

Mathematicai Pályamunkák. Kiadja a' magyar tudós társaság. hung.

Egyet. ny.
Buda 1844

Signatur: 19815-B
Barcode: +Z157440908
Zitierlink: <http://data.onb.ac.at/ABO/%2BZ157440908>
Umfang: Bild 1 - 196

Nutzungsbedingungen

Bitte beachten Sie folgende Nutzungsbedingungen: Die Dateien werden Ihnen nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke zur Verfügung gestellt. Nehmen Sie keine automatisierten Abfragen vor. Nennen Sie die Österreichische Nationalbibliothek in Provenienzzangaben. Bei der Weiterverwendung sind Sie selbst für die Einhaltung von Rechten Dritter, z.B. Urheberrechten, verantwortlich.

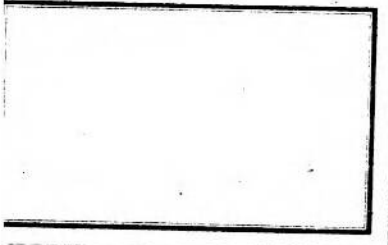
Hinweis: Das Dokument enthält hinterlegte Textdaten, die eine Suche in der Datei ermöglichen. Diese Textdaten wurden mit einem automatisierten OCR-Verfahren ermittelt und weisen Fehler auf.

P.A. 24. F. 17.

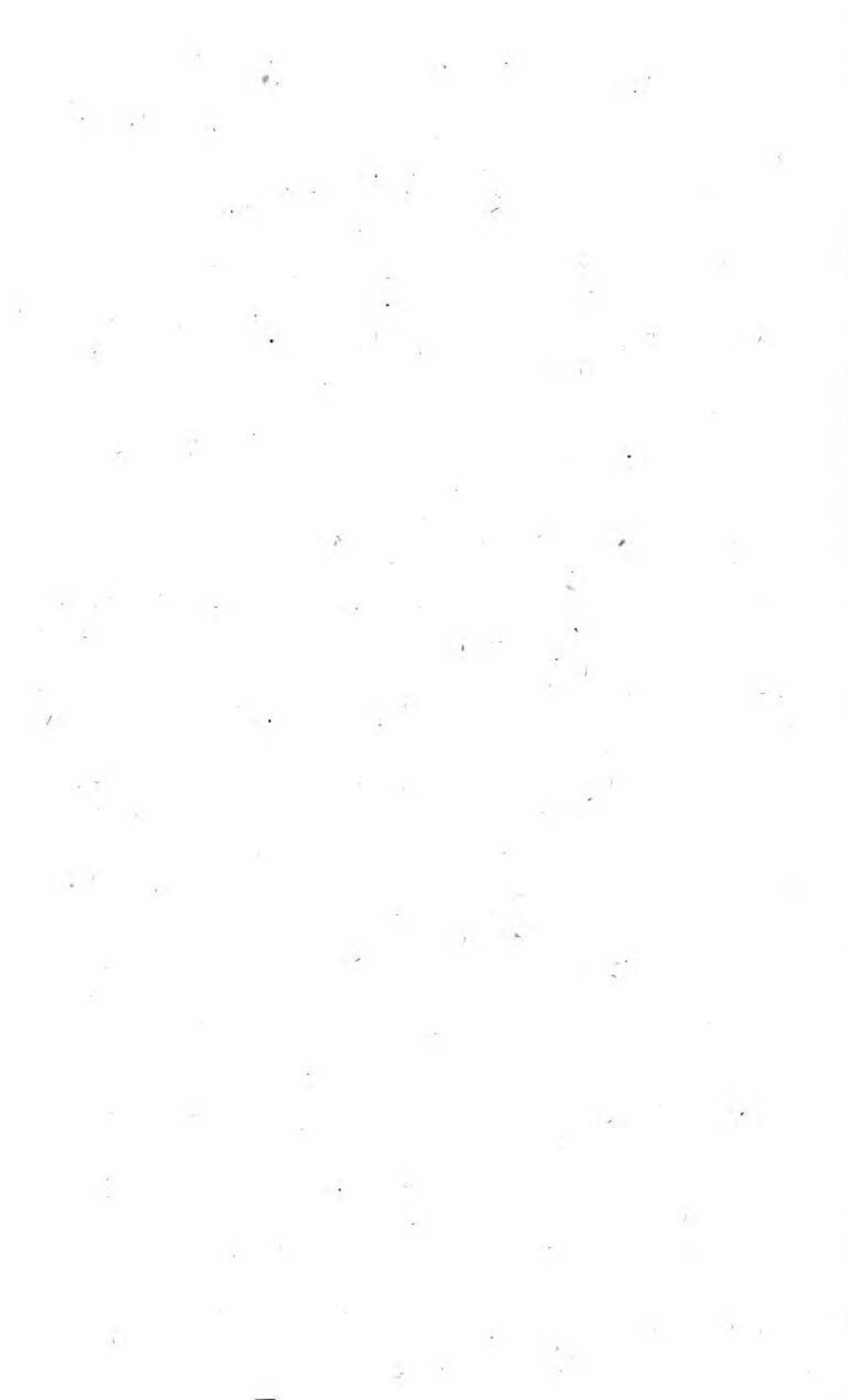
KAIS. KÖN. HOF  BIBLIOTHEK

19.815-B

ALT-



19815-B.



MATHEMATICAL
PÁLYAMUNKÁK.

K I A D J A

A' MAGYAR TUDÓS TÁRSASÁG.

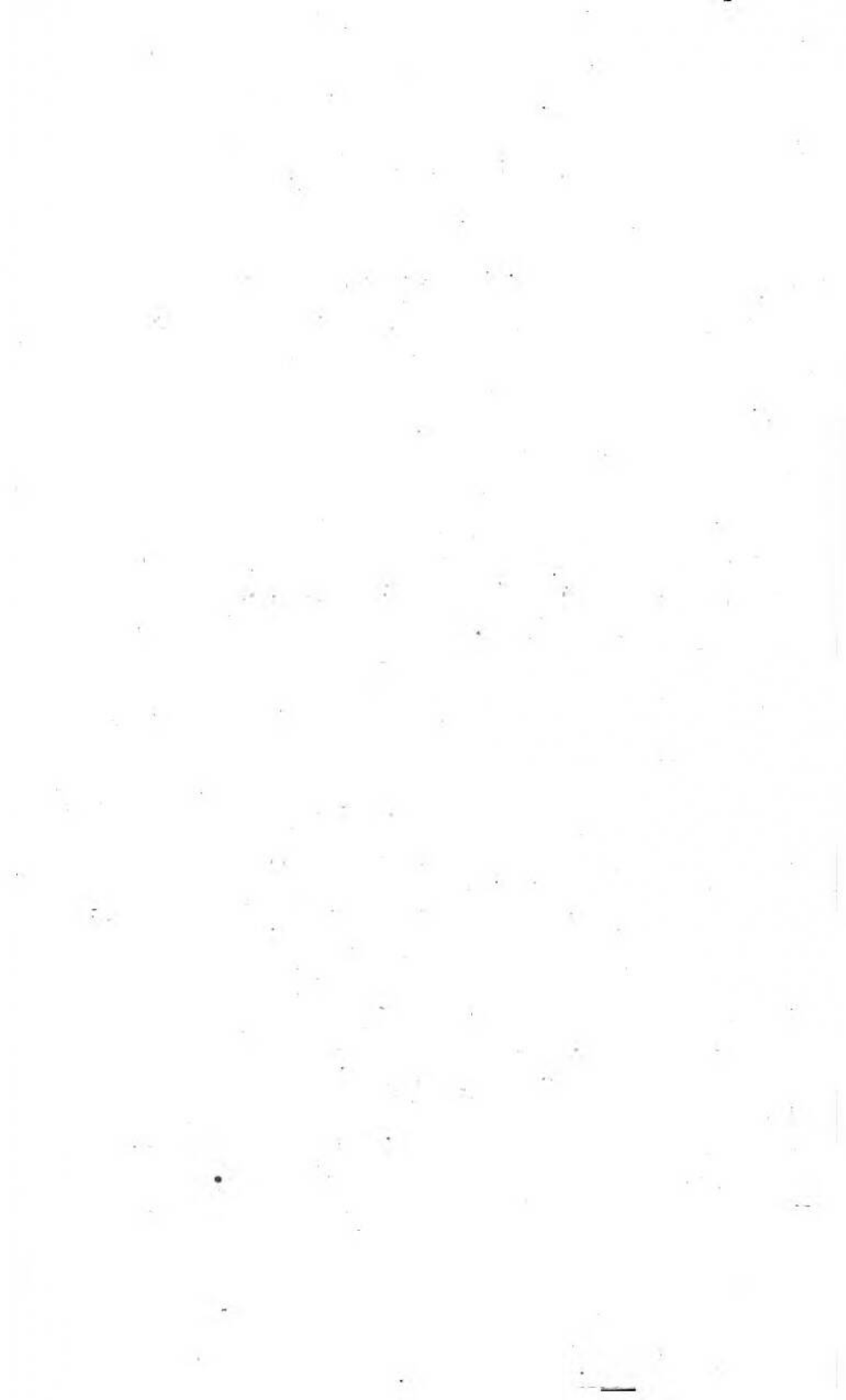
ELSŐ KÖTET.

AZ ELSŐ ÉS MÁSOD RENDŰ 'GÖRBÉK' KÖZRENDESEKRE ÁTVITTE-
LE 'S FŐBB TULAJDONSÁGAIK. TAUBNER KÁROLY ÉS FEST VIL-
MOS' ELSŐ ÉS MÁSOD RANGU PÁLYAMUNKÁIK.

B U D Á N,

A' MAGYAR KIR. EGYETEM' BETŰIVEL.

M. DCCC. XLIV.



E L Ő S Z Ó.

Az academiának 1838-ban tartott IX-d. nagy gyűlése által kihirdetett következő mathematicai jutalomtételére:

„A' görbék' meghatározásában jelenleg a' görbe' minden kori hossza és érintőinek (tangentes) szöge is vétetnek elemekül. Mellyek tehát ezen nézet szerint az első és másod rendü görbék? Vitessenek ezek által öszrendesekre (coordinatae), 's adassanak elő főbb tulajdonságaik.“

1840. martius' 25-keig mint határnapig h á r o m pályamunka érkezett; mellyek közül az e' végre kinevezett három osztálybeli bíráló', u. m. BITNICZ LAJOS, GYÖRY SÁNDOR és VÁLLAS ANTAL rendes tagok' előadása' nyomán a' XI-d. nagy gyűlés, 1840. august.

27. a' II. és III. számok alattiakat találván kiadásra, és pedig amazt a' száz arany jutalomra, ezt ívenként négy arany tiszteletdíjra érdemeseknek; a' bírálók' hivatalos egyértelmű tudósításaiból azon okok' kivonata bocsátatik itt közre, mellyek a' társaságot határozataiban vezették.

Először is BITNICZ LAJOS rt. véleményének vejeje ez: „E' két kézirat egyenest szól ugyan a' kérdéshez, de nem úgy, hogy arra teljesen megfeleljen. Így: előterjesztik, miben áll a' görbék' meghatározásának ezen új módja, kifejtik ezen mód szerint a' másod rendű görbék' fő tulajdonságait és kimutatják általjában, mint lehet az így kifejtett egyenleteket a' merőszögű öszrendesek közti egyenletekre és ezeket viszont amazokra átváltoztatni a' nélkül, hogy ezt, mint a' kérdés kívánta, minden egyes görbére külön kiterjesztenék 's így mások' elődolgozatait bővebben kifejtenék, vagy, mint várni lehet, összehasonlítván a' két rendszert, egyiknek a' másik fölötti elsőségét meghatároznák; sőt arra sem fordítanak figyelmet, hogy a' görbéknek új módon kifejtett egyenleteit sarköszrendesek (polares coordinatae) közti e-

gyenletekre 's viszont változtatták volna, holott ez a kérdésben befoglaltatik.“

„Összehasonlítván azonban a' két kéziratot, mivel ezen jelmondatú: *Égve honért bizton nézz en előre szemünk a' másod rendü görbék' egyetemi egyenletéből helyesen és teljesen kifejtí azon egyenleteket, mellyek különös görbék' törvényét adják elő, azután jóval több példában mutogatja, mint pályatársa, miként lehet a' merőszögü őszrendesek közti egyenleteket az új mód szerint találtakra 's ezeket viszont amazokra átalakítani, továbbá a' kifejtett egyenletekben foglalt görbék' fő tulajdonságit egyenként vizsgálgatja, 's végre tárgyát szabatos rövidséggel 's majdnem általjában tiszta, jó nyelven adja elő, véleményadó ennek tulajdonít ugyan elsőseget 's így ennek itéli a' pályadíjt; azonban a' *Concordia parvae res crescunt, discordia maximae dilabuntur* jelmondatút is figyelemre 's tiszteletdíj mellett nyomtatásra méltónak tartja, minthogy a' kérdés' helyes felfogása mellett első szakaszában mintegy bevezetésül a' merőszögü őszrendesek' rendszerét is kifejtván 's némelly görbék' ezek közti egyenletét vizsgálgatván, olvasójával*

mind a' két rendszert megismerteti, 's így csekély mathematicai literaturánk' egyik hézagát némiképen kipótolja.“

GYÖRY SÁNDOR rt. véleménye így hangzott: „A' II. szám' szerzője egyenesen a' kérdésbe ereszkedvén, elsőben a' két változók közötti általános egyenletet 's annak a' változók' nőttével vagy fogytával eszközölhető átalakítását veszi szemlélet alá, melly után a' fő egyenletet a-tól h-ig nyolcz egymástól független egyenletekre osztályozza; kimutatván különösebben, hogy az utóbbi' első fokozata, mint valamelly görbének előállítója kört, 's mint nem az, egyenes vonalt vagy egyenszöget terjeszt elő.“

„A' III. szám alatti az öszrendeseket illető tanítványokat előre bocsátván, azután a' görbéknek folytonos haladás és irányváltoztatásból eredő származását fejtegetvén, hasonlólag az első fokozatú egyenlet' vizsgálatára tér, 's ezt a' II. szám allattinál részletesben tárgyalja. Ismét a' II. számu ezen túl a' még hátralevő 7 egyenlet' további fejtegetése körül forgolódik, mellyeket egyenként bontogatván, 17 különböző görbéknek egyenleteit állítja elő. A' III. számu viszont

még mindig részletesebben, de a' feltett kérdés' utólsó kívánatához: adassanak elő főbb tulajdonságai k, mintegy kora készülettel azon nézeteket adja elő, mellyek a' görbék körüli vizsgálatokban mint azoknak főbb tulajdonságai, tekintetbe jöhetnek. Melyek után midőn a' fő egyenlet' bontogatásához érkezik, abban 's következőleg a' kérdés' érdemében szembetünőleg hátrább marad. Ugyan is: Alapúl vevén hogy w és l értékei szerint ha az A és C ösztevők vagy azoknak egyike $= 0$; a' fő egyenlet előleges átváltoztatás nélkül nem használható, ennek következtében legelőbb is a' II. számban a, k, c, g , alatt feltett egyenleteket kellett volna vizsgálat alá fognia, melly helyett, midőn a' nevezett II. számú pályairat f , alatti egyenletét választja, nem csak az egyenesen kikövetkeztethető egyenleteket mellőzi, hanem egyszerűs mind felvén $A=B=0$, az előbocsátmányokban nem említett új feltételt hoz szemléletei közé. Egyébiránt ezekből egy görbének egyenletét találván $w=al^2$, abból a' másikat, a' váltó görbe' egyenletét $l = aw^2$ csupa értelmítés (definitio) által hozza ki. Általmegy azután a' II. számú pályairatban g -vel jegyzett egyenlet' vizsgálatára, honnét találja $w =$

$\frac{a}{1}$ nem csak a' II. számú pályairatban előadott, hanem az általa követett úton is egyenesen feltalálható többi egyenletek' mellőzésével berekeszti; melyeket a' II. szám' szerzője biztosabb alapon építve, következetesen, hiány és kivétel nélkül bontogatott.“

„A' kérdés' második része ez vala: Vitéssenek által összrendesekre. E' tekintetben mind a' két értekező csupán az általános szabályt adván elő: miképen lehessen bizonyos w és s közti egyenletet x és y merőleges összrendesei közöttire átalakítani? sem egyik sem másik teljesen nem felelt.“

„A' harmadik részt illetőleg: Adassanak elő főbb tulajdonságaik, a' két pályairat' összehasonlítása úgy áll, mint a' kérdés' első részében már előterjesztettük. T. i. a' II. szám alatti keresztülmegeyen az általa kimutatott minden egyenletek körüli vizsgálatokon, 's itt is, mint az első részben, megelőzi a' III-dikat, kinek ebbeli szemléletei az elősorozásba szöve, természetesen csupán azon néhány görbékre terjednek, mellyeknek egyenleteit felhozá.“

„Ezeknél fogva jutalmazandónak ugyan, a' II. szám alatti pályairatot tartjuk; több tekintetekből azonban a' III. számúnak is érdemei vannak. Sok részletes vizsgálatokat és ismereteket foglal magában, mellyek kivált az elébbihez csatolva, a' görbék' természetének 's tulajdonságainak felvilágosítására szolgálhatnak 's így ezt is kinyomatásra ajánlja.“

Vége VÁLLAS ANTAL rt ez ügyben ekkép nyilatkozott: „Az 1838-ban kitűzött mathematicai kérdésnek három egymástól lényegesen különböző része volt. Az elsőre: „Mellyek az eredeti nézet szerint, melly elemül a' hosszát és az érintői szöveget veszi, az első és másodrendű görbék?“ a' felelet annál könnyebb volt, minthogy e' része a' kérdésnek ki van dolgozva már. A' másodikra, melly követeli, hogy a' talált görbék' egyenletei öszrendesekre vitessenek által, elődolgozataink nem lévén, a' felelet azon okból is nehezebb, minthogy az átvitel hihetőleg csak bonyolódottabb egészítések' útján lehetséges. Ez vala azon mező, mellyen a' pályázó tudományát láthatatta. A' harmadik résznek, melly szerint a' mondott görbéknek főbb tulajdonságai kívántattak, az a' cél-

ja volt, hogy részint a' már kimutatott görbékkel magokkal, részint pedig az új módnak sajátágaival 's netán elsőbbségével ismerkedjünk meg. Mutathattak itt is tudományt és gyakorlottságot a' pályázók; mert véleményadó' nézete szerint a' két módnak egymásali összehasonlítása igen tanulságos és tán eredménydús lehet. Mindenben pedig, mi egyébiránt magában érthető, megkívántatott, hogy az előadás rendszeres, a' nyelv grammaticailag tiszta és szabatos legyen.“

E' szempontok' kimutatása után, az I. számúnak, mint^a melly a' kérdést e' bíráló szerint is félre értvén, nem is versenyezhetett, mellőztével így vélekedik a' más két munkáról: „Helyesen fogta fel a' kérdés' első és némileg harmadik részét a' II. számú felelet' írója. Ez rendszeresen és gyakorlottságot mutató rövidséggel fejtegeti a' másod rendű görbék' általános egyenletét, és hozzá kapcsolja, mint különös esetet, az első rendűét is. Kimutatja azután a' módot, melly szerint a' talált és elősorozott egyenleteket öszrendesekre vihetni át — a' nélkül azonban, hogy e' módot, mint kívántatott, az egyes görbékre alkalmazná. Ez által azon része a' munkának, mellyben eredeti lehetett, hiányzik. Hasonlólag csak a' hosszak és szögek'

nézete szerint adja elő a' talált görbék' tulajdonságait, mi által az eredetiség' dicsőségétől a' kérdésnek e' harmadik részében is elesik. Különbén a' nyelv, némelly kivételekkel, eléggé szabatos. E' munkát véleményadó minden esetre kiadandónak tartja.“

„A' III. számú felelet legelül is az analyticai mértan' némelly tételeit foglalja magában, mit hibául, ámbár a' dologhoz szorosán nem tartozik, véleményadó felróni a' pályázónak nem akar. Ezután átmenyen az új nézet' vizsgálására, melly részében a' munkának a' görbéknek némelly tulajdonságai magyaráztatnak. Ez sem tartozik tulajdonképen a' kérdéshez; annyiban azonban elfogadható, mennyiben az új nézet' taglalása, véleményadó' tudtával, nálunk Magyarhonban maig sem hozatott szőnyegre 's így a' szempontnak helyes felfogásához elkészítheti az olvasót. Következnek az első és másod rendű görbék, az új nézet szerint előadott tulajdonságaikkal együtt, és végül azon módnak kimutatása, melly szerint azokat öszrendesekre vihetni át. Hiányzik itt is a' kérdésnek második része, és a' harmadik részből a' két módnak összehasonlítása, azaz mind az, mi-ben a' pályázó eredeti lehete. Az előadás nem olly

rendszeres, de a nyelv sem olly szabatos, mint a II. számé.“

„E pályairományok közül egyik sem felelvén meg a jutalomkérdés eredeti 's így érdekesebb részeire — általános becs szerint itélve, a jutalomra egyik sem tarthatna számot. Viszonyos becsüket tartva szem előtt, véleményadó a fenebb említett okoknál fogva, a II. számút a kitett jutalomra; a III. számút pedig, minthogy fogatkozásai mellett is sok jót foglal magában és kitérései által az olvasót, a magyart t. i., a kitűzött szempontra elkészítheti, tiszteletdíj melletti kiadásra érdemesíti.“

Itt veszi már most a közönség a koszorúzott, valamint a második rangnak ismert pályamunkát is; mellyek a társaság által kiadott kéziratok' LXXXVIII. kötetét teszik.

Költ Pesten, a magyar tudós társaság' kis gyűléséből, július' 29. 1844.

D. Schedel Ferencz,
titoknok.

AZ ELSŐ
ÉS
MÁSOD RENDÜ GÖRBÉK'
ÖSZRENDESEKRE ÁTVITELE

S FŐBB TULAJDONSÁGAIK.

I R T A

D. TAUBNER KÁROLY,

M. AGAD. LT.

ELSŐ RANGU PÁLYAMUNKA.

B U D Á N,

A' MAGYAR KIR. EGYETEM' BETŰIVEL.

M. DCCC. XLIV.

Égve honért bizton nézzen előre szemünk.

Kisfaludy Károly.

AZ
ELSŐ ÉS MÁSOD RENDÜ GÖRBÉK?
ÖSZRENDESEKRE ÁTVITELE
'S FŐBB
TULAJDONSÁGAIK.

I.

Az első és másod rendü görbék' öszrendesekre átvitele.

1. §.

A' két önváltozó közt létező, minden tökéletes betüvetési (*algebrai*), második fokú egyenletnek legátalánosb alakja ez:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (1)$$

Illynemű egyenlet hat állandó mennyiséget, ugymint: A, B, C-t 'stb. foglal magában, mellyek mindazáltal csak öt függetlennek szemlélendők, mivel helyettök az egyenletbe új állandó mennyiségek gyanánt bizonyos állandónak öt hányasa hozható. Ha tehát ω és s alatt némi két, egymástól függő mennyiséget, vagy inkább illy mennyiségek' mértékeit értjük: akkor (1) egyenlet legátalánosblag olly arányokat terjesztend

azok közt elő, mellyek a' két fokú egyenlet által jeleltethetnek ki. Legyen tehát s valamely görbe' ívének bizonyos kezdetponttól számított hossza, 's ω azon szög' nyílása, mellyet a' görbe' iránya érintőjének iránya által kifejezve, valamely pont felé bizonyos kezdetiránynyal alakít: akkor a' fensorozott egyenlet a' görbék' némi meghatározott számá-ra nézve azon arányokat fejezendi ki, mellyek az ív' hossza 's érintőjének minden pontoknál iránya közt léteznek. Ha a' görbék' felosztásánál felosztásalapúl egyenletök' fokát vesszük fel, akkor minden előállítható görbék'et, mellyek (1) egyenletben foglaltatnak, második rendű görbék'nek nevezendünk.

2. §.

Illynemű második rendű görbék' száma a' fenhozott második fokú egyenletnek különös egymástóli független alakíthatóságától függ. Független alakok (*forma*) pedig azok, mellyek egymásra vihetetlenek. Azon görbék' száma feletti vizsgálat, mellyek (1) egyenletben foglaltatnak, vezet bennünket arra, hogy az egymástól lényegesen különböző alakok' száma, mellyeket ugyanaz (1) egyenlet előállíthat, meghatározassék. Méltólag forog tehát kérdésben legelőször is azon módnak meghatározata, mellynek eszközül vételével a' kérdéses átalakítás. (*transformatio*) kivitethetik. Szembeszökő azonban, hogy ezen módok csak akkor következményesek, ha a' fensorozott (1) egyenlet' alakításainak bizonyos önkéntes 's következőleg változtatásra alkalmas momentumok szolgálnak alapúl. Figyelembe véve tehát (1) egyenletet, könnyen átlátjuk, hogy ab-

ban kétőnél több momentum alig foglaltatik, az első t. i. az ív' hosszának szánt kezdetspont, második pedig, az érintők' irányát tekintve, a' kezdetirány. Az (1) egyenlet' alakja tehát más lesz, először a' kezdetspont', másodsor a' kezdetirány', 's végtére a' legáltalánosb mód szerint a' kezdetspont' és kezdetirány' egyszerű megváltoztatása után.

3. §.

Vegyük tehát az idézetek szerint tárgyalatásunk alá a' legáltalánosb esetet 's annak következtében tegyünk egyenletünkbe

$$\omega = \omega \pm \omega'$$

$$s = s \pm s',$$

vagy az alsó jegyet nem tekintve

$$\omega = \omega + \omega'$$

$$s = s + s', (2)$$

e' mellett meghatározatlanul hagyván, vajjon az ω' és s' állítólag vagy tagadólag veendő-e. Ezen egyenletek nem egyebet jeleznek ki, mint hogy a' kezdetirány' és kezdetspont' helye, melly miatt (1) egyenlet létezik, sajátlag az állító vagy tagadó ω' és s' mennyiségekkel megváltoztattak. Az (1) egyenlet ω és s helyett ez új értékeket téve, következőre megy át:

$$A\omega^3 + 2B\omega s + C s^3 + 2(A\omega' + B s' + D)\omega + 2(B\omega' + C s' + E)s + A\omega'^2 + 2B\omega' s' + C s'^2 + 2D\omega' + 2E s' + F = 0 \quad (3)$$

tehát az eredetivel ugyanazon fokú egyenletbe; mi egyszerűsrimind a' (2) egyenlet' megengedhetőségének elemzési (*analytical*) bebizonyítása.

4. §.

Az (1) egyenletnek minden lehetséges alakjai az ω és s eddig önkéntes mennyiségeknek valódi meghatározata által már (3) egyenletből származtathatók. Csak megjegyezzük, hogy ezen mennyiségeknek egyedül azon tagok' összhatóira (*coefficientes*), melyek az ω és s változókra nézve első fokúak, valamint az ω és s -től szabad tagra van befolyásuk. Következésképpen (1) egyenletből csak ezen tagok irthatandók ki. A' (3) és (1) egyenletben ω^2 , ωs és s^2 -nek összhatói ugyanazok, 's innen következtetjük, hogy az (1) egyenlet' azon alakjaiból, mellyekben e' tagoknak néhány előfordul, ezek sem a' kezdetpont' áthelyeztetése, sem a' kezdetirány' változtatása által ki nem irtathatnak. Így tehát, minekutána e' második fokú három tagnak néhány (1) egyenletben nem foglaltatik, különféle görbék az egyenlet által határozatnak meg.

5. §.

Miután tehát mind a' három összbató A, B, C véges értékű, vagy, majd egy, majd másik, 's végtére mind a' három $= 0$, (1) egyenletünk következő, egymástól eredetileg különböző alakokra megy át:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (a)$$

$$A\omega^2 + 2B\omega s + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (b)$$

$$2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (c)$$

$$A\omega^2 + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (d)$$

$$A\omega^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (e)$$

$$Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (f)$$

$$2B\omega s + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (g)$$

$$2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (h)$$

Az (1) egyenlet' felbontása, (a) — (h)-ig terjedő egyenletek' vizsgálatára vezet. Az első hét egyenlet második fokú. Csupán az utolsó vonali, 's miként közvetlen kiténik, kört terjeszt előnkbe. Ez utolsó tehát sajátlag a' másod rendű görbék' sorába nem is tartoznék, azokhoz mindazáltal annyiban csatolható, miként egyenlete különös állandók' felvétele által az általános egyenletből ered. És így a' fenforgó 8 egyenletet kell közelebbről vizsgálnunk, hogy lássuk, vajjon mindegyikben hány görbe foglaltathatik.

6. §.

A' (h) alatti egyenlet ez:

$$2D\omega + 2Es + F = 0$$

Legyen $\omega = 0$, lesz $s = -\frac{F}{2E}$ és ha $s = 0$, lesz $\omega =$

$-\frac{F}{2D}$ Tegyük s helyett az egyenletbe ezen értéket:

$s' = -\frac{F}{2E}$: akkor az következőre olvad:

$$D\omega + Es = 0 \quad (1)$$

Mint hogy ezen átalakítás, míg a' D, E, F összhatók valódiak, mindig és pedig csak ugyanazon egy módon eszközölhető ki, minden (h) egyenletei tehát csupán egyetlenegy görbét mutatnak elő, 's az a' kör.

Tegyük (g) egyenletbe ω és s helyett: $\omega + \omega'$ és $s + s'$ -t (hol most természetileg ω és s más változókat jelentenek), 's ezen alakra menend át:

$$2B\omega s + 2(D + Bs')\omega + 2(E + B\omega')s + 2B\omega's' + 2D\omega' + 2Es' + F = 0.$$

's ha

$$s' = -\frac{D}{B}; \quad \omega' = -\frac{E}{B}$$

lesz (g) egyenletből

$$2B\omega s + \frac{BF - 2ED}{B} = 0$$

Mint hogy ezen átalakítás B, D és E értékek miatt mindig megengedhető, 's csupán egyetlenegy egyenletet terjeszt előnkbe: méltólag következtetjük, hogy a' (g) egyenletben a' görbék' csupán egy neme foglalatik. A' B, D, E és F különös értékei csupán azok' mineműségét és helyzetét határozzák meg. Az egyenlet legegyszerűbben következőleg állítható elő:

$$\omega s = a \quad (\text{II})$$

Az (f) egyenletbe ω és s helyett ugyanazt téve, lesz:

$$Cs^2 + 2D\omega + 2(Cs^2 + E)s + Cs'^2 + 2D\omega' + 2Es' + F = 0$$

A' legegyszerűbb alakban csupán azon görbék' egyenletét nyerhetjük meg, melly az eddig ω' és s' önkéntes értékei által úgy határoztható meg, hogy az új egyenletben okvetlenül csak az s második és ω első hatványa forduljon elő. Ez oknál fogva szabad lesz

$$Cs' + E = 0 \quad \text{és} \quad Cs' + 2D\omega' + 2Es' + F = 0$$

tenni. Innen

$$s' = -\frac{E}{C}, \quad \text{és} \quad \omega' = \frac{E^2 - FC}{DC}$$

7. §.

Mivel ezen értékek, valódi összhatók gyanánt (f) egyenletbe mindig tétethetnek, tehát ezen egyenletnek következő alak adható:

$$s^2 = a\omega \quad (\text{III}),$$

miből könnyen láthatjuk, hogy az (f) alatti egyenlet a görbék' egy új nemét terjeszti előnkbe. Minthogy pedig az (e) egyenlet változók' felcserélése után (f) alatti egyenletre megy át: világos, hogy a' többször ismételt átalakítási móddal (e) egyenlet következő egyszerű alakra vihető:

$$\omega^2 = as \quad (\text{IV})$$

következőleg (e) egyenlet csupán egy görbét foglal magában.

A' (d) alatti egyenlet ω és s helyébe: $\omega = \frac{D}{A}$ és

$s = \frac{S}{A}$ -t téve, ezen alakra vihető:

$$A\omega^2 + Cs^2 + F' = 0$$

's mivel tiszta állandói vagy tagadói tagokból álló összeg $= 0$ nem lehet, a' három összható' jegyei tehát változtathatók. Ez összhatók' jegyei és állandó tagnak különbsége után (d) alatti egyenlet következő három alakra megy át:

$$a\omega^2 + bs^2 - c = 0 \quad (\text{V})$$

$$a\omega - bs^2 - c = 0 \quad (\text{VI})$$

$$a\omega - bs^2 + c = 0 \quad (\text{VII})$$

mellyek három különös görbét mutatnak elő, mit is a'

felettki szorgosabb vizsgálat az alantiakban be fog bizonyítani.

A' (c) egyenletből ugyanazon munkálatok szerint következő egyszerűbb egyenlet hozható ki:

$$2B\omega s + Cs^2 + F = 0.$$

Szembetűnő azonban a' B jegyének változtathatása, mi szerint, ha ezen egyenletnek

$$2B\omega s + Cs^2 + F^2 = 0$$

bizonyos két érték, ω és s által elégség eszközölthetik ki, úgy az

$$-2B\omega s + Cs^2 + F^2 = 0$$

egyenletnek is következő értékek: $-\omega$ és s' vagy $+\omega$ és $-s'$ elégséget tehetnek.

Mind a' két görbe azonos (*identica*) 's csupán helyzetöknél fogva különböznek egymástól. Mi pedig C és F'-nek jegyét illeti, azokra nézve két különböző eset jöhet elő, mi szerint azok vagy egyenlő, vagy pedig különféle jegyekkel birhatnak. Hogy ezáltal két különböző görbe (c) egyenlet' közbenjárultával feltételezzetik, azonnal világos, ha az egyszerűsített egyenletet egyik változója, például s szerint feloldjuk, 's lesz:

$$s = -\frac{B\omega}{C} \pm \frac{1}{C} \sqrt{B^2\omega^2 - F'C}.$$

Az ív' vagy görbe' valódisága a' négyzögi gyökér' jegyének valódiságától, vagy $B^2\omega^2 - F'C$ -nek állító értékétől függ. Itt azonban 1) F és C egyenlő, vagy 2) különféle jeggyel birhatnak, 's e' szerint az első esetben ω egy minimumhoz lesz kapcsolva, a' másodikban

pedig σ -tól kezdve bármilly értéket vehet fel. 'S innen két különböző görbe ered, mellyek' egyenletei:

$$as^2 + 2b\omega s + c = 0 \quad (\text{VIII})$$

$$as^2 + 2b\omega s - c = 0 \quad (\text{IX})$$

Ugyanez áll a' (b) alatti egyenletre nézve is, 's így ennek tárgyalatásával elmaradhatunk. A' (b) egyenletnek is tehát két különböző görbéje van, 's egyenleteik ezek:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + c = 0 \quad (\text{X})$$

$$a\omega^2 + 2b\omega s - c = 0 \quad (\text{XI})$$

Az (a) alatti egyenletbe végtére ω és s helyett ezen értékeket

$$\omega + \frac{BE - CD}{AC - B^2}; \quad s + \frac{DB - AE}{AC - B^2}$$

téve, lesz legegyszerűbb alakja:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + F' = 0$$

's innen ω -át keresve, lesz:

$$\omega = - \frac{Bs}{A} \pm \frac{1}{A} \sqrt{s^2(B^2 - AC) - AF'}$$

A' gyökérjegy alatti kifejezésnek valódisága a' $B^2 - AC$, és AF' mennyiségek' mineműségétől függ. Legyen

$$B^2 - AC < 0$$

akkor C jegyének A jegyével egyfélének kell lenni, mert ellenkező esetben az következnek, hogy a' két állító tagnak összege kisebb 0 -nál, 's így tehát tagadó. Ha pedig A és F' -nek 's így tehát F' és C -nek egyféle jegyök van, bármilly érték tétetik is s helyett, ω mindig képzeleti marad; akkor tehát fen kitett egyenle-

tünkben valódi görbék hiányzanak. Ellenben ha A és F' ellenkező jegyekkel bírnak, akkor görbének létezhete, valamint ω és s meghatározott véges határok közti helyezete okvetlenül világos.

8. §.

Legyen továbbá

$$B^2 - AC > 0$$

Ezen felvételnek megfelelőnk, ha A és C ellenkező jegyekkel bírnak. Ha továbbá A és F' jegyei ellenkezők, szembetűnő, hogy az s minden lehetséges értékeinek az ω valódi értékei felelnek meg's ω és s együtt végtelen lesz. Ha pedig A és F' jegyei egyenlők, észrevehető, hogy s -nek két legkisebb értéke leend, mellyeket át-hágni lehetetlen a' nélkül, hogy ω képzeleti ne legyen. Végtére, ha a' $B^2 - AC > 0$ feltételnél A és C jegye egyféle, valamint A és F' jegyei vagy egyenlők vagy ellenkezők: újra két különböző görbe vonal' egyenletei jövendenek szinre. Következőleg (a) egyenletünk imez 5 egyenletre megy át:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 - \vartheta = 0 \quad (\text{XII})$$

$b^2 - ac < 0$ feltételnek megfelelőleg;

$$a\omega^2 + 2b\omega s - cs^2 - \vartheta = 0 \quad (\text{XIII})$$

$$a\omega^2 + 2b\omega s - cs^2 + \vartheta = 0 \quad (\text{XIV})$$

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 + \vartheta = 0 \quad (\text{XV})$$

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 - \vartheta = 0 \quad (\text{XVI})$$

E' négy utolsó egyenlet feltételezi, hogy a' második felezett összhatónak négyszöge, levonva belőle az első és harmadik összhatónak szorzatát (*factum*), nagyobb semminél.

Nincs egyéb hátra, mint azon esetnek vizsgálata, melly szerint az (a) egyenletben azon tagok, mellyekben s és ω első hatványúak, ki nem irtathatnak. Ez megtörténik, ha azon három összható közt létezhető egyenlet

$$B^2 - AC = 0$$

kieszköztetik. Ennek következtében egy az említett összhatók közül az állandó taggal együtt kiirtathatik. Tegyük tehát e' cél' elérése miatt:

$$A\omega^2 + 2B\omega's' + Cs'^2 + 2D\omega' + 2E's' + F = 0$$

és $A\omega' + Bs' + D = 0$

lesz:

$$s' = \frac{D - AF}{2(AE - BD)} \quad \text{és} \quad \omega' = \frac{B(D^2 + AF) - 2ADE}{2(AE - BD)}$$

's az (a) alatti egyenlet következőre megy át:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + \frac{2(AE - BD) s}{A} = 0$$

tehát illy alakú egyenletre:

$$(a\omega + bs)^2 + 2\delta s = 0 \quad (\text{XVII})$$

Ha az eredeti egyenletből, s -nek első hatványát és az állandó' tagját elmozdítjuk, akkor illy alakú egyenletre

$$(a\omega + bs)^2 + 2e\omega = 0$$

jutottunk volna. Kérdés, vajjon e' két egyenlet különböző görbéket képez-e vagy sem? Mivel azonban ez utolsó egyenlet mindenkor a' kezdetpont és a' kezdetirány' megváltoztatásának közbenjárultával a' (XVII) egyenlethez hasonló egyenleti alakra hozatható, tehát a' második esetnek okvetlenül helyet engedünk.

Végére azon eset, mellyben az (a) alatti egyenlet végezetül elővett átalakításai meg nem állhatnak, fontoltassék meg. Mi is történend, ha s' és ω' -nak számlálója $= 0$, következőleg ha $AE = BD$. Akkor mindazáltal ezen egyenlet:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0$$

következő szorzatra alakítható át:

$$(A\omega + Bs + D + \sqrt{D^2 - AE})(A\omega + Bs + D - \sqrt{D^2 - AE}) = 0$$

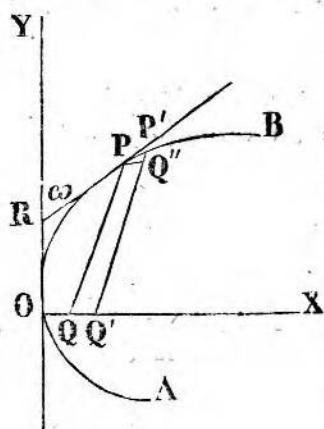
melly (1) egyenlet' alakjához hasonló két egyenlet' rendszerét képezi, következőleg új görbének nincs helye.

Igy tehát második fokú egyenletünkben 17 különböző görbét leltünk fel.

9. §.

Most azon képletek' (*formula*) kifejtéséhez megyünk át, mellyeknek eszközül vételével egy, az x és y egyenszögi öszrendesek közt álló görbének egyenlete, bizonyos, ω és s közt álló egyenletre, és megfordítva, alakítható át.

Legyen AB bizonyos görbének íve, O kezdetpontja, OY kezdetiránya. Ezek után OY -ra OX -et függőleg (*perpendiculariter*) húzva, lesznek OY és OX AB görbének egyenszöges öszrendesei. Levén ezen görbének bizonyos P pontja, és PR érintője: lesz



$\angle PRY = \omega$. A' görbe' P pontját az ív $ds = PP'$ különbékig túlhaladva, a' különbéki hánylás' elvei szerint PP' ív, mint-hogy végtelen kicsiny, P pontnak érintőjével összeolvadott-nak tekinthető. Húzzuk továbbá PQ -t és $P'Q'$ -t Ox -re, valamint PQ' -t $P'Q'$ -ra szabdaszerűleg (*normal*), lesz $PQ' = QQ' = dx$ és $P'Q' = dy$; $\triangle PP'Q'$,

Q' -nál egyenszöges 's $P'PQ''$ szög $= 90^\circ - \omega$, következőleg:

$$dx = ds \cdot \cos(90^\circ - \omega) = ds \sin \omega.$$

$$dy = ds \cdot \sin(90^\circ - \omega) = ds \cos \omega.$$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \omega.$$

10 §.

A) Ha tehát bizonyos görbének egyenszöges öszrendesei közt létező egyenlete adva vagyon, kerestésék abból külzeléki hányas: $\frac{dx}{dy}$'s ezen adott egyenlet'

közbenjárultával x , y által, vagy megfordítva, fejeztésék ki. Ezen mód szerint nyert kifejezést $= \operatorname{tg} \omega$ téve, 's újra külzelékét keresve, megkapjuk dy vagy dx -t, $d\omega$ vagy ω -al kifejezettet. Továbbá ezen ω függvényét a' fen kitett dx és dy értékek' helyébe téve, szinre jövend az s és ω közötti görbének különzéki egyenlete, mellyből egészítés által az s és ω közötti egyenlet megkapható. Ezen munkálatot azonban egynehány példa világosabbá teendi.

A' körnek egyenszöges öszrendesei közt létező egyenlete, annak egy pontját, mint kezdetpontot illetőleg, ismeretes:

$$y^2 = 2rx - x^2$$

különzéki szabályok szerint lesz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x} = \pm \frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r-x} = \operatorname{tg} \omega$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \omega^2 = \frac{2rx-x^2}{(r-x)^2} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \omega} = \operatorname{Cos} \omega^2 = \frac{(r-x)^2}{r}$$

's innen:

$$\cos \omega = \pm \frac{r-x}{r};$$

ennek külzelékét újra keresve, lesz:

$$r \sin \omega ds = \pm dx,$$

dx helyébe a' fentebbi kitételt téve, lesz:

$$r \sin \omega d\omega = \pm \sin \omega ds; r d\omega = \pm ds;$$

ezt egészítve, lesz:

$$r\omega = \pm s.$$

Az apoloniai gömbszelvény' egyenszöges öszrendeseire nézve ez:

$$x^2 - 2ax \pm \frac{2a^2}{p} \cdot y^2 = 0$$

a a görbe' fél tengelyét, p pedig nyújtóját (*parameter*) jelentve. Ezen egyenletből ered:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(\pm p)(a-x)} = \pm \frac{\sqrt{2a(\pm p)(2ax-x^2)}}{(\pm p)(a-x)};$$

tehát:

$$\operatorname{tg}^2 \omega = \frac{2a(2ax-x^2)}{(\pm p)(a-x)^2};$$

ennek különzéke után lesz:

$$\frac{\operatorname{tg} \omega d\omega}{\cos^2 \omega} = \frac{2a^2}{(\pm p)(a-x)^2} \cdot dx = \frac{2a^2 \sin \omega ds}{(\pm p)(a-x)^2}.$$

De

$$\frac{a^2}{(a-x)^2} = \frac{(\pm p)(\operatorname{tg}^2 \omega + 2a)^{\frac{1}{2}}}{(2a)^{\frac{1}{2}}};$$

tehát

$$ds = \frac{p(2a)^{\frac{1}{2}} d\omega}{2\cos\omega^3 ((\pm p)\operatorname{tg}\omega + 2a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{p(a)^{\frac{1}{2}} d\omega}{\sqrt{2(2a \pm p \mp)(2a \mp p)\cos\omega}^{\frac{1}{2}}}$$

's ez a keresett apoloniai gömbszelvénynek különzéki egyenlete s és ω közt. Egészítése, miként tudva van, a csúcsköri függvényekre vezet, 's csupán ha $a = \infty$, azaz, ha hajtalék (*parabola*) véges alakban előállítható. Lesz t. i. ez esetben

$$ds = \int \frac{pd\omega}{2\cos^3\omega} = \frac{p\sin\omega}{4\cos^2\omega} + \frac{p}{2} \operatorname{lognat} \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\omega}{2}\right).$$

A' közönséges körzet' egyenlete, egyenszöges öszrendesei közt, miként tudva van, ez:

$$x + \sqrt{2cy - y^2} = \text{c arc} \left(\sin = \frac{\sqrt{2cy - y^2}}{c} \right)$$

hol c a' természetű körnek körjegyzőjét jelenti. Innen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2cy - y^2}} = \text{tg} \omega$$

és ebből foly:

$$\text{Cos}^2 \omega = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \omega} = \frac{2c - y}{2c};$$

különbéztetés után pedig lesz:

$$4 \text{Cos} \omega \sin \omega ds = dy = ds \text{Cos} \omega \text{ tehát}$$

$$4c \sin \omega d\omega = ds$$

's ezt egészítve lesz:

$$s = \text{Const} - 4c \text{Cos} \omega.$$

Az állandó azon feltételnél fogva határozandó meg, melly szerint ω és s egyszerre elenyésznek. Minek következtében lesz:

$$\text{Const} = 4c.$$

's ezek szerint a' közönséges körzet' egyenlete lesz:

$$s = 4c(1 - \text{Cos} \omega) = 8c \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

11. §.

B) Ha megfordítva akarunk bizonyos ω és s közti egyenletet egymásra x és y egyenszöges öszrendesei közöttire átalakítani: akkor előbb ω és s közti egyenlet küzeltezzék, 's így a' $ds \sin \omega$ vagy pedig $ds \text{Cos} \omega$ értékek számoltassanak fel, 's ezeknek megtétele után $= dy$ vagy $= dx$ tétessenek. A' fenforgó külöznéki egyen-

t' egészítése után majdan y és ω vagy x és ω közti egyenletre jutandunk, mellyből a' $\operatorname{tg}\omega$ értékét leljük fel, 's azt $= \frac{dx}{dy}$ téve, a' megnyert különzéki egyenletet újonnan egészítjük. Azonban önkényünktől függ $\operatorname{tg}\omega$ helyett más ω függvényét is felvehetni, például:

$$\sin \omega = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \text{ vagy } \operatorname{Cos}\omega = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Továbbá azt is megtehetnők, hogy mind az x és y , mind pedig y és ω közti egyenletet föllevélve, azokból ω kiirtathassék.

Például szolgálhatnak következők:

1) Legyen ω és s közötti feladott egyenlet:

$$s = 4c(1 - \operatorname{Cos}\omega)$$

egy egyenszöges öszrendesek közötti egyenletre átalakítandó. A' fenforgó egyenlet' különzéke után, lesz:

$$ds = 4c \sin \omega d\omega, 's \text{ innen}$$

$$\operatorname{Cos}\omega ds = 4c \sin \omega \operatorname{Cos}\omega d\omega$$

tehát:

$$dy = 4c \sin \omega \operatorname{Cos}\omega d\omega 's \text{ így}$$

$$y = 2c \sin^2 \omega = 2c \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega} = 2c \cdot \frac{dx}{dx^2 + dy^2}$$

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2cy - y^2}}, 's \text{ innen}$$

$$x + \sqrt{2cy - y^2} = c \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{\sqrt{2cy - y^2}}{c} \right)$$

2) Legyen továbbá a' feladott egyenlet

$$\operatorname{Cotg} \omega = -\frac{s}{h},$$

megnyerhető ebből

$$\frac{d\omega}{\sin^2 \omega} = -\frac{ds}{h} \text{ 's innen}$$

$$\frac{d\omega}{\sin \omega} = -\frac{\sin \omega ds}{h} = -dx;$$

egészítés után magától keletkezik:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega = -\frac{x}{h}, \text{ innen}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega = e^{-\frac{x}{h}}; \operatorname{tg} \omega = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \omega}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2e^{-\frac{x}{h}}}{1 - e^{-\frac{2x}{h}}} = \frac{dx}{dy}, \text{ tehát}$$

$$dy = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{x}{h}} - e^{\frac{-x}{h}} \right] dx, \text{ és ebből a' keresett}$$

függvény lesz:

$$y = \frac{h}{2} \left[e^{-\frac{x}{h}} - e^{\frac{-x}{h}} \right]$$

's ez a' lánctvonal' egyenszögi elég ismeretes egyenlete

3) Legyen

$$s \log a = \sec \omega + \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega$$

következőleg

$$ds \log a = \frac{d\omega}{\sin \omega \operatorname{Cos}^2 \omega}, \quad ds \sin \omega \log a = \frac{d\omega}{\operatorname{Cos}^2 \omega}$$

azaz :

$$dx \log a = d. \operatorname{tg} \omega; \text{következõleg}$$

$$x \log a = \operatorname{tg} \omega = \frac{dx}{dy} \text{ vagy}$$

$$dy \log a = \frac{dx}{x}; y \log a = \log x.$$

$$x = e^{y \log a} = (e^{\log a})^y = a^y$$

A' feladott egyenlet tehát szeriszámos (*logarithmicai*) vonalnak előállítója.

II.

Az első és másod rendű görbék' főbb tulajdonságainak vizsgálata.

12. §.

Már fenn említők, hogy az ω és s közötti első fokú egyenlet a' körnek előállítója. Ezen vitatás' helyességéről meggyőződünk, ha azt vesszük figyelembe, hogy az említett egyenletben az s minden növekedésének egyenes viszonyban az ω növekedése felel meg, mi is a' körnek bélyeges tulajdona. Kérdés támadhat azonban, mit értünk első fokú egyenlet alatt, ha abban az ω -vagy s -el összekapcsolt tag hiányzanék. A' válasz, hogy az első esetben az egyenes vonal, a' másodikban pedig a' meghatározott mennyiségű egyenszög egyenlet által jelettetett ki. Jelenleg ezen görbe'

$$\omega s = a \quad (\text{II})$$

$$(1) \omega = \frac{a}{s}, \quad (2) s = \frac{a}{\omega}$$

vizsgálatára megyünk át.

I.) A' görbe' haladása általában. Mivel az s minden értékének csupán az ω egy értéke felel meg's megfordítva, a' vonal egyszerű leend. Az s minden valós (*realis*), állító vagy tagadó értékéhez az ω lehetséges vagy előállítható értéke kivántatik; azért a' görbének két ágazatja van, azaz, állító és tagadó. Mivel pedig s egyenlő és ellenkező értékei ω egyenlő és ellenkező értékeit szülik, következik, hogy a' két görbe' ágazata azonos (*identica*). Ha $s = 0$, $\omega = \infty$ lesz. A' vonal tehát végtelen számú gombolyításaival a' kezdetpontot hasztalanul törekszik elérni. Ha $\omega = 0$, $s = \infty$ lesz. E' szerint a' végtelen haladásnál fogva a' görbe végtelenül a' kezdetirányhoz közelg.

II.) Nevezetes pontok. Mivel a' kezdetpontnál a' görbe' iránya és egyszersmind haladása is változik: világos, hogy azon esetben a' pont nem nevezetes, valamint akkor sem, ha a' forgás és haladás a' görbe' egyik pontjánál sem változik.

III.) Görbesztési erő és a' görbesztési viszony. A' görbesztési erő' kifejezése a' különzéki hányas: $\frac{d\omega}{ds}$, 's ezt R-nek nevezve, lesz görbénkre

nézve:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{a}{s^2} = -\frac{\omega^2}{a},$$

ha $s = \infty$, lesz $R = 0$'s megfordítva.

Ha $s = 0$, $R = \infty$ má válik, azaz: a' görbesztési erő' maximuma a' haladás' végtelenében van, valamint minimuma a' kezdetpontban lappang. Ha R' az s , ω pontnál görbesztési erő, lesz a' görbesztési viszony:

$$R: R' = -\frac{a}{s^2} : -\frac{a}{s'^2} = s'^2 : s^2 = \omega^2 : \omega'^2.$$

A' görbesztési erő tehát megfordított viszonyban áll az iv' hossza' négyszögével 's egyenirányban a' forgatási szög' négyszögével.

Egyenes görbék hasonlóak, ha egyik önkéntes pontnál görbesztési erő úgy aránylik, mint amaz a' másikkak megfelelő ponton. Megfelelő (hasonló helyzetű) pontok pedig azok, mellyeken az egyáltalános forgási nagyságok kezdetponttól számítva egyenlők. A' hasonló helyzetű pontok' meghatározására nézve következők jegyzendők meg:

1) Ha a' görbesztési viszonyok ω és ω' függvények közbevetelével az egyiknél, és ω 's ω' -al a' másik görbénél adva vannak, megkülönböztetendő: vajjon az egyáltalános forgási egység mind a' két görbénél ugyanaz-e vagy sem. Az első esetben $\omega = \omega$ és $\omega' = \omega'$, 's akkor ω és ω' helyett ezek' egyenlő értékét ω és ω' -t a' görbesztési arányba téve, szem előtt tartjuk: vajjon ennek ezen munkálatok után meg legyen-e felelve vagy sem. De ha az első és második görbe' forgási egységei úgy viszonylanak egymáshoz, mint 1: f -hez, akkor mind a' két görbének két megfelelő pontra nézve lesz ω és $\omega = f\omega$; valamint az ω és ω' -át tekintve $= f\omega'$. Ezen értékeknek ω és ω' helyébei tétele után a' görbesztési arány vizsgálhatik meg.

2) Ha a' görbesztési viszony s és s' függvények által az egyiknél, a' második görbénél pedig s és s' adva vagyon: akkor a' görbe pontjainak forgási nagyságai a' görbe' egyenletéből kerestetnek, 's e' szerint ω és ω' ,

ω és ω' értékei megkaphatók. Ha tehát $\omega = \omega$ és $\omega' = \omega'$ vagy $\omega = f\omega$ és $\omega' = f\omega'$ -al teszszük, 's ezeknek megfelelő egyenleteit alakítjuk: megjeljük a' második görbe' s és s' pontjait, az első s és s' pontjaival kifejezve. Ezek szerint s és s' mennyiségek a' görbesztési arányból megnyerhetők, 's helyességök könnyen megvizsgálható.

Ezekből foly, hogy: minden görbék, mellyek az ezen alakú $s\omega = a$ egyenlet által kifejeztethetők, hasonló, és a' görbesztési viszonyok az állandó mennyiségektől egészen függetlenek.

13. §.

Jelenleg a' harmadik görbét vizsgáljuk meg, mellynek egyenlete:

$$s^2 = a\omega \quad (\text{III})$$

I.) Haladása általában. Ha $s=0$, ω is $=0$ lesz. A' görbének tehát a' kezdetpontnál kezdetiránya is van. Ha a állító, akkor az ω egyegy állító értékének s két egyenlő és ellenkező' értéke felel meg; ha pedig $\omega = \infty$, s is ∞ -vé válik. A' görbének tehát két végtelen csigádadon csavart és azonos ágazatja van. A' forgás mindkettőnél állító. Ha a tagadó lett vala, akkor ω is nemleges volna. A' görbe ugyanaz marad; csupán helyzete más.

II.) Nevezetes pontok. Minthogy a' kezdetponton a' haladás változik, 's a' forgás mindig ugyanaz marad, lesz az úgynevezett forgási pont. 'S mivel a' görbe' további folyamatjában, sem a' mi a' haladást, sem pedig a' mi a' forgást illeti, változás nem történik: következik, hogy a' görbének több nevezetes pontjai nincsenek.

III.) A' görbesztési erő- és viszony ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \frac{2s}{a}$$

Ha $s=0$, lesz R is $= 0$. A' görbe tehát a' kezdetpon-
ton minimum. Ha $s = \infty$, lesz $R = \infty$ valamint ω
is. A' görbe tehát vég nélkül két oldalról törekszik a'
legnagyobb görbesztés' pontjai felé. Továbbá áll:

$$R : R' = s : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'}$$

A' két pontoni görbesztési erők úgy aránylanak, mint
az ív' hossza, vagy mint a' forgási szögek' négyzöges
gyökérjegyei. Minden illy nemű görbék egymás közt
hasonlók. Ennek megmutatására legyen s és s' két pont
az egyiknél, és s és s' a' másik görbénél megfelelő pon-
tok, lesz

$$s : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'} \text{ és } S : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'}$$

's mivel $\omega = f\omega$ és $\omega' = f'\omega'$, lesz

$$s : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'} = \sqrt{f\omega} : \sqrt{f'\omega'} = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'} = s : s'$$

14. §.

A' negyedik görbének egyenlete következő:

$$\omega^2 = as \quad (\text{IV})$$

$$(1) \omega = \pm \sqrt{as}, \quad (2) s = \frac{\omega^2}{a}$$

I.) Haladása általában. Mivel ω és s egyszer-
re $= 0$ válnak, a' görbének kezdetponton kezdetiránya
is van. Ha s állító, akkor ω két egyenlő, de ellenkező
értéket kap; 's tagadó létére pedig ω értékeit képzele-
tiekké teszi. A' görbének tehát két ágazatja van, mind-
kettő a' kezdetponttól állító, de ellenkező forgásban

szétfut, azonos és csigádadon csavart, mivel ha $s = \infty$, ω is $= \infty$ lesz.

II.) Nevezetes pontok. Mivel a' kezdetponton a' forgás' (és nem a' haladás is) bizonyos változásának helye vagyon, akkor annak csúcsot kell alakítania. Minden egyéb pontok a' közönséges görbék' pontjai.

III.) A' görbesztési erő és viszony ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \frac{a}{2\omega}$$

Ezen kifejezés a' kezdetpontra nézve végtelen lesz, ha $\omega = \infty$ semmivel egyenlítend. Minél nagyobb ω , annál kisebb az R, a' görbesztés tehát a' kezdetponttól fogva mindig fogy. A' görbesztési erőre nézve áll:

$$R: R' = \omega': \omega = \sqrt{s'}: \sqrt{s}.$$

A' két pont' görbesztései viszonylanak megfordítva mint a' forgások, vagyis megfordítva, mint az ív' hossza négyszöges gyökérjegyei. Továbbá minden illynemű görbék hasonló, mert az R: R' viszony, állandó menynyiségektől független.

15. §.

Az ötödik görbének ez vala egyenlete:

$$a\omega^2 + bs^2 - c = 0 \quad (V)$$

Ha $\omega = 0$, lesz $s = \pm \frac{\sqrt{c}}{b}$; 's ha $s = 0$, akkor $\omega = \pm \frac{\sqrt{c}}{a}$. A' görbének tehát a' kezdetponton kez-

detiránya nincsen. Szándékunk a' kezdetirányt úgy változtatni meg, hogy az a' kezdetponttal összeolvadjon. Ennek következtében tegyük az (V) egyenletbe ω helyett: $\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}}$, 's azonnal megnyerjük

$$a\omega'^2 + bs^2 + 2\sqrt{ac}\omega = 0$$

$$(1) s = \pm \frac{\sqrt{-\omega'(a\omega' + 2\sqrt{ac})}}{b}; \quad (2) \omega = -\frac{\sqrt{a}}{c} \pm \frac{\sqrt{c - bs^2}}{a}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Tegyük az (1) egyenletbe $\omega' = 0$, lesz akkor s is $= 0$, — a' kezdetpont tehát a' kezdetiránynyal összegurúl. Az ω' állító értékei az s értékeit képzeletiekké teszik; de ω -nak bizonyos tagadó értéket adva, s két egyenlő, habár ellenkező értéket nyerend, miáltal két ágazat jelettetik ki. Mivel a' kezdetponttól nem a' forgás, csupán a' haladás lehet ellenkező: ez nem egyéb lesz görbesarknál vagy a' forgáspont. Az ω -nak adható legnagyobb érték az (1) egyenlet szerint e' viszony által: $a\omega' + 2\sqrt{ac} = 0$ határoztatik meg 's ez után $\omega = -2\sqrt{\frac{a}{c}}$ leend. Az ω értékei tehát 0 és —

$2\sqrt{\frac{c}{a}}$ határok között léteznek. A' (2) egyenlet szerint s legnagyobb értéket kap, ha $s = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}$; 's akkor $\omega = -\sqrt{\frac{c}{a}}$, az $s = 0$ minimumnak ezen ω értékei felelnek meg:

$$\omega \left[\begin{array}{l} = c \\ = -2\sqrt{\frac{c}{a}} \end{array} \right]$$

Mi az állító ágazatot $s = +\frac{\sqrt{-\omega' (a\omega' + 2\sqrt{ac})}}{b}$

illeti, ez nő 0-tól $\sqrt{\frac{c}{b}}$ -ig; ha ω' 0-tól egészen $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ -ig

halad. De ha ω , $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ -tól $-2\sqrt{\frac{c}{a}}$ ig halad, az s értékei $\sqrt{\frac{c}{b}}$ -tól 0-ig ismét fogynak. Az állítólag haladó

ágazatnak tehát az $s = \sqrt{\frac{c}{b}}$ pontjában csúcsa vagy on.

Mint hogy pedig ω tagadó értékei, melyek egyáltalában $> 2\sqrt{\frac{c}{a}}$, s értékeit képzeletiekké teszik: a' görbe ω

$= -2\sqrt{\frac{c}{a}}$ pontnál töredezettnek látszik lenni. Ez

azonban helytelen, mert ha ω többé nem növekedhetik is, fogyhat mindazáltal, 's így a' forgás az előbbieknél egy ellenkezője lesz, t. i. állító, 's ez marad is meddig az első tagadó 's egészen meg nem semmitetik, és azután is újonnan az ellenkezőre leendő változtatandó.

Vitatván, hogy a' forgás állító, ez a' fentebbi állítással nem ellenkezik, mely szerint csupán tagadó forgásnak engedtetik hely. A' forgási szögek a' kezdetirányra nézve tagadók, csupán az $\omega = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$ pontra nézve

ellenkezők, tehát állítók. Mivel az $\omega = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$ pont-

ban a' forgás változik, de nem a' haladás, ez forgási pont lesz. A' görbe' további vizsgálata után újonnan bizonyos csúcsra és még egy forgási pontra akadunk stb. A' fensorozottak az ágazatra nézve is állanak, melynek haladása tagadó.

II.) A' görbesztési erő és viszony A'
(2) egyenletből foly:

$$\frac{d\omega}{ds} = \pm \frac{bs}{\sqrt{a}\sqrt{c-bs^2}} = R.$$

Világos, hogy a' legkisebb görbesztésnek helye leend, ha $s = 0$, mert akkor R is $= 0$ lesz. Azon pontok, mellyeknél $s = 0$, fentebb forgási pontoknak nevezettek. Azon pontok pedig, mellyeknél a' görbesztés végtelen nagygyá válik, következő viszony által $s = \pm \sqrt{\frac{c}{b}}$ határozatnak meg, 's a' görbe' csúcsaitól nem különbözök. A' görbének s és s' pontoknálí görbesztési viszonya ez:

$$R: R' = \frac{s}{\sqrt{c-bs^2}} : \frac{s'}{\sqrt{c-b^2s'^2}}$$

A' két görbe' hasonlatosságát tárgyazó kérdésnek eldöntésére következő egyenlet szolgálhat például:

$$\omega = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c-bs}}{a}, \quad \omega = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c-bs^2}}{a}.$$

A' forgás tehát s pontra nézve:

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c-bs^2}}{a} \\ s' \quad \omega' &= -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c-bs^2}}{a} \\ S \quad \omega &= -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c-bS^2}}{a} \\ S \quad \omega &= -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c-bS^2}}{a} \end{aligned}$$

Ha egyegy görbe' forgási egysége úgy aránylik, mint 1: f -hez, akkor lesz $\omega = f\omega'$, és $\omega = f\omega'$; következőleg a' feltételi egyenletek ezek:

$$-f\sqrt{\frac{c}{a}} \pm f\sqrt{\frac{c-bs^2}{a}} = -\sqrt{\frac{c}{a}} \pm \sqrt{\frac{c-bS^2}{a}}$$

$$-f\sqrt{\frac{c}{a}} \pm f\sqrt{\frac{c-bs'^2}{a}} = -\sqrt{\frac{c}{a}} \pm \sqrt{\frac{c-bS'^2}{a}}$$

Innen az S és S' értéke kitalálható, és a' görbesztési aránya

$$\frac{s}{\sqrt{c-bs^2}} : \frac{s}{\sqrt{c-bs'^2}} = \frac{S}{\sqrt{c-bS^2}} : \frac{S'}{\sqrt{c-bS'^2}}$$

tétethetik. Ezt végre hajtva, a' fentebbi feltételi egyenletből tapasztalandjuk, hogy két ilyenmő görbe általában egymáshoz nem hasonlít, kivéve azon esetet, ha $f = 1$, azaz, ha mind a' két görbe ugyanazon forgási egység szerint alakítatnék. Az iv' hosszának egysége mind a' két görbénél önkéntes lehet.

16. §.

A' hatodik görbének ez vala egyenlete:

$$a\omega^2 - bs^2 - c = 0 \quad (\text{VI})$$

Mint hogy ha $s = 0$, $\omega = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ lesz, a' görbének kezdetponton kezdetiránya hiányzik. Tegyük ω helyett a' fentebbi egyenletbe $\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}}$ -t's megnyerjük

$$a\omega'^2 - bs^2 + 2\sqrt{ac}\omega' = 0$$

$$(1) s = \pm \frac{\sqrt{\omega'(a\omega' + 2\sqrt{ac})}}{b}; (2) \omega = -\frac{\sqrt{c \pm \sqrt{c+bs^2}}}{a}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Ha $\omega = 0$, s is $= 0$ lesz; tehát a' kezdetpont a' kezdetiránnyal összegurúl. Az ω -nak egyegy állító értéke s -re nézve két egyenlő és ellenkező értékeket szürend, 's egyszersmind s végtelenül nő. A' görbének tehát két végtelen állító forgása, de ellenkező haladással ellátott ágazata van. A' kezdetpont tehát forgási pont leend. Azonban ω tagadó értékeket is nyerhet, de csupán olyakat, mellyek' következtében ω' ($a\omega' + 2\sqrt{ac}$) állító, 's tehát mivel ω bizonyára tagadó, $a\omega' + 2\sqrt{ac}$ is tagadó leend: következőleg ω' -nak egyáltalánosan véve $> 2\sqrt{\frac{c}{a}}$ kell lenni. Hahogy tehát a' tagadó forgás 0-tól kezdődnék, a' haladás eleinte képzeleti, de mihelyt $\omega = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$, azonnal a' forgás minden egyegy nagyobb értéke helyett az s két egyenlő és ellenkező értékét kapjuk meg. A' görbe még két azonos ágazattal van ellátva, mellyek a' két előbbiekhez hasonlók, mivel s -nek két egyenlő értékek felelnek meg, ha a' forgás állítólag x -el és tagadólag $-2\sqrt{\frac{c}{a}} - x$ -el vitetett véghez. E' két ágazatra nézve a' kezdetpont forgási pont is egyszersmind. Mivel pedig ω növekedő értékeinek, s -nek ujonnan növekedő értékei felelnek meg: következik, hogy a' görbének több nevezetes pontjai nincsenek.

II.) A' görbesztési erő és viszony. —

Ez

$$\frac{d\omega'}{ds} = R = \frac{bs}{(a\omega' + \sqrt{ac})} = \pm \frac{\sqrt{b\omega'(a\omega' + 2\sqrt{ac})}}{a\omega' + \sqrt{ac}}$$

$R = 0$ lesz, ha $\omega' = 0$, és ha $\omega' = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$. Min-

den ágazatnak tehát a' forgási pontnál legkisebb görbesztése van. Ha $a\omega' + 2\sqrt{ac} = 0$, 's követke-

zőleg ha $\omega' = -\sqrt{\frac{c}{a}}$, az R fölebbi kifejezése vég-

telenné válik. Úgy látszik, mintha a' görbe azon pont-
ra nézve, mellyhez a' kitett ω' értéke tartozik, végte-
len nagy görbesztésű volna. Ez azonban helytelen, mi-
vel $\omega' = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ értékére nézve az s valós értéke elő-

állíthatlan. Ha ω' végtelen, lesz $R = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$; a' gör-

besztés tehát közelít állandó határaihoz. A' görbesztési
viszony' és hasonlítás' meghatározására szolgálhat (VI)
egyenletünk. Hol is

$R = \pm\sqrt{\frac{b(a\omega^2 - c)}{a\omega}}$, tehát a' görbesztési viszony:

$$R : R' = \frac{\sqrt{b(a\omega^2 - c)}}{a\omega} : \frac{\sqrt{b(a\omega'^2 - c)}}{a\omega'} = \frac{\sqrt{a\omega^2 - c}}{\omega} : \frac{\sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega'}$$

és az illy nemű két görbe' hasonlítására nézve ez a' fel-
tételi egyenlet:

$$\frac{\sqrt{a\omega^2 - c}}{\omega} : \frac{\sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega'} = \frac{\sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega} : \frac{\sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega'}$$

Ha mind a' két görbére nézve a' forgási egységek úgy viszonylanak, mint 1: f-hez. Hahogy tehát $\omega = f\omega$ és $\omega' = f\omega'$, a' felebbi arány következőre megy át:

$$\frac{\sqrt{a\omega^2 - c}}{\omega} : \frac{\sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega'} = \frac{\sqrt{af^2\omega^2 - c}}{f\omega} : \frac{\sqrt{af^2\omega'^2 - c}}{f\omega'}$$

miből könnyen kimutatható, hogy f^2 -nek = 1-nek kell lenni. Ebből következik, hogy ilyenemű különféle görbék' példányai csak akkor hasonlóak egymáshoz, ha ugyanazon forgási egységre nézve önkéntes ívhosszaság' egysége szerint alakítottak.

17. §.

A' görbék' 7-ik neméhez tartozik az

$$a\omega^2 - bs^2 + c = 0 \quad (\text{VII})$$

egyenlet. Téve $s = S + \sqrt{\frac{c}{b}}$, egyenletünk azonnal más alakot veend magára 's lesz:

$$bs^2 - a\omega^2 + 2\sqrt{acs} = 0$$

$$(1) s = \sqrt{\frac{c}{b}} \pm \sqrt{\frac{c + a\omega^2}{b}}; (2) \omega = \pm \sqrt{\frac{s(bs + 2\sqrt{bc})}{a}}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenlet szerint mind $s' = 0$, mind $\omega = 0$; a' görbe vonalnak tehát a' kezdetpontou kezdetiránya is van. Mivel az s egyegy állító értékének azonnal nagy tagadó és állító forgások felelnek meg:

a' kezdetpontból tehát két azonos ágazat ered, mindkettő állító haladása, az első mindazáltal tagadó, a' második pedig állító forgással ellátva. A' kezdetpont tehát csúcs gyanánt szolgál. Minthogy pedig s növekedéssel ω is növekedik, így e' két ágazatnak több nevezetes pontjai nincsenek. Mindazáltal ω valós értékeket is nyerhet s'-nek tagadólagi állapotjánál fogva, de koránsem elébb, mint $s' = -2\sqrt{\frac{c}{b}}$ értékének áthágása után. Ha a' kezdetponttól tehát tagadólag távoznunk, a' forgás lehetetlen, azaz, a' kezdetiránnyal is haladnunk kell. Ha egy tért, melly $= -2\sqrt{\frac{c}{b}}$, áthágtunk: lesz $\omega = 0$, 's e' helytől fogva két azonos ágazat fejlődendik ki, 's mindkettő tagadó haladása, de ellenkező forgású. E' pont $s' = -2\sqrt{\frac{c}{b}}$ tehát újonnan csúcs leend. Ha állítólag s'' kis mennyiséggel tovább haladunk 's tagadólag $-s'' = 2\sqrt{\frac{c}{b}}$ -el: akkor mind a' két esetben ω nagy értéket nyerend, mi is a' (2) egyenletből előállítható; következőleg a' két utolsó ágazat azonos leend a' két első ágazattal. A' görbe tehát két pár elszakasztott ágazatból áll. A' csúcsainak távolsága $-2\sqrt{\frac{c}{b}}$.

II.) A' görbesztési erő és viszony. —
Hasonlítás. A' görbesztési erő:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \pm \frac{bs' + \sqrt{bc}}{a\sqrt{s'(bs' + 2\sqrt{bc})}}$$

R maximum lesz, ha $s' = 0$, és akkor is, ha $s' = -2\sqrt{\frac{c}{b}}$; azaz, a' görbének mindkét csúcsainál végtelen nagyságú görbesztése vagyon. Habár R egyenletünk szerint semmivé válik, ha $s' = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, ω mindazáltal e' pontra nézve képzeleti. Hogy az s' azon értékei kitalálathassanak, melyeknél fogva R minimummá válik: szükség az R külzeleki hányasát s' szerint elenyésztetni, azaz $= 0$ temi, 's látni, valljon ez egyenlethől eredt s' értékei a' görbe' egyenletének elégséget nyujtanak-e vagy sem. Ezek szerint lesz:

$$\frac{dR}{ds'} = \mp \frac{bc}{a[s'(bs' + 2\sqrt{bc})]^{3/2}} = 0$$

Innen $s' = \pm \infty$; ezen érték megengedhető 's erre nézve $R = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Hogy pedig a' két görbe' példányának hasonlítása meghatározottassék, térjünk $a' bs^2 - a\omega = c$ egyenletre vissza, 's a' következő feltételi egyenletet nyerjük meg:

$$\frac{a\omega^2 + c}{\omega^2} : \frac{a\omega'^2 + c}{\omega'^2} = \frac{af^2\omega^2 + c}{f^2\omega^2} : \frac{af^2\omega'^2 + c}{f^2\omega'^2},$$

mellynek általában csupán $f^2 = 1$ felel meg. Világos tehát, hogy a' kérdéses görbék csupán akkor hasonlók egymáshoz, ha ugyanazon forgási egység szerint alakítottak.

18. §.

Az általános egyenlet' vizsgálatánál fogva a' görbék' nyolczadik nemének ez vala egyenlete:

$$as^2 + 2b\omega s + c = 0 \quad (\text{VIII})$$

$$(1) s = -\frac{b\omega}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2\omega^2 - ac}; \quad 2) \omega = -\frac{c + as^2}{2bs}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenletből kitetszik, hogy az s minden állandó értékére nézve ω tagadó, 's megfordítva s tagadó léte ω állító leend. A' görbének tehát két ágazata vagon, az első állító haladású és tagadó forgású, második pedig tagadó haladású 's állító forgású. Mind a' két ágazat azonos, mivel s egyenlő, de ellenkező értékeire nézve ω egyenlő egyáltalános értékeket nyerend. Ha $s = 0$, lesz $\omega = \infty$. A' görbe tehát végtelen szamu forgásaival a' kezdetpont felé törekszik. Ha s , $\pm \sqrt{\frac{c}{a}}$ -értéket egyszer elér, akkor ω ,

$+$ $\sqrt{\frac{ac}{b}}$ minimumra jutott, 's az s további értékeinél fogva ismét növekedik 's végtére végtelenné is válik. Innen következik, hogy egyedül azon görbe' pontjai, mellyekre nézve $s = +\sqrt{\frac{c}{a}}$, 's $\omega = \mp \sqrt{\frac{ac}{b}}$, a'

görbe' nevezetes pontjai, 's egyszersmind forgási pontok gyanánt szolgálnak.

II.) A' görbesztési erő és viszony. —
Hasonlítás. A' görbesztési erőre nézve

$$R = \frac{d\omega}{ds} = - \frac{as + b\omega}{bs} = \frac{c - as^2}{2bs^2}$$

Ha $s = 0$, R végtelen lesz. A' görbének tehát a' kezdetpontnál végtelen nagy görbesztése vagon. $R = 0$ lesz, ha $s = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$. A' görbe' görbesztése tehát a'

forgási ponton $= 0$. Ha $s = \infty$ lesz $R = - \frac{a}{2b}$.

A' görbe' s és s' két különböző pontnál görbesztési viszonya ez:

$$R : R' = \frac{c - as^2}{2bs^2} : \frac{c - a{s'}^2}{2b{s'}^2} = \frac{c - as^2}{S^2} : \frac{c - a{s'}^2}{S'^2}$$

A' két görbepéldány' hasonlítása' megkülönböztetésére következő arány szolgálhat:

$$\frac{c - as^2}{S^2} : \frac{c - a{s'}^2}{S'^2} = \frac{c - aS^2}{S^2} : \frac{c - a{S'}^2}{S'^2}$$

hol s és S , valamint s' és S' a' két görbének megfelelő pontjait jelentik.

A' görbék' két különböző példányának egyenlete ez:

$$\omega = - \frac{c + as^2}{2bs}$$

$$\omega = - \frac{c + a{s'}^2}{2bs'}$$

Innen s pontra nézve a' forgás	$\omega = -$	$\frac{c + as^2}{2bs}$
s' „ „	$\omega' = -$	$\frac{c + aS'^2}{2bs'}$
S „ „	$\omega = -$	$\frac{c + aS^2}{2bs}$
S' „ „	$\omega = -$	$\frac{c + aS'^2}{2bS}$

Ha továbbá a' forgási egységnek egyáltalános nagysága a' második görbére nézve f -szer nagyobb, mint az elsőre nézve, ω és ω , valamint ω' és ω' hasonló helyezettek leendenek, ha $\omega' = f\omega$ és $\omega' = f\omega'$. Innen következő feltételek keletkeznek:

$$(1) - \frac{fc + as^2}{2bs} = - \frac{c + aS^2}{2bs}$$

$$S = - \frac{f(c + as^2) \pm \sqrt{f^2(c + as^2)^2 - 4acs^2}}{2as}$$

$$(2) - \frac{f(c - as'^2)}{2bs'} = - \frac{c + aS'^2}{2bs'}$$

$$S' = - \frac{f(c + as'^2) + \sqrt{f^2(c + as'^2)^2 - 4acs'^2}}{2as'}$$

A' felebbi görbesztési aránynak mind a' két utolsó tagjába S és S' értékeit téve, akkor egy s és S' közötti egyenletre jutunk, melly azon feltételeket terjeszti előnkbe, mellyek szerint a' görbénk egy pár példánya egymás közt hasonló leend.

A' kitalált S és S' értékeiből közvetlenül kitetszik,

hogy ugyanazon egyenlet, mellynek a' hasonlítás' ismervényeit (*criteriumait*) előadnia kellene, igen zavart alakú, 's így tehát világos, hogy a' görbének hasonlításáról csupán általában lehetett szó.

19. §.

A' kilencedik görbe' egyenlete ez:

$$as^2 + 2b\omega s - c = 0 \quad (\text{IX})$$

$$(1) s = -\frac{b}{a} \omega \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2\omega^2 + ac} ; (2) \omega = \frac{c - as^2}{2bs}$$

L). A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenletből látjuk, hogy az s egyegy valós értékének csupán az s -nek egy valós értéke felel meg, 's hogy az s két egyenlő és ellenkező ω értékei is megkaphatók. A' görbének tehát két azonos ágazata van. Ha $s = 0$, lesz $\omega = \pm \infty$. A' görbe tehát végtelen számú gombolyításainál fogva a' kezdetpont felé törekszik. Mig s állító s kisebb $+\sqrt{\frac{c}{a}}$

nál, ω állító lesz, ha $s = +\sqrt{\frac{c}{a}}$, $\omega = 0$ lesz. Az s nagyobb értékeire nézve lesz tagadó 's mindig növekedik, mig s -el végtelenné nem válik. Kérdés, valljon azon pont, mellyre nézve $s = +\sqrt{\frac{c}{a}}$ a' görbe' nevezetes pontja-e, vagy sem. Hogy ez kitessek, a' görbe'

kezdetpontját ezen pont után helyezzük 's így tehát $s = s' + \sqrt{\frac{c}{a}}$ -t a' második egyenletbe téve lesz:

$$\omega = - \frac{s' (as' + 2\sqrt{ac})}{2b(s' + \sqrt{\frac{c}{a}})}$$

Szembeszökő, hogy ha $s' = 0$, ω is $= 0$ válik, 's hogy ω tagadó értékű lesz, állító haladásra nézve, 's azokat végtelenül megtartja; de ha s' -nek tagadó értékei vannak, mellyek egyáltalában kisebbek $\sqrt{\frac{c}{a}}$ -nál, akkor ω

állítóra válik. Az $s' = 0$ vagy $s = +\sqrt{\frac{c}{a}}$ pontban, ha ugyan csak ebből indulunk, azonnal egyszersmind a' haladás és forgás is változik; következőleg e' pont nem nevezetes, 's csupán a' görbe' közönséges pontjának nevezhető. Mind az, mit a' görbe' egy ágazatáról fejtegettünk, többire is alkalmazható.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési erőre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = - \frac{as + b\omega}{bs} = - \frac{c + as^2}{2bs^2}$$

$R = \infty$ lesz, ha $s = 0$, a' görbének tehát a' kezdetpontnál egy végtelen nagy görbesztése van. Ha $s = \infty$, $R = -\frac{a}{2b}$ lesz. A' görbe' két pontnál s és s' görbesztési viszonyára nézve áll:

$$R : R' = - \frac{c + as^2}{2bs} : - \frac{c + as'^2}{2bs'^2} = \frac{c + as^2}{s^2} : \frac{c + as'^2}{s'^2}$$

Ezek szerint s és S által egy más illy nemű görbe' megfelelő pontjait kijelelve, lesz ezen két görbe vonalnak hasonlítását eldöntő aránya következő:

$$\frac{c + as^2}{s^2} : \frac{c + as'^2}{s'^2} = \frac{c + aS^2}{S^2} : \frac{c + aS'^2}{S'^2}$$

20. §.

A' görbe' 10-dik nemének egyenlete ez:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + c = 0 \quad (X)$$

$$(1) \omega = -\frac{bs}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2s^2 - ac}; \quad (2) s = -\frac{c + a\omega^2}{2b\omega}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenlet' alakjából közvetlenül tűnik ki, hogy s és ω ellenkező jegyekkel bírnak, 's ω egyenlő értékeinek az s egyenlő értékei felelnek meg. Innen következtethető, hogy a' görbének két azonos ágazata van. A' (2) egyenletbe $\omega = 0$ téve, lesz $s = \infty$; a' görbének tehát, mint végtelennek, kezdetiránya van; ha $\omega = \infty$, s újonnan végtelen leend. E' két érték között az s egy más értékének kell lenni, melly egyszersmind minimum, mi is az (1) egyenletből világlik, mellyből azonnal az $s = +\frac{1}{b} \sqrt{ac}$ értéke állítható elő. De hogy e' pontnak természetét meghatározhassuk, a' kezdetirányt úgy kell megváltoztatnunk, hogy a' $\sqrt{\frac{ac}{b}}$ -re nézve $\omega = 0$ legyen 's e' szerint

$$s = -a \frac{(a' - \sqrt{\frac{c}{a}})^2 + c}{2b(\omega' - \sqrt{\frac{c}{a}})}$$

lesz. A' kérdéses pont tehát csúcs. Ennek tehát a' görbe kettejét bírja, egyéb nevezetes pontokat azonban nem.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési viszonyra nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{2b\omega^2}{c - a\omega^2} = R.$$

Ez = 0 lesz, ha $\omega = 0$, 's így tehát ha $s = \infty$, azaz, ha a' haladás végtelen. Ha $\omega = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$, lesz $R = \infty$, a' görbének tehát csúcsánál végtelen nagy görbesztése van; ha $\omega = \infty$, $R = -\frac{2b}{a}$ lesz. A' görbe két pontnál s és s' görbesztési viszonya következő:

$$R : R' = \frac{2b\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{2b\omega'^2}{c - a\omega'^2} = \frac{\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c - a\omega'^2}$$

'S ha S és S' egy más görbe' megfelelő pontjai, lesz a' görbesztési viszony:

$$\frac{\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c - a\omega'^2} = \frac{\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c - a\omega'^2}$$

Továbbá ha a' forgási egység a' második görbére nézve az első' f -szerese, következőleg $\omega = f\omega'$ és $\omega' = \omega'/f$, lesz

$$\frac{\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c - a\omega'^2} = \frac{f^2 \omega^2}{c - af^2 \omega^2} : \frac{f^2 \omega'^2}{c - af^2 \omega'^2}$$

honnét $f^2 = 1$. Minden illy nemű görbék tehát ugyanazon forgási egységre nézve egymáshoz hasonlók.

21. §.

A' görbék' 11-dik nemének ez vala egyenlete:

$$a\omega^2 + 2b\omega s - c = 0 \quad (\text{XI})$$

$$(1) \omega = -\frac{bs}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 \omega^2 + ac}; \quad (2) s = \frac{c - a\omega^2}{2b\omega}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenletből kitetszik, hogy egyenlő és ellenkező értékekre nézve s is egyenlő és ellenkező értékeket nyerend, a' görbének tehát két azonos ágazata van. A' (2) egyenletbe $\omega = 0$ téve, $s = \infty$ leend. A' görbének tehát végtelen távolságban kezdetiránya vagyon; $\omega = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$ -ra nézve, $s = 0$ lesz, 's ha $\omega = \infty$, s ismét végtelenné válik. A' görbe tehát végtelen számú gombolyításaival az utolsó pont felé törekszik. Azonban, hogy az $\omega = +\sqrt{\frac{c}{a}}$ pont' természetete meghatározathassék, tegyük ω helyett a' (2) egyenletbe $\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}}$ -t, lesz az következő alakú:

$$s = -\frac{\omega' (a\omega' + 2\sqrt{ac})}{2b(\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}})}$$

ha $\omega = 0$, lesz $s = 0$; az ω állító értékeire nézve lesz s tagadó, valamint megfordítva az ω tagadó 's egy-átaljában $\sqrt{\frac{c}{a}}$ -nál kisebb értékekre nézve állító leend.

Az $\omega = 0$, vagy $\omega = +\sqrt{\frac{c}{a}}$ -tól ellenkező irányban haladva a' forgás is ellenkező leend, 's így tehát e' pont a' görbe' közönséges pontja. Ez azon pontra is alkalmazható, a' mellyre nézve $\omega = -\sqrt{\frac{c}{a}}$.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési erőre nézve:

$$\frac{d\psi}{ds} = R = -\frac{2b\omega^2}{c + a\omega^2}$$

A' görbesztés azonnal $= 0$, mihelyest $\omega = 0$ válik, következőleg azon pontban, a' mellyben a' görbének kezdetiránya vagyon. Az R kifejezése az ω egy valós értékére nézve sem lehet végtelen, 's e' szerint a' görbének végtelen görbesztése egy pontnál sincs. Az R kitételét ezen alakra hozván:

$$R = -\frac{2b}{\frac{c}{\omega^2} + a}$$

világos, hogy az ω növekedő értékeire nézve az R értéke is növekedik, 's ha $\omega = \pm \infty$, $R = -\frac{2b}{a}$

lesz. A' görbesztési erők tehát 0 és $-\frac{2b}{a}$ határok között léteznek. A' görbe két pontnál s és s' vagy ω és ω' görbesztési viszonyára nézve a' felebbiek szerint áll:

$$R : R' = -\frac{2b\omega^2}{c+a\omega^2} : -\frac{2b\omega'^2}{c+a\omega'^2} = \frac{\omega^2}{c+a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c+a\omega'^2}$$

Továbbá ω és ω' más görbének két megfelelő pontnál görbesztési egységét jelentve, 's ha ezek' forgási egysége az elsőhöz úgy aránylik, mint f: 1-hez, következőleg $\omega = f\omega$ és $\omega' = f\omega'$ lévén: a' két görbe példány' hasonlításának meghatározására szolgáland:

$$\frac{\omega^2}{c+a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c+a\omega'^2} = \frac{f^2\omega^2}{c+af^2\omega^2} : \frac{f^2\omega'^2}{c+af^2\omega'^2} \text{ vagy}$$

$$c+a\omega^2 : c+a\omega'^2 = c+af^2\omega^2 : c+af^2\omega'^2$$

's innen újonnan $f^2 = 1$, úgy, hogy itt is két görbepéldány hasonló egymással, ha ugyanazon forgási egységre nézve alakítottak.

22. §.

A' görbék' 12-dik nemének egyenlete:

$$a\omega + 2b\omega s + cs^2 - d = 0 \quad (\text{XII})$$

$$(1) w = -\frac{b}{a} s \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2(b^2 - ac) + ad}; \quad 2) s = -\frac{bw}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{w^2(b^2 - ac + cd)}; \quad (3) b^2 - ac < 0$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Minthogy a' gyökérjegy alatti kitevélek a' (3) egyenlet miatt minden esetre bizonyos különbsé-

get képeznek elő: s és ω bizonyos mennyiségen túl nem nyomúlhatnak. Az ív az (1) egyenlet szerint: \pm

$\sqrt{\frac{ad}{ac - b^2}}$ -ra, a' forgási szög a' (2) egyenlet után \pm

$\sqrt{\frac{cd}{ac - b^2}}$ határokra szorítvák. A' görbe' haladása, ki-

puhatolhatására szolgál az (1) egyenlet, elébb négyszö-
ge, gyökérjegyének felső jegyét tekintve, következőleg

$$\omega = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2 - ac) + ad}$$

téve. Ha $s = 0$, ω , $\sqrt{\frac{d}{a}}$ értéket nyerend, 's ha sto-

vább is állítólag növekedik, akkor ω is mindaddig állí-

tó marad, míg $s = < \sqrt{\frac{c}{d}}$; végtére ha $s = \sqrt{\frac{c}{d}}$,

$\omega = 0$ lesz, 's az s nagyobb értékeire nézve ω tagadó

leend. Az $s = \sqrt{\frac{c}{d}}$ pont tehát: forgási pont. Az s

legnagyobb állító értékére nézve $\omega = -b \sqrt{\frac{d}{a(ac - b^2)}}$

lesz. A' görbe mindazáltal e' pontnál nincs félbe szakad-

va, mert habár s nagyobb, ω csakugyan képzeleti; ki-

sebb értékeinél fogva azonban, a' kezdetponttól számít-

va, újonnan állító lehet; csupán azon pontra nézve,

melly szerint $s = \sqrt{\frac{ad}{ca - b^2}}$ a' haladások ellenke-

zők. Következőleg e' pont a' görbe' csúcsa. Ha a' gör-

be' haladását az (1) egyenletben s állító értékeire nézve

a' gyökérmennyiségnek alsó jegye szerint vizsgálat alá

vevesszük, látszik, hogy ω az s minden értékeire nézve tagadó. Ezen görbe' részén tehát ω tagadó maximumát

éri el, azaz, $\omega = - \sqrt{\frac{cd}{ac - b^2}}$ lesz, ha $s = + b$

$\sqrt{\frac{d}{c(ac - b^2)}}$. Ezen pontot áthágva, a' forgási nagy-

ság, a' kezdetponttól számítva, tagadó marad, de egyá-

talában véve kisebb, következőleg a' $b \sqrt{\frac{d}{c(ac - b^2)}}$

pontra nézve ellenkező forgásoknak hely engedtetik. E' pont tehát: forgási pont. Az (1) egyenletben ha s tagadó, ugyanazon ω értékei két sorzataira jutunk, melyek csupán jegyeikre nézve különbözök.

II.) A' görbesztési erő és viszony. A' görbesztési erőre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = - \frac{b\omega + cs}{a\omega + bs}$$

Ezen kitélet sajátilag úgy kellene átalakítanunk, hogy vagy csupán s -t, vagy ω -t foglalna magában; de azért a' görbesztési maximum' vagy minimum' meghatározására igen alkalmas. R minimummá válik, ha $b\omega + cs = 0$, ezen viszonynak a' (2) egyenlet szerint akkor van megfelelve, ha ω legnagyobb értékű. A' görbének tehát forgási pontjánál görbesztése $= 0$ vagyon. R maximum lesz, és pedig $= \infty$ ha $a\omega + bs = 0$, azaz, az (1) egyenlet szerint az s legnagyobb értékeinél fogva. A' görbe' csúcsainál tehát görbesztése végtelen nagy.

23. §.

A' görbék' 13-dik nemének egyenlete:

$$aw^2 + 2bws - cs^2 - d = 0$$

$$(1) w = -\frac{bs}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2(b^2 + ac) + ad}; (2) s = \frac{bw}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{w^2(b^2 + ac) - ad}$$

I. A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Az (1) egyenlet szerint az s minden lehetséges értékeire nézve ω valós értékeket nyerend; a' (2) egyenletet pedig tekintve, szembeszökő, hogy ω -nak $\sqrt{\frac{cd}{b^2+ac}}$ értéket áthágásával s képzeleti lesz.

Következőleg $\omega = 0$ sem lehet, azaz, a' görbének egy pontjánál sincs kezdetiránya. Az (1) egyenletben a' gyökérmennyiségnek alsó jegyét tekintve, az s állító értékeire nézve ω értékei tagadók lesznek, és s -sel együtt növekednek, míg végtelenné nem válnak, mi a' csigádon csavart ágazatot jelenti. Jelen görbének nevezetes pontjai nincsenek, minthogy a' forgás- vagy haladásnak bizonyos változása sehol sem fordul elő. Ha már most az (1) egyenletben a' felső jegyet és s -et ismét állítót veszszük fel, ω csupa állító értékeket nyerend, mellyek egy bizonyos ponttól annyival növekednek, mennyivel s nőtt, 's ezzel egyszerre végtelenné válnak. A' második ágazatnak tehát haladása és forgása állító, 's egyszersmind csigádon csavart. Ezen ágazatnál a' forgás, ha $s = 0$, tehát a' kezdetpontban lesz $\omega = +\sqrt{\frac{d}{a}}$; az $s = +b\sqrt{\frac{d}{c(b^2+ac)}}$ pontban a' forgás lesz $\omega = +\sqrt{\frac{cd}{b^2+ac}}$'s valódi minimumát elérte.

A' görbe' forgási szöge tehát a' kezdetponttól a' felforgó pontig mindig fogy, 's ezen túl újonnan növekedik, következőleg ez a' forgási pont. Az s tagadó értékeire nézve a' görbe' két új ágazatját kapjuk meg, mellyek a' fölebbiekkel azonosak.

II.) A' görbesztési erő és viszony. Erre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = - \frac{b\omega - cs}{a\omega + bs},$$

's ez = 0 lesz, mihelyest $b\omega = c$, mi is a (2) egyenlet szerint a' forgási pontra vezet. Ha $a\omega + bs = 0$ lehetne, a' görbesztés végtelen nagygyá válnék, mi azonban lehetetlen, minthogy ennek következtében az (1) egyenlet szerint $s^2(b^2 + ac) + ad = 0$ -nek kellene lenni, e' kifejezésnek azonban mindig állító értékei vannak. Ha s és ω végtelenné válnak, a' görbesztési erőre nézve ezen érték áll:

$$R = \pm \frac{(\sqrt{b^2 + ac} \mp b)}{a}$$

A' görbe két pontnál s és s' görbesztési viszonyra nézve lesz:

$$\begin{aligned} R : R' &= \frac{b\omega - cs}{a\omega + bs} : \frac{b\omega' - cs'}{a\omega' + bs'} = \\ &= \frac{\sqrt{\omega^2(b^2 + ac) - cd}}{\sqrt{s^2(b^2 + ac) - cd}} : \frac{\sqrt{\omega'^2(b^2 + ac) - cd}}{\sqrt{s'^2(b^2 + ac) + ad}} = \\ &= \frac{\sqrt{\omega^2(b^2 + ac) - cd}}{\sqrt{\omega^2(2b^2 + ac)(b^2 + ac) - b^2cd \pm 2b\omega\sqrt{\omega^2(b^2 + ac) - cd}}} : \\ &= \frac{\sqrt{\omega'^2(b^2 + ac) - cd}}{\sqrt{\omega'^2(2b^2 + ac)(b^2 + ac) - b^2cd \pm 2b\omega'\sqrt{\omega'^2(b^2 + ac) - cd}}} \end{aligned}$$

24. §.

A' görbék' 14-dik nemének ez vala egyenlete:

$$aw^2 + 2bws - cs^2 + d = 0 \text{ (XIV.)}$$

$$(1) w = \frac{b}{a}s \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2(b^2 + ac) - ad}; \quad (2) s = \frac{bw}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{w^2(b^2 + ac) + cd}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Az (1) egyenlet szerint ha $s = 0$, ω értékei képzeletiek lesznek, s tehát 0 nem lehet, következőleg kezdetpontnak a görbe' egy pontja sem tekinthető, vagy inkább a görbe' egyenlete bizonyos pontra, melly kezdetpontul szolgál, vitetik, habár az nem a görbe' pontja is. Ezen kezdetponttól bizonyos tért $= \pm$

$\sqrt{\frac{ad}{b^2 + ac}}$ áthágva, olyan pontokra jutunk, a melyekre nézve ω valós értéket nyer, s különösen következőket: $\pm b \sqrt{\frac{d}{a(b^2 + ac)}}$. Ezen értékek határozzák meg egyszersmind azon irányt, melly szerint a kezdetponttól indulnunk kell, hogy a' görbe' legközelebbi pontjait érhessük el. E' két pontból két pár ágazat indul ki; az első tagadó, a' második pontnál pedig állító haladású, és azonosak. Vizsgálatunk' tárgyául azonban csupán azon két ágazat szolgál, mellyeknek ívei állítók. Hogy kezdetöknél fogva haladásul könnyebben tárgyalathassék, ω és s helyett két új változó mennyiségeket ω' és s' -t veszünk fel, úgy hogy a' kezdetpont — és irány ugyanazon ponton legyenek, a' mellyre nézve az (1) egyenlet az s értékét illetőleg minimummá válik, mi is könnyen véghezvihető, ha

$$s' = s + \sqrt{\frac{ad}{b^2 + ac}} \quad \text{és} \quad \omega' = \omega - b \sqrt{\frac{d}{a(b^2 + ac)}}$$

az (1) egyenletbe tétetik, minek következtében az következőre megy át:

$$(3) \omega' = -\frac{bs'}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{s'^2(b^2+ac) + 2s' \sqrt{ad(b^2+ac)}}$$

Szembeszökő, hogy az s egyegy állító értékének egy állító s egy tagadó ω értéke felel meg. Az $s' = 0$ pont tehát ezek szerint valódi csúcs. Mint-hogy a két ágazat' többi pontjaira nézve s' és ω' egy-szersmind növekedik, azokon több nevezetes pontok nem léteznek, ω és s egyszersmind végtelenek lesznek, annak jeléül, hogy mind a' két ágazat csigádad csavart. Minthogy az s' ugyanazon értékeire nézve $\pm \omega'$ tagadó értékei egyáltalában véve mindig nagyobbak az állandók-nál, a görbesztés tehát a tagadólag gombolyított ágazat-nál nagyobb, mint a' másiknál. Ugyan ez áll azon két ágazatról is, mellyek ezen pontból: $s = -\sqrt{\frac{ad}{b^2+ac}}$ indulnak ki.

II.) A' görbesztési erő és viszony. Ha-sonlítás. Az elsőre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{b\omega - cs}{a\omega + bs}$$

E' kifejezés végtelen lesz, ha $a\omega + bs = 0$, vagy ha ω és s helyett ω' és s' tétetik, az $a\omega' + bs' = 0$ nézve, azaz:

$$s' = 0 \text{ és } s' = -2 \sqrt{\frac{ad}{b^2+ac}}, \text{-ra nézve így}$$

tehát a csúcsnál. A' görbe két pontnál s és s' görbesztési viszonyára nézve áll:

$$R : R' = \frac{b\omega - cs}{a\omega + bs} : \frac{b\omega' - cs'}{a\omega' + bs'}$$

és a két görbe példánya hasonlítási föltételeknek meghatározására nézve:

$$\frac{b\omega - cs}{a\omega + bs} : \frac{b\omega' - cs'}{a\omega' + bs'} = \frac{bW - cS}{aW + bS} : \frac{bW' - cS'}{aW' + bS'}$$

ezen arányból előbb s és s' , S és S' ; ω , ω' W és W' által kifejeztessék és ezek után $W = f\omega$ és $W' = f\omega'$ tétessék.

25. §.

A' görbék' 15-dik nemének egyenlete ez:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 + d = 0 \text{ (XV.)}$$

$$(1) \omega = -\frac{b}{a}s \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2(b^2 - ac) - ad};$$

$$(2) s = -\frac{b}{c}\omega \pm \sqrt{\omega^2(b - ac) - cd}$$

's a' föltételi egyenlet:

$$(3) b^2 - ac > 0$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Az (1) egyenlet szerint egyegy állító s értékének az ω két tagadó értékei felelnek meg és megfordítva Ha $s = 0$'s ha $\omega = 0$, s képzeleti marad, azaz, kezdetpontnak a' görbe' egy pontja sem nézhető; valamint kezdetiránynak a' görbe' akármely pontoni iránya nem neveztetetik. Az ω -nak legkisebb értékei ezek: \pm

$\sqrt{\frac{cd}{b^2 - ac}}$, az s -nek pedig legkisebb értékei: \pm

$\sqrt{\frac{ad}{b^2 - ac}}$. Az $s = + \sqrt{\frac{ad}{b^2 - ac}}$ pontból két á-

gazat megy ki, ezek' forgási mennyiségei a' kezdetirány-
ra nézve mindig tagadók. Ezen első pontnál mind a' két

ágazatnak közös iránya $= -b \sqrt{\frac{d}{a(b^2 - ac)}}$

vagyon. Az ω értékének egy sorzata s növekedéssel min-
dig nő, de a' második, mellynek az (1) egyenletbeni

felső jegy felel meg, mindig fogy, míg minimummá nem
válík $\omega = - \sqrt{\frac{cd}{b^2 - ac}}$, 's innen újonnan tagadólag

növekedik. Ezek' következtében azon pont, a' mellyre
nézve s minimum, csúcs, valamint az, a' mellyre néz-
ve ω minimummá válík, forgási pont. A' görbének
tehát két csúcса 's két forgási pontja vagyon.
Továbbá minthogy ω és s végtelenné válík, a' görbének
tehát csupa végtelen, csigádon csavart ágazatai van-
nak.

II.) A' görbesztési erő. Erre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \frac{b\omega + cs}{a\omega + bs}$$

A' görbesztés maximum 's egyszersmind végtelenné vá-
lík, ha $a\omega + bs = 0$ lesz, azaz, az (1) egyenlet sze-
rint ha s a' minimum, következőleg a' csúcson. A' gör-
besztés ellenben $= 0$, ha $b\omega + cs = 0$, azaz, az (1)
egyenlet szerint ha ω a' minimum, következőleg a' for-

gási ponton. Ha ω és s végtelen nagyok, a' görbesztési erők e' határokhoz közelednek:

$$\frac{\pm b - \sqrt{b^2 - ac}}{\pm a}$$

26. §.

A' görbék' 16-dik nemének egyenlete:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 - d = 0 \quad (\text{XVI.})$$

$$(1) \omega = -\frac{b}{a}s \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2(b^2 - ac) + ad};$$

$$(2) s = -\frac{b}{c}\omega \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2(b^2 - ac) + cd}$$

e' föltételi egyenlettel:

$$(3) b^2 - ac > 0.$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Ha $s = 0$, $\omega = \pm \sqrt{\frac{d}{c}}$ lesz, és ha $\omega = 0$, lesz $s = \pm \sqrt{\frac{d}{a}}$. A' görbének tehát kezdetpontnál kezdetiránya nincsen. Hogy a' görbe' azon része, a' melyre nézve a' kezdetpontoni forgás: $\omega = + \sqrt{\frac{d}{a}}$ megvizsgáltathassék, tegyük ω helyett az (1) egyenletbe $\omega' + \sqrt{\frac{d}{a}}$, 's megnyerjük:

$$(4) \omega' = - \frac{\sqrt{ad} + bs}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2(b^2 - ac) + ad}$$

Innen világlik, ha $s = 0$, $\omega' = 0$ lesz. Ha s állító értékű, ω mindig tagadó marad, annak jeléül, hogy a' kezdetpont: cs úcs. Az s növekedő értékeire nézve ω is nő, s ha végtelen, ω is azzá válik. A' görbének tehát két csigádad ágazatja vagyon. Az (1) egyenletbe ω helyett $\omega - \sqrt{\frac{d}{a}}$ tételével a' kezdetponttól még két más, de a' főlebbiekkel hasonló ágazatra jutottunk volna tagadó haladással, jóllehet állító forgással elláttottakra.

II.) A' görbesztési erő. Ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = - \frac{b\omega + cs}{a\omega + bs}$$

Ezen kifejezésben sem a' számláló, sem a' nevező különböző nem lehet, mi is az (1) és (2) egyenletekből világos. A' görbének tehát sem olyan pontjai, a' melyekre nézve a' görbesztés $= 0$ legyen, sem pedig a' melyeknél fogva az végtelenné válhatnék, nincsenek.

27. §.

A' görbék' 17-dik neméhez tartozott egyenlet:

$$(a\omega + bs)^2 - 2ads = 0 \quad (\text{XVII.})$$

$$(1) \omega = - \frac{bs}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{2ads}$$

I.) A' görbe' haladása általában. Nevezetes pontok. Ha $s = 0$, lesz ω is $= 0$; a' görbének tehát a kezdetponton kezdetiránya vagyon. Továbbá az (1) szerint s csupán állító értékeket vesz fel, 's azok' mindegyikének ω kettős értéke felel meg. A' görbének tehát két ágazatja vagyon, az első, a' mellyhez az egyenlet' alsó jegye tartozik, mindig tagadó forgású marad. A' második ágazatra nézve ω előbb állító; jeléül, hogy a' görbének kezdetpontnál csúcsa vagyon. Ha $s = \frac{ad}{4b^2}$

lön, akkor ω ugyanazon ágazaton ismét $= 0$ válik; a' görbének tehát ismét kezdetiránya vagyon. Az s nagyobb értékeire nézve ω tagadó leend, és az ágazat egész elforgásáig ugyanaz marad. Mivel továbbá a' második ágazaton ω állító értékei két $= 0$ értékek között léteznek, a' görbének maximuma vagyon. Azon ponttól, a' mellyben ennek helye van, a' forgás fogy, jeléül, hogy, ez a' forgási pont. Ugyanott az ív' hossza $s = \frac{ad}{4b^2}$.

A' forgási pont tehát úgy van helyezve ezen pontok között, a' mellyekben a' görbe' iránya egyszersmind a' kezdetirány is, hogy az, az elsőtől 's a' másodiktól háromszor távolabb, mint a' csúcstól. Ha $s = \infty$, lesz ω is $= \infty$, következőleg a' görbe' mindkét ágazatja csigádad.

II.) A' görbesztési erő. Ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = - \frac{b}{a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{ad}{s}}$$

62 A GÖRBÉK' TULAJDONSÁGAINAK VIZSGÁLATA.

Ezen kifejezés, ha $s = 0$, végtelenné válik; a' görbének tehát csúcsában végtelen nagy görbesztése vagyon. Továbbá $s = 0$, ha $s = \frac{ad}{4b^2}$. A' görbének tehát a' forgási pontban görbesztése $= 0$. A' végtelenben a' görbesztés $= -\frac{b}{a}$ leend.

AZ ELSŐ
ÉS
MÁSOD RENDÜ GÖRBÉK,

AZOKNAK

ÖSZRENDESEKRE ÁTVITELE,

ÉS FŐBB TULAJDONSÁGAIK.

IRTA

FEST VILMOS,

M. K. ÉPÍTŐKORMÁNYI ALTISZT.

MÁSODRANGU PÁLYAMUNKA.

BUDÁN,

A' MAGYAR KIR. EGYETEM' BETÜIVEL.

M.DCCG.XLIV.

Concordia parvae res crescunt, discordia maximae dilabuntur.

Mielőtt a' t. m. tudós társaság által feladott kérdés' fejtésébe bocsátkoznám, az első és második rendü görbéket, az öszrendesek rendszerére nézve, veszem vizsgálat alá, hogy az új, vagy is eredeti módszer (mellynél leginkább Péters't követtem)'s az öszrendesek' rendszeré közt létező különbség annál inkább szembe tűnjék. A' segéd eszközök' hiánya, 's korlátozott időm miatt, a' feladott kérdés teljes kimerítését nem birtam ugyan eszközölni: mindazonáltal, egyfelől meglevén győ-

zódve, hogy értekezésem nem lesz egészen érdek nélküli, másfelől pedig megfontolva, mikép más jobb munka elől a' jutalmat ugy sem nyerendi el, eltökélém magam', azt pályázásra bocsátani.

Martius 23. 1840.

I. SZAKASZ.

Első és másod rendű egyenletek.

I. FEJEZET.

A' pont' helyzetének meghatározása. A' pont' és egyenes vonalnak egyenlete, 's annak taglalása (Discussion).

§. 1.

Ha valamelly pontot M (1. kép) egy bizonyos téren úgy akarunk meghatározni, hogy az más ponttal el ne cseréltethessék, szükség lesz azt két egymást vagó egyenes vonallal AX , és AY (1. kép) viszonyba hozni, mellyek' helyzete ismeretesnek vétetik. (1. kép)

Hogy ha t . i . a' két távolság

$BM \# AC$ és

$CM \# AB$ *

tudatik, akkor az M pont' helyzete tökéletesen van meghatározva.

* $\#$ egyenlő és közegyenes.

AB metszéknek, AC rendesnek, a' kettő együtt-összrendeseknek, XX' a' metszékék' tengelyének, YY' pedig a' rendesek' tengelyének neveztetnek. A' vágott pont A az összrendesek' kezdő pontja; a' szög $< YAX$ az összrendesek' szöge. Az előjövendő leszarmazásoknál legalkalmasb a' fertály szöggel élés (Rechter Winkel), melly fölvtétel mindenütt meg is tartatott, hol az ellenkező említve nincs.

§. 2.

- (2. kép) Mivel a' metszék $AB = x$ (2. kép) és a' rendes $AC = y$, változó mennyiségek, lesz ha bizonyos M pontra nézve $AB = a$, és $AC = b$ adatik:

$$\begin{aligned}x &= a \text{ és} \\y &= b\end{aligned}$$

M pontnak két egyenlete.

Ha AB változatlan marad, AC mindig fogy, míg végtére $= 0$ -vá válik, akkor

$$\begin{aligned}x &= a \\y &= 0\end{aligned}$$

olly pont' egyenletei, melly a' metszékék' tengelyébe esik.

Épen úgy e' két egyenlet:

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= b,\end{aligned}$$

egy a' rendesek³ tengelyébe eső pontnak egyenletei. Vége:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

a' kezdő pontnak egyenletei.

§. 3.

Hogy minden lehető pontok' helyzetei a' négy fertályban I, II, III, IV (2. kép) x és y (2. kép) által határozathassanak, szükséges lesz még az öszrendeseknek betűvetési jegyeket adni (algebraische Vorzeichen). Ha t. i. A ponttól X felé *igenleges* (positiv) *metszések*, A-tól Y felé pedig *igenleges rendesek* olvastatnak, lesznek az A ponttól X' felé számlált *metszések*, és Y' felé olvasott *rendesek*, *nemlegesek* (negativ).

A' mondottak szerint tehát a' négy M, M' M'', M''' pontoknak egyenletei következők:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{M-re nézve} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = + a \\ y = + b \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \\ \text{M'-re nézve} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = - a \\ y = + b \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{M''-re nézve} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = - a \\ y = - b \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{IV} \\ \text{M'''-re nézve} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = + a \\ y = - b \end{array} \right\}$$

§. 4.

Az egyenes vonalnak egyenlete.

- (3. kép) Legyen $M'''N$ (3. kép) egy tetszés szerinti *egyenes* (vonal t. i.), mely a' függőleges *öszrendesek'* tengelyeit C és B pontokban vágja; ezen egyenesben valamely három felvett pontnak M, M', M'' *öszrendesei* legyenek $AQ, AQ', AQ'',$ és $MQ, M'Q, M''Q''$; legyen végtére

$BB' \parallel XX'$; az által lesz:

(∞ hasonló) $\triangle BMB \sim \triangle BM'P' \sim \triangle BM''P''$,

és abból következik az arány:

$$\frac{MP}{BP} = \frac{M'P'}{BP'} = \frac{M''P''}{BP''} = \dots$$

és ha ezen állandó arány $= a$, és

$AB = b$ tétetik, lesz:

$$MP = MQ - b = y - b$$

$$M'P' = M'Q' - b = y - b$$

$$M''P'' = M''Q'' - b = y - b$$

.....

tehát $\frac{y-b}{BP} = \frac{y-b}{BP'} = \frac{y-b}{BP''} = \dots = a$

és mivel $BP = AQ = x$

$$BP' = AQ' = x$$

$$BP'' = AQ'' = x$$

lesz: $\frac{y-b}{x} = a,$

mellyből következik:

$$(1) \dots y = ax + b$$

vagyis az egyenes vonalnak egyenlete.

Ha ezen egyenletben (1), x helyett akár-melley más érték $= AQ$ tétetik, az annak megfelelő rendes $MQ = y$ (3. kép) számítható, melly érték MQ a' függőleges vonalon tétethetik fel, mi által az adott egyenesnek pontja M van meghatározva; hasonlóan találatuak a' vonalnak többi pontjai is. Ezen egyenletben x és y a' változó, a és b pedig az állandó mennyiségek; és ha $\angle NCX = \angle \alpha$, lesz

$$a = \frac{MP}{BP} = \text{tang. } \alpha,$$

feltéve hogy a' fél átmérő $= 1$; b pedig azon pontnak rendese, mellyben az adott egyenes a' rendesek' tengelyét éri.

§. 5.

Az (1) egyenletnek taglalása.

1. A' két állandó a és b , melly addig határozatlan marad, míg valamelly bizonyos egyenesről szó nincs, azt mutatja, hogy az egyenesnek meghatározásához két föltétel kívántatik.

2. Ha az adott egyenesnek azon pontjait akarjuk meghatározni, mellyek a' metszékek' és rendesek' tengelyét általvágják, akkor változ-

tatva tétessék y és $x = 0$ -vá, és az első esetben x , a másodikban y értéke keletkezik; mert 2-dik §. szerint azon pont, mellynek rendese $= 0$ a' metszékek' tengelyében, mellynek pedig metszéke $= 0$, a' rendesek' tengelyében fekszik. Lesz tehát, ha $y = 0$:

$$(3. \text{ kép}) \quad x = -\frac{b}{a} = AC. \quad (3. \text{ kép})$$

C pontra nézve;
ha $x = 0$:

$$y = +b = AB.$$

B pontra nézve.

3. Ha $b = 0$, vagy B pont A pontra esik, az első egyenletnek (1), következő alakja lesz:

$$(2) \dots y = ax$$

melly egy, a' kezdő ponton keresztül menő egyenesnek egyenlete; mert ha $x = 0$, lesz egyzersmind $y = 0$, és megfordítva; t. i. az egyenes vonal az öszrendesek' tengelyét kezdőpontjában metszi. Ezen (2) egyenlet csak egy határozatlant foglal magában, jeléül, hogy az utóbb említett egyenesnek meghatározásához csak egy adatra van szükség.

4. Ha $M''N$, B pont körül Y felé forog, a' rendesek' tengelyével össze fog esni, midőn $\alpha = 90^\circ$ lesz, 's mivel akkor:

$$a = \operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} 90^\circ = \infty, \text{ lesz}$$

$$x = \frac{y - b}{a} = \frac{y - b}{\infty} = 0.$$

A' rendesek' tengelyének egyenlete tehát:

$$x = 0.$$

5. Ha $M''N$ az említett mód szerint B' felé addig forog, míg $\angle \alpha = 0$, vagy míg BB' vonallal esnek össze, lesz, mivel $a = \operatorname{tang} \alpha = 0$,

$$y = b$$

az az, *egy a' metszékek' tengelyével b távolságra párhuzamos (parallel) vonalnak egyenlete.*

6. Ha $M''N$, C pont körül X felé forog, nem csak $\angle \alpha$, hanem b is kisebbül, és ha $M''N$, AX -re esik, lesz:

$$\angle \alpha = 0$$

$$\text{és } b = 0, \text{ 's azért}$$

$$y = 0,$$

melly a' metszékek' tengelyének egyenlete.

7. Legyen $AC = c$, lesz a' (2-dik pont szerint)

$$c = -\frac{b}{a} \text{ és avval}$$

$$y = ax - ac$$

hol b helyett az érték $= -ac$ tétetett. Ha most $M''N$, C körül addig forog, míg $\angle \alpha = 90^\circ$, mivel $\operatorname{tang} \alpha = a = \infty$, lesz:

$$x = \frac{y}{a} + c = \frac{y}{\infty} + c$$

$$\text{vagy } x = c,$$

egy d rendesek' tengelyével c távolságra párhuzamos vonalnak egyenlete.

§. 6.

Az első rendű általános egyenletnek alakja, úgy mint:

$$Ax + By + C = 0,$$

melly egy egyenes vonal, mert abból kifejthető:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

mellyben: $-\frac{A}{B} = a$

és $-\frac{C}{B} = b.$

(5. kép) Ezen egyenes könnyen alakítható; kerestessenek t. i. annak pontjai B és C (5. kép) mellyekben az öszrendesek' tengelyei metszetnek; mivel az egyenesnek meghatározásához csak két pont kivántatik, szükség lesz ezen két talált pontot, egymással, egyenes vonal által összekötni, 's mindkét felől meghoszabbítani. Mi által az adott vonal alakítya van.

Ha az adott egyenes a' kezdő ponton megy keresztül, az az:

$$y = Ax,$$

(4. kép) akkor x helyett egy bizonyos érték p . o. = 10 vétessék (4. kép) = AB) lesz, a' szerint

$$y = 10 \quad A = BM$$

feltéve, hogy $BM \perp AX$, 's a' kívánt két pont (a' jegy \perp azt jelenti, hogy függőleges)
 A és M meg van határozva.

1-ső példa.

Legyen p. o. az adott egyenes:

$$2y - 4x = 16.$$

ha $x = 0$, lesz $y = \frac{16}{2} = 8.$

ha $y = 0$, „ $-x = \frac{16}{4} = 4.$

Vétessék tehát:

$$\begin{aligned} -x &= AC = 4, \text{ és} \\ y &= AB = 8. \end{aligned} \quad (5. \text{ kép}) \quad (5. \text{ kép})$$

akkor LN lesz az egyenletnek megfelelő egyenes vonal.

2-dik példa.

$$y = 5x \text{ adva van;}$$

tétessék: $x = 10 = AB$, lesz

$$y = 50 = BM$$

(4. kép) feltéve, hogy $BM \perp AX$, mi által a' (4. kép)
 vonal meg van határozva.

2-dik FEJEZET.

Másod rendű görbék.

I. *A' Kör* (itt mindig *a'* kör' kerülete értetik).

§. 7.

A' kör' egyenletének felállításánál az ösrendesek' tengelyei úgy legyenek választva, hogy *a'* kezdő pont *A*, egyik átmérőnek végével, *a'* metszékek' tengelye pedig egyszersmind ezen átmérővel essék össze. $AP = x$ és $PM = y$ legyenek, egy, *a'* körben felvett pontnak ösrendesei, (6. kép) *C* *a'* kör' középpontja, 's *a'* fél átmérő $CM = r$. *A'* \triangle ből *CMP* következik:

$$CP^2 + PM^2 = CM^2, \text{ mivel}$$

$$CP = x - AC = x - r,$$

$$PM = y, \text{ és } CM = r$$

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \text{ és abból}$$

$$(1) x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

a' körnek egyenlete.

Ha *a'* rendesek' tengelye közégyenesen *C* pontig mozdítatik, akkor még egyszerűbb

alakot nyer az (1) egyenlet : mert most lesz : $CP = x$,
 $PM = y$, és $CM = r$, tehát :

$$\overline{CP}^2 + MP^2 = CM^2 \text{ vagyis}$$

$$(2) x^2 + y^2 = r^2.$$

§. 8.

A (2) alatti egyenletnek taglalása.

1. Ha az egyenlet (2) y-ra nézve fejtetik-ki, lesz

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

A kétszeres jegy a gyökér előtt azt mutatja, hogy minden x értékeért, meddig y még lehető érték, y-nak két egyenlő, de ellenirányú értéke van; *hogy tehát a metszék tengelye a kört két részarányos (symmetrisch) magát minden pontjában tökéletesen fődő részre választja.*

2. x értéke valamint igenlegesnek, úgy nemlegesnek is tétethetik, de x^2 mindig igenleges marad; tehát egyenlő igenleges vagy nemleges metszékeknek, csak egyenlő rendesek felelnek meg; *azért a görbe a rendesek tengelye által is két részarányos, tehát a kör, a közép-pontjában egymást egyenes szög alatt metsző tengelyek által, négy részarányos részre osztatik.*

3. Hogy a körnek azon pontjai, mellyek a két tengely által metszetnek, határozathassanak, tegyük a (2)dik egyenletben először

$$y = 0 \text{ 's lesz}$$

$$x^2 = r^2, \text{ tehát}$$

$$x = \pm r$$

az az, a' metszék' tengelye által a' kör $+r$ és $-r$ távolságokban vagyis A és B pontokban vágatik.

Ha $x=0$, lesz:

$$y = \pm r,$$

tehát a' rendese' tengelye is a' kört $+r$ és $-r$ távolságokban találja.

4. Az egyenlet

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

azt is mutatja, hogy, ha $x=0$, y legnagyobb; ha x folyvást nekededik, akkor y fogy, míg végtére $x=r$ értékére nézve

$$y=0\text{-vá válik.}$$

x értéke nem lehet nagyobb mint r , mert ha $x > r$, y értéke lehetetlen (imaginair); 's úgy y sem lehet nagyobb mint r , mert akkor x értéke volna lehetetlen.

II. Csúcskör (Ellipse).

§. 9.

A' Csúcskör olly tulajdonságú egyenlapu görbe, mellynek minden pontjából M , (7. kép) M' ... (7. kép) valamely előre meghatározott két ponthoz F , F' vett távolságok' öszvete $FM + F'M$, vagy $FM' + F'M'$'s a' t., egyenlő valamely egyenessel $= 2a$; tehát:

$$FM + F'M = FM' + F'M' = 2a.$$

F és F' gyúpontnak (Brennpunkt), minden egve-

nes FM , $F'M$ 'stb., melly a' görbének akármelley pontját, a' gyúponttal összeköti, vezetőnek nevezetik (Leitstrahl).

§. 10.

Ha F , F' pontokon keresztül egyenes vonal huzatik, 's FF' , C -ben feleztetvén

$$CA = CA' = a \text{ tétetik}$$

A és A' , az említett tulajdonságánál fogva, a' csúcskörnek két pontja leszen; mert A -ra nézve:

$$CF = CF' \text{ levén,}$$

$$AF + AF' = a - CF + a + CF' = 2a;$$

A' -ra nézve:

$$A'F' + A'F = a - CF' + a + CF = 2a.$$

Ha F és F' ből, $CA = CA' = a$ -val, mint fentővel (radius) magokat B és B' -ben metsző körívek (Kreisbögen) vonatnak, B és B' is a' görbének két pontja; mert $BF + BF' = B'F + B'F' = a + a = 2a$. Ha végtére a' határozott egyenesben $F F'$ egy pont μ vétetik és F , F' ből, $A\mu$ és $A'\mu$ vel, magokat M , M' és m , m' ben vágó körívek huzatnak, akkor M , M' és m , m' is a' görbének pontjai lesznek. Mert p. o. M -re nézve áll:

$$FM + F'M = A\mu + A'\mu = AA' = 2a.$$

Ezen mód szerint több pont is meghatároztatik, mellyek, ha folytonos vonallal köttetnek össze, a' csúcskört képezik.

§. 11.

Ezen görbének egyenlete' leszarmaztatásá-
ra nézve legyen $F F'$ a' metszékek' tengelye; C
(8. kép) pont az öszrendesek' kezdő pontja (8. kép) M
a' görbének egy pontja, FM , $F'M$ a' vezetők;
akkor lesz, ha $FM = u$, $F'M = u'$ tétetik:

$$u + u' = 2a \quad \dots (\alpha)$$

ha továbbá $CP = x$, $PM = y$, M pontnak ösz-
rendesei, a' két FMP , és $F'MP$ \triangle ből követ-
kező egyenlet ered:

$$PF^2 + PM^2 = FM^2 \quad \dots (\beta)$$

$$PF'^2 + PM^2 = F'M^2 \quad \dots (\gamma)$$

's ha $CF = CF' = c$, lesz:

$$PF = c - x, PF' = c + x$$

és (β) 's (γ) szerint:

$$(c - x)^2 + y^2 = u^2 \quad \dots (\delta)$$

$$(c + x)^2 + y^2 = u'^2 \quad \dots (\epsilon)$$

összeadás által:

$$2c^2 + 2x^2 + 2y^2 = u^2 + u'^2$$

$$\text{vagy } 2(x^2 + y^2 + c^2) = u^2 + u'^2 \quad \dots (\tau)$$

(δ) át (ϵ) ből lehván:

$$4cx = u'^2 - u^2 = (u' + u)(u' - u)$$

vagy $4cx = 2a(u' - u)$, és abból

$$u' - u = \frac{2cx}{a} \quad \dots (\varphi)$$

(α) és (φ) egyenletekből:

$$u' = a + \frac{cx}{a}, \text{ és}$$

$$u = a - \frac{cx}{a},$$

ezen két érték (τ)-ba téve:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + c^2) &= \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \\ &= 2a^2 + \frac{2c^2x^2}{a^2} \end{aligned}$$

's abból:

$$x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2, \text{ vagy}$$

$$x^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2, \dots (m)$$

Mivel \triangle ben két oldal együtt mindig hosszabb mint a 3-dik magában, lesz

$$u + u' > FF', \text{ azaz:}$$

$$2a > 2c, \text{ vagy}$$

$$a^2 > c^2$$

$a^2 - c^2$ tehát mindig igenleges mennyiség; ha tehát:

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ tétetik}$$

lesz (m) szerint:

$$\frac{x^2 b^2}{a^2} + y^2 = b^2, \text{ és abból végtére } a' \text{ csúcskör-}$$

nek legegyszerűbb egyenlete:

$$(A) a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

§. 12.

(A) egyenletnek taglalása.

1. Ha az (A) egyenlet, egyszer y -ra, azután x -re nézve fejtetik ki, lesz:

$$(n) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(p) \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

2. Minden, C ponton keresztül menő vonal NN' , C pontban feleztetik; mert ha ezen egyenesnek NN' egyenlete, melly (5 §) szerint:

$$y = Ax,$$

a' csúcskör' egyenletével köttetik össze, akkor a' következő egyenlet csak azon pontokat foglalhatja magában, mellyek mind a' két vonallal, a' csúcskörrel t. i. s az egyenessel, közösek; az által azon pontoknak öszrendesei nyeretnek meg, mellyek a' csúcskört vágják. Ha tehát az (A) egyenletben y helyett Ax iratik, lesz:

$$A^2 a^2 x^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

és abból:

$$(q) \dots x = \frac{\pm ab}{\sqrt{A^2 a^2 + b^2}}$$

's mivel $y = Ax$, lesz

$$(r) \dots y = \frac{\pm A ab}{\sqrt{A^2 a^2 + b^2}}$$

az által N és N' pontoknak öszrendesei x és y határozottak, a' felső jegy (+) N -nek, az alsó (—) N' -nek felelvén meg. A' két egyenletből (q) és (r) látni, hogy valamint x -nek a' két értéke egyenlő, úgy y -né is; tehát $C_p = C_{p'}$, és $N_p = N' p'$, azért a' két $\triangle NC_p \cong N' C_{p'}$, és \cong congruent
 $NC = N'C$.

vagy minden, C ponton keresztül vont egyenes, C -ben feleztetik; azért C középpontnak, 's minden azon keresztül menő egyenes $p. o. NN'$ átmérőnek neveztetik.

3. A' gyökér előtti kettős jegy (n) és (p)-ben, azt mutatja, hogy valamint a' kör, úgy a' csúcskör is, az öszrendesek tengelyei által, 4 részarányos (symmetrisch) részre osztatik.

4. $y = 0$, ád, $x = \pm a$; $x = 0$, ád
 $y = \pm b$;

t. i. az öszrendesek' tengelyei, $+a$ és $-a$, $+b$, és $-b$ távolságokban vágatnak.

5. M pontnak kép (8) távolsága C től, x (8. kép) és y által kifejezve:

$$CM = d = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

vagy ha (n)ből y helyett a értéke tétetik:

$$d = \pm \sqrt{x^2 + \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 x^2 - b^2 x^2 + b^2}{a^2}}$$

vagy $d = \pm \sqrt{b^2 + \frac{(a^2 - b^2) x^2}{a^2}} \dots \dots (s)$

Ezen kitétel legkisebb értékre jut, ha $x = 0$,
 mely esetben $d = \pm \sqrt{b^2} = \pm b = CB = CB'$;
 ha x nő, d is nő, és legnagyobb értékét éri el,
 midőn $x = \pm a$; akkor lesz:

$$d = \pm \sqrt{b^2 + a^2 - b^2} = \pm \sqrt{a^2} = \pm a.$$

Ebből következik, hogy minden átmérő közt,
AA' a legnagyobb, *BB'* pedig a legkisebb.
 Azon felül *AA'* nagyobb, mint akármelyik,
 (8. kép) *a'* csúcskörben húzott egyenes p.o. *gg'* (8. kép)
 mert ha *g* és *g'* C-vel köttetik össze, a' $\triangle gCg'$ ben:

$$gg' < Cg + Cg'$$

de *a'* mondottak szerint:

$$CA > Cg$$

$$CA' > Cg';$$

$$\text{vagy } CA + CA' > Cg + Cg';$$

tehát annál inkább

$$AA' > gg', \text{ (mert } AA' = CA + CA')$$

6. A' 11-dik §-ban vólt:

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ és abból}$$

$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$c = CF = CF'$ nyúltságoknak neveztetik (Excentricitacet).

7. *AA'* és *BB'* minden vonalt, melly *BB'*
 vagy *AA'* vonalhoz közegyenes, egyenes szög
 alatt felez, azért neveztetnek csúcskör² tengelyeinek;
 és pedig $AA' = 2a$, az első vagy nagy $BB' = 2b$, a'
 második vagy kis tengely-

nek; A, A', B, B' vég pontjai pedig *tető pontoknak* (Scheitelpunkt).

8. Ha $a = b$, lesz

$$a^2 y^2 + a^2 x^2 = a^4$$

vagy $x^2 + y^2 = a^2$

t. i. a' kör, mellynek félátmérője $= a$, 's középpontja az összrendesek' kezdőpontjára esik; a' kör tehát mint egy csúcskör tekintethetik, mellynek nyúltsága $c = 0$ (b szerint).

9. Ha egy pont magában a' csúcskör' kerületében van, áll az egyenlet:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2;$$

ha belül esik, p. o.- mint m (9. kép), akkor a' (9. kép) rendes mP kisebb, mint ugyanazon metszéknek megfelelő rendes MP , azért is:

$$a^2 m P^2 < a^2 M P^2, 's \text{ ha}$$

$$m P = y \text{ tétetik, lesz}$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 < a^2 b^2$$

Egy a' csúcskörön kívül eső m' pontra nézve lesz, mivel,

$$m' P > M P;$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 > a^2 b^2.$$

m'' pontra nézve, mivel

$$x > a$$

$$b^2 x^2 > a^2 b^2$$

lesz annyival inkább:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 > a^2 b^2$$

10. A' csúcskör' egyenletéből következik:

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$$

$$= b^2 (a^2 - x^2)$$

vagy $a^2 y^2 = b^2 (a+x)(a-x)$, és abból

$$y^2 : (a+x)(a-x) = b^2 : a^2, \text{ vagy}$$

(8. kép) M pontra nézve (8. kép)

$$PM^2 : A'P \cdot AP = b^2 : a^2,$$

más pontra nézve lesz

$$PM'^2 : A'P' \cdot A'P' = b^2 : a^2$$

azért $PM^2 : A'P \cdot AP = PM'^2 : A'P' \cdot A'P'$

vagy, a' két közép tagot változtatva:

$$PM^2 : PM'^2 = A'P \cdot AP : A'P' \cdot A'P'$$

ha $a=b$, lesz:

$$PM^2 : A'P \cdot AP = 1 : 1 \text{ vagy}$$

$$PM^2 = A'P \cdot AP.$$

11. Ha a' nagy és kis tengely felett, mint (10. kép) átmérők felett, 2 kör rajzoltatik (10. kép), 's a' metszéknek $x=CP$, a' megfelelő kör' rendese, $y'=PM$, a' csúcsköré pedig $y=PN$, akkor a' nagyobb körnek egyenlete lesz:

$$x^2 + y'^2 = a^2, \text{ és abból}$$

$$y'^2 = a^2 - x^2$$

a' csúcskör' egyenletéből pedig következik:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2), \text{ tehát}$$

$$y'^2 : y^2 = a^2 - x^2 : \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

vagy $y'^2 : y^2 = 1 : \frac{b^2}{a^2} = a^2 : b^2$, 's abból

$$y' : y = a : b \dots (t)$$

Ezen tulajdonság egy módra vezet, mely szerint a' csúcskör alakítható. Ha t. i. az adott tengelyeken az említett körök rajzoltatnak, ha a' nagy tengelynek valamely pontjában MP \perp AA' állítatik, 's M pont C-vel egyenes által kötöttek össze, akkor CM a' kis kört valamely L pontjában metszi; ezen ponton keresztül húzások LN \parallel AA'. A' hasonló LMN, és C M P (|| párhuzamos) háromszögek miatt lesz:

$$MP: NP = CM: CL, \text{ de mivel}$$

$$MP = y', MC = a, LC = b$$

lesz helyettesítés által (Substitution)

$$y': = NP = a: b,$$

tehát (t) szerint

NP = y, vagyis N a' csúcskörnek egy pontja.

Hasonlóképen találtathatnak a' görbének több pontjai is.

III. Négy karú vágat (Hyperbel).

§. 13.

A' négy karú vágat olly tulajdonságú egyenlapú görbe, mellynek minden M pontjából (11. kép) valamely előre meghatározott két (11. kép) ponthoz F és F' vett távolságoknak MF és MF' különbsége MF' — MF, egyenlő valamely

egyenessel = 2a. Itt is F, F' a' gyúpontok, $FM, F'M$ a' vezetők.

§. 14.

Ha a' két pont F és F' az egyenes XX' által kapcsolatik-össze, 's FF' , C pontban feléztetik; ha továbbá azon C pontból, $CA = CA' = a$ vágatik, akkor A és A' , a' görbének két pontja; mert ezen alakítás szerint: $AF = A'F'$, tehát

A pontra nézve:

$$F'A - FA = F'A' + AA' - FA = AA' = 2a.$$

A' ra nézve:

$$FA' - F'A' = FA + AA' - F'A' = AA' = 2a.$$

A' görbe' valamely más pontjának meghatározásánál vétessék XX' ben egy pont O' F en kívül és huzassanak F és F' -ből $A' O'$ és AO' , mint fentővel M, M' és m, m' pontokban magokat metsző körívek. Az által a' metszék' XX' , és rendesek YY' tengelyére nézve, melly utolsó, C ponton keresztül megy és $\perp XX'$, 4 részarányosan fekvő pont M, M', m, m' , lesz meg határozva. Hogy pedig ezek a' négykarú vágatnak pontjai, abból következik, mivel p. o. M -re nézve:

$$F'M - FM = A'Q' - AQ' = AA' = 2a.$$

Ugyanaz áll a' többi 3 pontra nézve is. A' mutatott mód szerint a' görbének több pontja is találtathatik, ha O' pont az egyenes vonalon XX' tovább mozdítatik. Mivel a' háromszögben $\triangle F'FM$

$$F'M - FM = 2a < FF', \text{ és}$$

$$AA' = 2a$$

tehát $AA' < FF'$.

t. i. a' két pont A és A' mindig F és F' közt fekszik.

§. 15.

E' görbének egyenlete' leszarmaztatásánál legyenek (11. kép) XX' , YY' , magát C pont- (11. kép) ban metsző egyenes szög alatti öszrendesek' tengelyei; tovább $FF' = 2c$, vagy $CF = CF' = c$; valamelly M pontnak öszrendesei x , y , $F'M = u'$, $FM = u$.

Az egyenes háromszögből $\triangle FMP$

és $F'MP$ következik:

$$FP^2 + MP^2 = FM^2, \text{ és}$$

$$F'P^2 + MP^2 = F'M^2 \text{ vagy}$$

$$(\alpha) (x-c)^2 + y^2 = u^2$$

$$(\beta) (x+c)^2 + y^2 = u'^2$$

Öszeadás által:

$$(\delta) 2(x^2 + y^2 + c^2) = u'^2 + u^2$$

Lehúzás által:

$$4cx = u'^2 - u^2 = (u' + u)(u' - u)$$

vagy, mivel $u' - u = 2a$, lesz

$$u' + u = \frac{4cx}{u' - u} = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$$

azért $u' = \frac{cx}{a} + a$,

$$\text{és } u = \frac{cx}{a} - a$$

ezen két érték u' és u helyett (s) ba téve:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + c^2) &= \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 + \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 \\ &= \frac{2c^2x^2}{a^2} + a^2 \end{aligned}$$

's abból: $a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2)$

mivel pedig $a < c$, azért $a^2 - c^2$ nemleges lesz, legyen tehát:

$$(\delta) \dots a^2 - c^2 = -b^2, \text{ akkor}$$

lesz a' négy karú vágatnak legegyszerűbb egyenlete:

$$(B) \dots a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

§. 16.

(B) egyenletnek taglalása.

1. Ha a' négy karú vágat' egyenlete (B) a' csúcskörével (A) hasonlítatik össze, kitetszik, hogy az egyenlet (B), (A) ből egyszerűen ered, ha (A) ban b helyett $b\sqrt{-1}$ tétetik, mert $(b\sqrt{-1})^2 = -b^2$. Tehát minden a' csúcskörnél leszarmaztatott alak, a' négy karú vágatra is lesz alkalmazható, ha abban b helyett $b\sqrt{-1}$ tétetik. Ezen helyettesítés által lesz p. o. a' nyúltság' egyenletéből $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - (b\sqrt{-1})^2} = \pm\sqrt{a^2 - (b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a' mint lenni kell; mert az egyenletből (δ) következik;

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a' görbének nyúltsága.

2. (B) egyenletet y -ra nézve fejtve ki:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

X -re nézve:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$$

Ezen görbének pontjai is, XX' és YY' tengelyeket tekintve, részarányosan fekvők (symmetrisch).

3. Ha $x = \pm a$, lesz $y = \pm 0$, a' metszék tengelye tehát A és A' pontokban találatik, mert:

$$AC = + a$$

$$A'C = - a$$

4. Ha $x = 0$ lesz:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-a^2} = \pm b \sqrt{-1}, \text{ azaz lehetetlen;}$$

azért a' görbe nem érheti a' rendesek tengelyét; és mivel általánosan, midőn $x < a$, y lehetetlen, egy pont sem eshetik Chez közelebb, mint A és A' . Ezen túl a' görbe jobbra és balra végtelenül terjed, és négy részarányos 's végtelen ágból áll, mellyek akár XX' , akár YY' körül fordítatnak, egymást minden pontjaikban tökéletesen fődik. Ezen négy ágból tulajdonképen a' négy karú vágat áll, ámbár a' kettő: AM és Am , vagy $A'M$ és $A' m$ is, ezen nevet viseli.

5. *Minden a' metszék' tengelyéhez közegyenes, a' rendesek' tengelye által, ahhoz közegyenes pedig a' metszék' tengelye által feleztetik; mert minden igenleges vagy nemleges metszék' értéke, két egyenlő de ellenke-*

ző rendest ad. Itt is valamint a' csúcskörnél két pont B és B' határozthatatik, melyre nézve $CB = CB' = b = \pm \sqrt{c^2 - a^2}$.

A' két egyenes AA' , BB' a görbének tengelyei; AA' elsőnek, BB' második tengelynek, a két pont A , A' tető pontnak neveztetik.

6. Minden, C ponton által menő egyenes OO' , C -ben feleztetik; mert ha 12-dik §. 2-dik sz. alatt (q) és (r) alakban b helyett iratik $b\sqrt{-1}$, lesz:

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - A^2 a^2}}$$

$$y = \frac{\pm Aab}{\sqrt{b^2 - A^2 a^2}};$$

melly két alakból kivehető, hogy, mint a' csúcskörnél vólt,

$$OC = O'C;$$

azért C a négy karú vágat középpontjának, minden C ponton keresztül menő egyenes pedig átmérőjének neveztetik.

7. A' két utolsó egyenlet azt mutatja, hogy a' vágott pontok O és O' csak addig lehetők, mig $b > Aa$ vagy

$$A < \frac{b}{a},$$

ha $A > \frac{b}{a}$, az átmérőnek a' metszék'

tengelyére nézve olyan helyzete LL' lesz, hogy a' görbét sehol nem érheti. Ha ellenben

$$A^2 a^2 = b^2, \text{ vagy}$$

$$A = \pm \frac{b}{a}, \text{ akkor}$$

$$x = \frac{\pm ab}{0} = \infty, \text{ és}$$

$$y = \pm \frac{A ab}{0} = \infty;$$

t. i. a' pontok, melyekben az átmérő a' görbét találja, végtelen nagy távolságra esnek. Ha tehát az átmérőnek UU, és U'U' XX' re nézve ilyen helyzete van hogy α szögnek érintője:

$$\text{tang. } \alpha = A = \pm \frac{b}{a};$$

akkor ezek a' négy karú vágatot végtelen távolságban érik. Ezen különös két átmérő alakúl, ha a' tető pontban A, AK = AK' = b \perp XX' állítatik, és K, K' Cvel egyenes által kapcsolatik össze, mert akkor lesz:

$$b = a \text{ tang ACK, vagy}$$

$$\text{tang ACK} = \frac{b}{a} \text{ és}$$

$$\text{tang ACK}' = - \frac{b}{a}$$

Ha a' négy karú vágatnak valamely pontjára nézve $x = CP$ a' metszék, mellynek a' rendes, $y = PM$, az egyenes UU'-nak rendese pedig $y' = PN$ felel meg, lesz a' görbének egyenlete:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 \dots (m)$$

az egyenesnek egyenlete második fokra emelve:

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \dots\dots (n)$$

kivonás által:

$$y'^2 - y^2 = b^2, \text{ vagy}$$

$$(y' + y)(y' - y) = b^2, \text{ és abból}$$

$$y' - y = MN = \frac{b^2}{y' + y}.$$

Az (m) és (n) alatti egyenletből látszik, hogy ha x nő, y is növekedik, és ha

$$x = \infty,$$

$$\text{lesz } y' = \infty$$

$$\text{és } y = \infty$$

y' és y -nak ezen értéke mellett lesz:

$$MN = \frac{b^2}{\infty} = 0;$$

a' két egyenes tehát a' görbéhez mindig közelít, a' nélkül, hogy azt valaha érhetné; el *azért is végtelenül közeledőknek, vagy egyszóval közeledőknek neveztetnek*, (Asymptoten), a' szög $\angle UCU' = 2\alpha$ pedig azoknak szöge. A' két közeledő tehát a' határ a' lehető és lehetetlen átmérők közt.

9. Ha $a = b$, lesz a' görbének egyenletéből:

$y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$, a' négy karú vágat ezen esetben *egyenlő oldalúnak neveztetik, és a' közeledők' szöge $\angle UCU' = 2\alpha$, egy egyenes szög lesz, mert*

$$\text{tang } \alpha = \frac{b}{a} = 1$$

tehát $\alpha = 45^\circ$, és $2\alpha = 90^\circ$.

10. A' mint valamely pont M , R , r , a' görbének vonalában, azon kívül, vagy belül esik, lesz:

$$\begin{aligned} a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 &+ 0 \\ &> 0 \\ &< 0. \end{aligned}$$

és itt is, mint a' csúcskörnél, az arány:

$$MP^2 : MP'^2 = A'P. AP : A'P. AP'$$

IV. A' kúp vonal (Parabel).

§. 17.

A' két karú vágat olly tulajdonságu egyenlapú görbe, mellynek valamely pontja M , a' határozott ponthoz F , olly távol esik, mint az álló vonaltól CC' . F a' gyűpont, FM a' vezető sugár (Leitstrahl), CC' a' vezetővonal (Leitlinie) (12. kép).

(12. kép)

§. 18.

A' mondottak szerint a' két karú vágatnak pontjai könnyen találhatók. Mert ha F ponton keresztül az egyenes $BFX \perp CC'$ huzatik, a' távolság BF , A pontban feleztetvén, már ez a' görbének egy pontja, mivel $FA = BA$. Egy más pont' határozására állítassék P pontban egy

függő, 's tétessék $FM = BP$, akkor ismét lesz M a' két karú vágatnak pontja, mert $MF = PB = MD$; mi feltevése a' görbének. E' szerint határoztatik a' részarányosan fekvő pont M' , és a' görbének többi pontja is, mellyek, ha folytonos vonal által köttetnek össze, a' két karú vágatot képzik.

§. 19.

E' görbének egyenlete' leszarmaztatásánál legyen AX a' metszék' tengelye, A az öszrendesek' kezdő pontja; továbbá $AB = AF = \frac{1}{2} BF = c$, M pontnak öszrendesei x, y , 's a' megfelelő vezető

$$FM = u.$$

(5-dik §. 7-dik sz.) szerint, a' rendesek' tengelyéhez YY' párhuzamos vonalnak MM' egyenlete:

$$x = AP = BP - AB$$

$$\text{vagy} \quad x = u - c. \quad \dots \quad (\alpha)$$

Az egyenszegű \triangle ből FMP van:

$$FP^2 + MP^2 = FM^2, \text{ vagy}$$

$$(x - c)^2 + y^2 = u^2 \quad \dots \quad (\beta)$$

ha az (α) egyenletből az érték

$$u = x + c, \text{ } (\beta)\text{ba tétetik;}$$

$$\text{lesz: } (x - c)^2 - (x + c)^2 + y^2 = 0.$$

$$\text{vagy: } y^2 = 4cx,$$

$$\text{és ha } 4c = p,$$

a' két karú vágatnak legegyszerűbb egyenlete lesz:

$$(C) \quad \dots \quad y^2 = px.$$

§. 20.

(C) egyenletnek taglalása.

Ezen egyenletből következik:

$$y = \pm \sqrt{px}$$

1. *A' görbe a' két, gyökér előtti, jegy miatt, két a' metszék' tengelyére nézve részarányos ágból áll, mellyek mivel x-nek csak igenleges értéke lehet, az igenleges metszések' oldalára terjednek vég nélkül. Az egyenes AX, melly valamennyi YY' hoz közégyenes vonalt felez, a' két karú vágatnak tengelye. Ha p nemleges volna, akkor a' két ág a' nemleges metszések' oldalára terjedne vég nélkül.*

2. Ha $x = 0$, lesz $y = \pm 0$; vagyis a' kezdő pont A. *Ezen pont A a' két karú vágat' tető pontjának neveztetik.*

3. Ha $x = AF = \frac{1}{4}p = c$,

$$\text{akkor: } y = FO = \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2} = \pm \frac{1}{2}p.$$

$$\text{tehát } OO' = 2\frac{1}{2}p = p.$$

melly a' két karú vágat' nyújtójának neveztetik (parameter).

4. A' görbének egyenlete

$$y^2 = px;$$

más pontra nézve:

$$y'^2 = px'$$

$$\text{tehát } y^2 : y'^2 = px : px' = x : x'.$$

§. 21.

Általános másod rendű egyenlet.

Mindenek előtt szükséges lesz megmutatni, hogy valamely szabályos görbe' egyenletének foka nem az önkényesen fölvevett öszrendesek' rendszerétől és helyzetétől, hanem magától a görbe' természetétől függ.

(13. kép) Arra nézve legyenek (13. kép) XX' , YY' a' függőleges rendszer' tengelyei, mellyek szerint a' görbe eredetileg határozottak, és $AP = x$, $PM = y$, M pontnak öszrendesei. Az új függőleges UU' , TT' , rendszerre nézve, legyenek $A'P' = x'$, $P'M = y'$ ugyanazon pontnak M , új öszrendesei. Ha a' görbét az új öszrendesek szerint akarjuk meghatározni, szükséges az előbbi öszrendeseket az utóbbiak és általánosan azon értékek által kifejezni, mellyek az új tengelyek' helyzetét az elsőbbi tengelyekre nézve határozzák meg, ezen célra legyen $AB = CA' = a$
és $AC = BA' = b$

$$\text{lesz } \dots x = a + x'$$

$$\text{és } y = b + y'$$

Ha tehát a' görbe az új rendszerre vitetik által, 's x helyett $a + x$, y helyett pedig $b + y$ tétetik a' görbének egyenletébe, világos, hogy az új

egyenlet sem lehet különböző rendű. Ha ellenben a' kezdőpont változatlan marad (14. kép) (14. kép) és a' függőleges öszrendesek' tengelyei A körül forognak, míg $UAX = \alpha$, ha továbbá:
 $RP' \parallel AX, P'Q \parallel AY,$

lesz: $x = AP = AQ - QP'$

vagy $x = x' \cos \alpha = y' \sin \alpha$

épen úgy: $y = PM = UP' + RM.$

vagy: $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$

azért lesz x helyett:

$$(1) x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y \text{ helyett: } (2) x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Hasonlóképen mutathatik, hogy, ha valamely görbe akár hegyes, akár függőleges öszrendesek' rendszeréből egy másikra akár hegyesre akár függőlegesre vitetik által, a' fok (gradus) annak egyenletében nem változik. Ha tehát a' görbének egyenlete:

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 + \dots + Mx^qy^r + \dots$$

mellyben $q+r$ legfeljebb $= n$, lesz az átváltoztatás után:

$$A'x^n + B'x^{n-1}y + C'x^{n-2}y^2 + \dots + M'x^qy^r.$$

§. 22.

Az általános 2-dik rendű egyenletnek x és y közt az a' formája.

$$(1) Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

A' következőkben vizsgálni fogjuk: mellyek az (1) alatti egyenlethez, ha minden ösztevő végesnek vétetik, tartozó görbék?

Hogy ezen egyenlet taglalásra alkalmasb legyen, szükség azt egyszerűbb alakra hozni, mellyre találunk, ha az egyenlettel, mint a' függőleges öszrendesek' rendszeréhez tartozóval bánunk, mivel így legegyszerűbben több tag ki fog iktattathatni.

Hogy a' tag, mellyben xy fordul elő, kiiktathassék, képzeljük, hogy a' két tengely A körül, mint az öszrendesek' kezdő pontja körül, bizonyos α szeglettel forduljon el, akkor az (1) egyenletben, 21-dik § szerint

$$x \text{ helyett: } x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y \text{ helyett: } x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

kell tennünk, miből lesz:

$$A(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + B(x \cos \alpha - y \sin \alpha)(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + C(x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 + D(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + E(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + F = 0. \text{ És abból kifejtés által:}$$

$$\begin{aligned} Ax^2 \sin^2 \alpha + Ay^2 \cos^2 \alpha + 2Axy \sin \alpha \cos \alpha + \\ Bx^2 \sin \alpha \cos \alpha + Bxy \cos^2 \alpha - Bxy \sin^2 \alpha \\ - By^2 \sin \alpha \cos \alpha + Cx^2 \cos^2 \alpha + Cy^2 \sin^2 \alpha - \\ 2Cxy \sin \alpha \cos \alpha + Dx \sin \alpha + Dy \cos \alpha + \\ + Ex \cos \alpha - Ey \sin \alpha + F = 0. \end{aligned}$$

vagyis rendezve:

I.

$$(A \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha) y^2 +$$

II.

$$(A \sin^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha) x^2 +$$

III.

$$+(2A\sin\alpha\cos\alpha - B\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha - 2C\sin\alpha\cos\alpha)xy +$$

IV.

$$(D\cos\alpha + E\sin\alpha)y +$$

V.

$$+ (D\sin\alpha + E\cos\alpha)x + F = 0$$

vagy ha rövidség' okáért

az ösztevő: I = M

„ II = N

„ III = L

„ IV = R

„ V = S tétetik

lesz: $My^2 + Nx^2 + Lxy + Ry + Sx + F = 0$

Hogy tehát a' tag Lxy kiiktathassék, az ösztevő L tétessék = 0.

Mivel pedig: $r\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

és $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$,

lesz a' III alatti ösztevőben:

$$L = 2A\sin\alpha\cos\alpha - B\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha - 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$(A - c)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0$, és abból:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \text{tang } 2\alpha = \frac{-B}{A - C}.$$

És ezen értékért, melly az érintő' tulajdonsága szerint mindig lehető, lesz:

$$L = 0,$$

's a' tag Lxy az egyenletből ki van iktatva; azért van:

$$(2) My^2 + Nx^2 + Ry + Sx + F = 0.$$

Hogy a' (2) egyenlethől még a' Ry és Sx tagok, is kiiktathassanak, az öszrendesek' kezdete, mozdításék tovább ollyformán, hogy az új tengelyek közegyenesek maradjanak az előbbiekhöz. 21-dik § szerint tehát, x helyett, x+a, y helyett, y+b tétessék, és lesz:

$$M(y+b)^2 + N(x+a)^2 + R(y+b) + S(x+a) + F = 0.$$

vagyis rendezve:

$$My^2 + Nx^2 + (2Mb + R)y + (2Na + S)x + Mb^2 + Na^2 + Rb + Sa + F = 0.$$

A' két említett tag' kiiktatására tetessék

$$(\alpha) \quad 2Mb + R = 0 \text{ és}$$

(\beta) $2Na + S = 0$'s abból a és b-ét meghatározván:

$$(\epsilon) \quad a = -\frac{S}{2N}; \quad (\delta) \quad b = -\frac{R}{2M}$$

a és b értékére nézve következő 3 fölvetel állhat:

1. Tegyük, hogy M és N, 0-tól (zerótól) különböző, vagyis a' (2) egyenletben sem a' tag My^2 , sem az Nx^2 nem hibázik, azon esetben a és b lehető és véges mennyiségek, 's a' (2) egyenlet ezen alakot nyeri:

$$(3) \quad My^2 + Nx^2 = P$$

itt $P = - (Mb^2 + Na^2 + Rb + Sa + F)$

2. Lehet, hogy vagy M vagy N = 0; ha p. o. N = 0, ellenben M, R, S, vagy legalább, M és S nem = 0, lesz b értéke véges, ellenben $a = \infty$ (\epsilon és \delta szerint), mi azt mutatja, hogy a' (2) egyenlet nem változtathatik által a' (3) alatti alakra, hanem más alakot nyer, melly szerint a' tag Ry, és F esik ki; mi végre

(α) $2Mb + R = 0$, és

(β) $Mb^2 + Rb + Sa + F = 0$ tétetvén lesz:

(α') $b = -\frac{R}{2M}$, véges;

(β') $a = -\frac{Mb^2 + Rb + F}{S}$ szinte véges.

a' szerint a' (2) egyenletnek következő alakja lesz:

$My^2 + Sx = 0$, és abból

$y^2 = -\frac{S}{M}x$ és ha $-\frac{S}{M} = Q$ tétetik:

(4) $y^2 = Qx$.

Ha $M=0$ és $N=0$ volna, akkor az általános (1) egyenletből a' kör' egyenlete következne, a' mi csak egy különös eset volna. T. i. ezen fölvetel szerint az I-ső és II alatti ösztéből lenne:

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{A-C}{B},$$

az előbb vólt: $\text{tang } 2\alpha = \frac{B}{A-C}$, tehát

$$\frac{A-C}{B} = -\frac{B}{A-C}, \text{ miből}$$

$A=C$, és $B=0$.

Ezen értékkel lesz az (1) egyenletben

(m) $y^2 + x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{H} = 0$,

melly a' kör' egyenlete; mert ha (15. kép) (15. kép)

$AP = x$, $PM = y$, M pont' őszrendesei, és $AQ = p$,
 $CQ = q$ a' közép pont' őszrendesei, lesz:

$$CM^2 = CR^2 + RM^2 \text{ vagy}$$

$$r^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2, \text{ miből}$$

$$y^2 + x^2 - 2qy - 2px + p^2 + q^2 - r^2 = 0.$$

tehát az (m) egyenletben

$$\frac{D}{A} = -2q, \quad \frac{E}{A} = -2p,$$

$$\text{és } \frac{F}{A} = p^2 + q^2 - r^2.$$

3. Ha $N = 0$ és $S = 0$, vagy $= 0$ és $R = 0$ volna, úgy hogy az Lxy tag' kiiktatása által, az (1) egyenletből, egyszersmind azon tagok esnének ki, melyekben x^2 és x , vagy y^2 és y előfordúl; akkor ha például $N = 0$ és $S = 0$, lesz

$$b = -\frac{R}{2M} \text{ véges, és}$$

$$a = \frac{0}{0} \text{ határozatlan mennyiség.}$$

Ezen esetben a' (2) egyenletből következik:

$$My^2 + Ry + F = 0. \text{ vagy}$$

$$4) \quad y = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4MF}}{2M},$$

melly két, a' metszések' tengelyével, közégyenesnek egyenlete.

Ha $M = 0$, és $R = 0$, lesz

$$(5) \quad Nx^2 - Sx + F = 0, \text{ vagy}$$

$$(5') \quad x = - \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4NF}}{2N}.$$

t. i. két, a' rendesek' tengelyével közegyenesnek, egyenlete.

A' tett vizsgálások szerint az általános egyenlet (1), vagy az alakra

$$(3) \quad My^2 + Nx^2 = P$$

vagy erre (4) $y^2 = Qx$ vitethetik.

§. 23.

(3) alatti egyenletnek taglalása

Az egyenletben:

$$My^2 + Nx^2 = P$$

az östevő M mindig igenlegesnek vétethetik, mert ha nemleges volna, jegyek' változtatása által igenlegessé válnék. N és P östevőkre nézve következő fölvételek állhatnak.

1. N igenleges, és

a) P is igenleges; ezen esetben a' (3) egyenlet, a' csúcskörnek felel meg, mellyben: $M = a^2$, $N = b^2$, és $P = a^2 b^2$.

Ha azon fölül $M = N$, lesz:

$$x^2 + y^2 = \frac{P}{M},$$

vagyis a' kör' egyenlete.

b) P nemleges, melly fölvétel ad:

$$y = \pm \frac{\sqrt{-Nx^2 - P}}{M},$$

vagyis lehetetlen görbének egyenlete.

c) Ha $P = 0$, lesz;

$My^2 + Nx^2 = 0$, melly egyenlet csak akkor állhat, midőn

$$My^2 = 0, \text{ és } Nx^2 = 0, \text{ vagyis} \\ y = 0 \text{ és } x = 0,$$

mellyek egy pont' (a' kezdő pont') egyenletei.

2. N nemleges, és

a) P is nemleges, melly esetben van:

$My^2 - Nx^2 = -P$ a' négy karú vágat' egyenlete, mellyben:

$$M = a^2, N = b^2, \text{ és } P = a^2 b^2.$$

's a' metszékek az első tengelyen olvastatnak.

b) P igenleges; ezen fölvétel alatt lesz:

$$My^2 - Nx^2 = P,$$

vagyis a' négy karú vágat' egyenlete, mellyben a' metszékek a' rendesek' tengelyén olvastatnak; mert jegyek' változtatása által van:

$$-My^2 + Nx^2 = -P,$$

ha most y , x -el cseréltetik fel, lesz:

$$Ny^2 - Mx^2 = -P, \text{ mellyben:}$$

$$N = a^2, M = b^2, \text{ és } P = a^2 b^2.$$

Ha $N = -M$, a' négy karú vágat egyenlő oldalú lesz.

Ha

c) $P = 0$, akkor van:

$$My^2 - Nx^2 = 0 \text{ vagy}$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{N}{M}}$$

vagy két egyenesnek egyenlete, melly a' kezdő ponton keresztülmegy.

§. 24.

(4) alatti egyenletnek taglalása

Ha a' (4) egyenletben $y^2 = Qx$

1. Q igenleges, akkor ezen egyenlet a' *kúp*vonal egyenlete, mellynek nyújtója = Q 's mellynek tengelye a' metszékek' tengelyével esik össze, 's ágai az igenleges metszékek' oldalán terjednek.

2. Ha Q nemleges, a' (4) egyenletnek ismét a' *kúp*vonal felel meg, ezen különbséggel, hogy most a' görbe a' nemleges metszékek' oldalán fekszik.

3. A' 22-dik §-ban talált két egyenest:

$$y = - \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4MF}}{2M},$$

a' *kúp*vonalnak alárendelhetni, 's a' mint

$$\begin{aligned} R^2 - 4MF &= 0 \\ &> 0 \\ &< 0 \end{aligned}$$

úgy, vagy egy egyenes, vagy két közegyenes, vagy két lehetetlen egyenes ered.

§. 25.

A' (3) és (4) alatti egyenlet vizsgálásából kivehető, hogy az általános (1) egyenlet csak következő görbéket foglal magában:

1. A' csucskört, mellynek alá van rendelve:

- a) A' kör.
- b) A' pont.
- c) Egy lehetetlen görbe.

2. A' négy karú vágatot, mellyhez tartozik:

- a) Az egyenlő oldalú.
- b) A' két, egymást a' kezdőpontban metsző egye-

nes.

3. A' kúpvonalt; ide való még:

- a) A' két közegyenes.
- b) Egy egyenes.
- c) Két lehetlen egyenes.

§. 26.

Az eddigi leszámztatásokból kitetszik, hogy, ha az általános másod rendű egyenletet (1), míg a' kör', négykarú vágat, és a' kúpvonalnak egyenleteit nem ismertük, a' (3) és (4) alatti alakra hozattatott, 's a' (3) és (4) egyenlet alakítatott volna: akkor csakugyan az említett görbékre, 's csak ezekre akadtunk volna, mivel mást az (1) egyenlet nem foglal magában, mi jelesleg azért említetik itt, hogy az új rendszer szerint teendő vizsgálatoknál ez utóbbi úton könnyebben haladhassunk előre.

§. 27.

Miután a' mód, melly szerint a' görbék öszrendek által határozatnak, megmutattatott, 's ezen mód

szerint az 1-ső és 2-od rendü görbék' száma és tulajdonságai azon czélból fejtettek ki, hogy a' régi és új mód között a' különbség annál inkább kitessek: most már a' következő szakaszban a' t. m. tudós társaság által feladott kérdés' vizsgálatába bocsátkozom; mely a' következő.

„A' görbék' meghatározásában jelenleg a' görbe' „mindenkori hossza és érintőinek szöge is vétetnek elemkül. Mellyek tehát ezen nézet szerint az első és másod rendü görbék? Vitessenek ezek által öszrendesekre „és adassanak elő több tulajdonságaik.“

II. SZAKASZ.

Az első és másod rendü görbék az új vagy eredeti rendszer' nézete szerint. Azoknak néhány tulajdonsága. Átvitelök az öszrendesekre.

I. FEJEZET.

Első rendü görbék.

Eelőleges magyarázatok.

§. 28.

1) Az utolsó határ a' térben pontnak nevezetik.

2. A' pont' mozgása vonalt képez.

3. Ha a' pont mozgásában irányát megtartja: egyenes vonal ered. Ez tehát a' leg-egyszerűbb kiterjedés a' térben, minden részeinek irányváltozása nélkül (ohne Richtungsveränderung).

4. Ha ellenben mozgása közben irányát változtatja: vagy tört vagy görbe vonal képezetik (die gebrochene, oder krumme Linie).

a) Az első ered, ha az irányváltozás csak egyes pontokban történik. A' tört vonalnál tehát (16. kép) a' két elem „haladás és forgás vagy irányváltozás“ (Fortschritt und Drehung) nem esik össze; t. i. ab, bc, cd-nek haladása alatt nincs forgás, ellenben α és β -nak forgása közben nincs haladás.

b) A' görbe pedig ered, ha az irány a' haladásnak minden pontjában változik. Itt a' legcsekélyebb haladás, irányváltozás nélkül, a' legkisebb irányváltozás, haladás nélkül nem történhetik; vagy a' pont haladván, egyszersmind (17. kép) forog (17. kép) Itt tehát a' két elem, „haladás és forgás“ összeesik.

§. 29.

Minden görbénél szükséges, tehát hogy a' pont' haladása folytonos irányváltozással járjon. Ha az egy térségben esikmeg, az egyenlapú

(ebene) görbe képeztetik. Ennek minden bármily közel egymáshoz eső pontjában különböző irányja van,

A' görbének valamely pontjában c (17.kép) (17. kép) tulajdon irányja egy egyenes cc' által fejeztetik ki, melly egyszersmind a' görbének érintője. Az egyenes cc' azon irányba esik, mellyet a' pont, ha inntúl forgás nem történnék, keresztül futna. A' kezdő pontban a' a' görbének iránya aa' ; folytonosan forogván és egyszersmind haladván bb' , azután cc' , dd' irányba megy által. A' szög $\angle a = d'mc'$, melly a' görbének két érintője által képeztetik, a' két pont d és e közt a' folytonos forgás' öszvetét foglalja magában.

Folytonos haladás szakadatlan irányváltozással a' görbének lényege. De hogy ez, tudak-ságosan vizsgáltathassék, szükség, hogy a' haladás és forgás, vagy más szóval a' görbének hossza 's érintőinek szöge közt, valamely függvény adassék, melly a' görbe' minden pontjának feleljen meg. Mivel, ha egyszer ezen függvény adva van, a' forgás' értéke a' haladástól függ; és megfordítva: azért a' fölteendő egyenletekben két, egymástól függő változó, t. i. a' haladás $= l$, és a' forgás $= w$, szóba jő. A' haladások a' „kezdőponttól“ (Anfangspunct) a' forgások az „első iránytól“ (Anfangsrichtung) olvastatnak. Hogy valamely bizonyos görbe

eredjen, bizonyos egyenlet a' két változó közt szükséges, melly mutatja, miképen a' kezdőponttól olvasott haladás az első iránytól számított forgástól függ? s megfordítva. A' számok, mellyek által a' haladás és forgás fejeztetik ki, névtelenek (absolutzahlen); a' haladás' egysége (Einheit) bizonyos hossz; a' forgás' egysége a' szög, melly p. o. egy egyenes szög (fertályszög), vagy fél- vagy egész fordulás lehet 'stb.

§. 30.

Ha f és φ valamely általános függvényt jelent, az egyenlapú görbéknek legáltalánosb egyenlete lesz:

$$l = f(w), \text{ és } w = \varphi(l)$$

Ha különös esetben p. o. a' függvény

$$l = \frac{1}{2} w \text{ adatnék, lenne ha}$$

$$\text{a' forgás } \frac{1}{2}, \text{ a' haladás } \frac{1}{4}$$

$$\text{,, } 1 \text{ ,, ,, } \frac{1}{2}$$

$$\text{,, } 2 \text{ ,, ,, } 1$$

$$\text{a' forgás } 4 \text{ a' haladás } 2$$

$$\text{,, } 20 \text{ ,, ,, } 10$$

.

Ha ezen példában a' haladás' egysége $l = 4$ a' forgás' egysége $w = 90^\circ$ vétetnék, akkor lenne, ha

$$\text{a' forgás } 45^\circ, \text{ a' haladás } 1$$

$$\text{,, } 90^\circ \text{ ,, ,, } 2$$

$$\text{,, } 180^\circ \text{ ,, ,, } 4$$

$$\text{,, } 360^\circ \text{ ,, ,, } 8$$

$$\text{,, } 1800^\circ \text{ ,, ,, } 40.$$

.

Ezen mód szerint, a' görbének minden pontjára nézve, forgásának megfelelő haladása határozthatik meg.

§. 31.

Ha valamely egyenlet két változóval adott, 's vagy l vagy w szerint fejtetett ki, a' görbe, l és w értékei által, alakítható. Legyen p. o. ezen egyenlet:

$$w = 2l;$$

$$pq = l = 1 \text{ a' haladások' egysége (18. kép) (18. kép)}$$

$$< \text{mon} = w = 1 \text{ a' forgások' egysége;}$$

a legyen a' kezdő pont, és aa'' az első irány;

$$\text{ha } l = 1 \text{ lesz}$$

$$w = 2$$

csináltassék tehát $< a'' a' = 2 < \text{mon}$, és

$$ab = pq = 1.$$

$$\text{ha } l = 2, \text{ lesz}$$

$$w = 4,$$

az első hosszt és forgást a' másodikból levonván lesz:

$$2 - 1 = 1, \text{ és } 4 - 2 = 2;$$

csináltassék tehát ismét $< a' bb' = 2 < \text{mon}$ és

$$bc = pq = 1.$$

és így tovább. Ezen görbe annál tökéletesebben lesz meghatározva, mennél kisebbek a' különbségek C—C', (mellyek itt = 1).

Szigorú vizsgálat még az előjegyek (±) iránt szükséges. Legyen A (19. kép) a' kezdő- (19. kép)

pont, és AB az első irány. A' haladás közben a' forgás vagy jobbra E felé, vagy balra F felé történhetik, úgy, hogy AE és AF a' görbének megfelelő kezdetei lennének, mellyek nagyobb érthetőség' okáért, kis egyenesek által tétettek ki. Ezen két forgás egymással ellenkező, 's ha egyenlő, egyik a' másikat tekéletesen törli el; azért ezen két forgás ellenkező jegyekkel láttatik el. Ha a' forgás jobbra igenleges, a' forgás balra nemleges lesz. Ha (19. kép) $AFGH$ valamely görbét jelent, a' nemleges forgások $< BAF$, $< DFG$, $< MGH$ lesznek; $< FHN$ pedig igenleges. A' forgás' öszvete tehát:

$$= FHN - BAF - DFG - MGH$$

Az olyan pontban mint H mindig az egyik forgás' legnagyobb értéke (maximum) tehát az ellenkező forgásnak legkisebbje (minimum) vagyis kezdete van.

A' forgás AB' -től AC' felé igenleges, AD' felé pedig nemleges, mert itt is, ha A -tól B' felé, nem pedig B' -től A felé nézünk, AC' jobb, AD' ellenben bal oldalon fekszik; mellynek úgy léte onnan is kitetszik, mivel, ha BB' , A körül forog, és AB , AC' -re jő, akkor AB' , AC' -re érkezik, és míg AB , AD' -re jő, addig AB' is AD' -re jutott.

Valamint a' forgások úgy az ellenkező haladások is ellenkező jegyekkel láttatnak el; ha p. o. a' haladások B felé igenlegesek, azok B' felé nemlegesek lesznek, 's azért ellenkező jegyekkel elláttatandók. Az adott példában a' haladások igenlegesek, tehát azoknak öszvete:

$$= AF + FG + GH + HI =$$

Azért a' kezdőpontra A, és az első irányra AB nézve a' görbének kezdetei lesznek:

AE vonalra nézve: ... + w, + l

AF „ „ — w, + l

AE' „ „ + w, — l

AF' „ „ — w, — l

Némelly esetben a' görbének kezdő pontja elmozdíthatik, 's akkor l helyett: $l \pm a$, szükség tenni: világos, hogy az által a' görbének egyenlete változhatik, de maga a' görbe mindig változatlan marad, még akkor is, ha azon kívül az első irány w más irány által p: $o: w' \pm b$ által, fejeztetik ki.

§. 32.

Az igenleges és nemleges forgások- és haladásokra nézve következő 4 eset áll:

1. A' két elem „haladás és forgás“ a' görbének valamely pontjában igenleges marad, ha igenleges volt. Illyen pont a' görbének egy *közönséges pontja* (20. kép) b pont. (20. kép)

2. Ha valamely pontban az eddigi akár igenleges, akár nemleges haladás megmarad, a' forgás pedig ellenkezővé válik: akkor a' *fordulatpontja* ered (Wendungspunct). (21. kép) (21. kép) b pont.

Itt a' haladás és forgás a-tól b-ig igenleges, b pontban pedig a' haladás még azontúl

is igenleges maradván, a' forgás nemlegessé válik. Ha az igenleges forgás a -tól b -ig egyenlő volna a' nemlegessel b -tól c -ig, akkor lenne

$$\angle a = \angle a'$$

tehát $aa' \parallel cc'$ és a' forgásnak öszvete

$$a - a' = 0.$$

Ha a' haladás a -tól b -ig $= A$, b -tól c -ig $= B$; a' haladás öszvete lesz:

$$A + B.$$

3. Ha ellenben a' forgás változatlan marad, a' haladás pedig ellenkező irányú: akkor a' csúcs (22. kép) képeztetik (Spitze) (22. kép) b pont.

Itt valamint a' haladás úgy a' forgás is a -tól b -ig igenleges; b ponban változik az igenleges haladás bb' , és az ellenkező irányú haladásba bb'' megy által; a' forgás pedig igenleges marad. Ha $\angle a' = 180^\circ - \angle a = \angle \beta$, akkor lesz $aa' \parallel cc'$, és a' forgás' öszvete: $a + 180^\circ - a' = 180^\circ$

A' haladás összesen lesz $= A - B$.

4. Ha végtére a' haladás és egyszersmind a' forgás is a' görbének valamely pontjában b ellenkezőbe megy által egy orr képeztetik (23. kép) (Schnabel) (23. kép) b pont.

T. i. a -tól b -ig a' haladás és forgás igenleges, b ponban pedig mind a' két elem nemlegessé válik. A' haladás összesen lesz:

$$A - B;$$

a' forgás pedig, ha ismét $\angle \alpha = \angle \alpha'$

$\angle \alpha - \angle \alpha' = 0$, és $aa' \parallel cc'$.

A' csúcs és orr visszatérő pontoknak is (Rückkehrpunkt) neveztetnek, mind a' kettőben a' haladás ellenkező irányú. Mind a' három pedig, t. i. a' fordulatpont, csúcs és orr általánosan átmenőpontoknak neveztetnek (Uebergangspuncte), mivel azokban vagy a' forgás, vagy a' haladás, vagy mind a' kettő ellenkezőbe megy által.

Eddig b pont' határozása, már az előtte levő haladásokra és forgásokra nézve, történt. Ha ellenben a' vizsgálás magából b pontból, mint kezdő pontból történik; akkor az említett 4 pontra nézve, épen az ellenkező feltételek következnek t. i:

1'. Egy pont, mellyből valamint a' haladás, úgy a' forgás is, ellenkezővé lesz, a' görbének egy közönséges pontja (20. kép) b pont. (20. kép)

2'. Ha valamely pontból számítva, csak a' haladás ellenkező irányú, a' forgás pedig nem, akkor azon pont fordulatpont. (21. kép) b pont. (21. kép)

3'. Ha valamely ponttól kezdve, a' forgás ellenkezővé válik, a' haladás pedig nem, akkor a' csúcs képződik. (22. kép) b pont. (22. kép)

4'. Ha valamely pontból sem a' haladás sem a' forgás nem változik, az orr képeztetik. (23. kép) b pont. (23. kép)

§. 33.

A' kérdés: valamely görbének vajjon minden pontja közönséges-e? vagy találtnak köztök átmenő pontok is? — az adott egyenletből határozthatatik;

Haladás' tekintetében:

1. Téessék $l = 0$, 's vizsgáltsák vajjon innen a' haladás l csupán csak igenleges, vagy csak nemleges, vagy valamint igenleges, úgy nemleges értéket is nyerhet; az által a' kérdés a' kezdőpontra nézve eldöntetik, mert az első esetben egy *visszatérő*, a' másodikban vagy egy *fordulat*- vagy egy *közönséges* pont alakul (32 §., 1', 2', 3', 4' szerint).

2. Az adott egyenletből:

$$w = f(l)$$

kerestessenek azon értékek, mellyek szerint a' haladás l maximum, mert az elem l azontúl ellenkezővé válik, 's az által értéke fogy. Ha a' szerint találtnak, hogy a' görbe, haladása közben, ellenkező irányba megy át: akkor annyi visszatérő pontja lesz, a' mennyi átmenet van az ellenkező haladásba. Ha ilyen átmenet nem találtnak, a' görbének *visszatérő pontja nem lesz.* (32. §. 1, 2, 3. 4.)

Forgás' tekintetében.

1'. Az első iránytól ($w = 0$)tól kezdve, a' forgásra nézve, vagy csupán csak igenleges, vagy csak nemleges,

vagy pedig, valamint igenleges, úgy nemleges érték is, az adott egyenletben lehető. Az első esetben azon pont, melyben az első irány létezik, vagyis az első irány pontja, vagy *orr* vagy *fordulatpont*; a' második esetben vagy *csúcs*, vagy *közönséges pont*, a' mint a' haladás vagy egynemű, vagy ellenkező.

2. Ha az adott egyenletben

$$l = \psi(w)$$

az egynemű fogások' maximumát keressük, 's látjuk, hogy az eddigi igenleges vagy nemleges forgás, ellenkezővé válik: akkor a' görbének annyi átmenőpontja lesz, mennyi átmenet van az ellenkező forgásba. Ha ilyen átmenet nem található, akkor a' görbének átmenőpontja nem lesz.

§. 34.

Általános első rendű egyenletnek taglalása.

Az általános első rendű egyenletnek két változóval l és w , ezen formája van:

$$(1) Aw + Bl + C = 0$$

1. Ha $A = 0$ és $B = 0$, akkor egyszersmind $C = 0$, t. i. *egy egyenlet*, minden haladás és forgás nélkül.

2. Ha $A = 0$, és $C = 0$, lesz

$$Bl = 0, \text{ vagy } l = 0$$

azaz, *haladás még nem történt*. Ezen egyenlet tehát a' *kezdőpontot* jelenti.

3. Ha $B = 0$, és $C = 0$, lesz

$$Aw = 0, \text{ vagy } w = 0;$$

t. i. *forgás meg nem történt*. Ezen egyenlet tehát az *első irányt* jelenti.

4. Ha $A = 0$, ellenben B és C véges értékű, akkor lesz:

$$Bl + C = 0, \text{ miből}$$

$$l = -\frac{C}{B}$$

t. i. valamely határozott haladás, forgás nélkül, vagyis *valamely határozott egyenes*. Ezen egyenesnek fekvése igenleges, ha B és C jegyei ellenkezők, nemleges pedig, ha egyneműek.

5. Ha $B = 0$, ellenben A és C véges értékű, akkor lesz:

$$Aw + C = 0, \text{ vagy}$$

$$w = -\frac{C}{A}$$

melly egyenlet határozott forgást, haladás nélkül, vagyis az *egyenlapú szöget* jelenti. Ezen szögnek fekvése igenleges, ha A és C jegyei ellenkezők, nemleges pedig, ha egyneműek.

6. Ha $C = 0$, ellenben A és B -nek véges értéke van, akkor lesz:

$$Aw + Bl = 0, \text{ és abból:}$$

$$(2) \dots l = -\frac{A}{B} w$$

Mivel itt a' haladás forgással együtt jár: azért ezen

(2) egyenlet, valamely görbének felel meg; mivel pedig a' haladás l , a' forgással w , a' görbének minden pontjában, egyenes arányban áll: azért ezen (2) egyenletnek a' kör felel meg. Annak bebizonyítására legyen (24. kép) (24. kép) $\angle w$ valamely szög, mely a' két érintő aa' , és bb' által, alakúl; ha továbbá oa és ob fél-átmérője a' körnek, akkor lesz

$$oa \perp aa', \text{ és } ob \perp bb',$$

$$\text{tehát } \angle \alpha + \angle \beta + \angle \vartheta + \angle \delta = 360^\circ = 4R$$

$$\text{és } \angle \vartheta + \angle \delta = 180 = 2R$$

$$\text{lehúzás által: } \angle \alpha + \angle \beta = 180 = 2R$$

$$\text{mint mellék szögek: } \beta + w = 180 = 2R$$

$$\text{tehát } \angle \alpha - \angle w = 0$$

$$\text{vagy } \angle \alpha = \angle w$$

Mivel pedig a' középponti szögek (Centriwinkel) $\angle \alpha$, egy arányban állanak íveikkel: következik, hogy a' forgás' szöglei is azon arányban vagynak, a' mint a' (2) egyenlet mutatja.

Ha A és B jegyei a' (2) egyenletben ellenkezők, akkor következő alakja lesz:

$$l = \frac{A}{B} w.$$

Most minden igenleges vagy nemleges forgásnak igenleges vagy nemleges haladás felel meg. Igenleges értékek által a' körív ab , nemlegesek által pedig a' körív ab' képeztetik. Ezen

kör fekszik az első iránynak a' jobb oldalán. Az első irány egyszersmind érintője a' körnek. (25. kép) nek. (25. kép) aa'.

Ha A és B jegyei egyneműek, akkor lesz:

$$l = - \frac{A}{B} w.$$

Most minden igenleges forgás nemleges haladást, minden nemleges forgás pedig igenleges haladást képez; első esetben a' körív ac', (25. kép) másodikban ac' alakul (25. kép) A' kör az első iránynak, melly egyszersmind érintő, bal oldalán fekszik.

Ha $w = 0$, lesz egyszersmind $l = 0$; t. i. az első irány' pontja a' kezdőponttal esik össze.

7. Ha mind a' három öszttevőnek az (1) egyenletben véges értéke van, akkor lesz:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} l = - \frac{A}{B} w - \frac{C}{B} \text{ és} \\ w = - \frac{B}{A} l - \frac{C}{A} \end{array} \right\}$$

Ezen két egyenlet az öszttevők' jegyeire nézve 4 különböző formát nyer:

α) Legyen A és B-nek, és egyszersmind A és C-nek is ellenkező jegye, ezen esetben lesz:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{A}{B} w - \frac{C}{B} \\ w = \frac{B}{A} l + \frac{C}{A} \end{array} \right\}$$

Ha $l = 0$, lesz,

$$w = \frac{C}{A};$$

t. i. a' kezdőpontban levő irány, az elsőírány-
nyal a' szöget $= \angle \frac{C}{A}$ képi. Ha (26. kép) a' (26. kép)

kezdőpont a , ab' az első irány, és

$$\angle b'ab = \angle \frac{C}{A},$$

akkor ab lesz a' kezdőpontban levő irány.

Ha $w = 0$ lesz:

$$l = -\frac{C}{B};$$

t. i. a' görbének első iránypontja a' kezdő pont-
tól $\frac{C}{B}$ távolságra esik c pont felé. Ha $ac = \frac{C}{B}$,

akkor a' körnek c pontjában első iránya lesz,
melly közegetes az ab' irányhoz. *A' kezdő
pont és első irány tehát két külön pontra
esik.*

A' (4) egyenletnek ismét *egy kör felel*
meg, mivel a' kezdőponttól a , 's abban levő
 ab iránytól, a' haladás mindig egyenes arány-
ban áll a' forgással. Ezen állításnak úgy léte on-
nan is kitetszik, mivel, ha az első irány a' kez-
dőpontra mozdítatik el, megint a' (2) egyen-
letre akadunk. Ha t. i. $l = 0$, akkor lesz (4)
alatti egyenlet szerint:

$$w = \frac{C}{A},$$

's ha most w helyett, $w' + \frac{C}{A}$, iratik lesz (4)

szerint:

$$w' + \frac{C}{A} = \frac{B}{A} l + \frac{C}{A}, \text{ vagy}$$

$$w' = \frac{B}{A} l \dots (\alpha)$$

$$\text{és } l = \frac{A}{B} w' + \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{A} - \frac{C}{B}, \text{ vagy}$$

$$l = \frac{A}{B} w \dots (\beta)$$

Az (α) és (β) egyenletnek és a' (2) egyenletnek egyenlő alakja van; azért a' (4) egyenletnek is a' kör felel meg.

Itt a' kezdőponton keresztül húzott első-irány $a'ab'$ egy vágó (secante), melyre nézve a' kezdőpont' érintője ab igenlegesen fekszik. A' kör az ab érintőnek jobb oldalán van.

$\beta)$ Ha A és B -nek ellenkező, A és C -nek pedig egynemű jegyei vannak, akkor lesz:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{A}{B} w + \frac{C}{B} \\ w = \frac{B}{A} l - \frac{C}{A} \end{array} \right\}$$

Ezen egyenletnek megfelelő görbe ismét a' kör, melynek kezdőpontján keresztül húzott első iránya megint egy vágó, melyre nézve a' kezdőpont' érintője ab nemlegesen fekszik. A' kör az ab érintőnek jobb oldalán van (27. kép).

σ) A és B-nek egynemű, A és C-nek ellenkező jegyei vannak; ezen esetben lesz:

$$(6) \quad \begin{cases} l = -\frac{A}{B} w + \frac{C}{B} \\ w = -\frac{B}{A} l + \frac{C}{A} \end{cases}$$

Ezen körnél a' kezdőponton keresztül húzott első irány ismét egy vágó, melyre nézve a' kezdőpont' érintője igenlegesen fekszik. A' kör az *ab* érintőnek bal oldalán van (28. kép). (28. kép)

δ) Ha A és B-nek és egyszersmind A és C-nek is egynemű jegyei vannak, akkor a' (3) egyenlet változatlan maradván, lesz:

$$(3) \quad \begin{cases} l = -\frac{A}{B} w - \frac{C}{B} \\ w = -\frac{B}{A} l - \frac{C}{A} \end{cases}$$

Ezen körnél is a' kezdőponton keresztül húzott első irány egy vágó, melyre nézve a' kezdőpont' érintője *ab* nemlegesen fekszik. A' kör az *ab* érintőnek bal oldalán van (29. kép). (29. kép)

§. 35.

Az eddigi vizsgálasokból következik, hogy az általános első rendű egyenlet:

- a) a' kezdőpontot
- b) az első irányt
- c) az egyenes vonalt,

- d) az egyenlapú szöget, 's végtére:
 e) a' kört minden lehető helyzetével foglalja magában.

II. FEJEZET.

Másod rendű görbék.

Előleges magyarázatok.

§. 36.

Másod rendű görbék' vizsgálatánál a' következők jönnek tekintetbe:

- A) A' görbének folyama általánosan véve (Lauf im Allgemeinen).
 B) Átmenőpontok.
 C) Görbülés' foka (Krümmungs-Staerke).
 D) Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.
 E) Hasonlatosság (Aehnlichkeit).
 F) A' görbének önbefödése, önki- vagy bezárása. (Selbstbedeckung, Selbstausschluss- oder einschliessung)
 G) A' görbének önkimérése (Selbstaussmessung)

Az első és második pont *A* és *B* már (32, 33 §.) előadatott; F és H, egyes görbéknél, példa által fog magyaráztatni; a' mi pedig C, D és E pontokat illeti, azok a' következő §-okban bővebben fejtetnek ki.

§. 37.

C. Görbülés' foka.

Valamelly görbének *görbülése* alatt értetik a' haladással összekötött forgás; a' *forgás* alatt pedig folytonos változása az iránynak, melly tehát haladás nélkül is képzelhető. Ha valamelly görbénél bizonyos hosszára *ab* nézve (30. kép) az irányváltozás $< \beta >$ nagyobb, (30. kép) mint egyenlő hosszára *bc* nézve az irányváltozás $< \alpha >$, ha t. i.

$$ab = bc, \text{ és}$$

$$< \beta > < \alpha >$$

akkor az *ab* darabnak nagyobb *görbülése* lesz, mint a' *bc* darabnak. Magának az *ab* darabnak ismét különböző *görbülése* lehet; mert

$$\text{ha } qt = ta \text{ és}$$

$$< \delta > < s >$$

akkor a' *ta* darabnak nagyobb *görbülése* van mint *bt*-nek; egy szóval, a' görbének legkisebb részecskéi is különböző *görbülést* bírhatnak, miből következik, hogy a' *görbülés' foka* csak egyes pontokban határozható.

Ha valamelly görbének egyenlete adatott, akkor a' törvény is tudva van, miképen függ a' kezdőponttól vett *ab* darabra (30. kép) nézve (30. kép)

az l haladás, a' w forgástól. Hogy ezen törvény a' bc darabra nézve is határozathassék, legyen az adott egyenlet p. o.

$$(1) \quad l^2 = w$$

Ha az l haladás, valamely Δl értékével nő, akkor a' w forgás is valamely Δw értékkel növekedik. Ha az adott (1) egyenletben l helyett $l + \Delta l$, és w helyett $w + \Delta w$ írunk 's az eredendő egyenletből az (1) egyenletet vonjuk le, akkor a' kivántatott törvény meg lesz határozva; a' szerint lesz:

$$\begin{array}{r} (l + \Delta l)^2 = w + \Delta w \\ \hline l^2 = w \\ \hline 2l \Delta l + \Delta l^2 = \Delta w \text{ és abból} \\ 2l + \Delta l = \frac{\Delta w}{\Delta l} \end{array}$$

Minél kisebbnek vétetik Δl , annál közelebb esik $\frac{\Delta w}{\Delta l}$ -az értékhez $= 2l$. Ha Δl 's 'egyszersmind Δw végetlen kicsinynek vétetik, akkor Δl , és Δw helyett írunk dl és dw , és lesz:

$$(2) \dots 2l = \frac{dw}{dl}$$

melly az adott egyenletnek *külzeléki egyenlete*. Valamint ezen (2) egyenlet, úgy általánosan valamely görbének külzeléki egyenlete a' függvényt képzi, melly egy végetlen kis ívre nézve a' haladás és forgás közt áll. Ha a' Δl haladásnak, a' Δw forgás felel meg, akkor a' haladás' *egységének* felel meg a' forgás $\frac{\Delta w}{\Delta l}$, melly for-

gás az Δl íven, egyenlően felosztottnak vétetik. Ha p. o. az ívnek $\Delta l = 7$ a' forgás $\Delta w = 21^\circ$ felel meg, akkor lesz $\frac{\Delta w}{\Delta l} = \frac{21}{7} = 3^\circ$, t. i. az ívnek 7, két végpontja közt olly nagy a' forgása, hogy az ívre $= 1$, a' forgás egymásra $= 3^\circ$ jön.

Ha Δl és Δw végtelen kicsinynek vétetik, akkor már határozott görbülésnek fokáról szólhatunk, mivel akkor is, dl és dw közt, véges arány lehető, a' mint az egyenlet $\frac{dw}{dl} = 2l$ mutatja. A' külzeléki hányas $\frac{dw}{dl} = 2l = c$ azt fejezi ki, hogy a' görbének azon pontjában, melyre nézve a' külzeléki hányas c meghatározottat, épen olly nagy görbülése van, mint egy körívnek $= 1$, mellynek forgása $= \frac{dw}{dl} = c$.

A' megfordított külzeléki hányas $\frac{dl}{dw}$ olly ívnek hosszát adja, mellynek egyenlően felosztott forgása $= 1$, vagyis egyenlő a' forgás egységével.

Mivel egyenlő köríveknél $= 1$ a' görbülés' foka, úgy változik, mint a' külzeléki hányas c ; azért lesz ha k a' görbülés' fokát jelenti,

$$c = k$$

Ezen alak szerint a' görbének minden pontjában a' görbülés' foka határozható, ha l és w -nek határozott érték adatik. Az egyenlet:

$c = k$ görbülés' e- (Krümmungsgleichung)
 egyenletének neveztetik. Az adott példában lesz:

$$c = k = 2l.$$

A' görbülés' foka a' w forgás által kifejezve: lesz, mivel $l = \pm 2\sqrt{w}$.

$$k = \pm 2\sqrt{w}.$$

Ha két pont közti görbülés' aránya kívántatnék, akkor a' külzeléki egyenletet mind a' két pontra nézve határozván meg, következő két egyenlet ered:

$$k = c \text{ és}$$

$$k' = c'$$

tehát $k : k' = c : c'$, melly a' görbülés' aránya.

Az adott példában:

$$k = 2l$$

$$k' = 2l', \text{ tehát}$$

$$k : k' = 2l : 2l' = l : l'.$$

t. i. a' görbülés' foka ezen görbénél egyenes arányban áll az ív' hosszával, vagyis a' haladással.

A $c = k$ egyenlet által egy körív fejeztetik ki, mellynek határozott görbülési foka van, 's az ezen ív' nek megfelelő kör, görbülés' körének neveztetik (Krümmungskreis). Ezen körnek egyenlete:

$$AL = W, \text{ mellyből}$$

$$\frac{W}{L} = A.$$

t. i. a' haladás' egységének forgása. $= A$. És azért lesz:

$$A = c,$$

tehát a' görbülés' köre lesz:

$$cL = W, \dots (a)$$

hol L és W -nek ugyanazon egységei vannak, mint az adott egyenletben l és w -nek.

Az adott példában: $l^2 = w$, a' görbülés' köre lesz, mivel $c = 2l$

$$(2l) L = W$$

Ha p. o. $l = 10$, lesz azon pontra nézve:

$$2. 10 L = W \text{ vagyis}$$

$$20 L = W.$$

A' megfordított hányas $\frac{L}{W}$ azt mutatja, hogy a' ha'adásnak hány egysége esik a' forgás' egységére. Azoknak száma a' kör' nagyságával egyenes arányban áll.

Az (α) egyenletből következik:

$$\frac{L}{W} = \frac{1}{c},$$

melly alakból hivehető, hogy $\frac{L}{W}$ értéke azon arányban fogy, mellyben c növekedik; vagy más szóval: a' görbülés' körei és azoknak félátmérői is úgy vannak egymáshoz, mint megfordítva a' görbülés' fokai. A' forgás' egysége annyiszor találatik 360° -ban, mint ezen egységnek megfelelő ív' hossza a' kör' kerületében. A' görbülés' körének ezen ív' hossza $= \frac{1}{c}$; a' kör' kerülete legyen $= U$; tovább azon szám, melly mutatja, hány-szor foglalatik a' forgás' egysége 360° -ban, legyen $= n$, és lesz:

$$U = n. \frac{1}{c} = \frac{n}{c}$$

és mivel: $U = 2 R \pi$, lesz:

$$R = \frac{U}{2\pi}, \text{ vagy}$$

$$R = \frac{n}{2\pi c} \dots (\beta)$$

legyen példánkban a' forgás' egysége = 30', akkor lesz:

$$n = \frac{360}{30} = 12, \text{ tehát}$$

$$R = \frac{12}{2\pi c} = \frac{12}{2\pi \cdot 2l} = \frac{3}{\pi l};$$

ha $l = 6$, lesz azon pontra nézve:

$$R = \frac{3}{6\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

A' (β) egyenletből következik:

$$c = \frac{n}{2\pi R}, \text{ és abból, mivel}$$

$c = F(l)$, azon pont található, melyre nézve a' görbülés' köre határozott meg.

Az adott példában van:

$$c = 2l, \text{ tehát:}$$

$$2l = \frac{12}{2\pi R}, \text{ 's mivel}$$

$$R = \frac{1}{2\pi} \text{ találtatott, lesz:}$$

$$l = \frac{12 \cdot 2\pi}{4\pi} = 6, \text{ mi a' tett fölvétellel}$$

$l = 6$ megegyez.

Példaúl szolgáljon még az új rendszerre vitetett kúp-
vonal' egyenlete, mely következő:

$$l = \frac{p}{4} \left[\frac{\text{tang } w}{\text{Cos } w} + \log. \text{ nat. tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} w) \right].$$

Külzelés által lesz:

$$dl = \frac{p}{2} \frac{dw}{\text{Cos } w^3}, \text{ 's abból következik:}$$

$$\frac{dw}{dl} = \frac{2}{p} \text{Cos } w^3 = k.$$

tehát lesz:

$$k: k' = \text{Cos } w^3: \text{Cos } w^5$$

t. i. a' görbülés' fokai, úgy vannak egymáshoz, mint a'
pótkeblek' köbei (Cosinus) mellyek a' megfelelő forgás'
szögeihez tartoznak.

§. 38.

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

A' 37-dik §-ban leszarmaztatott görbülés' egyenle-
te szerint könnyü lesz a' legnagyobb és legkisebb gör-
bülés' pontjait feltalálni, az által t. i. ha a' közönséges
mód szerint azon értékek kerestetnek föl az egyenlet-
ből, mellyekre nézve k maximum vagy minimum lesz.

§. 36.

E. Föltételek az egyenlapú görbék' hasonlatosságára nézve.

Az egyenlapú görbék hasonlóak, ha görbüléseiknek

fokai hasonlóan fekvő pontjaikban egyenlők. Hasonlóan fekvő pontok neveztetnek, mellyekben a' kezdő-ponttól számlált forgás' nagysága valamennyiben ugyanaz. Ezen pontokra nézve következő esetek vannak:

1) Lehet, hogy a' hasonlóan fekvő pontok' meghatározásánál a' görbülés' aránya az egyik görbénél, w és w' által, a' másodiknál W és W' által 'stb ki van fejezve. A' forgás' egységének nagysága vagy egyenlő, vagy nem; első esetben lesz:

$$w = W$$

$$w' = W',$$

a' másodikban:

$$nw = W.$$

$$nw' = W'$$

mind a' két esetben W és W' helyett értékeik (w, w', vagy nw, nw') tétetnek az arányba, és vizsgáltatik vajjon helyes-e ezen arány? p. o. a' kúpvonal görbülés' aránya volt $\text{Cos } w^s : \text{Cos } w'^s$.

Legyenek más kúpvonalnak hasonlóan fekvő pontjai W és W'; akkor a' hasonlatosság' föltétele lesz:

$$\text{Cos } w^s : \text{Cos } w'^s = \text{Cos } W^s : \text{Cos } W'^s, \text{ vagy:}$$

$$\text{Cos } w ; \text{Cos } w' = \text{Cos } W : \text{Cos } W' \dots (\alpha)$$

Ha a' forgás' egysége mind a' kettőnél egyenlő, akkor lesz:

$$w = W, \text{ és } w' = W'$$

tehát az egyarány (α) helyes.

Ha ezen egységek különbözők, akkor lesz:

$$\text{Cos } W : \text{Cos } W' = \text{Cos } nw : \text{Cos } nw',$$

Ha p. o. $w = 2$, $w' = 3$, 's a' forgás' egysége = 5° ; W és W' -nek pedig feleljen meg az egység = 1° , akkor lesz:

$$W = nw = 5 \cdot 2 = 10.$$

$$\text{és } W' = nw' = 5 \cdot 3 = 15$$

tehát

$$\text{Cos } 2 : \text{Cos } 3 = \text{Cos } 10 : \text{Cos } 15,$$

de, mivel az első két tagban az egység = 5, a' másodikban = 1, azért lesz:

$$\text{Cos } 2 \cdot 5 : \text{Cos } 3 \cdot 5 = \text{Cos } 10 : \text{Cos } 15$$

vagyis: $\text{Cos } 10 : \text{Cos } 15 = \text{Cos } 10 : \text{Cos } 15$

's mivel ezen egyarány helyes, azért a' kúpvonalok hasonlóak.

2. Ha a' görbülés' aránya l és l' , L és L' által, adatnék, vagyis az egyarány $l : l' = L : L'$ adva volna, hol l és L , l' és L' hasonlóan fekvő pontoknak haladásai, és w , W , w' , W' , azoknak megfelelő forgásai; akkor határozassék L és L' , w és W' által; és mivel:

$$\text{vagy } w = W; \text{ és } w' = W'$$

$$\text{vagy } W = nw, \text{ és } W' = nw',$$

azért, a' W és W' forgás határozható w , és w' által; ezen végsőt pedig l és l' által fejezvéni ki, egyszersmind L és L' lesz l és l' által meghatározva. Ezen talált értékek, L és L' helyett tétetnek az arányba, 's vizsgálta-tik: vajjon helyes-e az arány vagy nem?

3) l és l' , L és L' helyett, a' megfelelő forgások w , w' , W , W' által meghatározott értékeik tétessenek a' görbülés' arányába és vizsgálta-tassék 1-ső szám szerint, vajjon helyes-e az arány vagy nem?

§. 40.

Az eddigi vizsgálatoknak például szolgáljon a' kör' egyenletének, legegyszerűbb alakja, melly 34 § szerint:

$$(1) w = al,$$

hol az állandó mennyiség a igenlegesnek vétetik.

A. A' görbének folyama általánosán véve.

1. Ha $l = 0$, lesz egyszersmind $w = 0$; t. i. a' görbének első iránya a' kezdőpontban (31. kép) van (31. kép) a és ab .

2. Minden igenleges haladásnak l igenleges forgás w felel meg; azaz egyik ága a' körnek a' kezdőponttól igenlegesen halad igenleges forgással (31. kép) ac .

3. Minden nemleges haladásnak l nemleges forgás w felel meg; t. i. a' másik ága a' körnek a' kezdőponttól nemlegesen halad nemleges forgással (31. kép) ac' .

4. Egyenlő értékű igenleges és nemleges haladásoknak l , egyenlő értékű, igenleges és nemleges forgások w , felelnek meg; azért ezen két ág *azonos* (identisch).

5. Ha a' haladás l nő, akkor a' forgás w is nevededik, és ha $l = \infty$, lesz egyszersmind $w = \infty$

B. Átmenő pontok.

1. A' kezdőponttól fogva ellenkező irányú haladások és forgások lehetők; azért a' kezdőpont a' görbének egy *közönséges* pontja (33-d. § 1, és 1').

2. A' kezdőponttól valamint az igenleges vagy nemleges haladások, úgy a' forgások is egyneműek; azért a' görbének többi pontjai is *közönségesek*. A' körnek tehát nincs átmenőpontja. (33. §. 2 és 2').

C. Görbülés' foka.

Külzelés által lesz az (1) egyenletből:

$$\frac{dw}{dl} = a, \text{ vagy, mivel a' görbülés' foka } h =$$

$$\frac{dw}{dl}, \text{ lesz}$$

$$k = a$$

melly alakból kivehető, hogy a' görbülés' foka *k* a' körnek minden pontjában ugyanaz.

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

Mivel a' kör' minden pontjában a' görbülés' foka egyenlő, azért mondhatjuk: hogy a' legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai a' kör' kerületén mindenütt és sehol sem léteznek.

E. Görbülés' aránya és hasonlatosság.

A' kör' minden pontjára nézve van:

$$k = a, \text{ tehát}$$

$$k : k' = 1 : 1$$

melly egyarányból következik, hogy minden körök hasonlók. A' mi nagyságait illeti, ezek a' haladás és forgás közti egység' arányától függnék. Minél kisebb t. i. a' forgás ugyanazon haladásra nézve, vagy minél nagyobb a' haladás ugyanazon forgásra nézve, annál nagyobb a' kör.

A' kör' nagysága azon kívül még az ösztevőtől a függ, és mivel a' görbülés' foka $k = a$, azért a' kör annál nagyobb lesz, minél kisebb az állandó ösztevő $= a$.

F. Önbefödés.

A' kör' (1) egyenlete nem változik, ha a' kezdőpont és első irány valamelly más pontjába tétetnek által. Mert ha a' kezdőpont p. o. b távolságra mozdítatik el, akkor lesz ezen értékre nézve

$$w = ab,$$

ha tehát $l = l + b$, és $w' = w + ab$, mellyből következik:

$$l = l' - b,$$

$$w = w' - ab$$

akkor az (1) egyenletben lesz:

$$w' - ab = a(l' - b), \text{ vagyis}$$

$$w' = al'$$

Ha a' kezdőpont b távolságra ellenkező irányban mozdítatik el, akkor lesz:

$$l = l' + b \text{ és}$$

$$w = w' + ab, \text{ azért ismét:}$$

$$w' = al'.$$

Ezen tulajdonságnál fogva a' körnek akármelley darabja azonos egy más ugyanolly hosszú darabjával; az első fordulás azonos a' másodikkal és minden következővel. Azért egy fordulása másikat tökéletesen fõdi, és a' kör magába visszatérõ vonal.

G. Önkimérés.

Ha valamelly adott forgásnak w' , a' haladás l' felel meg, mellynek hossza megkivántatik, és más pontra nézve a' haladás l és a' megfelelõ forgás w adva van, akkor lesz a' két egyenletbõl:

$$w' = al' \text{ és}$$

$$w = al$$

$$w : w' = al : al' = l : l' \text{ és abból:}$$

$$l = \frac{w' \cdot l}{w},$$

ha w' ismeretlennek vétetik, lesz:

$$w' = \frac{w \cdot l}{l'}$$

Jegyzés. A' kör' domborúsága és homorúsága (Convexitæt und Concavitaet) mindig a' belsõ oldalán marad.

§. 41.

Általános másod rendü egyenlet két változóval.

Ezen egyenletnek következõ alakja van:

(1) $Aw^2 + Bwl + Cl^2 + Dw + El + F = 0$
és abból:

$$(2) \quad w = \frac{Bl + D}{2A} \pm$$

$$\frac{1}{2A} \sqrt{\left[(B^2 - 4AC)l^2 + 2(BD - 2AE)l + (D^2 - 4AF) \right]}$$

$$(3) \quad l = \frac{Bw + E}{2C} \pm$$

$$\frac{1}{2C} \sqrt{\left[(B^2 - 4AC)w^2 + 2(BE - 2CD)w + (E^2 - 4CF) \right]}$$

A' (2) és (3) egyenletben az általános öszttevőknek nem csak minden lehető igenleges vagy nemleges értékek adathatnak, hanem (kivéve A és C öszttevőket) $= 0$ is lehetnek. Ha t. i. A és C, vagy csak egyik is $= 0$, akkor w és l , vagy azoknak egyike végetlen nagygyá, vagy is határozatlanná válik. Ezen föltétel alatt, tehát a' függvény (1) nem használható előbb történt változtatás nélkül.

§. 42.

Ha tehát az (1) egyenletben

$$A = 0 \text{ és}$$

$$B = 0,$$

C pedig véges értékű, akkor lesz:

$$(4) \quad Cl^2 + Dw + El + F = 0$$

Ezen egyenletnek taglalása.

1. Ha $D = 0$, $E = 0$ és $F = 0$, akkor marad:

$$Cl^2 = 0, \text{ vagy} \\ l = 0$$

vagyis a' kezdőpont.

2. Ha $D = 0$ és $E = 0$; vagy $D = 0$ és $F = 0$, akkor az egyenletnek egyenes vonal felel meg. Ha az első esetben az ösztévő F és C jegyei egyenműek, akkor ezen egyenes lehetetlen.

3. Ha $E = 0$, és $F = 0$, lesz:

$$Cl^2 + Dw = 0 \text{ és abból.}$$

$$(5) w = -\frac{C}{D} l^2, \text{ és}$$

$$(6) l = \pm \sqrt{-\frac{D}{C} w}$$

Ha C és D -nek ellenkező jegyei vannak, akkor lesz:

$$(7) w = \frac{C}{D} l^2 \text{ és}$$

$$(8) l = \pm \sqrt{\frac{D}{C} w}$$

α) Ha $l = 0$, lesz egyszersmind $w = 0$.
t. i. a' görbének első iránya a' kezdőpontban van.

β) Minden igenleges vagy nemleges haladásnak l csak egy igenleges értéke a' forgásnak w felel meg (7 szerint); azért a' görbének két ellenkező irányban haladó ága van, igenleges forgással (32. kép) a ce , és a $dé$.

(32. kép)

g) Ezen két ág azonos, mivel két egyenlő haladásnak, mellynek egyike igenleges, másika pedig nemleges, a' forgásnak csak egy értéke felel meg. Ha $l = \infty$, lesz egyszersmind $w = \infty$, t. i. ezen két ág végtelen haladással, vég nélkül forog.

δ) Csak ezen két ág lehető, mert (8) alatti egyenlet szerint nemleges forgás w ad lehetetlen haladást.

A' (5) és (6) két egyenlet ugyanazon görbét foglal magában; a' nemleges állandó miatt (32. kép) annak helyzete a' c' d'. (32. kép).

4. Ha $D = 0$, lesz

$$(9) \quad l = -\frac{E}{2C} \pm \sqrt{\frac{E^2 - 4FC}{4C^2}}$$

t. i. két egyenesnek egyenlete, vagy ha $4FC$ igenleges, és $> E^2$, akkor két lehetetlen egyenest foglal magában.

5. Ha $E = 0$, lesz;

$$(10) \quad w = -\frac{C}{D} l^2 - \frac{F}{D}, \text{ és}$$

$$(11) \quad l = \pm \sqrt{-\frac{D}{C} w - \frac{F}{C}}$$

Ha a' (10) egyenletben C és D , F és D -nek jegyei ellenkezők, akkor van:

$$(12) \quad w = \frac{C}{D} l^2 + \frac{F}{D}$$

Ha $l = 0$, lesz $w = \frac{F}{D}$, t. i. a' kezdőpontban levő irány az első iránynyal képi a' szöget $< \frac{F}{D}$. Egyébiránt a' (7) és (12) egyenletnek ugyanazon görbe felel meg; mert ha a' (13) alatti egyenletben w helyett $w + \frac{F}{D}$ iratik, lesz:

$$w + \frac{F}{D} = \frac{C}{D} l^2 + \frac{F}{D} \text{ vagy}$$

$w = \frac{C}{D} l^2$, melly ismét a' (8) alatti egyenlet.

Valamint a' körnek, úgy ezen görbének is 6 külön helyzete lehet, a' mint az (5), (7) és (10) egyenletekből kivehető.

6. Ha a' (4) egyenletben $F = 0$, C és D , E és D jegyei pedig ellenkezők; lesz:

$$(13) w = \frac{C l^2 + E l}{D} \text{ és}$$

$$(14) l = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2}}{2C}$$

Ha $l = 0$, lesz egyszersmind $w = 0$; t. i. az első irány a' kezdőpontban van. Minden igenleges l haladás ad igenleges w forgást, és ha az igenleges haladás nő, akkor w is növekedik, míg végtére ha $l \rightarrow \infty$, egyszersmind $w = \infty$. Az igenleges ág tehát végetlen haladással, végetlenül forog (32. kép cef), feltéve, hogy c (32. kép)

a' kezdőpont és con az elsőirány. Ha l nemleges, w is nemleges lesz eleintén, ezen nemleges w forgás nő nemleges haladásokra nézve addig, míg maximummá lesz; ezentúl pedig fogy, míg $= 0$ -vá válik, azután igenleges forgásba megy által, és abban w nő, míg végtére $= \infty$. Hogy a' nemleges l haladásnak azon értékeit találhassuk, melyekre nézve a' w forgás maximum, szükség lesz a' mennyiséget $Cl^2 + El$ tekintetbe venni; mert ha $Cl^2 + El$ értéke maximum, akkor w értéke is legnagyobb lesz. Ha tehát ezen maximum $= M$, lesz:

$$Cl^2 + El = M, \text{ és abból}$$

$$(\alpha) \dots l = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4CM}}{2C},$$

M értéke legnagyobb, ha általánosan:

$$M = \pm \infty,$$

itt csak $+\infty$ használható, és azért lesz

$$l = \pm \infty;$$

mivel az l haladás nemlegesnek tétetik föl, azért vétesék az alsó érték:

$$l = -\infty;$$

ezen értékre nézve az igenleges w forgás maximum, mivel $M = +\infty$ vétetett.

A' forgásnak nemleges maximumára nézve vétesék (α) -ban:

$$E^2 + 4CM = 0, \text{ és abból lesz:}$$

$$M = -\frac{E^2}{4C}$$

ezen érték (α) -ba téve;

$$l = - \frac{E}{2C};$$

ha tehát $l = - \frac{E}{2C}$, akkor a' nemleges forgás maximumát éri el.

Hogy a' nemleges l haladásnak még azon értékeit találhassuk, melyekre nézve a' nemleges forgás minimum = m, szükséges lesz a' következő egyenletet feltenni:

$$Cl^2 + El = m$$

és abból:

$$l = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4Cm}}{2C}$$

m-nek legkisebb értéke:

$$m = 0 \text{ és azért:}$$

$$l = \frac{-E \pm E}{2C}, \text{ tehát}$$

$$\text{vagy } l = 0$$

$$\text{vagy } l = - \frac{E}{C}.$$

Ezen vizsgálatokból kivehető, hogy a' (13) alatti egyenletben a' kezdőponttól:

$$l = e \text{ kezdve}$$

a' nemleges haladásig:

$$l = - \frac{E}{2C} \text{ a' w forgás nem}$$

legesen nő; innen a' haladásnak értékeig

$l = - \frac{E}{C}$ a' nemleges forgás mindig fogy's l-nek

ezen értéke mellett: $w = 0$; innentől minden nagyobb nemleges haladásra nézve a' forgás igenlegesen nő és vég nélkül.

Ha (32. kép) $ca = l = - \frac{E}{2C}$, és (32. kép)

$$cd = l = - \frac{E}{C},$$

akkor az a pont egy *fordulatpont*, mivel c -től a -ig a' nemleges forgás nő, a -tól pedig fogy; d pontban ismét a' görbének első iránya van, mivel abban $w = 0$.

Ezen d ponttól fogva a' forgás igenleges.

Mivel a' két pont c és d , mellyben a' görbének első iránya van, a' fordulat' pontjától egyenlő távolságra esnek; azért gyanítható, hogy az a ponttól kezdve a' görbének két azonos ága van. Annak megvizsgálatára tétessék a' kezdőpont c , a pontra; mivel

$$ca = - \frac{E}{2C},$$

lesz, ha ezen érték a' (13) egyenletbe tétetik:

$$w = - \frac{E^2}{4CD}.$$

Ha tehát l helyett $l = - \frac{E}{2C}$, iratik

és w helyett $w = - \frac{E^2}{4CD}$, akkor

lesz a' (13) és (14) alatti egyenletben:

$$(15) \dots w = \frac{C}{D} l^2 \text{ és}$$

$$(16) \dots l = \pm \sqrt{\frac{D}{C} w}.$$

Melly két egyenlet ugyanazon már ismeretes görbének felel meg, tehát a' (13) és (14) alatti is csak ezen

görbét foglalja magában. Ezen két egyenletből kivehető, hogy a' két ág azonos.

(13) és (14) szerint, az ösztevők' jegyeire nézve a' görbének itt is több helyzetei vannak.

7. Ha a' (4) egyenletben mind a' 4 ösztevő véges értékű, akkor lesz:

$$Cl^2 + Dw + El + F = 0, \text{ és abból:}$$

$$(17) w = \frac{-Cl^2 - El - F}{D},$$

$$(18) l = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2 - 4CF}}{2C}.$$

a' (18) alatti egyenletben C és D , E és F jegyei ellenkezők. Ezen két egyenletnek is ugyanazon már eddig leszarmaztatott görbe felel meg.

Mivel pedig, ha $l = 0$,

$$w = -\frac{F}{D},$$

azért az első irány' pontja a' kezdőponttal nem esik össze.

Az eddigi vizsgálatokból következik, hogy az általános egyenletnek:

$$Cl^2 + Dw + El + F = 0$$

csak egy görbe felel meg, 's annak legegyszerűbb alakja:

$$w = \frac{C}{D} l^2, \text{ vagy, ha rövidség' okáért } \frac{C}{D} = a,$$

lesz:

$$w = al^2$$

Krause úr ezen görbét „*parabola originaria longitudinalinaris*“nak nevezi.

§. 43.

A' $w = a^2$ egyenletnek taglalása.

A. A' görbének folyama általánosan véve.

A' görbének a' kezdőponttól két, ellenkező irányban elterjedő, végetlen hosszú, azonos ága van, mind a' kettő igenleges 's végetlen forgással.

B. Átmenőpontok.

A' kezdőpont egy fordulatpont, a' görbének többi pontjai mind közönségesek (33-dik § szerint).

C. Görbülés' foka.

Külzelés által van:

$$dw = 2aldl, \text{ és abból}$$

$$\frac{dw}{dl} = 2al = k.$$

D. A' legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

A' legkisebb görbülés' pontja a' kezdőpont a , mivel, ha a' görbülés' egyenletében $l=0$, egyszersmind $k=0$, vagyis a' görbülés $=0$. Ha $l = \pm \infty$, akkor lesz $k = \pm \infty$,

t. i. a' legnagyobb görbülés' két pontja fekszik a' kezdő-ponttól két ellenkező irányban végetlen távolságra, vagyis a' görbe mindig a' legnagyobb görbülés' pontjaihoz közelget, a' nélkül, hogy azokat valaha elérné.

E. Görbülés' aránya 's hasonlatosság.

Az arány:

$k: k' = 2al; 2a\gamma = l:$ γ azt mutatja, hogy a' görbülés' fokai úgy vannak egymáshoz, mint a' megfelelő haladások, vagy

$$\text{mivel } l = \pm \sqrt{\frac{w}{a}}, \gamma = \pm \sqrt{\frac{w'}{a}},$$

ugymint a' forgások' négyszög gyökerei is. Azon görbének más példájára nézve van,

$$W = AL^2$$

annál is a' görbülés' aránya

$$L: L',$$

tehát hasonlóan fekvőpontokra nézve:

$$l: l' = L: L', \text{ vagy}$$

$$\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{a}}: \frac{\sqrt{w'}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{A}}: \frac{\sqrt{W'}}{\sqrt{A}}, \text{ és abból}$$

$w: w' = W: W'$, és ha a' forgás' egysége különböző, lesz

$$W = nw, W' = n'w', \text{ tehát}$$

$$w: w' = nw: n'w', \text{ vagyis}$$

$$w: w' = w: w'$$

ezen egyarány helyes, tehát a' görbének alakja nem vál-

tozik, 's csak egy görbülés' módja van. Ezen görbék' egymás közti különbsége tehát csak nagyságait illeti.

F. Önkizárás.

A' mondottakból látható, hogy a' görbének két ága mindig jobban hajol be, 's hogy minden következő fordulás az előbbit zárja ki. Ezen görbe tehát a' kettős be fele tekert tekervényekhez tartozik (Doppel-Spiralen).

G. Önkimérés.

Az egyarányból

$$l: l' = \sqrt{w}: \sqrt{w'}, \text{ és}$$

$w: w' = l^2: l'^2$, következik, hogy az ív' hosszai úgy vannak egymáshoz, mint a' forgások' négyszöggyökerei, vagy megfordítva, a' forgások úgy állanak egymáshoz, mint másod fokai az ív' hosszainak.

Jegyzés. A' két ág' homorusága a' görbének belső oldalán van, 's a' fordulatpontban másik oldalára megy által.

§. 44.

A' görbének $w = a l^2$ váltógörbéje (Wechselkrumme).

Váltógörbéknek neveztetnek azok, mellyeknek egyikénél a' haladás épen úgy függ a' forgástól, mint másikonál a' forgás a' haladástól.

A' szerint tehát :

$$Al = \frac{B \log w}{w}, \text{ és } Aw = \frac{B \log l}{l}$$

váltógörbéknek két egyenlete.

A' $w = al^2$ vonalnak váltógörbéje tehát

$$(1) \quad l = aw^2, \text{ és abból}$$

$$w = \pm \sqrt{\frac{l}{a}}$$

§. 45.

A' görbének: $l = aw^2$ taglalása.

A. A' görbének folyama általánosan véve.

1. A' görbének első iránya, a' kezdőpontban van, mivel $l = 0$, ad

$$w = 0. \quad (33. \text{ kép}) \quad a \text{ pont.} \quad (33. \text{ kép})$$

2. Minden, valamint igenleges, úgy nemleges értéknek w , csak egy igenleges érték l felel meg; azért a' kezdőponttól két ág, igenleges haladással, az egyik igenleges forgással

(33. kép) abc, a' másik nemleges forgással terjed. (33. kép)

(33. kép) a b' c'. (33. kép)

3. Nemleges haladásokra nézve a' forgások lehetetlenek; azért a' görbének csak ezen két ága van.

4. Egyenlő igenleges és nemleges forgásoknak egyenlő haladások felelnek meg; azért a' két ág azonos.

5. Minél nagyobb a' w igenleges vagy nemleges értéke, annál nagyobb az l ; és ha $w = \pm \infty$, lesz $l = \infty$; t. i. a' görbének két ága vég nélkül halad végtelen forgással.

B. Átmenőpontok.

Mivel a' haladások a' kezdőponttól csak igenlegesek, a' forgások ellenben valamint igenlegesek, úgy nemlegesek is, azért a' kezdőpont egy csúcs (33-dik § szerint) a' görbének többi pontjai pedig mind közönsek.

C. Görbülés' foka.

Külzelés által van:

$$\frac{dw}{dl} = \frac{1}{2aw} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} = k.$$

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

1. Ha $w = 0$, lesz $k = \infty$: a' legnagyobb görbülés' pontja tehát a' kezdőpontban létezik.

2. Minél nagyobb a' w , annál kisebb a' k , és ha $w = \infty$, k végtelenül kicsiny lesz. A' görbülés' nagysága tehát a' kezdőponttól fogva mindig fogy.

E. Görbülés' aránya, 's hasonlatosság.

A' görbülés' arányából

$$k : K = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w'} = w' : w$$

következik, hogy a' görbének változatlan alakja van. A' különbség ezen görbék közt tehát csak nagyságait illeti.

F. Önbezárás.

A' görbülés' módjából következik, hogy a' két ág-nak minden következő fordulása az előbbit zárja be. A' görbe tehát egy *kifelé tekert kettős tekervény*.

G. Önkimérés.

Az egyarány:

$$l : l' = aw^2 : aw'^2 = w^2 : w'^2$$

azt mutatja, hogy az ív' hosszai, vagyis a' haladások a' kezdőponttól úgy vannak egymáshoz, mint a' megfelelő forgásoknak másod fokai.

1-ső *Jegyzet.* A' homoruság mind a' két ágnál bel-ső oldalán marad.

2-dik *Jegyzet.* Az $l = aw^2$ egyenletnek megfelelő görbét Krause úr „*parabola originaria angularis*“nak nevezi.

§. 46.

Ha az általános egyenletben:

$$Aw^2 + Bwl + Cl^2 + Dw + El + F = 0,$$

$B = 0$, $E = 0$, és $F = 0$, továbbá:

$A = C = -D = 1$; akkor lesz:

$w^2 + l^2 - w = 0$, és abból:

$$(1) \quad l = \pm \sqrt{w - w^2} \text{ és}$$

$$(2) \quad w = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - l^2};$$

ezen két egyenlet függőleges öszrendesekre nézve a' kör' egyenlete, feltéve, hogy a' kezdőpont az átmérőnek = 1 vég pontján, vagyis a' kör' kerületén van.

§. 47.

Az (1) és (2) alatti egyenletnek taglalása.

A. A' görbének folyama általánosan véve.

1. Ha az (1) egyenletben $w = 0$, lesz egyszersmind $l = 0$. t. i. a' görbének első iránya a' kezdőpontban van (34. kép) α pont.

2. Nemleges forgásra nézve lehetetlen a' haladás, igenleges forgásoknak pedig, a' haladásnak két ellenkező és azonos értéke felel meg. A' görbének tehát csak két és pedig azonos ága van; az egyik a' kezdőponttól α (34. kép) ab igenleges, a' másik ag nemleges; mind a'

kettőnek pedig igenteges forgása van. Azért a' kezdőpont egy fordulatpont (33-dik §).

2. A' gyökér miatt nem lehet $w - w^2$ értéke nemleges, azért a' föltétel

$$w - w^2 = 0$$

a' forgásnak legnagyobb értékét határozza meg; 's abból van:

$$w = 1$$

tehát a' forgás' egysége a' kezdőponttól számítva, a' forgásoknak határa. Legyen ezen egység = 2 R.

4. A' haladásnak l legnagyobb értéke következik az (2) egyenletből; melly szerint a' föltétel áll:

$$\frac{1}{4} - l^2 = 0, \text{ és abból}$$

$$l = \pm \frac{1}{2}.$$

Ezen értékre nézve lesz:

$$w = \frac{1}{2}.$$

A' haladásnak legkisebb értéke = 0, és azért lesz

$$\text{vagy } w = 0,$$

$$\text{vagy } w = 1.$$

5. Az eddigi vizsgálatokból következik, hogy $w = 0$ -tól kezdve, $w = \frac{1}{2}$ -ig l -nek értéke 0-tól nő, míg $l = \frac{1}{2}$; w -nek nagyobb értékére nézve, a' haladás l fogy, és ha $w = 1$, lesz $l = 0$. Mivel tehát a' b pontban, mellyre nézve $l = \frac{1}{2}$ és $w = \frac{1}{2}$ a' haladás ellenkező irányba megy át, a' forgás pedig nem, azért a' b pont egy csúcs. (34. kép), (33-dik §).

(34. kép)

Legyen f ezen pont, melyre nézve

$$w = 1$$

$$l = 0:$$

akkor lesz adf az igenleges ág, mellyel azonos a' nemleges agh ; itt g -pontra nézve

$$l = -\frac{1}{2}, \text{ és}$$

$$w = \frac{1}{2}$$

h pontra nézve

$$l = 0$$

$$w = 1.$$

A' két csúcs b és g közt a' közepén létezik a' fordulatpont a .

6. Ha $w > 1$, akkor a' haladás lehetetlen, 's azért f -től fogva a' w forgás megint fog, és valamint a' haladás b -től f -ig fogyott, úgy innen megfordított rendben nő, addig míg $w = \frac{1}{2}$, melly értékre nézve ismét $l = \frac{1}{2} = fm$.

Ámbár a' folyam df , d -től a -ra tekintve, nemleges, mégis az egész folyam adf igenleges, 's azért f -től is, az igenleges haladásnak folytatása, egynemű marad m pontig; mivel pedig f pontban a' forgás ellenkezővé válik, azért f ismét egy fordulatpont, úgy m ismét egy csúcs 'stb. Ugyanaz áll a' nemleges ágról $agh'm'$. A' mondottakból következik, hogy minden két csúcs közt, a' középső pont, f , a , h egy fordulatpont, 's megfordítva, minden két fordulatpont közt a' középső pont m , b , g , m' egy csúcs.

A' (2) egyenletben a' haladások kettős értéke 's a' gyökér miatt képzelhető, hogy a' görbének négy á-

ga van; de midőn a (2) egyenlet szorosabban vizsgálta-
tik meg, akkor kitetszik, hogy a' görbének csak két á-
ga van.

Ha a' kezdőpont a tétetik d pontra, vagyis a' csúcs-
ra, akkor w helyett tétessék az (1) és (2) egyenletben
 $w + \frac{1}{2}$, l helyett pedig $l - \frac{1}{2}$, melly értéknél fogva
lesz:

$$(\alpha) \dots l = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - w^2} \text{ és}$$

$$(\beta) \dots w = \pm \sqrt{1 - l^2}.$$

Ezen két alakból következik, hogy azon vonalnak váltó-
görbéje önmaga a' leszarmaztatott vonal.

B. Átmenőpontok.

Az eddigi vizsgálatokból látható, hogy ezen gör-
bének vannak átmenőpontjai, t. i. a' fordulatpont és a'
csúcs, mellyeknek száma végetlen a' görbe' végetlen
folyamában.

C. Görbülés' foka.

A' (β) egyenletből következik külzelés által:

$$dw = \frac{dl - 2l \, dl}{2\sqrt{1 - l^2}}, \text{ vagy}$$

$$(\vartheta) \frac{dw}{dl} = \frac{1 - 2l}{2\sqrt{1 - l^2}} = k.$$

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

$$\text{Ha } k = \frac{1 - 2l}{2\sqrt{1 - l^2}} = 0, \text{ lesz}$$

$$1 = 2l = 0, \text{ és abból:}$$

$$l = \frac{1}{2}$$

a' legkisebb görbülés' pontja tehát a' fordulat-pont.

Ha (s)-ban $2\sqrt{1-l^2} = 0$, melly érték mellett k maximum; akkor lesz:

$$1 - l^2 = 0 \text{ vagy}$$

$$l(1-l) = 0, \text{ tehát}$$

$$\text{vagy, } l = 0, \text{ vagy } l = 1 = 0, \text{ és abból}$$

$$l = 1.$$

Mivel pedig a' pontok

$$l = 0 \text{ és}$$

$$l = 1$$

a' csúcs' pontjai, azért ezen görbének legnagyobb görbülés' pontjai a' csúcsok.

E. Görbülés' aránya's hasonlatosság.

1. A' görbülés' aránya:

$$k : k' = \frac{1 - 2l}{2\sqrt{1-l^2}} : \frac{1 - 2l'}{2\sqrt{1-l'^2}}$$

2. Az (1) és (2) egyenletnek megfelelő görbék csak akkor hasonlóak, ha azoknál a' forgás' egysége ugyanaz, ha tehát $w = W$, és $w' = W'$. A' különbség ezen görbék közt annál nagyobb, minél nagyobb a' különbség ezen (34. kép) egységek közt. Az egységnek $= 2R$, a' (34. kép) alatti görbe felel meg

Az egységnek = $4R$, (35. kép) (35. kép)

” ” = $8R$, (36. kép). (36. kép)

Az egységnek = $8R$ megfelelő görbét
(36. kép) Peters *szivlantnak* (*Lyra cordis*) (36. kép)
nevezi.

§. 48.

Az általános egyenletből:

$$Bw + Dw + El + F = 0,$$

következik egyszerűítés által:

$$(1) w = a \frac{1}{l};$$

ezen vonalnak váltógörbéje önmaga a' görbe,
melly Krause úr után *Curva reciproca* vagyis
antilogának neveztetik.

§. 49.

*Az (1) egyenletnek vagyis a' görbének $w = a \frac{1}{l}$
taglalása.*

A. A' görbének folyama általánosan véve.

1. Minden igenleges vagy nemleges haladásnak igenleges vagy nemleges forgás felel

meg. A' görbe tehát egy igenleges és egy nemleges ágból álló; mind a' két ág végnélkül terjed elő.

2. Mivel egyenlő igenleges vagy nemleges haladásnak egyenlő igenleges vagy nemleges forgás felel meg; azért ezen két ág azonos.

3. A' forgás már a' kezdőpontban végetlen nagy, mivel $l = 0$ ad $w = \infty$. Hol ellenben a' haladás már végetlen nagy, ott az első irány létezik, mivel $w = 0$ ad $l = \infty$. Az (1) egyenlet tehát azt kívánja, hogy a' haladásokat a' kezdőponttól számítván, a' forgások ezen végetlen távolságra levő ponttól számíttassanak, mellyben az első irány van. A' görbe' alakításánál szükséges lesz, azt valamelly felvett pontból m (37. kép) tekintetbe venni. Legegyszerűbb, ha ezen pont a' haladásnak $l = 1$ felel meg. Az első irány legyen m' . Ha $l = 1$, lesz $w = a$, 's ha ezen szög $a = R = 90^\circ$, akkor m pontban a' görbének iránya lesz mr' . Ha most a' haladás m -től vissza felé, azaz k felé vétetik, akkor w értéke nő; tehát igenleges forgás közben a' haladás nemlegesen azaz r' felé történik. Az által képeztetik a' folyam mka , melly végetlen forgással közelgét a' kezdőponthoz a . Az (1) egyenlethől látható, hogy a' forgások az első iránytól kezdve a' kezdőpontig csak egyneműek, azért (32. §. szerint) egy közönséges pontból, mint

m, ellenkezők lesznek, míg tehát a' nemleges haladás m-től r' felé történt, addig a' forgás jobbra ment, vagyis mr'-től mk felé; az igenleges haladásra (mr) nézve, a' forgás balra, vagyis mr-től me felé történik. A' mi a' forgást mr-től me felé illeti, az nagyságára nézve mindig pótléka annak, melly egyenesen az egyenlethől következik, 's pedig pótléka a' forgáshoz $w = a$, itt a' fertálysöghez, mivel $a = 90^\circ$ vétetett. A' mondottak szerint képezetik az mbe rész, melly e ponttól végetlenül halad, 's mellynek iránya a' görbének első irányához mm' végnélkül közeledik; az m résztől k felé pedig végetlen forgással egy véges haladáshoz $= 1$ végnélkül közelget. Az igenleges ág tehát akmbe. A' mi az igenleges ágra nézve állítatott, ugyanaz a' nemleges ágra nézve is áll, melly az igenlegessel részarányos és azonos (37. kép) ak'm'bf.

(37. kép)

B. Átmenőpontok.

33-dik § szerint valamint a' kezdőpont, úgy ezen görbének többi pontjai is közönségesek. A' görbének tehát nincs átmenőpontja.

C. Görbülés' foka.

Külzelés által van :

$$dw = \frac{-a dl}{l^2} = -al^{-2} dl, \text{ vagy}$$

$$dw = -\frac{a}{l^2} = -al^{-2} = k.$$

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

1. Ha a' görbülés' egyenletében:

$$k = -\frac{a}{l^2},$$

$l = 0$, akkor lesz $k = \infty$; tehát a' legnagyobb görbülés' pontja a' kezdőpont.

2. Ha $w = 0$, lesz

$$k = -\frac{a}{l^2} = -\frac{aw^2}{a^2} = -\frac{w^2}{a} = 0,$$

t. i. a' legkisebb görbülés' pontja ott van, hol az első irány létezik, vagyis ott, hol a' haladás már végetlen nagy.

E. Görbülésarány 's hasonlatosság.

A' görbülés' aránya következő:

$$k : k' = \frac{-a}{l^2} : \frac{-a}{l'^2} = l'^2 : l^2$$

vagy, mivel $l^2 = \frac{a^2}{w^2}$,

$$k : k' = \frac{a^2}{w'^2} : \frac{a^2}{w^2} = w^2 : w'^2.$$

Ezen egyarányból következik, hogy az (1) egyenletnek $w = \frac{a}{l}$ megfelelő görbék hasonlók, mivel az egyarány:

$$w^2 : w'^2 = (nw)^2 : (n w')^2, \text{ mindig helyes.}$$

3-dik FEJEZET.

Az eredeti egyenleteknek átvitele az öszrendesek' rendszerére.

§. 50.

Legyen ab (38. kép) valamely görbének (38. kép) ívhossza; a' kezdőpont legyen a , 's ab görbének abban levő iránya aa' , melly egyszersmind első irány lehet; b pontban pedig legyen az irány bb' ; a' szerint lesz az ab ívnek irányváltozása $= \angle a'fb$.

Ha tovább $mn \perp aa'$,

$aa' \parallel bp$, akkor lesz:

$$\angle a'fb = \angle b'bp$$

tehát $b'bp$ szög által is az ab ívnek irányváltozása határoztatik meg; ap és bp vonal, és ha $cq \parallel bp$, egyszersmind aq és cq vonal is jelenti a' görbének függőleges öszrendeseit.

Ha an a' metszékek' tengelye, akkor

$$ap = x \text{ és}$$

$$bp = y$$

b pontnak öszrendesei.

Ha az ív' hossza $ab = l$ még a' végetlen kis dl megnyírással nő, úgy hogy $ac = l + dl$; akkor lesz

$$pq = bd = dx.$$

és $cd = dy$; c pontban legyen a' görbének iránya cc' , mellyet úgy tekinthetünk, mintha bb' irányával esnék össze, 's akkor lesz:

$$\angle c'c q = \angle b' b p = w.$$

$A' bcd$ háromszögből következik:

$$(1) \dots dx = dl \sin w \text{ és}$$

$$(2) \dots dy = dl \cos w; \text{ és ezekből}$$

$$(3) \dots \frac{dx}{dy} = \tan w.$$

Az (1) és (2) alatti alakokból következik még:

$$(\alpha) \frac{dx}{dl} = \sin w \text{ és}$$

$$(\beta) \frac{dy}{dl} = \cos w.$$

Az (1) és (2) egyenlet a' görbéknek kiegyenesítésére is használható (Rectification). Ha t. i. az ív' hosszának meghatározása vagy a' metszék vagy a' rendes által kívántatnék, akkor a' görbének eredeti egyenletéből vagy w vagy $\cos w$ vagy $\sin w$ értéke határozottatik meg, ezen talált érték tétetik az (1) vagy (2) egyenletbe és az által egy külzeléki egyenlet ered, x és l , vagy y és l közt, mellynek egészítése után, a' megkívántatott egyenlet x és l , vagy y és l közt találtatik, és abból l értéke határozottatható.

§. 51.

Hogy valamely görbének eredeti egyenlete, öszrendesekre vitethessék által, következő módok használhatók.

1. Az adott egyenlet' külzelése után, vagy az érték $\sin w$ vagy $\cos w$ határoztatik meg, első esetben tétessék ezen talált érték $= dx$, másodikban $= dy$, az által a' nyert külzeléki egyenlet egészítetik, 's az állandó adatik hozzá, miáltal egy egyenlet ered w és x , vagy w és y közt; abból pedig fölkerestetik az érték $\tan w = \frac{dx}{dy}$, 's ezen talált külzeléki egyenlet' egészítése a' kívántatott egyenletet adja.

2. Valamint x és w közti egyenlethől, úgy abból is, melly y és w közt találtatott, határoztassék meg w , vagy ugyanazon függvényének értéke; a' két értéket az egyenlet' jelével összekötvén, a' kívántatott egyenlet x és y közt van megtalálva.

§. 52.

A kör' eredeti egyenletének átvitele az öszrendesekre.

A' kör' egyenlete volt:

$$w = al.$$

Abból lesz külzelés által:

$$(1) \dots dw = adx.$$

Sin w által sokszorozva:

$$\frac{\text{Sin } w \text{ által sokszorozva:}}{\text{Sin } w \text{ dw} = adx \text{ Sin } w, \text{ vagyis}}$$

$$(2) \dots \text{Sin } w \text{ dw} = adx.$$

Ha az (1) egyenlet Cos w által sokszoroztatik, lesz
 $\text{Cos } w \text{ dw} = adx \text{ Cos } w$, vagyis

$$(3) \dots \text{Cos } w \text{ dw} = adx,$$

Ha az (2) és (3) egyenletet egészítjük: lesz;

$$(4) \dots - \text{Cos } w = ax + C \text{ és}$$

$$(5) \dots \text{Sin } w = ay + c.$$

Ha (2)ben $w = 0$, akkor egyszersmind $x = 0$,
 és ezen érték mellett (4)ben:

$$C = -1.$$

Ha (3) alatti egyenletben $w = 0$, lesz $y = 0$, és
 azért (5)ben:

$$c = 0.$$

Ha tehát az állandó (4) és (5)be tétetik, lesz:

$$(6) \text{Cos } w = 1 - ax \text{ és}$$

$$(7) \text{Sin } w = ay \text{ tehát}$$

$$\text{Cos } w^2 = 1 - 2ax + a^2x^2 \text{ és}$$

$$\text{Sin } w^2 = a^2y^2, \text{ abból}$$

$$\frac{\text{Sin } w^2 + \text{Cos } w^2 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2ax + 1}{\text{és mivel } \text{Sin } w^2 + \text{Cos } w^2 = 1. \text{ lesz:}}$$

$a^2y^2 + a^2x^2 - 2ax = 0$, vagy

$$y = \pm \sqrt{\frac{2x}{a} - x^2},$$

és ha $\frac{1}{a} = r$, lesz:

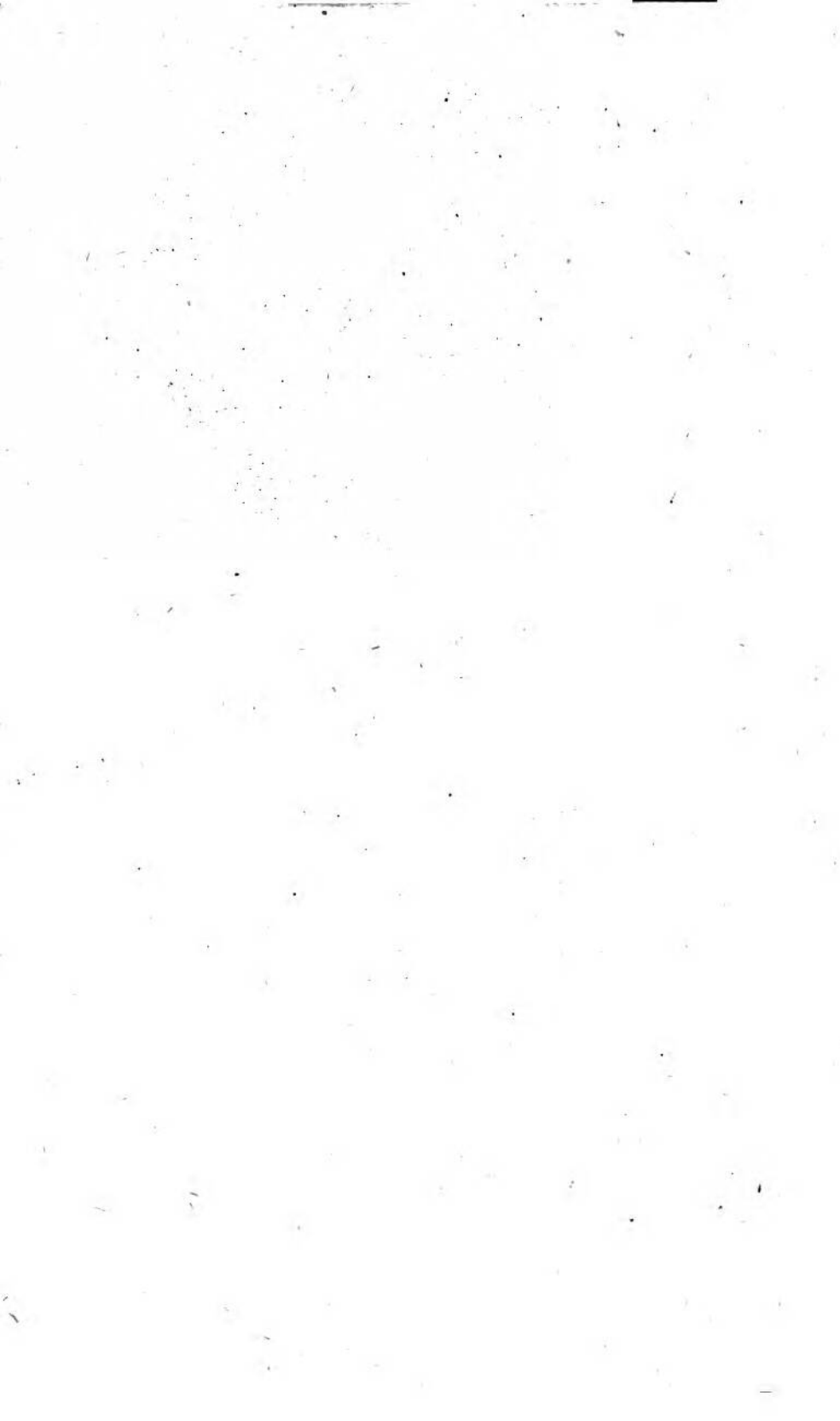
$$y = \pm \sqrt{2rx - x^2},$$

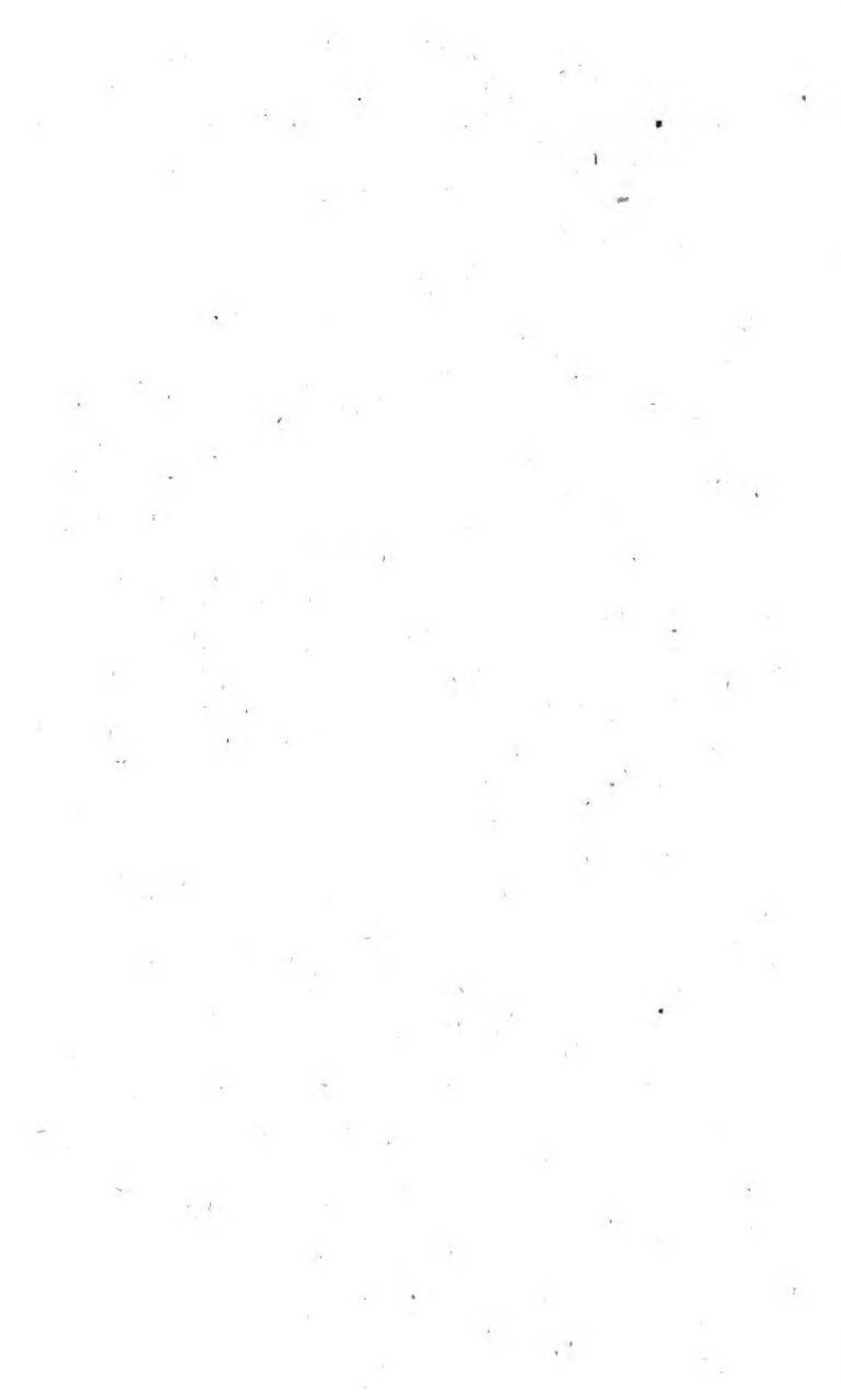
melly függőleges öszrendeseknek megfelelő *kör egyenlete*.

NYOMTATÁSI HIBÁK.

Lap.	Sor.		helyett	
8	8	BB'		BP''
8	9	BMB		BMP
9	12	NCX		$M''CX$
11	5	B'		P''
11	6	BB'		BP''
13	1	A		AB
25	13	$y' := NP$		$y' : NP$
26	21	$A'Q'' - AQ''$		$A'O'' - AO''$
32	14	$; el$		$el ;$
33	4	$+$		$=$
37	6	QP'		RP'
37	7	$=$		$-$
37	8	UP'		QP'
38	26	$CSin\pi^2$		$CSin\alpha^2$
39	2	$DCos\alpha + ESin\alpha$		$DCos\alpha - ESin\alpha$
39	13	$rSin\alpha Cos\alpha$		$2Sin\alpha Cos\alpha.$
41	16	$\frac{B}{A-C}$		$\frac{-B}{A-C}$
42	9	$vagy = 0$		$vagy M = 0.$
45	13	$- 0$		$= 0.$
49	12	$d'mc'$		$d'me'$
51	25	$C-C'$		$l-l'$
52	12	FHN		IHN
52	13	dto		dto
58	13	A'		A
65	15	qt		bt
72	28	$Cos W : Cos W'$		$Cos\omega : Cos\omega'$
75	11	h		$k.$
81	21	$l + \infty$		$l = \infty$
82	1	con		cm
83	18	$l = e$		$l = 0$
99	27	$d\omega$		$\frac{d\omega}{dl}$







Österreichische Nationalbibliothek



+Z157440908





