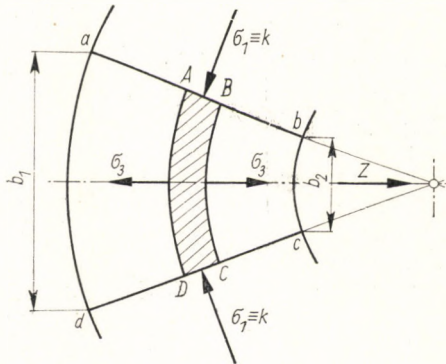
81.1. ábra. Mélyhúzás ránc tartóval

81.2. ábra. A lemezidom átalakulása mélyhúzásnál

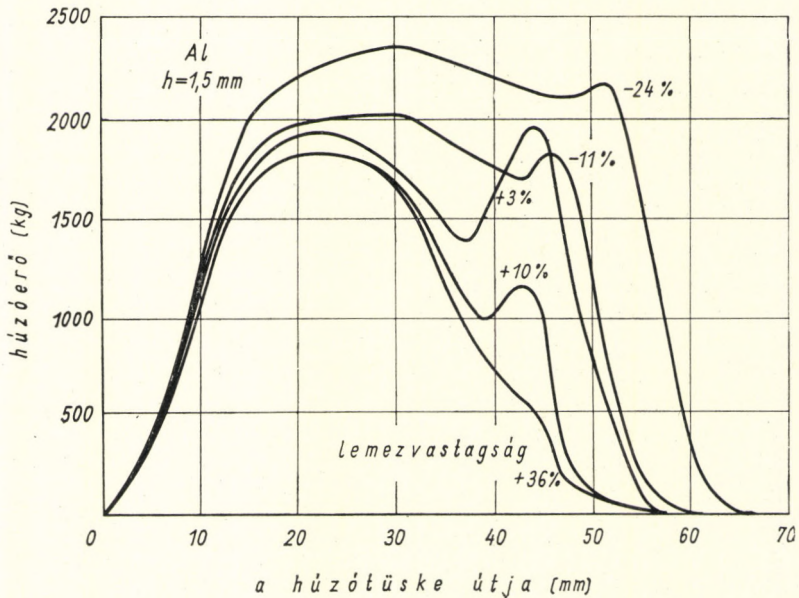


szegmensből  $b_2$  szélességű paralelogramma lesz; e paralelogrammák együtt az edény oldalfalát alkotják (81.2. ábra). Mélyhúzásnál tehát az történik, hogy a trapéz alakú elemi szegmenst áthúzzák egy  $h$  magasságú  $b_2$  szélességű nyíláson (81.3. ábra). Mialatt a szegmenst a  $h$  magasságú  $bc$  nyíláson keresztülhúzzák, a belőle kivágott elemi prizma  $AB$  és  $CD$  oldala a szegmens sugár irányú  $ab$  és  $cd$  oldalán előresúszik a  $bc$  nyílásig. Minden elemi szegmenst tehát úgy foghatunk fel, mint egy húzás alatt álló rúd kúpos húzószerszámba befogott darabját. Az alakváltozást egy  $Z$  húzóerő hozza létre.

A mélyhúzás problémájára vonatkozólag számos kísérlet folyt. A legfontosabbak G. SACHS kísérletei, aki a mélyhúzást elsőnek vizsgálta beható módon [81.1], SACHS a kísérleteit 0,5-től 1,5 mm vastag alumínium-, réz-, tombak- (Sr 85), sárgaréz- (Sr 63 és Sr 72) és bronzlemezzel, továbbá kétféle acéllemezzel végezte. Alumínium és acél mélyhúzásához fagyút, a többi fémhez repceolajat használt kenőanyagként. A mélyhúzásnál alkalmazott tárcsák átmérője 100,5 mm volt. A folyamat csak akkor tisztán mélyhúzás, ha a húzóérés kb. +38 %-kal nagyobb, mint a lemez vastagsága (81.4. ábra).



81.3. ábra. A lemezidomban fellépő feszültségek mélyhúzásnál

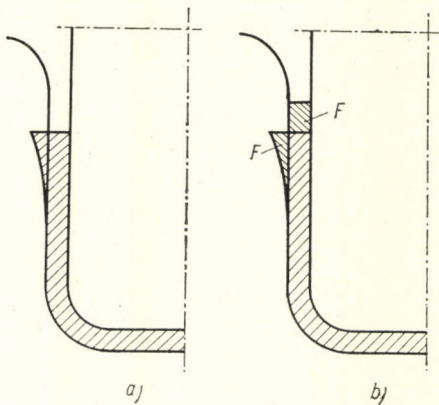


81.4. ábra. A húzórés befolyása a mélyhúzási görbére, 1,5 mm vastag alumínium tárcsa mélyhúzásánál

A lemeztárcsa átmérője 100,5 mm, a húzótüske átmérője 50 mm, a húzógyűrű átmérője 54,12 mm

A húzási görbe akkor dudorodik ki erőteljesebben, ha a húzórés a lemezvastagságnál csak +10 %-kal nagyobb, és különösen erős a kidudorodás, ha a húzórés csak +3 %-kal nagyobb a lemezvastagságnál. Ilyenkor a lemezvastagságot csökkenteni kell.

Amennyiben a húzórés kisebb, mint a lemez vastagsága a felső peremen, a húzórés eldolgozza a peremnek ezt a megvastagodását (81.5/a és b ábra).



81.5. ábra. A húzórés befolyása



Ha a ránc tartó a lemezre nincs elég nagy erővel rászorítva, akkor ráncok képződnek. Ha a ránc képződés nagy, akkor a húzás vége felé az edény fenéke leszakadhat, minthogy a ráncok a húzórésbe beszorulnak.

Ránc képződés csak vastag lemezeknél kerülhető el teljesen. Vékony lemezeknél a gyengébb ráncok a húzórésben elsímulnak.

Mindamellett a ránc tartó erőnek lehetőleg kicsinek kell lennie, nehogy a nagy súrlódás következtében a fenék leszakadjon.

A húzótüske által kifejtett húzóerőnek

$$P_h = \mu H$$

része az, ami a  $H$  ránc tartó erő következtében lép fel,  $\mu$  az anyag és a ránc tartó között fellépő súrlódási tényező. G. SACHS ezt a  $\mu$  súrlódási tényezőt különböző anyagok húzására vonatkozólag az alábbi táblázatba foglalta:

	Al	Cu	Sr 85	Sr 72	Sr 63
$\mu =$	0,15	0,25	0,12	0,20	0,18

## 82. A LEME Z MÉLY HÚZÁS MECHANIKÁJA

Ha a húzógyűrű felületét síknak, a húzóélt élesnek, azaz a húzóél legömbölyítését nagyon kicsinek vesszük fel, a mélyhúzott lemezben fellépő feszültségeket igen egyszerűen lehet meghatározni.

Ha ugyanis elképzeljük, hogy egy kör alakú lemeztárcsából egy keskeny szegmens van kivágva, melynek szöge  $\varphi$ , akkor a rotációs szimmetria folytán elegendő az erőket erre a szegmensre vonatkozólag vizsgálni.

A mélyhúzás következtében ez a szegmens prizmatikus szalaggá alakul át (82.1. ábra).

A  $h$  vastagságú lemezszegmens valamely elemi  $abcd$  térfogatra ható erők egyensúlyát a 82.2. ábra segítségével határozhatjuk meg.

A lemeztárcsa külső átmérője a kezdeti stádiumban  $r_{k_0}$ , egy közbeeső húzási stádiumban  $r_k$ , vastagsága  $h$ , a kör alakú húzószerszám rádiusza  $r_b$ .

Az  $abcd$  elemi térfogatra ható erők egyensúlyát a következő egyenlettel lehet kifejezni:

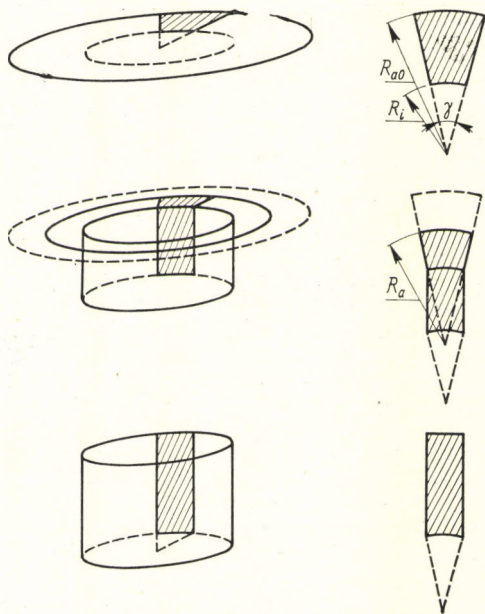
$$-\sigma_r r \varphi h + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) \varphi h + 2k_r dr \frac{\varphi}{2} h = 0. \quad (82.1)$$

A műveletek elvégzése után:

$$r d\sigma_r + \sigma_r dr + k_r dr = 0, \quad (82.2)$$

illetőleg

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + k_r = 0. \quad (82.3)$$



82.1. ábra. A lemeztárcsa átalakulása mélyhúzásnál

A folyás feltétele a jelen esetben

$$k_r = k_f - \sigma_r, \quad (82.4)$$

így a (82.3) differenciálegyenlet ilyen alakra egyszerűsödik:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + k_f = 0, \quad (82.5)$$

ebből

$$d\sigma_r = -k_f \frac{dr}{r}. \quad (82.6)$$

A (82.6) egyenlet megoldása:

$$\int_{\sigma_b}^{\sigma_r} d\sigma_r = - \int_{r_b}^r k_f \frac{dr}{r}, \quad (82.7)$$

azaz

$$\sigma_r - \sigma_b = - \int_{r_b}^r k_f \frac{dr}{r}. \quad (82.8)$$

Ha  $r = r_k$ , akkor  $\sigma_r = 0$ , és így

$$\sigma_b = \int_{r_b}^{r_k} k_f \frac{dr}{r}. \quad (82.9)$$

Ha a húzást szakaszokra bontjuk, és feltételezzük, hogy egy-egy húzási szakaszon belül  $k_f$  állandó, azaz  $k_f = k_{fk}$ , akkor a (82.9) egyenlet a következőképpen írható fel:

$$\sigma_b = k_{fk} \int_{r_b}^{r_k} \frac{dr}{r} = k_{fk} \ln \frac{r_k}{r_b}. \quad (82.10)$$

Ebben az egyenletben

$$k_{fk} = \frac{k_{fp} + k_{fb}}{2}$$

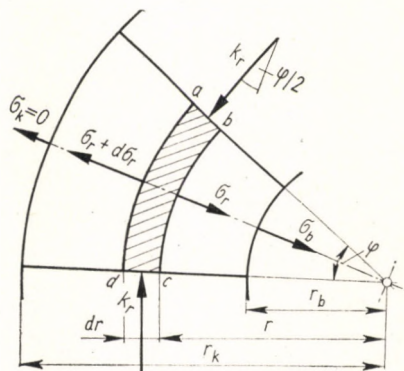
a közepes alakítási szilárdság, ahol  $k_{fp}$  a körtárcsa külső pereméhez és  $k_{fb}$  a körtárcsa belső pereméhez tartozó alakítási szilárdság.

A tárcsa tiszta alakváltozását előidéző mélyhúzó erő:

$$P_a = r_b h \pi \sigma_b = r_b h \pi k_{fk} \ln \frac{r_k}{r_b}. \quad (82.11)$$

A tárcsa alakváltozásához szükséges húzóerőt a 81.3. ábra alapján a rúdhúzáséhoz hasonló módon (l. a 40. fejezetet) lehet kiszámítani:

$$Z_a = k_k F, \quad (82.12)$$



82.2. ábra. Egy lemezszegmensben fellépő erők a mélyhúzás folyamán

ahol a közepes harmadik főfeszültség a  $Z$  húzóerő irányában a 81.3. ábra szerint:

$$\sigma_{3k} = \frac{Z}{2 b_2 h}, \quad (82.13)$$

a folyási feltétel:

$$k_k + \sigma_{3k} = k_{fk}, \quad (82.14)$$

és ezek segítségével számítva, a közepes alakítási ellenállás:

$$k_k = \frac{k_{fk}}{1 + \frac{b_1 - b_2}{2 b_2}} = \frac{k_{fk}}{1 + \frac{d_1 - d_2}{2 d_2}}. \quad (82.15)$$

Az összes keresztmetszet-csökkenés pedig:

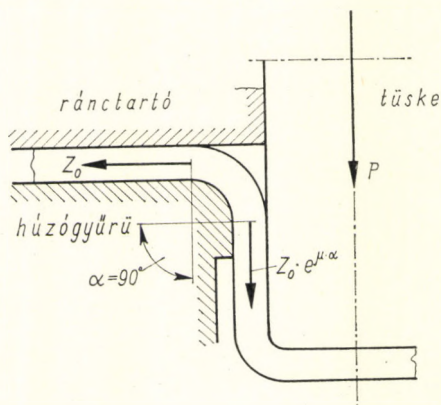
$$F = (d_1 - d_2) \pi h. \quad (82.16)$$

A tárcsa alakváltozását előidéző erő tehát a (82.12) egyenlet értelmében:

$$P_a = k_k F = k_k (d_1 - d_2) \pi h. \quad (82.17)$$

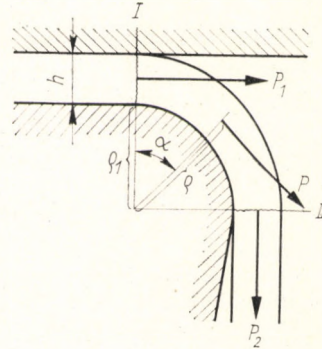
Mélyhúzáskor a húzótüskét mozgató erőnek nemcsak az alakváltozást kell létrehoznia, hanem a gyűrű felülete mentén fellépő súrlódási erőt is le kell győznie. A lemezt a húzótüske segítségével a gyűrűn keresztül húzzák; a húzófelület mentén súrlódási erő lép fel (82.3. ábra), amelynek legyőzéséhez minden elemi szegmens húzásánál

$$R = Z_0 e^{\mu \alpha} - Z_0 \quad (82.18)$$



82.3. ábra. A húzógyűrű legömbölyített élén fellépő súrlódás befolyása a húzóerőkre

82.4. ábra. A húzott lemez kétszeres hajlítása a legömbölyített húzóélen



erőre van szükség. Itt  $Z_0$  az elemi szegmens húzásához szükséges erő,  $e^{-}$  a természetes logaritmus alapszáma,  $\mu$  a súrlódási tényező és  $\alpha = \pi/2$  a lemez által befogott ív nagysága.

A húzott lemez az alakítás folyamán a húzógyűrű legömbölyített élén kettős hajlításnak is alá van vetve. A lemezt először ráhajlítják a húzógyűrű élére, a húzófelület elhagyása után pedig a lemez ismét kiegyenesedik (82.4. ábra). E kétszeres hajlítási munka létrehozásához szükséges erőt a következőképpen lehet kiszámítani:

Húzáskor a  $b$  szélességű,  $h$  vastagságú lemez az I. keresztmetszetnél ráhajlik a húzógyűrű  $\rho_1$  sugárral legömbölyített élére. A hajlítási munka [(76.1) egyenlet]:

$$P_1 \rho \alpha = M \alpha, \quad (82.19)$$

ebből a  $P_1$  húzóerő:

$$P_1 = \frac{M}{\rho} = \frac{\sigma_f b h^2}{4 \rho}. \quad (82.20)$$

A II. keresztmetszetnél a lemez kiegyenesedik. Minthogy ezzel az eredeti helyzet áll vissza, a II. keresztmetszetnél végzett munka azonos az I.-nél végzett munkával. A kiegyenlítéshez ugyanakkora erő kell, mint a ráhajlításhoz. Az összes húzóerő tehát, amely ehhez a kettős munkához szükséges:

$$P_2 = 2 P_1 = \frac{\sigma_f b h^2}{2 \rho}. \quad (82.21)$$

Ha a húzógyűrű egy teljes kör, és az élen fellépő súrlódást figyelmen kívül hagyjuk, akkor

$$b = d_2 \pi, \quad (82.22)$$

és a teljes hajlítóerő:

$$P_H = \frac{\sigma_f d_2 \pi h^2}{2 \rho}. \quad (82.23)$$

De ha az élen fellépő súrlódást is számításba vesszük, akkor

$$P_h = \frac{\sigma_f d_2 \pi h^2}{4 \rho} (e^{\mu \alpha} + 1). \quad (82.24)$$

A drót- és rúdhúzásnál már rámutattunk arra, hogy a szálak átvezetésével kapcsolatos anyagmozdulások létrehozásához munkavégzésre van szükség (40. fejezet). Amikor a mélyhúzás folyamán a húzott tárcsa átalakul mélyhúzott edénnyé, illetve amikor a szegmensből paralelogramma lesz, szintén számolni kell ilyen, a belső anyagmozdulások létrehozásához szükséges munkával (82.5. ábra).

A szálak átvezetéséhez szükséges belső munkatöbblet:

$$A_i = \frac{\sigma_f}{2 \sqrt{3}} \alpha V. \quad (82.25)$$

Itt  $\sigma_f$  a húzott anyag alakítási szilárdsága. Minthogy

$$\Delta P_i m = \Delta A_i, \quad (82.26)$$

azért

$$\Delta P_i = \frac{\Delta A_i}{m} = 0,29 \sigma_f \alpha \frac{\Delta V}{\Delta m}, \quad (82.27)$$

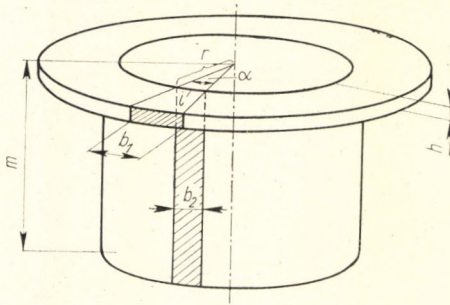
$$\Delta V = i h m, \quad (82.28)$$

$$V = \Delta V \frac{2 r \pi}{i}. \quad (82.29)$$

Ha  $\alpha = 1^\circ$ , akkor

$$\alpha = \frac{i}{r} = 0,0175, \quad (82.30)$$

$$\frac{2 r \pi}{i} = 360, \quad (82.31)$$



82.5. ábra. A lemeztárcsában keletkező belső veszteségi munka a mélyhúzás folyamán

$$\Delta V = ihm = 0,0175 rhm, \quad (82.32)$$

$$V = \Delta V \frac{2r\pi}{i} = 360 \cdot 0,0175 rhm, \quad (82.33)$$

és így a belső munka elvégzéséhez szükséges erő:

$$P_i = 0,03 r \sigma_f h. \quad (82.34)$$

Ha figyelembe vesszük még, hogy a rántartó  $H$  erővel szorítja a lemezt, és így módon is súrlódási erő keletkezik, a súrlódási tényező pedig  $\mu_1$ , akkor a húzótüske mozgatásához szükséges összes erő:

$$P = [k_k (d_1 - d_2) \pi h + 0,03 r \sigma_{fk} h + 2 H \mu_1] e^{\mu \frac{\pi}{2}} + \frac{\sigma_{fk} d_2 \pi h^2}{4 \left( \varrho_1 + \frac{h}{2} \right)} \left( e^{\mu \frac{\pi}{2}} + 1 \right), \quad (82.35)$$

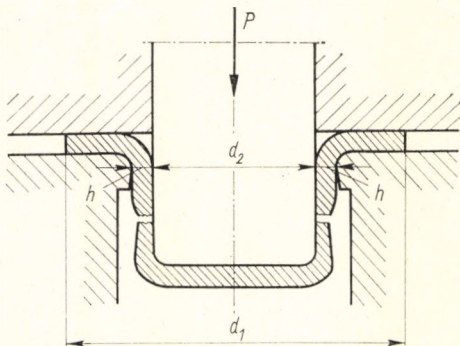
illetőleg

$$P = [0,5 d_2 \pi h k_{fk} \ln \frac{d_1}{d_2} + 0,03 r \sigma_{fk} h + 2 H \mu_1] e^{\mu \frac{\pi}{2}} + \frac{\sigma_{fk} d_2 \pi h^2}{4 \left( \varrho_1 + \frac{h}{2} \right)} \left( e^{\mu \frac{\pi}{2}} + 1 \right). \quad (82.35a)$$

Látható tehát, hogy a  $P$  erő a húzás kezdetétől a végéig állandóan változik. A (82.35) egyenletben szereplő  $d_1 - d_2$  különbség a húzás folyamán állandóan kisebb lesz, míg a  $k_k$  alakítási ellenállás kifejezésében (82.15) szereplő  $k_{fk}$  közepes alakítási szilárdság állandóan nő. Hasonlóképpen a  $\sigma_f$  folyási határ a húzás folyamán növekszik. Az egyes tényezőknek így módon való változása a teljesítményszükséglet meghatározását igen bonyolulttá teszi. A munkaszükséglet általában az alábbi képlettel számítható ki:

$$L = \int_{(m)} P dm; \quad (82.36)$$

ebben az összefüggésben  $P$  a húzótüskét mozgó erő,  $m$  a tüske útja. Minthogy ennek az integrálnak a kiszámítása nehézségekbe ütközik, a feladatot szerkesztéssel kell megoldani. A  $(P, m)$  koordináta-rendszerben megállapítjuk az  $m$  különböző értékeihez tartozó  $P$  értékét. Az így megállapított görbe az abszcisszatengellyel azt a felületet zárja be, amely megadja az alakítási munkát.



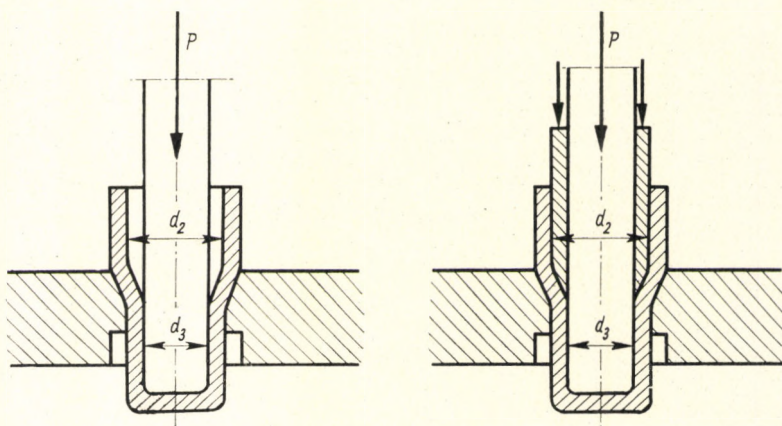
82.6. ábra. Az edény fenekének leszakadása

A mélyhúzást  $d_1$ ,  $d_2$  és  $h$  bármely értékénél végre lehet hajtani. A művelet sikerének a következő összefüggés szab határt:

$$P \leq d_2 \pi h \sigma_B, \quad (82.37)$$

ahol  $\sigma_B$  a húzott edény anyagának szilárdságát jelenti. Ha  $P$  [(82.35) egyenlet] kisebb, mint a (82.37) egyenlet jobb oldala, akkor a húzás szakadás nélkül sikerül. Ha  $P$  nagyobb, mint a (82.37) egyenlet jobb oldala, akkor az edény feneké leszakad (82.6. ábra).

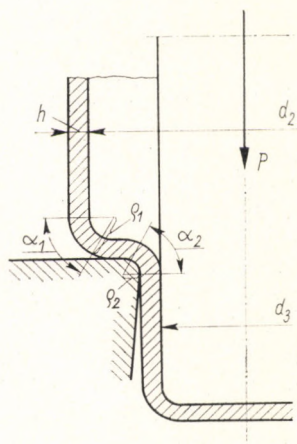
Ezért, hogy ha olyan edényt kell húzni, melynek a magassága átmérőjéhez képest nagy, akkor a húzást több lépésben, közbeeső lágyítások segítségével kell végrehajtani. Ez oly módon történik, hogy az edényt először nagy átmérővel és kis oldalmagassággal húzzák ki, majd ismételt húzásokkal csökkentik az átmérőt, és növelik az oldalmagasságot. Az ilyen továbbhúzás vagy ránc tartó segítségével, vagy anélkül történik (82.7. ábra). A szükséges húzóerő kiszámításának a következő elgondolás az alapja:



82.7. ábra. Továbbhúzás



82.8. ábra. Az erők meghatározása továbbhúzáskor

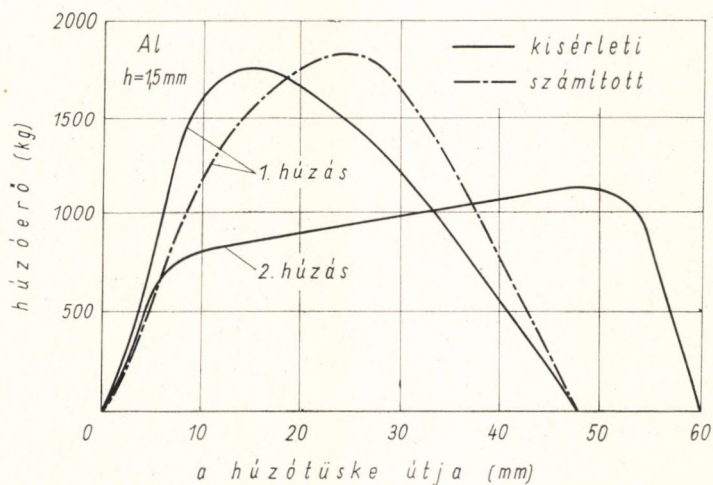


A tiszta alakítási munkához szükséges húzóerőt a

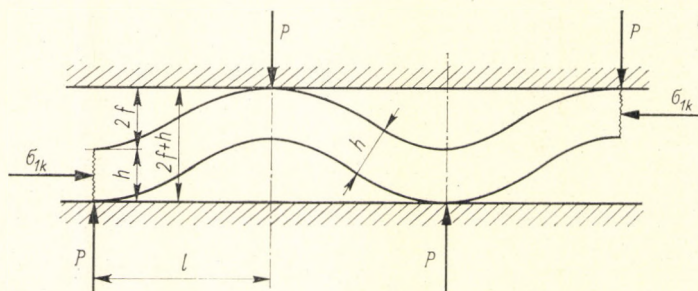
$$P_a = k_k (d_2 - d_3) \pi h e^{\mu \alpha} \quad (82.38)$$

kifejezés adja meg. Az  $\alpha_1$  és az  $\alpha_2$  szög jelentése a 82.8. ábrából látható. A továbbhúzáskor kétszeres hajlításról van szó. Az egyik hajlításhoz szükséges húzóerő:

$$P'_b = \frac{2 \sigma'_f b_2 h^2}{4 \rho_1} = \frac{\sigma'_f d_2 \pi h^2}{2 \rho_1} \quad (82.39)$$



82.9. ábra. Mélyhúzási görbék



83.1. ábra. A lemez-perem kihajlása

A második hajlításhoz szükséges húzóerő:

$$P_b'' = \frac{2 \sigma_f'' b_2 h^2}{4 \varrho_2} = \frac{\sigma_f'' d_3 \pi h^2}{2 \varrho_2} \quad (82.40)$$

Ezekben a képletekben  $\sigma_f'$  és  $\sigma_f''$  a húzott test anyagának folyási határát jelenti az első, illetve a második hajlítás folyamán. Ezek szerint az alakváltozáshoz szükséges húzóerő (82.9. ábra):

$$P = k_k (d_2 - d_3) \pi h e^{\mu \alpha} + \frac{\sigma_f' d_2 \pi h^2}{2 \varrho_1} + \frac{\sigma_f'' d_3 \pi h^2}{2 \varrho_2} \quad (82.41)$$

### 83. RÁNCKÉPZŐDÉS ÉS RÁNCTARTÓNYOMÁS A LEMEZMÉLYHÚZÁSNÁL

A mélyhúzás műveletét a 81.1. és 82.1. ábrán mutattuk be. Húzás közben a tárcsában fellépő radiális húzófeszültség azonos a harmadik főfeszültséggel ( $\sigma_r \equiv \sigma_3$ ), és a tangenciális nyomófeszültség az első főfeszültséggel ( $\sigma_t \equiv \sigma_1$ ), mint ahogy ezt már a 81.3. ábra mutatta. A radiális és tangenciális feszültségeket a folyási feltételből lehet meghatározni.

A közepes tangenciális főfeszültség [(82.15) egyenlet]:

$$\sigma_{1k} = k_{fk} \left( \frac{2 d_2}{d_1 + d_2} \right), \quad (83.1)$$

a közepes radiális főfeszültség:

$$\sigma_{3k} = k_{fk} \left( \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right), \quad (83.2)$$

és a második közepes főfeszültség, amely a lemezre merőlegesen hat:

$$\sigma_{2k} \approx 0. \quad (83.3)$$

A lemez ilyen módon radiális húzófeszültségek és tangenciális nyomófeszültségek behatása alatt áll. A húzott tárcsa a művelet alatt a szerszám síklapja és a ránc tartó között ráncot igyekszik vetni (83.1. ábra). A ránc képződést a ránc tartó megakadályozza, minthogy a ráncokra  $p$  nyomást gyakorol. Gyakorlati szempontból nagyon fontos tudni, mekkora legyen a ránc tartó nyomása a lemezre, hogy a ránc képződést biztosan megakadályozza.

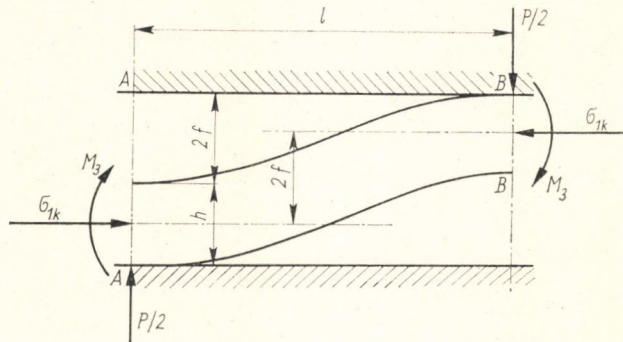
Tudjuk, hogy a lemezidom a mélyhúzás folyamán megvastagszik, és pedig legerősebben a külső peremhez közel (81.5. ábra), míg a húzóél közelében esetleg valamivel meg is vékonyodik. Minthogy a húzógyűrű és a ránc tartó közötti távolság a legnagyobb lemezvastagságnak megfelelően van beállítva, a lemez, a ránc tartó és a húzógyűrű felülete között rés keletkezik, ami a húzás folyamán lehetővé teszi a lemezidom kihajlását, illetve a ránc képződést.

Vizsgáljuk meg a rés befolyását a ránc képződésre. Először nézzük meg, hogy mi történik, amikor egy  $b$  szélességű,  $h$  vastagságú lemezsávra két szilárd nyomólemez között a hosszirányban  $\sigma_{1k}$  nyomófeszültség hat, amely a mélyhúzott lemezben fellépő tangenciális nyomásnak felel meg, (83.1. ábra).

A vizsgált sáv kihajlását két egymástól  $2f + h$  távolságban levő és egymással párhuzamos nyomólap akadályozza. A két nyomólap a ránc tartónak és a húzószerszámnak felel meg. A hosszirányú húzófeszültségek és a tangenciális nyomófeszültségek hatására a lemezsáv a 83.1. ábrán megadott módon felfekszik a határfelületekre, miközben hullámszerűen (ránc) meghajlik. Egy-egy ilyen sinusvonal szerű hullám hossza  $2l$ . Azokon a helyeken, ahol a lemezsáv felfekszik a határoló felületekre,  $P$  nagyságú nyomóerővel hat ezekre. Ha feltesszük, hogy ez a nyomóerő egyenletesen van a  $2lb$  határfelületeken eloszolva, akkor a fajlagos felületre ható nyomást

$$p = \frac{P}{2lb} \quad (83.4)$$

képlet fejezi ki. A húzószerszám sík felfekvő felületére és a ránc tartó sík felületére egyforma fajlagos nyomás hat.



83.2. ábra. A lemezperem kihajlásakor működő erők

Ha egy ránc fél hullámhosszára vonatkozólag vizsgáljuk a fellépő erők és nyomatékok egyensúlyát, akkor a 83.2. ábra alapján a hosszirányban működő erők nyomatéka:

$$M_1 = \sigma_{1k} h b 2f, \quad (83.5)$$

a keresztirányban működő erők nyomatéka:

$$M_2 = \frac{P}{2} l = p l^2 b. \quad (83.6)$$

Ezekon a nyomatékokon kívül a végkeresztmetszetekben még egy  $M_3$  nyomaték is működik. Feltéve, hogy a semleges vonal sinusvonal alakú, az  $AA$  és  $BB$  keresztmetszetekben a görbület:

$$\frac{1}{\rho} = -\pi^2 \frac{f}{l^2} \sin \frac{\pi}{2} = -\pi^2 \frac{f}{l^2}, \quad (83.7)$$

és így a hozzátartozó nyomaték [(76.3) egyenlet]:

$$M_3 = \frac{\sigma_f b}{12} \left[ 3h^2 - \left( \frac{2\sigma_f}{E} \right)^2 \left( \frac{l^2}{\pi^2 f} \right)^2 \right]. \quad (83.8)$$

A nyomatéki egyensúly ezek szerint:

$$M_1 + M_2 + 2M_3 = 0, \quad (83.9)$$

illetőleg

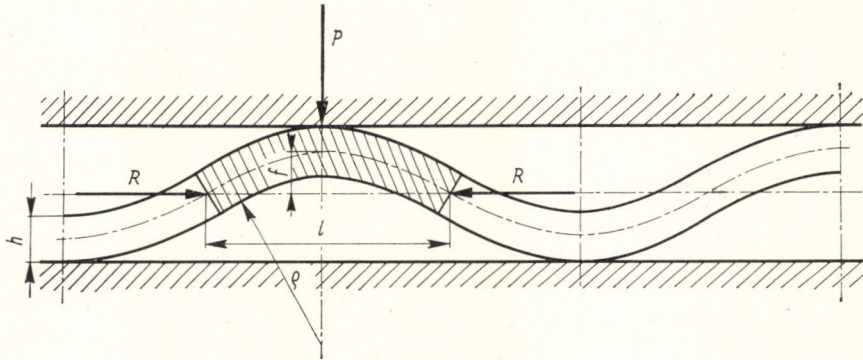
$$p l^2 b - \sigma_{1k} h b 2f - 2 \frac{\sigma_f b}{12} \left[ 3h^2 - \left( \frac{2\sigma_f}{E} \frac{l^2}{\pi^2 f} \right)^2 \right] = 0, \quad (83.10)$$

és ebből a fajlagos ráncartónyomás:

$$p = \frac{\frac{\sigma_f}{6} \left[ 3h^2 - \left( \frac{2\sigma_f^2}{E} \frac{l^2}{\pi^2 f} \right)^2 \right] + \sigma_{1k} h 2f}{l^2}. \quad (83.11)$$

Ha feltesszük, hogy  $\frac{2\sigma_f}{E} \frac{l^2}{\pi^2 f} (=) 0$ , akkor a fajlagos ráncartónyomást a következő egyszerű alakban írhatjuk fel:

$$p = \frac{\sigma_f h^2 + 4\sigma_{1k} h f}{2l^2}. \quad (83.12)$$



83.3. ábra. A sinusgörbe alakú ráncok hullámhosszának meghatározása

A (83.11) és a (83.12) egyenletben  $l$  a sinus alakú ránc fél hullámhossza. Az  $l$  hosszúságot a 83.3. ábra alapján a következőképpen lehet meghatározni:

A fél ránc hullám két végén  $R$  erő működik.  $\rho$  a fél hullám görbületi sugara és  $f$  a lemez kihajlása (hullámmagasság) az  $R$  erők hatásvonalához képest.

A kihajolt lemez rugalmas vonalának egyenletét így írhatjuk fel:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Rf}{JE} = \frac{8f}{l^2}, \quad (83.13)$$

és ebből

$$l^2 = \frac{8JE}{R}. \quad (83.14)$$

Mint ahogy

$$J = \frac{bh^3}{12} \quad \text{és} \quad R = \sigma_{1k} hb,$$

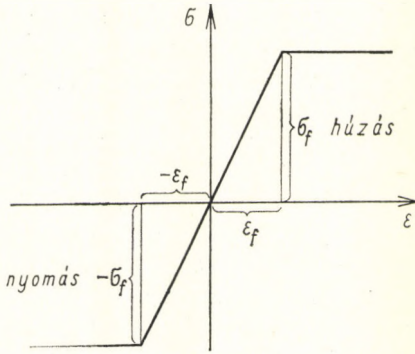
a (83.13) egyenlet a következőképpen írható:

$$l^2 = \frac{2}{3} h^2 \frac{E}{\sigma_{1k}}, \quad (83.15)$$

és így a ránc fél hullámhossza:

$$l = 0,8 h \sqrt{\frac{E}{\sigma_{1k}}}. \quad (83.16)$$

A hullámhosszúság kiszámításánál az  $E$  együttható meghatározásához a 83.4. ábrán bemutatott idealizált folyási görbét vehetjük alapul, amely



szerint közelítően feltehető, hogy

$$E (=) \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f}, \quad (83.17)$$

és így a (83.16) egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$$l = 0,8h \sqrt{\frac{\sigma_f}{\varepsilon_f \sigma_{fk}}}. \quad (83.18)$$

Ha  $\sigma_f (=) \sigma_{0,2}$  és a (83.2) egyenlet alapján

$$\sigma_{1k} = \sigma_{0,2} \left( \frac{2d_2}{d_1 + d_2} \right), \quad (83.19)$$

ahol  $d_1$  a kiinduló lemezidom külső átmérője és  $d_2$  a húzótüske átmérője, akkor a (83.18) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$l = 7h \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{2d_2}}. \quad (83.20)$$

Ha  $l$ -nek ezt az értékét a (83.12) egyenletbe behelyettesítjük, akkor írható:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sigma_{0,2} h^2}{2l^2} + \frac{2\sigma_{1k} hf}{l^2} = \frac{\sigma_{0,2} h^2}{98h^2 \left( \frac{d_1 + d_2}{2d_2} \right)} + \frac{2\sigma_{0,2} \left( \frac{2d_2}{d_1 + d_2} \right) hf}{49h^2 \left( \frac{d_1 + d_2}{2d_2} \right)} = \\ &= 0,01 \sigma_{0,2} \left( \frac{2d_2}{d_1 + d_2} \right) + 0,04 \sigma_{0,2} \frac{f}{h} \left( \frac{2d_2}{d_1 + d_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (83.21)$$

Mint hogy a (83.21) egyenlet jobb oldalán levő második tag elhanyagolhatóan kicsi, a fajlagos ránc tartó nyomást GELEJI [80.1] szerint általában így vehetjük fel:

$$p = 0,01 \sigma_{0,2} \left( \frac{2 d_2}{d_1 + d_2} \right) [\text{kg/mm}^2]. \quad (83.22)$$

Mint hogy általában  $\sigma_{0,2} = 0,8 \sigma_B$ , felvehető:

$$p = 0,008 \sigma_B \left( \frac{2 d_2}{d_1 + d_2} \right). \quad (83.23)$$

A lemez és a ránc tartó között hagyható legnagyobb szabad rész E. SIEBEL szerint

$$f_{\max} = 0,035 h_1 \left( \frac{d_1}{d_2} - 1 \right)^3 \quad (83.24)$$

nagyságúnak vehető, ahol  $h_1$  a kiinduló lemeztárcsáidom eredeti vastagsága.

A fentiek szerint, ha egy  $d_1 = 100$  mm átmérőjű lemeztárcsából  $d_2 = 50$  mm húzó tüskével edényt húznak, a  $p$  fajlagos ránc tartó nyomás a következő lesz:

ha a tárcsa anyaga alumínium ( $\sigma_B = 10$  kg/mm<sup>2</sup>):  $p = 5,5$  kg/cm<sup>2</sup>;

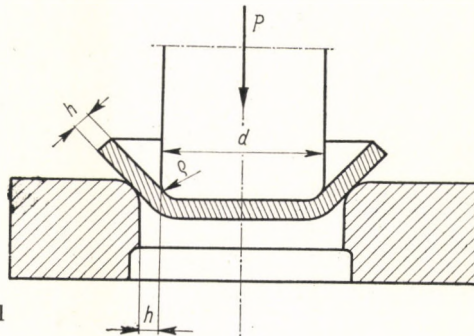
ha a tárcsa anyaga réz ( $\sigma_B = 20$  kg/mm<sup>2</sup>):  $p = 11$  kg/cm<sup>2</sup>;

ha a tárcsa anyaga sárgaréz ( $\sigma_B = 40$  kg/mm<sup>2</sup>):  $p = 21$  kg/cm<sup>2</sup>;

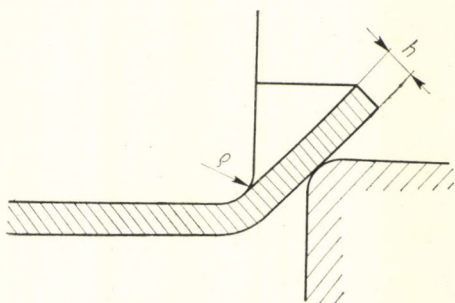
ha a tárcsa anyaga rozsdamentes acéllemez ( $\sigma_B = 60$  kg/mm<sup>2</sup>):  $p = 32$  kg/cm<sup>2</sup>.

#### 48. EDÉNYEK MÉLYHÚZÁSA RÁNC TARTÓ NÉLKÜL

Edényeket csak akkor lehet ránc tartó nélkül mélyhúzással előállítani, amikor a lemez vastagsága nagy a tárcsa átmérőjéhez képest, vagy amikor csak igen kis átmérőcsökkentésről van szó. A ránc tartó nélküli ráncmentes húzás további két feltétele, hogy a tárcsa átmérője legfeljebb 20–25-szöröse legyen a lemeztárcsának, és hogy a lemeztárcsának legalább 1/50-ed



84.1. ábra. Húzás ránc tartó nélkül



84.2. ábra

része legyen a túske átmérőjének. Emellett a túskeátmérőnek jól legömbölyítettnek kell lennie. 200 mm-es túskeátmérő mellett pl. 4 mm vastag lemez már jól felhajlítható, természetesen csak akkor, ha az átmérőcsökkentés kicsi. A munka menete a 84.1. és a 84.2. ábrán látható. Ez a ránc tartó nélküli húzás gyakran kombinálva van a falvastagság csökkentésével is, ilyenkor a húzószerszám és a húzó túske közötti rés kisebb a lemez vastagságánál.

A mélyhúzóerő nagyságának megállapítása GELEJI szerint [82.1] a következő megfontolás alapján történik.

A ránc tartó nélküli lemez mélyhúzást a csövek dugó nélküli (üres) húzására lehet visszavezetni (49. fejezet). A probléma mindkét alakításnál azonos, itt azonban hozzájárul még a tárcsaperem felhajlításának kérdése. A mélyhúzás bármely pillanatát a 84.3. ábra szemlélteti.

A 84.3. ábrán a mélyhúzó, vagyis sajtoló erő:

$$P_1 = k_k (d_1 - d_2) \pi h, \quad (84.1)$$

a hajlítóerő:

$$M = P_2 y = Nx = \frac{\sigma_f d_k \pi h^2}{4}, \quad (84.2)$$

és ebből

$$P_2 = \frac{\sigma_f d_k \pi h^2}{4 y}. \quad (84.3)$$

A  $P'$  erő tehát:

$$P' = P_1 + P_2. \quad (84.4)$$

A normális erő:

$$N = \frac{P_1 + P_2}{\cos \alpha}. \quad (84.5)$$

A súrlódási erő:

$$S = N \mu_0 = \frac{P_1 + P_2}{\cos \alpha} \mu_0. \quad (84.6)$$



A sajtolótüskére vonatkoztatott  $P_3$  erő, amely a súrlódási erő legyőzéséhez szükséges:

$$P_3 = \frac{P_1 + P_2}{\cos \alpha} \mu_0 \sin \alpha = (P_1 + P_2) \mu_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (84.7)$$

Az összes mélyhúzó, vagyis sajtolóerő:

$$P_P = (P_1 + P_2) + (P_1 + P_2) \mu_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad (84.8)$$

illetőleg:

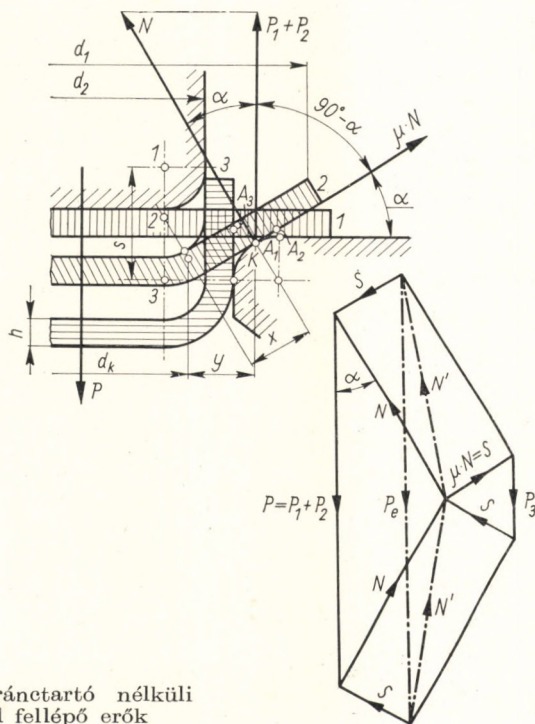
$$P_P = (P_1 + P_2) (1 + \mu_0 \operatorname{tg} \alpha), \quad (84.9)$$

megfelelően behelyettesítve:

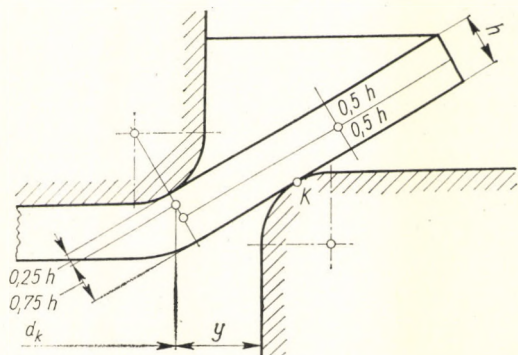
$$P_P = \left[ k_k (d_1 - d_2) \pi h + \frac{\sigma_f d_k \pi h^2}{4 y} \right] (1 + \mu_0 \operatorname{tg} \alpha). \quad (84.10)$$

Ebben a képletben

$$k_k = \frac{k_f}{1 + \frac{d_1 - d_2}{2 d_2}} \quad (84.11)$$



84.3. ábra. A ránc tartó nélküli mélyhúzásnál fellépő erők



84.4. ábra. A hajlítókar meghatározása a lemezperem felhajlításakor

$\varepsilon$  közepes alakítási ellenállás, ha  $k_f \equiv \sigma_f$ , azaz ha az alakítási szilárdság azonos a folyási határral,

$h$  a lemez vastagsága,

$d_1$  a nyomott tárcsa mindenkori külső átmérője,

$d_2$  a sajtolótüske átmérője,

$d_k$  a kör alakú hajlítási tengely (84.4. ábra),

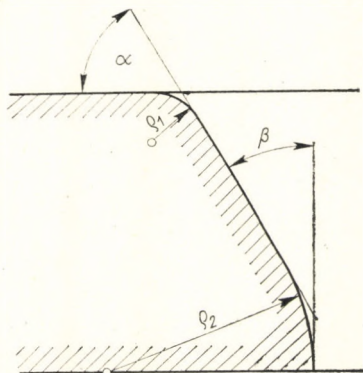
$y$  a hajlítási kar (84.4. ábra),

$\mu_0$  a húzótüskére vonatkoztatott súrlódási tényező.

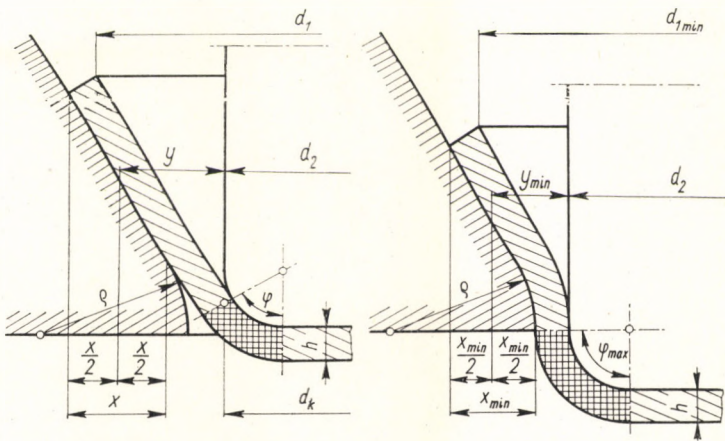
Maradó alakváltozásnál a hajlítási tengely az  $A$  pontból a  $B$  pontba tolódik. A hajlítási tengely helyzetét jó megközelítéssel vehetjük fel a 84.4. ábra szerint.

Megjegyzendő, hogy a ránc tartó nélküli mélyhúzásnál a szerszám húzófelületén nemcsak egy csúszó mozgással, hanem egy legördülő mozgással is számolni kell. Ezt a körülményt oly módon lehet számításba venni, hogy a súrlódási utat a tüskeúttal hasonlítjuk össze. A 84.3. ábra szerint a sajtolótüske útja  $s_1$  és a súrlódási út  $s_2$ . A sajtolótüskére vonatkoztatott súrlódási erő:

$$P_3 = N\mu_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad (84.12)$$



84.5. ábra. Egy ránc tartó nélküli mélyhúzó szerszám profilja



84.6. ábra. A hajlítókar meghatározása a 84.5. ábrán megadott mélyhúzószerszám esetében

itt

$$\mu_0 = \mu \frac{s_2}{s_1}, \quad (84.13)$$

$$\mu = 0,82 - 0,0005 t, \quad (84.14)$$

ahol  $t$  a sajtolási hőmérsékletet jelenti.

Ha a kazánfenékek sajtolására vonatkozólag olyan esetben akarunk számítást végezni, amikor a szerszám alakja a 84.5. ábra szerint van megadva, akkor a húzóerőt a (83.10) egyenlettel pontosan ki lehet számítani, minthogy a feladat semmiféle határozatlanságot nem tartalmaz. Ebben az esetben mindaddig, míg az oldal nincs felhajlítva,  $\operatorname{tg} \alpha$  sohasem lesz  $90^\circ$ , hanem mindig  $60^\circ$  és  $70^\circ$  között marad a  $\beta$  húzószög nagysága szerint (84.5. ábra). Egy ilyen húzószerszám alkalmazásánál a hajlítási karnak egy minimális ( $y_{\min}$ ) értéke van, amely azonban mindig nagyobb, mint a lemez  $h$  vastagsága,  $y$ -nak e minimális értékénél  $\varphi = 90^\circ$  (84.6a–b ábra).

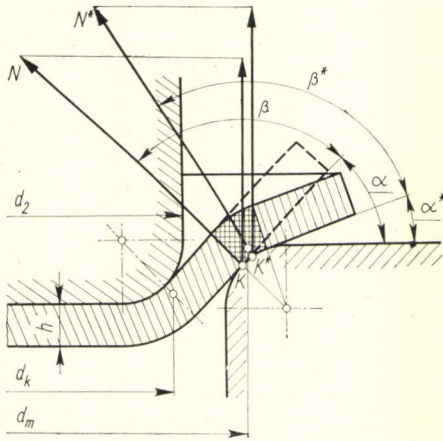
Ha a húzótüske ezen túlmegy ( $\varphi_{\max} = 90^\circ$ ), akkor

$$\frac{\sigma_f h^2 \pi d_k}{4 y} = 0$$

lesz, minthogy ekkor a perem felhajlítása már befejeződött. A legnagyobb sajtolóerő tehát  $y_{\min}$ , illetve  $\alpha_{\min}$  (84.5. ábra) mellett lép fel.

Ha a sajtolóerőt arra az esetre akarjuk kiszámítani, amikor a szerszám olyan, mint aminő a 84.7. ábrán látható, akkor a probléma sokkal bonyolultabb. Itt a peremnek az alakítás folyamán nincs határozott vezetése, hanem a perem meghajlik a húzás folyamán. A húzott tárcsa nem egy

84.7. ábra. A perem meghajlása ránc tartó nélküli mélyhúzásnál



$K$  pontban (illetve egy körön) fekszik fel a szerszámra, hanem egy  $l_d$  hosszúságú nyomott íven. A mélyhúzás előrehaladtával a húzóperemen működő  $N$  erő [(84.5) egyenlet] elfordul, és ekkor  $N^*$ -gal jelöljük. Az  $N^*$  normálerő nem a  $K$  ponton, hanem egy  $K^*$  ponton megy keresztül, és így nem  $\alpha$ , hanem  $\alpha^*$  szöget kell számításba venni. A nyomott ív hossza:

$$l_d \geq \frac{N^*}{k_f d_m \pi} \cdot \quad (84.15)$$

Az alakítás előrehaladásával  $N^*$  mind nagyobb lesz,  $d_m$  pedig mind kisebb, viszont  $l_d$  ugyancsak mind nagyobb; az  $\alpha$  szög teljes peremfelhajtás esetén ( $\varphi = 90^\circ$ ) jelentősen kisebb mint  $90^\circ$ , és közelítően  $60-65^\circ$ .

A súrlódási út és a sajtolótüske útjának viszonya pedig  $\frac{s_2}{s_1} = \frac{40}{160} = 0,25$ -nek vehető. Ezek után a (84.10) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$P_P = (1 + 0,43 \mu) \left[ k_k (d_1 - d_2) \pi h + \frac{\sigma_f d_k \pi h^2}{4 y_{\min}} \right]. \quad (84.16)$$

Ezt a képletet gyakorlati számításokhoz kitűnően fel lehet használni. Természetesen  $y_{\min}$  és  $d_k$  ( $\alpha = 60^\circ$ -nál) a 84.7. ábrából állapítandó meg, melyen a perem alkotóját egyenes vonal ábrázolja.

## IRODALOM

### I. ÁLTALÁNOS ELVEK

- [2.1] NÁDAI, A.: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Verl. J. Springer, Berlin 1927. — Theorie of Flow and Fracture of Solids. Vol. I. McGraw—Hill Book Co., New York 1950.
- [4.1] LUDWIK, P.: Elemente der technischen Mechanik. Berlin 1909.
- [6.1] KALISZKY S.: Mechanika (A képlékenységtan mérnöki alkalmazásai. A rezgés-tan elemei). Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai M. 11., Budapest 1961.
- [6.2] NÁDAI, A.: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Verl. J. Springer, Berlin 1927. 121—122. old.
- [7.1] VERÓ J.: Általános metallografia. II. Akadémiai Kiadó, Budapest 1956. 268—367. old.
- [7.2] MASING, G.: Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde. Verl. J. Springer, Berlin 1927.
- [8.1] KÖVESI A.: Szilárdságtan. Athenaeum, Budapest 1927. 284—287. old.
- [8.2] MUTNYÁNSZKY A.: Szilárdságtan. Tankönyvkiadó, Budapest 1956.
- [8.3] SZABÓ, L.: Einführung in die technische Mechanik. Springer-Verl., Berlin 1956. — Höhere technische Mechanik. Springer-Verl., Berlin 1956.
- [9.1] MOHR, O.: Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials? Z. Ver. dtsh. Ing. 34, 1524—1530, 1572—1577 (1900). — Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. 2. Aufl., Berlin 1914. 192—225. old.
- [10.1] EICHINGER, A.: Festigkeitstheoretische Untersuchungen. Hb. d. Werkstoffprüfung. Springer-Verl., Berlin 1955. 705—742. old.
- [11.1] NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. I. McGraw—Hill Book Co., New York 1950. 109—116. old.
- [13.1] LODE, W.: Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Z. Physik 36, 913—939 (1926).
- [13.2] HUBER, A. T.: Czasopismo techniczne. Lemberg 1904.
- [13.3] HENCKY, H.: Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichtes in plastischen Körpern. Z. angew. Math. Mech. 3, 241—251 (1923).
- [13.4] MISES, R.: Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl., 582—597 (1913).
- [14.1] KÖRBER, F.—EICHINGER, A.: Die Grundlagen der bildsamen Verformung. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. 22, 57—80 (1940).
- [15.1] NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. I. McGraw—Hill Book Co., New-York 1950. 527—543. old.
- [15.2] PRAGER, W.—HODGE, PH. G.: Theory of Perfectly Plastic Solids. John Wiley, New York 1965.
- [20.1] MANJOINE, M. J.—NÁDAI, A.: High-Speed Tension Test at Elevated Temperatures. Proc. Amer. Soc. Testing Mater. 40, 822—839 (1940).
- [20.2] ALDER, J. F.—PHILLIPS, V. A.: The Effect of Strain Rate and Temperature on the Resistance of Aluminium, Copper and Steel to Compression. J. Inst. Metals 83, 80—86 (1954—55).
- [20.3] FINK, K.—LUEG, W.—BÜRGER, G.: Formänderungsfestigkeit von unlegierten und niedrig legierten Stählen beim Warmstauchen unter einem Fallhammer. Arch. f. d. Eisenhüttenw. 26, 655—668 (1955).
- [20.4] LUEG, W.—MÜLLER, H. G.: Formänderungsverhalten von Stahl C 45 beim Stauchen und Scheren in Abhängigkeit von Temperatur und Formänderungsgeschwindigkeit. Arch. f. d. Eisenhüttenw. 28, 505—516 (1957).

- [20.5] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960.\*
- [21.1] GÜMBEL, L.: Reibung und Schmierung im Maschinenbau. Berlin 1939.
- [21.2] BOWDEN, F. P.—TABOR, J. D.: The Friction and Lubrication of Solids. Clarendon Press, Oxford 1950.
- [21.3] LUEG, W.—TREPTOW, K. H.: Schmierstoffe und Schmierstoffträger beim Ziehen von Stahldraht. I. T. Stahl u. Eisen **72**, 399—416 (1952).
- [23.1] LUEG, W.—POMP, A.: Wärmeübergang und Wärmeverlust beim Schmieden und Pressen. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **23**, 105—120 (1941).

#### II. AZ EGYSZERŰ KÉPLÉKENY ALAKÍTÁSI MŰVELETEK

- [24.1] NÁDAI, A.: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Verl. J. Springer, Berlin 1929. 73—89. old.
- [24.2] SIEBEL, E.—POMP, A.: Die Ermittlung der Formänderungsfestigkeit von Metallen durch Stauchversuch. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **9**, 157 (1927).
- [25.1] PRANDTL, L.: Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. Z. angew. Math. Mech. **3**, 401—406 (1923).
- [26.1] FÖPPL, A.—FÖPPL, L.: Drang und Zwang. I. Verl. Oldenbourg, München — Berlin 1941.
- [26.2] FREUDENTHAL, A. M.: Inelastisches Verhalten von Werkstoffen. Verl. Technik, Berlin 1955. 334—336. old.
- [27.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61. 110—133. old.
- [27.2] UNKSOW, E. P.: Neue Forschungen der Schmiedetechnologie. Verl. Technik, Berlin 1954.

#### III. HAJLÍTÁS

- [29.1] NÁDAI, A.: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Verl. J. Springer, Berlin 1927. 117—119. old.
- [30.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61. 650—688. old. — Die Probleme des durch Biegung bleibend verformten Stabes mit rechteckigem Querschnitt. Mitt. d. berg- u. hüttenmänn. Abt. Sopron **15**, 225—245 (1943).
- [34.1] GELEJI, A.: Das elastisch-plastische Biegen von Rundstäben. CIRP-Annalen **12**, 165—169 (1964).
- [35.1] NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. I. McGraw—Hill Book Co., New York 1950. 359—370. old.

#### IV. CSAVARÁS

- [36.1] A, GELEJI: Deformationsarbeit bei bleibender Verdrehung von Stäben mit einfachem Querschnitt. Z. angew. Math. Mech. **42**, 221—230 (1962).
- [36.2] WEBER, C.: Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungsarbeiten auf d. Gebiete d. Ingenieurwesens. H. 249, Verl. d. VDI, Berlin 1921.
- [36.3] SZOKOLOVSKIKI, V. V.: A képlékenység elmélete. Akadémiai Kiadó, Budapest 1953.
- [36.4] GELEJI S.: Egyszerű keresztmetszetű rudak maradósávarása. Magy. Tud. Akad. Műsz. Tud. Oszt. Közleményei **31**, 243—261 (1962).

#### V. RÚDHÚZÁS

- [40.1] SIEBEL, E.: Der derzeitige Stand der Erkenntnisse über die mechanischen Vorgänge beim Drahtziehen. Stahl u. Eisen 66/67, 171—180 (1947).
- [40.2] SIEBEL, E.: Die Formgebung im bildsamem Zustande. Verl. Stahleisen, Düsseldorf 1932.
- [40.3] POMP, A.: Stahldraht. Verl. Stahleisen, Düsseldorf 1941.

\* Idegen nyelvű publikációiban GELEJI S. = GELEJI, A.

- [40.4] HOFFMAN, O.—SACHS, G.: Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers. McGraw—Hill Book Co., New York 1953.
- [40.5] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61. 419—485. old.
- [40.6] LUEG, W.—TREPTOW, K. H.: Neue Untersuchungen über das Ziehen und Einstoßen von Stabstahl. Stahl u. Eisen **75**, 162—169 (1955).
- [40.7] GELEJI S.: Rúd- és csőhúzás. Magy. Tud. Akad. Műsz. Tud. Oszt. Közleményei **33**, 365—382 (1964).
- [40.8] KÖRBER, F.—EICHINGER, A.: Die Grundlagen der bildsamen Verformung. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **22**, 57—80 (1940).
- [40.9] HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford 1950.
- [44.1] LINICUS, W.—SACHS, G.: Versuche über die Eigenschaften gezogener Drähte und den Kraftbedarf beim Drahtziehen. Mitt. d. dtsh. Materialprüf. — Anst. Sonderh. 16 (Spanlose Formung der Metalle), 38—66 (1931). V. ö. Z. Metallkunde **23**, 205—210 (1931).
- [44.2] LUEG, W.—TREPTOW, K. H.: Schmierstoffe und Schmierstoffträger beim Ziehen von Stahldraht. 1. T. Stahl u. Eisen **72**, 399—416 (1952); 2. T. Stahl u. Eisen **76**, 1107—1116 (1956).
- [46.1] SIEBEL, E.—KOBITZSCH, R.: Die Erwärmung des Ziehgutes beim Drahtziehen. Stahl u. Eisen **63**, 110—113 (1943).

#### VI. CSŐHÚZÁS

- [48.1] SIEBEL, E.—WEBER, E.: Spannungen und Werkstofffluß beim Rohrziehen. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **16**, 217—224 (1934).

#### VII. SAJTOLÁS

- [50.1] SCHWEIßGUT, P. H.: Schmieden und Pressen. Verl. J. Springer, Berlin 1923.
- [50.2] PEARSON, C. E.—SMYTHE, I. A.: The Influence of Pressure and Temperatur on the Extrusion of Metals. J. Inst. Metals **45**, 345—381 (1931).
- [50.3] EISBEIN, W.—SACHS, G.: Kraftbedarf und Fließvorgänge beim Strangpressen. Mitt. d. dtsh. Materialprüf. Anst. Sonderh. 16 (Spanlose Formung der Metalle) 67—95 (1931).
- [50.4] PORTEVIN, A.: Les essais à chaud des métaux et alliages par compression et par filage. Rev. Metallurg. **26**, 435—443 (1929).
- [50.5] GELEJI, A.: Kraftbedarf und Fließvorgänge beim Strangpressen und beim Pressen im Gesenk. Acta Technica Acad. Sci. Hung. **10**, 187—220 (1955).
- [50.6] KIENZLE, O.—GRÜNING, K.: Über die Beanspruchungsverhältnisse in Blockaufnehmern von Strangpressen. Westdeutscher Verl., Köln 1961.
- [50.7] GELEJI, A.: Strangpressen in Rechnung und Versuch. Neue Hütte **8**, 275—279 (1963).
- [50.8] GUBKIN, G. J.: Mechanik plastisch deformierbarer Körper (Strangpressen von Duraluminium). Forsch. Inst. Maschinenb. Metallbearb., Moszkva, 363—396 (1931).
- [50.9] HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford 1950.
- [50.10] FELTHAM, P.: Extrusion of Metals. Metal Treatment and Drop Forging. 440—444 (1956).
- [50.11] BISHOP, J. F. W.: The Theory of Extrusion. Metallurgical Reviews **2**, 361 (1957).
- [50.12] BACKOFEN, W. A.: Extrusion Theory and Calculations. J. of. Metals 206—210 (March 1961).
- [51.1] SUCHOVERSKY, I.: Erkenntnisse über das Strangpressen von Aluminium. Z. Aluminium **38**, 295—299 (1962).
- [52.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61.
- [53.1] KÁLDOR M.: Módszer a rúdsajtolás jelenségeinek kísérleti vizsgálatára. Miskolci Nehézip. Műsz. Egyet. Közleményei **3**, 209—236 (1959).
- [53.2] SIEBEL, E.: Die Formgebung im bildsamen Zustande. Verl. Stahleisen, Düsseldorf 1932.

- [54.1] POMP, A.—MÜNKE, TH.—LUEG, W.: Arbeitsbedarf und Werkstofffluß beim Schmieden im Gesenk. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **20**, 265—291 (1938).
- [54.2] STÖTER, H. J.: Über die Bedeutung der Gratabmessung und Druckberührzeit beim Gesenkschmieden mit Fallhammer und Pressen. VDI—Z **100**, 1323—1327 (1958).
- [54.3] GELEJI, A.: Kraftbedarf und Fließvorgänge beim Pressen im Gesenk. Freiburger Forschungshefte **61**, 18—41 (1961).

#### VIII. HENGERLÉS

- [55.1] COTEL, E.: Über die Grundsätze der neuzeitlichen Walztechnik. Montan. Rdsch. Wien **20**, (1920).
- [55.2] HOFF, H.—DAHL, TH.: Die Grundlagen des Walzverfahrens. Verl. Stahleisen, Düsseldorf 1950.
- [56.1] SIEBEL, E.—HÜHNE, H.: Untersuchungen über den Formänderungsverlauf bei technischen Formgebungsverfahren. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **13**, 43 (1931).
- [56.2] KÖRBER, F.—SIEBEL, E.: Über die Beanspruchungsverhältnisse beim Schmieden und Walzen. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **10**, 15—22 (1928).
- [56.3] SIEBEL, E.—LUEG, W.: Untersuchungen über Spannungsverteilung im Walzspalt. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **15**, 1—14 (1933).
- [57.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61. 178—184. old.
- [59.1] GELEJI, A.: Theoretischer und praktischer Arbeitsbedarf beim Walzen. Stahl u. Eisen **51**, 886—887 (1931).
- [60.1] PALME, R. B.—MCGREGOR, C. W.: Rolling of Metals. An ASME Research Publication. Soc. Mech. Eng., New York 1958.
- [61.1] (TARNOVSKIJ, I. JA.—POZGYEJEV, A. A.—LJASKOV, V. B.) — И. Я. Тарновский—А. А. Поздеев—В. Б. Ляшков: Деформация металла при прокатке. Metallurgиздат, Москва 1956. 80—86. old.
- [62.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61. 291—293. old.
- [63.1] SIEBEL, E.: Die Formgebung im bildsamem Zustande. Verlag Stahleisen, Düsseldorf 1932. 35—36. old.
- [63.2] SACHS, G.: Versuche zum Walz- und Schmiedevorgang. Z. Metallkunde **19**, 189—195 (1927).
- [63.3] TAFEL, W.—KNOLL, W.: Die Klärung der Breiungsfrage mit Hilfe der Spannungsflächenhypothese. Metallwirtschaft **10**, 799—806 (1931).
- [63.4] TRINKS, W.: Roll Pass Design. I. The Penton Publishing Co., Cleveland/Ohio 1941.
- [63.5] POMP, A.—LUEG, W.: Walzversuche an kohlenstoff- und siliziumlegierten Stählen bei mittleren Temperaturen. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **15**, 81—97 (1933).
- [63.6] ZELIKOW, A. I.: Grundfragen der modernen Längswalztheorie. KBS-Mitteilungen Magdeburg **4**, 15—36 (1960).
- [64.1] KIRCHBERG, E.: Grundzüge der Walzenkalibrierung. Verl. Ruhfuß, Dortmund 1905.
- [64.2] PUPPE, J.: Über das Voreilen beim Walzen. Stahl u. Eisen **16**, 29—33 (1909).
- [64.3] TRINKS, W.: New Theories on Hot Mill Deformations Obtained by Experimental Rolling. Blast Furnace Steel Plant **49**, 276—277 (1915).
- [64.4] COTEL, E.: Ein Beitrag zur Bestimmung des Voreilens. Mitt. d. berg. u. hüttenmänn. Abt. Sopron **12**, 3—9 (1940).
- [64.5] SIEBEL, E.: Die Formgebung im bildsamem Zustande. Verlag Stahleisen, Düsseldorf 1933. 33—35. old.
- [64.6] SIEBEL, E.—FANGMEIER, E.: Versuche über den Formänderungswiderstand und den Formänderungsverlauf beim Warmwalzen von kohlenstoffarmem Flußstahl im Temperaturbereich von 700° bis 1200°. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **12**, 225—244 (1930).



- [64.7] LUEG, W.—POMP, A.: Die Bestimmung der Voreilung bei Warmwalzversuchen. Mitt. Kais. Wilh. Inst. f. Eisenforsch. **21**, 163—170 (1939).
- [66.1] HERRMANN, M.: Walzarbeit und Walzdruck. Stahl u. Eisen **31**, 1706—1711 (1911).
- [66.2] LÁNG, K.: Beiträge zur Berechnung der Walzarbeit. Stahl u. Eisen **36**, 10—17 (1916).
- [66.3] KÁRMÁN, TH.: Beitrag zur Theorie des Walzvorganges. Z. angew. Math. Mech. **5**, 139—131 (1925).
- [66.4] SIEBEL, E.: Die Formgebung im bildsamen Zustande. Verl. Stahl Eisen, Düsseldorf 1933.
- [66.5] NADAI, A.: The Rolling Prozess. Paper before Am. Soc. for Steel Treating, Sept. 1930. — The Forces Required for Rolling Steelstrip under Tension. J. Appl. Mechan., Am. Soc. Mech. Eng. June 1939, 54—62.
- [66.6] ZELIKOW, A. I.: Lehrbuch des Walzwerksbaus. verl. Technik, Berlin 1957
- [66.7] TROOST, A.—HÖLLING, K.: Bemerkungen über einige plastizitätstheoretische Grundlagen des Bandwalzens und eine vereinfachte Berechnung der Fließscheidenlage. Z. Metallkunde **52**, 1961.
- [66.8] TRINKS, W.: Supplement to Roll Pass Design Volumes I and II. Penton Publishing Co., Cleveland 1937. 9—13. old.
- [66.9] OROWAN, E.: The Calculation of Roll Pressure in Hot and Cold Flat Rolling. Proc. Inst. Mechan. Eng. **150**, 140—167 (1943).
- [66.10] Research on the Rolling of Strip. A symposium of selected papers (1948—1958). The British Iron and Steel Research Association.
- [66.11] GELEJI, A.: Eine Weiterführung und allgemeingültige Lösung der Kármán'schen Theorie des Walzens. Arch. f. d. Eisenhüttenw. **39**, 565—570 (1963).
- [66.12] GELEJI, A.: Eine neue Walztheorie. Acta Techn. Acad. Sci. Hung. **19**, 199—243 (1957).
- [66.13] PUPPE, J.: Versuche zur Ermittlung des Kraftbedarfs an Walzwerken. Verlag Stahl Eisen, Düsseldorf 1909.
- [66.14] MICAN, G. S.: A New Theory of Hot Rolling. Iron and Steel Engr. May 1954, 55—71.
- [68.1] GELEJI, A.: Walzdrehmoment und Walzdruck. Acta Tech. Acad. Sci. Hung. **45**, 275—281 (1964).
- [70.1] GELEJI, A.: Die Berechnung des mittleren Verformungswiderstandes bzw. des Walzdruckes beim Warm- und Kaltwalzen von quadratischen stangen- und blechförmigen Körpern. Acta Techn. Acad. Sci. Hung. **18**, 77—100 (1957).
- [70.2] VOITH, M.: Berechnungen des Walzdruckes und Walzdrehmomentes bei Feinwalzstraßen. Acta Techn. Acad. Sci. Hung. **49**, 251—268 (1964).
- [71.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61, 221—225. old.
- [71.2] GELEJI, A.: Der Einfluß der Walzenabmessungen beim Kaltwalzen von dünnen Metallblechen und Bändern. Acta Techn. Acad. Sci. Hung. **7**, 217—233 (1953).
- [71.3] TRINKS, W.—HITCHCOCK, I. H.: Strangth of Roll Necks. Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. **55**, (1933) Research Paper Section, 5.
- [72.1] CASWELL, J. S.: Notes on Roll Failures with Reference to Chilled Cast Iron Rolls Containing Chromium and Molybdeneum. Proc. Inst. Mech. Eng. **128**, 459— (1934). — The Deflection of the Rolls in Plate, Sheet and Strip Mills J. Iron Steel Inst. 115, (1935) 1. sz.
- [74.1] TAFEL, W.: Das Greifen der Walzen. Stahl u. Eisen **41**, 962—963 (1921).
- [74.2] EKELUND, S.: Einige dynamische Erscheinungen beim Walzen. Jernkontorets Ann. **111**, 39—97 (1927).
- [74.3] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61. 227—233. old.
- [74.4] SIMS, R. B.—ARTHUR, D. F.: Speeddependent Variables in Cold Strip Rolling J. Iron Steel Inst. **179**, 285—295 (1952).
- [74.5] FORD, H.: The Effect of Speed of Rolling in the Cold-Rolling Process. J. Iron Steel Inst. 380—398 (1947).
- [84.6] YOKOTE, Y.—NOMURA, S. J.: J. Inst. Metals **88**, 241—254 (1959/1960).
- [75.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag, Berlin 1960/61. 338—341. old.

#### IX. LEMEZEK HAJLÍTÁSA

- [76.1] GELEJI, A.: Die Probleme des durch Biegung bleibend verformten Stabes mit rechteckigem Querschnitt. Mitt d. berg. — u. hüttenmänn. Abt. Sopron **15**, 225—245 (1943).
- [77.1] GELEJI S.: A fémek képlékeny alakításánál fellépő erők és erőszükséglet meghatározása számítási útján. Mérnöki Továbbképző Int., Budapest 1948.
- [78.1] GELEJI, A.: Pressing of L and U Profiles from Sheet. Műegyetemi Közlemények 1. sz. 14—24 (1947).
- [79.1] GELEJI, A.: Walzwerks- und Schmiedemaschinen. Verl. Technik, Berlin 1961. 748—762. old.
- [79.2] OEHLER, G.: Biegen. Carl Hanser Verl., München 1963.
- [80.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verl, Berlin 1960/61.
- [80.2] SIEBEL, E.: Richten von Walzwerkserzeugnissen. Stahl u. Eisen **72**, 1298—1301 (1952).

#### X. LEMEZEK MÉLYHÚZÁSA

- [81.1] SACHS, G.: Untersuchungen über Tiefziehen. Mitt. d. dtsh. Materialprüf. Anst. Sonderh. **16** (Spanlose Formung der Metalle), 11—37 (1931).
- [81.2] SOMMER, S.: Versuche über das Ziehen von Hohlkörpern. Forschungsarb. Ver. dtsh. Ing. **286**, (1926); Maschinenbau **4**, 1171—1178 (1925).
- [81.3] SACHS, G.: Spanlose Formung der Metalle. Handb. d. Metallphysik III. Akad. Verlagsges. Leipzig 1937, 128—151. old.
- [82.1] GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verl., Berlin 1960/61. 689—726. old.
- [83.1] SIEBEL, E.: Der Niederhalterdruck beim Tiefziehen. Stahl u. Eisen **74**, 155—158 (1954).
- [83.2] SIEBEL, E.—BEISWÄNGER, H.: Tiefziehen. Carl Hanser Verl., München 1955.
- [83.3] ENGELHARDT, W.: Verfahrensgerechte Tiefziehprüfung. Fertigungstechnik **7**, 1—6 (1958).

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója  
Felelős szerkesztő: Benkő Jenő — Műszaki szerkesztő: Vidosa László  
Borító és kötéstervező: Waller Klára munkája  
AK 173 k 6769

A kézirat beérkezett: 1966. X. 12. — Példányszám: 1000 — Terjedelem: 37,1 (A/5) ív  
66.63007 Akadémiai Nyomda, Budapest. — Felelős vezető: Bernát György







Ára: 77,— Ft

## A VASKOHÁSZATI ENCIKLOPÉDIA

sorozatban jelent meg az  
Akadémiai Kiadó gondozásában

### AZ ACÉL KÉPLÉKENY ALAKÍTÁSA

1. Kovácsolás és sajtolás

Írta: DÉVÉNYI GYÖRGY,  
GELEJI SÁNDOR és munkatársaik

727 oldal • 1002 ábra • Kötve 150,— Ft

SZELESS LÁSZLÓ

### VASKOHÁSZATI GYÁRAK TERVEZÉSE

643 oldal • 343 ábra • Kötve 120,— Ft

### SZŐKE LÁSZLÓ—URAY VILMOS ELEKTROACÉLGYÁRTÁS

531 oldal • 398 ábra • Kötve 107,— Ft

VERŐ JÓZSEF

### AZ IPARI VASÖTVÖZETEK METALLOGRÁFIÁJA

A feldolgozás hatása az acél  
szövetére és tulajdonságaira  
Az öntöttvas metallográfiája

612 oldal • 964 ábra • Kötve 120,— Ft



AKADÉMIAI KIADÓ  
BUDAPEST



*Dr. dr. h. c. Geleji Sándor* kétszeres Kossuth-díjas akadémikus, tanszékvezető egyetemi tanár 1898-ban született. 1926-ban vaskohómérnök oklevelet szerez. Előbb a Magyar Rézhengerművek, majd a csepeli Weiss Manfréd acél- és fémművek mérnöke, 1945-től 1949-ig a Fémmű műszaki igazgatója. 1946-ban nevezték ki a Műszaki Egyetem Kohógéptani Tanszékére Sopronba egyetemi ny. r. tanárnak. A Nehézipari Műszaki Egyetem megalapításával a Tanszék a Kohómérnöki Karral együtt 1952-ben Miskolcra települt át. Azóta tanszékvezető egyetemi tanára a Kohógéptani és Képlékenyalakítástani Tanszéknek.

1934-ben szerzett műszaki doktorátust, 1939-ben egyetemi magántanárrá habilitálták. A Magyar Tudományos Akadémia 1950-ben levelező, 1955-ben rendes tagjává választotta. 1956-tól 1964-ig a Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának osztálytitkára. Főszerkesztője az Acta Technica-nak és az MTA Műszaki Tudományok Osztálya osztályközleményeinek. Számos akadémiai, egyetemi és tudományos bizottság, valamint több nemzetközi tudományos egyesület tagja. 1965-ben a Freibergi Bergakadémie tiszteletbeli doktorává avatta, 1966-ban a Lengyel Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagjává választotta. Irodalmi munkássága rendkívül gazdag és nemzetközileg elismert. Első dolgozata 1928-ban jelent meg. Azóta 15 tudományos szakkönyve, illetve egyetemi tankönyve, számos egyetemi jegyzete és 112 tudományos dolgozata, illetve szakcikke jelent meg magyar, német, orosz, angol, cseh és japán nyelven. Nemzetközi viszonylatban is kimagasló tudományos és oktató munkájáért 1948-ban a Köztársasági Érdemérem arany fokozatával; 1951-ben a Kossuth-díj I. fokozatával; 1955-ben a Kossuth-díj II. fokozatával és 1958-ban a Munka Vörös Zászló Érdemrendjével tüntették ki.

