…SZERŰ FŐISKOLA KÖNYVTÁRA

BEVEZETÉS A DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁL-SZÁMÍTÁSBA

A NÉPSZERŰ FŐISKOLAI TANFOLYAM 1906-IK ÉVI II. SOROZATÁBAN TARTOTT ELŐADÁSOK

IRTA

DR BEKE MANÓ

BUDAPEST
FRANKLIN-TÁRSULAT
magyar irod. intézet és könyvnyomda
1908

NÉPSZERŰ FŐISKOLA KÖNYVTÁRA

SZERKESZTIK:

DR. FÖLDES BÉLA

DR. LÓCZY LAJOS, DR. ALEXANDER BERNÁT

V.

NÉPSZERŰ
FŐISKOLA KÖNYVTÁRA

SZERKESZTIK:

Dr. FÖLDES BÉLA

Dr. LÓCZY LAJOS, Dr. ALEXANDER BERNÁT

V.

BEVEZETÉS A DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁL-SZÁMÍTÁSBA

IRTA

Dr. BEKE MANÓ

BUDAPEST
FRANKLIN-TÁRSULAT
magyar irod. intézet és könyvnyomda
1908

BEVEZETÉS
A DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁL-SZÁMÍTÁSBA

A NÉPSZERŰ FŐISKOLAI TANFOLYAM 1906-IK ÉVI II. SOROZATÁBAN TARTOTT ELŐADÁSOK

IRTA

Dr BEKE MANÓ

BUDAPEST

FRANKLIN-TÁRSULAT

magyar irod. intézet és könyvnyomda

1908

Franklin-Társulat nyomdája.

SYLLABUS.

Első előadás: szerdán, február 21-ikén.

A mathematika rendeltetése: *a)* tünemények, események, jelenségek stb. rendezése, *b)* a jelenségek törvényszerűségének fogalmazása, a különféle törvények vizsgálata és *c)* a tünemények jövő lefolyásának megjóslása. E háromféle irányban akar az előadás betekintést nyújtani a felsőbb mathematika módszereibe.

Bevezetőül a tünemények stb. lefolyását feltüntető grafikus ábrázolással foglalkozunk (kereskedő jövedelme, árú értéke, statisztikai észlelések, nyomás és térfogat közötti összefüggés stb. stb.) Ebből megalkotjuk a függvény fogalmát. A változás képletbe foglalásával néhány egyszerű függvény mathematikai alakjával ismerkedünk meg, ezek menetét a Descartes-féle coordinata-módszer segítségével feltüntetjük és ezzel kapcsolatban néhány egyszerű vonalat ismertetünk: (egyenes, kör, parabola, ellipsis, hyperbola, sinus-vonal, tangens-vonal, cyclois).

Második előadás: szerdán, február 28-ikán.

A görbe emelkedésének és sülyedésének mértékét keressük. Ezzel az érintő fogalmára, az érintő irányának meghatározására jutunk. A függvény növekedési mértékét állapítjuk meg; ezzel néhány egyszerű példa tárgyalása a sebességhez és a differenciálhányados általános fogalmához vezet.

Néhány egyszerű függvény differenciálhányadosát határozzuk meg és bemutatjuk a differenciálhányados fogalmának alkalmazását a geometriában, fizikában, kémiában stb., ahol a változás mathematikai tárgyalásáról lehet szó.

Harmadik előadás: szerdán, március 7-ikén.

A gyorsulás fogalma rávezet bennünket a magasabb rendű differenciálhányadosokra. Ezt az új fogalmat alkalmazzuk a görbék görbületi viszonyainak ismertetésére. Úgy mint az első differenciálhányadosból a függvény növekedésére vonhattunk következtetést, úgy a második differenciálhányadosból az első differenciálhányados növekedési viszonyait ismerhetjük meg. Ezt az ismeretünket felhasználjuk a differenciálszámítás egyik legfontosabb alkalmazására: a függvények maximumának (minimumának) meghatározására. Erre vonatkozó gyakorlati példákat tárgyalunk.

Negyedik előadás: szerdán, március 14-ikén.

A végtelen sorra vonatkozó néhány egyszerű megjegyzés után a legfontosabb függvények sorbafejtésével foglalkozunk, hogy a logarithmus, a trigonometriai függvények kiszámításának módszerét ismertethessük.

Ötödik előadás: szerdán, március 21-ikén.

A területszámítás feladatából kiindulva, megismertetjük a határozatlan és a határozott integrál fogalmát. Néhány egyszerű integrálszámítási képlet megállapítása után a tárgyalt görbék által határolt területeket határozzuk meg, továbbá néhány egyszerű ívhosszúságot számítunk, egyszerű forgási testek köbtartalmát határozzuk meg, súlypontot és tehetetlenségi nyomatékot számítunk.

Hatodik előadás: szerdán, március 28-ikán.

Bemutatjuk a fizikus eljárását, midőn a sebességből, vagy a gyorsulásból a mozgás lefolyására következtet. Ez rávezet bennünket a differenciálegyenlet fogalmára. Néhány egészen egyszerű ilyen egyenlet megoldása után kis történeti visszapillantást vetünk e tudomány fejlődésére, különösen Archimedes, Apollonius, Galilei, Kepler, Descartes, Fermat, Leibnitz és Newton idevonatkozó munkásságának jellemzésével záródik az előadás.

AJÁNLOTT IRODALOM.

Zeuthen: Geschichte der Mathematik. I. II. (Kopenhagen. Höst & Sön. 1896. II. Teubner 1903.).

W. W. Rouse Ball: A short account of the history of Mathematics. (London. Macmillan and Co. 1901.).

Lorentz H. A.: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. (Leipzig. Barth 1900.).

Nernst-Schönflies: Einführung in die math. Behandlung der Naturwissenschaften. (München, Berlin. R. Oldenburg 1904.).

Meyer: Differential- und Integralrechnung (Sammlung Schubert). (Leipzig. Göschen 1905.).

Kiepert: Differential- und Integralrechnung. (Hannover Helwingsche Verlagsbuchhandlung. 1905.).

Czuber: Differential- und Integralrechnung. (Leipzig, Teubner 1906.).

Vivanti: Complementi die Matematica. (Milano, Hoepli 1904.).

Williamson: Differential-Calculus. Integral-Calculus. 2 köt. (London. Longmans, Green and Co. 1896.).

Perry: Höhere Analysis für Ingenieure. (Leipzig, Teubner 1902.).

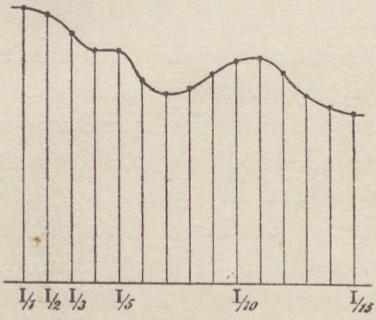
Tannery: Notions de Mathématiques. (Paris. Delagrave 1903.).

Burkhardt: Vorlesungen über die Elemente der Diff. und Integr. Rechnung (Leipzig, Teubner 1907.).

Tesař: Elemente der Diff. u. Int. R. (Leipzig, Teubner 1906.).

I. Előadás.

1. *Empirikus függvények; grafikus ábrázolás.* A grafikus ábrázolás manapság annyira divatos, hogy szinte túlzásba viszik. Ez a körülmény felment attól, hogy e modern registráló eljárás részletes tár-



1. ábra.

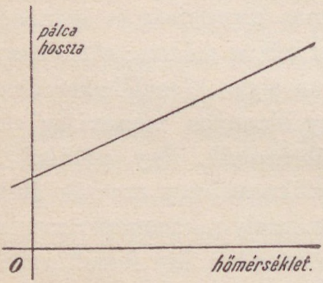
gyalásába bocsátkozzam. Csak egyes példákat akarok felemlíteni és célszerűségére akarok ráutalni.

A kereskedő napról-napra feljegyzi a bevételeit. Ha az esztendő lezártával végig nézi a listát, a sok szám összefolyik a szeme előtt és nem igen okul a sorozat láttán. De a modern kereskedő grafikusan tünteti fel a számadatokat. Legcélszerűbb, ha e végből egy ív millimeter-papirost vesz és úgy, mint az 1. ábránkban a vízszintes vonalra egyenlő közök végére [pl. 4 mm távolságban] felírja sorban az év napjait és e végpontokon átvonuló függélyes vonalakra, miután már előre megállapodott pl. abban, hogy minden mm hány koronát jelentsen, felméri a napi bevételének megfelelő hosszúságot. A vízszintes egyenesre rámért közöket, a kiinduló ponttól (kezdőponttól) számítva *abscissáknak* fogjuk nevezni; a függélyesen álló vonalakat pedig majd *ordinátáknak* hívjuk. Ha még az ordináták végpontjait rendre összeköti, esetleg egy oly görbével, mely e végpontokon, jól odasimulva, áthalad, akkor szépen áttekinthető módon registrálta a bevételeit. Sok mindenfélét olvashat le az ilyen görbéről. Nemcsak azt látja, amit ugyis tud, hogy a görbe mennyivel magasabbra emelkedik az egyes hónapok elején, mint a végén, hanem talán azt is megérzi ez a görbe, hogy a szomszédban konkurrens üzlet keletkezett és még sok más egyebet. Még tanulságosabb, ha az egyes árúcikkekből eladott mennyiséget tünteti fel grafikusan. Egy szempillantásra áttekintheti, hogy mely időszakokban van az egyes árúcikkeknek legnagyobb keletjük és ebből mindjárt azt a tanulságot is merítheti, hogy a jövőben mely árút, mikor kell nagyobb mennyiségben beszereznie.

Más, Önök előtt igen jól ismert grafikus táblázatok a statistikai táblák, melyek pl. a születések, a halálozások, a kivitel és bevitel stb. feltüntetésére szolgálnak. Sokszor beszélnek ezek a görbék oly hangosan, hogy az államférfiak is meghallják és egy-egy rohamos emelkedés, vagy sülyedés, vagy kisebb, de huzamosabb, állandó sülyedés állami, vagy társadalmi beavatkozást tesz szükségessé.

Baglyot vinnék Athénbe, ha ezekről a dolgokról sokat beszélnék. A most említett táblázatok mind egyes események összefoglaló áttekintésére szolgálnak; egyes, egymástól élesen elválasztott, ú. n. *diskrét* mennyiségek feltüntetését könnyítik meg. Igen sokszor más, ú. n. *folytonos* mennyiség is igen célszerűen ábrázolható ilyen grafikus módon; sőt bizonynyal ismernek mindannyian olyan készülékeket, amelyek arra szolgálnak, hogy bizonyos mennyiség változását automatikusan ábrázolják. Így például a barometer állását automatikusan úgy szokták ábrázolni, hogy egy mutató elé, mely a barometer magasságát jelzi és melyből állandóan híg festék szivárog, egy óraszerkezettel forgatott hengert illesztenek. E hengerre helyezett papirlapon, ha a mutató magasságát nem változtatná, kör iródnék le, amely a papirlap lefejtésekor vízszintes egyenes lesz. Ha azonban a nap folyamán a mutató magassága változik, akkor a barometer változását egy görbe vonal ábrázolja, mely az időjárás tanulmányozása szempontjából igen fontos.

Az észleléseinket mindig célszerű ilyen grafikus módon feltüntetni. A régiek, értve a görögöket, akik a mathematikában is oly szédítő magasságra emelkedtek, mint akár a művészetben, irodalomban és bölcseletben, bár a geometriát sokszor felhasználták elvont mathematikai viszonyok szemléltetésére, ezt még nem tették. Talán az első, aki e grafikus ábrázolást tudományos szempontból tárgyalta, a francia *Oresme*, vagy Horem püspök a XIV. században. Munkája, melynek címe: Tractatus de latitudinibus formarum sok kiadást ért; nyomtatásban megjelent: 1482-ben, 1486-ban, 1505-ben és 1515-ben. Magas szempontból fogta fel a dolgot, midőn a testek állapotváltozásainak feltüntetésére grafikus módszerhez folyamodott. Vízszintes egyenesen, amit manapság abscissa-tengelynek mondunk, tüntette fel a longitudo-t és az ordinatákkal a latitudot. Így pl. (1*a*) ábra) ha egy pálca hőokozta kiterjedését akarjuk feltüntetni, akkor az abscissa-tengelyre mérjük — bizonyos egység megválasztása után — a hőmérsékletet és megfelelően az egyes pontokban emelt ordinátákra mérjük — szintén az egység megállapítása után — az illető hőmérsékletnek megfelelő hosszúságot.



1*a*) ábra.

Ha a végpontokat összekötjük, akkor oly görbét kapunk, mely a melegített pálca állapotának összefoglaló áttekintésére szolgál. A kisérletező azonnal észreveszi, és nem kis örömére szolgál e tapasztalata, hogy a pálca állapotát feltüntető vonal *egyenes* lesz.

A felsorolt esetekben, ha a görbét elég pontosan rajzoltuk, az egyes abscissákhoz tartozó ordinatákat közvetlenül lemérhetjük. Lemérhetjük, hogy a kereskedőnek valamely meghatározott napon mekkora volt a bevétele, hogy egyes árúkból bizonyos napokon mennyit adott el, hogy bizonyos napon hányan születtek, hányan haltak meg, hogy bizonyos időpontban mekkora volt a barometer állása, bizonyos hőmérsékletnél mekkora volt a pálca hossza stb. stb.; szóval bizonyos abscissához mekkora ordináta tartozik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az ordináta nagysága az abscissa nagyságától függ; az ordináta az abscissa *függvénye* és pedig, minthogy az összefüggést észlelésekből állapítottuk meg, az ordináta az abscissának *empirikus függvénye.*

Ha az egyik mennyiséget, amelyet az abscissa-tengelyre mértünk [pl. az idő, a hőmérsék stb.] x-el jelöljük; a másikat, amelyet az ordinata-tengelyre mértünk, y-nal jelöljük, akkor azt, hogy a második az elsőnek függvénye, azaz, hogy az y értéke az x értékétől bizonyos meghatározott, a grafikus ábrázolással feltüntetett módon függ, így írjuk:

$$y = f(x)$$

és így olvassuk: y az x függvénye.

2. *Az állapot mathematikai feltüntetése. Mathematikai kifejezések geometriai ábrázolása.* A mathematikus nem elégszik meg a tüneményeknek a grafikus ábrázolásban foglalt registrálásával. Az összefüggések mathematikai fogalmazását keresi. Így pl.,

hogy az előbbi példánál maradjak, tudjuk, hogy ha 0°-nál a rúd hosszúsága 1 m, akkor t°-ra hevítve e rúd $1+\alpha t$ m hosszú lesz, ahol α a kiterjedési együttható. Ha t betű helyett x-et írunk és a rúd hosszát y-nal jelöljük, akkor

$$y = 1 + ax.$$

y az x-nek *első fokú függvénye*. Azt is tudjuk, hogy a c sebességgel egyenletesen mozgó test által t mp alatt leírt út: ct; vagy megint t helyébe x-et írva, a leírt út hosszát y-nal jelölve:

$$y = cx$$

egy még egyszerűbb első fokú függvény. A c kezdősebességgel felfelé hajított test t mp alatt $ct - \frac{gt^2}{2}$ magasságra emelkedik. Ha e magasságot y-nal jelöljük és t helyett megint x-et teszünk:

$$y = cx - \frac{gx^2}{2}$$

alakú kifejezésre jutunk. y az x-nek másodfokú függvénye. Ha a gázra p nyomás hat és térfogata v, akkor a gázok tanából ismeretes, hogy állandó hőmérsék mellett pv nem változik meg; mert a térfogat a nyomással fordítva arányos; azaz

$$pv = c,$$

ahol c állandó számot jelent. Ha v helyett x-et, p helyett y-t írunk, akkor

$$y = \frac{c}{x} \cdot$$

$$y = cx, \quad y = ax^2, \quad y = ax^3,$$
$$y = ax^4, \quad y = \sin x, \quad y = \log x,$$
$$y = a^x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \frac{c}{x},$$

stb. mindmegannyi függvények. Itt a, b, . . . számok meghatározott számértékek, az x pedig *változó*, vagyis egy bizonyos változó mennyiség mindenkori értékét fejezi ki. Az x-et *független változónak* is mondjuk, ellentétben az y-nal, mely szintén egy változó mennyiség mindenkori értékét fejezi ki; de y számértéke az x értékétől függ; ezért az y *függő változó*, vagy *függvény*.

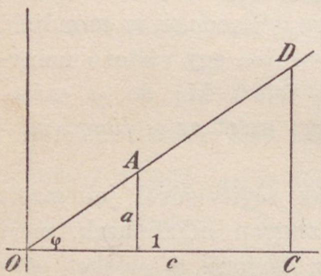
E mathematikai formulák segítségével jellemzett függvények a számításra nagyon alkalmasak, mert hiszen minden x értékhez tartozó y értéket egyszerű számítással, vagy miként a trigonometriai és logarithmus függvénynél, *a táblázat* segítségével meghatározhatjuk; de sokszor áttekinthetőbb az x és y közötti összefüggés, ha a mathematikai formulákban adott összefüggéseket is grafikusan tüntetjük fel.

Lássuk ezt néhány példán.

Az elsőfokú függvény ábrázolása. a) $y=ax$. Ha $x=1$, $y=a$. Mérjük fel az x tengelyre 1-et és a végpontban emelt merőlegesre az a hosszúságot. Ezzel megkaptuk az ábránk (2. ábra) egyik pontját [A-t]. Azt mondjuk, az A coordinátái: 1 és a. (Abscissája: 1, ordinátája: a.) Ha $x=0$, akkor $y=0$, tehát az ábránk egy másik pontja az O kezdőpont. Most már könnyen megmutathatjuk, hogy az $y=ax$ függvény menetét feltüntető ábra az OA egyenes. Ha ugyanis x helyébe 2, 3,... tétetik, akkor $y=2a$, $3a$,... s általában, ha $x=c$, akkor $y=ca$. Ha $OC=c$ és $CD=e$, akkor:

$$e : a = c : 1,$$

vagyis $e=ac$; tehát a grafikonnak a c abscissának megfelelő pontja az OA egyenesen van, vagyis valóban az $y=ax$ grafikonja a fölrajzolt egyenes. Éppen ezért ezentúl sokszor $y=ax$ egyenesről szólunk és egyrészt az egyenest tekintjük az $y=ax$ egyenlet képének, másrészt az $y=ax$ egyenletet tekintjük az OA egyenes képének. Azt is látjuk, hogy ha φ az OA egyenes hajlásszöge [az abscissa-tengellyel alkotott szöge] akkor $tg\varphi=a$. a-t éppen ezért az $y=ax$ egyenes *iránymeghatározójának* mondjuk.



2. ábra.

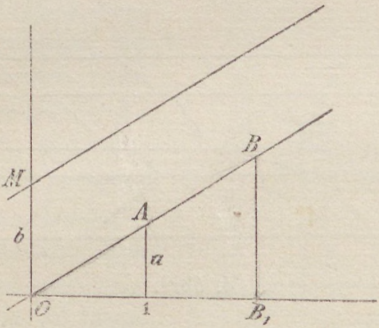
b) Az $y=ax+b$ ábrázolása. (3. ábra.) Az $y=ax$ egyenest ábrázolja az OA egyenes. Ez azt jelenti, hogy egy tetszésszerinti OB_1, abscissához tartozó B_1B ordinata a-szor akkora, mint OB_1, azaz

$$B_1B=a.\ OB_1.$$

Ha már most ezt az egyenest párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy $OM=b$ legyen, akkor nyilván, minden x-hez tartozó $y=ax$ ordinata b-vel megnövekedett; tehát ha most ismét az x abscissához tartozó ordinátát y-nal jelöljük,

$$y=ax+b.$$

Azt látjuk tehát, hogy az $ax+b$ elsőfokú függ-

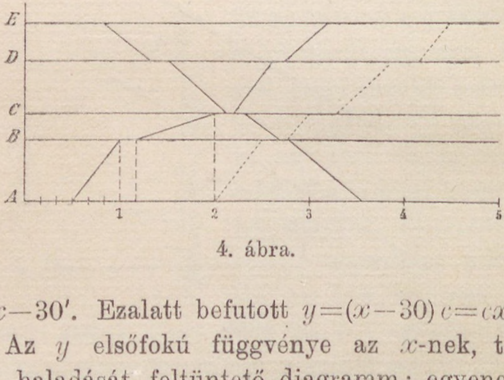


3. ábra.

vényt azon egyenes ábrázolja, mely az ordinata-tengelyből b nagyságú darabot vág le és az abscissatengelyhez olyan φ szög alatt hajlik, melynek tangense: a.

Az $ax+b$ alakú függvény ábrázolásának jó hasznát veszik a gyakorlat emberei. A vasuti közlekedés kaosában ez az áttekinthető schéma igazítja el a a vonatvezetőt. Megmutatom, ha még nem tudnák, hogyan. (4. ábra.)

Képzeljenek egy koordinata-rendszert. Az x tengelyen ábrázoljuk az időt 0-tól 24-ig és minden óraközt még 6 egyenlő részre osszunk, hogy 10 percnyi közünk legyen. Az y tengelyen ábrázoljuk a távolságot az A kezdőállomástól és külön megjelöljük az egyes állomásokat B, C,... és ezeken át az x tengellyel párhuzamos egyeneseket vonunk. Képzeljük, hogy egy vonat elindul az A állomásról $0^h\ 30^m$-kor és B-felé megy c középsebességgel. x időpontig el-

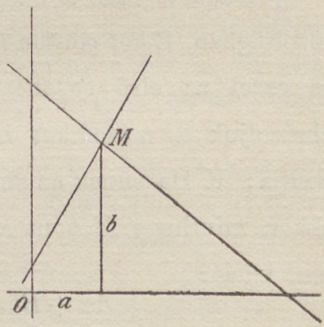


4. ábra.

telt $x-30'$. Ezalatt befutott $y=(x-30)c=cx-30c$ utat. Az y elsőfokú függvénye az x-nek, tehát a vonat haladását feltüntető diagramm: egyenes. Ezt legegyszerűbben úgy szerkeszthetjük meg, hogy megállapítjuk, mikor ér B állomásra. Ha péld. 1 órakor ér B állomásra, akkor $x=60$-nak $(60')$ megfelelő y éppen AB lesz; tehát a diagramm ezen részét megkapjuk, ha az x tengelyen a $30'$-nak megfelelő végpontot összekötjük a B-n át húzott vizszintes vonalon a 60-nak (illetőleg 1 órának) megfelelő ponttal.

Ha a vonat a B állomáson $10'$-et vesztegel, akkor

$x=70$-nek is csak OB felel meg, vagyis a diagramm további része a 60-tól 70-ig húzott vizszintes vonaldarab. E vonat haladását feltüntető további rész éppen így készítendő el. Ennek az egyenes darabokból álló vonalnak az a fontos szerepe, hogy minden időpontban azonnal megmondható, hogy a vonat hol van; tehát ez egy *grafikus menetrend*. De ugyanerre a lapra rajzoljuk az AE állomások közt haladó összes vonatok diagrammjait. Az ábrából látjuk, hogy melyek a gyorsabb, melyek a lassúbb vonatok. A meredekebbek a gyorsabbak, mert $y=$ $=cx-30c$ egyenletben c — a sebesség — egyszersmind az egyenes hajlásszögének tangense. Azt is látjuk, hogy az egyes vonatok diagrammjai hol keresztezik egymást, amit a menetrenden ilyen áttekinthetően nem szemlélhetnénk.



5. ábra.

Az elsőfokú függvény ábrázolásának egy másik gyakorlati hasznáról is akarok még szólni (5. ábra): az *elsőfokú egyenletrendszer grafikus megoldásáról*. Ha ugyanis két elsőfokú egyenletből álló rendszer van adva:

$$Ax+By+C=0, \qquad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

akkor ezáltal két egyenes van jellemezve. Hiszen az első így írható: $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$, a második pedig $y = -\frac{B_1}{A_1}x - \frac{C_1}{A_1}$, tehát nyilván mindkettő egyenest ábrázol.] Ezek az egyenesek igen könnyen megszerkeszthetők. Ha ugyanis $x=0$, akkor $y = -\frac{C}{A}$ és ha $y = 0$, $x = -\frac{C}{B}$. Ezzel az első egyenesnek 2. pontját határoztuk meg. Az egyik az y tengelyen van $-\frac{C}{A}$ magasságban, a másik az x tengelyen $-\frac{C}{B}$ távolságban. E két ponton át meghúzzuk az egyenest, és ezzel az első egyenest ábrázoltuk. Éppen így ábrázoljuk a másodikat is. A két egyenes metsző pontja: M. Ha ennek az abscissája: a, ordinatája: b, akkor, minthogy M pont rajta van mindkét egyenesen, tehát:

$$Aa + Bb + C = 0$$
$$A_1a + B_1b + C_1 = 0,$$

vagyis $x=a$, $y=b$ az adott egyenletrendszer megoldása. Látjuk tehát, hogy elsőfokú egyenletrendszer megoldása nem más, mint két egyenes metszéspontjának meghatározása.

Talán nem lesz felesleges, ha megmutatom, hogy több ismeretlenű egyenletrendszert is hogyan lehet grafikusan megoldani. Jó az ilyen eljárást ismerni már csak azért is, hogy nem nagy pontosságot igénylő számításoknál ezt a grafikus eljárást követhessük és másrészt, hogy ezáltal számításaink megbizhatóságát is ellenőrizzük.* Legyen adva például ez a három egyenlet:

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

Húzzunk egy tetszésszerinti függélyes egyenest és erre bárhol három merőlegeset.

Az 1-re O_1 ponttól felmérjük a_1, b_1, c_1, d_1 számértékeket [bizonyos egység megválasztása után] és pedig a positivokat jobbfelé, a negativokat balfelé. Így pld. $O_1A_1=a_1$ stb. Éppen így a 2-re az O_2 ponttól kezdve fölmérjük az a_2, b_2, c_2, d_2, számértékeket. Kössük össze az A_1 és A_2 pontokat. Az A_1A_2 egyenes metszi a függélyes vonalat A'-ben. Ezen át ismét vizszinteset vonunk és meghatározzuk a B_1B_2-nek C_1C_2-nek, D_1D_2-nek e vizszintessel való B', C', D' metszéspontjait. Vajjon mekkora az $A'B'$?

Az $O_1B_1B_2O_2$ trapéz egyik középvonala az $A'B'$ és pedig az a középvonal, mely az O_1O_2 oldalt oly arányban osztja, mint $a_1 : -a_2$, azaz:

$$O_1A' : A'O_2=a_1 : -a_2.$$

De ha általában egy trapézben az AC oldalt felosztom $m : n$ arányában, (6. ábra) akkor

$$BE : D_1D=B'E : B'D_1=AA_1 : A_1C=m : n$$

* Ha a t. olvasónak tetszik, ezen alkalmazás elolvasását későbbre is halaszthatja és áttérhet a *c)* alattira.

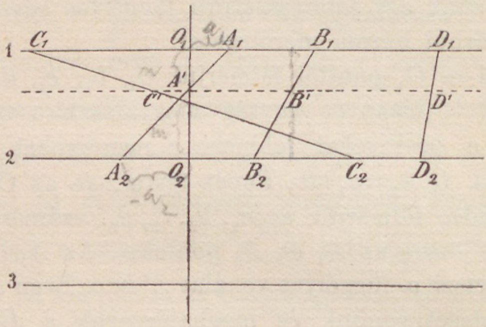
azaz

$$A'B'-AB : CD-A'B'=m : n$$

és innen:

$$(m+n)\,A'B'=mCD+nAB.$$

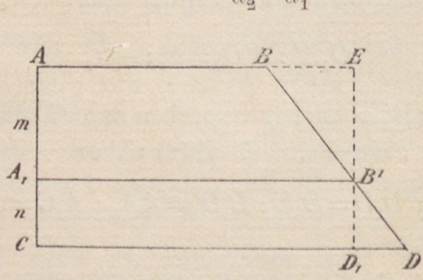
$$A'B'=\frac{mCD+nAB}{m+n}.$$



6. ábra.

Alkalmazva a jelen esetre:

$$A'B'=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-a_1},$$



6. ábra.

t. i. OA_1, OB_1 stb. hosszúságokat röviden a_1, b_1 stb. jelzi.

Éppen így mutatható meg, hogy:

$$A'C' = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2 - a_1},$$

$$A'D' = \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_2 - a_1},$$

E három számmal megalkotjuk az

$$\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2 - a_1}\,y + \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2 - a_1}\,z + \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_2 - a_1} = 0$$

egyenletet, melyet így is írhatunk:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,y + (a_2c_1 - a_1c_2)\,z + (a_2d_1 - a_1d_2) = 0.$$

Ez az egyenlet az

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ és } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

egyenletekből az x eliminálása útján keletkezik. Egészen hasonlóan jutunk a második és harmadik egyenletekből az

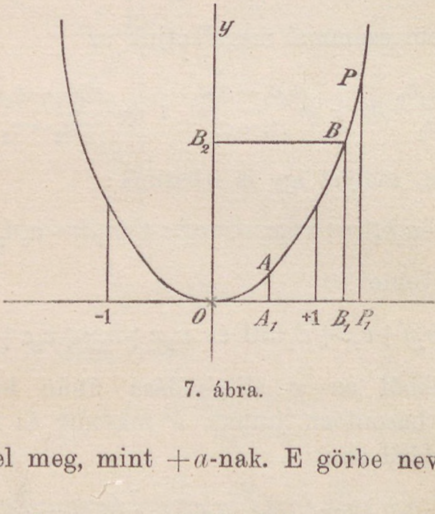
$$(a_3b_2 - a_2b_3)\,y + (a_3c_2 - a_2c_3)\,z + (a_3d_2 - a_2d_3) = 0$$

egyenletre az x eliminálásával. A feladatot tehát két ismeretlenű rendszerre redukáltuk. Ha erre újból ezt a grafikus eljárást alkalmazzuk, akkor pld. az y eliminálásával a z ismeretlenre vonatkozó

$$\alpha z + \beta = 0$$

egyenletre jutunk és ebből a z közvetlenül kiszámítható.

c) Az $y=x^2$ másodfokú függvény ábrázolása. (7. ábra.) Ha $x=0$, akkor $y=0$, ha $x=1$, $y=1$, ha $x=2$, $y=4$, s i. t. Ha $x=a$, $y=a^2$; ha $x=-a$, $y=a^2$. Azt látjuk ebből, hogy a görbe az y tengelyre nézve szimmetrikus; mert $-a$-nak ugyanaz az ordi-

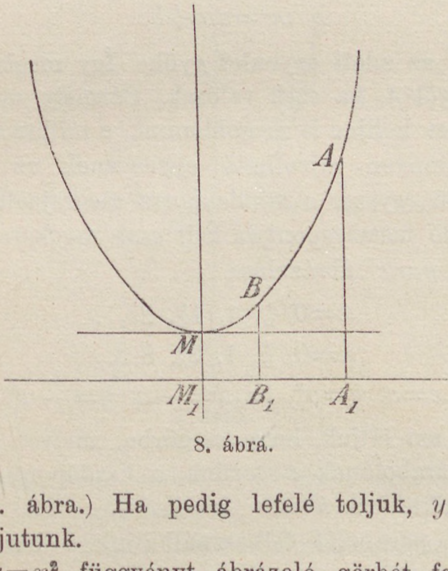


7. ábra.

nata felel meg, mint $+a$-nak. E görbe neve: *parabola.*

Egészen hasonlóan állíthatjuk elő az $y=ax^2$ görbét is. Ha péld. $a=3$, akkor $y=3x^2$ görbe menetének feltüntetésére tegyük $x=0$; akkor $y=0$; ha $x=1$, $y=3$, ha $x=2$, $y=3.2^2=12$, ha $x=m$, $y=3m^2$, ha $x=-m$, $y=3m^2$, tehát ugyanakkora.

Már ebből is láthatjuk, hogy ez a görbe is szimmetrikus az y tengelyre nézve. — Azt is azonnal belátjuk, hogy ha a positiv, akkor az ax^2 mindig positiv, tehát a görbe egészen az x tengely fölött vonul; ha pedig a negativ szám, akkor ax^2 mindig negativ, tehát a görbe minden pontja az x tengely alatt van. Ha az $y=ax^2$ görbét fölfelé toljuk úgy, hogy minden pontja b-vel magasabbra kerüljön, akkor az $y=ax^2+b$ alak ábrázolja az új helyzeté-



8. ábra.

ben. (8. ábra.) Ha pedig lefelé toljuk, $y=ax^2-b$ alakra jutunk.

Az $y=x^2$ függvényt ábrázoló görbét felhasználhatjuk a *másodfokú egyenlet grafikus megoldására.* Ha ugyanis az

$$x^2=ax+b$$

másodfokú egyenletet kell megoldanunk, akkor így járunk el: Felrajzoljuk átlátszó papirosra az $y=x^2$ parabolát; azután ugyanilyen mértékben a milliméter-papirosra az $y=ax+b$ egyenest. Az átlátszó papirost ráhelyezzük a milliméter-papirosra (úgy, hogy a tengelyek egymást födjék). Az egyenes a parabolát 2 pontban metszi, vagy érinti, vagy nem metszi. Ha M a parabolának az egyenessel való metszőpontja, és M abscissája: m, akkor

$$m^2=am+b,$$

tehát m az adott egyenlet gyöke. Így megkaphatjuk a két gyököt, ha ezek valósak. Bármely másodfokú egyenletet kelljen is megoldanunk, a milliméter-papirosra könnyen rajzolható egyenesnek az átlátszó papiroson egyszer s mindenkorra megrajzolt parabolával való metszéspontját kell csak megkeresni.

d) Az $y=x^3$ ábrázolása.

Ha $\qquad x=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ldots$

akkor $\qquad y=0,\ \frac{1}{8},\ 1,\ 3\frac{3}{8},\ 8,\ldots$

Ha $\qquad x=a,\ y=a^3$, ha $x=-a,\ y=-a^3$.

Ebből azt látjuk, hogy a görbe, melyet harmadrendű parabolának nevezünk, a kezdőpontra nézve szimmetrikus. (9. ábra.)

Ezt a parabolát felhasználhatjuk a harmadfokú egyenlet grafikus megoldására. Ha a megoldandó egyenlet:

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

akkor

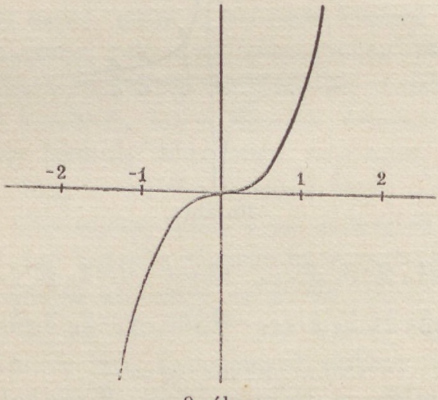
$$x=-\frac{a}{3}+z \text{ téve}$$

$$\left(z-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(z-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(z-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

$$z^3-az^2+az^2+\ldots=0,$$

szóval minden harmadfokú egyenlet ilyen alakra hozható [z helyett megint x-et írva]

$$x^3=kx+l.$$



9. ábra.

Úgy, hogy tehát csakis ilyen alakú egyenlet megoldásával kell foglalkoznunk.

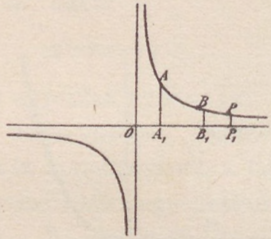
Ha megint átlátszó papirosra rajzoljuk az $y=x^3$ parabolát és milliméter-papirosra az $y=kx+l$ egyenest, és e kettő metszéspontja M, melynek abscissája m, akkor

$$m^3=km+l$$

tehát m az adott egyenlet megoldása.

Így tehát bármely harmadfokú egyenlet (valós) megoldását megkapjuk, ha az átlátszó papirosra egyszer s mindenkorra megrajzolt görbének, a milliméter-papiroson könnyen megrajzolható egyenessel való metszéspontját keressük meg.

e) $y=\dfrac{1}{x}$ függvény ábrázolása. (10. ábra.)



10. ábra.

Ha $x=1, 2, 3, 4, \ldots$ akkor $y=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Ha $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ akkor $y=2, 3, 4, 5, \ldots$

Ha $x=a$, akkor $y=\dfrac{1}{a}$,

ha $x=-a$, akkor $y=-\dfrac{1}{a}$,

amiből azonnal következik, hogy a görbe a kezdőpontra nézve szimmetrikus.

Ha x nő, $y=\dfrac{1}{x}$ fogy és pedig $\dfrac{1}{x}$ oly kicsinnyé válik, aminő kicsinnyé csak kívánjuk. Ha ugyanis azt akarjuk, hogy y $\frac{1}{100}$-nál kisebb legyen, akkor csak x-et 100-nál nagyobbá kell tennünk. Szóval y-t oly kicsinnyé tehetjük, amint csak akarjuk, ha x-et megfelelően választjuk. Ha ε egy tetszés szerinti kis szám, akkor

$$y < \varepsilon$$

lesz, ha csak $x > \frac{1}{\varepsilon}\cdot$ Jelöljük ezt az $\frac{1}{\varepsilon}$ számot N-nel. Ekkor tehát azt mondhatjuk, hogy ha $x > N$, akkor $y < \varepsilon$. Minden ε-hoz tartozik ilyen N szám. Ezt az ε-hoz tartozó *küszöbszámnak* nevezzük. Ha x e küszöbön túl halad, akkor y az ε-nál kisebbé válik.

Két elnevezést kell ezzel kapcsolatban megismertetnem. Az y-ról, mely bármely kis ε-nál kisebbé válik, azt mondjuk, hogy *végtelen kicsinnyé válik.* x-ről, mely bármely N számnál *nagyobbá lesz,* azt mondjuk, *hogy x végtelen naggyá lesz.*

Előbbi állításunkat tehát e két elnevezés felhasználásával úgy fejezzük ki, hogy ha x végtelen naggyá lesz, y végtelen kicsinnyé válik. Ez utóbbit még úgy is mondjuk, ha félreértés nem támad, hogy y elenyésző csekély lesz, határtalanul csökken, 0-á válik.

Az x tengelyről, melyhez tehát a görbe határtalanúl közeledik, azt mondjuk, hogy a görbe *asymptotája.*

Ha az x határtalanúl csökken, akkor az y határtalanúl nő. Ez alatt megint pontosabban azt értjük, hogy ha bárminő nagy számot jelölünk is meg, pld. N-et, akkor oly közel mehetünk a kezdőponthoz, hogy a megfelelő ordináta ennél a megjelölt számnál nagyobb legyen. E végből csak x-et $\frac{1}{N}$-nél kisebbre kell választani. Ezt meg úgy fejezzük ki, hogy ha *x végtelen kicsinnyé válik,* akkor *y végtelen naggyá lesz.*

Az y tengely is asymptotája a görbének. E görbe neve: *hyperbola.*

f) $y=\sin x$ ábrázolása. Egyszer s mindenkorra megjegyezzük, hogy itt a szöget nem fokokkal, hanem abszolut mértékszámmal fejezzük ki, vagyis α°-ú szögnek az a szám felel meg, mely az egység sugarú körben az α fokú középponti szögnek megfelelő körív mértékszáma. Tehát pl., minthogy 360°-ú szögnek az egész körvonal felel meg, 360°-ú szög abszolut mértékszáma

$$2\pi = 2 \times 3{\cdot}14159\ldots = 6{\cdot}28218\ldots$$

1°-ú szög mértékszáma

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0{,}017475\ldots$$

Ha már most pl. rendre

$$x=0, \quad x=\pi=3{\cdot}14\ldots,$$

$$x=\frac{\pi}{2}=1{\cdot}57\ldots\; x=\frac{\pi}{4}=0{,}78\ldots$$

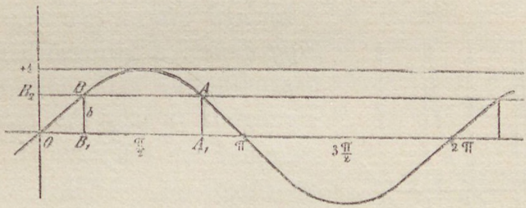
akkor $y=\sin x$ téve

$$y=0 \qquad y=0 \qquad y=1$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707\ldots$$

Ha x 0-tól π-ig halad, $\sin x$ értéke a 0-tól 1-ig megy. Ha pedig x π-től 2π-ig halad, ugyanezen értékeket veszi fel az y, de ellenkező jellel. Éppen így, ha x negativ értékeket kap, pl. $x = -a$, akkor $\sin(-a) = -\sin a$.

Ha x 2π-nél nagyobb, akkor megint ugyanazokat az értékeket kapja a $\sin x$, mint 0-tól 2π-ig, A $\sin x$ menetét tehát a következő kigyózó görbe ábrázolja: (11. ábra.)



11. ábra.

Egészen hasonlóan szerkeszthetjük meg a $\cos x$-t ábrázoló görbét, mely az előbbiből úgy keletkezik, hogy az egész ábrát az x tengely mentén $\frac{\pi}{2}$-nyire eltoljuk.

g) *A tangens x ábrázolása.* (12. ábra.) $y = \operatorname{tg} x$.

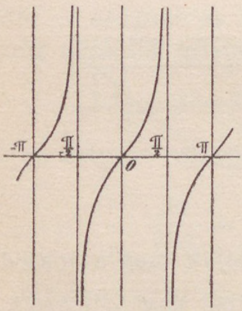
$$x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{\pi}{6} \ldots$$

$$y = 0 \quad y = \infty \quad y = 1. \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots$$

Ha pedig x negativ, pl. $x = -a$, akkor $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$.

Ha x $\frac{\pi}{2}$ és π között van, pld. $x=\pi-a$, akkor $\operatorname{tg} x=-\operatorname{tg} a$.

Ezen megjegyzések alapján a $\operatorname{tg} x$-et ábrázoló görbe képét megalkothatjuk. Különösen ügyeljünk arra, hogyan megy a kezdőponton [és megfelelően a π, 2π, . . .] pontokon át és azután arra, hogy az $x=\frac{\pi}{2}$-ben emelt merőleges a görbe asymptotája.



12. ábra.

h) *arc sin x, arc tg x stb. függvények.* A sinusgörbét felhasználhatjuk arra, hogy adott a szöghöz [a szög abs. mértékszámmal van kifejezve] a hozzátartozó $\sin a$ értéket lemérjük. Fordítva, ha tudjuk, hogy valamely szög sinusa b [természetesen a b szám csak -1 és $+1$ között lehet], akkor meg a hozzátartozó szöget határozhatjuk meg. E végből felmérjük az y tengelyre a b ordinátát és a végpontján át az x tengellyel párhuzamosat huzunk. (L. 11. ábra.) Ez a sinus-görbét először a B pontban metszi. A B pont vetülete: B_1. Leolvassuk a milliméter-papiroson, hogy OB_1 hány mm és ha pld. 10 mm-t vettünk egységnek, akkor megtudhatjuk, hogy OB_1 hány egység, vagyis, mekkora azon szög abs. mértékszáma, melynek sinusa: b. Mondjuk, hogy a egységre jutottunk; akkor tehát $\sin a=b$. Az a számot a b sinus-értékhez tartozó szögnek nevezzük és így írjuk:

$$a = \arcsin b.$$

Így pld.:

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \dots$$

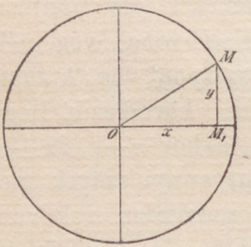
De egyúttal azt is látjuk, hogy a húzott párhuzamos egyenes a sinus-görbét nemcsak egy pontban metszi, hanem, minthogy e sinus-vonal vég nélkül kigyózik, számtalan sok metszéspont van. A sinus függvény tulajdonságából azonnal következik, hogy ha $\sin a = b$, azaz $\arcsin b = a$, akkor $\pi - a$, $2\pi + a$, $3\pi - a$, $4\pi + a$, $5\pi - a \dots$ mindmegannyi szögek, melyek sinusa: b; tehát $\arcsin b$ számtalan sok van. Az ábrából is látjuk azonban, hogy $-\pi \dots \pi$ közben csak egyetlen metszéspont van, vagyis $\arcsin x$ az x-nek nem egy értékű függvénye, mert végtelen sok olyan szög van, melynek sinusa: x; de $-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$ közben csak egyetlen egy ilyen van. Ezért szoktak megállapodni abban, hogy $\arcsin x$ alatt azt a szöget értik, mely $-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$ közbe esik és sinusa: x.

Könnyű lesz most már ezek után megállapítani, mit értsünk $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arctg} x$ alatt.

3. *Görbe vonalak egyenletei.* Az eddigiekben néhány egyszerű függvényt ábrázoltunk görbével. Most fordítva, rá akarunk utalni arra, hogy ha valamely görbe vonalnak bizonyos jellemző geometriai vagy

kinematikai tulajdonságát ismerjük, miképpen lehet e görbe vonalat számító eljárással jellemezni.

a) *A kör egyenlete.* (13. ábra.) A legegyszerűbb példa erre a kör. — A kör jellemző tulajdonsága, hogy minden pontja egy meghatározott ponttól egyenlő távolságban van. Ha e meghatározott pont, a kör középpontja, a kezdőpont: O és M, melynek coordinatái: x, y a körvonal valamely pontja, és a megadott távolság: r, akkor:



13. ábra.

$$\overline{OM_1}^2 + \overline{M_1M}^2 = OM^2,$$

azaz: $x^2 + y^2 = r^2$.

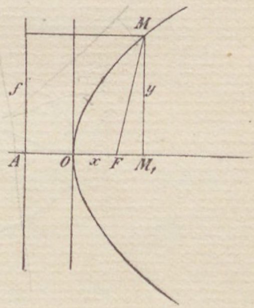
A szóban forgó görbe *bármely* M pontjának abscissája és ordinátája között ez az összefüggés áll fenn. *Ez a kör egyenlete.* Itt tehát oly algebrai képet kaptunk, melyben a körvonal jellemző tulajdonsága jut kifejezésre. Amit ebből az egyenletből leszármaztathatunk, az mindmegannyi tulajdonsága a körvonalnak.

b) *A parabola egyenlete.* Egy másik görbe, amelyről ilyen értelemben szólni akarunk: a *parabola.* Ennek a görbének az a tulajdonsága, hogy minden pontja egy megadott ponttól éppen olyan messze van, mint egy megadott egyenestől. Ez a parabola egyik jellemző tulajdonsága. Ha ezt a tulajdonságot algebrai formába öntjük, akkor előállítottuk a parabola egyenletét.

E végből, (14. ábra) hogy egyszerű alakot kapjunk, válasszuk a koordináta rendszert a következőképpen. A megadott F pontból (gócból) húzzunk a megadott f egyenesre (irányvonalra) merőlegest, mely f-et A-ban metszi.

Ez az AF legyen az X tengely. Az AF távolságot felezzük meg O-ban. Ez legyen a rendszer kezdőpontja.

És jelöljük az $AF = 2OF$ távolságot $2p$-vel. Ha már most M a keresett görbe valamelyik pontja, melynek abscissája x és ordinatája y, ($x = OM_1$, $y = M_1M$) akkor M pont távolsága az f-től: $x+p$. M távolsága F-től:



14. ábra.

$$MF = \sqrt{(FM_1)^2 + (M_1M)^2} =$$
$$= \sqrt{(x-p)^2 + y^2},$$

tehát az említett tulajdonság algebrai formája:

$$x + p = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

és ha mindkét oldalon négyzetre emelünk:

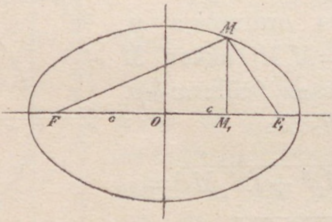
$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

vagy egyszerűbben:

$$y^2 = 4px.$$

Ez a parabola egyenlete, ha a gócpont az x tengelyen van a kezdőponttól p távolságra.

c) *Az ellipszis egyenlete.* (15. ábra.) Az ellipszis olyan vonal, melynek az a tulajdonsága, hogy minden pontjának két megadott, állandó ponttól való távolságainak összege ugyanakkora. [Gondoljunk csak arra, hogyan rajzol a kertész ellipszist!] Ha ezt a tulajdonságát algebrai alakba öntjük, megkapjuk az ellipszis egyenletét. E végből vegyük fel a két fix pontot: F-et és F_1-et. Legyen a távolságuk: $2c$. Az F-en és F_1-en átmenő egyenest válasszuk X tengelynek. Felezzük



15. ábra.

meg az FF_1-et O-ban. Ezen át húzzuk az Y tengelyt. Ha M az ellipszis valamely pontja, melynek koordinatái: x, y. [$OM_1=x$, $M_1M=y$] akkor

$$F_1M=\sqrt{(F_1M)^2+(M_1M)^2}$$

De $F_1M=x-c$, $M_1M=y$, tehát:

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Éppen így:

$$FM=\sqrt{(FM_1)^2+(M_1M)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

E kettő összege mindig ugyanakkora: mondjuk:

$2a$; azaz:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Ez így is írható:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

és ha mindkét oldalon négyzetre emelünk:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-$$

$$-4\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

vagy egyszerűbben:

$$4xc+4a^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

és 4-gyel rövidítvén, így újból négyzetre emelve:

$$x^2c^2+2a^2xc+a^4=a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)$$

vagyis:

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Ha az a^2-c^2-et b^2-el jelöljük: [a mindenesetre nagyobb c-nél!]

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

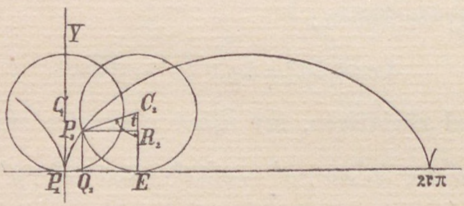
és ez még így is írható:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ezzel kapcsolatban mindjárt azt is megemlítjük, hogy a *hyperbola* olyan görbe vonal, melynek az a tulajdonsága, hogy minden pontjának két megadott, állandó ponttól mért távolságainak különbsége ugyanakkora. Ha ezt a tulajdonságot ugyanúgy, mint az imént tettük, algebrai formába öntjük, akkor a hyperbola egyenletéül ezt kapjuk:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

d) *A cyclois egyenlete.* (16. ábra.) Végre, hogy lássunk arra is példát, miképpen lehet kinematikai úton származtatni a görbét, megemlítjük a *cycloist.* Ha a kocsi



16. ábra.

kerekének egy pontjára figyelünk, szembeötlik, hogy a kerék gördülése közben ez a pont milyen szép szabályos vonalat ír le: fölemelkedik a legmagasabb pontig, a kerék küllőjének magasságára és leszáll a földig, ismét fölemelkedik s. i. t. Azt akarjuk megállapítani, hogy mi az egyenletesen forgó és haladó (tehát gördülő) kerék valamely pontja által befutott pálya egyenlete. Legyen az r sugarú kör az, mely az X tengelyen gördül. Az Y tengely a C_1P_1 egyenessel összeesik.

Ha a kör csak a C_1 körül forogna, akkor a P_1

pont bizonyos idő múlva elfordulna t szöggel, leírta volna, [ha t abs. mértékekkel van mérve] az rt nagyságú körívet. Így azonban elgördült e kerék ez idő alatt P_1E-vel. Az rt út éppen akkora, mint P_1E. Ha ezt megértettük, megállapíthatjuk az illető pont koordinatáit:

A P_2 ordinátája $P_2Q_2 = y = R_2E = C_2E - C_2R_2 = r - r\cos t$ tehát:

$$y = r(1 - \cos t),$$

és az abscisája;

$$P_1Q_2 = P_1E - Q_2E = rt - r\sin t$$
$$x = r(t - \sin t).$$

Ezt a két egyenletet:

$$x = r(t - \sin t),\quad y = r(1 - \cos t)$$

a cyclois egyenletének tekinthetjük. x és y a t független változó függvényei; t minden értékéhez bizonyos meghatározott x és y számértékek tartoznak, amelyek a görbe pontját határozzák meg.

Összefoglalás. Ezen első előadásban megmutattam, hogy a grafikus ábrázolásban a tények és tünemények egész seregét minő áttekinthető, összefoglaló tanulságos módon tüntethetjük fel: a geometriai kép a tünemények szétszórt, laza sorába rendet hoz, a mathematika mint rendező elv szerepel. Ugyanezt teszi a formula is. Geometriai kép és algebrai alak a mathematikus lelkében sokszor összeolvad: egy és ugyanazon fogalom két oldalról tekintve. Mindkettőt használhatjuk a *változás* összefoglaló feltüntetésére. Ezzel megalkottuk a *függvény* fogalmát. Különböző függvények grafikus ábrázolását mutattam be és fordítva néhány görbe vonal egyenletével ismertettem meg Önöket. Az illető görbe egy-egy jellemző tulajdonságát öntöttük algebrai formába. A következő órában ezen görbék menetével, emelkedési és sülyedési viszonyaival fogunk foglalkozni.

Feladatok.

Próbálja a tisztelt olvasó a következő feladatokat a fogalmak begyakorlása kedveért megoldani.

1. Ábrázoljuk milliméter papiroson az $y=x^4$ függvény menetét!

2. Hogyan lehetne az $y=x^2$ görbe segítségével grafikusan meghatározni 1·3 négyzetét? Hogyan lehetne e görbe felhasználásával négyzetgyököt vonni?

3. Hogyan lehetne az $x^4=3x-2$ negyedfokú egyenletet megoldani az $y=x^4$ görbe segítségével?

4. Oldja meg a figyelmes olvasó grafikusan ezt az egyenletrendszert:

$$x+y+z-2=0,\ x+2y-z-6=0,\ 2x-y+3z+3=0.$$

5. Keresztül megy-e a $2x-3y+5=0$ egyenes azokon a pontokon, melyek koordinátái: *a)* $x_1=5, y_1=1$, *b)* $x_1=3,\ y_1=3\frac{2}{3}$?

6. Az X tengelyre a kezdőponttól a távolságra merőleges e egyenest húzunk. Az O-ból húzunk egyeneseket. Mindegyikre az e-vel való metszőpontjuktól visszafelé (az O-felé) ugyanakkora b távolságot mé-

rünk. Mi lesz az így megjelölt végpontok geometriai helye?

[Így okoskodjunk: Ha egyik egyenes hajlásszöge φ, akkor O-tól e-ig terjedő egyenes hossza $\frac{a}{\cos\varphi}$ és így az egyenesre mért b távolság végpontja — mondjuk P pont — az O-tól $\frac{a}{\cos\varphi}-b$ távolságra van; tehát e P pont abscinája: $x=\left[\frac{a}{\cos\varphi}-b\right]\cos\varphi=a-b\cos\varphi$ és ordinátája $y-x\operatorname{tg}\varphi$. Az első egyenletből: $(x-a)^2=$ $=b^2\cos^2\varphi$ a másodikból: $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{y^2}{x^2}$ és innen $\cos^2\varphi=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{x^2}{x^2+y^2}$. Ha $\cos\varphi$ ezen értékét az előbbi egyenletben helyettesítjük:

$$(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$$

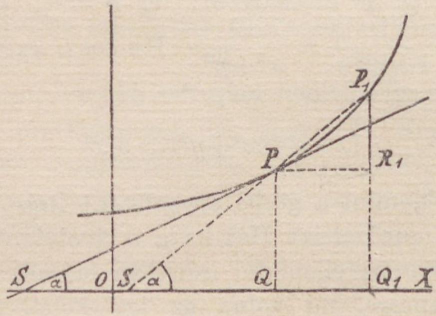
-et kapjuk, mint a görbe egyenletét.] Rajzoljuk meg e görbét (quadratrix). Hát ha a b távolságot nem az O felé, hanem ellenkező irányban mérnők fel minden egyenesre, mi volna az így keletkező görbe egyenlete?

7. Mi az egyenlete azon görbének, melynek minden pontjának két állandó ponttól mért távolságainak szorzata állandó? (lemniscata).

8. Hogyan lehetne grafikusan meghatározni azt a szöget, melynek absolut mértékszáma éppen 2-szer akkora, mint a sinusa, (vagyis a $2\sin x=x$ egyenlet megoldása). Hogyan lehetne az $x=\operatorname{tg}x$ egyenletet megoldani?

II. Előadás.

4. *A görbe emelkedése és sülyedése. A differenciálhányados.* A grafikus ábrázolással módszerhez jutottunk minden változás feltüntetésére; azért tehát a



17. ábra.

változások törvényszerűségének tanulmányozása céljából először a görbéknél fellépő viszonyokat tekintsük. Ha a 17-ik ábrában feltüntetett görbére nézünk, (17. ábra) akkor azonnal látjuk, hogy pl. a P-től P_1-ig a görbe emelkedik.

Az egyenes vonal emelkedésére a közhasználat fokozatokat is szokott megállapitani: azt mondjuk az út meredek, vagy lejtős, lankás stb. A vasutak mentén mindenütt látunk olyan jelző táblákat, melyek a meredekség mérésére szolgálnak. Azt látjuk pl. 1 : 100. Ez azt jelenti, hogy 100 *m* hosszúságra 1 *m* emelkedés jut.

Ezt a fogalmat, *az emelkedés mértékének fogalmát átvihetjük a görbére is.* Legyen $OQ=x$, $QQ_1=$ $=PR_1=\Delta x$ [Δx az x növekménye; a Δ nem szorzó, hanem Δx *egy* jelnek tekintendő]. A $P_1R_1=\Delta y$ az y növekménye.

Az abscissa Δx növekményére Δy ordináta-növekmény jut. A $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ viszonnyal mérhetjük a görbének PP_1 szakaszára eső emelkedését.

Az ábrából látjuk, hogy ez a viszony nem egyéb, mint $\operatorname{tg}\alpha$, vagyis a PP_1 húr irányhatározója.

Eddig még semmi nehézséget sem látunk. Nem tettünk egyebet, mint az egyenes vonal emelkedésének mérésére használt eljárást alkalmaztuk a görbére is és ezzel eljutottunk a görbének egy-egy szakaszában való emelkedésének mérésére, ami egyúttal e szakaszhoz tartozó húr irányhatározója.

Így például, ha a görbe egy másodrendű parabola:

$$y=ax^2,$$

akkor az $x+\Delta x$ abscissához tartozó ordináta:

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2=ax^2+2ax\,.\,\Delta x+(\Delta x)^2,$$

de $y=ax^2$ és így:

$$\Delta y=2ax\,.\,\Delta x+(\Delta x)^2$$

és innen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + \Delta x.$$

Ha már most a Δx-et mindinkább kisebbítjük, a húr P_1 végpontja mindinkább közelebb jut a P ponthoz; a húr végre, ha P_1 összeesik a P-vel, olyan *határhelyzetbe* jut, melyet a P ponthoz tartozó *érintőnek* nevezünk.

Akárminő jelentéktelennek lássék is a dolog, megemlítem, hogy az érintő fogalma a legjelentékenyebb fogalom az egész felsőbb mathematikában. Aki erre a fogalomra, mint a szelő határfekvésére rájutott, (valószínűleg Thales, a híres filozofus) az volt a felsőbb mathematikai gondolkozás megindítója. Ha az érintőnek az absc. tengelyhez való hajlásszögét α-val jelöljük, akkor tehát $\Delta x = 0$ téve:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2ax.$$

A P ponthoz tartozó érintő irányhatározója tehát: $2ax$.

A második jelentős gondolat a következő. Eddig a görbeszakaszra vonatkozó emelkedésről szóltunk. Ezt az emelkedést a szelő (a húr) irányhatározójával (hajlásszögének tangensével) mértük. *Akárminő kicsiny legyen is a Δx, mindig szólhatunk az illető szakasz emelkedéséről.* Ezt a fogalmat már most alkalmazzuk arra az esetre is, midőn a szakasz terjedelme: O, vagyis *szólunk a görbének a P pontban való emelkedéséről* vagyis arról, hogy a görbe egyik pontján minő emelkedéssel halad át és nyilván *ezt* *az emelkedést a P pontban vont érintő iránymeghatározójával mérjük.*

Úgy mint az érintő a szelők határhelyzete, úgy az érintő irányhatározóját a szelő irányhatározója *határértékének* mondjuk.

A mi példánkban ez a határérték: $2ax$; melyet a szelő $2ax+\Delta x$ irányhatározójából úgy kaptunk, hogy $\Delta x = 0$ tettük.

A P ponthoz [melynek abscissája x és ordinátája y] tartozó érintő irányhatározóját, a P pontban való emelkedés mértékszámát, különféleképpen jelöljük:

Némelykor egyszerűen y'-al jelöljük, máskor Dy-nal, leggyakrabban így:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Itt azonban e 3 betü a vonással egyetlen jelnek tekintendő. E jelet így olvassuk: az *y-nek x szerinti differenciálhányadosa.*

Mielőtt az eredményeinket általánosan fogalmaznók, nézzünk egy másik egyszerű példát. Legyen $y=x^3$ egy harmadrendű parabola. Az $x+\Delta x$ abscissához tartozó ordináta:

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^3 = x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

tehát: $\Delta y = 3x^2 . \Delta x+3x . (\Delta x)^2+(\Delta x)^3 .$

és innen e Δx szakaszhoz tartozó emelkedés mértéke:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2+3x . \Delta x+(\Delta x)^2.$$

Ez a megfelelő húr irányhatározója. Ha már most Δx határtalanúl fogy, akkor e szelőből érintő lesz. Ez érintő irányhatározója:

$$\operatorname{tg} \alpha = 3x^2,$$

mert $\Delta x = 0$; tehát a bevezetett jelölés szerint:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Még egy új írásmódot kell megismernünk. Az érintő irányhatározója a szelő irányhatározójának határértéke. Ezt így fogjuk írni:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

és így olvassuk: A $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ viszonyból lesz a $\frac{dy}{dx}$ számérték, ha Δx zérussá válik, vagy rövidebben: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ limese: $\frac{dy}{dx}$ ha Δx zérussá lesz.

Nézzük általában az n-edrendű parabolát:

$$y = x^n.$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n =$$

$$= x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Innen

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Az érintő irányhatározója, vagyis az (x, y) pontban a görbe emelkedési mértéke: nx^{n-1}.

Ha általában $y=f(x)$ valamely görbe vonal egyenlete és P pontjának abscissája x, ordinátája: y, akkor: $x+\Delta x$-hez tartozó ordinata: $y+\Delta y$.

$$y+\Delta y = f(x+\Delta x),$$

miből

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

és így:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Ez a hányados adja meg a PP_1 húr irányhatározóját. Ha már most Δx zérussá válik, akkor a szelőből érintő lesz és az érintő irányhatározója:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

a P pontban a görbe emelkedési mértéke.

5. *Differenciálhányadosok kiszámítása.* Számítsuk ki nehány egyszerű függvényre nézve a differenciálhányadost.

a) *x^n differenciálhányadosa.* Azt már láttuk, hogy ha $y=x^n$, akkor $y'=nx^{n-1}$.

Így például, x^2, diff. hányadosa $2x$, x^3-é : $3x^2$ . . . x diff. hányadosa : 1. (mert $\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x} = 1$). Ez azonnal világossá lesz, ha meggondoljuk, hogy $y=x$ a kezdőponton átmenő, a tengelyekhez 45° alatt hajló egyenes, tehát irányhatározója, emelkedésének mértéke minden helyén tg $45°=1$.

b) *sin x differenciálhányadosa.* Legyen most

$$y = \sin x.$$

akkor, ha P pont abscissája x, ordinátája y, és P_1 pont abscissája: $x+\Delta x$, ordinátája: $y+\Delta y$, akkor

$$y+\Delta y = \sin(x+\Delta x);$$

miből:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

De $\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$; tehát:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \qquad A)$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Ha $\Delta x=0$ tesszük, a második tényező $\cos x$ lesz. Az első számértékét nem mondhatjuk meg közvetlenül, mert a $\Delta x=0$ helyettesítésénél $\frac{0}{0}$ alak áll elő; oly kifejezés, melynek az osztás műveletének értelmezése szerint értéket nem tulajdoníthatunk. Más úton kell tehát keressünk a $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ határértékét.

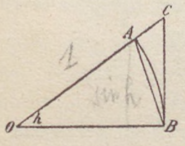
Az $OA=1$ sugárral rajzoljunk egy körívet. (18. ábra.) Legyen e körív hossza: h; akkor tehát az AOB szög mértékszáma h. Legyen végül CB merőleges OB-re.

Az AOB háromszög területe: $\dfrac{\sin h}{2}$.

Az AOB körcikk területe: $\dfrac{h}{2}$.

Az ACB háromszög területe: $\dfrac{\operatorname{tg} h}{2}$.

Az ábrából látjuk, hogy:



18. ábra.

$$\frac{\sin h}{2} < \frac{h}{2} < \frac{\operatorname{tg} h}{2}$$

azaz:

$$\sin h < h < \frac{\sin h}{\cos h}$$

és ha $\sin h$-val osztjuk ezen egyenlőtlenség minden tagját:

$$1 < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}.$$

Ez az egyenlőletlenség minden hegyes szögre fönnáll. Ebből még az is következik, hogy a reciprok értékek között ez az egyenlőtlenség áll:

$$1 > \frac{\sin h}{h} > \cos h$$

vagyis, hogy a $\dfrac{\sin h}{h}$ mindig $\cos h$ és 1 közé esik. Ha a h kisebbedik, a $\cos h$ mindinkább közeledik az 1-hez, tehát a $\dfrac{\sin h}{h}$ is mindinkább közeledik az 1-hez. A h-t oly kicsinynek választhatom, hogy a $\dfrac{\sin h}{h}$ az 1-től tetszőleges kevéssel különbözzék. Ez más szóval azt jelenti, hogy ha például azt akarjuk, hogy $\frac{\sin h}{h}$ az 1-től $\frac{1}{1000}$ résznél kevesebbel különbözzék, azaz

$$0{\cdot}999 < \frac{\sin h}{h} < 1$$

legyen, akkor h gyanánt oly szöget kell csak választanunk, amelynek cosinusa 0·999-nél nagyobb. Ha a szöget, amelynek cosinusa 0·999 és melyet α-val akarjuk jelölni, megválasztottuk, akkor

$$1 - \frac{\sin h}{h} < 0{\cdot}001,$$

hacsak $h < \alpha$. De tovább mehetünk és 0·001 helyett 0·0001, 0·00001, stb. választhatunk. Szóval: Bárminő kis szám legyen is az ε, mindig találhatunk hozzá egy oly δ küszöbszámot, hogy ha $h < \delta$, akkor

$$1 - \frac{\sin h}{h} < \varepsilon$$

A $\frac{\sin h}{h}$ tehát oly közel jut az 1-hez, aminő közel csak akarjuk, hacsak a h-t elég kicsinynek választjuk. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\frac{\sin h}{h}$ limese: 1 $h = 0$ esetében és így írjuk:

$$\lim_{h=0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Jegyzet. A határérték számítása a felsőbb mathesis legfontosabb segédeszköze. Itt csak egy példáját tárgyaltuk ennek a nevezetes eljárásnak de nem mulaszthatom el, hogy legalább rá ne utaljak a határértékszámítás fontosságára. Sokszor megesik, hogy valamely $f(x)$ függvény olyan alakú, hogy egy bizonyos a számértékhez tartozó függvényértéket nem tudjuk kiszámítani. Ilyen volt a $\frac{\sin x}{x}$ függvény az $x=0$, vagy például az $\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$ az $x=1$ értéknél, mert a számláló is, a nevező is 0-vá válik, vagy ilyen például a $\cos x$, ha $x=\frac{\pi}{2}$, mert olyan derékszögű háromszög, melyben az egyik hegyes szög $\frac{\pi}{2}$ lenne, képtelenség, már pedig a $\cos x$ az x hegyes szög melletti befogó és átfogó viszonya. Ha ismerünk olyan A számértéket, amelyhez az $f(x)$ határtalanul közeledik, ha az x az a-felé halad, akkor azt mondjuk, hogy ez az A számérték az $f(x)$ függvény határértéke az a értéknél (az a helyen). Ezen azt értjük, hogy az $f(x)$ tetszésszerinti pontossággal megközelíti az A számértéket, ha csak elég közel jutunk az x-el az a-hoz. Vagyis, ha egy tetszésszerinti kis ε számot (pl. $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, ...) mondanak, akkor az a-tól jobbra és balra megtudok jelölni olyan két δ közt (az ε-hoz tartozó küszöb-intervallumot), melyeken belül minden x értékhez olyan $f(x)$ függvényérték tartozik, amely az A-tól a megadott ε-nál kevesebbel különbözik. Látjuk tehát, hogy ámbár az a-hoz tartozó függvényértéket rendes módon nem tudjuk kiszámítani, de a függvénynek az a környezetében való viselkedéséből megállapítottunk sokszor olyan A számértéket, melyet joggal az $f(x)$ függvénynek az a-hoz tartozó értékének mondhatunk; de megkülönböztetésül a más úton kiszámítható értékektől az a-hoz tartozó határértéknek nevezzük és így jelöljük:

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Ha már most $\frac{\Delta x}{2} = h$ tesszük, akkor tehát

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

és így visszatérve az $A)$ alatti formulához:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \cos x$$

azaz, ha $y=\sin x$:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

A $\sin x$ függvény differenciálhányadosa: $\cos x$. Ha péld. meg akarjuk tudni, mekkora a sinus-görbe emelkedésének mértéke a görbe valamely helyén, akkor most már erre könnyen felelhetünk számítással is. Például legyen $x=0$, akkor $\cos x=1$, tehát a kezdőpontban a sinus-görbe emelkedési mértéke: 1, vagyis az érintő irányhatározója: 1, az érintő hajlásszöge tehát $\frac{\pi}{4}$ (az az 45°).

Ha $$x = \frac{\pi}{3}, \text{ akkor } \cos x = \frac{1}{2},$$

tehát az M pontban az emelkedés mértéke: $\frac{1}{2}$.

Ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor igen érdekes tüneményt látunk. $\cos x=0$, tehát az emelkedés mértéke 0, a K pontban húzott érintő párhuzamos az X tengelylyel. Emelkedés e pontban nincs.

Ha $$x > \frac{\pi}{2}, \text{ például } x = \frac{3\pi}{4},$$
akkor

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Most jutottunk először olyan esetre, midőn a differenciálhányados valamely helyen negativ.

6. *Következtetés a differenciálhányados jeléből a görbe haladására.* Nézzük általában minő következtetést vonhatunk a görbére nézve a differenciálhányados jeléből?

Tudjuk, hogy ha $f(x)$ függvény differenciálhányadosa $f'(x)$, akkor

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

és pedig Δx akár pozitiv, akár negativ számot jelentsen, vagyis az N pont akár jobbról, akár balról közeledjék is az M-hez. Ha már most $f'(x)$ positiv, akkor elég kis Δx-nél

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

is positiv, hiszen a határértékétől tetszőleges kevéssel különbözik. Így tehát $f(x+\Delta x) - f(x)$ olyan előjelű, mint Δx; vagyis ha Δx pozitiv, $f(x+\Delta x) > f(x)$, ha Δx negativ, $f(x+\Delta x) < f(x)$, a mi azt jelenti, hogy az M jobboldalán levő pontok magasabban vannak, mint az M, az M baloldalán levők pedig alacsonyabbak mint az M [persze csak a közvetlen közelében levő pontok], vagyis a görbe az M ponton át növekedően, emelkedően megy át. Ilyenkor azt mondjuk, a görbe az M ponton emelkedik, *a függvény e helyen nő.* Ha pedig $f'(x)$ negativ, akkor

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

mely elég kis Δx-nél tetszés szerinti kevéssel különbözik az $f'(x)$-től, szintén negativ és így, ha Δx pozitiv, $f(x+\Delta x)-f(x)$ negativ, vagyis $f(x+\Delta x)<f(x)$; ha pedig Δx negativ, $f(x+\Delta x)-f(x)$ pozitiv, azaz $f(x+\Delta x)>f(x)$. Ez esetben tehát fordítva áll a dolog, vagyis az M ponton át a görbe csökkenően halad, a függvény e *helyen fogyóban van.*

Jegyezzük meg *tehát magunknak, hogy ha $f'(x)$ pozitiv, akkor $f(x)$ e helyen nő, ha $f'(x)$ negativ, akkor pedig fogy.*

Visszatérve az előbbi példánkra, azt látjuk, hogy $\sin x$, melynek differenciálhányadosa $\cos x$, mindazon helyeken nő, melyek 0 és $\frac{\pi}{2}$ között vannak, ellenben fogy, ha x a $\frac{\pi}{2}$ és π között van.

7. *Néhány differenciálási szabály.* Most néhány általánosabb differenciálási eljárással ismerkedünk meg.

a) *Állandó differenciálhányadosa:* 0. Először is azt látjuk, hogy a constans mennyiség differrenciálhányadosa zérus. Legyen ugyanis $f(x)$ oly függvénye az x-nek, mely egy bizonyos közben a állandó; akkor tehát

$$f'(x)=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\frac{a-a}{\Delta x}=0.$$

Ez azonnal világossá lesz, ha meggondoljuk, hogy ha a függvény constans, akkor az $y=a$ menetét egy, az x tengellyel párhuzamos egyenes ábrázolja, tehát irányhatározója: 0.

b) *$af(x)$ diff. hányadosa.* Ha $f(x)$ az x valamely függvénye, akkor $af(x)$ is az. [a valamely szám.] Így például: ax^3, $a \sin x$ stb. Hogyan kell az $a \,.\, f(x)$ differenciálhányadosát megállapítani? Legyen tehát $y=af(x)$, akkor

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0} a\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=a\,.\,f'(x).$$

Arra az egyszerű szabályra jutottunk, hogy $af(x)$ diff. hányadosa: $af'(x)$. Így például, ha $y=ax^n$, akkor $y'=nax^{n-1}$, ha $y=a\sin x$, akkor $y'=a\cos x$.

c) *Összeg és különbség diff. hányadosa.* Ha adva van az x változónak két függvénye: $f(x)$ és $\varphi(x)$, akkor az $f(x)+\varphi(x)$, $f(x)-\varphi(x)$, $f(x)\,.\,\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ is függvényei az x-nek. Jelöljük röviden $f(x)$-et u-val, $\varphi(x)$-et v-vel, akkor,

$$y=u+v$$

és ha x-t Δx-el növeljük, akkor u növekszik Δu-val, v pedig Δv-vel, tehát:

$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v, \quad \text{azaz} \quad \Delta y=\Delta u+\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Ha most Δx zérussá válik, akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{-ből lesz } \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x}\text{-ből } \frac{du}{dx}$$

és $$\frac{\Delta v}{\Delta x}\text{-ből lesz } \frac{dv}{dx}, \text{ azaz: } \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

Arra az egyszerű szabályra jutottunk, hogy összeget úgy kell differenciálni, hogy tagonkint differenciáljuk. Éppen így áll a dolog, ha nem kéttagú az összeg, hanem 3, 4, vagy akárhány tagú. Ugyancsak így áll a dolog, ha nem összegről, hanem különbségről van szó. Így például, ha

$$f(x)=3x^4+2x^3-5x^2+6x-8,$$

akkor $$f'(x)=12x^3+6x^2-10x+6.$$

d) *Szorzat diff. hányadosa.* Ha pedig

$$y=uv,$$

akkor ha x-et Δx-el növeljük, u-ból $u+\Delta u$, v-ből $v+\Delta v$, y-ból $y+\Delta y$ lesz.

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$$

és így: $$\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\,.\,\Delta v$$

és innen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v.$$

De ha Δx növekmény 0-á lesz, akkor $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ hányadosból v' szám lesz, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$-nek határértéke u' és Δv elenyészik [mert a v növekedése elenyésző csekély, ha az x elenyésző csekéllyel változik, ha ugyanis a v függvény az x-el folytonosan nő és nem ugrik egyik értékről a másikra], így tehát:

$$y'=uv'+u'v.$$

Ez a szorzat differenciálási szabálya, melyet *Leibniz* állapította meg, azért *Leibniz-féle szabálynak* nevezik.

Így például, ha

$$y=x^3 \sin x, \quad \text{akkor} \quad y'=3x^2 \sin x+x^3 \cos x.$$

e) *Hányados differenciálása.* Végül ha

$$y=\frac{u}{v},$$

akkor

$$u=yv$$

és így a Leibniz-szabály szerint:

$$u'=yv'+y'v$$

és innen:

$$y'=\frac{u'-yv'}{v}=\frac{u'-\frac{u}{v}v'}{v}=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Ez a hányados differenciálási szabálya.

Ezt a szabályt mindjárt felhasználjuk a *negativ kitevőjű hatvány* differenciálási szabályának megállapítására. Tudjuk ugyanis, hogy

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n},$$

tehát ha $$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

akkor [minthogy 1 diff. hányadosa 0],

$$y' = \frac{x^n \,.\, 0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1},$$

vagyis x^{-n} differenciálhányadosa: $-nx^{-n-1}$.

Ha eszünkbe juttatjuk, hogy pozitiv n esetében x^n diff. hányadosát úgy kapjuk, hogy az n kitevőt szorzónak tesszük és az exponenst eggyel lejebb szállítjuk [nx^{n-1}], akkor azt látjuk, hogy negativ exponens esetében ugyanígy kell eljárnunk.

Tehát ha m akár pozitiv, akár negativ egész számot jelent, x^m diff. hányadosa mindig mx^{m-1}.

f) *Összetett függvény differenciálása.* Még egy nevezetes differenciálási szabályt állapitunk meg, amelyet lépten-nyomon alkalmazunk. Hogy ezt megértsük, képzeljük a következő függvényt:

$$y = (3x^2 + 5x + 2)^6.$$

Ez hatvány, de az alap maga is az x függvénye. Ha az alapot z-vel jelöljük, akkor $y = z^6$ alakú függvényt kapjuk. Az ilyent sokszor *összetett függvénynek* nevezzük. Így például:

$$(ax+b)^n, \quad \sin(ax+b), \quad \sin(x^2),$$
$$a(\sin x)^2 + b(\sin x)^2 + c(\sin x) + d$$

stb. mind összetett függvények.

Hogyan kell az összetett függvényt differenciálni? Legyen z az x valamely függvénye és $y=f(z)$.

Ha x-et megnövesztjük Δx-el, akkor z megváltozik Δz-vel és y ennek következtében Δy-nal; azaz

$$y+\Delta y=f(z+\Delta z),$$

vagyis:
$$\Delta y=f(z+\Delta z)-f(z)$$

és így:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta x}.$$

De ezt így is írhatjuk:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

De ha Δx elenyésző csekély lesz, akkor Δz is azzá válik [ha a z függvény folytonosan változik az x-el] és így az első tényező a Δx illetőleg a Δz határtalan kisebbedésével lesz:

$$\lim_{\Delta z=0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Ez azonban nem egyéb, mint $f'(z)$, vagyis az y-nal jelölt $f(z)$, diff. hányadosa, oly módon alkotva, mint ha z volna a független változó, vagyis

$$\frac{dy}{dz}.$$

A második tényező határértéke pedig:

$$\frac{dz}{dx},$$

tehát:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Ezt a fontos szabályt jól kell kezelni tudnunk, azért néhány példán bemutatom az alkalmazását. Legyen

$$y=(ax+b)^n$$

$ax+b$ helyett gondoljuk z-t írva, akkor $y=z^n$ és így:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

De

$$\frac{dy}{dz}=nz^{n-1},\qquad \frac{dz}{dx}=a;$$

tehát:
$$\frac{dy}{dx}=na(ax+b)^{n-1}.$$

Legyen
$$y=\sin(3x^2+2x+5),$$

akkor $3x^2+2x+5$ helyébe z-t téve:

$$\frac{dy}{dx}=(6x+2)\cos(3x^2+2x+5).$$

8. *Néhány függvény differenciálása.* Alkalmazzuk ezt a szabályt néhány függvény differenciálására.

a) cos x *differenciálása.* Legyen

$$y=\cos x.$$

Tudjuk, hogy

$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

tehát az előbbi szabály szerint, tekintsük $\frac{\pi}{2} - x$-et z-nek, akkor $y = \sin z$ és így

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot$$

De $$\frac{dy}{dz} = \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

és $$\frac{dz}{dx} = -1 ;$$

tehát $$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Vagyis a $\cos x$ diff. hányadosa: $-\sin x$.

b) $\operatorname{tg} x$ *differenciálása.* Most már kiszámíthatjuk $y = \operatorname{tg} x$ diff. hányadosát is. Ugyanis:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

tehát a hányados differenciálási szabályát alkalmazva

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot$$

Éppen így kapjuk, hogy ha

$$y = \operatorname{cotg} x, \quad \text{akkor} \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot$$

c) $\operatorname{arc\,sin} x$ *differenciálása.* Legyen most

$$y = \operatorname{arc\,sin} x, \quad \text{azaz} \quad x = \sin y.$$

A $\sin y$ az x összetett függvénye. Ha mindkét oldalon x szerint differenciálunk, akkor a baloldalon 1-et kapunk, a jobboldalon pedig a szabály szerint eljárva: $\cos y \frac{dy}{dx}$-re jutunk; tehát:

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

és innen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

De

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1,$$

vagyis

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

és így, ha $y = \operatorname{arc} \sin x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

d) arctg x *differenciálása.* Legyen:

$$y = \operatorname{arctg} x; \quad \text{azaz} \quad x = \operatorname{tg} y,$$

akkor megint x szerint differenciálva:

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \frac{dy}{dx},$$

miből:

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y.$$

De

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

tehát:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

vagyis ha $y=\operatorname{arctg} x$, akkor

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

e) Törtkitevőjű hatvány differenciálása. Végül még a törtkitevőjű hatvány diff. hányadosát állítjuk elő. Legyen:

$$y=x^{\frac{m}{n}},$$

azaz

$$y^n=x^m.$$

Differenciáljunk mindkét oldalon x szerint. A baloldalon y az x függvénye, tehát az összetett függvények diff. szabálya szerint eljárva:

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=mx^{m-1},$$

miből:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}=\frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

és ebből azt látjuk, hogy a törtkitevőjű hatványt is úgy kell differenciálnunk, mint azt eddig az egész kitevőjűnél láttuk: az exponenst szorzóul tesszük és az új exponens eggyel kisebb lesz, mint a régi volt. Tehát általában, ha p bármely egész- vagy tört szám és $y=x^p$, akkor

$$\frac{dy}{dx}=px^{p-1}.$$

f) Az eddigi differenciálási szabályok összefoglalása.

1) Ha $f(x)$ függvény egy közben constans, akkor diff. hányadosa 0.

2) Ha $y = x^n$, akkor $y' = nx^{n-1}$ (n bárminő számot jelentsen is).

3) Ha $y = \sin x$, akkor $y' = \cos x$.

4) « $y = \cos x$, « $y' = -\sin x$.

5) « $y = \operatorname{tg} x$, « $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6) « $y = \operatorname{cotg} x$, « $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7) « $y = \arcsin x$, « $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

8) « $y = \operatorname{arc\,tg} x$, « $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

9) « $y = u \pm v$, « $y' = u' \pm v'$.

10) « $y = uv$, « $y' = uv' + u'v$.

11) « $y = \dfrac{u}{v}$, « $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

12) Ha z függvénye az x-nek és $y = f(z)$ [összetett függvény] akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Összefoglalás. Ezen előadásban a függvény menetét görbével ábrázoltuk; megállapitottuk a görbe egy-egy szakaszában az emelkedés fogalmát mint e szakaszhoz tartozó húr iránymeghatározóját: hajlásszögének trigonometriai tangensét. Ha a szakasz zérussá vált, akkor a szelőből érintő lett és ennek az irányhatározójával mértük a görbe emelkedését *egy pontban.* Ezt az irányhatározót neveztük azon ponthoz tartozó *differenciálhányadosnak,* melyet tehát így értelmeztünk: $f(x)$ differenciálhányadosa x helyen:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Meghatároztuk néhány egyszerűbb függvény differenciálhányadosát, a szorzat, a hányados, az ú. n. összetett függvény differenciálási szabályát. De eddig még mindig csak a görbe vonal menetéről szóltunk; pedig a mit ebben az előadásban tanultunk, az sokkal általánosabb értékű. A görbe vonallal mi függvényt ábrázoltunk és ezzel minden változás képét tüntettük fel. Az emelkedés mértéke voltaképpen a változás mikéntjének, a változás sebességének a mértéke. Ezzel az általánosítással és kapcsolatosan a differenciálhányadosnak másnemű változásoknál való jelentőségével és gyakorlati alkalmazásával foglalkozunk a jövő órában.

Feladatok.

Próbálja az olvasó gyakorlatképpen előállítani a következő függvények diff. hányadosait:

1) $\sin 2x$, 2) $\sin(3x-5)$, 3) $(ax+b)^3$,
4) $(5\sin x+8)^2$, 5) $x^{\frac{2}{3}}$, 6) $\sqrt{5x+2}$,
7) $\sqrt{x^2+3x-5}$, 8) $\operatorname{tg} 3x$, 9) $\arcsin 2x$,
10) $\sin\frac{x}{2}$, 11) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, 12) $\operatorname{arctg}(x-1)$,

13) $\frac{2x^2-3x+5}{3x^2+4x-2}$, 14) $\sin\frac{1}{x}$, 15) $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$,

16) $\cos\frac{1}{x}$, 17) $\operatorname{cotg}\frac{1}{x}$, 18) $\arcsin\frac{1}{x}$,

19) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, 20) $\frac{a\sin x+b}{c\sin x+d}$, 21) $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$,

22) $\sin\sqrt{x}$, 23) $\operatorname{tg}\sqrt{x}$, 24) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

25) $\arcsin\sqrt{x}$, 26) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, 27) $\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$,

28) $\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$, 29) $\sqrt{a^2+x^2}$, 30) $\frac{1}{\sqrt{x}}$,

31) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, 32) $\sqrt{a^2-x^2}$, 33) $\sqrt{a^2+(b-x)^2}$,

34) $\sqrt[3]{1+x^2}$, 35) $\sin^2 x$, 36) $\cos^2 x$,

37) $\operatorname{tg}^2 x$, 38) $\operatorname{cotg}^2 x$,

39) Differenciáljuk ezen egyenlet mindkét oldalát x szerint:

$$\sin(\alpha+x)=\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x.$$

40) Tegyük ugyanezt ezzel:

$$\sin(\alpha-x)=\sin\alpha\cos x-\cos\alpha\sin x.$$

III. előadás.

9. *A differenciálhányados jelentése.* Az $y=f(x)$ függvény menetét grafikusan tüntettük fel; a görbe valamely pontjában megállapítottuk az emelkedés mértékszámát, az ordináta változásának fokát. Ez a mértékszám az illető pontban vonható érintő irányhatározója volt; az y függvény differenciálhányadosa: $\frac{dy}{dx}\cdot$ Minden függvény, amely egy változó mennyiségtől függ, ily módon ábrázolható. Ez a kép, amelyet a változásról alkottunk magunknak, *minden változás képe.* Így pl. ha valamely tárgy egyenes irányban mozog, akkor a kezdőponttól mért távolsága: s az eltelt időtől t-től függ [t pl. a másodpercek száma], azaz

$$s=f(t)$$

és ha az x tengelyre a t időt mérjük fel [bizonyos előre megállapított mértékegység közvetítésével] és az y tengely irányában az illető t idő alatt befutott utat, akkor e mozgás grafikus képét szolgáltatja a keletkező ábra.

Így például a 3-ik ábra tekinthető az $s=at+b$ egyenletes mozgás képének, vagy a 11-ik ábra az

$s = \sin t$ rezgő mozgás képének; az abscissa tengely a t tengelye, (az idő tengelye) az ordinata tengely a kitérés tengelye. Ha azt akarjuk tudni, hogy t mp mulva mekkora a kitérés, az abscissa tengelyen elmegyünk t távolságra és az ehhez tartozó ordináta adja meg a kitérés, a kilengés nagyságát.

Figyelmeztetünk arra, hogy nem kell azt gondolnunk, hogy a mozgás ezen a görbén megy végbe; ez csak grafikonja a mozgásnak, melynek segítségével megmondhatjuk, hogy a tetszés szerinti t másodperc alatt mekkora utat írt le a mozgó test.

A változás mértéke a t időpontban az előbbi megállapításaink szerint a B pontban húzott érintő irányhatározója: $\mathrm{tg}\,\alpha$, vagyis

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ennek az értelme megint a következő: A t idő alatt befutott út:

$$s = f(t).$$

Ha a t idő még Δt-vel nő, akkor a befutott út a $t + \Delta t$ idő alatt:

$$f(t + \Delta t)$$

és így a Δt idő alatt befutott út, melyet Δs-sel jelölünk:

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Ebből kiszámítható

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

viszony, mely a görbében a Δt szakasznak megfelelő emelkedés mértéke. A jelen esetben e hányadost a Δt idő alatt lefolyt mozgás *középsebességének* nevezzük és ha Δt 0-á válik, akkor

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

a t *időpontban való sebesség*. Előbbi jelölésünk szerint tehát, ha $s = f(t)$, akkor:

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) = \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

jelekkel írják fel az s-nek t szerinti diff. hányadosát, és ez a t *időpontban a mozgás sebessége.* A mozgás sebessége tehát nem más, mint a mozgást feltüntető grafikonban az illető pont érintőjének irányhatározója: *az* s *útnak* t *szerinti differenciálhányadosa.*

Így pld., ha tudjuk, hogy a mozgás úgy történik, hogy a leírt út arányos az idővel, azaz $s=ct$, akkor

$$\frac{ds}{dt} = c,$$

vagyis a sebesség állandó. A mozgás egyenletes.

Ha pedig tudjuk, hogy a leírt út arányos az idő négyzetével, azaz $s = kt^2$, akkor

$$\frac{ds}{dt} = 2kt,$$

vagyis a sebesség arányos az idővel. A mozgás egyenletesen változó. Ha pedig

$$s = a \sin t,$$

akkor
$$\frac{ds}{dt} = a \cos t.$$

A differenciálhányadosnak a természettudományok más ágaiban is nagy szerepe van, hiszen általában minden törvényszerű változás fokának, a változás gyorsaságának mérésére szolgál. Így pld. kisérletek útján megállapították, hogy a pálca hossza a hőmérséklettel miként változik. Pontos mérésekkel találták, hogy a pálca, amely 0°-nál 1 m hosszú, t°-nál

$$l = 1 + at + ct^2$$

hosszúságú. A változás mértékét itt tágulási együtthatónak nevezzük. Ez nem más, mint

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = a + 2ct,$$

vagyis az l-nek t szerinti differenciálhányadosa. Minthogy a c rendszerint igen kicsiny az a-hoz képest, azért nagy megközelítéssel azt mondjuk, hogy e tágulási együttható: constans.

Nem tudnám felsorolni mindazokat a fizikai fogalmakat, amelyekben a differenciálhányados szerepel, mint a fogalom alkotó eleme. Csak egy-két példát említek. Ha 1 kg-ot valamely anyagból t°-ra melegítünk, ehhez bizonyos melegmennyiség, mondjuk Q szükséges. Ha még Δt fokkal melegítjük, ehhez még ΔQ meleg kell. A $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ viszony kiszámítható, ha ismeretes az a törvényszerűség, amely a Q-nak a t-ből való kiszámítására alkalmas. Innen

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

a Q-nak t szerinti differenciálhányadosa az, amit az illető testnek $t°$-nál való fajhőjének nevezünk.

Ha ismeretes, hogy miképpen függ a folyadék, vagy a gáz térfogata a nyomástól, azaz tudjuk, hogy V minő függvénye a P-nek és egyébként a viszonyok változatlanok, akkor, ha a P nyomást ΔP-vel növeljük, kiszámítható, hogy mekkora a térfogat változása: ΔV [ez rendszerint negativ, ha ΔP positiv] és e viszony: $-\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a ΔP nyomás növekedésnek megfelelő tágulási viszony. Ebből

$$\lim_{\Delta P=0} \frac{\Delta V}{\Delta P} = \frac{dV}{dP}$$

a gáz compressio-coefficiense s. í. t.

Ha két anyag egymásra kémiailag hat, akkor bizonyos idő mulva ezen anyagok egy része megváltozik. A kémiai reakcio lefolyásának is van mértéke. Ha ugyanis Δt idő alatt az illető anyagból Δm mennyiség alakult át, akkor

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

a reakcio sebessége.

Sőt más tudományokban is iparkodnak a differenciálhányados fogalmának felhasználásával precizebb fogalomalkotást biztosítani. Csakhogy oly esetekben, midőn a szereplő tényezők, melyek egymástól függnek, a mérésre nem alkalmasak, mikor a mértékegység megállapítása nehézségekbe ütközik, e fogalomalkotás csak közelítőnek tekinthető.

Így pld. az egyénre nézve valamely javnak az értéke tudvalevőleg az illető jav mennyiségétől függ és a szükséglet szabja meg ezt az árt; tehát ha ezt az értéket y-nal, a jav mennyiségét x-el jelöljük, akkor

$$y = f(x).$$

Ez az érték nyilván nem arányos a mennyiséggel, mert ha már szükségleteinket kielégítettük, akkor a további mennyiség értéke sokkal kevesebbé válik. Az y érték neve az x mennyiségű jav hasznossága, ophelimitása. Ha a már élvezett x mennyiség még $\varDelta x$-el nő, akkor ez alatt az y érték $\varDelta y$-nal nő, azaz a $\varDelta x$ értéke azon homo oeconomicus részére, akinek már x mennyiség rendelkezésére állott: $\varDelta y$. E $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ viszony a $\varDelta x$ mennyiség hasznossági mértéke. És ha bekövetkezik az az idő, hogy megbízható módon fejezhetjük ki az y és x közötti törvényszerűséget, akkor meghatározhatjuk majd a

$$\lim_{\varDelta x = 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$$

differenciál-hányadost, mint az x javval biró egyénre nézve e jav hasznossági mértékét, az elemi ophelimitást.

Azt hiszem, nem kell tovább szaporitanom a példákat, hogy feltüntessem e fogalomnak szerepét és alkalmazhatóságát mindenütt, ahol törvényszerű változásról, illetőleg e változás fokának megállapitásáról van szó.

10. *A magasabbrendű differenciálhányadosok.* Most egy lépéssel tovább megyünk a fogalomalkotásban. A fizikából tudjuk, hogy a mozgásnál rendszerint a sebesség is változik az idővel. A sebesség is az idő függvénye. Közelfekvő gondolat tehát ezen változás gyorsaságának a mérése. Tudjuk, hogy erre találták ki a *gyorsulás* fogalmát.

Éppen így vagyunk minden változással. Ha megint a geometriai képhez fordulunk, mellyel minden változást feltüntethetünk, és megrajzoltuk azt a görbét, mely az

$$y = f(x)$$

függvény grafikus ábrázolására szolgál, akkor pl.: az A pontban húzott érintő irányhatározója, vagyis $\operatorname{tg}\alpha$ fejezi ki e pontban a változás gyorsaságát. Ez a számérték az x-hez tartozó differenciálhányadosa az $f(x)$ függvénynek. Ez az irányhatározó az x-el változik; az érintő más meg más szöget alkot az x tengellyel; vagyis a differenciálhányados az x függvénye. Ezért is jelöltük mindjárt kezdettől fogva így: $f'(x)$. Így például, ha $y = \sin x$, akkor $(\sin x)' = \cos x$. Ezt a függvényt is ábrázolhatjuk grafikusan. Ez az ábra lesz az $f(x)$ differenciálhányadosának grafikonja. Ha már most ezt a függvényt újból differenciáljuk, akkor megkapjuk az $f(x)$ függvény *második differenciálhányadosát*, amelyet a fizikából vett analogia szerint a változás gyorsulásának mérésére használhatunk. Így például az

$$x^n, \quad \sin x, \quad \cos x$$

függvények első differenciálhányadosai:

$$nx^{n-1}, \quad \cos x, \quad -\sin x$$

és így második differenciálhányadosai:

$$n(n-1)x^{n-2}, \quad -\sin x, \quad -\cos x.$$

Nem okoz semmi nehézséget a fogalom további tágítása. Beszélhetünk harmadik, negyedik stb. diff.-hányadosokról is.

Csak e fogalmak jeleivel kell még megbarátkoznunk. Az $y=f(x)$ függvény második diff.-hányadosára e jeleket szoktuk használni:

$$f''(x), \text{ vagy } \frac{d^2y}{dx^2},$$

Ha pl. egyenes vonalon történő mozgásnál $s=f(t)$ [az út az idő megadott függvénye]: akkor

$$\frac{ds}{dt}=f'(t)$$

a mozgás sebessége és

$$\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t)$$

a mozgás gyorsulása.

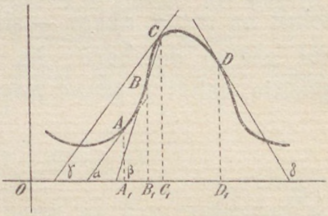
A harmadik differenciálhányados jelölésére ez szolgál:

$$f'''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

s í. t.

11. *Következtetés a görbe menetére a második differenciálhányadosból.* Az első differenciálhányados előjeléből következtethettünk az $f(x)$ függvény növekedésére. Ha a differenciálhányados valamely x értéknél pozitiv, akkor e helyen az $f(x)$ növekedően megy át. Ha pedig negativ, akkor fogyóan megy át.

Nézzük már most egy, az x tengely fölött vonuló görbének AB szakaszát. (19. ábra.) Az A-ban húzott érintő hajlásszöge α, (hegyes szög) a B-ben húzotté β és $\beta > \alpha$; tehát $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$, az érintő hajlásszöge AB szakaszban mindig nő.



19. ábra.

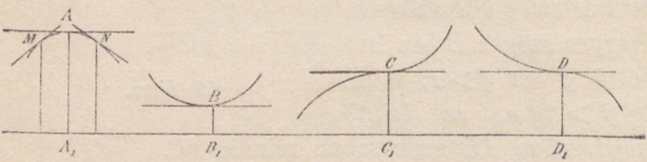
Az érintő irányhatározóját mindenütt az $f'(x)$ függvény szolgáltatja. E szakaszban tehát $f'(x)$ nő. De ha $f'(x)$ nő, akkor a differenciálhányadosa pozitiv, vagyis e szakaszban $f''(x)$ pozitiv. [Ez úgy értendő, hogy ha x abscissa A_1-től B_1-ig előre halad, akkor $f'(x)$ *mindig* nő és így $f''(x)$ pozitiv.]

Éppen ellenkezően áll a dolog a CD szakaszban [illetőleg, ha x C_1-től D_1-ig halad]. A $\gamma\sphericalangle$ tangense nagyobb a δ tangensénél, hiszen γ szög hegyes, tangense pozitiv és δ tompa szög, tehát tangense negativ. E CD szakaszban C-től D-ig haladva, az érintő irányhatározója *mindig* fogy, vagyis az $f'(x)$ állandóan fogy, tehát $f''(x)$ mindenütt negativ.

Geometriailag mi különbség van e két szakasz között? Azt látjuk, hogy az AB szakasz fölülről nézve *homorú*, a CD szakasz pedig fölülről nézve *domború*.

Ha tehát egy szakaszban $f''(x)$ mindig pozitiv, akkor e szakasz homorú, ha $f''(x)$ negativ, akkor pedig domború.

Így pld.: nézzük a $\sin x$ görbét. $(\sin x)'' = -\sin x$; tehát ha $x<\pi$, akkor $-\sin x$ negativ, a görbe (felülről nézve) domború; ha $2\pi>x>\pi$, akkor $-\sin x$ pozitiv, tehát a görbe homorú [felülről nézve].



20. ábra.

12. *A függvény maximuma és minimuma.* Még eddig nem szóltunk arról az esetről, midőn valamely x értéknél $f'(x)=0$. Ez esetben a görbe érintőjének irányhatározója 0, tehát e helyen az érintő párhuzamos az x tengellyel és így, miként a mellékelt ábra mutatja, (20. ábra) a következő esetek lehetnek:

Az A hely a görbe legmagasabb helye. Ez úgy értendő, hogy akár jobbfelé, akár balfelé menjünk is az A_1-től mindenütt alacsonyabb ordinátákra jutunk, mint az A_1A. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az A hely a görbe maximális helye. Ha A_1 abscissája a és a görbe az $y=f(x)$ függvényt ábrázolja, akkor ez azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvénynek az $x=a$ abscissáju helyén maximuma van, azaz, ha pl. h bármely (elég kicsiny) positiv számot jelent,* akkor $f(a+h)<f(a)$ és $f(a-h)<f(a)$.

Ezzel azt írtuk fel, hogy jobbra is, balra is kisebb ordinaták vannak, mint az $A_1A=f(a)$.

A B hely a görbe legalacsonyabb helye. Ez megint úgy értendő, hogy ha B_1 abscissája b, akkor, ha h tetszésszerinti poz. szám, (mely egy bizonyos d-nél kisebb), akkor

$$f(b-h)>f(b)<f(b+h)$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek a b minimalis helye. Másként áll a dolog a C helylyel. E görbének a C_1 előtt kisebb ordinátái vannak, mint a CC_1 ellenben C_1 után nagyobbak az ordináták; tehát dacára annak, hogy a C helyen az érintő párhuzamos az x tengellyel, e helyen mégis növekedőn megy át a függvény. Éppen így a D helyen csökkenően megy át.

Az a kérdés már most, *hogyan lehet meghatározni az $y=f(x)$ függvény maximalis, vagy minimalis helyeit.*

* Ez úgy értendő, hogy megadható például olyan d köz, hogy ha $h<d$, akkor úgy $f(a+h)<f(a)$, mint $f(a-h)<f(a)$, azaz, ha x az $a-d$ és $a+d$ közé esik, akkor

$$f(x)<f(a).$$

Nyilván, e helyeken az érintő párhuzamos az X tengellyel, tehát *csak olyan x helyen lehet az $f(x)$-nek maximuma, vagy minimuma, ahol $f'(x)=0$.*

De nem mindig van e helyeken szélső érték.

Nézzük az egyes eseteket részletesebben. A 20. ábra első képén az M helyen húzott érintő hegyes szöget alkot az X tengellyel. Ha M az A felé halad, e szög mindig kisebb lesz, az A helyen e szög: 0. E szög tangense tehát az MA szakaszban pozitiv, az A helyen: 0. Ha tovább megyünk, akkor a hajlásszög tompává lesz, a szög tangense negativ. Ha tehát a pont M-től A-n át N-be megy, az érintő hajlásszögének tangense positivből, 0-on át negativvá lesz, azaz mindig fogy. Az $f'(x)$ tehát fogy és így; *az $f''(x)$ e kis szakaszban mindenütt, tehát A-ban is: negativ.*

A 2. képen a B pont baloldalán húzott érintők tompaszöget alkotnak az X tengellyel, a jobboldalon levők pedig hegyes szöget; vagyis $f'(x)$ negativ értékből 0-on át positivba megy át és így $f'(x)$ e szakaszban mindig nő, *$f''(x)$ tehát pozitiv mindenütt, e kis szakaszban az A-ban is.*

Nézzük a 3. ábrát. Legyen a C abscissája: c. Ezen ábrában úgy a C pont baloldalán, mint a jobboldalán húzott érintők is hegyes szöget alkotnak az X tengellyel, vagyis az irányhatározó a C pont baloldalán pozitiv, mely lefogy 0-ig azután megint nő, tehát a 0-on átmegy ugyan, de sem fogyóan, sem növekedően; az $f''(x)$ a c abscissa helyen tehát sem positiv, sem negativ nem lehet, vagyis csak 0 lehet.

Ebből látjuk tehát, hogy *maximum és minimum* *csak olyan helyen lehet, ahol $f'(x)=0$ és pedig maximum van e helyen, ha $f''(x)$ negativ és minimum van, ha $f''(x)$ positiv.*

Ez más szóval az előbbiek szerint azt az egyszerű szemléletünket fejezi ki mathematikai formában, hogy ha az x abscissája helyén $f'(x)=0$ és e hely kis környezetében a görbe *domború*, akkor e helyen maximuma van az $f(x)$-nek; ha pedig a görbe e hely környezetében *homorú*, akkor itt minimuma van.

Lássunk nehány egyszerű példát. 1. Példa. Legyen.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

másodfokú egész függvény. x minő értékénél lesz maximuma, illetőleg minimuma? Maximuma vagy minimuma csakis ott lehet, ahol

$$f'(x)=2ax+b=0,$$

vagyis
$$x=-\frac{b}{2a}$$

tehát szélső értékét (maximumát vagy minimumát) akkor veszi fel a függvény, ha $x=-\frac{b}{2a}$.

Kérdés, maximalis vagy minimális értéke van-e ezen a helyen? E végből megállapítjuk $f''(x)$-et.

$$f''(x)=2a.$$

Ha ez, vagyis a positiv, akkor minimuma van a függvénynek, ha pedig a negativ, maximuma van. Így például, ha

$$y=x^2-6x+10$$

akkor $$x=\frac{6}{2}=3$$

e függvényt minimummá teszi. Valóban, ha x helyébe 3-at teszünk, akkor a függvény értéke:

$$9-18+10=+1.$$

Ha x helyébe bármely más értéket teszünk, pl.

$$x=3+h$$

akkor

$$y=(3+h)^2-6(3+h)+10=$$

$$=9+6h+h^2-18-6h+10=1+h^2,$$

tehát mindig nagyobb értéket kapunk 1-nél. Ennek az egyszerű eredménynek alkalmazásául kérdezzük, hogy egy c sebességgel fölhajított test minő magasra megy? A physikában tanítják, hogy t idő alatt fölmegy

$$s=ct-\frac{gt^2}{2}$$

magasságra. Ez maximális lesz, ha a diff.-hányados 0 [azaz a sebesség eltünik]

$$c-gt=0$$

azaz $$t=\frac{c}{g}$$

és innen a maximális magasság:

$$\frac{c^2}{2g}$$

2. Példa: *Bontsuk fel az a számot két részre, hogy a részek szorzata a legnagyobb legyen!*

Az egyik rész x, a másik $a-x$, akkor tehát kell, hogy

$$y=x(a-x)=-x^2+ax$$

maximum legyen.

$$f'(x)=-2x+a$$

tehát
$$x=\frac{a}{2}$$

teszi a függvényt maxinimummá. [Valóban maximum, mert $f''(x)=-2$ negativ].

3. Példa. *1 literes hengeralakú bádog mértéket akarunk készíteni. Hogyan válasszuk a méreteket, hogy legkevesebb bádogra legyen szükségünk?*

Az edény alapja kör. Legyen ennek a sugara: x dm Az edény magassága y dm. De minthogy a köbtartalma 1 dm^3, tehát

$$\pi x^2 y=1$$

vagyis
$$y=\frac{1}{\pi x^2}.$$

Az edény felülete áll az alapjából: $x^2\pi$-ből és a palástjából, melynek területe:

$$2x\pi y=\frac{2x\pi}{\pi x^2}=\frac{2}{x}.$$

A felülete tehát:

$$f(x)=\pi x^2+\frac{2}{x}$$

Hogy ez minimum legyen, kell, hogy

$$f'(x) = 2\pi x - \frac{2}{x^2} = 0$$

legyen, vagyis

$$\pi x^3 = 1.$$

$$x^3 = \frac{1}{\pi}.$$

Ha ezt kiszámítjuk, azt találjuk, hogy $x = 0{\cdot}6828\ldots$ dm vagyis a köralap radiusa 6·828 cm.

4. példa. *Egy négyzetalakú papirlapból a maximalis köbtartalmú nyitott dobozt akarjuk késziteni.* Legyen a négyzet oldalhossza: a.

Dobozt úgy készitünk ebből, hogy a sarkokon kis négyzeteket vágunk ki és a papirlapot felhajtjuk. Ha a kivágott négyzetek oldalhossza x, akkor a doboz köbtartalma lesz:

$$f(x) = (a-2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$$

$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2.$$

Kell, hogy

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

legyen. Ebből:

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

vagyis a két gyök:

$$x_1 = \frac{a}{6},\ x_2 = \frac{a}{2}.$$

Hogy megtudjuk, maximummal van-e dolgunk, kiszámítjuk a második diff.-hányadost. Ez:

$$f''(x) = 24x - 8a.$$

Ha $$x_1=\frac{a}{6}$$

akkor $$24x_1-8a=4a-8a=-4a \text{ negativ,}$$

ha $$x_2=\frac{a}{2}$$

akkor $$24x_2-8a=12a-8a=4a \text{ pozitiv.}$$

Eszerint tehát, ha $x=\frac{a}{6}$, vagyis a kivágott négyzet oldala az a oldal hatodrésze, akkor a doboz maximalis köbtartalmú, vagyis, akár kevesebbet, akár többet vágjunk ki, mindig kisebb köbtartalmú dobozt kapunk. E maximalis doboz köbtartalma:

$$\left(a-\frac{a}{3}\right)^2\frac{a}{6}=\frac{4a^2}{9}\cdot\frac{a}{6}=\frac{2a^3}{27}.$$

Ennél nagyobb doboz nem készíthető az adott négyzetből. Ha $x_2=\frac{a}{2}$ tesszük, akkor nyilván a doboz köbtartalma: 0; tehát voltaképpen nincs is dobozzal dolgunk.

5. példa. *Hogyan lehet A-ból B-be az e egyenes érintésével az ACB alakú legrövidebb úton jutni?*

Legyen (21. ábra.) $A_1B_1=d$: és $A_1C=x$, továbbá $AA_1=a$, $BB_1=b$. Minthogy

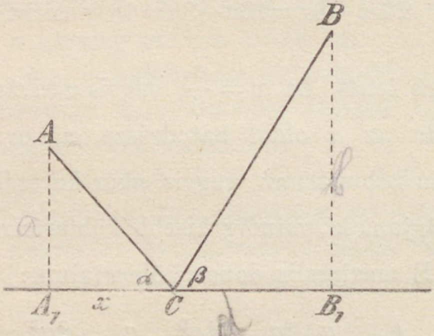
$$AC=\sqrt{x^2+a^2};\quad BC=\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

tehát az ACB ut:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

Ebből:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$



21. ábra.

Kell, hogy ez eltünjék. De az első tag nem más, mint $\cos\alpha$, a második pedig $\cos\beta$; tehát

$$\cos\alpha = \cos\beta,$$

vagyis:

$$\alpha = \beta.$$

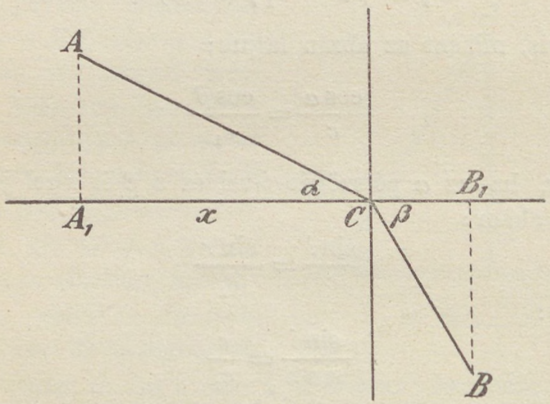
A belépés szöge egyenlő a kilépés szögével. Ebből látjuk, hogy a fénysugár, mely egy e tükrön visszaverődik, a legrövidebb útat követi az A és B között.

6. példa. *A-ból B-be akarunk jutni a legrövidebb idő alatt; de az e egyenesig c egyenletes sebességgel haladunk, az e egyenes alatt pedig c_1 sebességgel. Minő*

úton menjünk? (22. ábra.) A kérdés más szóval az, hogy az e egyenest melyik C pontjában lépjük át?

Legyen az $A_1B_1=d$ és $A_1C=x$; továbbá $AA_1=a$, $BB_1=b$, akkor

$$AC=\sqrt{x^2+a^2};\ CB=\sqrt{(d-x)^2+b^2}$$



22. ábra.

Az AC befutásához szükséges idő:

$$\frac{AC}{c}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c};$$

A BC befutásához szükséges idő:

$$\frac{BC}{c_1}=\frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c_1}$$

tehát A-tól B-ig eljutunk

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c}+\frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c_1}$$

idő alatt. Hogy ez minimum legyen, kell, hogy diff.-hányadosa 0 legyen azaz:

$$\frac{x}{c\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{d-x}{c_1\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

vagyis, miként az ábrán látjuk:

$$\frac{\cos\alpha}{c}=\frac{\cos\beta}{c_1}$$

vagy, ha az α pótszögét i-vel és a β-ét r-rel jelöljük, akkor:

$$\frac{\sin i}{c}=\frac{\sin r}{c_1}$$

azaz:

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{c}{c_1}$$

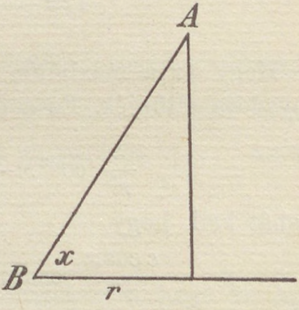
Ha az i szöget a belépés szögének, az r-et pedig a törés szögének nevezzük, akkor tehát arra az egyszerűen fogalmazható eredményre jutottunk, hogy a belépés szögének sinusa oly arányban legyen a törés szög sinusához, valamint az illető részekben levő haladási sebességek. Ha e sebességek viszonyát n-nel jelöljük, akkor

$$\frac{\sin i}{\sin r}=n$$

Látjuk, hogy ha a fénysugár egyik közeg A helyéről, egy másik közeg B helyére jut és az első közegben a terjedési sebessége c, a másodikban c_1, akkor úgy halad, hogy az A helyről a B helyre a legrövidebb idő alatt jusson.

7. példa. *Egy r sugarú kerek asztal közepe fölött van egy föl- és letolható lámpa. Minő magasra kell a lámpát helyeznünk, hogy az asztal körül ülők a legjobban lássanak?*

A physika megtanítja, hogy a fényerősség a távolság négyzetével fordított arányban van és a fénysugaraknak az asztal síkjával alkotott szögének sinusával egyenesen arányos. Ha tehát a lámpát nagyon alacsonyra teszszük, akkor a távolság kicsiny; de a hajlásszög is kicsiny és úgy a sinusa is kicsiny; ha pedig igen magasra helyezzük, akkor pedig a hajlásszög nő ugyan, de a távolság is nő és így a fényerősség ezáltal csökken. Kérdés tehát, hogy a lámpa minő helyzeténél lesz a fényerősség maximalis?



23. ábra.

Mondjuk, hogy ez akkor következik be, ha a lámpa az A pontban van. (23. ábra.) Az AB fénysugár az asztalhoz mondjuk x szög alatt hajlik. Ekkor tehát

$$\frac{r}{AB} = \cos x$$

és így:

$$AB = \frac{r}{\cos x}.$$

A fényerősség tehát az előbbi megjegyzésünk szerint

$$I = \frac{c \sin x}{(AB)^2}$$

a hol c egy bizonyos arányossági tényező. Ha AB kiszámított értékét ide helyettesítjük, akkor:

$$I = \frac{c \sin x \,.\, \cos^2 x}{r^2}$$

Hogy ez a maximum legyen, kell, hogy diff. hányadosa eltünjék. Ez a diff.-hányados:

$$\frac{c}{r^2} [\cos^3 x - 2 \cos x \sin^2 x]$$

tehát kell, hogy

$$\frac{c \cos x}{r^2} [\cos^2 x - 2 \sin^2 x] = 0$$

legyen. Ez a szorzat két esetben lehet 0. Az első eset, hogy $\cos x = 0$, azaz $x = \frac{\pi}{2}$; de ez lehetetlenség, mert azt jelentené, hogy a lámpa sugarai merőlegesen essenek az asztalra, a lámpa a végtelenben volna. Ekkor a fényerősség nyilván a legkisebb. A második eset, midőn

$$\cos^2 x - 2 \sin^2 x = 0$$

vagyis $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ téve

$$1 - 3 \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{3}$$

vagyis $$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ha megkeressük azt a szöget, melynek sinusa $\frac{1}{\sqrt{3}}$, azt találjuk, hogy az körülbelül 35°; tehát oly magasra kell a lámpát helyeznünk, hogy a hajlásszög 35° legyen.

Még egyszerűbben fogalmazható ez az eredmény, ha kiszámítjuk e szög tangensét. Azt találjuk, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vagyis a lámpa magassága $\frac{r}{\sqrt{2}}$, tehát körülbelül: $$\frac{5r}{7}$$

8. Példa.* Az optikában megtanítják, hogy ha egy hasáb törőszöge: α, továbbá a fénysugár i szög alatt esik be és i' szög alatt lép ki, akkor a két sugár eltérése

$$f = i + i' - \alpha$$

Kérdés, mekkorának kell lennie az i beesés szögnek, hogy az eltérés minimalis legyen.

Descartes szerint a fizikában tanítják, hogy (24. ábra)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad \frac{\sin i'}{\sin r'} = n,$$

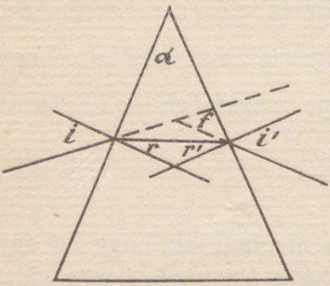
* Minthogy a következő számítások kissé körülményesek, a t. olvasó ezen, bár elég érdekes példának átszámítását későbbre hagyhatja.

ahol n a törésmutató. De a fölrajzolt ábrából igen egyszerűen következik, hogy

$$r + r' = \alpha,$$

vagyis $$r' = \alpha - r. \qquad A)$$

f-nek minimumnak kell lennie. Az i és i' mindegyike meg lesz határozva, ha ismerjük az r-et; tehát i és i' és így természetesen f is az r függvényének tekinthető. Kell tehát, hogy



24. ábra.

$$\frac{df}{dr} = 0$$

legyen. $f = i + i' - \alpha$, tehát:

$$\frac{df}{dr} = \frac{di}{dr} + \frac{di'}{dr},$$

(mert α állandó). De i' közvetlenül az r' függvénye, tehát az összetett függvények diff. szabálya szerint:

$$\frac{di'}{dr} = \frac{di'}{dr'}\,\frac{dr'}{dr}.$$

De (az $A)$ egyenletből)

$$\frac{dr'}{dr} = -1, \quad \text{tehát:} \quad \frac{di'}{dr} = -\frac{di'}{dr'}.$$

Így tehát $$\frac{df}{dr} = \frac{di}{dr} - \frac{di'}{dr'}. \qquad B)$$

A törésre vonatkozó Descartes-féle egyenletek így is írhatók:

$$\sin i = n \sin r, \quad \sin i' = n \sin r'.$$

Ha ez egyenleteket r, illetőleg r' szerint differenciáljuk:

$$\cos i \frac{di}{dr} = n \cos r; \quad \cos i' \frac{di'}{dr'} = n \cos r',$$

tehát: $$\frac{di}{dr} = n \frac{\cos r}{\cos i}, \quad \frac{di'}{dr'} = n \frac{\cos r'}{\cos i'}$$

és így: (B) egyenletből)

$$\frac{df}{dr} = n \left[\frac{\cos r}{\cos i} - \frac{\cos r'}{\cos i'}\right].$$

Ennek 0-nak kell lennie; azaz

$$\frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\cos r'}{\cos i'},$$

vagyis: $$\frac{1-\sin^2 r}{1-\sin^2 i} = \frac{1-\sin^2 r'}{1-\sin^2 i'}$$

illetőleg: $$1-\sin^2 r-\sin^2 i'+\sin^2 r \sin^2 i' =$$
$$=1-\sin^2 r'-\sin^2 i+\sin^2 i \sin^2 r'.$$

De ha ismét a Descartes egyenleteiből $\sin i = n \sin r$ és $\sin i' = n \sin r'$ tesszük:

$$-\sin^2 r - n^2 \sin^2 r' + n^2 \sin^2 r \sin^2 r' =$$
$$= -\sin^2 r' - n^2 \sin^2 r + n^2 \sin^2 r' \sin^2 r.$$
$$(n^2-1)\sin^2 r = (n^2-1)\sin^2 r',$$

azaz $$\sin^2 r = \sin^2 r',$$

miből: $$r = r'.$$

Ebből azonnal következik, hogy egyúttal $i = i'$, vagyis a legkisebb akkor lesz az eltérés, a beesésszög = a kitérésszöggel. [Kissé körülményes számítással tényleg kimutatható, hogy a második diff. hányados pozitiv.]

9. Példa. *Adva van egy r sugarú körlap (itatós papirosból). Mekkora nyílású körcikket vágjunk ki belőle, hogy a készítendő szűrő (a mit a kemikusok szoktak használni) maximális köbtartalmú legyen?*

A szűrő oly kúp, melynek oldaléle: r. Jelöljük a magasságát x-el, akkor alaplapjának radiusa:

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

és így a köbtartalma:

$$f(x) = \frac{\pi}{3}(r^2 - x^2)\,x. = \frac{\pi}{3}(r^2 x - x^3).$$

Hogy ez maximalis legyen, kell, hogy

$$f'(x) = \frac{\pi}{3}(r^2 - 3x^2) = 0$$

legyen, vagyis:

$$x^2 = \frac{r^2}{3}, \quad x = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

és így az alapkör radiusa:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = r\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az alapkör kerülete tehát:

$$2\pi r\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Ha a kúp palástját fölvágjuk és a síkra kiterítjük, akkor körcikk lesz belőle, melynek radiusa a kúp éle és íve a kúp alapköre. A jelen esetben tehát e palástból r sugarú és $2\pi r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ nagyságú ívvel biró körcikk válik. Ebből a két adatból kiszámíthatjuk a körcikk nyílását. Ha ez ω fokú, akkor a megfelelő ív hossza a körtan szerint:

$$\frac{\pi r\omega}{180},$$

tehát kell, hogy

$$\frac{\pi r\omega}{180}=2\pi r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

legyen, vagyis

$$\omega=360\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,{}^\circ=0{\cdot}816\ldots 360^\circ=293{\cdot}76^\circ\ldots$$

tehát nagy megközelítéssel 294°-ú nyílásra kell hagyni a körcikket, azaz a körlapból körülbelül 66°-ú szöget kell kivágni, hogy a szürő maximalis köbtartalmú legyen.

10. Példa. *Ha valakinek van a mennyisége valamely A jószágból, melynek hasznossága: (ophelimitása) $y=f(x)$ és szüksége volna B jószágra és az A jószág egysége a B-nek p egységével egyenértékű* [azaz az A jószág piaci ára a B piaci árának p-szerese] *és melynek ophelimitása az illetőre nézve* $\varphi(x)$ [vagyis az x mennyiség ránézve $\varphi(x)$ értékű];

kérdés mennyit cseréljen el az illető az A-ból B-re, hogy a legelőnyösebben járjon.

Ha a birtokában levő a mennyiségből x mennyiséget elcserél, akkor marad neki $a-x$ mennyisége és ennek ophelimitása ránézve:

$$f(a-x).$$

De az x mennyiség fejében kap a B-ből px mennyiséget és ennek az ophelimitása:

$$\varphi(px).$$

Az összes ophelimitása tehát:*

$$f(a-x)+\varphi(px).$$

Ennek maximalisnak kell lennie, vagyis kell, hogy

$$-f'(a-x)+p\varphi'(px)=0,$$

legyen, vagyis $\dfrac{f'(a-x)}{\varphi'(px)}=p.$

A cserét tehát addig fogja folytatni, míg az elemi ophelimitások viszonya éppen az egységárral lesz egyenlő.

Hogy itt valóban maximumról van szó, az abból

* Abban már egy, a valóságnak meg nem felelő hypothesis van, hogy két jószágból eredő ophelimitás az egyes ophelimitások összege, mert ha ez különböző jószágokra áll, akkor ugyanarra is kellene állani és ebből az következik, hogy $f(x)+f(y)=f(x+y)$, amiből egyszerűen következik, hogy $f(x)=cx$, vagyis arányos az x-el.

következtethető, hogy az ophelimitás görbéje csakis domború lehet, tehát az elemi ophelimitás, [a diff. hányados] mindig csökken, a második diff. hányados mindig negativ; de a $-f'(a-x)+p\varphi'(px)$ diff. hányadosa, vagyis az ophelimitás második diff. hányadosa:

$$f''(a-x)+p^2\varphi''(px),$$

ez tehát negativ és így valóban maximummal van dolgunk.

11. Példa. Tapasztalásból tudják a mérnökök, hogy adott hosszúságú gerenda hordképessége arányos a szélességével és a vastagságának a négyzetével. Kérdés, hogyan vágjunk ki egy hengeralakú fatörzsből olyan gerendát, melynek hordképessége maximalis?

Legyen a henger keresztmetszetének radiusa: r. A gerenda szélessége x; akkor vastagsága:

$$\sqrt{4r^2-x^2},$$

tehát a fatörzs hordképessége arányos

$$x(4r^2-x^2)$$

-el, vagyis $4r^2x-x^3$-al.

Kell, hogy diff. hányadosa, azaz

$$4r^2-3x^2=0$$

legyen. Ebből:

$$x=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

és így a vastagsága:

$$\sqrt{4r^2-x^2}=\sqrt{\frac{8r^2}{3}}=2r\sqrt{\frac{2}{3}},$$

vagyis vastagsága éppen $\sqrt{2}$-szerese a szélességének, azaz körülbelül 1·4-szerese.

12. Példa. *n galvánelemből állítunk elő telepet és pedig oly módon, hogy x elemet nagylapúan és így $y = \frac{n}{x}$ csoportot láncolatosan kapcsolunk. Kérdés, hogyan kell az x-et választanunk, hogy az így keletkező telep intensitása maximalis legyen?*

Ha egy-egy elem villamindító ereje e és belső ellenállása r, továbbá a telep külső ellenállása R, akkor a nagylapúan kapcsolt x elemből álló telep elektromos indító ereje szintén e [mert hiszen ez nem függ a felület nagyságától], de belső ellenállása csak $\frac{r}{x}$, [mert a felülettel fordítva arányos az ellenállás]. Tekintsük most ezt az x elemből alkotott telepet egy (összetett) elemnek, melynek elektromindító ereje e, külső ellenállása R és belső ellenállása: $\frac{r}{x}$ és kapcsoljunk össze y ilyen összetett elemet láncolatosan, akkor az elektromos indító erő ey, a belső ellenállás $y\frac{r}{x}$ lesz. A jelen esetben tehát az Ohm törvény szerint az intensitás:

$$i = \frac{ey}{y\frac{r}{x} + R} = \frac{\frac{ne}{x}}{\frac{nr}{x^2} + R} = \frac{nex}{nr + Rx^2}.$$

Hogy ez maximalis legyen, kell, hogy diff. hányadosa eltünjék, azaz

$$(nr+Rx^2)\,ne-2neRx^2=0,$$

azaz

$$nr+Rx^2=0$$

és innen, ha $n=xy$ tesszük, arra az egyszerű szabályra jutunk, hogy

$$x:y=r:R,$$

vagyis a nagylapúan kapcsolt elemek száma oly arányban legyen a láncolatosan kapcsolt csoportok számához, mint a belső ellenállás a külsőhöz.

Összefoglalás. Ebben az előadásban megismertettük a differenciálhányados jelentőségét minden változás *sebességének* a megállapításánál: a mozgás sebességét, a reactio sebességét stb. Magának a differenciálhányadosnak a változását a második diff. hányadossal mértük s ezzel a gyorsulás fogalmára és ehhez analog a *magasabb differenciálhányadosok* fogalmára jutottunk. Ezzel kapcsolatban a differenciálszámításnak egy igen fontos alkalmazásával ismerkedtünk meg: a függvény maximumának és minimumának meghatározásával. A görbe vonal menete ugyanis közvetlenül rávezetett bennünket arra, hogy ha a diff. hányados valamely helyen pozitiv, ott a görbe emelkedőben van (vagy ha a fölfelé mozgó test sebessége pozitiv, akkor emelkedő) és ha a diff. hányados negativ, azon a helyen a görbe alászállóban van (ha a sebesség negativ, a test lefelé száll). Ha pedig a diff. hányados pozitivból negativvá lesz, akkor közben zérussá is lett (az érintő előbb hegyes szöget, azután tovább haladván tompa szöget alkot az x tengellyel) a függvénynek ilyen helyen *maximuma* van. De minthogy a diff. hányados pozitivból negativvá lett, tehát mindig fogyott, és így a második diff. hányados negativ. Eszerint tehát a függvénynek maximuma van olyan helyen, ahol az első diff. hányados 0 és a második negativ. Ha pedig az első diff. hányados 0, de a második pozitiv, akkor minimuma van.

Feladatok.

1) Határozzuk meg a következő függvények szélső értékeit:

a) $x^3-2kx^2+k^2x$; *b)* x^3+6x^2-15x,

c) $x^2(1-x)$; *d)* $x^2(a-x)^2$;

e) $\dfrac{x}{x^2+1}$; *f)* $\dfrac{x}{x^2+2x+4}$;

g) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$; *h)* $2\sin x+\sin 2x$.

2) Egy adott körbe rajzolható derékszögű négyszögek közül melyiknek van maximalis területe?

3) Hogyan kell egy adott gömbbe olyan hengert bele állítani, melynek maximalis köbtartalma van?

4) Valamely AB egyenes A pontjában van egy fényforrás, melynek erőssége α, (pl. α gyertyaerősség), B-ben pedig β erősségű fényforrás. Az AB

hossza: d. Kérdés, hol van az AB egyenesen az a pont, melyen az intenzitás a legkisebb? (Az intenzitás a távolság négyzetével fordítva arányos.)

5) Azon háromszögek közül, melyeknek két oldala megegyezik [az egyik a, a másik b], melyiknek van legnagyobb területe?

6) Egy adott egyenes körkúpba helyezhető körhengerek közül melyiknek van maximalis köbtartalma? (A henger alapja a kúp alapján legyen.)

7) Valamely mennyiséget (pl. egy rúd hosszát) többször megmértünk. Először a_1, azután $a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$-nek találtuk. *Gauss* azt állította, hogy a legvalószínűbb, hogy a mérésnél elkövetett hibák négyzeteinek összege minimum. Ha tehát a rúd hossza x, akkor a hibák: $x-a_1$, $x-a_2$, $x-a_3, \ldots x-a_n$. Kérdés, x-nek minő értéket kell tulajdonítanunk, hogy az $(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ hibanégyzetek összege minimum legyen?

8) c sebességgel a vízszinteshez x szög alatt elhajítunk egy követ. Ha a levegő ellenállását nem vesszük figyelembe, a fizika megtanítja, hogy $\dfrac{c^2 \sin^2 x}{2g}$ magasságra emelkedik és a vízszintesben $\dfrac{c^2 \sin 2x}{2g}$ távolságra jut ez a kő. Minő szög alatt hajítsuk el, hogy *a)* legmagasabbra emelkedjék? *b)* hogy legtávolabbra menjen a vízszintesben?

9) Egy háromszögbe derékszögű négyszögeket rajzolunk úgy, hogy a négyszög alapja mindig a háromszög alapjának egy része legyen, a négyszög másik

két csúcsa pedig a háromszög oldalain legyen. Az így rajzolható derékszögű négyszögek közül melyiknek van maximalis területe?

10) *α)* Melyik az a négyzetalapú maximalis köbtartalmú gúla, melynek mindegyik oldaléle a hosszúságú. *β)* Melyik az a négyzetalapú, maximalis felületű gúla, melynek mindegyik oldaléle a hosszúságú?

IV. előadás.

13. *A végtelen sor.* Előre is bocsánatot kell kérnem tisztelt hallgatóimtól, hogy a mai előadásban kissé elvontabb fejtegetésekkel foglalkozunk; de megpróbálkozom velük, mert szeretném, ha eljuthatnék a felsőbb mathesis olyan részeihez is, melyek egészen új világításba helyezik az elemi mathematika ismeretes egyszerű fogalmait. Ne vegyék tehát rossz néven, ha ma figyelmüket még az eddiginél is jobban igénybe veszem.

Ha e törtszámot: $\frac{1}{3}$ tizedes törtben állítjuk elő, miként ismeretes a

$$0{\cdot}333\ldots$$

végtelen tizedes törtre jutunk. Senki sem kételkedik tehát abban, hogy e végtelen tizedes tört: $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$ éppen $\frac{1}{3}$. Mi ennek az állításnak a pontos értelme?

$\frac{3}{10}$ még nem $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{10}$ már több $\frac{1}{3}$-nál; azaz $\frac{3}{10}$ az $\frac{1}{3}$-ot $\frac{1}{10}$-nél kisebb hibával közelíti meg. 0·33 már 0·01-nél kisebb hibával állítja elő, ha pedig 0·333-ot mondanánk $\frac{1}{3}$ helyett, akkor a hiba $\frac{1}{1000}$-nél kisebb lesz, s í. t.; ebből következik, hogy e sorozat:

$$0{\cdot}3,\ 0{\cdot}33,\ 0{\cdot}333,\ 0{\cdot}3333\ldots$$

az $\frac{1}{3}$-ot olyan pontosan közelíti meg, amint csak kívánjuk. *Ezt úgy mondjuk, hogy e sorozat limese: $\frac{1}{3}$.* Tehát, ha azt mondjuk, hogy e végtelen tizedes tört: $0{\cdot}3333\ldots = \frac{1}{3}$, ez alatt nem értünk mást, mint hogy a számok ezen sora:

$$0{\cdot}3,\ 0{\cdot}33,\ 0{\cdot}333,\ 0{\cdot}3333\ldots$$

az $\frac{1}{3}$-ot oly pontosan közelíti meg, amint csak akarjuk, vagyis, ha bárminő kis (ε) számot mondanak is, elmehetünk e sorozatban olyan messzire, hogy azon túl minden szám ε-nál kevesebbel különbözzék az $\frac{1}{3}$-tól. Így például, ha $\varepsilon = \frac{1}{10000}$, akkor már a negyedik tagtól kezdve mindenik tag ε-nál kevesebbel tér el az $\frac{1}{3}$-tól. Ha $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$, akkor pedig a hatodiktól kezdve minden tag ε-nál kevesebbel tér el az $\frac{1}{3}$-tól.

Ismeretes, hogy, ha $q < 1$, akkor e végtelen sor:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

összegéről is beszélünk. Mit értünk ez alatt? Megalkotjuk a részletösszegeket:

$$1,\ 1+q,\ 1+q+q^2, \ldots\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}, \ldots$$

Ezeket ki is tudjuk számítani. Az n-iket jelöljük s_n-nel. Ez:

$$s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Látjuk, hogy ez az összeg az $\dfrac{1}{1-q}$-nál kisebb; de tőle csak

$$\frac{q^n}{1-q}$$

-ban különbözik. Minthogy a $q<1$, tehát $\frac{q^n}{1-q}$ oly kicsinnyé tehető, amint csak akarjuk, ha csak n-et elég nagyra választjuk, tehát a részletösszegek sora:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$$

oly számsorozat, melynek limese: $\frac{1}{1-q}$. *Ezért mondjuk, hogy az*

$$1+q+q^2+\cdots$$

végtelen sor összege:

$$\frac{1}{1-q}.$$

Nem lehet mindig a végtelen sor összegéről szólni. Igy például ha a sor minden tagja: 1, akkor

$$1+1+1+\cdots$$

végtelen nagy lesz; ha a sor:

$$1-1+1-1+1-1\ldots$$

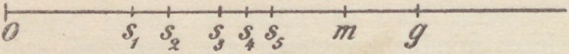
akkor a részletösszegek sora

$$1,\ 0,\ 1,\ 0\ldots$$

és ennek nincs határértéke. A végtelen sor összegéről csak akkor szólunk, ha a részletösszegekből alkotott számsornak van meghatározott véges határértéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a végtelen sor *összetartó*. Minden más esetben a sort *széttartó*nak mondjuk.

Egy kis megjegyzést akarunk még tenni, aminek jó hasznát vesszük minden ilyen összetartási kérdésnél.

Ha az s_1, s_2, s_3... számok sorozata növekedő [azaz mindenik szám nagyobb az előtte levőnél], de egy bizonyos meghatározott számnál, pld. g-nél nagyobb egyik sem lesz, akkor e sorozatnak van meghatározott véges határértéke. Ha ugyanis e számoknak megfelelő pontokat az egyenesre fölrajzoljuk, (25. ábra) akkor mindegyik új pont az előtte valóktól jobbra kerül; de a g ponton túl egyik se jut. Mi következik ebből? Az, hogy valahol, vagy a g helyen,



25. ábra.

vagy már előbb másutt valahol, például az m helyen a pontok összesűrűsödnek, vagyis bármilyen kis közt jelöljünk is meg az m előtt [melynek m a jobboldali vége] valamelyik s-től kezdve a többi mind ide, ebbe a közbe esik; tehát nyilván az m e sorozat határértéke. Jegyezzük tehát meg magunknak, hogy ha a számok sorozata növekvő; de mindmegannyi kisebb egy bizonyos g számnál, akkor e sorozatnak van limese. Ugyanigy áll a dolog, ha ez s_1, s_2, s_3... számok mindegyre csökkennek, de azért mindannyian egy bizonyos véges számnál nagyobbak maradnak.

Most egy oly eljárást ismertetünk meg, amelynek segitségével eldönthetjük, hogy egy adott (pozitiv tagokból álló) végtelen sor összetartó-e? Ez az eljárás a nagy encyclopedistától: *D'Alemberttől* származik.

Valamely végtelen sor [pozitiv] tagjai legyenek

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \ldots$$

és két szomszédos tag hányadosa

$$\frac{u_2}{u_1}, \quad \frac{u_3}{u_2}, \quad \frac{u_4}{u_3}, \ldots \quad \frac{u_{n+1}}{n_n} \ldots$$

mindig kisebb egy bizonyos valódi törtnél, akkor a sor összetartó.

Legyen ugyanis ez a valódi tört q, akkor tehát:

$$\frac{u_2}{u_1} < q, \quad \text{azaz} \quad u_2 < u_1 q$$

$$\frac{u_3}{u_2} < q, \quad \text{«} \quad u_3 < u_2 q < u_1 q^2$$

$$\frac{u_4}{u_2} < q, \quad \text{«} \quad u_4 < u_3 q < u_1 q^3$$

s í. t.

tehát az

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4 \ldots$$

rendre kisebbek az

$$u_1, \quad u_1 q, \quad u_1 q^2, \quad u_1 q^3 \ldots$$

tagoknál és így az adott sorból készített részletösszegek is mind kisebbek a második sorból alkotott részletösszegeknél. Az előbbi megjegyzésünk szerint most már könnyen beláthatjuk, hogy az $u_1, u_2, u_3 \ldots$-ból alkotott részletösszegek sorának [amely növekedő sor] meghatározott határértéke van, vagyis az

$$u_1+u_2+u_3+\dots$$

összetartó.

Egy másik ismertető jel, amely váltakozó előjelű sorokra vonatkozik, a következő. Ha u_1, u_2, $u_3\dots$ pozitiv számok és folyton csökkennek, továbbá $\lim\limits_{n=\infty} u_n=0$ [azaz az u_n számok minden számnál kisebbekké válnak, ha n korlátlanul nő], akkor az

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots$$

végtelen sor konvergens.

E sornak 3 első tagja: $u_1-(u_2-u_3)$ alakban írható és minthogy $u_2>u_3$, ezen látjuk, hogy ez összeg u_1-nél kisebb. 5 tagjának összege:

$$u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)$$

még kisebb s í. t., szóval a páratlan tagú részletösszegek folyton csökkennek, de $(u_1-u_2)+u_3>(u_1-u_2)$, $(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+u_5>(u_1-u_2)\dots$ tehát mindegyik részletösszeg u_1-u_2-nél nagyobb marad. Megjegyzésünk szerint [l. 104 lap] tehát a páratlan tagú részletösszegek sorozatának van véges és meghatározott limese. Legyen ez a limes: s.

Nézzük most a páros tagú részletösszegeket:

$$s_2=u_1-u_2\quad s_4=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)>(u_1-u_2),\quad s_6>s_4\dots$$

szóval a páros tagú részletösszegek sora növekedő sor; de

$$u_1-u_2<u_1,\qquad u_1-u_2+u_3-u_4=u_1-(u_2-u_3)-u_4<u_1,$$

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6=$$
$$=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-u_6\ldots$$

szóval mindenik részletösszeg kisebb u_1-nél.

A páros részletösszegek sorozata növekedő sor; de mindegyik kisebb a véges u_1-nél, tehát e sorozatnak is van határértéke. Legyen ez a határérték: s'.

Még csak azt mutatjuk meg, hogy $s=s'$. Ugyanis

$$s_n=u_1-u_2+u_3\ldots\pm u_n.$$

$$s_{n+1}=u_1-u_2+u_3\ldots\pm u_n\mp u_{n+1}$$

és így:

$$s_n-s_{n+1}=\pm u_{n+1}$$

[aszerint, amint n páros, vagy páratlan]; de minthogy az u számok elenyésző csekélyekké lesznek, tehát s_n-s_{n+1} is elenyésző csekély lesz, azaz $s=s'$.

Ezzel kimutattuk, *hogy a váltakozó előjelű sor, melynek tagjai folyton csökkennek és végül elenyésznek: összetartó.*

Példaképen nézzük ezt a végtelen sort, melyre még többször visszatérünk:

$$1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

A D'Alembert-féle eljárással rögtön beláthatjuk, hogy ez a sor összetartó, akármekkora legyen is az x. Itt ugyanis két egymásutáni tag hányadosa [az $n+1$-ik osztva az n-ikkel]:

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\cdots(n+1)}:\frac{x^n}{1.2.3\cdots n}=\frac{x}{n+1},$$

tehát ha n-el oly messze megyünk, hogy $n>2x$ legyen, akkor innen kezdve e hányados mindig kisebb: $\frac{1}{2}$-nél, tehát innen kezdve a D'Alembert-féle hányados kisebb bizonyos valódi törtnél [itt e valódi tört: $\frac{1}{2}$].*

Jelöljük ezt a függvényt, mely a felsőbb mathesis egyik legfontosabb függvénye egyelőre: $\varphi(x)$-el; tehát

$$\varphi(x)=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

14. *A függvény sorbafejtése.* A végtelen soroknak egy igen fontos alkalmazásával akarom t. hallgatóimat megismertetni.

A legegyszerűbb függvények ugyebár az ilyenek:

$$a+bx, \text{ vagy } a+bx+cx^2,\; a+bx+cx^2+dx^3\ldots,$$

melyeket elsőfokú, másodfokú stb. racionalis egész függvényeknek nevezünk. Már most arra törekszünk, hogy más függvényeket, mint pld. a $\sin x$, $\cos x$ stb. függvényeket is ilyen formában állítsuk elő. Ha általában $f(x)$ valamely függvénye az x-nek és ilyen formában akarjuk előállítani, akkor nem várhatjuk, hogy másod-, harmad- vagy negyedfokú stb. ilyen függvényre jussunk, mert hiszen akkor $f(x)$ épen

* Az, hogy e hányados nem az első tagtól kezdve kisebb $\frac{1}{2}$-nél, nem határoz, mert ha csak a 100-iktól kezdve kisebb, az is elég, hiszen a 100 első tag összege véges, tehát, ha a sor összege a 100-iktól kezdve véges, egészben is véges, a sor összetartó.

racionalis egész függvény volna. Ilyenkor tehát azt próbáljuk meg, hogy $f(x)$-et végtelen sorban állítsuk elő ilyen alakban:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots \qquad \text{I)}$$

A kérdés már most csak az, hogy mekkorák az A_0, A_1, A_2, $A_3 \ldots$ együtthatók? Erre így válaszolhatunk: Tegyük először is ebbe az egyenlőségbe $x=0$. Akkor tehát

$$f(0) = A_0,$$

vagyis A_0 nem egyéb, mint az $f(x)$ értéke $x=0$ helyen.

Állítsuk most elő mindkét oldalon az x szerinti differenciál-hányadost:

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \cdots \qquad a).$$

Tegyük most ismét $x=0$. A baloldalon lesz: $f'(0)$, a jobboldalon: A_1, tehát

$$A_1 = f'(0),$$

vagyis az A_1 együttható az $f(x)$ differenciál-hányadosa az $x=0$ helyen.

Differenciáljuk újra az $a)$ azonosságot x szerint:

$$f''(x) = 2A_2 + 3.2.A_3 x + 4.3.A_4 x^2 + 5.4 A_5 x^3 + \cdots$$

Ha $x=0$ tesszük:

$$A_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$

Ujból differenciáljunk:

$$f'''(x) = 3.2 A_3 + 4.3.2 A_4 x + 5.4.3.A_5 x^2 + \cdots$$

és innen:

$$A_3 = \frac{f'''(0)}{2.3}.$$

Ha ezt az eljárást folytatjuk, azt kapjuk, hogy:

$$A_4 = \frac{f^{IV}(0)}{2.3.4}, \quad A_5 = \frac{f^{V}(0)}{2.3.4.5} \text{ s í. t.},$$

és így az I) alatti kifejezés:

$$f(x) = f(0) + f'(0).x +$$

$$+ \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!} x^4 + \cdots \qquad T)$$

Így tehát:

$$A_0 = f(0), \quad A_1 = f'(0), \quad A_2 = \frac{f''(0)}{2},$$

$$A_3 = \frac{f'''(0)}{2.3}, \quad A_4 = \frac{f^{IV}(0)}{2.3.4}.$$

Ha tehát ismerjük a szóban forgó $f(x)$ függvény differenciál-hányadosait az $x=0$ értéknél, akkor az $f(x)$ előállítható ilyen végtelen sor alakjában (*Taylor*-sornak nevezzük az ilyen sort) és ha e végtelen sor összetartó, akkor fölhasználhatjuk az $f(x)$ függvény értékének a kiszámítására.

Alkalmazzuk ezt a szép eljárást az elemi mathematikában szereplő néhány függvény előállítására.

a) *A* $\sin x$ *végtelen sora.* Így például, ha a $\sin x$ függvényről van szó, akkor

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\sin x)'' = -\sin x,$$
$$(\sin x)''' = -\cos x, \qquad (\sin x)^{IV} = \sin x,$$

$$(\sin x)^{\mathrm{V}} = \cos x, \qquad (\sin x)^{\mathrm{VI}} = -\sin x,$$
$$(\sin x)^{\mathrm{VII}} = -\cos x, \qquad (\sin x)^{\mathrm{VIII}} = \sin x$$

s í. t.

[Látjuk, hogy a differenciál-hányadosok a második csoportban ugyanazok, mint az elsőben és így volna tovább is.] Ha már most $x=0$ tesszük, akkor azt találjuk, hogy:

$$\sin 0 = 0, \qquad (\sin 0)' = 1,^{*} \qquad (\sin 0)'' = 0,$$
$$(\sin 0)''' = -1, \qquad (\sin 0)^{\mathrm{VI}} = 1, \qquad (\sin 0)^{\mathrm{V}} = 1,$$
$$(\sin 0)^{\mathrm{VI}} = 0, \qquad (\sin 0)^{\mathrm{VII}} = -1. \qquad (\sin 0)^{\mathrm{VIII}} = 1$$

s í. t.

tehát *T)* szerint

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

Erről a végtelen sorról azonnal látjuk, hogy minden x értéknél összetartó, mert váltakozó előjelű [ha x positiv], csökkenő [legalább egy bizonyos tagtól kezdve] és $\lim u_n = 0$.

Azt is látjuk ebből, hogy

$$\sin x = x - \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right) - \left(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}\right) \cdots$$

és

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right) \cdots$$

vagyis [legalább, ha $x < \pi$]

* Ez azt jelenti, hogy $\sin x$ differenciál-hányadosában, azaz $\cos x$-ben $x=0$ tesszük.

$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

tehát, ha $\sin x$ helyett x-et mondunk, az elkövetett hiba $\frac{x^3}{6}$-nál kisebb. Így például, ha $5°$-ról van szó, akkor az abscissa mértékszáma:

$$\frac{5\pi}{180} = \frac{\pi}{36}$$

körülbelül $\frac{1}{10}$ és így, ha $\frac{\pi}{36}$-ot mondunk $\sin 5°$ helyett, akkor az elkövetett hiba kisebb $\frac{1}{6000}$-nél.

b) *$\cos x$ végtelen sora.* Állítsuk elő $\cos x$ Taylor sorát. Tudjuk, hogy $\cos x$ a $\sin x$ differenciál-hányadosa; de

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

tehát, ha mindkét oldalon differenciálunk:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$$

Itt tehát olyan formulákat kaptunk, amelyek segítségével $\sin x$-et, vagy $\cos x$-et olyan pontosan számíthatjuk ki, aminő pontosan csak óhajtjuk.

c) *Exponencialis sor. Logarithmus.* Próbáljuk most meg az előbb példaképen említett függvényt, a

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

-et közelebbről megállapítani. Ez egy sajátságos függvény.

Ha ugyanis differenciáljuk, akkor azt találjuk, hogy:

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.4} + \cdots,$$

vagyis

$$\varphi'(x) = \varphi(x).$$

Ebből folytatólagosan azt láthatjuk, hogy $\varphi(x)$ minden differenciál-hányadosa $\varphi(x)$. A $\varphi(x)$ a differenciálásnál nem változik.

Állítsuk elő most Taylor sorban a $\varphi(x)$ függvény k-ik hatványát, vagyis a $[\varphi(x)]^k$ függvényt, melyet $F(x)$-el jelölünk. E végből az általános szabályunk szerint előállítjuk e függvény differenciálhányadosait sorban és e diff. hányadosokat kiszámítjuk az $x=0$ helyen.

$$\frac{dF(x)}{dx} = k[\varphi(x)]^{k-1}\varphi'(x)$$

De $\varphi'(x)=\varphi(x)$, tehát a keresett diff. hányados: $k[\varphi(x)]^k$.

A $[\varphi(x)]^k$ függvény diff. hányadosát tehát egyszerűen úgy kapjuk meg, hogy ha a $[\varphi(x)]^k$ függvényt k-val szorozzuk. Ebből azt is láthatjuk, hogy a második diff. hányadost megkapjuk, ha k^2-el szorzunk, a harmadikat, ha k^3-al szorzunk, s. i. t., azaz:

$$F(x)=[\varphi(x)]^k, \qquad F'(x)=k[\varphi(x)]^k,$$

$$F''(x)=k^2[\varphi(x)]^k, \qquad F'''(x)=k^3[\varphi(x)]^k \text{ s. i. t.}$$

Minthogy az $x=0$ helyen $\varphi(x)=\varphi(0)=1$, tehát:

$$F(0)=1, \quad F'(0)=k, \quad F''(0)=k^2, \quad F'''(0)=k^3, \ldots$$

és így $F(x)$ Taylor-sora:

$$F(x)=[\varphi(x)]^k=1+\frac{kx}{1}+\frac{(kx)^2}{2!}+$$

$$+\frac{(kx)^3}{3!}+\frac{(kx)^4}{4!}+\cdots$$

Arra a sajátságos eredményre jutottunk, hogy $\varphi(x)$ k-adik hatványát a $\varphi(x)$ Taylor sorából úgy kapjuk meg, hogy x helyébe egyszerűen kx-et teszünk.

Ha már most ebben az identitásban $x=1$ tesszük, akkor

$$[\varphi(1)]^k=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

vagy k betű helyett x-et téve:

$$[\varphi(1)]^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots.$$

vagyis: $$[\varphi(1)]^x=\varphi(x), \qquad \text{I)}$$

$\varphi(1)$ nem más, mint:

$$\varphi(1)=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

végtelen sor, melynek összegét e-vel jelöljük. Ha e sort kiszámítjuk, azt találjuk, hogy

$$e=2{\cdot}718281828\ldots.$$

Eszerint tehát az I) alatti egyenlet:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Végeredményben arra jutottunk, hogy az eddig átmenetileg $\varphi(x)$-el jelölt függvény nem egyéb, mint az e szám x-ik hatványa. Láttuk, hogy $\varphi'(x) = \varphi(x)$, tehát az e^x u. n. *exponencialis függvénynek* differenciálási szabálya a világon a legegyszerűbb. Ugyanis $(e^x)' = e^x$.

Az e számot használjuk a felsőbb mathesisben a logarithmus rendszer alapjául és ha egy tetszésszerinti A positiv szám adatik, akkor $\log A$ alatt azt az a számot értjük, amelyre nézve:*

$$e^a = A.$$

Legyen már most adva egy tetszésszerinti x pos. szám; akkor

$$y = \log x$$

az a szám, amelyre nézve:

$$e^y = x.$$

* Ha ismeretes valamely A szám logarithmusa az e alapra nézve, kiszámítható az A közönséges Briggs-féle logarithmusa is. Ugyanis ha a az A-nak e alapra vonatkozó (ú. n. természetes) logarithmusa és a' az A 10-es alapra vonatkozó logarithmusa, azaz

$$10^{a'} = A \quad \text{és} \quad e^a = A,$$

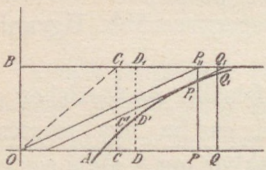
akkor
$$a' \log 10 = \log A = a$$

tehát
$$a' = \frac{a}{\log 10}$$

Ha x-et változónak képzeljük, akkor $y = \log x$ az x meghatározott függvénye. Határozzuk meg e függvény diff. hányadosát. E végből az

$$e^y = x$$

egyenlet mindkét oldalán x szerint differenciáljunk. A baloldalon álló y az x függvénye, tehát az összetett függvények diff. szabálya szerint:



26. ábra.

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

vagyis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

és minthogy $y = \log x$, tehát:

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

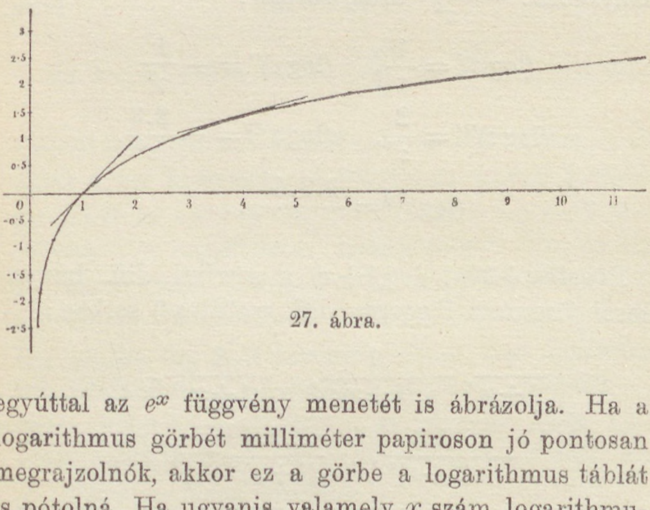
Ebből egy igen egyszerű graphikus eljárást állapíthatunk meg.* A $\log x$ görbe így szerkeszthető meg: (26. ábra.)

Az A-tól kezdve pl. igen kis egyenlő közökben felrajzoljuk a $CDE\ldots$ pontokat és mindegyikben merőlegest emelünk. $OA = OB = 1$ tesszük. A-ban 45° alatt húzunk egyenest, mely CC_1-et éri C'-ben. C'-en át az OC_1-el húzunk párhuzamosat, míg a DD_1-et éri D'-ben. D'-en át OD_1-el húzunk párhuzamosat s. i. t. Az AC', $C'D'$, $D'E'\ldots$ egyenes szakaszokból mint burkoló érintőkből megalkotható a görbe. Ugyanis ha péld.: $OC = x$, a C' pontban vont érintő

* Ez a szerkesztés első olvasásnál ki is hagyható.

iránymeghatározója: $\frac{C_1C}{OC}=\frac{1}{x}$ s í. t. Az x tengely alatti rész hasonlóképpen szerkeszthető.

Mivel $y=\log x$ így is írható $e^y=x$, tehát (y-t független, x-et függő változónak tekintve) e görbénk (27. ábra) $e^y=x$ függvényt is ábrázolja. Ha tehát x tengely jobboldali részét positiv y tengelynek és az y fekvő részét pos. x-nek képzeljük, akkor ugyanez a kép



27. ábra.

egyúttal az e^x függvény menetét is ábrázolja. Ha a logarithmus görbét milliméter papiroson jó pontosan megrajzolnók, akkor ez a görbe a logarithmus táblát is pótolná. Ha ugyanis valamely x szám logarithmusát (természetes logarithmusát) akarjuk meghatározni, akkor csak az x abscissához tartozó ordinátát kell lemérnünk és fordítva, ha megadatik a logarithmus (y), akkor a hozzá tartozó numerust (x)-et megkapjuk, ha megkeressük azon pont abscissáját, melynek ordinátája az adott y.

Még egy függvény Taylor sorát állítjuk elő. Ez a $\log(1+x)$.

Evégből szükségünk van $\log(1+x)$-nek és diff. hányadosainak az $x=0$ helyen való értékeire.

$\log z$-nek z szerinti diff. hányadosa: $\frac{1}{z}$.

Ebből folyik, hogy második diff. hányadosa: — $-\frac{1}{z^2}$, harmadik diff. hányadosa: $+\frac{2}{z^3}$ negyedik diff. hányadosa: $-\frac{2.3}{z^4}$ azaz, sorban:

$$(\log z)' = \frac{1}{z}, \quad (\log z)'' = -\frac{1}{z^2},$$

$$(\log z)''' = \frac{2}{z^3}, \quad (\log z)^{\mathrm{IV}} = -\frac{2.3}{z^4},$$

$$(\log z)^{\mathrm{V}} = \frac{2.3.4}{z^5}, \ldots$$

Következésként $\log(1+x)$ x szerinti diff. hányadosai (összetett függvény diff. szabálya!) sorban:

$$\frac{1}{1+x}, \; -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$-\frac{2.3}{(1+x)^4}, \quad \frac{2.3.4}{(1+x)^5} \text{ s. i. t.}$$

és ebből az $x=0$ helyen e diff. hányadosok értéke sorban:

$$0, \; 1, \; -1, \; 2, \; -2.3, \; 2.3.4, \; -2.3.4.5 \ldots$$

tehát az $\quad f(x)=f(0)+f'(0)+f''(0)x^2+$

$$+\frac{f'''(0)}{2.3}x^3+\frac{f^{\mathrm{IV}}(0)}{2.3.4}x^4+\frac{f^{\mathrm{V}}(0)}{2.3.4.5}x^5, \ldots$$

Taylor sort alkalmazva a log $(1+x)$-nek következő igen fontos Taylor sorára jutunk:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\dots$$

A 10-es alapra vonatkozó logarithmus pedig:

$$\log^{10}(1+x)=M\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\dots\right]$$

ahol $$M=0{\cdot}47\dots$$

Ha $x<1$, akkor az $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\dots$ váltakozó előjelű csökkenő abs. értékű számok sora és $\lim u_n=0$, tehát a sor összetartó. A $\log(1+x)$ iménti formuláját tehát az esetben, ha $x<1$, vagyis $1+x<2$ használhatjuk a logarithmus kiszámítására. De ez elég is, mert hiszen minden 2-nél nagyobb számot előállíthatunk 2-nél kisebb számok szorzata gyanánt. Így pl., ha log 3-at keressük, akkor 3-at előállíthatjuk például ilyen alakban: $3=(\sqrt{3})^2=(1{\cdot}73202\dots)^2$ tehát $\log 3=2\log 1{\cdot}732\dots$ és itt már ilyen alakú szám logarithmusát kell keresnünk: $\log(1+x)$, ahol $x=0{\cdot}732\dots$ 1-nél kisebb.

Tisztelt hallgatóim bizonnyal sokat foglalatoskodtak már logarithmus kereséssel; tudják a módját; de hogy miért járunk el ilyen módon, azt az elemi mathematika nem deríthette fel; azért talán nem lesz felesleges, ha azt is megmutatjuk, hogy menynyiben jogosult a logarithmus keresésnél követett eljárás, midőn a rendes ötjegyű logarithmus tábláink szerint 4-nél többjegyű szám logarithmusát interpolatióval határozzuk meg.

Legyen pl. egy ötjegyű szám 3648·7 vagy általában $N+n$, a hol N négyjegyű egész szám és $n<1$.

$$N+n=N\left(1+\frac{n}{N}\right)$$

és így:

$$\log(N+n)=\log N+\log\left(1+\frac{n}{N}\right)=$$

$$=\log N+M\left(\frac{n}{N}-\frac{n^2}{2N^2}\cdots\right)$$

Ha azt mondjuk, hogy

$$\log(N+n)=\log N+\frac{M}{N}\cdot n$$

akkor az elkövetetett hiba kisebb $M\frac{n^2}{2N^2}$-nél, vagy mivel $N>1000$, $n<1$ és $M<\frac{1}{2}$, e hiba kisebb $\frac{1}{4000000}$-nál. Tehát $N+n$ logarithmusát úgy kell meghatároznunk, hogy megkeressük az első négy jegyből álló számnak, az N-nek a logarithmusát és ehhez hozzáadjuk az n-el arányos $n\frac{M}{N}$ számot.

De még ezt is egyszerűbben interpretálhatjuk. Ha $n=1$ volna, akkor a hozzáadandó rész $\frac{M}{N}$ volna, vagyis $\log(N+1)=\log N+\frac{M}{N}$ lenne.

Látjuk tehát, hogy $\frac{M}{N}$ a táblabeli különbség; *tehát* *a* $\log(N+n)$ *számításánál a* $\log N$*-hez kerülő pótlék nem más, mint a táblabeli különbség* n*-szerese.* És ez a számítás $\frac{1}{4000000}$-ig pontos.

15. *Egy igen nevezetes határérték: e.*

A $\log x$ diff. hányadosának a rendes módon való értelmezéséből egy igen érdekes határérték állapítható meg. Ugyanis általában az $f(x)$ differenciálhányadosa:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Ha ezt az eljárást a $\log x$ függvényre alkalmazzuk:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\frac{1}{x}$$

De

$$\log(x+\Delta x)-\log x=\log\frac{x+\Delta x}{x}=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

és így: $$\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

tehát

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\lim\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\frac{1}{x}.$$

Ha a logarithmus meghatározását a limes vétellel fölcseréljük, vagyis ahelyett, hogy az $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$ logarithmusának vennők a limesét, a $\lim\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$ -nek vesszük a logarithmusát, akkor arra jutunk, hogy:

$$\log \lim_{\Delta x=0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\frac{1}{x}$$

vagyis
$$\lim_{\Delta x=0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=e^{\frac{1}{x}}.$$

Tegyük $\frac{1}{x}=a$, és $\Delta x=z$

$$\lim_{z=0}(1+az)^{\frac{1}{z}}=e^{a}$$

vagy $a=1$ téve:

$$\lim_{z=0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e.$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy ha z elég kis szám, akkor $1+z$-nek $\frac{1}{z}$-ik hatványa közel van az $e=2\cdot718281828459$-hoz. Így például, ha $z=\frac{1}{1000}$, akkor $(1\cdot001)^{1000}=2\cdot716\ldots$ Ha $z=0\cdot0001$, akkor $(1\cdot0001)^{10000}=2\cdot7183\ldots$ stb.

Ebből a felfedezésből eredt a logarithmus bevezetése a felsőbb mathematikába. Ugyanis a számítás könnyítése céljából iparkodtak [*Bürgi* és később *Neper* 1614-ben] minden számot egy bizonyos szám hatványa gyanánt előállítani, mert jól tudták, hogy akkor a szorzás összeadással, az osztás kivonással végezhető el. De melyik legyen az a szám, melyet alapúl választhatnának? Közelfekvő gondolat volt, hogy az 1-től igen kevéssel különböző számot, pl. 1·00001-et válasszák, mert ennek egymás utáni hatványai egymástól kevéssel különböznek. Ezzel a számmal meg-alkották az

$$1{\cdot}00001,\ (1{\cdot}00001)^2\ (1{\cdot}00001)^3\ (1{\cdot}00001)^4, \ldots$$

geometriai sort. Ha egy tetszésszerinti a szám e sornak α-ik és $\alpha+1$-ik tagja között van, akkor

$$(1{\cdot}00001)^\alpha < a < (1{\cdot}00001)^{\alpha+1},$$

tehát kis hibával:

$$a = (1{\cdot}00001)^\alpha$$

Minthogy pedig az α igen nagy szám, a 100000-ed részét vesszük és így írjuk az előbbi egyenlőséget:

$$a = [(1{\cdot}00001)^{100000}]^{\frac{\alpha}{100000}}.$$

De az előbbiek szerint $(1{\cdot}00001)^{100000}$ az e számtól csak igen kevéssel különbözik, tehát ez még így is írható:

$$a = e^{\frac{\alpha}{100000}}$$

és így $$\log a = \frac{\alpha}{100000}\cdot$$

A $\lim\limits_{z=0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ határértéket felhasználjuk egy furcsa kamatos-kamatszámítási feladatra, mely régente sok fejtörést okozott a mathematikusoknak.

A kamatszámításból ismeretes, hogy 1 korona $P\%$-os kamatlábbal 1 év alatt $\left(1+\frac{P}{100}\right)$-ra nő. Jelöljük $\frac{P}{100}$-at p-vel, akkor tehát a felnőtt tőke:

$(1+p)$. Ha a kamatokat nem évenkint, hanem félévenkint csatolnák a tőkéhez, akkor a felnőtt tőke: $\left(1+\frac{p}{2}\right)^2$ volna; ha pedig minden harmadévben csatolnák a tőkéhez a kamatokat, akkor a felnövekedett tőke: $\left(1+\frac{p}{3}\right)^3$, ha minden hónapban csatolnák a tőkéhez a kamatokat, a felnőtt tőke $\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12}$ lenne és ha minden nap tennék ezt, $\left(1+\frac{p}{365}\right)^{365}$ stb. Már régen, főként Leibnitz idejében foglalkoztak azzal a kérdéssel, hogy mennyi volna a felnőtt tőke, ha a kamatokat minden pillanatban a tőkéhez csatolnák? Ez a kérdés természetesen gyakorlati szempontból semmi jelentőséggel sem bir, de annál fontosabb elméleti szempontból. Ha n-szer csatolnák, mindig egyenlő időközökben a tőkéhez a kamatokat, akkor a felnőtt tőke:

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n.$$

volna. A kérdés tehát úgy fogalmazható, hogy mi lesz ebből a kifejezésből, ha n minden határon túl nő, azaz ha n végtelenné válik?

Tegyük $\frac{p}{n}=z$, akkor $n=\frac{p}{z}$ és így:

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n=(1+z)^{\frac{p}{z}}=\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^p.$$

Ha n végtelen naggyá lesz, akkor z zérussá válik és így:

$$\lim \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p.$$

Igy például ha 4%-os kamatlábról van szó és a kamatokat folytonosan a tőkéhez csatolnák, akkor egy év alatt 100 koronából mindössze 104 korona és 8 fillér lenne, tehát egészen jelentéktelenül nagyobb, mint ha negyedévenkint csatolnák a kamatokat a tőkéhez.

Egy másik érdekes példa a szóban forgó határérték alkalmazására a következő legyen.

Ha a fény egy, nem teljesen átlátszó lemezre merőlegesen esik, akkor az intenzitásából a lemezen áthaladva, veszít. A fizikusok kisérletileg megmutatták, hogy keskeny lemezeknél ez a veszteség arányos a lemez vastagságával és az intenzitással. Igy ha a fény eredeti intenzitása I, akkor a d vastagságú lemezen áthaladva, veszít cId-t az intenzitásból, tehát mikor kilép a lemezből: $I(1-cd)$ lesz az erőssége.

Ha már most egy D vastagságú lemezünk van, akkor ezt úgy képzelhetjük, mint ha n egyenlő vastagságú lemezből volna összetéve, melyek mindegyike $\frac{D}{n}$ vastagságú. Ha $\frac{D}{n}$ elég kicsiny, akkor mondhatjuk, hogy az első részen áthaladva, a fény intenzitásából $cI\frac{D}{n}$-et veszít és így a második lemezrészhez $I\left(1 - c\frac{D}{n}\right)$ intenzitású fény érkezik.

Ebből azt látjuk, hogy, egy lemezrészen áthaladván, a fény erőssége $1-c\frac{D}{n}$-szer akkora lesz, mint a belépéskor. Igy tehát a második lemezrészen áthaladván, erőssége már csak $I\left(1-c\frac{D}{n}\right)^2$ lesz; a harmadik után $I\left(1-c\frac{D}{n}\right)^3$ s í. t.; az n-ik részen áthaladván, intenzitása: $I\left(1-c\frac{D}{n}\right)^n$ lesz.

Ha már most n-et, a részek számát végtelenné növeljük, akkor azt találjuk, hogy a D vastagságú lemezen áthaladó fény intenzitása:

$$\lim_{n=\infty} I\left(1-\frac{cD}{n}\right)^n$$

lesz. Tegyük $\frac{cD}{n}=-x$, akkor $n=-\frac{cD}{x}$ és így

$$\left(1-\frac{cD}{n}\right)^n=(1+x)^{-\frac{cD}{x}}=\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-cD}$$

és ha n végtelenné válik, x zérussá lesz és

$$\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

tehát a lemezen áthaladó fény intenzitása: Ie^{-cD} lesz.

Összefoglalás. Ebben az előadásban a felsőbb mathematika kényes kérdéseit érintettük; sajnos, nem tehettük ezt olyan szigorúsággal és pontossággal, aminő az igazi mathematikai tárgyalásnak jellemző vonása. De mégis némi betekintést akartam nyujtani Önöknek tisztelt hallgatóim abba a tartományba, melynél a középiskolai mathematika kénytelen megállapodni. Meg akartam mutatni, hogy mi is az a végtelen sor, melynek csak egyetlen egy példányát ismerteti meg a középiskolai mathematika. Mit értsünk a végtelen sor összege alatt és mikor lehet ilyen összegről beszélni, vagyis mikor konvergens a végtelen sor. A másik célom az volt, hogy a középiskolai mathematikai ismereteket kibővítsem azzal, hogy megismertessek olyan módszereket, amelyek a középiskolákban tárgyalt mennyiségek kiszámításához vezetnek. Ezért tárgyaltam a végtelen sorok azon fajtáit, melyek a $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log(1+x)$ stb. meghatározására vezetnek, hogy ezzel kapcsolatban megértessek több olyan eljárást, melyet az elemi mathezis kénytelen használni, anélkül, hogy a rendelkezésére álló eszközökkel teljesen megmagyarázhatná. Mathematikai szempontból némi lelkiismereti furdalást érzek, hogy ezen előadásban sok olyan dolgot mondtam, ami talán Önökben is némileg megingatja a mathematika szigorúsága iránti hitüket; de kénytelen voltam vele. Hiszem, hogy lesznek igen tisztelt hallgatóim között olyanok, akik mélyebben is be fognak hatolni e csudálatos birodalomba. Azok tekintsék azokat, amiket érintettem, csupán az érdeklődés felkeltésére szolgáló áttekintésnek; olyannak, mint mikor egy idegen városba érve, a vezetőjük elviszi Önöket egy emelkedettebb helyre, ahonnan a házak és utak tömkelegében első, általános tájékozódást szereznek.

Feladatok.

1) Számítsuk ki a sin 10°, sin 20°, sin 25°-ot 4 tizedes pontossággal. [10°-ú szöget abszolut mértékszámmal kell mérni:

$$\frac{\pi}{18}=0{\cdot}17453. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

sorban olyan messzire megyünk, hogy az elhagyott első tag $\frac{1}{20000}$-nél kisebb legyen.]

2) Számítsuk ki ugyanezen szögek cosinusait.

$$\left[\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots\right]$$

3) Vizsgáljuk meg, összetartó-e ez a sor:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots ?$$

4) Határozzuk meg $1{\cdot}2$ természetes logarithmusát!

$$\left[\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots\right]$$

5) Írjuk fel $\log(1+x)$ Taylor sorát! Ezután $\log(1-x)$-ét! És vonjuk ki az elsőből a másodikat! Mutassuk meg, hogy ezt kapjuk;

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Ha már most $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{N+1}{N}$ tesszük, miből

$$x=\frac{1}{2N+1},$$

tehát
$$\log(N+1)-\log N=$$

$$=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3\,(2N+1)^3}+\frac{1}{5\,(2N+1)^5}=\cdots\right]$$

és ezzel a sorral bármely 1-nél nagyobb szám logarithmusát ki lehet számítani, mert ekkor mindig $x<1$.

Ha például $N=1$ tesszük, akkor

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\cdots\right],$$

számítsuk ki $\log 2$-t 5 tizedesre! Ha most $N=2$ tesszük, akkor

$$\log 3=\log 2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\,.\,5^3}+\frac{1}{5\,.\,5^5}+\cdot\right].$$

Számítsuk ki ebből $\log 3$-at 5 tizedesre. $\log 2$-ből megvan már a $2\log 2=\log 4$ is. Tegyük $N=4$, akkor $\log 5$-öt kapjuk. Most már $\log 10$ is kiszámítható s í. t. Számítsuk ki ily módon az első 10 szám természetes logarithmusát és határozzuk meg a Briggs-féle logaritmusokat ($\log 10$-el kell a természetes logaritmusokat elosztani).

6) Határozzuk meg $\sqrt{1+x}$ Taylor sorát! x minő értékeinél lesz ez a sor összetartó!

7) Határozzuk meg az $(1+x)^n$ Taylor sorát, ha n bárminő pozitiv vagy negativ egész, vagy törtszámot jelent. x minő értékeinél összetartó ez a sor?

8) Határozzuk meg a $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sin x}{x}$-et! [Tegyük

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

akkor azt látjuk, hogy

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

és ha $x = 0$ $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$]

Mutassuk meg, hogy ez azt fejezi ki, hogy a körívnek a húrhoz való viszonya határtalanul közeledik az 1-hez, ha x elenyésző csekéllyé válik.

9) Határozzuk meg $\lim\limits_{x=0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$\left[\cos x \text{ helyett tegyük ezt: } 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} \cdots\right]$

10) Ha $\sqrt{71}$-et akarjuk kiszámítani, így járhatunk el:

$$\sqrt{71} = \sqrt{64+7} = \sqrt{64\left(1+\tfrac{7}{64}\right)} = 8\sqrt{1+\tfrac{7}{64}}$$

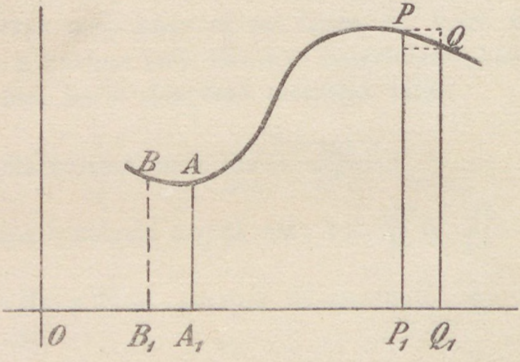
és minthogy $\frac{7}{64} < 1$, tehát a 6) alatti feladatban meghatározott sor convergens és így $\sqrt{1+\frac{7}{64}}$ e sorral kiszámítható olyan pontosan, amint akarjuk. Próbáljuk ilyen módon meghatározni $\sqrt{104}$-et 5 tizedes pontossággal! Ugyanígy, ha például $\sqrt[5]{35}$-öt keressük, akkor így járhatunk el: 35-ben a legnagyobb teljes ötödik hatvány 32, tehát

$$\sqrt[5]{35}=\sqrt[5]{32+3}=\sqrt[5]{32\left(1+\tfrac{3}{32}\right)}=2\sqrt[5]{1+\tfrac{3}{32}}$$

és ez a 7-ik feladat szerint kiszámítható. Próbáljuk ilyen módon 5 tizedesre meghatározni: $\sqrt[3]{9}$-et, $\sqrt[3]{28}$-at!

V. előadás.

16. *A területszámítás. A primitiv vagy integrálfüggvény.* Az $y=f(x)$ függvény menetét a mellékelt ábrában (28. ábra) rajzolt görbe tüntesse fel, mely



28. ábra.

egészen az x tengely fölött vonul. Legyen továbbá A a görbe egy előre kiszemelt pontja, melynek abscissája: $OA_1=a$. Ha P pont abscissáját x-el jelöljük, akkor az AA_1P_1P síkrész területe attól függ, hogy hol vesszük fel a P_1 pontot, vagyis e terület az x függvénye. Jelöljük ezt a függvényt $F(x)$-el. Ez az

$F(x)$ az x-el nyilván folytonosan változik. Határozzuk meg ezen $F(x)$ függvény differenciálhányadosát. E végből szemeljük ki a Q_1 pontot, melynek abscissája $x+\Delta x$. Az ehhez tartozó terület:

$$F(x+\Delta x)=AA_1Q_1Q,$$

tehát az $F(x)$ növekménye:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=AA_1Q_1Q-AA_1P_1P=P_1Q_1QP.$$

Nézzük közelebbről ezt a kis P_1Q_1QP területet. Ha helyette a QQ_1-el mint magassággal rajzolt derékszögű négyszöget mondjuk, akkor nyilván kevesebbet mondtunk. Ha pedig a P_1P-vel rajzolt derékszögű négyszöget mondjuk, akkor meg nagyobbat mondtunk. Eszerint tehát

$$Q_1Q\,.\,\Delta x<PQQ_1P_1<PP_1\,.\,\Delta x$$

és így tehát van egy olyan, a PP_1 és QQ_1 közé eső η ordináta, melyre nézve pontosan:

$$PQQ_1P_1=\eta\Delta x,$$

tehát az $F(x)$ terület növekménye:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\eta\Delta x,$$

vagyis: $$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\eta.$$

Ha már most Δx mindinkább kisebbé válik, akkor az η közbenső ordináta mind kevésbbé különbözik a szélső ordinátától, mert hiszen az $f(x)$ görbe folytonosan halad. Ha már most Δx zérussá válik, akkor η összeesik a P pont ordinátájával, vagyis $f(x)$-el. Ez esetben tehát:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x).$$

A $F(x)$ függvénynek a differenciálhányadosa az x helyen: $f(x)$. *Az AA_1PP_1 terület az x-nek oly függvénye, melynek differenciálhányadosa: a végső ordináta.* Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ *függvény primitiv függvényének*, vagy *integrál függvényének* nevezzük és így jelöljük:

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

$f(x)$ primitiv függvénye, vagyis integrálfüggvénye, vagy röviden integrálja oly függvény, melynek diff. hányadosa: $f(x)$.

De egy igen fontos megjegyzést kell még tennünk. Az A_1 helyet egészen tetszés szerint választottuk. Ha másutt vettük volna fel, pl. B_1-ben, akkor is arra jutottunk volna, hogy a BB_1P_1P terület az x-nek olyan függvénye, melynek diff. hányadosa: $f(x)$. Tehát nem csak egy ilyen $F(x)$ függvény létezik, hanem számtalan sok. Ez természetes, mert hiszen ha egyik ilyen függvény, melynek diff. hányadosa: $f(x)$, például $F_1(x)$, akkor $F_1(x)+C$ is az $f(x)$ integrál függvénye, ha C tetszés szerinti constanst jelent; mert hiszen $F_1(x)+C$-nek a diff. hányadosa is $f(x)$.

Az $\int f(x)\,dx$, vagyis az a függvény, melynek diff.

hányadosa $f(x)$, nincs teljesen meghatározva. Ha *egy* ilyen függvényt ismerünk, akkor minden más ettől egy állandó számban különbözik.

Mielőtt a területszámítást pontosabban tárgyalnók, határozzuk meg néhány egyszerű függvény primitiv vagy integrál függvényét! A differenciálási szabályokból önként következnek ezek az integrálási szabályok:

1) $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ diff. hányadosa: x^n,

tehát: $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

2) $\sin x$ diff. hányadosa: $\cos x$,

tehát: $$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

3) $-\cos x$ diff. hányadosa: $\sin x$.

tehát: $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

4) $\operatorname{tg} x$ diff. hányadosa: $\frac{1}{\cos^2 x}$,

tehát: $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

5) e^x diff. hányadosa: e^x,

tehát: $$\int e^x dx = e^x + C.$$

6) $\log x$ diff. hányadosa: $\frac{1}{x}$,

tehát: $$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$ s i. t.

A differenciálási szabályokból azonnal következtethetjük, hogy

$$\int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx = \int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx,$$

vagyis, hogy összeg (különbség) tagonkint integrálandó és hogy

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx,$$

vagyis, hogy az állandó szorzó az integrál jele elé is tehető.

a) *A parabola területrésze.* Most már néhány görbe által határolt területet is kiszámíthatunk. Legyen például az

$$y = cx^2$$

parabola AB íve (l. a 7. ábrát) és az AA_1, BB_1 ordináták és az x tengely által határolt területről szó. Legyen az $OA_1 = a$, $OB_1 = b$.

Ha $OP_1 = x$, akkor általában:

$$AA_1P_1P = F(x) = \int cx^2\,dx = \frac{cx^3}{3} + C.$$

A C constanst kell most helyesen megválasztanunk, hogy éppen az AA_1 legyen a keresett terület baloldali határvonala.

Ha $x = a$, akkor az AA_1P_1P összezsugorodik az A_1A ordinátává, tehát

$$F(a) = 0 = \frac{ca^3}{3} + C,$$

vagyis
$$C = -\frac{ca^3}{3},$$

tehát általában, ha az A_1 pontot már megválasztottuk:

$$F(x)=\frac{cx^3}{3}-\frac{ca^3}{3}.$$

Ha $x=b$, akkor e terület:

$$F(b)=AA_1B_1B=\frac{c}{3}(b^3-a^3).$$

Ha $a=0$, vagyis a területet az ordináta-tengelytől számítjuk, akkor

$$OB_1B=\frac{cb^3}{3}.$$

Ha még azt is tekintetbe vesszük, hogy

$$B_1B=cb^2,$$

akkor tehát: $$OB_1B=\frac{b\,.\,B_1B}{3}$$

és ebben a formában az eredmény igen egyszerűen áttekinthető. Ugyanis $B_1B\,.\,b$ nem egyéb, mint az OB_2BB_1 derékszögű négyszög területe; tehát:

$$OB_1B=\frac{OB_2BB_1}{3},$$

vagyis a számított terület e derékszögű négyszög harmadrésze. Innen az is következik, hogy a parabolának B_2BO belső területe az OB_2BB_1 derékszögű négyszög $\frac{2}{3}$-a. Ezt *Archimedes* állapította meg először.

Ha $y=kx^n$ n-edrendű parabola adatik és megint $OA_1=a$,

$$OB_1=b, \quad OP=x,$$

akkor:

$$F(x)=AA_1P_1P=\int kx^n dx+C=\frac{kx^{n+1}}{n+1}+C.$$

Ha $x=a$, akkor $F(x)=0$, tehát megint:

$$C=-\frac{ka^{n+1}}{n+1}$$

és így: $$F(x)=\frac{k}{n+1}[x^{n+1}-a^{n+1}],$$

miből: $$AA_1B_1B=\frac{k}{n+1}[b^{n+1}-a^{n+1}].$$

b) *A hyperbola területrésze.* Az egyenoldalú hyperbola egyenlete:

$$y=\frac{1}{x}$$

és határozzuk meg az A_1ABB_1 területet. (L. 10. ábra.) Legyen

$$OA_1=a, \quad OB_1=b, \quad OP_1=x.$$

Az

$$A_1APP_1=F(x)=\int\frac{dx}{x}+C=\log x+C.$$

Ha $x=a$, akkor $F(x)=0$, tehát:

$$0=\log a+C,$$

vagyis $$C=-\log a.$$

E szerint tehát

$$F(x)=\log x-\log a$$

és így: $$A_1APP_1 = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

c) *A sinusgörbe területrésze.* Legyen e sinusgörbe egyenlete:

$$y = \sin x$$

és az A_1ABB_1 területét határozzuk meg. (L. 11. ábra.)

Legyen $OB_1 = b_1$ és P_1 egy tetszés szerinti pont, melynek abscissája: x.

Az A_1APP_1 területe:

$$F(x) = \int \sin x dx + C = -\cos x + C,$$

ha C-t kellően választjuk. Ha $x=b$, akkor a terület: $F(b) = 0$, tehát:

$$F(b) = 0 = -\cos b + C,$$

vagyis: $$C = +\cos b$$

és így a B_1 megválasztása után már mindig:

$$F(x) = -\cos x + \cos b.$$

Ha $x=a$, akkor a keresett terület:

$$A_1ABB_1 = -\cos a + \cos b.$$

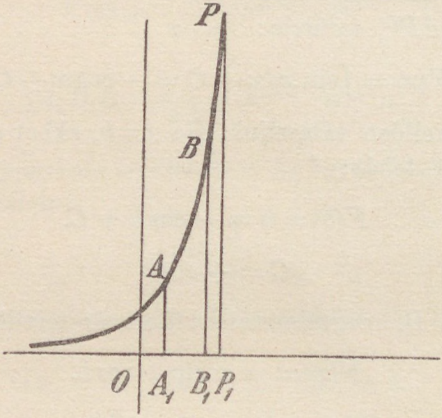
Ha $b=0$ és $a=\pi$, vagyis egy fél hullámvonal által alkotott területet akarjuk meghatározni, akkor azt találjuk, hogy e terület:

$$-\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

[Megjegyezzük, hogy ennél nagyobb terület számítására képleteink közvetlenül nem alkalmasak, mert a megállapitásuknál föltettük, hogy az $f(x)$ görbe egészen az x tengely fölött (vagy lehetett volna mondani: alúl) vonul; de természetesen szakaszonkint kiszámítható a terület].

d) Az exponencialis görbe által határolt terület: Ha e görbe egyenlete: (28. ábra.)

$$y = e^x$$



28. ábra.

és $OA_1 = a$, továbbá $OP_1 = x$, akkor az A_1APP_1 területe:

$$F(x) = \int e^x dx + C = e^x + C$$

és ha $x = a$, akkor $F(a) = 0$, tehát:

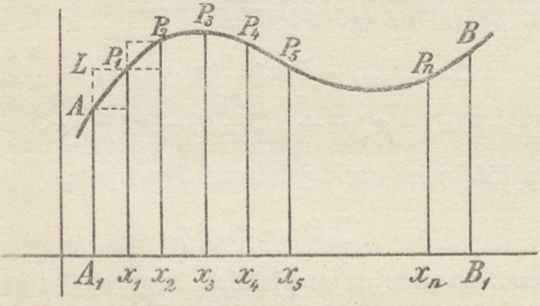
$$F(a) = 0 = e^a + C,$$

miből:
$$C = -e^a$$

és így az A_1ABB_1 területe $[OB_1 = b]$

$$AA_1BB_1 = e^b - e^a.$$

Az eddigiekből már elég világosan láthatjuk, *hogy ha egy ilyen A_1ABB_1 alakú területrészt kell kiszámítanunk, amelynek görbe határvonalának egyenlete: $y=f(x)$, akkor megkeressük az $F(x)$ függvényt, mely az $f(x)$ primitiv függvénye és $F(x)$-be x helyébe tesszük b-t és azután a-t. A keresett terület: $F(b)-F(a)$.*



29. ábra.

17. *A területszámítás más módja. A határozott integrál.* A terület ezen számítási módját még másként is értelmezhetjük. (29. ábra.) Osszuk fel az A_1B_1 intervallumot tetszés szerinti [akár egyenlő, akár különböző] szakaszokra x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ pontokkal.

Az egyes szakaszok területeit külön számítsuk ki. Az $A_1x_1P_1A$ szakasz területét megkapjuk, ha az A_1x_1 alapot valamelyik közbenső ordinatával szorozzuk [mert hiszen, miként már egyszer láttuk, az AA_1 ordinátával alkotott derékszögű négyszögű terület kisebb, az $A_1x_1P_1L$ pedig nagyobb, mint e szakasz területe].

Eszerint tehát, ha η_1 e közbenső ordináta, e szakasz területe:

$$(x_1 - a)\,\eta_1,$$

mert alapjának hossza: $x_1 - a$. Éppen így a következő szakasz területe:

$$(x_2 - x_1)\,\eta_2$$

s í. t. Szóval az egész terület:

$$T = F(b) - F(a) = (x_1 - a)\,\eta_1 +$$
$$+ (x_2 - x_1)\,\eta_2 + \ldots + (b - x_n)\,\eta_{n+1}.$$

Ezt a kifejezést rövid jelöléssel így írjuk:

$$\sum (x_i - x_{i+1})\,\eta_i.$$

Ezzel azt akarjuk megjelölni, hogy az összes ilyen alakú:

$$(x_1 - a)\,\eta_1, \quad (x_2 - x_1)\,\eta_2, \quad (x_3 - x_2)\,\eta_3 \ldots$$

tagok összegét kell vennünk. A $\sum$ jel éppen ennek az összegezésnek a jele.

Ennek a kifejezésnek nincs más baja, csak az, hogy nem ismerjük az $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ közbenső ordináták nagyságát. De ha a választott szakaszok elég kicsinyek, akkor helyettük akár a baloldali, akár a jobboldali ordinatákat is választhatjuk. A hiba, amit ezáltal elkövetünk, ugyanis oly kicsinnyé tehető, amilyen kicsinnyé csak akarjuk tenni.

Ha ugyanis abban a szakaszban, ahol a szélső ordináták közötti különbség a legnagyobb, ez a különbség d, akkor, mint az ábrából láthatjuk, a belső és külső derékszögű négyszögek közötti különbség az egyes szakaszokban kisebb, mint:

$$d(x_1 - a), \quad d(x_2 - x_1), \quad d(x_3 - x_2) \ldots$$

és így, ha az η közbenső ordináták helyett akár a jobboldali, akár a baloldali szélső ordinátákat választjuk, a hiba, amit ezzel elkövetünk, kisebb, mint

$$d(b - a).$$

De a beosztást annyira sűríthetjük, hogy a d tetszés szerinti kicsiny legyen, és akkor a $d(b-a)$ is tetszés szerinti kicsinnyé válik. Ezért az előbbi

$$(x_1-a)\eta_1 + (x_2-x_1)\eta_2 + (x_3-x_2)\eta_3 + \cdots + (b-x_n)\eta_n$$

összeg helyett ezt írjuk:

$$(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) +$$
$$+ (x_3-x_2)f(x_2) + \cdots + (b-x_n)f(x_n),$$

ahol $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ helyett mindenütt az illető szakasz baloldali ordinátáját tettük, vagy pedig ezt:

$$(x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \cdots + (b - x_n)f(b),$$

ahol az $\eta_1, \eta_2 \ldots$ helyett a jobboldali ordinátákat tettük. Ez, vagy az előbbi összeg a keresett területtől, az $F(b)-F(a)$-tól, miként láttuk:

$$d(b-a)$$

-nál kevesebbel különbözik; tehát, ha a beosztást mindinkább sűrítjük, akkor akár az egyik, akár a másik összeg mindinkább megközelíti a terület mértékszámát. Ezt az állítást így írjuk fel:

$$T=F(b)-F(a)=$$
$$=\lim\left[(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_n)f(x_n)\right]$$

vagy ha az x_1-a, x_2-x_1, $x_3-x_2 \ldots$ szakaszokat röviden

$$\varDelta_1,\ \varDelta_2,\ \varDelta_3 \ldots$$

-al jelöljük, akkor:

$$T=F(b)-F(a)=$$
$$=\lim\left[f(a)\varDelta_1+f(x_1)\varDelta_2+f(x_2)\varDelta_3+\cdots+f(x_n)\varDelta_{n+1}\right],$$

ahol a lim jel úgy értendő, hogy a $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3 \ldots$ mind elenyésző csekélyekké válnak, vagy pedig az n, az osztópontok száma határtalanul nő, de úgy, hogy a szakaszok valamennyien végtelen kicsinyekké lesznek.

Egy példán mutatjuk meg, hogy a területet ily módon is kiszámíthatjuk. Legyen a szóban forgó terület a 28. ábrabeli, melynél $y=e^x$ a görbe egyenlete. Legyen $OA_1=a$, $OB_1=b$. Osszuk fel az A_1B_1 alapot pld.: n számú egyenlő részre; egy-egy rész

$$\frac{b-a}{n}=\varDelta.$$

Az egyes szakaszok területe lesz, ha mindenütt a baloldali ordinátát vesszük:

$$e^a.\Delta+e^{a+\Delta}.\Delta+e^{a+2\Delta}.\Delta+\cdots+e^{a+(n-1)\Delta}.\Delta$$
$$=\Delta e^a[1+e^\Delta+e^{2\Delta}+\cdots+e^{(n-1)\Delta}]$$
$$=\Delta.e^a\frac{e^{n\Delta}-1}{e^\Delta-1}=\frac{\Delta}{e^\Delta-1}\cdot(e^{a+n\Delta}-e^a)$$
$$=\frac{\Delta}{e^\Delta-1}(e^b-e^a).$$

A szóban forgó területet úgy kapjuk meg, hogy a szakaszokat elenyésző csekélyekké tesszük, vagyis kiszámítjuk a

$$\lim_{\Delta=0}\frac{\Delta}{e^\Delta-1}(e^b-e^a)$$

kifejezést.

Tudjuk, hogy e^x diff. hányadosa e^x, vagyis

$$\lim_{h=0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x.$$

Itt az x tetszésszerinti számot jelent. Ha $x=0$ és $h=\Delta$ tesszük, akkor:

$$\lim_{\Delta}\frac{e^\Delta-1}{\Delta}=e^0=1,$$

tehát a föntebbi limes, vagyis a keresett terület:

$$e^b-e^a,$$

miként előbb is találtuk.

Egy másik példa legyen az $y=x^m$ által határolt terület. Ilyenkor nem célszerű az A_1B_1 szakaszt egyenlő részekre osztani, hanem jobb lesz, ha válasszunk egy q számot, mely 1-nél valamivel nagyobb és megjelöljük az

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \dots\ aq^n$$

abscissákat. A q számot úgy választjuk, hogy $q^n = \frac{b}{a}$ legyen. Ezzel elérjük, hogy az utolsó abscissa éppen b lesz.

Az egyes szakaszok baloldali ordinátái ezek:

$$a^m,\ a^m q^m,\ a^m q^{2m},\ a^m q^{3m}, \dots\ a^m q^{(n-1)m}.$$

Az első szakasz szélessége: $aq-a=a(q-1)$;
a második « « $aq^2-aq=aq(q-1)$;
a harmadik « « $aq^3-aq^2=aq^2(q-1)$

s í. t., tehát az összes terület:

$$a^{m+1}(q-1)[1+q^{m+1}+q^{2m+2}+\cdots+q^{(n-1)m+n-1)}]$$

$$=a^{m+1}(q-1)\frac{q^{nm+n}+1*}{q^{m+1}-1}=$$

$$=a^{m+1}(q-1)\frac{q^{n(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}=\frac{a^{m+1}[q^{n(m+1)}-1)}{\frac{q^{m+1}-1}{q-1}}$$

De a nevezőben álló

$$\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=1+q+q^2+\cdots+q^m,$$

* A zárójelben álló kifejezés ugyanis olyan geometriai sor, melynek hányadosa: q^{m+1}; tehát csak a geometriai sor ismeretes összegképletét alkalmaztuk.

tehát az előbbi összeg így is írható:

$$\frac{a^{m+1}[q^{n(m+1)}-1]}{1+q+q^2+\cdots+q^m}=$$

$$=\frac{(aq^n)^{m+1}-a^{m+1}}{1+q+q^2+\cdots q^m}=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{1+q+\cdots+q^m}.$$

Ha a beosztást határtalanul folytatjuk, akkor q mindinkább közelebb jut az 1-hez; tehát a nevezőben álló $1+q+q^2+\cdots+q^m$-ből $m+1$ lesz és így a keresett terület:

$$\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

miként előbb találtuk.

Látjuk tehát, hogy a területet most már kétféleképpen is kiszámíthatjuk. Vagy meghatározzuk az $F(x)$ függvényt, mely az $f(x)$ primitivje, és akkor a keresett terület:

$$F(b)-F(a),$$

vagy pedig felosztjuk bizonyos módon a $b-a$ intervallumot szakaszokra és megalkotjuk az

$$f(a)\Delta_1+f(x_1)\Delta_2+f(x_2)\Delta_3+\cdots+f(x_n)\Delta_{n+1}$$

összeget és miután ezt kiszámítottuk, a Δ szakaszokat elenyésző csekélyekké tesszük, vagyis kiszámítjuk a

$$\lim\,[f(a)\Delta_1+f(x_1)\Delta_2+f(x_2)\Delta_3+\cdots+f(x_n(\Delta_{n+1}]$$

összeg határértékét.

Ez az utóbbi eljárás azonban sokkal körülményesebb, mint az első, azért, ha csak lehetséges, mindig az elsőt alkalmazzuk.

Az A_1ABB_1 terület mértékszámát így is írjuk:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

E jelölésben kifejezésre jutnak az A_1B_1 pontok abscissái, vagyis a terület határvonalai; azért e kifejezést a közönséges primitiv függvénytől megkülönböztetésül *határozott* [*inkább határolt*] *integráloknak* is nevezzük. a és b a határok.

18. *Néhány fontos integrál kiszámítása. Alkalmazás a területszámításra.* Hogy a területszámításban és az integrálszámítás további alkalmazásaiban némi gyakorlatot szerezzünk, egy kis megjegyzést kell tennünk. Legyen adva $f(x)$ függvény és keressük a primitiv függvényét, vagyis azt a függvényt, amelynek differenciál-hányadosa $f(x)$. Ha e függvény $F(x)$, akkor tehát:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Ha x egy más változónak, pld. t-nek a függvénye: $x = \varphi(t)$, akkor $f(x)$ voltaképpen t függvénye és így $F(x)$ is t függvénye. Szorozzuk az előbbi egyenlet mindkét oldalát $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$-vel:

$$\frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \frac{dx}{dt}.$$

A baloldalon álló kifejezés [1 60. lap] nem egyéb, mint $F(x)$-nek t-szerinti differenciál-hányadosa; tehát:

$$\frac{dF}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt},$$

vagyis az F függvény, mely $f(x)$ primitiv függvénye, egyuttal [t szerinti] primitiv függvénye az $f(x)\frac{dx}{dt}$-nek.

Ennek az állításnak igen nagy hordereje van. Hogy jobban megértsük, egy-két példán mutatjuk be az alkalmazását.

Próbáljuk meghatározni az $(ax+b)^n$ primitiv függvényét.

Legyen $$ax+b=t,$$

vagyis $$x=\frac{t-b}{a}.$$

A keresett F primitiv függvény [t szerint] az $f(x)\frac{dx}{dt}$ primitiv függvénye. $f(x)=t^n$; $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a}$, tehát $f(x)\frac{dx}{dt}=\frac{t^n}{a}$. Ennek a primitiv függvénye: $\frac{t^{n+1}}{a(n+1)}$, tehát az $(ax+b)^n$ keresett primitiv függvénye: $\frac{t^{n+1}}{a(n+1)}$ és ha t helyébe megint az $ax+b$-t tesszük,

$$F(x)=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$$

Egy másik, egyszerű példa legyen a következő: Számítsuk ki az

$$\int \sin ax . dx$$

-et, vagyis azt a függvényt, melynek diff. hányadosa: $\sin ax$.

Tegyük e végből megint, hogy egyszerűbb legyen a kifejezés:

$$ax = t, \text{ vagy } x = \frac{t}{a},$$

akkor az előbbi megjegyzésünk szerint a keresett $F(x)$ primitiv függvénynek t szerinti diff. hányadosa

$$\frac{dF}{dt} = \sin ax \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t}{a}$$

és így: $$F(x) = \frac{\cos t}{a} = \frac{\cos ax}{a}.$$

Az eljárás, amit követtünk, igen gyakran alkalmazható az integrálásnál: *helyettesítési eljárásnak* hívjuk. Még egy-két példán mutatjuk meg az alkalmazását. Ha a $\operatorname{tg} x$ primitiv függvényét keressük, vagyis az

$$\int \operatorname{tg} x . dx$$

-et, akkor tegyük: $\cos x = t$.

Innen: $$-\sin x \frac{dx}{dt} = 1;$$

vagyis: $$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sin x}$$

A szabályunk szerint a keresett $F(x)$ primitiv függvény primitiv függvénye (t szerint) a $\operatorname{tg} x . \frac{dx}{dt}$ -nek,

vagyis a $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}$

-nek is. De $\frac{1}{t}$ primitiv függvénye $\log t$, tehát

$$F(x) = -\log t = -\log(\cos x)$$

Eszerint tehát $\int \operatorname{tg} x dt = -\log \cos x$

Számítsuk ki most ezt az integrált:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Tegyük $\qquad x = \sin t$

Innen: $\qquad \frac{dx}{dt} = \cos t$

Az $F(x)$, mely a $\sqrt{1-x^2}$ primitiv függvénye, egyúttal [mint t függvénye] a

$$\sqrt{1-x^2} \quad \frac{dx}{dt}$$

prim. függvénye is, vagyis a

$$\sqrt{1-\sin^2 t} . \cos t = \cos^2 t$$

primitiv függvénye. Feladatunk tehát a $\cos^2 t$ prim. függvényének a meghatározása, vagyis az $\int \cos^2 t\, dt$ kiszámítása.

Majd ezzel együtt mindjárt az $\int \sin^2 t . dt$ is kiszámítjuk. Jelöljük az elsőt I_1-el, a másodikat I_2-vel. E kettő összege:

$$I_1 + I_2 = \int (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \int dt = t$$

[a C tetszőleges constanst elhagytuk] és a kettő különbsége:

$$I_1 - I_2 = \int (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int \cos 2t\, dt$$

Ez az integrál, vagyis $\cos 2t$ prim. függvénye: $\frac{\sin 2t}{2}$. [Ugyanis $\frac{\sin 2t}{2}$ diff. hányadosa valóban $\cos 2t$]. Ha e két egyenletet összeadjuk:

$$2I_1 = t + \frac{\sin 2t}{2}$$

egyenletre jutunk; ha pedig kivonjuk a két egyenletet egymásból:

$$2I_2 = t - \frac{\sin 2t}{2}$$

-re jutunk. Eszerint tehát:

$$\int \cos^2 t\ dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$$

$$\int \sin^2 t\ dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

Visszatérve a kiinduló pontunkra:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

ahol $x = \sin t$ Ennek megfelelően a jobboldalt még egy kissé átalakítjuk, hogy ne t, hanem x szerepeljen benne.

Minthogy $x = \sin t$, tehát $t = \arcsin x$; továbbá:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} = 2x \sqrt{1-x^2}$$

tehát:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\text{arc sin} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.*$$

Még egy kissé komplikáltabb alakú integrált is kiszámíthatunk ennek alapján. Ez a következő:

$$\int \sqrt{1-m^2x^2}\, dx,$$

mely az előbbitől csak abban különbözik, hogy x^2 helyett m^2x^2 áll a gyökjel alatt. — Tegyük $mx=t$, vagyis $x = \frac{t}{m}$, akkor a keresett primitiv függvény [t szerint] az

$$\sqrt{1-m^2x^2}\, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \sqrt{1-t^2}.$$

primitiv függvénye. De ez az előbbi szerint:

$$\frac{1}{m}\left[\frac{\text{arc sin}\, t}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + C\right]$$

vagyis $t=mx$ téve:

$$\int \sqrt{1-m^2x^2}\, dx =$$

$$\frac{1}{m}\left[\frac{\text{arc sin}\, mx}{2} + \frac{mx\sqrt{1-m^2x^2}}{2} + C\right]$$

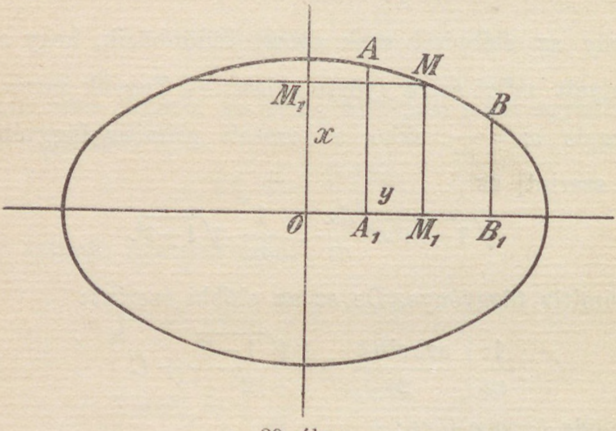
* Jó lesz, ha gyakorlatképen a t. olvasó differenciálással meggyőződik arról, hogy a $\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$ diff. hányadosa valóban $\cos^2 t$ s í. t.; valamint arról, hogy $\frac{\text{arc sin}\, x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$ diff. hányadosa: $\sqrt{1-x^2}$.

Alkalmazzuk a most tanultakat az *ellipszis-rész* felületének kiszámítására. (30. ábra.) Legyen az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

vagyis:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



30. ábra.

és határozzuk meg az A_1ABB_1 területet. Legyen $OA_1=k$, $OB_1=l$. Mint már előbbről tudjuk, az első dolgunk az

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

primitiv függvényének a meghatározása. A jobboldali kifejezést így is írhatjuk:

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

és ezen rögtön látjuk, hogy [a b szorzótól eltekintve] olyan alakú, mint az előbbi példánkban szereplő függvény, ha $m=\frac{1}{a}$ tesszük, tehát a neki megfelelő prim. függvény [a C constanst elhagyjuk].

$$F(x)=\frac{ab}{2}\left[\text{arc sin}\,\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right].$$

Meg lévén a primitiv függvény, a keresett területet könnyen meghatározhatjuk. Behelyettesítjük x helyébe l-et, azután k-t és e két értéket egymásból kivonjuk:

$$F(l)-F(k)=\frac{ab}{2}\left[\text{arc sin}\,\frac{l}{a}+\right.$$

$$\left.+\frac{l}{a}\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}-\text{arc sin}\,\frac{k}{a}-\frac{k}{a}\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}\right].$$

Ez a keresett területrész.

Ha az ellipszis negyedrészének a területét keressük, akkor $l=a$, $k=0$ kell tennünk. E terület lesz:

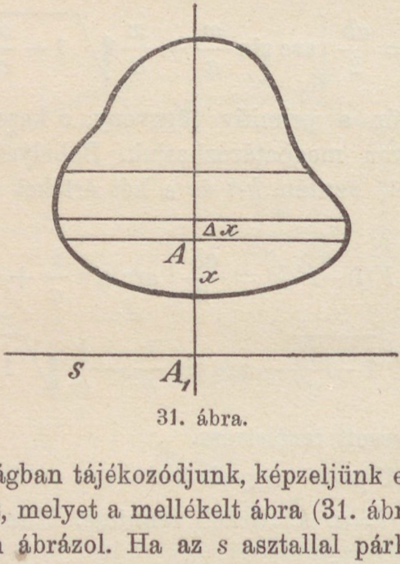
$$\frac{ab}{2}[\text{arc sin}1-\text{arc sin }0].$$

De arc sin 1, vagyis azon szög, melynek sinusa: 1, nem más, mint $\frac{\pi}{2}$ és arc sin $0=0$ tehát a keresett terület:

$$\frac{ab\pi}{4}$$

és így az egész ellipszis területe: $ab\pi$. Ha az $a=b$, akkor az ellipszis körré válik, tehát azt az ismeretes dolgot kapjuk, hogy az a sugarú kör területe: $a^2\pi$.

19. *Testek köbtartalma.* Az integrálszámítás köbtartalomszámításra is szolgál. Hogy ez iránt legalább



31. ábra.

általánosságban tájékozódjunk, képzeljünk egy geometriai testet, melyet a mellékelt ábra (31. ábra) keresztmetszetben ábrázol. Ha az s asztallal párhuzamosan x magasságban síkot helyezünk, ez a sík a testet metszi. A metszés felülete ettől az x magasságtól függ, ennek a függvénye; mondjuk: $f(x)$.

Az asztaltól e síkig a testnek egy rétege van; e réteg köbtartalma szintén az x függvénye, mondjuk: $F(x)$.

Ha már most $x+\Delta x$ magasságban is szeljük a testet, akkor az így keletkező keskeny szelet köbtartalma:

$$F(x+\Delta x)-F(x).$$

E két, egymástól Δx távolságban vonuló sík közé foglalt része a testnek olyanféle, mint egy igen alacsony henger. E réteg köbtartalma az $f(x).\Delta x$-től [alapterület $\times$ magasság] igen csekéllyel különbözik;* tehát így írható: $(f(x)+\varepsilon)\Delta x$ és így

$$F(x+\Delta x)-F(x)=[f(x)+\varepsilon]\Delta x$$

vagy:
$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)+\varepsilon$$

és ha Δx elenyésző csekéllyé válik, akkor ε is 0 lesz, tehát:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$$

vagyis $F(x)$ diff. hányadosa: $f(x)$; azaz: az x magasságban vonuló sík által kivágott réteg köbtartalma $F(x)$ *az $f(x)$ prim. függvénye.* Ha már most az a magasságban és b magasságban vonuló párhuzamos síkok közötti réteg köbtartalmát akarjuk meghatározni, akkor először meghatározzuk az $f(x)$ primitiv függvényét $F(x)$-et. Ebből kiszámítjuk az $F(b)$-t, vagyis az asztaltól a felső síkig terjedő réteg köbtartalmát; azután az $F(a)$-t és a keresett köbtartalom:

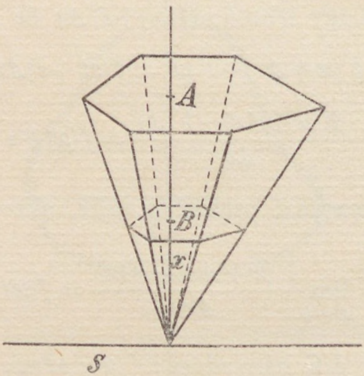
* Olyan hengeralakú testtel egyenlő köbtartalmú, melynek alap az $f(x)$-től igen kevéssel, mondjuk ε-nal különbözik.

$$F(b)-F(a)$$

lesz.

Egy-két példa jobban megvilágosítja az eljárást.

a) *A csonka gula köbtartalma.* Számítsuk ki az m magasságú csonka gula köbtartalmát. Ismeretes, hogy a gulának az alapjával párhuzamos metszeteinek területei oly arányban vannak, mint a csúcstól mért távolságok négyzetei.



31. ábra.

Képzeljük a gulát a csúcsával lefelé állítva. (31. ábra.) Legyen a gula alapjának területe A. Magassága: M. Az x magasságban vonuló metszet területe lesz:

$$f(x)=\frac{Ax^2}{M^2}$$

tehát a primitiv függvény:

$$F(x)=\frac{Ax^3}{3M^2}$$

és így az alap és tőle m távolságban vonuló párhuzamos sík metszet közötti csonka gularész (tehát az m magasságú csonkagúla) köbtartalma:

$$F(M)-F(M-m)=\frac{A}{3M^2}[M^3-(M-m)^3]=$$

$$\frac{Am}{3M^2}[M^2+M(M-m)+(M-m)^2]\,*$$

De $\frac{A(M-m)^2}{M^2}$ nem más, mint az $M-m$ magasságban kapott síkmetszet területe. Jelöljük ezt B-vel. Ekkor tehát:

$$\frac{A}{M^2}M(M-m)=\sqrt{\frac{AA(M-m)^2}{M^2}}=\sqrt{AB}$$

és így az m magasságú csonka gula köbtartalma:

$$\frac{m}{3}[A+\sqrt{AB}+B].$$

Az egész gula köbtartalma pedig: ($B=0$ téve)

$$F(M)-F(0)=\frac{AM}{3}.$$

b) *Az ellipsoid köbtartalma.* Legyen egy ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

* Ugyanis $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ és ha ebben az ismeretes formulában α helyett M-et, β helyett $M-m$-et tesszük, akkor kapjuk a szövegbeli átalakítást.

[Jelöléseink megtarthatása végett most a vízszintes tengelyt jelöljük y-nal.]

Ha ezt az ellipszist az x körül forgatjuk, akkor keletkezik a forgási ellipsoidnak nevezett felület. Határozzuk meg e geometriai test térfogatát. Az M pont e forgásnál az MM_1 radiussal kört ír le. (30. ábra.) Az $MM_1 = y$. De

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$$

tehát e kör területe:

$$f(x) = y^2\pi = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)\pi = a^2\pi - \frac{a^2x^2}{b^2}\pi.$$

Az $f(x)$ primitiv függvénye:

$$F(x) = a^2\pi x - \frac{a^2\pi}{b^2}\frac{x^3}{3}$$

tehát a középponttól α és β távolságban az X tengelyre merőlegesen vonuló síkok közötti *réteg köbtartalma:*

$$F(\beta) - F(\alpha) = a^2\pi(\beta - \alpha) - \frac{a^2\pi}{b^2}\frac{\beta^3 - \alpha^3}{3}.$$

A félellipszoid köbtartalmát megkapjuk, ha $\beta = b$ és $\alpha = 0$ tesszük

$$F(b) - F(0) = a^2\pi b - \frac{a^2\pi b}{3} = \frac{2a^2b\pi}{3}$$

és így az egész ellipszoid térfogata:

$$\frac{4a^2b\pi}{3}.$$

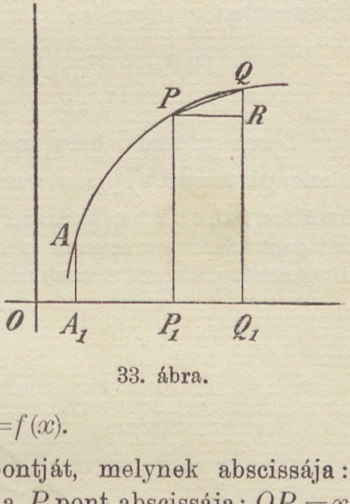
Ha $b=a$, akkor az ellipsoid gömbbé válik, melynek köbtartalma tehát:

$$\frac{4a^3\pi}{3}.$$

Az ellipszoid réteg köbtartalmából számítsuk ki olyan gömbsüvegét, melynek magassága h. Ekkor, minthogy gömbről van szó: $a=b$ és $\beta=a$, $\alpha=a-h$, tehát e gömbsüveg köbtartalma:

$$a^2\pi h-\pi\frac{a^3-(a-h)^3}{3}=$$

$$=\frac{\pi}{3}(3ah^2-h^3)$$



33. ábra.

20. *Az ívhosszúság számítása.* Legyen a görbe egyenlete (33. ábra):

$$y=f(x).$$

Jelöljük meg az A pontját, melynek abscissája: $OA_1=a$. Legyen továbbá a P pont abscissája: $OP_1=x$ és ordinátája: $P_1P=f(x)=y$.

Az AP vonal hossza valaminő függvénye az x-nek; mondjuk: $F(x)$. Határozzuk meg az $F(x)$ diff. hányadosát, vagyis a

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

-et. Legyen $P_1Q_1=\Delta x$, akkor $F(x+\Delta x)-F(x)=PQ$

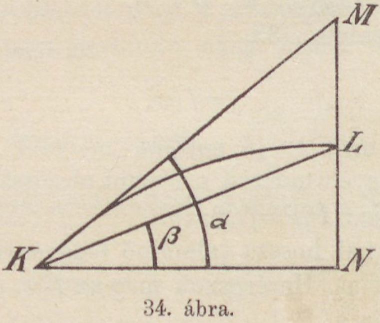
ívdarab hosszúsága. Ez az ív igen kevéssel különbözik a PQ húrtól; tehát

$$F(x+\Delta x)-F(x)=PQ \text{ ív}=PQ \text{ húr}+\varepsilon$$

ahol az ε igen kis szám, mely oly kicsinnyé tehető, amint csak óhajtjuk, ha a Δx-et megfelelően választjuk. De a PQ húr a PRQ derékszögű háromszögből kiszámítható; ugyanis:

$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{QR}^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

* Fontos tudnunk, hogy nemcsak ε tehető tetszésszerinti kicsinnyé, hanem $\frac{\varepsilon}{\Delta x}$ is, vagyis $\lim \frac{\varepsilon}{\Delta x}=0$. Ezt a következőként láthatjuk be (34. ábra): A KL ív$>KL$ húrnál, (mert két pont között az egyenes a legrövidebb). Húzzuk meg a KM érintőt a K pontban; akkor $KM+ML>KL$ ív. (Ez Archi-



34. ábra.

medes postulatuma; mely azt mondja, hogy ha K és L pontokat a KL egyenesnek egy oldalára eső két (mindig convex) vonallal összekötjük, akkor a külső nagyobb; itt tehát a $KM+ML$ külső vonal$>KL$ görbénél). Legyen az MKN szög α, Ez még így is írható:

$$(\Delta x)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

vagyis $\qquad PQ \text{ ív} = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}+\varepsilon,$

tehát:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}+\varepsilon$$

és innen:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\sqrt{\quad+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}+\frac{\varepsilon}{\Delta x},$$

miből, ha $\Delta x = 0$ lesz és tekintetbe vesszük a jegyzetben mondottakat, melyek szerint $\frac{\varepsilon}{\Delta x}$ is 0-á válik:

az $LKN=\beta$, akkor

$$KM=\frac{KN}{\cos\alpha};\quad ML=MN-LN=\frac{KN}{\operatorname{cotg}\alpha}-\frac{KN}{\operatorname{cotg}\beta};$$

$KL=\frac{KN}{\cos\beta}$; tehát KL ív $-$ KL húr $<(KM+ML)-KL=$

$$=KN\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}-\frac{1}{\cos\beta}\right).$$

A KL ív$-KL$ húr$=\varepsilon$; $KN=\Delta x$; tehát

$$\frac{\varepsilon}{\Delta x}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}-\frac{1}{\cos\beta}.$$

Ha már most Δx 0-á válik, akkor az $\alpha=\beta$ lesz, tehát a jobboldal is 0, azaz:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\varepsilon}{\Delta x}=0.$$

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

De a
$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

és
$$\lim_{\Delta x=0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx},$$

tehát:
$$\frac{dF}{dx} = \sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

vagyis $F(x)$ azon függvény, melynek differenciál-hányadosa:

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

vagyis:
$$F(x) = \int \sqrt{1+[f'(x)]^2} \mathrm{d}x.$$

Ha a görbén megjelöljük a B pontot, melynek abscissája: $OB_1 = b$; akkor az AB ívhosszúságot így határozzuk meg: Megkeresünk egy oly függvényt, melynek differenciál-hányadosa:

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

ez a $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$-nek primitiv függvénye: $F(x)$, vagyis:

$$\int \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx.$$

Ekkor aztán:

$$AP \text{ ív} = F(x) + C.$$

Most még csak a C constanst úgy kell meghatároznunk, hogy valóban azt az ívet kapjuk, amelynek baloldali kezdőpontja éppen az A pont. Evégből, mint már annyiszor tettük, most is így okoskodunk:

Ha $x=a$, akkor AP ív $=0$, tehát

$$F(a)+C=0,$$

vagyis: $C=-F(a)$. E szerint:

$$AP \text{ ív} = F(x)-F(a)$$

és így, ha $x=b$, melynek a görbén B pont fele meg, akkor

$$AB \text{ ív} = F(b)-F(a).$$

Ezt megint így jelöljük:

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Nem igen választhatok olyan példát, amelyen e formula alkalmazását egyszerűen mutathatnám; mert a közönségesen ismert görbék ívhosszúságának a kiszámítása már komplikáltabb integratiós formulára vezet. Ezért tehát először olyan példát választok, amely inkább csak illustratióul szolgál, nem pedig arra, hogy e számítás hasznát lássuk. Az egyenes hosszúságának a kiszámítására akarom e formulát használni. Legyen az egyenes egyenlete: $y=nx+k$ és egyik pontja A, melynek abscinája a, egy másik B pontjának abscinája: b. A jelen esetben:

$$f(x)=mx+k,$$

tehát

$$f'(x)=m$$

és így

$$F(x)=\int\sqrt{1+m^2}dx=x\sqrt{1+m^2},$$

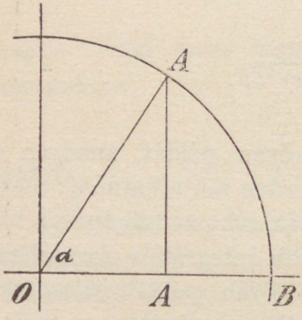
tehát AB hossza:

$$F(b) - F(a) = (b-a)\sqrt{1+m^2}.$$

De $m = \operatorname{tg}\alpha$ (ahol α az egyenes hajlásszöge), tehát

$$\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

és így:
$$AB = \frac{b-a}{\cos\alpha},$$



35. ábra.

ami az elkészíthető ábrából azonnal látszik.

Egy másik példa legyen a körív hosszának a kiszámítása. Legyen (az egységsugárú) kör egyenlete

$$x^2 + y^2 = 1,$$

vagyis:

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Határozzuk meg az AB körív hosszát. (35. ábra.) Első dolgunk: meghatározni azt az $F(x)$ függvényt, melynek differenciál-hányadosa: $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$.

A jelen esetben:

$$f'(x) = y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},$$

tehát
$$1+[f'(x)]^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

és így: $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

miből: $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x$,

vagyis az AB ív hossza: AB ív $= \text{arc sin}\, \alpha - \text{arc sin}\, 0 = \alpha$.

A negyedkör esetében $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, tehát az egységsugarú negyedkör hossza: $\dfrac{\pi}{4}$. [Ez nem tekinthető bizonyításnak, mert hiszen a szög mérésénél már feltételezzük, hogy a kör hossza $2\pi r$.]

Legalább egy oly példát akarok kiszámítani, amelynél a tanult formula igazi alkalmazásáról lehet szó. Számítsuk ki a láncgörbe hosszát. Láncgörbe alatt oly görbét értünk, amely a két ponton megerősített egyenletes lánc alakja. A statikában kimutatják, hogy e láncgörbe egyenlete: *

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Itt tehát $\qquad f(x) = \dfrac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$

* A legmélyebb pontját megkapjuk, ha megkeressük, hogy az $\frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$ ordinata x minő értékénél válik minimummá. E függvény diff. hányadosa $\frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right]$. Kell tehát, hogy $e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} = 0$ legyen, azaz $e^{\frac{2x}{m}} = 1$, vagyis $x = 0$. A legalacsonyabb pont ordinátája tehát éppen: m. (Hogy ez legkisebb és nem legnagyobb, arról az ismeretes módon győződünk meg. Jelöljük e legmélyebb pontot M-mel.)

és így: $$f'(x)=\frac{1}{2}[e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}].$$

Ebből: $$\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\sqrt{1+\tfrac{1}{4}(e^{\frac{x}{m}}-e^{\frac{x}{m}})^2}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{4+e^{\frac{2x}{m}}-2+e^{-\frac{2x}{m}}}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{e^{\frac{2x}{m}}+2+e^{-\frac{2x}{m}}}=\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}$$

és így azon $F(x)$ függvény, melynek ez a differenciálhányadosa:

$$\frac{m}{2}(e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}})$$

és így az AB ív hosszúság:

$$\frac{m}{2}[e^{\frac{a}{m}}-e^{\frac{b}{m}}-e^{-\frac{a}{m}}+e^{-\frac{b}{m}}].$$

Ha $b=0$, vagyis a B pont a legmélyebb pont, melyet M-nek mondtunk, akkor az ív hossza:

$$\frac{m}{2}[e^{\frac{a}{m}}-e^{-\frac{a}{m}}].$$

Ezt az eredményt igen egyszerüen interpretálhatjuk. Ugyanis, ha

$$z=\frac{m}{2}(e^{\frac{a}{m}}-e^{-\frac{a}{m}}),$$

akkor $$z^2=\frac{m^2}{4}(e^{\frac{2a}{m}}+e^{-\frac{2a}{m}}-2)=$$

$$= \frac{m^2}{4}\left(e^{\frac{2a}{m}} + e^{-\frac{2a}{m}} + 2\right) - m^2 =$$

$$= \left[\frac{m}{2}\left(e^{\frac{a}{m}} + e^{-\frac{a}{m}}\right)\right]^2 - m^2.$$

De $\frac{m}{2}\left(e^{\frac{a}{m}} + e^{-\frac{a}{m}}\right)$ nem más, mint az AA_1 ordinata, m pedig az MM_1 tehát

$$z = \sqrt{(AA_1)^2 - (MM_1)^2}$$

egy oly derékszögű háromszög befogója, melynek átfogója AA_1, egyik befogója: MM_1 —

21. *Tömegközéppont meghatározása.* A fizikában megtanítják, hogy ha m_1, m_2, $m_3 \ldots m_k$ tömegek tömegközéppontjai ismeretesek és ha valamely síktól az m_1 tömegközéppontja x_1 távolságra van, az m_2-é x_2 távolságra s í. t., akkor az egész tömegrendszer tömegközéppontjának e síktól való távolsága:

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_kx_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}.$$

Nevezzük a számlálót, melyben az egyes tömegeknek a síktól való távolságokkal való szorzatainak összege szerepel, röviden tömegnyomatéknak. A nevező a test tömege.

Képzeljük már most a 31-ik ábrában ábrázolt testet mindenütt egyenletes ρ sűrűségűnek. Hogyan kell e test tömegközéppontját meghatározni?

Legyen s egy adott sík. Ettől x távolságban, az

A ponton át helyezzünk egy párhuzamos síkot. A testnek e sík által határolt alsó rétegének tömegnyomatéka az x távolságtól függ. Jelöljük ezt a tömegnyomatékot $F(x)$-el.

Növeljük meg az x-et Δx-el. A Δx vastagságú réteg tömegnyomatékát határozzuk meg. Ha az A ponton átmenő síkmetszet területe, mely az x függvénye, $f(x)$, akkor e kis réteg oly hengeralakú testtel egyenlő, melynek alapja az $f(x)$-től igen csekéllyel különbözik; tehát e réteg köbtartalma így írható: $[f(x)+\eta]\Delta x$, ahol η a Δx-el együtt zérussá lesz.

E réteg tömege tehát: $[f(x)+\eta]\Delta x.\rho$ és nyomatéka: e tömeg szorozva a réteg tömegközéppontjának az s síktól való távolságával. De e réteg tömegközéppontjának az s-től való távolsága igen kevéssel különbözik az x-től, úgy, hogy e réteg nyomatéka az s síkra vonatkozólag így írható $\rho f(x).x.\Delta x+\varepsilon x\Delta x$, ahol ε a Δx-el zérussá lesz.

Az $x+\Delta x$ magasságú réteg nyomatéka $F(x+\Delta x)$, az x magasságúé: $F(x)$, tehát a Δx vastagságú rétegé: $F(x+\Delta x)-F(x)$. Így tehát:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=[\rho f(x).x+\varepsilon x]\Delta x$$

és ebből:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\rho f(x).x+\varepsilon x.$$

Ha Δx zérussá lesz, akkor kapjuk, hogy:

$$F'(x)=\rho f(x).x;$$

vagyis $F(x)$ tömegnyomaték a $\rho f(x) x$ primitiv függvénye, vagyis:

$$F(x) = \rho \int f(x) \,.\, x \,.\, dx,$$

ahol — még egyszer megemlítjük — ρ a test egyenletes sűrűsége, $f(x)$ az s síktól x távolságban vonuló párhuzamos metszet területe.

Ezzel még nem határoztuk meg pontosan a tömegnyomatékot, mert hiszen $\rho f(x) \,.\, x$-nek számtalan sok primitiv függvénye van; de ha egyik: $F(x)$, akkor minden más: $F(x)+C$. Ha a test legmélyebb pontja x_1 távolságban van az s síktól, akkor, ha x helyébe x_1-et teszünk az $F(x)+C$-be, mely a tömegnyomatékot fejezi ki, akkor e tömegnyomatéknak 0-nak kell lennie, mert hiszen az x_1 magasságig nincsen tömeg. E szerint tehát:

$$F(x_1) + C = 0, \text{ vagyis } C = -F(x_1)$$

és így bármely x magasságig terjedő réteg nyomatéka:

$$F(x) + C = F(x) - F(x_1).$$

Ha a test legmagasabb pontja x_2 magasságra van s sík fölött, akkor az egész test tömegnyomatékát úgy kapjuk meg, hogy e formulába x helyett x_2-t irunk. A test tömegnyomatéka tehát:

$$F(x_2) - F(x_1).$$

Erről már tudjuk, hogy nem egyéb, mint

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} f(x) \,.\, x \,.\, dx.$$

Meghatároztuk a tömegnyomatékot az s síkra vonatkozólag. Ebből azonnal megkapjuk a tömegközéppontnak az s fölötti magasságát. Ezt ugyanis úgy állítjuk elő, hogy a tömegnyomatékot az egész tömeggel, M-mel elosztjuk. Ha e tömegközéppont magasságát az s fölött ξ-vel jelöljük, akkor tehát:

$$\xi = \frac{\rho \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) \, . \, x \, . \, dx}{M}$$

és minthogy $M = \rho V$, ha V a test térfogata, tehát:

$$\xi = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) \, . \, x \, . \, dx}{V} .$$

Ha az s síkra merőleges a síkot állítunk és ettől való távolságokat y-nal jelöljük, a párhuzamos síkmetszet területét $\varphi(y)$-nal, a legszélsőbb pontok távolságait y_1 és y_2-vel és a tömegközéppont távolságát e síktól η-val jelöljük, akkor

$$\eta = \frac{\int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi(y) y dy}{V}$$

és ha még ezen két síkra merőlegesen egy harmadikat is állítanánk, akkor a megfelelő jelöléssel:

$$\zeta = \frac{\int\limits_{z_1}^{z_2} \psi(z) z dz}{V} .$$

E három távolság a súlypont helyzetét teljesen meghatározza; de igen sokszor elég, ha e 3 távolság közül csak egyiket számítjuk ki, mert a test szimmetrikus viszonyaiból következtethetünk már ezután a súlypont helyzetére.

Példaképpen számítsuk ki a 32. ábrában feltüntetett gula tömegközéppontját.

Az alap területe A, a gúla magassága legyen H. Az x távolságban vonuló metszet területe:

$$\frac{Ax^2}{H^2} = f(x),$$

tehát:

$$\rho\int f(x) . x . dx = \frac{\rho A}{H^2}\int x^3 dx = \frac{\rho A x^4}{4H^2} .$$

Ez az $F(x)$ egyik értéke; az egész tömegnyomaték:

$$F(H) - F(0) = \frac{\rho A H^4}{4H^2} = \frac{\rho A H^2}{4}$$

és innen a tömegközéppont magasságát ξ-t megkapjuk, ha ezt a gula tömegével osztjuk. Ez a tömeg:

$$M = V\rho = \frac{AH\rho}{3}$$

és így:

$$\xi = \frac{3H}{4} .$$

Vagyis a gúla tömegközéppontja az alapjától a magasság negyedrészére van. Ha a gúla szabályos, akkor nyilván a tömegközéppont a magassági vonalába esik.

Második példa gyanánt egy háromszög alakú lemez súlypontját határozzuk meg. E lemezt mindenütt egyenlő δ vastagságúnak képzeljük. Az alapja legyen a, magassága h. Az alaptól x távolságra vonuló metszet területe (minthogy e metszet a csúcstól $h-x$ távolságra van): $\frac{a(h-x)}{h}\delta$; tehát az

$$F(x)=\frac{\rho a\delta}{h}\int(h-x)x\,dx=\frac{\rho a\delta}{h}\left(\frac{hx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$$

és így az egész nyomaték:

$$F(h)-F(0)=\frac{\rho a\delta}{h}\,\frac{h^3}{6}=\frac{\rho a\delta h^2}{6}.$$

A lemez egész tömege: $\frac{\rho a\delta h}{2}$, tehát a súlypont magassága az alap fölött:

$$\xi=\frac{h}{3}.$$

A háromszögalakú lemeznek, akárminő vékony legyen is, a súlypontja a magasság harmadrészében van.

Végül határozzuk meg a 7-ik ábrában feltüntetett parabola lemez súlypontját. E parabola egyenlete legyen $y=ax^2$, Legyen a lemez vastagsága δ. Az y magasságban vonuló metszet területe:

$$x\delta,\quad \text{a hol } x=\sqrt{\frac{y}{a}};$$

tehát a metszet területe:

$$\delta\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

Itt tehát
$$\varphi(y)=\delta\sqrt{\frac{y}{a}}$$

és az y magasságig terjedő rész tömegnyomatéka:

$$F(y)=\delta\rho\int y\sqrt{\frac{y}{a}}\cdot dy=\frac{\delta\rho}{\sqrt{a}}\int y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{2\delta\rho}{5\sqrt{a}}y^{\frac{5}{2}}.$$

Ugyanezen rész tömege: $\frac{2\rho\delta yx}{3}$, mert a parabolának területe $\frac{2yx}{3}$; tehát a súlypont magassága az x tengely fölött:

$$\frac{3}{5}\,\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{a}}=\frac{3y}{5}.$$

22. *Tehetetlenségi nyomaték meghatározása.* Ha $m_1, m_2, \ldots m_k$ kis térfogatú tömegek az s síktól rendre $x_1, x_2, \ldots x_k$ távolságra vannak, akkor az

$$m_1x_1^2+m_2x_2^2+\cdots+m_kx_k^2$$

-et e tömegekből alakult rendszer tehetetlenségi nyomatékának nevezzük.

Próbáljuk a 31-ik ábrában feltüntetett test tehetetlenségi nyomatékát meghatározni. Az A ponton átmenő sík által határolt rész tehetetlenségi nyomatéka az x magasság függvénye; mondjuk: $F(x)$. Határozzuk meg a Δx vastagságú réteg tehetetlenségi nyomatékát. Ha a síkmetszet területe, mint előbb, $f(x)$, akkor e réteg térfogata $[f(x)+\eta]\Delta x$, ahol η a Δx-el együtt zérussá lesz. E réteg tömege $\rho\,[f(x)+\eta]\Delta x$ és minthogy e réteg minden pontjának az s-től való távolsága igen kevéssel különbözik az x-től, tehát e réteg tehetetlenségi nyomatéka: $\rho[f(x)+\eta]\,\Delta x\,.\,(x^2+\varepsilon)$.* De az $x+\Delta x$ magasságig terjedő réteg nyomatéka: $F(x+\Delta x)$, az x magasságig terjedő rétegé: $F(x)$, tehát a Δx szélességű kis réteg nyomatéka még $F(x+\Delta x)-F(x)$ és így

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\rho\,[f(x)+\eta]\,\Delta x\,.\,(x^2+\varepsilon)$$

és innen:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\rho\,[f(x)+\eta]\,(x^2+\varepsilon)$$

és ha Δx zérussá lesz:

$$F'(x)=\rho f(x)\,.\,x^2$$

vagyis $F(x)$ a $\rho f(x)\,.\,x^2$ primitiv függvénye:

$$\rho\int f(x)\,.\,x^2dx.$$

Ha az egyik primitiv függvény $F(x)$, akkor bármelyik ilyen alakú: $F(x)+C$.

A tehetetlenségi nyomaték tehát $F(x)+C$.

Ha a test alsó határsíkja az s fölött a magasságban van, akkor

$$F(a)+C=0,$$

vagyis $$C=-F(a)$$

és így az x magasságig terjedő réteg tehetetlenségi nyomatéka:

* Az ε igen kis szám és ha Δx zérussá lesz, az ε is eltünik.

$$F(x)-F(a),$$

ahol $F(x)$ akármelyik primitiv függvénye a $\rho f(x) . x^2$-nek. Ha a legfelsőbb pont távolsága az s-től b, akkor az egész test tehetetlenségi nyomatéka:

$$F(b)-F(a),$$

amit így írhatunk:

$$\int_a^b f(x) . x^2 dx.$$

Példaképpen határozzuk meg egy l hosszúságú r sugarú henger alakú homogén rúd tehetetlenségi nyomatékát a henger alapjára vonatkozólag.

A keresztmetszet területe mindenütt $r^2\pi$; tehát

$$F(x)=\int r^2\pi\rho x^2 dx,$$

$$F(x)=\frac{r^2\pi\rho x^3}{3}$$

és így, minthogy $a=0$, $b=l$, az egész rúd tehetetlenségi nyomatéka:

$$F(l)-F(0)=\frac{r^2\pi\rho l^3}{3}$$

és minthogy $r^2\pi\rho l$ a henger alakú test tömege: M, tehát a tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{Ml^2}{3}$.

Második példa gyanánt határozzuk meg egy háromszög alakú δ vastagságú lemez tehetetlenségi nyomatékát az alapjára vonatkozólag. A háromszög alapja a, magassága: h. Az alaptól x távolságra menő metszet területe:

$$\frac{a(h-x)}{h}\delta = f(x),$$

tehát
$$\rho f(x) \,.\, x^2 = \frac{a\delta\rho}{h}(hx^2 - x^3)$$

és így:

$$F(x) = \frac{a\delta\rho}{h}\int (hx^2 - x^3)\,dx = \frac{a\delta\rho}{h}\left(\frac{hx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$$

és így az egésznek a tehetetlenségi nyomatéka:

$$F(h) - F(0) = \frac{a\delta\rho}{h}\,\frac{h^4}{12} = \frac{a\delta\rho h^3}{12}$$

és minthogy $\frac{a\delta h\rho}{2}$ a lemez tömege M, tehát a tétlenségi nyomatéka: $\frac{Mh^2}{6}$.

Harmadik és utolsó példa gyanánt válasszuk egy r sugarú félgömbnek az æquator síkjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának a meghatározását.

Az alaptól x távolságban vonuló körmetszet területe: $(r^2 - x^2)\pi = f(x)$, tehát

$$F(x) = \rho\pi\int (r^2 - x^2)\,x^2\,dx = \rho\pi\left(\frac{r^2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)$$

és minthogy a legfelső pont r távolságra van az alaptól, a tehetetlenségi nyomaték:

$$F(r) - F(0) = \frac{2\rho\pi r^5}{15}.$$

Minthogy pedig a tömege: $M = \frac{2r^2\pi\rho}{3}$, tehát a tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{Mr^2}{5}$.

Összefoglalás. Ebben az előadásban a felsőbb mathesis egy második alapfogalmával, az integrál fogalmával ismerkedtünk meg és pedig egyrészt a primitiv függvénnyel, másrészt az ú. n. határozott integrállal. A primitiv függvény keresése voltaképpen a differenciálás fordított művelete: olyan függvényt keresünk, melynek a megadott függvény a differenciálhányadosa. Az $f(x)$-hez tartozó primitiv függvény jele: $\int f(x)\,dx$. Primitiv függvény számtalan sok tartozik egy adott függvényhez, de egymástól mind csak állandóban különböznek. A határozott integrál, melynek jele $\int_a^b f(x)\,dx$, az $f(x)$-hez tartozó $F(x)$ primitiv függvényből igen egyszerűen számítható ki; ugyanis $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. A határozott integrálnak még egy másik értelmezését is megismertettük, mely számításra kevésbbé alkalmas ugyan, de fogalmilag talán még az előbbinél is világosabb. Az ab távolságot felosztottuk kisebb Δ_1, Δ_2, $\Delta_3, \ldots$ szakaszokra és megalkottuk az $f(x_1)\,\Delta_1 + f(x_2)\,\Delta_2 + \cdots$ összeget. Ha a szakaszokat azután végtelen csekélyekké tesszük, akkor ezen összeg határértéke az $\int_a^b f(x)\,dx$. Mindezekre a fogalmakra a területszámítással kapcsolatban jutottunk; de a már egyszer megtalált fogalommal azonnal igen sok más mennyiség számítását is elvégezhettük. Azt hiszem, nem kis örömöt okoz érdeklődő igen tisztelt hallgatóimnak az a tudat, hogy most már képesek igen sok esetben területet, ívhosszúságot, köbtartalmat, tömegnyomatékot, súlypontot, tehetetlenségi nyomatékot számítani olyan esetekben is, amelyekben az elemi mathematika segédeszközei elégtelenek voltak. Talán semmi sem okoz az embernek annyi örömet, mint tudásának olyan tágulása, amely egyúttal képességeit is fokozza, az az érzet, mikor a savoir-ral együtt érzi a pouvoirnak egyedül boldogitó hatását!

Feladatok.

Számítsuk ki ezeket az integrálokat:

1) $\int a dx$, 2) $\int ax^n dx$, 3) $\int a\sqrt{x}\, dx$,

4) $\int (ax+b)^n dx$, 5) $\int \sqrt{ax+b}\, dx$, 6) $\int \sqrt[3]{ax+b}.dx$,

7) $\int \sin x\, dx$, 8) $\int \cos 3x\, dx$, 9) $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$,

10) $\int e^{3x} dx$, 11) $\int e^{-5x} dx$, 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

13) $\int \frac{dx}{1+x^2}$, 14) $\int \frac{dx}{1+x}$, 15) $\int \frac{dx}{1+3x}$,

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$, 17) $\int \sin^2 x\, dx$, 18) $\int \cos^2 x\, dx$,

19) $\int \frac{2x\, dx}{1+x^2}$, 20) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+5} dx$.

Számítsuk ki ezeket a határozott integrálokat;

21) $\int_0^1 x^3 dx$, 22) $\int_0^1 \cos x\, dx$, 23) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$,

24) $\int\limits_0^1 e^x\,dx,$ 25) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx,$ 26) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx,$

27) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$ 28) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

29) $\int\limits_a^b (x^2+3x+2)\,dx,$ 30) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x},$

31) $\int\limits_a^b e^{2x}\,dx,$ 32) $\int\limits_a^b \frac{dx}{1-x}.$

33) $(uv)'=u'v+uv'$ a szorzat differenciálási szabálya. Ebből: $uv'=(uv)'-u'v$ és így az uv' primitiv függvénye $=$ $(uv)'$ primitiv függvénye $-$ $u'v$ primitiv függvénye; de $(uv)'$ primitiv függvénye uv, tehát uv' primitiv függvénye $= uv - u'v$ primitiv függvénye. Képletben:

$$\int uv'dx=uv-\int vu'dx.$$

Igy például $\int x\log x\,dx$ kiszámítására így járhatunk el. Legyen $\log x=u$, ebből $u'=\frac{1}{x}$, $x=v'$ vagyis akkor $v=\frac{x^2}{2}$,

$$\int x\log x\,dx=\frac{x^2\log x}{2}-\frac{1}{2}\int x dx=$$

$$=\frac{x^2\log x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$$

Ez az eljárás a parciális integrálás módszere. Habározzuk meg ily módon: $\int x^2 \log x\, dx$-et! (Kétszer alkalmazzuk e módszert!)

34) Ugyanezen eljárással határozzuk meg ezeket az integrálokat: $\int x \,.\, e^x dx$, [itt u legyen x, v' pedig e^x] $\int x^2 e^x dx$-et.

35) Határozzuk meg ezeket is: $\int x \sin x\, dx$ [$\sin x$-et vegyük v'-nek]. $\int x \cos x\, dx$.

36) Határozzuk meg ezzel az eljárással. $\int \sin^2 x\, dx$-et. [$\sin x \,.\, \sin x$; egyik tényező legyen u, a másik v'.] Éppen így $\int \cos^2 x$-et!

37) Határozzuk meg az $y = \cos x$ görbe által alkotott területet! (Ez úgy értendő, hogy az ABA_1B_1 alakú területet, aminővel mindenütt foglalkoztunk.)

38) Határozzuk meg az $y = ax^2$ parabola két, az x tengellyel párhuzamos húrja közötti területét!

39) Az $y = ax^3$ parabola A és B pontjaiból az X tengelyre az AA_1, BB_1 merőlegeseket vonjuk. Mekkora az AA_1B_1B idom területe? Ha az AB pontokból az Y tengelyre az AA_2, BB_2 merőlegeseket vonjuk, mekkora lesz az AA_2B_2B idom területe?

40) Az $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ görbe A pontjából az X tengelyre az AA_1 merőlegest vonjuk. Ha $OB_1 = 1$, mekkora az BAA_1 terület?

41) Az $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots$ végtelen sor összege:

$$\frac{1}{1+x}; \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots$$

Integráljuk mindkét oldalon. A baloldalon

$$\int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) + C,$$

a jobboldalon tagonkint integrálva:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots$$

és minthogy $x=0$-nál $\log 1=0$, tehát C zérusnak veendő, vagyis:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots$$

mint azt már láttuk.

42) Tegyünk így az $\frac{1}{1+x^2}$-el is és integráljunk mindkét oldalon! Azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\cdots$$

Ez az $\operatorname{arctg} x$ sora. Mutassuk meg, hogy ez a sor convergens, ha $x<1$. Mutassuk meg, hogy akkor is összetartó, ha $x=1$. Ha $x=1$-et teszünk, akkor

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4},$$

tehát $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

VI. előadás.

23. *Az intgerálszámítás további alkalmazásai. Differenciálegyenlet.* A fizikában a legfontosabb feladatok közé tartozik a mozgás lefolyásának a leírása; vagyis a legegyszerűbb esetben annak a megállapítása, hogy a leírt út miképpen függ az eltelt időtől? Igen sokszor ismeretes, hogy a sebesség — vagy még inkább — a gyorsulás minő függvénye az időnek, hiszen a működő erő a fizika egyik alaptörvénye szerint arányos a gyorsulással; tehát azzal a feladattal állunk szemben, hogy a megadott gyorsulásból következtessünk a leírt útra. Néhány példán akarjuk e következtetést bemutatni, hogy lássuk, a felsőbb mathematika módszerei menynyire alkalmasak a tünemények lefolyásának a megállapítására. Ezzel képessé tesznek bennünket arra, hogy a jövőre nézve előre megállapítsuk, hogy miképpen fog végbemenni az illető tünemény, vagy pedig utólagosan kimutassuk, miképpen kellett lefolynia a multban. Az illető tünemény életének egyetlen pillanatában uralkodó törvényszerűségből következtetünk a beláthatatlan idők végeig, ha a számításba vett okokban és körülményekben változás be nem áll.

a) *Mozgás, ha állandó erő hat.* (Szabad esés.) Igy például, ha azt kérdezzük, hogy minő mozgása van annak a tömegnek, melyre allandónak tekinthető erő, (mondjuk a földi nehézségerő) hat? Newton törvénye szerint a működő erő

$$P = \text{tömeg} \times \text{gyorsulás}.$$

Ha s a leírt út, akkor a gyorsulás $\frac{d^2s}{dt^2}$ és ha az erő állandó, a gyorsulás is állandó, tehát

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Ha $\frac{ds}{dt} = v$ (sebesség), akkor tehát

$$\frac{dv}{dt} = g,$$

vagyis v olyan függvény, melynek t szerinti diff. hányadosa: g, miből $v = \int g dt$, azaz

$$v = gt + c,$$

tehát
$$\frac{ds}{dt} = gt + c,$$

vagyis s olyan függvény, melynek t szerinti diff. hányadosa: $gt+c$, vagyis:

$$s = \int (gt+c)\,dt, \quad \text{azaz} \quad s = \frac{gt^2}{2} + ct + c_1.$$

Ez a leírt út általános formulája. Teljesen meg lesz határozva az út, ha megmondjuk, hogy egy bizonyos időpontban hol van a mozgó és mekkora a sebessége. Így például, ha $t=0$ pillanatban, tehát időszámításunk kezdetén a pálya kezdetén van, vagyis inkább ettől a helytől számítjuk a pálya hosszát, akkor $t=0$ téve, $s=0$, ami csak úgy lehet, ha $c_1=0$. Ha még azt is tudjuk, hogy a mozgás kezdetén, vagyis $t=0$ pillanatban a sebessége v (fölhajított vagy ledobott test), akkor

$$\frac{ds}{dt}=gt+c$$

-ből következik, hogy $c=v$ és így:

$$s=\frac{gt^2}{2}+vt.$$

b) *Állandó erő hat, de a mozgás ellenálló közegben folyik le.* A most tárgyalt mozgásnál föltettük, hogy az légüres térben megy végbe és így a levegő ellenállása a mozgást nem akadályozza. De általában nem így áll a dolog. Tegyük fel, hogy a működő állandó erő ellenében olyan ellenállás hat, amely a mozgó sebességével arányos. Vizsgáljuk meg, minő törvényszerűsége lesz e mozgásnak? Legyen az állandó erő, amely ebben az s irányban hat: X. Ennek ellenében működik egy, a $\frac{ds}{dt}$ sebességgel arányos ellenhatás: $a\frac{ds}{dt}$ [a arányossági tényező, vagyis az egységnyi sebesség esetében működő ellenhatás]. E kettő eredője $X-a\frac{ds}{dt}$ erő, mely $\frac{d^2s}{dt^2}$ gyorsulást ad a testnek és így Newton törvénye szerint:

$$X - a\frac{ds}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Az ilyen egyenlet, mely összefüggést állapít meg az s függvény diff. hányadosai között: *differenciál-egyenlet* és pedig, minthogy itt a legmagasabb rendű diff. hányados a második, tehát másodrendű diff. egyenlet.

Tegyük egy pillanatra:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \text{akkor} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

és így:

$$m\frac{dv}{dt} = X - av.$$

Ez már valamivel egyszerűbb egyenlet, a v-re nézve elsőrendű diff. egyenlet. Innen:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(X - av)$$

v függvénye a t-nek és t is függvénye a v-nek, azaz $v = v[t(v)]$ innen v szerint differenciálva

$$1 = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dv}, \quad \text{azaz} \quad \frac{dt}{dv} = \frac{1}{\frac{dv}{dt}},$$

tehát

$$\frac{dt}{dv} = \frac{m}{X - av},$$

vagyis t azon függvény, melynek v szerinti diff. hányadosa:

$$\frac{m}{X - av},$$

vagyis:
$$t=\int\frac{m}{X-av}\,dv.$$

Ez az integráczió könnyen elvégezhető. A primitiv függvény ugyanis:

$$-\frac{m}{a}\log(X-av).$$

Valóban ennek a diff. hányadosa:

$$\frac{m}{X-av},$$

tehát
$$t=-\frac{m}{a}\log(X-av)+C.$$

Innen:
$$\frac{m}{a}\log(X-av)=C-t,$$

$$\log(X-av)=\frac{aC}{m}-\frac{at}{m},$$

$$X-av=e^{\frac{a}{m}(C-t)}=e^{\frac{a}{m}C}\cdot e^{-\frac{at}{m}}.$$

Jelöljük az $e^{\frac{a}{m}C}$ állandót ε-nal, akkor tehát

$$X-av=\varepsilon e^{-\frac{at}{m}},$$

$$v=\frac{X}{a}-\frac{\varepsilon}{a}e^{-\frac{at}{m}}=\frac{X}{a}\left(1-\frac{\varepsilon}{X}e^{-\frac{at}{m}}\right).$$

Ha a mozgás kezdetén, vagyis $t=0$ pillanatban, a sebesség $=0$, akkor ($t=0$ téve)

$$0=\frac{X}{a}\left(1-\frac{\varepsilon}{X}\right),$$

tehát $\frac{\varepsilon}{X} = 1$ és így az ε constans ebből meghatároztatott, vagyis ilyen esetben:

$$v = \frac{X}{a}\left(1 - e^{-\frac{at}{m}}\right).$$

Eszerint tehát

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X}{a} - \frac{X}{a} e^{-\frac{at}{m}},$$

vagyis s-nek t-szerinti diff. hányadosa a jobboldali függvény. Ebből

$$s = \int \left(\frac{X}{a} - \frac{X}{a} e^{-\frac{at}{m}}\right) dt =$$

$$= \frac{X}{a} t + \frac{m}{a^2} X e^{-\frac{at}{m}} + C.$$

[amiről differenciálással rögtön meggyőződhetünk]. Ez a formula megadja tehát a leírt utat mint az idő függvényét. Egy igen érdekes következtetést vonhatunk ebből. Ha ugyanis t nő, akkor

$$e^{-\frac{at}{m}} = \frac{1}{e^{\frac{at}{m}}}$$

fogy. És ha t igen naggyá válik, $e^{-\frac{at}{m}}$ igen kicsinnyé lesz és akár el is hagyható; vagyis elég előrehaladt időben már

$$s = \frac{X}{a} t + C,$$

vagyis a mozgás egyenletessé válik, a sebesség állandó.

Tehát ha a mozgóra állandó erő működik is, de a sebességgel arányos ellenállás hat, akkor a mozgás bizonyos idő elteltével egyenletes mozgássá válik, melynek sebessége $\frac{X}{a}$, ahol X a működő állandó erő és a a sebességegység esetében ható ellenállás.

c) *Az ionok mozgása.* Azt mondtuk, hogy igen nagy t idő elteltével bekövetkezik ez az egyenletes állapot; mert az $e^{-\frac{at}{m}}$ igen kicsinnyé válik; de ha m igen kis szám, akkor az $e^{-\frac{at}{m}}$ nagyon hamar válik elhanyagolhatóvá. Így például, ha $m = \frac{1}{1000000}$ és $a = 1$, akkor már 1″ $\frac{1}{10000}$ része után $e^{-\frac{at}{m}} = e^{-100}$ kimondhatatlan kis szám [kisebb 1 septilliónál]. Ha tehát a tömeg igen kicsiny, az ilyen mozgás hamarosan válik egyenletessé. Ilyen az ionok mozgása. Ha a működő állandó elektrom-indító erő X és a az ellenállás, mely igen nagy, akkor minthogy az ionok tömege elenyésző csekély, a mozgás hamarosan egyenletessé lesz, melynek sebessége

$$v = \frac{X}{a}.$$

Az ionok sebessége az elektromos áram intensitását méri, tehát az áram intensitása arányos az elektromos indító erővel és fordítva arányos az ellenállással: az Ohm-féle törvény.

d) *Rezgő mozgás.* Valamely mozgó pontra olyan erő működik, mely arányos a kitéréssel. Ha tehát s

a kitérés, akkor a gyorsulás: $\frac{d^2s}{dt^2}$ és így

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -es$$

[$-e$-t tettük arányossági tényezőnek, mert a gyorsulás a kitérés irányával ellenkező]. Legyen $\frac{e}{m} = \beta^2$ akkor tehát:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\beta^2 s$$

a mozgás differenciálegyenlete. Ebből kell az s-et, mint a t függvényét előállítani.

Az s meghatározása végett így járjunk el. Az s a t hatványai szerint rendezve a következő formájú Taylor sorban állítható elő:

$$s = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots$$

De ha $t=0$ és $s=0$ tehető, azaz ha innen kezdhetjük a kitérést számítani, akkor: $A_0 = 0$

$$\frac{ds}{dt} = A_1 + 2A_2 t + 3A_3 t^2 + 4A_4 t^3 + 5A_5 t^4 + \ldots$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2A_2 + 2.3A_3 t + 3.4A_4 t^2 + 4.5.A_5 t^3 + \ldots$$

és innen az α) alatti differenciálegyenletet tekintetbe véve:

$$2A_2 + 2.3A_3 t + 3.4A_4 t^2 + 4.5A_5 t^3 + 5.6A_6 t^4 + \ldots =$$
$$-\beta^2 [A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4 + \ldots].$$

A t hatványainak együtthatói egyenlők. Ebből következik, hogy:

$$A_2=0.$$

$$\begin{array}{llll}
2.3.A_3=-\beta^2A_1; & \text{vagyis:} & A_3= & -\dfrac{\beta^2A_1}{2.3} \\
3.4.A_4=-\beta^2A_2=0 & « & A_4= & 0 \\
4.5.A_5=-\beta^2A_3=\dfrac{\beta^4A_1}{2.3} & « & A_5= & \dfrac{\beta^4A_1}{5!} \\
5.6.A_6=-\beta^2A_4=0 & « & A_6= & 0 \\
6.7.A_7=-\beta^2A_5=-\dfrac{\beta^6A_1}{5!} & « & A_7= & \dfrac{\beta^6A_1}{7!}
\end{array}$$

s. i. t.

Látjuk, hogy minden páros együttható 0, és a páratlanok sorban:

$$A_1, -\frac{\beta^2A_1}{3!}, \quad \frac{\beta^4A_1}{5!}, \quad -\frac{\beta^6A_1}{7!}, \quad \frac{\beta^8A_1}{9!}\dots$$

vagyis:

$$s(t)=A_1\left[t-\frac{\beta^2t^3}{3!}+\frac{\beta^4t^5}{5!}-\frac{\beta^6t^7}{7!}\dots\right]$$

ami így is írható:

$$s(t)=\frac{A_1}{\beta}\left[(\beta t)-\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t^5)}{5!}-\frac{(\beta t)^7}{7!}\dots\right]$$

A zárójelben álló kifejezés: $\sin\beta t$ (L. 111. lapon) és ha $\frac{A_1}{\beta}$ helyett A betűt írunk:

$$s=A\sin\beta t.$$

A t idő alatt leírt útat meghatároztuk.

Összefoglalás. Ebben az előadásban inkább ízlelítőül, mint rendszeres foglalkozásul meg akartam ismertetni tisztelt hallgatóimat a felsőbb mathesis igazi magas rendeltetésével. Miként már a syllabusban említettem, a mathematikai tünemények és tények egész seregének összefoglalásával ismereteinket rendezi, abstract fogalmaink alkotására módszereket szolgáltat, rendet és törvényszerűséget állapít meg azzal, hogy a változásokat grafikusokon feltünteti és formákba foglalja. Azután pedig a törvényszerűséget vizsgálat alá veszi, a változás sebességének, a változás gyorsaságának, szóval lefolyása módjának pontosabb megállapításával magát a változást teszi tanulmánya beható tárgyává, tehát azt, amely már *Herakleitos* szerint a világ ős principiuma. A differenciálhányadosok, a szélső értékek vizsgálata stb. mind voltaképpen a változás titokzatos világában lebbentenek fel egy-egy, nem mathematikus elmének örökre hozzáférhetetlen fátyolt. De a legérdekesebb a felsőbb mathesisnak éppen azon alkalmazása, amellyel vázlatosan ezen előadásokban foglalkoztunk: a változás egy-egy jellemző tulajdonságából (sebességéből, vagy gyorsulásából) magának az egész változásnak a lefolyását számítottuk ki: multra és jövőre következtethettünk egy-két jellemző tulajdonságból. A mathesis a multba és jövőbe látás eszközévé lett. Miként a szemet a távcső és a górcső megsegíti, hogy a térnek olyan részeit is láthassa, amelyek fegyvertelen szem előtt rejtve voltak, úgy a mathesis fölfegyverzi az elmét, hogy az időnek és a térnek olyan részeiben lássa a tünemények lefolyását, amelyekbe a közönséges logikai módszerekkel csak igen igen nehezen, vagy egyáltalában nem láthatna.

24. *Történeti áttekintés.* Nem akartam eddig a tárgyalás menetét a történeti áttekintéssel megzavarni; már csak azért sem, mert a fogalmak ismerete nélkül a tudomány fejlődése iránt érdeklődésre nem számíthattam volna. Most is csak igen röviden akarok ráutalni a fejlődés menetére.

Tárgyalásunk folyamán láttuk, hogy különösen háromféle probléma volt az, mely a felsőbb mathesisben dominál: a görbe vonal érintőjének meghatározása, a függvények maximuma és minimuma és a terület, köbtartalom és az ívhosszúság számítása. E háromféle feladat, különösen az első és utolsó voltaképpen oly régi, mint maga a mathematikai gondolkozás. Legelőször a gyakorlati szükség folytán, mely a mathematikának is, mint minden más tudománynak szülője, a harmadik lépett fel. Nem szólunk az egyenes vonalú idomok területéről, mely az elemi geometria módszereivel megoldható, csupán a görbevonalú idomok területére gondolunk. *Archimedes* (Kr. e. 287—214), *Eudoxus* (Kr. e. 408—355) finom geometriai módszereire támaszkodva, már meghatározza a parabola, a spirális, a kúpszeletek területét, a henger, a kúp, a gömb felületét, a gömb és ellipsoid köbtartalmát. Az eljárása alig különbözik attól, amit ma a határozott integrálok kiszámításánál végzünk, amelynek egy-két példáját ismertettük. De már az érintő problémáját is tárgyalták a görög mathematikusok. *Apollonius* (Kr. e. 260—200) a kúpszeletek érintőinek a megszerkesztését alaposan és behatóan ismerteti. De meg kell jegyeznünk, hogy az érintő fogalmát a kör érintőjének fogalmából alkották meg a görög tudósok és érintő alatt azt az egyenest értették, melynek egy pontja közös a görbével és egyébként egészen a görbén kívül halad. *Pappus* (Kr. u. III. század) már maximum-minimum számításokat is végez egyes esetekben.

E három lángeszű tudós tehát a felsőbb mathematika voltaképpeni megalapítója *Eudoxussal* egyetemben, aki a mathematika legfinomabb fogalmának, a határérték fogalmának megteremtője.

De mint a mathematikai tudományok minden ágában, itt is, a görög mathesis csak egyes speciális kérdésekkel foglalkozott és minden egyes feladat megoldása e feladatnak megfelelő módszert igényelt. Általános tételekhez, általános, az esetek nagy körét felölelő eljárási módszerekhez nem igen emelkedtek. Ennek oka kétségkívül abban van, hogy nem volt olyan egységes, könnyen kezelhető és a geometriai viszonyokhoz alkalmazkodó nyelvük, mint amilyennel ma az algebrában rendelkezünk.

A legcsodálatosabb a görög mathematikában éppen az, hogy olyan fogyatékos nyelvvel oly behatóan tárgyalták a problémákat és az ő nehézkes kifejezésmódjukkal olyan mélyre tudtak hatolni.

Épen olyan csodálattal tekintjük a fogalmak kifejezéseinek nehézségeivel küzködő görög tudóst, aki tisztán belső mathematikai szemlélettel kénytelen operálni, mint azt a görög művészt, akinek a perspectiva egyszerű és könnyen kezelhető szabályai nem állnak rendelkezésére és tisztán fantáziájának erejével alkotja meg azokat a remek szobrokat és épületeket, melyek bárhonnan tekintve is, a legtermészetesebb és arányaikban a legszebb képet nyújtják.

Hogy minő nehézkes volt a kifejezésmódjuk, annak illusztrálására például megemlítem, hogy *Diophantos*, (Kr. u. IV. század) az algebra tulajdonképpeni megteremtője, aki az ismeretlen mennyiségre külön jelet vezetett be, az ismeretlen hatványait is külön jelekkel ábrázolta; így például (latin átdolgozásban) az ismeretlenre az N (numerus), az ismeretlen négyzetére a Q (quadratum) a köbére a C (cubus) betűt használva s így például a

$$3x^6+4x^5+7x^4+9x^3+12x^2+3x+5$$

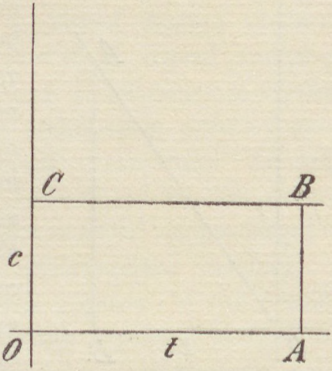
kifejezést így írták volna (a coefficienst mindig hátul írták)

$$CC3QC4QQ7C9Q12N3U5$$

és ha negativ tagok is voltak a kifejezésben, ezeket külön írták bizonyos jellel. E nehézkes nyelv szinte lenyügözte a gondolatot és általános tárgyaláshoz emelkedni nem igen engedte még a legkiválóbb tudósokat sem.

A mathematikai nyelv fokozatos fejlődése a tárgyalható problémák körét is fokozatosan kibővítette. A mathematikai felfogás megkönnyítésére különösen fontos volt a koordináták alkalmazása a változások grafikus feltüntetésére. Már említettük *Oresmes*-nek

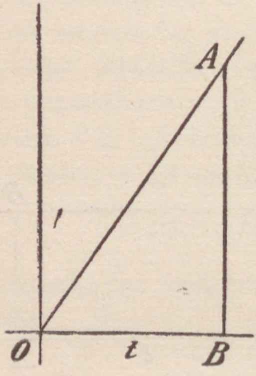
De latitudinibus formarum című értekezését, mely a grafikus ábrázolás kezdetének tekinthető. A XIV. századtól egészen a XVI-ikig az egyetemeken tanították e módszert. Ha például a mozgó pont sebességét akarjuk ábrázolni, akkor az időt az abscissa tengelyen mérjük és a sebességet az ordinátával ábrázoljuk. Ezen ábrázolással az egyenletes mozgásnak egy, az abscissa tengellyel párhuzamos egyenes felel meg, az egyenletesen gyorsuló mozgásnak pedig egy ferde egyenes, másnemű mozgás sebességének egy görbe vonal. *Galilei* (1564—1642) észrevette, hogy ugyanez a grafikus ábrázolás nemcsak a sebességet, hanem a leírt útat is ábrázolja. Ha ugyanis egyenletes a mozgás, melynek sebessége c, akkor c távolságban az x tengelytől vonul a sebességet ábrázoló, az x tengelylyel párhuzamos egyenes, a sebesség formája. (36. ábra.)



36. ábra.

A t idő alatt leírt útat pedig azon derékszögű négyszög *területe* ábrázolja, melyet az x tengely, a sebességforma, az Y tengely és a t távolságban húzott ordináta bezárnak, az $OABC$ derékszögű négyszög területe. Ez a terület ugyanis ct; a t idő alatt leírt út. Ha pedig a mozgás egyenletesen gyorsuló, akkor a *t* idő alatt leírt út $\frac{gt^2}{2}$, vagyis éppen az *OAB* háromszög területe. (37. ábra.)

A koordinaták módszerének tulajdonképpeni rendeltetését *Descartes* (1596—1650) lángesze ismerte fel, midőn a görbe vonalat azzal jellemezte, hogy minden egyes pontjának abscissája és ordinátája között minő összefüggés áll fenn. Ezzel megteremtette az analytikai geometriát, a mathematikai gondolkozás legkiválóbb és legproductivebb alkotását. Ezzel a geometria is számító tudománynyá lett. A görbe vonal valamely jellemző tulajdonságát az x és y közötti egyenlet által fogalmazta, mint azt néhány példán láttuk és ezen egyenletből, a görbe vonal egyenletéből, az illető görbe más tulajdonságait tisztán számítással lehetett leszármaztatni. Igazi typusa lett a geometriai tudomány minden tudományos gondolkozásnak: egyetlen jellemző tulajdonságból a többit úgy kapjuk meg, mintha csak egy gombolyagot kellene legombolyítanunk.



37. ábra.

Az analytikai geometria módszereivel fogtak hozzá a XVII. század mathematikusai azon feladatok megoldásához, amelyeket a régiek tárgyaltak: a területszámításhoz, a maximum és minimum számításához és az érintő problémájához.

A $\int x^2 dx$, $\int x^3 dx$ integrálok kiszámítása, vagyis a másodrendű és harmadrendű parabola területének meghatározása az Archimedes által követett úton hamarosan egyszerűbb és áttekinthetőbb formát öltött. *Roberval* (1602—1675) és különösen a XVII. század legzseniálisabb mathematikusa: *Fermat* (1601—1665) már általában az $\int x^n dx$-et is kiszámítja még pedig nemcsak pozitiv egész n kitevő, hanem törtkitevő esetében is. *Pascal* (1623—1662) sokkal complicáltabb integratiókat és terület- és köbtartalom-számításokat is végez mindig az archimedesi primitiv összegezési formulákhoz hasonló eszközökkel. Az angol *Wallis* (1616—1703) e módszereket kibővíti és iparkodik a régi görög mathematikai szigorúságot az összegező formulák megállapításába bevinni. Az integrálszámítás ily módon teljesen elő volt készítve. Csakhogy még nem állottak egységes módszerek a mathematikusok rendelkezésére, esetről-esetre kellett megfelelő összegezési eljárást alkalmazniok.

Ugyanígy állt a dolog az érintő problémájával. *Galilei* tanítványa *Torricelli* és vele egyidőben *Roberval* a mozgások összetétele alapján állapították meg a görbe érintőjének irányát. Ha ugyanis — így okoskodott Torricelli — a mozgó pont a vízszintes irányban v_1, a függélyesben pedig v_2 sebességgel mozog (azaz a sebesség vízszintes componense v_1, függélyes componense pedig v_2), akkor az érintő irányhatározója: $\frac{v_2}{v_1}$. Ilyen módon sikerült e két tudósnak a parabola és más, egyszerűbb mozgási pályák érintőinek a meghatározása. Bonyolultabb esetekben azonban, midőn a mozgó pont sebességének a két componensét nem lehetett meghatározni, már eljárásuk nem vezetett célhoz. Talán éppen ezért már *Descartes* és különösen *Fermat* más módszert eszeltek ki az érintő irányának megállapitására. Meghatározta az adott görbének egy, a görbe adott pontján átmenő ismeretlen m irányhatározóju egyenessel való metszéspontjainak kiszámitására szolgáló egyenletet és azt kérdezte, hogy ennek az egyenletnek két gyöke mikor esik össze az adott pontban? Ha e pontba két metszőpont esik, akkor az egyenes a görbe érintőjévé válik. Így például, ha a szóban forgó görbe az $x^2+y^2=25$ kör, melynek egyik pontjának abscissája: 4, ordinátája 3 (mert $4^2+3^2=25$), akkor e ponton átmenő egyenes egyenlete: $y-3=m(x-4)$ és ennek az adott körrel való metszéspontjaira következő egyenletet kapjuk: $[3+m(x-4)]^2+x^2=25$, vagyis rendezve:

$$x^2(1+m^2)+mx(6-8m)+16m^2-24m-16=0.$$

Ennek az egyenletnek akkor lesz két egyenlő gyöke, ha a diskriminansa 0, azaz, ha

$$m^2(6-8m)^2-4(1+m^2)(16m^2-24m-16)=0.$$

Ha ezt kiszámítjuk, azt találjuk, hogy nem egyéb, mint $(6m+8)^2$; tehát akkor lesz két gyök egyenlő, ha $m=-\frac{4}{3}$ és így azon pontban, melynek abscissája 4, ordinátája 3, az érintő egyenlete: $y-3=-\frac{4}{3}(x-4)$. Ilyenfajta gondolatmenetet követett Descartes az érintő meghatározásánál; (voltaképpen nem is egyenest, hanem kört helyezett az adott ponton keresztül). *Fermat* már egyenesebben, természetesebben ment neki a problémának: éppen úgy, ahogy manapság tesszük. Azt mondta, hogy ha a görbe egyenlete: $y=f(x)$, akkor az $x+h$ abscissához tartozó ordináta: $y+k=f(x+h)$; tehát $k=f(x+h)-f(x)$ és az x, meg az $x+h$ abscissájú pontokon átmenő szelő egyenes irányhatározója: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Ha h zérussá lesz, akkor a szelőből érintő válik, tehát megkapta az érintő irányhatározóját. Ez már a differenciálhányados értelmezése volt és ilyen módon igen sok esetben kitudta számítani az érintő irányát, vagyis igen sok esetben tudott differenciálni.

Rámutattam arra, hogy a harmadik nevezetes feladat, mellyel a mathematikusok régóta foglalkoztak: a maximum, minimum számítása. Ebben a tekintetben is új szempontokat vittek be a tárgyalásba a modern mathematika előkészítői, különösen *Kepler*, (1571—1630) akiről tudjuk, hogy a végtelen kicsiny elemnek a geometriai elmélkedéseiben oly nagy szerepet juttatott. *Kepler* észrevette, hogy a görbe vonal a tetőpontja körül igen lassan változik, a tetőponton mintha megállapodnék (pl. mint a fölfelé hajított kő a pályája legmagasabb pontján), vagyis, mint ha két végtelen közel levő abscissának egyenlő ordináták felelnének meg. Ezt a *Kepler*-féle felfogást szabatosabb, mathematikai formába öltöztette *Fermat*, aki az $f(x)$ függvény maximális helyét ilyenféleképpen határozta meg: kereste azt az x értéket, amelyre nézve

$$f(x+h)=f(x),$$

vagyis

$$f(x+h)-f(x)=0.$$

Azután $h=0$ tette. Így például, ha azt kívánta, hogy $x(1-x)$ maximális legyen, akkor kereste azt az x értéket, amelyre nézve:

$$(x+h)(1-x-h)=x(1-x),$$

vagyis:

$$h-2hx+h^2=0.$$

Innen:

$$x=\frac{h+h^2}{2h}=\frac{1}{2}+\frac{h}{2},$$

tehát az $x(1-x)$ az $x=\frac{1}{2}+\frac{h}{2}$-nél ugyanakkora, mint a h-val messzebb levő $\frac{1}{2}+\frac{3h}{2}$ helyen. Ha $h=0$, akkor azt kapja, hogy $x=\frac{1}{2}$ értéknél az $x(1-x)$ maximális értékű. Nagyon könnyen átalakította *Fermat* ezt a *Kepler*-féle gondolatmenetet oly módon, hogy megállapíthatta a maximum-minimum azon kriteriumát, amelyet már ismerünk, hogy az $f(x)$ differenciálhányadosa 0 legyen, vagyis az érintő az illető pontban az abscissa tengellyel párhuzamos legyen. Még a görbe fordulópontjainak a meghatározására is alkalmazta a maximumszámítás ezen módját. Azt kereste, hogy az érintő hajlásszöge mikor éri el a maximumát; mert ekkor a hajlásszög ismét csökkenni kezd, vagyis az érintő visszafordul. A mai fogalmazásban ez azt jelenti, hogy az érintő hajlásszögének tangense: $\frac{dy}{dx}$ lévén, ennek maximuma csak ott lehet, ahol ennek a differenciálhányadosa: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Forduló pontja a görbének tehát csak ott lehet, ahol a második differenciálhányados eltünik.

Látjuk ezekből, hogy minő helyes fogalmakat alkotott magának *Fermat* a területről, az érintőről és a maximumról, minimumról. Úgy szólván, minden együtt volt már, ami a differenciál- és integrálszámítás, az angolok által egyszerűen Calculusnak nevezett új tudomány felépítéséhez szükséges volt; de még két dolog hiányzott: először, a két alapproblémának, a területszámítás és az érintővonás kapcsolatának felderítése és másodszor egységes, általános módszerek és hozzá tehetjük még a Calculus universalis nyelvének, jelöléseinek és műveleteinek összefoglaló megállapítása.

A két alapprobléma kölcsönös vonatkozását *Barrow* (1630—1677) Newton tanára és barátja ismerte fel először, kimutatva, hogy ha $y = \int f(x)\,dx$, akkor mai jelölésben:

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Barrow ezt ilyenféleképpen fejezte ki: Ha megrajzolom az $y = f(x)$ görbét és rajzolok ehhez egy másik görbét, melynek az x abscissához tartozó ordinátája azon trapézalakú területrész mértékszáma, melyet az előbbi görbe, az x tengely, az x abscissához tartozó ordináta és egy tetszés szerinti más ordináta alkotnak, akkor ezen új görbének az x abscissához tartozó pontjában húzott érintőjének irányhatározója: $f(x)$. Talán ez volt az első általánosan fogalmazott tétel, mely minden fajta görbére vonatkozott. *Descartes*, *Fermat* és az előző mathematikusok a görög mathematikai szellemben még mindig a speciális problémát tartották szem előtt, a speciális görbék tulajdonságaival foglalkoztak és általános tételekhez nem igen emelkedtek.

Ekkor lépett fel az a férfiú, akit *Laplace* a világon a legnagyobb lángésznek nevezett: *Newton* (1642—1727). Benne összpontosult minden, amit előtte élő mathematikusok alkottak. A Calculus tulajdonképpeni megteremtőjének őt mondhatjuk; mert egyrészt a fogalmakat általános, egységes szempontból alkotta meg, másrészt olyan universalis módszerrel rendelkezett, mellyel rohamlépésekben vehette be azokat a várakat, melyeket lángeszű elődei csak óriási szellemi erőfeszítéssel közelítettek meg. Ő a mennyiségeket, melyekkel e Calculusban operált, változóknak, *fluenseknek* tekintette. Mintha az idővel változnék mindegyik. Az idő a független változó, a többbi ezzel együtt változik. A változás sebessége volt a *fluxio*. Ha például az x, y egy görbe pontjainak koordinátái voltak, akkor úgy képzelte, hogy x a t idővel egyenletesen változik, a sebessége, a fluxiója: 1 és akkor az y változási sebességére nézve mindegy, akár a t a független változó, akár az x. A fluens az, amit ma függvénynek mondunk, a fluxio pedig a differenciálhányados. A fluxiók meghatározására igen sok eljárást ismert, melyek a Fermat-féle gondolat alkalmazásai voltak. És míg egyrészről a fluxio meghatározásával az érintő problémáját oldotta meg igen sok esetben, addig fordítva az érintő megadott tulajdonságaiból a fluensre, a görbére tudott következtetni, tehát egész sereg differenciálegyenlet megoldásával foglalkozott. Fő eszköze, fő módszere a függvények sorbafejtése volt, melyet az $(1+x)^n$ mintájára rendszeresen alkalmazott, mint már előtte és vele egyidőben *Mercator* és *Gregory* tették.

Módszerének igen sok alkalmazását mutatta meg a geometriában, az egyenletek megoldásában és főként a fizikai számításokban. Birtokában volt nagy horderejű módszerének, de nem közölte nyomtatásban. Barátaihoz írt leveleiben ismertette e módszereket és előadásairól szóló kézirataiban tartogatta őket. Miért tette ezt, nem tudjuk. Valószínűleg túlságos szerénységből és félénkségből. Mások érdemeit mindig elismerte, a magáét soha sem becsülte túl. «Ha messzebb látott, mint más ember», mondá, «az csak azért van, mert óriások vállán állott.» A maga működéséről pedig így nyilatkozott: «Nem tudom, minek látszom a világ előtt, de magam előtt úgy tűnök fel, mint a gyermek, aki a tenger partján játszva és szórakozva egyszer-másszor szebb kavicsot, értékesebb kagylót találtam, mint rendesen, de az igazságok nagy óceánja földerítetlen terül el előttem».

Newtonnal egy időben alkotta meg a Calculust *Leibniz* (1646—1716), a nagy német philosophus. Sokkal korábban közölte módszerét, mint Newton, úgy hogy a szokás és forma szerint voltaképpen őt kell a Calculus megteremtőjének mondanunk. De minthogy valóságban Newton már a Leibniz-féle néhány lapra terjedő értekezésnek 1684-ben történt megjelenése előtt majdnem mindazokat a számítási eljárásokat használta, amelyek a Leibniz-féle értekezésben szerepelnek, nem lehet a merev formális álláspontra helyezkedni. Egész irodalma van a prioritás kérdésének: a Newton párt és Leibniz párt elkeseredett tollharcot folytatott, melyben igen nagy szerepe volt a nemzeti büszkeségnek és hiúságnak is. Leibniznek mindenesetre az az elévülhetetlen fényes dicsősége van, hogy a differenciál- és integrálszámítás általános alapszabályait könnyen kezelhető formába öltötte, megállapított olyan eljárásokat, olyan algorithmust, amelyekkel az eddig esetről-esetre alkotott, minden egyes speciális viszonynak megfelelő módszereket pótolhatta és mellyel olyan problémákat is egész könynyűséggel lehetett megoldani, aminők az általános módszerek hiányában eleddig megoldhatatlanok voltak. Az a hat lap, melyen a differenciál- és integrálszámítás alaptételeit összefoglalta és melyen még néhány fontos alkalmazását is bemutatta, igen tömör, nehezen olvasható volt. Csak a beavatottaknak nyitott meg egy egész új világot. *Huygens* (1629—1695) minden idők egyik legkiválóbb mathematikusa, azt írja Leibniznak értekezése megjelenése után hat évvel, hogy időről-időre foglalkozott az új algebrai számításaival, de homályosnak találta és így nem tanulmányozta annyira, hogy megérthette volna, annál kevésbbé, mert neki magának is vannak hasonló módszerei a görbék érintőinek megalkotására olyan esetekben is, mikor a közönséges eljárások nem alkalmasak, vagy csak igen nehezen alkalmazhatók. — Két hónappal később ezt írja: Utolsó levelem óta iparkodtam megérteni a differenciális Calculust és annyira vagyok, hogy értem, de csak két nap óta, azokat a példákat, melyekre alkalmaztatik és felismertem a számítás alapját és az egész módszert, melyet igen jónak és nagyon hasznosnak tartok. Végre három évvel később, 1693-ban, azt írja: Ön tudja Uram, hogy magam is némi sikereket értem el az Ön kitünő differenciális számításában, melynek hasznosságát mindinkább élvezem.

Ilyen fokozatosan hatolt be Leibniz alkotása a mathematikus világ köztudatába. Alkalmazásainak sokfélesége és fontossága biztosított neki örök életet. Ezen alkalmazások között a legfontosabbak éppen azok, melyek Newton munkáiban szerepelnek, aki bár egész más jelölésekkel, egész más nyelvvel, ugyanazon fogalmakkal operál, mint német kortársa.

Leibniz és a korabeli mathematikusok abban a meggyőződésben voltak, hogy végleges formába öntötték mindazt, ami az ókori mathematikusoktól rájuk maradt problémák megoldásához szükséges és ezentúl a speciális módszerekkel nem kell vesződniök: idejüket és erejüket fokozottabb mértékben szentelhetik a természeti jelenségek kutatásának. Tévedtek; mert éppen a természeti jelenségek végtelen változatossága új, eddig nem is sejtett problémákat állított a mathematikus elé.

A Calculus megalapítói elkészítették a szerszámot, mellyel a természet kutatása intensívebben megindulhatott. Közben magát a mathematikai elemeket is új meg új vizsgálatnak kellett alávetni, a szerszámot élesíteni és az új problemáknak megfelelően a mathematika körét bővíteni kellett. *Euler* (1707—1783), a legproductivebb kutató, a mennyiségtan minden ágát műveli, a physika új meg új problemáit veti mathematikai vizsgálat alá; *Lagrange* (1736—1813) a mathematikai physika legfontosabb részének, az analytikai mechanikának megalapítója, *Gauss* (1777—1855) a princeps mathematicorum, az új *Euler*, aki a mathesis körét óriási módon kiterjeszti de egyúttal pontosságát, megbizhatóságát is fokozza. *Cauchy* (1789—1857) a francia *Gauss* a mathematika és elméleti physika majdnem minden részében alapvető új vizsgálatokat végez, *Riemann* (1826—1866), *Dirichlet* (1805—1859), *Abel* (1802—1829), *Jacobi* (1804—1851), *Weierstrass* (1815—1897) és *Hermite* (1822—1901) megszabják az ő szellemes, mélyen alapozó, a részletes vizsgálatokat összefoglaló általános elméleteikkel a mathematikai kutatás modern irányait.

25. *Befejezés.* És most befejezésül szives elnézést kérek az igen tisztelt hallgatótól, illetőleg olvasótól azért, hogy ilyen hossú, rögös mathematikai utat járattam meg vele. *Euklides*ről jegyzi fel a monda, hogy

Ptolemeus király akart nála geometriát tanulni; de csakhamar nehéznek tartotta a tudós görög fejtegetéseit és kérte, hogy kényelmesebb úton haladjon vele. Erre Euklides kijelentette, hogy királyi út nem vezet a geometriához. Eszembe jut, hogy egyszer Svájcban utazva hallottam, amint a praktikus svájci polgárok a vasúton azt fejtegették, hogy voltaképpen a gyorsvonatnak olcsóbbnak kellene lennie, mint a személyvonatnak; mert a gazdag embernek elég ideje van, az utazhatik személyvonaton is, de a szegény embernek drága az ideje, annak való a gyorsvonat. Tudom, hogy Önöknek, akik ez előadásokat hallgatták, illetőleg olvasták, szintén igen drága az idejük, joggal várhatták tőlem, hogy gyorsvonaton haladjak; de sajnos, amint Euklidesnek azt kellett mondania, hogy királyi út nem vezet a geometriához, minden mathematikus tanítónak ma, a demokratikus világban azt kell mondania, hogy gyorsvonaton nem lehet eljutni a felsőbb mathesis birodalmába. De higyjék meg tisztelt hallgatóim, kár is volna így haladni: falvak és városok is elrobognának előttünk és nem láthatnók meg a szebbnél szebb tájakat, nem gyönyörködhetnénk a természet remekeiben és nem látnók az emberóriások örökbecsű szellemi alkotásait. Így talán, kissé lasabban haladva, betekinthettünk olyan helyekre is, amelyektől nem azzal távozunk, hogy «Isten veled», hanem azzal, hogy «Viszontlátásra».

TARTALOM.

I. Előadás.

Lap

1. Empirikus függvények. Grafikus ábrázolás … 9
2. Az állapot mathematikai feltüntetése. Math. kifejezések geom. ábrázolása … 13
3. Görbe vonalak egyenletei … 33

Összefoglalás. Feladatok … 39

II. előadás.

4. A görbe emelkedése és sülyedése. A differenciálhányados … 42
5. Differenciálhányadosok kiszámítása … 47
6. Következtetés a diff.-hányados jeléből a görbe haladására … 53
7. Néhány differenciálási szabály … 54
8. Néhány függvény differenciálása … 60

Összefoglalás. Feladatok … 64

III. előadás.

9. A differenciálhányados jelentése … 67
10. A magasabbrendű diff.-hányadosok … 73
11. Következtetés a görbe menetére a második diff.-hányadosból … 75
12. A függvény maximuma és minimuma. Példák … 76

Összefoglalás. Feladatok … 97

IV. előadás.

Lap

13. A végtelen sor ... 101
14. A függvény sorbafejtése ... 108
15. Egy igen nevezetes határérték: *e* ... 121
Összefoglalás. Feladatok ... 126

V. előadás.

16. Területszámítás, A primitiv vagy integrál függvény ... 132
17. A területszámítás más módja. A határozott integrál 141
18. Nehány fontos integrál kiszámítása. Alkalmazás a területszámításra ... 148
19. Testek köbtartalma ... 156
20. Az ívhosszúság kiszámítása ... 161
21. Tömegközéppont meghatározása ... 169
22. Tehetetlenségi nyomaték meghatározása ... 175
Összefoglalás. Feladatok ... 179

VI. előadás.

23. Az integrálszámítás további alkalmazása. Differenciálegyenlet ... 184
Összefoglalás ... 192
24. Történeti áttekintés ... 194
25. Befejezés ... 208

Franklin-Társulat nyomdája