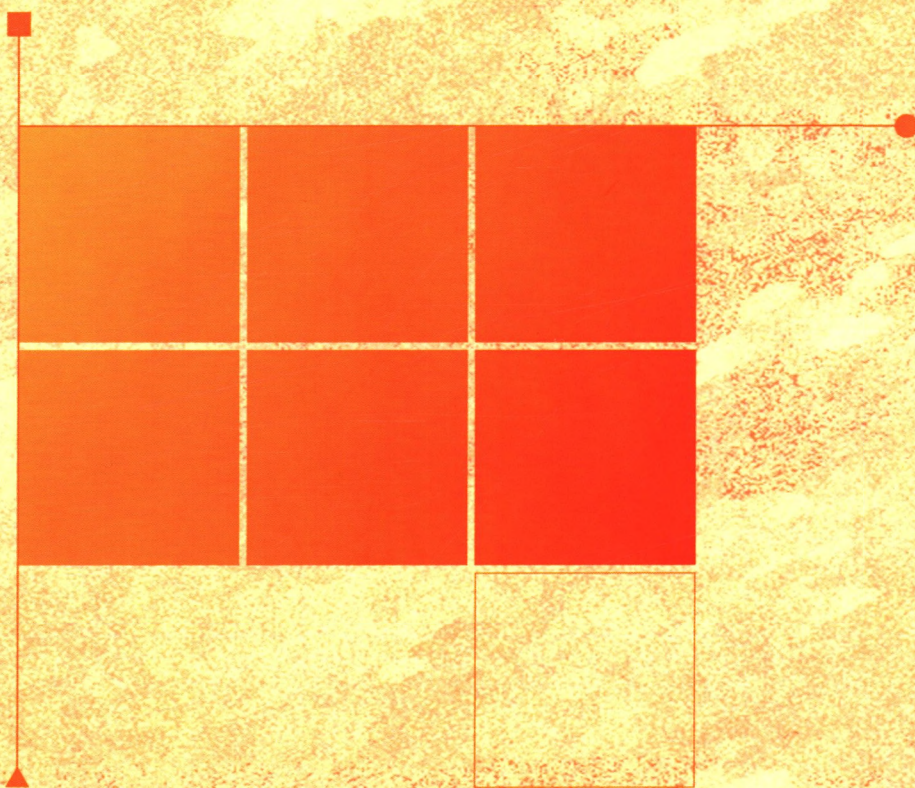


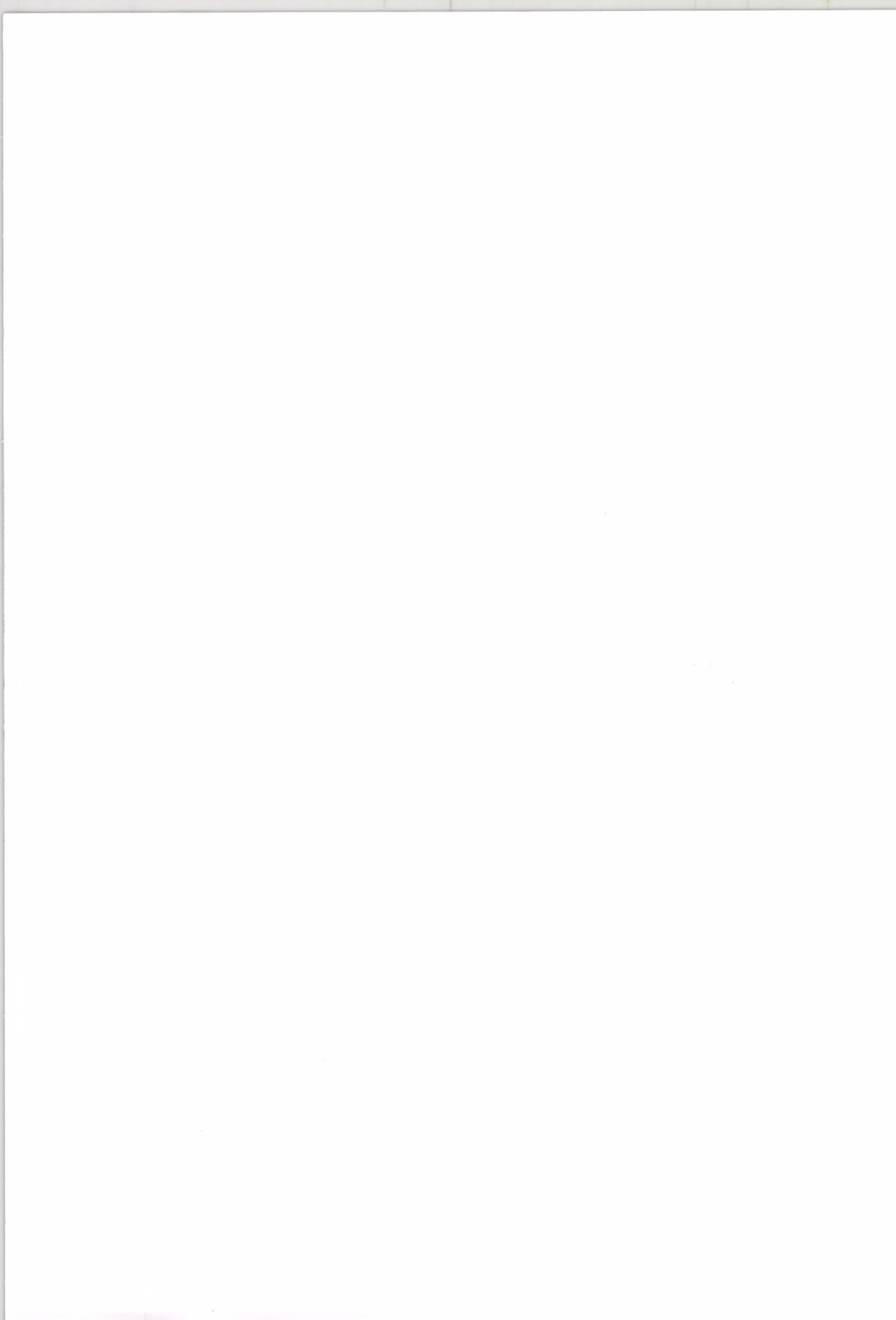
VÁLOGATOTT FEJEZETEK AZ ELMÉLETI FŰTÉSTECHNIKA KÖRÉBŐL



Bánhidi László • Garbai László

Hőátvitel, hidraulika, hőkomfort

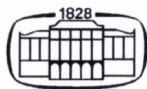
Válogatott



VÁLOGATOTT FEJEZETEK
AZ ELMÉLETI FŰTÉSTECHNIKA KÖRÉBŐL

Dr. Bánhidi László–Dr. Garbai László

VÁLOGATOTT FEJEZETEK
AZ ELMÉLETI FŰTÉSTECHNIKA
KÖRÉBŐL



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST, 2008

Megjelent a Magyar Tudományos Akadémia
Könyv- és Folyóirat-kiadó Bizottsága támogatásával

Szerzők

DR., DR. HC. BÁNHIDI LÁSZLÓ
DR. HABIL. GARBAI LÁSZLÓ
egyetemi tanár

Lektorálta

REMÉNYI KÁROLY
akadémikus

Társszerzők

BARTAL IMRICH okl. gépészmérnök
I–III. függelék
MÉHES SZABOLCS okl. gépészmérnök
I–III. függelék

ISBN 978 963 05 8598 9

Kiadja az Akadémiai Kiadó,
az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja
1117 Budapest, Prielle Kornélia u. 19.
www.akademiaikiado.hu

Első magyar nyelvű kiadás: 2008

© *Bánhidi László–Garbai László*, 2008

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a nyilvános előadás,
a rádió- és televízióadás, valamint a fordítás jogát,
az egyes fejezeteket illetően is.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó Zrt. igazgatója
Szerkesztette: Sente László
Felelős szerkesztő: Tárnok Irén
Termékmenedzser: Egri Róbert
A nyomdai munkálatokat a PXP Első Magyar Digitális Nyomda Rt. végezte
Felelős vezető: Ratkovics Péter
Budapest, 2008
Kiadványszám: KM070104
Megjelent 43,62 (A/5) ív terjedelemben

Printed in Hungary

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés. A fűtéstechnika elméleti kérdései	11
1. A fűtött terek hőigényének számítása	13
1.1. A hőigények valószínűségelméletének vizsgálata	14
1.1.1. A fűtési hőigény valószínűségi jellege	14
1.1.2. A mértékadó (névleges, maximális) fűtési hőigény tervezése	16
1.1.3. Két valószínűségi változó összege	17
1.1.4. Két valószínűségi változó szorzata	19
1.2. Egy fűtési fogyasztó hőigényének bizonytalansága, a valószínűségeloszlás meghatározása	25
1.3. Az egyidejű fűtési hőigények meghatározása a fogyasztók csoportjára	30
2. Hőátvitel a fűtött terek határoló szerkezeteiben	32
2.1. Az időben állandósult hőterjedés alapeseteinek elméleti összefoglalása	32
2.1.1. Hővezetés	33
2.1.2. Számítási eljárások egy- és többretegűből álló szerkezetekben végbemenő hővezetésre hőmérséklettől függő hővezetési tényező esetében	39
2.1.3. Hőátadás	58
2.1.4. Hősugárzás	66
2.1.5. Hőátvitel	67
2.2. Instacionárius hőátvitel a fűtött terek határoló szerkezeteiben	68
2.2.1. A hővezetést leíró differenciálegyenletek	68
2.2.2. Peremfeltételek	69
2.2.3. A hővezetés differenciálegyenletének néhány partikuláris megoldása	72

2.2.4.	Tranziens problémák elhanyagolható felületi hőátadási ellenállás esetén. Elsőfajú peremfeltétel	76
2.2.5.	Tranziens problémák véges felületi hőellenállás esetében (harmadfajú határfeltétel)	101
2.2.6.	Falakban terjedő hőmérséklethullámok	136
3.	Egyszerű tranziens problémák	151
3.1.	Tartályban tárolt közegek fűtése vagy hűtése	151
3.1.1.	Gőzfázist nem tartalmazó telítetlen folyadék vagy gáz	151
3.1.2.	Gőzfázist tartalmazó telített folyadék	154
3.2.	Csőben áramló összenyomható közeg lehűlése	163
3.2.1.	Telített gőz lehűlése	163
3.3.	Folyadékkal töltött tartályok tranziens jelenségei	165
3.4.	Egyszerű alakú szilárd testek lehűlése és melegedése	170
4.	Sugárzófűtések elmélete és méretezése	175
4.1.	Sugárzófűtések osztályozása és hőleadása	175
4.1.1.	Sugárzó fűtőberendezések osztályozásának alapjai	175
4.1.2.	Különböző helyzetű és megoldású sugárzó fűtőtestek hőleadása	177
4.2.	Kis felületi hőmérsékletű sugárzófűtések	188
4.2.1.	Méretezés a lineáris hővezetés alapján	188
4.2.2.	Betonrétegbe ágyazott csősor hőközlése x-y (síkbeli) hővezetés esetén	204
4.3.	Közepes felületi hőmérsékletű (70-200 °C) sugárzófűtések	213
4.3.1.	Kollmar számításmódszere	223
4.4.	Magas hőmérsékletű és kis hőtehetetlenségű sugárzófűtések	225
4.4.1.	Általános ismertetés	225
4.4.2.	Gázüzemű sugárzó fűtőtest	227
4.4.3.	Villamos hősugárzók	228
4.4.4.	Olajüzemű infravörös sugárzók	229
4.5.	Sugárzófűtések hőérzeti méretezése	229
4.5.1.	Az emberi test hőegyensúlyán alapuló méretezési módszer	230
4.5.4.	Az emberi test hőegyensúlyán alapuló általános méretezési módszerek	239
4.5.5.	Az emberi test sugárzásos hőcseréjének pontos számítása	248
4.6.	Csarnokszerű épületekkel kapcsolatos hőáramlási kérdések	266
4.6.1.	Padlófűtés	267
4.6.2.	Sugárzó ernyő vagy infravörös sugárzófűtés esete	270
4.7.	Sugárzóhűtések	274

5. Melegvíz-fűtések elméleti kérdései	275
5.1. Bonyolult fűtési hálózatok hidraulikai analízisének módszerei	276
5.2. Csőhálózatok gráfja és topológiai leírása	276
5.3. A csőhálózati áramlások megmaradási egyenletei, „peremfeltételei” és meghatározottsága	281
5.3.1. Csomóponti egyenletek	283
5.3.2. Hurokegyenletek	284
5.3.3. Útegyenletek	285
5.4. A csőhálózati áramlást leíró megmaradási egyenletek megoldása	287
5.4.1. A Newton–Raphson-eljárás	287
5.4.2. A linearizáló eljárás	291
6. Melegvíz-fűtésű hőleadók hőleadásának számításával kapcsolatos elméleti problémák	295
7. Melegvíz-fűtések áramlástani és hidraulikai kérdései.	
Az áramlási nyomásvesztés számítása meleg vízre	296
7.1. Súrlódásmentes, hőszigetelt (adiabatikus) áramlás	297
7.2. Súrlódásos, hőszigetelt (adiabatikus) áramlás. Áramlási veszteség, hidraulikai ellenállás	298
7.2.1. Nyomásvesztés egyenes csőben való áramláskor	298
7.2.2. Nyomásvesztés csővezetéki elemeken	304
7.2.3. A szivattyúteljesítmény meghatározása	329
7.2.4. Az ellenállás-tényező és az átfolyási szám kapcsolata csővezetéki szerelvényeknél	330
7.3. Politropikus, súrlódásos, kívülről fűtött vagy hűtött áramlás állandó áramlási keresztmetszetű csőben	336
7.4. Politropikus, kívülről fűtött vagy hűtött áramlás súrlódás nélkül, állandó áramlási keresztmetszetű csőben	338
7.5. Izotermikus, izentropikus és izentalp súrlódásos áramlás állandó áramlási keresztmetszetű csőben	338
7.6. Politropikus, súrlódásos áramlás változó áramlási keresztmetszetű csőben	338
7.6.1. Izobár áramlás súrlódással, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben	340
7.6.2. Izoterm és izentrop áramlás súrlódással, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben	340
7.6.3. Izentalp áramlás súrlódással, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben	340
7.7. Politropikus áramlás súrlódás nélkül, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben	340

7.8.	Adiabatikus áramlás súrlódással, hőátvitel nélkül, változó áramlási keresztmetszetű csőben	341
7.9.	Kidolgozott példák a 7. fejezethez	341
8.	Szimmetrikus előremenő és visszatérő vezetékekből álló fűtési hálózatok hidraulikai analízise	345
8.1.	Az eredő (helyettesítő) ellenállás meghatározása hálózatrészekre	345
8.1.1.	Párhuzamosan kötött vezetékszakaszok	346
8.1.2.	Sorba kötött vezetékszakaszok	348
8.2.	Az alapfeladatok megoldásai vízszintes fűtési hálózatokra	349
8.2.1.	A nyomáskép, a szükséges fojtások és a betáplálási jellemzők – a szivattyúmunkapont – meghatározása előírt fogyasztási kép esetén	349
8.2.2.	Adott betáplálási jellemzők esetén a térfogatóram-eloszlás és nyomáskép a hálózaton	351
8.3.	Függőleges elrendezésű kétcsöves központi fűtési hálózatok hidraulikai analízise	352
8.3.1.	Az alapfeladat: előírt fogyasztásokhoz a nyomáskép, a szükséges fojtások és a szivattyúmunkapont meghatározása	352
8.3.2.	Az inverz feladat: ismert szivattyú-jelleggörbe esetén a kialakuló áram- és nyomáskép meghatározása	357
8.3.3.	Tetszőleges számú felszálló vezetékpárt tartalmazó fűtési hálózatok hidraulikai analízise	363
8.4.	Fűtési hálózatok ismeretlen ellenállásainak identifikációja	365
8.4.1.	Ellenállások identifikációja állandó értékű fogyasztások esetén	367
8.4.2.	Az eljárások pontossága	371
8.4.3.	Az ellenállások lineáris regressziója	376
9.	Melegvíz-fűtés hidraulikai méretezése	382
9.1.	A hőmérsékletlépcső meghatározása a mértékadó (leghidegebb) állapotra	382
9.2.	A fűtési vezetékrendszer átmérőinek meghatározása	383
9.2.1.	Hagyományos tervezés	383
9.2.2.	A vezetékátmérők meghatározása parciális optimalizációval	384
9.2.3.	Optimalizáció vezetékszakaszonként	385

10. Melegvíz-fűtések szabályozása	386
10.1. A hőszállítással kapcsolatos alapismeretek	
melegvízfűtési rendszerekben	386
10.1.1. A hőszállítás feladata	386
10.1.2. A hőszállítással kapcsolatos alapfogalmak	387
10.1.3. A hőszállítás mennyiségi jellemzői	387
10.2. A névleges szabályozási diagramok készítésének elvei	388
10.3. A hőigények rendezett gyakorisági diagramja, tartamdiagramja	391
10.4. A változó tömegáramú fűtővíz-keringetés szabályozása	392
10.4.1. Az optimális munkapont meghatározása számítással	392
10.4.2. Az optimális munkapont beállítása	
automatikus szabályozással	393
10.4.3. A szivattyú fordulatszám-szabályozásának	
időfüggvénye	397
11. A meleg vizes fűtési rendszerek üzemeltetésének	
komplex tervezése	399
11.1. A hőellátás üzemeltetésének alapelvei és feladatai	399
11.2. Távhőszolgáltató rendszerre illeszkedő fűtési rendszerek	
optimális üzemeltetése	400
Felhasznált irodalom	402
Jelölések	405
I. Függelék – Hővezetési ellenállások különböző geometriákra	
és hővezetési anyagjellemzők	409
II. Függelék – Bordaátviteli tényezők kifejezései és	
hőáramképletek különleges geometriákra	447
III. Függelék – A besugárzási tényezők és a kölcsönös sugárzási	
együtthatók, valamint a sugárzási anyagjellemzők értékei	457

BEVEZETÉS

A FŰTÉSTECHNIKA ELMÉLETI KÉRDÉSEI

Magyarországon utoljára 1975-ben jelent meg a fűtéstechnika elméleti kérdéseivel is foglalkozó szakkönyv Dr. Macskásy Árpád és szerzőtársai összeállításában „Központi fűtés I. –II.” címen. A könyv ma már nehezen szerezhető be, és az új mérnökgeneráció számára nehézségekbe ütközik a megfelelő minőségű szakirodalom tanulmányozása.

Az azóta eltelt idő alatt természetesen sok tekintetben megváltozott az oktatásnak és a tervezésnek a szemlélete is, sőt még a terminológia is sok változáson ment keresztül. Szerencsére a fűtéstechnika elméleti alapjai, az áramlástan, a hőközlés, hőátadás, hősugárzás, a termodinamika tárgykörei lényegében változatlanok maradtak, és ugyanez elmondható a jelenségeket leíró differenciálegyenletekről és azok megoldásairól is. Természetesen jelentősen fejlődött a számítástechnika, és a differenciálegyenletek analitikus megoldásainak – amelyek sok esetben nehézkesek és bonyolultak – megvan a numerikus alternatívája. Régebben voltak olyan folyamatok, amelyeknek a leíró differenciálegyenletei, illetve a leíró differenciálegyenletek megoldásai zárt, analitikus formában nem voltak meg, mára ez a hiány részben megszűnt, részben pedig a numerikus megoldásokra helyeződött át a hangsúly.

A fűtéstechnika problémakörébe az alábbi tárgykörök tartoznak:

1. a fűtési rendszerek osztályozása,
 - melegvíz-fűtés önálló kazánházzal vagy távfűtésre kapcsolva,
 - kisnyomású gőzfűtés,
 - sugárzófűtés,
 - légfűtés,
 - különleges fűtések, kombinált fűtések,
2. az ellátandó hőigények meghatározása,
 - a méretezési, ún. névleges hőigények,
 - tetszőleges külső meteorológiai állapothoz tartozó hőigények,
 - a hőigények valószínűségi jellege, a megállapított hőigények megbízhatósága, illetve kockázata,

3. a fűtési rendszer kiválasztása a hőigény jellegének függvényében,
 - a fűtési rendszer létesítésének és üzemeltetésének gazdaságossága, összehasonlítása más fűtési rendszerrel,
 - a kiválasztás gazdasági szempontjai és célfüggvénye,
4. a fűtési rendszer méretezése,
5. a fűtési rendszer kivitelezésének problémaköre, eszközei,
6. a fűtési rendszer üzemeltetése és szabályozása.

Könyvünkben összefoglaljuk a fűtéstechnika elméleti kérdéseit, elsősorban a fűtéstechnikához kapcsolódó hőátviteli problémák leírását és megoldásait. Részletesen elemezzük a sugárzófűtés műszaki megoldásait, a hőleadás számítását és a fűtési rendszer méretezését. Könyvünkben foglalkozunk még a melegvíz-fűtések áramlástani és hidraulikai problémáival, a nyomásveszteség számításával, az ún. hidraulikai analízis kérdéseivel és a rohamosan terjedő változó tömegáramú fűtővíz-keringetés szabályozásával. Munkánkban nagy mértékben támaszkodunk Dr. Macskásy Árpád és szerzőtársai említett könyvére, de természetesen az abban foglaltakat kiegészítjük az új eredményekkel és saját kutatásainkkal.

A fenti tárgykörök ismeretanyaga természetesen rendkívül széles és gazdag, gyakorlatilag mindegyik egy-egy külön könyv tárgya lehetne.

Az ellátandó hőigények meghatározása az épülethatároló szerkezetekben végbemenő stacionárius és instacionárius hőátviteli folyamatok igen alapos ismeretét követeli meg.

A fűtési rendszer kiválasztása csak alapos gazdasági elemzést követően történhet meg.

A fűtési rendszer méretezése – a későbbi hidraulikai problémák megelőzése érdekében – precíz hidraulikai számításokat igényel. A hőigények függvényében a szivattyú és fűtési rendszer együttes munkapontjára ki kell számítanunk az áramlási és nyomásképet. A termosztatikus szelepekkel szabályozott fűtési rendszer csak a leggondosabban kiszámított nyomásviszonyokra illesztetten működik megbízhatóan.

Ma már általánossá válik a változó tömegáramú keringető szivattyúk alkalmazása a szekunder fűtési rendszerekben is, amelyek szabályozása a hidraulikai viszonyok folyamatos figyelemmel kísérése mellett történhet.

A fűtési rendszer méretezése során a gazdasági optimum gondolata több évtizedes, de a mai napig sem rendelkezünk megbízható eljárással, illetve méretezési modellel, amely az adatok bizonytalanságait jól kezelné.

A könyv végén – társszerzőink által összefoglalva – függelékekben mutatjuk be a hőveszteség-számítás alapjául szolgáló hőellenállások és bordahatásfokok képleteit, valamint a hősugárzás elméletben alapvető szerepet játszó besugárzási tényezők és kölcsönös sugárzási együtthatók számítására szolgáló összefüggéseket, továbbá a különböző építő- és szigetelőanyagok termodinamikai jellemzőit.

1. A FÜTÖTT TEREK HŐIGÉNYÉNEK SZÁMÍTÁSA

A fűtött terekből a hidegebb környezet felé a határoló szerkezeteken keresztül hő áramlik, másrészt a nyílászárókon keresztül természetes szellőzéssel, vagy a szellőztetőrendszeren megvalósított mesterséges szellőztetéssel a levegővel hő távozik. A határoló szerkezeteken keresztül, illetve a szellőzőlevegővel távozó hő hővesztésnek nevezzük.

Annak érdekében, hogy a bent tartózkodó ember számára kellemes környezetet, mikroklimát, kellemes levegő-hőmérsékletet biztosítsunk, a hővesztéséget fűtéssel, illetve klimatizációval pótolnunk kell. A pótolandó hő a hőigény. A hőigény nagysága a fogyasztó igényétől és a megkívánt hőkomforttól, a megkívánt hőérzettől és a külső meteorológiai jellemzőktől függ.

A fűtési rendszerek tervezése az ellátandó hőigények megállapításával kezdődik. A leghidegebb, még számba vehető valószínűséggel mutatózó külső időjárási jellemzők mellett $[(-13) - (-15^{\circ}\text{C})]$ kisebb, mint 1% gyakorisággal jelentkező (24 óra tartósságú) maximális fűtési hőigényt mértékadó fűtési hőigénynek nevezzük.

Az épületek határoló szerkezetein keresztül a hő kiáramlása végbemehet stacionáriusan, illetve időben változóan. A hő kiáramlása a fűtött térből a belső levegő és a határoló fal között hőátadással indul, a falban vezetéssel folytatódik, majd a határoló szerkezet külső felületéről a külső környezet felé hőátadással fejeződik be. A hőátadást nevezzük konvekciónak is, és a konvekció mellett, azzal egyidejűleg többnyire megvalósul hőszugárzás is.

A hővesztés meghatározása a határoló szerkezetekben végbemenő hővezetési folyamatok, és a határoló szerkezetek felülete, valamint a környezetük közötti hőátadás leírását kívánja meg. Könyvünkben ismertetjük mind a stacionárius, mind az instacionárius hővezetési és hőátadási folyamatok leírását annak érdekében, hogy a helyiségek hőmérsékletét tetszőleges állapotra és például az úgynevezett szaszos fűtés esetére is meghatározhassuk.

1.1. A hőigények valószínűségelméletének vizsgálata

A hőellátásban ismert tény, hogy mind a fűtési hőigények, mind a használati melegvíz-igények véletlen jellegűek, igen sok tényezőtől függnnek, pontos előrejelzésük nem lehetséges.

A fűtési hőigények mértéke – tendenciáját és nagyságrendjét illetően – kapcsolódik a külső meteorológiai tényezők – elsősorban a külső hőmérséklet és a szél – nagyságához és előfordulási gyakoriságához. A használati melegvíz-igények teljesen véletlenszerűen változnak – nagyságuk sztochasztikus értelemben az ellátott lakásszámtól, illetve a fogyasztói lélekszámtól függ.

Mind a fűtési hőigények, mind a használati melegvíz-igények nagyságának és időbeli lefutásának leírása a valószínűségelmélet eszközeivel lehetséges. Ennek segítségével azt tudjuk megmondani, hogy valamely lakásszám alapulvételével, a nap valamely időszakában, a külső meteorológiai légállapot függvényében mekkora a valószínűsége annak, hogy egy előírt hőigényértéket nem halad meg a ténylegesen jelentkező hőigény.

A vázolt módszerrel egy új utat keresünk az épületgépészet tervezési területén jelentkező különféle igények meghatározására, abban a reményben, hogy ezzel az épületgépészeti rendszerek túlméretezettségét, illetve ezen keresztül azok beruházási és üzemi költségeit csökkenteni lehet. Eddigi vizsgálataink alapján e módszerek segítségével a távhőellátás területén 10-15%-os kapacitástartalékok felderítése látszik lehetségesnek, a determinisztikus szemléletű számítások eredményéhez képest.

E vizsgálati módszertan elméletét a következőkben mutatjuk be.

1.1.1. A fűtési hőigény valószínűségi jellege

A fűtés célja az, hogy a tartózkodási térben az ott-tartózkodók számára a kellemes közérzetet adó komfort paramétereket, elsősorban a kellemes légtérhőmérsékletet – 20–24 °C – folyamatosan biztosítsuk.

A fűtési hőigény stacionárius állapotban:

$$\dot{Q}_f = k \cdot A \cdot \Delta t + \dot{V} \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta t - \dot{Q}_b - \dot{Q}_k, \quad (1.1.1)$$

ahol

k a hőátbocsátási tényező,

A a határoló felület,

$\dot{V}$ a filtrációs térfogatáram,

Δt a belső és külső hőmérséklet különbsége, ahol a belső hőmérséklet előírt, illetve adott, a fogyasztó által beállított érték,

$\dot{Q}_b$ a belső hőforrások, belső hőnyereség, háztartási gépek, az emberek hőtermelése,

$\dot{Q}_k$ a külső hőforrások (napsugárzás).

A fűtési hőigény instacionárius állapotban:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_f = \frac{d}{d\tau} M_{lev} c_{lev} \rho_{lev} t_{lev} + \frac{d}{d\tau} M_b c_b \rho_b t_b + \alpha A (t_w - t_{lev}) + \\ + \dot{V} \rho c (t_{lev} - t_k) - \dot{Q}_b - \dot{Q}_k, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

ahol

M_b a belső berendezések és bútorok tömege,

c_b a belső berendezések és bútorok fajhője,

t_b a belső berendezések és bútorok közepes hőmérséklete.

Ez az egyenlet nem oldható meg közvetlenül, mivel abban ismeretlen a t_w falhőmérséklet, amely a falon keresztül történő instacionárius hővezetési folyamat függvénye.

Az instacionárius hőmérleghez kapcsolódó peremfeltételek a következők:

- a hővezetés a falban

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (1.1.3)$$

- harmadfokú peremfeltételek a belső falon

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{w_1} = \alpha_1 (t_{lev} - t_{w_1}), \quad (1.1.4)$$

- harmadfokú peremfeltételek a külső falon

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{w_2} = \alpha_2 (t_k - t_{w_2}). \quad (1.1.5)$$

A fenti egyenleteket az összes határoló falon fell kell írunk.

Ezekben az összefüggésekben az összes tényező valószínűségi változó, pontos meghatározásuk nem lehetséges, véletlenszerűen változnak. Ennek következtében a $\dot{Q}$ fűtési hőigény valószínűségi jellegű, matematikai értelemben valószínűségi változó. Ezen kívül a kifejezésben fel nem tüntetett további tényezők, mint a napsugárzásból, illetve az épületen belüli hőfejlődésből származó hőnyereség szintén véletlen jellegű. Tehát a fűtési hőigény adott külső meteorológiai tényezők esetén is bizonytalanságot hordoz és valószínűségi jellegű.

Egy valószínűségi változót a valószínűségeloszlás jellege, az eloszlás paraméterei, a várható érték és a szórás határoz meg.

A tervezés során nem tudjuk pontosan megmondani előre, hogy a tervhez képest a valóságban milyen k , A és $\dot{V}$ realizálódik, és nem tudjuk megmondani, hogy a megvalósult berendezéseknél egy-egy időjárási helyzetben k és $\dot{V}$ milyen értékeket vesznek fel. A tervezési értékekhez képest a megvalósult értékek ismer-

retlenek és bizonytalanok, tehát valószínűségi változók. Hozzá kell tennünk ehhez azt, hogy a hőátviteli tényező értékét befolyásoló hőátadási és hővezetési tényezők kézikönyvekben található értékei hasonlóképpen bizonytalanságot viselnek magukon, tehát azok is valószínűségi változók. Természetesen a belső levegő-hőmérséklet is egy tartományban helyezkedik el, értékét a fogyasztó állítja be, tehát az is valószínűségi jellegű.

Az ún. standard (névleges) hőigény meghatározását a 4. számú mellékletben közzétett MSZ 04 140/1990. sz. hőigény tervezési szabvány, illetve előírás tartalmazza. A szabványban bemutatott számítási és méretezési eljárások determinisztikusak. A szabvány segítségével kiszámolt értékek bizonytalanságát, valószínűségeloszlását a tervezőnek kell elemeznie és kiszámítani.

1.1.2. A mértékadó (névleges, maximális) fűtési hőigény tervezése

Egy fűtött objektum tervezése során a mértékadó hőigény meghatározásakor az alábbiak szerint járunk el.

A feladat: előírt megbízhatósági szinten keressük a (1.1.1) kifejezés maximumát:

$$\dot{Q}_n = \max_{\Delta t} \{ \dot{Q}_f = A \cdot k \cdot \Delta t + \dot{V} \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta t - \dot{Q}_b - \dot{Q}_k \}, R = P(\dot{Q} \geq \dot{Q}_n) \leq 0,01. \quad (1.1.7/a)$$

vagy

$$\dot{Q}_n = \max_{\Delta t} \left\{ \dot{Q}_f = \frac{d}{dt} M_{lev} c_{lev} \rho_{lev} t_{lev} + \frac{d}{dt} M_b c_b \rho_b t_b + \alpha A (t_w - t_{lev}) + \dot{V} \rho c (t_{lev} - t_k) - \dot{Q}_b - \dot{Q}_k \right\},$$

$$R = P(\dot{Q} \geq \dot{Q}_n) \leq 0,01. \quad (1.1.7/b)$$

Az (1.1.7/a) egyenlet stacionárius állapotra adja a hőigény maximumát. Ezzel az egyenlettel azt a meteorológiai külső állapotot keressük (külső hőmérséklet, szél, napsugárzás stb.), amelynél a hőigény előírt maximumot ér el.

Az (1.1.7/b) egyenlettel instacionárius állapotra keressük a hőigény maximumát. Ennek szerepe szakaszos fűtésnél mutatkozhat meg, amikor felfűtési többletteljesítményre van szükség.

Az egyenletben az összes változó elvileg ismert tervezési érték, de a megvalósult állapotok valószínűségi jellegűek.

A helyi meteorológiai jellemzők statisztikája alapján a külső méretezési hőmérséklet általában $-10 \dots -15^\circ\text{C}$ értékű.

A fenti kifejezésben R a kockázat mértékét jelöli, amelyet a tervezési gyakorlat számára általában 1%-ban rögzítünk.

Az egyenletet meg kell oldanunk a $-10 \dots -15^\circ\text{C}$ értékek mindegyikére, és egy-egy felvett érték mellett elemezzük a többi tényező várható értékét és szórását.

Feltehetjük, hogy a szabványosított ún. hőszükséglet-számítások a hőigény várható értékét adják. Nekünk a befolyásoló tényezők k , A , $\dot{V}$, $\dot{Q}_b$, $\dot{Q}_k$ bizonytalanságait kell elemeznünk.

A $\dot{Q}$ függvény eloszlása a változók eloszlásának ismerete alapján részben számítással, részben mérésrel határozható meg, ennek módszerét a következőkben mutatjuk be. Az (1.1.2) összefüggésben szorzások és összeadás szerepelnek, ennek megfelelően azt kell vizsgálnunk, hogyan számíthatók ki valószínűségi változók szorzata és összege eloszlásának paraméterei.

1.1.3. Két valószínűségi változó összege

A sűrűség- és eloszlásfüggvény

Két valószínűségi változó összege valószínűségeloszlásának meghatározásához tekintsük a $h(x_1, x_2)$ együttes sűrűségfüggvényű x_1 , x_2 valószínűségi változókat és az $y = x_1 + x_2$ valószínűségi változót.

Ekkor legyen

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Ahonnán $x_1 = y_1 - x_2$, $x_2 = y_2$, és a transzformáció Jacobi-determinánsa:

$$D(y_1, y_2) = 1.$$

Ekkor az együttes sűrűségfüggvényük:

$$g(y_1, y_2) = h(y_1 - x_2, x_2). \quad (1.1.9)$$

Az $y_1 = y$ és $x_2 = x$ jelöléssel a $g(y)$ peremsűrűség-függvény:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y - x, x) dx, \quad (1.1.10)$$

nem más, mint az y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, illetve könnyű belátni, hogy szimmetriaokokból

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y - x) dx \quad (1.1.11)$$

is y sűrűségfüggvénye.

Azt a fontos eredményt kaptuk, hogy ha az x_1 , x_2 valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $h(x_1, x_2)$, akkor összegük, $y = x_1 + x_2$ sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(y - x, x) dx. \quad (1.1.12)$$

Az összeg sűrűségfüggvényének ismeretében számítsuk ki $y = x_1 + x_2$ eloszlásfüggvényét is!

$$G(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} h(x, z-x) dx dz = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} h(z-x, x) dx dz. \quad (1.1.13)$$

Ha x_1 és x_2 független valószínűségi változók, $h(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ [ahol $f_1(x_1)$, illetve $f_2(x_2)$ az x_1 , illetve az x_2 sűrűségfüggvénye], akkor összegük sűrűségfüggvénye az (1.1.12) alapján

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(y-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y-x)f_2(x)dx, \quad (1.1.14)$$

és összegük eloszlásfüggvénye az (1.1.14) figyelembevételével

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y-x)f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y-x)f_2(x)dx, \quad (1.1.15)$$

ahol figyelembe vettük azt, hogy

$$\int_{-\infty}^y f_2(z-x)dz = F_2(y-x) \text{ és } \int_{-\infty}^y f_1(z-x)dz = F_1(y-x) \quad (1.1.16)$$

az x_1 , illetve az x_2 eloszlásfüggvénye.

Független valószínűségi változók összegének és különbségének várható értéke és szórása

Egy valószínűségi változó szórása:

$$D(x) = (\sigma(\xi)) = +\sqrt{M((x - M(x))^2)}. \quad (1.1.17)$$

A szórásnégyzet:

$$D^2(x) = M(x^2) - (M(x))^2. \quad (1.1.18)$$

Ha $y = ax + b$, a és b konstansok, akkor

$$M(y) = a M(x) + b, \quad (1.1.19)$$

$$D(y) = a^2 D^2(x). \quad (1.1.20)$$

A független valószínűségi változók esetén tetszőleges x és y valószínűségi változók összegének a várható értéke a tagok várható értékeinek összegével egyenlő, azaz, ha $M\{x\}$ és $M\{y\}$ létezik, akkor $M\{x + y\}$ is létezik, és

$$M\{x + y\} = M\{x\} + M\{y\}. \quad (1.1.21)$$

Egy összeg várható értéke tehát a tagok várható értékeinek összegével egyenlő, azaz

$$M\{x_1 + x_2 + \dots + x_n\} = M\{x_1\} + M\{x_2\} + \dots + M\{x_n\}. \quad (1.1.22)$$

A vizsgált változók körét tovább szűkítve a normális eloszlásúakra, elmondhatjuk, hogy ha $x_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$ eloszlású, $x_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$ eloszlású független valószínűségi változók, akkor összegük, $x_1 + x_2$ is normális eloszlású $m = m_1 + m_2$ és $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ paraméterekkel. Kettőnél több változó esetére

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n, \quad (1.1.23)^*$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2, \quad (1.1.24)$$

ahol m a várható értéket, σ pedig a szórást jelöli.

Ha x és y függetlenek, akkor a szórásnégyzetre fennáll az, hogy

$$D^2(x+y) = D^2(x-y). \quad (1.1.25)$$

Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor összegükre, tehát a

$$\xi_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (1.1.26)$$

valószínűségi változóra:

$$M(\xi_n) = n M, \quad (1.1.27)$$

és

$$D(\xi_n) = \sqrt{n} D. \quad (1.1.28)$$

A relatív szórás:

$$D_R(\xi_n) = \frac{D(\xi_n)}{M(\xi_n)} = \frac{D}{\sqrt{n} M}. \quad (1.1.29)$$

1.1.4. Két valószínűségi változó szorzata

A sűrűség- és eloszlásfüggvény

Két valószínűségi változó szorzatának sűrűségfüggvényének meghatározásához tekintsük most a $h(x,y)$ sűrűségfüggvényű (x, y) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozót, és számítsuk ki $z = x \cdot y$ sűrűségfüggvényét.

A transzformációk, amelyeket most tekintetbe kell vennünk, a következők:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= xy, \\ w(x, y) &= x, \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

az inverz transzformációk ennek megfelelően

$$\begin{aligned} x(w, z) &= w, \\ y(w, z) &= \frac{z}{w}. \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

* A várható érték megjelölésére az irodalom vegyesen használja az M és m jelölést. Az M egyben a várható érték képzésének operátora is.

A transzformáció Jacobi-determinánsa:

$$D(w, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{w^2} & \frac{1}{w} \end{vmatrix} = \frac{1}{w}. \quad (1.1.32)$$

Megállapíthatjuk, hogy minden $x > 0$ pontban a valószínűségi változók együttes sűrűség- és eloszlásfüggvényét meghatározó kifejezésekhez rendelt feltételek teljesülnek. Ezért

$$g(w, z) = h\left(w, \frac{z}{w}\right) \frac{1}{|w|}, \quad (1.1.33)$$

következésképpen $z = x$ y sűrűségfüggvénye, amelyet jelöljünk $h(z)$ -vel:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w, z) dw = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(w, \frac{z}{w}\right) \frac{1}{|w|} dw, \quad (1.1.34)$$

illetve a $z = y$, $w = x$, $h(y) = g(y)$ átírással (és szimmetria okokból)

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{y}{x}, x\right) \frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(x, \frac{y}{x}\right) \frac{dx}{|x|}. \quad (1.1.35)$$

Ha x_1 és x_2 függetlenek, $f_1(x_1)$ és $f_2(x_2)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor szorzatuk sűrűségfüggvénye (1.1.30) figyelembevételével:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1\left(\frac{y}{x}\right) f_2(x) \frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dx}{|x|}. \quad (1.1.36)$$

Független valószínűségi változókra nézve megállapíthatjuk, hogy, ha x és y független valószínűségi változók, akkor szorzatuk várható értéke várható értékeik szorzatával egyenlő, azaz

$$M\{x y\} = M\{x\} M\{y\}. \quad (1.1.37)$$

Állításunk tetszőleges véges számú valószínűségi változó szorzatára is fennáll, azaz, ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ független valószínűségi változók, akkor

$$M\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = M\{x_1\} M\{x_2\} \dots M\{x_n\}. \quad (1.1.38)$$

Tehetünk még egy nagyon fontos megállapítást a független valószínűségi változók szorzatának szórására (D) is, mely szerint, ha x_1 és x_2 független valószínűségi változók, akkor

$$D^2(x_1 x_2) = D^2(x_1) D^2(x_2) + M^2(x_1) D^2(x_2) + M^2(x_2) D^2(x_1). \quad (1.1.39)$$

A standardizált valószínűségi változó

Ha ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ várható értéket és $D(\xi)$ szórással, akkor a

$$\xi = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$$

standardizált valószínűségi változóra

$$M(\xi) = 0 \text{ és } D(\xi) = 1. \quad (1.1.40)$$

A normális eloszlású valószínűségi változó

A sűrűségfüggvény

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \text{ ahol } -\infty < x < +\infty. \quad (1.1.41)$$

Az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (1.1.42)$$

A standardizált normális eloszlású valószínűségi változó esetében $m = 0$ és $\sigma = 1$.

Sűrűségfüggvényének és eloszlási függvényének értékeit a mellékelt 1.1.1. és 1.1.2. táblázatban mutatjuk be.

1.1.1. táblázat. A normális sűrűségfüggvény $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,16	0,3939	0,32	0,3790	0,48	0,3555
0,01	0,3989	0,17	0,3932	0,33	0,3778	0,49	0,3538
0,02	0,3989	0,18	0,3925	0,34	0,3765	0,50	0,3521
0,03	0,3988	0,19	0,3918	0,35	0,3752	0,51	0,3503
0,04	0,3986	0,20	0,3910	0,36	0,3739	0,52	0,3485
0,05	0,3984	0,21	0,3902	0,37	0,3725	0,53	0,3467
0,06	0,3982	0,22	0,3894	0,38	0,3712	0,54	0,3448
0,07	0,3980	0,23	0,3885	0,39	0,3697	0,55	0,3429
0,08	0,3977	0,24	0,3876	0,40	0,3683	0,56	0,3410
0,09	0,3973	0,25	0,3867	0,41	0,3668	0,57	0,3391
0,10	0,3970	0,26	0,3857	0,42	0,3653	0,58	0,3372
0,11	0,3965	0,27	0,3847	0,43	0,3637	0,59	0,3352
0,12	0,3961	0,28	0,3836	0,44	0,3621	0,60	0,3332
0,13	0,3956	0,29	0,3825	0,45	0,3605	0,61	0,3312
0,14	0,3951	0,30	0,3814	0,46	0,3589	0,62	0,3292
0,15	0,3945	0,31	0,3802	0,47	0,3572	0,63	0,3271

1.1.1. táblázat. A normális sűrűségfüggvény $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (folytatás)

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,64	0,3251	1,06	0,2275	1,48	0,1334	1,90	0,0656
0,65	0,3230	1,07	0,2251	1,49	0,1315	1,91	0,0644
0,66	0,3209	1,08	0,2227	1,50	0,1295	1,92	0,0632
0,67	0,3187	1,09	0,2203	1,51	0,1276	1,93	0,0620
0,68	0,3166	1,10	0,2179	1,52	0,1257	1,94	0,0608
0,69	0,3144	1,11	0,2155	1,53	0,1238	1,95	0,0596
0,70	0,3123	1,12	0,2131	1,54	0,1219	1,96	0,0584
0,71	0,3101	1,13	0,2107	1,55	0,1200	1,97	0,0573
0,72	0,3079	1,14	0,2083	1,56	0,1182	1,98	0,0562
0,73	0,3056	1,15	0,2059	1,57	0,1163	1,99	0,0551
0,74	0,3034	1,16	0,2036	1,58	0,1145	2,00	0,0540
0,75	0,3011	1,17	0,2012	1,59	0,1127	2,01	0,0529
0,76	0,2989	1,18	0,1989	1,60	0,1109	2,02	0,0519
0,77	0,2966	1,19	0,1965	1,61	0,1092	2,03	0,0508
0,78	0,2943	1,20	0,1942	1,62	0,1074	2,04	0,0498
0,79	0,2920	1,21	0,1919	1,63	0,1057	2,05	0,0488
0,80	0,2897	1,22	0,1895	1,64	0,1040	2,06	0,0478
0,81	0,2874	1,23	0,1872	1,65	0,1023	2,07	0,0468
0,82	0,2850	1,24	0,1849	1,66	0,1006	2,08	0,0459
0,83	0,2827	1,25	0,1826	1,67	0,0989	2,09	0,0449
0,84	0,2803	1,26	0,1804	1,68	0,0973	2,10	0,0440
0,85	0,2780	1,27	0,1781	1,69	0,0957	2,11	0,0431
0,86	0,2756	1,28	0,1758	1,70	0,0940	2,12	0,0422
0,87	0,2732	1,29	0,1736	1,71	0,0925	2,13	0,0413
0,88	0,2709	1,30	0,1714	1,72	0,0909	2,14	0,0404
0,89	0,2685	1,31	0,1691	1,73	0,0893	2,15	0,0396
0,90	0,2661	1,32	0,1669	1,74	0,0878	2,16	0,0387
0,91	0,2637	1,33	0,1647	1,75	0,0863	2,17	0,0379
0,92	0,2613	1,34	0,1626	1,76	0,0848	2,18	0,0371
0,93	0,2589	1,35	0,1604	1,77	0,0833	2,19	0,0363
0,94	0,2565	1,36	0,1582	1,78	0,0818	2,20	0,0355
0,95	0,2541	1,37	0,1561	1,79	0,0804	2,21	0,0347
0,96	0,2516	1,38	0,1539	1,80	0,0790	2,22	0,0339
0,97	0,2492	1,39	0,1518	1,81	0,0775	2,23	0,0332
0,98	0,2468	1,40	0,1497	1,82	0,0761	2,24	0,0325
0,99	0,2444	1,41	0,1476	1,83	0,0748	2,25	0,0317
1,00	0,2420	1,42	0,1456	1,84	0,0734	2,26	0,0310
1,01	0,2396	1,43	0,1435	1,85	0,0721	2,27	0,0303
1,02	0,2371	1,44	0,1415	1,86	0,0707	2,28	0,0297
1,03	0,2347	1,45	0,1394	1,87	0,0694	2,29	0,0290
1,04	0,2323	1,46	0,1374	1,88	0,0681	2,30	0,0283
1,05	0,2299	1,47	0,1354	1,89	0,0669	2,31	0,0277

1.1.1. táblázat. A normális sűrűségfüggvény $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (folytatás)

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,32	0,0270	2,53	0,0163	2,74	0,0093	2,95	0,0051
2,33	0,0264	2,54	0,0158	2,75	0,0091	2,96	0,0050
2,34	0,0258	2,55	0,0154	2,76	0,0088	2,97	0,0048
2,35	0,0252	2,56	0,0151	2,77	0,0086	2,98	0,0047
2,36	0,0246	2,57	0,0147	2,78	0,0084	2,99	0,0046
2,37	0,0241	2,58	0,0143	2,79	0,0081	3,00	0,0044
2,38	0,0235	2,59	0,0139	2,80	0,0079	3,10	0,0033
2,39	0,0229	2,60	0,0136	2,81	0,0077	3,20	0,0024
2,40	0,0224	2,61	0,0132	2,82	0,0075	3,30	0,0017
2,41	0,0219	2,62	0,0129	2,83	0,0073	3,40	0,0012
2,42	0,0213	2,63	0,0126	2,84	0,0071	3,50	0,0009
2,43	0,0208	2,64	0,0122	2,85	0,0069	3,60	0,0006
2,44	0,0203	2,65	0,0119	2,86	0,0067	3,70	0,0004
2,45	0,0198	2,66	0,0116	2,87	0,0065	3,80	0,0003
2,46	0,0194	2,67	0,0113	2,88	0,0063	3,90	0,0002
2,47	0,0189	2,68	0,0110	2,89	0,0061	4,00	0,0001
2,48	0,0184	2,69	0,0107	2,90	0,0060	4,10	0,0001
2,49	0,0180	2,70	0,0104	2,91	0,0058	4,20	0,0001
2,50	0,0175	2,71	0,0101	2,92	0,0056		
2,51	0,0171	2,72	0,0099	2,93	0,0055		
2,52	0,0167	2,73	0,0096	2,94	0,0053		

1.1.2. táblázat. A normális eloszlásfüggvény $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,14	0,5557	0,28	0,6103	0,42	0,6628
0,01	0,5040	0,15	0,5596	0,29	0,6141	0,43	0,6664
0,02	0,5080	0,16	0,5636	0,30	0,6179	0,44	0,6700
0,03	0,5120	0,17	0,5675	0,31	0,6217	0,45	0,6736
0,04	0,5160	0,18	0,5714	0,32	0,6255	0,46	0,6772
0,05	0,5199	0,19	0,5753	0,33	0,6293	0,47	0,6808
0,06	0,5239	0,20	0,5793	0,34	0,6331	0,48	0,6844
0,07	0,5279	0,21	0,5832	0,35	0,6368	0,49	0,6879
0,08	0,5319	0,22	0,5871	0,36	0,6406	0,50	0,6915
0,09	0,5359	0,23	0,5910	0,37	0,6443	0,51	0,6950
0,10	0,5398	0,24	0,5948	0,38	0,6480	0,52	0,6985
0,11	0,5438	0,25	0,5987	0,39	0,6517	0,53	0,7019
0,12	0,5478	0,26	0,6026	0,40	0,6554	0,54	0,7054
0,13	0,5517	0,27	0,6064	0,41	0,6591	0,55	0,7088

1.1.2. táblázat. A normális eloszlásfüggvény $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (folytatás)

x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$
0,56	0,7123	0,98	0,8365	1,40	0,9192	1,82	0,9656
0,57	0,7157	0,99	0,8389	1,41	0,9207	1,83	0,9664
0,58	0,7190	1,00	0,8413	1,42	0,9222	1,84	0,9671
0,59	0,7224	1,01	0,8438	1,43	0,9236	1,85	0,9678
0,60	0,7257	1,02	0,8461	1,44	0,9251	1,86	0,9686
0,61	0,7291	1,03	0,8485	1,45	0,9265	1,87	0,9693
0,62	0,7324	1,04	0,8508	1,46	0,9279	1,88	0,9699
0,63	0,7357	1,05	0,8531	1,47	0,9292	1,89	0,9706
0,64	0,7389	1,06	0,8554	1,48	0,9306	1,90	0,9713
0,65	0,7422	1,07	0,8577	1,49	0,9319	1,91	0,9719
0,66	0,7454	1,08	0,8599	1,50	0,9332	1,92	0,9726
0,67	0,7486	1,09	0,8621	1,51	0,9345	1,93	0,9732
0,68	0,7517	1,10	0,8643	1,52	0,9357	1,94	0,9738
0,69	0,7549	1,11	0,8665	1,53	0,9370	1,95	0,9744
0,70	0,7580	1,12	0,8686	1,54	0,9382	1,96	0,9750
0,71	0,7611	1,13	0,8708	1,55	0,9394	1,97	0,9756
0,72	0,7642	1,14	0,8729	1,56	0,9406	1,98	0,9761
0,73	0,7673	1,15	0,8749	1,57	0,9418	1,99	0,9767
0,74	0,7703	1,16	0,8770	1,58	0,9429	2,00	0,9772
0,75	0,7734	1,17	0,8790	1,59	0,9441	2,02	0,9783
0,76	0,7764	1,18	0,8810	1,60	0,9452	2,04	0,9793
0,77	0,7794	1,19	0,8830	1,61	0,9463	2,06	0,9803
0,38	0,7823	1,20	0,8849	1,62	0,9474	2,08	0,9812
0,79	0,7853	1,21	0,8869	1,03	0,9484	2,10	0,9821
0,80	0,7881	1,22	0,8888	1,64	0,9495	2,12	0,9830
0,81	0,7910	1,23	0,8907	1,65	0,9505	2,14	0,9838
0,82	0,7939	1,24	0,8925	1,66	0,9515	2,16	0,9846
0,83	0,7967	1,25	0,8944	1,67	0,9525	2,18	0,9854
0,84	0,7995	1,26	0,8962	1,68	0,9535	2,20	0,9861
0,85	0,8023	1,27	0,8980	1,69	0,9545	2,22	0,9868
0,86	0,8051	1,28	0,8997	1,70	0,9554	2,24	0,9875
0,87	0,8078	1,29	0,9015	1,71	0,9564	2,26	0,9881
0,88	0,8106	1,30	0,9032	1,72	0,9572	2,28	0,9887
0,89	0,8133	1,31	0,9049	1,73	0,9582	2,30	0,9893
0,90	0,8159	1,32	0,9066	1,74	0,9591	2,32	0,9898
0,91	0,8186	1,33	0,9082	1,75	0,9599	2,34	0,9904
0,92	0,8212	1,34	0,9099	1,76	0,9608	2,36	0,9909
0,93	0,8238	1,35	0,9115	1,77	0,9616	2,38	0,9913
0,94	0,8264	1,36	0,9131	1,78	0,9625	2,40	0,9918
0,95	0,8289	1,37	0,9147	1,79	0,9633	2,42	0,9922
0,96	0,8315	1,38	0,9162	1,80	0,9641	2,44	0,9927
0,97	0,8340	1,39	0,9177	1,81	0,9649	2,46	0,9931

1.1.2. táblázat. A normális eloszlásfüggvény $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (folytatás)

x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$
2,48	0,9934	2,64	0,9959	2,80	0,9974	2,96	0,9985
2,50	0,9938	2,66	0,9961	2,82	0,9976	2,98	0,9986
2,52	0,9941	2,68	0,9963	2,84	0,9977	3,00	0,9986
2,54	0,9945	2,70	0,9965	2,86	0,9979	3,20	0,9993
2,56	0,9948	2,72	0,9967	2,88	0,9980	3,40	0,9996
2,58	0,9951	2,74	0,9969	2,90	0,9981	3,60	0,9998
2,60	0,9953	2,76	0,9971	2,92	0,9982	3,80	0,9999
2,62	0,9956	2,78	0,9973	2,94	0,9984		

1.2. Egy fűtési fogyasztó hőigényének bizonytalansága, a valószínűség-eloszlás meghatározása

Egy fogyasztó fűtési hőigényének bizonytalansága az (1.1.1) kifejezésben az egyes tényezőknek a bizonytalanságaiból állapítható meg. A hőátviteli tényező és a lehűlő felület szorzatának szórását – ha ismerjük e tényezők várható értékét – az (1.1.37) kifejezés segítségével állapíthatjuk meg. A belső és külső hőnyereség bizonytalanságának mértéke külön-külön elemezhető, ugyanígy a filtrációs térfogatáram mértéke is.

Az (1.1.1) kifejezés egyes tagjainak várható értéke és szórása ismeretében a fűtési hőigény várható értéke az (1.1.22) kifejezéssel, míg a szórása az (1.1.24) kifejezéssel határozható meg.

Az elmondottak alapján a konvekciós fűtési hőigény statisztikai paraméterei:

$$D^2(kA\Delta t) = D^2(kA)D^2(\Delta t) + M^2(kA)D^2(\Delta t) + M^2(\Delta t)D^2(kA). \quad (1.2.1)$$

Mivel $\Delta t = \text{konstans}$, ha jól ismert meteorológiai állapotot veszünk figyelembe, ezért

$$M^2(\Delta t) = \Delta t^2, \quad (1.2.2)$$

$$D^2(\Delta t) = 0. \quad (1.2.3)$$

Ezekkel

$$D^2(kA\Delta t) = D^2(kA)\Delta t^2, \quad (1.2.4)$$

és az (1.1.39) alapján

$$D^2(kA) = D^2(k)D^2(A) + M^2(k)D^2(A) + M^2(A)D^2(k). \quad (1.2.5)$$

A fűtési hőigény várható értéke

Az (1.1.1) várható értéke

$$M(\dot{Q}_f) = M(kA)\Delta t + M(\dot{V}\rho c)\Delta t - M(\dot{Q}_b) - M(\dot{Q}_k). \quad (1.2.6)$$

A fűtési hőigény szórásnégyzete

Felhasználva (1.1.25) szerint a $D^2(x+y) = D^2(x-y)$ összefüggést:

$$D^2(\dot{Q}_f) = D^2(kA)\Delta t^2 + D^2(\dot{V}\rho c)\Delta t^2 + D^2(\dot{Q}_b) + D^2(\dot{Q}_k). \quad (1.2.7)$$

Az előírt megbízhatósági szintű hőigény meghatározása

Vezessük be a fűtési hőigény standard normális eloszlású valószínűségi változóját!

$$\xi_f = \frac{\dot{Q}_f - \dot{m}_f}{\sigma_f}.$$

Ebből a fűtési hőigény, mint valószínűségi változó:

$$\dot{Q}_f = \dot{m}_f + \xi_f \sigma_f. \quad (1.2.8)$$

Példának okáért válasszuk az ellátás biztonságát 99%-nak, azaz követeljük meg azt, hogy a megvalósuló hőigény 99%-os valószínűséggel kisebb vagy egyenlő legyen az általunk meghatározott mértékadó értéknél. Ekkor a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázatából, amelyre $M(\phi) = 0$, $\sigma(\phi) = 1$, mondhatjuk, hogy ahol $P(\xi) = 0,99$, ott $\xi = 2,33$.

Ezzel a fűtési hőigény mértékadó értéke, vagyis amelyre

$$P(\dot{Q} \geq \dot{Q}_{mf}) \leq 0,01,$$

$$\dot{Q}_{mf} = \dot{m}_{if} + 2,33 \sigma_{if}. \quad (1.2.9)$$

A fűtési hőigény várható értékének és szórásának analízise

A következőkben példán keresztül bemutatjuk különböző külső hőmérsékletek esetére, különböző bizonytalanságok mellett a konvekciós, filtrációs hőszükséglet, a belső-külső hőnyereség, valamint az eredő hőszükséglet bizonytalanságát és szórását.

A hőnyereség relatív szórása:

$$D_R(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k) = \frac{D(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)}{M(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)}. \quad (1.2.10)$$

A filtrációs hőveszteség relatív szórása:

$$D_R(\dot{V}\rho c) = \frac{D(\dot{V}\rho c)}{M(\dot{V}\rho c)}. \quad (1.2.11)$$

A transzmissziós hőveszteség relatív szórása:

$$D_R(kA) = \frac{D(kA)}{M(kA)}. \quad (1.2.12)$$

A konvekciós hőveszteség számításának összetevőinél a várható értékek:

$$M(k) = k_0, \quad (1.2.13)$$

$$M(A) = A_0. \quad (1.2.14)$$

A szórások:

$$D(k) = b_1 k_0, \text{ ahol } b_1 = \frac{D(k)}{M(k)}, \quad (1.2.15)$$

$$D(A) = b_2 A_0, \text{ ahol } b_2 = \frac{D(A)}{M(A)}. \quad (1.2.16)$$

Ekkor (1.1.39), illetve (1.2.5) alapján a fajlagos, a belső-külső hőmérséklet-különbség egységére vetített konvekciós hőszükséglet szórásnégyzete

$$D^2(kA) = b_1^2 k_0^2 b_2^2 A_0^2 + b_2^2 k_0^2 A_0^2 + b_1^2 k_0^2 A_0^2 = (b_1^2 b_2^2 + b_1^2 + b_2^2) k_0^2 A_0^2, \quad (1.1.17)$$

a várható érték pedig

$$M(kA) = k_0 A_0. \quad (1.2.18)$$

Az 1.2.1 táblázatban bemutatjuk, hogy a különböző $M(kA)$ várható értékekhez, és a különböző $D_R^2(kA)$ relatív szórásokhoz mekkora $D^2(kA)$ szórásnégyzet tartozik.

1.2.1. táblázat. A fajlagos konvekciós hőáram szórása $D(kA)$ a várható érték $M(kA)$ és relatív szórás függvényében

$M(kA)=k_0 A_0$	$(b_1^2 b_2^2 + b_1^2 + b_2^2) = D_R^2(kA) = \frac{D^2(kA)}{M^2(kA)}$							
	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
10	1,414 21	2	2,449 49	2,828 43	3,162 28	3,464 10	3,741 66	4
20	2,828 43	4	4,898 98	5,656 85	6,324 56	6,928 20	7,483 31	8
30	4,242 64	6	7,348 47	8,485 28	9,486 83	10,392 30	11,225 00	12
40	5,656 85	8	9,797 96	11,313 70	12,649 10	13,856 40	14,966 60	16
50	7,071 07	10	12,247 40	14,142 10	15,811 40	17,320 50	18,708 30	20
60	8,485 28	12	14,696 90	16,970 60	18,973 70	20,784 60	22,449 90	24
70	9,899 49	14	17,146 40	19,799 00	22,135 90	24,248 70	26,191 60	28
80	11,313 70	16	19,595 90	22,627 40	25,298 20	27,712 80	29,933 30	32
90	12,727 90	18	22,045 40	25,455 80	28,460 50	31,176 90	33,674 90	36
100	14,142 10	20	24,494 90	28,284 30	31,622 80	34,641 00	37,416 60	40

1.2.2. táblázat. A fajlagos filtrációs hőszükséglet szórása a várható érték és a relatív szórás függvényében

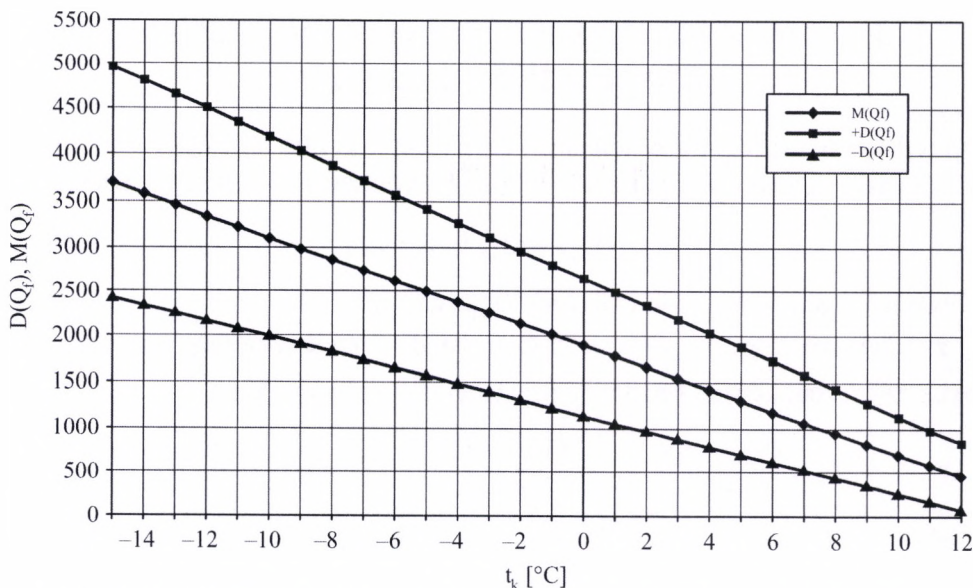
$M(\dot{V}_{pc})$	$D_R(\dot{V}_{pc}) = \frac{D(\dot{V}_{pc})}{M(\dot{V}_{pc})}$							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4
24	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2
30	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2
60	6,0	12,0	18,0	24,0	30,0	36,0	42,0	48,0

1.2.3. táblázat. A belső és külső hőnyereség szórása a várható érték és a relatív szórás függvényében

$M(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)$	$D_R(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k) = \frac{D(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)}{M(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)}$							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
100	10	20	30	40	50	60	70	80
200	20	40	60	80	100	120	140	160
300	30	60	90	120	150	180	210	240
400	40	80	120	160	200	240	280	320
500	50	100	150	200	250	300	350	400
600	60	120	180	240	300	360	420	480
700	70	140	210	280	350	420	490	560
800	80	160	240	320	400	480	560	640
900	90	180	270	360	450	540	630	720
1000	100	200	300	400	500	600	700	800

1.2.4. táblázat. A fűtési hőigény várható értéke és szórása,
ha $D(kA) = 8,48$, $D(\dot{V}_{pc}) = 30$, $D(\dot{Q}_B + \dot{Q}_k) = 250$

Külső hőmérséklet [$^{\circ}\text{C}$]	-15	-10	-5	0	5	10	12
Δt [$^{\circ}\text{C}$]	35	30	25	20	15	10	8
Várható érték $M(\dot{Q}_f)$ [W]	3700	3100	2500	1900	1300	700	460
Szórás $D(\dot{Q}_f)$ [W]	1119	968	818	672	530	400	353



1.2.1. ábra. A fűtési hőigények várható értékei és szórásai a külső hőmérséklet függvényében

Az 1.2.2 táblázatban a filtrációs fajlagos hőszükséglet különböző $M(\dot{V}\rho c)$ várható értékéhez és $D_R(\dot{V}\rho c) = \frac{D(\dot{V}\rho c)}{M(\dot{V}\rho c)}$ relatív szórásához meghatároztuk a fajlagos filtrációs hőszükséglet $D(\dot{V}\rho c)$ szórásait.

Az 1.2.3 táblázatban a belső-külső hőnyereség $M(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)$ várható értékéhez és $D_k(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k) = \frac{D(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)}{M(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)}$ relatív szórásához hozzárendeltük a belső-külső hőnyereség szórását $[D(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k)]$.

A fentiekből – ha $M(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k) = 500$ W, $D(\dot{Q}_b + \dot{Q}_k) = 250$ W, $M(\dot{V}\rho c) = 60$ W/K, $D(\dot{V}\rho c) = 30$ W/K, $M(kA) = 60$ W/K és $D^2(kA) = 18,9737$, illetve $8,48$ W²/K² – a (1.2.6) és (1.2.7) képlettel meghatároztuk a külső hőmérséklet függvényében a fűtési hőszükséglet $(\dot{Q}_f)$ várható értékét $[M(\dot{Q}_f)]$ és szórását $[D(\dot{Q}_f)]$.

Az értékeket az 1.2.4. táblázatban és az 1.2.1 ábrán mutatjuk be.

1.3. Az egyidejű fűtési hőigények meghatározása a fogyasztók csoportjára

Ha n darab fűtési fogyasztó hőigényét egyenként ismerjük úgy, hogy ismert előttünk annak eloszlása, várható értékével (m) és szórásával (σ), akkor feladatunk a

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_{1,f} + \dot{Q}_{2,f} + \dots + \dot{Q}_{n,f} \quad (1.3.1)$$

együttes hőigény mértékadó értékének meghatározása.

Feltételezve, hogy $\dot{Q}_{1,f}, \dot{Q}_{2,f}, \dots, \dot{Q}_{n,f}$ mind normális eloszlást mutatnak, vegyük az ezekből képzett standard normális eloszlású változókat:

$$\xi_1 = \frac{\dot{Q}_{1,f} - m_{1,f}}{\sigma_{1,f}}, \quad \xi_2 = \frac{\dot{Q}_{2,f} - m_{2,f}}{\sigma_{2,f}}, \dots, \xi_n = \frac{\dot{Q}_{n,f} - m_{n,f}}{\sigma_{n,f}}, \quad (1.3.2)$$

ahol

m_{if} egy fogyasztó fűtési hőigényének várható értéke,

σ_{if} egy fogyasztó fűtési hőigényének szórása.

E kifejezésekből a $\dot{Q}_{1,f}, \dot{Q}_{2,f}, \dots, \dot{Q}_{n,f}$ fogyasztói hőigények mint valószínűségi változók mértékadó értékei:

$$\dot{Q}_{m1,f} = m_{1,f} + \xi_1 \sigma_{1,f}, \quad \dot{Q}_{m2,f} = m_{2,f} + \xi_2 \sigma_{2,f}, \dots, \quad \dot{Q}_{mn,f} = m_{n,f} + \xi_n \sigma_{n,f}. \quad (1.3.3)$$

Legyen $\xi_1 \equiv \xi_2 \equiv \dots \equiv \xi_n \equiv \xi$.

Feltételeztük a hőigények normális eloszlását. Felhasználva az (1.1.26), (1.1.27) és (1.1.28) összefüggéseket, n fűtési fogyasztó esetén az adott megbízhatósági szintű, egyidejű hőigény számítására felírhatjuk a következőt:

$$\dot{Q}_{m,f} = (m_{1,f} + m_{2,f} + \dots + m_{n,f}) + \xi \cdot \left(\sqrt{\sigma_{1,f}^2 + \sigma_{2,f}^2 + \dots + \sigma_{n,f}^2} \right). \quad (1.3.4)$$

A 99%-os megbízhatósági szintű hőigény:

$$\dot{Q}_{m,f} = (m_{1,f} + m_{2,f} + \dots + m_{n,f}) + 2,33 \cdot \left(\sqrt{\sigma_{1,f}^2 + \sigma_{2,f}^2 + \dots + \sigma_{n,f}^2} \right). \quad (1.3.5)$$

Definiáljuk az egyidejűségi tényezőt, mint az (1.3.4) képlettel meghatározott és az egyedi hőigények egyszerű összegzésével nyerhető hőigény arányát:

$$e = \frac{\dot{Q}_{m,f}}{\sum_{i=1}^n \dot{Q}_{m,i,f}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_{i,f} + \xi \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{i,f}^2}}{\sum_{i=1}^n (m_{i,f} + \xi \cdot \sigma_{i,f})}. \quad (1.3.6)$$

Legyenek azonosak a fogyasztók, és nézzük meg, hogy ha $n \rightarrow \infty$, mekkora az egyidejűségi tényező!

Az (1.3.6) kifejezés határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e = \frac{n m_f + \xi \sqrt{n} \sigma_f}{n(m_f + \xi \sigma_f)} = \frac{m_f}{m_f + \xi \sigma_f} + \frac{\xi \sigma_f}{\sqrt{n}(m_f + \xi \sigma_f)} = \frac{m_f}{m_f + \xi \sigma_f}. \quad (1.3.7)$$

2. HŐÁTVITEL A FÜTÖTT TEREK HATÁROLÓ SZERKEZETEIBEN

A fűtött terekből az alacsonyabb hőmérsékletű környezet felé a hőmérsékletkülönbség hatására a határoló szerkezeten keresztül hőáram indul meg, amelyet hőveszteségnek nevezünk. A fűtés célja a hőveszteség pótlása és a levegő hőmérsékletének az előírt értéken való tartása. A fűtött térből a hő környezetbe való kiáramlása hőátvitellel valósul meg.

A hőátvitel során a hő a meleg közegből (folyadékból, gázból) hőátadással jut a meleg közeggel érintkező szilárd közegbe (a határoló szerkezetbe), a szilárd közegben a hő vezetéssel terjed, majd pedig a szilárd fal hideg közeggel érintkező oldaláról hőátadással jut el az energia (hő) az alacsonyabb hőmérsékletű (hideg) közegbe (folyadékba, gázba). A hőátvitel tehát hőátadás-hővezetés-hőátadás láncolata. A hőátvitel végbemehet állandósult módon, illetve időben változóan, instacionáriusan. Könyvünkben mind az állandósult, mind a nemállandósult hőátvitel leírását és számítását bemutatjuk.

A hőátvitel számítását stacionárius esetben az eredő hőátviteli ellenállás meghatározásával végezzük.

Instacionáris esetben a hőátvitel leírása és számítása a hővezetés differenciálegyenletének harmadfajú peremfeltételek mellett történő megoldását jelenti.

Ha többretegű határoló szerkezetekről van szó, a nemállandósult hővezetés leírása analitikus eszközökkel jelentős problémát jelent, és inkább a numerikus megoldásokhoz kell folyamodnunk.

2.1. Az időben állandósult hőterjedés alapeseteinek elméleti összefoglalása

A hő terjedése végbemehet vezetéssel, hőátadással (konvekcióval), hősugárzással és ezek láncolatát képező hőátvitellel. A hő terjedése a tér két tetszőleges pontja között az azokban mérhető hőmérséklet-különbség hatására következik be. Az alábbiakban áttekintést adunk a hőterjedés különböző eseteinek leírásáról és ismertetjük a mérnöki gyakorlatban alkalmazott számítóképleteket.

2.1.1. Hővezetés

2.1.1.1. A hővezetés alapegyenletei differenciálegyenlet formájában

Derékszögű koordináta-rendszerben

A hőáramsűrűség (állandó):

$$\varphi(x) = -\lambda(t) \frac{dt}{dx}. \quad (2.1.1)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi(x) = -\lambda(t) \frac{dt}{dx}. \quad (2.1.2)$$

Hengerszimmetrikus hővezetés

A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi(r) = -\lambda(t) \frac{dt}{dr}. \quad (2.1.3)$$

A hőáram (a sugár mentén állandó):

$$\phi(r) = -\lambda(t) \cdot 2r \cdot \pi \cdot \frac{dt}{dr}. \quad (2.1.4)$$

Gömbszimmetrikus hővezetés

A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi(r) = -\lambda(t) \frac{dt}{dr}. \quad (2.1.5)$$

A hőáram (a sugár mentén állandó):

$$\phi(r) = -\lambda(t) \cdot 4r^2 \cdot \pi \cdot \frac{dt}{dr}. \quad (2.1.6)$$

2.1.1.2. A hővezetés alapegyenletei a hővezetési ellenállás fogalmának bevezetésével

A hővezetési ellenállás definiálható a hőáramsűrűségre:

$$\varphi = \frac{\Delta t}{R_{hs}}, \text{ ekkor } \phi = A \cdot \frac{\Delta t}{R_{hs}}, \quad (2.1.7)$$

vagy a hőáramra:

$$\phi = \frac{\Delta t}{R_h}, \text{ ekkor } \varphi = \frac{\Delta t}{A \cdot R_h}, \quad (2.1.8)$$

ahol

$$\Delta t = t_m - t_h \quad (2.1.9)$$

a „meleg és hideg oldal” hőmérsékletének különbsége, a hőáramlást indukáló hajtóerő.

A két hővezetési ellenállás kapcsolata:

$$R_{hs} = A R_h . \quad (2.1.10)$$

A következőkben a hőáram számítására definiált hővezetési ellenállások képleteit mutatjuk be. A vezetési modellben a hőáramlás a pozitív x-tengely irányában megy végbe, henger- és gömbszimmetrikus esetben pedig belülről kifelé, a sugár növekvő értékei irányában történik. Többretegű szerkezetekben a rétegek számozása kívülről befelé, csökkenő x-értékek, illetve csökkenő r-értékek irányában halad. A továbbiakban a hővezetési ellenállást index nélkül írjuk, de a hőáramra definiált hővezetési ellenállást értjük alatta.

Egyrétegű szerkezetek

- Síkfalra:

A hőáramsűrűség (állandó):

$$\varphi = \frac{\Delta t}{A \cdot R}, \quad A = a \cdot h. \quad (2.1.11)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t}{R}. \quad (2.1.12)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R = \frac{\delta}{\lambda \cdot A}. \quad (2.1.13)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t = t_m - t_h. \quad (2.1.14)$$

- Henger esetében, egyenértékű felülettel számolva:

A hőáramsűrűség (a sugár mentén változó):

$$\varphi = \frac{\Delta t}{A \cdot R_c}, \quad A = 2\pi r. \quad (2.1.15)$$

A hőáram (a sugár mentén állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t}{R_c}. \quad (2.1.16)$$

Az egyenértékű felület:

$$A_c = \frac{A_1 - A_2}{\ln \frac{A_1}{A_2}}. \quad (2.1.17)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_e = \frac{\delta}{\lambda \cdot A_e}. \quad (2.1.18)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t = t_m - t_h = t_2 - t_1. \quad (2.1.19)$$

- Henger esetében, vonatkoztatási felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi = \frac{\Delta t}{A_v \cdot R_v}. \quad (2.1.20)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t}{R_v}. \quad (2.1.21)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_v = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_1}{r_2}. \quad (2.1.22)$$

A vonatkoztatási felület:

$$A_v = 2r_v\pi, \quad (2.1.23)$$

ahol r_v a vonatkoztatási sugár.

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t = t_m - t_h = t_2 - t_1. \quad (2.1.24)$$

- Gömb esetében, egyenértékű felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi = \frac{\Delta t}{A \cdot R_e}, \quad A = 4r^2 \cdot \pi. \quad (2.1.25)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t}{R_e}. \quad (2.1.26)$$

Az egyenértékű felület:

$$A_e = \sqrt{A_1 \cdot A_2}. \quad (2.1.27)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_e = \frac{\delta}{\lambda \cdot A_e}. \quad (2.1.27)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t = t_m - t_h = t_2 - t_1. \quad (2.1.28)$$

- Gömb esetében, vonatkoztatási felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi = \frac{\Delta t}{A_v \cdot R_v}. \quad (2.1.29)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t}{R_v}. \quad (2.1.30)$$

A vonatkoztatási felület:

$$A_v = 4r_v^2 \cdot \pi. \quad (2.1.31)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_v = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2}. \quad (2.1.32)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t = t_m - t_h = t_2 - t_1. \quad (2.1.33)$$

Többrétegű szerkezetek

- Síkfal, egyenértékű felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (állandó):

$$\varphi = \frac{\Delta t_{i,i-1}}{A_{ci} \cdot R_{ci}}, \quad \varphi = \frac{\Delta t_{n,0}}{A_c \cdot R_c}, \quad A_{ci} = A_c = a \cdot h. \quad (2.1.34)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t_{n,0}}{R_c}. \quad (2.1.35)$$

Az egyenértékű felület azonos minden rétegre:

$$A_c = A_{c0} = A_{c1} = \dots = A_{cn} \quad (2.1.36)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_c = \sum R_{ci}, \quad R_{ci} = \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot A_c}. \quad (2.1.37)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t_{n,0} = t_m - t_h = t_n - t_0. \quad (2.1.38)$$

- Síkfal, vonatkoztatási felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (állandó):

$$\varphi = \frac{\Delta t_{i,i-1}}{A_{vi} \cdot R_{vi}}, \quad \varphi = \frac{\Delta t_{n,0}}{A_v \cdot R_v}, \quad A_{vi} = A_v = a \cdot h. \quad (2.1.39)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t_{n,0}}{R_v}. \quad (2.1.40)$$

A vonatkoztatási felület minden rétegre:

$$A_v = A_{v1} = A_{v2} = \dots = A_{vn} \equiv A_c. \quad (2.1.41)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_v = \sum R_{vi}, \quad R_{vi} = \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot A_v}. \quad (2.1.42)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t_{n,0} = t_m - t_h = t_n - t_0, \quad (2.1.43)$$

$$\Delta t_{i,i-1} = t_i - t_{i-1}. \quad (2.1.44)$$

- Hengerszimmetrikus hővezetés, egyenértékű felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi = \frac{\Delta t_{i,i-1}}{A \cdot R_{ci}}, \quad \varphi = \frac{\Delta t_{n,0}}{A \cdot R_c}, \quad A = 2r\pi, \quad r_i \leq r \leq r_{i-1}. \quad (2.1.45)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t_{n,0}}{R_c}. \quad (2.1.46)$$

Az egyenértékű felület:

$$A_{ci} = \frac{A_{i-1} - A_i}{\ln \frac{A_{i-1}}{A_i}}. \quad (2.1.47)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_{ci} = \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot A_{ci}} \quad \text{vagy} \quad R_{ci} = \frac{1}{2\pi \cdot \lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}, \quad (2.1.48)$$

$$R_c = \sum R_{ci}. \quad (2.1.49)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t_{n,0} = t_m - t_h = t_n - t_0, \quad (2.1.50)$$

$$\Delta t_{i,i-1} = t_i - t_{i-1}. \quad (2.1.51)$$

- Hengerszimmetrikus hővezetés, vonatkoztatási felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi = \frac{\Delta t_{i,i-1}}{A_{vi} \cdot R_{ci}}, \quad \varphi = \frac{\Delta t_{n,0}}{A_{vi} \cdot R_v}, \quad A_{vi} = 2r_{vi}\pi, \quad r_i \leq r_{vi} \leq r_{i-1}. \quad (2.1.52)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t_{n,0}}{R_v}. \quad (2.1.53)$$

A vonatkoztatási felület:

$$A_{vi} = 2r_{vi} \cdot \pi. \quad (2.1.54)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_{vi} = \frac{1}{2\pi \cdot \lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}, \quad R_v = \sum_i R_{vi}. \quad (2.1.55)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t_{n,0} = t_m - t_h = t_n - t_0, \quad (2.1.56)$$

$$\Delta t_{i,i-1} = t_i - t_{i-1}. \quad (2.1.57)$$

- Gömbszimmetrikus hővezetés, egyenértékű felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi = \frac{\Delta t_{i,i-1}}{A \cdot R_{ci}}, \quad \varphi = \frac{\Delta t_{n,0}}{A \cdot R_c}, \quad A = 4r^2\pi, \quad r_i \leq r \leq r_{i-1}. \quad (2.1.58)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t_{n,0}}{R_c}. \quad (2.1.59)$$

Az egyenértékű felület:

$$A_{ci} = \sqrt{A_i A_{i-1}}. \quad (2.1.60)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_{ci} = \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot A_{ci}} \quad \text{vagy} \quad R_{ci} = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda_i} \frac{r_{i-1} - r_i}{r_{i-1} \cdot r_i}, \quad (2.1.61)$$

$$R_c = \sum R_{ci}. \quad (2.1.62)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t_{n,0} = t_m - t_h = t_n - t_0, \quad (2.1.63)$$

$$\Delta t_{i,i-1} = t_i - t_{i-1}. \quad (2.1.64)$$

- Gömbszimmetrikus hővezetés, vonatkoztatási felülettel számolva:
A hőáramsűrűség (a sugár mentén változik):

$$\varphi = \frac{\Delta t_{i,i-1}}{A_{vi} \cdot R_{vi}}, \quad \varphi = \frac{\Delta t_{n,0}}{A_{vi} \cdot R_v}, \quad A_{vi} = 4r_{vi}^2 \pi, \quad r_i \leq r_{vi} \leq r_{i-1}. \quad (2.1.65)$$

A hőáram (állandó):

$$\phi = \frac{\Delta t_{n,0}}{R_v} . \quad (2.1.66)$$

A vonatkoztatási felület:

$$A_{vi} = 4r_{vi}^2 \cdot \pi . \quad (2.1.67)$$

A hővezetési ellenállás:

$$R_{vi} = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda_i} \cdot \frac{r_{i-1} - r_i}{r_{i-1} \cdot r_i} , \quad R_v = \sum R_{vi} . \quad (2.1.68)$$

A hőmérséklet-különbség:

$$\Delta t_{n,0} = t_m - t_h = t_n - t_0 , \quad (2.1.69)$$

$$\Delta t_{i,i-1} = t_i - t_{i-1} . \quad (2.1.70)$$

2.1.2. Számítási eljárások egy- és többretegéből álló szerkezetekben végbemenő hővezetésre hőmérséklettől függő hővezetési tényező esetében

2.1.2.1. Általános összefüggések

A hőáramsűrűség: $\varphi = \frac{\phi}{A} , \quad \varphi = \frac{\Delta t}{A \cdot R} .$	W/m ²	(2.1.71)
A hőáram: $\phi = -\lambda(t) \cdot A \frac{dt}{dx} , \quad \phi = \frac{\Delta t}{R} , \quad \phi = A_v \cdot \frac{\Delta t}{R_v} , \quad \phi = A_c \cdot \frac{\Delta t}{R_c} .$	W	(2.1.72)
A hővezetési tényező: $\lambda(t) = a \cdot t + b .$	W/(m K)	(2.1.73)

2.1.2.2. A különböző geometriákra specifikált összefüggések

A hővezetési ellenállásokat teljes részletességgel az 1. függelékben mutatjuk be, az alapösszefüggéseket a következő pontokban ismertetjük.

Alapösszefüggések egyrétegű sík szerkezetre

A vonatkoztatási felület indexe: $v = 0 \text{ vagy } n .$	(2.1.74)
---	----------

Legyen		
	$t_0 < t_n.$	(2.1.75)
A közepes hőmérséklet:	$t_k = \frac{t_n + t_0}{2}.$	°C (2.1.76)
A hőmérséklet-különbség:	$\Delta t = t_n - t_0.$	K (2.1.77)

A hővezetési tényező együtthatóinak kiszámítása az adott (t_1, λ_1) és (t_2, λ_2) értékpárokból: Legyen $t_1 < t_2$. Akkor		
$a = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1},$	W/(m K ²)	(2.1.78)
$b = \lambda_1 - a \cdot t_1.$	W/(m K)	(2.1.79)
A közepes hővezetési tényező: $\lambda_k = a \cdot t_k + b.$	W/(m K)	(2.1.80)
A hővezetési ellenállás: az egyenértékű felülettel és a vonatkoztatási felülettel számoltak megegyeznek. $R_c = \frac{\delta}{\lambda_k}, R_v = \frac{\delta}{\lambda_k}.$	(m ² K)/W	(2.1.81)
A hőáram vonatkoztatási felülettel: $\phi = \frac{A_v}{R_v} \Delta t.$	W	(2.1.82)
A hőáram egyenértékű felülettel: $\phi = \frac{A_c}{R_c} \Delta t, A_v = A_c, R_v = R_c.$	W	

Alapösszefüggések többretegű sík szerkezetekre

A vonatkoztatási felület indexe $v = 0, 1, \dots, i, \dots, n.$	(2.1.83)
A hőmérsékletek a réteghatáron: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n,$	(2.1.84)

A közepes hőmérsékletek a rétegekben: $t_{k,i} = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}.$	°C	(2.1.85)
A hőmérséklet-különbség a réteghatárok között: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1},$ $\Delta t = \sum_{i=1}^n \Delta t_i = t_n - t_0.$	K K	(2.1.86)

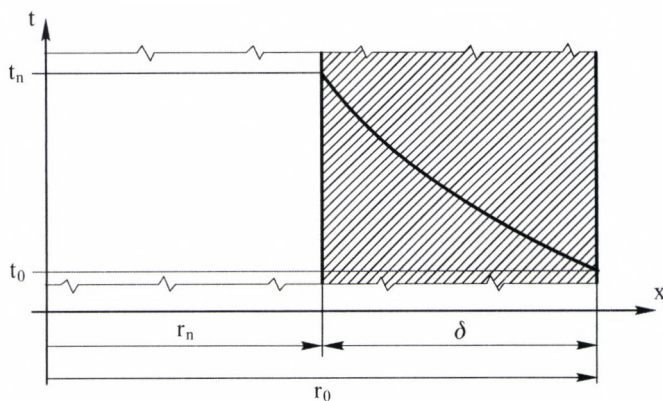
A hővezetési tényezők együtthatói a rétegekben az adott $(t_1, \lambda_1)_i$ és $(t_2, \lambda_2)_i$ értékpárokból: Legyen $t_1 < t_2$, akkor az együtthatók $a_i = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{t_2 + t_1},$ $b_i = \lambda_1 - a_i \cdot t_1.$	W/(m K ²) W/(m K)	(2.1.87) (2.1.88)
A közepes hővezetési tényező a rétegekben: $\lambda_{k,i} = a_i \cdot t_{k,i} + b_i.$	W/(m K)	(2.1.89)
Az eredő hővezetési ellenállás: $R_v = \sum_{i=1}^n R_{v,i},$ $R_{v,i} = \frac{\delta_i}{\lambda_{k,i}}.$	(m ² K)/W W/(m K)	

A hőáram a rétegekben azonos. Egy rétegre $\phi = \frac{A_v}{R_{v,i}} \Delta t_i.$	W	(2.1.90)
A teljes szerkezetre vonatkoztatási felülettel: $\phi = \frac{A_v}{R_v} \Delta t.$	W	
Egy rétegre $\phi = \frac{A_{e,i}}{R_{e,i}} \Delta t_i.$	W	

A teljes szerkezetre egyenértékű felülettel: $\phi = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{R_{e,i}}{A_{e,i}}} \Delta t .$	W	(2.1.90)
--	---	----------

Alapösszefüggések egyrétegű hengeres falra (2.1.1. ábra)

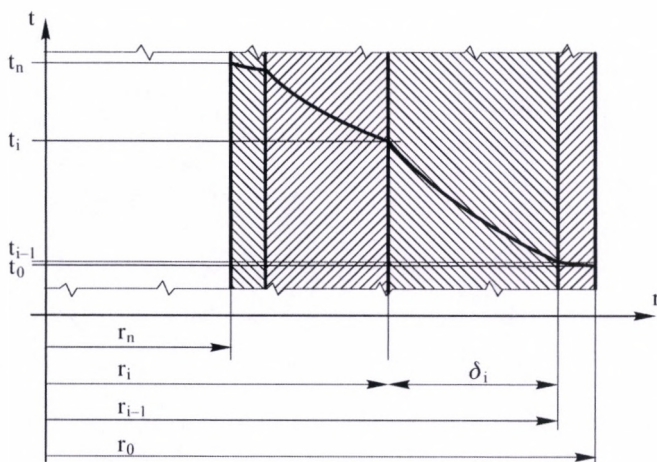
A vonatkoztatási felület: $A_v = 2 \cdot \pi \cdot r_v \cdot l .$	m ²	(2.1.91)
Az egyenértékű felület: $A_e = \frac{A_0 - A_n}{\ln \frac{A_0}{A_n}} .$	m ²	(2.1.92)
A hővezetési ellenállás vonatkozású felülettel: $R_v = r_v \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{r_0}{r_n} = r_v \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{A_0}{A_n} .$	(m ² K)/W	(2.1.93)
A hőáram: $\phi_l = \frac{\phi}{l} .$	W/m	(2.1.94)



2.1.1. ábra. Hővezetés egyrétegű hengeres falban

Alapösszefüggések többretegű hengeres falra (2.1.2. ábra)

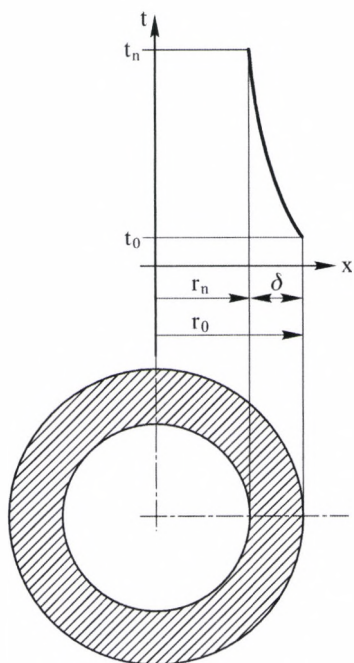
A vonatkoztatási felület: $A_v = 2 \pi r_v \cdot l.$	m^2	(2.1.95)
Az egyenértékű felület az i-edik rétegben: $A_{e,i} = \frac{A_{i-1} - A_i}{\ln \frac{A_{i-1}}{A_i}}.$	m^2	(2.1.96)
A hővezetési ellenállás vonatkoztatású felülettel az i-edik rétegben: $R_{v,i} = r_v \frac{1}{\lambda_{k,i}} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i} = r_v \frac{1}{\lambda_{k,i}} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}.$	$(m^2 K)/W$	(2.1.97)
A teljes hővezetési ellenállás vonatkoztatási felülettel: $R_v = r_v \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{k,i}} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i} = r_v \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{k,i}} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}.$	$(m^2 K)/W$	(2.1.98)



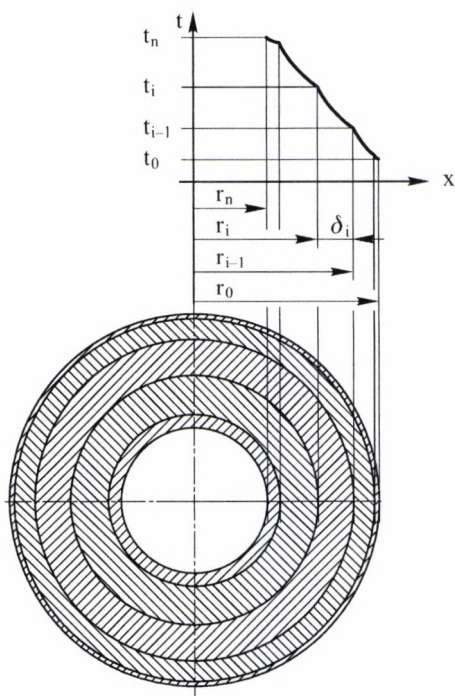
2.1.2. ábra. Hővezetés többretegű hengeres falban

Alapösszefüggések egyrétegű gömbfalra (2.1.3. ábra)

A vonatkoztatási felület: $A_v = 4 \cdot \pi \cdot r_v^2.$	m^2	(2.1.99)
Az egyértékű felület: $A_c = \sqrt{A_0 \cdot A_n}.$	m^2	(2.1.100)
A hővezetési ellenállás vonatkoztatási felülettel: $R_v = r_v^2 \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_0} \right).$	$(m^2 \text{ K})/W$	(2.1.101)



2.1.3. ábra. Hővezetés egyrétegű gömbfalban



2.1.4. ábra. Hővezetés többretegű gömbfalban

Alapösszefüggések többrétegű gömbfalra (2.1.4. ábra)

A vonatkoztatási felület: $A_v = 4 \cdot \pi \cdot r_v^2.$	m^2	(2.1.102)
Az egyértékű felület: $A_e = \sqrt{A_0 \cdot A_n}$	m^2	(2.1.103)
A hővezetési ellenállás vonatkoztatási felülettel az i-rétegre: $R_{v,i} = r_v^2 \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i-1}} \right)$	$(m^2 \text{ K})/W$	(2.1.104)
A hővezetési ellenállás a teljes szerkezetre vonatkoztatási felülettel: $R_v = r_v^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{k,i}} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i-1}} \right)$	$(m^2 \text{ K})/W$	(2.1.105)

2.1.2.3. A hőáramegyenletek a számítások elvégzéséhez és az előforduló feladattípusok

Számításainkban a hőáramsűrűsége definiált hővezetési ellenállásokat használjuk, amelyek:

$R_e = A_e \cdot R$, az egyenértékű rétegfelülethez rendelt hővezetési ellenállás,

$R_v = A_v \cdot R$, a vonatkoztatási felülethez rendelt hővezetési ellenállás.

Feltételezzük, hogy a hővezetési tényező hőmérséklettől való függése minden rétegben elsőfokú:

$$\lambda_{k,i} = a_i \cdot t_{k,i} + b_i. \quad (2.1.106)$$

Behelyettesítjük a középhőmérséklet képletét:

$$\lambda_{k,i} = a_i \cdot 0,5 \cdot (t_i + t_{i-1}) + b_i. \quad (2.1.107)$$

A hővezetési ellenállás képletének nevezőjében szerepel a hővezetési tényező:

$$R_{v,i} = \frac{X_i}{\lambda_{k,i}} = \frac{X_i}{a_i \cdot 0,5 \cdot (t_i + t_{i-1}) + b_i}. \quad (2.1.108)$$

Az X_i a hővezetési ellenállás képletének az a része, amely a szerkezeti elem (réteg) geometriai alakjából adódik.

Az X_i a geometriától függően

- síkfalra

$$X_i = \delta_i, \quad (2.1.109)$$

- hengerre

$$X_i = r_v \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}, \quad (2.1.110)$$

- gömbre

$$X_i = r_v^2 \frac{r_{i-1} - r_i}{r_{i-1} r_i}. \quad (2.1.111)$$

A hővezetési ellenállás képletét behelyettesítjük a hőáram képletébe, és így

$$\phi = \frac{A_v}{R_{v,i}} \Delta t_i, \quad (2.1.112)$$

illetve

$$\phi = \frac{A_v}{X_i} (t_i - t_{i-1}), \quad (2.1.113)$$

$$\frac{a_i \cdot 0,5 \cdot (t_i + t_{i-1}) + b_i}{a_i \cdot 0,5 \cdot (t_i + t_{i-1}) + b_i}$$

$$\phi = \frac{A_v}{X_i} [a_i \cdot 0,5 \cdot (t_i + t_{i-1}) + b_i] \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (2.1.114)$$

Elvégezzük a kijelölt műveleteket, és új jelölések (A_i és B_i) bevezetésével összevonjuk az állandókat. Így a fal i -edik rétegének hőáramegyenletéhez jutunk.

$$\phi = A_i \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad (I)$$

ahol

- síkfalra

$$A_i = 0,5a_i \frac{A_v}{\delta_i}, \quad B_i = b_i \frac{A_v}{\delta_i},$$

- hengerre

$$A_i = 0,5a_i \frac{A_v}{r_v \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}}, \quad B_i = b_i \frac{A_v}{r_v \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}},$$

- gömbre

$$A_i = 0,5a_i \frac{A_v}{r_v^2 \frac{r_{i-1} - r_i}{r_{i-1} r_i}}, \quad B_i = b_i \frac{A_v}{r_v^2 \frac{r_{i-1} - r_i}{r_{i-1} r_i}}.$$

A rétegszámtól és a keresett ismeretlenektől függően többféle feladat tűzhető ki. A feladatok megoldásában alapvető szerepet játszik a fenti hőáramegyenlet (I).

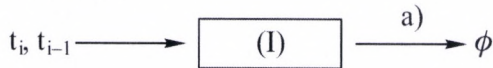
A továbbiakban – bemenet-kimenet modellen – ábrázoljuk a feladatok megoldásának menetét. Az ábra bal oldalán áll, illetve állnak a behelyettesítendő, ismert változók. Az egyenlet, amelybe behelyettesítünk, középen (zárójelben) áll. A jobb oldalon lévő nyíl fölött a feladat típusának sorszáma található. A jobb szélén helyezkedik el a keresett változó.

A meghatározandó ismeretlenek szerint a következő feladattípusok lehetségesek:

- a) Ismert egy réteget határoló két felület hőmérséklete (t_i, t_{i-1}), kiszámítandó a rétegben létrejövő hőáram

Behelyettesítjük az ismert t_i és t_{i-1} hőmérsékleteket az (I) egyenletbe. A behelyettesítés után az egyenlet jobb oldala nem tartalmaz ismeretlent, így a kijelölt műveletek elvégzése után megkapjuk a ϕ értékét.

Ábrázolva a feladatot:



- b) Ismert egy rétegben jelentkező hőáram, a réteg hidegebb felületének hőmérséklete (t_{i-1}), kiszámítandó a réteg másik határoló felületének hőmérséklete

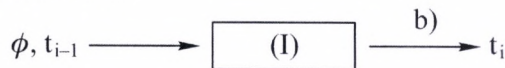
Behelyettesítjük az (I) egyenletbe a hőáram ϕ és az ismert hőmérséklet t_{i-1} értékét, t_i -re rendezzük és nullára redukáljuk az egyenletet:

$$A_i \cdot t_i^2 + B_i \cdot t_i - (A_i \cdot t_{i-1}^2 + B_i \cdot t_{i-1} + \phi) = 0.$$

Megoldjuk t_i -re az egyenletet:

$$t_i = \frac{1}{2 \cdot A_i} \left(-B_i \pm \sqrt{B_i^2 + 4 \cdot A_i (A_i \cdot t_{i-1}^2 + B_i \cdot t_{i-1} + \phi)} \right).$$

A feladat ábrázolása:



- c) Ismert egy rétegben jelentkező hőáram, a réteg melegebb felületének hőmérséklete (t_i), kiszámítandó a réteg másik határfelületének hőmérséklete

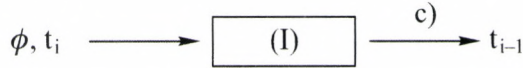
Behelyettesítjük a (I) egyenletbe a hőáram ϕ és az ismert hőmérséklet t_i értékét, t_{i-1} -re rendezzük és nullára redukáljuk az egyenletet:

$$-A_i \cdot t_{i-1}^2 - B_i \cdot t_{i-1} + (A_i \cdot t_i^2 + B_i \cdot t_i - \phi) = 0.$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$t_i = \frac{1}{2 \cdot A_i} \left(-B_i \pm \sqrt{B_i^2 + 4 \cdot A_i (A_i \cdot t_i^2 + B_i \cdot t_i - \phi)} \right).$$

A feladat ábrázolása:



- d) Ismert egy kétrétegű fal két külső felületének hőmérséklete (t_{i-1} , t_{i+1}), kiszámítandó a közös határfelület hőmérséklete

A fal két rétegének hőáram-egyenletrendszere:

$$\phi = A_i \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad (I)$$

$$\phi = A_{i+1} \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1} \cdot (t_{i+1} - t_i). \quad (II)$$

Kivonjuk egymásból a két egyenletet, ezzel kiküszöböljük az ismeretlen ϕ -t:

$$A_i \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i \cdot (t_i - t_{i-1}) - A_{i+1} \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2) - B_{i+1} \cdot (t_{i+1} - t_i) = 0.$$

Ezután t_i -re rendezzük az egyenletet:

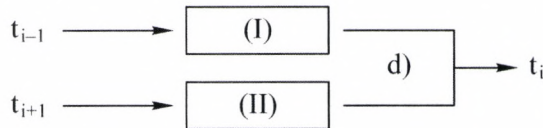
$$A_i \cdot t_i^2 + A_{i+1} \cdot t_i^2 + B_i \cdot t_i + B_{i+1} \cdot t_i - A_i \cdot t_{i-1}^2 - A_{i+1} \cdot t_{i+1}^2 - B_i \cdot t_{i-1} - B_{i+1} \cdot t_{i+1} = 0,$$

$$(A_i + A_{i+1}) \cdot t_i^2 + (B_i + B_{i+1}) \cdot t_i - (A_i \cdot t_{i-1}^2 + A_{i+1} \cdot t_{i+1}^2 + B_i \cdot t_{i-1} + B_{i+1} \cdot t_{i+1}) = 0.$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$t_i = \frac{1}{2 \cdot (A_i + A_{i+1})} \left[-(B_i + B_{i+1}) \pm \sqrt{(B_i + B_{i+1})^2 + 4(A_i + A_{i+1}) \cdot (A_i t_{i-1}^2 + A_{i+1} t_{i+1}^2 + B_i t_{i-1} + B_{i+1} t_{i+1})} \right].$$

A feladat ábrázolása:



- e) Ismert egy háromrétegű fal két külső határoló felületének hőmérséklete (t_{i-1} , t_{i-2}) és mindhárom réteg vastagsága. Ismeretlen a belső két határfelület hőmérséklete és a falban létrejövő hőáram

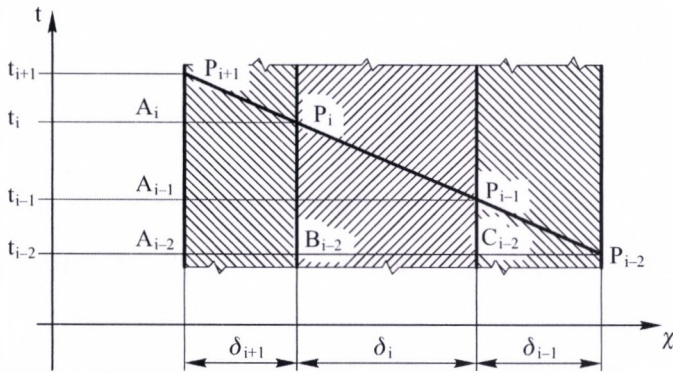
A három réteg hőáram-egyenletrendszere:

$$\phi = A_{i-1} \cdot (t_{i-1}^2 - t_{i-2}^2) + B_{i-1} \cdot (t_{i-1} - t_{i-2}), \quad (I)$$

$$\phi = A_i \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad (II)$$

$$\phi = A_{i+1} \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1} \cdot (t_{i+1} - t_i). \quad (III)$$

Az egyenletrendszert közelítő módszerrel oldjuk meg (lásd 2.1.5. ábra), meghozzá oly módon, hogy először a t_i közelítő értékét keressük meg.



2.1.5. ábra. Hőmérséklet-eloszlás többretegű síkfalban

A $P_{i+1}A_{i-2}P_{i-2}$ és a $P_{i+1}A_iP_i$ háromszögek hasonlósága alapján felírható a

$$\frac{t_{i-2} - t_{i+1}}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}} = \frac{t_i - t_{i+1}}{\delta_{i+1}}$$

aránypár, a $P_{i+1}A_{i-2}P_{i-2}$ és a $P_iB_{i-2}P_{i-2}$ háromszögek hasonlósága alapján pedig a

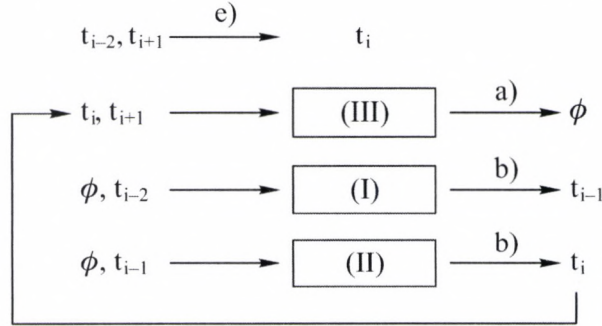
$$\frac{t_{i-2} - t_{i+1}}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}} = \frac{t_{i-2} - t_i}{\delta_i + \delta_{i-1}}$$

aránypár. Csak a t_i értéke ismeretlen mindkettőben, ezért

$$t_i = t_{i+1} + \frac{\delta_{i+1}}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}}(t_{i-2} - t_{i+1}),$$

$$t_i = t_{i-2} - \frac{\delta_i + \delta_{i-1}}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}}(t_{i-2} - t_{i+1}).$$

Behelyettesítjük az (III) egyenletbe a t_{i+1} ismert és a t_i közelítő értékét, elvégezzük a kijelölt műveleteket, a ϕ -t kapjuk eredményül. Az így kapott ϕ és a t_{i-2} ismert értékét behelyettesítve a (I) egyenletbe a b) feladatmegoldással megkapjuk a t_{i-1} értékét. A (II) egyenletbe behelyettesítjük a ϕ és a t_{i-1} értékét. A b) feladatmegoldással meghatározzuk a t_i értékét. Ezt behelyettesítjük az (III) egyenletbe, és így tovább, amint azt a számítás menetének ábrája mutatja:



A számítást addig folytatjuk, amíg az eltérés az előre megadott hibahatár alá nem csökken.

- f) Ismert egy háromrétegű fal két külső határoló felületének hőmérséklete (t_{i+1} , t_{i-2}) és mindhárom réteg vastagsága. Ismeretlen a belső két határfelület hőmérséklete és a falban létrejövő hőáram

A három réteg egyenletrendszere:

$$\phi = A_{i-1} \cdot (t_{i-1}^2 - t_{i-2}^2) + B_{i-1} \cdot (t_{i-1} - t_{i-2}), \quad (\text{I})$$

$$\phi = A_i \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad (\text{II})$$

$$\phi = A_{i+1} \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1} \cdot (t_{i+1} - t_i). \quad (\text{III})$$

Az egyenletrendszert közelítő módszerrel oldjuk meg (lásd 2.1.5. ábra), méghozzá olyan módon, hogy először a t_{i-1} közelítő értékét keressük meg. (Az e) feladatmegoldásnál a t_i értékét kerestük.)

A $P_{i+1}A_{i-2}P_{i-2}$ és a $P_{i-1}C_{i-2}P_{i-2}$ háromszögek hasonlósága alapján felírható a

$$\frac{t_{i-2} - t_{i+1}}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}} = \frac{t_{i-2} - t_{i-1}}{\delta_{i-1}}$$

aránypár, a $P_{i+1}A_{i-2}P_{i-2}$ és a $P_{i+1}A_{i-1}P_{i-1}$ háromszögek hasonlósága alapján pedig a

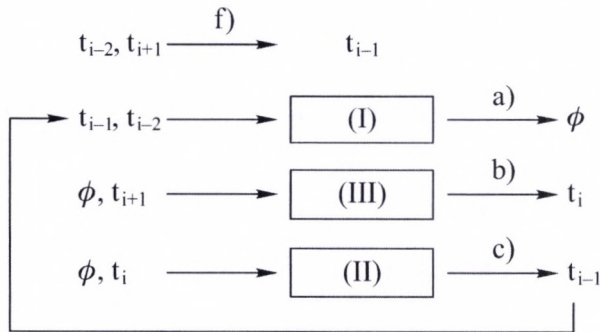
$$\frac{t_{i-2} - t_{i+1}}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}} = \frac{t_{i-1} - t_{i+1}}{\delta_{i+1} + \delta_i}$$

aránypár. Mindkét aránypárban csak a t_{i-1} értéke ismeretlen, ezért kifejezhető:

$$t_{i-1} = t_{i-2} - \frac{\delta_{i-1}}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}}(t_{i-2} - t_{i+1}),$$

$$t_{i-1} = t_{i-2} - \frac{\delta_{i+1} + \delta_i}{\delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}}(t_{i-2} - t_{i+1}).$$

Behelyettesítjük a (I) egyenletbe a t_{i-2} ismert és a t_{i-1} közelítő értékét, elvégezzük a kijelölt műveleteket, a ϕ -t kapjuk eredményül. Az így kapott ϕ és a t_{i+1} ismert értékét behelyettesítve a (III) egyenletbe, a b) feladatmegoldással megkapjuk t_i értékét. A (II) egyenletbe behelyettesítjük a ϕ és a t_i értékét. A b) feladatmegoldással meghatározzuk a t_{i-1} értékét. Ezt behelyettesítjük az (I) egyenletbe, és így tovább, amint azt a számítás menetének ábrája mutatja:



A számítást addig végezzük, amíg az eltérés a hibahatár alá nem csökken.

g) Ismert egy négyrétegű fal két külső határoló felületének hőmérséklete (t_{i+2} , t_{i-2}) és mind a négy réteg vastagsága. Ismeretlen a belső három határfelület hőmérséklete és a falban létrejövő hőáram

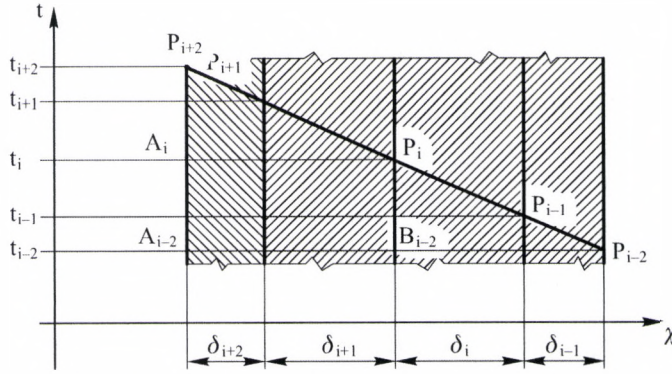
A négy réteg hőáram-egyenletrendszere:

$$\phi = A_{i-1} \cdot (t_{i-1}^2 - t_{i-2}^2) + B_{i-1} \cdot (t_{i-1} - t_{i-2}), \quad (I)$$

$$\phi = A_i \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad (II)$$

$$\phi = A_{i+1} \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1} \cdot (t_{i+1} - t_i), \quad (III)$$

$$\phi = A_{i+2} \cdot (t_{i+2}^2 - t_{i+1}^2) + B_{i+2} \cdot (t_{i+2} - t_{i+1}). \quad (IV)$$



2.1.6. ábra. Hőmérséklet-eloszlás többretegű síkfalban

Az egyenletrendszer célszerűen közelítő módszerrel oldjuk meg (lásd 2.1.6. ábra):

A $P_{i+2}A_{i-2}P_{i-2}$ és a $P_{i+2}A_iP_i$ hasonló háromszögekre felírható a

$$\frac{t_{i-2} - t_{i+2}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}} = \frac{t_i - t_{i+2}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1}},$$

a $P_{i+2}A_{i-2}P_{i-2}$ és a $P_iB_{i-2}P_{i-2}$ hasonló háromszögekre pedig a

$$\frac{t_{i-2} - t_{i+2}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}} = \frac{t_{i-2} - t_i}{\delta_i + \delta_{i-1}}$$

aránypár. Mindkét aránypárból kifejezhető a t_i értéke:

$$t_i = t_{i+2} + \frac{\delta_{i+2} + \delta_{i+1}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}}(t_{i-2} - t_{i+2}).$$

$$t_i = t_{i-2} - \frac{\delta_i + \delta_{i-1}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}}(t_{i-2} - t_{i+2}).$$

A (IV) egyenletbe behelyettesítjük a t_{i+2} ismert, a (III) egyenletbe pedig t_i most kiszámított közelítő értékét, az így kapott egyenleteket kivonjuk egymásból, t_{i+1} -re rendezzük, nullára redukáljuk és megoldjuk:

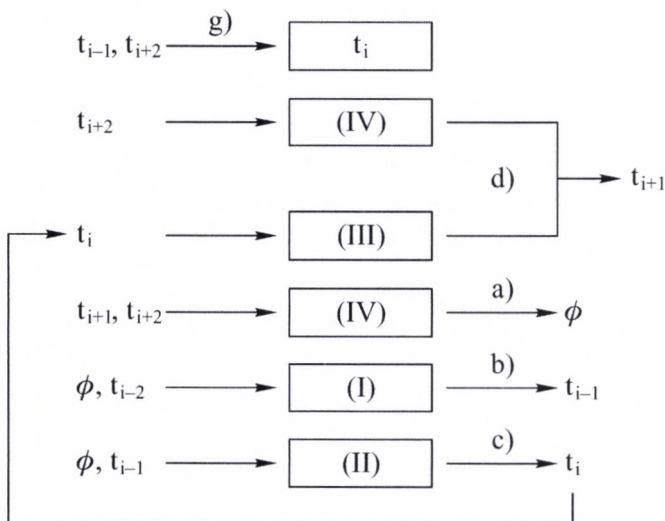
$$A_{i+1} \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1} \cdot (t_{i+1} - t_i) - A_{i+2} \cdot (t_{i+2}^2 - t_{i+1}^2) - B_{i+2} \cdot (t_{i+2} - t_{i+1}) = 0,$$

$$A_{i+1} \cdot t_{i+2}^2 + A_{i+2} t_{i+1}^2 + B_{i+1} t_{i+1} + B_{i+2} t_{i+1} - A_{i+1} t_i^2 - A_{i+2} t_{i+2}^2 - B_{i+1} t_i - B_{i+2} t_{i+2} = 0,$$

$$(A_{i+1} + A_{i+2}) t_{i+1}^2 + (B_{i+1} + B_{i+2}) t_{i+1} - (A_{i+1} t_i^2 + A_{i+2} t_{i+2}^2 + B_{i+1} t_i + B_{i+2} t_{i+2}) = 0.$$

$$t_{i+1} = \frac{1}{2(A_{i+1} + A_{i+2})} \left[-(B_{i+1} + B_{i+2}) \pm \sqrt{(B_{i+1} + B_{i+2})^2 + 4(A_{i+1} + A_{i+2}) \cdot (A_{i+1}t_i^2 + A_{i+2}t_{i+2}^2 + B_{i+1}t_i + B_{i+2}t_{i+2})} \right].$$

A t_{i+1} most kiszámított és a t_{i+2} adott értékét visszahelyettesítjük a (IV) egyenletbe, elvégezzük a kijelölt műveleteket, eredményként a ϕ értéket kapjuk. A ϕ és a t_{i-2} értékét behelyettesítjük a (I) egyenletbe, és a b) feladatmegoldással kiszámítjuk a t_{i-1} értékét. A ϕ és a t_{i-1} értékét behelyettesítve a (II) egyenletbe, a b) feladatmegoldással a t_i újabb értékéhez jutunk. Ettől kezdve a kívánt pontosságig folytatható az iteráció.



h) Ismert egy négynél több rétegből álló fal leghidegebb külső (t_0) és egy közben-ső határoló felületének hőmérséklete, valamint e két határfelület közötti összes réteg vastagsága. Ismeretlen az összes belső határfelület hőmérséklete és a fal-ban létrejövő hőáram

A rétegek hőáram-egyenletrendszere:

$$\phi = A_1(t_1^2 - t_0^2) + B_1(t_1 - t_0), \quad (I)$$

$$\phi = A_2(t_2^2 - t_1^2) + B_2(t_2 - t_1), \quad (II)$$

⋮

$$\phi = A_{i-2}(t_{i-2}^2 - t_{i-3}^2) + B_{i-2}(t_{i-2} - t_{i-3}), \quad (i-2)$$

$$\phi = A_{i-1}(t_{i-1}^2 - t_{i-2}^2) + B_{i-1}(t_{i-1} - t_{i-2}), \quad (i-1)$$

$$\phi = A_i(t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i(t_i - t_{i-1}), \quad (i)$$

$$\phi = A_{i+1}(t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1}(t_{i+1} - t_i), \quad (i+1)$$

$$\phi = A_{i+2}(t_{i+2}^2 - t_{i+1}^2) + B_{i+2}(t_{i+2} - t_{i+1}). \quad (i+2)$$

Az egyenletrendszert célszerűen közelítő módszerrel oldjuk meg (lásd 2.1.7. ábra):

A $P_{i+2}B_0P_0$ és a $P_{i+2}B_iP_i$ hasonló háromszögekre felírható a

$$\frac{t_0 - t_{i+2}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1} + \dots + \delta_1} = \frac{t_i - t_{i+2}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1}}$$

aránypár.

Ebből:

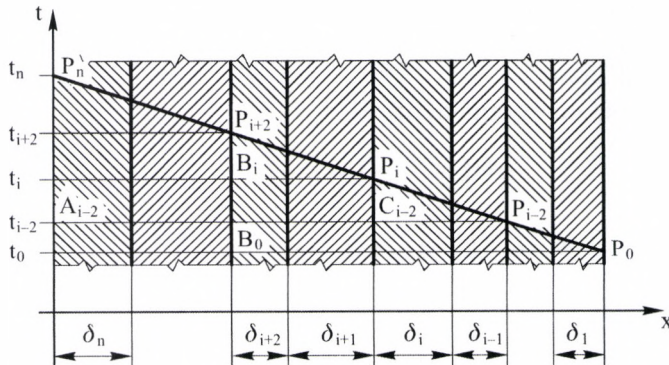
$$t_i = t_{i+2} + \frac{\delta_{i+2} + \delta_{i+1}}{\delta_{i+2} + \delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1} + \dots + \delta_1} (t_0 - t_{i+2}).$$

Az (i+2) egyenletbe behelyettesítjük a t_{i+2} ismert, a (i+1) egyenletbe pedig t_i most kiszámított közelítő értékét, az így kapott egyenleteket kivonjuk egymásból, t_{i+1} -re rendezzük, nullára redukáljuk és megoldjuk:

$$A_{i+1} \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1} \cdot (t_{i+1} - t_i) - A_{i+2} \cdot (t_{i+2}^2 - t_{i+1}^2) - B_{i+2} \cdot (t_{i+2} - t_{i+1}) = 0,$$

$$A_{i+1} \cdot t_{i+1}^2 + A_{i+2} t_{i+1}^2 + B_{i+1} t_{i+1} + B_{i+2} t_{i+1} - A_{i+1} t_i^2 - A_{i+2} t_{i+2}^2 - B_{i+1} t_i - B_{i+2} t_{i+2} = 0,$$

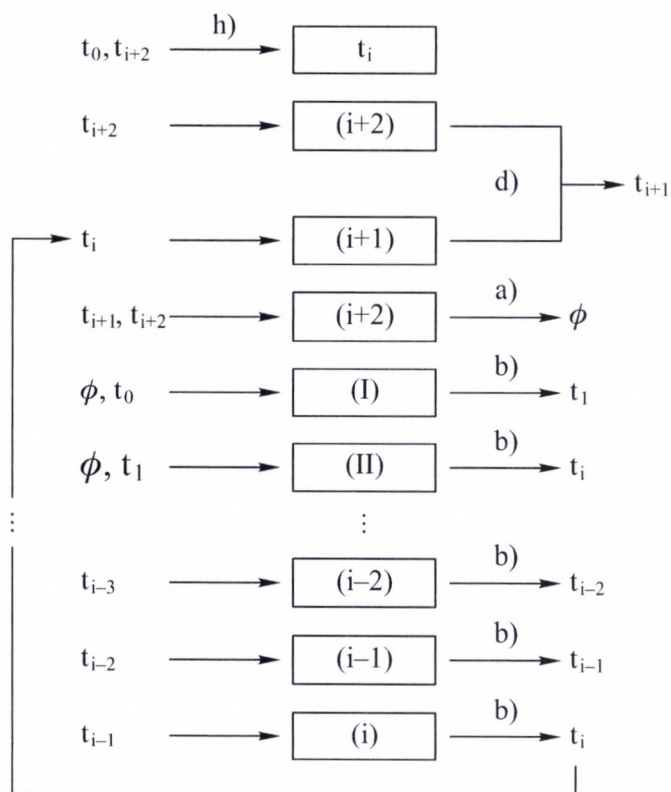
$$(A_{i+1} + A_{i+2}) t_{i+1}^2 + (B_{i+1} + B_{i+2}) t_{i+1} - (A_{i+1} t_i^2 + A_{i+2} t_{i+2}^2 + B_{i+1} t_i + B_{i+2} t_{i+2}) = 0.$$



2.1.7. ábra. Hőmérséklet-eloszlás többretegű síkfalban

$$t_{i+1} = \frac{1}{2(A_{i+1} + A_{i+2})} \left[-(B_{i+1} + B_{i+2}) \pm \sqrt{(B_{i+1} + B_{i+2})^2 + 4(A_{i+1} + A_{i+2}) \cdot (A_{i+1}t_i^2 + A_{i+2}t_{i+2}^2 + B_{i+1}t_i + B_{i+2}t_{i+2})} \right].$$

A t_{i+1} most kiszámított és a t_{i+2} adott értékét visszahelyettesítjük az (i+2) egyenletbe, elvégezzük a kijelölt műveleteket, eredményként a ϕ értékét kapjuk. A ϕ és a t_0 értékét behelyettesítjük az (I) egyenletbe, és a b) feladatmegoldással kiszámítjuk a t_1 értékét. A ϕ és a t_1 értékét behelyettesítve a (II) egyenletbe, a b) feladatmegoldással a t_2 értékhez jutunk. ... A ϕ és a t_{i-3} értékét behelyettesítjük az (i-2) egyenletbe, és a b) feladatmegoldással kiszámítjuk a t_{i-2} értékét. A ϕ és a t_{i-2} értékét behelyettesítve a (i-1) egyenletbe, a b) feladatmegoldással a t_{i-1} értékhez jutunk. A ϕ és a t_{i-1} értékét behelyettesítjük az (i) egyenletbe, a b) feladatmegoldással a t_i értékét kapjuk. Ettől kezdve a kívánt pontosságig folytatható az iteráció.



- i) Ismert egy négynél több rétegből álló fal legmelegebb külső (t_0) és egy közben-ső határoló felületének hőmérséklete, valamint e két határfelület közötti összes réteg vastagsága. Ismeretlen az összes belső határfelület hőmérséklete és a fal-ban létrejövő hőáram

A rétegek hőáram-egyenletrendszere:

$$\phi = A_{i-1} (t_{i-1}^2 - t_{i-2}^2) + B_{i-1} (t_{i-1} - t_{i-2}), \quad (i-1)$$

$$\phi = A_i (t_i^2 - t_{i-1}^2) + B_i (t_i - t_{i-1}), \quad (i)$$

$$\phi = A_{i+1} (t_{i+1}^2 - t_i^2) + B_{i+1} (t_{i+1} - t_i), \quad (i+1)$$

$$\phi = A_{i+2} (t_{i+2}^2 - t_{i+1}^2) + B_{i+2} (t_{i+2} - t_{i+1}), \quad (i+2)$$

$$\phi = A_{i+3} (t_{i+3}^2 - t_{i+2}^2) + B_{i+3} (t_{i+3} - t_{i+2}), \quad (i+3)$$

$\vdots$

$$\phi = A_{n-1} (t_{n-1}^2 - t_{n-2}^2) + B_{n-1} (t_{n-1} - t_{n-2}), \quad (n-1)$$

$$\phi = A_n (t_n^2 - t_{n-1}^2) + B_n (t_n - t_{n-1}). \quad (n)$$

Az egyenletrendszert célszerűen közelítő módszerrel oldjuk meg (lásd 2.1.7. ábra):

A $P_n A_{i-2} P_{i-2}$ és a $P_i C_{i-2} P_{i-2}$ hasonló háromszögekre felírható a

$$\frac{t_{i-2} - t_n}{\delta_n + \dots + \delta_{i+2} + \delta_{i+1} + \delta_i + \delta_{i-1}} = \frac{t_{i-2} - t_i}{\delta_i + \delta_{i-1}}$$

aránypár, ebből

$$t_i = t_{i-2} - \frac{\delta_i + \delta_{i-1}}{\delta_n + \dots + \delta_{i-2} + \delta_{i-1} + \delta_i + \delta_{i-1}} (t_{i-2} - t_n).$$

Az (i-1) egyenletbe behelyettesítjük a t_{i-2} ismert, az (i) egyenletbe pedig t_i most kiszámított közelítő értékét, az így kapott egyenleteket kivonjuk egymás-ból, t_{i-1} -re rendezzük, nullára redukáljuk és megoldjuk:

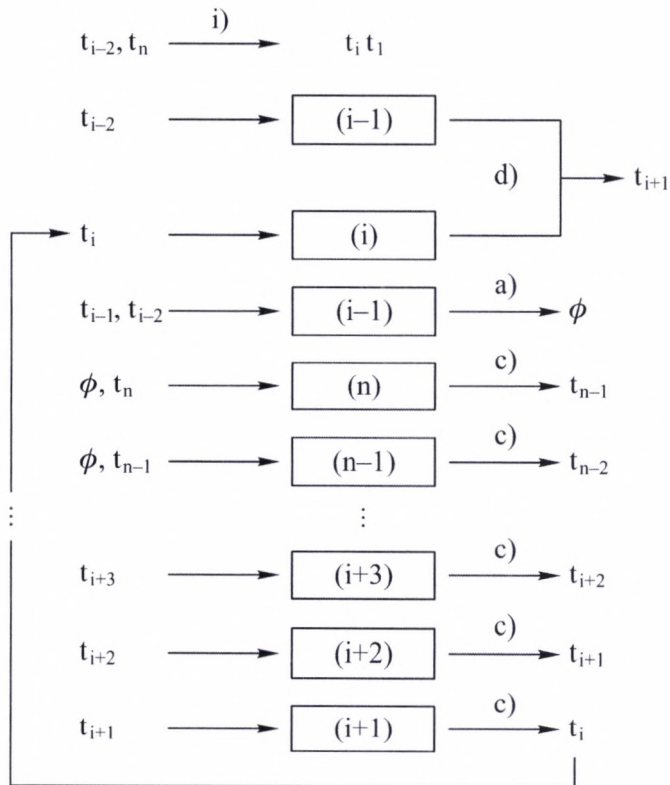
$$A_{i-1} \cdot (t_{i-1}^2 - t_{i-2}^2) + B_{i-1} \cdot (t_{i-1} - t_{i-2}) - A_i \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2) - B_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0,$$

$$A_{i-1} \cdot t_{i-1}^2 + A_i t_{i-1}^2 + B_{i-1} t_{i-1} + B_i t_{i-1} - A_{i-1} t_{i-2}^2 - A_i t_i^2 - B_{i-1} t_{i-2} - B_i t_i = 0,$$

$$(A_{i-1} + A_i) t_{i-1}^2 + (B_{i-1} + B_i) t_{i-1} - (A_{i-1} t_{i-2}^2 + A_i t_i^2 + B_{i-1} t_{i-2} + B_i t_i) = 0.$$

$$t_{i-1} = \frac{1}{2(A_{i-1} + A_i)} \left[-(B_{i-1} + B_i) \pm \sqrt{(B_{i-1} + B_i)^2 + 4(A_{i-1} + A_i) \cdot (A_{i-1}t_{i-2}^2 + A_i t_i^2 + B_{i-1}t_{i-2} + B_i t_i)} \right].$$

A t_{i-1} most kiszámított és a t_{i-2} adott értékét visszahelyettesítjük az $(i-1)$ egyenletbe, elvégezzük a kijelölt műveleteket, eredményként a ϕ értékét kapjuk. A ϕ és a t_n értékét behelyettesítjük az (n) egyenletbe, és a c) feladatmegoldással kiszámítjuk a t_{n-1} értékét. A ϕ és a t_{n-1} értékét behelyettesítve az $(n-1)$ egyenletbe, a c) feladatmegoldással a t_{n-2} értékhez jutunk. ... A ϕ és a t_{i+3} értékét behelyettesítjük a $(i+3)$ egyenletbe, és a c) feladatmegoldással kiszámítjuk a t_{i+2} értékét. A ϕ és a t_{i+2} értékét behelyettesítve a $(i+2)$ egyenletbe, a c) feladatmegoldással a t_{i+1} értékhez jutunk. A ϕ és a t_{i+1} értékét behelyettesítjük a $(i+1)$ egyenletbe, a c) feladatmegoldással a t_i értékhez jutunk. Ettől kezdve a kívánt pontosságig folytatható az iteráció.



2.1.2.4. A hővezetés számítása bordákban és földbe vagy épületszerkezetbe ágyazott objektumok között

A bordahatásfokok kifejezéseit, illetve a hőáramsűrűségek képleteit a 2. függelékben mutatjuk be.

2.1.2.5. A különböző fémek és építőanyagok hővezetési tényezői

A hővezetési tényezőket a 2. függelékben mutatjuk be.

2.1.3. Hőátadás

A hőátadás az áramló folyadék és a folyadékkal érintkező felület között hőmérséklet-különbség hatására létrejövő energiaközlés (hőközlés).

A hőátadás alapegyenlete:

$$\phi = A \cdot \alpha \cdot \Delta t, \quad (2.1.115)$$

ahol Δt a határoló felület és a folyadék között mért jellemző közepes hőmérséklet-különbség, A a hőátadó felület, α a hőátadási tényező.

A hőátadási ellenállás fogalmát bevezetve:

$$\phi = A \cdot \frac{\Delta t}{R}, \text{ ahol } R = \frac{1}{\alpha} \quad (2.1.116)$$

a hőátadási ellenállás.

Az α hőátadási tényező meghatározását a dimenziótlan hasonlósági számok segítségével végezzük.

- A Nusselt-szám:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \quad (2.1.117)$$

ahol λ az áramló folyadék hővezetési tényezője, L a jellemző geometriai méret.

A különböző típusú hőátadási folyamatokban

$$Nu = f(Gr, Pr, Re). \quad (2.1.118)$$

A függvénykapcsolat típusa szabad áramlásra

$$Nu = \left(A + B(Gr \cdot Pr)^n K^n \right)^m. \quad (2.1.119)$$

A fűtéstechnikában a hőveszteség alakulását meghatározó hőátadási folyamatokban és a konvektív hőleadói berendezéseknél szabad áramlás valósul meg, a hőátadásban a Prandtl- és a Grashof-szám játszik szerepet.

- A Grashof-szám:

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot \beta \cdot L^3 (t_A - t_k)}{\bar{\nu}^2}, \quad (2.1.120)$$

ahol g a gravitációs állandó, β a folyadék köbös hőtágulási együtthatója., t_A a felület közepes jellemző hőmérséklete, t_k az áramló folyadék közepes jellemző hőmérséklete, $\bar{\nu}$ kinematikai viszkozitása.

- A Reynolds-szám:

$$\text{Re} = \frac{w \cdot L}{\nu}, \quad (2.1.121)$$

ahol w az áramló folyadék jellemző sebessége.

- A Prandtl-szám:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad (2.1.122)$$

ahol a a hőmérséklet-vezetési tényező.

- A hőmérséklet-vezetési tényező:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \quad (2.1.123)$$

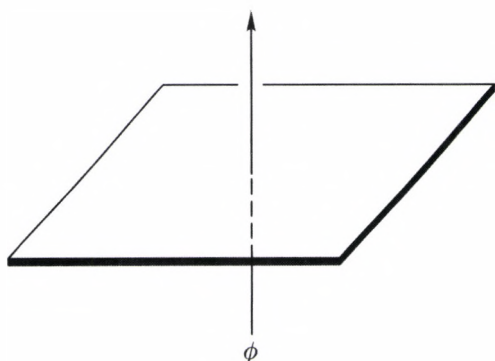
A hővezetési tényező, a kinematikai viszkozitás, a térfogati (köbös) hőtágulási együttható, a testsűrűség és az állandó nyomáson vett fajhő értékét a közeg hőmérsékletén, a Grashof-szám definiáló képletében szereplő kinematikai viszkozitást a közeg és a vele érintkező felület hőmérsékletének középértékén táblázatból kell kikeresni.

A hőátadás számítása során először meghatározzuk az áramlásra jellemző hasonlósági számokat, amelyeket behelyettesítünk a Nusselt-számra érvényes összefüggésbe. A Nusselt-szám ismeretében ki tudjuk számítani az α hőátadási tényezőt, majd ezt követően a ϕ hőáramot.

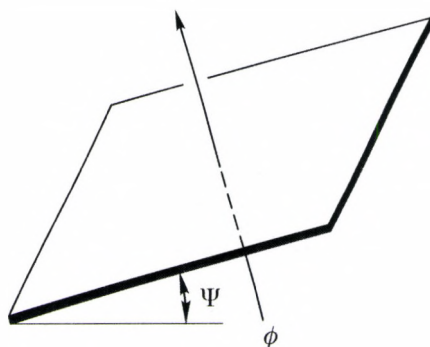
A különböző hőátadási folyamatokra a Nusselt-szám meghatározására szolgáló összefüggéseket a következőkben mutatjuk be.

Hőátadás számítása alulról fűtött, vízszintes sík felület mellett

A hőátadás modelljét a 2.1.8. ábra mutatja. A (2.1.119) képletben szereplő A , B , K , n és m jelölések számértékei:



2.1.8. ábra. Alulról fűtött vízszintes sík lap



2.1.9. ábra. Alulról fűtött ferde sík lap

Érvényességi tartomány	A	B	K	n	m
$Gr \cdot Pr < 3,197 \cdot 10^6$	0	0,540	1	1/4	1
$Gr \cdot Pr \geq 3,197 \cdot 10^6$	0	0,155	1	1/3	1

Ha a lemez kör alakú, átmérője d , akkor a (2.1.117), (2.1.120), és (2.1.121) képletben szereplő jellemző méretre az

$$L = 0,9 d$$

összefüggés érvényes.

Alulról fűtött sík felület, 0° és 30° közötti hajlásszöggel

A hőátadás modelljét a 2.1.9. ábra mutatja. A (2.1.119) képletben szereplő A , B , n , m és K jelölések számértékei, illetve ezek képletei:

Érvényességi tartomány	A	B	n
$Nu < 22,834 - 0,07537 \Psi$	$0,680 \frac{\sin \Psi}{\sin 30^\circ}$	$4,333 \cdot 10^{-3} \Psi + 0,54 + 0,15 \sin 6 \Psi$	1/4
$Nu \geq 22,834 - 0,07537 \Psi$	$0,825 \frac{\sin \Psi}{\sin 30^\circ}$	$0,007733 \Psi + 0,155 + 0,25 \sin 6 \Psi$	1/6

Érvényességi tartomány	m	K
$Nu < 22,834 - 0,07537 \Psi$	1	$\frac{\cos 2\Psi}{\left[1 + \frac{\sin \Psi}{\sin 30^\circ} \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{16/9}}$

Érvényességi tartomány	m	K
$Nu \geq 22,834 - 0,07537 \Psi$	$\frac{\Psi}{30^\circ} + 1$	$\frac{\cos 2\Psi}{\left[1 + \frac{\sin \Psi}{\sin 30^\circ} \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$

Sík felület, 30° és 150° közötti hajlásszöggel

A vizsgált esetek:

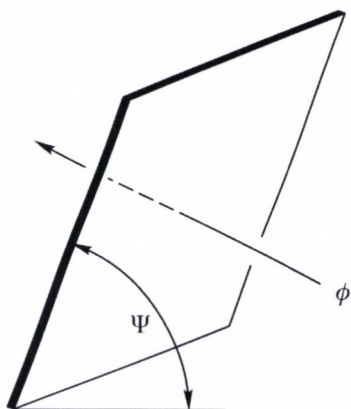
Sík felület (alulról fűtött) 30° és 90° közötti hajlásszöggel (2.1.10. ábra).

Függőleges (90°-os), tetszőleges oldalról fűtött, sík felület (2.1.11. ábra).

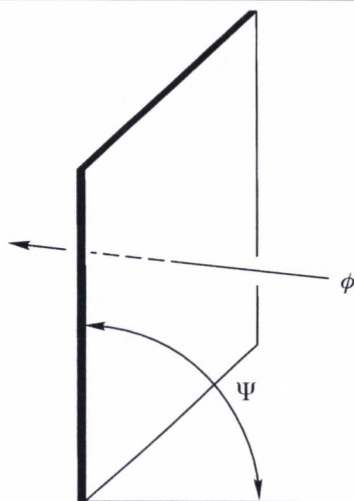
Sík felület, (felülről fűtött) 90° és 150° közötti hajlásszöggel (2.1.12. ábra).

A (2.1.119) képletben szereplő A, B, n, m és K jelölések számértékei, illetve ezek képletei:

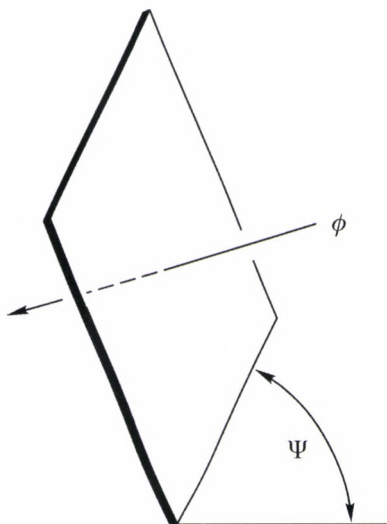
Érvényességi tartomány	A	B	n	m	K
$Nu < 20,573$	0,680	0,670	1/4	1	$\frac{\sin \Psi}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{16/9}}$



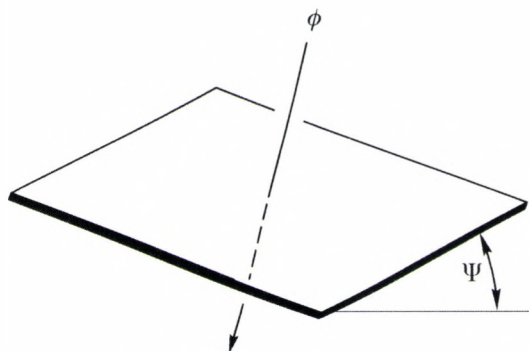
2.1.10. ábra. Alulról fűtött lap
30° és 90° közötti hajlásszöggel



2.1.11. ábra. Függőleges,
tetszőleges oldalról fűtött sík felület



2.1.12. ábra. Felülről fűtött lap
30° és 150° közötti hajlásszöggel



2.1.13. ábra. Felülről fűtött sík lap

Érvényességi tartomány	A	B	n	m	K
$Nu \geq 20,573$	0,825	0,387	1/6	2	$\frac{\sin \Psi}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$

Sík (felülről fűtött) felület, 150° és 180° közötti hajlásszöggel (2.1.13. ábra)

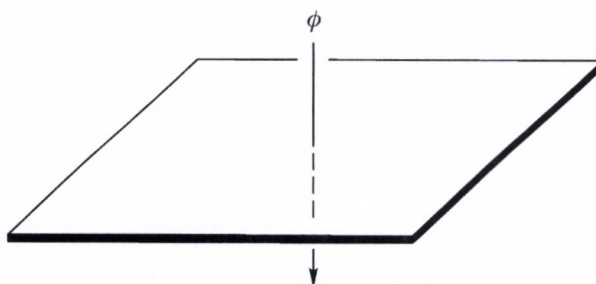
A (2.1.119) képletben szereplő A, B, n, m és K jelölések számértékei illetve ezek képletei:

Érvényességi tartomány	A	B	n
$Nu < 20,573$	$0,680 \frac{\sin \Psi}{\sin 150^\circ}$	$-0,01333 \Psi + 2,67 - 0,22 \sin 6 \Psi$	1/4
$Nu \geq 20,573$	$0,825 \frac{\sin \Psi}{\sin 150^\circ}$	$-3,9 \cdot 10^{-3} \Psi + 0,972 - 0,22 \sin 6 \Psi$	$\frac{\Psi}{360} - \frac{1}{4}$

Érvényességi tartomány	m	K
$Nu < 22,834 - 0,07537 \Psi$	1	$\frac{\cos 2\Psi}{\left[1 + \frac{\sin \Psi}{\sin 30^\circ} \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{16/9}}$
$Nu \geq 22,834 - 0,07537 \Psi$	$7 - \frac{\Psi}{30^\circ}$	$\frac{\cos 2\Psi}{\left[1 + \frac{\sin \Psi}{\sin 30^\circ} \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$

Felülről fűtött, vízszintes (180°-os szögbeállítású) sík felület (2.1.14. ábra)

Érvényességi tartomány	A	B	n	m	K
$10^5 \leq Gr \cdot Pr \leq 10^{10}$	0	0,270	1/4	1	1



2.1.14. ábra. Felülről fűtött vízszintes lap

Vízszintes henger külső felülete

A (2.1.119) képletben szereplő A, B, n, m és K értéke, illetve képlete, valamint a (2.1.117), (2.1.120) és (2.1.121) képletekben szereplő L értéke:

Érvényességi tartomány	A	B	n	m	K	L
$Gr \cdot Pr < 10^3$	0,600	0,387	1/6	2	$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0,5590}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$	2 r

Érvényességi tartomány	A	B	n	m	K	L
$Gr \cdot Pr \geq 10^3$	0,825	0,387	1/6	2	$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0,4920}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$	πr

Függőleges henger külső felülete

A (2.1.119) képletben szereplő A, B, n, m és K értéke, illetve képlete, valamint a (2.1.117), (2.1.120) és (2.1.121) képletekben szereplő L értéke:

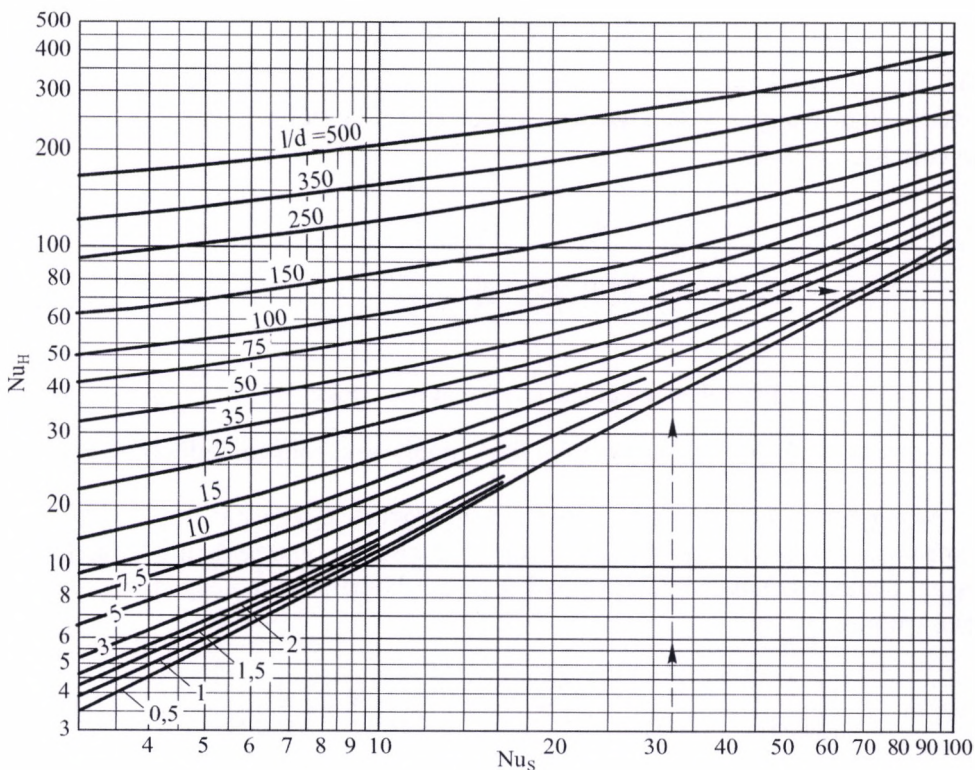
Érvényességi tartomány	A	B	n	m	K	L
$Nu < 20,573$	0,680	0,670	1/4	1	$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0,4920}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$	l
$Nu \geq 20,573$	0,825	0,387	1/6	2	$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0,4920}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$	l

A fenti adatok függőleges sík felületre vonatkoznak, ezért a kiszámított Nu értékét, amelyet jelöljünk Nu_S -nek, át kell számítani függőleges hengeres felületre vonatkozó Nu_H értékre. Az átszámítást a 2.1.15. ábrán látható diagram segítségével végezzük. A diagramban a Nu_H -t ábrázoljuk a Nu_S függvényében az $1/d$ paraméter segítségével. A paraméter a hengeres felület hosszának és átmérőjének hányadosa.

Ferde henger külső felülete ($0^\circ < \Psi < 90^\circ$)

A számításokat az előző, „Függőleges henger külső felülete” című pontban leírtak szerint kell végezni. A jellemző méretet a hengeres felület tényleges l hosszából és a felület tengelyvonalának vízszintessel bezárt Ψ szögéből számítjuk ki a következő képlet segítségével:

$$L = l \cdot \sin \Psi.$$



2.1.15. ábra.

Gömbfelület

A (2.1.119) képletben szereplő A , B , n , m és K értéke, illetve képlete, valamint a (2.1.117), (2.1.120) és (2.1.121) képletekben szereplő L értéke:

Érvényességi tartomány	A	B	n	m	K	L
$Nu \leq 2$	0,825	0,387	1/6	2	$K = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0,4920}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$	d
$Nu > 2$	1,414	0,387	1/6	2	$K = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0,4920}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{48/27}}$	d

2.1.4. Hőszugárzás

Bármely 0 K-nél nagyobb hőmérsékletű test energiát sugároz ki. A kisugárzott energiaáram arányos a sugárzó test felületével és abszolút hőmérsékletének negyedik hatványával:

$$\phi = A \cdot C \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (2.1.124)$$

$$C = \varepsilon \cdot C_s, \quad (2.1.125)$$

ahol

C_s az abszolút feketetest sugárzási együtthatója, értéke $5,77 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$,

ε az emissziós tényező (feketeségi fok), amely anyagonként különböző értékű.

Az egymást „látó felületek” energiát sugároznak egymásra. Egyensúlyi állapotban a nagyobb hőmérsékletű 1. felületről a kisebb hőmérsékletű 2. felületre átáramló energiamennyiség arányos a két felület hőmérséklete negyedik hatványának különbségével:

$$\phi = A_1 \cdot C_k \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{1-2} = A_2 \cdot C_k \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{2-1}, \quad (2.1.126)$$

ahol φ_{1-2} és φ_{2-1} a besugárzási tényezők, C_k a kölcsönös sugárzási együttható.

$$C_k = f(C_1, C_2, C_s),$$

ahol

$C_1 = \varepsilon_1 C_s$. az (1)-jelű test sugárzási együtthatója,

$C_2 = \varepsilon_2 C_s$. a (2)-jelű test sugárzási együtthatója.

Az abszolút fekete test sugárzásának leírásában használják a σ Boltzmann-állandót is, amely

$$\sigma = \frac{C_s}{100^4}.$$

Ha a nagyobb hőmérsékletű dA_1 elemi felület sugároz az A_2 véges felületre, akkor a

$$\varphi_{1-2} = \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{r^2} \cdot dA_2 \quad (2.1.127)$$

általános összefüggés, ha pedig nagyobb hőmérsékletű A_1 véges felület sugároz az A_2 felületre, akkor a

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.1.128)$$

általános összefüggés érvényes a besugárzási tényezőre.

A besugárzási tényezők átszámíthatók egymásba a felületek ismeretében az

$$A_1 \cdot \varphi_{1-2} = A_2 \cdot \varphi_{2-1} \quad (2.1.129)$$

összefüggés segítségével.

A besugárzási tényező értéke

$$\varphi_{1-2} = \varphi_{2-1} = 1, \quad (2.1.130)$$

ha

- két végtelen nagyságú párhuzamos sík felület között valósul meg a sugárzásos hőcsere;
- két végtelen hosszú, párhuzamos tengelyű, koncentrikus vagy excentrikus hengerfelület esetében, ha a belső henger külső felülete a nagyobb hőmérsékletű;
- két egymásba helyezett, koncentrikus vagy excentrikus gömbfelület esetében, ha a belső gömb külső felülete a nagyobb hőmérsékletű.

A különböző geometriákra a besugárzási tényezők és a kölcsönös sugárzási együtthatók képleteit a 3. függelékben mutatjuk be.

2.1.5. Hőátvitel

A hőátvitel során a hő a meleg közegből (folyadékból, gázból) hőátadással jut a meleg közeggel érintkező szilárd közegbe, a szilárd közegben a hő vezetéssel terjed, majd pedig a szilárd fal hideg közeggel érintkező oldaláról hőátadással jut el az energia (hő) az alacsonyabb hőmérsékletű (hideg) közegbe (folyadékba, gázba). A hőátvitel tehát hőátadás-hővezetés-hőátadás láncolata. A hőátvitel számítását az eredő hőátviteli ellenállás meghatározásával az alábbiak szerint végezzük:

A hőáram:

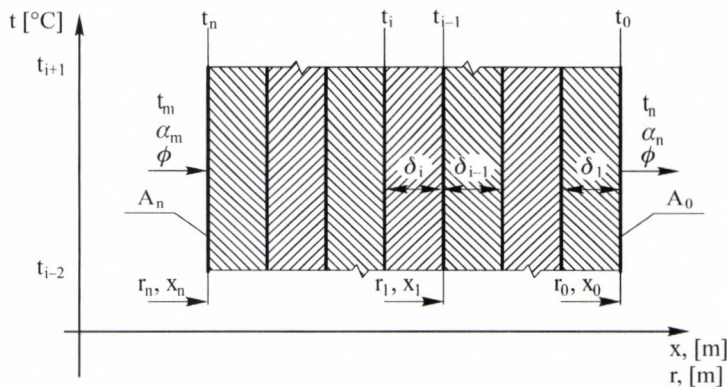
$$\phi = A_v \cdot \frac{t_m - t_h}{R} \quad (2.1.131)$$

A hőáramsűrűség:

$$\varphi = \frac{t_m - t_h}{R} \quad (2.1.132)$$

A képletekben:

- A_v a vonatkoztatási felület, A_0 vagy A_n ,
- t_m a meleg közeg hőmérséklete,
- t_h a hideg közeg hőmérséklete,
- R az eredő hőátviteli ellenállás.



2.1.16. ábra. Hőátvitel többretegű síkfalban

Az eredő hőátviteli ellenállás:

$$R = \frac{1}{\alpha_m \frac{A_n}{A_v}} + R_v + \frac{1}{\alpha_h \frac{A_0}{A_v}}, \quad (2.1.133)$$

ahol

α_m a meleg oldali hőátadási tényező,

α_h a hideg oldali hőátadási tényező,

R_v az eredő hővezetési ellenállás.

A_0 a 0 indexű hőátadó felület (az első réteg hideg oldala),

A_n az n indexű hőátadó felület (az n-edik réteg meleg oldala).

Szokás használni a hőátviteli tényezőt is, amely az eredő hőátviteli ellenállás reciproka.

$$k = \frac{1}{R}. \quad (2.1.134)$$

A rétegek és a felületek számozását, a hőátviteli modellt a 2.1.16. ábra mutatja.

2.2. Instacionárius hőátvitel a fűtött terek határoló szerkezeteiben

2.2.1. A hővezetést leíró differenciálegyenletek

A hővezetést leíró legáltalánosabb differenciálegyenlet homogén és izotrop anyagi tulajdonságokkal rendelkező közegre:

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T). \quad (2.2.1)$$

Az egyenletben c , ρ és λ hőmérsékletfüggése megengedett.

A fenti differenciálegyenlet részletes kifejtése állandó anyagi jellemzők mellett az alábbiak szerint lehetséges.

Derékszögű koordináta-rendszer:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 T, \quad (2.2.2)$$

ahol

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2.3)$$

a Laplace-operátor.

Hengerkoordináta-rendszer:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2.2.4)$$

Polárkoordináta-rendszer, hengerszimmetrikus hővezetés:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (2.2.5)$$

Gömbi koordináta-rendszer, gömbszimmetrikus hővezetés:

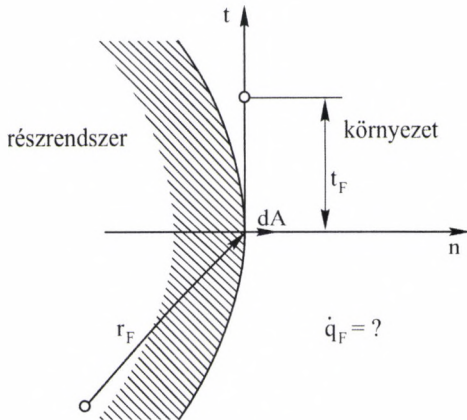
$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad (2.2.6)$$

$$(\tau > 0; 0 < r < R). \quad (2.2.7)$$

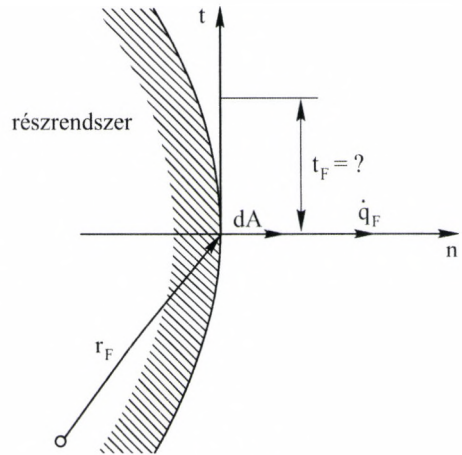
2.2.2. Peremfeltételek

A hővezetés általános differenciálegyenlete mint parciális differenciálegyenlet a hőmérsékletmező térbeli és időbeli változásai közötti kapcsolatot írja le. A vizsgált test energetikai jellemzésére alkalmas, térbeli és időbeli változásokat egyaránt figyelembe vevő hőmérséklet-eloszlási függvény meghatározásakor az általános differenciálegyenlet olyan megoldását kell előállítani, amely megoldás a differenciálegyenlet kielégítése mellett, eleget tesz a kezdeti és peremfeltételnek is.

A kezdeti feltételben a $\tau = 0$ időpillanatban vagy tetszőleges időpillanatban egzisztáló hőmérséklet-eloszlást vesszük tekintetbe. Általános esetben a kezdeti hőmérséklet-eloszlás



2.2.1. ábra



2.2.2. ábra

$$t(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}) \quad (2.2.8)$$

formában írható fel. Gyakorlati feladatok megoldása szempontjából igen fontos az az alapeset, amikor $t(\mathbf{r}, 0) = t_0 = \text{állandó}$. A kezdeti feltétel általános megfogalmazásából megállapíthatjuk, hogy a különböző feladatokhoz tartozó kezdeti feltételek matematikai sajátosságai egymástól nem térnek el lényegesen.

A peremfeltételekben a vizsgált részrendszernek és a részrendszert határoló környezetnek hőenergetikai kölcsönhatását vesszük tekintetbe, a kölcsönhatási forma különbözősége alapján matematikailag is különböző típusokba sorolhatjuk őket. Ezért a peremfeladatok osztályozása végeredményben a kölcsönhatás fizikai jellegét kifejező peremfeltételektől függ.

Ha a vizsgált részrendszer felületén a t_F hőmérséklet-eloszlás az időnek és a felület pontjait meghatározó koordinátáknak ismert függvénye, vagyis

$$t_F = f(\mathbf{r}_F, \tau), \quad (2.2.9)$$

s az általános megoldást ehhez a határfeltételhez kell illeszteni, a hővezetés elméletének elsőfajú peremfeladatával állunk szemben. A gyakorlat szempontjából itt is az olyan feladatok megoldása érdekes, ahol

$$t_F = f(\mathbf{r}_F, \tau) = \varphi(\tau), \quad (2.2.10)$$

vagyis ahol a felületi hőmérséklet-eloszlás csak az idő függvénye.

Az elsőfajú feltétel akkor valósul meg, amikor a rendszer felületi hőellenállása elhanyagolható (2.2.1. ábra).

Ha a vizsgált rendszert határoló felület minden pontjában ismerjük a hőáramot, mint a határoló felület koordinátáinak és az időnek függvényét, feladatunkat mint másodfajú peremfeladatot fogalmazhatjuk meg (2.2.2. ábra).

Peremfeltételünk matematikai megfogalmazása ilyen esetben:

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = \dot{q}_F(\mathbf{r}_F, \tau). \quad (2.2.11)$$

Viszonylag egyszerűen vehető figyelembe az olyan másodfajú peremfeltétel, ahol

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = \dot{q}_F(\tau). \quad (2.2.12)$$

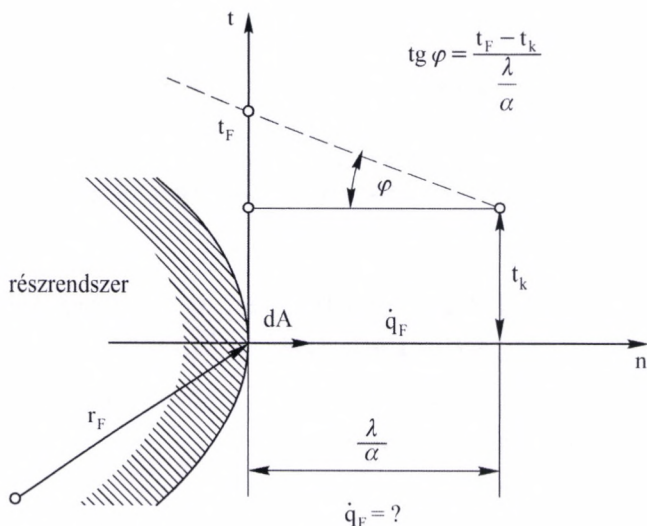
Harmadfajú peremfeladatról akkor beszélünk, amikor a vizsgált rendszer és környezete közötti kapcsolatot hőátadással jellemezzük. Ez a kapcsolat az alábbi formában írható fel:

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = \alpha(t_{n=0} - t_k). \quad (2.2.13)$$

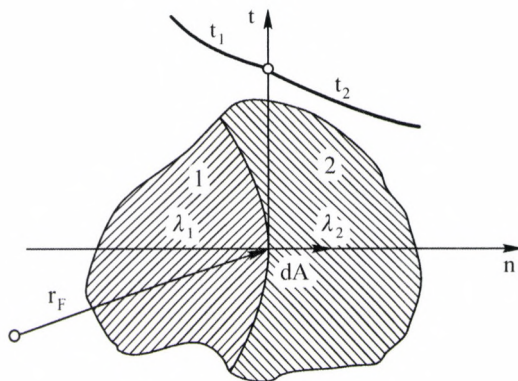
Fenti összefüggés a harmadfajú peremfeltétel matematikai megfogalmazása. Az összefüggésben szereplő α tényező a hőátadási tényező, t_k pedig a vizsgált rendszert körülvevő környezet hőmérséklete a vizsgált részrendszert határoló fal-tól elegendően távol, az n szerinti derivált pedig a test hőmérsékletmezejére vonatkozik, a felület normálisának irányában (2.2.3. ábra).

A fentebb tárgyalt elsőfajú peremfeladat bizonyos körülmények között származtatható a harmadfajú peremfeladat határeseteként. Könnyen ki lehet mutatni, hogy ha a rendszert határoló környezet hőkapacitása végtelen nagy, és a felületi hőelleállás értéke nagyon kicsi, a (2.2.13) feltétel átmegy a (2.2.10) feltételbe.

Ha a vizsgált rendszer környezetével vezetékes kapcsolatban van, a határoló felületen két feltételt kell előírni. A feltételek a hőmérsékletre és a hőáramra vo-



2.2.3. ábra



2.2.4. ábra

natkoznak. Általában két szilárd test tökéletes, ellenállásmentes érintkezése esetén írhatjuk elő ezeket.

A hőmérsékletekre vonatkozó feltétel az alábbi egyszerű megfontolás alapján írható fel.

A vizsgált rendszert a határfelület két részre osztja, és a felületi hőmérséklet-eloszlást az egyik zónában $t_1(r_F, \tau)$ -val, a másik zónában $t_2(r_F, \tau)$ -val jelöljük, az elválasztó határfelületekre vonatkozólag felírhatjuk, hogy egymásnak megfelelő pontjaiban

$$t_1(r_F, \tau) = t_2(r_F, \tau). \quad (2.2.14)$$

Az energiamegmaradási törvény a hőáramsűrűség folytonossági tételével fejezhető ki:

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_{n=0} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_{n=+0}. \quad (2.2.15)$$

Itt λ_1 és λ_2 az egyes részek anyagára jellemző hővezetési tényezőket jelentik (2.2.4. ábra).

Az ilyen típusú feladatokat, ahol a probléma differenciálegyenletének megoldásakor a (2.2.14) és (2.2.15) feltételeket kell kiegészíteni, negyedfajú peremfeladatnak is szokás nevezni.

2.2.3. A hővezetés differenciálegyenletének néhány partikuláris megoldása

Derékszögű koordináta-rendszer és egydimenziós hővezetés esetén az alapmegoldásokat a következőképpen kaphatjuk meg. A

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

differenciálegyenlet megoldását két olyan függvény szorzatával kívánjuk előállítani, amelyek egyike csak a jelenség kezdetétől eltelt időtől (időtényező) függ, másika pedig csak a vizsgált hely koordinátájától (alaktényező) függ. Azaz a megoldás szimbolikus alakja:

$$\varphi(\tau, x) = \varphi(\tau) f(x). \quad (2.2.16)$$

A megoldást behelyettesítve a differenciálegyenletbe nyerjük, hogy

$$\varphi'(\tau) f(x) = a f''(x) \varphi(\tau), \quad (2.2.17)$$

amiből

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = q. \quad (2.2.18)$$

Matematikai szempontból q bármely az x és τ -tól független szám lehet. Ugyanis az egyenlőség jobb oldala csak x -től, bal oldala csak τ -tól függ, ami nem lehetséges. Így q -nak mindkettőtől függetlennek kell lennie. Ezzel a parciális differenciálegyenlet két közönséges differenciálegyenletté hasad szét, amelyek külön-külön elemi úton megoldhatók. Fizikai megfontolások és a peremfeltételek adnak útmutatást a q szám mibenlétére. Olyan függvényeket kell tehát keresnünk, amelyek a

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a q \quad \text{és} \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = q \quad (2.2.19)$$

összefüggéseket kielégítik.

Ilyenek mindenképp az exponenciális függvények, mégpedig

$$\varphi(\tau) = e^{aq\tau}, \quad f(x) = e^{\pm\sqrt{q}x}, \quad (2.2.20)$$

mivel

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{a q e^{aq\tau}}{e^{aq\tau}} = a q,$$

és

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{q e^{\pm\sqrt{q}x}}{e^{\pm\sqrt{q}x}} = q.$$

Ezekből következik, hogy egy rögzített q -hoz tartozó megoldás a

$$\vartheta = C e^{aq\tau} e^{\pm\sqrt{q}x}. \quad (2.2.21)$$

Különös érdeklődésre tarthat számot az az általánosabb eset, amelyben

$$q = m + in \quad (2.2.22)$$

komplex számmal egyenlő. Így egy partikuláris megoldást a

$$\vartheta = C e^{a(m+in)\tau} e^{\pm\sqrt{m+in}x} \quad (2.2.23)$$

szolgáltatja.

Az m és n helyes megválasztásával és peremfeltételek szem előtt tartásával a hővezetés jellegzetes eseteire megoldást találhatunk.

A következőkben bemutatjuk a differenciálegyenlet néhány partikuláris megoldását. A jelenségek későbbi tárgyalásakor fizikai megfontolások alapján döntjük el azt, hogy ezek közül melyiket választjuk, illetve melyek azok, amelyek alkalmasak a kezdeti – azaz általunk ismert – hőmérséklet-eloszlás leírására és melyek egyeztethetők össze a peremfeltételben foglalt követelménnyel.

a) Első esetben legyen

$$m = -\varepsilon^2, \quad n = 0.$$

Ekkor

$$\vartheta = C e^{-a\varepsilon^2\tau} e^{\pm\sqrt{-\varepsilon^2}x}, \quad (2.2.24/1)$$

illetve

$$\vartheta = C e^{-a\varepsilon^2\tau} e^{\pm i\varepsilon x}. \quad (2.2.24/2)$$

Az Euler-féle formula felhasználásával a

$$\vartheta_1 + i\vartheta_2 = C_1 e^{-a\varepsilon^2\tau} [\cos(\varepsilon x) + i \sin(\varepsilon x)], \quad (2.2.25)$$

$$\vartheta_1 - i\vartheta_2 = C_2 e^{-a\varepsilon^2\tau} [\cos(\varepsilon x) - i \sin(\varepsilon x)] \quad (2.2.26)$$

kifejezéseket nyerjük. Ezekből átrendezés és összegzés után

$$\vartheta_1 = \frac{C_1 + C_2}{2} e^{-a\varepsilon^2\tau} \cos(\varepsilon x), \quad (2.2.27)$$

és

$$i\vartheta_2 = i \frac{C_1 + C_2}{2} e^{-a\varepsilon^2\tau} \sin(\varepsilon x), \quad (2.2.28)$$

és i -vel egyszerűsítve a

$$\vartheta_2 = \frac{C_1 + C_2}{2} e^{-a\varepsilon^2\tau} \sin(\varepsilon x) \quad (2.2.29)$$

partikuláris megoldás adódik.

Az állandókat a

$$D = \frac{C_1 + C_2}{2} \quad \text{és} \quad C = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

egyszerűbb alakban is írhatjuk.

b) A második esetben legyen

$$m = 0 \quad \text{és} \quad n = -r^2.$$

Ekkor

$$\vartheta = C e^{-a i r^2 \tau} e^{rx\sqrt{-i}}. \quad (2.2.30)$$

Felhasználva a

$$\sqrt{-i} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}$$

egyenlőséget nyerjük, hogy

$$\vartheta = C e^{-a i r^2 \tau} e^{rx(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad (2.2.31/1)$$

illetve átrendezve

$$\vartheta = C e^{\pm r x \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-i\left(ar^2 \tau \pm rx\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}, \quad (2.2.31/2)$$

amiből

$$\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2 = C e^{\pm r x \sqrt{\frac{1}{2}}} \left[\cos\left(ar^2 \tau \pm rx\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - i \sin\left(ar^2 \tau \pm rx\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right]. \quad (2.2.32)$$

c) Harmadik esetben legyen

$$m = 0 \text{ és } n = \frac{p}{a}.$$

Ez a feltétel tulajdonképpen a differenciálegyenlet (2.2.18) formájából állítható elő. Ekkor (2.2.23) alapján

$$\vartheta = C e^{i p \tau} e^{\pm x \sqrt{\frac{ip}{a}}}. \quad (2.2.33)$$

Ez az összefüggés átalakítás és szuperponálás útján

$$\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2 = e^{ip\tau} \left[C_1 \operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{ip}{a}}\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{ip}{a}}\right) \right] \quad (2.2.34)$$

alakban írható.

Az eddigi megoldások jellemzője az, hogy két függvény szorzataként állítottuk elő. E függvények külön-külön csak egy változót tartalmaznak. Ez a módoszat azonban nem mindig vezet célhoz.

d) A differenciálegyenletnek vannak azonban olyan partikuláris megoldásai is, amelyek nem szorzat formájában jelennek meg, jöllehet ezek is levezethetők a korábbi megoldásból.

A későbbiekben ezek közül a

$$\vartheta = C \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q=\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-q^2} dq = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \quad (2.2.35)$$

megoldást fogjuk alkalmazni, amely a Gauss-féle hibafüggvény.

Az egyes esetek tárgyalásakor kitérünk arra is, hogy milyen meggondolás alapján választjuk a felsorolt megoldások egyikét, vagy másikat.

2.2.4. Tranziens problémák elhanyagolható felületi hőátadási ellenállás esetén. Elsőfajú peremfeltétel

A megadott feladat gyakorlatilag azt jelenti, hogy egy testet, amelynek a jelenség kezdetén ($\tau = 0$ időpont) hőmérséklete t_c , olyan t_k hőmérsékletű környezetbe hozunk, amelyben a test határoló felülete ezt a hőmérsékletet azonnal felveszi és a jelenség további folyamán ezt meg is tartja. Ez a feltétel az eddigi vizsgálatainkból ismert elsőfajú peremfeltétel. Feladatunk a test hőmérsékletmezejének meghatározása az idő függvényében.

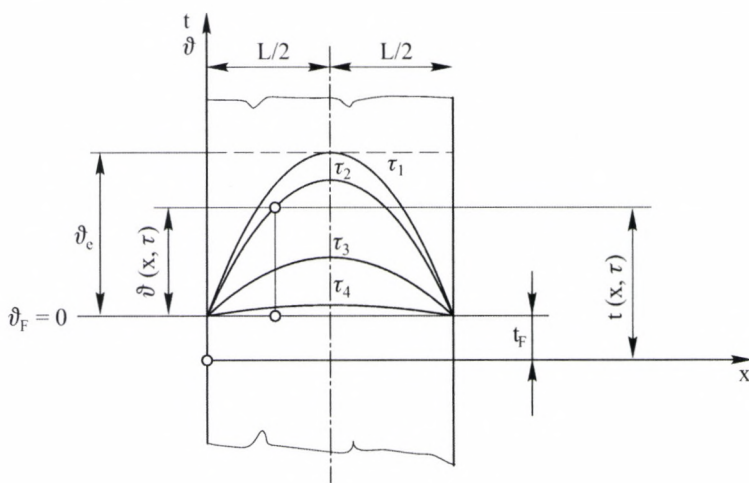
A jelenséget különböző alakú testek esetén vizsgáljuk.

A megadott feltételt az a gyakorlati eset közelíti meg, amelyben a határoló közeg és a test felülete közötti hőátadási tényező igen nagy.

2.2.4.1. Végtelen kiterjedésűnek tekinthető sík fal felmelegedése és lehűlése

A sík fal (2.2.5. ábra) vastagsága legyen $L = 2\delta_h$, anyaga homogén és izotrop, az anyagjellemzők a hőmérséklettől független konstans értékek. Vizsgálatainkban képzeljük a (x, ϑ) koordináta-rendszer ϑ ordinátáját a fal bal oldali határoló síkjában.

Szokásos a tengelyt a fal szimmetriasíkjában is felvenni. Ez dönti el, hogy a továbbiakban a hőmérséklet-megoszlás leírására a páratlan (sin) vagy páros (cos) függvények alkalmasak-e?



2.2.5. ábra

A számolás egyszerűsítése érdekében a túlhőmérsékleteket vezetjük be, s ezeket a jelenség folyamán állandó hőmérséklethez – esetünkben a határoló síkok t_F hőmérsékletéhez – viszonyítjuk. Így valamely τ időpontban az x síkban uralkodó túlhőmérséklet:

$$\vartheta(x, \tau) = t(x, \tau) - t_F. \quad (2.2.36)$$

A megoldandó differenciálegyenlet és a peremfeltételek a következők:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.2.37)$$

A $\tau = 0$ időpontban, azaz a jelenség kezdetén:

$$\vartheta(x, 0) = \vartheta_c, \text{ ha } 0 < x < L, \quad (2.2.38)$$

és a jelenség teljes időtartama alatt, azaz $\tau \geq 0$:

$$\vartheta(0, \tau) = 0 \text{ és } \vartheta(L, \tau) = 0, \quad L = 2 \vartheta_h. \quad (2.2.39)$$

Mint hogy a hőmérsékletek a kiegyenlítődés, esetünkben a 0 túlhőmérséklet felé törekednek, csak olyan megoldás jöhet számításba, amelyben az időtől függő függvény τ növekedésével a 0 felé tart. E feltételnek a (2.2.27), (2.2.28) és (2.2.29) alatti partikuláris megoldások felelnek meg. Ennek alapján egy rögzített ε -hoz tartozó megoldás

$$\vartheta_c = e^{-a \varepsilon^2 \tau} [D \cos(\varepsilon x) + C \sin(\varepsilon x)]. \quad (2.2.40)$$

A peremfeltételnek a partikuláris megoldások is eleget tartoznak tenni. A $\vartheta(0, \tau) = 0$ feltétel így azt követeli meg, hogy $D = 0$. A $\vartheta(L, \tau) = 0$ feltétel a triviális esettől eltekintve minden esetben teljesül, amikor

$$\varepsilon = \frac{n \pi}{L}, \text{ ha } n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.2.41)$$

$$A \quad \vartheta(x, 0) = \vartheta_c \quad (2.2.42)$$

kezdeti feltételnek csak a partikuláris megoldások szuperponálásával, azaz

$$\vartheta_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \quad (2.2.43)$$

formában tudunk eleget tenni. Ugyanis a C állandók helyes megválasztásával egy a $0 \leq x \leq L$ intervallumban tetszőleges adott függvény szinusz és koszinusz függvény szuperpozíciójával tetszőlegesen megközelíthető. Az imént azonban már kimutattuk, hogy a D tényezőknek 0-val kell egyenlőnek lennie. Ily módon az általános megoldást a

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left[- \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 a \tau \right] \sin \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \quad (2.2.44)$$

függvény írja le.

A kezdeti feltétel Fourier-sorba fejtésével és az állandóknak e sorok elmélete alapján

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \vartheta_c(x) \sin \left(\frac{n \pi}{L} x \right) dx \quad (2.2.45)$$

alakban való meghatározásával nyerjük a probléma megoldását. E szerint

$$\vartheta(x, \tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 a \tau \right] \sin \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \int_0^L \vartheta_c(x) \sin \left(\frac{n \pi}{L} x \right) dx. \quad (2.2.46)$$

Esetünkben azonban

$$\vartheta_c(x) = \text{konstans} = \vartheta_c,$$

ezért összefüggésünk az integrálás elvégzése után

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta_c \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[- \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 a \tau \right] \sin \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \quad (2.2.47)$$

formában írható, ahol $n = 1, 3, 5, \dots$

Ha még $L = 2 \delta_h$ helyettesítéssel a

$$- \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 a \tau = - \left(\frac{n \pi}{2} \right)^2 \frac{a \tau}{\delta_h^2} \quad (2.2.48)$$

alakban írjuk, s ezzel a tranziens jelenségekre jellemző

$$Fo = \frac{a \tau}{\delta_h^2} \quad (2.2.49)$$

dimenzió nélküli számot bevezetjük, akkor az alábbi dimenzió nélküli összefüggéshez jutunk:

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_c} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[- \left(\frac{n}{2} \right)^2 Fo \right] \sin \left(\frac{n \pi}{L} x \right). \quad (2.2.50)$$

Gyakran fontos a felező síkban kialakuló ϑ_c túlhőmérséklet ismerete. Ezt $x = L/2$ helyettesítéssel nyerjük,

2.2.1. táblázat. Sík fal P(Fo) függvényének numerikus értéktáblázata

Fo	P(Fo)	Fo	P(Fo)	Fo	P(Fo)
0,020	1,00000	0,360	0,52363	0,700	0,22636
0,040	0,99919	0,380	0,49846	0,720	0,21546
0,060	0,99222	0,400	0,47449	0,740	0,20509
0,080	0,97516	0,420	0,45166	0,760	0,19521
0,100	0,94930	0,440	0,42992	0,780	0,18581
0,120	0,91755	0,460	0,40923	0,800	0,17690
0,140	0,88244	0,480	0,38953	0,900	0,13820
0,160	0,84580	0,500	0,37078	1,000	0,10800
0,180	0,80884	0,520	0,35293	1,100	0,08440
0,200	0,77231	0,540	0,33593	1,200	0,06590
0,220	0,73688	0,560	0,31796	1,400	0,04020
0,240	0,70220	0,580	0,30436	1,600	0,02460
0,260	0,69903	0,600	0,28971	2,000	0,00920
0,280	0,63722	0,620	0,27576	2,400	0,00340
0,300	0,60680	0,640	0,26248	2,800	0,00130
0,320	0,57776	0,660	0,24984	3,200	0,00050
0,340	0,55040	0,680	0,23781	3,600	0,00020

$$\frac{\partial_c}{\partial_c} = \frac{4}{\pi} \left[\exp\left(-\frac{1}{4}\pi^2 Fo\right) - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{9}{4}\pi^2 Fo\right) + \frac{1}{5} \exp\left(-\frac{25}{4}\pi^2 Fo\right) - \dots + \dots \right], \quad (2.2.51)$$

azaz röviden

$$\frac{\partial_c}{\partial_c} = P(Fo). \quad (2.2.52)$$

A P(Fo) függvényt a gyakorlatilag szóba jöhető Fo értékekre az 2.2.1. táblázat tartalmazza. A középponti hőmérséklet ismeretében a hőmérsékletmező jó közelítéssel meg is rajzolható. Igényesebb számítás esetén a 2.2.6. ábrán megadott diagramot használhatjuk.*

A folyamatra jellemző hőáramot a hely és idő függvényében a

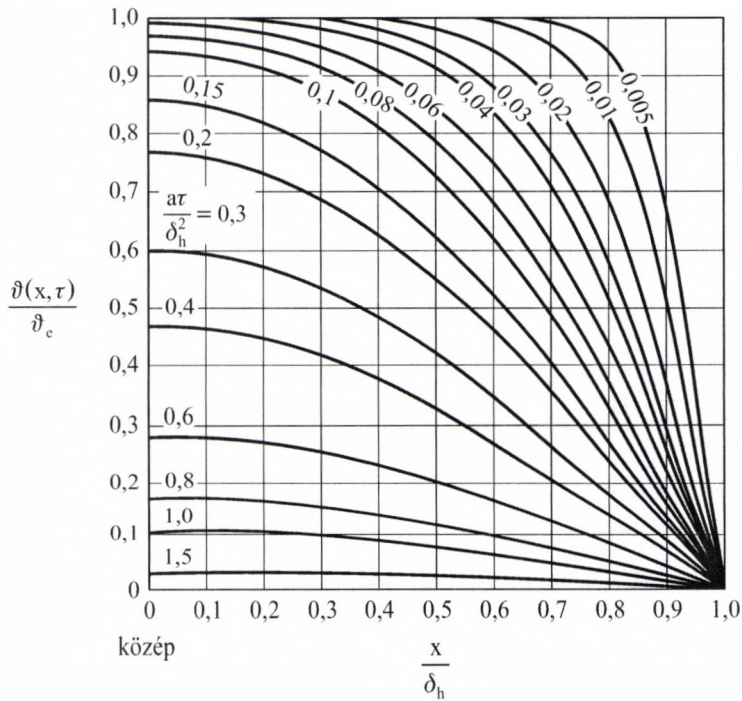
$$\dot{q}(x, \tau) = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (2.2.53)$$

ismert összefüggés alapján a

$$\dot{q}(x, \tau) = -\vartheta_c \frac{4\lambda}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Fo\right] \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.2.54)$$

formában kapjuk, ahol $n = 1, 3, 5, \dots$

* A 2.2.6. diagramot H. S. Carslaw – I. C. Jaeger: Conduction of heat in solids (Oxford 1948) c. könyvéből vettük át.



2.2.6. ábra

Meghatározott időtartam alatt az egységnyi felületen átáramló hőt a

$$q(x, \tau) = \int_0^\tau \dot{q}(x, \tau) d\tau \quad (2.2.55)$$

alapján, a helyettesítések elvégzése után a

$$q(x, \tau) = Lc\rho\vartheta_c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 Fo \right] \right\} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) [W/m^2] \quad (2.2.56)$$

összefüggés szolgáltatja. Az $x = 0$, illetve $x = L$ síkon átáramló hőt fenti értékek helyettesítésével kapjuk. Összefüggésünkben $Lc\rho\vartheta_c = q_c$ a kezdeti tárolt hő nagysága.

Példa. Határozzuk meg a hőmérsékleteket egy $2\delta_h = 0,4$ m vastag betonfal szimmetriasíkjában, illetve $x = \frac{\delta_h}{2}$ és $\frac{3\delta_h}{2}$ síkokban a $\tau = 1, 5, 10$ órában, ha a fal kezdeti hőmérséklete $t_c = 20$ °C, és a határoló síkokon a $\tau = 0$ időpontban $t_F = -10$ °C hőmérsékletet hozunk létre

A fal anyagi jellemzői:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1,0 \text{ W/(mK)}, \\ \rho &= 2000 \text{ kg/m}^3, \\ c &= 0,973 \text{ kJ/(kgK)}.\end{aligned}$$

Így

$$a = \frac{\lambda}{c \rho} = \frac{1 \cdot 3600}{2000 \cdot 0,973} = 0,00185 \text{ m}^2/\text{h}.$$

A kezdeti túlhőmérséklet

$$\vartheta_c = t_c - t_F = 20 - (-10) = 30 \text{ }^\circ\text{C},$$

és

$$\vartheta_F = t_F - t_F = 0 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A szimmetriasíkban a hőmérséklet:

$$\frac{\vartheta_c}{\vartheta_c} = P(\text{Fo}).$$

A Fo dimenzió nélküli szám értéke $\text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta_h^2}$ a jelzett időpontokban, azaz

$$\text{Fo} = \frac{1,85 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 10^{-1})^2} \tau = 4,63 \cdot 10^{-2} \tau,$$

így ha

t =	1	5	10
Fo =	0,04630	0,23100	0,46300
P(Fo)	0,99697	0,73599	0,40623
$\vartheta_c =$	29,90000	22,10000	12,20000
$t_c =$	19,9000	12,10000	2,20000

Táblázatunk szerint az 1 óra végén a szimmetriasíkban a hőmérséklet megváltozása alig értékelhető.

Az $x = \frac{\delta_h}{2}$, illetve $x = \frac{3\delta_h}{2}$ síkban a probléma szimmetrikus volta miatt azonos hőmérsékletek vannak. A dimenzió nélküli koordináták így

$$\frac{x}{\delta_h} = 0,5.$$

A 2.2.6. ábra szerint, ha

$Fo =$	0,0463	0,2310	0,4630
akkor az $\frac{x}{\delta_h} = 0,5$ síkban			
$P(Fo)$	0,890	0,5350	0,2920
$\vartheta\left(\frac{\delta_h}{2}\tau\right) =$	26,700	15,900	8,750
$t\left(\frac{\delta_h}{2}\tau\right) =$	16,700	5,900	-1,250

A hőmérséklet-megoszlást az egyes időpontokban a 2.2.7. ábra mutatja.

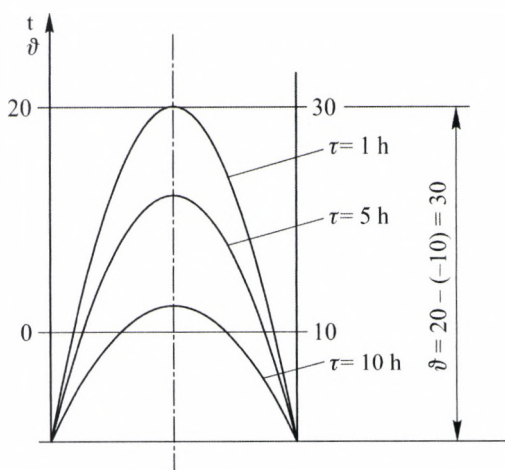
A fal 1 m²-ben feltárolt hő $\tau = 0$ időpontban a -10 °C-hoz képest a kezdeti állapotban

$$q_{\text{tár}} = 1 \cdot L \cdot c \rho \vartheta_c = 0,4 \cdot 0,973 \cdot 2000 \cdot 30 = 23351,35 \text{ kJ.}$$

Ezt a 2.2.7. ábrán $+20$ °C és -10 °C közti F_c területtel érzékeltethetjük. Az egyes időpontokig eltávozott összes hőt az egyes görbék alatti területek planimetráálásával, vagy a (2.2.56) összefüggés felhasználásával nyerhetjük. Így ez a

$$\frac{q(0, \tau)}{q_{\text{tár}}} = \frac{F_c - F_\tau}{F_c}$$

összefüggéssel gyakorlati pontossággal egyszerűen meghatározható.



2.2.7. ábra

2.2.4.2. Végtelen hosszúnak tekinthető henger felmelegedése és lehűlése

Vizsgáljuk most a tranziens jelenségeket hőtechnikailag végtelennek tekinthető hengerben, amelyben a $\tau = 0$ időpillanatban a hőmérséklet-eloszlás

$$t(r, 0) = t_c = \text{konstans.} \quad (2.2.57)$$

A henger r_1 sugarú palástján a kezdeti hőmérséklet hirtelen t_c -ről t_F -re változik, s ezen az értéken marad a $\tau \geq 0$ időintervallumban. A keresett $t(r, \tau)$ függvény a $\vartheta(r, \tau) = t(r, \tau) - t_F$ jelölés figyelembevételével eleget tesz a

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \quad (2.2.58)$$

differenciálegyenletnek. A peremfeltétel pontos megfogalmazása:

$$\begin{aligned} \vartheta(r, 0) &= \vartheta_c; & 0 \leq r \leq r_1, \\ \vartheta(r_1, \tau) &= 0; & \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

A differenciálegyenlet megoldását most is szorzat szeparációs formában, a síkfalra bemutatott módozattal azonos gondolatmenetben keressük. Egy partikuláris megoldás alaktényezője szinusz és koszinusz függvények helyett első- és másodfajú nulladrendű Bessel-függvények lineáris kombinációjaként állítható elő.

Egy rögzített k -hoz tartozó partikuláris megoldás a

$$\vartheta_k = \left[C_1 J_0 \left(\frac{k}{\sqrt{a}} r \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{k}{\sqrt{a}} r \right) \right] e^{-k^2 \tau} \quad (2.2.60)$$

formában írható. Itt J_0 nulladrendű elsőfajú, Y_0 pedig a nulladrendű másodfajú Bessel-függvény.

Mindhogy a ϑ értéke $r = 0$ (azaz a középvonalban) is véges, ezért

$$C_2 = 0,$$

mert a Y_0 függvény $r = 0$ helyen a $-\infty$ felé tart. A k állandók számba jöhető értékeit a

$$\vartheta(r_1, \tau) = 0 \quad (2.2.61)$$

feltétel korlátozza. Ennek értelmében a triviális ($C_1 = 0$) esettől eltekintve a

$$J_0 \left(\frac{k_n}{\sqrt{a}} r_1 \right) = J_0(M_n) = 0 \quad (2.2.62)$$

egyenletnek fenn kell állnia.

Ez egyenletből

$$\frac{k_n r_1}{\sqrt{a}} = M_n, \quad (2.2.63)$$

illetve

$$\frac{k_n}{\sqrt{a}} = \frac{M_n}{r_1}, \quad (2.2.64)$$

s így a megoldás általános alakja:

$$\vartheta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left[- \left(\frac{M_n}{r_1} \right)^2 a \tau \right] J_0 \left(M_n \frac{r}{r_1} \right). \quad (2.2.65)$$

A C_n állandókat a kezdeti feltételből meghatározva végül is

$$\frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_c} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \exp(-M_n^2 Fo) \frac{J_0 \left(M_n \frac{r}{r_1} \right)}{J_1(M_n)}, \quad (2.2.66)$$

ahol $J_1(M_n)$ elsőrendű elsőfajú Bessel-függvény, amire érvényes, hogy

$$J_1(x) = -J'_0(x).$$

A (2.2.62) egyenlet első öt M_n gyökét a 2.2.2. táblázat tartalmazza.

A henger tengelyében a hőmérséklet időbeli lefutását $r = 0$ helyettesítéssel nyerjük:

$$\frac{\vartheta_c(\tau)}{\vartheta_c} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \exp(-M_n^2 Fo) \frac{1}{J_1(M_n)} = C(Fo). \quad (2.2.67)$$

Fenti sor konvergens és általában elégséges, ha $n = 1, 2$ -re dolgozzuk ki a számszerű eredményt, mert a további tagok már elenyészően kicsik.

A 2.2.8. ábrából bármely $\frac{r}{r_1}$ relatív koordinátára kivehetjük a $\frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_c}$ értéket.

A 2.2.3. táblázatban a számba jövő Fo értékekre a $C(Fo)$ függvényértéket közöljük, s így a középponti hőmérsékletet számítással is könnyen megállapíthatjuk.

A henger hosszegységére a hőáramot a

$$\dot{q}_l(r, \tau) = -\lambda 2\pi r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \quad (2.2.68)$$

összefüggésből levezetve a

$$\dot{q}_l(r, \tau) = 4\pi\lambda\vartheta_c \frac{r}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-M_n^2 Fo) \frac{J_1 \left(M_n \frac{r}{r_1} \right)}{J_1(M_n)} \quad (2.2.69)$$

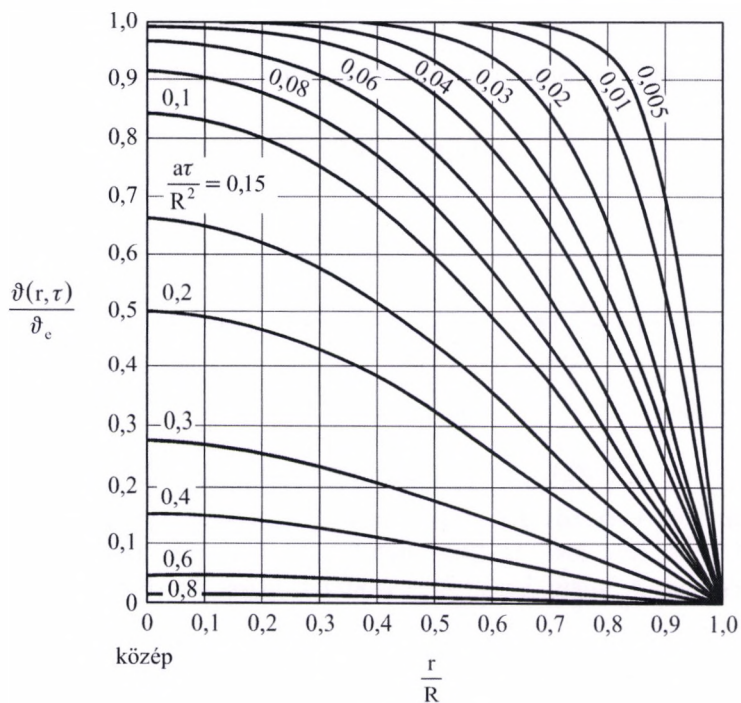
alakban kapjuk.

2.2.2. táblázat. A $J_m(M_n) = 0$ egyenlet gyökeinek táblázata

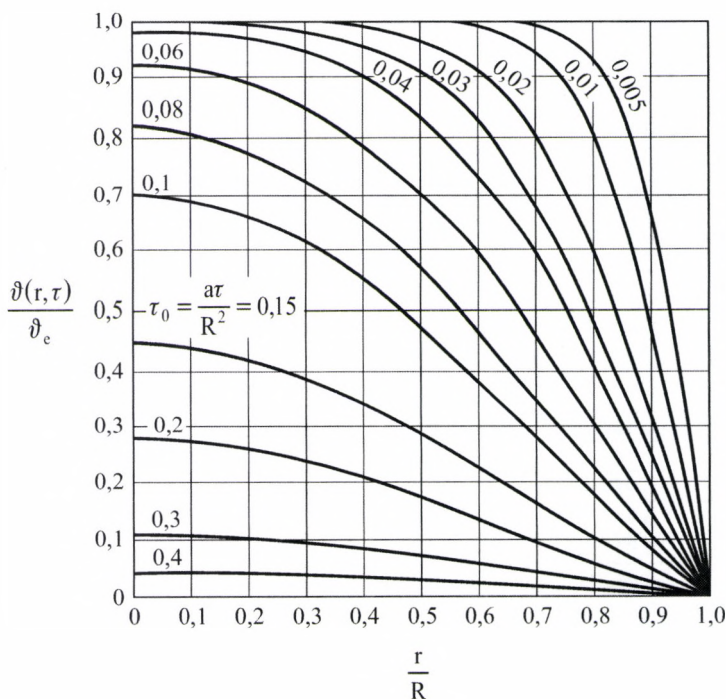
m	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0	2,4048	5,5201	8,6370	11,9715	14,9309
1	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
2	5,1356	8,4172	11,6198	14,9760	17,9598
3	6,3802	9,7610	13,0152	16,2235	19,4094
4	7,5883	11,0647	14,3725	17,6160	20,8269

2.2.3. táblázat. Végtelen henger $C(Fo)$ függvényének numerikus értéktáblázata

Fo	$C(Fo)$	Fo	$C(Fo)$	Fo	$C(Fo)$
0,020	0,99999	0,200	0,50149	0,380	0,17792
0,040	0,99627	0,220	0,39912	0,400	0,15850
0,060	0,97054	0,240	0,39912	0,450	0,11870
0,080	0,91772	0,260	0,35577	0,500	0,08870
0,100	0,84836	0,280	0,31704	0,600	0,04990
0,120	0,77293	0,300	0,28249	0,700	0,02800
0,140	0,69798	0,320	0,25167	0,800	0,01570
0,160	0,62692	0,340	0,22420	1,050	0,00370
0,180	0,56126	0,360	0,19973	1,300	0,00090



2.2.8. ábra



2.2.9. ábra

Bizonyos τ időn keresztül valamely r sugáron átáramló hőmennyiséget a

$$q_l(r, \tau) = \int_0^{\tau} \dot{q}(r, \tau) d\tau \quad (2.2.70)$$

összefüggésből a

$$q_l(r, \tau) = \frac{4\pi}{a} \lambda \vartheta_c r_l r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n^2} \left[1 - \exp(-M_n^2 Fo) \right] \frac{J_1\left(M_n \frac{r}{r_l}\right)}{J_1(M_n)} \quad (2.2.71)$$

alakban nyerjük.

2.2.4.3. Gömb felmelegedése és lehűlése

A teljesség kedvéért röviden foglalkozunk a gömbben végbemenő tranziens problémákkal is. A kezdeti és határfeltételek éppen úgy fogalmazhatók meg, mint henger esetében. A megoldás itt is a szorzatszeparációs elven alapul. A hőmérséklet-megoszlást a

$$\frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_c} = \frac{2}{\pi} \frac{r_l}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left[-(n\pi)^2 Fo\right] \sin\left(n\pi \frac{r}{r_l}\right) \quad (2.2.72)$$

függvénnyel írhatjuk le.

A 2.2.9. ábrából $\frac{r}{r_1}$ függvényében a különböző Fo számok, mint paraméterek

esetében a $\frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_c}$ értéke azonnal leolvasható.

A pillanatnyi hőáram meghatározásakor a

$$\dot{q}_1(r, \tau) = -\lambda 4r^2 \pi \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \quad (2.2.73)$$

összefüggés figyelembevételével az alábbi eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(r, \tau) = 8\lambda \vartheta_c r_1 r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left[-(n\pi)^2 Fo\right] \cdot \\ \cdot \left[\frac{1}{r^2} \sin\left(n\pi \frac{r}{r_1}\right) - \frac{n\pi}{r_1 r} \cos\left(n\pi \frac{r}{r_1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.74)$$

A tranziens hővezetési folyamat során leadott vagy felvett hőmennyiségről a hőáram időintegrálja ad számot. Ezt a jellemzőt a

$$\begin{aligned} q_1(r, \tau) = \int_0^{\tau} \dot{q}_1(r, \tau) d\tau = \frac{8\lambda}{\pi^2 a} \vartheta_c r_1^3 r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \cdot \\ \cdot \left\{ 1 - \exp\left[-(n\pi)^2 Fo\right] \right\} \left[\frac{1}{r^2} \sin\left(n\pi \frac{r}{r_1}\right) - \frac{n\pi}{r_1 r} \cos\left(n\pi \frac{r}{r_1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.75)$$

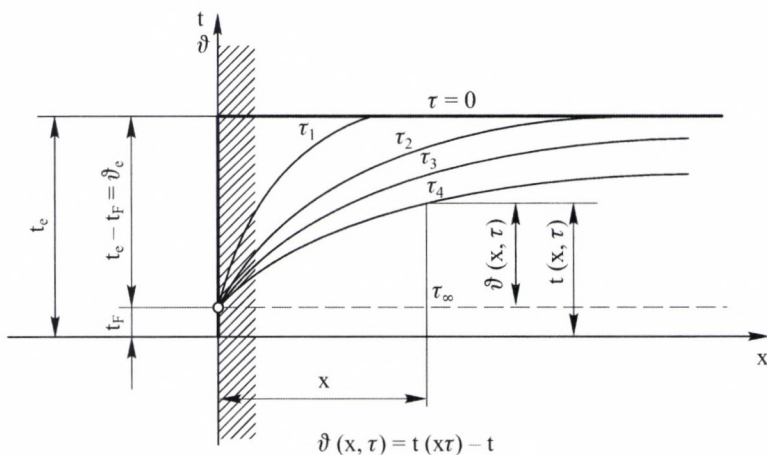
összefüggésből számítjuk ki.

2.2.4.4. Tranziens hőmérséklet-eloszlás végtelen félteret kitöltő közegben

A hőtechnikában gyakran szükséges a hőmérsékletek analízise olyan szilárd testben, amely geometriai jellege, illetve hőtechnikai sajátosságai következtében egy irányban végtelen kiterjedésű testnek tekinthető. Az ilyen rendszer matematikai modellje az olyan – a vizsgált közeg által kitöltött – végtelen féltér, ahol a szabad határoló felület egybeesik az yz síkkal, s a hőmérséklet-eloszlást a pozitív x koordináta mentén kell vizsgálnunk (2.2.10. ábra).

A tranziens hőmérséklet-eloszlást leíró differenciálegyenlet formája azonos a korábban már felírt egydimenziós síkprobléma differenciálegyenletével. A kezdeti és peremfeltételt most az alábbiak szerint fogalmazzuk meg:

$$t(x, 0) = t_c, \quad t(0, \tau) = t_F. \quad (2.2.76)$$



2.2.10. ábra

A (2.2.76) feltétel fizikailag azt jelenti, hogy a $\tau = 0$ időpillanatban az egész rendszerben valamilyen t_c hőmérséklet-eloszlás exisztált, de a határfelületen a hőmérséklet a $\tau = 0$ időpontban ugrásszerűen t_F -re változott. A tranziens hőfolyamat éppen ennek a felületi hőmérséklet-változásnak a következtében indul meg.

Célszerű itt is bevezetni a $t(x, \tau) - t_F = \vartheta(x, \tau)$ definícióval a túlhőmérsékletet. Ezzel a jelöléssel a kezdeti feltétel a $\vartheta(x, 0) = t(x, 0) - t_F = \vartheta_c$ formában írható fel, a határfeltétel megfogalmazása pedig:

$$\vartheta(0, \tau) = 0; \tau \geq 0. \quad (2.2.77)$$

A probléma egy partikuláris megoldása itt is felírható

$$\vartheta_k = \exp(-k^2 a \tau) (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) \quad (2.2.78)$$

formában. A peremfeltétel teljesítésével itt is $C_1 = 0$ adódik. A második peremfeltétel abból a fizikai feltételből adódik, hogyha $x \rightarrow \infty$, a megoldásnak korlátnak kell maradnia. Ebben az esetben a k értékei nem diszkrét értékeket, hanem folytonos spektrumot adnak. Ennek folyománya, hogy az általános megoldás nem egy végtelen sorral állítható elő – ahol a sor egyes tagjainak meghatározásánál a lehetséges saját értéket vettük tekintetbe – hanem k folytonos voltának megfelelően egy határozott integrál kifejezéssel.

Fel kell tennünk azonban azt a kérdést, hogy valamely kezdeti hőmérséklet-eloszlást kifejező integrál kifejezés a $+\infty$ és $-\infty$ határok között véges marad-e, azaz az ún. Fourier-integrállal kifejezhető-e? Erre a kérdésre a legtöbb esetben nem válaszolhatunk pozitíven, ezért tárgyalt esetünkben más megoldással kell kísérleteznünk. A (2.2.35) alatt már közölt és megismétlendő kifejezéssel mind a peremfeltétel, mind a kezdeti feltétel kielégíthető:

$$\vartheta(x, \tau) = C \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q=\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-q^2} dq. \quad (2.2.79)$$

Ha ugyanis $x = 0$ és $\tau > 0$, akkor az integrál értéke szintén 0. azaz megfelel a határfeltételnek.

Ha viszont $x = 0$ és τ a nullához konvergál, akkor a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \int_0^{q=\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-q^2} dq \right) = 0 \quad (2.2.80)$$

meggondolás alapján az integrál ugyancsak triviálisan a 0-hoz konvergál.

Az alkalmazott (2.2.79) kifejezés,

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q=x} e^{-q^2} dq = G(x) \quad (2.2.81)$$

a Gauss-féle hibaintegrál. Az integrandusz értékeit a 2.2.4. táblázatban közöljük.

Szokásos írásmód a $G(x)$ vagy $\text{erf } x$. Végül C értéke a kezdeti feltételből $\vartheta(x, 0) = C = \vartheta_c$. Ugyanis, ha $x > 0$ és $\tau \rightarrow 0$, akkor $F(x) \rightarrow 1$. Így összefüggésünk dimenzió nélküli formában

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_c} = \text{erf} \frac{x}{\sqrt{4a\tau}} = \text{erf} \frac{1}{2 \frac{\sqrt{a\tau}}{x}} = \text{erf} \frac{1}{2\sqrt{Fo}}. \quad (2.2.82)$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy (2.2.79) tényleg megoldása a

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (2.2.83)$$

alap-differenciálegyenletünknek, ha a visszahelyettesítést elvégezzük.

A pillanatnyi hőáramsűrűség a

$$\dot{q}(0, \tau) = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (2.2.84)$$

kifejezés alapján az alábbiak szerint adódik:

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = -\lambda \frac{2\vartheta_c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{q=\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-q^2} dq = \frac{-2\lambda \vartheta_c}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \Big|_{x=0}, \quad (2.2.85)$$

$$\dot{q}(0, \tau) = \frac{-\lambda \vartheta_c}{\sqrt{\pi a \tau}}. \quad (2.2.86)$$

Az egységnyi felületre vonatkoztatott hőáram τ idő alatt a peremen, $x = 0$ helyen:

$$q(0, \tau) = \int_0^\tau \dot{q}(0, \tau) d\tau, \quad (2.2.87)$$

$$q(0, \tau) = -\frac{2\lambda \vartheta_c}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\tau}, \quad (2.2.88)$$

ami $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ felhasználásával

$$q(0, \tau) = -\frac{2\vartheta_c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda c \rho} \sqrt{\tau} \quad (2.2.89)$$

formában is írható. Itt

$$\sqrt{\lambda c \rho} = b \quad (2.2.90)$$

a fajlagos hőelnyelési tényező. Ez az anyagjellemző az épületfizikában jelentős szerepet játszik, s az azonos hőmérsékletű testek hőelvonó képességét fejezi ki.

Még röviden rámutatunk arra, hogy a $\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}$ kifejezés az alábbi formában is írható:

$$\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a\tau}{x^2}}}, \quad (2.2.91)$$

azaz ebben is megjelenik a tranziens jelenségekre jellemző Fo szám. Szokásos az

$$\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} = X \quad (2.2.92)$$

jelölés is (lásd a 2.2.4. táblázatban).

2.2.4. táblázat. A normális sűrűségfüggvény $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,04	0,3986	0,08	0,3977	0,12	0,3961
0,01	0,3989	0,05	0,3984	0,09	0,3973	0,13	0,3956
0,02	0,3989	0,06	0,3982	0,10	0,3970	0,14	0,3951
0,03	0,3988	0,07	0,3980	0,11	0,3965	0,15	0,3945

2.2.4. táblázat. A Gauss-féle hibafüggvény [$G(X) = \text{erf } X$] értékei (folytatás)

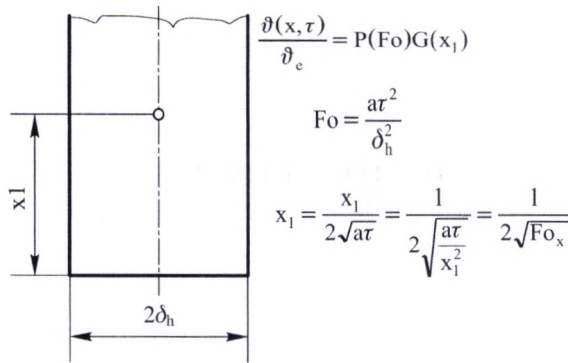
x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,16	0,3939	0,59	0,3352	1,02	0,2371	1,45	0,1394
0,17	0,3932	0,60	0,3332	1,03	0,2347	1,46	0,1374
0,18	0,3925	0,61	0,3312	1,04	0,2323	1,47	0,1354
0,19	0,3918	0,62	0,3292	1,05	0,2299	1,48	0,1334
0,20	0,3910	0,63	0,3271	1,06	0,2275	1,49	0,1315
0,21	0,3902	0,64	0,3251	1,07	0,2251	1,50	0,1295
0,22	0,3894	0,65	0,3230	1,08	0,2227	1,51	0,1276
0,23	0,3885	0,66	0,3209	1,09	0,2203	1,52	0,1257
0,24	0,3876	0,67	0,3187	1,10	0,2179	1,53	0,1238
0,25	0,3867	0,68	0,3166	1,11	0,2155	1,54	0,1219
0,26	0,3857	0,69	0,3144	1,12	0,2131	1,55	0,1200
0,27	0,3847	0,70	0,3123	1,13	0,2107	1,56	0,1182
0,28	0,3836	0,71	0,3101	1,14	0,2083	1,57	0,1163
0,29	0,3825	0,72	0,3079	1,15	0,2059	1,58	0,1145
0,30	0,3814	0,73	0,3056	1,16	0,2036	1,59	0,1127
0,31	0,3802	0,74	0,3034	1,17	0,2012	1,60	0,1109
0,32	0,3790	0,75	0,3011	1,18	0,1989	1,61	0,1092
0,33	0,3778	0,76	0,2989	1,19	0,1965	1,62	0,1074
0,34	0,3765	0,77	0,2966	1,20	0,1942	1,63	0,1057
0,35	0,3752	0,78	0,2943	1,21	0,1919	1,64	0,1040
0,36	0,3739	0,79	0,2920	1,22	0,1895	1,65	0,1023
0,37	0,3725	0,80	0,2897	1,23	0,1872	1,66	0,1006
0,38	0,3712	0,81	0,2874	1,24	0,1849	1,67	0,0989
0,39	0,3697	0,82	0,2850	1,25	0,1826	1,68	0,0973
0,40	0,3683	0,83	0,2827	1,26	0,1804	1,69	0,0957
0,41	0,3668	0,84	0,2803	1,27	0,1781	1,70	0,0940
0,42	0,3653	0,85	0,2780	1,28	0,1758	1,71	0,0925
0,43	0,3637	0,86	0,2756	1,29	0,1736	1,72	0,0909
0,44	0,3621	0,87	0,2732	1,30	0,1714	1,73	0,0893
0,45	0,3605	0,88	0,2709	1,31	0,1691	1,74	0,0878
0,46	0,3589	0,89	0,2685	1,32	0,1669	1,75	0,0863
0,47	0,3572	0,90	0,2661	1,33	0,1647	1,76	0,0848
0,48	0,3555	0,91	0,2637	1,34	0,1626	1,77	0,0833
0,49	0,3538	0,92	0,2613	1,35	0,1604	1,78	0,0818
0,50	0,3521	0,93	0,2589	1,36	0,1582	1,79	0,0804
0,51	0,3503	0,94	0,2565	1,37	0,1561	1,80	0,0790
0,52	0,3485	0,95	0,2541	1,38	0,1539	1,81	0,0775
0,53	0,3467	0,96	0,2516	1,39	0,1518	1,82	0,0761
0,54	0,3448	0,97	0,2492	1,40	0,1497	1,83	0,0748
0,55	0,3429	0,98	0,2468	1,41	0,1476	1,84	0,0734
0,56	0,3410	0,99	0,2444	1,42	0,1456	1,85	0,0721
0,57	0,3391	1,00	0,2420	1,43	0,1435	1,86	0,0707
0,58	0,3372	1,01	0,2396	1,44	0,1415	1,87	0,0694

2.2.4. táblázat. A Gauss-féle hibafüggvény [$G(X) = \text{erf } X$] értékei (folytatás)

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1,88	0,0681	2,20	0,0355	2,52	0,0167	2,84	0,0071
1,89	0,0669	2,21	0,0347	2,53	0,0163	2,85	0,0069
1,90	0,0656	2,22	0,0339	2,54	0,0158	2,86	0,0067
1,91	0,0644	2,23	0,0332	2,55	0,0154	2,87	0,0065
1,92	0,0632	2,24	0,0325	2,56	0,0151	2,88	0,0063
1,93	0,0620	2,25	0,0317	2,57	0,0147	2,89	0,0061
1,94	0,0608	2,26	0,0310	2,58	0,0143	2,90	0,0060
1,95	0,0596	2,27	0,0303	2,59	0,0139	2,91	0,0058
1,96	0,0584	2,28	0,0297	2,60	0,0136	2,92	0,0056
1,97	0,0573	2,29	0,0290	2,61	0,0132	2,93	0,0055
1,98	0,0562	2,30	0,0283	2,62	0,0129	2,94	0,0053
1,99	0,0551	2,31	0,0277	2,63	0,0126	2,95	0,0051
2,00	0,0540	2,32	0,0270	2,64	0,0122	2,96	0,0050
2,01	0,0529	2,33	0,0264	2,65	0,0119	2,97	0,0048
2,02	0,0519	2,34	0,0258	2,66	0,0116	2,98	0,0047
2,03	0,0508	2,35	0,0252	2,67	0,0113	2,99	0,0046
2,04	0,0498	2,36	0,0246	2,68	0,0110	3,00	0,0044
2,05	0,0488	2,37	0,0241	2,69	0,0107	3,10	0,0033
2,06	0,0478	2,38	0,0235	2,70	0,0104	3,20	0,0024
2,07	0,0468	2,39	0,0229	2,71	0,0101	3,30	0,0017
2,08	0,0459	2,40	0,0224	2,72	0,0099	3,40	0,0012
2,09	0,0449	2,41	0,0219	2,73	0,0096	3,50	0,0009
2,10	0,0440	2,42	0,0213	2,74	0,0093	3,60	0,0006
2,11	0,0431	2,43	0,0208	2,75	0,0091	3,70	0,0004
2,12	0,0422	2,44	0,0203	2,76	0,0088	3,80	0,0003
2,13	0,0413	2,45	0,0198	2,77	0,0086	3,90	0,0002
2,14	0,0404	2,46	0,0194	2,78	0,0084	4,00	0,0001
2,15	0,0396	2,47	0,0189	2,79	0,0081	4,10	0,0001
2,16	0,0387	2,48	0,0184	2,80	0,0079	4,20	0,0001
2,17	0,0379	2,49	0,0180	2,81	0,0077		
2,18	0,0371	2,50	0,0175	2,82	0,0075		
2,19	0,0363	2,51	0,0171	2,83	0,0073		

2.2.4.5. A középponti hőmérséklet időbeli alakulása különböző alakú testek esetében

Igen sokszor elegendő a tranziens hőfolyamattal kapcsolatban ismerni a vizsgált test centrális hőmérsékletét, mégpedig nemcsak az eddig tárgyalt geometriák esetében (végtelen sík, végtelen henger, gömb), hanem a hőfolyamat szempontjából komplikáltabb esetekben is. (például véges méretű lemezek, sarokképződmények, rövid henger, hasáb stb.) Az egyes testek centrumáról a közölt ábrák adnak felvilágosítást. Ki lehet mutatni, hogy a már megismert megoldások, illetve ezeket a



2.2.11. ábra

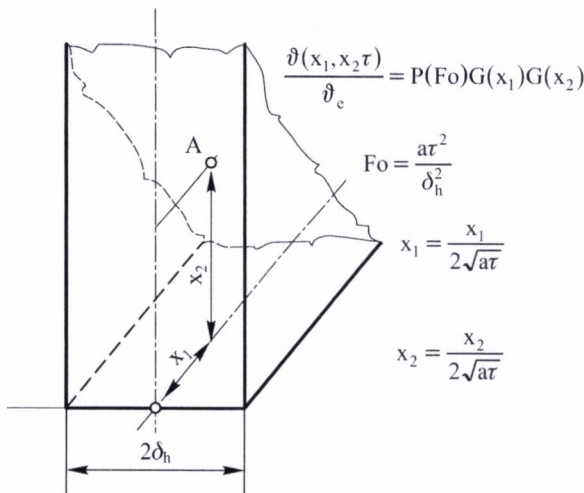
megoldásokat reprezentáló $P(Fo)$; $C(Fo)$ és $G(X)$ függvények alkalmasak közelítőleg arra, hogy megfelelő kombinációjuk segítségével bonyolultabb alakú testek esetében is tájékoztatást nyerjünk a test centrális hőmérsékletéről.

Anélkül, hogy az eljárás alkalmazásának részletes matematikai indokolását adnánk, nézzük meg néhány jellegzetes esetben a dimenzió nélküli centrális hőmérsékletet szolgáltató szorzatokat.

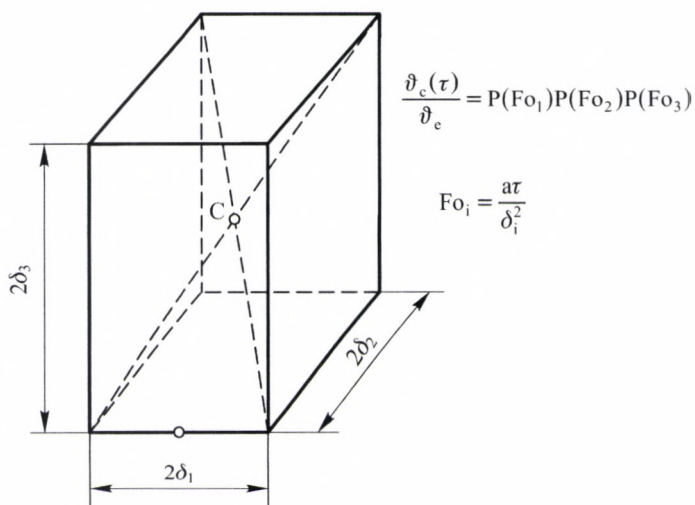
Végtelen sík lemez esetében, mint azt láttuk, a $P(Fo)$ függvénnyel számolhatunk. félig végtelen lemez (2.2.11. ábra) a végtelen lemez és a végtelen féltér kombinációjaként fogható fel és ennek megfelelően a centrális hőmérséklet a

$$\frac{\partial(x, \tau)}{\partial_e} = P(Fo) G(X_1) \quad (2.2.93)$$

összefüggésből határozható meg.



2.2.12. ábra



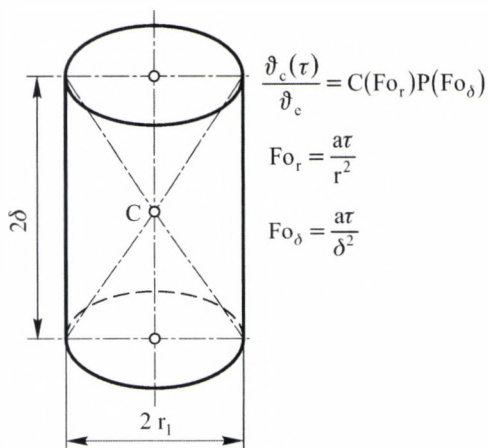
2.2.13. ábra

Hasonló megfontolások alapján például egy lemezsarok esetében az A pontban a hőmérsékletet a

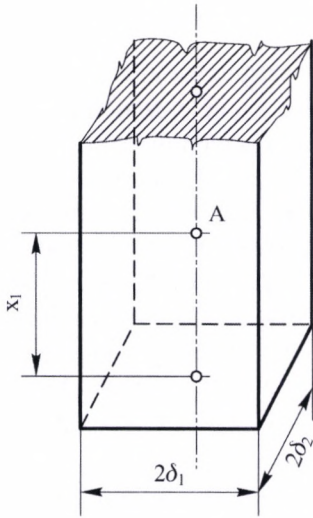
$$\frac{\partial(x_1, x_2, \tau)}{\partial_c} = P(Fo) G(X_1)G(X_2) \quad (2.2.94)$$

összefüggésből számolhatjuk ki (2.2.12. ábra).

Ha a rendszer minden irányban véges, mint például egy véges hasáb, vagy véges henger, a vonatkozó összefüggésben nem használjuk fel a végtelen féltérre jellemző $G(X)$ függvényt. A fentebbi esetekben például a



2.2.14. ábra



$$\frac{\partial_A(\tau)}{\partial_c} = P(Fo_1)P(Fo_2)G(X_1)$$

$$Fo_i = \frac{a\tau}{\delta_i^2}$$

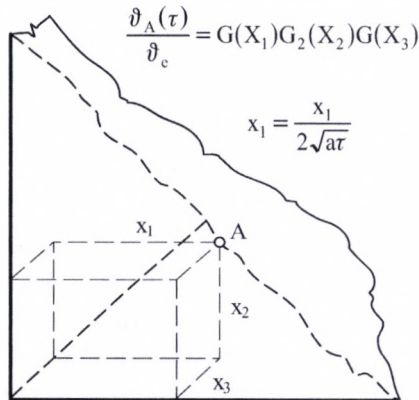
$$x_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{a\tau}}$$

2.2.15. ábra

$$\frac{\partial_c(\tau)}{\partial_c} = P(Fo_1) P(Fo_2) P(Fo_3) \quad (2.2.95)$$

összefüggéssel számolhatunk (2.2.13. ábra és 2.2.14. ábra).

A 2.2.15. ábrán a félig végtelen négyyszögű hasáb, a 2.2.16. ábrán pedig a végtelen tényolcad A pontjában előálló hőmérséklet-változás számítására vonatkozó összefüggéseket mutatjuk be.



$$\frac{\partial_A(\tau)}{\partial_c} = G(X_1)G_2(X_2)G(X_3)$$

$$x_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{a\tau}}$$

2.2.16. ábra

2.2.4.6. Hőmérséklet hullámok behatolása végtelen félteret kitöltő közegbe

A tranziens jelenségekre vonatkozó eddigi vizsgálatainkban mindig feltételeztük, hogy a peremfeltétel időben nem változik. Ez a feltételezés mindig arra vezetett – akár felmelegedésről volt szó –, hogy a hőmérsékletlefutás a kiegyenlítődés felé törekedett. Általános esetben azonban a peremfeltétel időben változásának a lehetőségével is számolni kell. Különösen érdekes az az eset, a mikor a peremfeltétel az időnek periodikus függvénye. Ilyen probléma lép fel belsőégésű motorokban, szakaszos üzemű regenerátorokban és egyéb periodikus működésű hőtechnikai berendezésekben. Számunkra nagyon fontos ennek a kérdésnek a vizsgálata az építészeti hőtechnika szempontjából, közelebbről, hogy a napi és évi környezet hőmérséklet-ingadozás milyen hatással van az épületek határoló szerkezetire, illetve magára az épületre. Ez a kérdés is az alábbiakban bemutatásra kerülő módszer segítségével tárgyalható.

Vizsgáljuk tehát azt az esetet, amikor a vizsgált test belső hőellenállása nem hanyagolható el, de feltételezzük viszont azt, hogy a felületi hőellenállás nagyon kicsi. Így a test t_F felületi hőmérséklete megegyezik a környezet mindenkori hőmérsékletével, azaz elsőfajú peremfeltétellel beszélhetünk.

A félter határoló felületének t_F hőmérséklete valamilyen t_{F0} hőmérséklet körül $\cos$ függvény szerint ingadozik. Ha bevezetjük a $\vartheta_{F0} = t_F - t_{F0}$ jelölést, akkor a hőmérséklet-ingadozási amplitúdó a felületen ϑ_{Fmax} . Így írhatjuk, hogy a határfelületi hőmérséklet időfüggése:

$$\vartheta_F = \vartheta_{Fmax} \cos(\omega\tau), \quad (2.2.96)$$

ahol ω a hőmérséklet-változás körfrekvenciája, amely mennyiség az f lineáris frekvenciával a szokásos $\omega = 2\pi f$ összefüggésben van. A hőmérsékleti hullám ciklusideje a körfrekvenciával kifejezve

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.2.97)$$

Maga a $\vartheta(x, \tau)$ függvény természetesen a

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget.

Fizikai megfontolások döntenek el azt, hogy a 2.2.3. pontban közölt partikuláris megoldások közül melyik alkalmas a felvetett probléma leírására.

Nyilvánvaló, hogy a felületen végbemenő hőmérséklet-hullámváz a közegben is hőmérséklet-hullámváz fog létrehozni, és az sem szorul bővebb magyarázatra, a tapasztalattal azonnal igazolható, hogy a hullámváz amplitúdója a felülettől mért távolsággal (mélységgel) folytonosan csökkenni fog. Ugyancsak a tapasztalat iga-

olja, hogy a hullámok maximális amplitúdója nem egy időben fog a különböző mélységben fellépni. (Mélyebb kutak vizének hőmérséklete nyáron hidegebb, mint télen!) Fentiek alapján a (2.2.32) összefüggéssel tehetünk kísérletet. A nyert komplex megoldást egy reális és egy imaginárius részre választhatjuk szét, amelyek külön-külön és együttesen is eleget tesznek a differenciálegyenletnek:

$$\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2 \quad (2.2.98)$$

Eszerint

$$\vartheta_1 = C_1 \exp \left(\pm r x \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cos \left(a r^2 \tau \pm r x \sqrt{\frac{1}{2}} \right), \quad (2.2.99)$$

$$\vartheta_2 = C_2 \exp \left(\pm r x \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \sin \left(a r^2 \tau \pm r x \sqrt{\frac{1}{2}} \right). \quad (2.2.100)$$

A kitevőkben előforduló + és – előjelek közül csak a – előjel jöhet tekintetbe, ami összhangban van azzal, hogy a felülettől növekvő távolságban a hullámok amplitúdója csökken. A partikuláris megoldásoknak ki kell elégíteniük a peremfeltételt is. Ezek szerint, ha $x = 0$, akkor

$$\vartheta_1 = \vartheta_F(\tau) = \vartheta_{F_{\max}} \cos(\omega \tau) = C_1 \cos(a r^2 \tau) \quad (2.2.101)$$

a ϑ_2 -re nyert összefüggés, amelyben $\sin(a r^2 \tau)$ fordul elő, e feltételnek eleget tenni nem tud. Ebből következik, hogy

$$C_2 = 0.$$

A (2.2.101)-ből azonnal megállapítható, hogy

$$C_1 = \vartheta_{F_{\max}} \quad (2.2.102)$$

és

$$\omega = a r^2,$$

amiből

$$r^2 = \frac{\omega}{a} = \frac{2\pi}{a \tau_0}. \quad (2.2.103)$$

Behelyettesítve az értékeket nyerjük, hogy

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta_{F_{\max}} \exp \left(-x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau - x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} \right), \quad (2.2.104)$$

illetve dimenzió nélküli formában

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_{F_{\max}}} = \exp \left(-x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau - x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} \right). \quad (2.2.105)$$

Megjegyzendő, hogy az

$$x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{a \tau_0}{x^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{Fo}} \quad (2.2.106)$$

formában is írható.

Az összefüggésből látható, hogy az amplitúdó a határfelülettől mért mélység függvényében exponenciálisan csökken. A csillapítás mértéke a körfrekvenciával

$\left(\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}\right)$ egyenes arányban, a hőfokvezetési tényezővel fordítottan arányos. A

hőmérsékletmezőt $\tau = 0, \frac{1}{4}\tau_0, \frac{1}{2}\tau_0$ időpontokban a 2.2.17. ábra mutatja.

A függvény további vizsgálata érdekében készítsünk valamely τ időpontban a függvény formájáról pillanatfelvételt, mégpedig az amplitúdó csillapításának hatása nélkül. Válasszuk a $\tau = 0$ időpontot. Ekkor függvényünk az

$$f_1(x) = \vartheta_{\max} \cos\left(x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}}\right).$$

alakot veszi fel, azaz egy koszinusz görbét képvisel. Ennek periódusa 2π lévén, a hullámhosszúságot az

$$x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} = 2\pi \quad (2.2.107)$$

egyenletből ($x = \Lambda$ jelöléssel) a

$$\Lambda = 2\sqrt{a \tau_0 \pi} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \quad (2.2.108)$$

formában írhatjuk.

Valamely $\tau \neq 0$ időpontban függvényünk az

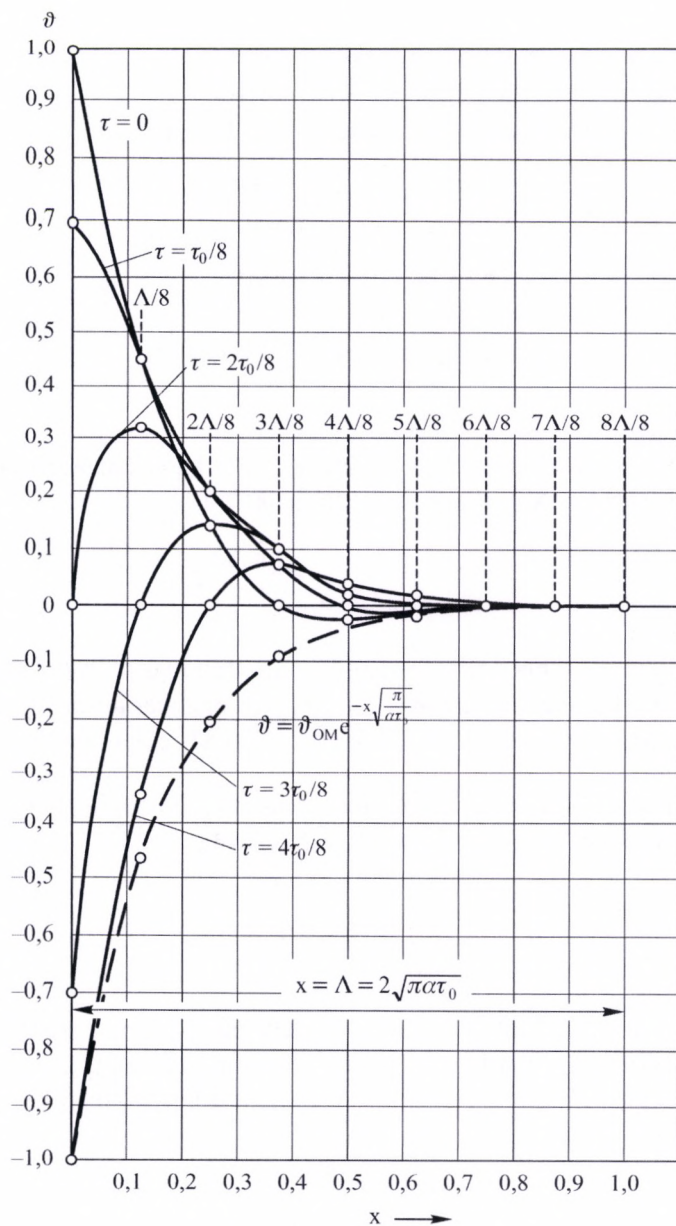
$$f_2(x) = \vartheta_{\max} \cos\left(x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} - \frac{2\pi}{\tau_0} \tau\right). \quad (2.2.109)$$

alakot veszi fel.

E görbe ugyancsak egy 2π periódusú koszinusz görbét ábrázol, azonban a $\tau = 0$ időpontban felvett görbéhez képest $\frac{2\pi}{\tau_0} \tau$ -val az x tengely pozitív irányában eltolva.

A hullámok tovahaladási sebességét megkapjuk, ha a hullámhosszúságot a periódusidővel osztjuk, azaz

$$w = \frac{2\sqrt{\pi a \tau_0}}{\tau_0} = 2\sqrt{\frac{\pi a}{\tau_0}} = \sqrt{2 a \omega}. \quad (2.2.110)$$



2.2.17. ábra

A (2.2.108) és (2.2.110) egyenletek rámutatnak az a és ω befolyására a jelenség kialakulásában.

A hőmérséklet hullámszámát valamely meghatározott x rétegben vizsgálva, ugyancsak a koszinusz függvény szerinti változást találunk. A teljes változás periódusideje szintén τ_0 , tehát a mélységtől független.

Az egyes maximumok bekövetkezési ideje x mélységben az

$$x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} - \frac{2\pi}{\tau_0} \tau = 0$$

egyenletből

$$\tau = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{\pi a}} = \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi Fo}} \quad (2.2.111)$$

formában adódik.

Azaz a hullámszám fáziseltolódása a mélységgel és a periódusidő négyzetgyökével egyenesen arányos. A mélység csillapító hatását a

$$\vartheta_{x_{\max}} = \vartheta_{F_{\max}} e^{-x \sqrt{\frac{n}{a \tau_0}}} \quad (2.2.112)$$

összefüggés fejezi ki. Ebből látható, hogy az amplitúdó a mélységgel rohamosan csökken. A nagy periódusú hullámszámok (évi hőmérsékletmenet!) mélyebbre hatolnak, mint a rövid periódusúak. Döntő itt az „ a ” hőmérséklet-vezetési tényező szerepe.

A (2.2.112) összefüggés alapján definiálni tudjuk a közeg csillapítási tényezőjét. Valamely x mélységben a csillapítás nagyságát a

$$\nu = \frac{\vartheta_{F_{\max}}}{\vartheta_{x_{\max}}} = e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}}} \quad (2.2.113)$$

összefüggéssel, azaz a felületen, illetve x mélységben adódó amplitúdók viszonyával fejezhetjük ki. A fáziskésést pedig a (2.2.111) összefüggés szolgáltatja.

A (2.2.113)-ból bármely ν csillapítási tényezőhöz tartozó mélység az

$$x = \sqrt{\frac{a \tau_0}{\pi}} \ln \nu \quad (2.2.114)$$

összefüggéssel számítható.

A félperiódus alatt behatoló, illetve leadott hőmennyiséget a pillanatnyi

$$dq = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} d\tau \quad (2.2.115)$$

hőmennyiség integrálásával nyerjük. Minthogy

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = -\vartheta_{F_{\max}} \sqrt{\frac{2\pi}{a \tau_0}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.2.116)$$

így

$$q = \lambda \vartheta_{F_{\max}} \sqrt{\frac{2\pi}{a \tau_0}} \int_{\frac{\tau_0}{8}}^{\frac{5}{8}\tau_0} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau + \frac{\pi}{4}\right) d\tau, \quad (2.2.117)$$

$$q = \lambda \vartheta_{F_{\max}} \sqrt{\frac{2\pi}{a \tau_0}} \frac{\tau_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{\frac{\tau_0}{8}}^{\frac{5}{8}\tau_0}, \quad (2.2.118)$$

$$q = \lambda \vartheta_{F_{\max}} \sqrt{\frac{2\pi}{a \tau_0}} \frac{\tau_0}{2\pi} (\pm 2) = \vartheta_{F_{\max}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \sqrt{\tau_0},$$

$$q = \pm \vartheta_{F_{\max}} 0,8 \sqrt{\lambda c \rho} \sqrt{\tau_0}. \quad (2.2.119)$$

Az eredmény természetesen jelentős hasonlóságot mutat a (2.2.89) alatt közölt, végtelen feltérbe τ idő alatt be- vagy kiáramló hőre vonatkozó összefüggéssel.

2.2.5. Tranziens problémák véges felületi hőellenállás esetében (harmadfajú határfeltétel)

Vizsgáljunk most olyan eseteket, amikor a belső hőellenállás, illetőleg a felületi hőellenállás nem vesz fel extrém értékeket, s így nem engedhetők meg azok az egyszerűsítő felvételek, amiket az eddigiekben feltételeztünk. Ilyen esetben pontosan számításba kell venni a határfeltételekben a felületi hatást. Ha a termofizikai jellemzőket állandónak tekintjük, a hőmérséklet-csoszlásra jellemző differenciálegyenlet általános esetben most is

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \quad (2.2.120)$$

formában érvényes, ahol – mint már fentebb is – bevezettük a $\vartheta = t - t_k$ jelölést. Itt t_k a környezet változatlan hőmérséklete a jelenség teljes lefolyása alatt. Ennek megfelelően $\vartheta_k = t_k - t_k = 0$. A kezdeti feltétel és határfeltétel általános megfogalmazása

$$\vartheta(\mathbf{r}, 0) = \vartheta_c(\mathbf{r}), \quad -\text{grad } \vartheta|_{r_F} = \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta(r_F)_x = h\vartheta(r_F). \quad (2.2.121)$$

Szimmetrikus viszonyok a peremfeltételekben tükröződnek.

2.2.5.1. Hőmérséklet-eloszlás végtelen lemezben

Szimmetrikus peremfeltétel

Viszonylag egyszerűen ebben az esetben is az y és z irányban végtelennek tekinthető sík lemez problémája vizsgálható. Jelöljük most a sík lemez véges vastagságát $2\delta_h$ -val, s helyezzük el most a koordináta-rendszer kezdőpontját a sík lemez szimmetriasíkjában. Így a vizsgált rendszer határai az $x = \pm\delta_h$ helyen vannak (2.2.18. ábra).

Ennek megfelelően a peremfeltételek, a szimmetria alapján:

$$x = +\delta_h \text{ síkon } \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\hbar \vartheta, \quad x = -\delta_h \text{ síkon } \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = +\hbar \vartheta. \quad (2.2.122)$$

A szimmetriából következik, hogy az $x = 0$ síkon keresztül nincs hőáramlás, azaz

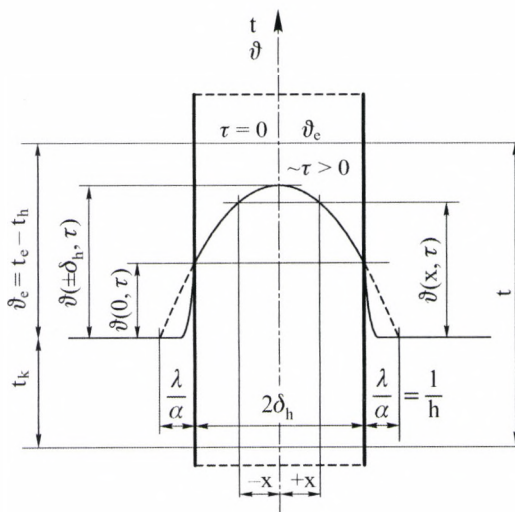
$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad (2.2.123)$$

a kezdeti feltétel pedig $\tau = 0$ időpontban

$$\vartheta(x, 0) = \vartheta_c = \text{konstans.} \quad (2.2.124)$$

A közölt határfeltételnek tulajdonképpen szélső esete a 2.2.4.1. alpontban közölt feltétel, amely $\alpha = \infty$ esetében jönne létre. Így most is a 2.2.3. pont a) bekezdésében közölt partikuláris megoldásokkal kísérletezhetünk, mivel a hőmérséklet itt is a kiegyenlítődés felé törekszik. Ennek megfelelően

$$\vartheta = \text{De}^{-a\varepsilon^2\tau} \cos(\varepsilon x), \quad (2.2.125)$$



2.2.18. ábra

illetve

$$\vartheta = C e^{-a\varepsilon^2 \tau} \sin(\varepsilon x). \quad (2.2.126)$$

Mint hogy szimmetrikus problémával állunk szemben, bármely időpontban érvényes, hogy

$$\vartheta(+x, \tau) = \vartheta(-x, \tau), \quad (2.2.127)$$

ezért csak páros függvény jöhet szóba, s így $C = 0$. A peremfeltétel értelmében

$$\lambda \varepsilon D e^{-a\varepsilon^2 \tau} \sin(\varepsilon \delta_h) = \alpha D e^{-a\varepsilon^2 \tau} \cos(\varepsilon \delta_h), \quad (2.2.128)$$

illetve egyszerűsítve és az egyenlet két oldalát δ_h -val szorozva

$$\varepsilon \delta_h \sin(\varepsilon \delta_h) = \delta_h h \cos(\varepsilon \delta_h), \quad (2.2.129)$$

amiből

$$\operatorname{ctg}(\varepsilon \delta_h) = \frac{\varepsilon \delta_h}{Bi}, \quad (2.2.130)$$

ahol a $h \delta_h = Bi$ jelölést alkalmaztuk. $Bi = \text{Biot}$ dimenzió nélküli szám, amely a harmadfajú feltétel esetén jelentkező hasonlósági kritérium. Szokásos a (2.2.130) transzcendens egyenletet, amelynek végtelen sok gyöke van,

$$\operatorname{ctg} M_n = \frac{M_n}{Bi} \quad (2.2.131)$$

alakban írni, hol $M_n = \varepsilon_n \delta_h$. Ezzel a peremfeltételek az egyébként tetszőleges ε_n értékeket azokra korlátozzák, amelyek a (2.2.130), (2.2.131) transzcendens egyenletet kielégítik. M_n grafikus úton határozható meg legkönnyebben, és értékeit a ránk nézve fontos intervallumban az 2.2.5. táblázat tartalmazza.

Az általános megoldás előállítható a partikuláris megoldások szuperpozíciójával, azaz

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\varepsilon_n^2 a \tau} \cos(\varepsilon_n x). \quad (2.2.132)$$

D_n értékeit viszont úgy kell meghatározni, hogy a kezdeti feltétel is kielégítést nyerjen. Ennek értelmében, ha $\tau = 0$,

$$\vartheta_c = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\varepsilon_n x). \quad (2.2.133)$$

A D_n együtthatókat fenti függvény Fourier-sorba fejtése útján határozhatjuk meg*. A részletes számítást mellőzve:

* Lásd bővebben: Gröber – Erk – Grigull: Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1955.

2.2.5. táblázat. A $\text{ctg } M_n = \frac{M_n}{B_i}$ transzcendens egyenlet gyökeinek táblázata

B_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0,000	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670
0,010	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672
0,020	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680
0,040	0,1987	3,1443	6,2895	9,4290	12,5696
0,060	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711
0,080	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727
0,100	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743
0,200	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823
0,300	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902
0,400	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981
0,500	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6000
0,600	0,7051	3,3204	6,3770	9,4979	12,6130
0,700	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6210
0,800	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6290
0,900	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6370
1,000	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453
1,500	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841
2,000	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7228
3,000	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966
4,000	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678
5,000	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352
6,000	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988
7,000	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584
8,000	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141
9,000	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660
10,000	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142
15,000	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078
20,000	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420
30,000	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085
40,000	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048
50,000	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666
100,000	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981

$$D_n = \vartheta_c \frac{2 \sin(\varepsilon_n \delta_h)}{\sin(\varepsilon_n \delta_h) \cos(\varepsilon_n \delta_h) + (\varepsilon_n \delta_h)}. \quad (2.2.134)$$

Ezzel az $M_n = (\varepsilon_n \delta_h)$ jelölést is bevezetve nyerjük, hogy

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta_c \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin M_n}{\sin M_n \cos M_n + M_n} \exp\left(-M_n^2 \frac{a\tau}{\delta_h^2}\right) \cos\left(M_n \frac{x}{\delta_h}\right). \quad (2.2.135)$$

Gyakorlati feladatokban elsősorban a határsíkokon és a szimmetriasíkokon kialakuló hőmérsékleteket kell meghatároznunk.

A szimmetriasíkra érvényes, hogy $x = 0$, s így

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin M_n}{\sin M_n \cos M_n + M_n} \exp(-M_n^2 Fo), \quad (2.2.136)$$

ha az $\frac{a\tau}{\delta_h^2} = Fo$ jelölést alkalmazzuk. A határoló síkokra $x = \delta_h$, s így

$$\frac{\vartheta(\delta_h, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin M_n \cos M_n}{\sin M_n \cos M_n + M_n} \exp\left(-M_n^2 \frac{a\tau}{h^2}\right) \cos M_n. \quad (2.2.137)$$

Ha egyenleteinket a

$$\operatorname{ctg} M_n = \frac{M_n}{Bi}, \quad (2.2.138)$$

avagy

$$M_n \operatorname{tg} M_n = Bi = h \delta_h \quad (2.2.139)$$

összefüggés felhasználásával egyszerűsítjük, akkor a következő egyszerűbb kifejezésekhez jutunk. Ha $x = 0$, azaz a középvonalban

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\frac{h\delta_h}{\cos M_n}}{M_n^2 + h\delta_h(1 + h\delta_h)} e^{-M_n^2 \frac{a\tau}{\delta_h^2}}, \quad (2.2.140)$$

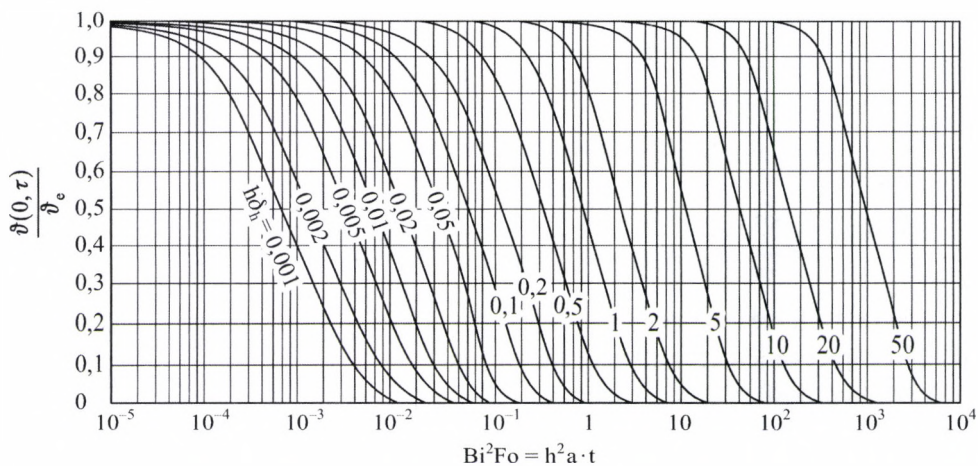
a határsíkokon

$$\frac{\vartheta(\delta_h, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{h\delta_h}{M_n^2 + h\delta_h(1 + h\delta_h)} e^{-M_n^2 \frac{a\tau}{\delta_h^2}}, \quad (2.2.141)$$

illetve

$$h \delta_h = Bi; \quad \frac{a\tau}{\delta_h^2} = Fo$$

helyettesítésével:



2.2.19. ábra

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\frac{Bi}{\cos M_n}}{M_n^2 + Bi(1 + Bi)} e^{-M_n^2 Fo} = f_1(Bi, Fo), \quad (2.2.142)$$

és

$$\frac{\vartheta(\delta_h, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{Bi}{M_n^2 + Bi(1 + Bi)} e^{-M_n^2 Fo} = f_2(Bi, Fo). \quad (2.2.143)$$

Ez összefüggések alapján a felületi, illetve szimmetriasíkbeli hőmérsékletek meghatározására több szerző különféle felfogásban jól használható diagramokat szerkesztett. Mi itt a Hans Bachmann által bevezetett diagramokat* közöljük. Az ordinátán a viszonylagos túlhőmérsékletet tüntették fel, az abszcisszán a $Bi^2 Fo$ szorzatot:

$$Bi^2 Fo = h^2 \delta_h^2 \frac{a\tau}{\delta_h^2} = a\tau h^2. \quad (2.2.144)$$

Ily módon az abszcisszát a hossz mérettől függetleníteni lehetett. Paraméter gyanánt a

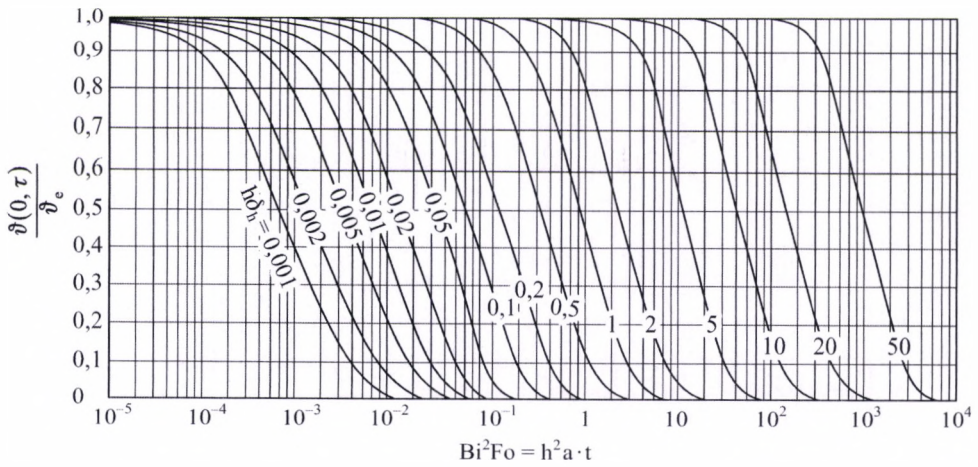
$$Bi = h \delta_h \quad (2.2.145)$$

szám szerepel.

A 2.2.19. ábra a lemez szimmetriasíkjában, a 2.2.20. ábra pedig a határsíkokon kialakuló viszonylagos túlhőmérsékletet szolgáltatja.

A lemezben tárolt hő változása többféle módon is számolható.

* Bachmann, A: Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. Springer Verlag, Berlin, 1938.



2.2.20. ábra

Az egységnyi felületen $d\tau$ idő alatt átáramló hőmennyiség kifejezhető akár a

$$dq = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\pm\delta_h} d\tau, \quad (2.2.146)$$

akár a

$$dq = \alpha \vartheta_{x=\pm\delta_h} d\tau \quad (2.2.147)$$

összefüggésekkel.

A hőtartalomnak $0 - \tau$ intervallumban végbement változását megkapjuk, ha az előző összefüggéseket $0 - \tau$ időközre integráljuk és a lemez vizsgált két felületével szorozzuk.

Kifejezhető a 0 és τ időpontok közötti leadott vagy felvett hőmennyiség a tárolt hő változásával. A $dx dy dz$ tételemben a $\tau = 0$ időpontban tárolt hő mennyisége a környezet hőmérsékletéhez viszonyítva

$$dx dy dz \rho c \vartheta_e, \quad (2.2.148)$$

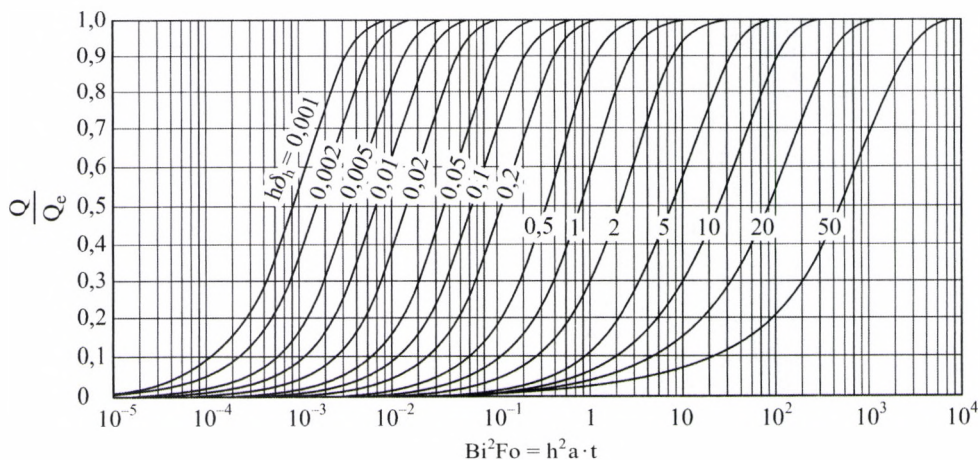
a τ időpontban pedig

$$dx dy dz \rho c \vartheta(x, \tau). \quad (2.2.149)$$

E kettő különbsége a hőtartalom változásával azonos, azaz

$$dq = dx dy dz \rho c [\vartheta_e - \vartheta(x, \tau)]. \quad (2.2.150)$$

Helyettesítve a $\vartheta(x, \tau)$ értékét (2.2.135)-ből és integrálva $x = \pm\delta_h$ határok között, nyerjük, hogy



2.2.21. ábra

$$Q = 2 c \rho F \delta_h \vartheta_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 M_n}{M_n^2 + M_n \sin M_n \cos M_n} \left[1 - \exp(-M_n^2 Fo) \right], \quad (2.2.151)$$

illetve

$$Q = Q_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 M_n}{M_n^2 + M_n \sin M_n \cos M_n} \left[1 - \exp(-M_n^2 Fo) \right]. \quad (2.2.152)$$

Szimbolikus formában

$$\frac{Q}{Q_c} = f_3(Bi, Fo). \quad (2.2.153)$$

A 2.2.21. ábra a $\frac{Q}{Q_c}$ relatív hőtartalom-változást mutatja be, ugyancsak a

$Bi^2 Fo = ath^2$ szorzat függvényében. Megjegyezzük, hogy az ath^2 kifejezés a továbbiakban is gyakran fel fog lépni, s így bevezetése ebből a szempontból is célszerű volt.

Aszimmetrikus peremfeltétel

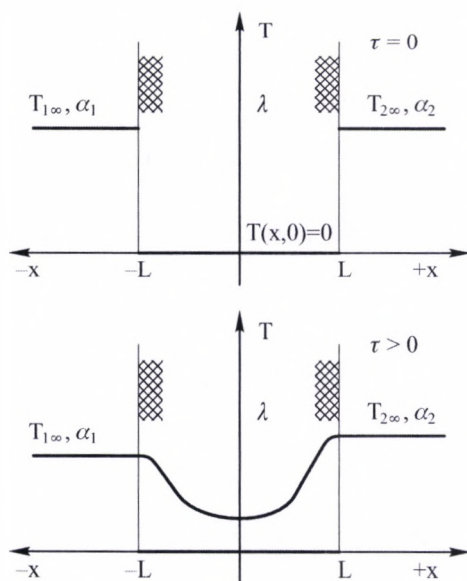
A hővezetés modelljét az 2.2.22. ábra mutatja.

A hővezetést leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (2.2.154)$$

A kezdeti feltétel:

$$T = 0, \quad -L \leq x \leq +L.$$



2.2.22. ábra. A hővezetés modellje aszimmetrikus harmadfajú peremfeltételekkel x -irányban véges síkfalra

A peremfeltételek:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_1 (T - T_{1\infty}), \quad x = -L, \quad \tau > 0, \quad (2.2.155)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_2 (T - T_{2\infty}), \quad x = +L, \quad \tau > 0.$$

A felírt harmadfajú peremfeltételekből származtatható az elsőfajú peremfeltétel esete is, ha α_1 és $\alpha_2 \rightarrow \infty$.

Szimmetrikus peremfeltételek esetén, ha $\alpha_1 = \alpha_2$ és $T_{1\infty} = T_{2\infty}$, a megoldás szerint:

$$T = T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(v_k)}{\sin(v_k) \cos(v_k) + v_k} e^{-v_k F_0} \cdot \cos(v_k \xi), \quad (2.2.156)$$

ahol μ_k az $\frac{1}{Bi} v = \cot gv$ egyenlet gyökei, Bi a Biot-szám, és definíció szerint

$$Bi = \alpha \frac{L}{\lambda}.$$

Ha $\alpha_1 \neq \alpha_2$, és a kezdeti hőmérséklet eloszlás nem zérus, hanem $T = f(x)$, továbbá a peremfeltételek a legáltalánosabb módon az alábbiak szerint vannak megfogalmazva:

$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \alpha_1 \vartheta = 0, \quad x = 0, \quad (2.2.157)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \alpha_2 \vartheta = 0, \quad x = L,$$

ahol $\vartheta = T - T_\infty$.

Figyeljünk arra, hogy a peremfeltételekben tulajdonképpen a $T_{1\infty} = T_{2\infty}$ feltétel el van rejtve.

Az általános megoldás:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x) e^{-\kappa \beta \lambda t} \int_0^L Z_n(x') f(x') dx', \quad (2.2.158)$$

ahol

$$Z_n(x) = \frac{\frac{1}{[2(\lambda_2^2 \beta_n^2 + \alpha_2^2)]^2 (\lambda_1 \beta_n \cos \beta_n x + \alpha_1 \sin \beta_n x)}}{\{(\lambda_1^2 \beta_n^2 + \alpha_1^2)[L(\lambda_2^2 \beta_n^2 + \alpha_2^2) + \lambda_2 \alpha_2] + \lambda_1 \alpha_1 (\lambda_2^2 \beta_n^2 + \alpha_2^2)\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.2.159)$$

$\beta_n, n = 1, 2, \dots$ az alábbi egyenlet gyökei:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \beta^2 - \alpha_1 \alpha_2) \sin \beta L = \beta (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1) \cos \beta L. \quad (2.2.160)$$

Lükov ad megoldást arra az esetre, ha a kezdeti hőmérséklet-eloszlás egyenletes, azaz $T(x, 0) = T_0 = \text{const}$, de $\alpha_1 \neq \alpha_2$ és $T_{1\infty} = T_{2\infty} = T_\infty$.

A megoldás:

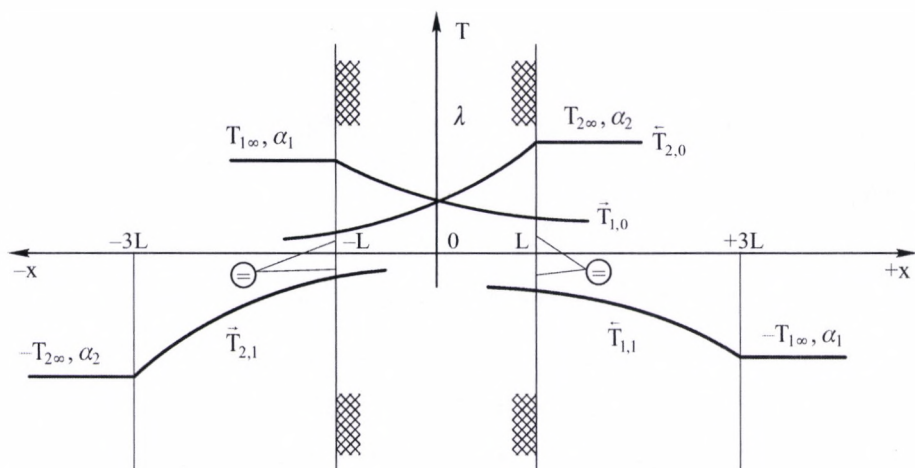
$$\theta = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_\infty - T_0} = \frac{1 + \text{Bi}_1 \frac{x}{L}}{\left(1 + \text{Bi}_1 + \frac{\text{Bi}_1}{\text{Bi}_2}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos \mu_n \frac{x}{L} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin \mu_n \frac{x}{L} \right) \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}), \quad (2.2.161)$$

ahol

$$\text{Bi}_1 = H_1 L, \quad \text{Bi}_2 = H_2 L \quad \text{és} \quad H_1 = \alpha_1 / \lambda, \quad H_2 = \alpha_2 / \lambda. \quad (2.2.162)$$

$\mu_n, n = 1, 2, \dots$ az alábbi egyenlet gyökei:

$$\text{ctg } \mu = \frac{\left(\frac{\mu}{\text{Bi}_2} - \frac{\text{Bi}_1}{\mu} \right)}{\left(1 + \frac{\text{Bi}_1}{\text{Bi}_2} \right)^{-1}}, \quad (2.2.163)$$



2.2.23. ábra. A nem állandósult hővezetés vizsgálata véges térben aszimmetrikus peremfeltételekkel, a peremek szeparációjával

ahol

$$\mu = i\sqrt{\frac{s}{a}}L. \quad (2.2.164)$$

A különböző szerzők által közölt megoldások elvileg zárt és analitikus formában vannak előállítva, de rendkívül bonyolultak.

Az aszimmetrikus harmadfajú peremfeltételekkel definiált probléma megoldására kidolgoztunk egy új módszert, amelyet a Green-függvény alkalmazásával kapcsolatban a tükrözés módszereinek neveznek, de a fenti problémára eddig nem alkalmazták. A megoldást a félvégteles térre felírt megoldások sorozatával állítjuk elő a 2.2.23. ábra szerint. A megoldásra nézve fontos megkötés az, hogy a kezdeti hőmérséklet-eloszlás állandó, azaz $T(x, 0) = T_0$.

Az egyik peremre felírt függvény nem elégíti ki a másik peremre felírt feltételt, és ott egy zavarás áll elő. Ezt a zavarást megszüntethetjük a negatív tükrözéssel. A zavaró hatásokat rendre egymás után elimináljuk a negatív tükrözés rekurzív alkalmazásával. A megoldás a félvégteles térre felírt váltakozó előjelű megoldás függvények sorozata. A sorozat tagjai váltakozó előjelűek, csökkenő értékűek, a sorozat minden véges τ értékre konvergens.

A félvégteles térre vonatkozó megoldás:

+x irányban:

$$\theta = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_\infty - T_0} = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - e^{Hx + H^2 a\tau} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + H\sqrt{a\tau} \right). \quad (2.2.165)$$

-x irányban:

$$\theta = \frac{T(-x, \tau) - T_0}{T_\infty - T_0} = \operatorname{erfc} \frac{-x}{2\sqrt{a\tau}} - e^{-Hx + H^2 a\tau} \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a\tau}} + H\sqrt{a\tau} \right). \quad (2.2.166)$$

A véges sík falra definiált aszimmetrikus peremfeltételekkel rendelkező problémára vonatkozó megoldás a (2.2.162) és (2.2.163) függvények sorozatából állítható elő az alábbiak szerint.

$$\begin{aligned} T(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, T_{1\infty}, T_{2\infty}) = & \\ & + \bar{T}_{1,0}(x + L, \alpha_1, T_{1\infty}) + \bar{T}_{2,0}(-(x - L), \alpha_2, T_{2\infty}) + \\ & - \bar{T}_{1,1}(-(x - 3L), \alpha_1, -T_{1\infty}) - \bar{T}_{2,1}((x + 3L), \alpha_2, -T_{2\infty}) + \quad (2.2.167) \\ & + \bar{T}_{1,2}((x + 5L), \alpha_1, T_{1\infty}) + \bar{T}_{2,2}(-(x - 5L), \alpha_2, T_{2\infty}) + \\ & - \bar{T}_{1,3}(-(x - 7L), \alpha_1, -T_{1\infty}) - \bar{T}_{2,3}((x + 7L), \alpha_2, -T_{2\infty}). \end{aligned}$$

A fenti elv természetesen peremfeltételek tetszőleges kombinációja esetére is alkalmazható.

2.2.5.2. Hőmérséklet-eloszlás végtelen hosszú hengerekben

A t_c kezdeti hőmérsékletű hengert a $\tau = 0$ időpontban t_k hőmérsékletű közegbe helyezve megindul a hőmérséklet kiegyenlítődés. A jelenséget hengerkoordinátákkal leírva és feltételezve, hogy az ordináta a henger tengelyében van, és a hőmérsékletmező φ és z -től független,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right). \quad (2.2.168)$$

Peremfeltételünk:

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=R} = \alpha \vartheta_{r=R}, \quad (2.2.169)$$

illetve

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=R} = -h \vartheta_{r=R}, \quad (2.2.170)$$

kezdeti feltétel: $\tau = 0$ időpontban

$$\vartheta_{(r,0)} = \vartheta_c, \quad (2.2.171)$$

ahol

$$0 \leq r \leq R.$$

A levezetés gondolatmenete azonos mint a síkfal esetében, a trigonometrikus függvények helyébe azonban elsőfajú nullad és elsőrendű Bessel-függvények lépnek. Az általános megoldás a

$$\frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M_n} \frac{J_1(M_n)}{J_0^2(M_n) + J_1^2(M_n)} \exp(-M_n^2 Fo) J_0\left(M_n \frac{r}{R}\right), \quad (2.2.172)$$

alakot vesz fel, ahol

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2}.$$

Az M_n gyököket a határfeltételből kiadódó

$$M_n \frac{J_1(M_n)}{J_0(M_n)} = Bi \quad (2.2.173)$$

transzcendens egyenlet szolgáltatja, amelyben

$$M_n = n R, \quad (2.2.174)$$

és

$$Bi = h R. \quad (2.2.175)$$

A bennünket elsősorban érdeklő tengelymenti és felszíni hőmérsékletek $r = 0$, illetve $r = R$ helyettesítéssel számíthatók. Így

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M_n} \frac{J_1(M_n)}{J_0^2(M_n) + J_1^2(M_n)} \exp(-M_n^2 Fo), \quad (2.2.176)$$

és

$$\frac{\vartheta(R, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M_n} \frac{J_1(M_n)}{J_0^2(M_n) + J_1^2(M_n)} \exp(-M_n^2 Fo) J_0(M_n). \quad (2.2.177)$$

A síkfal analógiájára a henger hőtartalom-változása:

$$\frac{Q}{Q_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{M_n^2} \frac{J_1^2(M_n)}{J_0^2(M_n) + J_1^2(M_n)} \left[1 - \exp(-M_n^2 Fo) \right]. \quad (2.2.178)$$

A (2.2.173) transzcendens egyenlet gyökeit a 2.2.6. táblázat tartalmazza.

Gyakorlati esetekben a hosszadalmas számítás elkerülése érdekében célszerű a 2.2.24. és 2.2.25., valamint a 2.2.26. ábrákon közölt görbesereggel számolni. Ezek alapján ezúttal is a $Bi^2 Fo = a\tau h^2$ függvényében hR paraméter figyelembevételével leolvashatók a

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = f_1(Bi, Fo), \quad (2.2.179)$$

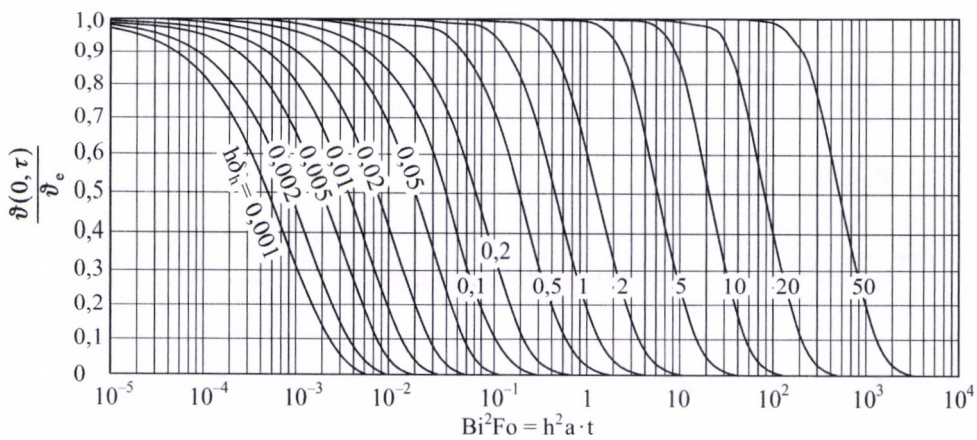
$$\frac{\vartheta(R, \tau)}{\vartheta_c} = f_2(Bi, Fo), \quad (2.2.180)$$

$$\frac{Q}{Q_c} = f_3(Bi, Fo) \quad (2.2.181)$$

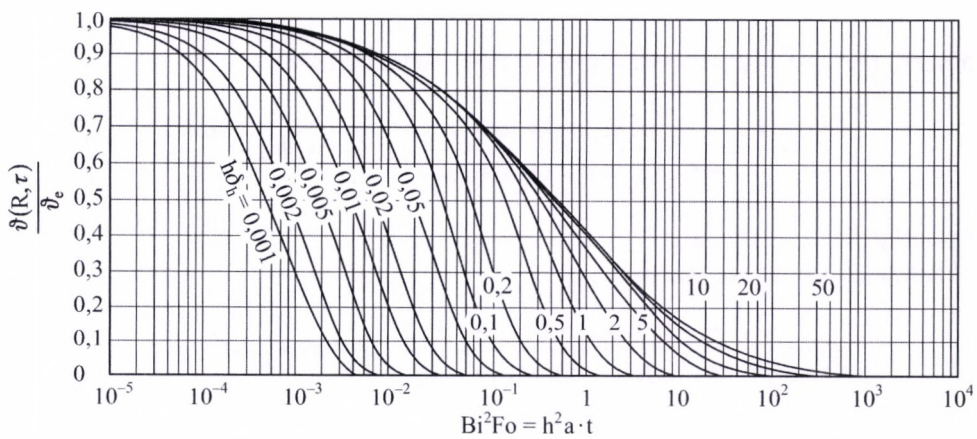
viszonylagos túlhőmérsékletek, illetve a viszonylagos hőtartalom-változás.

2.2.6. táblázat. Az $M_n \frac{J_1(M_n)}{J_0(M_n)} = Bi$ transzcendens egyenlet gyökeinek táblázata

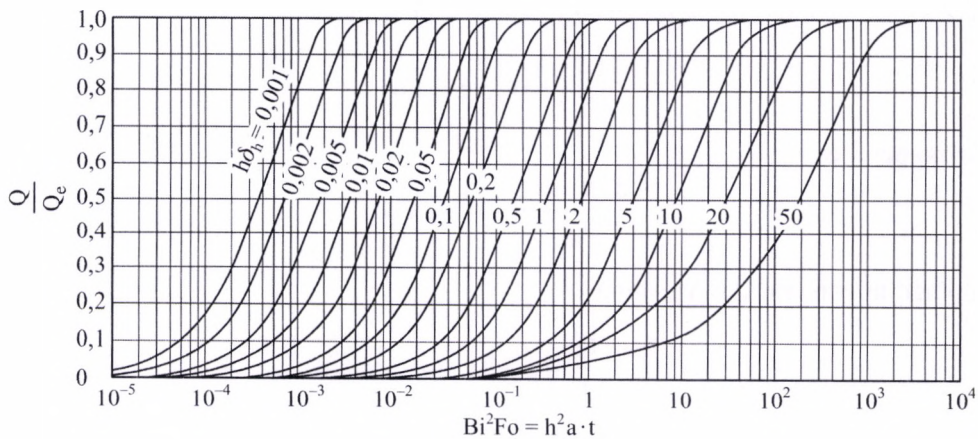
Bi	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0,00	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686
0,70	0,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761
0,80	0,1490	4,0325	7,1282	10,2516	13,3835
0,90	0,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910
1,00	0,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984
2,00	0,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719
3,00	0,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434
4,00	0,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125
5,00	0,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786
6,00	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414
7,00	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008
8,00	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566
9,00	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090
10,00	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580
15,00	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576
20,00	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983
30,00	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748
40,00	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774
50,00	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433
100,00	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834



2.2.24. ábra



2.2.25. ábra



2.2.26. ábra

2.2.5.3. Hőmérséklet-eloszlás gömbben

Teljesség kedvéért közöljük az R sugarú gömb hőmérsékletmezejének alakulását is, ha a gömbi koordináta-rendszer kezdőpontját a gömb középpontjába helyezzük.

Az általános megoldás:

$$\frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin M_n - M_n \cos M_n}{M_n - \sin M_n \cos M_n} \exp(-M_n^2 Fo) \frac{\sin\left(M_n \frac{r}{R}\right)}{M_n \frac{r}{R}}, \quad (2.2.182)$$

míg a középponti viszonylagos hőmérsékletet $r = 0$ helyettesítéssel a

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin M_n - M_n \cos M_n}{M_n - \sin M_n \cos M_n} \exp(-M_n^2 Fo) \quad (2.2.183)$$

összefüggés, a felületi viszonylagos hőmérsékletet pedig a

$$\frac{\vartheta(R, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin M_n - M_n \cos M_n}{M_n - \sin M_n \cos M_n} \exp(-M_n^2 Fo) \frac{\sin M_n}{M_n} \quad (2.2.184)$$

összefüggés szolgáltatja.

A hőtartalom változását a

$$\frac{Q}{Q_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{M_n^3} \frac{(\sin M_n - M_n \cos M_n)^2}{M_n - \sin M_n \cos M_n} [1 - \exp(-M_n^2 Fo)] \quad (2.2.185)$$

összefüggéssel számíthatjuk.

Mellőzve az M_n gyökök számítására vonatkozó $M_n = f(Bi)$ táblázatot, utalunk a 2.2.27., 2.2.28. és 2.2.29. ábráinkra, amelyek alapján a

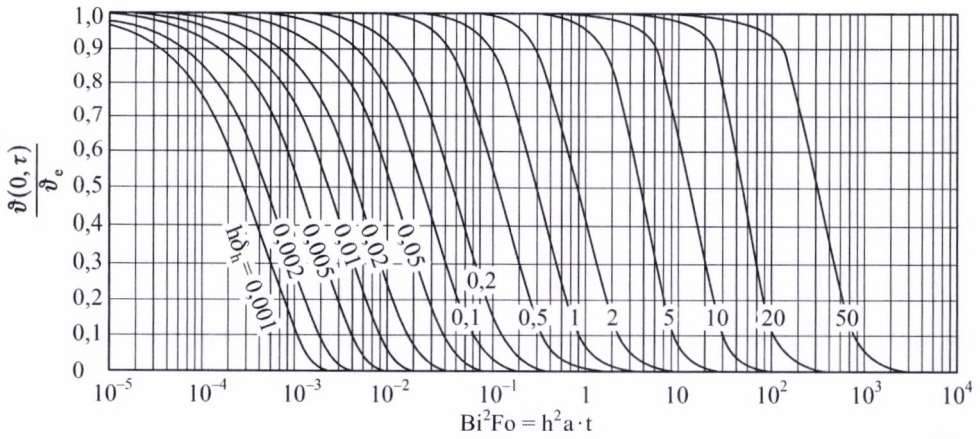
$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = f_1(Bi, Fo) \quad (2.2.186)$$

középponti és

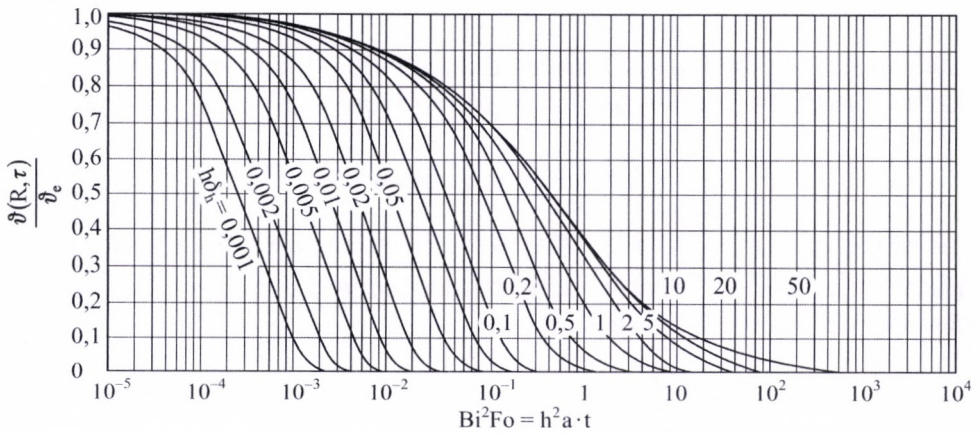
$$\frac{\vartheta(R, \tau)}{\vartheta_c} = f_2(Bi, Fo) \quad (2.2.187)$$

felületi túlhőmérséklet, valamint

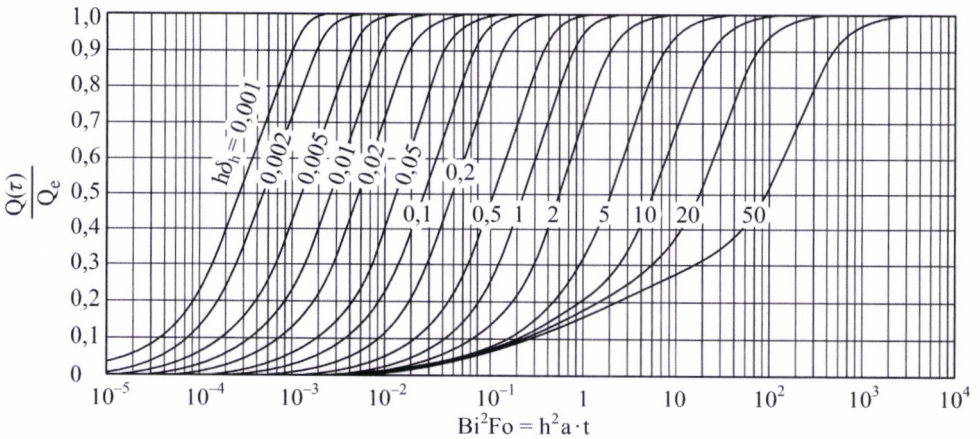
$$\frac{Q}{Q_c} = f_3(Bi, Fo). \quad (2.2.188)$$



2.2.27. ábra



2.2.28. ábra



2.2.29. ábra

A hőtartalom változása könnyen meghatározható. Az egyes jelölések értelmezése ez esetben is változatlan, azaz

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2},$$

$$Bi = hR,$$

$$M_n = nR.$$

Még röviden megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha α minden határon túl nő, így $h = \frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \infty$, akkor az elsőfajú határfeltétel által meghatározott esethez jutunk, amely szerint a hőmérséklet nem az övező közegben, hanem a felületen változik a $\tau = 0$ időpontban. A határfeltételi transzcendens egyenleteinkben az M_n gyökeket ez esetben

$$Bi = \infty$$

határesetnek megfelelően kell táblázatainkból kivenni. Így természetesen a 2.2.4. pontban bemutatott összefüggéseket fogjuk megkapni.

2.2.5.4. Átlaghőmérsékletek

Sok esetben csak a $\bar{\vartheta}(\tau)$ térbeli átlaghőmérséklet ismerete szükséges valamilyen feladat megoldásához. Ilyenkor – különböző geometriák esetén – az alábbi összefüggések segítségével számolhatunk:

• síkfal:
$$\frac{x\bar{\vartheta}}{\vartheta_c} = \frac{1}{\delta_h \vartheta_c} \int_0^{\delta_h} \vartheta \, dx, \quad (2.2.189)$$

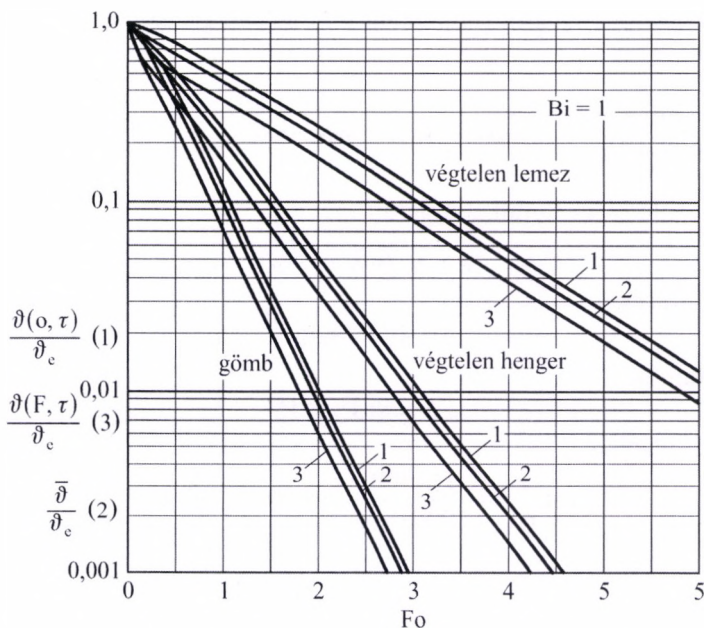
• henger:
$$\frac{r\bar{\vartheta}}{\vartheta_c} = \frac{1}{\pi R^2 \vartheta_c} \int_0^{R_1} 2\pi r \vartheta \, dr, \quad (2.2.190)$$

• gömb:
$$\frac{r\bar{\vartheta}}{\vartheta_c} = \frac{3}{4 R^3 \pi \vartheta_c} \int_0^R 4\pi r^2 \vartheta \, dr. \quad (2.2.191)$$

A ϑ értékeire vonatkozó előző egyenletek segítségével a következő összefüggéseket nyerjük:

• végtelen sík lap esetén

$$\frac{x\bar{\vartheta}}{\vartheta_c} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \frac{\sin^2 M_n}{M_n + \sin M_n \cos M_n} \exp(-M_n^2 Fo), \quad (2.2.192)$$



2.2.30. ábra

- végtelen körhenger esetén

$$\frac{r}{\vartheta_c} \bar{\vartheta} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n^2} \frac{1}{1 + J_0^2(M_n) J_1^2(M_n)} \exp(-M_n^2 Fo), \quad (2.2.193)$$

- gömb esetén

$$\frac{r}{\vartheta_c} \bar{\vartheta} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n^2} \frac{(\sin M_n - M_n \cos M_n)^2}{M_n - \sin M_n \cos M_n} \exp(-M_n^2 Fo). \quad (2.2.194)$$

A (2.2.192), (2.2.193) és a (2.2.194) egyenletek grafikus formában feldolgozhatók, az így feldolgozott összefüggések gyors kiértékelési módot tesznek lehetővé.

A 2.2.30. ábrán grafikusán feldolgozva különböző alakú testekben a $\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c}$

centrális, a $\frac{\bar{\vartheta}}{\vartheta_c}$ átlagos és a $\frac{\vartheta(F, \tau)}{\vartheta_c}$ felületi hőmérsékletek láthatók $Bi = 1$ esetén. A grafikonok természetesen kiterjeszthetők Bi egyéb értékeire is.

Példa. Kezdetben mindenütt $t_c = 10^\circ\text{C}$ hőmérsékletű, $2\delta_h = 0,8\text{ m}$ szélességű betonfal környezetében a hőmérsékletet $\tau = 0$ időpontban -10°C -ra változtatjuk. Számítsuk ki, illetve a 2.2.24., 2.2.25. és a 2.2.26 ábrák alapján állapítsuk meg a

fal középsíkjában és határoló felületein a hőmérsékleteket, illetve a betonfal hő-tartalom változását

a) $\tau = 5$ óra múlva

b) $\tau = 20$ óra múlva.

A hőátadási tényező mindkét oldalon

$$\alpha = 10,0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}).$$

A beton sűrűsége:

$$\rho = 2000 \text{ kg}/\text{m}^3,$$

A beton fajhője:

$$c = 880 \text{ J}/\text{kg}, \text{ K}.$$

Ez értékek alapján

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{1 \cdot 3600}{2000 \cdot 880} = 0,0020 \text{ m}^2/\text{h},$$

$$h = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{10}{1} = 10 \text{ m}^{-1},$$

$$\text{Bi} = h \delta_h = 10 \cdot 0,4 = 4.$$

A Fo-szám értéke $\tau = 5$ óra esetén

$$\text{Fo}_1 = \frac{a \tau}{\delta^2} = \frac{0,002 \cdot 5}{0,4^2} = 0,0625,$$

$\tau = 20$ óra esetén:

$$\text{Fo}_2 = \frac{0,002 \cdot 20}{0,4^2} = 0,25.$$

Számításainkhoz a (2.2.142), (2.2.143) és a (2.2.152)-ből levezethető, s a következőkben közölt összefüggéseket használjuk.

A relatív túlhőmérséklet a felületen:

$$\frac{\vartheta(\delta_h, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\text{Bi}}{M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi})} \exp(-M_n^2 \text{Fo}), \quad (2.2.195)$$

a szimmetriasíkban:

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\cos M_n}{M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi})} \exp(-M_n^2 \text{Fo}), \quad (2.2.196)$$

illetve

$$\frac{Q(\tau)}{Q_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\text{Bi}^2}{M_n^4 + M_n^2(\text{Bi}^2 + \text{Bi})} [1 - \exp(-M_n^2 \text{Fo})]. \quad (2.2.197)$$

Az összefüggésekben:

$$Bi^2 = 16, \quad 2 Bi^2 = 32, \quad Bi(1+Bi) = Bi^2 + Bi = 16 + 4 = 20.$$

A számításhoz szükséges részértékeket a 2.2.7. táblázatban foglaltuk össze. Ez egyben a számítás menetére is felvilágosítást ad. M_n értékeit a 2.2.5. táblázat szolgáltatja.

A táblázat alapján a felületi viszonyított túlhőmérséklet $\tau = 5$ óra múlva (kikekítéssel):

$$\frac{\vartheta(\delta, 5)}{\vartheta_c} = 0,334 + 0,0857 + 0,0067 + 0,0002 = 0,4266,$$

amiből

$$\vartheta(\delta, 5) = 0,4266 \vartheta_c = 0,4266(t_c - t_k) = 0,4266 \cdot 30 = 12,8,$$

$$t(\delta, 5) = \vartheta(\delta, 5) + t_k = 12,8 + (-10) = 2,8 \text{ } ^\circ\text{C},$$

és $\tau = 20$ óra múlva:

$$\frac{\vartheta(\delta, 20)}{\vartheta_c} = 0,2483 + 0,00473 = 0,253,$$

$$\vartheta(\delta, 20) = 0,253 \vartheta_c = 0,253 \cdot 30 = 7,59 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$t(\delta, 20) = 7,59 - 10 = -2,41 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

A középsíkban a túlhőmérséklet $\tau = 5$ óra múlva:

$$\frac{\vartheta(0, 5)}{\vartheta_c} = +1,106 - 0,1265 + 0,0077 - 0,0002 = 0,987,$$

$$\vartheta(0, 5) = 0,987 \vartheta_c = 29,61,$$

$$t(0, 5) = 29,61 - 10 = 19,61 \text{ } ^\circ\text{C},$$

és $\tau = 20$ óra múlva:

$$\frac{\vartheta(0, 20)}{\vartheta_c} = 0,825 - 0,007 = 0,818,$$

$$\vartheta(0, 20) = 30 \cdot 0,818 = 24,54,$$

$$t(0, 20) = 24,54 - 10 = 14,54 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

A tárolt hő változása $\tau = 5$ óra alatt:

$$\frac{Q(5)}{Q_c} = 0,0884 + 0,0362 + 0,0098 + 0,0003 = 0,1347,$$

$$Q(5) = 0,1347 Q_c.$$

2.2.7. táblázat

		n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
1.	$M_n = f(\text{Bi})$ (2.2.5. táblázat)	1,2646	3,9362	6,8140	9,8119	12,868
2.	M_n fokban	$72^\circ 25'$	$227^\circ 10'$	$390^\circ 36'$	562°	
3.	$\cos M_n$	+ 0,302	-0,679	+ 0,863	-0,9272	
4.	M_n^2	1,60	15,47	46,5	96,2	165,0
5.	$M_n^2 \text{ Fo}_1$	0,10	0,966	2,91	6,01	10,32
6.	$M_n^2 \text{ Fo}_2$	0,40	3,864	11,64	24,04	41,28
7.	$e^{-M_n^2 \text{ Fo}_1}$	0,905	0,380	0,055	0,00247	0,000033
8.	$e^{-M_n^2 \text{ Fo}_2}$	0,670	0,0210	0,000007	0,00000	0,00000
9.	$1 - e^{-M_n^2 \text{ Fo}_1}$	0,095	0,620	0,945	0,99753	0,999967
10.	$1 - e^{-M_n^2 \text{ Fo}_2}$	0,330	0,979	≈ 1	≈ 1	≈ 1
11.	$M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi})$	21,6	35,47	66,5	116,2	185,0
12.	$M_n^2 \text{ Bi}(1 + \text{Bi})$	32,0	309,4	930,0	1924,0	3300
13.	M_n^4	2,56	239,0	2162,25	9251,4	27250
14.	$\frac{2\text{Bi}}{M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi})}$	0,370	0,2255	0,121	0,069	0,0432
15.	$\frac{2\text{Bi}}{M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi})} e^{-M_n^2 \text{ Fo}_1}$	0,334	0,0857	0,00665	0,00017	
16.	$\frac{2\text{Bi}}{M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi})} e^{-M_n^2 \text{ Fo}_2}$	0,2483	0,00473	0,000000	0,000000	0,000000
17.	$\frac{2\text{Bi}}{\cos M_n (M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi}))} e^{-M_n^2 \text{ Fo}_1}$	+1,106	-0,1265	+ 0,0077	-0,00183	
18.	$\frac{2\text{Bi}}{\cos M_n (M_n^2 + \text{Bi}(1 + \text{Bi}))} e^{-M_n^2 \text{ Fo}_2}$	0,825	$\approx 0,007$	$\approx$	$\approx$	$\approx$
19.	$M_n^4 + M_n^2 (\text{Bi}^2 + \text{Bi})$	34,56	548,4	3092,25	11,175	
20.	$\frac{2\text{Bi}^2}{M_n^4 + M_n^2 (\text{Bi}^2 + \text{Bi})}$	0,928	0,0585	0,0104	0,0003	
21.	$\frac{2\text{Bi}^2}{M_n^4 + M_n^2 (\text{Bi}^2 + \text{Bi})} [1 - e^{-M_n^2 \text{ Fo}_1}]$	0,0884	0,0362	0,0098	0,0003	
22.	$\frac{2\text{Bi}^2}{M_n^4 + M_n^2 (\text{Bi}^2 + \text{Bi})} [1 - e^{-M_n^2 \text{ Fo}_2}]$	0,306	0,0572	0,0104	0,0003	

1 m²-re és -10 °C hőmérsékletre vonatkoztatva:

$$Q_c = 1 \cdot 2 \delta_h \rho c \vartheta_c = 2 \cdot 0,4 \cdot 2000 \cdot 880 \cdot 30,$$

$$Q_c = 42\,240 \text{ kJ/m}^3,$$

$$Q(5) = 12000 \cdot 0,1347 = 5689,728 \text{ kJ/m}^3,$$

$$\frac{Q(20)}{Q_c} = 0,306 + 0,0572 + 0,0104 + 0,0003 = 0,3739,$$

$$Q(20) = 12000 \cdot 0,3739 = 15793,536 \text{ kJ/m}^3.$$

Miként a példából is látható, a felületi hőmérséklet elég gyors iramban követi a környezeti hőmérsékletet, míg a szimmetriasíkban 5 óra után gyakorlatilag a hőmérséklet mozgása alig észlelhető.

A fal közepes hőmérsékletét a (2.2.192) összefüggéssel számíthatjuk, mely némi átalakítással

$$\frac{\delta_h \bar{\vartheta}}{\vartheta_c} = \frac{2Bi^2}{M_n^4 + M_n^2(Bi^2 + Bi)} \exp(-M_n^2 Fo) \quad (2.2.198)$$

alakban írható.

Akár az előző összefüggéssel, akár pedig a már számított hőtartalom-változás alapján számolunk, természetesen azonos eredményhez jutunk.

$\tau = 5$ óra után a közepes hőmérséklet a hőtartalmak alapján az alábbiak szerint számítható:

$$\delta_h \bar{\vartheta}(\tau) c \rho \delta = Q - Q(\tau),$$

$$\vartheta_c c \rho \delta = Q_c,$$

$$\frac{\delta_h \bar{\vartheta}}{\vartheta_c} = \frac{Q_c - Q}{Q_c} = \frac{42240 - 5689,728}{42240} = 0,865, \quad (2.2.199)$$

$$\delta_h \bar{\vartheta}(5) = 30 \cdot 0,865 = 25,9 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$\delta_h \bar{t} = 15,9.$$

20 óra után:

$$\delta_h \bar{\vartheta}(20) = \vartheta_c \frac{42240 - 15793,536}{42240} = 0,626 \cdot 30 = 18,8,$$

$$\delta_h \bar{t} = 18,8 - 10 = 8,8 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A (2.2.198) összefüggés és a táblázat adatai szerint

$$\frac{\delta_h \bar{\vartheta}(20)}{\vartheta_c} = 0,928 \cdot 0,670 + 0,0585 \cdot 0,0210 + \dots = 0,622 + 0,00123 + \dots = 0,6233,$$

azaz

$$\delta_h \bar{\vartheta}(20) = 30 \cdot 0,6233 = 18,7 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

A 2.2.19, 2.2.20 és 2.2.21. ábrákon feltüntetett görbesereg segítségével számításunk az alábbiak szerint alakul:

$$\text{Bi} = \delta \frac{\alpha}{\lambda} = 0,4 \cdot 10 = 4,$$

$$\text{Bi}^2 \text{Fo}_1 = a \tau_1 h^2 = 16 \cdot 0,0625 = 1,$$

$$\text{Bi}^2 \text{Fo}_2 = a \tau_2 h^2 = 16 \cdot 0,25 = 4.$$

A lemez középvonalában a túlhőmérséklet 5 óra múlva:

$$\frac{\vartheta(0, 5)}{\vartheta_c} = 0,98.$$

$\tau = 20$ óra múlva:

$$\frac{\vartheta(0, 20)}{\vartheta_c} = 0,82.$$

A lemez határolósíkjain $\tau = 5$, illetve 20 óra múlva:

$$\frac{\vartheta(\delta, 5)}{\vartheta_c} = 0,43, \text{ illetve } \frac{\vartheta(\delta, 20)}{\vartheta_c} = 0,25.$$

A hőtartalom változása $\tau = 5$, illetve 20 óra alatt:

$$\frac{Q(5)}{Q_c} = 0,13, \quad \frac{Q(20)}{Q_c} = 0,38.$$

Az irodalomban rendelkezésre állnak olyan grafikonok, amelyek még pontosabb leolvasást tesznek lehetővé.

2.2.5.5. Hőmérséklet-eloszlás végtelen félteret kitöltő közegben

Elsőfajú peremfeltétel mellett e jelenséget a 2.2.4.4. pontban már ismertettük. Ebben a fejezetben azt az esetet tanulmányozzuk, amelyben ismert és állandó a határoló felület mentén az α hőátadási tényező, valamint a felületet övező környezet t_k hőmérséklete. Feltételezzük továbbá, hogy a félteret kitöltő közeg kezdeti hőmérséklete a helytől függetlenül állandó. A hővezetés modelljét a 2.2.31. ábra mutatja.

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = -\alpha \vartheta(0, \tau),$$

illetve

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = -h \vartheta(0, \tau). \quad (2.2.201)$$

A feladat megoldása a levezetés közlése nélkül:*

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_c} = \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \\ + \exp \left[\frac{a\tau}{x^2} (hx)^2 + hx \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{\frac{a\tau}{x^2}} (hx)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.202)$$

Az

$$\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a\tau}{x^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{Fo}},$$

és

$$hx = Bi$$

helyettesítésével egyenletünk

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_c} = \operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} + \\ + \exp(Fo Bi^2 + Bi) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{Fo}} + \sqrt{Fo Bi^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.203)$$

formában is írható.

Szokásos a

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_c} = \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \exp(a\tau h^2 + hx) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{a\tau h^2} \right) \right] \quad (2.2.204)$$

írásmód is. Itt újból fellép az előzőekben már szereplő $a\tau h^2$ paraméter.

Ha α minden határon túl növekedik, azaz a falhőmérséklet a közeg hőmérsékletét veszi fel, akkor a második tag 0 felé közeledik, s kapjuk a már ismert

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_c} = \operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \quad (2.2.205)$$

összefüggést.

* A levezetés megtalálható: Ph. Frank und R.c. Mises: Differenciál-Gleichungen der Physik, 2. Aufl. Bd. 2, S. 581. Vieweg Sohn, Braunschweig

A felületi hőmérséklet számítására a (2.2.200) egyenletből $x = 0$ helyettesítéssel a

$$\frac{\vartheta(0, \tau)}{\vartheta} = e^{a\tau h^2} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{a\tau h^2}\right) \quad (2.2.206)$$

összefüggést nyerjük. A függvény az $a\tau h^2$ növekedésével 0-hoz tart. Az $e^{x^2} (1 - \operatorname{erf} x)$ függvényt $x = 5$ értékig foglalták táblázatba. Ez értéken felül elég jó közelítéssel számíthatjuk a felületi hőmérsékletet a (2.2.86) felhasználásával az

$$\alpha \vartheta(0, \tau) = -\frac{\vartheta_c \lambda}{\sqrt{\pi a \tau}} = \frac{\vartheta_c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda c \rho} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (2.2.207)$$

összefüggésből. Ebből

$$\vartheta(0, \tau) = -\frac{\vartheta_c}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda c \rho}{\pi \tau}} = \frac{\vartheta_c}{\sqrt{\pi a \tau h^2}}. \quad (2.2.208)$$

Fizikailag ugyan a (2.2.86) összefüggés kifogásolható, mivel az egyenlet bal oldala azt az esetet írja le, amikor a hirtelen hőmérséklet-változás a környezetben áll elő (harmadfajú peremfeltétel esete), s így hőátadást tételeztünk fel. A jobb oldal viszont arra az esetre vonatkozik, amikor a hőmérséklet-változást a határoló felületre kényszerítettük (elsőfajú peremfeltétel). A (2.2.206) összefüggés szerint

azonban a felületi hőmérséklet nagy $a\tau h^2$ értékeknél $\left(a\tau h^2 = \frac{\alpha^2 \tau}{\lambda c \rho}\right)$ közeledik 0

felé, azaz a felület túlhőmérséklete a környezethez viszonyítva elenyészik. A felületi hőmérséklet annál inkább tart a kiegyenlítődés felé, mennél nagyobb az α hőátadási tényező, mennél hosszabb ideje tart a jelenség és mennél kisebb az anyag hőelnyelési tényezője $(b = \sqrt{\lambda c \rho})$.

Példa. A félteret kitöltő, végtelen vastagnak tekinthető fal anyagi jellemzői legyenek az előző példában felsoroltakkal azonosak. Azaz

$$\begin{aligned} \lambda &= 1,0 \text{ W/(m K)}, \\ \rho &= 2000 \text{ kg/m}^3, \\ c &= 880 \text{ J/(kg K)}, \\ a &= 0,0020 \text{ m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

Így

- a) Az első esetben tételezzük fel, hogy a kezdetben $t_c = 20^\circ \text{C}$ fal felületi hőmérsékletét $\tau = 0$ időpontban $t_k = -10^\circ \text{C}$ -ra változtatjuk. meg kell határozni az $x = 0,1 \text{ m}$ abszcisszájú síkban a hőmérsékletet és a határsíkon átáramló hő

$$\tau = 1, 5, 20, 100, 1000$$

óra múlva.

- b) A második esetben a fal környezetében változtatjuk a hőmérsékletet $t_k = -10$ °C-ra. Meghatározandók az ugyancsak $x = 0,1$ m mélységben a hőmérsékletek, a határsík hőmérséklete és a rajta átáramló hőmennyiség ugyanazokban az időpontokban mint előbb.

További szükséges számértékek:

$$h = \frac{\alpha}{\lambda} = 10 \text{ m}^{-1};$$

$$ah^2 = 100 \cdot 0,002 = 0,2 \text{ h}^{-1};$$

$$hx = 10 \cdot 0,1 = 1,0.$$

Majd tegyünk kísérletet hasonló feltételek mellett az $x = 1,0$ m mélységben a hőmérsékletek meghatározására.

A szükséges számadatokat a 2.2.8. táblázatban gyűjtöttük össze.

A 2. és 13. sorban a relatív túlhőmérsékletek értékeit tüntettük fel abban az esetben, ha a hőmérséklet a felületen változik.

Miként látható, $x = 0,1$ m mélységben már 1 óra múlva észrevehető

$$\frac{\vartheta(0,1, 1)}{\vartheta_c} = 0,88679$$

változás észlelhető.

Ugyanakkor 1 m mélységben a hőmérséklet-változás még 20 óra múlva is csak alig mutatható ki.

Ha a hőmérsékletet nem a felületén, hanem annak környezetében változtatjuk, akkor meglassul a hőmérsékletek mozgása. A 11. sorban a már jelzett időpontokban $x = 0,1$ m mélységben beálló viszonylagos túlhőmérsékletek találhatók. Ezek szerint az első óra végén

$$\frac{\vartheta(0,1, 1)}{\vartheta_c} = 0,97222,$$

azaz még alig észlelhető változás van.

Az $x = 1$ m mélységben előálló hőmérsékletek számítása elé nagy nehézségek tornyosulnak, mivel az erf függvény értékeit a használatos matematikai zsebkönyvek csak három argumentumig közlik, viszont az argumentum második tagja az

$$\operatorname{erf}\left[\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{\operatorname{arh}^2}\right]$$

formációban a τ növekedése miatt sokszor 3 felett van (a táblázat 16. sora). Ezért

2.2.8. táblázat

	τ	1	5	20	100	1000
1.	$\frac{1}{2\sqrt{\frac{a\tau}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{4a\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{Fo}}$	1,12	0,5	0,25	0,112	0,0353
2.	$\text{erf} = \frac{1}{2\sqrt{Fo}}$	0,88679	0,5205	0,27633	0,12585	0,03981
3.	$\text{arh}^2 = \text{Bi}^2 Fo$	0,2	1	4	20	200
4.	$\sqrt{\text{arh}^2} = \text{Bi}\sqrt{Fo}$	0,117	1	2	4,47	14,14
5.	$\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{\text{arh}^2}$	1,567	1,5	2,25	4,582	14,1753
6.	$\text{arh}^2 + hx$	1,2	2	5	21	201
7.	$e^{\text{arh}^2 + hx}$	3,3201	7,3891	148,4132	$1,32 \cdot 10^3$	$1,97 \cdot 10^8$
8.	$\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{\text{arh}^2}\right)$	0,97427	0,96611	0,998537	≈ 1	≈ 1
9.	$1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{\text{arh}^2}\right)$	0,02573	0,03389	0,001463	≈ 0	≈ 0
10.*	$e^{\text{arh}^2 + hx} \left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{\text{arh}^2}\right) \right]$	0,08543	0,25042	0,21713	-	
11.*	$\text{erf}\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + e^{\text{arh}^2 + hx} \left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{\text{arh}^2}\right) \right]$	0,97222	0,7709	0,49343	0,18	$\approx 0,045$

} x = 0,1 m

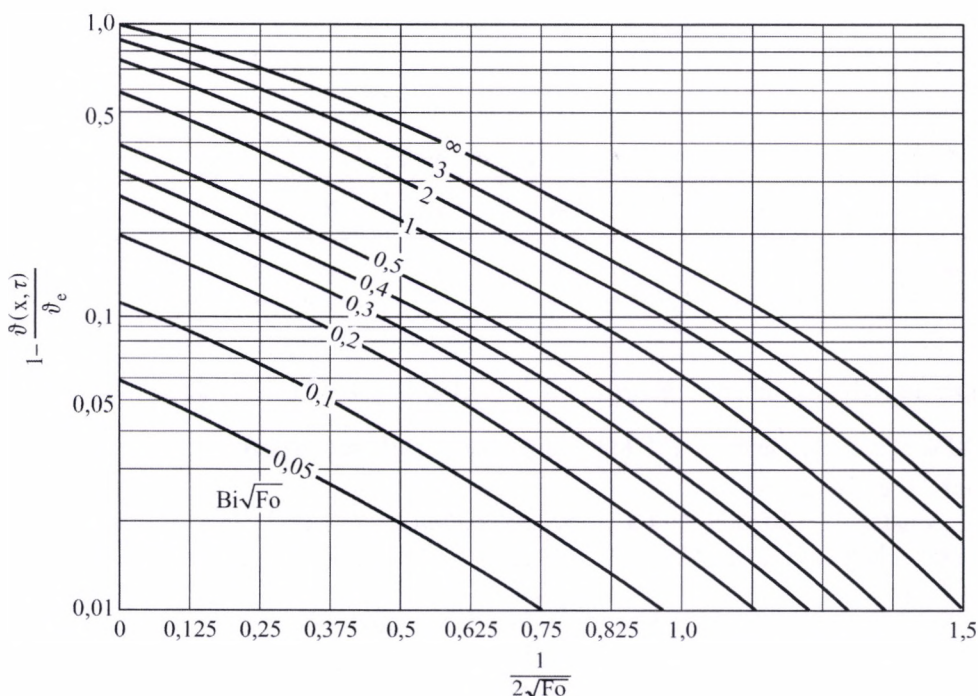
* A jelzett sorok üres rovatainak értékeit a felhasznált táblázatok nem tartalmazzák.

A 11. sor utolsó két rovatában szereplő értékek a 2.2.32. diagramból származnak.

2.2.8. táblázat folytatása

12.	$\frac{1}{2\sqrt{\frac{a\tau}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{4a\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{Fo}}$	11,2	5	2,5	1,12	0,353	} x = 1 m
13.*	$\text{erf} \frac{1}{2\sqrt{Fo}}$	1	1	0,999593	0,88679	0,38238	
14.	$a\tau h^2 = Bi^2 Fo$	0,2	1	4	20	200	
15.	$\sqrt{a\tau h^2} = Bi\sqrt{Fo}$	0,447	1	2	4,47	14,14	
16.	$\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} + \sqrt{a\tau h^2}$	11,647	6	4,5	5,59	14,493	
17.	$a\tau h^2 + hx$	10,2	11	14	30	210	} x = 0 m
18.	$e^{a\tau h^2}$	1,2214	2,71828	54,5982			
19.*	$\text{erf} \sqrt{a\tau h^2}$	0,49998	0,8427	0,995322			
20.*	$1 - \text{erf} \sqrt{a\tau h^2}$	0,53312	0,1573	0,004678			
21.*	$e^{a\tau h^2} (1 - \text{erf} \sqrt{a\tau h^2})$	0,65115	0,42759	0,25541	0,12327		
22.	$\frac{1}{\sqrt{\pi a\tau h^2}}$		0,5645	0,2822	0,1262	0,0399	

* A jelzett sorok üres rovatainak értékeit a felhasznált táblázatok nem tartalmazzák.



2.2.32. ábra

a (2.2.202) alatti összefüggésekkel nem volt módunk az 1 m mélységben előálló túlhőmérsékletek kimutatására. Miként a táblázat 13. sorában látható, 1 m mélységben még akkor is igen vontatott a hőmérsékletek mozgása, ha a hőmérséklet-változást a felületen idézzük elő.

A 2.2.32. ábra $\frac{1}{2\sqrt{Fo}}$ függvényében és $\text{arh}^2 = \text{Bi}\sqrt{Fo}$ paraméterekkel az

$$1 - \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_e}$$

viszonylagos túlhőmérsékletek leolvasható értékeit adja az $\frac{1}{2\sqrt{Fo}} = 0 - 1,5$ tartományban.

Az ábrából látható, hogy nagyobb mélységben ($x = 1$ m) a táblázat 13. sorában és a diagramból kivehető értékek között gyakorlatilag nincs különbség! A diagram szerinti érték $\tau = 100$ óránál 0,9; $\tau = 1000$ óránál 0,4.

A 2.2.8. táblázat 18–23. soraiban a felületi hőmérsékletet számítottuk egyrészt a (2.2.206) összefüggéssel, másrészt a (2.2.208) kifejezéssel. A pontos értékek számításához $\text{arh}^2 = 5$ értékig az $e^{x^2} (1 - \text{erf } x)$ függvényt táblázatban megtalálhatjuk, ezen felül azonban a közelítő értékek számítására vagyunk utalva a (2.2.208)

2.2.9. táblázat. A határoló falsíkon átáramló hőmennyiségek

1.	τ	1	5	20	100	1000
2.	$e^{\text{ar}h^2} \left(1 - \text{erf} \sqrt{\text{ar}h^2}\right)$	0,65115	0,42759	0,25541	0,123727	
3.	$\alpha \vartheta_c e^{\text{ar}h^2} \left(1 - \text{erf} \sqrt{\text{ar}h^2}\right)$	196	128,4	76,4	36,5	
4.	$\frac{\vartheta_c b}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}$	378	169	84,5	37,8	11,9

szerint. Miként látható, $\sqrt{\pi \text{ar}h^2} = 3,5$ érték körül a két számítási mód között 10% eltérés, $\sqrt{\pi \text{ar}h^2} \geq 8$ felett pedig csak 2% eltérés mutatkozik. (Lásd a táblázat 21. és 22. sorát.)

A határsíkon átáramló hőt a 2.2.9. táblázatban tüntettük fel. Ha a felületen változtattuk a hőmérsékletet, akkor a (2.2.85), illetve (2.2.86) összefüggés érvényes, azaz

$$\dot{q}(0, \tau) = -\frac{\lambda \vartheta_c}{\sqrt{\pi \alpha \tau}} = -\frac{\vartheta_c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda c \rho} \frac{1}{\sqrt{\tau}}.$$

Ha a környezetben változik a hőmérséklet, akkor értelemszerűen a

$$\dot{q}(0, \tau) = -\alpha \vartheta(0, \tau) = -\alpha \vartheta_c e^{\text{ar}h^2} \left(1 - \text{erf} c \sqrt{\text{ar}h^2}\right). \quad (2.2.209)$$

összefüggést használhatjuk.

A $q(0, 2)$ értékeit 1, 5, 20, 100, 1000 órában a táblázat adja. Minthogy a 2. sor szerinti pontos számítást legfeljebb $\text{ar}h^2 = 5$ értékig tudjuk elvégezni, a továbbiakban a 4. sor szerinti közelítő számítást alkalmaztunk. Miként látható a két módozatból számított értékek között $\tau \geq 100$ óra után már alig van eltérés. A továbbiakban a közelítő összefüggés gyakorlati pontossággal használható.

A közelítő számításhoz szükséges b érték:

$$b = \sqrt{\lambda c \rho} = \sqrt{1 \cdot 880 \cdot \frac{1}{3600} \cdot 2000} = 22,35 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ h}^{1/2} \text{ K}),$$

illetve

$$\frac{b}{\sqrt{\pi}} = \frac{22,35}{1,7725} = 12,6 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ h}^{1/2} \text{ K}),$$

$$\frac{\vartheta_c b}{\sqrt{\pi}} = -378,0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ h}^{1/2}).$$

Befejezésképpen megemlítjük, hogy a hőmérséklet alakulása szempontjából bizonyos előfeltételek mellett véges vastagságú falak hasonlóan viselkednek, mint a végtelen vastagok.

Ennek alapfeltétele, hogy a hőmérséklet a véges vastagságú fal túlsó határoló síkján a mellő síkon vagy annak környezetében végbement hirtelen változás következtében még egyáltalán nem, vagy csak kismértékben változott. Ennek feltétele, hogy

$$\frac{\delta}{\sqrt{4a\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \geq 0,6 \quad (2.2.210)$$

legyen.

2.2.5.6. A környezet harmonikus hőmérséklet hullámainak behatolása végtelen félteret kitöltő közegbe

Tételezzük fel, hogy ezúttal nem a félteret kitöltő közeg határoló síkján, hanem annak környezetében változik a hőmérséklet valamely adott középhőmérséklet körül a

$$\vartheta_k = \vartheta_{k_{\max}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0}\tau\right) \quad (2.2.211)$$

függvénnyel leírható törvényszerűség szerint. Ebben

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

a hőmérséklet hullám ciklusideje és a ω a hőmérséklet-változás körfrekvenciája. A hőmérsékletmező itt is eleget tesz a

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

differenciálegyenletnek, és a

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = -h\vartheta_{x=0}$$

peremfeltételnek.

E feladat megoldása visszavezethető a 2.2.4.6. pont alatt tárgyalt esetre, amikor a hőmérséklet a félteret kitöltő közeg határsíkján változott periodikusan. A felületi hullámzás amplitúdója ez esetben kisebb, mégpedig

$$\vartheta_{F_{\max}} = \nu_0 \vartheta_{k_{\max}} \quad 0 < \nu_0 < 1 \quad (2.2.212)$$

lesz, és egy ε_0 -al kifejezhető fáziskésés fog jelentkezni. Ily módon a határoló síkon

$$\vartheta(0, \tau) = \nu_0 \vartheta_{k_{\max}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0}\tau - \varepsilon_0\right) \quad (2.2.213)$$

összefüggéssel leírható hőmérsékleti hullámzás jön létre.

Ennek alapján az x mélységben létrejövő hőmérséklet-hullámzás a (2.2.104) összefüggés figyelembevételével

$$\vartheta(x, \tau) = \nu_0 \vartheta_{k_{\max}} \left(-x \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} \right) \cos \left[\frac{2\pi}{\tau_0} \tau - \left(\varepsilon_0 + x \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} \right) \right] \quad (2.2.214)$$

alakban írható fel.

Az épületfizikában gyakran kerül sor a hőtehetetlenségi tényező, D használatára.

Célszerű lesz itt a különböző használatos kifejezések közötti összefüggést megadni:

$$x \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{Fo}} = \frac{D}{\sqrt{2}}. \quad (2.2.215)$$

De kifejezhető fentiek alapján D még

$$D = x \sqrt{\frac{2\pi}{a\tau_0}} = \frac{x}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \lambda c \rho \quad (2.2.216)$$

formában, ahol

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \lambda c \rho = b \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} = S \quad (2.2.217)$$

az ún. hőelnyelési tényező, amely periodikus hőhatások esetén a $\vartheta_{F_{\max}} = 1$ °C amplitúdójú hőmérséklet-hullámozás esetén a hőhullámozás amplitúdóját fejezi ki. (Lásd (2.2.118) összefüggést.)

Meg kell adnunk még ν_0 és ε_0 értékeit is. (A vonatkozó összefüggéseket a következő fejezetben vezetjük le.)

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0 h^2}} + 2 \frac{\pi}{a\tau_0 h^2}}}. \quad (2.2.218)$$

Ez a már ismertetett átalakítások után

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \sqrt{\frac{\pi}{Bi^2 Fo}} + 2 \frac{\pi}{Bi^2 Fo}}}, \quad (2.2.219)$$

vagy

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha} S + \frac{S^2}{\alpha^2}}}. \quad (2.2.220)$$

alakban is kifejezhető. A gyakorlatban fontos felületi hőmérséklet-változást a (2.2.214) egyenletben $x = 0$ helyettesítéssel nyerjük. E szerint

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_{k_{\max}} \nu_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau - \varepsilon_0 \right). \quad (2.2.221)$$

A (2.2.220) összefüggés szerint minél nagyobb az anyag

$$b = \sqrt{\lambda c \rho}$$

hőelnyelési tényezője, annál kisebb a felületi hőmérséklet-hullámszám amplitúdója, viszont minél nagyobb a hullámszám periódusideje, annál inkább nő a $\vartheta(0)_{k_{\max}}$, azaz a felületi hőmérséklet-hullámszám amplitúdója. Ez a jelenség már itt felhívja figyelmünket arra, hogy elsősorban a nagy periódusidejű (hideg vagy meleg) hőmérséklet-hullámok befolyása jelentős mind a talajban, mind az épületek falaiban végbemenő hőmérséklet-változásokra.

A fáziskésést a következő összefüggés szolgáltatja:

$$\varepsilon_0 = \arctg \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a \tau_0 h^2}{\pi}}}, \quad (2.2.222)$$

avagy

$$\varepsilon_0 = \arctg \frac{1}{1 + \frac{\alpha \sqrt{2}}{S}}. \quad (2.2.223)$$

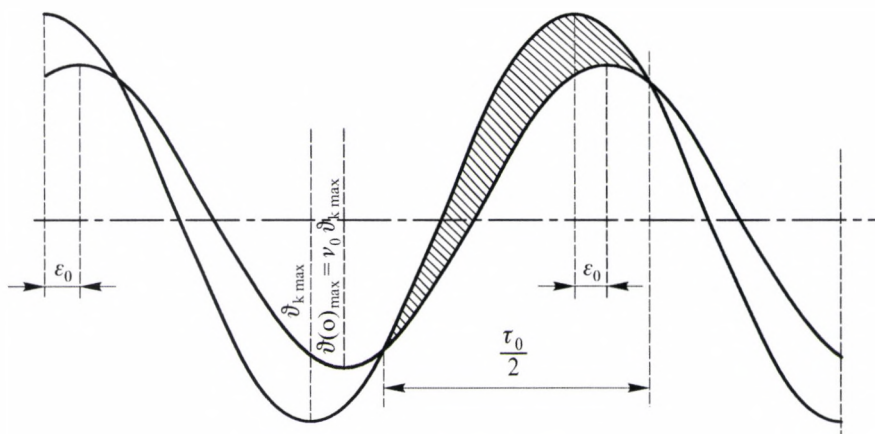
A fáziseltolódás annál nagyobb, minél nagyobb az $S = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \lambda c \rho$ összefüggés-

ben az anyag hőelnyelési $\sqrt{\lambda c \rho}$ tényezője, és annál kisebb, minél kisebb a hullámszám periódusideje. A maximális eltolódás fokokban kifejezve 45° felé akkor közelednék, ha S a végtelen felé tartana. Ez esetben azonban τ_0 a zérus felé közelednék, más szóval a közeg felületén hőmérséklet-ingadozás nem volna észlelhető.

A 2.2.10. táblázat Gröber nyomán az $a \tau h^2$ függvényében a ν_0 és ε_0 tényezők értékeit szolgáltatja. A 2.2.33. ábra a környezeti és felületi hullámszámát mutatja be. A dt idő alatt a közegbe 1 m^2 felületen behatoló, avagy onnan kiáramló hő a

2.2.10. táblázat. A ν_0 és ε_0 tényezők értékei az $a \tau_0 h^2$ függvényében

$a \tau_0 h^2$	ν_0	ε_0	$a \tau_0 h^2$	ν_0	ε_0
0	0	$45^\circ 00'$	1	0,304	$32^\circ 40'$
0,001	0,012	$44^\circ 30'$	2	0,388	$29^\circ 05'$
0,002	0,017	$44^\circ 20'$	5	0,510	$23^\circ 50'$
0,005	0,028	$43^\circ 55'$	10	0,603	$19^\circ 50'$
0,010	0,039	$43^\circ 30'$	20	0,689	$15^\circ 50'$
0,020	0,054	$42^\circ 50'$	50	0,784	$11^\circ 50'$
0,050	0,084	$41^\circ 40'$	100	0,843	$8^\circ 35'$
0,100	0,116	$40^\circ 20'$	200	0,883	$6^\circ 20'$
0,200	0,159	$38^\circ 40'$	500	0,925	$4^\circ 20'$
0,500	0,232	$35^\circ 35'$	1000	0,945	$3^\circ 00'$



2.2.33. ábra

$$dq = \alpha [\vartheta_k - \vartheta(0, \tau)] d\tau \quad (2.2.224)$$

összefüggéssel fejezhető ki. Helyettesítve ϑ_k és $\vartheta(0, \tau)$ értékeit, egy félperiódus alatt be- vagy kiáramló hőt (2.2.33. ábra) a

$$q_{\frac{\tau_0}{2}} = \alpha \int_{\tau_0}^{\tau_0} \vartheta_{k, \max} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau\right) - \nu_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau - \varepsilon_0\right) \right] d\tau \quad (2.2.225)$$

összefüggés szolgáltatja.

Ennek értelmében végül is a $q_{\frac{\tau_0}{2}}$ a ν_0 és ε_0 függvénye, azaz

$$q_{\frac{\tau_0}{2}} = \alpha \vartheta_{k, \max} \frac{\tau_0}{2} f(\nu_0, \varepsilon_0) = \alpha \vartheta_{k, \max} \frac{\tau_0}{2} f(\text{arh}^2). \quad (2.2.226)$$

A határozatlan integrál felírása ugyan egyszerű, de a τ_e és τ_v határok kiszámításához egy transzcendens egyenletet kell megoldani, ami numerikusan végezhető el.

2.2.6. Falakban terjedő hőmérséklet hullámok

2.2.6.1. Egyrétegű fal

A felvetett problémának különös fontossága van az épületfizikában. A fűtéssel, illetve klimatizálással elérni kívánt célnak megfelelően feltételezzük, hogy a fal egyik oldalát (a következőkben belső oldal) övező környezetben a hőmérsékletet konstans értéken tartjuk, míg első változatban a fal másik oldalán a hőmérsékletet valamely középérték körül

$$\vartheta(\delta, \tau) = \vartheta(\delta) \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau\right) \quad (2.2.227)$$

függvény szerint periodikusan változik. Koordináta-rendszerünket válasszuk meg oly módon, hogy az $x = 0$ sík a fal belső síkját képviselje. A homogén és egyrétegű fal vastagsága pedig legyen δ [m].

A $\vartheta(x, \tau)$ hőmérséklet kielégíti a

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

differentiálegyenletet.

Fizikai megfontolásból, de a 2.2.4.6. pont alapján is világos, hogy a hőmérséklet-hullámok a fal belső síkja felé haladva folytonosan csillapodnak és külső fal hőmérséklet-hullámzásához képest késést szenvednek.

A külső falsík hőmérséklet-hullámai befelé terjedő hőhullámzást idéznek elő. Ennek folytán a hő az $x = 0$ síkon egy fél periódusban a hullámzás terjedésének irányában, egy fél periódusban pedig ezzel ellenkező irányban terjed. Ha az első esetet tekintjük pozitív, a másodikat (azaz x tengely irányában haladót) negatív irányúnak, akkor peremfeltételünk a

$$q = \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0}$$

formában írható fel. (Más szóval: a $dx > 0$ -hoz tartozó $d\vartheta > 0$ amplitúdó változás pozitív irányú hőáramot, a $d\vartheta < 0$ amplitúdó változás negatív irányú hőáramot idéz elő!)

Előző fizikai megfontolások arra mutatnak, hogy a hőmérsékletmező kifejezésére olyan szerkezetű függvényt kell választanunk, amely x növekedésével növekvő amplitúdójú hullámzást ír le, s amely a hullámzás fáziseltérését a külső fal hullámaihoz képest hűten adja vissza. Ezek szerint a 2.2.3./c) pontban pusztán matematikai úton levezetett (2.2.33) és (2.2.34) egyenletek fizikai úton a következők szerint támaszthatók alá.

Harmonikus hőhullámzás esetén a hőmérséklet az idő függvényében nem törekedhetik a kiegyenlítődés felé, s ezért a (2.2.23) partikuláris megoldásában a függvénynek olyan szerkezetűnek kell lennie, amely bármely x keresztmetszetben ugyancsak harmonikus hőhullámzást ír le, azaz

$$\varphi(\tau) = e^{a(m+in)\tau} = e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + i \sin(\omega\tau) \quad (2.2.228)$$

valós változójú komplex értékű függvénynek. Ebből

$$m = 0 \text{ és } n = \frac{\omega}{a}$$

kell lennie, miként a 2.2.3. pontban választottuk. Ennek megfelelően a $\vartheta(x, \tau)$ komplex formában az alábbiak szerint írható fel:

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta_1 + i\vartheta_2 = C e^{i\omega\tau} e^{\pm x \sqrt{\frac{i\omega}{a}}}, \quad (2.2.229)$$

miként azt $p = \omega$ helyettesítéssel a (2.2.33) alatt is levezettük. A függvény szerkezeténél fogva az

$$f(x) = e^{\pm x \sqrt{\frac{i\omega}{a}}} = \vartheta(x) \quad (2.2.230)$$

a hullám komplex amplitúdója, s így (2.2.34) alapján

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta(x) e^{i\omega\tau} = e^{i\omega\tau} \left[C_1 \operatorname{ch} \left(x \sqrt{\frac{i\omega}{a}} \right) + C_2 \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\frac{i\omega}{a}} \right) \right]. \quad (2.2.231)$$

A C_1 és C_2 állandók meghatározását a peremfeltételek szolgáltatják. A belső felületen, azaz ha $x = 0$, a hullámozás amplitúdója $\vartheta(0) > 0$. Minthogy $x = 0$ esetén $\operatorname{ch} x = 1$, $\operatorname{sh} x = 0$, s így

$$C_1 = \vartheta(0). \quad (2.2.232)$$

C_2 -t a

$$\dot{q}(0, \tau) = \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \dot{q}(0) e^{i\omega\tau} \quad (2.2.233/a)$$

összefüggés szolgáltatja. Ugyanis a harmonikus hőmérséklet-hullámozás ugyan-csak harmonikus hőhullámozást hoz létre. Valamely x síkon átáramló hő:

$$\dot{q}(x, \tau) = \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = e^{i\omega\tau} \lambda \sqrt{\frac{i\omega}{a}} \left[\vartheta(0) \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\frac{i\omega}{a}} \right) + C_2 \operatorname{ch} \left(x \sqrt{\frac{i\omega}{a}} \right) \right] = \dot{q}(x) e^{i\omega\tau}, \quad (2.2.233/b)$$

s ha $x = 0$, akkor a belső síkon előálló hőhullámozást nyerjük, azaz

$$\dot{q}(0) e^{i\omega\tau} = C_2 e^{i\omega\tau} \lambda \sqrt{\frac{i\omega}{a}},$$

amiből

$$C_2 = \frac{\dot{q}(0)}{\lambda \sqrt{\frac{i\omega}{a}}}. \quad (2.2.234)$$

Itt a $\dot{q}(0)$ a hőhullámozásnak a belső síkon előálló komplex vektora.

Ha $x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}$ és $\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}}$ kifejezésbe az épületfizikában szokásos S hőelnyelési tényezőt vezetjük be, akkor egyrészt az

$$x\sqrt{\frac{i\omega}{a}} = x\sqrt{\frac{2\pi c\rho}{\tau_0\lambda}}\sqrt{i} = \frac{x}{\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}}\lambda c\rho\sqrt{i} = \frac{x}{\lambda}S\sqrt{i} \quad (2.2.235)$$

alakot nyerjük. Itt szokásos az

$$\frac{x}{\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}}\lambda c\rho = \frac{x}{\lambda}S = D_x \quad (2.2.236)$$

jelölés, ahol D_x -t hőtehetetlenségi tényezőnek hívjuk, és

$$\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda^2 c\rho}{\tau_0\lambda}}\sqrt{i} = S\sqrt{i}. \quad (2.2.237)$$

Ily módon most már összefüggéseinek az alábbi alakot öltik:

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta(x)e^{\frac{i2\pi}{\tau_0}\tau} = e^{\frac{i2\pi}{\tau_0}\tau} \left[\vartheta(0) \operatorname{ch}(D_x\sqrt{i}) + \frac{\dot{q}(0)}{S\sqrt{i}} \operatorname{sh}(D_x\sqrt{i}) \right], \quad (2.2.238)$$

illetve

$$\dot{q}(x, \tau) = \dot{q}(x)e^{\frac{i2\pi}{\tau_0}\tau} = e^{\frac{i2\pi}{\tau_0}\tau} S\sqrt{i} \left[\vartheta(0) \operatorname{sh}(D_x\sqrt{i}) + \frac{\dot{q}(0)}{S\sqrt{i}} \operatorname{ch}(D_x\sqrt{i}) \right]. \quad (2.2.239)$$

A hőmérséklet-hullámozás komplex vektorát így a

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) \operatorname{ch}(D_x\sqrt{i}) + \frac{\dot{q}(0)}{S\sqrt{i}} \operatorname{sh}(D_x\sqrt{i}), \quad (2.2.240)$$

és a hőhullámozás komplex vektorát

$$\dot{q}(x) = S\sqrt{i} \left(\vartheta(0) \operatorname{sh}(D_x\sqrt{i}) + \frac{\dot{q}(0)}{S\sqrt{i}} \operatorname{ch}(D_x\sqrt{i}) \right) \quad (2.2.241)$$

összefüggések szolgáltatják. A hőmérséklet-hullámozás komplex vektorát írhatjuk még

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) \left(\operatorname{ch}(D_x\sqrt{i}) + \frac{\dot{q}(0)}{\vartheta(0) S\sqrt{i}} \operatorname{sh}(D_x\sqrt{i}) \right) \quad (2.2.242)$$

alakban is. Minthogy a határsíkon ($x = 0$) a

$$\dot{q}(0, \tau) = \dot{q}(0) e^{i\omega\tau}$$

hőhullám és a

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta(0) e^{i\omega\tau}$$

hőmérséklet-hullám fázisban megegyeznek, ezért

$$\frac{\dot{q}(0, \tau)}{\vartheta(0, \tau)} = \frac{\dot{q}(0)}{\vartheta(0)} = \alpha_b. \quad (2.2.243)$$

(Ha α_b -t konstans középértékkel számoljuk!)

Így végül is egyrétegű homogén fal esetén az amplitúdók viszonya az $x = x$ és az $x = 0$ síkban

$$\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)} = \text{ch}(D_x \sqrt{i}) + \frac{\alpha_b}{S\sqrt{i}} \text{sh}(D_x \sqrt{i}). \quad (2.2.244)$$

A külső falon előírást hőmérséklet-hullámsűrűség $\vartheta(\delta)$ komplex vektora és a belső falon jelentkező hullámsűrűség $\vartheta(0)$ amplitúdója közötti

$$\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)} = \beta = \text{ch}(D_\delta \sqrt{i}) + \frac{\alpha_b}{S\sqrt{i}} \text{sh}(D_\delta \sqrt{i}) \quad (2.2.245)$$

viszonyt nevezzük csillapítási tényezőnek. Ennek abszolút értéke,

$$|\beta| = \nu \quad (2.2.246)$$

a mérhető amplitúdók közötti viszony és argumentuma,

$$\arg \beta = \varepsilon \quad (2.2.247)$$

a fáziskésés.

A hőfizikai fejtegetéseinkben az

$$\frac{\alpha_b}{S\sqrt{i}} = M_b \quad (2.2.248)$$

jelölést is használva, a csillapítási tényező:

$$\beta = \text{ch}(D\sqrt{i}) + M_b \text{sh}(D\sqrt{i}). \quad (2.2.249)$$

A későbbiekben szerepet fog játszani az

$$Y_x = \frac{\dot{q}(x)}{\vartheta(x)} \quad (2.2.250)$$

viszonyszám. Minél nagyobb ennek azonos $\dot{q}(x)$ mellett az értéke, annál kisebb hullámzás jön létre az x síkban, azaz annál nagyobb az Y_x tényezője:

$$Y_x = \frac{\dot{q}(x)}{\vartheta(x)} = \frac{S\sqrt{i} \left(\vartheta(0) \operatorname{sh}(D_x \sqrt{i}) + \frac{\dot{q}(0)}{S\sqrt{i}} \operatorname{ch}(D_x \sqrt{i}) \right)}{\vartheta(0) \operatorname{ch}(D_x \sqrt{i}) + \frac{\dot{q}(0)}{S\sqrt{i}} \operatorname{sh}(D_x \sqrt{i})}. \quad (2.2.251)$$

Az Y_x analógiájára bevezetve az

$$\frac{\dot{q}(0)}{S\sqrt{i} \vartheta(0)} = \frac{Y_0}{S\sqrt{i}} \quad (2.2.252)$$

jelölést és az egyenlet jobb és bal oldalához 1-t hozzáadva nyerjük, hogy

$$1 + \frac{Y_y}{S\sqrt{i}} = \frac{\operatorname{sh}(D_x \sqrt{i}) + \frac{Y_0}{S\sqrt{i}} \operatorname{ch}(D_x \sqrt{i}) + \operatorname{ch}(D_x \sqrt{i}) + \frac{Y_0}{S\sqrt{i}} \operatorname{sh}(D_x \sqrt{i})}{\operatorname{ch}(D_x \sqrt{i}) + \frac{Y_0}{S\sqrt{i}} \operatorname{sh}(D_x \sqrt{i})}. \quad (2.2.253)$$

Felhasználva, hogy a nevezőben β_x van, és hogy

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x,$$

rendezés után kapjuk, hogy

$$\beta_x = e^{D_x \sqrt{i}} \frac{S\sqrt{i} + Y_0}{S\sqrt{i} + Y_x}. \quad (2.2.254)$$

Az épületfizikában

$$\beta_x = e^{D_x \sqrt{i}} \frac{1 + \frac{Y_0}{S\sqrt{i}}}{1 + \frac{Y_x}{S\sqrt{i}}} \quad (2.2.255)$$

alakkal találkozunk, azzal, hogy az

$$\frac{Y_0}{S\sqrt{i}} = M_b, \quad (2.2.256)$$

$$\frac{Y_x}{S\sqrt{i}} = M_x \quad (2.2.257)$$

jelöléseket is alkalmazzuk.

Hasonló levezetés útján nyerjük β_Q , azaz a hőáramok csillapítási tényezőit a (2.2.241) összefüggésből:

$$\beta_{Qx} = \frac{\dot{q}(x)}{\dot{q}(0)} = S\sqrt{i} \left(\frac{\partial(0)}{\dot{q}(0)} \operatorname{sh}(D_x \sqrt{i}) + \frac{1}{S\sqrt{i}} \operatorname{ch}(D_x \sqrt{i}) \right),$$

$$\beta_{Qx} = \operatorname{ch}(D_x \sqrt{i}) + \frac{S\sqrt{i}}{Y_0} \operatorname{sh}(D_x \sqrt{i}). \quad (2.2.258)$$

Mint látható, β_{Qx} hasonló alakú kifejezés, mint β_x , pusztán a $\operatorname{sh}(D_x \sqrt{i})$ faktora $\frac{Y_0}{S\sqrt{i}}$ helyett $\frac{S\sqrt{i}}{Y_0}$, azaz előzőnek reciproka. Így, ha a (2.2.255)-be $\frac{Y_0}{S\sqrt{i}}$ helyett $\frac{S\sqrt{i}}{Y_0}$ -t helyettesítünk, nyerjük, hogy

$$\beta_{Qx} = e^{D_x \sqrt{i}} \frac{1 + \frac{S\sqrt{i}}{Y_0}}{1 + \frac{S\sqrt{i}}{Y_x}} = e^{D_x \sqrt{i}} \frac{\frac{1}{S\sqrt{i}} + \frac{1}{Y_0}}{\frac{1}{S\sqrt{i}} + \frac{1}{Y_x}}. \quad (2.2.259)$$

A (2.2.255) és (2.2.259) egyenletek egyszerű formában adják egyrészt a hőmérséklet, másrészt a hőhullám csillapodását az x és a belső réteg között.

Az Y_x a (2.2.251) összefüggés szerint számítható, amelyet a számlálóban és nevezőben $\operatorname{ch} D_x \sqrt{i}$ vel osztva az

$$Y_x = \frac{S\sqrt{i} \left(\operatorname{th}(D_x \sqrt{i}) + \frac{Y_0}{S\sqrt{i}} \right)}{1 + \frac{Y_0}{S\sqrt{i}} \operatorname{th}(D_x \sqrt{i})} \quad (2.2.260)$$

formában is írhatjuk. Emlékeztetünk még arra, hogy $Y_0 = \alpha_b$.

A (2.2.260) egyenlet az

$$Y_x = M_x S\sqrt{i}$$

bevezetésével a hőfizikában szokásos alábbi formában is írható:

$$M_x = \frac{\operatorname{th}(D_x \sqrt{i}) + M_b}{1 + M_b \operatorname{th}(D_x \sqrt{i})}. \quad (2.2.261)$$

Ha $x = 0$, $Y_x = Y_0 = \alpha_b$ és $M_x = M_b$, ha pedig $x \rightarrow \infty$

$$Y_x = \frac{\dot{q}(x)}{\partial(x)} \approx S\sqrt{i} = \text{konstans.}$$

Y_x abszolút értéke:

$$|Y_x| \approx |S\sqrt{i}| = \sqrt{\left(\frac{S}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{S}{\sqrt{2}}\right)^2} = S, \quad (2.2.262)$$

és a fáziseltolódás

$$\arg Y_x = \arg S\sqrt{i} \approx \arctg \frac{\frac{S}{\sqrt{2}}}{\frac{S}{\sqrt{2}}} = \arctg 1, \quad (2.2.263)$$

ami $\frac{\pi}{4}$ -nek (45° -nak) felel meg.

Elég nagy x esetén tehát sem a $\frac{\dot{q}(x)}{\vartheta(x)}$ abszolút értékében nincs változás, ez

ugyanis S -sel egyenlő, sem a fáziseltérésben, ami $\frac{\pi}{4}$ -gyel egyenlő.

Ez a jelenség teljes azonosságot mutat azzal az esettel, ha a fal végtelen vastag. Ez esetben ugyanis a (2.2.118) szerint

$$\dot{q}(0, \tau) = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = -\vartheta_{F_{\max}} \lambda \sqrt{\frac{2\pi}{a\tau_0}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0}\tau + \frac{\pi}{4}\right),$$

azaz

$$\dot{q}(0, \tau) = -\vartheta_{F_{\max}} \sqrt{\frac{2\pi\lambda c\rho}{\tau_0}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0}\tau + \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.2.264)$$

viszont

$$Y_x = \frac{q(x)}{\vartheta(x)} = S = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \lambda c\rho, \quad (2.2.265)$$

s ebből elég nagy x esetén írható, hogy

$$\dot{q}(x, \tau) = \vartheta(x) \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \lambda c\rho \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0}\tau + \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.2.266)$$

minthogy a fáziseltolódás (2.2.263) szerint $\frac{\pi}{4}$. Ez más szóval annyit jelent, hogy

vastag falban a belső faltól elég nagy x távolságban a jelenségek úgy folynak le, mintha a fal végtelen vastag volna. E távolságon belül azonban érezhetővé válik a fal belső oldalát övező állandó hőmérsékletű környezet hatása. Az előző övezetet – bizonyos elég nagy x abszcisszán túl – a szabályos hullámmás, az x és $x = 0$ közti övezetet pedig a szabálytalan hullámmás övezetének nevezzük.

Foglalkoznunk kell még az Y_x tényező elnevezésével. Az épületfizikában ezt több névvel is illeték. A szovjet irodalomban használt elnevezés szószerinti fordításban „hőszajátítási” tényező volna. Nálunk találkozhatunk a „felületi hőelnyelési tényezővel”. Ez a név – eltekintve attól, hogy a „hőelnyelési tényező” szó több értelemben is foglalt –, a fizikai jelentést sem tükrözi, hiszen az Y -nak az anyag belsejében éppen úgy megvan a jelentősége, mint a felületen. Ezért célszerűbb a „hőbehatolási” tényező elnevezés, amely a periodikus hőáram és hőmérséklet egymáshoz való viszonyát nyelvünk szerint jobban és félreértésmentesen fejezi ki.

A β tényező értékét elég vastag falra a (2.2.255) összefüggésből, amikor is

$$Y = S \sqrt{i},$$

a következőképpen írhatjuk fel:

$$\beta_\delta = \frac{\vartheta(\delta)}{\vartheta(0)} = e^{D_\delta \sqrt{i}} \frac{1 + \frac{Y_0}{S \sqrt{i}}}{1 + 1} = 0,5 e^{D_\delta \sqrt{i}} \left(1 + \frac{Y_0}{S \sqrt{i}} \right). \quad (2.2.267)$$

Ennek abszolút értéke:

$$|\beta_\delta| = \nu_\delta = 0,5 e^{\frac{D_\delta}{\sqrt{2}}} \sqrt{\left(1 + \frac{Y_0}{S \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{Y_0}{S \sqrt{2}} \right)^2},$$

illetőleg $Y_0 = \alpha_b$ -vel

$$\nu_\delta = 0,5 e^{\frac{D_\delta}{\sqrt{2}}} \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha_b}{S \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_b}{S \sqrt{2}} \right)^2}.$$

A fáziskésés:

$$\varepsilon = \arg \beta = \frac{D_\delta}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{Y_0}{S \sqrt{2}}}{1 + \frac{Y_0}{S \sqrt{2}}}, \quad (2.2.268)$$

illetve esetünkben

$$\varepsilon = \frac{D_\delta}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{\alpha_b}{S \sqrt{2}}}{1 + \frac{\alpha_b}{S \sqrt{2}}}. \quad (2.2.269)$$

Teljesen azonos eredményre jutunk akkor is, ha a

$$\beta = \operatorname{ch} D_\delta \sqrt{i} + \frac{Y_0}{S \sqrt{i}} \operatorname{sh} D_\delta \sqrt{i}$$

összefüggésben D_δ elég nagy értékénél

$$\operatorname{ch} (D_{\delta} \sqrt{i}) \approx \operatorname{sh} (D_{\delta} \sqrt{i})$$

közelítő összefüggést vesszük tekintetbe.

Példa. Számítsuk ki a csillapítási tényezőt, illetve abszolút értékét és a belső falon jelentkező hőmérséklet hullámok fáziskésését az alább meghatározott falra:

$$\begin{array}{ll} \delta = 0,38 \text{ m}, & \rho = 1800 \text{ kg/m}^3, \\ \lambda = 0,75 \text{ W/(m K)}, & \alpha_b = 7,0 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}, \\ c = 756 \text{ J/(kg K)}, & \tau_0 = 24 \text{ h}. \end{array}$$

Az előző adatok alapján:

$$a = \frac{\lambda}{c \rho} = 0,00198 \text{ m}^2/\text{h},$$

$$D_{\delta} = \frac{\delta}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \lambda c \rho = 0,38 \sqrt{\frac{2\pi}{24 \cdot 0,00198}} = 4,36,$$

$$\frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}} = 3,090; b = \sqrt{\lambda c \rho} = 16,8 \text{ W/(m}^2 \text{ h}^{1/2} \text{ K)},$$

$$S = b \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} = 16,8 \sqrt{\frac{2\pi}{24}} = 8,60 \text{ W/(m}^2 \text{ h}^{1/2} \text{ K)},$$

$$M_B = \frac{Y_0}{S \sqrt{i}} = \frac{\alpha_b}{S \sqrt{i}} = \frac{\alpha_b}{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 0,576 (1-i),$$

$$\operatorname{ch} (D_{\delta} \sqrt{i}) = \operatorname{ch} \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}} \cos \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}} + i \operatorname{sh} \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}} \sin \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{sh} (D_{\delta} \sqrt{i}) = \operatorname{sh} \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}} \cos \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}} + i \operatorname{ch} \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}} \sin \frac{D_{\delta}}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{ch} (D_{\delta} \sqrt{i}) = -10,997 + i 0,566,$$

$$\operatorname{sh} (D_{\delta} \sqrt{i}) = -10,951 + i 0,568,$$

$$\begin{aligned} M_b \operatorname{sh} (D_{\delta} \sqrt{i}) &= 0,576 (1-i) (-10,951 + i 0,568) = \\ &= -6,308 + 0,327 + (6,308 + 0,327) i, \end{aligned}$$

$$\beta = -16,978 + 7,201 i,$$

$$\nu = |\beta| = \sqrt{16,978^2 + 7,201^2} = 18,45,$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{7,201}{-16,978} = \operatorname{arctg} (-0,425) = 2,739.$$

A fáziskésés órában:

$$\varepsilon_h = 2,739 \frac{12}{\pi} = 10,45 \text{ h.}$$

A közelítő összefüggéssel:

$$\nu = |\beta| = 0,5 e^{3,09} \sqrt{(1+0,576)^2 + 0,567^2} = 18,48,$$

$$\varepsilon = 3,09 - \operatorname{arctg} \frac{0,576}{1,576} = 3,09 - 0,35 = 2,74.$$

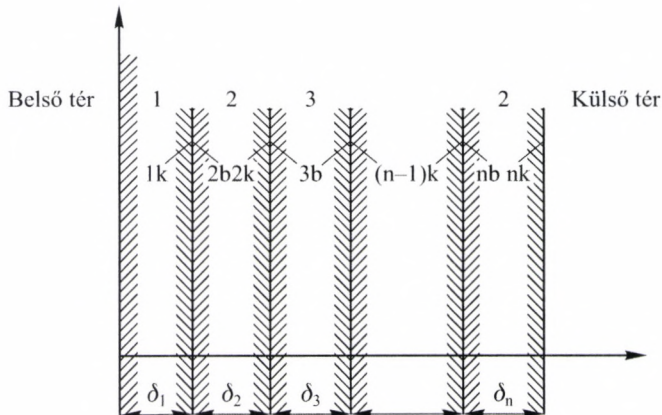
$$\varepsilon_h = 10,46 \text{ h.}$$

Miként látható, $D = 4,36$ esetén már alig adódik különbség a pontos és közelítő számítás között.

2.2.6.2. Hőhullámok behatolása többretegű falba

Ezúttal is tételezzük fel, hogy többretegű falunkat a belső oldalon állandó hőmérsékletű környezet övezi, míg a külső falsíkon a hőmérséklet harmonikus hullámzásban van.

Koordináta-rendszerünk $x = 0$ síkja legyen most is a fal belső síkjával azonos, az egyes rétegeket belülről kifelé növekvő számozással lássuk el (2.2.34. ábra).



2.2.34. ábra

A hőmérséklet-hullámzás a külső falsíktól a számozással jelképezett iránnyal ellentétesen halad. Az 1. réteg külső falsíkja (index 1k) megegyezik a 2. réteg belső falsíkjával (indexe 2b). Az egymáshoz hézag nélkül illeszkedő felületek érintkező síkjában sem a hőmérsékletben, sem a hőáramban különbség nem lehet, minthogy ilyenek létezése végtelen nagy hőmérsékletesítéshez, s így azonnali ki-egyenlítődéshöz vezetne. Ennek értelmében mind a hőmérséklet-hullámzás, mind pedig a hőhullámzás radiusvektora, s így azok viszonya a hőbehatolási tényező megegyező.

Ennek értelmében írható fel, hogy

$$q_{1k} = q_{2b}, \quad (2.2.270)$$

$$\vartheta_{1k} = \vartheta_{2b}, \quad (2.2.271)$$

illetve

$$Y_{1k} = \frac{q_{1k}}{\vartheta_{1k}} = Y_{2b} = \frac{q_{2b}}{\vartheta_{2b}}, \quad (2.2.272)$$

illetve általánosságban

$$Y_{mk} = Y_{(m+1)b}. \quad (2.2.273)$$

A megadott belső határfeltétel értelmében

$$Y_{1b} = \frac{q_{1b}}{\vartheta_{1b}} = \alpha_b. \quad (2.2.274)$$

Ennek birtokában már számítható $Y_{1k} = Y_{2b}$, mégpedig a (2.2.260) szerint

$$Y_{1k} = Y_{2b} = S_1 \sqrt{i} \frac{\operatorname{th} (D_1 \sqrt{i}) + \frac{Y_{1b}}{S_1 \sqrt{i}}}{1 + \frac{Y_{1b}}{S_1 \sqrt{i}} \operatorname{th} (D_1 \sqrt{i})}, \quad (2.2.275)$$

és általánosságban

$$Y_{mk} = Y_{(m+1)b} = S_m \sqrt{i} \frac{\operatorname{th} (D_m \sqrt{i}) + \frac{Y_{mb}}{S_m \sqrt{i}}}{1 + \frac{Y_{mb}}{S_m \sqrt{i}} \operatorname{th} (D_m \sqrt{i})}, \quad (2.2.276)$$

amit azonban

$$Y_{mk} = Y_{(m+1)b} = S_m \sqrt{i} \frac{\operatorname{th} (D_m \sqrt{i}) + \frac{Y_{(m-1)k}}{S_m \sqrt{i}}}{1 + \frac{Y_{(m-1)k}}{S_m \sqrt{i}} \operatorname{th} (D_m \sqrt{i})} \quad (2.2.277)$$

formában is írhatunk.

Így rétegről rétegre menve végül is kiszámíthatjuk az Y_{nk} hőbehatolási tényezőt, azaz a hőáram és a hőmérséklet radiusvektorai közötti komplex viszonyszámot a külső felületen:

$$Y_{nk} = \frac{S_n \sqrt{i} \left[\operatorname{th} (D_m \sqrt{i}) + \frac{Y_{(n-1)k}}{S_n \sqrt{i}} \right]}{1 + \frac{Y_{(n-1)k}}{S_n \sqrt{i}} \operatorname{th} (D_n \sqrt{i})}. \quad (2.2.278)$$

Itt természetesen $Y_{(n-1)k}$ helyett Y_{nb} -t is írhatunk.

Ha valamely réteg vastag, akkor a rétegre nézve

$$Y_m \approx S_m \sqrt{i}, \quad (2.2.279)$$

miként azt egyrétegű fal esetén már bebizonyítottuk.

Az egyes rétegek hőbehatolási tényezőinek ismeretében a (2.2.254) összefüggés alapján az illető réteg csillapítási tényezője:

$$\beta_m = e^{D_m \sqrt{i}} \frac{S_m \sqrt{i} + Y_{mb}}{S_m \sqrt{i} + Y_{mk}}. \quad (2.2.280)$$

Itt is alkalmazhatjuk Y_{mb} helyett $Y_{(m-1)k}$ jelölést.

A hazai irodalomban alkalmazott

$$M_{mb} = \frac{Y_{mb}}{S_m \sqrt{i}}$$

jelöléssel a (2.2.255) összefüggésünk a

$$\beta_m = e^{D_m \sqrt{i}} \frac{1 + M_{mb}}{1 + M_{mk}}, \quad (2.2.281)$$

míg a (2.2.261) összefüggés az

$$M_{mk} = M_{(m+1)b} = \frac{\operatorname{th} (D_m \sqrt{i}) + M_{mb}}{1 + M_{mb} \operatorname{th} (D_m \sqrt{i})} \quad (2.2.282)$$

alakot veszi fel.

A továbbiakban állapodjunk meg abban, hogy az indexben elhagyjuk a b és k, azaz a réteg belső és külső síkjára vonatkozó jelölést, pusztán a rétegszámot alkalmazzuk. Ebben az esetben azonban mindig az illető réteg külső síkját fogjuk érteni.*

Észerint a (2.2.280) felhasználásával

* Megjegyezzük, hogy a hazai irodalomban az Y helyett az U jelölést is alkalmazzák.

$$\beta_m = e^{D_m \sqrt{i}} \frac{S_m + \frac{Y_{m-1}}{\sqrt{i}}}{S_m + \frac{Y_m}{\sqrt{i}}}. \quad (2.2.283)$$

A hőáram csillapítási tényezője a (2.2.259) alapján:

$$\beta_{Qm} = e^{D_m \sqrt{i}} \frac{\frac{1}{S_m} + \frac{\sqrt{i}}{Y_{m-1}}}{\frac{1}{S_m} + \frac{\sqrt{i}}{Y_m}}. \quad (2.2.284)$$

A teljes falra a csillapítást értelemszerűen a csillapítási tényezők szorzata adja. Ennek kiszámításához ismernünk kell a külső környezet és a külső fal közötti csillapítási tényezőt. A külső falsíkra áramló hő komplex formában:

$$\dot{q}_{e-n} = \alpha_k (\vartheta_e - \vartheta_n). \quad (2.2.285)$$

A hőbehatolási tényezőt a határsíkon:

$$Y_n = \frac{\dot{q}_{e-n}}{\vartheta_n} = \frac{\alpha_k (\vartheta_e - \vartheta_n)}{\vartheta_n},$$

$$Y_n = \alpha_k \left(\frac{\vartheta_e}{\vartheta_n} - 1 \right). \quad (2.2.286)$$

Azonban

$$\frac{\vartheta_e}{\vartheta_n} = \beta_c,$$

s így

$$\beta_c = 1 + \frac{Y_n}{\alpha_k} = \frac{\alpha_k + Y_n}{\alpha_k}. \quad (2.2.287)$$

Y_n értékeit a (2.2.260) összefüggés szolgáltatja. Ha az utolsó réteg vastag, akkor (2.2.261) szerint

$$Y_n \approx S_n \sqrt{i}, \quad \beta_c \approx 1 + \frac{S_n \sqrt{i}}{\alpha_k}, \quad (2.2.288)$$

illetőleg

$$\beta_c \approx 1 + \frac{S_n}{\alpha_k \sqrt{2}} + \frac{S_n \sqrt{i}}{\alpha_k \sqrt{2}}. \quad (2.2.289)$$

Ennek abszolút értéke:

$$\nu_c = |\beta_c| = \sqrt{\left(1 + \frac{S_n}{\alpha_k \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{S_n}{\alpha_k \sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{S_n \sqrt{2}}{\alpha_k} + \frac{S_n^2}{\alpha_k^2}}, \quad (2.2.290)$$

reciproka pedig az az érték, amelyet a 2.2.5.6. pontban ν_0 -val jelölve végtelen vastag falakra vezettük be, azaz

$$\nu_0 = \frac{1}{\nu_c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{S_n \sqrt{2}}{\alpha_k} + \frac{S_n^2}{\alpha_k^2}}},$$

illetve a fáziskésés:

$$\varepsilon = \arctg \frac{1}{1 + \frac{\alpha_k \sqrt{2}}{S_n}}.$$

Fentiek alapján a teljes csillapítási tényezőt

$$\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n, \beta_c \quad (2.2.291)$$

alakban fejezhetjük ki. Behelyettesítve ebbe a β_m értékét (2.2.280), illetve (2.2.291) alapján nyerjük, hogy

$$\beta = e \Sigma D_m \sqrt{i} \frac{S_1 \sqrt{i} + \alpha_b}{S_1 \sqrt{i} + Y_1} \cdot \frac{S_2 \sqrt{i} + Y_1}{S_2 \sqrt{i} + Y_2} \dots \frac{S_n \sqrt{i} + Y_{n-1}}{S_n \sqrt{i} + Y_n} \cdot \frac{\alpha_k + Y_n}{\alpha_k}. \quad (2.2.292)$$

3. EGYSZERŰ TRANZIENS PROBLÉMÁK

3.1. Tartályban tárolt közegek fűtése vagy hűtése

Az épületgépészetben és annak határterületein, bizonyos fogyasztók ellátásához kiterjedten alkalmazzák a vízgőzt mint energiahordozót. A vízgőz, a forró vízzel szemben, érzékeny az üzemi állapotok változására. A vízgőz szállítása során, energiahordozóként való felhasználáskor ügyelnünk kell az állandósult üzemi állapotok fenntartására, a gyors állapotváltozások létrejöttének megakadályozására, a nyomás és hőmérséklet állandó értéken való tartására. Különösen veszélyes az az üzemi állapot, amelyben fennállhat a valószínűsége a gőz nyomásának a telítési nyomás alá való csökkenésére.

A vízgőz állapotváltozásainak dinamikai egyenletei mind ez ideig hiányoztak a mérnöki gyakorlatból. A vízgőz állapotváltozásainak a különböző környezeti hatások következtében történő létrejötte, és annak matematikai leírása nélkülözhetetlen a tervező és üzemeltető mérnök számára. E fejezetben összefoglalóan bemutatjuk a tartályban tárolt, illetve áramló gőz állapotváltozásainak időbeli leírására szolgáló differenciálegyenleteket és azok megoldásait. A teljesség kedvéért bemutatjuk a gőzfázist nem tartalmazó folyadékok és gázok fűtésének vagy hűtésének folyamatát, a hőmérséklet időbeli változásának leírását.

3.1.1. Gőzfázist nem tartalmazó telítetlen folyadék vagy gáz

Felírjuk a tartály energiamérlegét. A tartályban tárolt közeg energiájának megváltozása a hőveszteség és a tartály fűtésének az eredménye.

3.1.1.1. A tartály differenciális hőmérlege

$$kA_p \Delta t \, d\tau = -cM d(\Delta t) + \dot{Q}(\tau) \, d\tau, \quad (3.1.1)$$

ahol k a hőátviteli tényező a tartály falán keresztül, A_p a tartály palástjának felülete, Δt a tárolt folyadék túlhőmérséklete, M a tárolt folyadék tömege, c a fajhője, $\dot{Q}(\tau)$ a tartály fűtési teljesítménye.

Legyen

$$kA_p = a_0, \quad cM = a_1.$$

Ezekkel

$$a_0 \Delta t \, d\tau = -a_1 \, d(\Delta t) + \dot{Q}(\tau) \, d\tau. \quad (3.1.2)$$

Rendezés után a hőmérleg differenciálegyenlete:

$$\frac{d}{d\tau} \Delta t + \frac{a_0}{a_1} \Delta t - \frac{1}{a_1} \dot{Q}(\tau) = 0. \quad (3.1.3)$$

3.1.1.2. A hőmérleg differenciálegyenletének megoldása

Ha a tartály fűtés nélkül maradt, tehát $\dot{Q}(\tau) = 0$, akkor a (3.1.3) differenciálegyenlet megoldása a

$$\tau = 0, \quad \Delta t = \Delta t_0$$

kezdeti feltétel figyelembevételével:

$$\Delta t = \Delta t_0 e^{-\frac{a_0 \tau}{a_1}}. \quad (3.1.4)$$

Ha az a feladat, hogy a tartálynak olyan szigetelést tervezzünk, amellyel a tartályban tárolt közeg a τ^* hosszúságú üzemszüneti időben nem hűl le Δt^* -nél kisebb értékre, akkor az ehhez tartozó szigetelés a_0^* hatásossága a következők szerint határozható meg:

$$a_0^* = \frac{a_1}{\tau^*} \ln \frac{\Delta t_0}{\Delta t^*}. \quad (3.1.5)$$

Ha az a kérdésünk, hogy a tartályban tárolt közeg mennyi idő alatt hűl le valamely Δt^* túlhőmérsékletre, akkor az a következő képlettel határozható meg:

$$\tau^* = \frac{a_1}{a_0} \ln \frac{\Delta t_0}{\Delta t^*}. \quad (3.1.6)$$

Ha $|\dot{Q}(\tau)| > 0$, tehát a tartályt fűtjük, akkor a (3.1.3) differenciálegyenlet inhomogénné válik. Ha a kezdeti feltétel

$$\tau = 0, \quad \Delta t = \Delta t_0,$$

akkor a megoldás

$$\Delta t = \left\{ \Delta t_0 + \frac{1}{a_1} \int \dot{Q}(\tau) e^{\frac{a_0}{a_1} \tau} d\tau \right\} e^{-\frac{a_0}{a_1} \tau}. \quad (3.1.7)$$

Ha a tartályt hőcserélőn keresztül fűtjük:

$$\dot{Q}(\tau) = k_H A_H (t_F - t) = k_H A_H t_F - k_H A_H t, \quad (3.1.8)$$

és ha

$$k_H A_H t_F = b_0, \quad k_H A_H = b_1,$$

akkor

$$\dot{Q}(\tau) = b_0 - b_1 t. \quad (3.1.9)$$

A fentiekkel a (3.1.3) egyenlet a következő formában írható:

$$\frac{d}{d\tau} t + \left(\frac{a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} \right) t - \frac{a_0}{a_1} t_L - \frac{b_0}{a_1} = 0. \quad (3.1.10)$$

A (3.1.10) differenciálegyenlet megoldása, ha a kezdeti feltétel

$$\tau = 0, \quad t = \Delta t_0, \quad (3.1.11)$$

továbbá

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} \equiv A_0, \quad (3.1.12)$$

$$\left(\frac{a_0}{a_1} t_L + \frac{b_0}{a_1} \right) \equiv A_1, \quad (3.1.13)$$

$$t = \left(t_0 - \frac{A_1}{A_0} \right) e^{-A_0 \tau} + \frac{A_1}{A_0}. \quad (3.1.14)$$

Ha a tartály kezdeti fűtési teljesítménye megegyezik a hővesztességgel, vagyis a közeg kezdeti hőmérséklete

$$t_0 \equiv \frac{A_1}{A_0}, \quad (3.1.15a)$$

akkor a közeg hőmérséklete időben állandó. Ha

$$t_0 > \frac{A_1}{A_0}, \quad (3.1.15b)$$

akkor a közeg lehűl $\frac{A_1}{A_0}$ hőmérsékletre, ha pedig

$$t_0 < \frac{A_1}{A_0}, \quad (3.1.15c)$$

akkor a közeg felmelegszik $\frac{A_1}{A_0}$ hőmérsékletre.

3.1.2. Gőzfázist tartalmazó telített folyadék

3.1.2.1. A folyadék-gőz komponensű közeg hőmérlege

$$\frac{d}{d\tau}(Mh) = -kA_p \Delta t - h'' \dot{m} + \dot{Q}(\tau). \quad (3.1.16)$$

Másrészt azonban

$$\frac{d}{d\tau}(Mh) = h \frac{dM}{d\tau} + M \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T \frac{d\rho}{d\tau} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{d\tau} \right]. \quad (3.1.17)$$

Ebben

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{dM}{d\tau} \frac{1}{V} + M \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{V} \right) = \frac{dM}{d\tau} \frac{1}{V} - \frac{1}{V^2} \frac{dV}{d\tau} M. \quad (3.1.18)$$

3.1.2.2. Izochor kondenzáció vagy forralás

A hőmérleg differenciálegyenletének felírásához tekintetbe vesszük, hogy izochor kondenzáció esetén $\frac{dV}{d\tau} = 0$, ekkor a (3.1.18) egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{dM}{d\tau} \frac{1}{V}. \quad (3.1.19)$$

A fenti helyettesítéseket elvégezve, a hőmérleg differenciálegyenlete:

$$h \frac{dM}{d\tau} + M \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T \frac{dM}{d\tau} \frac{1}{V} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{d\tau} \right] = -kA_p \Delta T - h'' \dot{m} + \dot{Q}(\tau). \quad (3.1.20)$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a tartályba nem vezetünk be és a tartályból nem vezetünk el sem gőzt, sem folyadékot. Ekkor

$$\frac{dM}{d\tau} = 0.$$

Ezzel a differenciálegyenlet jelentősen egyszerűsödik:

$$M \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{d\tau} = -kA_p (T - T_k) + \dot{Q}(\tau). \quad (3.1.21)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{kA_p}{M} = a_0, \quad \frac{1}{M} = a_1, \quad \frac{kA_p T_k}{M} = a_2. \quad (3.1.22)$$

Ezekkel

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_\rho} [a_0 T - a_1 \dot{Q}(\tau) - a_2] = 0. \quad (3.1.23)$$

Legyen

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{\rho=\rho_0} = b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots, \quad (3.1.24)$$

akkor

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{a_0 T - a_1 \dot{Q}(\tau) - a_2}{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots} = 0. \quad (3.1.25)$$

Ha

$$\dot{Q}(\tau) = \text{állandó} = c,$$

akkor

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{a_0 T - a_1 c - a_2}{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots} = 0. \quad (3.1.26)$$

Ha $\dot{Q}(\tau) = K(T_F - T)$, tehát hőcserélővel fűtött, akkor

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{(a_0 + a_1 K)T}{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots} - \frac{a_1 K T_F + a_2}{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots} = 0, \quad (3.1.27)$$

illetve további rendezéssel

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{(a_0 + a_1 K)T + a_1 K T_F - a_2}{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots} = 0. \quad (3.1.28)$$

Mind a (3.1.25) mind a (3.1.26) és (3.1.27) differenciálegyenlet szétválasztható változójú.

3.1.2.3. A hőmérleg differenciálegyenletének megoldása

A differenciálegyenletek megoldása, ha a $\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_\rho$ kifejezésben a harmadrendű tagot már elhanyagoljuk, rendre a következők szerint írható:

A (3.1.25) differenciálegyenlet megoldása:

$$\left(\frac{b_1}{a_0} a_2 + b_0 + \frac{b_2}{a_0^2} a_2^2\right) \ln \frac{T_0^*}{T^*} + \left(\frac{b_1}{a_0} + 2a_2 \frac{b_2}{a_0^2}\right) (T_0^* - T^*) + \frac{1}{2} \frac{b_2}{a_0^2} (T_0^{*2} - T^{*2}) = a_0 \tau, \quad (3.1.29)$$

ahol

$$T^* = a_0 T - a_2$$

és

$$T_0^* = T^*(\tau), \text{ ha } \tau = 0. \quad (3.1.30)$$

A (3.1.26) differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{b_1}{a_0} (a_2 + a_1 c) + b_0 + \frac{b_2}{a_0^2} (a_2 + a_1 c) \right] \ln \frac{T_0^*}{T^*} + \\ & + \left[\frac{b_1}{a_0} + 2(a_2 + a_1 c) \frac{b_2}{a_0^2} \right] (T_0^* - T^*) + \frac{1}{2} \frac{b_2}{a_0^2} (T_0^{*2} - T^{*2}) = a_0 \tau, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

ahol

$$T^* = a_0 T - (a_2 + a_1 c),$$

és

$$T_0^* = T^*(\tau), \text{ ha } \tau = 0.$$

A (3.1.28) differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{b_1}{a_0 + a_1 K} (a_2 + a_1 K T_F) + b_0 + \frac{b_2}{(a_0 + a_1 K)^2} (a_2 + a_1 K T_F)^2 \right] \ln \frac{T_0^*}{T^*} + \\ & + \left[\frac{b_1}{a_0 + a_1 K} + 2(a_2 + a_1 K T_F) \frac{b_2}{(a_0 + a_1 K)^2} \right] (T_0^* - T^*) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{b_2}{(a_0 - a_1 K)^2} (T_0^{*2} - T^{*2}) = (a_0 - a_1 K) \tau, \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

ahol

$$T^* = (a_0 + a_1 K) T - a_1 K T_F - a_2,$$

és

$$T_0^* = T^*(\tau), \text{ ha } \tau = 0.$$

Vizsgáljuk meg a h entalpia polinomiális felírásának lehetőségeit! Mint ismeretes, a nedves mezőben a vízgőz entalpiája:

$$h_x = u_x + p v_x, \quad (3.1.33)$$

ahol u_x az x gőztartalmú nedves gőz belső energiája. Mivel

$$v_x = \frac{V}{M} = \text{állandó}, \quad (3.1.34)$$

ezért

$$h_x = u_x + p \frac{V}{M}. \quad (3.1.35)$$

Másrészt

$$h_x = c_v t + r x. \quad (3.1.36)$$

A fajlagos gőztartalom

$$x = \frac{v_x - v'}{v'' - v'}, \text{ ha } v'' \gg v', \quad v'' - v' \approx v'' \quad (3.1.37)$$

(az elkövetett hiba 0 ... 100 bar intervallumban kisebb, mint 10%).

Tehát

$$x = \frac{v_x - v'}{v''}. \quad (3.1.38)$$

Ezzel

$$h_x = c_v t + r \frac{\frac{V}{M} - v'}{v''}, \quad (3.1.39)$$

illetve

$$h_x = c_v t + \frac{r}{v''} \left(\frac{V}{M} - v' \right), \quad (3.1.40)$$

$$h_x = c_v t + \left(\frac{r}{v''} \right) \frac{V}{M} - \frac{r}{v''} v'. \quad (3.1.41)$$

Az $\frac{r}{v''}$ értékeket és az $\frac{r}{v''} v'$ értékeket a hőmérséklet függvényében a 3.1.1. táblázat tartalmazza.

Az $\frac{r}{v''}$ értékeknek a hőmérséklet függvényében való polinomiális kifejezése:

$$\frac{r}{v''} = \xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \dots \quad (3.1.42)$$

Az $\frac{r}{v''} v'$ polinomiális kifejezés pedig:

$$\frac{r}{v''} v' = \chi_0 + \chi_1 t + \chi_2 t^2 + \dots \quad (3.1.43)$$

A sorfejtést a vizsgált tartományokra külön-külön célszerű elvégezni.

A 0 ... 370 °C hőmérséklet-tartományt teljes egészében átfogó polinomiális sorfejtést másod- vagy harmadrendű taggal bezárólag – megfelelő pontossággal – nem lehet megvalósítani.

A fentiekkel az entalpia hőmérséklet szerinti deriváltja:

3.1.1. táblázat. A telített gőz jellemzői

Hő- mér- séklet t	Párolgáshő r	Fajtérfogat		Telítési nyomás p	$\frac{r}{v'}$, $\frac{r}{v''}$	$\frac{r}{v''}$
		v'	v''			
°C	kJ/kg	m ³ /kg	m ³ /kg	N/m ³	kJ/kg	kJ/m ³
0	2500,776	0,0010002	206,300000	610,76	0,0121244	12,12203587
10	2477,330	0,0010004	106,420000	1227,11	0,0232880	23,27880098
20	2453,465	0,0010018	57,840000	2336,92	0,0424900	42,41813624
30	2430,019	0,0010044	32,930000	4241,38	0,0741100	73,79347100
40	2406,154	0,0010079	19,550000	7374,60	0,1240500	123,07693090
50	2382,289	0,0010121	12,040000	12334,80	0,2002500	197,86453490
60	2358,006	0,0010171	7,678000	19917,31	0,3123600	307,11200830
70	2333,304	0,0010228	5,045000	31165,53	0,4730400	462,49831520
80	2308,183	0,0010290	3,408000	47356,31	0,6969200	677,28374410
90	2282,643	0,0010359	2,361000	70107,74	1,0015200	966,81194410
100	2256,685	0,0010435	1,673000	101322,30	1,4075600	1348,88523600
110	2229,890	0,0010515	1,210000	143265,30	1,9377000	1842,88429800
120	2202,675	0,0010603	0,801700	198535,60	2,9131700	2747,50530100
130	2174,205	0,0010697	0,668300	270114,40	3,4800900	3253,33682500
140	2144,898	0,0010798	0,508700	361375,10	4,5529000	4216,43011600
150	2114,334	0,0010906	0,392600	476014,80	5,8733000	5385,46612300
160	2082,514	0,0011021	0,306800	618015,10	7,4808000	6787,85528000
170	2049,439	0,0011144	0,242600	791985,10	9,4142000	8447,81121200
180	2015,107	0,0011275	0,193900	1002730,00	11,7175000	10392,50645000
190	1978,682	0,0011415	0,156400	1255251,00	14,4415000	12651,41944000
200	1940,582	0,0011565	0,127200	1455040,00	17,6437000	15256,14780000
210	1900,389	0,0011726	0,104300	1907982,00	21,3652000	18220,41227000
220	1857,683	0,0011900	0,086060	2320155,00	25,6872000	21585,90518000
230	1812,884	0,0012087	0,071470	2797935,00	30,6594000	25365,66391000
240	1765,574	0,0012291	0,059670	3347990,00	36,3678000	29588,97268000
250	1715,332	0,0012512	0,050060	3977577,00	42,8730000	34265,52137000
260	1661,322	0,0012755	0,042150	4694443,00	50,2732000	39414,51957000
270	1604,382	0,0013023	0,035600	5505453,00	58,6906000	45066,91011000
280	1542,836	0,0013321	0,030130	6419433,00	68,2114000	51205,97411000
290	1476,266	0,0013655	0,025540	7445209,00	78,9287000	57802,11433000
300	1404,253	0,0014036	0,021640	8591606,00	91,0817700	64891,54344000
310	1325,122	0,0014470	0,018320	9869413,00	104,6643900	72331,98690000
320	1238,037	0,0014990	0,015450	11289415,00	120,1176400	80131,84466000
330	1139,647	0,0015620	0,012970	12864363,00	137,2497000	87867,92598000
340	1027,022	0,0016390	0,010780	14607986,00	156,1492000	95271,05751000
350	893,044	0,0017410	0,008803	16536954,00	176,6204000	101447,68830000
360	719,711	0,0018940	0,006943	18673823,00	196,3319000	103659,94530000
370	438,358	0,0031800	0,003180	21052916,00	438,3580000	137848,42770000

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{\rho=\text{áll.}} = c_v + \xi_1 \frac{V}{M} - \chi_1 + \left(2\xi_2 \frac{V}{M} - 2\chi_2\right)t + \left(3\xi_3 \frac{V}{M} - 3\chi_3\right)t^2 + \dots \quad (3.1.44)$$

Tehát a (3.1.29), (3.1.31) és (3.1.32) kifejezésekben szereplő együtthatók:

$$b_0 = c_v + \xi_1 \frac{V}{M} - \chi_1, \quad (3.1.45)$$

$$b_1 = 2\xi_2 \frac{V}{M} - 2\chi_2, \quad (3.1.46)$$

$$b_2 = 3\xi_3 \frac{V}{M} - 3\chi_3. \quad (3.1.47)$$

A (3.1.29) (3.1.31) és (3.1.32) kifejezések a hőmérsékletre nézve implicit kifejezések.

Annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy valamely τ' üzemszüneti idő alatt a közeg nem hül-e T^* érték alá, a bemutatott egyenletek segítségével megállapítható.

Ha a lehülés nagyobb mértékű, mint a megengedett, akkor a hőszigetelés hatásságát javítani kell, vagyis a_0 értékét csökkenteni kell. Az a_0 érték csökkenése a k hőátbocsátási tényező csökkenésével érhető el. Új, kisebb a_0 érték felvételével ki kell értékelnünk az egyenleteket, és meg kell néznünk, hogy a lehülés mértéke kisebb-e, mint a megengedett.

3.1.2.4. Izochor kondenzáció kondenzelvezetéssel (Gőz lehülése csővezetékben, üzemszüneti állapotban)

Ha a gőz túlhevített állapotú, a telítési állapotig való lehülés folyamata a (3.1.16) összefüggés segítségével vizsgálható, $\dot{Q}(\tau) = 0$ helyettesítéssel.

A telített állapotú gőz lehülése – amennyiben a keletkező kondenzátum a csőben marad – a (3.1.25) differenciálegyenlet segítségével írható le. A lehülés mértéke, illetve a gőz hőmérsékletének alakulása a (3.1.29) kifejezés felhasználásával számítható.

Ha a csővezetékben a kondenzátumot elvezetjük, akkor a lehülés folyamatának vizsgálatakor vissza kell térnünk a (3.1.16) (3.1.17) differenciálegyenlethez.

$$h \frac{dM}{d\tau} + M \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T \frac{d\rho}{d\tau} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{d\tau} \right] = -kA_p \Delta T - h'' \dot{m} + \dot{Q}(\tau). \quad (3.1.48)$$

Tételezzük fel, hogy a kondenzátum elvezetése folyamatos és tökéletes. ekkor az állapotváltozás az $x = 1$ telítési vonalon játszódik le. A differenciálegyenletben tehát

$$h \equiv h''. \quad (3.1.49)$$

Legyen $\dot{Q}(\tau) = 0$, és vegyük figyelembe a következőket:

$$\left(\frac{\partial h''}{\partial \rho}\right)_T = 0, \quad (3.1.50)$$

$$h'' - h' = r, \quad (3.1.51)$$

$$M = V\rho'', \quad (3.1.52)$$

$$\frac{dM}{d\tau} = -\dot{m}. \quad (3.1.53)$$

A behelyettesítéseket elvégezve és megfelelő rendezés után:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\left(\frac{\partial h''}{\partial T}\right)_\rho V\rho''} \left(-kA_p \Delta T - V \frac{d\rho''}{d\tau} r\right). \quad (3.1.54)$$

Mivel

$$\frac{d\rho''}{d\tau} = \left(\frac{\partial \rho''}{\partial T}\right) \frac{dT}{d\tau}, \quad (3.1.55)$$

ezért

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\left(\frac{\partial h''}{\partial T}\right)_\rho V\rho''} \left(-kA_p \Delta T - V \left(\frac{\partial \rho''}{\partial T}\right) \frac{dT}{d\tau} r\right). \quad (3.1.56)$$

További rendezéssel:

$$\frac{dT}{d\tau} = -\frac{kA_p}{V} \frac{\Delta T}{\left(\frac{\partial h''}{\partial T}\right)_\rho \rho'' + \left(\frac{\partial \rho''}{\partial T}\right) r}. \quad (3.1.57)$$

A nevezőben lévő kifejezés a hőmérséklet függvényében numerikusan kiértékelhető és polinomiális sorba fejthető, vagyis

$$\left(\frac{\partial h''}{\partial T}\right)_\rho \rho'' + \left(\frac{\partial \rho''}{\partial T}\right) r = f_0 + f_1 \Delta T + f_2 \Delta T^2 + \dots \quad (3.1.58)$$

Legyen

$$\frac{kA_p}{V} = W.$$

A (3.1.57) differenciálegyenlet – a nevező polinomiális sorfejtése után – szétválasztható változójú. Legyen a kezdeti feltétel

$$\tau = 0, \quad \Delta T = \Delta T_0. \quad (3.1.59)$$

A (3.1.57) differenciálegyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$f_0 \ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T} + f_1 (\Delta T_0 - \Delta T) + f_2 (\Delta T_0^2 - \Delta T^2) + \dots + f_n \left(\frac{\Delta T_0^n}{n} - \frac{\Delta T^n}{n} \right) = W\tau. \quad (3.1.60)$$

Ha a túlhőmérsékletet t_0 °C értéktől mérjük, akkor (3.1.60) kifejezésben

$$\Delta T = \Delta T' + t_0 \text{ és } \Delta T_0 = \Delta T'_0 + t_0$$

helyettesítést kell alkalmaznunk.

A (3.1.60) kifejezés a ΔT túlhőmérsékletre nézve implicit, de iterációval megoldható.

3.1.2.5. Telített gőz hűtése vagy fűtése állandó nyomás alatt (Izobár kondenzáció, izobár forralás)

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor kondenzátumot nem vezetjük el a tartályból, és a tartályba nem vezetünk sem gőzt, sem folyadékot, de a gőzt állandó nyomáson tartjuk.

Az állapotváltozás hőmérlegét a (3.1.16) és (3.1.17) differenciálegyenlet írja le. Ha a (3.1.16) -ba behelyettesítjük a (3.1.17) -t és a (3.1.18) -at, amelyekben figyelembe vesszük azt, hogy

$$\frac{dM}{d\tau} = 0, \quad (3.1.61)$$

akkor a hőmérleg:

$$M \left[-\frac{1}{V^2} \frac{dV}{d\tau} \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{d\tau} \right] = -kA_p \Delta T + \dot{Q}(\tau). \quad (3.1.62)$$

Izobár kondenzáció esetén

$$\frac{dT}{d\tau} = 0. \quad (3.1.63)$$

Így

$$-\frac{M}{V^2} \frac{dV}{d\tau} \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T = -kA_p \Delta T + \dot{Q}(\tau). \quad (3.1.64)$$

Az entalpia sűrűség szerinti deriváltja:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (c_v t + r x) \right]_T = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} r x \right)_T = \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right)_T x + r \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)_T \equiv r \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)_T. \quad (3.1.65)$$

Mivel

$$x = \frac{v_x - v'}{v'' - v'} = \frac{\frac{1}{\rho_x} - v'}{v'' - v'}, \quad (3.1.66)$$

ezért

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)_T = - \frac{v_x^2}{v'' - v'}. \quad (3.1.67)$$

A fentiekkel

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T = - \frac{r v_x^2}{v'' - v'}. \quad (3.1.68)$$

Ha a (3.1.53) egyenletet behelyettesítjük a (3.1.64) differenciálegyenletbe, és figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{V^2}{v_x^2} = M^2, \quad (3.1.69)$$

akkor

$$\frac{1}{M(v'' - v')} \frac{dV}{d\tau} r = -kA_p \Delta T + \dot{Q}(\tau), \quad (3.1.70)$$

illetve

$$\frac{dV}{d\tau} = M(v'' - v') \left(k A_p \Delta T - \dot{Q}(\tau) \right) \frac{1}{r}. \quad (3.1.71)$$

Az izobár folyamat egyben izotermikus folyamat, tehát $\Delta T = \text{állandó}$. Ezért a (3.1.71) differenciálegyenlet megoldása, ha a kezdeti feltétel

$$\tau = 0, \quad V = V_0 \quad (3.1.72)$$

és

$$\frac{1}{r} k A_p M(v'' - v') \Delta T = K_1, \quad (3.1.73)$$

$$\frac{M(v'' - v')}{r} = K_2, \quad (3.1.74)$$

$$V = V_0 - K_1 t - K_2 \int_0^t \dot{Q}(\tau) d\tau. \quad (3.1.75)$$

A (3.1.75) egyenlet a gőz térfogatának időbeli változását írja le.

3.2. Csőben áramló összenyomható közeg lehűlése

Ebben a fejezetben a telített gőz áramlását vizsgáljuk azzal a céllal, hogy olyan hőszigetelést tervezhessünk a gőzvezetésekre, amellyel elkerülhetjük az áramló gőz túlzott mértékű elnedvesedését, illetve megállapíthatjuk, hogy adott szigetelés mellett az egyes üzemi munkapontokban milyen mértékű nedvesség jelenik meg az áramló gőzben. Az áramló gőz „elnedvesedése” a gőzvezetékek üzemeltetésének nagy problémája.

3.2.1. Telített gőz lehűlése

3.2.1.1. A folyamatot leíró egyenletek

Az áramló gőz energiamérlege:

$$\frac{d}{dz} \dot{m} \left(h + \frac{w^2}{2} \right) = -kA_p \Delta T, \quad \Delta T = T - T_k. \quad (3.2.1)$$

Az áramló gőz mozgási egyenlete:

$$\frac{\dot{m}}{A} v \frac{d}{dz} \left(\frac{\dot{m}}{A} v \right) = -\frac{dp}{dz} v - \frac{\lambda}{2D} \left(\frac{\dot{m}}{\rho A} \right)^2. \quad (3.2.2)$$

3.2.1.2. Az alapegyenletek megoldása

Elvégezve a kijelölt differenciálásokat, és figyelembe véve azt, hogy a csőben áramló közeg mennyisége állandó, tehát $\frac{d\dot{m}}{dz} = 0$, rendezés után a következő egyenleteket kapjuk:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_v \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} = -\frac{kA_p}{\dot{m}} \Delta T, \quad (3.2.3)$$

$$v \frac{dv}{dz} = \frac{dp}{dz} \frac{1}{\left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^2} v - \frac{\lambda}{2D} v^2. \quad (3.2.4)$$

Vezessük be következő jelöléseket:

$$\frac{kA_p}{\dot{m}} = a_0, \quad \frac{\dot{m}^2}{A^2} = a_2, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^2} = C_0, \quad \frac{\lambda}{2D} = C_1. \quad (3.2.6)$$

A fentiekkel

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} = -a_0 \Delta T, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{dv}{dz} = -C_0 \frac{dp}{dz} - C_1 v. \quad (3.2.8)$$

Vegyük figyelembe azt, hogy $v \approx x v''$. Így az alapegyenletek

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} = -a_0 \Delta T, \quad (3.2.9)$$

$$v'' \frac{dx}{dz} = -x \frac{dv''}{dz} - C_0 \frac{dp}{dz} - C_1 x v''. \quad (3.2.10)$$

Legyen

$$h(v = \text{állandó}, T) = b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots,$$

$$h(T = \text{állandó}, v) = g_0 + g_1 v + g_2 v^2 + \dots, \quad (3.2.11)$$

Tekintve, hogy a belső energia változását szűk tartományban vizsgáljuk, megengedhető az a közelítés, hogy

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v \approx b_1 \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \approx g_1. \quad (3.2.12)$$

Legyen továbbá

$$v'' = \gamma_0 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots, \quad (3.2.13)$$

$$p = \delta_0 + \delta_1 T + \delta_2 T^2 + \dots \quad (3.2.14)$$

A polinomiális közelítéseket felhasználva:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} = & -\frac{a_0}{b_1} \Delta T - \frac{g_1}{b_1} \left[x(\gamma_1 + 2\gamma_2 T + \dots) + (\gamma_0 + \gamma_1 T + \dots) \frac{dx}{dz} \right] - \\ & - \frac{a_2}{b_1} x(\gamma_0 + \gamma_1 T + \dots) \left[(\gamma_0 + \gamma_1 T + \dots) \frac{dx}{dz} + x(\gamma_1 + 2\gamma_2 T + \dots) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} = & -\frac{x}{\gamma_0 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots} (\gamma_1 + 2\gamma_2 T + \dots) \frac{dT}{dz} - \\ & - \frac{c_0 (\delta_1 + 2\delta_2 T + \dots)}{\gamma_0 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots} \frac{dT}{dz} - C_1 x. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Alkalmazzunk a v'' és a p telítési nyomás polinomiális sorbafejtésében elsőrendű közelítést:

$$v'' = \gamma_0 + \gamma_1 T, \quad (3.2.17)$$

$$p = \delta_0 + \delta_1 T. \quad (3.2.18)$$

Ezekkel a hőmérséklet és a fajlagos gőztartalom változását leíró kapcsolt differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} = & -\frac{a_0}{b_1} \Delta T - \left[\frac{g_1}{b_1} \gamma_1 x + \frac{a_2}{b_1} (\gamma_0 + \gamma_1 T) \gamma_1 x^2 \right] - \\ & - \left[\frac{g_1}{b_1} (\gamma_0 + \gamma_1 T) - \frac{a_2}{b_1} x (\gamma_0 + \gamma_1 T)^2 \right] \frac{dx}{dz}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\gamma_1 x + C_0 \delta_1}{\gamma_0 + \gamma_1 T} \frac{dT}{dz} - C_1 x. \quad (3.2.20)$$

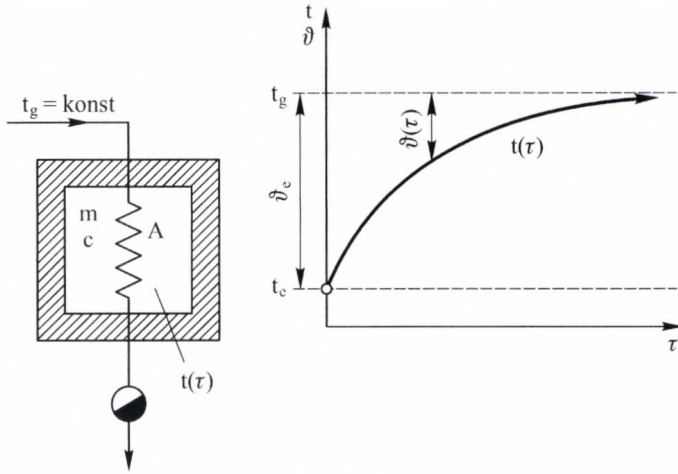
A differenciálegyenlet-rendszer elvi lehetőséget ad arra, hogy a vezeték hőszigetelés-jellemzőinek, továbbá a vezeték geometriai jellemzőinek és csősúrlódási tényezőjének ismeretében meghatározzuk a gőz lehűlésének mértékét és nedvességtartalmának alakulását. A differenciálegyenlet-rendszer megoldását numerikusan végezhetjük el.

Ha a vezeték mentén módunkban áll megmérni a hőmérséklet és a nedvességtartalom változását, tehát a $T(z)$ és az $x(z)$ függvényeket, akkor a differenciálegyenlet-rendszerből meghatározhatjuk az a_0 és a_1 együtthatókat, ezekből pedig a hőszigetelés átlagos hőátbocsátási tényezőjét és a vezeték átlagos csősúrlódási tényezőjét.

Ha a csővezeték terhelése változtatható, különböző gőzmennyiségek esetében kimérjük a gőz hőmérsékletének és nedvességtartalmának a csővezeték mentén való változását. Ez esetben tehát több $T(z)$ és $x(z)$, azaz $T_1(z)$, $T_2(z)$, ..., $T_n(z)$ és $x_1(z)$, $x_2(z)$, ..., $x_n(z)$ függvényt mértünk. Ezekből a_1 -et és a_0 -t regressziós értelemben határozzuk meg, tehát a mérésekre a legkisebb hibanégyzetek elve alapján ültetjük rá az a_0 és a_1 együtthatókat.

3.3. Folyadékkal töltött tartályok tranziens jelenségei

Vizsgáljunk egy gőzzel fűtött autoklávot vagy melegvítárolót, amelyet első közelítésben a környezetétől tökéletesen elszigeteltnek tételezünk fel, és saját hőkapacitását töltetének hőkapacitásához viszonyítva elhanyagoljuk. A kondenzálódó fűtőgőz t_g hőmérséklete az időben állandó. A tartályba beépített fűtőfelület nagysága legyen A [m^2]. A hőátbocsátási tényező a folyadék felé k [$W/(m^2K)$]. A



3.3.1. ábra.

tartályban lévő folyadék tömege m [kg], a fajhője c [kJ/(kgK)]. Mivel a tartály belsejében lévő folyadék hőmérsékletének helyfüggésétől eltekinthetünk, a folyadékra jellemző $t(\tau)$, illetőleg $\vartheta(\tau) = t(\tau) - t_g$ függvény az alábbi differenciálegyenletből határozható meg:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = -\frac{kA}{mc} \vartheta. \quad (3.3.1)$$

Az egyértelműséget biztosító kezdeti feltételt a $t(0) = t_c$, illetve $\vartheta(0) = t_c - t_g$ összefüggéssel adhatjuk meg (3.3.1. ábra).

A (3.3.1) egyenlet megoldása a kezdeti feltételek figyelembevételével:

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = \exp\left(-\frac{kA}{mc} \tau\right). \quad (3.3.2)$$

A tartály által felvett hőáram az időben változik, és $\vartheta(\tau)$ -val arányos, azaz

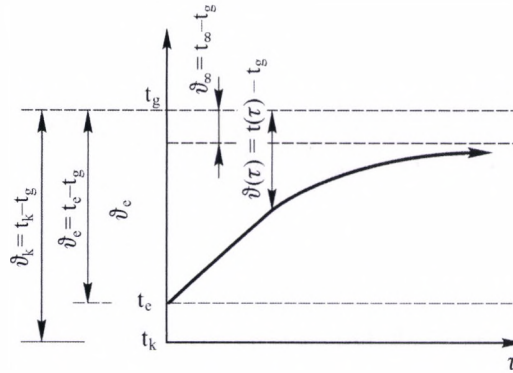
$$\dot{Q}(\tau) = \frac{dQ}{d\tau} = kA\vartheta_c \exp\left(-\frac{kA}{mc} \tau\right). \quad (3.3.3)$$

A tartály által felvett hőmennyiség

$$Q = \int_0^{\infty} \dot{Q}(\tau) d(\tau) = kA\vartheta_c \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{kA}{mc} \tau\right) d\tau = mc\vartheta_c, \quad (3.3.4)$$

amint az evidens is.

Ha figyelembe vesszük, hogy a tartály szigetelése nem tökéletes, s így a t_k hőmérsékletű környezetbe bizonyos veszteség jut, a $t(\tau)$ hőmérséklet meghatározá-



3.3.2. ábra.

sára szolgáló, módosított megfogalmazású differenciálegyenlet (a 3.3.2. ábra jelöléseivel):

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} + \left(\frac{kA}{mc} + \frac{k_1 A_1}{mc} \right) \vartheta - \frac{k_1 A_1}{mc} \vartheta_k = 0. \quad (3.3.5)$$

Itt k_1 és A_1 a veszteség szempontjából mértékadó hőátbocsátási tényező és felület.

Az egyenletből azonnal megállapíthatjuk, hogy a rendszer a t_g hőmérsékletet még végtelen hosszú idő múlva sem éri el. A maximálisan elérhető egyensúlyi túlhőmérséklet:

$$\vartheta_\infty = t_\infty - t_g = \vartheta_k \frac{A_1 k_1}{Ak + A_1 k_1}. \quad (3.3.6)$$

A $t(\tau)$ függvény megoldása az (3.3.5) egyenletből az előbbi kezdeti feltétel figyelembevételével:

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau) = t(\tau) - t_g &= \vartheta_c \exp\left(-\frac{Ak + A_1 k_1}{mc} \tau\right) + \\ &+ \vartheta_k \frac{A_1 k_1}{Ak + A_1 k_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{Ak + A_1 k_1}{mc} \tau\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

A $\vartheta(\tau)$ függvényt meghatározva az egyéb jellemzők a fentiek ismeretében számolhatók. Meghatározható a tartály által felvett hőáram időfüggése, rögzített fűtőfelület esetén a felmelegedési idő.

Példa. Tartályban tárolt $m = 3000$ kg vizet $t_g = 100$ °C gőzzel kell felfűteni. A számításhoz szükséges adatok a következők.

A fűtőkígyó felülete	$A = 3,00 \text{ m}^2$
A hőátbocsátási tényező	$k = 500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
A bojlerpalást felülete	$A_1 = 12,6 \text{ m}^2$
A szigetetlen bojler hőátbocsátási tényezője	$k^* = 9 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
A szigetelés hatásfoka	$\eta_{sz} = 0,75$
A szigetelt bojler hőátbocsátási tényezője	$k' = (1-\eta_{sz})k^* = 2,25 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
A környezet hőfoka	$t_k = 10 \text{ }^\circ\text{C}$
A víz kezdeti hőfoka	$t_c = 15 \text{ }^\circ\text{C}$

A környezet, ill. a víz kezdő túlhőmérséklete a fűtőgőz hőmérsékletéhez viszonyítva:

$$\vartheta_k = 10 - 100 = -90 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$\vartheta_c = 15 - 100 = -85 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Meghatározandó a tároló vizének és a felvett hőmennyiségnek idő szerinti változása.

Végtelen hosszú felfűtési idő esetében a víz végső túlhőmérséklete:

$$\vartheta_\infty = \vartheta_k \frac{A_1 k'_1}{A k + A_1 k'_1} = -90 \frac{12,6 \cdot 2,25}{3 \cdot 500 + 12,6 \cdot 2,25} = -1,674 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$t_\infty = 100 - 1,674 = 98,326 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A (3.3.7) összefüggés felhasználásával

$$\vartheta(\tau)_{\eta=0,75} = 85 \exp\left(-\frac{3 \cdot 500 + 12,6 \cdot 2,25}{3000 \cdot 1} \tau\right) - 1,674 \left[1 - \exp\left(-\frac{3 \cdot 500 + 12,6 \cdot 2,25}{3000 \cdot 1} \tau\right)\right],$$

$$\vartheta(\tau)_{\eta=0,75} = 85 \exp[-0,5095\tau] - 1,674[1 - \exp(-0,5095\tau)].$$

A felfűtési görbét mérethelyesen a 3.3.3. ábra szemlélteti. Ebből bármely időponthoz meghatározható a víz hőmérséklete.

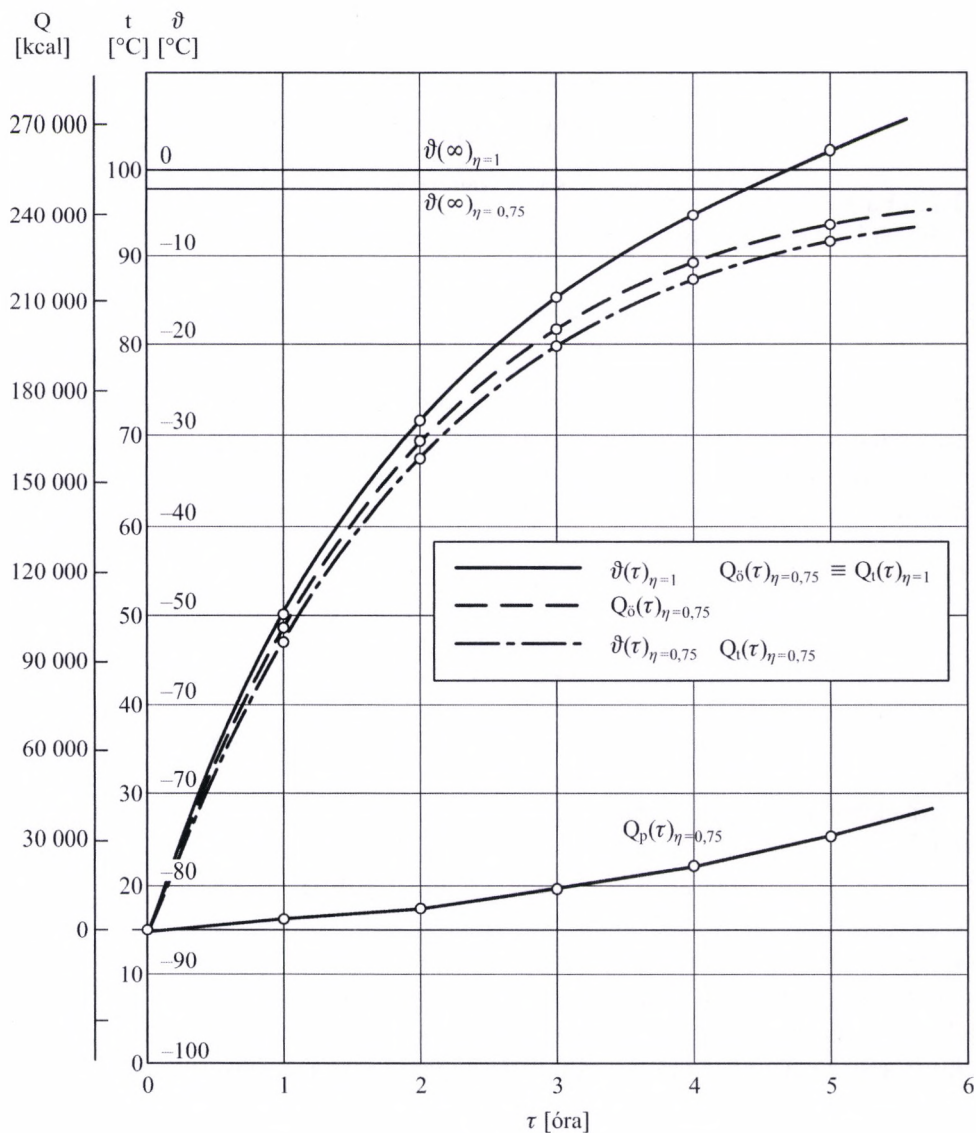
A bojler vize által felvett – tárolt – hő a

$$Q_t(\tau) = mc_v [t(\tau) - t_c] = 3000 \cdot 1 [t(\tau) - 15]$$

összefüggés szolgáltatja. E függvény a 3.3.3. ábrán az alkalmasan megválasztott lépték révén egybeesik a $\vartheta(\tau)$ függvény görbéjével.

A hőfogyasztás a tárolt hőmennyiségből $[Q_t(\tau)]$ és a paláston leadott hőmennyiségből $[Q_p(\tau)]$ tevődik össze:

$$Q_\delta(\tau) = Q_t(\tau) + Q_p(\tau).$$



3.3.3. ábra

A paláston leadott hőmennyiséget a

$$Q_p(\tau) = \int_0^{\tau} A_l k_l [t(\tau) - t_k] d\tau$$

időintegrál szolgáltatja.

Az integrálást $t(\tau)$ változó (3.3.7) szerint kifejtett alakjának felhasználásával elvégezhető, és $Q_p(\tau)$ a

$$Q_p(\tau) = A_1 k_1 \left(\vartheta_k \frac{A_1 k_1}{Ak + A_1 k_1} - \vartheta_c \right) \left[\tau - \frac{1 - \exp\left(-\frac{Ak + A_1 k_1}{cm} \tau\right)}{\frac{Ak + A_1 k_1}{cm}} \right]$$

alakra hozható.

Példánk adatait behelyettesítve és a kijelölt műveleteket elvégezve a

$$Q_p(\tau)_{\eta=0,75} = 9450 \left(\tau - \frac{1 - e^{-0,5096\tau}}{0,5096} \right),$$

csak az időtől függő kifejezést kapjuk. E függvényt, valamint a $Q_t(\tau)$ és $Q_p(\tau)$ egyszerű összegezésből adódó hőfogyasztás függvényt is tartalmazza a 3.3.3. ábra.

Ha a palást hőszigetelése tökéletes ($\eta = 1$) volna, akkor a felfűtés idő szerinti menetét a (3.3.2) szerint a

$$\vartheta(\tau)_{\eta=1} = \vartheta_c e^{-\frac{kA}{mc}\tau},$$

$$\vartheta(\tau)_{\eta=1} = 85 e^{-\frac{500 \cdot 3}{3000 \cdot 1} \tau} = 85 e^{-0,5\tau}$$

összefüggés formájában nyerjük. Ezt a 3.3.3. ábránkon szaggatott vonallal tüntettük fel.

Tökéletes hőszigetelés esetén a bojler vize által felvett hő azonos a hőfogyasztással:

$$Q_t(\tau)_{\eta=1} = Q_{\delta}(\tau)_{\eta=1} = mc_v [t(\tau) - t_c],$$

hiszen a paláston nem távozik hő, $Q_p = 0$.

A felfűtési görbék összehasonlításából kitűnik, hogy a jól szigetelt tárolóban a felfűtés menete nem tér el lényegesen a teoretikus görbe szerinti lefolyástól, de a hőfogyasztásban hosszú tárolási idő esetén el nem hanyagolható eltérés is adódhat.

3.4. Egyszerű alakú szilárd testek lehűlése és melegeedése

Ha egy V térfogatú tetszőleges alakú szilárd testet olyan környezetbe visszük, ahol a környezet t_k hőmérséklete különbözik a szilárd test konstansnak tekintett kezdeti t_c hőmérsékletétől, a $\tau = 0$ időpillanattal kezdődően megindul a hőfokkiegyenlítést megvalósító hőfolyamat. Ha $t_k > t_c$ felmelegedésről, ha $t_k < t_c$ lehűlésről beszélünk. Hangsúlyozottan újból kiemeljük, hogy a most következő megfontolások csak olyan esetre érvényesek, ha a Biot-szám:

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} \delta < 1.$$

Feltesszük továbbá, hogy a test hőmérséklet-eloszlása kiegyenlített, állandó.
A hőmérséklet-kiegyenlítődéssel időbeni lefutását az esetben közelítéssel a

$$\rho c V \frac{d\vartheta}{d\tau} + \alpha A_h \vartheta = 0 \quad (3.4.1)$$

differentiálegyenlet írja le. A $t(0) = t_c$ kezdeti feltétel figyelembevételével a test-hőmérséklet időbeni változásának jellemzésére a

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = \exp\left(-\frac{\alpha A_h}{\rho c V} \tau\right) \quad (3.4.2)$$

összefüggést nyerjük. A hőmérsékletváltozás sebessége egyenesen arányos a hőátadási tényezővel és a hőátadó felülettel, de fordítottan arányos a test hőkapacitásával.

Ha bevezetjük a

$$Bi \equiv \frac{\alpha \delta_h}{\lambda}; \quad Fo \equiv \frac{\alpha \tau}{\delta_h^2} = \frac{\lambda \tau}{\rho \delta_h^2}$$

definíciókkal a Biot- és Fourier-paramétert, a (3.4.2) függvény az alábbi – dimenzió nélküli – formában fejezhető ki:

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = \exp\left[-\left(\frac{A_h \delta_h}{V}\right) Bi \cdot Fo\right]. \quad (3.4.3)$$

Az $\frac{A_h \delta_h}{V}$ mennyiség tisztán geometriai jellegű, a benne szereplő mennyiségek legfeljebb a vizsgált test formájától függenek. δ_h -n a test olyan jellemző méretét értjük, amely méret a hőfolyamat szempontjából alapvető jelentőségű. Az $\frac{A_h \delta_h}{V}$ mennyiséget a továbbiakban jelöljük G -vel, s nevezzük geometriai paraméternek. Ezzel az (3.3.3) egyenlet általános jelölésekkel felírt formája:

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = \exp(-G \cdot Bi \cdot Fo). \quad (3.4.4)$$

Vizsgáljuk most néhány egyszerű alakú test esetén a G paraméter alakulását.

Végtelennek tekinthető vékony sík lemez

A hőfolyamat szempontjából jellemző δ_h méret a lemez félvastagsága. A térfogat: $V = A \cdot 2\delta_h$, a jellemző hőleadó felület: $A_h = 2 A$. A geometriai paraméter tehát:

$$G = \frac{2A\delta_h}{2A\delta_h} = 1.$$

Erre az esetre tehát a (3.3.4) egyenlet

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = \exp(-Bi \cdot Fo).$$

formában írható fel.

Végtelen hosszúnak tekinthető körhenger

A jellemző δ_h méret a henger sugara, a jellemző hőátadó felület a henger egységnyi hosszának palástja ($A_h = 2\pi\delta_h$). A geometriai paraméter tehát:

$$G = \frac{2\delta_h\pi\delta_h}{\delta_h^2\pi} = 2.$$

A tranziens folyamatra tehát a

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = \exp(-2 Bi \cdot Fo).$$

függvény jellemző.

Négyzet-keresztmetszetű rúd

Hőleadás itt is a paláston keresztül történik, a δ_h jellemző méret pedig egy fél oldaltávolság. Így a geometriai paraméter ez esetben:

$$G = \frac{8\delta_h\delta_h}{4\delta_h^2} = 2.$$

Általános esetben a hőtechnikai egyenértékű átmérő fogalmát is felhasználhatjuk.

Kocka és gömb

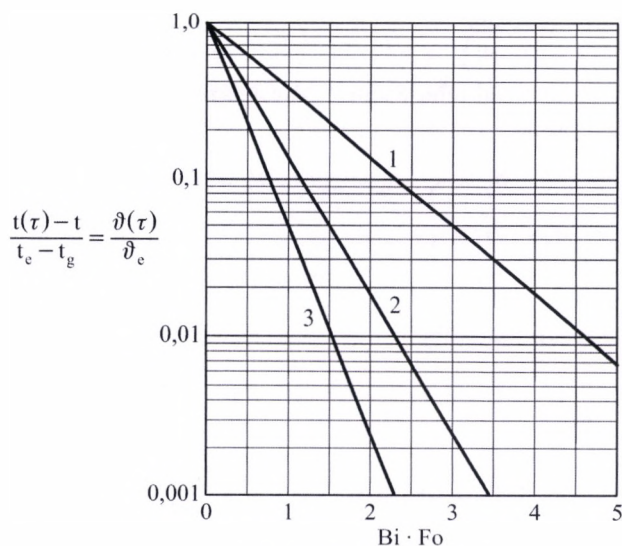
Fentebbiek alapján világos, hogy ezekben az esetekben $G = 3$. Tehát

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = \exp(-3 Bi \cdot Fo).$$

A tranziens hőfokváltozásnak (3.4.4) formában felírt alakja rendkívül előnyös, mert grafikusán igen jól ábrázolható féllogaritmikus koordináta-rendszerben. Eb-

ben G paraméter különböző értékei mellett a $\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c}$ és a $Bi \cdot Fo$ közötti kapcsolatot különböző G -től függő hajlásszögű egyenesek ábrázolják (3.4.1. ábra).

Igen sok esetben a tranziens folyamat kapcsán felvett vagy leadott hőmennyiség, illetve a hőáram időfüggésének ismerete fontosabb a hőfok időfüggésének ismereténél. A folyamat során egy tetszőleges időpillanatban a hőáram kifejezhető a



3.4.1. ábra

$$\dot{Q} = c\rho V \frac{d\vartheta}{d\tau} \quad (3.4.5)$$

összefüggés segítségével. Figyelembe véve fentebbi összefüggéseinket:

$$\dot{Q} = -\alpha A_1 \vartheta_c \exp(-G \cdot Bi \cdot Fo). \quad (3.4.6)$$

A tranziens folyamat tetszőleges időintervallumára vonatkoztatott integrált hőmennyiség:

$$Q = \int_0^{\tau} \dot{Q} d\tau,$$

$$Q = -c\rho V \vartheta_c [1 - \exp(-G Bi Fo)] . \quad (3.4.7)$$

Példa. Hosszú alumínium henger kezdeti hőmérséklete $t_c = 100^\circ\text{C}$.

Méretei: sugara $\delta_h = 0,1 \text{ m}$,
hossza $l = 2,0 \text{ m}$,

s így térfogata

$$V = \delta_h^2 \pi l = 0,1^2 \pi \cdot 2 = 0,0628 \text{ m}^3.$$

A geometriai paraméter

$$G = 2.$$

Az alumínium hővezetési tényezője $\lambda = 190 \text{ W/(mK)}$, sűrűsége $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ és fajhője $c = 0,23 \text{ kJ/(kgK)}$. A környezet hőmérséklete $t_k = 20 \text{ °C}$ és anyaga levegő. Megállapítandó a rúd lehűlésének és hőleadásának menete.

A rúd kezdeti túlhőmérséklete:

$$\vartheta_c = t_c - t_k = 100 - 20 = 80 \text{ °C}.$$

Az alumínium hőfokvezetési tényezője:

$$a = 0,306 \text{ m}^2/\text{s}.$$

A hőleadási tényező levegőben:

$$\alpha = 10 \text{ W/(m}^2\text{K)}.$$

A Biot-kritérium:

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} \delta_h = \frac{10}{190} 0,1 = 0,0526 \ll 1$$

A Fourier-szám

$$Fo = \frac{a \tau}{\delta_h^2} = \frac{0,306}{0,01} \tau = 30,6 \tau,$$

s így

$$\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta_c} = e^{-2 \cdot 0,0526 \cdot 30,6 \tau} = e^{-3,22 \tau}.$$

Így a rúd túlhőmérséklete:

τ	= 0,1	0,2	0,3	0,5	1 óra múlva
$\vartheta(\tau)$	= 0,725 ϑ_c	0,525 ϑ_c	0,38 ϑ_c	0,20 ϑ_c	0,04 ϑ_c
	= 58,0	42,0	30,4	16,0	3,2 °C

A leadott hőmennyiség változása:

$$\dot{Q} = \alpha A_1 \vartheta(\tau) = 10 \cdot 2 \pi \delta_h 1 \vartheta(\tau) = 12,56 \vartheta(\tau),$$

vagyis

t	= 0,1	0,2	0,3	0,5	1 óra múlva
$\dot{Q}$	= 279	528	379	201	40,4 W.

1 óra alatt leadott teljes hőmennyiség:

$$Q = \rho c V [\vartheta_c - \vartheta(\tau)],$$

$$Q = + 2700 \cdot 0,23 \cdot 0,0628 \cdot [80 - 3,2] = 2990 \text{ kJ}.$$

4. SUGÁRZÓFÜTÉSEK ELMÉLETE ÉS MÉRETEZÉSE

A sugárzásos elven működő hőleadók egyre szélesebb körben terjednek világszerte. A legújabb „trend” e vonatkozásban, hogy nyáron ezen felületeket hűtésre is alkalmazzák.

Mindez számos elméleti, méretezési kérdést vet fel. A továbbiakban elsősorban Dr. Macskásy Árpád elméleti megállapításait vesszük figyelembe, kiegészítve néhány újabb eredménnyel. A témát a következő bontásban dolgozzuk fel:

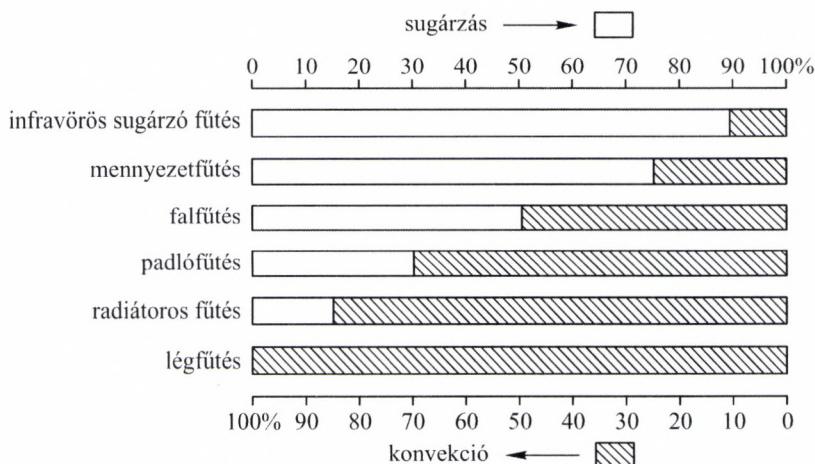
- 4.1 Sugárzófűtések osztályozása és hőleadása
- 4.2 Kis felületi hőmérsékletű sugárzófűtések
- 4.3 Közepes felületi hőmérsékletű (70-200 °C) sugárzófűtések
- 4.4 Magas hőmérsékletű, kis hőtehetlenségű sugárzófűtések
- 4.5 Sugárzófűtések hőérzeti méretezése
- 4.6 Csarnokszerű épületekkel kapcsolatos hőáramlási kérdések
- 4.7 Sugárzó hűtések

Bevezetőben rögzítjük, hogy a különböző sugárzófűtések szerkezeti kialakításával nem foglalkozunk (ezek egyrészt ismertek, másrészt megtalálhatók különböző forrásmunkákban, illetve katalógusokban).

4.1 Sugárzófűtések osztályozása és hőleadása

4.1.1. Sugárzó fűtőberendezések osztályozásának alapjai

A sugárzó fűtőtestek a konvekciós fűtőtestektől elsősorban kialakításukban térnek el, amelynek következtében a sugárzásos hőleadás aránya növekszik, illetve túlsúlyba kerül. Az ugyanis közzismert, hogy az ún. konvekciós fűtőtestek hőleadásának egy része – kivéve a légfűtést – ugyancsak sugárzásos alapokon jön létre. Erre vonatkozóan jó összehasonlítási alapot nyújt a 4.1.1. ábra. Ennek értelmében a sugárzó fűtőberendezéseket célszerű a sugárzó fűtőtestek kialakításának, tulajdonságainak figyelembevételével osztályozni.



4.1.1. ábra. Különböző fűtési megoldások konvekciós és sugárzásos hőleadásnak aránya

A fűtőtestek jellemzőik (felületi hőmérséklet, szerkezeti kialakítás, elhelyezés, fűtőközeg stb.) alapján többféle szempontból oszthatók. Mégis további alapnak a fűtőtest felületi hőmérsékletét tekintjük, mivel a fűtőtest többi jellemzőjét ez határozza meg elsődlegesen, és a feltétlenül figyelembe veendő hőérzeti viszonyok alakulásában is fontos szerepe van.

A fűtőtestek felületi közepes hőmérséklete alapján:

- kis hőmérsékletű
- közepes hőmérsékletű
- magas hőmérsékletű

sugárzófűtést különböztetünk meg. Ezeknek a típusoknak a fontosabb jellemzői a következők:

Kis hőmérsékletű sugárzófűtés esetén a fűtőtest felületi hőmérséklete általában nem haladja meg a $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ -t. Így a fűtőtestet többnyire a fűtendő helyiség valamely határoló szerkezetébe építik be. Fűtőközeggként meleg víz, kisnyomású gőz, ritkábban levegő vagy villamos áram is alkalmazható.

Közepes hőmérsékletű sugárzófűtésről abban az esetben beszélünk, ha a fűtőtest felületi hőmérséklete 70 és $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ között van.

Magas hőmérsékletű sugárzófűtés esetén a felületi hőmérséklet $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ fölött, általában $500\text{ }^{\circ}\text{C}$ és $900\text{ }^{\circ}\text{C}$ között van.

E két utóbbi esetben a fűtőtest csakis a fűtendő helyiség határoló szerkezeteitől függetlenül, pl. sugárzó ernyőként alakítható ki. Fűtőközeggként forró víz, nagynyomású gőz, olaj, villamos áram, illetve gáz alkalmazható.

A gyakorlatban a sugárzófűtéseket különböző, nem egységes szempontok (fűtőközeg, fűtőfelület elhelyezése stb.) szerint is osztályozzák, és egyes megoldások elnevezését esetleg általánosítva alkalmazzák. Így például a határoló szerkezetbe

(mennyezetbe, falba, padlóba) beépített sugárzófűtéseket szabadalmaztatójáról Crittal-fűtésnek, az álmennyezetbe beépített sugárzófűtés egyes típusait Stramax-, Frenger- stb. fűtésnek nevezik. Napjainkban a sugárzófűtés sokféle kialakítása miatt az ilyen megnevezés egyértelműen csak egyes meghatározott megoldásra alkalmazható.

A sugárzófűtési rendszerek lényege, az „eszme megvalósítója” maga a fűtőtest. Ezek méretezése – ellentétben a sugárzófűtési rendszer egészének méretezésével – pusztán hőtechnikai számításokon alapuló feladat.

A sugárzó fűtőtesteket – mint előzőekben már említettük – felületi hőmérsékletük alapján osztályozzuk, azonban ez az érték egyben meghatározza szerkezeti kialakításukat is. Mindezeknek megfelelően a sugárzó fűtőtestek méretezésének kérdését a következő osztályozás szerint tárgyaljuk:

- kis felületi hőmérsékletű és nagy hőtehetetlenségű sugárzófűtések,
- közepes felületi hőmérsékletű és kis hőtehetetlenségű sugárzófűtések,
- magas felületi hőmérsékletű és kis hőtehetetlenségű sugárzófűtések.

4.1.2. Különböző helyzetű és megoldású sugárzó fűtőtestek hőleadása

4.1.2.1. Általános észrevételek

A sugárzó fűtőtestek hőátadásának mechanizmusa teljes mértékben követi a hőközlés törvényszerűségeit. Azonban a fűtőtest különleges kialakítása következtében a fűtőtest két oldalán a leggyakrabban jelentős hőmérséklet-különbség adódik. Ezt a különbséget az idézi elő, hogy a fűtőtestnek a fűtött helyiség felé fordított felületén jóval jelentékenyebb hőmérsékletet biztosítunk, mint az ellentétes oldalon. Előfordul, hogy az ellentétes oldal hőjét másik helyiségben adja le. Ilyen esetben a két oldal hőleadását külön tárgyaljuk (pl. mennyezetfűtés esetén a mennyezet és a padló hőátadását).

Valamely fűtőtest felülete által óránként leadott hő ebben a felfogásban:

$$Q = A \left\{ \sum_j C_j \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_j}{100} \right)^4 \right] + \alpha'_{sl} (t_s - t_j) \right\}. \quad (4.1.1)$$

Az úgynevezett sugárzási hőmérséklet bevezetésével írható:

$$Q = A \left\{ C \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_j}{100} \right)^4 \right] + \alpha'_{sl} (t_s - t_j) \right\}, \quad (4.1.2)$$

ahol

C a kölcsönös sugárzási együttható, $W/(m^2 K^4)$;

α'_{SI}	konvekciós hőátadási tényező a sugárzó fűtőtest és a levegő között, $W/(m^2 K)$;
T_s, t_s	sugárzó felület hőmérséklete, K, illetve $^{\circ}C$;
t_i	az övező levegő hőmérséklete, $^{\circ}C$;
$T_s = \sqrt[4]{\sum \Phi_{Sj} T_j^4}$	az ún. sugárzási hőmérséklet, amelynek hatása hőleadás szempontjából egyenértékű az övező felületeken fennálló T_j hőmérséklet hatásával, K;
j	index az övező felületek sorszáma.

A (4.1.2) még a

$$\frac{Q}{A} = \dot{q} = \alpha'_{SI} (t_s - t_s) + \alpha'_{SI} (t_s - t_i) = \alpha_{SI} (t_s - t_i) \quad (4.1.3)$$

alakban is írható. Ebben az összefüggésben α_{SI} a fűtőtestnek a fűtendő környezet felé néző oldaláról érvényesülő teljes hőleadási tényezője a helyiség t_i érzett (vagy eredő) hőmérsékletéhez viszonyítva:

$$\alpha'_S = bC = c \frac{\left(\frac{T_s}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_s}{100}\right)^4}{t_s - t_s} [W/(m^2 K)], \quad (4.1.4)$$

végül

$$t_i = 0,46t_1 + 0,54t_s \text{ } ^{\circ}C \quad (4.1.5)$$

a helyiség érzett (vagy eredő) hőmérséklete, amit belső hőmérsékletnek is hívunk. A t_i hőmérsékletéhez viszonyítva így a hőátadási tényező

$$\alpha_{Si} = \alpha'_s \frac{t_s - t_s}{t_s - t_i} + \alpha'_{SI} \frac{t_s - t_i}{t_s - t_i} \quad (4.1.6)$$

alakban írható fel. Az

$$\alpha_S = \alpha'_S \frac{t_s - t_s}{t_s - t_i} \quad (4.1.7/a)$$

és

$$\alpha_{SI} = \alpha'_{SI} \frac{t_s - t_i}{t_s - t_i} \quad (4.1.7/b)$$

jelöléssel a hőátadási tényező

$$\alpha_{Si} = \alpha_S + \alpha_{SI} \quad (4.1.8)$$

formát nyer. Erre az értelmezésre és írásmódra annál is inkább jogunk van, mert a hőközlés mérésekor akkor járunk el helyesen, ha pl. a Missenard-féle gömbhőmérőt használjuk, amely a $t_i = t_c$ érzett hőmérsékletet méri, s ehhez képest adjuk meg a hőközlést. Így a fűtött tér felé irányuló fajlagos hőleadást a

$$\dot{q}_{Si} = \frac{Q}{A} = \alpha_{Si} (t_s - t_i) \quad (4.1.9)$$

összefüggéssel fejezhetjük ki.

Ez elsősorban arra az esetre vonatkozik, amikor a fűteni szándékolt környezet felé csak a fűtőtest egyik oldala irányul.

Gyakran a fűtőtest másik oldalának hőleadása is hasznos, ezért a hőszükséglet és a fűtőfelület megállapításakor mindkét oldal hőleadását figyelembe kell venni. A sugárzó fűtőtest ellentétes oldaláról érvényesülő hőátadási tényezőt a α_{Se} -vel fogjuk jelölni, míg

$$\alpha_{S\delta} = \alpha_{Si} + \alpha_{Se} \quad (4.1.10)$$

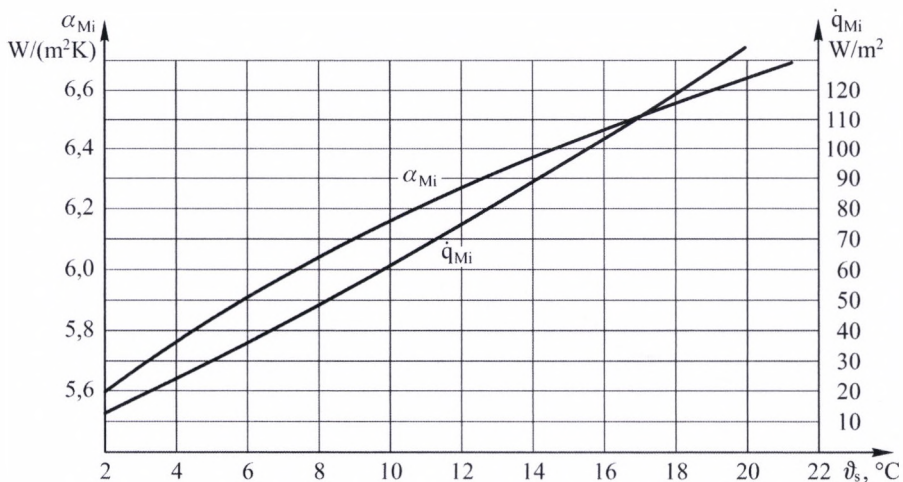
a fűtőtest teljes – összesített – hőátadási tényezője. Gyakran mind a két oldali hőleadás a fűteni szándékolt tér fűtésére szolgál, ilyenkor az $\alpha_{S\delta}$ megállapítása lesz célunk.

4.1.2.2. A különböző helyzetű és megoldású sugárzó fűtőtestek hőleadása

Az egyértelműség kedvéért a továbbiakban az α és q indexében a fűtőtestre utaló nagy betűt használunk.

4.1.2.3. Teli mennyezet fűtött felületének az alatta levő környezetbe irányuló hőátadása

Ebben az esetben a hőátadási tényező és az átadott hő betűjelének indexében a mennyezetre utaló M betűt alkalmazzuk. Így



4.1.2. ábra. Teli mennyezet hőátadási tényezője (α_{Mi}) és a hőközlés ($\dot{q}_{Mi}$) a ϑ_s túlhőmérséklet függvényében

$$\alpha_{Mi} = bC + 0,64\sqrt[4]{t_s - t_i} = bC + 0,64\sqrt[4]{\vartheta_s},$$

$$C=4,83 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}). \quad (4.1.11)$$

Az α_{Mi} értékét a 4.1.2. ábrán feltüntetett görbe adja a $\vartheta_s = t_s - t_i$ túlhőmérséklet függvényében. Az ábrán feltüntettük a felületegységről óránként lefelé átható hőmennyiséget, azaz a

$$\dot{q}_{Mi} = \alpha_{Mi} \vartheta_s \text{ [W}/(\text{m}^2\text{K})] \quad (4.1.12)$$

értékeket.

4.1.2.4. Sáv alakú fűtőtest hőátadási tényezője mennyezetről

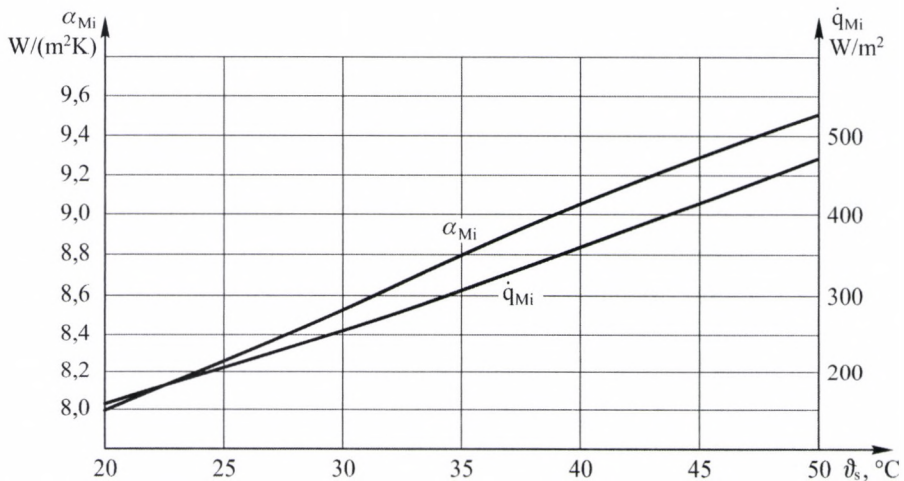
Ez az előzőtől a konvekciós hőleadás nagyságában különbözik. Ez utóbbi értéke

$$\alpha_{Mi} = 1,28 \sqrt[4]{\vartheta_s} \text{ [W}/(\text{m}^2\text{K})]. \quad (4.1.13)$$

Ezzel a fűtött tér felé irányuló teljes hőátadási tényező:

$$\alpha_{Mi} = bC + 1,28 \sqrt[4]{\vartheta_s} \text{ [W}/(\text{m}^2\text{K})]. \quad (4.1.14)$$

A viszonylag keskeny ($\leq 1 \text{ m}$) szélességű sávokon lényegesen nagyobb túlhőmérsékletet engedhetünk meg, mint a teli mennyezeten. Az α_{Mi} tényezőket és q_{Mi} értékeket ebben az esetben a 4.1.3. ábra mutatja be.



4.1.3. ábra. Sávós mennyezefűtőtest hőátadási tényezője és hőközlése ϑ_s túlhőmérsékelt függvényében

4.1.2.5. Padlóban elhelyezett fűtőtest fölfelé irányuló hőközlése

Általában a padló teljes felületét kihasználjuk fűtőtest gyanánt. Ez esetben a konvekciós tényező még kedvezőbben alakul, viszont a hőmérséklet csak kivételes esetekben (uszodákban, ritkán használt nagy helyiségekben) lehet nagyobb, mint 28 °C. (A padló indexe P.) A konvekciós hőátadási tényező:

$$\alpha_{Pi} = 2,675 \sqrt[4]{\vartheta_S} \quad [\text{W}/(\text{m}^2\text{K})]. \quad (4.1.15)$$

A teljes α_{Pc} hőátadási tényező (az e indexet általában a felfelé, vagy a helyiségből kifelé irányuló hőközlésre használjuk):

$$\alpha_{Pc} = bC + 2,675 \sqrt[4]{\vartheta_S}. \quad (4.1.16)$$

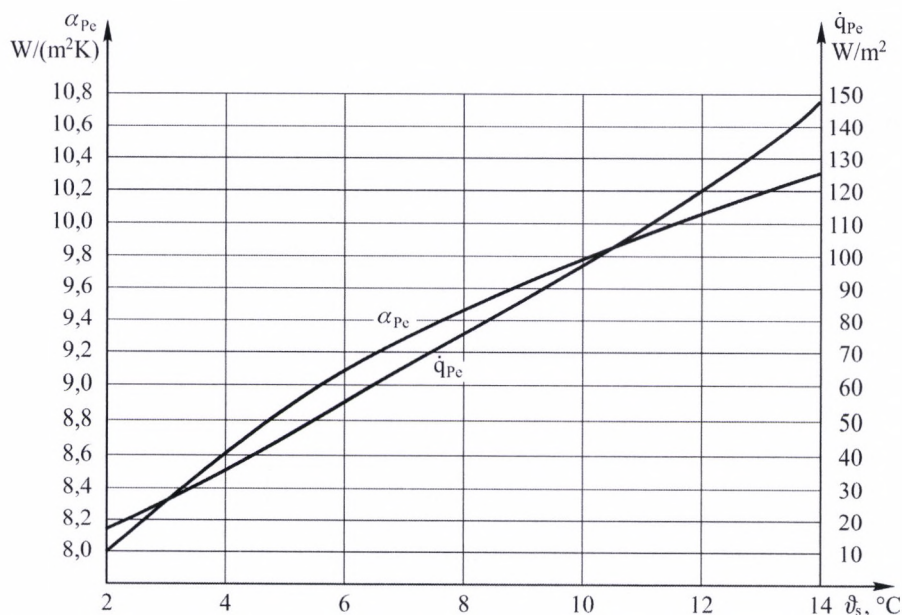
Az átadott hő a

$$\dot{q}_{Pc} = \alpha_{Pc} (t_{Pc} - t_i) = \alpha_{Pc} \vartheta_S \quad (4.1.17)$$

összefüggéssel fejezhető ki. Az α_{Pc} és a $\dot{q}_{Pc}$ értékei az α_s függvényében a 4.1.4. ábrából vehető ki.

Ha a fűtőtestet akár a mennyezetbe, akár a padlósík alá helyezzük el, hőt mindkét oldal felé lead. Ez esetben a teljes hőleadás:

$$\dot{q}_\delta = \dot{q}_{Mi} + \dot{q}_{Pc} = \alpha_{Mi} \vartheta_{Si} + \vartheta_{Pc} \alpha_{Sc} \quad [\text{W}/\text{m}^2]. \quad (4.1.18)$$



4.1.4. ábra. Padlófűtőtest hőátadási tényezője és hőközlése ϑ_S túlhőmérsékelt függvényében

Az α_{Mi} tényezőket és $\dot{q}_{pc}$ értékeket a 4.1.4. ábra mutatja be.

A felületeken kialakuló hőmérsékletek számítására a 4.2. pontban térünk vissza.

4.1.2.6. Függőleges síkban elhelyezett fűtőtestek hőleadása

A fűtőtest mind válaszfalba, mind külső falba, illetve azok felületére elhelyezhető. A fal indexe F. Ez esetben is jelentős a konvekciós hőátadás tényezője. Az i indexszel jelölt oldal felé

$$\alpha_{Fi} = bC + 1,975\sqrt[4]{\vartheta_{Si}}, \quad (4.1.19)$$

és az átadott hő:

$$\dot{q}_{Fi} = \alpha_{Fi} \vartheta_{Si}. \quad (4.1.20)$$

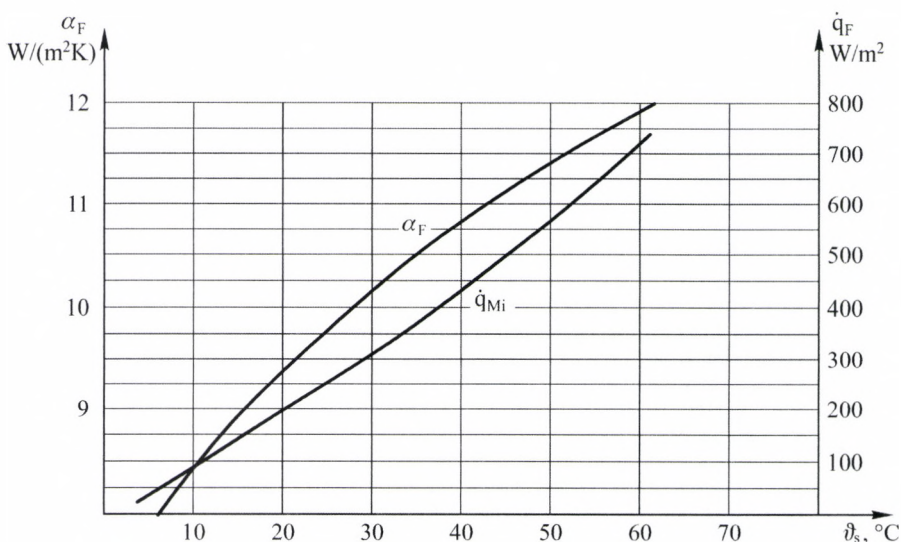
A test (fal) másik határoló, e indexszel jelölt síkjáról leadott hő:

$$\dot{q}_{Fe} = \alpha_{Fe} (\vartheta_{Se} - \vartheta_e). \quad (4.1.21)$$

Ebben a test ellentétes határoló síkját övező közeg túlhőmérsékletére érvényes, hogy

$$\vartheta_e \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0.$$

Az α_F és $\dot{q}_F$ értékeit a 4.1.5. ábra tartalmazza. Ha a külső falat vagy mennyezetet használjuk fűtőtest gyanánt, úgy ez a kifelé közölt hőmennyiség a hőszük-



4.1.5. ábra. Falfűtőtest hőátadási tényezője és hőközlése a ϑ_s túlhőmérséklet függvényében

ségletet jelentősen növelheti. Ennek csökkentésére e határoló szerkezeteket jó hőszigeteléssel látják el.

4.1.2.7. Sugárzó ernyő hőátadása

A sugárzó ernyő mindkét oldaláról a fűtendő helyiségnek adja át hőjét. Az ernyőket általában felső (a fűtendő helyiség mennyezete felé fordított) oldalukon szigetelik. Ha a szigetelést nem alkalmazzák, hőközlésük lényegesen nő, de növekszik a helyiség hővesztése. Szigetetlen ernyő hőátadási tényezői:

- a fűtött tér felé

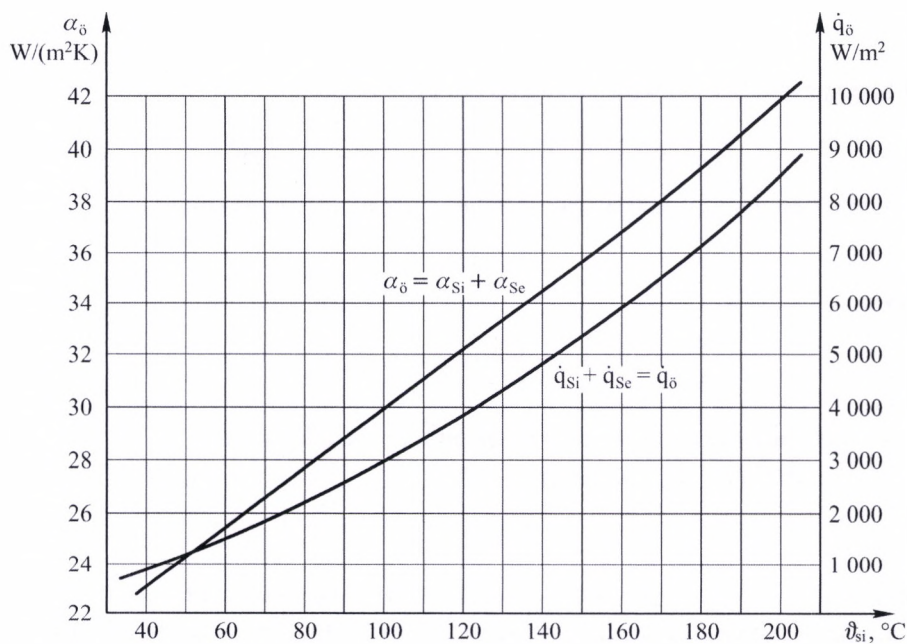
$$\alpha_{Si} = b_i C + 1,28 \sqrt{\vartheta_{Si}} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})], \quad (4.1.22/a)$$

- a fűtött térrel ellentétes oldalra (a mennyezet felé)

$$\alpha_{Se} = b_e C + 3,26 \sqrt{\vartheta_{Se}} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})]. \quad (4.1.22/b)$$

Így az összesített hőátadási tényező (4.1.6. ábra):

$$\alpha_{\bar{o}} = \alpha_{Si} + \alpha_{Se}. \quad (4.1.23)$$



4.1.6. ábra. Szigetelés nélküli sugárzó ernyő összetett hőátadási tényezője és hőközlése a ϑ_{Si} túlhőmérséklet függvényében

Az ernyő két oldalán levő hőmérsékletet a jelenlegi konstrukciós megoldás esetében gyakorlatilag azonosnak vehetjük, azaz

$$\alpha_{Si} \approx \alpha_{Se} \approx \alpha_S.$$

A hőátadás nagysága:

$$\dot{q}_{S\delta} = \dot{q}_{Si} + \dot{q}_{Se} = \vartheta_S (\alpha_{Si} + \alpha_{Se}) = \vartheta_S \alpha_{\delta} [\text{W/m}^2]. \quad (4.1.24)$$

Szigetelt ernyők hőátadására is érvényesek a (4.1.22a) és (4.1.22b) összefüggések, ebben az esetben azonban

$$\vartheta_{Si} > \vartheta_{Se}.$$

s e viszonyok mértéke a szigetelés hatásosságától függ, és a

$$\frac{\vartheta_{Se}}{\vartheta_{Si}} = \rho \quad (4.1.25)$$

összefüggéssel fejezhető ki.

Célszerű technológiai okokból a különböző esetekben azonos vastagságú szigetelést választani. Ha a szigetelés hővezetési tényezője $\lambda_{szig}=0,05 \text{ W/(m K)}$ és vastagsága $\delta_{szig} = 0,04 \text{ m}$, úgy a hővezetési ellenállás $0,8 \text{ m K/W}$.

A hőátbocsátási tényező az ernyő síkjáról a szigetelőrétegen át:

$$\kappa_c = \frac{1}{\frac{\delta_{szig}}{\lambda_{szig}} + \frac{1}{\alpha_{Se}}} [\text{W/(m}^2\text{K)}]. \quad (4.1.26)$$

Ebben az α_{Se} hőátbocsátási tényező értéke:

$$\alpha_{Se} = b_e C + 3,26 \sqrt{\vartheta_{Se}} = b_e C + 3,26 \sqrt{\rho \vartheta_{Si}}. \quad (4.1.27)$$

Ezzel az értékkel κ_c már a stationer hővezetésre érvényes ismert

$$\kappa_c \vartheta_{Si} = \alpha_{Se} \vartheta_{Se},$$

illetve

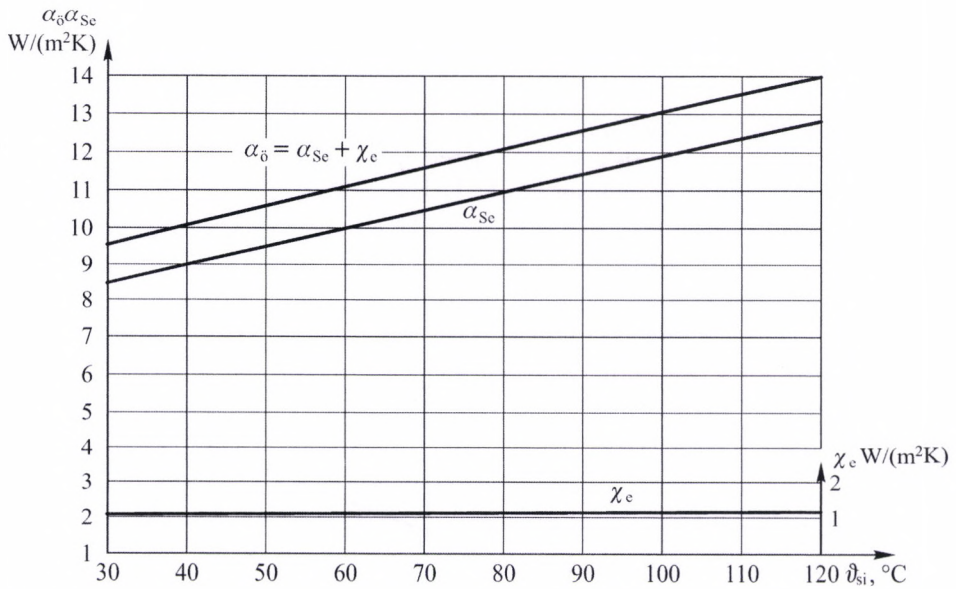
$$\kappa_c = \frac{\vartheta_{Se}}{\vartheta_{Si}} \alpha_{Se} = \rho \alpha_{Se} \quad (4.1.28)$$

összefüggés alapján a ϑ_{Si} függvényében a diagramba felvihető.

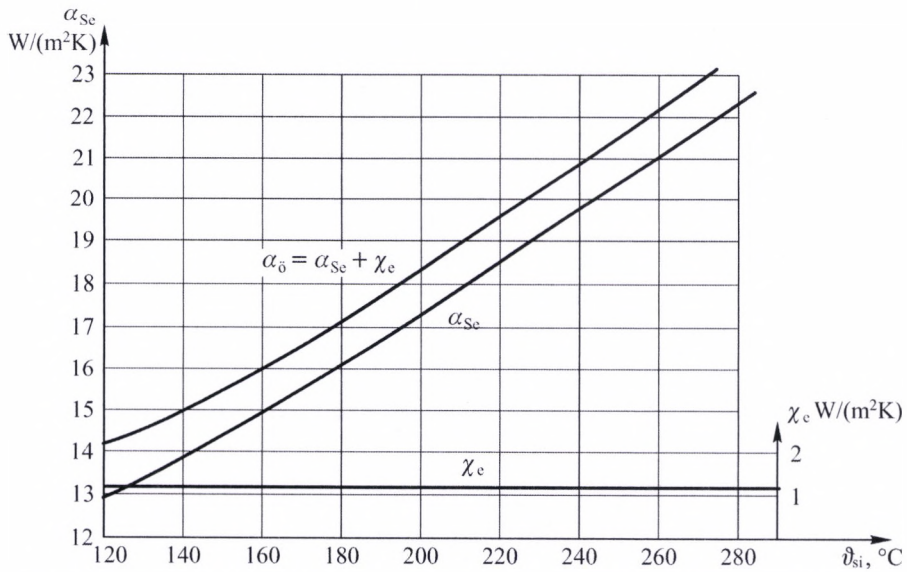
A 4.1.7. ábrán az α_{Se} , κ_c és az

$$\alpha_{\delta} = \alpha_{Se} + \kappa_c$$

értékei szerepelnek a ϑ_{Si} függvényében $30\text{-}120 \text{ }^{\circ}\text{C}$ túlhőmérsékletek között, míg a 4.1.8. ábrán ugyanazok az értékek, de $120\text{-}280 \text{ }^{\circ}\text{C}$ túlhőmérsékleti tartományban. Az előző tartományba esnek a víz- és gőzfűtésű ernyők, az utóbbiba az olajfűtésű ernyők.



4.1.7. ábra. Szigetelt sugárzó ernyő hőátadási tényezői ϑ_{Si} túlhőmérséklet függvényében ($\vartheta_{Si} = 30 - 120$ °C)



4.1.8. ábra. Szigetelt sugárzó ernyő hőátadási tényezői a ϑ_{Si} túlhőmérséklet függvényében ($\vartheta_{Si} = 120 - 280$ °C)

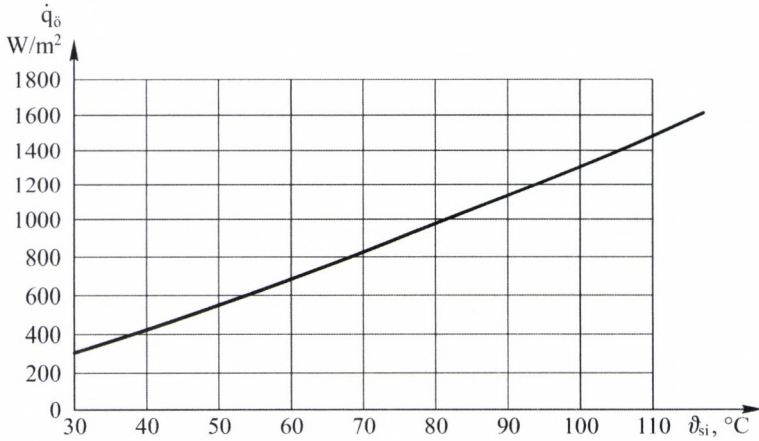
Az állandó χ_e hőátbocsátási tényező felvételével a p viszonszám így 0,09 és 0,11 közé esik, azaz

$$\frac{\vartheta_{\text{Se}}}{\vartheta_{\text{Si}}} = 0,09 - 0,11.$$

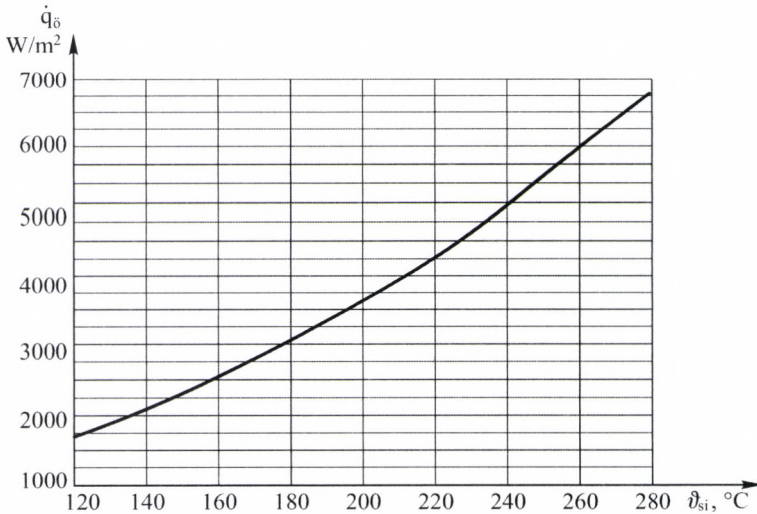
A szigetelt ernyők összhőleadása így a

$$\dot{q}_{\bar{o}} = \dot{q}_{\text{Si}} + \dot{q}_{\text{Se}} = \vartheta_{\text{Si}} (\alpha_{\text{Si}} + \kappa_{\text{e}}) \quad (4.1.29)$$

összefüggéssel fejezhető ki (4.1.9. és 4.1.10. ábrák).



4.1.9. ábra. Szigetelt sugárzó ernyő hőközlése a ϑ_{Si} túlhőmérséklet függvényében ($\vartheta_{\text{Si}} = 30 - 110 \text{ }^{\circ}\text{C}$)



4.1.10. ábra. Szigetelt sugárzó ernyő hőközlése a ϑ_{Si} túlhőmérséklet függvényében ($\vartheta_{\text{Si}} = 120 - 280 \text{ }^{\circ}\text{C}$)

4.1.2.8. Függőleges síkban a munkazóna felett elhelyezett sugárzó ernyő hőleadása

Újabbán a sugárzó ernyőket a címben említett mód szerint is elhelyezik. Újszerű az ernyő kialakítása is, amennyiben a hőhordozó közeget szállító csőrendszert nem párhuzamosan kapcsolt regiszter, hanem csőkígyó formájában vezetik és hegesztéssel kapcsolják a sugárzólaphoz.

Ez a két oldal közepes hőmérséklete között bizonyos – de az eddigi mérések szerint – nem jelentékeny eltérést okoz.

Ha ismeretes a sugárzó ernyő csővel borított és az ellenkező oldalán levő közepes hőmérséklet, akkor a hőátadási tényezőket elvileg azonos összefüggéssel számoljuk, mint a 4.1.2.5. pontban közölt (4.1.19). Különbség az, hogy az ernyő legfeljebb 1 m függőleges magassága következtében nagyobb konvekciós hőátadással számolhatunk. Így a csővel borított oldalon

$$\alpha_{Si} = b_i C + 2,56 \sqrt[4]{\vartheta_{Si}}, \quad (4.1.30/a)$$

míg az ellentétes oldalon

$$\alpha_{Se} = b_e C + 2,56 \sqrt[4]{\vartheta_{Se}}. \quad (4.1.30/b)$$

A nagyobb hőátadási tényező révén adódó (a látszólagosnál ugyan kisebb) előnnyel szemben áll a helyiség nagyobb hővesztesége.

4.1.2.9. Infravörös (nagy hőmérsékletű) sugárzók hőleadása

E fűtőtestek felületi hőmérséklete kivitelüktől függően nagy hőmérséklet-intervallumban helyezkedhet el. Az elektromos üzeműeké 400-2000 °C, a gázüzeműeké 850-950 °C között.

Az elektromos üzemű fűtőtestek teljesítményét a gyártó cégek megadják. A készülékek névleges teljesítménye 70-80 %-ban sugárzás útján, a fennmaradó rész a burkolat felmelegítése révén sugárzásban és konvekcióban, valamint közvetlen konvekcióban jelentkezik.

A gázsugárzó fűtőtestek a gáz fűtőértékének 50%-át sugárzó hő alakjában szolgáltatják. Ez városi gáz esetén kb. $t_s = 900$ °C felületi hőmérsékletet idéz elő. Ennek fajlagos hőközlése kb.:

$$\dot{q} = C \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_i}{100} \right)^4 \right] = 4,83(18928 - 72) = 91300 \text{ W/m}^2. \quad (4.1.31)$$

Ez jó közelítéssel

$$V_{\text{gáz}} = 50 \text{ m}^3 / (\text{m}^2 \text{h})$$

városigáz-fogyasztásnak felel meg.

4.2. Kis felületi hőmérsékletű sugárzófűtések

E kategóriába sorolható sugárzófűtések két nagy csoportra oszthatók:

- a kis felületi hőmérsékletű, nagy hőtehetetlenségű sugárzófűtésekre és
- a kis felületi hőmérsékletű, kis hőtehetetlenségű sugárzófűtésekre.

Mindkettő méretezési elve azonos, tehát a betonba ágyazott csővezeték méretezési módszere alkalmazható a kis hőtehetetlenségű sugárzófűtésekre is, amelyek vakolatba ágyazottak, vagy vakolattal ellátottak. Kivételt képeznek méretezés szempontjából a fémkazettás kis hőtehetetlenségű sugárzófűtések, amelyek – bár felületi hőmérsékletük $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál alacsonyabb – szerkezetileg ide sorolhatók, de méretezésükre a sugárzó ernyőkre érvényes, és a 4.3. pontban bemutatott módszer alkalmas.

A betonrétegbe ágyazott csővezetékek méretezési módszere egyébként két fő csoportra osztható:

- a hőmérséklet és hőközlés kérdései betonrétegbe ágyazott fűtőcsőigények esetében a lineáris hővezetés törvényszerűségeinek figyelembevételével,
- betonrétegbe ágyazott csősor hőközlése x-y irányú (síkbeli) hővezetés esetén.

Mivel e könyv elsősorban elméleti kérdésekkel foglalkozik, a konstrukciós megoldásokat nem mutatjuk be, azok megtalálhatók a szakirodalomban, illetve prospektusokban.

4.2.1. Méretezés a lineáris hővezetés alapján

A sugárzó fűtőtestek konstrukciójából következik, hogy a hőleadó felületen képzelt koordináta-rendszer koordinátái szerint változó hőmérséklettel kell számolnunk. Ha elfogadjuk a csőigénybe be- és onnan kilépő fűtőközeg hőfokának számtani közepét „fűtővíz-hőmérsékletnek”, akkor a hőleadó testben vagy testen elhelyezett csőszálak közötti hőmérséklet-változást és az ebből adódó közepes hőmérsékletet kell meghatároznunk.

Ez a számítás alapelve, függetlenül attól, hogy betonba, vakolatba vagy fémlemezrel kapcsolatban lévő fűtőcsőről van szó, bár a számítás menetében ezen eltérések bizonyos változást okoznak.

A különböző fűtőtest típusok méretezésének tárgyalásakor látni fogjuk, hogy a fűtőfelület közepes hőmérséklete szinte kivétel nélkül előre megválasztható, s így feladatunk ennek alapján a fűtőtest konstrukciójának és a fűtőközeg hőmérsékletének meghatározása. A következőkben tehát adott közepes felületi hőmérséklet esetén az egyes konstrukciós megoldásokban az 1 menettávolságot, s ebben elsősorban a csőfalon beálló hőmérsékletet határozzuk meg.

4.2.1.1. A hőmérséklet-megoszlás és a közepes hőmérséklet számítása állandósult állapotban

A megoldás igen vékony, $i = 0,001 - 0,002$ m és jó hővezetési tényezőjű, $\lambda \approx 50 - 100$ W/(m K) lemezekben szolgáltat szinte teljesen pontos eredményt, tehát olyan esetben, ha az ún. Bi-tényező értéke

$$Bi = h \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\delta}{2} = \frac{10}{100} \cdot 0,001 = 1 \cdot 10^{-4} \quad (4.2.1)$$

nagyságrendű. Az összehasonlító számítások azonban azt is mutatják, hogy a kétirányú hővezetés figyelembevételével nyert eredményektől a Bi-tényező lényegesen nagyobb értéke esetén a lineáris hővezetésen alapuló számítások csak a gyakorlatban megengedhető kis mértékben térnek el. Az érvényességi határt

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\delta}{2} \approx \frac{10}{1} \cdot 0,03 \approx 0,3 \quad (4.2.2)$$

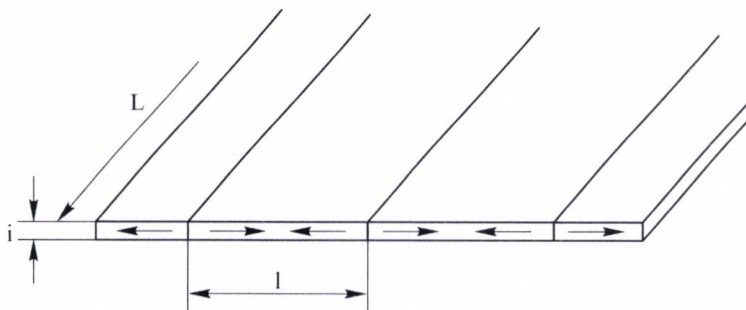
nagyságban szabhatjuk meg. Természetesen itt a

$$Bi = 0,3$$

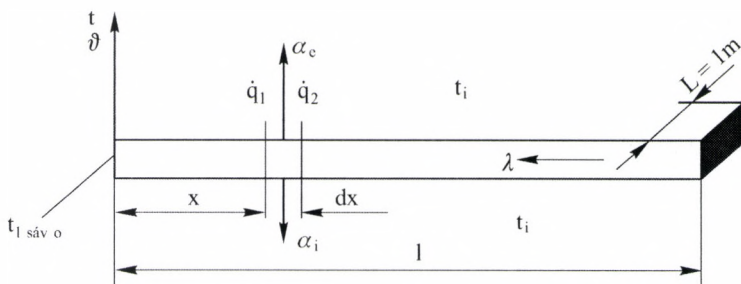
értékben nem a benne szereplő tényezők egyedi értékei fontosak. A 0,3-t ezúttal betonrétegre ágyazott csőígyó figyelembevételével számítottuk.

A hőmérséklet-megoszlás számítása érdekében a következőket tételezzük fel:

- a síkfelületű fűtőtest méretei igen nagyok, vastagsága $i \approx 0,07 - 0,08$ m;
- a fűtőtest anyaga beton, amely homogén és izotropnak tekinthető;
- a betonrétegben egymástól l távolságban fűtőcsövek helyezkednek el, amelyeket első közelítésben i szélességű, de elenyésző vastagságú, $t_{lsáv0}$ hőmérsékletű pántoknak tekintünk (4.2.1. ábra);
- a betonréteget mindkét síkja felől t_i hőmérsékletű környezet övezi (4.2.2. ábra);
- a betonréteg hővezetési tényezője λ , hőátadási tényezője fölfelé α_e , lefelé α_i ;



4.2.1. ábra. Sugárzó fűtőtest elvi szemléltető vázlata



4.2.2. ábra. Sugárzó fűtőtest hőmérséklet-megoszlásának számítása

f) a hőáramlás az $x = l/2$ -ben képzeltek szimmetriasíktól jobbra és balra egymásnak tükörképe (analóg a két végén beágyazott tartóval).

Az $x = 0$ síkban elhelyezkedő i szélességű, $t_{lsáv}$ hőmérsékletű pánttól x távolságban lévő Li keresztmetszeten vezetés útján átáramló hő:

$$\dot{q}_1 = -Li\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_x, \quad (4.2.3)$$

illetve a $\vartheta = t - t_i$ túlhőmérséklettel kifejezve

$$\dot{q}_1 = -Li\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_x. \quad (4.2.4)$$

A következőkben $L = 1$ m széles síkra vizsgáljuk a hőmérséklet-megoszlást, így

$$\dot{q}_1 = -i\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_x. \quad (4.2.5)$$

Az $x+dx$ távolságban lévő 2 keresztmetszeten

$$\dot{q}_2 = -i\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x+dx} \quad (4.2.6)$$

hő áramlik át. A kettő különbsége az $l \, dx$ felületről felfelé és lefelé átadott hő, azaz

$$\dot{q}_1 - \dot{q}_2 = \vartheta dx (\alpha_i + \alpha_e) = -i\lambda \left[\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x+dx} \right], \quad (4.2.7)$$

amiből rendezés után nyerjük, hogy

$$\vartheta \frac{\alpha_i + \alpha_e}{i\lambda} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_x}{dx} = \frac{d^2 \vartheta}{dx^2}, \quad (4.2.8)$$

mivel az egyenlet jobb oldalán az első differenciálhányadosok differenciálhányadosának lime, azaz a második differenciálhányados szerepel. A ϑ együtthatójára vezessük be az

$$\frac{\alpha_i + \alpha_e}{i\lambda} = m^2 \quad (4.2.9)$$

jelölést, minthogy ez a hányados csak pozitív szám lehet. Így a

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - m^2\vartheta = 0 \quad (4.2.10)$$

ismert differenciálegyenletet nyerjük. Ennek céljainknak megfelelő egyik általános megoldása:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (4.2.11)$$

A C_1 és C_2 állandókat a határfeltételekből számíthatjuk, ugyanis ha $x = 0$, akkor

$$\vartheta = \vartheta_{lsáv0}, \quad (4.2.12)$$

és a szimmetrikus hőáramlás miatt az $x = l/2$ középvonalon hő nem áramlik át, azaz ha $x = \frac{l}{2}$, akkor

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\frac{l}{2}} = 0. \quad (4.2.13)$$

Az első feltételből

$$\vartheta = \vartheta_{lsáv0} = C_1 + C_2, \quad (4.2.14)$$

s ebből

$$C_1 = \vartheta_{lsáv0} - C_2, \quad (4.2.15)$$

A második feltételből

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\frac{l}{2}} = (C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx})_{x=\frac{l}{2}} = 0, \quad (4.2.16)$$

illetve (4.2.15) alapján

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\frac{l}{2}} = m[(\vartheta_{lsáv0} - C_2)e^{mx} - C_2 e^{-mx}]_{x=\frac{l}{2}} = 0, \quad (4.2.17)$$

s így

$$\vartheta_{lsáv0} (e^{mx})_{x=\frac{l}{2}} = C_2 (e^{mx} + e^{-mx})_{x=\frac{l}{2}}, \quad (4.2.18)$$

amiből

$$C_2 = \frac{\vartheta_{lsáv0} e^{-\frac{ml}{2}}}{e^{\frac{ml}{2}} + e^{-\frac{ml}{2}}}. \quad (4.2.19)$$

Viszont

$$C_1 = \vartheta_{\text{lsáv}0} - C_2 = \vartheta_{\text{lsáv}0} \left(1 - \frac{e^{\frac{ml}{2}}}{e^{\frac{ml}{2}} + e^{-\frac{ml}{2}}} \right), \quad (4.2.20)$$

illetve

$$C_1 = \frac{\vartheta_{\text{lsáv}0} e^{-\frac{ml}{2}}}{\frac{ml}{e^{\frac{ml}{2}} + e^{-\frac{ml}{2}}}}. \quad (4.2.21)$$

Behelyettesítve a (4.2.11)-be kapjuk, hogy

$$\vartheta = \frac{\vartheta_{\text{lsáv}0} e^{-\frac{ml}{2}}}{\frac{ml}{e^{\frac{ml}{2}} + e^{-\frac{ml}{2}}}} e^{mx} + \frac{\vartheta_{\text{lsáv}0} e^{\frac{ml}{2}}}{\frac{ml}{e^{\frac{ml}{2}} + e^{-\frac{ml}{2}}}} e^{-mx}, \quad (4.2.22)$$

azaz

$$\vartheta = \vartheta_{\text{lsáv}0} \frac{e^{m\left(\frac{1}{2}-x\right)} + e^{-m\left(\frac{1}{2}-x\right)}}{\frac{ml}{e^{\frac{ml}{2}} + e^{-\frac{ml}{2}}}}. \quad (4.2.23)$$

Felhasználva az

$$e^x + e^{-x} = \text{ch } x$$

azonosságot, (4.2.23) az alábbi alakban írható:

$$\vartheta = \vartheta_{\text{lsáv}0} \frac{\text{ch } m\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\text{ch } \frac{ml}{2}}. \quad (4.2.24)$$

A kapott eredmény a határfeltételeket kielégíti, mert

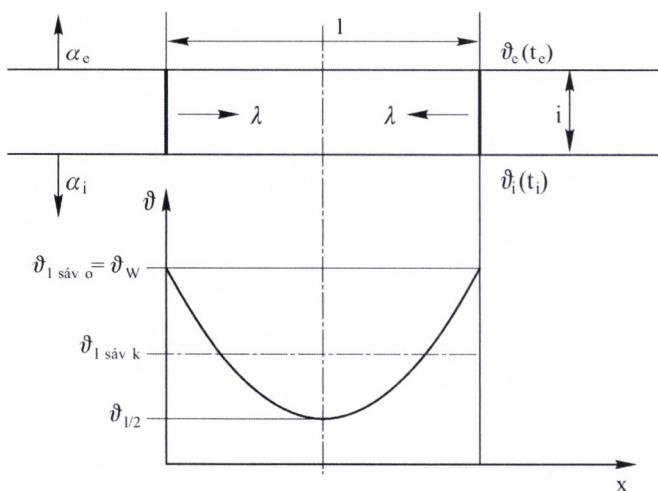
$$\text{ha } x = 0, \quad \text{akkor} \quad \vartheta = \vartheta_{\text{lsáv}0}, \quad (4.2.25)$$

ha $x = 1/2$, akkor

$$\vartheta_{\text{lsáv}0} \frac{d}{dx} \frac{\text{ch } m\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\text{ch } \frac{ml}{2}} = \frac{\vartheta_{\text{lsáv}0}}{\text{ch } \frac{ml}{2}} m \text{sh } m\left(\frac{1}{2}-x\right), \quad (4.2.26)$$

és

$$-\frac{\vartheta_{\text{lsáv}0}}{\text{ch } \frac{ml}{2}} m \text{sh } 0 = 0. \quad (4.2.27)$$



4.2.3. ábra. A hőmérséklet megoszlása sugárzó fűtőtest felületén

Tehát az összefüggés hüen írja le, hogy a középvonalon hő nem hatol át. A hőmérséklet-megoszlást az l szélességű sávon a 4.2.3. ábra mutatja, amely természetesen többszörösen ismétlődik. Az ábrát egyben a középhőmérséklet kiszámítására is felhasználjuk.

Vizsgálatunkban a hőátadási tényezőket konstansnak, azaz az l szélességű sávon változatlanak tekintjük és középtértékükkel helyettesítjük. Így

$$\alpha_i(x) = \alpha_i \text{ és } \alpha_e(x) = \alpha_e.$$

Ezzel a feltevéssel az l szélességű sávon leadott hő

$$\dot{q} = \int_0^l [\alpha_i(x) + \alpha_e(x)] \theta dx = (\alpha_i + \alpha_e) \int_0^l \theta dx = l \theta_{lsáv k} (\alpha_i + \alpha_e) \quad (4.2.28)$$

formában írható. Ebből

$$\theta_{lsáv k} = \frac{1}{l} \int_0^l \theta dx, \quad (4.2.29)$$

illetve

$$\theta_{lsáv k} = \frac{\theta_{lsáv 0}}{\text{ch} \frac{ml}{2}} \int_0^l \text{ch} m \left(\frac{1}{2} - x \right) dx, \quad (4.2.30)$$

$$\theta_{lsáv k} = \frac{\theta_{lsáv 0}}{\text{ch} \frac{ml}{2}} \left[-\frac{1}{m} \text{sh} m \left(\frac{1}{2} - x \right) \right], \quad (4.2.31/a)$$

$$\vartheta_{\text{lsávk}} = \frac{\vartheta_{\text{lsáv0}}}{\text{ch} \frac{ml}{2}} \left[-\frac{1}{m} \text{sh} \left(-m \frac{1}{2} \right) - \text{sh} m \frac{1}{2} \right]. \quad (4.2.31/b)$$

Felhasználva, hogy

$$\text{sh}(-x) = -\text{sh} x \quad \text{és} \quad \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x} = \text{th} x,$$

$$\vartheta_{\text{lsávk}} = \frac{\vartheta_{\text{lsáv0}}}{\text{ch} \frac{ml}{2}} \frac{2 \text{sh} \frac{ml}{2}}{ml} = \vartheta_{\text{lsáv0}} \frac{\text{th} \frac{ml}{2}}{\frac{ml}{2}}. \quad (4.2.32)$$

Még mielőtt a (4.2.32) összefüggésből a következtetéseket levonnók, rámutatunk arra, hogy a közepes hőmérsékletet abból a megfontolásból is le lehet vezetni, hogy a $\vartheta_{\text{lsáv0}}$ hőmérsékletű pántból $+x$ és $-x$ irányban a betonrétegbe vezetéssel jutó hő egyenlő az l szélességű sáv hőleadásával, azaz

$$-i\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = \frac{1}{2} \vartheta_{\text{lsávk}} (\alpha_i + \alpha_e), \quad (4.2.33)$$

amiből a műveletek elvégzése után szintén a

$$\vartheta_{\text{lsávk}} = \vartheta_{\text{lsáv0}} \frac{\text{th} \frac{ml}{2}}{\frac{ml}{2}} \quad (4.2.34)$$

összefüggést nyerjük. Ez arra mutat, hogy a közepes hőmérséklet annál nagyobb, mennél nagyobb a $\vartheta_{\text{lsáv0}}$ hőmérséklet, de mennél kisebb az

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_i + \alpha_e}{i\lambda}} = \frac{\text{lm}}{2}, \quad (4.2.35)$$

mivel

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\text{th} x}{x} = 1,$$

ami fizikailag azonnal érthető, hiszen ha a $\vartheta_{\text{lsáv0}}$ hőmérsékletű pántok egymáshoz tapadóan volnának a betonrétegben (tehát $l = 0$ volna), akkor a réteg közepes hőmérséklete szintén, $\vartheta_{\text{lsáv0}}$ lenne. Viszont ha az l igen nagy, sőt a végtelen felé közeledne, akkor

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\text{th} x}{x} = 0$$

miatt a közepes túlhőmérséklet szintén $\vartheta_{\text{lsávk}} = 0$ -vá válnék.

Ez a vizsgálat tehát egymagában nem dönti el, hogy vajon nagy, vagy kis l távolságban érdemes-e a mostanáig „pántnak” nevezett hőforrásokat elhelyezni.

Rögtön hű képet kapunk erről, ha azt a követelményt tűzzük ki, hogy egy pántból (ami helyett a továbbiakban majd csövet helyezünk) minél több hőt nyerhesünk. $\vartheta_{lsávk}$ közepes hőmérsékletű betonréteg hőközlése ugyanis

$$\dot{q} = \dot{q}_l + \dot{q}_c = \vartheta_{lsávk} (\alpha_i + \alpha_c) \quad (4.2.36)$$

egységnyi hosszúságú pánt l szélességű sávja közvetíti ezt a hőt, azaz

$$\dot{q} = l\dot{q} = l\vartheta_{lsávk} (\alpha_i + \alpha_c) \quad (4.2.37)$$

Kifejtve $\vartheta_{lsávk}$ értékét nyerjük, hogy

$$\dot{q}_l = l\vartheta_{lsáv0} \frac{\frac{ml}{2}}{\frac{ml}{2}} (\alpha_i + \alpha_c), \quad (4.2.38)$$

illetve

$$\dot{q}_l = 2\vartheta_{lsáv0} \sqrt{\alpha_i + \alpha_c} \frac{ml}{2}. \quad (4.2.39)$$

Ebből az összefüggésből most már világosan látható, hogy l m beépített pántból akkor kapjuk a legtöbb hőt, ha

- minél nagyobb $\vartheta_{lsáv0}$ túlhőmérséklete van a pántnak;
- a pánt i szélessége minél nagyobb;
- a réteg λ hővezetési tényezője minél nagyobb;
- s az $ml/2$ tényező, illetve azt a legjobban befolyásoló l menettávolság minél nagyobb.

Ezek a felismerések útmutatók, de teljes egészükben nem vihetők át a betonrétegbe ágyazott csőígyók esetére, mivel a lineáris hővezetés mellett a használt tételek a $Bi \leq 0,3$ értékből következően csak kb. 0,06 - 0,08 m rétegvastagságig közelítik meg a valóságot, és mivel a beépített cső átmérője $d < i$, és természetesen nem pánt alakú. Mégis sok tanulsággal szolgálnak a (4.2.32) és (4.2.39) összefüggések, mivel elsősorban arra mutatnak rá, hogy minél nagyobb hőmérsékletű hőhordozó közeget kell alkalmaznunk, tehát mindenütt, ahol a hőmérséklet korlátozott, nem kapunk jó anyagihasználást (pl. a mennyezetfűtésben).

4.2.1.2. A hőmérséklet-megoszlás i vastagságú betonrétegbe ágyazott csőikgyó esetén

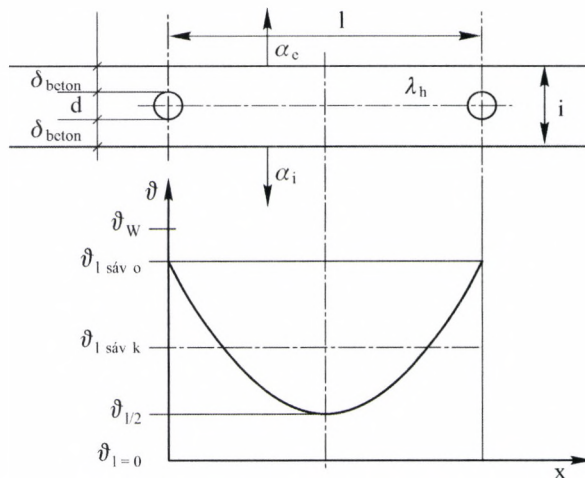
A 4.2.1.1. pontban levezetett összefüggéseket alkalmazhatjuk arra a valóságos esetre, amikor az i vastagságú betonrétegbe $d < i$ átmérőjű csöveket ágyazunk be (4.2.4. ábra). Ennek számítására több elméletet ismerünk, amelyek alapján számított értékek jelentősen eltérnek egymástól és a pontosabb síkbeli hővezetéssel nyert eredményektől. A következőkben ismertetett eljárás – miként azt a példák is igazolják – $Bi = 0,3$ értékig igen jó közelítést nyújt. Eszerint a csövet olyan i vastagságú pántszerű hőforrással helyettesítjük, amelynek hőmérséklete megfelel a cső szimmetriavonala alatti szálaban a következő számítással nyert értéknek. Jelöljük a csőfal túlhőmérsékletét ϑ_w -vel, a réteg hővezetési tényezőjét pedig λ_{beton} -nal. Ezzel

$$(\vartheta_w - \vartheta_{l_{\text{sáv } 0}}) \frac{\lambda_{\text{beton}}}{\delta_{\text{beton}}} = \vartheta_{l_{\text{sáv } 0}} \alpha_i, \quad (4.2.40)$$

ami azt fejezi ki, hogy a δ_{beton} vastagságú, a csövet fedő betonréteggel a cső alatti szálabra vezetett hő azonos a szálabról hőátadással távozó hővel. Ebből

$$\vartheta_{l_{\text{sáv } 0}} = \frac{\vartheta_w \frac{\lambda_{\text{beton}}}{\delta_{\text{beton}}}}{\alpha_i + \frac{\lambda_{\text{beton}}}{\delta_{\text{beton}}}}, \quad (4.2.41)$$

illetve a tört számlálóját és nevezőjét $\lambda_{\text{beton}}/\delta_{\text{beton}}$ -val osztva:



4.2.4. ábra. A hőmérséklet megoszlása betonrétegbe ágyazott csősor esetén

$$\vartheta_{l_{sáv}0} = \vartheta_w \frac{1}{1 + \alpha_i \frac{\delta_{beton}}{\lambda_{beton}}} \quad (4.2.42)$$

Ezt az értéket fogjuk a továbbiakban az i vastagságú lapon az $l = 0$ vonalon (pánton) érvényesülő hőmérsékletnek tekinteni. Ezzel a hőmérséklet megosztására és a közepes hőmérsékletre a $\vartheta'_{lsáv0}$ értékek helyettesítésével, a (4.2.24) és (4.2.32) összefüggések szerint nyerjük, hogy

$$\vartheta = \vartheta_{l_{sáv}0} = \frac{ch m \left(\frac{1}{2} - x \right)}{ch \frac{ml}{2}} = \frac{\vartheta_w}{1 + \alpha_i \frac{\delta_{beton}}{\lambda_{beton}}} \frac{ch m \left(\frac{1}{2} - x \right)}{ch \frac{ml}{2}}, \quad (4.2.43)$$

míg

$$\vartheta_{l_{sáv}k} = \vartheta_{l_{sáv}0} \frac{th \frac{ml}{2}}{\frac{ml}{2}} \frac{\vartheta_w th \frac{ml}{2}}{\left(1 + \alpha_i \frac{\delta_{beton}}{\lambda_{beton}} \right) \frac{ml}{2}} \quad (4.2.44)$$

Végül az l szélességű ($L=1$ m hosszú) sávra, azaz a beépített cső hosszegységére jutó hőközlést ezzel a

$$\dot{q}_l = 2\vartheta_{l_{sáv}0} \sqrt{(\alpha_i + \alpha_e) i \lambda_{beton}} th \frac{ml}{2} = \frac{2\vartheta_w}{1 + \alpha_i \frac{\delta_{beton}}{\lambda_{beton}}} \sqrt{(\alpha_i + \alpha_e) i \lambda_{beton}} th \frac{ml}{2} \quad (4.2.45)$$

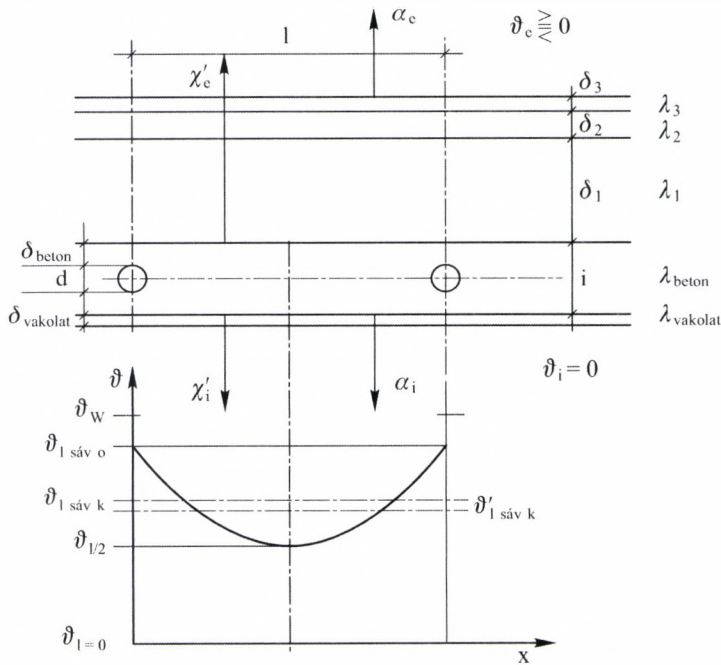
összefüggés adja. Ezekben magától értetődően

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_i + \alpha_e}{i \lambda_{beton}}} [m^{-1}]. \quad (4.2.46)$$

4.2.1.3. Több rétegű szerkezet i vastagságú betonrétegébe ágyazott csőígyó hőközlése

Vizsgáljuk e problémát a valóságos kivitelnek megfelelő 4.2.5. ábrán.

A hőközlési folyamatot most is az előző esetek analógiájára fogjuk fel. Ezek szerint a hővezetés ezúttal is a betonrétegben megy végbe, s annak két oldaláról a hő κ'_i és κ'_e hőátbocsátási tényezővel jellemezhető hőközlés útján jut a környezetbe. Így összefüggéseink változatlanul érvényesek, de most a betonréteg hőmérsékletét megkülönböztetés céljából vesszövel jelöljük, azaz a cső szimmetriatengelye alatt a betonrész túlhőmérsékletét $\vartheta'_{lsáv0}$ -vel, a közepes hőmérsékletet $\vartheta'_{lsáv}$ -vel, a hőmérsékletet ϑ' -vel.



4.2.5. ábra. A hőmérséklet megoszlása a mennyezet betonrétegébe ágyazott csősor esetén

Most tehát

$$m = \sqrt{\frac{\kappa'_i + \kappa'_e}{i \lambda_{\text{beton}}}}, \quad (4.2.47)$$

$$\theta'_{l_{\text{sáv o}}} = \frac{\theta_w}{1 + \kappa'_i \frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}}}, \quad (4.2.48)$$

$$\theta'_{l_{\text{sáv k}}} = \frac{\theta_w \text{th} \frac{ml}{2}}{\left(1 + \kappa'_i \frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}}\right) \frac{ml}{2}}. \quad (4.2.49)$$

A vakolt betonréteg környezetében tartózkodásra végül is nem a betonrétegen, hanem az azt fedő vakolaton, tehát a felületen kialakuló hőmérsékletek döntők. Ezek számítása az előzőek alapján már nem ütközik nehézségbe.

A stacionárius hővezetést leíró összefüggések alapján ugyanis érvényes, hogy

$$\partial' \kappa'_i = \partial \alpha_i, \quad (4.2.50)$$

$$\vartheta'_{l_{sáv}0} \kappa'_i = \vartheta_{l_{sáv}0} \alpha_i, \quad (4.2.51)$$

$$\vartheta'_{l_{sáv}k} \kappa'_i = \vartheta_{l_{sáv}k} \alpha_i. \quad (4.2.52)$$

Így

$$\vartheta_{l_{sáv}k} = \vartheta'_{l_{sáv}k} \frac{\kappa'_i}{\alpha'_i} \quad (4.2.53)$$

A (4.2.52) felhasználásával

$$\vartheta_{l_{sáv}k} = \frac{\vartheta_w \frac{\kappa'_i}{\alpha'_i} \text{th} \frac{ml}{2}}{\left(1 + \kappa'_i \frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}}\right) \frac{ml}{2}}. \quad (4.2.54)$$

Osztvá a tört számlálóját és nevezőjét κ'_i/α'_i -vel, és felhasználva, hogy

$$\frac{1}{\kappa'_i} = \frac{1}{\alpha'_i} + \frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}}, \quad (4.2.55)$$

kapjuk, hogy

$$\vartheta_{l_{sáv}k} = \frac{\vartheta_w \text{th} \frac{ml}{2}}{\left[1 + \alpha_i \left(\frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}} + \frac{\delta_{\text{vakolat}}}{\lambda_{\text{vakolat}}}\right)\right] \frac{ml}{2}}, \quad (4.2.56)$$

ahol δ_{vakolat} a vakolat vastagsága, m; λ_{vakolat} a vakolat hővezetési tényezője, W/(m K).

A levezetett összefüggések teljes egészében érvényesek padló- vagy falfűtésre is.

Ha mennyezetre alkalmazzuk őket, akkor a közepes hőmérsékletre a ϑ_M , falfűtés esetén a ϑ_F ; padlófűtés esetén a ϑ_p jelölést alkalmazzuk. Az i indexszel az elsősorban fűteni szándékolt tér felé mutató hőmérsékletet, illetve hőáramot, e -vel az ellenkező oldalra mutatót jelöljük majd.

Természetesen az m tényezőben szereplő hőközlési tényezőket értelemszerűleg a (4.2.48)-ben közölt hőátadási tényezők felhasználásával kell számításba venni.

4.2.1.4. A mennyezettűtés

Itt a hőközlés elsősorban a mennyezet alatt elhelyezkedő környezetben megy végbe. A közepes hőmérséklet:

$$\vartheta_{Mi} = \frac{\vartheta_w \text{th} \frac{ml}{2}}{\left[1 + \alpha_{Mi} \left(\frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}} + \frac{\delta_{\text{vakolat}}}{\lambda_{\text{vakolat}}}\right)\right] \frac{ml}{2}}, \quad (4.2.57)$$

$$m = \sqrt{\frac{\kappa'_{Mi} + \kappa'_{Mc}}{i\lambda_{\text{beton}}}}. \quad (4.2.58)$$

A közölt hő lefelé

$$\dot{q}_{Mi} = \alpha_{Mi} \vartheta_{Mi} = \kappa'_i \vartheta'_{Mi}. \quad (4.2.59)$$

A fűtött betonréteg felett a padló hőmérsékletére stacionárius hőáramlás esetén, figyelembe véve, hogy a betonrétegben csak hosszirányban van hőmérséklet-változás (s így $\vartheta_{Mc} \alpha_{Mc} = \vartheta'_{Mi} \kappa'_{Mc}$) adódik, hogy

$$\vartheta_{Mc} = \vartheta'_{Mi} \frac{\kappa'_{Mc}}{\alpha_{Mc}}, \quad (4.2.60)$$

$$\vartheta_{Mc} = \vartheta'_{Mi} \frac{\alpha_{Mi}}{\alpha_{Mc}} \frac{\kappa'_{Mc}}{\kappa'_{Mi}}. \quad (4.2.61)$$

A közölt hő

$$\dot{q}_{Mc} = \vartheta_{Mc} \alpha_{Mc} = \vartheta'_{Mi} \kappa'_{Mc} \quad (4.2.62)$$

alapján számítható. A lefelé mutató hőátbocsátási tényező

$$\kappa'_{Mi} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{Mi}} + \frac{\delta_{\text{vakolat}}}{\lambda_{\text{vakolat}}}}, \quad (4.2.63)$$

míg a felfelé mutató

$$\kappa'_{Mc} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{Mc}} + \sum_n \frac{\delta_n}{\lambda_n}}. \quad (4.2.64)$$

4.2.1.5. A padlófűtés

A közepes hőmérséklet a padló felületén

$$\vartheta_{Pi} = \frac{\vartheta_w \text{ th } \frac{ml}{2}}{\left(1 + \alpha_{Pi} \sum_n \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right) \frac{ml}{2}}, \quad (4.2.65)$$

ahol $\sum_n \delta_n / \lambda_n$ -ben a csőkégyőt tartalmazó betonréteg feletti rétegek hővezetési ellenállása és

$$m = \sqrt{\frac{\kappa'_{Pi} + \kappa'_{Pc}}{i\lambda_{beton}}} . \quad (4.2.66)$$

A hőleadás az elsősorban fűtendő környezet felé, tehát a padlóról felfelé

$$\dot{q}_{Pi} = \kappa'_{Pi} \vartheta'_{Pi} = \alpha_{Pi} \vartheta_{Pi} , \quad (4.2.67)$$

lefelé

$$\dot{q}_{Pc} = \kappa'_{Pc} \vartheta'_{Pc} = \alpha_{Pc} \vartheta_{Pc} , \quad (4.2.68)$$

amiből egyszerűen:

$$\vartheta_{Pc} = \vartheta'_{Pi} \frac{\kappa'_{Pc}}{\alpha_{Pc}} \quad (4.2.69)$$

A betonréteg közepes túlhőmérséklete:

$$\vartheta_P = \frac{\vartheta_w \text{th} \frac{ml}{2}}{\left(1 + \alpha_{Pi} \frac{\delta_{beton}}{\lambda_{beton}}\right) \frac{ml}{2}} . \quad (4.2.70)$$

Elvileg tehát a mennyezet- és a padlófűtés között különbség nincs. Kedvezőbb a padlófűtés szempontjából az, hogy a fűteni szándékolt tér felé, tehát a padlóról felfelé irányuló hőátadási tényező lényegesen nagyobb, de a padló felületi hőmérséklete tetemesen kisebb – legfeljebb 27-29 °C – lehet. Ez alól csak azok a padlók alkotnak kivételt, amelyeken a helyiség hivatásánál fogva meztláb járnak (pl. uszodák, zuhanyozók stb.). A kis felületi hőmérséklet a beépített csőkígyó jó kihasználását nem teszi lehetővé, mert a lehető egyenletes hőmérséklet-megoszlás sem nagy ϑ_w csőfalhőmérsékletet, sem nagy menettávolságot (lásd (4.2.43) összefüggést) nem enged meg.

A mennyezetfűtésben sem kielégítő a beépített csőanyag kihasználása, ezért próbálkoztak a kombinált padló-mennyezet fűtéssel. Ez hőtani szempontból nem kifogásolható, sőt jó, de a lépéshangok elég erősen áthallatszanak, s ezért elsősorban ott alkalmazhatók, ahol ez nem feltétlenül hátrány. Ilyen megoldást a síkbeli hővezetési összefüggések alkalmazásakor fogunk bemutatni, mivel a kétoldali, tehát kombinált padló-mennyezet-fűtés szerinti kihasználásakor a betonréteg vastagabb, mint akár tisztán mennyezet-, akár padlófűtés esetén, s így a lineáris hővezetés összefüggései már nem adnak pontos eredményt.

Példaképpen, ha a padló közvetlenül a talajon nyugszik, akkor a talaj felé instacionárius hővezetéssel van dolgunk. Ezt azzal az esettel közelítjük meg legjobban, amelyben adott padlófelszíni hőmérséklet esetén a padló különböző rétegeiben a hőmérsékletet, illetve a felszínről a padlóba behatoló hőáramot számítjuk. A padlósíkról a padlóba irányuló hőáramot az idő függvényében, azaz a beáramlástól kezdődő τ -adik időpontban a

$$\dot{q}(\sigma\tau) = \frac{-2\lambda\vartheta_c}{\sqrt{\pi a\tau}} = \frac{-2\vartheta_c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda c\rho} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (4.2.71)$$

összefüggés fejezi ki. $\dot{q}(\sigma\tau)$ nemcsak az $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ befolyása miatt változik, hanem a ϑ_c (tehát a padlófelszínen $\tau = 0$ időpontban uralkodó) túlhőmérséklet változása miatt is. Ezt azonban kiküszöbölhetjük azzal, hogy a padlóba irányuló hőt a

$$\dot{q} = -\kappa'_c \vartheta_c \quad (4.2.72)$$

összefüggéssel fejezzük ki, így

$$\kappa'_c = \sqrt{\frac{\lambda c\rho}{\pi\tau}} \quad (4.2.73)$$

értékben adódik. Nyilván a biztonság felé teszünk lépést, ha τ -nak kis értéket választunk, például $\tau = 250$ h-t, ami kb. két hétnek felel meg.

$\lambda = 1,2$ W/(m K), $c = 0,25$ W/(kg K), $\rho = 2000$ kg/m³ értékekkel számolva a (4.2.73) összefüggés

$$\kappa'_c = \frac{1,2 \cdot 0,25 \cdot 2000}{3,14 \cdot 250} = 0,85 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

képzetes hőátbocsátási tényezőt ad.

Tehát a talajon nyugvó padlófűtés bizonyos idő eltelte után kedvezőbb helyzetben van, mintha a fűtőtest emeletközi padlóban volna.

4.2.1.6. A falfűtés

Régebben elsősorban oldalfalfűtésként alkalmazták, s inkább csak kiegészítő fűtésként jött szóba a külső falban. Ha 6-8 cm vastagságig oldalfűtés gyanánt szerelték, akkor számításában a lineáris hővezetés összefüggései kielégítő pontosságot nyújtottak.

Nagy előnye, hogy a beépített csővezeték két oldal felé egyenlő mértékben ad le hőt, és hogy a hőmérséklet tekintetében nem vagyunk korlátozottak.

A jellemző hőmérsékletek így a következő összefüggésekkel fejezhetők ki. A közepes hőmérséklet:

$$\vartheta_{Fi} = \vartheta_{Fc} = \frac{\vartheta_w \text{ th } \frac{ml}{2}}{\left[1 + \alpha_{Fi} \left(\frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}} + \frac{\delta_{\text{vakolat}}}{\lambda_{\text{vakolat}}} \right) \right] \frac{ml}{2}}, \quad (4.2.74)$$

$$m = \sqrt{\frac{\kappa'_{Fi} + \kappa'_{Fc}}{i\lambda_{\text{beton}}}}, \quad (4.2.75)$$

ahol $\kappa'_{Fi} = \kappa'_{Fe}$, minthogy $\alpha'_{Fi} = \alpha'_{Fe}$. Ez utóbbiak értéke jelentősen nagyobb, mint mennyezetfűtés esetén. A hőközlés:

$$\dot{q}_{Fi} = \dot{q}_{Fe} = \vartheta'_{Fi} \kappa'_{Fi} = \vartheta'_{Fe} \kappa'_{Fe}, \quad (4.2.76/a)$$

$$\dot{q}_{Fi} = \vartheta_{Fi} \alpha_{Fi} = \vartheta_{Fe} \alpha_{Fe}. \quad (4.2.76/b)$$

A csőkihasználás mértéke:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_{li} + \dot{q}_{le} = 4 \frac{\vartheta_w}{1 + \alpha_i \left(\frac{\delta_{\text{beton}}}{\lambda_{\text{beton}}} + \frac{\delta_{\text{vakolat}}}{\lambda_{\text{vakolat}}} \right)} \sqrt{(\kappa'_{Fi} + \kappa'_{Fe}) i \lambda_{\text{beton}}} \operatorname{th} \frac{m l}{2}. \quad (4.2.77)$$

Hátránya ennek a megoldásnak, hogy a lakás bebútorozása gyakran akadályozza a teljes hőközlést, sőt bizonyos esetekben a benttartózkodó kényszerű közelsége (p1. ágy) esetében a hőérzet sem megfelelő.

Így belső válaszfalban elsősorban kiegészítő fűtésként jön tekintetbe és főként a falnak, a bútorok feletti sávjaiban.

Másik igen fontos és érdekes alkalmazási lehetősége a homlokzati (külső) falpanelben van. Minthogy itt a csőtartó betonréteg vastagsága $i = 0,08$ m, ezért ebben az esetben síkbeli hővezetés összefüggéseinek alkalmazhatók.

4.2.1.7. A hőmérséklet-megoszlás és közepes hőleadás betonrétegbe ágyazott csőkígyó esetén, ha $\vartheta_i \neq \vartheta_c$

Ez az eset akkor áll elő, ha a csőkígyót a külső környezettel határos épületszerkezetbe kell elhelyezni, így elsősorban a legfelső mennyezetbe vagy homlokzati, illetve egyéb külső falba. De ugyanez a helyzet áll elő, ha a csőkígyót tartalmazó fal fűtetlen, esetleg nagyobb hőmérsékletű térrel határos. Erre az esetre az irodalomban elég bonyolult, több tagból álló kifejezések állnak rendelkezésre, jóllehet egy egyszerű transzformáció felhasználásával a 4.2.2.-4.2.4. pontokban bemutatott összefüggések alkalmazhatók.

Ha a betonréteg közepes túlhőmérséklete ϑ_k , a fűteni szándékolt oldalon $\vartheta_i = 0$, a betonréteg ellentétes oldalán $\vartheta_c \neq 0$ túlhőmérséklet uralkodik, akkor a hőközlés a fűtött környezetbe

$$\dot{q}_i = \kappa'_i \vartheta_k, \quad (4.2.78a)$$

a másik oldalra

$$\dot{q}_i = \kappa'_c (\vartheta_k - \vartheta_c). \quad (4.2.78b)$$

Hőáramlási szempontból teljesen egyenértékű, hogy ez a hőmennyiség a $\vartheta_k - \vartheta_c$ hőmérséklet-különbség hatására a κ'_c hőátbocsátási tényezőjű rétegen áramlik át, vagy ϑ_k hatására egy κ_c^* hőátbocsátási rétegen, amelyre érvényes, hogy

$$\kappa'_c (\vartheta_k - \vartheta_c) = \kappa_c^* \vartheta_k. \quad (4.2.79)$$

Ebből

$$\kappa_c^* = \kappa'_c \frac{\vartheta_k - \vartheta_c}{\vartheta_k}. \quad (4.2.80)$$

Ha tehát összefüggéseinkben $\vartheta_c \neq \vartheta_i$ esetén κ'_c helyébe κ_c^* értéket helyettesítjük be, így az új helyzetnek megfelelő helyes eredményeket kapjuk.

4.2.2. Betonrétegbe ágyazott csősor hőközlése x-y (síkbeli) hővezetés esetén

4.2.2.1. A hőmérséklet-megoszlás és közepes hőmérséklet állandósult állapotban

Említettük, hogy a lineáris hővezetés összefüggéseit csak bizonyos megszorítással alkalmazhatjuk a hőmérsékletviszonyok tanulmányozásához. A határt $Bi < 0,3$ -nál szabtuk meg, ami a levegőt tartalmazó környezet felé legfeljebb $i = 7-8$ cm vastag betonréteget enged meg.

Ha ennél vastagabb réteggel van dolgunk, akkor a síkbeli stacionárius hővezetés összefüggéseit kell alkalmazni.

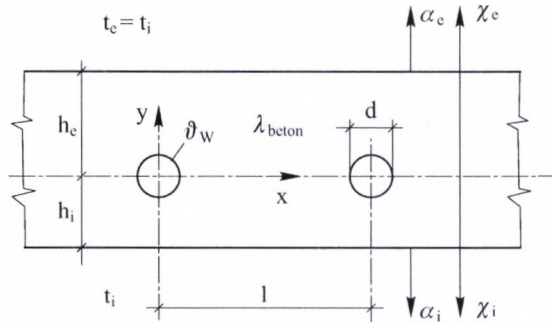
A matematikai modell felállításához tételezzük azt fel, hogy

- a réteg x - y irányú kiterjedése olyan nagy, hogy a széleken végbemenő hőáramlást figyelmen kívül hagyhatjuk;
- a beágyazott igen nagy számú cső menettávolsága 1, hossza szintén igen nagy;
- a hővezetési tényező, λ_{beton} konstans, az anyag homogén és izotrop szerkezetű;
- koordináta-rendszerünket úgy helyezzük el, hogy a csőtengelyek síkjában a tengelyekre merőleges az x tengely, míg az y tengely a síkra merőleges, az origó valamelyik csőkeresztmetszet középpontjában van;
- feltételezzük továbbá, hogy a csőfelületen a túlhőmérséklet konstans és egyenlő ϑ_w -vel;
- a csőveken kívül a $h = h_i + h_c$ vastagságú sík rétegben a hőmérséklet-eloszlást kielégíti a

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (4.2.81)$$

Laplace-féle differenciálegyenlet, és az $y = h_c$ és $y = h_i$ síkon vezetéssel átáramló hő hőátadással távozik a környezetbe, azaz (4.2.6. ábra) az $y = h_c$ síkra

$$-\lambda_{\text{beton}} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=h_c} = \alpha_c \vartheta_{h_c}, \quad (4.2.81)$$



4.2.6. ábra. Elvi ábra az x - y irányú (síkbeli) hővezetés figyelembevételével



4.2.7. ábra. A hőforrások és nyelők elhelyezkedése

és az $y = -h_i$ síkra

$$+\lambda_{\text{beton}} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=-h_i} = \alpha_i \vartheta_{h_i} \quad (4.2.83)$$

összefüggés érvényes.

Keressük azokat a függvényeket, amely egy részről a differenciálegyenletnek és a határfeltételeknek, más részről a fizikai szemléletnek is megfelelnek. A megoldást Faxen úgy képzelte, hogy a csősorral szemben $b > h_i$ (vagy $b > h_e$) síkban teljesen azonos csősor van, amelyet úgy foghatunk fel, mint az eredeti csősorban képzelt hőforrások nyelőit (4.2.7. ábra). Az

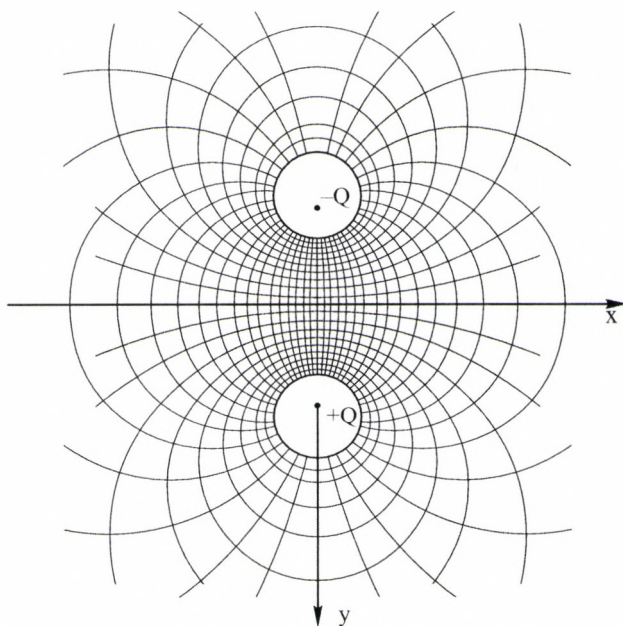
$$\ln \sqrt{(x - nl)^2 + y^2} \quad (4.2.84)$$

partikuláris megoldás olyan görbesort ír le (egyszerűség kedvéért $n = 0$ -nál), amelyek pontjai a forrástól

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

távolságban vannak. E görbék a hőáramlás irányát, a reájuk merőleges görbék az egyenhőmérsékletű vonalak mértani helyeit adják.

A hőmérsékletvonalak és az izotermikus trajektóriák megoszlását a 4.2.8. ábra érzékelteti.



4.2.8. ábra. A hőforrás és nyelők közötti betonrétegben a hőáramlás és az izotermikus hőmérsékletek vonalai (Sorin után)

Természetesen a differenciálegyenlet parciális megoldása az

$$\ln \sqrt{(x - nl)^2 + (y + b)^2}, \quad (4.2.85)$$

valamint az ezek szuperpozíciójából származtatható

$$F(x, y) = \frac{A}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(x - nl)^2 + (y + b)^2}{(x - nl)^2 + y^2} \quad (4.2.86)$$

függvény is, ahol b a nyelők távolsága. A nyelő és forrás szerepe elvben felcserélhető. A függvény az x irányban periódikusan ismétlődő, periódusa l , az y tengelyre pedig szimmetrikus görbéket ír le.

A megoldás olyan matematikai ismereteket tételez fel, amelyek e könyv kerekeit meghaladják.

A hőmérséklet-megoszlás számítását Rydberg és Huber a

$$\frac{\vartheta_c}{\pi A} = -G_1 y - |y| - G_2 + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{S} \left[e^{-\frac{2\pi sy}{l}} + g(S)_c e^{-\frac{2\pi sy}{l}} + g(S)_l e^{+\frac{2\pi sy}{l}} \right] \cos \frac{2\pi sx}{l} \quad (4.2.87)$$

formában adja meg. Ez

$$\vartheta \frac{1}{\pi A} = F(x, y) \quad (4.2.88)$$

szerint a $h = h_c + h_i$ vastagságú réteg bármely (x, y) -nal jellemzett pontjában a megadott határfeltételek fennforgása esetében szolgáltatja $\alpha = t - t_i$ túlhőmérsékletet.

A megoldást Rydberg és Huber svéd kutatók hozták számításra alkalmas formába. Mi az ő eljárásuktól némileg eltérve igyekszünk még egyszerűbb számítási módot kidolgozni.

E kifejezésben lévő jelzések értelmezése céljából tekintsük újból a 4.2.6. ábrát. A (4.2.87) összefüggésben

$$G_1 = \frac{\kappa_c - \kappa_i}{\kappa_c + \kappa_i} \quad (4.2.89)$$

$$G_2 = \frac{-2\lambda_{\text{beton}}}{\kappa_c - \kappa_i} \quad (4.2.90)$$

Faxen A számítására a

$$\frac{\vartheta_w}{A} = \ln \frac{1}{d\tau} - G_2 \frac{\pi}{1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{g(s)_c + g(s)_i}{s} \quad (4.2.91)$$

összefüggést, míg $g(s)_c$ és $g(s)_i$ értékeinek számítására az alábbi feltételi egyenletrendszert adta meg:

$$\left(\frac{\alpha_c}{\lambda_{\text{beton}}} - \frac{2\pi s}{1} \right) [1 - g(s)_c] e^{-\frac{4\pi s h_c}{1}} + \left(\frac{\alpha_c}{\lambda_{\text{beton}}} + \frac{2\pi s}{1} \right) g(s)_i = 0, \quad (4.2.92)$$

$$\left(\frac{\alpha_i}{\lambda_{\text{beton}}} - \frac{2\pi s}{1} \right) [1 + g(s)_i] e^{-\frac{4\pi s h_i}{1}} + \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_{\text{beton}}} + \frac{2\pi s}{1} \right) g(s)_c = 0. \quad (4.2.93)$$

A számítások egyszerűsítésére írjuk fel a (4.2.87)-et, az $y = 0$, azaz a csőtengegyeken átmenő abszcisszára dimenziómentes formában. Ekkor

$$\frac{\vartheta_{(y=0)}}{A} = -G_2 + \frac{\pi}{1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} [1 + g(s)_c + g(s)_i] \cos 2\pi s \frac{x}{1} \quad (4.2.94)$$

egyszerűbb összefüggést nyerjük. A stacionárius hővezetésre vonatkozó összefüggések szerint a határfeltételekre érvényes, hogy

$$\vartheta_{y=0} \kappa_c = \alpha_c \vartheta_{h_c}, \quad (4.2.95/a)$$

$$\vartheta_{y=0} \kappa_i = \alpha_i \vartheta_{h_i}, \quad (4.2.95/b)$$

azaz a $\vartheta_y = 0$ birtokában a ϑ_{h_c} és ϑ_{h_i} könnyen számíthatók. A (4.2.92) és (4.2.93)-at célszerű lesz h_c -vel, illetve h_i vel szorozni, miáltal ugyancsak dimenzió nélküli egyenleteket nyerünk, amelyekben a hővezetésben ismeretes

$$Bi_i = \frac{\alpha_i h_i}{\lambda_{\text{beton}}}$$

és

$$Bi_e = \frac{\alpha_e h_e}{\lambda_{\text{beton}}}$$

tagok jelennek meg, amelyekkel a leegyszerűsített számításban is találkozunk. Így a feltételi egyenletrendszer alakja:

$$\left(\frac{\alpha_e h_e}{\lambda_{\text{beton}}} - 2\pi s \frac{h_e}{l} \right) \left[1 - g(s)_e \right] e^{-4\pi s \frac{h_e}{l}} + \left(\frac{\alpha_e h_e}{\lambda_{\text{beton}}} + 2\pi s \frac{h_e}{l} \right) g(s)_i = 0, \quad (4.2.96)$$

$$\left(\frac{\alpha_i h_i}{\lambda_{\text{beton}}} - 2\pi s \frac{h_i}{l} \right) \left[1 - g(s)_i \right] e^{-4\pi s \frac{h_i}{l}} + \left(\frac{\alpha_i h_i}{\lambda_{\text{beton}}} + 2\pi s \frac{h_i}{l} \right) g(s)_e = 0. \quad (4.2.97)$$

Valamely adott esetre tehát ismert Bi_e és Bi_i dimenzió nélküli számok, valamint

$h_e/l = \eta_e$ és $h_i/l = \eta_i$ relatív koordináták függvényében. Pl. $s = 1$ -re az egyenletrendszer a következő alakot veszi fel:

$$(Bi_e - 2\pi\eta_e)(1 + g_{el})e^{-4\pi\eta_e} + (Bi_e - 2\pi\eta_e)g_{il} = 0, \quad (4.2.98)$$

$$(Bi_i - 2\pi\eta_i)(1 + g_{il})e^{-4\pi\eta_i} + (Bi_i - 2\pi\eta_i)g_{el} = 0, \quad (4.2.99)$$

amiből g_{el} és g_{il} (különösen számítógéppel) azonnal számítható. A gyakorlat azt mutatta, hogy elegendő, ha csak $s = 1, 2, 3$ -ra oldjuk meg az egyenletrendszert, mivel $s = 4$ -re már 0,0001 nagyságrendű eredményeket kapunk.

A számítást azonban a gyakorlat számára tovább kell egyszerűsíteniünk.

Részünkre ugyanis nem a hőmérséklet-eloszlás pontos értéke fontos, hanem a közepes hőmérsékletek ismerete. Ezt a (4.2.94)-ből és a középhőmérséklet ismert értelmezése alapján a

$$\frac{\vartheta_{(y=0)k}}{A} = \frac{1}{l} \int_0^l \left(-G_2 \frac{\pi}{l} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} [1 + g(s)_e + g(s)_i] \cos 2\pi s \frac{x}{l} \right) dx \quad (4.2.100)$$

egyenletből könnyen számíthatjuk. Ugyanis

$$\frac{\vartheta_{(y=0)k}}{A} = \left[\frac{1}{l} - G_2 \frac{\pi}{l} x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} [1 + g(s)_e + g(s)_i] \frac{1}{2\pi s} \sin 2\pi s \frac{x}{l} \right]_0^l, \quad (4.2.101)$$

amiből a határok helyettesítése után a második tag értéke zérus, s így

$$\frac{\vartheta_{(y=0)k}}{A} = -G_2 \frac{\pi}{l} . \quad (4.2.102)$$

Ezt az összefüggést összevetve az A értelmezésére bevezetett (4.2.91)-gyel nyerjük, hogy

$$\frac{\vartheta_{(y=0)k}}{\vartheta_w} = \frac{-G_2 \frac{\pi}{l}}{\ln \frac{1}{d\tau} - G_c \frac{\pi}{l} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} [g(s)_c + g(s)_i]} . \quad (4.2.103)$$

Ezzel kapcsolatot nyertünk az $y = 0$ csőtengelysíkban uralkodó, ránk nézve igen fontos közepes túlhőmérséklet, valamint a fűtőcső falának ϑ_w túlhőmérséklete között. Minthogy a $\vartheta_{(y=0)k}$ nagyságát a feladat adatai alapján ismerjük, így a megoldással célunkat is elértük.

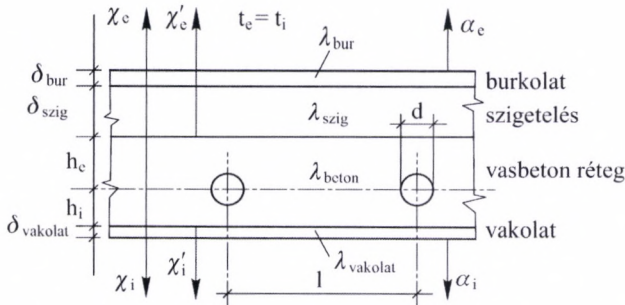
4.2.2.2. Hőmérséklet-megoszlás többretegű falban

Vizsgáljuk meg a gyakorlatban adódó tényleges esetet, amikor is a betonréteget a mennyezet- vagy falkonstrukció szerint egyéb rétegek burkolják (4.2.9. ábra).

Nem követünk el észrevehető hibát, ha ezt az esetet úgy tekintjük, hogy csak a betonrétegben megy végbe a síkbeli hővezetés, és a $\vartheta_{y=h_c}$ és $\vartheta_{y=h_i}$ fedősíkjáról a burkoló és kis hővezetési tényezőjű rétegeken keresztül már csak y irányú további hőterjedés van. Ebben az esetben a határfeltételek a

$$-\lambda \left(\frac{\delta \vartheta}{\delta y} \right)_{y=h_c} = \kappa'_c \vartheta_{h_c} , \quad (4.2.104/a)$$

$$+\lambda \left(\frac{\delta \vartheta}{\delta y} \right)_{y=h_i} = \kappa'_i \vartheta_{h_i} \quad (4.2.104/b)$$



4.2.9. ábra. Mennyezetkonstrukció a síkbeli hővezetés törvényszerűségei alapján hőmérséklet-megoszlás számításához

alakot vesznek fel, amelyekben az adott esetben

$$\kappa'_c = \frac{1}{\frac{\delta_{szig}}{\lambda_{szig}} + \frac{\delta_{bur}}{\lambda_{bur}} + \frac{1}{\alpha_c}} \quad (4.2.105/a)$$

és

$$\kappa'_i = \frac{1}{\frac{\delta_{vakolat}}{\lambda_{vakolat}} + \frac{1}{\alpha_i}} \quad (4.2.105/b)$$

A (4.2.96) és (4.2.97)-ben szereplő feltételi egyenletek pedig a következőképpen alakulnak:

$$\left(\frac{\kappa'_c h_c}{\lambda_{beton}} - 2\pi s \frac{h_c}{l} \right) [1 - g(s)_c] e^{-4\pi s \frac{h_c}{l}} + \left(\frac{\kappa'_c h_c}{\lambda_{beton}} + 2\pi s \frac{h_c}{l} \right) g(s)_i = 0 \quad (4.2.106)$$

és

$$\left(\frac{\kappa'_i h_i}{\lambda_{beton}} - 2\pi s \frac{h_i}{l} \right) [1 - g(s)_i] e^{-4\pi s \frac{h_i}{l}} + \left(\frac{\kappa'_i h_i}{\lambda_{beton}} + 2\pi s \frac{h_i}{l} \right) g(s)_c = 0 \quad (4.2.107)$$

Ezekből a feltételi egyenletekből számítógép segítségével (sőt az előadódó néhány tipikus esetre anélkül is!) az $y(s)_c$, $g(s)_c$ és $g(s)_i$ ezzel a (4.2.103)-ban lévő

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} [g(s)_c + g(s)_i]$$

$s = 3 - 4$ -re könnyen és gyorsan számítható. Rydberg és Huber azonban ehelyett egy

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{g(s)_c + g(s)_i}{s} = S_c + S_i \quad (4.2.108)$$

függvényt vezetett be, amelyben a szummázás helyett egy exponenciális integrál szolgáltatja a megoldást. Az eredményeket

$$S_c = S_c \left(\frac{\kappa'_c h_c}{\lambda_{beton}}, \frac{h_c}{l} \right) \quad (4.2.109/a)$$

és

$$S_i = S_i \left(\frac{\kappa'_i h_i}{\lambda_{beton}}, \frac{h_i}{l} \right) \quad (4.2.109/b)$$

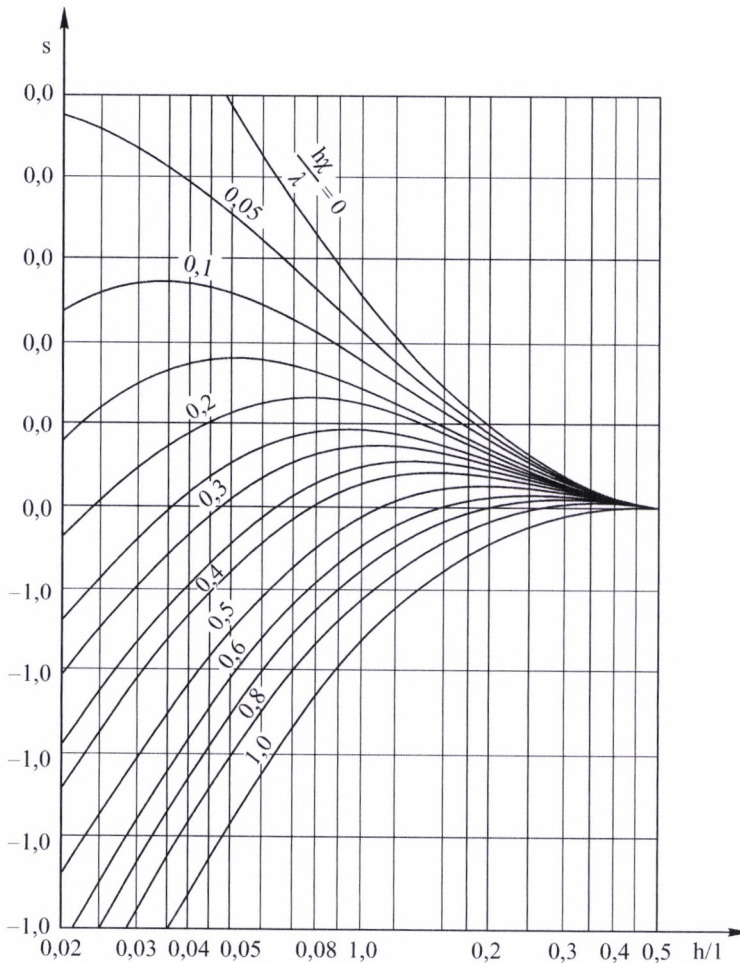
diagramokba vitte fel, amelyben az abszcissa a

$$\frac{h}{l} \left(\frac{h_e}{l}, \text{ illetve } \frac{h_i}{l} \right),$$

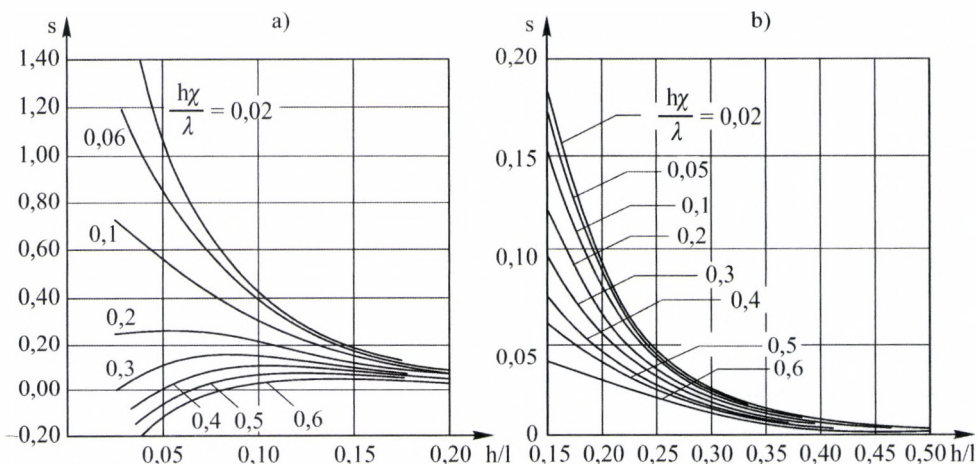
míg az egyes görbék a konstans

$$\frac{\kappa'_h}{\lambda_{\text{beton}}} \left(\frac{\kappa'_e h_e}{\lambda_{\text{beton}}}, \text{ illetve } \frac{\kappa'_i h_i}{\lambda_{\text{beton}}} \right)$$

értékek mértani helyei (4.2.10. ábra). Ezekből a $Bi=h_k/\lambda$ tényező és a dimenziómentesített h/l abszcissza függvényében az S_e és S_i értékei egyszerűen kivethetők.



4.2.10. ábra. Az S_i és S_e tényezők számítására szolgáló diagram a h_k/λ és a h/l függvényében Rydberg-Huber és Raiss után



4.2.11. ábra. Az S_i és S_c tényezők számítására szolgáló diagram (Molnár Zoltán számítása szerint)
a) $h/l = 0 - 0,20$; b) $h/l = 0,20 - 0,5$ értéktartományokra

Inkább csak szépséghibája ennek a megoldásnak az, hogy az adott feladatban a h_c és h_i egymáshoz való viszonya az eredményt befolyásolja, míg a diagramokkal való megoldása tulajdonképpen tükörkép-feladatra vonatkozik.

A 4.2.11. ábrában Molnár Zoltán megoldása látható, amelyet ugyancsak $h_i/l = h_c/l$ alapon szerkesztett. Az ábrák lényegileg azonos S_c és S_i értékeket szolgáltatnak, mint a 4.2.10. diagram, természetesen használatukkor a tényleges h_c/λ ., illetve h/l értékeket kell alapul venni.

Az előzőek alapján az S_c és S_i értékét az $y = 0$ középvonal túlhőmérsékletére vonatkozó (4.2.103) összefüggésbe bevezetve kapjuk, hogy

$$\frac{\vartheta_{(y=0)k}}{\vartheta_w} = \frac{-G_2 \frac{\pi}{l}}{\ln \frac{1}{d\pi} - G_2 \frac{\pi}{l} + S_c + S_i}. \quad (4.2.110)$$

Ebből a két túlhőmérséklet egyikének ismeretével (legtöbbször a $\vartheta_{(y=0)k}$ -nak) a másik számítható. A felületek túlhőmérsékletét a (4.2.95/a) és (4.2.96/b)-ből nyerjük:

$$\vartheta_{hc} = \vartheta_{(y=0)k} \frac{\kappa_c}{\alpha_c}, \quad (4.2.111/a)$$

és

$$\vartheta_{hi} = \vartheta_{(y=0)k} \frac{\kappa_i}{\alpha_i}. \quad (4.2.111/b)$$

4.2.2.3. A hőközlés nagysága

Az 1 m² felületről óránként közölt hő:

- felfelé

$$\dot{q}_e = \vartheta_{(y=0)k} \kappa_e = \vartheta_{hc} \alpha_e, \quad (4.2.112/a)$$

- lefelé

$$\dot{q}_i = \vartheta_{(y=0)k} \kappa_i = \vartheta_{hi} \alpha_i. \quad (4.2.112/b)$$

Természetesen függőleges fal esetén általában

$$\dot{q}_e = \dot{q}_i = \vartheta_{(y=0)k} \kappa_e = \vartheta_{(y=0)k} \kappa_i = \vartheta_{hc} \alpha_e = \vartheta_{hi} \alpha_i, \quad (4.2.113)$$

(minthogy általában ebben az esetben $\alpha_e = \alpha_i$, $\kappa_e = \kappa_i$).

Az 1 m csőből óránként nyerhető hő:

$$\dot{q}_{cső} = \vartheta_{(y=0)k} \kappa_e = \vartheta_{(y=0)k} l(\kappa_e + \kappa_i), \quad (4.2.114)$$

amit a

$$G_2 = \frac{-2\lambda_{\text{beton}}}{\kappa_e + \kappa_i}$$

helyettesítéssel a (4.2.103)-ból

$$\dot{q}_{cső} = \vartheta_w \frac{2\pi\lambda_{\text{beton}}}{\ln \frac{1}{d\pi} + \frac{2\pi\lambda_{\text{beton}}}{\kappa_e + \kappa_i} + S_e + S_i} \quad (4.2.115)$$

alakban lehet leírni.

Az összefüggésből látható, hogy a beépített csövet annál gazdaságosabban tudjuk kihasználni, mennél nagyobb az 1 menettávolság, a κ_e és κ_i hőátbocsátási tényező, aminek persze döntő feltétele a jó λ_{beton} hővezetési tényező. A jelentős ϑ_w csőfelületi hőmérséklet természetesen alapfeltétel.

4.2.2.4. A hőközlés $\vartheta_e \neq \vartheta_i$ esetén

Erre a 4.2.1. pontban mondottak érvényesek, és különösen külső homlokzati falpanelfűtés szempontjából van ennek a pontnak nagy jelentősége.

4.3. Közepes felületi hőmérsékletű (70-200 °C) sugárzófűtések

E csoportba elsősorban az ún. sugárzó ernyős fűtőtestek sorolhatók. Azonban a kis felületi hőmérsékletű, kis hőtehetetlenségű fémkazettás sugárzó mennyezetfűtések hőtechnikai méretezését ugyanezen az elven kell végezni.

Vizsgálatainkban a hagyományos gyártás szerint készített ernyőt vesszük szemügyre, mivel az eddigi tapasztalatok szerint a ponthegeztéssel készített ernyő hőleadása az előzőével gyakorlatilag azonosnak mutatkozott. A 4.2.2. pontban rámutattunk arra, hogy ha a Bi-tényező:

$$Bi = h \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\delta}{2},$$

bizonyos értéknél kisebb, akkor a hőmérséklet-eloszlás a lineáris hővezetés tételének igénybevételével (a Bi-szám nagyságától függően) különböző – de a gyakorlat igényeinek megfelelő – pontossággal le tudjuk írni. Fokozottan áll ez a sugárzó ernyőre, ahol a Bi szám nagyságrendje 10^{-4} .

Tekintsük a 4.3.1. ábrát. Ennek jelölésével az ernyő gyökszálai között I sávon a hőmérséklet-megoszlást a (4.2.24) összefüggés adja, azaz

$$\vartheta = \vartheta_{l_{sáv} 0} = \frac{\operatorname{ch} m \left(\frac{1}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \frac{ml}{2}}, \quad (4.3.1)$$

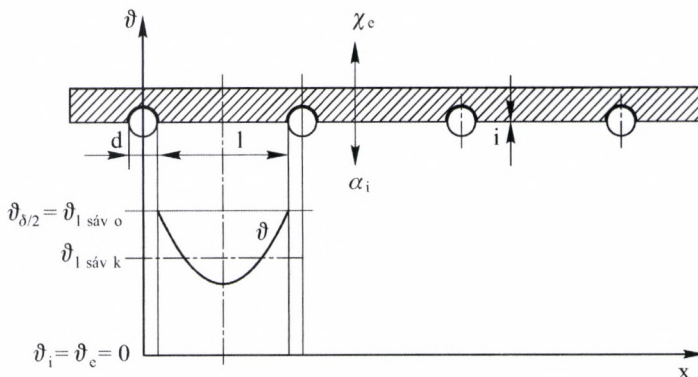
míg az I sáv közepes hőmérsékletét a

$$\vartheta_{l_{sáv} k} = \vartheta_{l_{sáv} 0} = \frac{\operatorname{th} \frac{ml}{2}}{\frac{ml}{2}} \quad (4.3.2)$$

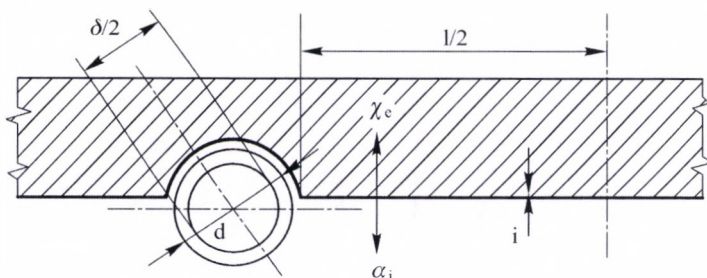
fejezi ki. Itt felül szigetelt ernyőre

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_i + \kappa_e}{i \lambda_i}},$$

amelynek nagyságrendje 200 körül van.



4.3.1. ábra. Hőmérséklet-megoszlás a sugárzó ernyő csövei közötti sávon



4.3.2. ábra. Sugárzó ernyő lemeze és a hőhordozó közeget szállító cső közötti kapcsolat

A teljes ernyő közepes hőmérsékletét, a $\vartheta_k = \vartheta_{Si}$ jelölést megtartva, a

$$\vartheta_k = \vartheta_{Si} = \frac{l\vartheta_{l_{sáv}k} + \frac{d\pi}{2}\vartheta_w}{1 + \frac{d\pi}{2}} \quad (4.3.3)$$

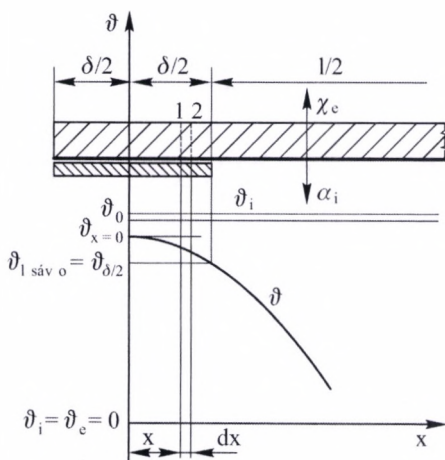
összefüggéssel fejezhetjük ki.

Szokásos a $d\pi/2$ helyett csak a d vetületet venni. A nagyobb $d\pi/2$ alkalmazását az indokolja, hogy így eltekinthetünk a csőfal és a sáv közötti sugárzásos hőcsere amúgy is rendkívül körülményesen számítható értékétől.

Az összefüggések használatakor két fő kérdés merül fel (4.3.2. ábra):

a) Hogyan írható le a hőmérséklet-eloszlás a csövet borító δ hosszúságú íven, ha a csőfal-hőmérséklet változásától eltekintünk?

b) Mekkora a $\vartheta \frac{\delta}{2} = \vartheta_{l_{sáv}0}$ túlhőmérséklet a gyökszálaban?



4.3.3 ábra. A sugárzó ernyő lemeze és a cső közötti kapcsolat egyszerűsített vázlatja síkban kiterítve

Érdekes kérdés az is, hogy milyen befolyása van a $2 \cdot \delta/2$ borítólemez nagyságának. Ez nyilván befolyásolja a (4.3.2) összefüggés szerint a ϑ_{lsavk} értékét is.

Mínt hogy a csőfalban nem tételezzünk fel hőmérséklet-változást, a 4.3.2. ábrát egyszerűsítve síkban kiterítve is képzelhetjük (4.3.3. ábra).

A cső és a lemez közötti kapcsolatot képzeljük egy Δ_c , vastagságú rétegnek, amelynek egyenértékű hővezetési tényezője legyen λ_c . A környezet túlhőmérséklete mind a lemez alatt, mind felette $\vartheta_i = \vartheta_e = 0$.

A levezetés abból a feltevésből indul ki, hogy az l szélességű sávon közölt hő a lemez a δ ívhosszúságú borítólemezen vette fel és továbbította a sávnak.

Az x, ϑ koordináta-rendszert az ábra szerint véve fel, és a lemez keresztmetszetére merőleges l m hosszúságú felületeket vizsgálva, az l -gyel jelölt i m x l m felületű keresztmetszeten átvezetett hő:

$$\dot{q}_1 = -i\lambda_i \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_x, \quad (4.3.4)$$

a 2-vel jelzett keresztmetszeten pedig

$$\dot{q}_2 = -i\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x+dx}, \quad (4.3.5)$$

de

$$\vartheta_{x+dx} = \vartheta_x + \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right) dx, \quad (4.3.6)$$

s így

$$\dot{q}_2 = -i\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx \right) dx. \quad (4.3.7)$$

(Természetesen az összefüggések levezethetők ugyanúgy, mint a (4.2.5), (4.2.7)-ben tettük.)

A két hőmennyiség különbségét a lemez egyrészt a csőfallal, másrészt a szigetelésen keresztül a környezettel cseréli. Így

$$\dot{q}_1 - \dot{q}_2 = i\lambda_i \left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2} \right) dx = dx \left[\frac{\lambda_c}{\Delta_c} (\vartheta - \vartheta_w) + \kappa_c \vartheta \right], \quad (4.3.8)$$

illetve átalakítva

$$i\lambda_i \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \left(\frac{\lambda_c}{\Delta_c} + \kappa_c \right) \vartheta - \frac{\lambda_c}{\Delta_c} \vartheta_w. \quad (4.3.9)$$

Rendezés után

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{\frac{\lambda_c}{\Delta_c} + \kappa_c}{i\lambda_i} \vartheta + \frac{\frac{\lambda_c}{\Delta_c}}{i\lambda_i} \vartheta_w = 0. \quad (4.3.10)$$

A második tag együtthatója csak pozitív lehet, így

$$\frac{\frac{\lambda_c}{\Delta_c} + \kappa_c}{i\lambda_i} = n^2, \quad (4.3.11)$$

s ezzel a

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - n^2\vartheta + \frac{\frac{\lambda_c}{\Delta_c}}{i\lambda_i} = 0 \quad (4.3.12)$$

differenciálegyenletet nyerjük. A megoldása

$$\vartheta = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx} + \vartheta_w \frac{\frac{\lambda_c}{\Delta_c}}{\frac{\lambda_c}{\Delta_c} + \kappa_c}, \quad (4.3.13)$$

amiről visszahelyettesítés útján könnyen meggyőződhetünk.

A harmadik tag értelmezése céljából írjuk fel az y irányú stacioner hőátmenetet az $x = 0$ vonalban a cső és a lemez, valamint a lemez és a környezet között, azaz

$$\frac{\lambda_c}{\Delta_c} (\vartheta_w - \vartheta_c) = \kappa_c \vartheta_{x=0}, \quad (4.3.14/a)$$

amiből

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_w \frac{\frac{\lambda_c}{\Delta_c}}{\frac{\lambda_c}{\Delta_c} + \kappa_c}. \quad (4.3.14/b)$$

Mínthogy a $\lambda_c / \Delta_c \gg \kappa_c$, ezért a csak y irányú hővezetés esetén az $x = 0$ vonalban igen jó közelítéssel

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_w$$

túlhőmérséklet állna be.

Mivel λ_c / Δ_c nagyságrendje 1000 W/m^2 és $\kappa_c \approx 1 - 1,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$, ezért a továbbiakban a

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_w$$

egyenlőséggel, s ennek alapján a

$$\vartheta = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx} + \vartheta_w \quad (4.5.15)$$

megoldással számolunk.

Az állandókat azon az alapon állapítjuk meg, hogy az $x = 0$ vonalon át hőáramlás nincs, viszont $x = \delta/2$ gyökszálon át pedig átáramlik az $1/2$ szélességű lemeztől leadott teljes hő.

Tehát $x = 0$ -ra érvényes, hogy

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad (4.3.16)$$

amiből

$$n(C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx})_{x=0} = 0,$$

azaz

$$C_1 = C_2, \quad (4.3.17/b)$$

s így egyenletünk a

$$\vartheta = C(e^{nx} + e^{-nx}) \quad (4.3.18)$$

alakba megy át.

Az $x = \delta/2$ esetén

$$-i\lambda_i \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\frac{\delta}{2}} = \frac{\dot{q}l}{2} = \vartheta_{l_{sáv}k} (\alpha_i + \kappa_c) \frac{1}{2}, \quad (4.3.19)$$

$$-i\lambda_i \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\frac{\delta}{2}} = -i\lambda_i C n (e^{nx} - e^{-nx})_{x=\frac{\delta}{2}}, \quad (4.3.20/a)$$

amiből

$$C = \frac{\vartheta_{l_{sáv}k} (\alpha_i + \kappa_c) \frac{1}{2}}{2i\lambda_i n \operatorname{sh}\left(n \frac{\delta}{2}\right)}, \quad (4.3.20/b)$$

mert

$$e^{+\frac{n\delta}{2}} - e^{-\frac{n\delta}{2}} = \operatorname{sh}\left(n \frac{\delta}{2}\right). \quad (4.3.21/a)$$

Felhasználva az

$$e^{nx} + e^{-nx} = \operatorname{ch} nx \quad (4.3.21/b)$$

azonosságot, nyerjük, hogy

$$\vartheta = \vartheta_w - \frac{\vartheta_{l_{sáv}k} (\alpha_i + \kappa_c) \frac{1}{2}}{i\lambda_i n \operatorname{sh}\left(n \frac{\delta}{2}\right)} \operatorname{ch} nx. \quad (4.3.22)$$

Ezzel az $x = 0$ vonalban, tehát a cső tengelye feletti szálaban

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_w - \frac{\vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} (\alpha_i + \kappa_c) \frac{1}{2}}{i\lambda_i n \operatorname{sh}\left(n \frac{\delta}{2}\right)}, \quad (4.3.23/a)$$

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_w - \vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} \frac{\frac{m^2 l}{2}}{n \operatorname{sh}\left(n \frac{\delta}{2}\right)}, \quad (4.3.23/b)$$

mivel (4.2.46) és (4.2.47) szerint

$$\frac{\alpha_i + \kappa_c}{i\lambda_i} = m^2.$$

Az $x = \delta/2$ vonalban, azaz a gyökszállban

$$\vartheta_{l_{s\acute{a}v}0} = \vartheta_{\frac{\delta}{2}} = \vartheta_w - \vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} \frac{\frac{m^2 l}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{n\delta}{2}\right)}{n \operatorname{sh}\left(\frac{n\delta}{2}\right)}, \quad (4.3.24/a)$$

$$\vartheta_{l_{s\acute{a}v}0} = \vartheta_{\frac{\delta}{2}} = \vartheta_w - \vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} \frac{\frac{m^2 l}{2}}{n \operatorname{th}\left(\frac{n\delta}{2}\right)} \quad (4.3.24/b)$$

összefüggés adódik. Ha a $\vartheta_{l_{s\acute{a}v}0} = \vartheta_{\frac{\delta}{2}}$ túlhőmérséklet a (4.2.33)-ból

$$\vartheta_{l_{s\acute{a}v}0} = \vartheta_{\frac{\delta}{2}} = \frac{\vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} \frac{ml}{2}}{\operatorname{th} \frac{ml}{2}}$$

alakban fejezzük ki, akkor

$$\vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} \frac{\frac{ml}{2}}{\operatorname{th} \frac{ml}{2}} \vartheta_w - \vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} \frac{\frac{ml}{2}}{n \operatorname{th}\left(\frac{n\delta}{2}\right)} \quad (4.3.25)$$

összefüggést nyerjük, amiből

$$\vartheta_w = \vartheta_{l_{s\acute{a}v}k} \frac{ml}{2} \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{ml}{2}\right)} + \frac{m}{n \operatorname{th}\left(\frac{n\delta}{2}\right)} \quad (4.3.26)$$

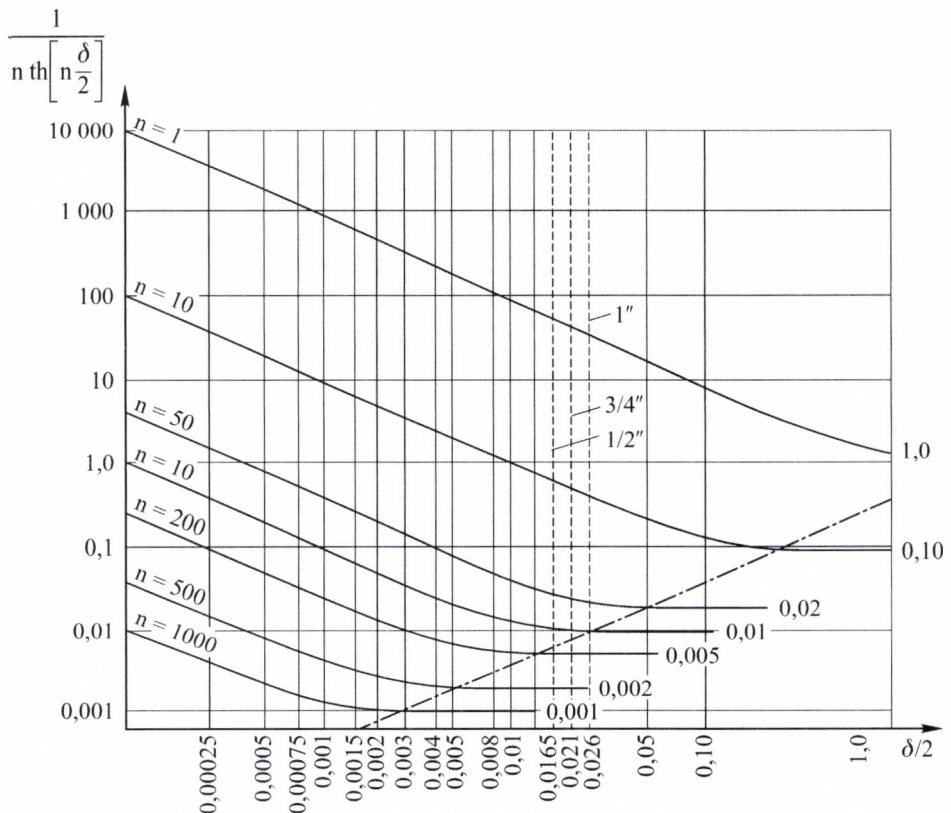
adódik!

A fejezet elején feltett kérdésekre most már válaszunkat a következők szerint adhatjuk meg.

A borítólemezen a hőmérséklet-eloszlást a (4.3.22) összefüggés írja le, azaz szintén ch -függvény szerint változik. Minél nagyobb a gyökszálak közötti l sávon a hőközlés, annál távolabb esik a $\vartheta_{l_{\text{sáv}0}}$ a csőfalhőmérséklettől. Ez világos, hiszen a kettő közötti hőátvitel ettől a különbségtől függ. Ha azonban jó a jellemző n tényező, és abban elsősorban az egyenértékű λ_c / Δ_c hőátvezetési tényező, akkor a különbség kicsi. A (4.3.23)-ból ugyanis

$$\vartheta_w - \vartheta_{l_{\text{sáv}0}} = \vartheta_{l_{\text{sáv}k}} \frac{\frac{m^2 l}{2}}{n \operatorname{th}\left(\frac{n\delta}{2}\right)} = \frac{\vartheta_{l_{\text{sáv}k}} (\alpha_i + \kappa_c) \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_c}{\Delta_c} \kappa_c\right) i l_i \operatorname{th}\left(\frac{\delta}{2}\right)}} \quad (4.3.27)$$

alakban is felírhatjuk, ami egyrészt előző megállapításunkat húzza alá, másrészt rámutat az $i l_i$ szerepére is.



4.3.4. ábra. A hőhordozó közegét szállító cső és lemez érintkezési ív hosszúságának hatása

Érdekes a $th(n\delta/2)$ és ebben a δ szerepe is. Itt az n nagy értéke mellett a δ is jelentős befolyással van. Minthogy

$$\lim_{dx \rightarrow 0} th x = 1$$

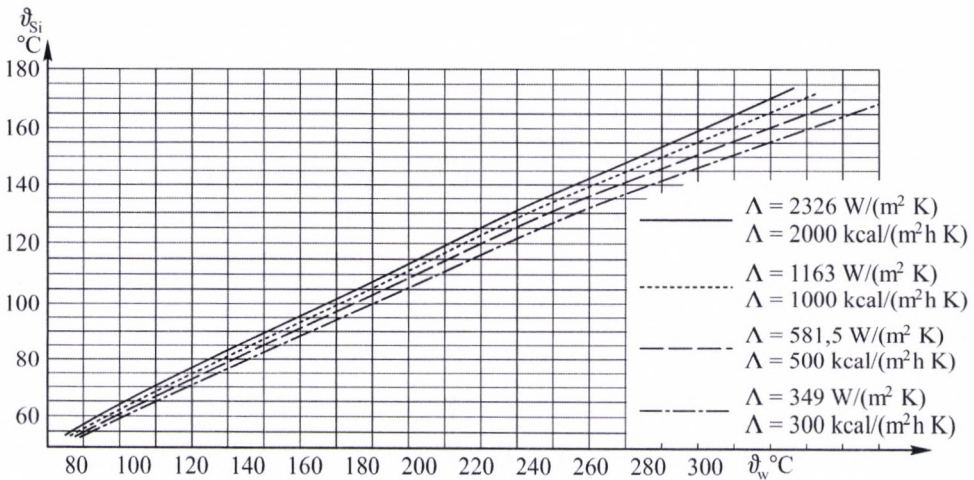
azért általában ezres nagyságrendű n mellett a δ , azaz a lemez által borított ív nagysága játssza a főszerepet. Erre ad képet a 4.3.4. ábra, amelyben az abszciszsa szám megjelöltük a 1/2", 3/4", 1" átmérőjű csövek kerületének félhosszúságát. Látható, hogy $n > 100$ esetén az $[n th(n\delta/2)]$ gyakorlatilag eléri az $1/n$ értéket, ha az 1/2" csövet félig beburkoljuk. Ez $\lambda_c / \Delta_c = 1160 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ -nél már bekövetkezik, s ezt az értéket jól készített ernyőtől el is várhatjuk. A ponthegeztéssel készített ernyőnél az $n = 500 - 1000$ közötti értéket vehetünk számításba, azonban a δ lényegesen kisebb értéke miatt az $[n th(n\delta/2)]^{-1}$ nem, vagy alig jobb, mint borított csövű ernyő esetén. Ezt egyébként mérések is igazolják.

A közepes ernyőhőmérsékleteken a d szerepére a (4.3.3) összefüggés mutat rá. Ezt az igazolja, hogy anyagfelhasználási szempontból nem érdemes nagy átmérőjű csövet alkalmazni, inkább kis átmérőjűt.

A 4.3.5. ábra a (4.3.3) összefüggés szerinti közepes ernyőhőmérsékletét adja a ϑ_w függvényében, azaz

$$\vartheta_{Si} = \vartheta_k = \frac{\frac{d\pi}{2} \vartheta_w + l \vartheta_{l_{sáv,k}}}{\frac{d\pi}{2} + 1} = \frac{l \frac{\vartheta_{l_{sáv,k}}}{\vartheta_w} + \frac{d\pi}{2}}{\frac{d\pi}{2} + 1} \vartheta_w. \quad (4.3.28)$$

A (4.3.26)-ból a



4.3.5. ábra. A cső és lemez közötti érintkezés hőátvezetési tényezőjének hatása a sáv közepes ϑ_{Si} hőmérsékletesése és a csőfal-hőmérséklet függvényében

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_{l_{s\acute{a}v k}}} = A \quad (4.3.29)$$

jelölést alkalmazva kapjuk, hogy

$$\vartheta_{Si} = \vartheta_k = \vartheta_w \frac{\frac{1}{A} + \frac{d\tau}{2}}{1 + \frac{d\tau}{2}} = \frac{1 + A \frac{d\tau}{2}}{A \left(1 + \frac{d\tau}{2}\right)} \vartheta_w, \quad (4.3.30/a)$$

azaz

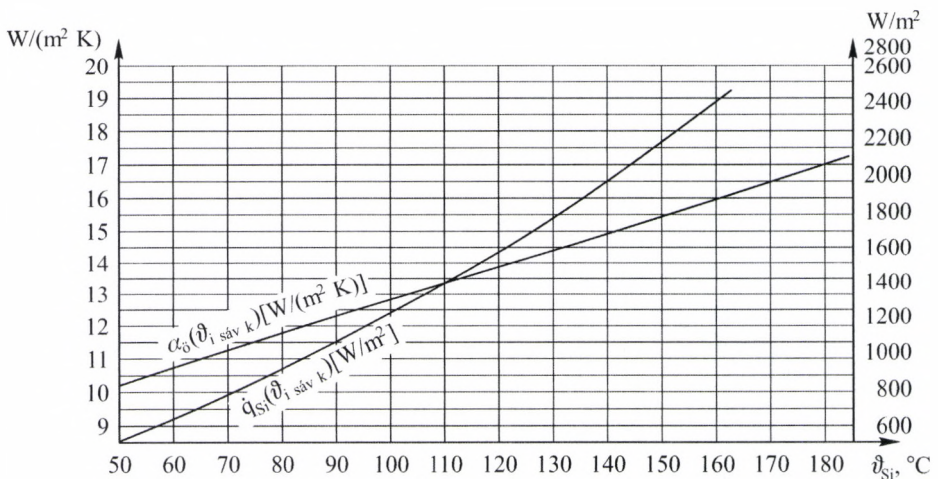
$$\frac{\vartheta_{Si}}{\vartheta_w} = \frac{1 + A \frac{d\tau}{2}}{A \left(1 + \frac{d\tau}{2}\right)}. \quad (4.3.30/b)$$

Ezt a függvényt a 4.3.5. ábra különböző n tényezők ($n = 350 - 2320 \text{ m}^{-1}$) mellett ábrázolja. Az n tényező a sugárzóernyő műszaki minőségére jellemző tényező.

A 4.3.5. ábra szerkesztésekor előre felvett $\vartheta_{l_{s\acute{a}v k}}$ sáv-túlhőmérsékletekből és természetesen az ernyőkonstrukcióból indulunk ki. $\vartheta_{l_{s\acute{a}v k}}$ és a szigetelés méretei és anyaga alapján így ismert az α_i , és κ_c , s így a (4.3.26)-ból megszerkeszthető különböző várható n -ek mellett az $A = \vartheta_w / \vartheta_{l_{s\acute{a}v k}}$. A-val kiszámíthatók a (4.3.30/b)-ból a $\vartheta_{Si} / \vartheta_w$ görbék különböző n paraméterek mellett.

A továbbiakban szükségünk lesz a

$$\dot{q}_{Si} = \alpha_{\delta} \vartheta_{Si} \quad (4.3.31)$$



4.3.6. ábra. A szigetelt sugárzó ernyő összesített hőátadási tényezője és hőközlése

összefüggést kifejező diagramra. Ezt a korábbiak alapján egyszerűen megszerkeszthetjük (4.3.6. ábra). Ennek és a 4.3.5. ábrának a birtokában az ernyő hőmérsékleti viszonyaira és hőközlésére tiszta képet kapunk, sőt meghatározhatjuk az n tényezőt is.

Így az n jósági fok meghatározásához a gyártó vállalat a következőképpen járhat el.

Telített száraz gőzzel meghatározza a

$$\dot{q}_{Si} = \frac{Q}{A_s} = \frac{mr}{A_s} \quad (4.3.32)$$

fajlagos hőleadást, mégpedig célszerűen az m kondenzvíz mennyiségből. A

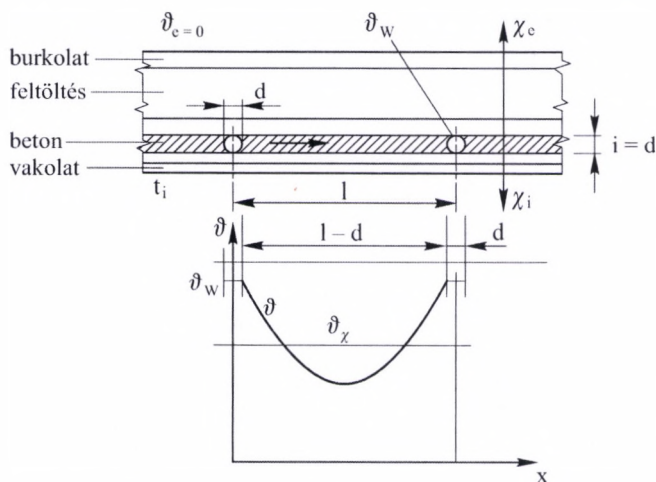
$$\vartheta_w \approx \vartheta_{gőz},$$

azaz a csőfal és a telített gőz hőmérsékletének gyakorlati egyenlősége alapján ismert a ϑ_w . A 4.3.6. ábrából a $\dot{q}_{Si}$ -hoz megállapítható a ϑ_{Si} . Ezek után a ϑ_{Si} és ϑ_w ismeretében az n tényező egyszerűen kiolvasható a 4.3.5. ábrából.

4.3.1. Kollmar számításmódszere

A két végén melegített rúd egyirányú hővezetési jelenségét alkalmazta Kollmar is a beépített fűtőtestek hőáramlási viszonyaira. Számítási eljárása a fűtőlap vastagsága (i) tekintetében tér el az előzőekben ismertetettektől, ugyanis azt csak a fűtőcső átmérőjével veszi egyenlőnek, mint a 4.3.7. ábrán láthatjuk. A hő ebben a rétegben áramlik egyirányú vezetés révén, majd erről a fűtőlapról hőátbocsátással a födémszerkezet fölötti és alatti térbe.

A réteg közepes túlhőmérsékletét a méreteknak megfelelően a fűtőcső ϑ_w túlhő-



4.3.7. ábra. Kollmar számítási módszerének elvi alapjai

mérsékletéből és az „ $l - d$ ” széles réteg ϑ'_k közepes túlhőmérsékletéből számíthatjuk, vagyis

$$\vartheta_k = \frac{d\vartheta_w + (l-d)\vartheta'_k}{l}, \quad (4.3.33)$$

ahol

$$\vartheta'_k = \vartheta_w \frac{\operatorname{th} \frac{m(l-d)}{2}}{\frac{m(l-d)}{2}}, \quad (4.3.34)$$

illetve

$$m = \sqrt{\frac{\kappa_i + \kappa_e}{d\lambda}}. \quad (4.3.35)$$

A felületi túlhőmérsékletek és a fajlagos hőleadások számítása az ismert összefüggések szerint történik.

Habár Kollmar ezt a számítási eljárást kísérleti adatok alapján módosította, mégis azoknál a fűtőtesteknél, amelyeknél a tényleges fűtőlap csekély vastagsága miatt abban az egyirányú hővezetés az uralkodó, ez a számítási mód helytálló. Alkalmazzuk elsősorban sugárzó ernyőknél, melyeknél a vékony fémlapban egyirányú hővezetés jön létre, és a borító szigetelés nagy hővezetési ellenállása ezt inkább fokozza; továbbá a beton fűtőlapok esetében is.

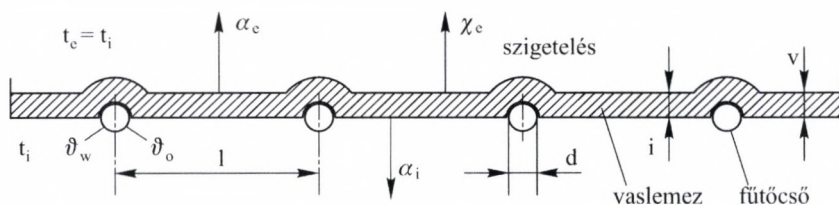
Sugárzó ernyők esetére a körülményeket a 4.3.8. ábra szemlélteti, és az összefüggéseket is ennek megfelelően át kell alakítani.

A fűtőcső túlhőmérséklete ϑ_w , de az ernyő és a cső érintkezési vonalán az érintkezés minőségétől függően a

$$\vartheta_0 = y\vartheta_w \quad (4.3.26)$$

összefüggés szerint kell venni a túlhőmérsékletet. „ y ” értéke több tényezőnek függvénye, elsősorban a légréteg vastagságának, és tapasztalatok alapján a következők lehetnek:

- a fűtőcső és ernyőlemez között fémes kapcsolat: $y = 1,00$,
- jó mechanikus kapcsolat, szigetelt ernyő: $y = 0,90$,
- jó mechanikus kapcsolat, szigetetlen ernyő: $y = 0,80$.



4.3.8. ábra. Szigetelt sugárzó ernyő számításakor alkalmazott betűjelölések

Ugyancsak a fűtőcső és az ernyőlemez kapcsolatától függ az, hogy a cső lemezborítással vagy anélkül néz a fűtött tér felé, mert így a fűtőfelületen más és más közepes hőmérséklet adódik az alábbi összefüggés alapján:

$$\vartheta_k = \frac{dy\vartheta_w + (1-d)\vartheta'_k}{1}, \quad (4.3.37)$$

ahol

$$\vartheta'_k = y\vartheta_w \frac{\frac{\text{th } \frac{m(1-d)}{2}}{\frac{m(1-d)}{2}}}{\frac{2}{2}} = \vartheta_0 \frac{\frac{\text{th } \frac{m(1-d)}{2}}{\frac{m(1-d)}{2}}}{\frac{2}{2}}, \quad (4.3.38)$$

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_i + \kappa_e}{d\lambda}}, \quad (4.3.39)$$

i az ernyőlemez vastagsága, λ az ernyőlemez hővezetési tényezője.

Szorosan mennyezet alá szerelt sugárzó ernyőknél a κ_e értékebe a szigetelésnek felfogható, de 10 cm-nél nem vastagabb légréteg, és a födém hővezetési ellenállását is beleszámíthatjuk. Két ernyő közötti födémrész hőmérsékletét pedig azon az alapon határozhatjuk meg, hogy azt a sugárzó ernyő által képviselt fűtőcsövek közötti fűtőfelületnek fogjuk fel.

4.4. Magas hőmérsékletű és kis hőtehetetlenségű sugárzófűtések

4.4.1. Általános ismertetés

A magas hőmérsékletű vagy infravörös sugárzók az eddig tárgyalt sugárzó fűtőtestektől lényegileg is különböznek. Amazok esetében a hőhordozó közeget központi helyen végbemenő tüzelés útján melegítettük fel, s a közeg áramlással került a hőleadó szerkezetekbe, majd onnan – hőjének egy részét közölve – vissza a központi hőfejlesztő berendezésbe.

A magas hőmérsékletű sugárzó fűtőtestek egyik fajtájánál az energiahordozó áramlik a fűtőtesthez, abban ég el és fejleszt a fűtőtest felületén 800 - 900 °C hőmérsékletet. Ez a gázüzemű sugárzó fűtőtest.

Másik fajtájánál a villamos áram hőhatását használjuk fel, s ezen az úton állítunk elő megfelelően kialakított szerkezet felületén magas hőmérsékletet.

Újabban olaj fűtőközegű infravörös sugárzó fűtőtesteket is gyártanak. Egyéb-ként mindhárom fűtőközeggel üzemelő típus jellemzője, hogy a készüléket vagy készülékcsaládot meghatározott teljesítményre méretezik, és így is kerül forgalomba, tehát a fűtőtest méretezése nem a tervező feladata.

E fűtőtesteket nagy általánosságban magasan, fűtőfelületükkel lefelé fordítva a konvekciós hőmozgást gátló oldalt elhelyezett irányító lemezekkel szerelik. Ezért a

$$\dot{q} = C \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_i}{100} \right)^4 \right] [\text{W/m}^2] \quad (4.4.1)$$

összefüggéssel kifejezhető sugárzási hőközlésükhöz képest konvektív hőleadásuk csekély. Itt T_s a sugárzó fűtőtest felületén kialakuló hőmérséklet, K ; T_s a környezetnek a sugárzófelületre vonatkoztatott sugárzási hőmérséklete, azaz

$$T_s = \sqrt[4]{\sum_{i=1}^n \varphi_{S-F_i} T_i^4} \quad [\text{K}].$$

Pusztán tájékoztatásul megjegyezzük, hogy egy 1000 °C hőmérsékletű,

$$C = 4,85 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

kölcsönös sugárzási együtthatójú sugárzó fűtőtest sugárzási hőközlése $T = 20^\circ\text{C}$ környezet felé

$$\dot{q} = 4,85 \left[\left(\frac{1273}{100} \right)^4 - \left(\frac{293}{100} \right)^4 \right] = 126660 \text{ W/m}^2.$$

A magas hőmérsékletű sugárzófűtés előnyei:

- a) a nagy fajlagos hőközlés,
- b) a hőközlés közel 95%-át sugárzás alakjában nyerjük,
- c) olcsó beruházás,
- d) gyors üzembehelyezési lehetőség,
- e) a sugárzás irányíthatósága a fűtőtest síkjának elhelyezése függvényében.

Hátrányai:

- a) a jó hőérzet biztosításának néha akadályai vannak,
- b) üzemében a balesetnek több előfordulási lehetősége van (tűz- és robbanásveszély),
- c) a közüzemű szolgáltatások folytonosságától nagyobb mértékben függ, mint az egyéb rendszerű fűtések zöme,
- d) a szabályozás csak szakaszos jellegű lehet.

Jelzett tulajdonságai meghatározzák alkalmazási területét. Erre elsősorban nagycsarnokok, ideiglenesen vagy időlegesen használt építmények és helyiségek szabadtéri tartózkodási területek jönnek tekintetbe.

Ellentétben az előzőekben – kis és közepes felületi hőmérsékletű fűtések – ebben az esetben a szerkezeti kialakításra egy-egy példát is bemutatunk.

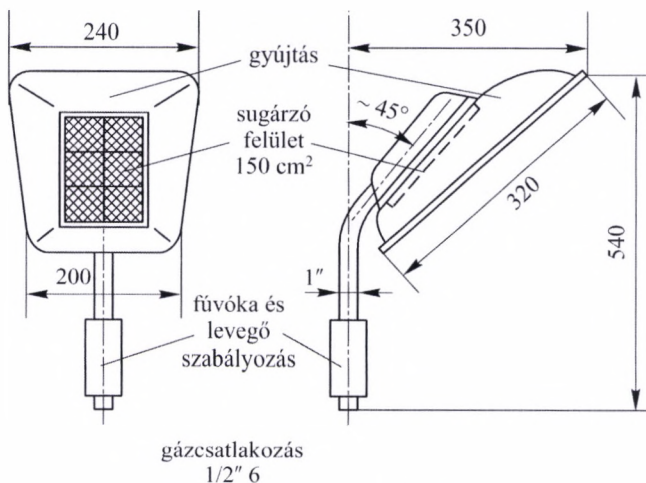
4.4.2. Gázüzemű sugárzó fűtőtest

Egyik leggyakoribb szerkezeti kialakítását a 4.4.1. ábra mutatja. Lényeges alkatrésze a kerámialapokból álló katalizátor, amelynek kis átmérőjű furatain a gáz átáramlik és a felületen elégye 900 - 1000 °C hőmérsékletre melegíti fel azt. A furatok méreteit úgy választották meg, hogy a gáz kiáramlási sebességének és az égési sebességnek a viszonya az égést a katalizátor felületein tartsa, se visszagyulladás, se felületen kívül égés ne jöhessen létre. A hőmérséklet-eloszlást a kerámialap keresztmetszetén a 4.4.2. ábra mutatja.

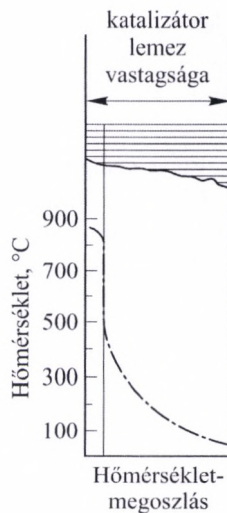
A gáz égéséhez szükséges teljes levegőmennyiséget a fűvóka keveri be, a keverék az öntöttvas burkolatú elosztótérbe jut, ahol előmelegszik, s a felületen elektromos szikra gyújtja meg.

A fűtőtest kerete öntöttvas vagy zománcozott acél, oldalirányító lemeze egyben a hőszugárzás irányítására is szolgál.

Az égés során keletkező égéstermék elvezetéséről általában szervezeten gondoskodni kell. Kis teljesítményű sugárzó égéstermékai természetes szellőzéssel is elvezethetők a helyiségből. Nagyobb teljesítményű sugárzók füstgáza a sugárzó keretének égéstermék-elvezető csatlakozásán keresztül jut a kürtőbe, majd ezen át a szabadba. Magas helyiségben több sugárzó ernyő égéstermékét közösen a tető-



4.4.1. ábra. Gázüzemű infravörös sugárzó fűtőtest



4.4.2. ábra.

A hőmérséklet-megoszlás a gázüzemű infravörös sugárzó fűtőtestben

tér szellőztetésével vezetjük el. Ez mindenesetre energiavesztéssel jár. Nagy berendezésekben az égéstermék energiájának részleges visszanyeréséről gondoskodni kell.

A hőszugárzókat különböző gázokkal üzemeltetik, főként azonban városi, propán-bután vagy földgázzal. A katalizátort és a nyomást mindig a gáznak megfelelően kell megválasztani, hogy felületi égés valósuljon meg. Így városigázhoz 490 - 730 Pa, földgázhoz 1960-2940 Pa nyomás szükséges, hogy a gáz elégéséhez kellő mennyiségű levegőt ragadjon magával.

4.4.3. Villamos hőszugárzók

Helyiségek vagy csarnokok teljes tartózkodási terének fűtésére a legkisebb külső hőmérséklet esetén szükséges teljesítménnyel villamos sugárzó fűtőtestet nem használnak.

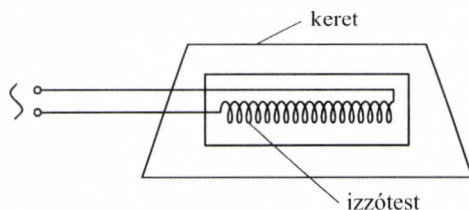
Sugárzófűtés formájában elsősorban pótfűtésre, közvetlen besugárzásra használják, de szóba jöhet főleg a nyári időszakra épített szállók fűtésére hűvösebb időben, rövid ideig tartó hőszolgáltatásra. Ebben a formában a nyári szezon meghosszabbítására igen alkalmas, mert beruházási költsége csekély.

A villamos hőszugárzó szerkezeti kialakításának elvét a 4.4.3. ábra szemlélteti.

A fűtőtest a hőt a tükrösített burkoló felületről visszavert energia formájában közli. A hőleadás arányát a visszaverő felület geometriai kialakításával változtathatjuk.

Az izzótest többféle változatban készülhet, lényege a nagy ellenállású huzal. Egyik megoldás szerint spirálozott huzalt kerámiaanyagból készült rúdra csévélnék. Más megoldás szerint az ellenálláshuzalt megfelelő szigeteléssel hőálló acélcsőbe vagy kerámiából készült lapba helyezik. A fűtőtestek általában polírozott alumíniumból készült parabolikus vagy négyyszögletű reflektor előtt helyezkednek el. Felületi hőmérsékletük kb. 700 °C.

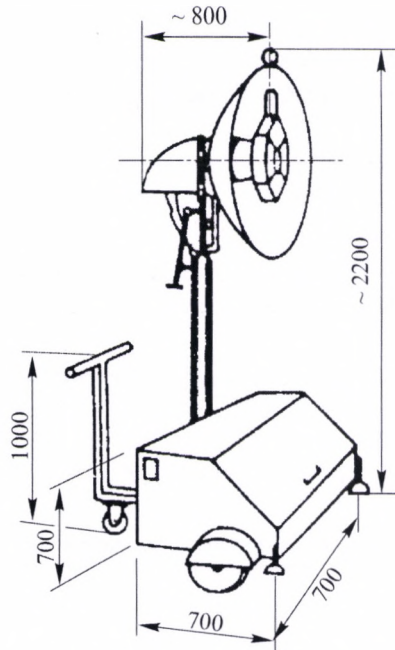
A fűtést csak szakaszosan, de igen egyszerűen lehet önműködően vezérelni. Több fűtőtest esetén a lépcsőzetes üzemet is könnyű megvalósítani. A hőmérséklet-szabályozás érdekében az ellenállásokat még párhuzamosan vagy sorba lehet kapcsolni, s ezzel változó teljesítményt szolgáltatni.



4.4.3. ábra. Villamos üzemű infravörös fűtőtest

4.4.4. Olajüzemű infravörös sugárzók

Végül meg kell említeni az olaj fűtőközegű infravörös sugárzó fűtőtesteket amelyek viszonylag kevésbé ismertek és alkalmazásuk sem széleskörű (4.4.4. ábra).



4.4.4. ábra. Olaj fűtőközegű infravörös fűtőtest

4.5. Sugárzófűtések hőérzeti méretezése

Napjainkban a zárt terekben tartózkodó emberek esetében az ún. hőérzeti méretezést az emberi test hőegyensúlya alapján kell elvégezni. Ezen alapelvet veszi figyelembe az EU méretezési szabványa is. Sugárzófűtések esetében is ez az alapelv érvényesül, de ebben az esetben a sugárzásos hőfelvétel a döntő és a hivatkozott szabvány – annak táblázataival, diagramjai – közvetlenül nem használhatók.

E két alapvető ténytet figyelembe véve a továbbiakban külön pontban foglalkozunk

- az emberi test hőegyensúlyának és
- az emberi testet érő sugárzásos hő

számításának kérdésével.

4.5.1. Az emberi test hőegyensúlyán alapuló méretezési módszer

Az emberi testben égési folyamat megy végbe, és az ennek során átalakuló energia részben hő formájában szabadul fel, részben fizikai értelemben vett hasznos, illetve izommunka végzésére fordítódik.

Ahhoz, hogy az emberi test hőegyensúlya megvalósuljon, e hőt le kell adnia. Mindezeknek megfelelően a témát a következő bontásban dolgozzuk fel:

- az emberi test hőtermelése,
- az emberi test hőleadása,
- az emberi test száraz hőcseréje,
- az emberi test sugárzásos hőcseréjének pontos számítása,
- az emberi test hőegyensúlyán alapuló általános méretezési módszer.

4.5.1.1. Az emberi test hőtermelése

Az emberi test hőtermelését ill. hasznosmunka-hatásfokát a szakirodalom a következő alaptáblázatban (4.5.1. táblázat) dolgozza fel.

4.5.1. táblázat. Különböző típusú tevékenység metabolikus értékei (Fanger)

Tevékenység	Metabolikus hő [M/F _{Du} , W/m ²]	Mechanikai hatásfok [η]	Relatív sebesség nyugvó levegőben [m/s]
Pihenés			
Alvás	41	0	0
Pihenés	47	0	0
Nyugodt ülés	58	0	0
Állás laza testtartással	70	0	0
Sétálás sík terepen, km/h			
3,2	116	0	0,9
4,0	140	0	1,1
4,8	152	0	1,3
5,6	186	0	1,6
6,4	222	0	1,8
8,0	338	0	2,2
Sétálás lejtőn, lejtés, % km/h			
5 1,6	140	0,07	0,6
5 3,2	175	0,10	0,9
5 4,8	232	0,11	1,3
5 6,4	356	0,12	1,8
15 1,6	169	0,15	0,4
15 3,2	268	0,19	0,9

4.5.1. táblázat (folytatás)

Tevékenység	Metabolikus hő [M/F _{Du} , W/m ²]	Mechanikai hatásfok [η]	Relatív sebesség nyugvó levegőben [m/s]
Sétálás lejtőn, lejtés, % km/h			
15 4,8	410	0,19	1,3
25 1,6	210	0,20	0,4
25 3,2	392	0,21	0,9
Különböző foglalkozások			
Pék	82-116	0-0,1	0-0,2
Sörfőzdei munkás	70-140	0-0,2	0-0,2
Asztalos			
gépi fűrészelés	105	0	0-0,1
kézi fűrészelés	232-280	0,1-0,2	0,1-0,2
kézi gyalulás	326-374	0,1-0,2	0,1-0,2
Öntödei munka			
Öntvénytisztítás pneumatikus kalapáccsal	187	0-0,1	0,1-0,2
formakészítés	232	0-0,1	0,1-0,2
Öntvénymozgatás (kb. 60kg)	316	0-0,2	0,1-0,2
Olvasztási munka	396	0-0,1	0,1-0,2
Salakeltávolítás	432	0-0,1	0,1-0,2
Garázmunka	128-175	0-0,1	0,2
Laboratóriumi munka			
Metszetvizsgálat	82	0	0
Normál laboratóriumi munka	93	0	0-0,2
Készülék mozgatása	128	0	0-0,2
Lakatos	128	0-0,1	0,1-0,2
Gépi munka			
Könnyű (pl. elektromosipar)	116-140	0-0,1	0-0,2
Gépszerelő	163	0-0,1	0-0,2
Nehéz (pl. festőipar)	232	0-0,1	0-0,2
Konzervipar	116-132	0-0,1	0-0,2
Ülő, de nehéz, végtagokkal végzett munka	128	0-0,2	0,1-0,4
Cipész	116	0-0,1	0-0,1
Bolti eladó	116	0-0,1	0,2-0,5
Tanár	93	0	0
Órás	64	0	0
Járművezetés			
Autó kis forgalomban	58	0	0
Autó nagy forgalomban	116	0	0
Erőgép	187	0-0,1	0-0,5
Éjszakai repülés	70	0	0
Műszeres landolás	105	0	0
Nehéz munka			
Targoncatolás (57kg, 4,5 km/h)	145	0,2	1,4
50kg-os zsák hordása	232	0,2	0,5

4.5.1. táblázat (folytatás)

Tevékenység	Metabolikus hő [M/F _{Du} , W/m ²]	Mechanikai hatásfok [η]	Relatív sebesség nyugvó levegőben [m/s]
Nehéz munka			
Kubikus munka	232-280	0,1-0,2	0,5
Árkolás	350	0,2	0,5
Házimunka			
Takarítás	116-198	0-0,1	0,1-0,3
Főzés	93-116	0	0-0,2
Mosogatás állva	93	0	0-0,2
Mosás kézzel és vasalás	116-210	0-0,1	0-0,2
Bevásárlás	93	0	0,2-0,3
Irodai munka			
Gépelés (elektromos)	52-58	0	0,05
Gépelés (kézi)	64-70	0	0,05
Számológép	70	0	0
Különböző irodai munka (pl. ívek kitöltése, ellenőrzése)	58-70	0	0-0,1
Rajzoló	70	0	0-0,1
Szórakozás			
Torna	175-232	0-0,1	0,5-2
Tánc	140-266	0	0,2-2
Tenisz	268	0-0,1	0,5-2
Vívás	410	0-0,1	0,5-2
Kosárlabda	440	0-0,1	1-3
Birkózás	510	0-0,1	0,2-0,3

A táblázatban közölt értékek magyarázata a következő:

- Metabolizmus vagy metabolikus hő. Számszerű értékét fiziológusok az oxigén-fogyasztás mértékével határozzák meg, a műszaki gyakorlatban azonban ezen eredményekből kidolgozott hőegyenértékű táblázatok adatait veszik figyelembe.
- Du Bois-felület. Az ember hőleadáskor, vagy hőfelvételkor figyelembe veendő testfelület, amely meghatározható az ismert

$$A_{Du} = 0,203 G^{0,425} H^{0,725}$$

összefüggésből, ahol G az egyén súlya, H a magassága.

- Relatív sebesség nyugvó levegőben. Ezen az emberi testnek mozgás végzés esetében adódó átlagos sebességét értjük a nyugvó levegőhöz viszonyítva. Szerepe elsősorban a konvektív hőleadásban van.
- Az ember által végzett mechanikus munka hatásfoka. Az emberi testben végbemenő oxidációs folyamat Fanger elmélete szerint két részből tevődik össze: a

külső mechanikai munkából (W) és a belső hőszükségletből (H). A metabolikus hő tehát ugyancsak két részre osztható:

$$M = H + W \text{ [W]}. \quad (4.5.1)$$

A mechanikai munka hatásfoka ezek szerint kifejezhető az

$$\eta = \frac{W}{M} \quad (4.5.2)$$

összefüggésből. Ezt a kifejezést visszahelyettesítve a (4.5.1) egyenletbe:

$$H = M (1 - \eta) \text{ [W]}, \quad (4.5.3)$$

vagy egységnyi testfelszínre kifejezve:

$$\frac{H}{F_{Du}} = \frac{M}{F_{Du}} (1 - \eta) \text{ [W/m}^2\text{]}. \quad (4.5.4)$$

Az előzőekben ismertetett alapadatokat úgymint a különböző tevékenységekhez szükséges belső hő, vagy más megfogalmazásban metabolikus hő, mechanikai hatásfok és relatív sebesség értékei a szakirodalomban táblázatosan állnak rendelkezésünkre. A jelenség világszerte alkalmazott, Fanger által kidolgozott adatokat a 4.5.1. táblázatban találhattuk.

A metabolikus hő egységeként alkalmazzák az ún. met értéket; $1 \text{ met} = 58 \text{ W/m}^2$.

Az anyagcsere során az ún. hasznos munka hatásfoka Bálint, valamint Winslov és Harrington szerint 20%, tehát az emberi szervezet jobb hatásfokkal dolgozik, mint az átlagos gőzgép (14%). Emellett az anyagcsere állandó hőmérsékleten, $37 \pm 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ -on megy végbe. Ez az alapvető eltérés az egyszerű égés – amelynek hőmérséklete nem állandó – és az anyagcsere között.

4.5.1.2. Az emberi test hőleadása

Az emberi test hőleadásának százalékos megosztása:

- konvekció 32-35%,
- sugárzás 42-44%,
- párolgás 21-26%.

A hővezetést külön nem veszik figyelembe, illetve a konvekcióhoz számolják.

A konvekció és a sugárzásos hőcsere lehet pozitív és negatív, a párolgásos hőcsere viszont egyértelműen negatív.

A párolgásos hőleadás két fő részre osztható:

- láthatatlan párolgásra (perspiráció inszenzibilis),
- látható izzadásra (perspiráció szenzibilis).

A szervezet naponta kb. (8-10) 10^{-4} m³ vizet párologtat el, amely az anyagcsere körülmények között leadott hő 20-25%-a, mivel minden gramm víz elpárologtatására 2400 J hőt von el a szervezettől. Így a napi hőelvonás kb. (21,8 - 25) · 10⁵ J értéket jelent. A semlegesnél alacsonyabb hőmérséklet esetén az elpárologtatott vízmennyiség nagyjából változatlan. Magasabb hőmérséklet esetén azonban értéke nő. A verejtékezés 28-29 °C környezeti hőmérsékleten kezdődik, és 34 °C érték felett a párologás, illetve verejtékezés a szervezet egyetlen hőleadási lehetősége.

Az emberi test száraz hőcseréje – amely szoros kapcsolatban áll a sugárzófűtésekkel – azonban bővebb magyarázatot igényel

4.5.1.3. Az emberi test száraz hőcseréje

Az emberi test hőcseréje – mint az előzőekből látható – két fő részre osztható. Száraz és nedves hőcserére. E fejezetben csak a száraz hőcsere számítási módjait foglaljuk össze elsősorban azért, mert a sugárzásos hőcsere is ebbe a csoportba sorolható. A nedves hőcserére vonatkozó számítási módszerekkel a következő, 4.5.4.1 alpontban foglalkozunk, ahol a komplex hőegyensúlyi és komfort egyenletek alkalmazását ismertetjük.

A száraz hőcsere gyűjtőfogalomba – mint az előzőekből látható – a sugárzásos (jele a továbbiakban R), konvektív (C) és konduktív hőcsere sorolható. Számításukra – elsősorban az egyes tényezők számszerű értéke és nemcsak az alapelv szempontjából – igen sok módszer ismert.

A sugárzásos és konvekciós hő nagyságának megállapítására Marcelle és Hatch a következő összefüggést javasolja:

$$R + C = (6,0 + 0,56\sqrt{v})(t_{cl} - t_l) \text{ [W]}, \quad (4.5.5)$$

ahol v a levegő sebessége, m/s; t_{cl} az emberi test és ruházat felületének átlaghőmérséklete, °C; t_l a levegő hőmérséklete, °C.

Felöltözött emberekre vonatkozóan Nelson, Eichman, Shelley és Hatch a következő egyenletet javasolják, mint a (4.5.5) egyenlet módosított formáját:

$$R + C = (2,8 + 0,69\sqrt{v})(t_{cl} - t_l) \text{ [W]}. \quad (4.5.6)$$

A továbbiakban t_{cl} a ruházat külső felületi átlaghőmérsékletét jelenti.

Sokkal általánosabban alkalmazott az ASHRAE által javasolt számítási mód:

$$R + C = \alpha_s (t_{cl} - t_{ks}) + \alpha_c (t_{cl} - t_l) \text{ [W]}, \quad (4.5.7)$$

ahol t_{ks} a környező felületek közepes sugárzási hőmérséklete, amely meghatározható a

$$t_{ks} = \frac{t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \quad (4.5.8)$$

egyenletből, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n$, a környező falak felülete, m^2 ; $t_1, t_2, \dots, t_n$ az azonos indexű környező falfelületek közepes hőmérséklete, $^\circ C$.

A ruházaton keresztül végbemenő száraz hőcsere számítható az

$$R + C = \lambda_{cl} (t_{bf} - t_{cl}) [W], \quad (4.5.9)$$

illetve az

$$R + C = \alpha (t_{bf} - t_0) A_{cl} [W] \quad (4.5.10)$$

egyenletből, amelyből

$$A_{cl} = \frac{\lambda_{cl}}{\alpha + \lambda_{cl}} = \frac{I_l}{I_l + I_{cl}}. \quad (4.5.11)$$

Az előző három egyenletből az ismeretlen tényezők magyarázata: λ_{cl} a ruházat hővezetési tényezője, $I_l = 1/\alpha$ a nyugvó levegő szigetelőképessége, hőátadási ellenállása, $I_{cl} = 1/\lambda_{cl}$ a ruházat szigetelőképessége, hővezetési ellenállása, t_0 az operatív hőmérséklet.

A ruházat szigetelőképességét az ún. clo értékkel határozzák meg:

$$1 \text{ clo} = 0,155 \text{ m}^2 \text{ K/W}.$$

Az általános gyakorlat szerint I_{cl} egysége clo, dimenziója pedig $W/(m^2 \text{ K})$, így felírható az

$$A_{cl} = \frac{1}{1 + 0,155 I_{cl}} \quad (4.5.12)$$

egyenlet. I_{cl} és A_{cl} értékekre vonatkozóan egyébként táblázatokat is kidolgoztak, illetve alkalmaznak. A legismertebb az ASHRAE és a Fanger-féle táblázat. Ez utóbbi az ASHRAE továbbfejlesztett „európaibb” változata, ezt később mutatjuk be.

Az ASHRAE értékeket a 4.5.2. táblázat dolgozza fel. A táblázatból látható,

4.5.2. táblázat. Különböző ruházatok hőtechnikai adatai (ASHRAE)

Ruházat	I_{clo}	A_{cl}
Mezítelen	0,0	1,0
Short	0,1	0,89
Short, nyitott nyakú ing, rövid ujjal, könnyű zokni és szandál	0,3-0,4	0,74-0,68
Könnyű nyári hosszúnadrág, nyitottnyakú rövidujjú ing	0,5	0,63
Könnyű alsó, gyapjúzokni, pamut nyitott nyakú munkaing és munkanadrág	0,6	0,58
Könnyű alsónemű, pamuting és nadrág, zokni, cipő	0,7	0,54
Tipikus amerikai üzletember-ruházat	0,6	0,58
Hagyományos európai ruházat: pamut alsónemű, hosszú szárral és ujjal, ing, nyakkendő, gyapjúzokni, cipő, öltöny, mellénnyel	1,5	0,36
Nehéz téli ruházat: pamut v. gyapjú alsónemű, flanelling, szélálló és vízálló nadrág és kabát, mohair mellény, gyapjúzokni, csizma	1,5-2,0	0,36-0,29

hogy A_{cl} , értéke meztelen ember esetén 1. Ekkor ugyanis a ruházat szigetelőképessége a száraz hőcserét a test és környezete között nem csökkenti. A ruházat növekedésével azonban A_{cl} , értéke is növekszik.

Az ASHRAE külön nem közli, hogy a sugárzásos és konvekciós a értékeket milyen összefüggéssel kell számolni. Sugárzásos hőcserére vonatkozóan α_s érték meghatározására egyértelműen a közismert

$$\alpha_s = C \cdot b = C \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{t_1 - t_2} \quad (4.5.13)$$

egyenlet alkalmazható.

A konvekciós a értékének számítására például a következő összefüggések vehetők figyelembe:

Legcélszerűbben a Fanger-féle összefüggések alkalmazhatók (4.5.23, 4.5.25). Alkalmazható azonban az

$$\alpha_c = 0,48 \frac{\lambda}{L} \sqrt[4]{G_r} \quad (4.5.14)$$

egyenlet is, ahol L az egyén magassága, m ; λ a ruházat hővezetési tényezője, $W/(m^2 K)$; G_r meghatározható a

$$G_r = \tau L^3 (t_{cl} - t_l) \quad (4.5.15)$$

egyenletből.

Kevésbé pontos számítások esetén pedig esetleg alkalmazható a Jürgens–Nusselt-egyenlet is:

$$\alpha_c = 2,2 \sqrt[4]{t_{cl} - t_l} \quad (4.5.16)$$

Fanger a ruházaton keresztüli hővezetésre egyszerűbb egyenletet és táblázatot (4.5.3. táblázat) használ.

Az általa alkalmazott számítási módszeren belül a ruházaton keresztüli hővezetés (a bőr külső felületéről a ruházat külső felületére):

$$K = A_{Du} \frac{t_{bf} - t_{cl}}{0,18 I_{cl}} [W], \quad (4.5.17)$$

amelyen belül az ún. clo érték az

$$I_{cl} = \frac{R_{cl}}{0,18} clo \quad (4.5.18/a)$$

egyenletből határozható meg, ahol R_{cl} a teljes hővezetési ellenállás a bőr külső felületéről a ruházattal borított test külső felületére, $m K/W$.

Az általa alkalmazott táblázat hasonló a 4.5.2 táblázathoz, de részben más öltözetekre határozza meg I_{cl} értékét, s ezenkívül megadhatja az f_{cl} értékeket is, amelyek a felöltözött és meztelen testfelületek arányára vonatkoznak.

4.5.3. táblázat. Különböző ruházatra vonatkozó adatok (Fanger)

Ruházat	I_{clo}	f_{cl}
Mezítelen	0,0	1,0
Short	0,1	1,0
Tipikus trópusi ruházat: short, nyitott nyakú ing rövid ujjal, könnyű zokni és szandál	0,3-0,4	1,05
Könnyű nyári ruházat: hosszú szárú nadrág könnyű anyagból, nyitott nyakú ing, rövid ujjal	0,5	1,1
Könnyű munkaruha: short, gyapjúzokni, pamut munkaing és munkanadrág	0,6	1,1
Tipikus üzletember-ruházat	1,0	1,15
Tipikus üzletember-ruházat + pamutkabát	1,5	1,15
Nehéz tradicionális európai üzletember-ruházat: pamut alsónemű hosszú ujjakkal és szárral, ing, gyapjúzokni, cipő, öltöny, beleértve nadrágot, kabátot és mellényt	1,5	1,15-1,2
Könnyű sportöltözet: pamuting, nadrág, short, zokni, cipő és szimpla orkáncabát	0,9	1,15
Nehéz téli öltözet, igen hideg területeken (sarkvidék)	3-4	1,3-1,5

A legújabb kutatások eredményei szerint vannak olyan számítási módszerek, amelyek az egyes ruhadarabokat veszik figyelembe illetve összegzik.

A számítási összefüggés:

$$I_{ci} = 0,82I_{cli}, \quad (4.5.18/b)$$

ahol I_{ci} az egyes ruhadarabokra vonatkozó érték és a 4.5.4 táblázatban található.

Találhatók emellett további táblázatos értékek női és férfi ruhadarabokra, ha azokat nyugalmi helyzetben használják (ASHRAE 1981).

Két további esetet is figyelembe vehetünk:

- a) Székben ülők esetén a ruházat szigetelőképessége megnő. Számolhatunk egységesen 0,15 clo növekedéssel, de speciális esetekben (pl. szék tervezésekor, illetve kiválasztásakor) a

$$\Delta I_{cl} = 7,48 \times 10^{-5} \text{ CSAC} - 0,1 \text{ clo} \quad (4.5.19.)$$

ahol CSAC a székekkel érintkező testfelület.

- b) Sétálás esetén pedig számolhatunk a

$$-\Delta I_{cl} = 0,54 T_{cl} + 0,00281 v_s - 0,24 \text{ clo} \quad (4.5.20.)$$

összefüggéssel, ahol v_s a sétálás sebességével lépés/perc dimenzióban.

A sugárzásos hővesztésre Fanger a Stefan–Boltzmann-törvény egy kevésbé ismert formuláját alkalmazza:

$$R = A_{eff} \varepsilon \sigma (t_{cl} + 273)^4 - (t_{ks} + 273)^4 \text{ [W]}, \quad (4.5.21)$$

4.5.4. táblázat. Egyes ruhadarabok „clo” értékei (I_{cli} értékei)

Férfiak		Nők	
ruhadarab	I_{cli} [clo]	ruhadarab	I_{cli} [clo]
Alsónemű			
Atlétatrikó	0,06	Melltartó és alsó	0,05
Póló	0,09	Rövid kombiné	0,13
Alsónadrág	0,05	Hosszú kombiné	0,19
Hosszú ujjú meleg trikó	0,35	Hosszú ujjú meleg trikó	0,35
Hosszú meleg alsó	0,35	Hosszú meleg alsó	0,35
Felsőruházat			
Ing		Blúz	
könnyű, rövid ujjú	0,14	könnyű	0,20
hosszú ujjú	0,22	vastag	0,29
vastag, rövid ujjú	0,25	Ruha	
hosszú ujjú (Nyakkendő vagy magas nyakú ing esetén +5%)	0,29	könnyű	0,26
		vastag	0,70
Mellény		Szoknya	
könnyű	0,15	könnyű	0,10
vastag	0,29	vastag	0,22
Nadrág		Pantalló	
könnyű	0,26	könnyű	0,26
vastag	0,32	vastag	0,32
Pulóver		Pulóver	
könnyű	0,20	könnyű	0,17
vastag	0,37	vastag	0,37
Zakó		Blézer	
könnyű	0,22	könnyű	0,17
vastag	0,49	vastag	0,37
Lábbeli			
Zoknifélék		Harisnyafélék	
bokazokni	0,04	harisnya	0,01
térdzokni	0,10	harisnyanadrág	0,01
Cipők		Cipők	
szandál	0,02	szandál	0,02
félcipő	0,04	félcipő	0,04
csizma	0,08	csizma	0,08

ahol A_{eff} a ruhával borított test effektív sugárzó felülete, m^2 ; ε a ruházattal borított test külső felületének emittálóképessége; σ Stefan–Boltzmann-állandó, $5,7 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2K); t_{ks} értelmezésével már foglalkoztunk; A_{eff} meghatározható a következő egyenlettel:

$$A_{eff} = f_{eff} f_{cl} A_{Du} [m^2], \quad (4.5.22)$$

ahol f_{eff} az effektív sugárzófelület tényező, mégpedig a test effektív sugárzó felületnek és a teljes testfelületnek viszonyszáma; f_{cl} értelmezésével a korábbiakban már foglalkoztunk; A_{Du} az ún. Du Bois-felület (azaz a mezítelen test felszíne, m^2).

A különböző értékeket behelyettesítve a (4.5.21) egyenletbe:

$$R = 4,0 \cdot 10^{-8} A_{\text{Du}} f_{\text{cl}} (t_{\text{cl}} - 273)^4 - (t_{\text{ks}} - 273)^4 \quad [\text{W}]. \quad (4.5.23)$$

$$C = A_{\text{Du}} f_{\text{cl}} h_c (t_{\text{cl}} - t_l) \quad [\text{W}], \quad (4.5.24)$$

ahol mindössze h_c értéke, illetve értelmezése új; h_c nem más, mint a α_c konvektív hőátadási tényező $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ dimenzióval. Nagysága természetesen a levegő-áramlás minőségétől függ.

Nyugvó levegő esetén Nielsen és Pedersen összefüggése alkalmazható:

$$\alpha_c = 2,4 (t_{\text{cl}} - t_l)^{0,25} \quad [\text{W}], \quad (4.5.25)$$

amely a lamináris áramlásra vonatkozik

$$\text{Nu} = \text{állandó} \cdot (\text{GrPr})^{0,25} \quad (4.5.26)$$

egyenletből határozható meg.

Kényszeráramlás, de 2,6 m/s-nél kisebb légsebesség esetén Winslow és Harrington által kidolgozott egyenlet alkalmazható:

$$\alpha_c = 12,1 \sqrt{v} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})], \quad (4.5.27)$$

amelyet a

$$\text{Nu} = \text{állandó} \cdot \text{Re}^m \text{Pr}^n \quad (4.5.28)$$

ismert képletből vezettek le.

Mint közelítő határértékét fogadták el a (4.5.25) és (4.5.27) egyenletek között a 0,1 m/s sebességet, amely alatt a nyugvó levegőre vonatkozó (4.5.25) egyenlet ennél nagyobb sebesség esetén pedig a (4.5.27) egyenlet alkalmazható.

4.5.4. Az emberi test hőegyensúlyán alapuló általános méretezési módszerek

Az e témához tartozó ismeretek két fő csoportra oszthatók:

- a hőegyensúlyi és komfort egyenletekre és
- a komfort diagrammokra.

4.5.4.1. Hőegyensúlyi és komfort egyenletek

Az emberi test hőtermelésének és hőleadási módjának számítására kezdetben a következő egyszerű ún. általános hőegyensúlyi egyenletet alkalmazták:

$$S = M \pm W \pm E \pm R \pm C, \quad (4.5.29)$$

ahol S az emberi test hőtárolása, illetve hőmérséklet-változása egységnyi idő alatt; M metabolikus hő; W a mechanikai munka; E a párolgásos hőleadás; R a sugárzásos hőleadás; C a konvekciós hőleadás.

Amennyiben az egyenlet jobb oldalán $E \cdot R \cdot C$ pozitív, a test hőmérséklete növekszik, tehát az egyénnek melege van, míg negatív esetben a test hőmérséklete csökken, tehát az egyén fázik. Hőegyensúly $S = 0$ esetben adódik, ekkor az ember hőérzete kedvező, kellemes.

A fizikai munkánál meg kell jegyezni, hogy W pozitív akkor, ha a fizikai munkához az energiát az M értékéből kell fedezni (pl. lépcső megmászása), viszont W negatív akkor, ha lejtőn sétálunk lefelé. E értéke mindenkor negatív, kivéve az emberi szervezet hőkárosodását.

Újabb kutatások eredményeképpen ezt az alapösszefüggést továbbfejlesztették, és a jelenleg legfejlettebbnek tekinthető és műszaki gyakorlatban legáltalánosabban alkalmazott ún. Fanger-féle elmélet szerint az emberi test hőegyensúlya a következő tényezők függvénye:

$$f \left[\frac{H}{A_{Du}}, I_{cl}, t_l, t_{ks}, p_l, v, t_{bf}, \frac{E_{sw}}{A_{Du}} \right] = 0, \quad (4.5.30)$$

ahol H/A_{Du} a test felületegység belső hőtermelése, I_{cl} a ruházat termikus ellenállása, t_l a levegő hőmérséklet, t_{ks} a közepes sugárzási hőmérséklet, p_l a nyugvó levegőben a vízgőz parciális nyomása, v a relatív légsebesség, t_{bf} a közepes bőrhőmérséklet, E_{sw}/A_{Du} a testfelületegység hővesztesége párolgással és izzadással.

Az egyes tényezőkkel már foglalkoztunk, azok ismertek, és bővebb magyarázatot nem kívánnak. Adott tevékenységi szintekre, komfortkörülményekre a közepes hőmérsékletet (t_{bf}) és párolgásos hőleadást (E_{sw}) laboratóriumi mérésekkel meghatározták, így e két tényező felírható mint

$$t_{bf} = f \left[\frac{H}{A_{Du}} \right] \quad (4.5.31)$$

és

$$E_{sw} = A_{Du} \left[\frac{H}{A_{Du}} \right], \quad (4.5.32)$$

így a (4.5.30) egyenlet felírható a következő formában:

$$f\left[\frac{H}{A_{du}}, I_{cl}, t_l, t_{ks}, p_l, v\right] = 0. \quad (4.5.33)$$

Ezek tehát azok a tényezők, amelyek konstans környezetben huzamosabban tartózkodó és az adott tevékenységet huzamosabban folytató egyénekre hatnak, amelyekre a hőegyensúlyi egyenlet felírható.

Mindezeket figyelembe véve a hőegyensúlyi alapegyenlet a következő:

$$H - E_d - E_{sw} - E_{re} - L = K = R + C, \quad (4.5.34)$$

ahol H az emberi test belső hőtermelése, E_d a bőrön keresztül páradiffúzióval való hőveszteség, E_{sw} a bőr felszínéről az izzadás következtében elpárolgó hőveszteség, E_{re} a kilégzés rejtett hője okozta hőveszteség, L a kilégzés ún. száraz hővesztesége, K a hőátadás a bőr felületéről a felöltözött emberi test külső felületére (hővezetés a ruházaton keresztül), R a sugárzásos hőveszteség a ruházattal borított test külső felületéről, C a konvekciós hőveszteség a ruházattal borított test külső felületéről.

Az egyenlet egyes tagjai helyére először beírhatjuk a korábbiakban már tárgyalt rész-összefüggéseket mégpedig H értékre a (4.5.3), illetve a (4.5.4), K értékre a (4.5.17), R értékre a (4.5.23), C értékre a (4.5.22) számú egyenletet.

Az eddig nem tárgyalt tényezők pedig a következő összefüggések segítségével határozhatók meg.

$$E_d = \lambda m A_{Du} (p_{bf} - p_l) [W], \quad (4.5.35)$$

ahol $\lambda = 2,4 \cdot 10^6$ J/kg a 35 °C hőmérsékletű víz párolgáshője, m a bőrállandó értéke, p_{bf} a telített gőz nyomása a bőr hőmérsékletének megfelelően, p_l a nyugvó levegő gőznyomása.

A kifejezésből az m értéke komfort követelmények között $2260 \cdot 10^{-8}$ kg/(s m² Pa).

p_{bf} értéke táblázatokból mint t_{bf} , tehát a közepes hőmérséklet függvényeként meghatározható. 27 °C < t_{bf} < 37 °C között, a következő lineáris megközelítés használható 3%-nál kisebb hibával:

$$p_{bf} = (1,92t_{bf} - 25,3) 133 [Pa]. \quad (4.5.36)$$

Ezt, valamint λ értékét behelyettesítve a (4.5.35) egyenletbe, kapjuk végül, hogy

$$E_d = 0,41 A_{Du} (1,92t_{bf} - 25,3 - p_l). \quad (4.5.37)$$

Az izzadással leadható hőmennyiség elsősorban Fanger kísérletei alapján az

$$E_{sw} = 0,49 A_{Du} \left[\frac{H}{A_{Du}} - 50 \right] [W] \quad (4.5.38)$$

egyenletből határozható meg.

A légzéssel leadott rejtett hő meghatározható a

$$E_{re}=0,0027 M(44 - p_l) [W] \quad (4.5.39)$$

összefüggésből, amelynek minden tényezője ismert.

Végül a légzéssel leadott hő (ún. száraz hő) meghatározható az

$$L = V c_p (t_{ex} - t_l) = 0,16 M (t_{ex} - t_l) [W] \quad (4.5.40)$$

egyenletből, ahol $V = 0,0060 [M \text{ kg}]$ a légzési levegőmennyiség, $c_p = 1000 \text{ J/(kg K)}$ ismert értékek.

A kifejezés további értékeiből még ismeretlen a kilélegzett levegő hőmérséklete, amely meghatározható a

$$t_{ex} = 32,6 + 0,066 t_l + 32 W_l [^\circ\text{C}] \quad (4.5.41)$$

egyenletből, amely 34°C átlagos kilélegzett levegő hőmérsékletre vonatkozik, és W_l a belélegzett levegő nedvességtartalma $\text{kg víz/kg száraz levegő}$ értékben.

A (4.5.41)-et behelyettesítve a (4.5.40) egyenletbe, kapjuk a könnyebben kezelhető végső formulát:

$$L=0,0014 M(34-t_l) [W]. \quad (4.5.42)$$

Mindezeket behelyettesítve a (4.5.34) egyenletbe kapjuk az ún. hőegyensúlyi egyenletet:

$$\begin{aligned} & \frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - 0,35(1,92 t_{bf} - 25,3 - p_l) - \frac{E_{sw}}{A_{Du}} - 0,0023 \frac{M}{A_{Du}}(44 - p_l) - \\ & - 0,0014 \frac{M}{A_{Du}}(34 - t_l) = \frac{t_{bf} - t_{cl}}{0,18 I_{cl}} = \\ & = 3,4 \cdot 10^{-8} f_{cl} (t_{cl} + 273)^4 - (t_{ks} + 273)^4 + f_{cl} \alpha_c (t_{cl} - t_l). \end{aligned} \quad (4.5.43)$$

Igen részletes mérésorozat eredményeit feldolgozva és a regresszióanalízist elvégezve, a tevékenységi szint és a bőrhőmérséklet, valamint a verejtékezés között Fanger a következő számszerű összefüggéseket dolgozta ki a (4.5.31), illetve a (4.5.32) függvénykapcsolatra:

$$t_{bf} = 35,7 - 0,032 \frac{H}{A_{Du}} [^\circ\text{C}] \quad (4.5.44)$$

és

$$E_{sw} = 0,49 A_{Du} \left[\frac{H}{A_{Du}} - 50 \right] [W]. \quad (4.5.45)$$

Arra vonatkozólag, hogy ezek a megoldások gyakorlatilag mit jelentenek, itt részletesen nem kívánunk kitérni. Minden esetre amennyiben a (4.5.44) és

(4.5.45) egyenleteket behelyettesítjük a (4.5.43) hőegyensúly egyenletbe, kapjuk az ún. komfort egyenletet, amely már figyelembe veszi a bőrhőmérséklet és a verejtékkiválasztás komforttól függő változását is:

$$\begin{aligned} & \frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - 0,35 \left[43 - 0,061 \frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - p_l \right] - 0,42 \left[\frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - 50 \right] - \\ & - 0,0023 \frac{M}{A_{Du}}(44 - p_l) - 0,0014 \frac{M}{A_{Du}}(34 - t_l) = \frac{35,7 - 0,032 \frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - t_{cl}}{0,18I_{cl}} = \\ & = 3,4 \cdot 10^{-8} \int_{cl} \left[(t_{cl} + 273)^4 - (t_{ks} + 273)^4 \right] + f_{cl} \alpha_c (t_{cl} - t_l). \end{aligned} \quad (4.5.46)$$

A műszaki gyakorlatban azonban a (4.5.34) alapösszefüggésnek a

$$H - E_d - E_{sw} - E_{re} - L = R + C, \quad (4.5.47)$$

formáját alkalmazzuk, amelybe viszont behelyettesítve a megfelelő összefüggéseket kapjuk az ún. komfort egyenletet:

$$\begin{aligned} & \frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - 0,35 \left[43 - 0,061 \frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - p_l \right] - 0,42 \left[\frac{M}{A_{Du}}(1-\eta) - 50 \right] - \\ & - 0,0023 \frac{M}{A_{Du}}(44 - p_l) - 0,0014 \frac{M}{A_{Du}}(34 - t_l) = \\ & = 3,4 \cdot 10^{-8} f_{cl} \left[(t_{cl} + 273)^4 - (t_{ks} + 273)^4 \right] + f_{cl} \alpha_c (t_{cl} - t_l). \end{aligned} \quad (4.5.48)$$

4.5.4.2. Komfort diagramok

A komfort egyenletekbe a megfelelő paramétereket behelyettesítve és azokat különböző paraméter csoportokra megoldva dolgozta ki Fanger a komfort diagramokat. Ezeket a (4.5.48) egyenlet alapján szerkesztették meg, s erre azért volt szükség, mert az egyenlet megoldása nehézkes, sok iterációs lépést igényel.

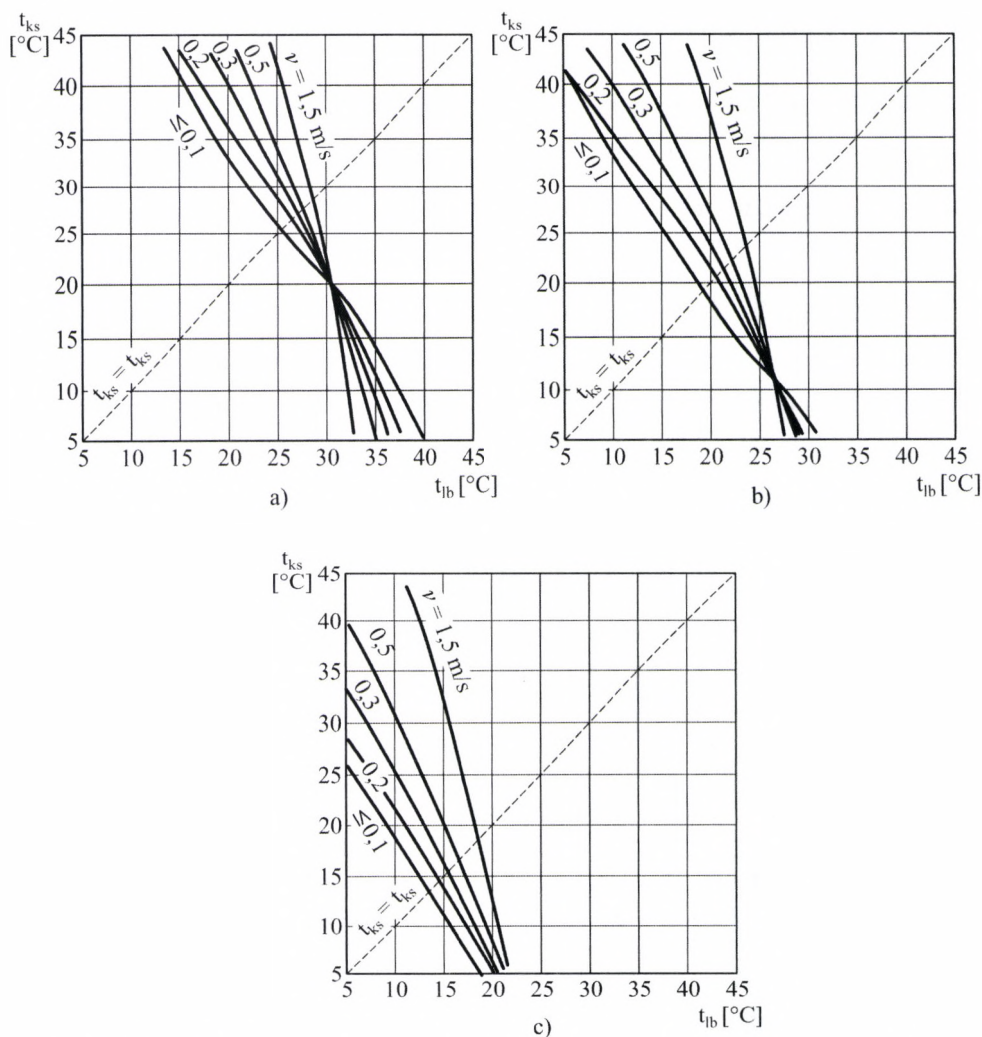
A komfort diagramok jelenleg már közismertnek tekinthetők, ezért itt röviden csak áttekintjük tartalmukat, s bemutatásra csak azok kerülnek, amelyek a sugárzófűtések esetében a leggyakrabban használatosak, tehát azok, amelyek esetében a levegő-hőmérséklet és a közepes sugárzási hőmérséklet nem azonos.

A szorosan vett komfort diagramok közé 28 diagramot sorolunk. Ezek három csoportba oszthatók:

1. az első csoport $4 \cdot 3 = 12$ diagramja esetében a nedves gömbhőmérséklet, valamint azonos levegő- és közepes sugárzási hőmérséklet függvényében a relatív nedvességtartalom és relatív légsebesség értékek a paraméterek;

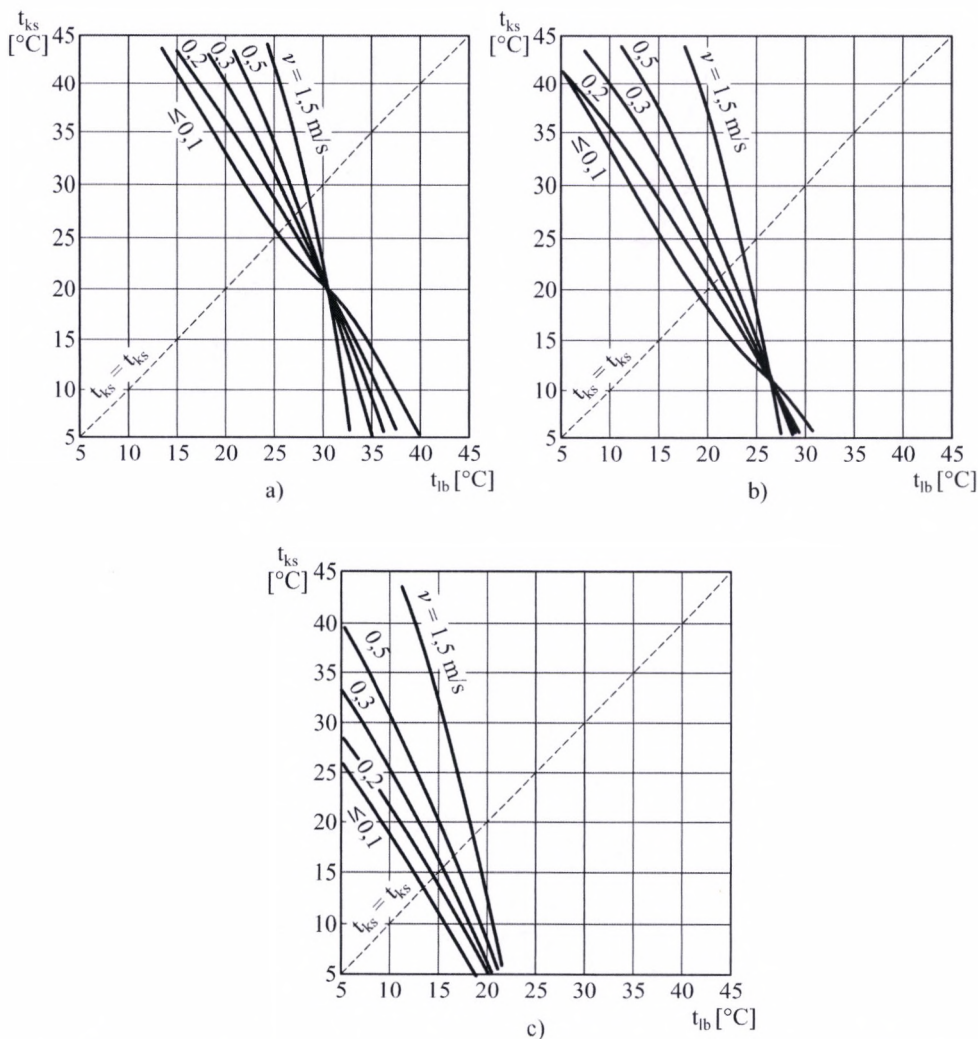
2. a második csoportba sorolható 4 diagram esetében – azonos levegő- és közepes sugárzási hőmérséklet függvényében – különböző relatív légsebességek mellett az aktivitás a paraméter, $\varphi = 50\%$ esetén;
3. a harmadik csoportba sorolható $4 \cdot 3 = 12$ diagram esetében a levegő-hőmérséklet, valamint a közepes sugárzási hőmérséklet függvényében a relatív légsebesség a paraméter.

Ez utóbbi csoport, amelyet sugárzófűtések esetében alkalmazhatunk, 50% relatív nedvességtartalomra vonatkozik, és az egyes diagramok a következő esetekre használhatók.



4.5.1. ábra. Komfort diagram a levegő-hőmérséklet és a közepes sugárzási hőmérséklet függvényében meztelen emberekre ($I_{cl}=0$)

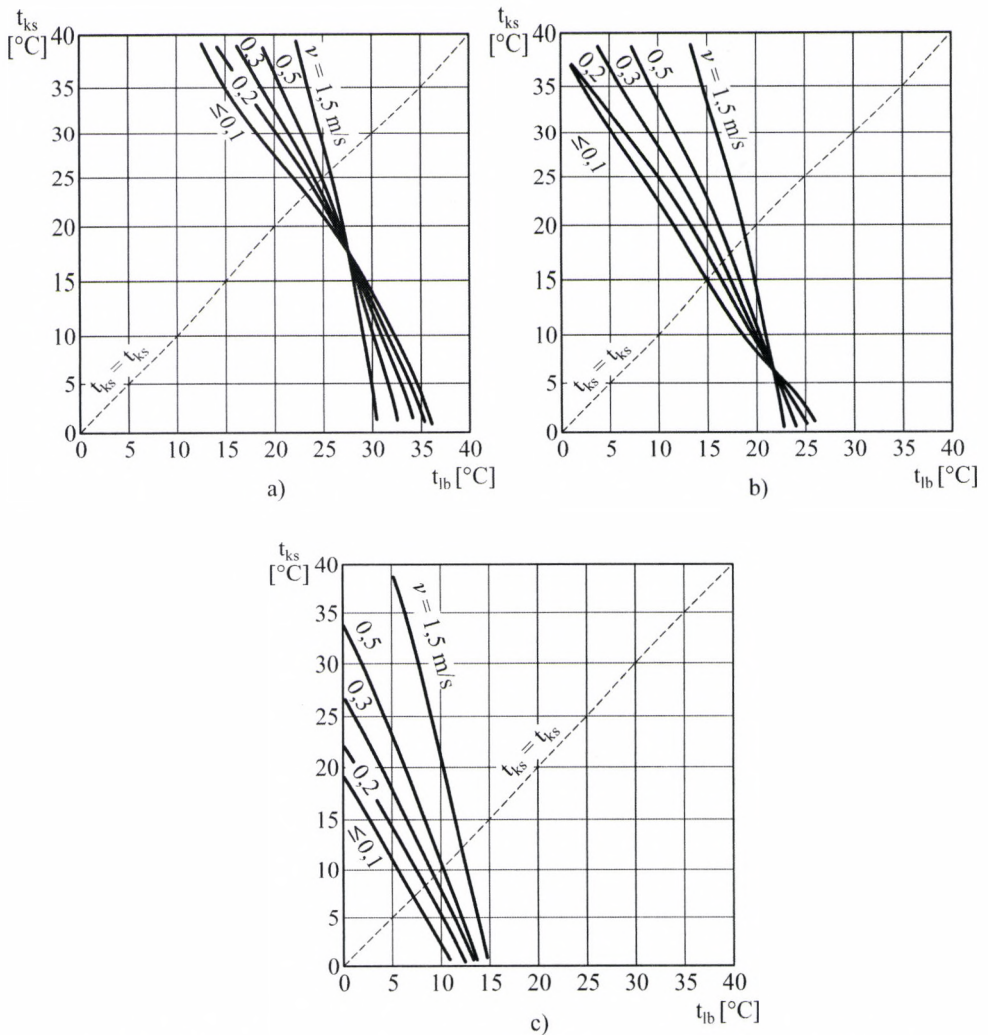
- 4.5.1. *ábra*; mezítelen emberek ($I_{cl}=0$):
 - a) nyugalmi állapotra $M/A_{Du}=58 \text{ W/m}^2 [=50 \text{ kcal/(h m}^2)]$,
 - b) közepes aktivitás állapotára $M/A_{Du}=116 \text{ W/m}^2 [=100 \text{ kcal/(h m}^2)]$,
 - c) intenzív aktivitásra $M/A_{Du}=175 \text{ W/m}^2 [=150 \text{ kcal/(h m}^2)]$.
 - 4.5.2. *ábra*; könnyű öltözetű emberek ($I_{cl}=0,5$).
 - 4.5.3. *ábra*; közepes öltözetű emberek ($I_{cl}=1,0$).
 - 4.5.4. *ábra*; nehéz öltözetű emberek ($I_{cl}=1,5$) értékeire vonatkozik, a 4.5.1. ábrán már ismertetett három tevékenységi szint esetében.
- Mint ismeretes a komfort diagramokhoz további, ún. kisegítő diagramok tar-



4.5.2. *ábra*. Komfort diagram a levegő-hőmérséklet és a közepes sugárzási hőmérséklet függvényében könnyű öltözetű emberekre ($I_{cl}=0,5$)

toznak. Ezek közül itt csak azokat mutatjuk be, amelyek a sugárzófűtésekkel szorosan összefüggnek.

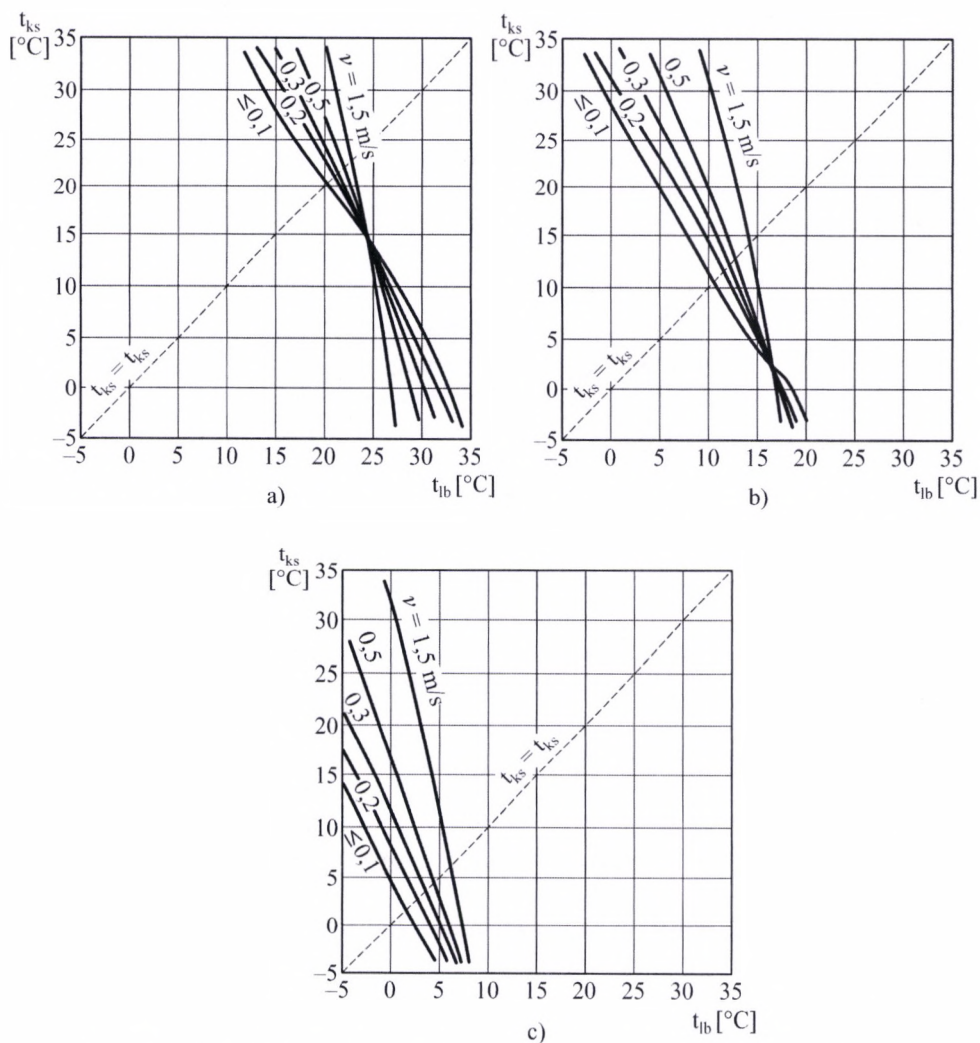
A 4.5.5. ábrán a ruha hővezetési ellenállása és a légsebesség függvényében a levegő- és a közepes sugárzási hőmérséklet, t_l és t_{ks} változásának hatása látható, a három különböző tevékenységi szint esetében. A diagram tulajdonképpen azt mutatja, ha a közepes sugárzási hőmérséklet 1 °C-kal emelkedik, mennyivel kell csökkenteni a levegő hőmérsékletét, hogy a komfort értékeket biztosítsuk a különböző relatív légsebességek és clo értékek esetén. A diagramot a $t_l = t_{ks}$ alapegyenletből szerkesztették, és 50% relatív nedvességtartalomra vonatkozik. Ter-



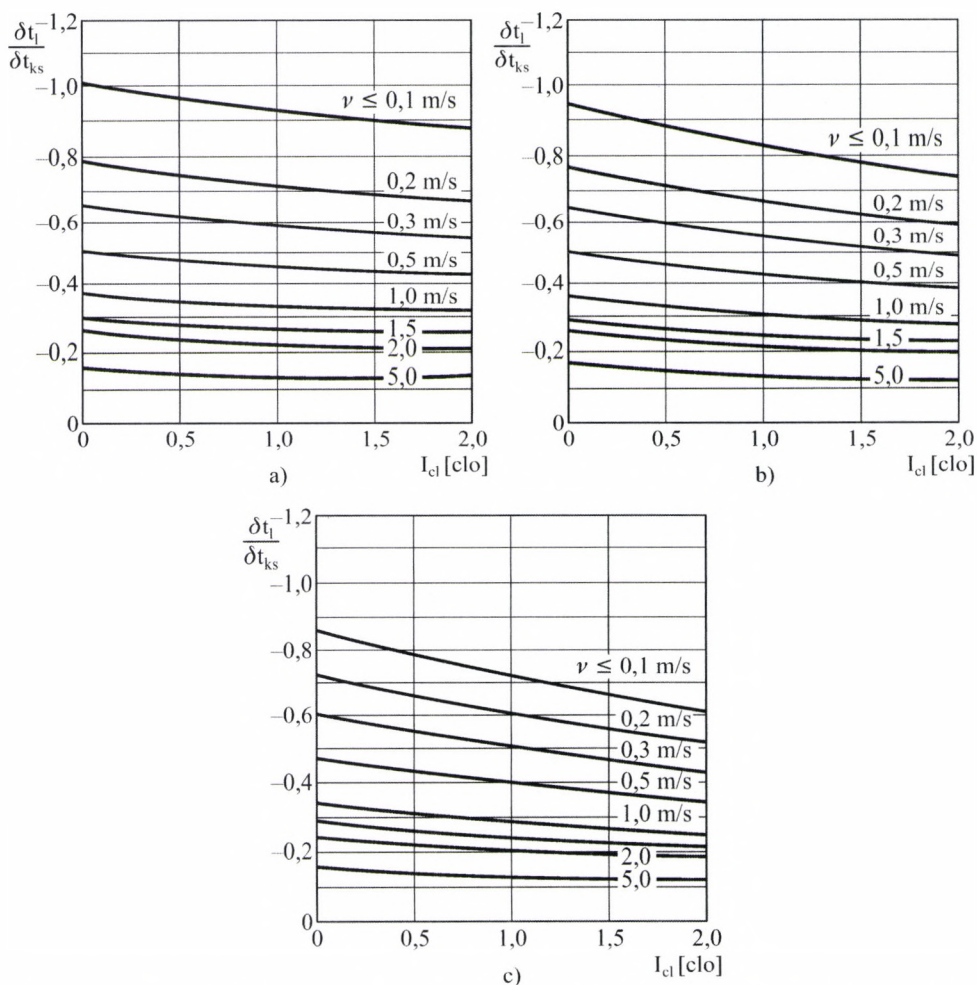
4.5.3. ábra. Komfort diagram a levegő-hőmérséklet és a közepes sugárzási hőmérséklet függvényében közepes öltözetű emberekre ($I_{cl}=1$)

mésztesen növekvő sugárzási hőmérséklet esetén a komfortérzet kialakítása érdekében a levegőhőmérséklet értékét csökkenteni kell.

Megjegyezzük, hogy a kellemes hőérzetet eredményező komfort hőmérséklet nemcsak a 4.5.1. - 4.5.5. diagramokból határozható meg, hanem a többi, itt be nem mutatottból is, ahol a közepes sugárzási hőmérséklet és levegő-hőmérséklet azonos.



4.5.4. ábra. Komfort diagram a levegő-hőmérséklet és a közepes sugárzási hőmérséklet függvényében nehéz öltözetű emberekre ($I_{cl}=1,5$)



4.5.5. ábra. Kisegítő komfort diagram a levegő- és közepes sugárzási hőmérséklet változása hatásának meghatározására

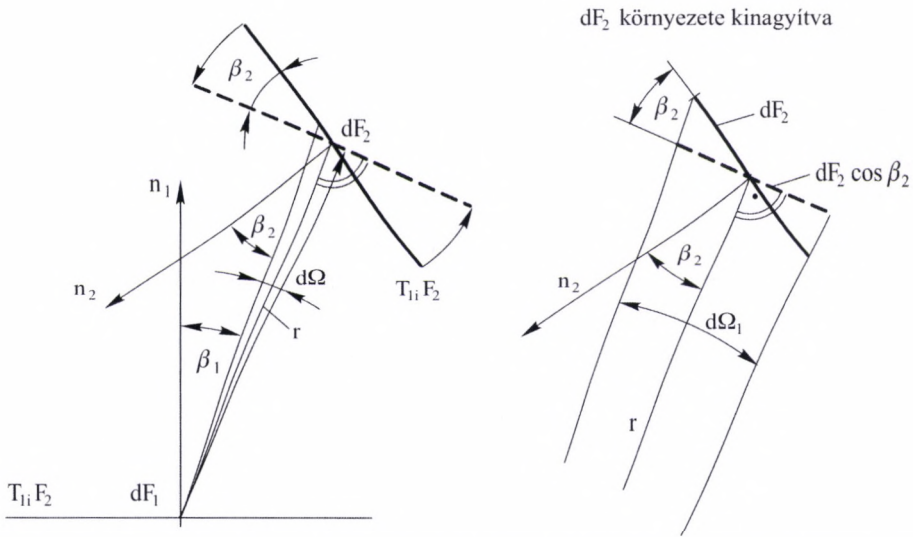
4.5.5. Az emberi test sugárzásos hőcseréjének pontos számítása

A műszaki gyakorlatban a sugárzásos hőcsere két számítási módszere ismeretes

- sugárzásos hőcsere felület és felületelem között
- sugárzásos hőcsere felületek között

de ezek két dimenzióra vonatkoznak.

Az első esetben a hőcserét az ismert



4.5.6. ábra. Általános helyzetű felületek sugárzásos hőcseréjének magyarázata, amikor a visszavert sugárzást elhanyagoljuk, s csak a saját sugárzásokat vesszük számításba

$$Q_{1-2} = CdA_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{1}{\pi} \left(\int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 \right) \quad (4.5.49)$$

kifejezéssel határozhatjuk meg, ahol az egyes betűjelzések magyarázata a 4.5.6. ábrán látható.

A (4.5.49) összefüggésben a

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 \quad (4.5.50)$$

azt fejezi ki, hogy az 1 jelű felületelemről a félgömbtérbe távozó teljes sugárzásnak mekkora része jut a 2 jelű felületre; vagy az 1 jelű felületelelemre a félgömbtérből beérkező összes sugárzásból mekkora hányad jön a 2 felületről.

A φ tényezőt a továbbiakban felületelelem és felület közötti besugárzási tényezőnek nevezzük.

Két felület közötti hőcsere:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= A_1 C \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \Phi_{12} = \\ &= C \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{1}{\pi} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad [\text{W}], \end{aligned} \quad (4.5.51)$$

Az ábra jelöléseit figyelembe véve felírható a következő egyenlet:

$$A_{\text{eff}} \Phi_{E_{A_2}} = A_2 \Phi_{A_2 E}, \quad (4.5.55)$$

ahol A_{eff} az egyén effektív besugárzott felülete, $\Phi_{E_{A_2}}$ az ún. szögtényező az egyén és az őt környező A_2 felületű gömb között, $A_2 = 4\pi r_m^2$ a gömb felülete, $\Phi_{A_2 E}$ a szögtényező a gömbfelület és az egyén között.

Jól látható, hogy a szögtényező tulajdonképpen besugárzási tényező, amely azonban nem egy fél-, hanem az egész gömbfelületre vonatkozik. Éppen azért, hogy a két különböző meghatározásra, különböző elnevezést adjunk; a félgömb esetében besugárzási, a gömbfelület esetében pedig szögtényezőről beszélünk.

Mivel a $\Phi_{E_{A_2}}$ szögtényező meghatározza az emberi testről érkező sugárzás azon hányadát, amely az A_2 felületre érkezik, így nyilvánvaló, hogy ezt egységnek tekinthetjük. Ennek megfelelően az előző egyenlet felírható a következő formában:

$$A_{\text{eff}} = 4\pi r_m^2 \Phi_{A_2 E}. \quad (4.5.56)$$

A $\Phi_{A_2 E}$ tényező viszont közvetlenül nem határozható meg, hanem csak integrálással, amely az egyes dA_2 felületelemekre vonatkozik a hozzájuk tartozó α és β szögtényezők figyelembevételével.

A szögtényező tehát felírható a dA_2 elem és az egyén között a következő formában:

$$\Phi_{dA_2 E} = \frac{A_E}{\pi r_m^2}, \quad (4.5.57)$$

ahol A_E a dA_2 elem normálisára merőleges emberi testfelületet.

Az előbbi elemi tényezőket összegezve kapjuk a

$$\Phi_{dA_2 E} = \frac{1}{A_2} \int \frac{A_E}{\pi r_m^2} dA_2 \quad (4.5.58)$$

egyenletet, amelyből

$$dA_2 = r_m d\alpha \cos\beta r_m d\beta \quad (4.5.59)$$

és

$$A_2 = 4\pi r_m^2, \quad (4.5.60)$$

tehát

$$\Phi_{A_2 E} = \frac{1}{4\pi r_m^2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A_E \cos\beta d\beta d\alpha. \quad (4.5.61)$$

Az emberi test szimmetrikus voltát feltételezve, valamint azt, hogy A_E mindkét oldalon azonos, az integrál felírható az egész gömbfelületre, s amely egyenlő a negyedgömb négyszeresével, tehát

$$\Phi_{A_2E} = \frac{1}{\pi^2 r_m^2} \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}} A_E \cos \beta d\beta d\alpha . \quad (4.5.62)$$

Végül figyelembe véve az (4.5.56) számú egyenletet, felírható, hogy

$$A_{\text{eff}} = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}} A_E \cos \beta d\beta d\alpha . \quad (4.5.63)$$

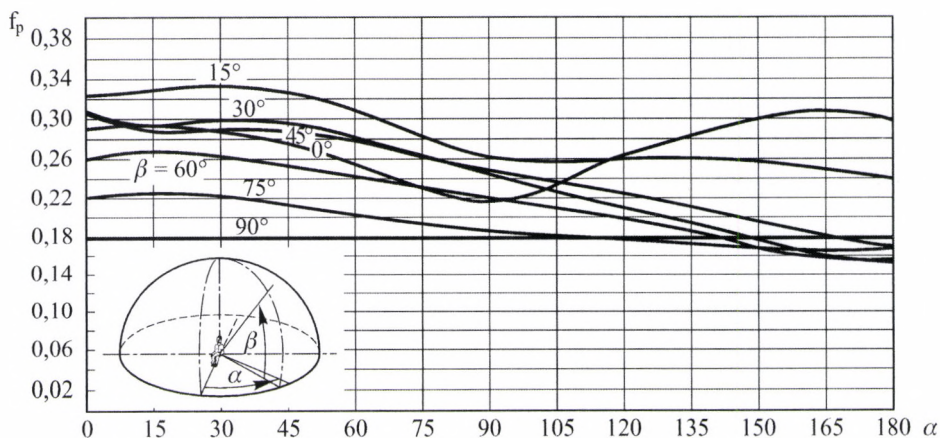
A_{eff} értékeit Fanger igen sok kísérleti személyre határozta meg négy helyzet-ruházat kombinációt, valamint 78 különböző szögtényezőt figyelembe véve. A kísérletek eredményei alapján meztelen egyénekre a következő viszonzszámot határozta meg és alkalmazza:

$$f_{\text{eff}} = \frac{A_{\text{eff}}}{A_{\text{Du}}} . \quad (4.5.64)$$

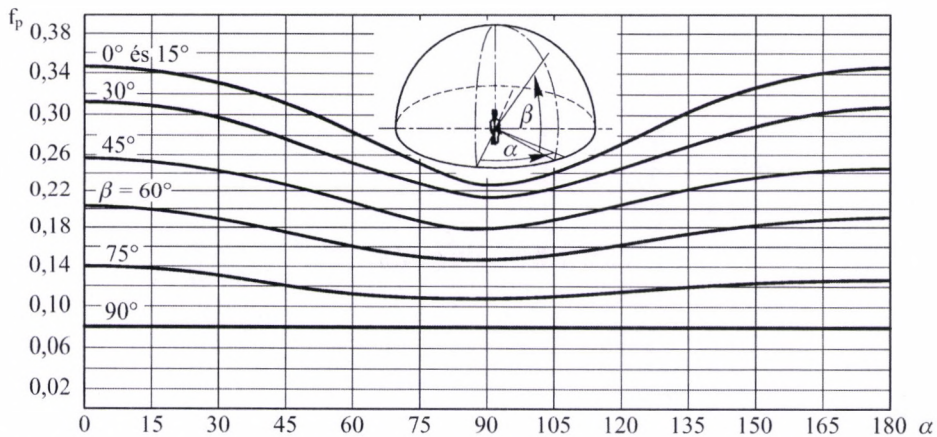
A viszonzszám számszerű értékét Fanger nagyszámú kísérlettel határozta meg, és ezek A_{eff} értékeivel együtt az előzőekben hivatkozott művekben megtalálhatók.

4.5.5.2. A tervezett felületi tényező

Az A_{eff} értékének ismeretében minden helyzet-ruházat kombinációra a tervezett felületi tényező a különböző α, β szögtényezőértékekre az



4.5.8. ábra. A tervezett felületi tényező (f_E) meghatározására alkalmas nomogram ülő emberek esetén



4.5.9. ábra. A tervezett felületi tényező (f_E) meghatározására alkalmas nomogram álló emberek esetén (Fanger szerint)

$$f_E = \frac{A_E}{A_{\text{eff}}} \quad (4.5.65)$$

egyenlettel meghatározható.

A mérési és számítási eredmények alapján Fanger két diagramot dolgozott ki; a 4.5.8. ábra ülő egyénekre, míg az 4.5.9. ábra álló egyénekre vonatkozik. Mivel kísérletei szerint férfiak és nők, valamint felöltözött és mezítelen egyének esetében nagy eltérés nem volt, mindkét diagram általánosan használható.

4.5.5.3. A szögtényező

A szögtényező meghatározásakor az 4.5.10. ábra nyújt segítséget a betűjelzések értelmezéséhez. Az ábrán az egyén az x, y, z koordináta-rendszerben áll (koordinátái: $0, c, 0$) arccal az xz síkban levő felület felé.

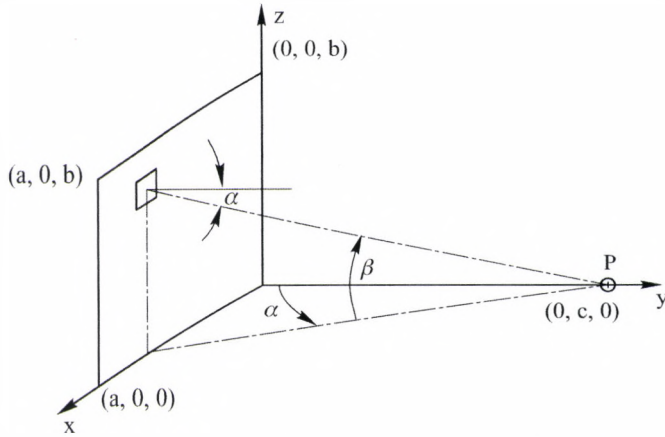
Egy $dA = dx dz$ felületelemre és az egyénre vonatkozóan az ismert elvek szerint felírható az

$$A_{\text{eff}} d\Phi_{\text{EdA}} = \Phi dA_{\text{dAE}} \quad (4.5.66)$$

egyenlet, ahol $d\Phi_{\text{EdA}}$ a differenciális szögtényező az egyén (E) és a dA között, Φ_{dAE} a szögtényező a dA felületelem és az egyén között.

A 4.5.10. ábra jelöléseit figyelembe véve felírhatók továbbá a következő egyenletek:

$$\Phi_{\text{dAE}} = \frac{1}{\pi} \frac{A_E}{x^2 + y^2 + z^2} \cos y, \quad (4.5.67)$$



4.5.10. ábra .A szögtényező meghatározásakor alkalmazott jelölések (Fanger szerint)

$$\cos y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (4.5.68)$$

$$\Phi dA_{EdA} = \frac{1}{\pi} \frac{A_E}{A_{eff}} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.5.69)$$

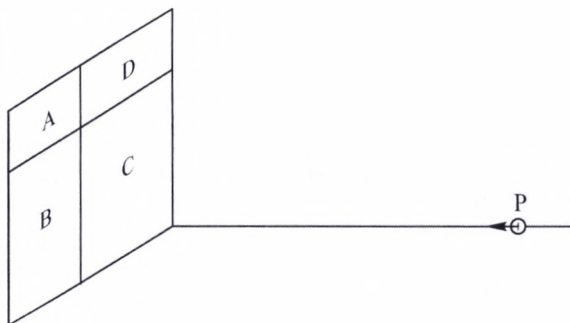
A Φ_{EA} besugárzási tényező tehát az egyén és a teljes felület között

$$\begin{aligned} \Phi_{E-F} &= \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^a \int_{z=0}^b \frac{A_E y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{x}{y}=0}^{\frac{a}{c}} \int_{\frac{z}{y}=0}^{\frac{b}{c}} \frac{F_E}{\left[1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{z}{y}\right). \end{aligned} \quad (4.5.70)$$

A_E értékét a 4.5.5.3 pontban már kifejeztük, mint α és β függvényét. Figyelembe véve a szög és derékszögű koordináta-rendszer közötti korrelációt, felírható:

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{y} \right), \quad (4.5.71)$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{z}{y}}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}}. \quad (4.5.72)$$



4.5.11. ábra. Az összegezett szögtényező számításának magyarázó ábrája

Φ_{EA} dimenzió nélküli érték, amely az (4.5.69) számú egyenletből meghatározható. Az előző általános esetre levezetett egyenlettel pedig kiszámítható a derékszögű koordináta-rendszerben.

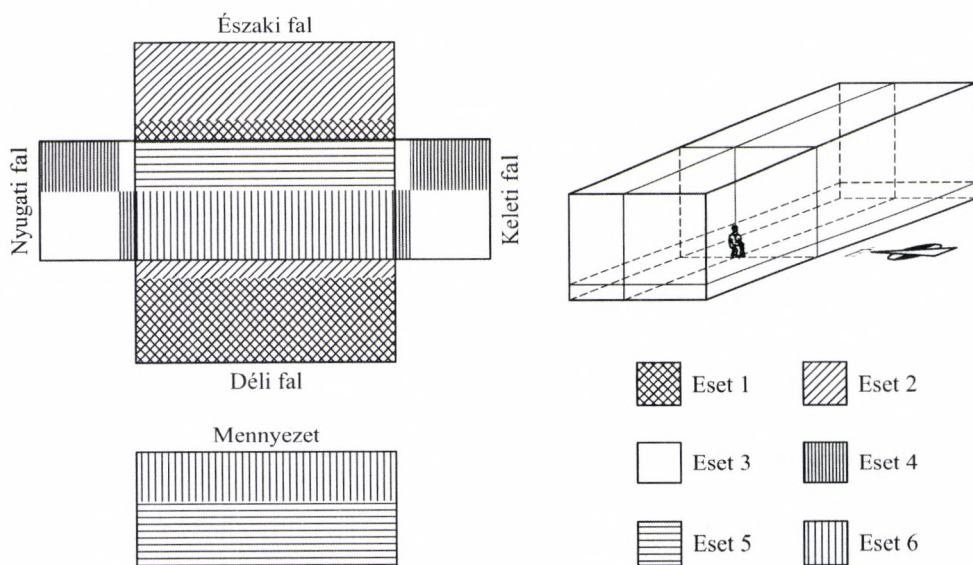
Amennyiben a felületen belül különböző elemekre kell meghatározni a szögtényezőt (pl. ablak egy falon), amelyek hőmérséklete is eltérő, egyszerű matematikai összefüggéssel az összegezett szögtényező kiszámítható a 4.5.11. ábra jelöléseit figyelembe véve:

$$\Phi_{E-A} = \Phi_{E-ABCD} - \Phi_{E-BC} - \Phi_{E-CD} + \Phi_{E-C}. \quad (4.5.73)$$

Egy helyiségen belül levő egyénre a határoló felületek szögtényezői a következő hat esetre oszthatók a 4.5.12. ábra jelöléseit figyelembe véve:

1. Az egyénnel szemben középpontja felett, vagy háta mögött, középpontja alatt levő függőleges felület (lásd az ábrán a pontozott területet).
2. Az egyénnel szemben középpontja alatt, vagy háta mögött, középpontja felett levő függőleges felület (lásd az ábrán a balra dőlően, ferdén vonalkázott területet).
3. Az egyén oldala mellett függőleges felületek, illetve elöl, középpontja felett, vagy hátul középpontja alatt elhelyezkedőek (lásd az ábrán a fehér területeket).
4. Az egyén oldala melletti függőleges felületek, elöl középpontja alatt vagy hátul középpontja felett (az ábrán a függőlegesen vonalkázott terület).
5. Az egyén középpontjával szemben elöl, a feje fölött (mennyezet) és középpontja mögött hátul, alul (padló) elhelyezkedő vízszintes felületek (lásd vízszintes ritka vonalkázás).
6. Az egyén középpontjával szemben, hátul, alul (padló) és középpontja mögött, hátul a feje felett (mennyezet) levő vízszintes felületek (lásd függőleges ritka vonalkázás).

Mind a hat esetben a felület normálisa áthalad a személyen, azaz a felület reámerőleges. A szögtényezőt az előzőekben az első esetre mutattuk be [lásd a (4.5.70) egyenletet]. Hasonló módon meghatározható Φ értéke a többi öt esetre is.



4.5.12. ábra. Egy helyiségen belül ülő egyénre vonatkozó szögtényező (besugárzási tényező) meghatározási elvének magyarázatára vonatkozó ábra

Akkor, ha az egyén helye a helyiségben ismert (középpontjának koordinátái ismertek), de ismeretlen elhelyezkedésének szöge (α), akkor a szögtényező $0 < \alpha < 2\pi$ határértékeit feltételezve, függőleges felületre meghatározható a Φ érték a következő egyenletből:

$$\Phi_{EA} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\frac{x}{y}=0}^{\frac{a}{c}} \int_{\frac{z}{y}=0}^{\frac{b}{c}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \frac{A_E}{\left[1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\left(\frac{z}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) d\alpha. \quad (4.5.74)$$

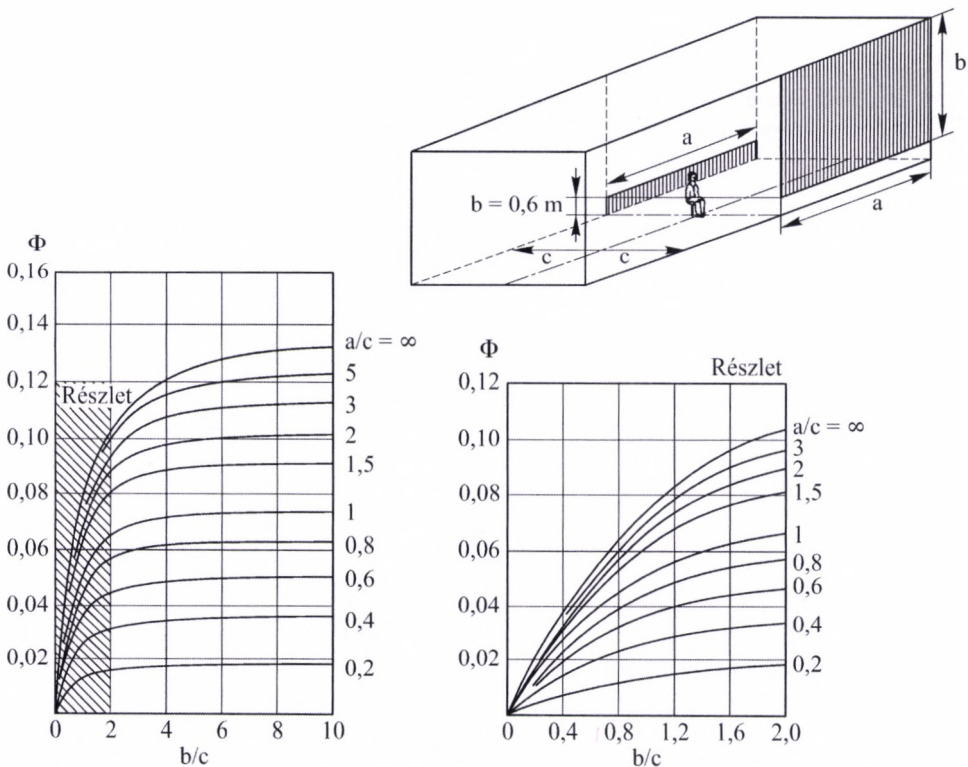
Φ_{EA} tehát a besugárzási tényező (vagy szögtényező), amely akkor érvényes, ha a személy nem merőlegesen helyezkedik el a felületre, hanem függőleges tengely körül elfordulhat.

A besugárzási tényezőkre kapott eredményeket Fanger 13 diagrammban (4.5.13-4.5.25 ábrák) dolgozza fel a korábbiakban ismertetett 6 esetnek megfelelő sorrendben.

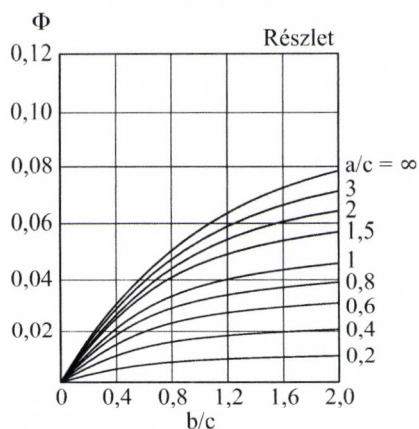
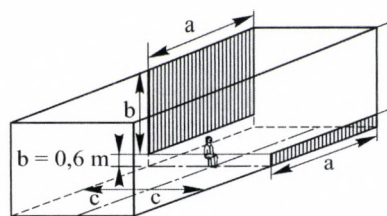
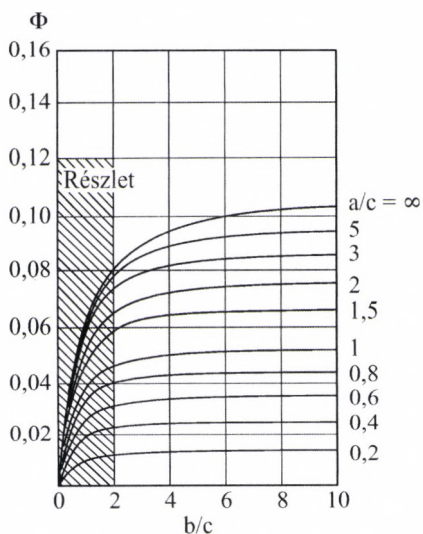
A diagrammok alkalmazásával kapcsolatban a következőkre hívjuk fel a figyelmet:

- Ülő egyének esetében az emberi test középpontja 0,6 m míg álló egyének esetében 1,0 m.

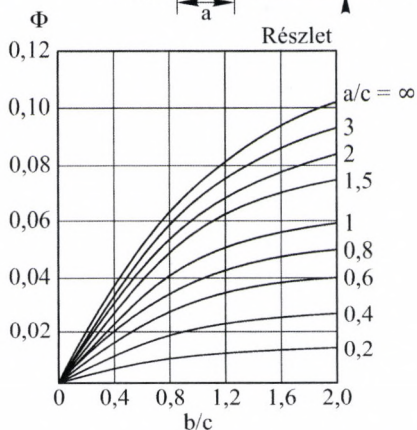
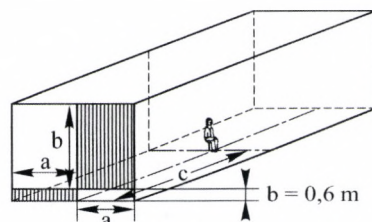
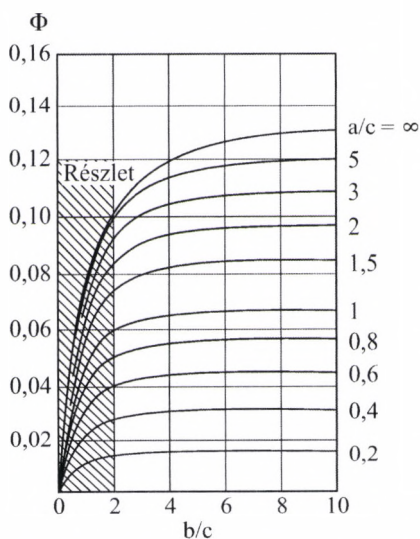
- Az 1. és 2. eseteknek megfelelő 4.5.13. és 4.5.14. ábrán lévő különbség – az ülő egyének elülső mellkasi felületére és hátára vonatkozó besugárzási tényezők közötti különbség – abból adódik, hogy a combok és a lábszár felületét az elülső síknál kell figyelembe venni.
- Hasonló a helyzet a 3. (4.5.15. ábra) és a 4. (4.5.16. ábra), az 1. (4.5.17. ábra), valamint a 6. (4.5.18. ábra) esetekben is.
- A 4.5.19. és 4.5.20. ábrák esetében az egyének elhelyezkedési koordinátái ismertek, de benntartózkodásuk közben elfordulnak. A 4.5.19. ábrán a függőleges, a 4.5.20. ábrán a vízszintes síkokhoz viszonyított besugárzási tényezők értékei találhatók.
- Az 1. és 2., valamint 3. és 4., továbbá 5. és 6. esetekben álló emberre vonatkozóan minimális a különbség, ezért a 4.5.21. ábra az 1. és 2., a 4.5.22. ábra a 3. és 4., a 4.5.23. ábra az 5. és 6. változatokra vonatkozik.
- A 4.5.24. és 4.5.25. ábra azonos esetekre vonatkozik, mint a 4.5.19. és 4.5.20. ábra, csak nem ülő, hanem álló egyénekre.



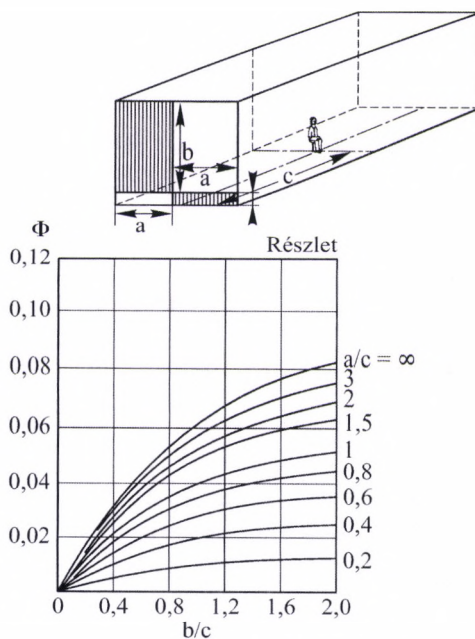
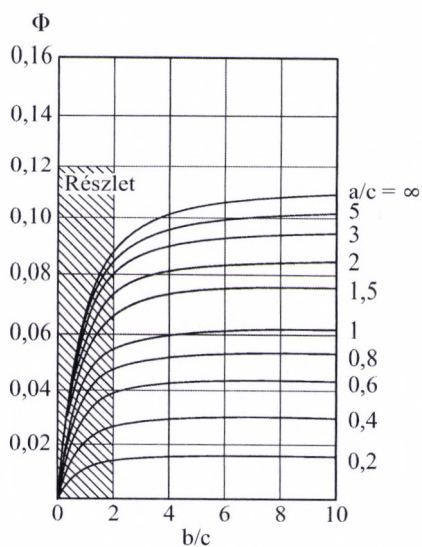
4.5.13. ábra. Besugárzási tényező ülő ember és vertikális síkok között, ha azok vele szemben súlypontja felett, vagy háta mögött súlypontja alatt helyezkednek el



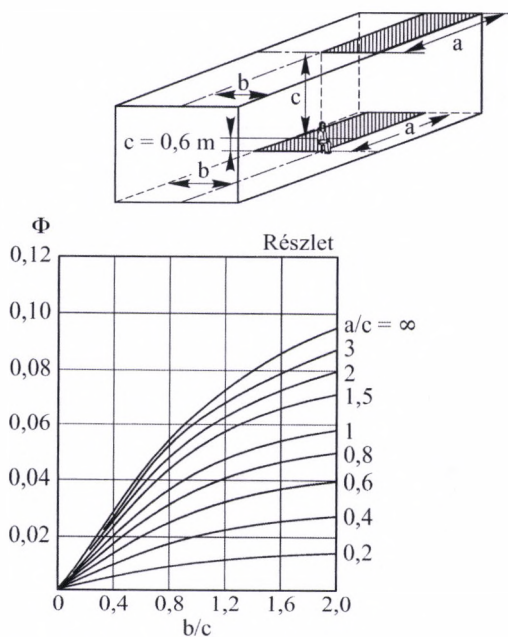
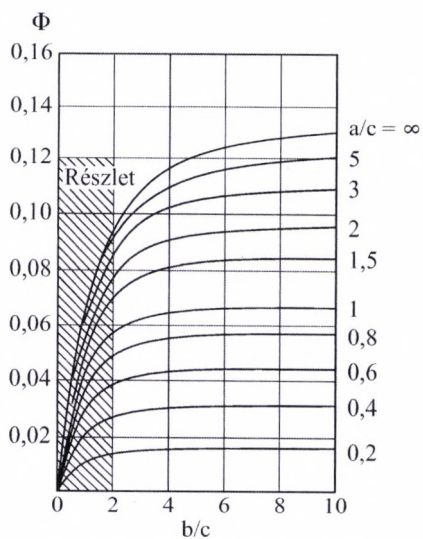
4.5.14. ábra. Besugárzási tényező ülő ember és vertikális síkok között, ha azok vele szemben súlypontja alatt, vagy háta mögött súlypontja felett helyezkednek el



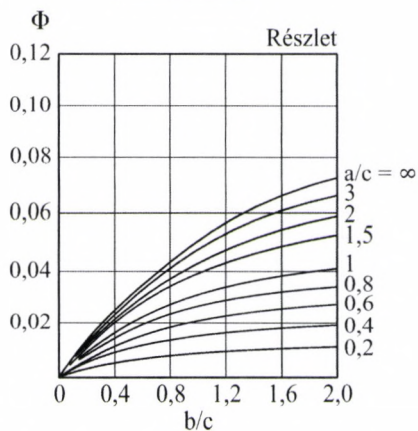
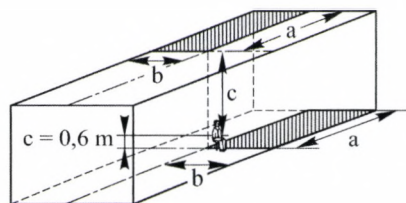
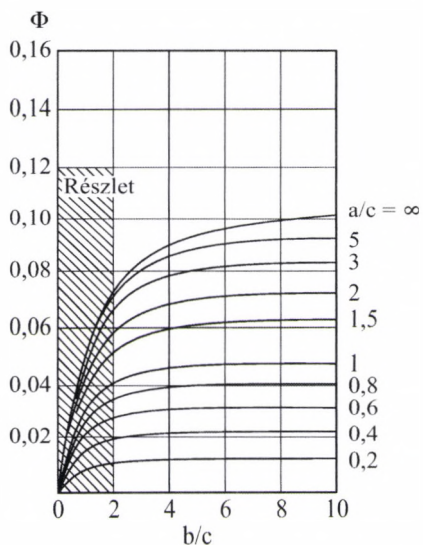
4.5.15. ábra. Besugárzási tényező ülő ember és oldalt lévő vertikális síkok között, ha azok testsíkja előtt és súlypontja felett, vagy testsíkja mögött súlypontja alatt helyezkednek el



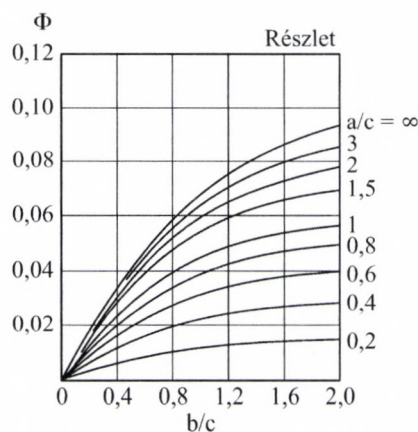
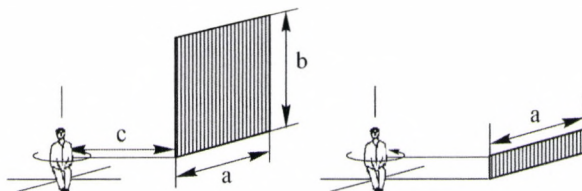
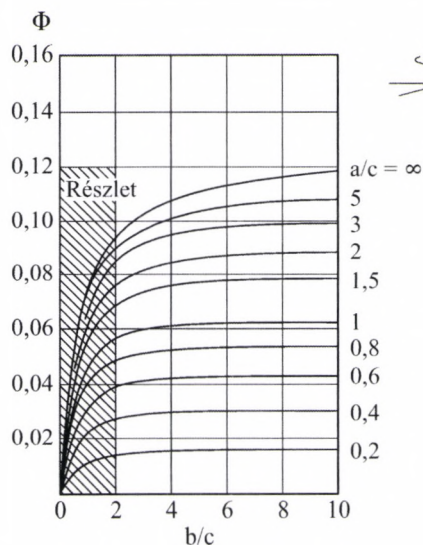
4.5.16. ábra. Besugárzási tényező ülő ember és oldalt lévő vertikális síkok között, ha azok a testsíkja előtt és súlypontja alatt, vagy testsíkja mögött súlypontja felett helyezkednek el



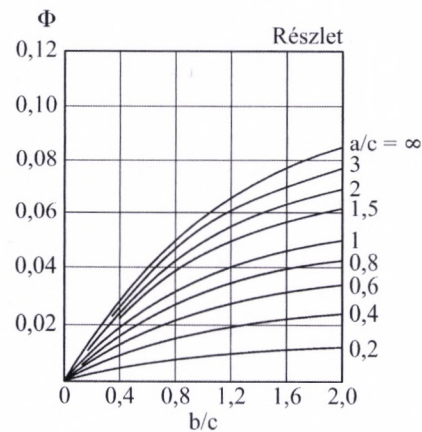
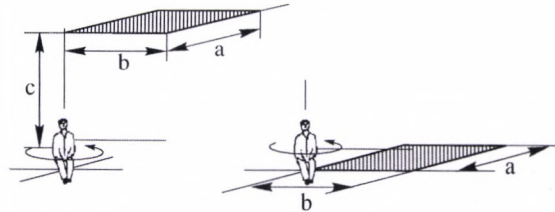
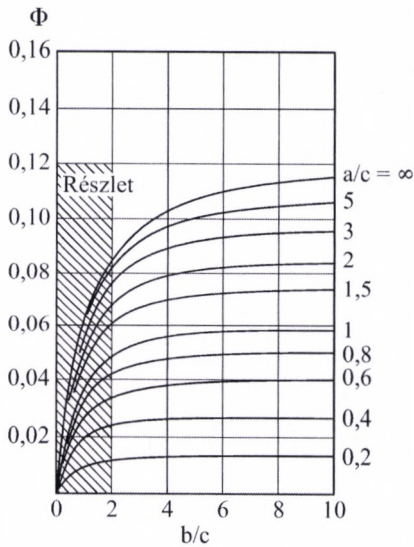
4.5.17 ábra. Besugárzási tényező ülő ember és testsíkja előtti mennyezeti vagy testsíkja mögötti padlófelületre



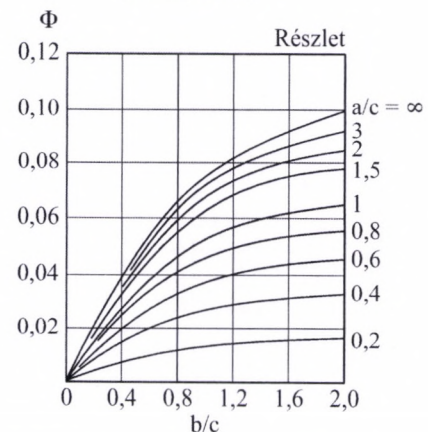
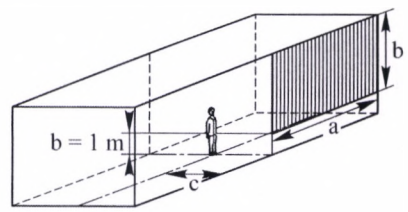
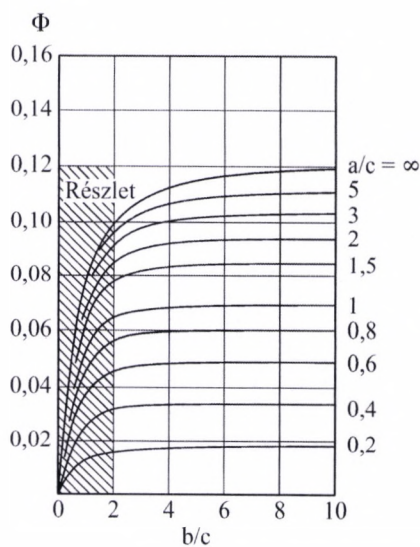
4.5.18 ábra. Besugárzási tényező ülő ember és testsíkja előtti padló vagy testsíkja mögötti mennyezeti felületre



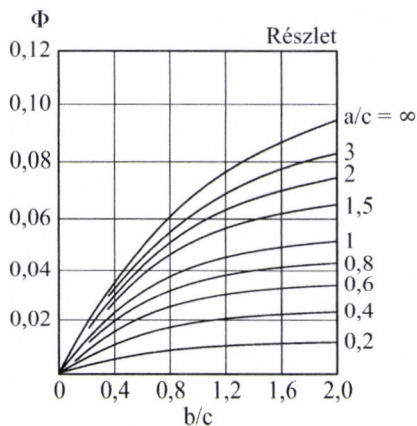
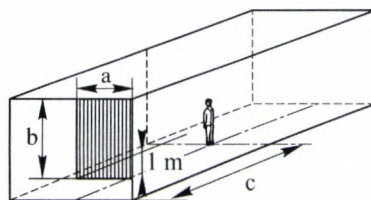
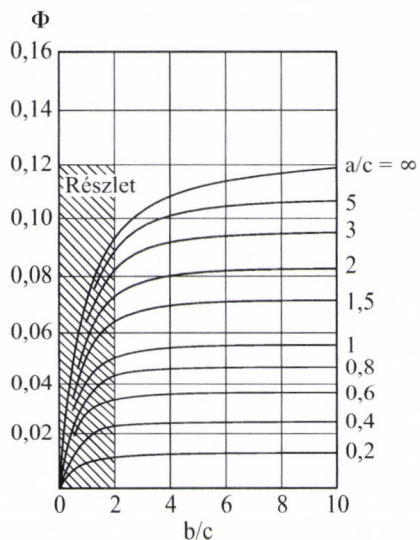
4.5.19. ábra. Besugárzási tényező ülő ember és vele szemben lévő (súlypontja feletti vagy alatti) vertikális síkok között, ha a személy elfordul függőleges tengelye körül, tehát akkor alkalmazható, ha az egyén helye ismert, de a síkhoz viszonyított elfordulása nem



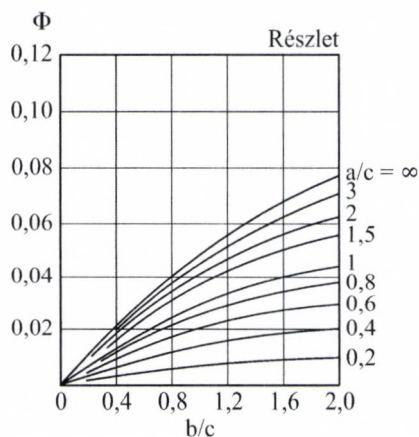
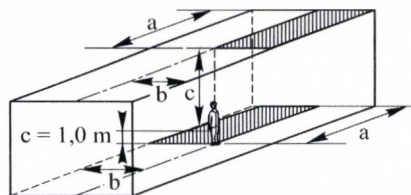
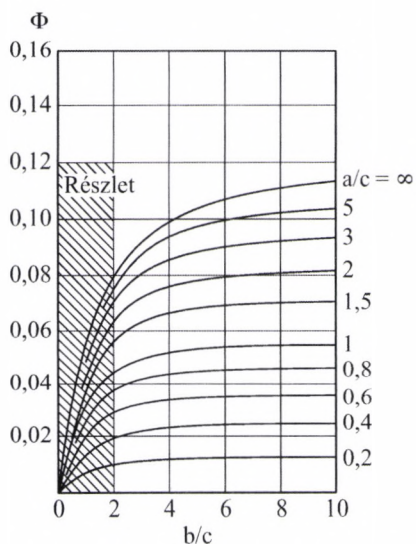
4.5.20. ábra. Besugárzási tényező ülő ember és felette vagy alatta levő vízszintes sík között abban az esetben, ha az egyén helye ismert, de a síkhoz viszonyított elfordulása nem



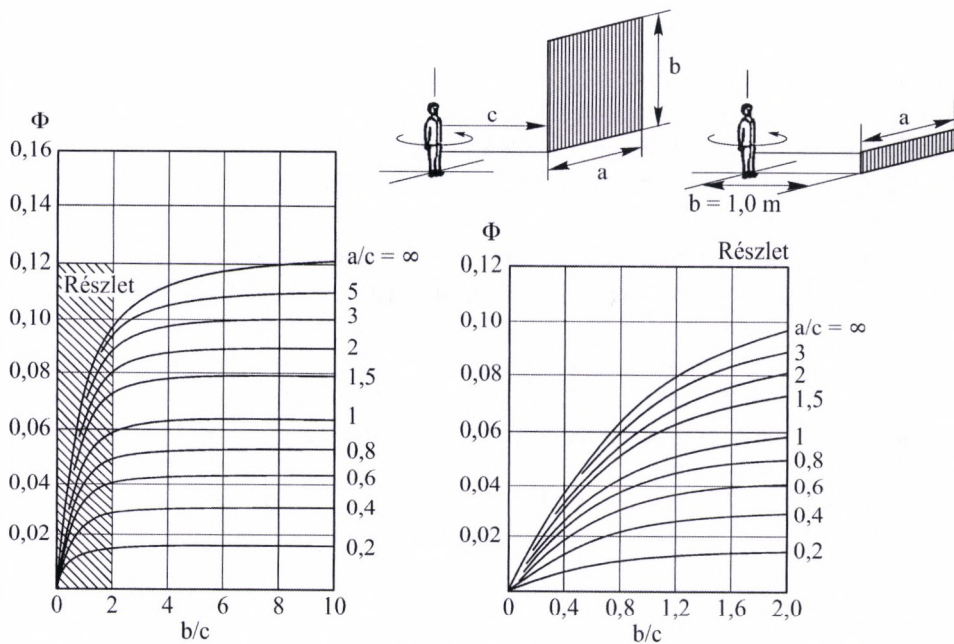
4.5.21. ábra. Besugárzási tényező álló ember és súlypontja felett vele szemben lévő függőleges sík között



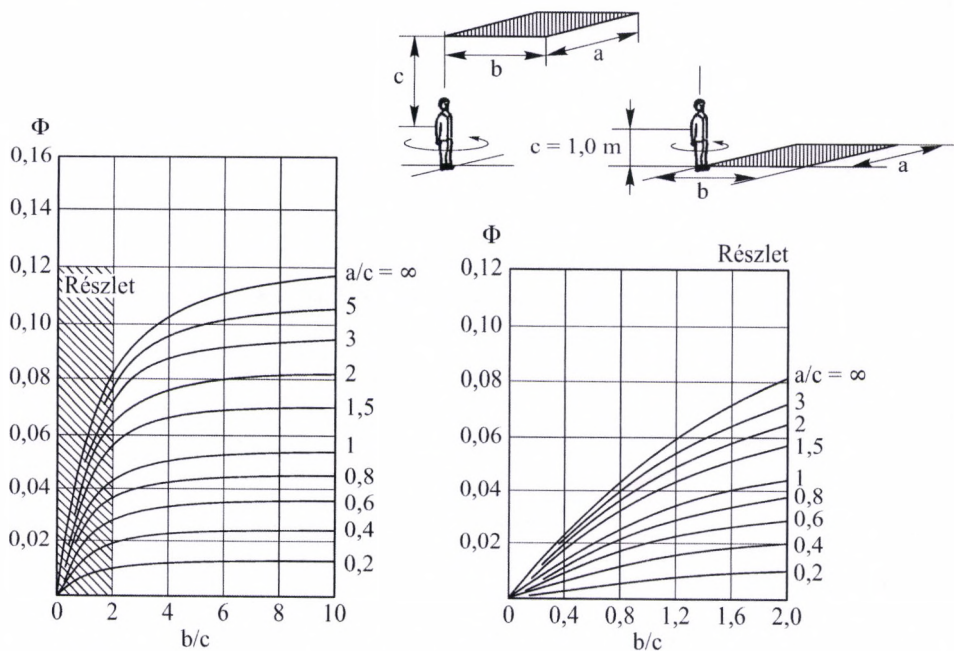
4.5.22. ábra. Besugárzási tényező álló ember és súlypontja felett oldalt elől elhelyezkedő függőleges sík között



4.5.23. ábra. Besugárzási tényező álló ember és súlypontja felett és előtte (mennyezet) vagy súlypontja alatt és mögötte (padló) vízszintes sík között



4.5.24. ábra. Besugárzási tényező álló ember és súlypontja felett vagy alatt elhelyezkedő vertikális sík között abban az esetben, ha az egyén helye ismert, de a síkhoz viszonyított elfordulása nem



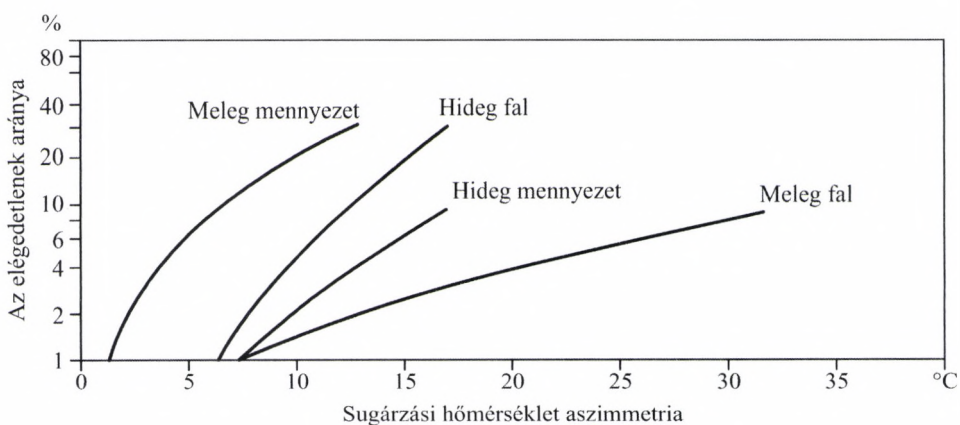
4.5.25. ábra. Besugárzási tényező álló ember és felette vagy alatta elhelyezkedő vízszintes sík között abban az esetben, ha az egyén helye ismert, de a síkhoz viszonyított elfordulása nem

4.5.5.4. Az MSZCR1752 EU szabványról

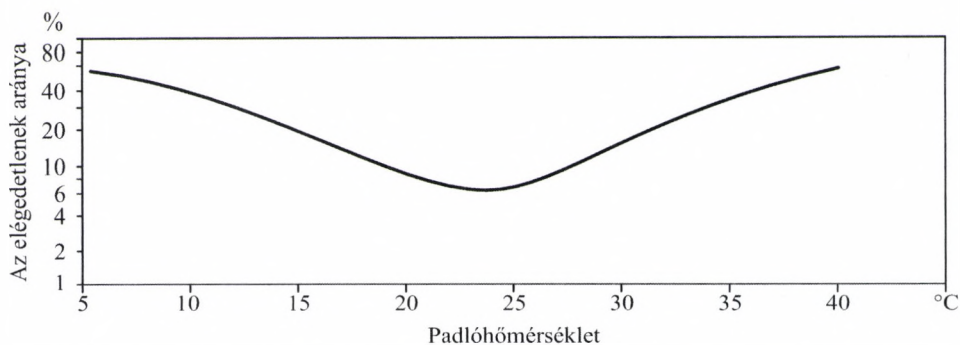
Az EU szabványban található olyan részlet, amely azt a téves gondolatot indikálja, hogy az alkalmas sugárzófűtések pontos hőcsere-méretezésre és ez az aszimmetrikus sugárzás. Ennek lényege a következő.

Zárt térben tartózkodó ember hőérzetét kedvezőtlenül befolyásolhatja, ha aszimmetrikus sugárzásnak van kitéve. Ez egy helyi diszkomfort tényező és ez alatt az a hatás értendő, ha felületek között helyezkedik el amelyek hőmérséklete eltérő. Ezek figyelembevételére méretezési diagram is van, lásd a 4.5.26. ábra. Ezek között szerepel a mennyezet, padló (4.5.27 ábra) és fal is, tehát elvileg alkalmas sugárzófűtések méretezésére. De ez csak előzetes méretezésre javasolt. Pontos méretezésre a 4.5.5.4. pontokban rögzített módszer alkalmas és az így méretezett fűtést lehet szubjektív hőérzet-elégedetlenség százalékos értéke szempontjából is ellenőrizni a szabvány szerint.

Amennyiben padlófűtést óhajtunk nyáron hűtésre alkalmazni a 4.5.5.4. pontban ismertetett módszer ugyancsak megfelelő, de szubjektív hőérzeti ellenőrzés is



4.5.26. ábra. Az elégedetlenség várható százalékos aránya különböző sugárzási aszimmetria esetén



4.5.27. ábra. Az elégedetlenség várható százalékos aránya padlőhőmérséklet függvényében

szükséges, mivel a láb fokozottabban érzékeny meleg és hideg felületeken való tartózkodásra.

Fűtés esetében ismert a max. 28-29 °C megengedett hőmérsékletérték, hűtés esetében viszont az MSZCR 1752 szabványban a helyi diszkomfort tényező közé sorolt 4.5.27. ábra adatait célszerű figyelembe venni, amely fűtésre is vonatkozik.

4.5.5.5. Pontszerű, egyedi sugárzók hőérzeti méretezése

Fanger erre az esetre is kidolgozott egy számítási módszert. Kiindulási alapként a következő összefüggést határozta meg magas hőmérsékletű, pontszerű fényforrás esetében a közepes sugárzási tényező, valamint a besugárzott személy között:

$$\varepsilon\sigma_{\text{eff}}(T_{\text{cl}}^4 - T_{\text{ks}}^4) = \varepsilon\sigma A_{\text{eff}}(T_{\text{cl}}^4 - T_{\text{nks}}^4) - A_E\alpha_{\text{as}}\dot{q}_s, \quad (4.5.75)$$

ahol T_{nks} a sugárzó fűtőtest hatására a környezetben felmelegedett (adott esetben padló) felületek közepes sugárzási hőmérséklet $\dot{q}_s$ a fajlagos sugárzott hőmennyiség, α_{as} abszorpciós sugárzási tényező, amelyre még visszatérünk. A többi tényező a (4.5.18) és (4.5.23) összefüggésekből már ismert.

Az összefüggés kimondja: az ember sugárzásos hőleadása az átlagos közepes sugárzási hőmérsékletű abszolút fekete környezete felé egyenlő kell, hogy legyen sugárzásos hővesztésével a sugárzásos fűtőtest által már bizonyos fokig felmelegített környezete felé, csökkentve a sugárzó fűtőtestről kapott hőnyereséggel.

Tehát felírható hogy

$$T_{\text{ks}} = \left[T_{\text{nks}}^4 + \frac{A_E\alpha_{\text{as}}\dot{q}_s}{A_{\text{eff}}} \right]^{0,25}, \quad (4.5.76)$$

mivel az ember normál és effektív felülete között fennáll az ismert, tervezett felület tényező:

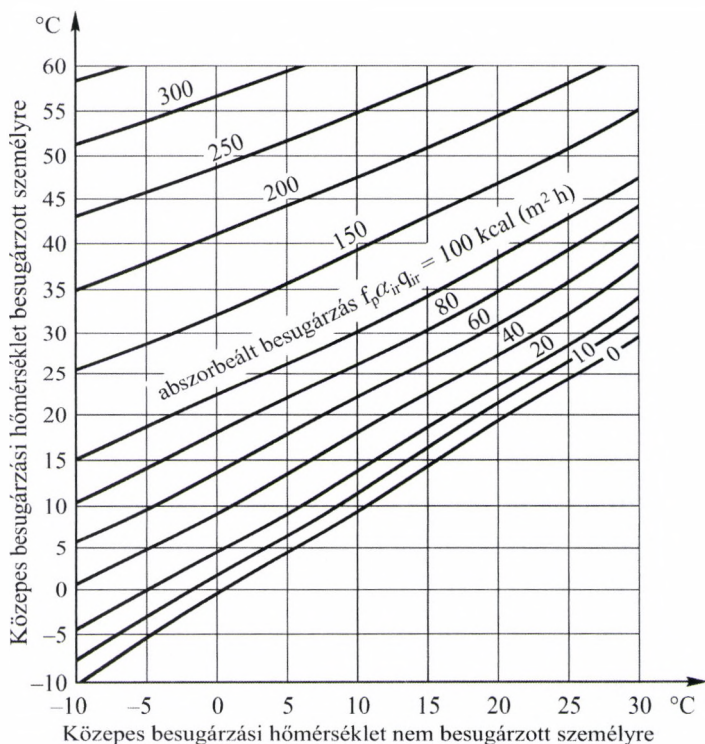
$$f_E = \frac{A_E}{A_{\text{eff}}},$$

amelynek értéke 0,97-re vehető fel, felírható a következő egyenlet:

$$T_{\text{ks}} = \left[T_{\text{nks}}^4 + 0,208 \cdot 10^8 f_E \alpha_{\text{as}} \dot{q}_s \right]. \quad (4.5.77)$$

Ezt az összefüggést grafikusán feldolgozták a 4.5.28. ábrán.

Rövidebb magyarázatot kíván α_{as} értéke. A bőr és ruházat abszorpciós tényezőjére Hardy munkáiban találunk adatokat. A gyakorlati alkalmazásra azonban jobban használhatók Rapp-Gagge adatai, amely szerint 1200 K hőmérsékletű sugárzás, mint pl. gáz-infra esetén α_{as} számértéke 0,95 felöltözött és 0,9 mezítelen emberek esetén, míg 2500 K hőmérsékletű sugárzó alkalmazásakor a javasolt érték 0,65, illetve 0,8.



4.5.28. ábra

4.6. Csarnokszerű épületekkel kapcsolatos hőáramlási kérdések

Nagy légterű és belmagasságú, csarnokszerű épületek esetében a padlónak döntő szerepe van

- egyrészt hőérzeti,
- másrészt hőtechnikai szempontból.

A hőérzeti kérdésekre a 4.5. alfejezetben részletesen kitértünk, itt elsősorban a padló hőtechnikai szerepét boncolgatjuk.

Közvetlenül a talajra fektetett padló esetében egy olyan hőtárolási lehetőség adódik, amely megfelelő energiatakarékos üzemelést tesz lehetővé. A padló és általaj szempontjából különösen fontos, hogy a természetes úton (nyáron) feltárolódott hőt hasznosíthassuk, télen pedig fűtési rendszerek által leadott hő tekintélyes része a padló felé irányuljon.

Ez utóbbi követelménynek a sugárzófűtések tesznek eleget. A következőkben bebizonyítást nyer, hogy a csarnok különböző hőszigetelése és élvizonyai mellett

az eszményi légfűtés – tehát egyenletes és magas belső lég hőmérséklet – esetén is a padló hőmérséklete viszonylag alacsony érték marad. Ez könnyen magyarázható, hiszen a levegő konvekciós hőleadása a padló felé kicsiny, ugyanakkor a padló sugárzásos hővesztése a határoló szerkezetek felé nagy. Sugárzófűtés esetében viszont az ernyők lefelé leadott hőjének tekintélyes része éri a padlót és ott, illetve a talajban tárolódik. Szélsőséges esetben mint padlófűtés működik.

A padlóban és talajban végbemenő instacionárius áramlások jellege erősen eltér a határoló szerkezetek instacionárius vagy stacionárius hőáramlásától. Anélkül, hogy e kérdéssel mélyebben foglalkoznánk, szükséges a padló és altalaj hőáramlási kérdéseinek bizonyos mértékű tisztázása.

4.6.1. Padlófűtés

Először a legszélsőségesebb vagy számítástechnikailag legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, amikor is a padlót fűtjük. Ezen belül külön foglalkozunk az állandó és periodikus fűtés kérdésével.

4.6.1.1. A talajba behatoló hő állandó fűtés esetén

Az állandó, megszakítás nélküli hőszolgáltatás, illetve fűtés akár a távfűtés, akár hőforrásaink igénybevétele szempontjából fontos és gyakori eset. A talajba behatoló lineárisnak feltételezhető hőáramlást a gyakorlattól ugyan távol álló feltételezéssel tudjuk megközelíteni, ez azonban különösen a jelenség kezdeti szakaszára a valóságnál kedvezőtlenebb képet ad, s így a levont következtetések bizonyos biztonságot tartalmaznak.

A talaj hőmérsékletmezejének alakulására az ismert

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_a} = \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4a\tau}} = \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \quad (4.6.1)$$

összefüggés ad képet. Ebből

$$\vartheta(x, \tau) = t(x, \tau) - t_p \quad (4.6.2)$$

a padló x abszcisszájú rétegében τ időpontban a túlhőmérséklet a padló t_p felületi hőmérsékletéhez képest. Viszont a $\tau = 0$ időpontban

$$\vartheta_{aP} = t(x, 0) - t_p, \quad (4.6.3)$$

amely az x abszcisszájú réteg túlhőmérséklete a t_p -hez képest. Végül

$$Fo = \frac{a\tau}{x^2}$$

a hővezetésre jellemző dimenzió nélküli Fourier-szám.

A padlósíkon át a talajba áramló hő értékét a τ időpontban a

$$\dot{q} = -\frac{\vartheta_{aP}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda_{cy}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad [\text{W/m}^2] \quad (4.6.4)$$

összefüggés írja le.

Az összefüggés rámutat arra, hogy a padlóba beáramló hőmennyiség elsősorban a padló alatti talaj hőelnyelő képességétől, azaz a

$$b = \sqrt{\lambda_{cy}} \quad [\text{W/m}^2] \quad (4.6.5)$$

anyagi jellemzőtől (hőelnyelő képességtől) függ. Rendkívül fontos tehát, hogy a sugárzó lapnak kialakított betonréteg alatt olyan aljzat legyen, amelynek e jellemzője kicsi (például salak feltöltés). Egyben látható, hogy egy bizonyos (τ óra) idő eltelte után a beáramló hőmennyiség értéke elenyésző.

Csőkígyó beágyazásával megvalósított sugárzó fűtőlapon a közepes túlhőmérséklet nagymértékben függ az

$$m = \sqrt{\frac{\kappa_i + \kappa_e}{i\lambda}} \quad (4.6.6)$$

jellemzőtől, amelyben (4.6.1. ábra) a talajba mutató „hőátbocsátási tényező” megfelelő értékelése és értelmezése sok nehézséget okozott.

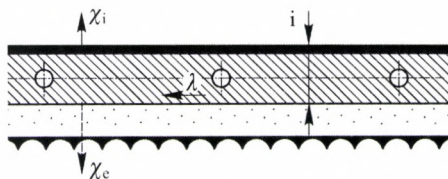
A (4.6.1)-ből látható, hogy ez az érték állandóan csökken, így csak annak megfontolásáról lehet szó, hogy mely időpillanatban beáramló hőmennyiséget fogjuk fel úgy, mintha a lemez alsó oldaláról a felsővel azonos túlhőmérsékletű közegbe κ_e útján átadott hőmennyiség volna. Azaz a

$$-\frac{\vartheta_{aP}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda_{cy}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \kappa_e \vartheta_k \quad (4.6.7)$$

egyenletben a τ időpontot kell megfelelően kiválasztanunk. Ebben ϑ_k a sugárzó padlónak a környezethez vett közepes túlhőmérséklete. Ha ϑ_{aP} helyébe a leghidegebb időre érvényes túlhőmérsékletet, azaz

$$\vartheta_{aP} = t(x, 0) - t_p = 11 - 26 = -15 \text{ } ^\circ\text{C}$$

-t behelyettesítünk ($t_p = 26 \text{ } ^\circ\text{C}$ maximális közepes padlőhőmérsékletnek, $t(x, 0) = 11 \text{ } ^\circ\text{C}$



4.6.1. ábra. A talajba mutató κ_e „hőátbocsátási tényező” értelmezése

a talajhőmérsékletnek vehető), és a csarnokhőmérsékletet t_i -vel, a túlhőmérsékletet ehhez képest ϑ_k -val jelöljük, akkor a talajba mutató „hőbocsátási tényező” a

$$\kappa_c = -\frac{\vartheta_{ap}}{\vartheta_k} \sqrt{\frac{\lambda cy}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} [\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})] \quad (4.6.8)$$

összefüggésből a τ megválasztásával helyesen értékelhető és vehető a továbbiakban számításba. Az összefüggésből már $\tau = 144 \text{ h}$ (1 heti) állandó fűtés után sem jönnek ki $\kappa_c = 1,75 \text{ W}/\text{m}^2$ -től lényegesen eltérő értékek. Ezt a tervezési munkához biztonsággal használhatjuk, hiszen a leghidegebb téli időre ($\tau = 1000 - 1500 \text{ h}$) a padlóba távozó hő értéke, aminek ismerete a hőszükséglet szempontjából fontos (4.6.4) szerint a $11,6 \text{ W}/\text{m}^2$ nagyságrend alatt marad.

4.6.1.2. A talajba hatoló hő periodikus fűtés esetén

Ha a padlószint (sugárzó betonréteg) hőmérséklete valamely középérték körül ϑ_0 amplitúdóval periodikusan változik, azaz szakaszos rendszerű fűtésünk van, és a periodikus változást a

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos \frac{2\pi}{\tau_0} \tau \quad [^\circ\text{C}] \quad (4.6.9)$$

összefüggés szerinti lefolyással képzeljük, akkor a fűtési periódus alatt a talajba behatoló hőmennyiséget a

$$\dot{q}_{\tau_0/2} = 0,8 \sqrt{\lambda cy} \sqrt{\tau} [\text{W}/\text{m}^2] \quad (4.6.10)$$

összefüggés írja le. Ugyanennyi hőmennyiség áramlik vissza az üzemszünet alatt a talajból, ha egyébként a hőmérsékletviszonyok a talajon kívül nem változnának. Minthogy üzemszünet alatt a csarnokból jelentős hőkiáramlással kell számolnunk, s a csarnok felfűtési hőszükségletéről is gondoskodnunk kell, a hőszolgáltató be rendezést a csúcra kell méreteznünk, ezért a talajba a fűtési periódus alatt beáramló hőt a padlófűtés méretezésekor figyelembe kell vennünk. Hasonló alapon, mint a 4.6.1.1. pontban, írható, hogy

$$\kappa_c \vartheta_k = \frac{2 \cdot 0,8 \sqrt{\lambda cy} \sqrt{\tau_0}}{\tau_0}, \quad (4.6.11)$$

ahonnan

$$\kappa_c = 1,6 \frac{\vartheta_0}{\vartheta_k} \sqrt{\frac{\lambda cy}{\tau_0}} [\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})].$$

Ebből az összefüggésből a κ_c virtuális hőátbocsátási tényezőre már nagyobb ($\kappa_c = 1,75 - 2,9 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$) értékek adódnak, azonban ezek hatása az

$$m = \sqrt{\frac{\kappa_i + \kappa_e}{i\lambda}}$$

tényezőben még mindig eléggé kis mértékben érvényesül, mert $\kappa_i \gg \kappa_e$!

A padlóréteg alatti talaj $b = \sqrt{\lambda c y}$ hőelnyelési tényezőjének hatása itt is élesen jelentkezik, és egyben útmutatást ad a helyes kialakításra.

A fentiek elmondását szükségesnek tartottuk, mivel a gyakorlatban a talajon nyugvó padlóknál többször is sor kerül sugárzó fűtőtestek kialakítására, s ilyenkor az „m” tényező helyes értékelése körül sok zavar merült fel, ami nagyságrendi tévedésekre is vezetett.

4.6.2. Sugárzó ernyő vagy infravörös sugárzófűtés esete

Mint a fejezet bevezetőjében említettük, a sugárzófűtések döntő előnye a légfűtésekkel szemben, hogy leadott hőjük nagyobb része a padló felé irányul, így azok hőegyensúlya, tárolt hője, kedvezőbben alakul. Hasonlóan a 4.6.1. ponthoz, e kérdést ebben az esetben is két változatra: állandó és periodikus vagy szakaszos fűtésre vizsgáljuk.

4.6.2.1. A padlóba behatoló hő állandó fűtés esetén

Feltevésünk szerint a fűtés megindításával a padló és környezete között hirtelen áll be a hőmérséklet-különbség. A valóság ennél kedvezőbb, mert a gyakorlatban a fűtést meg kell kezdeni akkor, amikor a külső hőmérséklet az ún. határhőmérséklet alá esik, s amikor ezek szerint a kívánatos belső hőmérséklet és a padló, illetve az alatta elhelyezkedő talaj felső rétegének hőmérséklete még alig, vagy egyáltalán nem tér el egymástól.

Az időben változó lineáris hővezetésre vonatkozó differenciálegyenlet megoldása valamely x abszcisszájú rétegben τ időpontban a környezet hőmérsékletétől számított $\vartheta(x, \tau)$ túlhőmérsékletet adja meg a $\tau = 0$ időpontban a padlófelület $\vartheta(0, 0) = \vartheta_e$ túlhőmérsékletéhez képest. Bennünket a sugárzófűtés problémái tekintetében elsősorban a padlófelület túlhőmérsékletének alakulása érdekel s a továbbiakban a padlófelület által a fűtött környezettől elvont hő. E tekintetben az ún. harmadfajú határfeltétel irányadó, amely szerint a környezetből sugárzással és konvekcióval a padlófelületre áramló hőmennyiségek algebrai összegét képviselő hő a padló síkján vezetéssel áramlik át, azaz valamely időpontra érvényes, hogy

$$\alpha \vartheta(0, \tau) = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (4.6.12)$$

Ezt az összefüggést azért írjuk fel a másik szokásos formájában, hogy ezzel a továbbiakban többször előforduló h értelmezését megadjuk:

$$-\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta(0, \tau) = h \vartheta(0, \tau). \quad (4.6.13)$$

Ezek után a padlósík túlhőmérsékletének magatartását az idő függvényében a

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_e e^{a\tau h^2} \left(1 - \operatorname{erfc} \sqrt{a\tau h^2}\right) \quad (4.6.14)$$

összefüggés írja le. A számítást egyszerűsíti, hogy az

$$e^{\eta^2} (1 - \operatorname{erfc} \eta)$$

függvénytáblázatot $\eta = 5$ argumentumig néhány függvénytáblázatot tartalmazó műben megtalálhatjuk. A padlófelszín hőmérsékletének alakulására az argumentumon felül is jó felvilágosítást nyújt a következő megfontolásunk. Tételezzük fel, hogy bizonyos τ idő után a padlósíkon vezetéssel átáramló hő annyi volna, mintha a kezdő túlhőmérséklet nem a környezetben, hanem magán a padlón jelentkezett volna. Ha még ehhez a harmadfajú határfeltételt hozzákapcsoljuk, akkor az egyenlőséget az (4.6.14) összefüggés felhasználásával a

$$\dot{q} = -\frac{\vartheta_{aP}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda c y} \frac{1}{\sqrt{\tau}} = \alpha \vartheta(0, \tau) [\text{W/m}^2] \quad (4.6.15)$$

alakban írhatjuk, amiből

$$\vartheta(0, \tau) = -\frac{\vartheta_a}{\alpha \sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda c y} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad [^\circ\text{C}] \quad (4.6.16)$$

adódik. Az e feltevés és összefüggés alapján számított értékek a pontos értékhez képest $\tau > 100$ h esetében már csak századfokokban térnek el egymástól, míg a későbbi időszakra ($\tau = 1000$ h $\approx$ másfél hónap után) adódó eredmények gyakorlatilag teljesen pontosnak tekinthetők.

Némi kis átalakítással (4.6.14) is olyan alakra hozható, hogy a hőelnyelő képesség hatása abban is élesebben jelentkezék:

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_e e^{\frac{\alpha^2 \tau}{\lambda c y}} \left(1 - \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\alpha^2 \tau}{\lambda c y}}\right) [^\circ\text{C}]. \quad (4.6.17)$$

Eszerint akár a (4.6.16), akár a (4.6.17) alapján is vizsgáljuk, a padló túlhőmérséklete azonos idő alatt annál inkább közeledik a fűtött környezethez, minél kisebb a padló hőelnyelő képessége, a $b = \sqrt{\lambda c y}$ érték. Még aránylag jelentős b értékek mellett is egy hónappal az állandó fűtés megkezdése után a padlóba beáramló hőmennyiség már csak néhány W/m^2 , azaz nagysága a többi határoló szerkezeten átáramló hőmennyiséghez képest elenyésző.

4.6.2.2. A padló hőcseréje szakaszos fűtés esetén

Ez az eset szakaszos működésű sugárzófűtés esetében lép fel. A jelenség elbírálásának egyszerűsítése (s egyben a valóság megközelítése miatt is), a környezet ϑ_0 amplitúdójú hőmérséklet-hullámzását valamely közepes hőmérséklet körül ezúttal is a

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos \frac{2\pi}{\tau_0} \tau \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (4.6.18)$$

egyszerű összefüggéssel kívánjuk visszaadni. Ez a hullámzás a padlósíkon egy ε fázissal elmaradó és $\xi_0 \vartheta_0$ amplitúdójú hőmérséklet-hullámzást fog előidézni, azaz a padlósíkon a hőmérséklet változását a

$$\vartheta(0, \tau) = \xi_0 \vartheta_0 \cos \left(\varepsilon - \frac{2\pi}{\tau_0} \tau \right) \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (4.6.19)$$

összefüggés írja le. Ebben az amplitúdók viszonyát

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{\pi}{ah^2} + 2 \frac{\pi}{ah^2}}} < 1, \quad (4.6.20)$$

míg a fáziskésést

$$\varepsilon = \arctg \frac{1}{1 + \frac{a\tau h^2}{\pi}} \quad (4.6.21)$$

adja. Itt említjük meg, hogy

$$a\tau h^2 = \frac{a\tau}{x^2} (hx)^2$$

felírási formában ebben az esetben is megjelenik az instacionárius hőáramlásra jellemző két dimenzió nélküli szám, a

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{x^2} \quad \text{és} \quad \text{Bi} = hx.$$

A kifejezés úgy is átalakítható, hogy bennük a hőelnyelő-tényezők játszanak szerepet, ezek szerint

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0} \lambda_{cy}} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{2\pi}{\tau_0} \lambda_{cy}} \quad (4.6.22)$$

és

$$\varepsilon = \arctg \frac{1}{1 + \alpha \sqrt{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{2\pi} \frac{1}{\lambda_{cy}}}} \quad (4.6.23)$$

Ezúttal azt az írásmódot választottuk, amelyben az

$$S = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \lambda_{cy} \text{ [W/(m}^2\text{K)]} \quad (4.6.24)$$

kifejezés jelenik meg, amelyet különösen a szovjet irodalomban használtak gyakran, és „az anyag vagy a réteg hőelnyelési tényezőjének” hívtak, s amely elnevezést célszerű volna kibővíteni: „ τ_0 periódusidejű hőmérséklet-hullámzás esetén” megjelöléssel.

A környezet és a padló hőmérséklet-hullámzását az 4.6.2. ábra szemlélteti. A padlónak átadott, illetőleg attól visszaszármaztatott hőmennyiségek a mindenkori hőmérséklet-ordináták különbségével arányosak, ez a

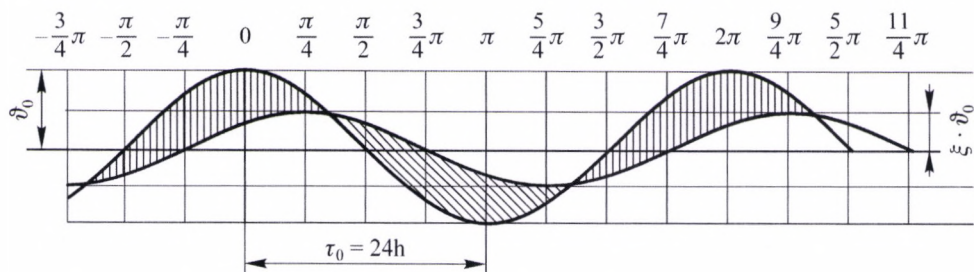
$$\dot{q} = \alpha [\vartheta(\tau) - \vartheta(0, \tau)]$$

összefüggéssel fejezhető ki. A jelenséget tehát úgy is fogalmazhatnók, hogy a fűtési periódusban a padlóban tárolt hő az üzemszünet alatt bizonyos mérvű temperálást okoz.

Nem hagyhatjuk ugyanis figyelmen kívül, hogy a padlóra sugárzott hőmennyiség tekintélyes része az üzemidő alatt is a padlóról sugárzással és konvekcióval eltávozik, s csak egy része áramlik be a padlóba. Ez a rész az üzemszünet alatti kiáramlás miatt nagyobb, mint a fenti számításainkból adódnék, s ennek pótlására szolgál az úgynevezett felfűtési hő.

A padló kialakítására vonatkozóan a (4.6.22) és (4.6.23) összefüggések adnak felvilágosítást.

E kifejezések szerint a padlósíkon jelentkező $\vartheta(0,0)$ amplitúdó annál kisebb, minél nagyobb a padló anyagának $b = \sqrt{\lambda_{cy}}$ hőelnyelési tényezője. Ez viszont az üzemi idő alatt a padló részéről nagyobb hőelvonást, üzemszünet alatt pedig nagyobb hő-visszaszármaztatást okoz. A nagy hőelnyelési tényező tehát csökkenti a padlósík hőmérséklet-hullámzását, ezzel szemben növeli a hőhullámzást. Ha $\sqrt{\lambda_{cy}}$ értéke a ∞ -hez, akkor ξ értéke a 0-hoz közeledik. Nem volna tehát a padlósíkon hőmérséklet-hullámzás, viszont a hőhullámzás maximális volna.



4.6.2. ábra. A környezet- és padlöhőmérséklet hullámzása szakaszos fűtés esetén

A fáziskésés az (4.6.21) összefüggés szerint növekvő b -vel nő. Határértéke bármely τ_0 , valamint $b = \sqrt{\lambda c y} \rightarrow \infty$ esetén állna be, és $\varepsilon = \arctg 1$ alapján értéke $\varepsilon = \pi/4$, illetve órákban kifejezve $\tau = 3$ h volna.

Ha viszont a hőelnyelő képesség zérus felé, akkor a ξ_0 tényező az egység felé, a fáziskésés pedig a zérus felé közeledik. Ez esetben viszont a padlósík hőmérséklet-hullámozása a környezeti hőmérséklet-hullámozással egyenlő volna, viszont a hőhullámozás megszűnnék, tehát a padlóba sem hő befelé, sem abból kifelé nem áramolna.

A gyakorlatban a padló $b = \sqrt{\lambda c y}$ tényezője jelentős értéket mutat fel (már csak szilárdsági okokból is), s így a fűtési periódusban behatoló, üzemszünet alatt visszatérő hőmennyiséggel számolhatunk.

Fontosnak kell tehát minősítenünk azt, hogy a csarnokfűtésben a padlóban felgyülemlett hőt óvjuk, azaz kellő időpontban kezdjük el a fűtési üzemet. Így állandó fűtés esetében a padlóba beáramló hő állandóan csökkenvén csak a széleken eltávozó hő pótlására kell szorítkoznunk, míg szakaszos fűtés esetében a nappal beáramló hő éjszakai visszaáramlásával számolhatunk, ami a csarnok lehűlését és a felfűtéshez szükséges hőmennyiséget csökkenti.

4.7. Sugárzohűtések

Napjainkban egyre inkább teret nyernek azok a megoldások, amelyek a sugárzó felületeket télen fűtésre, nyáron hűtésre alkalmazzák. Ezek közül a mennyezet- és padlófűtések jöhetnek számításba.

Mennyezeti fűtőtestek esetében a hűtésre való felhasználás szempontjából – a kondenzáció elkerülése mellett – hőcsere-méretezésére ugyancsak a 4.5.5.4. pontban ismertetett módszer alkalmas, padlóra pedig a 4.5.27. ábra ad méretezési alapértékeket.

5. MELEGVÍZ-FŰTÉSEK ELMÉLETI KÉRDÉSEI

A melegvíz-fűtések legfontosabb elméleti kérdései a hőigények determinisztikus kezelésének valószínűségelméleti alapokon nyugvó felváltásával, illetve a hidraulikai analízis legkorszerűbb módszereinek a bevonásával kapcsolatosak.

- A hőigények valószínűségelméleti kezelése indukálja a szabályozási modellek finomításának igényét, a szabályozási modellek kiterjesztését a tanulómodellek adaptációjára, az optimalizációs modellek felhasználását a túlfűtések, illetve a szabályozási eltérések minimalizálására és a minimális költségű üzemeltetésre.
- A hidraulikai analízis széles elméleti alapokon nyugvó alkalmazása a változó hőigények esetében fellépő hidraulikai kép megbízható számítását, a fellépő sebességek tartományának meghatározását, a kavitáció és a zaj elkerülését, a termosztatikus radiátorszelepek megbízható üzemének megteremtését, a magas épületekben a gravitációs felhajtóerőnek a szivattyú kiválasztására és a szivattyúüzemre gyakorolt hatásának elemzését célozza.

A hőigények valószínűségelméleti tárgyalását a 2. fejezetben elvégeztük, a sztochasztikus és adaptív, továbbá a tanuló-, valamint az optimalizációs szabályozások alkalmazása a fűtési hálózatok szabályozásában részben feltáratlan, részben további kutatásokat igényel, másrészt pedig meghaladják e könyv kereteit.

A hidraulikai analízis fűtési hálózatokra történő alkalmazásával kapcsolatban a gyakorlatban felvetődő problémák két nagy csoportba sorolhatók:

- adott betáplálási jellemzők (szivattyújelleg, szivattyújellemzők) és hálózati jellemzők (ellenállás-tényezők) mellett kialakuló áramlási kép, és kialakuló fogyasztások, illetve fogyasztási-vételezési lehetőségek vizsgálata;
- előírt fogyasztások (vételezések), illetve fogyasztási-vételezési lehetőségek és megadott hálózati jellemzők mellett az optimális (minimális üzemeltetési költséget eredményező) betáplálási jellemzők (szivattyújellemzők, munkapont) meghatározása.

E feladatok megoldására irányuló vizsgálatokat összefoglalóan hálózatanalízisnek vagy hidraulikai analízisnek nevezzük.

E fejezetben rövid áttekintést adunk a csővezeték-hálózatok hidraulikai analízisének módszereiről, és példákon mutatjuk be azok használatát.

5.1. Bonyolult fűtési hálózatok hidraulikai analízisének módszerei

A csőhálózatok hidraulikai analízisének lépései általában:

- a valóságos hálózat modelljének megalkotása,
- a modell topológiai leírása,
- a megmaradási egyenletek felírása a modell áramaira és
- a megmaradási egyenletek megoldása.

A csőhálózatok modelljének megalkotását és topológiai leírását a gráfelmélet eszközeivel végezzük. A csőhálózat modelljén a hálózat gráfját értjük. A modell áramaira felírt megmaradási egyenletek az áramló tömeg megmaradását kifejező, ún. csomóponti egyenletek és a nyomásveszteségek zárt hurokra történő algebrai összegezése. A csomóponti egyenletek az ún. csomóponti törvényt, míg a hurok-egyenletek a huroktörvényt fejezik ki, amelyeket hidraulikai Kirchhoff-törvényeknek is nevezünk.

A hidraulikai Kirchhoff-törvényeken nyugvó nyomásképszámítás elsősorban az aszimmetrikus előremenő és visszatérő vezetékeket, aszimmetrikus hurkokat tartalmazó fűtési hálózatok, továbbá magas épületeknél jelentős gravitációs felhajtó erő fellépése esetén indokolt. Egyéb esetekben az ún. eredő hidraulikai ellenállások módszerének alkalmazása is elegendő pontosságot ad.

5.2. Csőhálózatok gráfja és topológiai leírása

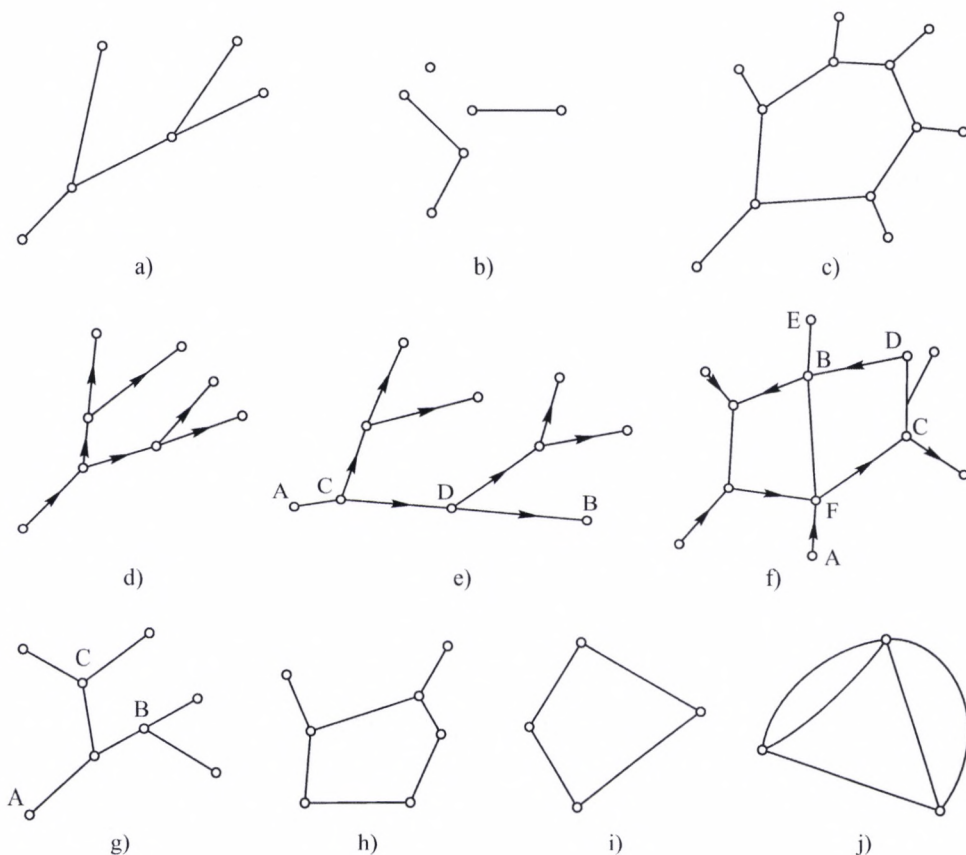
Egy gráf – mint matematikai struktúra – pontok és élek, valamint azokon értelmezett relációk halmaza. Egy gráf szerkezetét a pontok és az azokat összekötő élek adják. A pontok összekapcsolásának jellege megadja a gráf jellegét, típusát. A csőhálózatok hidraulikai analízise szempontjából a gráfokkal kapcsolatos legfontosabb fogalmak:

- a gráf éleinek irányítottsága,
- a gráf csúcsainak foka,
- a gráf összefüggősége,
- a gráfban található utak és körök (hurkok),
- fastruktúrájú gráf.

A gráfok lehetnek irányítottak és irányítatlanok attól függően, hogy a gráf élei rendelkeznek-e irányítással vagy sem (5.2.1. ábra). Minden csővezeték-hálózatnak és minden hálózati áramképnek létezik olyan absztrakciója, amely egy irányított vagy irányítatlan gráffal izomorf.

Igen fontos fogalom a gráfokkal kapcsolatban a csúcsok fokszáma. Egy gráf csúcs fokszámán a csúcsra illeszkedő élek számát értjük. A gráf elsőfokú csúcs-pontjait végpontoknak nevezzük.

A gráfok lehetnek összefüggők és nem összefüggők. A gráf k -szorosan összefüggő, ha bármely két tetszőleges v és w csúcsa legalább k számú úttal összeköthető oly módon, hogy ezeknek az utaknak nincsen más közös csúcsuk v -n és w -n kívül. Így pl. minden kör kétszeresen összefüggő gráfot alkot.



5.2.1. ábra. A gráfok ábrázolása és osztályozása. a) összefüggő irányítatlan gráf, fastruktúra, b) nemösszefüggő, irányítatlan gráf, c) kört tartalmazó irányítatlan gráf, d) irányított fastruktúrájú gráf, e) A-ból B-be vezető út irányított fastruktúrájú gráfban: ACDB, f) A-ból E-be vezető út irányított kört tartalmazó gráfban: AFCDBE, g) A elsőfokú csúcs; B másodfokú csúcs; C harmadfokú csúcs, h) egyszeresen összefüggő gráf, i) kétszeresen összefüggő gráf, j) háromszorosan összefüggő gráf.

A csővezeték-hálózatok elemeinek geometriai kapcsolódását hurokért nem tartalmazó összefüggő irányítatlan gráffal, míg a hálózat feltételezett vagy valóságos áramképét összefüggő irányított gráffal szemléltethetjük. Mind az irányított, mind az irányítatlan gráfokban kiválaszthatunk, illetve megkülönböztethetünk utakat. Útnak nevezzük a gráf éleinek és csúcsainak egy olyan összefüggő sorozatát (tulajdonképpen a gráf egy részgráfját), amelyben minden él és minden csúcs csak egyszer fordul elő (5.2.1. ábra). Az útnak egy kezdő- és egy végpontja van. Irányított gráfokban csak az olyan élsorozatot nevezzük útnak, amelyben az élek irányítása megegyező, tehát az élek irányítását követve az élsorozat bejárható.

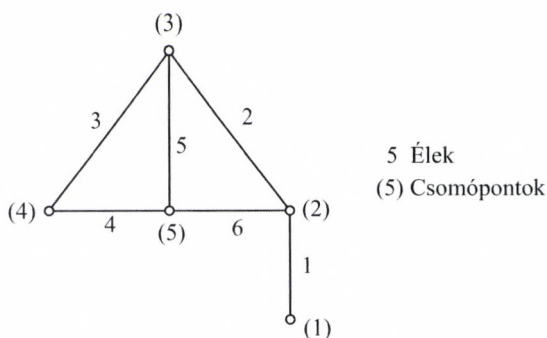
A gráfok tartalmazhatnak köröket (hurkokat), vagy lehetnek ún. tiszta fastruktúrájúak (5.2.1. ábra). A kör olyan „út”, amelynek kezdő- és végpontja egybeesik.

Az ún. sugaras rendszerű csőhálózatok irányítatlan gráfja fastruktúrájú gráf, míg az ún. hurkolt csőhálózatok gráfja köröket tartalmaz.

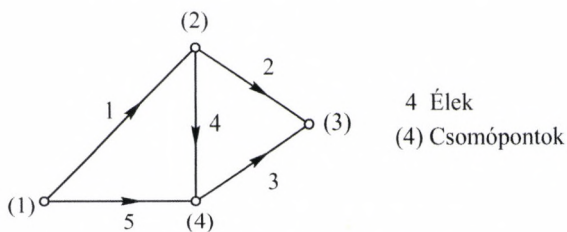
A valóságos hálózatok áramlását leíró irányított gráfokra a következő megállapításokat tehetjük:

- sugaras hálózatok áramképének irányított gráfja irányított fa,
- hurkolt hálózatokban kialakuló áramkép irányított gráfja ún. párhuzamos éleket vagy párhuzamos utakat tartalmaz.

Egy gráf struktúráját legkényelmesebben mátrixok felhasználásával írhatjuk le.



5.2.2. ábra. Összefüggő irányítatlan gráf



5.2.3. ábra. Összefüggő irányított gráf

E célra az ún. illeszkedési és csúcs- vagy szomszédossági mátrixokat használhatjuk fel. Illeszkedési mátrix alkalmazásakor a gráf csúcsait és éleit nevekkkel (célszerűen sorszámokkal) látjuk el. Az illeszkedési mátrixban a gráf csúcsai a mátrix sorainak, míg az élei a mátrix oszlopainak felelnek meg, és a mátrix a_{ij} eleme – attól függően, hogy értéke 1 vagy 0 – azt mutatja, hogy a gráf j -edik éle illeszkedik-e az i -edik csúcsra vagy nem.

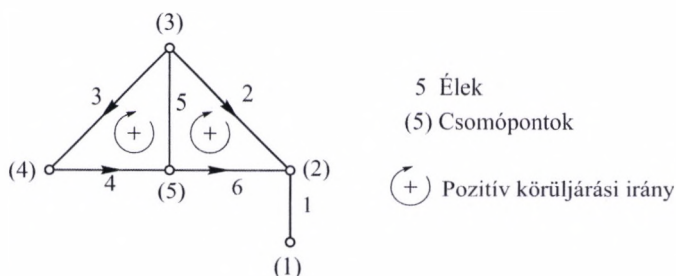
Például a 5.2.2. ábrán látható gráf **I** illeszkedési mátrixa:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írányított gráfok esetében a csúcsokra az élek irányítással illeszkednek. Tekintsük az élt pozitív irányításúnak akkor, ha iránya a vizsgált csúcsból kifelé mutat és negatívnak akkor, ha iránya a csúcs felé mutat. E megállapodásokkal a 5.2.3. ábra irányított gráfjának illeszkedési mátrixa:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Egy gráf csúcs- (vagy szomszédossági) mátrixa arról ad tájékoztatást, hogy a gráf mely csúcsai vannak élekkel összekötve egymással, más szóval melyek szomszédosak. A csúcsmátrix a_{ij} eleme – attól függően, hogy értéke 0, 1..., n – azt mutatja, hogy a gráf i -edik és j -edik csúcsa összeköttetésben van-e egymással és hányszoros ez az összeköttetés, tehát hány párhuzamos éllel történik. Irányított gráf esetében az i -edik csúcs felől a j -edik csúcs felé történő irányítást vizsgálunk. Például a 5.2.4. ábrán látható gráf **C** csúcsmátrixa:



5.2.4. ábra. Körüljárási irány irányított gráf „köreire”

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Irányított gráfok esetében e felírásmód szerint egy csúcsot csak akkor tekintünk „szomszédosnak” egy másik csúccsal, ha az „pozitív szomszédos”, vagyis ha a csúcsra illeszkedő él irányítása a csúcsból kifelé a másik csúcs felé mutat, azaz pozitív. Egy csúcs tehát akkor szomszédos egy másik csúccsal, ha az elérhető a vizsgált csúcsból az adott él irányításával. Irányítatlan gráfok esetében természetesen minden olyan csúcspár kölcsönösen szomszédos, amelyek legalább egyszeres éllel összekötöttek.

Elvileg a csúcsmátrixban kifejezhetjük a negatív szomszédosságot is, vagyis azt, ha az előbbieket szerint egy negatív irányítású éllel (élekkel) csatlakozik egy másik csúcshoz. Ezt a tényt a kérdéses mátrixelem negatív értéke jelezheti. Pl. a 5.2.4. ábra irányított gráfjának negatív szomszédosságokat is kifejező csúcsmátrixa:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sok esetben igen hasznos tudnunk, hogy a vizsgált gráf mely élei képeznek kört. A gráfban található köröket (hurkokat) az ún. körmátrixszal írjuk le. A körmátrix felírásához is a gráf mindegyik csúcsát és élet sorszámával látjuk el. A körmátrix minden egyes sora egy kört jellemez oly módon, hogy a mátrixban azon élekhez tartozó helyekre, amelyek a kört képezik, egyest, míg a többi helyre nullát írunk.

Például a 5.2.2. ábra irányítatlan gráfjának körmátrixa:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sok esetben szükségünk lehet arra, hogy egyes irányított gráfoknak megfelelő irányítatlan gráfok köreit írjuk le úgy, hogy jelezzük a körben az élek irányítását is. Ilyen esetben felvesszünk a körre egy körjárási irányt, amelyet pozitívnak tekintünk. Az ezzel nem egyező irányítású éleket a körmátrixban -1 -gyel jelöljük.

A 5.2.4. ábra irányított gráfja nem tartalmaz kört. A neki megfelelő és a 5.2.2. ábrán megrajzolt irányítatlan gráf három kört tartalmaz. Az irányítatlan gráf köreit irányított értelemben leíró körmátrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Igen fontos törvényszerűség áll fenn egy gráfban található független körök (hurkok), továbbá a csúcsok és élek száma között, amely szerint:

$$\acute{e} - c - h + 1 = 0.$$

Egy hurokrendszer akkor független, ha található a hurkokra egy olyan sorszámozás, hogy minden hurok legalább egy olyan élt tartalmaz, amely az előzőekben még nem szerepelt.

Egy gráf valamely tetszőleges pontjából egy másik tetszőleges pontjába vezető utak leírását az útmátrix segítségével végezhetjük. Az útmátrix sorait az utaknak, míg oszlopait a gráf éleinek feleltetjük meg. Az útmátrix a_{ij} eleme 1-gyel vagy 0-val egyenlő aszerint, hogy a j él hozzátartozik-e az i úthoz vagy sem. Pl. a 5.2.2. ábra irányítatlan gráfjának (2) csúcspontjából (4) csúcspontjába vezető utak $\mathbf{U}$ útmátrixa az alábbi:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Amennyiben arra van szükség, hogy egy irányított gráfnak megfelelő irányítatlan gráfban vizsgált utakat írjuk le úgy, hogy jelezzük az utak éleinek eredeti irányítását is, akkor úgy járunk el, hogy felveszünk az utakra irányokat, amelyek az út kezdőpontjából az út végpontja felé mutatnak, és ezeket az irányokat pozitívnak tekintjük. Az ezzel nem egyező irányítású éleket az útmátrix oszlopaiban -1-gyel jelöljük.

5.3. A csőhálózati áramlások megmaradási egyenletei, „peremfeltételei” és meghatározottsága

Csővezeték-hálózatokban az áramlás jellemzőit (a tömegáramot, valamint a nyomáseloszlást)

- a tömegmegmaradást kifejező ún. csomóponti (csúcsonti) egyenletekkel, valamint

- az energia megmaradására utaló ún. hurokegyenletekkel és útegyenletekkel írjuk le.

Beláthatóan minden útegyenlet formailag ekvivalens egy olyan pszeudohurokra felírt hurokegyenlettel, amelyet úgy kapunk, hogy az út kezdő- és végpontját összekötjük egy, a gráfhoz nem tartozó végtelen nagy ellenállású segédéllel. Mivel a végtelen nagy ellenállású élen áram nem folyhat, a pszeudohurokokat tartalmazó gráf áramlástanilag ekvivalens az eredeti gráffal. Elmondottak szerint tehát a megmaradási egyenletek elvileg minden esetben felfoghatók mint csomóponti és hurokegyenletek.

A hálózati áramlást akkor tekinthetjük teljesen meghatározottnak, ha ismerjük

- minden élen az áram nagyságát és
- minden csomópontban az áramló közeg abszolút nyomását (potenciálját),

vagy ami ezzel ekvivalens: minden élen ismerjük a nyomásvesztés (potenciál-esés) nagyságát és a csomópontok geodetikus magasságát.

Egy vizsgált hálózat ismert adatai és a hálózati áramlás teljes meghatározottsága között a kapcsolatot – az elmondottak szerint – a megmaradási egyenletek teremtik meg.

Különbséget kell tennünk a hálózat és a hálózati áramlás teljes meghatározottsága között. A hálózat akkor és csak akkor teljesen meghatározott, ha ismerjük a hálózat gráfját és az élek hidraulikai ellenállását.

A teljesen meghatározott hálózatra előírhatunk a csomópontokban a csomóponti potenciálokra és az elvételekre, illetve betáplálásokra meghatározott értékeket vagy függvényeket, amelyeket a hálózaton létesítendő áramlás „peremfeltételeinek” nevezhetünk.

Teljesen meghatározott hálózat esetében az előírt peremfeltételek és a megmaradási egyenletek birtokában vizsgálható az áramlás teljes meghatározottságának kérdése. Egy áramlást – teljesebbé téve a korábbi definíciót – akkor és csak akkor tekinthetünk teljesen meghatározottnak, ha az áramlás jellemzői kielégítik az áramlásra kirótt peremfeltételeket és a megmaradási egyenleteket.

A hálózat hidraulikai analízisének feladata akkor és csak akkor korrekt kitűzésű, ha az teljesen meghatározott hálózatra történik, és a peremfeltételek olyanok, hogy azok birtokában a megmaradási egyenletek teljes rendszerének kölcsönösen egyértelmű megoldása előállítható, tehát az áramlás teljes meghatározottsága megvalósítható. Egy c számú csomópontot és h számú független hurkot tartalmazó hálózatra $c - 1$ számú független csomóponti egyenlet és h számú független hurokegyenlet (tehát összesen $c - 1 + h$ számú független megmaradási egyenlet) írható fel.

Mivel $c - 1 + h \equiv e$, ezért a megmaradási egyenletek teljes rendszere elvileg maximálisan annyi ismeretlen meghatározását teszi lehetővé, amennyi a gráf éleinek száma.

Ha a hidraulikai analízis feladata nem korrekt kitűzésű, akkor az előírt feltételekkel, illetve az előírt adatokkal végtelen sok áramlási kép megvalósítható, vagy egyetlen fizikailag reális áramlási kép sem állítható elő. Az első esetben az áramlásra kirótt feltételek „alulhatározottságáról”, míg a második esetben azok „túlhatározottságáról” beszélünk.

A hálózat teljes meghatározottsága e számú áram és c számú csomóponti potenciál ismeretét jelenti. Mivel e számú független megmaradási egyenlet írható fel egy hálózatra, ezért nyilvánvalóan c számú jellemző szabad megválasztása engedhető meg. Tehát egy korrekt kitűzésű hálózatanalízis-feladatban c számú áram, illetve potenciál együttes előírása lehetséges, illetve szükséges. Ha a csomópontokra a betáplálások, illetve elvételek nagyságát írjuk elő, akkor – mivel csak $c - 1$ számú betáplálás és elvétel írható fel függetlenül – egy csomóponti potenciálértéket még elő kell írunk. Ha valamely csomópontra nem írunk elő elvételt vagy betáplálást, az hallgatólagosan zérus elvételt vagy betáplálást jelent, és bele kell számítanunk a szabadon választott c számú jellemzők körébe.

5.3.1. Csomóponti egyenletek

A vizsgált hálózatokban tömegforrások létezésével nem számolunk. Ezért a csomóponti egyenletek azt fejezik ki, hogy a hálózatban, bármely csomópontba belépő folyadék-tömegáramok összege egyenlő a csomópontból kilépő folyadék-tömegáramok összegével.

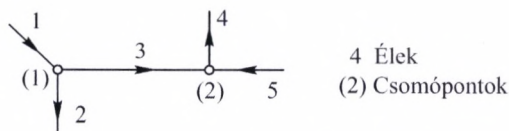
A csomóponti egyenletek a 5.3.1. ábra példáján:

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3, \quad \dot{q}_4 = \dot{q}_3 + \dot{q}_5. \quad (5.3.1)$$

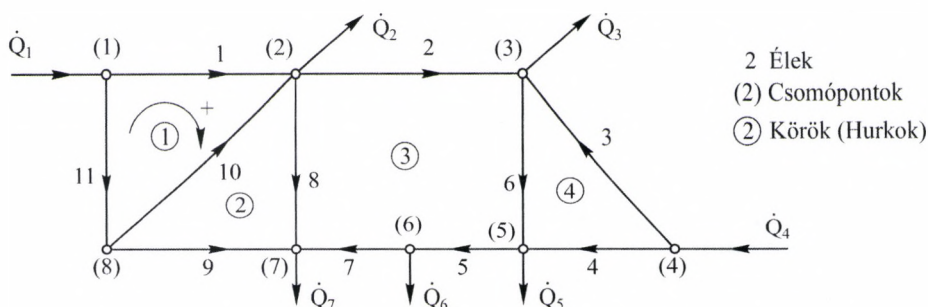
Az áramok megmaradása minden csomópontra, tehát a hálózat egészére nézve igen egyszerűen kifejezhető a hálózati áramkép irányított gráfját leíró illeszkedési mátrix segítségével.

Az „áramgráf” illeszkedési mátrixának megkonstruálása előtt azonban a hálózat irányítatlan gráfjába berajzoljuk az áramlások feltételezett irányait, tehát a gráfot irányítottá tesszük. A feltételezett hálózati áramkép irányított gráfja illeszkedési mátrixának segítségével a csomóponti egyenletek:

$$\dot{Q} = \mathbf{I} \cdot \dot{q}. \quad (5.3.2)$$



5.3.1. ábra. Irányított gráf: élek és csomópontok



5.3.2. ábra. Folyadékhalózat gráfja

Az illeszkedési mátrixszal, a betáplálási vektorral és az áramvektorral kifejezett csomóponti egyenletek a 5.3.2. ábra példáján részletesen az alábbiak szerint írhatók:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \\ \dot{Q}_6 \\ \dot{Q}_7 \\ \dot{Q}_8 \\ \dot{Q}_9 \\ \dot{Q}_{10} \\ \dot{Q}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \\ \dot{Q}_6 \\ \dot{Q}_7 \end{bmatrix}.$$

Szükséges felhívunk a figyelmet arra, hogy egy c csomópontból álló hálózat esetében $c - 1$ független csomóponti egyenlet írható fel.

5.3.2. Hurokegyenletek

Az energiamegmaradásra utaló „hurokegyenletek” azt fejezik ki, hogy a hálózatban bármely zárt hurok (kör) mentén a nyomásvesztések algebrai összege zérus, vagyis

$$\sum_i \Delta p_i = 0. \quad (5.3.3)$$

Egy hurokegyenlet a 5.3.2. ábra példáján:

$$\Delta p_1 - \Delta p_{10} - \Delta p_{11} = 0,$$

vagyis

$$(p_1 - p_2) - (p_2 - p_8) - (p_8 - p_1) = 0.$$

A hálózatra felírható hurokegyenletek egyszerűen kifejezhetők a körmátrix segítségével:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (5.3.4)$$

A nyomásveszteség-vektor elemei pedig az áramok segítségével – mint ismeretes – általában így írhatók:

$$\Delta p_i = R_i \dot{q}_i^a, \quad 1 \leq a \leq 2. \quad (5.3.5)$$

A körmátrix és a nyomásveszteség-vektor segítségével a huroktörvények a 5.3.2. ábra példáján részletesen így írhatók:

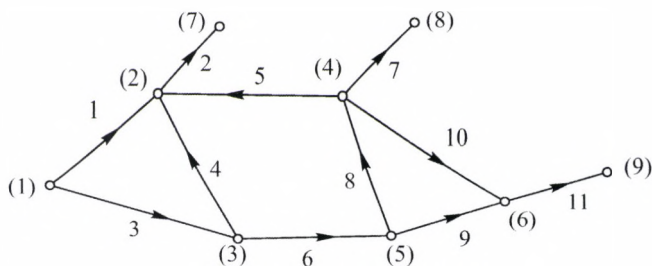
$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{10} & -R_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_s & -R_9 & R_{10} & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & R_6 & R_7 & -R_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_4 & 0 & -R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^a \\ \dot{q}_2^a \\ \dot{q}_3^a \\ \dot{q}_4^a \\ \dot{q}_5^a \\ \dot{q}_6^a \\ \dot{q}_7^a \\ \dot{q}_8^a \\ \dot{q}_9^a \\ \dot{q}_{10}^a \\ \dot{q}_{11}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.3.3. Útegyenletek

Az ún. útegyenletek felírása olyan csőhálózatok hidraulikai analízise során válhat szükségessé, amelyek irányítatlan gráfja csak egyszeresen összefüggő. Ezekben a gráfokban léteznek olyan élek, amelyek a gráf egyetlen köréhez sem tartoznak, és a gráf tartalmazhat elsőfokú csúcspontokat (ennek tipikus példái a tiszta sugaras csőhálózatok). A körökhöz nem tartozó élek áramainak meghatározásához nem elegendő csak a csomóponti és hurokegyenletek felírása, hiszen a hurokegyenletekben ezek az áramok nem jelennek meg. Az ilyen esetekben a csomóponti és hurokegyenleteket „útegyenletekkel” bővítjük. Az egyetlen körhöz sem tartozó gráféleket célszerűen megválasztott gráfutak elemeivé tesszük, és felírjuk a gráfút mentén a gráfút éleinek sorozatára a nyomásveszteséget. Az útegyenlet tehát általában:

$$\sum_i \Delta p_i = c_j, \quad (5.3.6)$$

ahol c_j ismert érték. Ha az útegyenletet két, azonos potenciálú csomópont között írjuk fel, akkor $c_j = 0$, más esetekben $c_j \neq 0$, például egy betáplálási hely és egy fogyasztói végpont (gráfvégpont) közötti útvonalon a szivattyú által előállított



5.3.3. ábra .Egyszeresen összefüggő gráfú hálózat

nyomás értékével egyenlő. E helyen ismételten megjegyezzük, hogy az útegyenletek formailag hurokegyenletekké írhatók át, ha a gráf kérdéses végpontját végtelenül nagy ellenállású élekkel összekötjük a betáplálási pontokkal, vagy – ha a végpontok azonos potenciállal rendelkeznek – zérus ellenállású élekkel egy fiktív nyelőponttal.

A 5.3.3. ábra példáján az (1) és (5) csomópont között az 1, 5, 8 élek sorozatára felírt útegyenlet:

$$\Delta p_1 - \Delta p_5 - \Delta p_8 = c_5.$$

Minden egyes, körhöz nem tartozó él áramának meghatározása egy útegyenlet felírását teszi indokolttá, mivel egy körhöz nem tartozó él a keresett áramképpen egy ismeretlen megjelenését eredményezi.

Ha a körhöz nem tartozó élek mindegyikét egy-egy [az (1) csomópontból kiinduló] irányított út elemévé tettük, akkor ezen utakat leíró U mátrix segítségével az útegyenletek:

$$U \Delta p = c.$$

Az 5.3.3. ábra példáján az útegyenletek útmátrixszal kifejezett formában részletesen így írhatók:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & 0 & R_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{10} & R_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^a \\ \dot{q}_2^a \\ \dot{q}_3^a \\ \dot{q}_4^a \\ \dot{q}_5^a \\ \dot{q}_6^a \\ \dot{q}_7^a \\ \dot{q}_8^a \\ \dot{q}_9^a \\ \dot{q}_{10}^a \\ \dot{q}_{11}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

5.4. A csőhálózati áramlást leíró megmaradási egyenletek megoldása

Mint láttuk, a csomóponti egyenletek lineárisak, a hurokegyenletek és útegyenletek viszont nem lineárisak. Az áramok meghatározására szolgáló (5.3.2) és (5.3.4) egyenletekből álló egyenletrendszer összességében nem lineáris.

A csomóponti és a hurokegyenletekből álló (5.3.2) és (5.3.4) nemlineáris egyenletrendszer megoldására, tehát a q_i tömeg-, térfogat- vagy energiaáramok meghatározására – a történeti érdekességű Hardy–Cross-módszert ma már nem tekintve – alapvetően két módszert alkalmaznak, nevezetesen Newton–Raphson-eljárást illetve annak variánsait, valamint az ún. linearizáló eljárást. Mindegyik eljárás közös jellemzője az, hogy a nemlineáris egyenletrendszer megoldását lineáris egyenletrendszerek sorozatos megoldására vezetik vissza.

5.4.1. A Newton–Raphson-eljárás

Legyen egy n egyenletből álló nemlineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\&\vdots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0.\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

Legyenek az egyenletek ismert közelítő megoldásai:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n.\tag{5.4.2}$$

Az egzakt megoldások pedig mint ismeretlen mennyiségek:

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*.\tag{5.4.3}$$

Legyen

$$x_1^* = \bar{x}_1 + h_1, \dots, x_n^* = \bar{x}_n + h_n.\tag{5.4.4}$$

Ezzel

$$\begin{aligned}f_1(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2 + h_2, \dots, \bar{x}_n + h_n) &= 0, \\f_2(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2 + h_2, \dots, \bar{x}_n + h_n) &= 0, \\&\vdots \\f_n(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2 + h_2, \dots, \bar{x}_n + h_n) &= 0.\end{aligned}\tag{5.4.5}$$

Fejtsük a fenti függvényeket az $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ helyek környezetében Taylor-sorba, és tartsuk meg abból csak a lineáris tagokat! Ekkor $h_1, h_2, \dots, h_n$ -re az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} h_n + \dots &= 0, \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} h_n + \dots &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} h_n + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Az egyenletrendszer nemtriviális megoldása létezésének az a feltétele, hogy az egyenletrendszer determinánsa különbözzék zérustól, azaz

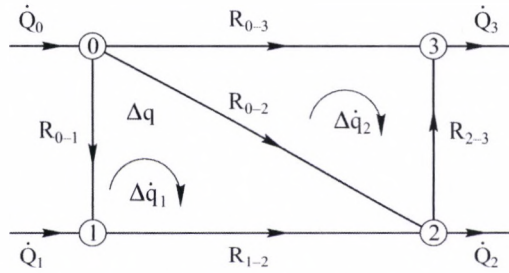
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.4.7)$$

Ekkor, mint ismeretes, a keresett ismeretlenekre:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ -f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ -f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}. \quad (5.4.8)$$

A kiszámított $h_1, h_2, \dots, h_n$ értékekkel az $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ közelítő megoldásokat (5.4.4) szerint korrigáljuk.

A (5.4.1) egyenlet linearizált sorfejtése miatt természetesen az így korrigált $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ értékekkel a (5.4.1) egyenletrendszer még nem elégíthető ki eleghetően pontosan. A megoldást tovább kell javítani úgy, hogy új sorbafejtést hajtunk végre (5.4.6) szerint a korrigált $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek, vagyis $x_1 + h_1,$



5.4.1. ábra. Folyadékhálózat: példa a Newton-Raphson-eljárás alkalmazásához

$x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n$ helyek környezetére. Az eljárást rekurzíve folytatjuk mindaddig, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük, azaz amikor már $h_1, h_2, \dots, h_n$ aktuális értékei az előírt mértékben megközelítették a nullát, tehát egy soron következő iterációs lépésben a gyökök érdemleges javítására már nincs lehetőség.

Mutassuk be az eljárás alkalmazását a 5.4.1. ábra példáján!

A hálózatra felírható csomóponti és hurokegyenletek:

$$F_1 = \dot{q}_{0-1} - \dot{q}_{1-2} + \dot{Q}_1 = 0, \quad (5.4.9)$$

$$F_2 = \dot{q}_{1-2} + \dot{q}_{0-2} - \dot{q}_{2-3} - \dot{Q}_2 = 0, \quad (5.4.10)$$

$$F_3 = \dot{q}_{0-3} + \dot{q}_{2-3} - \dot{Q}_3 = 0, \quad (5.4.11)$$

$$F_4 = R_{0-1} \dot{q}_{0-1}^a + R_{1-2} \dot{q}_{1-2}^a - R_{0-2} \dot{q}_{0-2}^a = 0, \quad (5.4.12)$$

$$F_5 = R_{0-2} \dot{q}_{0-2}^a + R_{2-3} \dot{q}_{2-3}^a - R_{0-3} \dot{q}_{0-3}^a = 0. \quad (5.4.13)$$

Az egyenletrendszer megoldása vagy a csomóponti nyomások (potenciálok), vagy a hurokáramok iterálásával az ún. H-egyenletek, illetve a Δq -egyenletek előállítása után lehetséges.

H-egyenletek

Ha a potenciálesés ismert képletéből kifejezzük az áramokat, vagyis

$$\dot{q}_{i-j} = \left(\frac{H_i - H_j}{R_{i-j}} \right)^{\frac{1}{a}}, \quad (5.4.14)$$

és ezt rendre behelyettesítjük az F_1, F_2 és F_3 egyenletbe, akkor az

$$F_1 = \left(\frac{H_0 - H_1}{R_{0-1}} \right)^{\frac{1}{a}} - \left(\frac{H_1 - H_2}{R_{1-2}} \right)^{\frac{1}{a}} + \dot{Q}_1 = 0, \quad (5.4.15)$$

$$F_2 = \left(\frac{H_1 - H_2}{R_{1-2}} \right)^{\frac{1}{a}} + \left(\frac{H_0 - H_2}{R_{0-2}} \right)^{\frac{1}{a}} - \left(\frac{H_2 - H_3}{R_{2-3}} \right)^{\frac{1}{a}} - \dot{Q}_1 = 0, \quad (5.4.16)$$

$$F_3 = \left(\frac{H_0 - H_3}{R_{0-3}} \right)^{\frac{1}{a}} + \left(\frac{H_2 - H_3}{R_{2-3}} \right)^{\frac{1}{a}} - \dot{Q}_3 = 0 \quad (5.4.17)$$

nemlineáris egyenleteket kapjuk, amelyekben a H_1 , H_2 és H_3 csomóponti potenciálok az ismeretlenek.

$\Delta\dot{q}$ -egyenletek

Vegyünk fel az ismeretlen $\dot{q}_{0-1}$, $\dot{q}_{0-2}$, $\dot{q}_{0-3}$, $\dot{q}_{1-2}$ és $\dot{q}_{2-3}$ áramokra olyan értékeket, amelyek kielégítik az F_1 , F_2 és F_3 csomóponti egyenleteket. Ezek az értékek természetesen a hurokegyenleteket általában nem elégítik ki, vagyis

$$\sum R_{i-j} \dot{q}_{i-j}^a \neq 0. \quad (5.4.18)$$

Az egyenlőség a hurokegyenletekben visszaállítható egy $\Delta\dot{q}_i$ korrekciós áram bevezetésével (lásd a 5.4.1. ábrát). Ekkor

$$F_4 = R_{0-1} (\dot{q}_{0-1} - \Delta\dot{q}_1)^a + R_{1-2} (\dot{q}_{1-2} - \Delta\dot{q}_2)^a - R_{0-2} (\dot{q}_{0-2} + \Delta\dot{q}_1 - \Delta\dot{q}_2)^a = 0, \quad (5.4.19)$$

$$F_5 = R_{0-3} (\dot{q}_{0-3} + \Delta\dot{q}_1)^a + R_{2-3} (\dot{q}_{2-3} - \Delta\dot{q}_2)^a - R_{0-2} (\dot{q}_{0-2} - \Delta\dot{q}_2 + \Delta\dot{q}_1)^a = 0. \quad (5.4.20)$$

Ezekben az egyenletekben a $\Delta\dot{q}_1$ és $\Delta\dot{q}_2$ az ismeretlen. Alkalmazzuk most már a Newton–Raphson eljárást a $\Delta\dot{q}$ egyenletekre! Ehhez deriváljuk az F_4 , F_5 egyenletrendszer parciálisan $\Delta\dot{q}_1$ és $\Delta\dot{q}_2$ szerint. Ekkor

$$\frac{\partial F_4}{\partial \Delta\dot{q}_1} = R_{0-1} a (\dot{q}_{0-1} - \Delta\dot{q}_1)^{a-1} - R_{0-2} a (\dot{q}_{0-2} + \Delta\dot{q}_1 - \Delta\dot{q}_2)^{a-1}, \quad (5.4.21)$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial \Delta\dot{q}_2} = -R_{2-3} a (\dot{q}_{2-3} - \Delta\dot{q}_2)^{a-1} - R_{0-2} a (\dot{q}_{0-2} - \Delta\dot{q}_2 + \Delta\dot{q}_1)^{a-1}. \quad (5.4.22)$$

Ezeket számoljuk ki $\dot{q}_{0-1}$, $\dot{q}_{0-2}$, $\dot{q}_{0-3}$ felvett induló értékei és $\Delta\dot{q}_1 = \Delta\dot{q}_2 = 0$ mellett! Ugyancsak számítsuk ki F_4 , és F_5 értékeit hasonlóképpen $\dot{q}_{0-1}$, $\dot{q}_{0-2}$ és $\dot{q}_{0-3}$ induló értékei, valamint $\Delta\dot{q}_1 = \Delta\dot{q}_2 = 0$ felvétel mellett, és jelöljük ezeket $F_4(0)$, és $F_5(0)$ szimbólumokkal! Ha ezeket behelyettesítjük az F_4 , és F_5 egyenlet-

rendszer $\dot{q}_{0-1}$, $\dot{q}_{0-2}$, és $\dot{q}_{0-3}$ értékek környezetében sorbafejtett és linearizált alakjába – (5.4.6)-nak megfelelően –, akkor a $\Delta\dot{q}_1$ és $\Delta\dot{q}_2$ korrekciós áramok értékei:

$$\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_4}{\partial \Delta \dot{q}_1} & \frac{\partial F_4}{\partial \Delta \dot{q}_2} \\ \frac{\partial F_5}{\partial \Delta \dot{q}_1} & \frac{\partial F_5}{\partial \Delta \dot{q}_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F_4(0) \\ -F_5(0) \end{bmatrix}. \quad (5.4.23)$$

A kapott $\Delta\dot{q}_1$ és $\Delta\dot{q}_2$ értékekkel korrigáljuk az induló $\dot{q}_{0-1}$, $\dot{q}_{0-2}$ és $\dot{q}_{0-3}$ áramokat, és az eljárást rekurzíve folytatjuk mindaddig, amíg a $\Delta\dot{q}_1$ és $\Delta\dot{q}_2$ korrekciós áramok aktuális értékei már a kívánt mértékig megközelítették a nullát!

Az eljárás értelemszerűen hasonlóan építhető fel a H-egyenletek megoldására is.

Első lépésben előállítjuk a (5.4.17) H-egyenletek linearizált Taylor-sorát az alábbiak szerint:

$$F_j + \sum \frac{\partial F_j}{\partial H_i} \Delta H_i = 0, \quad (5.4.24)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots,$$

ahol

$$\frac{\partial F_j}{\partial H_i} = \frac{1}{aK_{ij} (H_i - H_j)^{(1-1/a)}}. \quad (5.4.25)$$

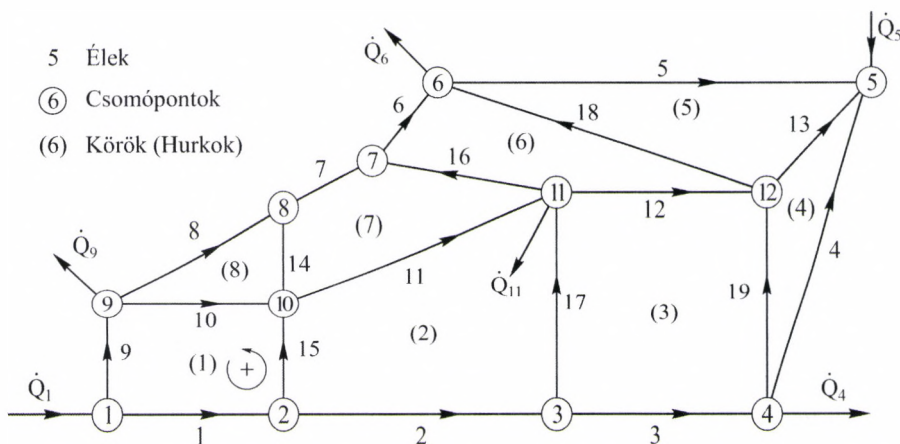
Ezután becslő, „induló” értékeket (nulladrendű közelítést) veszünk fel a csomóponti potenciálok értékeire. Ezekkel kiszámoljuk az F_j és a $\frac{\partial F_j}{\partial H_i}$ függvények értékeit, majd megoldjuk a (5.4.24) lineáris egyenletrendszer a csomóponti potenciálok ΔH_i korrekciós értékeire. A kiszámított értékekkel korrigáljuk a csomóponti potenciálok induló értékeit, és az eljárást az új értékekkel folytatjuk. Az eljárás akkor fejeződik be, ha a csomóponti potenciálok kiszámított értékei csak megadott hibahatáron belül különböznek az előző lépésben meghatározott értékektől.

5.4.2. A linearizáló eljárás

Írjuk fel a nyomásveszteség kifejezését

$$\Delta p_i = R_i \dot{q}_i^{a-1} \dot{q}_l = R'_i \dot{q}_i \quad (5.4.26)$$

alakban!



5.4.2. ábra. Folyadékhalózat: példa a linearizáló eljárás alkalmazásához

A (5.4.26) kifejezés a $\Delta \dot{q}_i$ áramra nézve lineáris, ugyanakkor az R'_i ellenállás az áramlás mértékének, tehát $\Delta \dot{q}_i$ -nek függvénye. Legyen első közelítésben:

$$R'_i = R_i. \quad (5.4.27)$$

Ekkor, ha a vizsgált hálózatra felírjuk a csomóponti, hurok-, valamint út-egyenleteket, szimultán lineáris egyenletrendszert kapunk. A szimultán lineáris egyenletrendszer megoldásával a keresett ismeretlen hálózati folyadékáramok elsőrendű közelítését kapjuk. Ezután az így kiszámított folyadékáramokkal egy másodrendű közelítést adunk a csőellenállásokra,

$$R'_t = R_i \dot{q}_i^{a-1} \quad (5.4.28)$$

szerint. Az eljárás rekurzív, és mindaddig folytatjuk, amíg két számítási fokozatban kapott eredmények egymástól csak előírt hibahatáron belül különböznek.

A linearizáló eljárás alkalmazását a 5.4.2. ábra példáján és a 5.4.1. táblázat adataival számszerűen is bemutatjuk. A csomóponti és huroktörvények a hálózat illeszkedési és körmátrixa, továbbá az áram- és a betáplálási vektorok segítségével a mellékelt formában írhatók (5.4.3. ábra).

Az iterációs eljárás végrehajtása után kapott eredményeket a 5.4.2. táblázat tartalmazza.

A linearizáló eljárás igen nagy előnye, hogy nincs szükség induló áramértékek felvételére, másrészt a szakirodalom szerint mindig konvergens. Bizonyos esetekben előfordulhat a konvergencia „oszcillációja”, amely – ugyancsak a szakirodalom szerint – úgy küszöbölhető ki, ha az áramok valamely n -ed rendű közelítésére

$$\dot{q}_{i,n} = \frac{\dot{q}_{i,n-1} + \dot{q}_{i,n-2}}{2} \quad (5.4.29)$$

helyettesítést alkalmazunk.

5.4.1. táblázat. Adatok a 5.4.2. ábrához

A cső sorszáma	A cső átmérője [m]	A cső hosszúsága [m]
1	0,305	457,2
2	0,203	304,8
3	0,203	365,8
4	0,203	609,6
5	0,203	853,4
6	0,203	335,3
7	0,203	304,8
8	0,203	762,0
9	0,203	243,8
10	0,152	396,2
11	0,152	304,8
12	0,254	335,3
13	0,254	304,8
14	0,152	548,6
15	0,152	335,3
16	0,152	548,6
17	0,254	365,9
18	0,152	548,6
19	0,152	396,2

5.4.3. táblázat. A 5.4.2. ábrán bemutatott hálózatra kiszámított eredmények

Csőszakasz		Térfogatáram	Áramlási sebesség	Nyomáscsökkenés
Csomóponttól	csomópontig	[m ³ /s]	[m/s]	[Pa]
1	2	0,058516	0,8009	6596,54
1	9	0,045784	1,4146	22826,09
2	3	0,042395	1,3099	19200,71
2	10	0,016121	0,8884	16095,56
3	4	0,016683	0,5155	4143,80
3	11	0,025712	0,5074	2640,11
5	4	0,010037	0,3101	2499,59
12	4	0,004780	0,2634	1672,04
5	6	0,008690	0,2685	2623,31
5	12	0,015772	0,3113	827,55
7	6	0,012300	0,3800	2064,61
12	6	0,004210	0,2320	1795,76
8	7	0,014377	0,4442	2564,23
7	11	0,002077	0,1145	437,20
9	8	0,009173	0,2834	2609,84
10	8	0,005204	0,2868	2743,82
10	9	0,001290	0,0711	133,98
10	11	0,009628	0,5306	5745,26
12	11	0,006783	0,1339	168,35

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & & & \\ & & & & & -1 & 1 & & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & -1 & \\ & R' & & & & & -R' & -R' & & & R' \\ & & -R' & & & & & & -R' & & R' \\ & & & R' & & & & & & -R' & R' \\ & & & & R' & & & & & & -R' \\ & & & & & -R' & & & & & R' \\ & & & & & & R' & & & & -R' \\ & & & & & & & R' & & & \\ & & & & & & & & -R' & & R' \\ & & & & & & & & & -R' & R' \\ & & & & & & & & & & -R' \\ & & & & & & & & & & & R' \\ & & & & & & & & & & & & -R' \\ & & & & & & & & & & & & & R' \\ & & & & & & & & & & & & & & -R' \\ & & & & & & & & & & & & & & & R' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \\ \dot{q}_9 \\ \dot{q}_{10} \\ \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{13} \\ \dot{q}_{14} \\ \dot{q}_{15} \\ \dot{q}_{16} \\ \dot{q}_{17} \\ \dot{q}_{18} \\ \dot{q}_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1040 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0315 \\ -0,0345 \\ 0,0252 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0379 \\ 0 \\ 0,0442 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4.3. ábra. A csomóponti és hurokegyenletek mátrixegyenlete

6. MELEGVÍZ-FŰTÉSŰ HŐLEADÓK HŐLEADÁSÁNAK SZÁMÍTÁSÁVAL KAPCSOLATOS ELMÉLETI PROBLÉMÁK

A meleg-vízfűtésű hőleadók hőleadásának számítását a gyakorlatban mind ezideig lényegileg mellőzték és a gyártók, illetve szállítók mérési és prospektusadataira támaszkodtak. E kérdéssel kapcsolatban az elméleti problémát az jelenti, hogy az adott valószínűségi jellemzőkkel rendelkező hőigényhez kell illesztenünk a hőleadót. El kell végeznünk a megbízhatósági szint vizsgálatokat, és nyilvánvalóan a hőigény várható értékéből és szórásából számítható 94-95%-os megbízhatósághoz kell illesztenünk a hőleadó kiválasztását. A gyakorlatban mindezideig a mérésekben hiányzik a hőleadók hőleadásának statisztikai elemzése, a karakterisztikák hőközlése, a különböző beltéri jellemzőkhöz igazodóan a hőleadók hőleadásának – mint valószínűségi változónak – a várható értéke, szórása, az eloszlási függvény típusa és egyéb statisztikai jellemzői. A tervezés feladata tulajdonképpen a két valószínűségi változó egymáshoz illesztése. E kérdéskör – bár az ehhez tartozó matematikai alapok közismerten adottak – még további vizsgálatokat igényel.

7. MELEGVÍZ-FŰTÉSEK ÁRAMLÁSTANI ÉS HIDRAULIKAI KÉRDÉSEI. AZ ÁRAMLÁSI NYOMÁSVESZTESÉG SZÁMÍTÁSA MELEG VÍZRE

Melegvíz-fűtések tervezésének és üzemeltetésének fontos kérdésköre az áramlástan és hidraulikai problémák vizsgálata. A külső hőmérséklet és a többi meteorológiai tényező függvényében változik a hőigény és ehhez kell igazodnia a szabályozásnak is. A szabályozás során egyfelől általában az előremenő vízhőmérsékletet állítjuk be, de a fogyasztó a helyi igénye szerint a fűtőtestbe jutó melegvíz-áramot is szabályozza (szabályozhatja), amely lehet manuális vagy automatikus. A hidraulikai tervezéssel és az üzemeltetéssel szemben támasztott legfontosabb követelmény a hálózat hidraulikai stabilitása, amin azt értjük, hogy a szivattyú munkapontjai, az emelőmagasság és a tömegáram képesek legyenek követni a fogyasztói igényeket összességében és külön-külön is. Mindegyik fogyasztóhoz eljusson a kívánt rész-áram, ne alakuljon ki lengés, a fogyasztói beavatkozások ne hassanak vissza egymásra jelentékenyen, a termosztatikus radiátorszelepekre jutó nyomáskülönbség megengedett mértékű maradjon, és ne lépjenek fel áramlási zajok.

A gondos tervezés során, a rendszer méretezési paramétereinek, a csőátmérőknek, a szerelvényeknek, a szabályozóknak és a szivattyú(k)nak a kiválasztása során e körülményekre és következményekre kell tekintettel lenni. Fontos szempont és követelmény a továbbiakban az, hogy a rendszer működését tetszőleges közbenső üzemállapotra ellenőrizni kell, a kialakuló munkapontokat minősíteni kell az ellátás biztonsága és gazdaságossága szempontjából.

A csővezeték-hálózat, a szabályozók és szivattyú(k) együttműködő rendszerének hidraulikai munkapontját a hidraulikai analízis módszereivel határozhatjuk meg.

A hidraulikai analízis során, a hőigények függvényében

- a vezetékszakaszokon kialakuló áramlási sebességeket,
- a vezetékszakaszokon létrejövő nyomásvesztéseket,
- a csomóponti nyomásokat, nyomáskülönbségeket,
- a beszabályozási fojtásokat,
- a hálózat eredő hidraulikai ellenállását és
- a szivattyú(k) munkapontját

határozzuk meg.

A hidraulikai analízis fontos előtanulmányát képezi a nyomásveszteségek számítása, a csővezetéki áramlástan.

7.1. Súrlódásmentes, hőszigetelt (adiabatikus) áramlás

Az ilyen típusú (idealizált) áramlások vizsgálata a

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + gH_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + gH_2 \quad (7.1.1)$$

Bernoulli-egyenlet alkalmazásán alapul.

Ha ismertek az áramlás p_1 , w_1 , H_1 belépő jellemzői, akkor először a kontinuitási egyenlet segítségével meghatározzuk a w_2 kilépő sebességet:

$$w_2 = \frac{A_1 w_1}{A_2},$$

majd a (7.1.1) Bernoulli-egyenlet segítségével meghatározható a p_2 kilépő nyomás. Természetesen ismernünk kell a H_2 kilépő geodetikus magasságot is.

Ha az áramlásban pl. szivattyú segítségével külső (technikai) munkát viszünk be, akkor a Bernoulli-egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$L_{12} + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + gH_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + gH_2. \quad (7.1.2)$$

Ha ismeretese az áramlás belépő jellemzői és előírjuk az áramlás megkívánt kilépő jellemzőit, akkor a Bernoulli-egyenlet segítségével kiszámítjuk az áramlás fenntartásához, illetve létrehozásához szükséges technikai (szivattyú-) teljesítményt.

Ha az áramlás állandó keresztmetszetű csőben történik, akkor $w_1 \equiv w_2$, és így egységnyi tömeg áramoltatásához szükséges szivattyúteljesítmény:

$$L_{1,2} = P = \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + g(H_2 - H_1). \quad (7.1.3)$$

A teljes m folyadéktömeg áramoltatásához szükséges teljesítmény pedig

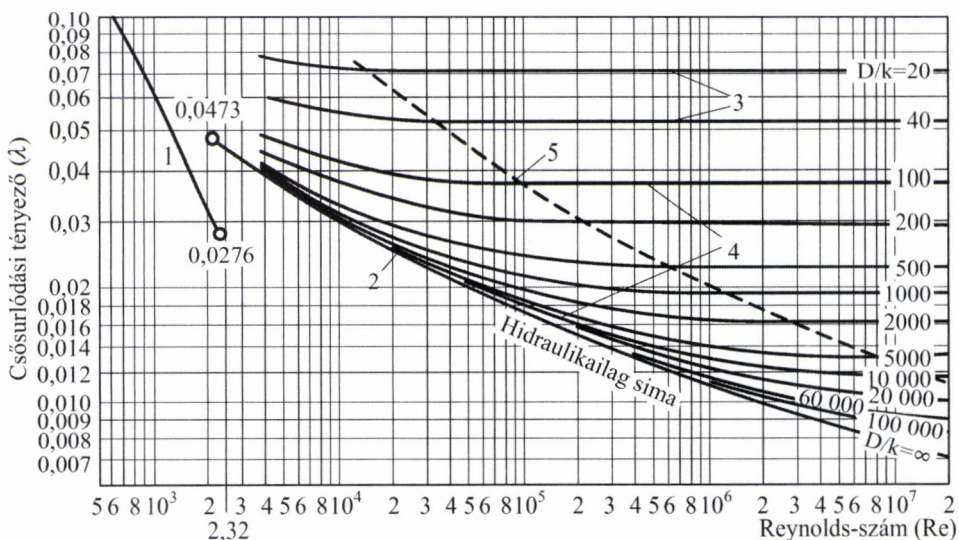
$$(A\rho wP) = Aw(p_2 - p_1) + A\rho wg(H_2 - H_1). \quad (7.1.4)$$

7.2. Súrlódásos, hőszigetelt (adiabatikus) áramlás. Áramlási veszteség, hidraulikai ellenállás

E pontban az összenyomhatatlan folyadékok csővezetékben történő súrlódásos áramlása során fellépő nyomásesés és az áramlás fenntartásához szükséges technikai munka, illetve teljesítmény meghatározásával foglalkozunk.

7.2.1. Nyomásveszteség egyenes csőben való áramlaskor

Ha a folyadéksúrlódást a szilárd testek közötti csúszósúrlódással összehasonlítjuk, akkor a következőket tapasztaljuk. Szilárd testek esetén a súrlódási erő arányos a felületeket összenyomó erővel, (csaknem) független az érintkező nagyságától, (csaknem) független a sebességtől. Folyadékok esetén a súrlódási erő megközelí-



7.2.1. ábra. A csőszűrlődési tényező értéke a Re-szám és a k/D relatív érdesség függvényében
(Az egyenletek a 7.2.1. táblázatban találhatók)

7.2.1. táblázat. Néhány gyakran előforduló áramlási szelvény hidraulikailag egyenértékű átmérőjének meghatározása

Kör	Négyzet	Háromszög	Négyszög	Ellipszis	Körgyűrű	Rés
D	C	$\frac{S}{\sqrt{3}}$	$2 \frac{C}{1 + \frac{C}{B}}$	$\frac{2CB}{1,5(B+C) - \sqrt{BC}}$	$D_A - D_I$	$2C$

tőleg független a nyomástól, arányos az érintkező felületek nagyságával, és erősen függ a sebességtől.

Súrlódási nyomásveszteség egyenes csőben

Kialakult (felépült) csővezetéki áramlás esetén a falsúrlódás hatása az egész áramlási keresztmetszetre kihat.

Hatásmechanizmust a Darcy–Weisbach-féle csőellenállási törvény írja le, amely szerint az áramlás során létrejövő elemi nyomásveszteség:

$$dp_v = g\rho dH_R = \frac{\lambda}{D} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 dz, \quad (7.2.1)$$

ahol

H_R az ún. súrlódási veszteségmagasság,

$D = \frac{4A}{U}$ a hidraulikailag egyenértékű átmérő,

U a nedvesített kerület,

A az áramlási keresztmetszet (7.2.1. táblázat),

$\bar{w}$ közepes sebesség,

λ a súrlódási tényező, amely a $Re = \frac{\bar{w} D}{\nu}$ Reynolds-számtól és a k/D relatív érdességtől függ (7.2.1. ábra, 7.2.2. táblázat).

7.2.2. táblázat. A λ csősúrlódási tényező egyenletei és érvényessége az áramkép különböző tartományokban (a grafikus ábrázolás a 7.2.1. ábrán látható)

Görbe	Áramkép	Érvényességi tartomány	Egyenlet	Az egyenlet neve
1	Lamináris	$Re < Re_{kr}$ $Re_{kr} = 2320 \dots 3000$	$\lambda = \frac{64}{Re}$	Hagen–Poiseuille
2	Hidraulikailag sima cső, turbulens	$Re > Re_{kr}$ $3 \cdot 10^3 < Re < 10^5$	$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$	Blasius
		$Re > Re_{kr}$ $Re < 3,14 \cdot 10^6$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8$	Prandtl–Nikuradse
3	Turbulens zóna, érdes cső	$Re_{kr} < Re < 200 \frac{D}{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $\lambda = f(k/D)$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 2 \lg \frac{k}{D} \equiv$ $\equiv -2 \lg 0,27 \frac{k}{D} \equiv 2 \lg 3,72 \frac{D}{k}$	Kármán
4	Átmeneti zóna, érdes cső	$Re > Re_{kr}$ $\lambda = f(Re, k/D)$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + 0,27 \frac{k}{D} \right)$	Colebrook–White
5	A turbulens és átmeneti zóna görbéjének egyenlete		$Re = 200 \frac{D}{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $Re = 400 \frac{D}{k} \lg 3,72 \frac{D}{k}$	Rouse

7.2.3. táblázat. A k abszolút érdesség értéke a cső anyagának, gyártástechnológiájának és állapotának megfelelően

Anyag és technológia	A cső állapota	k, mm	
Húzott cső üvegből, vörös vagy sárgarézről, bronzból, alumíniumból, vagy hasonló könnyűfémről, műanyagból stb.	új, hidraulikailag sima	0 (sima)...0,0015	
Húzott acéleső	új	0,01...0,05	0,04 (0,02...0,10)
	hosszabb használat után tisztítva	-	0,15...0,20
	gyengén rozsdás és/vagy csekély lerakódás	-	0,40
	erős lerakódás	-	...3,00
Hegesztett acéleső	új	0,6...0,10	
	új, bitumenezett	-	0,05
	használt és tisztított	-	0,15...0,20
	egyenletes, gyenge rozsdás	0,15...0,20	...0,40
	csekély lerakódás	0,15...0,20	1,00...1,50
	erős lerakódás	...3,00	2,00...4,00
Horganyzott acéleső	lerakódás nélkül	0,12...0,15	0,15
Öntöttvas cső	új	0,25	0,26...1,00
	új, bitumenezett	0...0,12	0,10...0,15
	rozsdás	1,50	1,00...1,50
	erős lerakódás	3,00	1,50...4,00
Azbesztcement cső		0...0,15	0,05...0,10

Ügyelni kell arra, hogy az egyenértékű átmérő hidraulikai és kalorikus szempontból nem mindig azonos, hiszen gyakran a nedvesített kerület és a hőátadásban részt vevő kerület nem azonos.

A k abszolút érdesség értékeit a cső anyagától, a gyártás technológiájától, a csőfal felületének állapotától stb. függően a 7.2.3. táblázat tartalmazza.

A nyomásesés vagy veszteségmagasság értéke két hely, 1 és 2 között inkompresszibilis áramlás esetén:

$$\frac{1}{\rho}(\Delta p_v)_{12} = (H_R)_{12} g = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\lambda}{D} \frac{\bar{w}^2}{2} dz = \sum_{z_1}^{z_2} \lambda \frac{\Delta L}{D} \frac{\bar{w}^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{w}^2}{2} = \frac{8}{\pi^2} \lambda \frac{L}{D^5} \dot{V}^2, \quad (7.2.2)$$

ahol $\dot{V}$ a térfogatáram.

Ha az áramlás mentén (a csőtengely irányában) az áramlási keresztmetszet nem állandó, akkor az integrálás során a kontinuitási egyenletet ($wA = \text{konstans}$) is figyelembe kell venni. Kis mértékű keresztmetszet-változás esetén elfogadható eredményt ad a szakaszokra bontás és a szakaszonkénti átlagos keresztmetszet, illetve sebesség figyelembevétele.

Sebességeloszlás a csőkeresztmetszetben

A körszelvényű csőben kialakult és felépült áramlás sebességprofilját az alábbi összefüggés adja meg:

$$w(r) = \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right]^n \hat{w} . \quad (7.2.3)$$

$\hat{w}$ a maximális sebesség.

Lamináris áramlás esetén $n = 1$ (egzakt, parabolikus eloszlás; Hagen–Poiseuille), turbulens áramlás esetén

$$n \approx \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{\text{Re}}{50}} \right)},$$

de használatos az $n = 1/7$ is, megközelítőleg állandó sebességeloszlás esetén.

A közepes sebesség:

$$\bar{w} = \frac{1}{A} \int_A w dA = \frac{1}{1+n} \hat{w} . \quad (7.2.4)$$

Lamináris esetben: $\bar{w} = 0,5\hat{w}$, turbulens esetben: $\bar{w} = 0,87\hat{w}$.

A (7.2.3) tényleges sebességeloszlással számolt kinetikus energia és a közepes $\bar{w}$ áramlási sebességgel számolt kinetikus energia viszony száma:

$$\beta = \frac{1}{\bar{w}^3 A} \int_A w^3 dA = \frac{(1+n)^3}{1+3n} . \quad (7.2.5)$$

A (7.2.3) tényleges sebességeloszlással számolt impulzus és a közepes $\bar{w}$ áramlási sebességgel számolt impulzus viszony száma:

$$\alpha = \frac{1}{\bar{w}^2 A} \int_A w^2 dA = \frac{(1+n)^2}{1+2n} . \quad (7.2.6)$$

- Lamináris esetben: $\beta = 2$, $\alpha = 4/3$.
- Turbulens esetben: $\beta = 1,05 \approx 1,00$, $\alpha = 1,02 \approx 1,00$.

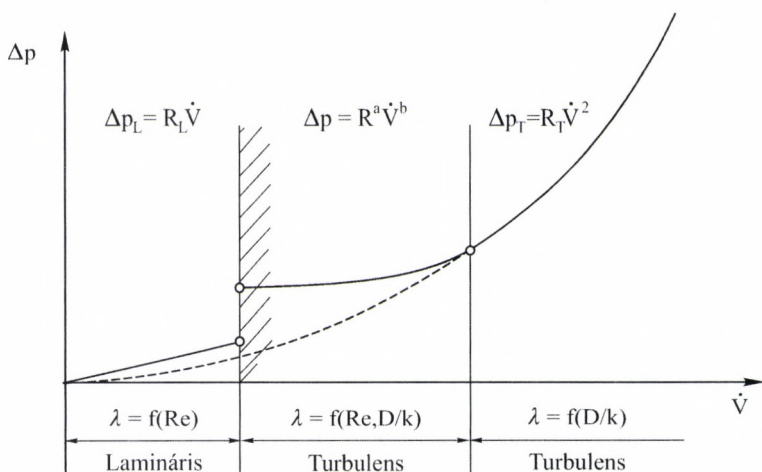
Hidraulikai ellenállás

Ha nyomásesés és térfogatáram közötti általános – egyelőre az áramképtől független – összefüggést írjuk fel, akkor a

$$\Delta p = R^a \dot{V}^b$$

egyenlethez jutunk. Tiszta lamináris áramlás esetén a hidraulikai ellenállás értéke:

$$R_L = 40,7436 \cdot \nu \cdot \rho \cdot \frac{1}{D^4} \text{ [kg/m}^4\text{s]},$$



7.2.2. ábra. Az R hidraulikai ellenállás értelmezése a $\dot{V}$ térfogatáram és Δp nyomásvesztés (nyomáscsökkenés) függvényében

és a kitevők $a = 1$ és $b = 1$. A Rouse-féle határgörbe feletti turbulens áramlás esetén, ha $\lambda \neq f(Re)$, akkor a hidraulikai ellenállás értéke:

$$R_T = 0,8105 \lambda_T \rho \frac{1}{D^5} = 0,2026 \frac{1}{\left[\lg \left(3,72 \frac{D}{k} \right) \right]^2} \rho \frac{1}{D^5} \text{ [kg/m}^7\text{]}, \quad (7.2.7)$$

és a kitevők $a = 1$ és $b = 2$. Minden más esetben, vagyis a laminárís feletti, de a Rouse-féle határgörbe alatti áramlás esetén $a \neq 1$ és $1 < b < 2$ (7.2.2. ábra)

(Azért, hogy az R hidraulikai ellenállás értékére egyértelmű és gyakorlatban használatos fogalmat nyerjünk, definiálnunk kell a vonatkoztatási hőmérsékletet is. Külön megjelölés híján $+20^\circ\text{C}$ -ra kell értelmezni, és ezt nevezzük a hidraulikai ellenállás normálértékének.)

A továbbiakban a w áramlási sebességen mindig $\bar{w}$ közepes áramlási sebességet értünk.

Egyenértékű hossz

A csővezeteki elemek okozta nyomáscsökkenés átszámítható egyenértékű, vagyis nyomáscsökkenés szempontjából ekvivalens csőhosszra. Az átszámítás alapja az alábbi összefüggés:

$$\zeta = \lambda \frac{L_v}{D}, \text{ illetve } L_v = \zeta \frac{D}{\lambda}, \quad (7.2.8)$$

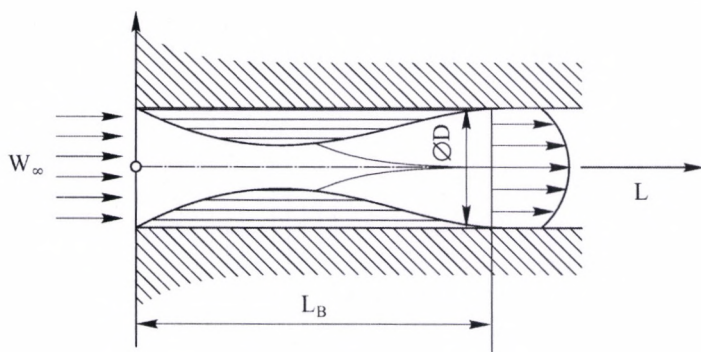
ahol L_v az a virtuális csővezeték hossz, amely D átmérő és λ csőúrlódási tényező esetén azonos nyomáscsökkenést eredményez, mint ζ . A valóságos csőhosszhoz a virtu-

ális csőhosszat hozzáadva az egész csővezetékre egy egyenértékű (nyomásesést okozó) hosszhoz jutunk.

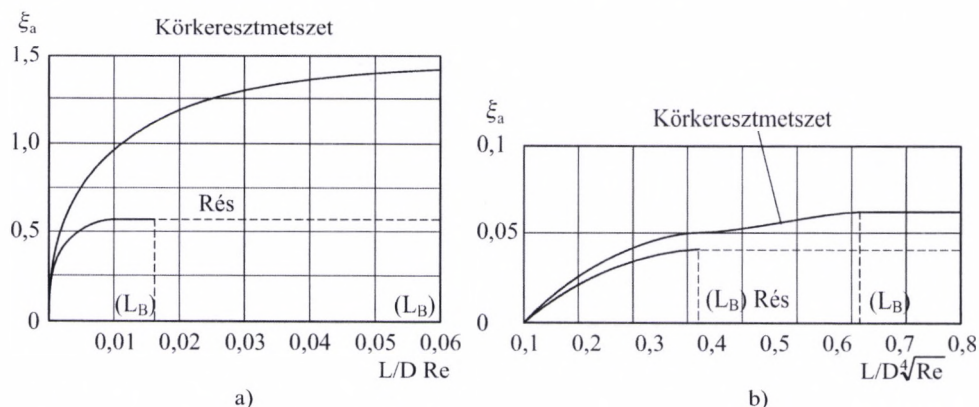
A csővezetéki elemek ξ alakú ellenállás-tényezői közül könyvünkben azokat ismertetjük, amelyek mérési adatai megbízható forrásból származnak. Véleményünk szerint nincs megbízható adat például olyan fontos csővezetéki elem ellenállás-tényezőjére, mint a hullámkompenzátor stb. Értelmetlennek, sőt esetenként félrevezetőnek tűnik továbbá a megszámlálhatatlan fajtájú elzáró és szabályozó-szerelvény ellenállás-tényezőjének közlése, mert ezek nagyon erősen a gyártmánytól függő értékek.

Belépési veszteség

Nem, vagy csak részben kialakult áramkép (pl. csőbe való belépés) esetén az áramlás egy fal közeli súrlódásos és egy súrlódás nélküli magból áll. Belépéskor $\beta = 1$, míg a kialakult áramkép elérésekor $\beta > 1$. Az áramkép felépülése járulékos veszteséget jelent (7.2.3. ábra):



7.2.3. ábra. Az áramkép felépülése csőbe való belépéskor. L_B felépülési hossz, $\varnothing D$ belső átmérő



7.2.4. ábra. A csőbe való belépés járulékos veszteségének tényezői a $0 < L < L_B$ szakaszon: a) lamináris áramlás esetén; b) turbulens áramlás esetén.

$$(\Delta p_v)_{12} = \zeta_B \frac{w^2}{2} \rho. \quad (7.2.9)$$

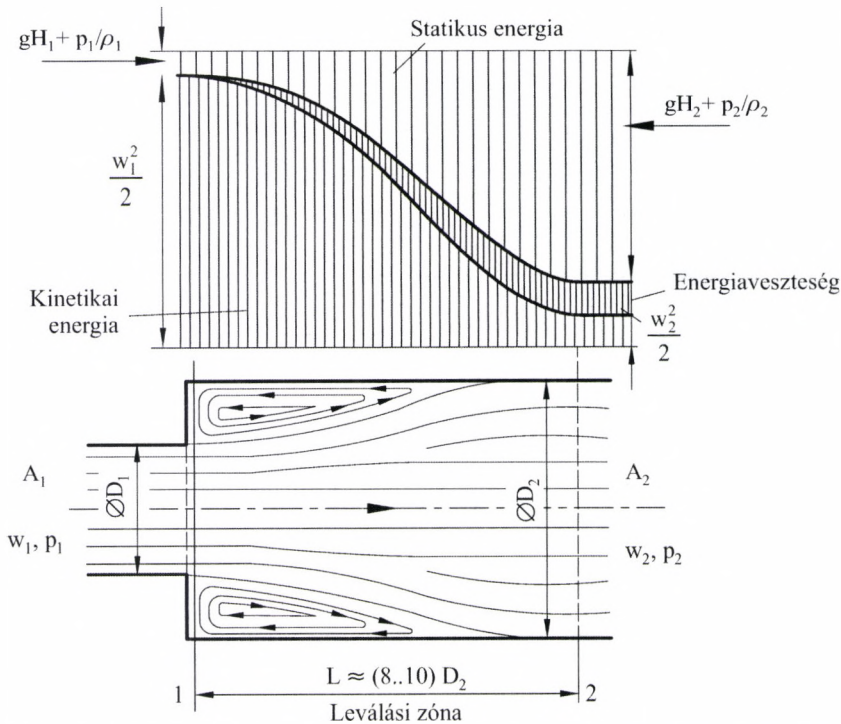
A ζ_B belépési veszteségtényező, illetve az L_B áramkép felépülési hossza értékeit a 7.2.4. ábra adja meg. A 7.2.4. ábra – a 7.2.3. ábrával egyezően – $D = \text{áll.}$ esetére vonatkozik.

7.2.2. Nyomásveszteség csővezetéki elemeken

A csővezetéki elemeken létrejövő nyomásesés számítása elméleti (analitikus) úton nem mindig lehetséges, ezért számos esetben kísérleti eredményekre kell támaszkodni. Az i -edik csővezetéki elem (ív, szerelvény, elágazás stb.) nyomásvesztesége:

$$(\Delta p_v)_i = \rho g H_i = \zeta_i \frac{w_i^2}{2}, \quad (7.2.10)$$

ahol ζ_i az ún. ellenállás- vagy veszteségtényező. A vonatkoztatási w_i sebesség definíciójára (pl. változó keresztmetszet stb. esetén) ügyelni kell! A következőkben megadott adatok inkompresszibilis közegekre érvényesek.



7.2.5. ábra. A hirtelen keresztmetszet-bővülés okozta energiaátalakulás és mechanikai energiavesztés (disszipáció)

Keresztmetszet-bővülés és a diffúzor. A keresztmetszet-bővülés és a diffúzor a dinamikus energiát – természetesen veszteséggel – statikus energiává alakítja, miután az áramló közeg sebessége lecsökken és a sebességcsökkenés részben a statikus nyomást növeli, részben disszipálódik (7.2.5. ábra).

Hirtelen keresztmetszet-bővülés (7.2.6. ábra) esetén a veszteségtényezőt az impulzustétel és az energiamérleg felhasználásával analitikusan is meg lehet határozni. Írjuk fel s irányban az erőegyensúlyt (7.2.6. ábra). Az (1) ellenőrző felület A_2 nagyságú, amelyen a nyomás p_1 értékű és egyenletes eloszlású.

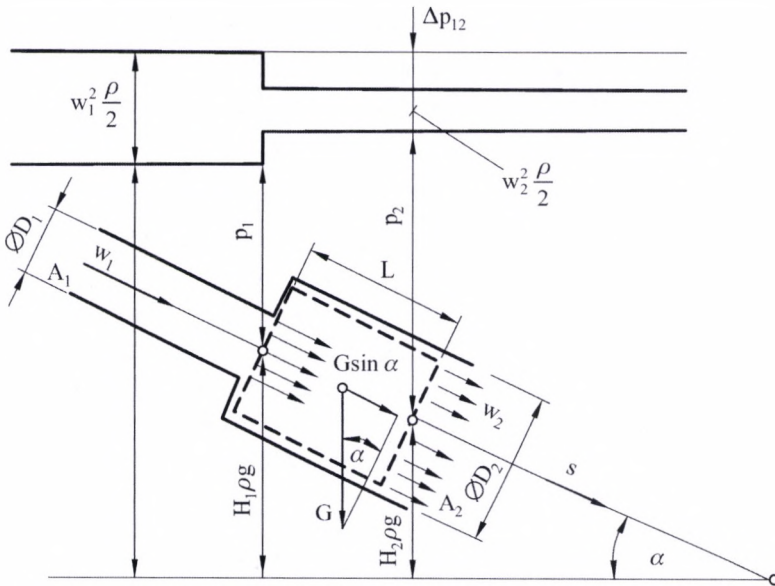
$$p_1 A_2 + \dot{V} \rho w_1 + G \sin \alpha - p_2 A_2 - \dot{V} \rho w_2 = 0. \quad (7.2.11)$$

Legyen $G = g p A_2 L$, $L \sin \alpha = H_1 - H_2$, és $\dot{V} = A_2 w_2$, így

$$\left(g H_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \left(g H_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) = w_1 w_2 - w_2^2. \quad (7.2.12)$$

Az egyenlet bal oldala a potenciális energia fajlagos megváltozását, míg jobb oldala a kinetikus energia fajlagos növekményét mutatja. Az energiaegyenlet alapján – a belső energiává alakuló fajlagos mechanikai energiavesztesség E^* – a kinetikus energia fajlagos megváltozása:

$$\left(g H_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \left(g H_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + E^*. \quad (7.2.13)$$



7.2.6. ábra. A hirtelen keresztmetszet-bővülés okozta mechanikai energiavesztesség meghatározása analitikus úton (Borda-Carnot-vesztesség)

A (7.2.12) és (7.2.13) egyenlet jobb oldalának különbsége adja a fajlagos, ún. Borda–Carnot-veszteséget:

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\Delta p_{1,2}}{\rho} = \frac{(w_1^2 - w_2^2)}{2} - (w_1 w_2 - w_2^2) = \\ &= \frac{(w_1 - w_2)^2}{2} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{w_1^2}{2} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{w_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

Ebből a veszteségtényezők:

$$\xi_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2, \quad (7.2.15)$$

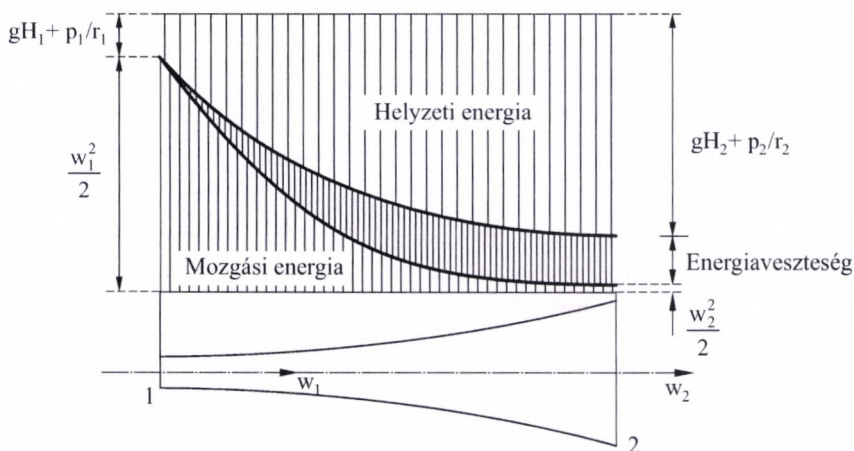
$$\xi_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 = \left[\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 - 1\right]^2, \quad (7.2.16)$$

attól függően, hogy melyik vonatkoztatási keresztmetszetet vagy sebességet választjuk.

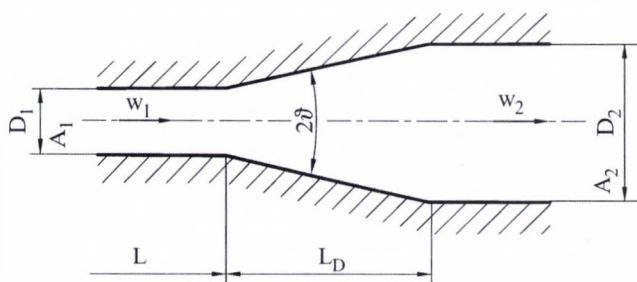
Az I keresztmetszetben p_1 nyomás uralkodik és az energiaátalakulás L hosszön zajlik le. Egyes mérések szerint $L \approx 4 D_2$, de $L \approx 8 \dots 10 D_2$ hosszön a teljes átalakulás befejeződik. Más mérések az átmérőkülönbség függvényében adják meg az energiaátalakulás folyamatának hosszát: $L = 10(D_2 - D_1)$. Szabadba való kiömlés esetén ($A_2 \rightarrow \infty$) a kinematikai energia teljesen elvész, így $\xi = 1$. A tényleges kilépési veszteség meghaladhatja a teljes kinetikai energiát is, mert az A_1 keresztmetszetben levő egyenlőtlen sebességeloszlás következtében a kilépési veszteség $\xi = \beta$ lamináris esetben $\xi = 2,0$; turbulens esetben $\nu = 1,05 \approx 1,0$.

Diffúzor (7.2.7., 7.2.8. ábra) esetén a fellépő veszteség számos tényezőtől (a diffúzor kúpszögétől, az A_2/A_1 keresztmetszetviszonytól, a k abszolút falérdességtől, a Reynolds-számtól, a hozzáfolyási viszonyoktól, vagyis az A_1 keresztmetszetben levő sebességprofiltól stb.) függ. Döntő befolyása azonban elsősorban a 2ϑ diffúzor kúpszögének van. $2\vartheta \leq 8^\circ$ esetén még nem lép fel a határreteg leválása és az ezzel járó jelentős többletveszteség. $2\vartheta < 30^\circ$ esetén a veszteség már alig különbözik a Borda–Carnot-féle hirtelen keresztmetszet-változáskor fellépő veszteségtől. Eck mérései szerint a leválás kezdete, valamint a Reynolds-szám és a kúpszög közötti összefüggés a csővezetékbe épített diffúzor esetén a következő (7.2.4. táblázat).

Nagyobb Reynolds-számok ($Re > 2,0 \cdot 10^5$) esetén $2\vartheta = 5 \dots 6^\circ$ -ot célszerű választani. A falérdesség is hatással van az optimális kúpszögre. Nyitott térbe toroklító diffúzor esetén a minimális veszteséget okozó kúpszög az előzőeknél lényegesen nagyobb, $2\vartheta = 17^\circ$. A veszteségek (részben) minimalizálásához vezet tehát



7.2.7. ábra. A diffúzor okozta energiaátalakulás és mechanikai energiavesztés (disszipáció)



7.2.8. ábra. A diffúzor kialakítása és geometriai jellemzőinek jelölése

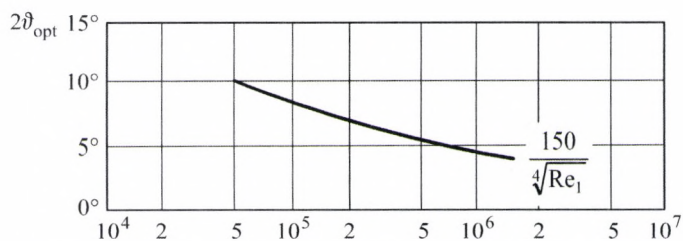
7.2.4. táblázat. A leválások határkúpszöge diffúzoroknál a Re-szám függvényében (Eck mérései alapján)

2ϑ	10°	$8,4^\circ$	$7,6^\circ$	$6,7^\circ$
Re	$0,5 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$

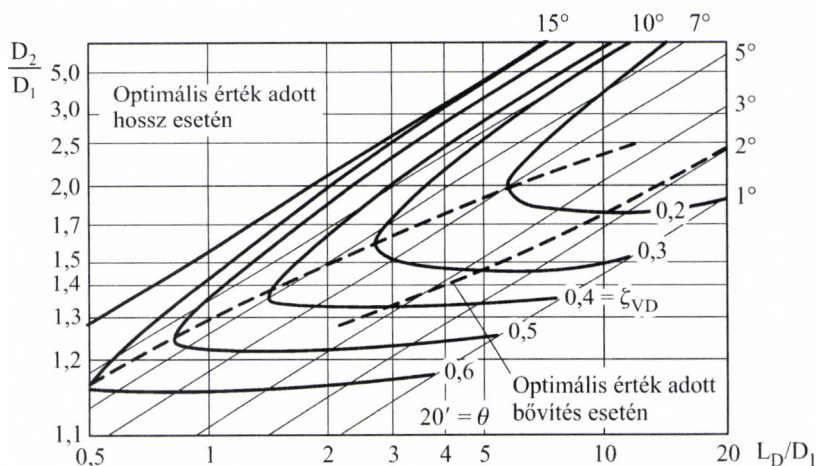
a $\vartheta \leq \vartheta_{\text{opt}}$ megválasztása, amelyhez a 7.2.9 ábra szolgál a Reynolds-szám függvényében.

Kilépő, ún. végdiffúzor esetén (ahol A_2 keresztmetszet a szabadba nyílik) a ζ_{VD} ellenállás-tényező értékeit (állandó sebességeloszlást feltételezve) ráfolyáskor a 7.2.10. ábra, míg kialakult turbulens áramlású ráfolyást feltételezve (hosszú csővezeték végére csatlakozó diffúzor) a 7.2.11. ábra mutatja.

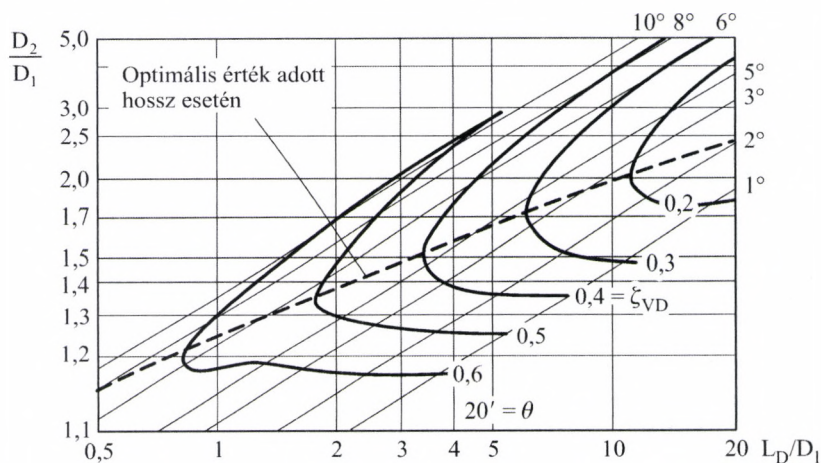
Az ábrák megadják a diffúzor minimális veszteségére optimalizált L_D hosszat és kúpszöget. Az ellenállás-tényező diffúzor esetén kisebb, mint a kilépésre kiadódó Borda–Carnot-féle ellenállás-tényező, ezért a térfogatáram kilépő, illetve végdiffúzorral növelhető.



7.2.9. ábra. Az állandó szögnyílású diffúzor optimális (minimális mechanikai energiavesztéséget okozó) kúpszöge a Re-szám függvényében. (A diffúzor geometriája és a Re-szám vonatkoztatása azonos a 7.2.8. ábrával)



7.2.10. ábra. A kilépő vagy ún. végdiffúzor mechanikai energiavesztése a belépő keresztmetszetben állandósult sebességeloszlás esetén (A jelölések értelmezése a 7.2.8. ábra szerint)



7.2.11. ábra. A kilépő vagy ún. végdiffúzor mechanikai energiavesztése a belépő keresztmetszetben kialakult turbulens áramlást figyelembe véve (A jelölések értelmezése a 7.2.8. ábra szerint)

Az ún. átmeneti diffúzor (átmenet egy kisebb és nagyobb átmérőjű cső között) ζ_{AD} veszteségtényezője kisebb, mint a végdiffúzoré és annak értékéből számítható:

$$\zeta_{AD} = \zeta_{VD} - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2. \quad (7.2.17)$$

Optimálisan kialakított diffúzor esetén a ζ_D veszteségtényező a Borda–Carnot-féle veszteségből is származtatható (ζ_D , Re w_1 -re vonatkoztatva):

$$\zeta_D = (0,05 \dots 0,3) \cdot \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right], \quad (7.2.18)$$

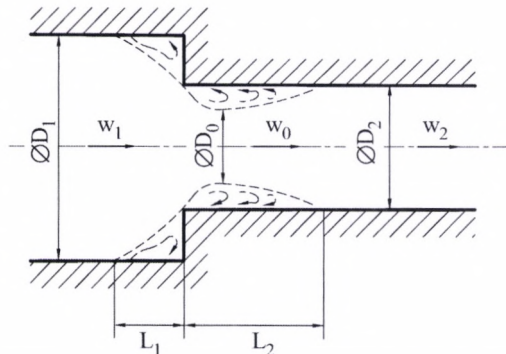
ahol a kisebb együttható a nagyobb Reynolds-szám (kb. $Re = 10^7$), és jó kivitel esetére vonatkozik.

Ismert fogalom az η_D diffúzorhatásfok: a tényleges nyomásdifferencia és az elméleti nyomásdifferencia – sűrűdásmentes áramlást feltételezve – hányadosa. Átmeneti diffúzor esetén:

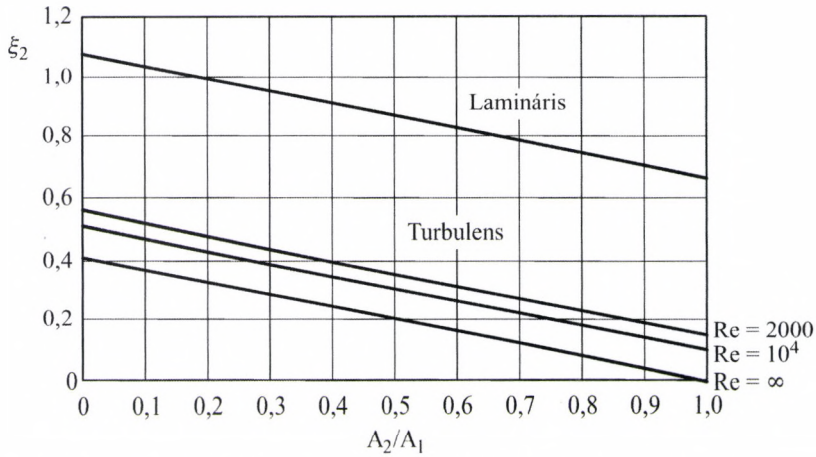
$$\eta_D = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho}{2}(w_1^2 - w_2^2)} = 1 - \frac{\zeta_D}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2}. \quad (7.2.19)$$

Keresztmetszet-szűkülés és konfúzor. Keresztmetszet-szűkülés és a konfúzor áramlástanai szempontból a sebesség növelésére, illetve esetlegesen a nyomásviszonyok megváltozására szolgál.

Hirtelen keresztmetszet-szűkülés (7.2.12. ábra) esetén a szűkítés torkolatában kontrakció jön létre, és az áramkép úgy alakul, mintha kiömlő szabadsugar volna.



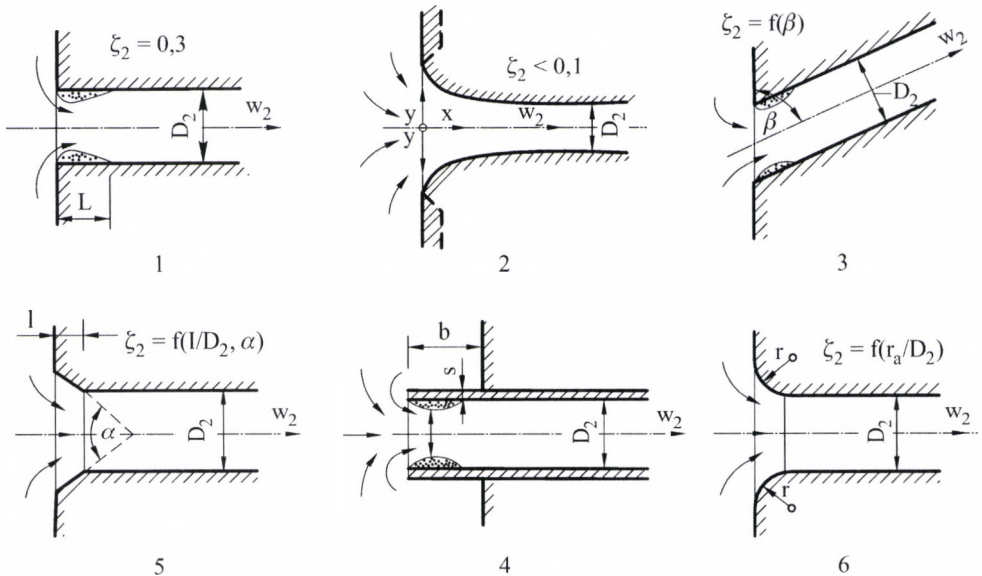
7.2.12. ábra. A hirtelen keresztmetszet-szűkülés kialakulása és geometriai jellemzőinek jelölése



7.2.13. ábra .A hirtelen keresztmetszet-szűkülés ellenállás-tényezője az A_2/A_1 keresztmetszetviszony és a Re -szám függvényében (A jelölések értelmezése a 9.2.12. ábra szerint)

A kontrakciós szám $\mu = A_0/A_2$ alapvetően az A_2/A_1 viszonytól, valamint a torok kialakításától függ. A veszteségtényező, ha a vonatkoztatási sebesség az A_2 keresztmetszetben uralkodó w_2 és $Re > 10^4$, akkor

$$\xi_2 = \left(\frac{A_2}{A_0} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1 - \mu}{\mu} \right)^2. \quad (7.2.20)$$



7.2.14. ábra. A szűkítés kialakítása és geometriai jellemzőinek jelölése $A_1 \rightarrow \infty$ esetén

Weisbach szerint fenti esetben a kontrakciós szám:

$$\mu = 0,63 + 0,37 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2. \quad (7.2.21)$$

Ha a Reynolds-szám a megadott $Re > 10^4$ értéktől jelentősen eltér, akkor az ellenállás-tényezők 7.2.13. ábra szerint alakulnak. Mint az ábrából látható, jelentős változást a Reynolds-szám csökkenése eredményez. Ha szűkületben való belépés pl. nagy tartályból történik ($A_1 \rightarrow \infty$), akkor a kontrakció igen jelentős lehet (7.2.14. ábra).

- A 7.2.14/1. ábra szerinti megoldás esetén $\zeta_2 = 0,5$ és $\mu = 0,6$.
- A 7.2.14/2. ábra szerinti megoldás esetén, ahol a szűkítés falkiképzése azonos geometriájú egy éles sarkú perem után kialakuló szabad sugár kontúrjával, $\zeta_2 = 0,04 \dots 0,1$. A szűkítés geometriáját a 7.2.5. táblázat adja meg.
- A 7.2.14/3. ábra szerinti megoldás esetén az ellenállás-tényező $\zeta_2 = 0,5 + 0,3 \cos \beta + 0,2 \cos^2 \beta$.
- A 7.2.14/4. ábra szerinti megoldás esetén az ellenállás-tényező az L/D_2 és α függvénye (7.2.6. táblázat). A ζ'_2 érték arra az esetre vonatkozik, ha a beömlőnyílás benyúlása a tartályba olyan mértékű, hogy a tartály falának hatása már nem érvényesül (analóg eset a 7.2.14/5. ábrán szereplő megoldással, ha $b > D_2/2$).
- A 7.2.14/5. ábra szerinti megoldás esetén az ellenállás-tényező az s/D_2 és b/D_2 viszony függvénye (7.2.7. táblázat).

7.2.5. táblázat. A szűkítés ($A_1 \rightarrow \infty$) geometriája, ha a fal egy éles sarok utáni folyadékkontrakcióval azonos kialakítású (a jelölések értelmezése a 7.2.14/2. ábra szerint)

x/D_2	0	0,026	0,054	0,089	0,132	0,118	0,264	0,377	0,580	0,778	1,250
y/D_2	0,638	0,660	0,640	0,620	0,600	0,580	0,560	0,540	0,520	0,510	0,500

7.2.6. táblázat. A szűkítés ($A_1 \rightarrow \infty$) ζ_2 ellenállás-tényezője az L/D_2 viszony és az α szög függvényében, ha a geometria kialakítása a 7.2.14/4. ábra szerinti

L/D_2	ζ_2 , ha α					ζ_2 , ha α				
	30°	60°	90°	120°	180°	30°	60°	90°	120°	180°
0,025	0,43	0,40	0,41	0,43	0,50	0,90	0,80	0,70	0,62	0,50
0,050	0,36	0,30	0,33	0,38		0,80	0,67	0,59	0,57	
0,075	0,30	0,23	0,28	0,35		0,65	0,50	0,44	0,44	
0,100	0,25	0,18	0,25	0,32		0,55	0,41	0,40	0,42	
0,150	0,20	0,15	0,23	0,31		0,43	0,25	0,26	0,33	
0,600	0,13	0,12	0,21	0,29		0,18	0,13	0,19	0,27	

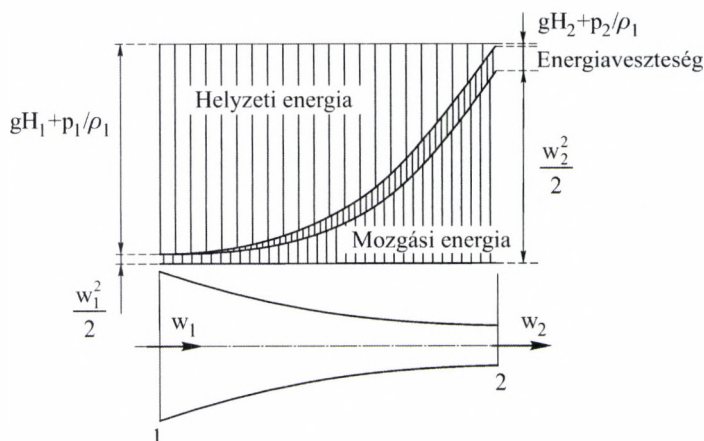
7.2.7. táblázat. A szűkítés ($A_1 \rightarrow \infty$) ζ_2 ellenállás-tényezője az s/D_2 viszony függvényében, ha a geometria kialakítás a 7.2.14/5. ábra szerinti

s/D_2	ζ_2 , ha b/D_2					
	0	0,01	0,1	0,2	0,3	0,5
0,00	0,50	0,68	0,86	0,92	0,97	1,00
0,01	0,50	0,57	0,71	0,78	0,82	0,86
0,02	0,50	0,52	0,60	0,66	0,69	0,72
0,03	0,50	0,51	0,54	0,57	0,59	0,61
0,04	0,50	0,50	0,50	0,52	0,52	0,54
$\geq 0,05$	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50

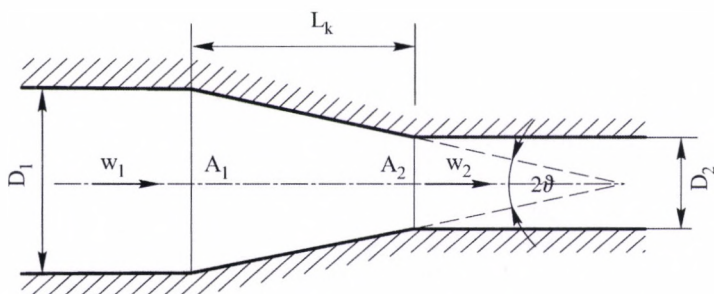
7.2.8. táblázat. A szűkítés ($A_1 \rightarrow \infty$) ζ_2 és ζ'_2 ellenállás-tényezője az r/D_2 viszony függvényében, ha a geometria kialakítás a 7.2.14/6. ábra szerinti

r/D_2	0,0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,12	0,16	0,20
ζ_2	0,5	0,43	0,36	0,26	0,20	0,15	0,09	0,06	0,03
ζ'_2	1,0	0,87	0,74	0,51	0,32	0,20	0,10	0,06	0,03

- A 7.2.14/6. ábra szerinti megoldás esetén az ellenállás-tényező az r/D_2 viszony függvénye (7.2.8. táblázat). A ζ'_2 érték arra az esetre vonatkozik, ha a beömlőnyílás benyúlása a tartályba olyan mértékű, hogy a tartály falának hatása már nem érvényesül (analóg eset a 7.2.14/5. ábrán szereplő megoldással, ha $b > D_2/2$). A 7.2.14 ábrán szereplő megoldásokhoz megadott ellenállás-tényezők értékének érvényességi tartománya $Re > 10^4$.



7.2.15. ábra. A konfúzor okozta energiaátalakulás és mechanikai energiavesztés (disszipáció)



7.2.16. ábra. A konfúzor kialakítása és geometriai jellemzőinek jelölése

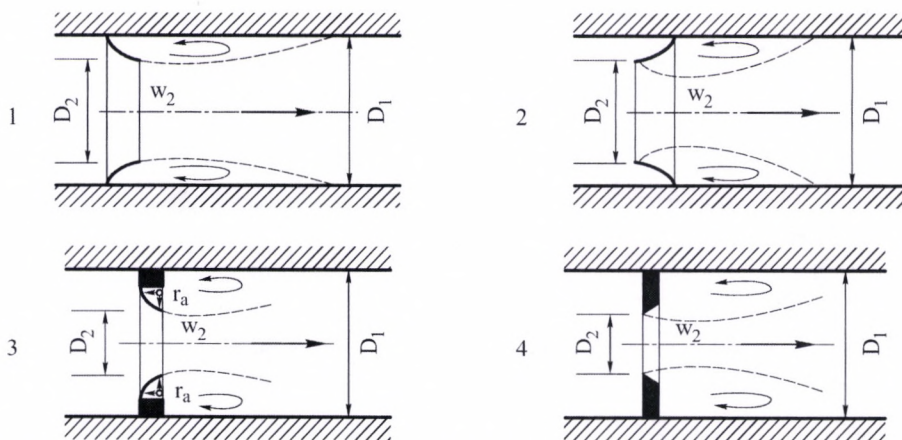
Konfúzor (7.2.15., 7.2.16. ábra) esetén a veszteségek lényegesen kisebbek, mint hirtelen keresztmetszet-változások esetén, mert a leválások is kisebbek, vagy optimális kivitel esetén el is maradnak.

Az ellenállás-tényező a kúpszög függvényében:

$$\begin{aligned} 2\vartheta &\leq 15^\circ, & \zeta_2 &= 0,09, \\ 15^\circ < 2\vartheta &\leq 40^\circ, & \zeta_2 &= 0,04, \\ 40^\circ < 2\vartheta &< 60^\circ, & \zeta_2 &= 0,06. \end{aligned}$$

Ha $2\vartheta < 60^\circ$, akkor 60° és 180° között az ellenállás-tényező növekedése lineáris a konfúzortól a hirtelen keresztmetszet-változásig, tehát az érték lineáris interpolációval meghatározható.

Peremek, mérőtorkok, fojtótárcsák. Peremek, mérőtorkok, fojtótárcsák néhány lehetséges és gyakori kialakítási formáját mutatja a 7.2.17. ábra. A w_1 sebességre vonatkoztatott ellenállás-tényező értékeit a 7.2.9. táblázat mutatja.



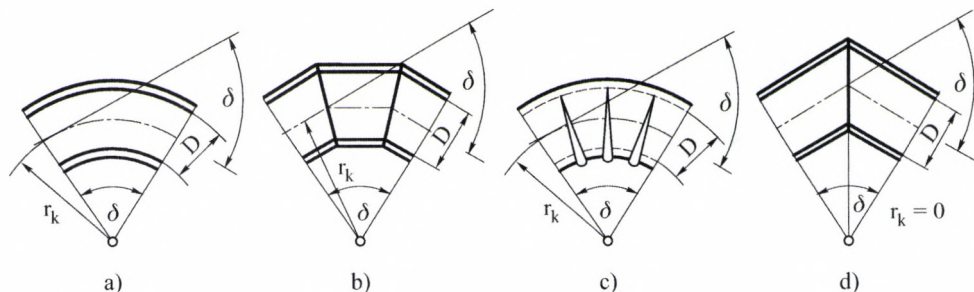
7.2.17. ábra. Peremek, mérőtorkok, fojtótárcsák kialakítása és geometriai jellemzőinek jelölése

7.2.9. táblázat. A peremek, mérőtorkok, fojtótárcsák ζ_1 ellenállás-tényezője az A_2/A_1 viszony függvényében (jelölések értelmezése a 7.2.17. ábra szerint)

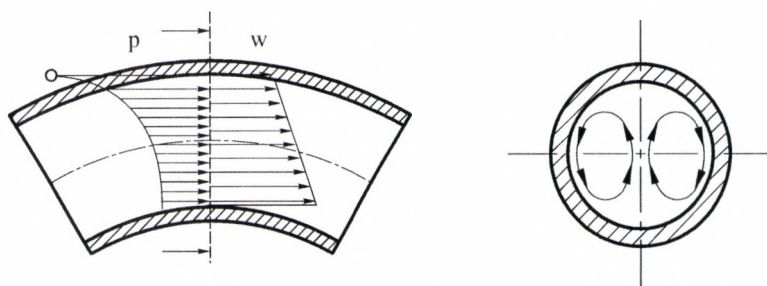
A ₂ /A ₁			0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,70	0,800	0,900	0,950
(1)			81,000	16,000	5,440	2,250	1,000	0,440	0,18	0,063	0,012	0,003
(2)			249,000	52,700	19,260	8,750	4,350	2,260	1,14	0,540	0,196	0,083
(3)	r D ₁	0,01	232,000	48,000	17,300	7,700	3,700	1,840	0,90	0,380	0,120	0,040
		0,04	192,000	39,000	14,100	6,190	3,000	1,450	0,29	0,290	0,080	0,030
		0,16	113,000	23,000	7,900	3,400	1,600	0,700	0,32	0,120	0,030	0,015
(4)			245,000	51,500	18,200	8,250	4,000	2,000	0,97	0,420	0,130	0,050

Írányváltozások (ívek, könyökök, szeletes ívek). Az írányváltozások veszteségeit analitikusan hasonlóképpen nehéz feltárni, mint az egyéb helyi veszteséget okozó elemnél lejátszódó folyamatot. Az írányváltozások a gyakorlatban számos kiviteli formában valósulhatnak meg, amelyek közül a leggyakoribbak az ív, a szeletes ív, a redős ív, valamint a könyök (7.2.18. ábra).

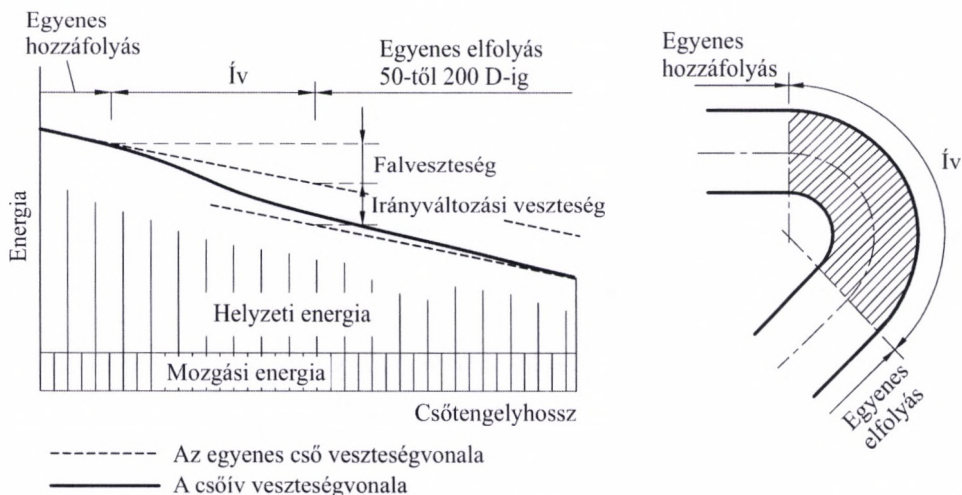
Az írányváltozáskor a centrifugális erőkből származóan az írányváltozás külső (hosszabbik) oldalán nyomásnövekedés, és az energiamérlegből kimutathatóan kisebb sebesség áll elő, mint a belső oldalon. Ez a jelenség szekunder áramlásokat indukál (7.2.19., 7.2.20. ábra).



7.2.18. ábra. Az írányváltozások leggyakoribb kialakítási formái
1 sima ív; 2 szeletes ív; 3 redős ív; 4 könyök



7.2.19. ábra. Az ívekben fellépő aszimmetrikus nyomás- és sebességeloszlás, valamint az ezek hatására létrejövő szekunderáramlások



7.2.20. ábra. Az ívek okozta energiaátalakulások és mechanikai energiavesztés (disszipáció)

Az irányváltásokban fellépő teljes veszteség általában két fő részből tevődik össze:

- az irányváltásból származó veszteségből (ζ_v),
- a fal, illetve a belső súrlódásból származó veszteségből ($\zeta_s = \lambda l / D$).

A teljes veszteség általában a következő paraméterektől függ:

- a hajlítási sugár (r_K),
- a belső átmérő (D),
- az irányváltási szög (δ),
- a relatív érdesség (k/D),
- a Reynolds-szám (Re),
- a könyökök száma (szeletes ív esetén),
- az egymás utáni ívek száma és térbeli elhelyezkedése.

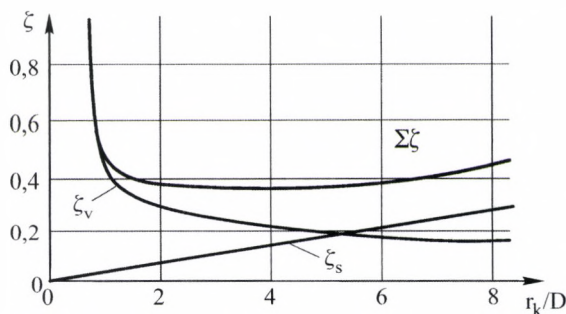
A hajlítási sugár (r_K) és a belső átmérő (D) egyben a hajlítási viszonyt (r_K/D) is meghatározza, továbbá körtől eltérő keresztmetszet esetén az átmérőn mindig hidraulikai egyenértékű átmérőt kell érteni.

A teljes veszteség részeként fellépő súrlódási veszteség az

$$l = r_K \pi \frac{\delta^\circ}{180} = 0,0175 r_K \delta^\circ \quad (7.2.22)$$

irányváltás hosszával arányos.

Ezzel a súrlódási veszteség:



7.2.21. ábra. Az irányváltozás $\sum \zeta$ ellenállás-tényezőinek ζ_s súrlódásból és ζ_v irányváltozásból származó tagjai az r_k/D viszony függvényében

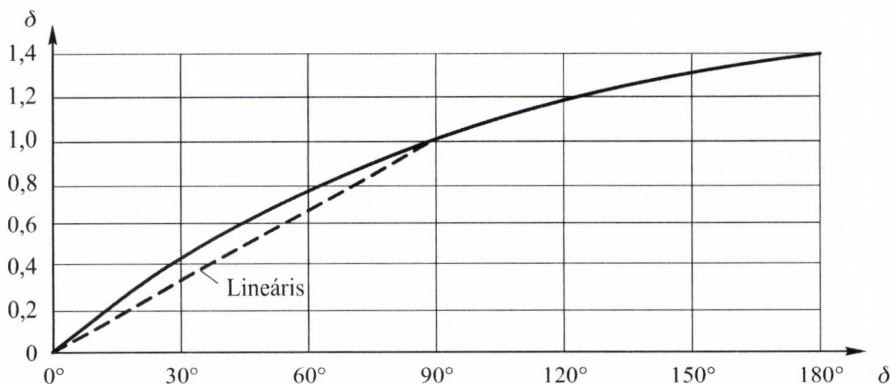
$$\zeta_s = \lambda \frac{1}{D} = 0,0175 \cdot \lambda \frac{r_k}{D} \delta^\circ, \quad (7.2.23)$$

azaz a hajlítási viszsonnyal (r_k/D) arányos. Ellentétes tendenciát mutat az irányváltozásból származó veszteség, azaz a hajlítási viszony növekedésével csökken (7.2.21. ábra).

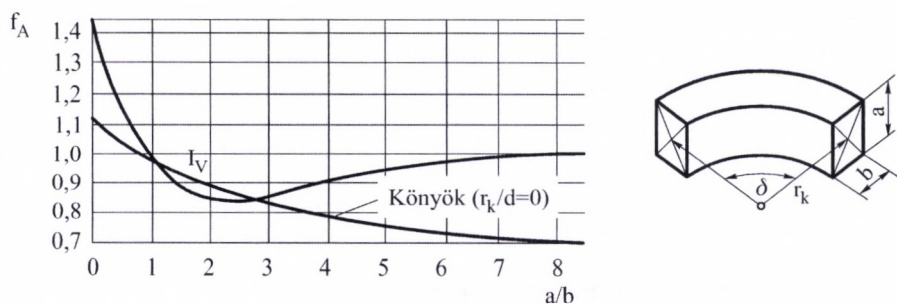
Mint az ábrából is látható, a hajlítási viszsonnyak van egy optimális értéke, ahol az eredő veszteség minimum értéket vesz fel. Ha például $Re = 2 \cdot 10^5$, $k/D = 10^{-3}$, akkor ez a minimális eredő veszteséget jelentő érték kb. $r_k/D = 4$, függetlenül az irányváltozás δ szögétől.

Ívek (lásd a 7.2.18/a. ábrát) esetén az irányváltozásból származó veszteség Idelčík szerint a következő faktorok segítségével számítható:

$$\zeta_v = f_\delta f_A f_{Re} f_H f_\epsilon. \quad (7.2.24)$$



7.2.22. ábra. Az irányváltozás szögének hatása a ζ ellenállás-tényezőre: f_δ faktor (A δ szög értelmezése a 7.2.23. ábra szerinti)



7.2.23. ábra. A négyszög keresztmetszet a/b viszonyának hatása a ζ ellenállás-tényezőre: f_A faktor

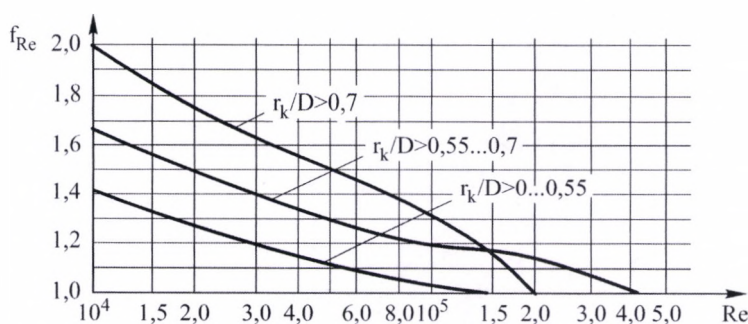
Az f_δ faktor az irányváltozás szögének hatását adja meg (7.2.22. ábra). A gyakorlatban a lineáris viszony feltételezése (a 7.2.22. ábrán szaggatott vonallal jelölve) egyes tartományokban 20 %-ot meghaladó hibát is jelent, ezért az ábrán látható függvénykapcsolat alkalmazása ajánlatos.

Az f_A faktor az áramlási keresztmetszet alakjának hatását adja meg. Kör keresztmetszet esetén $f_A = 1,0$, míg négyszög keresztmetszet esetén f_A értékét a 7.2.23. ábra adja meg.

Az f_{Re} faktor az irányváltozásból származó veszteség Reynolds-számtól való függését adja meg (7.2.24. ábra). Növekvő Reynolds-szám esetén f_{Re} csökken és a paraméter a hajlítási viszony.

Az f_H faktor a hajlítási viszony (r_k/D) hatását adja meg. Az $r_k/D \geq 1$ esetén f_H és ezzel ζ_v értéke erősen növekszik. Számszerű értékek a következők (7.2.10. táblázat):

f_ε faktor az $\varepsilon = k/D$ relatív érdesség hatását adja meg, függetlenül attól, hogy a súrlódási veszteség számítása során már egyszer figyelembe van véve. f_ε értéke a



7.2.24. ábra. A Re -szám és az r_k/D viszony hatása a ζ ellenállás-tényezőre: f_{Re} faktor

7.2.10. táblázat. Az r_k/D hajlítási viszony hatása a ζ ellenállás-tényezőre (f_H – faktor)

r_k/D	0,5...1,0	$\geq 1,0$
f_H	$\frac{0,21}{(r_k/D)^{2,5}}$	$\frac{0,21}{(r_k/D)^{0,5}}$

7.2.11. táblázat. Az $\varepsilon = k/D$ relatív érdesség hatása a ζ ellenállás-tényezőre (f_ε – faktor)

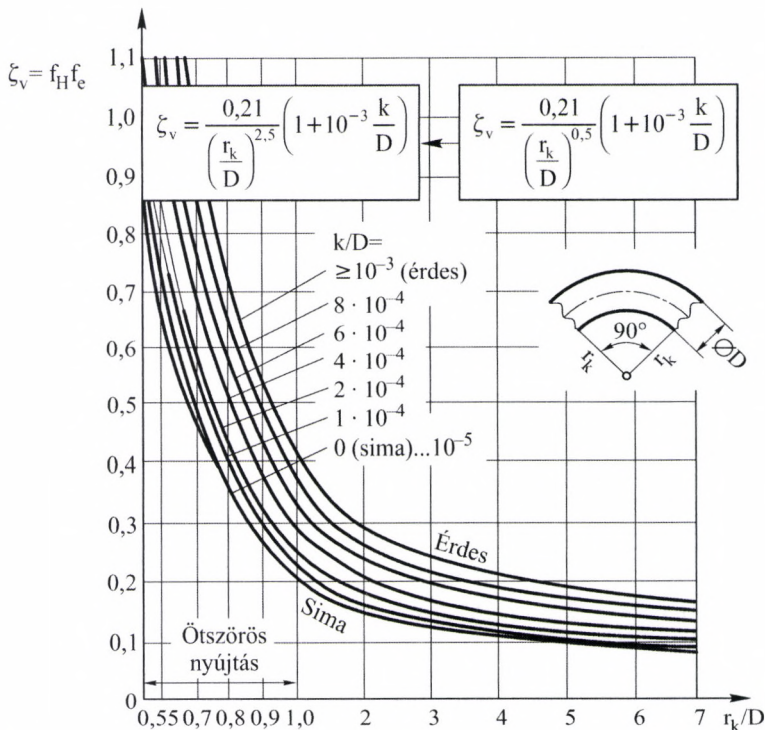
Re	$3 \cdot 10^3 \dots 4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4 \dots 2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
f_H	1,0	$\frac{\lambda}{\lambda_{\text{sima}}} \leq 2,0$	$1 + k/D \cdot 10^{-3} \leq 2,0$

hajlítási sugár és a Reynolds-szám függvénye. Ha $r_K/D > 0,55$, akkor a 7.2.11. táblázat érvényes.

A műszaki gyakorlatban leggyakrabban előforduló esetekben, $Re > 2 \cdot 10^5$, $r_K/D > 1,0$ (azaz $f_{Re} = 1,0$) és $\delta = 90^\circ$ (azaz $f_\delta = 1,0$), valamint kör keresztmetszet (azaz $f_A = 1,0$) esetén az irányváltásból adódó veszteségtényező (7.2.25. ábra):

$$\zeta_v = f_H f_\varepsilon = \frac{0,21}{\sqrt{\frac{r_K}{D}}} \left(1 + 10^{-3} \cdot \frac{k}{D} \right). \quad (7.2.25)$$

Ha a relatív érdesség $k/D > 10^{-3}$, akkor a helyettesítési érték: $k/D = 10^{-3}$. Hidraulikailag sima cső ($k/D = 0$) esetén a fent említett érvényességi, illetve értelmezési tartományban:



7.2.25. ábra. A sima ívek ζ_v ellenállás-tényezője az r_K/D és k/D viszony függvényében: $Re > 2 \cdot 10^5$, azaz $f_{Re} = 1,0$, $\delta = 90^\circ$, azaz $f_\delta = 1,0$, kör keresztmetszet, azaz $f_A = 1,0$ esetén

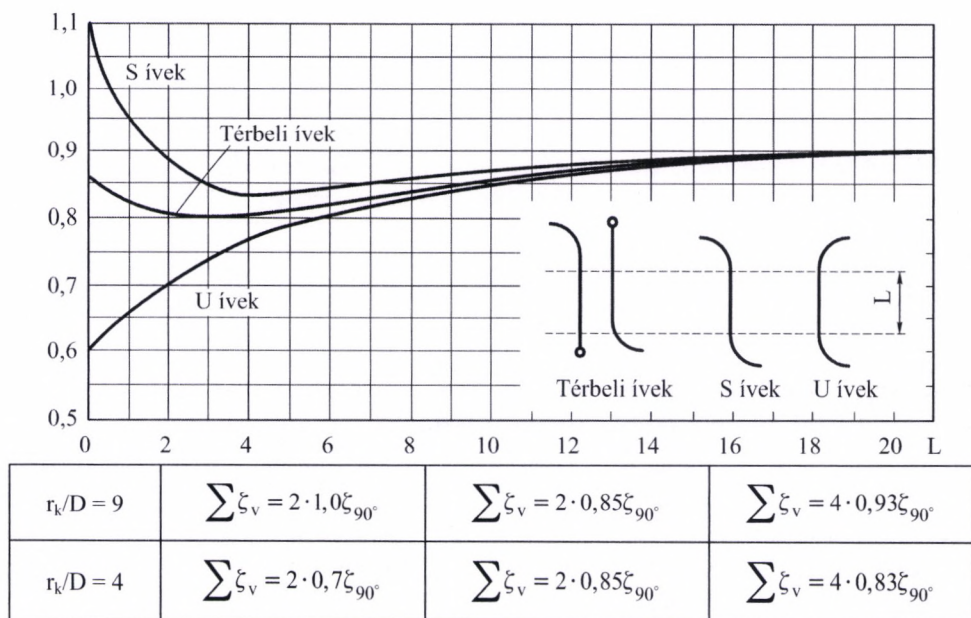
$$\zeta_v = f_H f_e = \frac{0,21}{\sqrt{\frac{r_K}{D}}}, \quad (7.2.26)$$

míg érdesnek ($k/D > 10^{-3}$) számító esetekben:

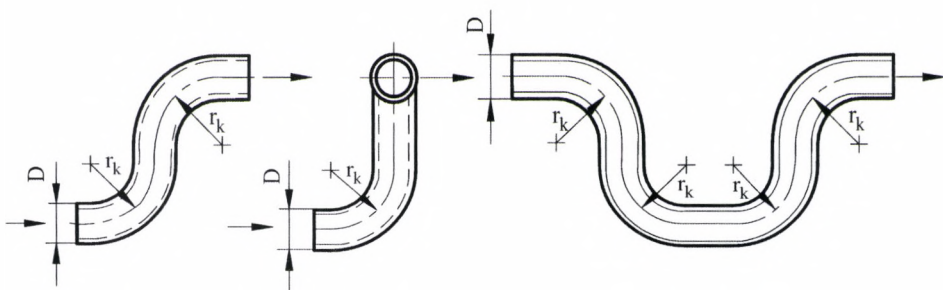
$$\zeta_v = f_H f_e = \frac{0,42}{\sqrt{\frac{r_K}{D}}}. \quad (7.2.27)$$

A műszaki gyakorlatban nagyon gyakori, hogy a csővezetékben az ívek a legkülönbözőbb módon követik egymást. A kísérletek azt mutatják, hogy az ívek ellenállás-tényezője akkor számítható önállóan és teljes értékűnek, ha az ívek közötti egyenes szakasz, amelynek során áramkép ismét rendeződik, legalább $L = 10D$. Ha az egyes ívek közötti egyenes szakasz ennél rövidebb, akkor ívkombinációk ellenállás-tényezőjét kell figyelembe venni (7.2.26. és 7.2.27. ábra), amely az egyes ívek ellenállás-tényezőjének egyszerű összegeződésénél kisebb értéket ad.

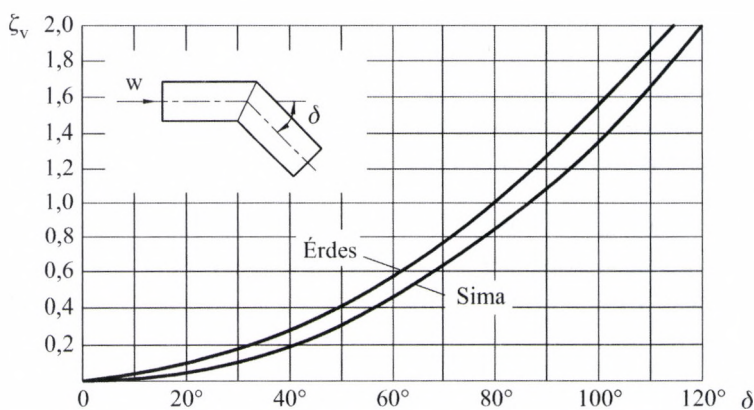
Könyökök (lásd a 7.2.18/4. ábrát) esetén ($r_K/D = 0$) az irányváltozásból származó veszteségek jelentősen meghaladják az íveknél jelentkezőket, mert itt a leválások elkerülhetetlenek. Egyéb tekintetben a veszteséget befolyásoló paraméterek azo-



7.2.26. ábra. Ívkombinációk eredő ζ_v ellenállás-tényezője a közbenső L egyenes szakasz hosszának függvényében



7.2.27. ábra. Ívkombinációk eredő $\sum \zeta_v$ ellenállás-tényezője $r_k/D = 9$, illetve 4 esetén, ha az ívek közvetlenül kapcsolódnak egymáshoz ($L = 0$)



7.2.28. ábra. A könyök ζ_v ellenállás-tényezője a δ irányváltoztatási szög függvényében $Re > 1,5 \cdot 10^5$ esetében (Kirchbach és Schubart mérései)

7.2.12. táblázat. A könyök ζ_v ellenállás-tényezője a δ irányváltoztatási szög függvényében $Re > 1,5 \cdot 10^5$ esetében (Kirchbach és Schubart mérései)

δ	10°	50°	20°	22,5°	30°	45°	60°	90°
ζ_v (sima)	0,029	0,044	0,065	0,075	0,120	0,245	0,470	1,000
$\zeta_v(k/D = 2,5 \cdot 10^{-3})$	0,043	0,064	0,091	0,105	0,65	0,325	0,600	1,300

nosak vagy hasonlóak, mint az ívek esetében. Weisbach mérései szerint hidraulikailag sima (réz-) csőből készült könyök veszteségtényezője, ha $20^\circ < \delta < 140^\circ$:

$$\zeta = 0,94578 \sin^2 (\delta/2) + 2,047 \sin^4 (\delta/4). \quad (7.2.28)$$

Kirchbach (sima) és Schubart (érdes) csőre vonatkozó mérései alapján adódó értékeket mutatja a 7.2.12. táblázat és a 7.2.28. ábra, kör keresztmetszetű csőre és $Re > 1,5 \cdot 10^5$ értékek esetére.

Ha a Reynolds-szám kisebb, mint $1,5 \cdot 10^5$, akkor az ívekkel teljesen azonos módon f_{Re} faktossal (lásd a 7.2.24. ábrát), ha négyzet keresztmetszetről van szó,

akkor f_A faktorial (lásd a 7.2.23. ábrát) kell a könyökidom ellenállás-tényezőjét szorozni. Az érdességre a könyökidom kevésbé érzékeny, mint az ív, ezért f_g itt max. 1,5, szemben az íveknél jelentkező 2,0 értékkel.

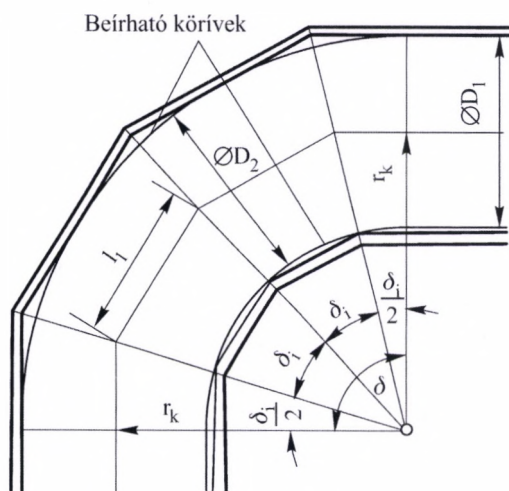
Szeletes ív (lásd 7.2.18/b. ábrát) voltaképpen többszörös könyökidom, amelyet kb. 200 NÁ felett egyenes csövekből készítenek. Ellenállás-tényezője értelemszerűen nagyobb, mint az azonos átmérőjű és hajlítási sugarú, egyéb befolyásoló tényezőkben (Re , k/D stb.) azonos adottságú ívé, de kisebb, mint ha egyszerűen a szeletes ívben levő könyökök ellenállás-tényezőjét összegeznénk. A szeletes ív geometriáját, valamint a szeletes ívbe „helyezett” egyenértékű csőív értelmezését a 7.2.29. ábra mutatja.

A 7.2.29. ábra szerint a szeletes ív és az elméletileg beleképzelt csőív ellenállás-tényezője a mérési kísérletek szerint jó egyezést ad. Ha az 1 index a szeletes ívre, a 2 index a bele helyezett sima csőívre vonatkozik, akkor az alábbi összefüggések felhasználásával a szeletes ív ellenállás-tényezőjének meghatározása visszavezethető a sima csőívek analóg problémájára:

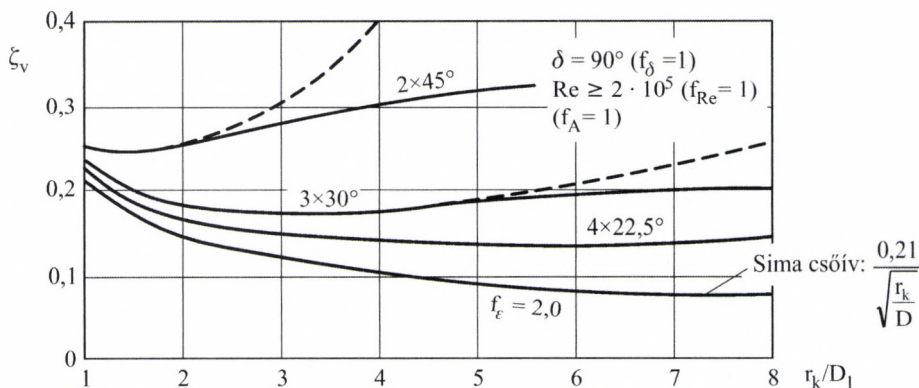
$$\Delta p_v = \xi_{1\rho} \frac{w_2^2}{2} = \xi_2 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 \rho \frac{w_1^2}{2}, \quad (7.2.29)$$

$$\xi_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 \xi_2 = f_D \xi_2, \quad (7.2.30)$$

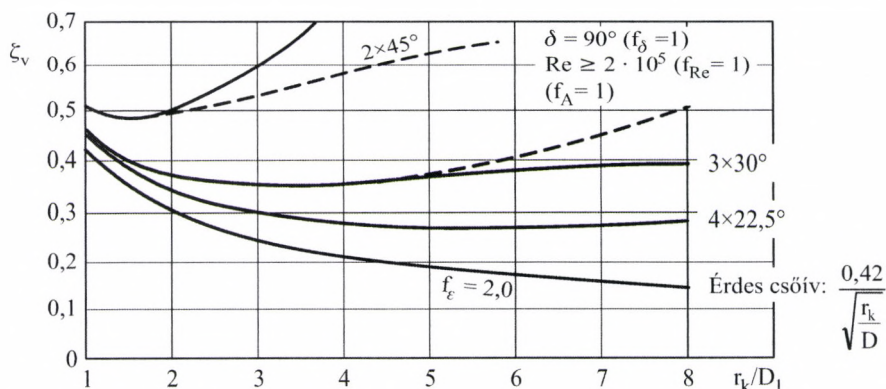
$$f_D = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4. \quad (7.2.31)$$



7.2.29. ábra. A szeletes ív kialakítása és geometriai jellemzőinek jelölése



7.2.30. ábra. A szeletes ív ξ_v ellenállás-tényezője az r_k/D viszony függvényében



7.2.31. ábra. A szeletes ív ξ_v ellenállás-tényezője az r_k/D viszony függvényében

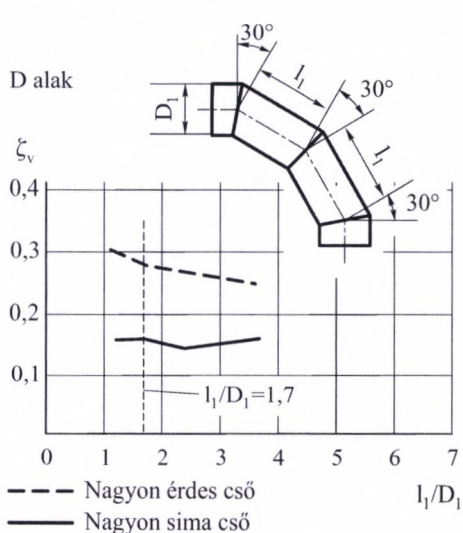
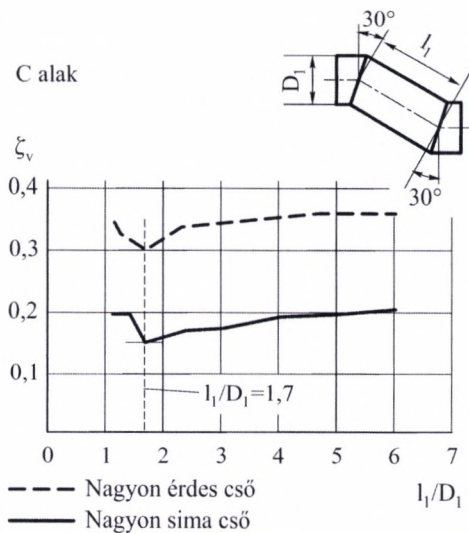
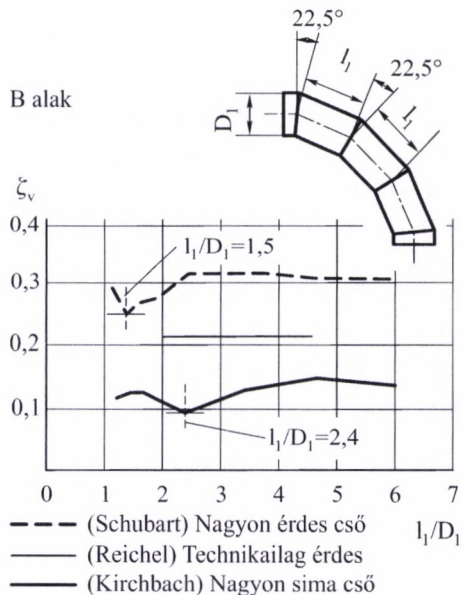
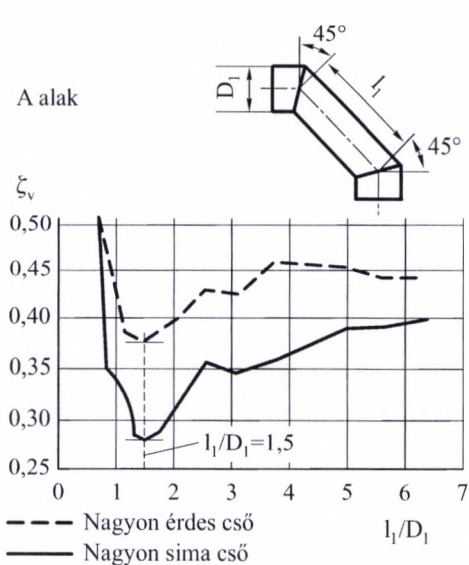
A 7.2.29. ábra geometriai összefüggéseiből adódóan:

$$\frac{D_2}{D_1} = 1 - \left(\frac{r_k}{D_1} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\cos(\delta_i/2)} - 1 \right). \quad (7.2.32)$$

A szeletes ívek ellenállás-tényezőit hidraulikailag sima csőre a 7.2.30. ábra, érdes csőre a 7.2.31. ábra adja meg.

A 7.2.30. és 7.2.31. ábrákból látható, hogy míg a több szeletből álló (pl. $2 \times 22,5^\circ$) szeletes ív mért ellenállás-tényezői nagyon jó egyezést mutatnak az elméleti úton számítottal, kevesebb szeletszám (pl. $2 \times 30^\circ$, de különösen $2 \times 45^\circ$) esetén, egy meghatározott r_k/D_1 érték felett már eltérés mutatkozik. A 7.2.29. ábra geometriai viszonyai alapján:

$$\frac{l_1}{D_1} = \frac{r_k}{D_1} \cdot 2 \operatorname{tg}(\delta_i/2). \quad (7.2.33)$$



7.2.32. ábra. A sorba kapcsolt szeletes ívek $\sum \xi_v$ ellenállás-tényezője különböző kombináció esetén (Schubart, Kurchbach és Richter mérései)

A 7.2.30. és 7.2.31 ábrák alapján $\delta_i = 45^\circ$ esetén az eltérés $r_K/D_1 \approx 2,1$ -nél kezdődik, tehát

$$\frac{l_1}{D_1} = 2,1 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} (45/2) = 1,7, \quad (7.2.34)$$

míg $\delta_i = 30^\circ$ esetén az eltérés $r_K/D_1 \approx 4,0$, tehát

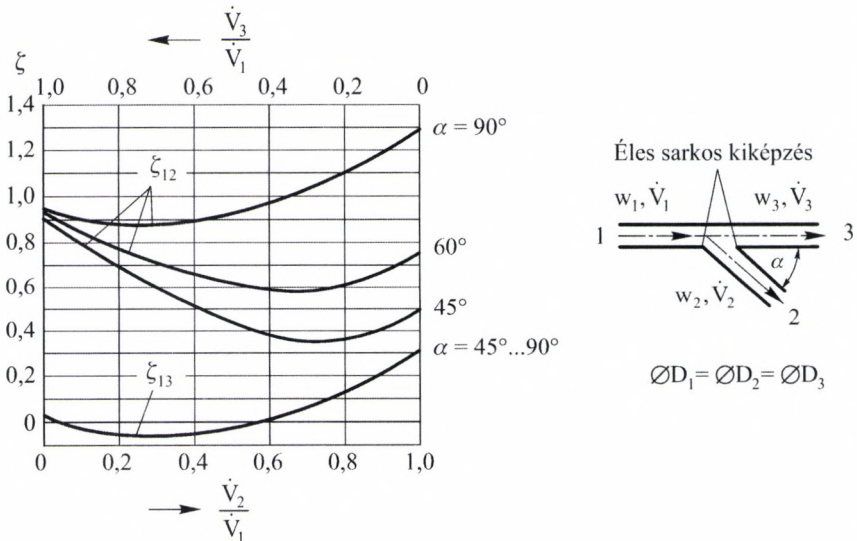
$$\frac{l_1}{D_1} = 4,0 \cdot 2 \operatorname{tg} (30/2) = 2,1. \quad (7.2.35)$$

A műszaki gyakorlatban gyakori eset, hogy könyök-, illetve szeletesívelemeket a legkülönbözőbb módon sorba kell kapcsolni. Néhány esetre vonatkozóan Schubart, Kirchbach és Richter alapján a 7.2.32. ábra ad számszerű értéket. Figyelemre méltó, hogy meghatározott l_1/D_1 érték mellett a veszteség minimum értéket vesz fel.

Spirálvarratos csövek esetén a varrat kialakítása is hatással van, illetve lehet az eredő λ csőszűrlődási tényezőre. A Sumitomo Metal Industries Ltd. mérései szerint, ha $Re \geq 25\,000$, akkor λ_{sv} értéke csak a t_m varratmagasságtól (varratkiemelkedéstől) és a p_m varratmenet-emelkedéstől függ. A javasolt tapasztalati formula:

$$\lambda_{sv} = \frac{1,65 \frac{t_m}{D_k}}{\left(\frac{p_m}{D_k}\right)^{1,07}}, \quad (7.2.36)$$

ahol D_k a cső külső átmérője. Gyakorlati esetekben λ_{sv} általában $0,001 \dots 0,002$, vagyis egy nagyságrenddel kisebb, mint a csőszűrlődésből kiadódó érték. Ennek alapján kimondható, hogy a cső spirálvarratának a hidraulikai ellenállásra gyakorolt hatása általában csekély és számításba vétele csak extrém esetekben (pl. nagy t_m/D_k hányados stb.) szükséges.



7.2.33. ábra. Az elágazás (áramlásszétválasztás) ζ_{12} és ζ_{13} ellenállás-tényezőinek értéke a $\dot{V}_2/\dot{V}_1$, illetve $\dot{V}_3/\dot{V}_1$ viszony függvényében, különböző α elágazási szögek esetén

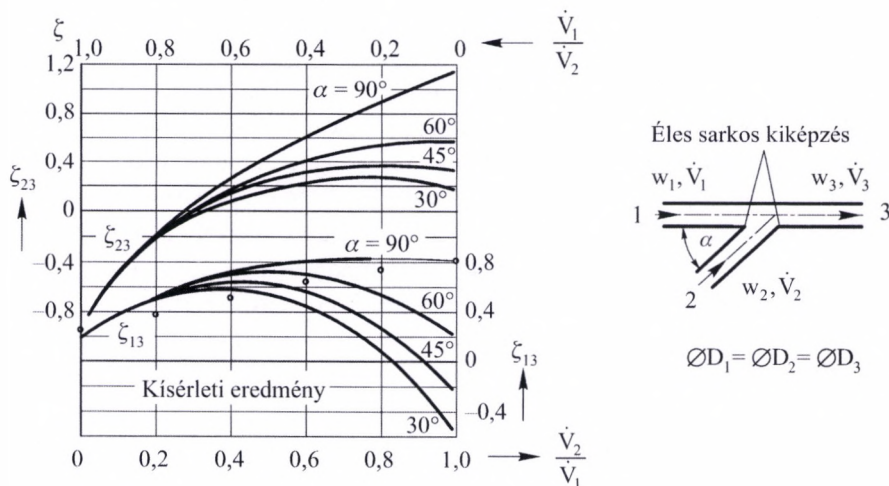
7.2.13. táblázat. Az elágazás (áramlásszétválasztás) ζ_{12} és ζ_{13} ellenállás-tényezőinek értéke kör keresztmetszet esetén, a $\dot{V}_2/\dot{V}_1$ viszony függvényében ($\varnothing D_1 = \varnothing D_2 = \varnothing D_3$)

$\dot{V}_2/\dot{V}_1$		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\alpha = 90^\circ$	ζ_{12}	0,05	-0,08	-0,04	0,07	0,21	0,35
	ζ_{13}	0,96	0,88	0,89	0,96	1,10	4,29
$\alpha \approx 45^\circ$	ζ_{12}	0,04	-0,06	-0,04	0,07	0,20	0,33
	ζ_{13}	0,90	0,68	0,50	0,38	0,35	0,48

7.2.14. táblázat. Az elágazás (áramlásszétválasztás) legkisebb ellenállás-tényezői adott $\dot{V}_2/\dot{V}_1$ viszony és α elágazási szög esetén (Vogel, Petermann és Kinne mérései)

$\dot{V}_2/\dot{V}_1$	0,3			0,5			0,7		
α	90°	60°	45°	90°	60°	45°	90°	60°	45°
$\varnothing D_2/\varnothing D_1$	1,00	0,61	0,58	1,00	0,79	0,75	1,00	1,00	1,00
w_2/w_1	0,30	0,80	0,90	0,50	0,80	0,90	0,70	0,70	0,70
ζ_{13}	0,76	0,59	0,35	0,74	0,54	0,32	0,88	0,52	0,30

Csőelágazások. A csőelágazások pl. az ún. T-idomok ellenállás-tényezőinek meghatározásában jelentős nehézséget és bizonytalanságot jelent, hogy a geometriai hasonlóság korlátozott mértékben áll fent a mérések és a valóság között. A mérési eredmények értékelése alapján az ellenállás-tényezőértékére az áthatás kiképzése (éles vagy lekerített), az átmérő, valamint térfogat-, illetve tömegáram-viszony, a csőcsatlakozás, illetve csőelágazás szöge van a legnagyobb hatással.



7.2.34. ábra. A csatlakozás (áramlásegyesítés) ζ_{13} és ζ_{23} ellenállás-tényezőinek értéke a $\dot{V}_2/\dot{V}_1$, viszony függvényében, különböző α csatlakozási szög esetén

7.2.15. táblázat. A csatlakozás (áramlásegyesítés) ζ_{13} és ζ_{23} ellenállás-tényezőinek értéke kör keresztmetszet esetén a V_2/V_1 , viszony függvényében, különböző csatlakozási szög esetén ($\varnothing D_1 = \varnothing D_2 = \varnothing D_3$)

$\dot{V}_2/\dot{V}_1$		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\alpha = 90^\circ$	ζ_{13}	0,06	0,18	0,30	0,40	0,50	0,60
	ζ_{23}	-1,20	0,40	0,10	0,47	0,72	0,92
$\alpha = 45^\circ$	ζ_{13}	0,05	0,18	0,19	0,06	-0,18	-0,54
	ζ_{23}	-0,90	-0,37	0,00	0,22	0,37	0,38

7.2.16. táblázat. A csatlakozás (áramlásegyesítés) legkisebb ellenállás-tényezői adott $\dot{V}_2/\dot{V}_1$, viszony és α csatlakozási szög esetén (Vogel, Petermann és Kinne mérései)

$\dot{V}_2/\dot{V}_1$	0,3		0,5		0,7		1,0	
α	60°	45°	60°	45°	60°	45°	60°	45°
$\varnothing D_2/\varnothing D_3$	1,00	0,58	0,58	0,58	0,58	1,00	1,00	1,00
w_2/w_3	0,30	0,90	1,50	1,50	2,00	0,70	1,00	1,00
χ_{MIN}	0,33	0,20	0,56	0,43	0,66	0,53	0,53	0,38

Az ellenállás-tényező mindenkor arányosnak mutatkozott a közepes áramlási sebesség négyzetével, ezért csőelágazások esetén általában és első közelítésben a Reynolds-szám nem játszik jelentős szerepet. Általános tapasztalat továbbá, hogy azonos geometriai és áramlási viszonyok esetén az elágazás kisebb veszteséget jelent, mint az áramlások egyesítése.

Kör keresztmetszetű csövek elágazása esetén az ellenállás-tényezőket a 7.2.33. ábra és 7.2.13. táblázat mutatja azonos átmérőkre vonatkozóan. Sok mérés alapján (Vogel, Petermann, Kinne) az elágazás legkisebb ellenállás-tényezőit adó kedvező átmérő- és sebességviszonyokat a 7.2.14. táblázat adja meg.

Kör keresztmetszetű csövekkel megvalósított áramok egyesítése esetén fellépő ellenállás-tényezőket a 7.2.34. ábra és 7.2.15. táblázat mutatja azonos átmérőkre vonatkozóan. Sok mérés alapján (Vogel, Petermann, Kinne) az áramok egyesítésekor fellépő legkisebb ellenállás-tényezőt adó kedvező átmérő- és sebességviszonyokat a 7.1.16. táblázat adja meg. A relatív veszteségtényező értelmezése a következő. A csatlakozási pontba egységnyi idő alatt érkező kinetikai energia:

$$P_K = \dot{V}_{13\rho} \frac{w_{13}^2}{2} + \dot{V}_{23\rho} \frac{w_{23}^2}{2} = \dot{m}_{13} \frac{w_{13}^2}{2} + \dot{m}_{23} \frac{w_{23}^2}{2}. \quad (7.2.37)$$

A veszteség:

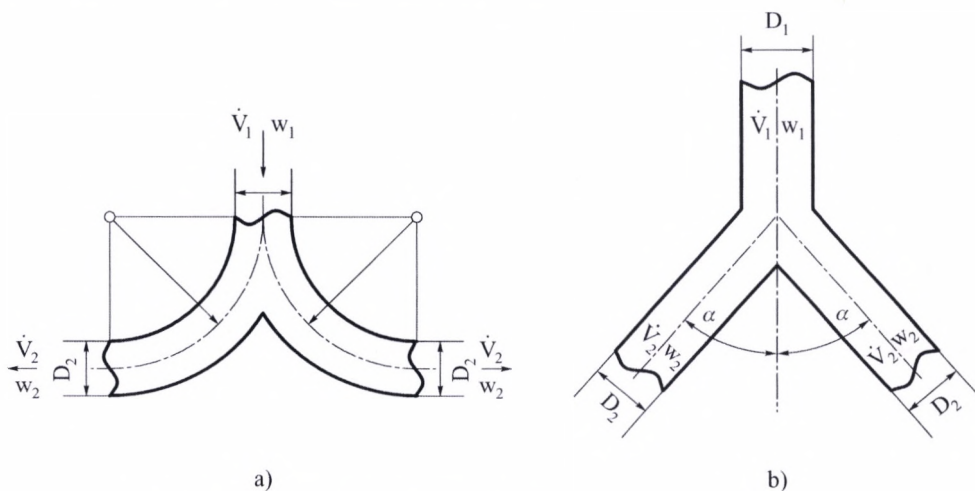
$$P_V = \dot{V}_{13} \Delta p_{13} + \dot{V}_{23} \Delta p_{23} = \dot{m}_{13} \frac{\Delta p_{13}}{\rho} + \dot{m}_{23} \frac{\Delta p_{23}}{\rho} . \quad (7.2.38)$$

A relatív veszteségtényező:

$$\chi = \frac{P_V}{P_K} . \quad (7.2.39)$$

A csőelágazások két speciális kivitelét mutatja a 7.2.35. ábra. Az ellenállás-tényezőket Idelčík nyomán a 7.2.17. táblázat adja meg.

Elzáró- és szabályozószerelvények ellenállás-tényezőit a 7.2.18. táblázatban, továbbá a 7.2.36. és 7.2.37. ábrákban mutatjuk be.

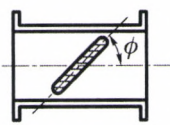
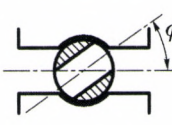
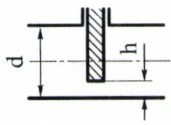


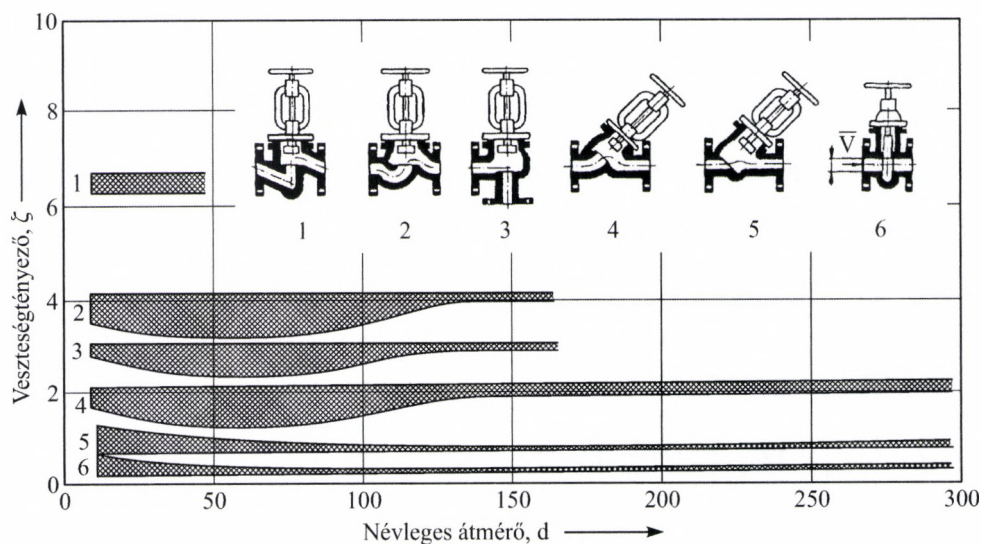
7.2.35. ábra. A csőelágazások speciális kialakítása és geometriai jellemzői

7.2.17. táblázat. Speciális csőelágazások (a geometriai kialakítás a 7.2.35. ábra szerinti) ξ_{12} és ξ'_{12} ellenállás-tényezői az r_k/D viszony és az α szög függvényében

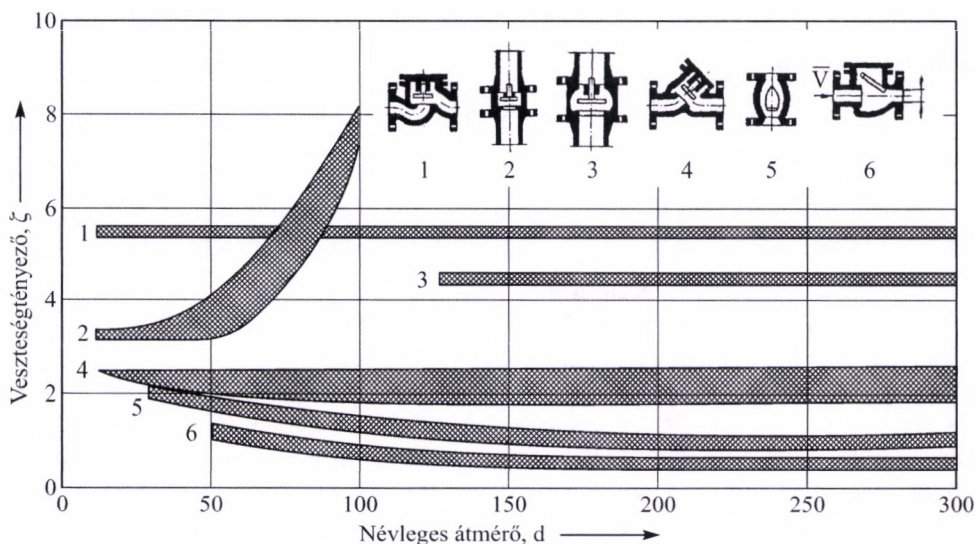
1	r_k/D	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	$\dot{V}_2 = 0,5 \dot{V}_1$
	ξ_{12}	1,10	0,60	0,40	0,25	0,20	vonatkoztatási sebesség w_1
	ξ'_{12}	4,40	2,40	1,60	1,00	0,80	vonatkoztatási sebesség w_2
2	α	10°	30°	45°	60°	90°	$\dot{V}_2 = 0,5 \dot{V}_1$
	ξ_{12}	0,10	0,30		1,00	1,40	vonatkoztatási sebesség w_1
	ξ'_{12}	0,40	1,20	0,80	4,00	5,60	vonatkoztatási sebesség w_2

7.2.18. táblázat. Elzáró- és szabályozószerelvények ellenállás-tényezői az elzáró elem helyzetének függvényében

	Elzáró és szabályozó szerv neve					
	Fojtócsappantyú		Csap		Síktoló zár	
Ábra						
ξ értékei az állítható elem helyzetének függvényében	φ szög	ξ értéke	φ szög	ξ értéke	h/d	ξ értéke
	10°	0,52	10°	0,31	0,125	97,8
	20°	1,54	20°	1,84	0,2	35
	30°	3,91	30°	6,15	0,3	10,0
	40°	10,8	40°	20,7	0,4	4,6
	50°	32,6	50°	95,3	0,5	2,06
	60°	118			0,6	0,98
	70°	251			0,7	0,44
					0,8	0,12
					0,9	0,06
					1,0	0



7.2.36. ábra. Elzárószerelvények veszteségtényezője



7.2.37. ábra. Visszacsapó szelepek veszteségtényezője

7.2.3. A szivattyúteljesítmény meghatározása

Összenyomhatatlan sűrűdő folyadékok állandósult áramlásának, illetve energetikai hidraulikai viszonyainak vizsgálatát állandósult állapotban az általánosított Bernoulli-egyenlettel végezhetjük, amely:

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} + g(H_1 - H_2) = \int_1^2 \frac{dS}{\rho}, \quad (7.2.40)$$

ahol

$$dS = \lambda \frac{\rho}{2D} w^2 dz + \sum \xi \frac{w^2}{2} dz. \quad (7.2.41)$$

Ha az áramlásban szivattyút helyezünk el, és $L_{1,2}$ technikai munkát vezetünk be, akkor a Bernoulli-egyenlet:

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} + g(H_1 - H_2) + L_{1,2} = \int_1^2 \frac{dS}{\rho}. \quad (7.2.42)$$

Ha előírjuk az áramlás kilépő jellemzőit is, és ismerjük az áramlás belépő jellemzőit, akkor az áramlás létrehozásához, illetve fenntartásához szükséges teljesítmény – egységnyi áramló tömegre vonatkoztatva – amennyiben $w_1 \equiv w_2$:

$$L_{1,2} = P = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(H_2 - H_1) + \int_1^2 \frac{dS}{\rho}. \quad (7.2.43)$$

Ha az áramlás vízszintes, és $p_2 = p_1$, akkor az áramlás fenntartásához szükséges technikai teljesítmény:

$$P = \int_1^2 \frac{dS}{\rho} . \quad (7.2.44)$$

Ugyanez a helyzet, ha a Bernoulli-egyenletet zárt áramlási kör 1 $\equiv$ 2 pontjaira írjuk fel, tehát pl. egy távfűtési kör szivattyúzási teljesítményét kívánjuk meghatározni.

7.2.4. Az ellenállás-tényező és az átfolyási szám kapcsolata csővezetéki szerelvényeknél

Az elzáró- és szabályozószerelvényeket az átfolyási számmal, a k_v -tényezővel szokás jellemezni. Ennek értéke az a térfogatáram m^3/h -ban, amelynél 5...30 °C közötti hőmérsékletű víz 1 bar nyomásvesztést okoz a kérdéses szerelvényben. Azonos névleges méretű csövekhez tartozó szerelvények összehasonlításakor a k_v -érték az áramlástechnikai minőség mértéke. A legnagyobb k_v -értéke az áramlástechnikai szempontból legkedvezőbb szerelvénynek van.

A k_v -érték tetszőleges közegre, tetszőleges $\dot{V}$ térfogat áramlásakor keletkező Δp_v nyomásvesztés meghatározására is alkalmas jellemző. Fordított esetben, ha $\dot{V}$ és a még megengedhető Δp_v adott, könnyen megállapítható a megfelelő k_v -érték és így a megfelelő szerelvény típusa is.

Korábban csak a ξ veszteségtényezővel jellemezték a szerelvényeket. A veszteség ezzel:

$$\Delta p_v = \xi \frac{\rho}{2} w^2 . \quad (7.2.45)$$

A térfogatáram adott Δp_v és ismert ξ esetén:

$$\dot{V} = A w = A \sqrt{\frac{2 \Delta p_v}{\rho \xi}} . \quad (7.2.46)$$

A k_v -érték bevezetésével egyszerűbbé válik tetszőleges közegre a $\dot{V}$ és Δp_v számítása, továbbá könnyebb az adott $\dot{V}$ és Δp_v értékeknek megfelelő k_v -értékű szerelvény megtalálni.

Mivel a k_v -érték az a víztérfogat, amely egy óra alatt egy szerelvényen átáramlik, ha abban a nyomásesés $\Delta p_v = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, a víz sűrűsége $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, akkor a (7.2.46) egyenlet szerint, ahol $A \text{ m}^2$ -ben szerepel:

$$k_v = A \cdot 3,6 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{\xi \cdot 10^3}} = \frac{A}{\sqrt{\xi}} 14 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{h} . \quad (7.2.47)$$

Ha a sűrűség eltér a víztől és a nyomásveszteség nem $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$, akkor

$$\dot{V} = k_v \sqrt{\frac{\Delta p_v}{100\rho}}. \quad (7.2.48)$$

Ellenőrizhetően, ha $\Delta p_v 10^5 \text{ Pa}$, és $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, akkor $\dot{V} = k_v$.

Ha Δp_v bar-ban, $\rho \text{ kg/dm}^3$ -ben van megadva, akkor

$$\dot{V} = k_v \sqrt{\frac{\Delta p_v}{\rho}}. \quad (7.2.49)$$

A (7.2.49) egyenlet tetszőleges közegre, tetszőleges Δp_v -nél alkalmazható, ha a viszkozitás és ennek hatása a sebességre elhanyagolható, továbbá gázoknál, ha a ρ változása elhanyagolható.

Ha az áramlást veszteségmentesnek tekintjük, 1 bar nyomáskülönbség hatására kialakuló sebesség (7.2.45)-ből, $\xi = 1$ helyettesítéssel

$$w = \sqrt{\frac{2 \Delta p_v}{\xi \rho}} = \sqrt{2 \frac{10^5}{10^3}} = 14 \text{ m/s}. \quad (7.2.50)$$

Ezért tetszőleges w sebességgel áramló közeg térfogatárama a következő összefüggéssel is kiszámítható:

$$\dot{V} = k_v \frac{w}{14} [\text{m}^3/\text{h}]. \quad (7.2.51)$$

Mivel a szelepből a legnagyobb sebesség a szeleptányér alatt van és a 14 m/s sebességnél nagyobb az adott helyzetben nem lehetséges, a $w/14$ arány csak úgy adhat jó közelítést, ha a w sebességet is a szelep szabad keresztmetszetére vonatkoztatjuk.

A változó sűrűségű közegeknél a (7.2.51) egyenlettel számolt $\dot{V}$ értéket a szelep alatti A_s szabad keresztmetszeten áthaladó gáz állapotával egyező állapotú gázra vonatkoztatjuk. Ha a szerelvényen áthaladó gáz normál állapotú $\dot{V}_n$ értékét kívánjuk meghatározni, és $p_n = 760 \text{ torr} = 1,013 \text{ bar}$; $T_n = 273 \text{ K}$, továbbá az A_s keresztmetszetben p_s és T_s a gáz állapotának jellemzői,

$$\dot{V}_n = \dot{V}_s \frac{p_s}{1,013} \cdot \frac{273}{T_s} = \dot{V}_s \cdot 269 \frac{p_s}{T_s}. \quad (7.2.52)$$

Gázokra a (7.2.51) egyenlet is csak akkor használható, ha az áramlás folyamán keletkező nyomásváltozás miatti sűrűségváltozás elhanyagolható. Ha ez a feltétel nem teljesül, de $w < w_{kr}$, akkor a következő összefüggést alkalmazhatjuk:

$$w = \sqrt{\frac{2\Delta p_v}{0,5(\rho_1 + \rho_2)}}. \quad (7.2.53)$$

Az 1 index a szerelvény előtti és a 2 index a szerelvény utáni mennyiségeket jelöli. Ha p_2/p_1 kisebb a gázra jellemző kritikus értéknél, a gáz sebessége egyenlő a helyi hangsebességgel, ezért $w_s = a_s = \sqrt{\kappa RT_s}$. A kritikus nyomásarányhoz tartozó kritikus hőmérsékletarány:

$$\frac{T_s}{T_1} = \frac{2}{\kappa - 1}, \text{ a levegőnél } T_s = \frac{T_1}{1,2}, \quad (7.2.54)$$

mivel levegőnél $\kappa = 1,4$. A hőmérsékletnek ez a kapcsolata elméletileg helyes, a valóságban azonban a folyamat alatti hőátadás mértékétől függően az 1,2 érték módosulhat.

A nyomásvesztés adott térfogatáramnál. Ha a térfogatáram egy szerelvényen $k_v, \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, akkor $\Delta p_v = 1 \text{ bar}$. Tetszőleges $\dot{V}$ és ρ esetén

$$\Delta p_v = \left(\frac{\dot{V}}{k_v} \right)^2 \frac{\rho}{10^3} \text{ bar}, \quad (7.2.55)$$

$$[\dot{V}] = \text{m}^3/\text{h}; [k_v] = \text{m}^3/\text{h}; [\rho] = \text{kg}/\text{m}^3.$$

Tetszőleges közegnek és nyomásvesztésnek megfelelő szelep kiválasztása helyesbített k_v -értékek alapján. A felhasználható szerelvények tulajdonságait összefoglaló diagram – szabályozási görbéknek is nevezik – a k_v -érték, a szerelvény nagysága, nyitási mértéke és ζ veszteségtényezője közötti kapcsolatot szemlélteti. A KVD típusú szelepszor szabályozási görbéi a 7.2.38. ábrán láthatók, a KH típusú gömbcsapokra érvényes görbék a 7.2.39. ábrán.

A nyitás mértéke szelepnél φ %, csapnál φ elfordulási szög °-ban.

Ha meghatároztuk a k_v -értéket, a diagramok alapján megállapítható, hogy melyik szerelvény nagyság milyen mértékű nyitással felel meg a követelményeknek, valamint az ehhez tartozó ζ értéke. A szabályozószelepek kiválasztásához az alábbi értékek ismerete szükséges:

- k_{vn} névleges üzemi terheléshez,
- k_{vmax} maximális üzemi terheléshez.

A becsült névleges terhelésnek megfelelő k_{vn} -nél

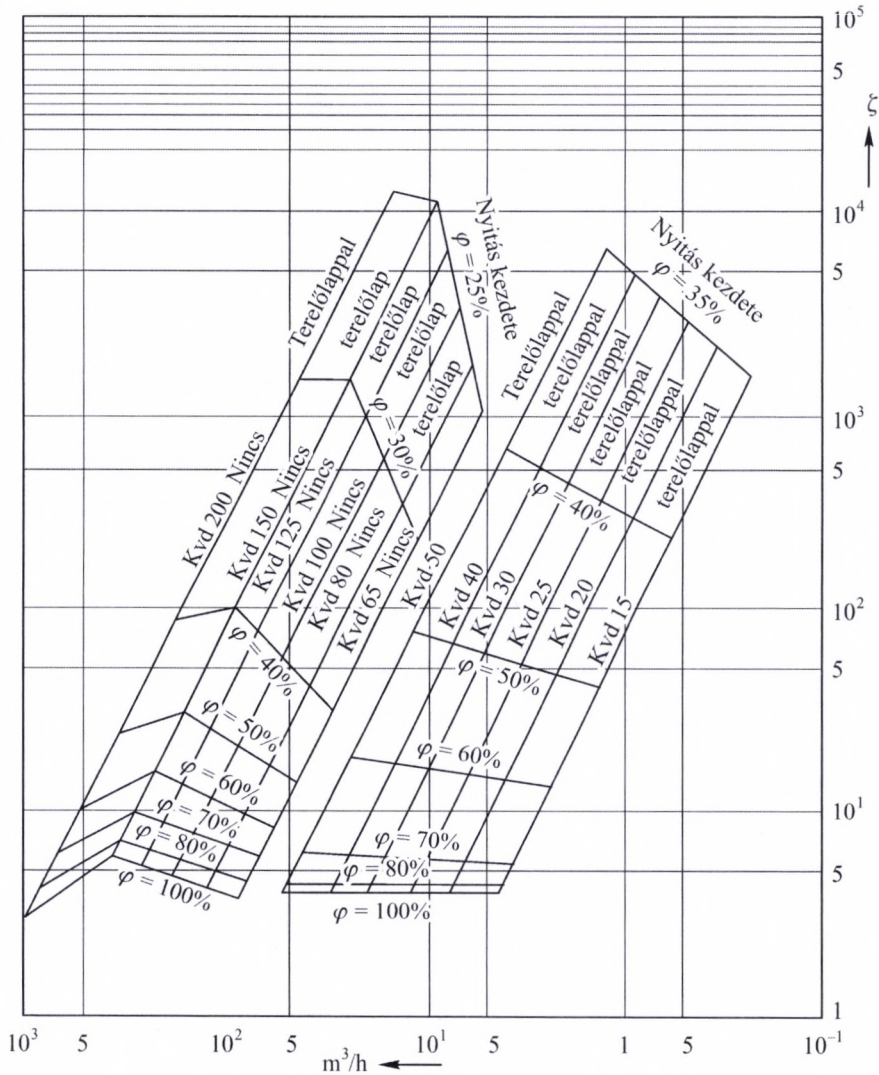
$$k_{v100} = 2k_{vn},$$

a becsült maximális terhelésnek megfelelő k_{vmax} -nál

$$k_{v100} = 1,3 k_{vmax}.$$

A szerelvény teljes, 100%-os nyitásához tartozik k_{v100} .

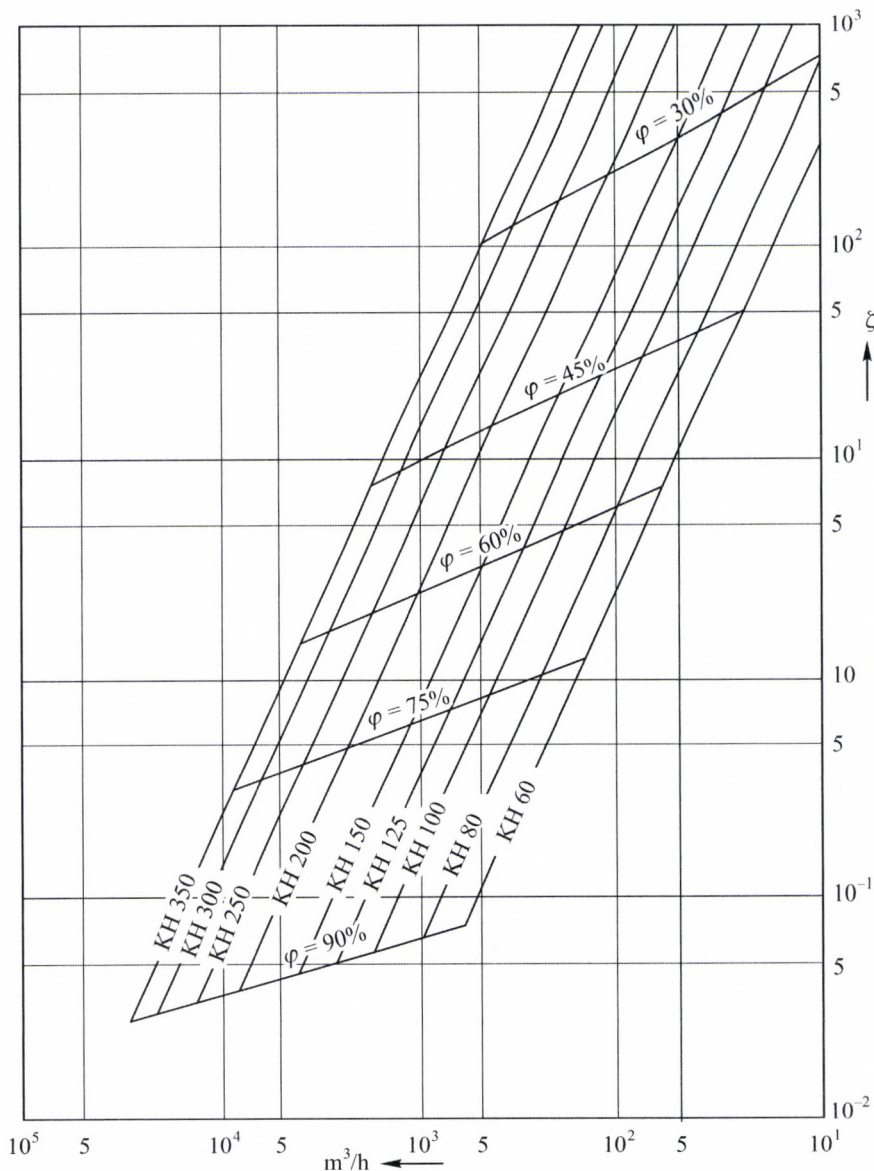
Azokat a körülményeket, amelyek befolyásolhatják a kiválasztást, a k_v -érték megállapítására felhasználható képletek alapján vesszük figyelembe.



A k_v -értékek tűrése $\pm 10\%$

7.2.38. ábra. A KH típusú gömbcsapok szabályozási görbéi

Az egyenletekről és alkalmazásuk területeiről a 7.2.19. táblázat tájékoztat. A K korrekciós tényezők indexei megegyeznek az általuk meghatározott k_v -értékek indexeivel. A többi mennyiség indexei: 1 a beáramlás, 2 a kiáramlás helyére vonatkozó, s a szeleptányér alatti adatot jelentik.



A k_v -értékek tűrése $\pm 10\%$

Minden csap kb 15° közelében kezd nyitni

7.2.39. ábra. A KVd típusú szelepcsalád szabályozási görbéi

7.2.19. táblázat. Az üzemi követelményeket kifejező k_v -értékek meghatározására szolgáló képletek és alkalmazásuk áttekintése

A k_v -értékek		A mennyiséget meghatározó egyenlet	Az alkalmazás korlátai
jele	alkalmazása		
k_{v0}	ρ sűrűségű folyadékokra és $p_n = 1,013$ bar és $t_n = 0$ °C állapotú gázokra.	$k_{v0} = \frac{\dot{V}}{\sqrt{\Delta p}}$,	csak vízre, ha $t \leq 30$ °C,
K_1		$K_1 = \sqrt{\frac{\rho}{10^3}}$,	$\nu \leq 20$ cSt,
k_{v1}		$k_{v1} = k_{v0} K_1$,	ha $\frac{p_2}{p_1} \geq 0,95$,
		$k_{v1} = \frac{\dot{V}_m}{\sqrt{10^3 \rho_1 \Delta p}}$.	$10^{-4} < \dot{V} < 10$ m ³ /h.
			$\nu \leq 20$ cSt, $1 < \dot{V} < 10^5$ m ³ /h.
K_3	gázra $k_{v3} = K_3 k_{v0}$.	$K_3 = \sqrt{\frac{\rho_n T_1}{2,64 \cdot 10^5 p_2}}$, vagy $k_{v3} = \frac{\dot{V}_n}{514} \sqrt{\frac{\rho_n T_1}{\Delta p p_2}}$.	$0,95 > \frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr}$, 514, csak ha $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} = 0,5$.
K_4	gázra $k_{v4} = K_4 q_{v0}$.	$K_4 = \sqrt{\frac{\rho_n T_1}{257 p_1}}$, 257, ha: $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} = 0,5$.	$\frac{p_2}{p_1} < \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr}$.
k_{v5}	vízgőzre	$k_{v5} = \frac{\dot{V}_m}{31,6} \sqrt{\frac{v_{f2}}{\Delta p}}$, 31,6, ha: $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} = 0,5$.	telített gőznél, ha $\frac{p_2}{p_1} > 0,577$, túlhevítettnél, ha $\frac{p_2}{p_1} > 0,546$.
k_{v6}	vízgőzre telítettnél: $k_{v6t} = k_{v6} K_{6t}$, túlhevítettnél: $k_{v6h} = k_{v6} K_{6h}$.	$k_{v6} = \frac{\dot{V}_m}{22,4} \sqrt{\frac{v_{f1}}{p_1}}$, 22,4, ha: $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} = 0,5$, $K_{6t} = 1,087$, $K_{6h} = 1,05$.	telített gőznél, ha $\frac{p_2}{p_1} < 0,577$, túlhevítettnél, ha $\frac{p_2}{p_1} < 0,546$.

7.3. Politropikus, súrlódásos, kívülről fűtött vagy hűtött áramlás állandó áramlási keresztmetszetű csőben

Az áramlás leírása az előzőekhez képest további problémát nem vet fel. A folyadék súrlódási nyomásvesztését a (7.2.2) képlettel határozhatjuk meg. Pontosabb számításokban figyelembe vehetjük a folyadék sűrűségének a cső mentén történő változását, amely a folyadék hőmérsékletének változása következtében jelentkezik.

A folyadék hőmérsékletének változását az alábbiak szerint számíthatjuk ki.

A mozgási egyenlet:

$$w \frac{dw}{dz} = -v \frac{dp}{dz} - \frac{\lambda}{2D} w^2. \quad (7.3.1)$$

Az energiaegyenlet:

$$\frac{d}{dz} \left(h + \frac{w^2}{2} \right) = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}, \quad (7.3.2)$$

illetve

$$\frac{d}{dz} \left(u + pv + \frac{w^2}{2} \right) = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}. \quad (7.3.3)$$

Differenciálva

$$\frac{du}{dz} + \frac{dp}{dz} v + p \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}. \quad (7.3.4)$$

Mivel a közeg összenyomhatatlan, ezért

$$p \frac{dv}{dz} = 0. \quad (7.3.5)$$

Így

$$\frac{du}{dz} + \frac{dp}{dz} v + w \frac{dw}{dz} = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}. \quad (7.3.6)$$

A mozgási egyenletet az energiaegyenletbe helyettesítve

$$\frac{du}{dz} - \frac{\lambda}{2D} w^2 = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}. \quad (7.3.7)$$

Mivel

$$u = c T, \quad (7.3.8)$$

ezért

$$\dot{m} c \frac{dT}{dz} = \frac{\lambda \rho}{2D} w^2 \dot{V} + \dot{q}. \quad (7.3.9)$$

Ha

$$\dot{q} = -kU(T - T_k) \Rightarrow \dot{q} = -kU\Delta T, \text{ illetve } \dot{q} = -kU\Delta t, \quad (7.3.10)$$

akkor

$$\dot{m} c \frac{d(\Delta t)}{dz} = \frac{\lambda \rho}{2D} w^2 \dot{V} - kU\Delta t. \quad (7.3.11)$$

A peremfeltétel:

$$z = 0, \Delta t = \Delta t_0 \quad (7.3.12)$$

A (7.3.11) differenciálegyenlet megoldásával és a peremfeltétel kielégítésével az áramló közeg hőmérséklete a csőben a z-tengely mentén:

$$\Delta t(z) = \left(\Delta t_0 - \frac{\lambda w^2 \dot{m}}{2D kU} \right) e^{\frac{kU}{\dot{m}c} z} + \frac{\lambda w^2 \dot{m}}{2D kU}. \quad (9.3.13)$$

A levezetés részleteiben:

$$\frac{d(\Delta t)}{dz} = \frac{\lambda}{2Dc} w^2 - \frac{kU}{\dot{m}c} \Delta t = A - B \Delta t. \quad (7.3.14)$$

A differenciálegyenlet a szétválasztás után:

$$\frac{d(\Delta t)}{A - B\Delta t} = dz. \quad (7.3.15)$$

Integrálva:

$$\ln(A - B\Delta t) = -Bz + C, \quad (7.3.16)$$

$$A - B\Delta t = Ce^{-Bz}, \quad (7.3.17)$$

$$\Delta t = \frac{A}{B} - \frac{C}{B} e^{-Bz}. \quad (7.3.18)$$

Az állandók meghatározása:

$$z = 0, \Delta t = \Delta t_0 \quad (7.3.19)$$

$$\Delta t_0 = \frac{A}{B} - \frac{C}{B}, \quad (7.3.20)$$

$$C = A - B\Delta t_0, \quad (7.3.21)$$

$$\Delta t(z) = \frac{A}{B} - \frac{A - B\Delta t_0}{B} e^{-Bz} = \left(\Delta t_0 - \frac{A}{B} \right) e^{-Bz} + \frac{A}{B}. \quad (7.3.22)$$

$$\Delta t(z) = \left(\Delta t_0 - \frac{\lambda w^2 \dot{m}}{2DkU} \right) e^{\frac{kU}{\dot{m}c} z} + \frac{\lambda w^2 \dot{m}}{2DkU}. \quad (7.3.23)$$

Megjegyezhetjük, hogy a folyadékok áramlásának fenti vizsgálata során az összenyomhatóság és a hőtágulás elhanyagolása következtében egyben az izochor áramlást írtuk le.

7.4. Politropikus, kívülről fűtött vagy hűtött áramlás súrlódás nélkül, állandó áramlási keresztmetszetű csőben

A megoldást – nyilvánvalóan – a (7.3.13) egyenlet adja, ha abban $\lambda \equiv 0$ helyettesítést végzünk el. Ezzel a folyadék hőmérsékletének változása a csőben a z-tengely mentén:

$$\Delta t(z) = \Delta t_0 e^{-\frac{kU}{mc}z}. \quad (7.4.1)$$

7.5. Izotermikus, izentropikus és izentalp súrlódásos áramlás állandó áramlási keresztmetszetű csőben

Akkor áll elő, ha a súrlódásból keletkező hőt teljes egészében elvonjuk. Ekkor

$$-\frac{\lambda}{2D} w^2 = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}. \quad (7.5.1)$$

Ha ismert $w = w_0$, akkor a szükséges hőelvonás mértéke:

$$\dot{q} = -\frac{\lambda \dot{m}}{2D} w^2. \quad (7.5.2)$$

Mivel $w = \text{állandó}$, ezért $\dot{q} = \text{állandó}$.

7.6. Politropikus, súrlódásos áramlás változó áramlási keresztmetszetű csőben

A folyadék sűrűségét állandó értékűnek tekintjük. Kompresszibilitását elhanyagoljuk. Hőtágulást nem veszünk figyelembe. Az áramló folyadék nyomásának és hőmérsékletének változását kísérvük figyelemmel, amelyek a súrlódás és a folyadék és környezete között fellépő hőátvitel következtében módosulnak.

Az áramlást leíró alapegyenletek

A mozgási egyenlet:

$$w \frac{dw}{dz} = -v \frac{dp}{dz} - \frac{\lambda}{2D} w^2, \quad v = \text{állandó.} \quad (7.6.1)$$

Az energiaegyenlet:

$$\frac{d}{dz} \left(h + \frac{w^2}{2} \right) = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}, \quad (7.6.2)$$

illetve

$$\frac{d}{dz} \left(cT + pv + \frac{w^2}{2} \right) = \frac{\dot{q}}{\dot{m}}, \quad v = \text{állandó.} \quad (7.6.3)$$

A kontinuitási egyenlet:

$$\dot{m} = \frac{Aw}{v}, \quad v = \text{állandó.} \quad (7.6.4)$$

Az egyenletek megoldása

A nyomás meghatározása. A mozgási egyenletből

$$D = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} \quad \text{és} \quad w = \frac{\dot{m}}{A} v \quad (7.6.5)$$

helyettesítéssel

$$\frac{d}{dz} \left[\left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^2 \frac{v^2}{2} + pv \right] = -\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4\sqrt{A}} \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^2 v^2. \quad (7.6.6)$$

Ebből a nyomás értéke a cső valamely tetszőleges z-pontjában, ha ismert $A = A(z)$:

$$p(z) = p_0 + \frac{\dot{m}^2 v}{2} \left[\left(\frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{A^2} \right) - \frac{\lambda\sqrt{\pi} v}{4} \int_0^z \frac{1}{A^{2,5}} dz \right]. \quad (7.6.7)$$

A hőmérséklet meghatározása. Az energiaegyenletből, a mozgási egyenlet behelyettesítése után:

$$c \frac{dT}{dz} = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4\sqrt{A}} \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^2 v^2 + \frac{\dot{q}}{\dot{m}}. \quad (7.6.8)$$

Ha ismert $A = A(z)$ és $\dot{q} = \dot{q}(z)$, akkor a hőmérséklet a cső valamely z-pontjában:

$$T(z) = T_0 + \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4c} \dot{m}^2 v^2 \int_0^z \frac{dz}{A^{2,5}} + \frac{1}{\dot{m}c} \int_0^z \dot{q} dz. \quad (7.6.9)$$

7.6.1. Izobár áramlás súrlódással, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben

A súrlódás következtében előálló nyomásvesztéséget a keresztmetszet-bővülésből, és sebességsökkenésből származó nyomásnövekedésnek kell kompenzálnia.

A (7.6.7) egyenletből $p = p_0$ helyettesítéssel:

$$\frac{1}{A_0^2} - \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{2 \dot{m}^2} \int_0^z \frac{1}{A^{2,5}} dz = \frac{1}{A^2}. \quad (7.6.10)$$

Az áramlás izobár jellegének fenntartásához azt az $A = A(z)$ függvényt kell meghatároznunk, amely kielégíti a (7.6.10) integrálegyenletet.

7.6.2. Izoterm és izentrop áramlás súrlódással, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben

Ha ismert a csőkeresztmetszet $A = A(z)$ függvénye, akkor a (7.6.8) kifejezésből $\frac{dT}{dz} = 0$ helyettesítéssel meghatározható a $\dot{q} = \dot{q}(z)$ hőelvétel, amely mellett az áramlás izoterm marad:

$$\dot{q}(z) = -\frac{\lambda \sqrt{\pi} \dot{m}^3 v^2}{A^{2,5}}, \quad v = \text{állandó és adott.} \quad (7.6.11)$$

A nyomás meghatározása a (7.6.7) kifejezéssel történhet.

7.6.3. Izentalp áramlás súrlódással, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben

A feladat megoldása azonos a 7.6.2. pont alatt tárgyalt feladatével. A súrlódásból keletkező hő:

$$\dot{q}(z) = -\frac{\lambda \sqrt{\pi} \dot{m}^3 v^2}{A^{2,5}}. \quad (7.6.12)$$

Ha a $\frac{\dot{q}}{\dot{m}}$ hőt elvonjuk, akkor az áramlás izoterm, és egyben izentalp valamint izentropikus is.

7.7. Politropikus áramlás súrlódás nélkül, hőátvitellel, változó áramlási keresztmetszetű csőben

A nyomás értékének meghatározására szolgáló egyenlet a (7.6.7) egyenletből vezethető le $\lambda = 0$ helyettesítéssel:

$$p(z) = p_0 + \frac{\dot{m}^2 v}{2} \left(\frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{A^2} \right). \quad (7.7.1)$$

A hőmérséklet a (7.6.9) egyenletből ugyancsak $\lambda = 0$ helyettesítéssel:

$$T(z) = T_0 + \frac{1}{\dot{m} c} \int_0^z \dot{q} \, dz. \quad (7.7.2)$$

7.8. Adiabatus áramlás súrlódással, hőátvitel nélkül, változó áramlási keresztmetszetű csőben

A nyomás értékének meghatározására szolgáló egyenlet megegyezik a (7.6.7) kifejezéssel, azaz

$$p(z) = p_0 + \frac{\dot{m}^2 v}{2} \left(\frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{A^2} \right) - \frac{\lambda \sqrt{\pi} v}{4} \int_0^z \frac{1}{A^{2,5}} dz. \quad (7.8.1)$$

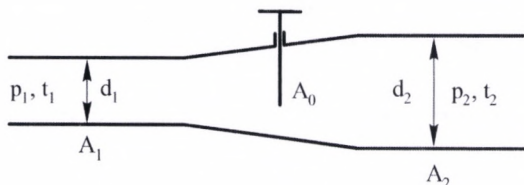
A hőmérséklet meghatározására szolgáló egyenlet a (7.6.9) egyenletből $\dot{q} = 0$ helyettesítéssel állítható elő:

$$T(z) = T_0 + \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{4c} \dot{m}^2 v^2 \int_0^z \frac{1}{A^{2,5}} dz. \quad (7.8.2)$$

7.9. Kidolgozott példák a 7. fejezethez

7.9.1. példa. Mekkora áramlási sebesség alakul ki egy fojtószelepen (7.9.1. ábra) az alábbi adatok alapulvételével?

$\frac{d_1}{d_2} = 1$	$\frac{A_1}{A_2} = 1$	$\frac{A_0}{A_1} = 0,125$	$\xi = 97,8$
$p_1 = 2 \text{ bar}$	$t_1 = 90 \text{ °C}$	$p_2 = 1 \text{ bar}$	$\rho_1 = \rho_2 = \rho = 965,2 \text{ kg/m}^3$



7.9.1. ábra

A Bernoulli-egyenlet az 1 és 2 pont között:

$$p_1 + \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \frac{w_2^2}{2} + \xi \frac{\rho}{2} w_1^2.$$

Mivel $w_1 = w_2$, ezért a Bernoulli-egyenletből

$$w_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \xi}} = \sqrt{\frac{2}{965,2} \frac{(2-1)10^5}{97,5}} = 1,4578 \text{ m/s.}$$

Az áramlási sebesség a fojtószelepen:

$$w_0 = \frac{w_1}{\frac{A_0}{A_1}} = \frac{1,4578}{0,125} = 11,6624 \text{ m/s.}$$

Az „1” és „0” pont között a Bernoulli-egyenlet:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{w_0^2}{2}.$$

Ebből

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2 - w_0^2}{2} \right) \rho = \left(\frac{200000}{965,2} + \frac{1,4578^2 - 11,6624^2}{2} \right) 965,2 = \\ &= \left(207,21094 + \frac{2,12518 - 136,01117}{2} \right) 965,2 = 135386,4275 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

Az áramlás felgyorsítására fordított nyomáskülönbség tehát:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = 200000 - 135386,4275 = 64613,5725 \text{ Pa.}$$

A nyomás a szelep után, az áramlás „visszalassulása” előtt, feltételezve, hogy a mechanikai energia disszipációja a 0 pont közvetlen környezetében megy végbe:

$$p' = p_0 - \Delta p_v = 135386,4275 - 100000 = 35386,4275 \text{ Pa.}$$

Az áramlásban tehát kavitáció léphet fel, mivel p' jelentősen kisebb, mint a + 90 °C hőmérsékletű forró víz telítési nyomása.

7.9.2. példa. Határozzuk meg a távfűtővezetékben áramló víz lehűlését az alábbi adatok alapulvételével:

A vezeték hossza:

$$L = 800 \text{ m.}$$

A vezeték belső átmérője:

$$D = 0,3 \text{ m.}$$

A vezeték belső keresztmetszete:	$A = 0,07068583 \text{ m}^2$.
A forró víz áramlási sebessége:	$w = 1,5 \text{ m/s}$.
A forró víz tömegárama:	$\dot{m} = 99 \text{ kg/s}$.
A csőúrlódási tényező:	$\lambda = 0,02$.
A forró víz hőmérséklete:	$t = 130 \text{ }^\circ\text{C}$.
Külső hőmérséklet:	$t_k = 10 \text{ }^\circ\text{C}$.
A forró víz sűrűsége:	$\rho = 934 \text{ kg/m}^3$.
A szigetelt csővezeték hőátviteli tényezője a külső sugárra vonatkoztatva:	$k = 0,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$.
A szigetelés vastagsága:	$\delta = 0,1 \text{ m}$.
A vezeték külső kerülete:	$U = 1,570 \text{ m}$.
A forró víz fajhője:	$c = 4263 \text{ J/(kg K)}$.

A forró víz hőmérséklete a vezeték végén:

$$\Delta t(L) = \left(\Delta t_0 - \frac{\lambda w^2 \dot{m}}{2 D k U} \right) e^{-\frac{kU}{\dot{m}c} L} + \frac{\lambda w^2 \dot{m}}{2 D k U}.$$

$$\Delta t(L) = \left(120 - \frac{0,02 \cdot 1,5^2 \cdot 99}{2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \cdot 1,57} \right) e^{-\frac{0,5 \cdot 1,57}{99 \cdot 4263} 800} + \frac{0,02 \cdot 1,5 \cdot 99}{2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \cdot 1,57} = 119,8356 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A lehűlés mértéke:

$$\Delta(\Delta t) = \Delta t(L) - \Delta t_0 = 120 - 119,8356 = 0,1644 \text{ }^\circ\text{C}.$$

7.9.3. példa. Mennyi lesz a víz hőmérséklete, ha az áramlási sebességet lecsökkentjük 0,15 m/s értékre?

Ekkor

$$\dot{m} = 9,9 \text{ kg/s}.$$

$$\Delta(\Delta t) = \Delta t_0 - \Delta t(L) = 120 - 118,2277422 = 1,77225 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ellenőrizzük a lehűlést a globális hőmérleg segítségével!

A vezetéken leadott hő:

$$Q = kUL \left(\frac{t_0 + t_L}{2} - t_k \right) = 0,5 \cdot 1,57 \cdot 800 \left(\frac{130 + 128,2277}{2} - 10 \right) = 74803,51105 \text{ W}.$$

A leadott hőből számolt lehűlés:

$$\Delta(\Delta t) = \frac{Q}{\dot{m} c} = \frac{74803,51105}{9,9 \cdot 4263} = 1,7724 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Jól egyezik a differenciálegyenlet megoldásával nyert értékkel.

7.9.4. példa. Mekkora kellene lennie a 7.9.2. példában az áramlási sebességnek ahhoz, hogy ne következzen be lehűlés a csőben?

Mivel

$$\lambda \frac{\rho}{2D} w^2 \dot{V} = \dot{q} = kU\Delta t_0,$$

$$\lambda \frac{\rho}{2D} w^3 A = kU\Delta t_0.$$

Ebből

$$w = \sqrt[3]{\frac{2kU\Delta t_0 d}{\lambda \rho A}},$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 1,57 \cdot 120 \cdot 0,3}{0,02 \cdot 934 \cdot 0,07068}} = 3,4984232 \text{ m/s}.$$

Mekkora az áramlási nyomásvesztés?

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} w^2 = 0,02 \frac{800}{0,3} \frac{934}{2} 3,4984^2 = 304782,873 \text{ Pa}.$$

A keletkező hő:

$$Q = \Delta p \dot{V} = \Delta p A w = 304782,83 \cdot 0,07068 \cdot 3,49847 = 75363,2196 \text{ J}.$$

Jól egyezik a leadott hő értékével, tehát a forró víz hőmérséklete az áramlás során nem változik.

8. SZIMMETRIKUS ELŐREMENŐ ÉS VISSZATÉRŐ VEZETÉKEKBŐL ÁLLÓ FŰTÉSI HÁLÓZATOK HIDRAULIKAI ANALÍZISE

A hidraulikai analízis – a korábbiakban mondottak szerint – a fűtési hálózaton kialakuló áramlási kép: az áramlási sebességek, a nyomásvesztések, a hálózat eredő hidraulikai ellenállásának és a szivattyú munkapontjának a meghatározását jelenti.

A hidraulikai analízis járulékos eredménye a szükséges beruházási feladatok, a szükséges fojtások (statikus vagy dinamikus, normális vagy automatikus) számítása.

A hidraulikai analízis módszerei alapvetően különböznek egymástól aszerint, hogy sugaras és szimmetrikus előremenő és visszatérő vezetékpárból álló vagy hurkolt, körvezetékes és/vagy nem szimmetrikus előremenő és visszatérő vezetékpárokból álló rendszert vizsgálunk.

A sugaras, szimmetrikus előremenő és visszatérő vezetékpárokat tartalmazó rendszer hidraulikai analízisét az eredő hidraulikai ellenállás-tényezők kiszámításával végezzük.

A hurkolt, aszimmetrikus és egyéb bonyolultabb struktúrájú hálózatok hidraulikai analízisét a Kirchoff I. és II. törvényének alkalmazásával, a csomóponti és hurokgyenletek felírásával és megoldásával végezzük.

8.1. Az eredő (helyettesítő) ellenállás meghatározása hálózatrészekre

Bármely sugaras fűtési hálózat sorba és párhuzamosan kapcsolt vezetékszakaszokból, illetve hálózatrészekből áll. A hálózatrészek ellenállásaiból előállítjuk a helyettesítő, (eredő) egyenértékű ellenállású vezetékeket, majd az egész hálózatot egyetlen helyettesítő, egyenértékű ellenállású vezetékszakasszal helyettesítjük.

Tiszta sugaras fűtési hálózatok esetében az áramlási irányok a priori kitűzhetők és egyértelműen megállapíthatók, hogy mely vezetékszakaszok vannak sorba, illetve párhuzamosan kapcsolva.

Az egyenértékű ellenállás ismeretében a sugaras hálózat hidraulikai analízise viszonylag könnyen végrehajtható.

Két alapvető feladat tűzhető ki:

- Ismert, előírt fogyasztói igények kielégítéséhez mekkora szivattyú kell, illetve mi lesz a szivattyú munkapontja és milyen beszabályozást kell a hálózaton végrehajtanunk?
- Ismert szivattyú munkapont és ismert hálózati jellemzők esetén milyen áram-és nyomáskép alakul ki a hálózaton?

Ha ismerjük az eredő ellenállást és a betáplálási nyomás előírt érték, akkor a betáplálható tömegáram:

$$\dot{m} = \left(\frac{\Delta p}{R_c^*} \right)^{\frac{1}{a}}. \quad (8.1.1)$$

Ha a tömegáram előírt értékű, akkor annak a betáplálási nyomásnak a nagysága, amellyel ez a betáplálási intenzitás megvalósítható:

$$\Delta p = R_c^* \dot{m}^a. \quad (8.1.2)$$

Általában $a = 2$. Az összefüggéseket szokás a térfogatáramokra is alkalmazni. A (8.1.2) összefüggés írható

$$\Delta p = R_c \dot{V}^2 \quad (8.1.3)$$

formában is. Nyilvánvaló, hogy $R_c = R_c^* \rho^2$.

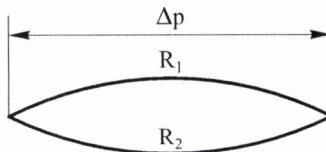
8.1.1. Párhuzamosan kötött vezetékszakaszok

Közös kezdő- és végpontú vezetékszakaszok (8.1.1. ábra)

Miután a vezetékszakaszok azonos csomópontokra illeszkednek, amelyek között a potenciálkülönbség Δp , beláthatóan fennáll, hogy

$$R_1 \dot{V}_1^2 = R_2 \dot{V}_2^2. \quad (8.1.4)$$

Tételezzük fel egy R_c eredő (helyettesítő) ellenállás létezését, amelyre az jellemző, hogy



8.1.1. ábra

$$R_c (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)^2 = \Delta p. \quad (8.1.5)$$

Ebből

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \left(\frac{\Delta p}{R_c} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.1.6)$$

Ezzel írható, hogy

$$\left(\frac{\Delta p}{R_1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\Delta p}{R_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\Delta p}{R_c} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8.1.7)$$

amelyből a helyettesítő ellenállásra adódik:

$$\frac{1}{R_c^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{R_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{R_2^{\frac{1}{2}}}. \quad (8.1.8)$$

Közös betáplálási pontra illeszkedő vezetékszakaszok nem azonos végponttal

Tekintsünk két olyan párhuzamosan kötött vezetékszakaszt, amelyek kezdőpontjai azonos csomópontba illeszkednek, kimeneteik azonban nem azonosak, és a végponti nyomások sem azonosak (8.1.2./a) ábra).

Ez esetben az eredő ellenállás értéke az alábbiak szerint vezethető le:

Fennáll:

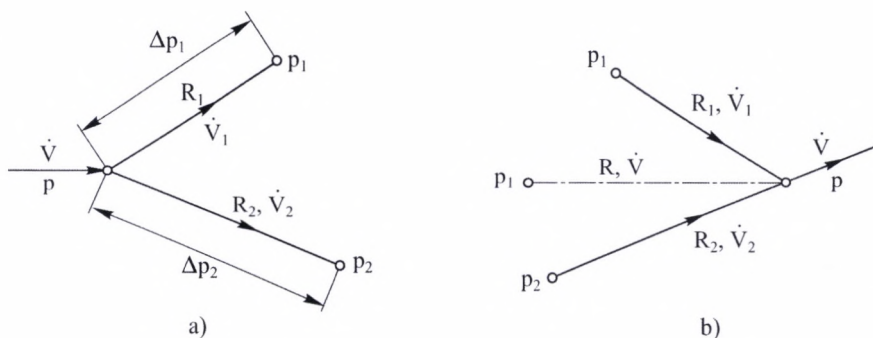
$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2. \quad (8.1.9)$$

Legyen az áramlás turbulens:

$$p = R_c \dot{V}^2. \quad (8.1.10)$$

Ezzel

$$\sqrt{\frac{p}{R_c}} = \sqrt{\frac{\Delta p_1}{R_1}} + \sqrt{\frac{\Delta p_2}{R_2}}. \quad (8.1.11)$$



8.1.2. ábra

Rendezés után:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{\left(\sqrt{R_1} \sqrt{\frac{\Delta p_2}{p}} + \sqrt{R_2} \sqrt{\frac{\Delta p_1}{p}} \right)^2}. \quad (8.1.12)$$

A két vezetékszakasz eredő ellenállása nem független a nyomásveszteségek nagyságától.

A helyettesítő ellenállásra levezethetünk képletet a betáplált szivattyúk munkák egyenlőségéből kiindulva:

$$R_e \dot{V}^3 = (p_1 + R_1 \dot{V}_1^2) \dot{V}_1 + (p_2 + R_2 \dot{V}_2^2) \dot{V}_2. \quad (8.1.13)$$

Ebből

$$R_e = \left[p_1 + R_1 \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}} \right)^2 \right] \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}} + \left[p_2 + R_2 \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}} \right), \quad (8.1.14)$$

vagy

$$R_e = \left[p_1 + R_1 \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}} \right)^2 \right] \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}} + \left[p_2 + R_2 \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}} \right). \quad (8.1.15)$$

Közös nyelőpontba folyó áramok esetén – 8.1.2.b. ábra – a helyettesítő ellenállás.

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{\left(\sqrt{R_1} \sqrt{\frac{p_2 - p}{p_1}} + \sqrt{R_2} \sqrt{1 - \frac{p}{p_1}} \right)^2}. \quad (8.1.16)$$

8.1.2. Sorba kötött vezetékszakaszok

Sorba kötött vezetékszakaszok azonos vízáramokkal

A teljes nyomásesés:

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2. \quad (8.1.17)$$

Mivel $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}$, ezért:

$$R_e \dot{V}^2 = R_1 \dot{V}^2 + R_2 \dot{V}^2. \quad (8.1.18)$$

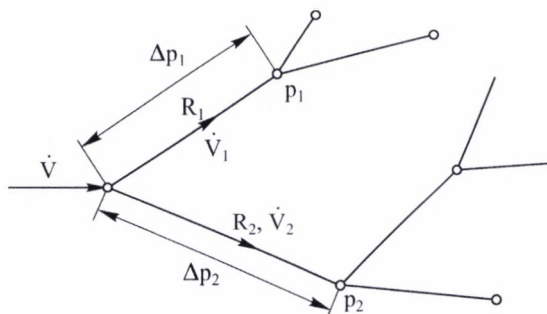
Így akkor a helyettesítő ellenállás:

$$R_e = R_1 + R_2. \quad (8.1.19)$$

Sorba kötött vezetékszakaszok eltérő vízáramokkal

A teljes nyomásesés:

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n. \quad (8.1.20)$$



8.1.3. ábra

Behelyettesítve a vízárámokat

$$R_c \cdot \dot{V}^2 = R_1 \cdot \dot{V}_1^2 + R_2 \cdot \dot{V}_2^2 + \dots + R_n \cdot \dot{V}_n^2. \quad (8.1.21)$$

Ebből

$$R_c = R_1 + R_2 \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}} \right)^2 + \dots + R_n \left(\frac{\dot{V}_n}{\dot{V}} \right)^2. \quad (8.1.22)$$

Tekintsünk olyan hálózatot, amelyben ismerjük két, azonos csomópontból kiinduló vezetékszakasz ellenállását, és ismerjük a nyomásokat a 8.1.3. ábra szerint.

A hálózat eredő ellenállása ez esetben is a (8.1.10) képlettel határozható meg.

Hálózat eredő ellenállása, ha csak a betáplálási pont nyomását és a belépő térfogatáramot ismerjük (8.1.3. ábra). Ha a belépési nyomás p , akkor a hálózat helyettesítő ellenállása

$$R_c = \frac{p}{\dot{V}^2}. \quad (8.1.23)$$

8.2. Az alapfeladatok megoldásai vízszintes fűtési hálózatokra

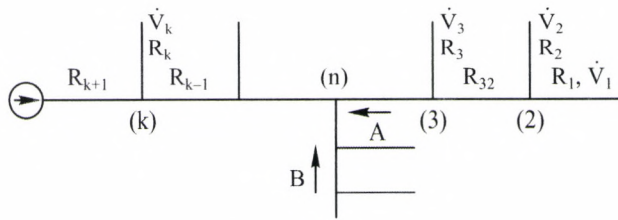
8.2.1. A nyomáskép, a szükséges fojtások és a betáplálási jellemzők – a szivattyúmunkapont – meghatározása előírt fogyasztási kép esetén

Adottak a fogyasztói térfogatáram-igények $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dots, \dot{V}_k$, és a vezetékszakaszok hidraulikai ellenállás-tényezői $R_1, R_2, R_{3,2}, \dots, R_{k,k-1}, R_k, R_{k+1}$.

A hidraulikai analízis lépései:

- meghatározzuk az 1. vezetékszakaszra a nyomásvesztést:

$$\Delta p_1 = R_1 \cdot \dot{V}_1^2; \quad (8.2.1)$$



8.2.1. ábra

- meghatározzuk a 2 vezetékszakra a nyomásvesztéseget:

$$\Delta p_2 = R_2 \cdot \dot{V}_2^2; \quad (8.2.2)$$

- megállapítjuk, hogy melyik nagyobb:

$$\Delta p_2 > \Delta p_1; \quad (8.2.3)$$

- az 1 vezetékszakason szükséges pótlólagos fojtás. mivel

$$(R_1 + x_1) \dot{V}_1^2 = R_2 \cdot \dot{V}_2^2, \quad (8.2.4)$$

ebből

$$x_1 = R_2 \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} \right)^2 - R_1; \quad (8.2.5)$$

- meghatározzuk a (3) csomópont nyomását:

$$p_3 = \Delta p_2 + R_{32} \cdot (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)^2; \quad (8.2.6)$$

- meghatározzuk a 3 vezetékszakra a nyomásvesztéseget:

$$\Delta p_3 = R_3 \cdot \dot{V}_3^2; \quad (8.2.7)$$

- meghatározzuk a 3 vezetékszakason szükséges fojtás nagyságát:

$$x_3 = \frac{p_3}{\dot{V}_3^2} - R_3; \quad (8.2.8)$$

- az eljárást folytatjuk a szivattyú felé haladva;
- a fenti eljárást elvégezzük a B gerincvezetékre is;
- az (n) csomópontban összehasonlítjuk az A és B irányokból számított nyomásigényt; a kisebb ellenállású gerincvezetéken a fogyasztói vezetékeket fojtanunk kell;
- a szivattyúhoz érve megkapjuk a $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dots$ összes fogyasztási térfogat-áram-igény áramoltatásához szükséges betáplálási nyomás értékét, Δp_{sz} .

A fojtások beállítását, a rendszer beszabályozását a hőközpontokban elhelyezett nyomáskülönbség-szabályozókkal, illetve térfogatáram-korlátozókkal végezzük el.

8.2.2. Adott betáplálási jellemzők esetén a térfogatáram-eloszlás és nyomáskép a hálózaton

Adottak a szakaszok hidraulikai ellenállás-tényezői: $R_1, R_2, R_{3,2}, \dots, R_{k,k-1}, R_k, R_{k+1}$, és a szivattyú jelleggörbéje. Határozzuk meg a hálózat eredő ellenállását!

Az (1) és (2) vezetékszakasz eredő ellenállása:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}. \quad (8.2.9)$$

Az (1) és (2) és a (3,2) vezetékszakasz eredő ellenállása:

$$R_{123} = R_{12} + R_{32}. \quad (8.2.10)$$

Az eljárást folytatjuk a (3) vezetékszakasz sorra vételével, amely párhuzamosan van kapcsolva az R_{123} eddig kiszámított helyettesítő ellenállással.

Az eljárást rekurzíve folytatjuk a szivattyúig.

A hálózat eredő ellenállása ismeretében

- ha adott $\dot{V}$, akkor a szükséges betáplálási nyomás (vagy nyomáskülönbség)

$$\Delta p = R_{1,2,3,\dots} \cdot \dot{V}^2, \quad (8.2.11)$$

- ha adott a betáplálási nyomás, akkor a betáplált térfogatáram

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{\Delta p}{R_{1,2,3,\dots}}}. \quad (8.2.12)$$

- ha a szivattyú jelleggörbéje adott, amely

$$\Delta p_{sz} = A\dot{V}^2 + B\dot{V} + C, \quad (8.2.13)$$

másrészt

$$\Delta p_{sz} = R_{1,2,3,\dots} \dot{V}^2, \quad (8.2.14)$$

akkor a betáplálható térfogatáram az

$$R_{1,2,3,\dots} \dot{V}^2 = A\dot{V}^2 + B\dot{V} + C \quad (8.2.15)$$

egyenlet megoldásával:

$$\dot{V} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(A - R_{1,2,3,\dots})C}}{2(A - R_{1,2,3,\dots})}. \quad (8.2.16)$$

Ennek a térfogatáramnak a betáplálásához szükséges nyomáskülönbség:

$$\Delta p_{sz} = A \dot{V}^2 + B \dot{V} + C. \quad (8.2.17)$$

A hálózaton a nyomás- és áramkép meghatározása az alábbiak szerint történik:

- a szivattyúnyomásból levonjuk az első szakasz nyomásvesztését, amely

$$\Delta p_{k+1} = R_{k+1} \cdot \dot{V}^2, \quad (8.2.18)$$

- a k csomópontban a nyomás:

$$\Delta p_k = \Delta p - \Delta p_{k+1}, \quad (8.2.19)$$

- a k vezetékszakaszon a térfogatáram:

$$\dot{V}_k = \sqrt{\frac{\Delta p_k}{R_k}}, \quad (8.2.20)$$

- a k-1 vezetékszakaszon a térfogatáram:

$$\dot{V}_{k-1} = \dot{V} - \dot{V}_k, \quad (8.2.21)$$

- a k-1 vezetékszakaszon a nyomásvesztés:

$$\Delta p_{k-1} = R_{k-1} \cdot \dot{V}_{k-1}^2, \quad (8.2.22)$$

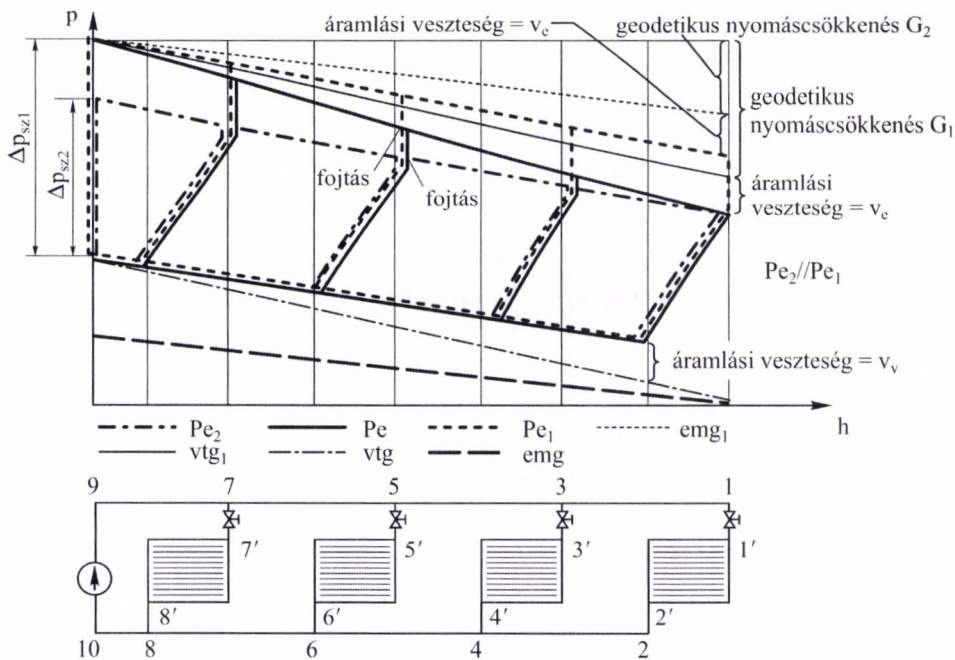
- az eljárást rekurzíve folytatjuk.

8.3. Függőleges elrendezésű kétcsöves központi fűtési hálózatok hidraulikai analízise

A hidraulikai analízis végrehajtása során figyelembe vesszük a gravitációs hatásokat, amelyek az előremenő és a visszatérő meleg víz eltérő sűrűségéből keletkeznek. A jelenséget a 8.3.1. ábrán mutatjuk be.

8.3.1. Az alapfeladat: előírt fogyasztásokhoz a nyomáskép, a szükséges fojtások és a szivattyúmunkapont meghatározása

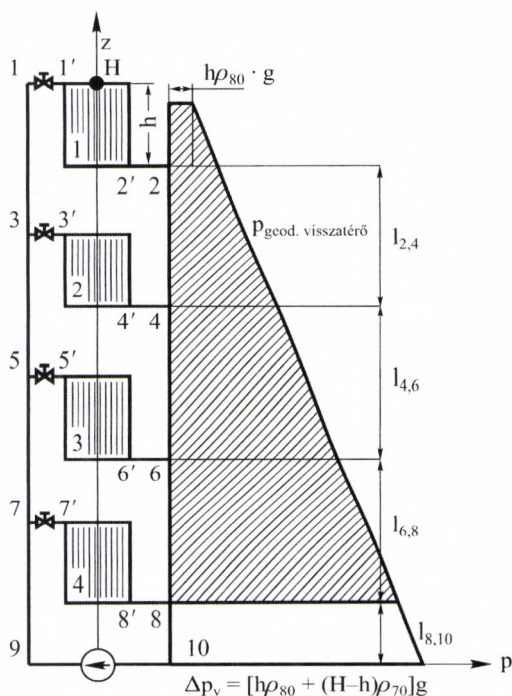
Az eljárást az ún. névleges állapotra konkrétan 90 °C előremenő és 70 °C visszatérő víz hőmérsékletek alapulvételével mutatjuk be. A radiátorok közepes hőmérsékletét 80 °C értékűnek tekintjük. Az alkalmazott eljárásnak az a lényege, hogy először meghatározzuk a fűtőtestek melegvíz térfogatáram-igényét, és ezt követően felépítjük a hálózat nyomásábráját a gravitációs hatások, a geodetikus nyomások figyelembevételével. Az eljárást a 8.3.1. ábra konkrét, 4 fűtőtestet tartalmazó függőleges elrendezésű kétvezetékes fűtési hálózatra mutatjuk be, a nyomásábrát a 8.3.1. ábra mutatja. A hálózat méreteit a 8.3.2. ábrán vázoltuk.



8.3.1. ábra. Központi fűtési hálózat nyomásábrái

Az ábrához tartozó jelmagyarázat a következő:

- G_1 a geodetikus nyomás csökkenése a visszatérő vezetéken, H-magasságon,
- G_2 a geodetikus nyomás csökkenése az előremenő vezetéken, H-magasságon,
- v_e áramlási veszteség az előremenő vezetéken,
- v_v áramlási veszteség a visszatérő vezetéken,
- emg = geodetikus nyomás az előremenő vezetékben,
- vtg = geodetikus nyomás a visszatérő vezetékben,
- $emg_1 \parallel emg$,
- $vtg_1 \parallel vtg$,
- p_e = előremenő nyomás az áramlási veszteség figyelembevételével és a geodetikus nyomáscsökkenés figyelmen kívül hagyásával,
- p_{e_1} = előremenő nyomás az áramlási veszteség és a geodetikus nyomáscsökkenés figyelembevételével,
- p_{e_2} = csökkentett előremenő nyomás a gravitációs felhajtóerő figyelembevételekor,
- Δp_{SZ1} = a szivattyú emelőmagassága a gravitációs felhajtóerő figyelembevétele nélkül,



8.3.2. ábra. Központi fűtési hálózat elrendezése, méretei és a visszatérő vezeték nyomásábrája

Δp_{SZ2} = a szivattyú emelőmagassága a gravitációs felhajtóerő figyelembevételkor,
 $\Delta p_{SZ2} = \Delta p_{SZ1} - (G_1 - G_2)$.

A feladatban adottak a $\dot{Q}_i$ hőigények, az l_{jk} vezeték hosszúságok, a radiátorok $\Delta p_{rad,i}$ nyomásveszteségei, a d_{jk} vezetékátmérők, a csőúrlódási tényezők, a keringetett meleg víz jellemzői és egyéb geometriai jellemzők.

A nyomások meghatározásának algoritmusa

- A szivattyú előtt a nyomás:

$$p_{10} = [h \rho_{80} + (H - h) \rho_{70}] g. \quad (8.3.1)$$

- A radiátorokban a tömegáram:

$$\dot{m}_1 \dots \dot{m}_4 = \frac{\dot{Q}_i}{c \Delta t}, \quad \dot{V}_1 \dots \dot{V}_4 = \frac{\dot{m}_i}{\rho_{80}}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (8.3.2)$$

- A szükséges nyomások a radiátorok visszatérő ágvezetékének és a visszatérő felszálló vezeték csomópontjaiban:

$$p_8 = p_{10} + l_{8,10} \Delta p'_{8,10} - l_{8,10} \rho_{70} g, \quad (8.3.3)$$

$$\Delta p'_{8,10} = \frac{\lambda_{8,10}}{d_{8,10}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_{8,10}}{A_{8,10}} \right)^2, \quad (8.3.4)$$

$$p_6 = p_8 + l_{6,8} \Delta p'_{6,8} - l_{6,8} \rho_{70} g, \quad (8.3.5)$$

$$\Delta p'_{6,8} = \frac{\lambda_{6,8}}{d_{6,8}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_{6,8}}{A_{6,8}} \right)^2, \quad (8.3.6)$$

$$p_4 = p_6 + l_{4,6} \Delta p'_{4,6} - l_{4,6} \rho_{70} g, \quad (8.3.7)$$

$$\Delta p'_{4,6} = \frac{\lambda_{4,6}}{d_{4,6}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_{4,6}}{A_{4,6}} \right)^2, \quad (8.3.8)$$

$$p_2 = p_4 + l_{2,4} \Delta p'_{2,4} - l_{2,4} \rho_{70} g, \quad (8.3.9)$$

$$\Delta p'_{2,4} = \frac{\lambda_{2,4}}{d_{2,4}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_{2,4}}{A_{2,4}} \right)^2. \quad (8.3.10)$$

- Nyomások a radiátorok kimenő csőszakaszain:

$$p_{8'} = p_8 + l_{8,8'} \Delta p_{8,8'}, \quad (8.3.11)$$

$$\Delta p'_{8,8'} = \frac{\lambda_{8,8'}}{d_{8,8'}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_4}{A_{8,8'}} \right)^2, \quad (8.3.12)$$

$$p_{6'} = p_6 + l_{6,6'} \Delta p_{6,6'}, \quad (8.3.13)$$

$$\Delta p'_{6,6'} = \frac{\lambda_{6,6'}}{d_{6,6'}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_3}{A_{6,6'}} \right)^2, \quad (8.3.14)$$

$$p_{4'} = p_4 + l_{4,4'} \Delta p_{4,4'}, \quad (8.3.15)$$

$$\Delta p'_{4,4'} = \frac{\lambda_{4,4'}}{d_{4,4'}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_2}{A_{4,4'}} \right)^2, \quad (8.3.16)$$

$$p_{2'} = p_2 + l_{2,2'} \Delta p_{2,2'}, \quad (8.3.17)$$

$$\Delta p'_{2,2'} = \frac{\lambda_{2,2'}}{d_{2,2'}} \frac{\rho_{70}}{2} \left(\frac{\dot{V}_1}{A_{2,2'}} \right)^2. \quad (8.3.18)$$

- Nyomások a radiátorok bemenő csomópontjain:

$$p_{7'} = p_{8'} + \Delta p_{\text{rad},4} + \text{hg}\rho_{80}, \quad (8.3.19)$$

$$p_{5'} = p_{6'} + \Delta p_{\text{rad},3} + \text{hg}\rho_{80}, \quad (8.3.20)$$

$$p_{3'} = p_{4'} + \Delta p_{\text{rad},2} + \text{hg}\rho_{80}, \quad (8.3.21)$$

$$p_{1'} = p_2 + \Delta p_{\text{rad},1} + \text{hg}\rho_{80}. \quad (8.3.22)$$

- Nyomások a radiátorok bekötővezetékein, a felszálló vezeték és a bekötővezeték csomópontjaiban:

Előállítjuk az előremenő vezetékben az 1, 3, 5, 7, 9 jelű pontokban szükséges nyomások görbéjét. A 9 jelű pontból induló görbe 1 jelű pontban felvett értékét úgy kapjuk, hogy

$$p_1 = p_9 - H\rho_{90}g - (l_{7,9}\Delta p'_{7,9} + l_{8,7}\Delta p'_{8,7} + l_{3,5} - \Delta p'_{3,5} + R_{1,3}\Delta p'_{1,3}). \quad (8.3.23)$$

A tetszőleges értékű p_9 pontra fektetett fenti görbét eltoljuk önmagával párhuzamosan és közelítjük az ismert $p_{7'}$, $p_{5'}$, $p_{3'}$, $p_{1'}$ értékekhez. A görbe vagy a $p_{7'}$ -re vagy a $p_{1'}$ -re illeszkedik. A többi pontban a szükséges nyomások kisebbek, mint a rendelkezésre álló nyomások, ezért azokon a helyeken a szabályozó szelepeken fojtani kell. A 8.3.1. ábra szerint az előremenő vezetékben a rendelkezésre álló nyomások görbéje p_{e_1} az 1 jelű pontra illeszkedik.

Az (1) pont nyomása:

$$p_1 \cong p_{1'}, \quad (8.3.24)$$

fojtás nélkül, elhanyagolva a súrlódási nyomásvesztést.

A nyomásábra további pontjai a felszállóvezetéken:

$$p_3 = p_1 + \rho_{90} g l_{1,3} + l_{1,3} \Delta p'_{1,3}, \quad (8.3.25)$$

$$\Delta p'_{1,3} = \lambda_{1,3} \frac{\rho_{90}}{2} \frac{1}{d_{1,3}} \left(\frac{\dot{V}_{1,3}}{A_{1,3}} \right)^2. \quad (8.3.26)$$

$$p_5 = p_3 + \rho_{90} g l_{3,5} + l_{3,5} \Delta p'_{3,5}, \quad (8.3.27)$$

$$\Delta p'_{3,5} = \lambda_{3,5} \frac{\rho_{90}}{2} \frac{1}{d_{3,5}} \left(\frac{\dot{V}_{3,5}}{A_{3,5}} \right)^2. \quad (8.3.28)$$

$$p_7 = p_5 + \rho_{90} g l_{5,7} + l_{5,7} \Delta p'_{5,7}, \quad (8.3.29)$$

$$\Delta p'_{5,7} = \lambda_{5,7} \frac{\rho_{90}}{2} \frac{1}{d_{5,7}} \left(\frac{\dot{V}_{5,7}}{A_{5,7}} \right)^2. \quad (8.3.30)$$

A szivattyú nyomócsonkján:

$$p_9 = p_7 + \rho_{90} g l_{7,9} + l_{7,9} \Delta p'_{7,9} . \quad (8.3.31)$$

$$\Delta p'_{7,9} = \lambda \frac{\rho_{90}}{d_{7,9}} \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{V}_{7,9}}{A_{7,9}} \right)^2 . \quad (8.3.32)$$

A szükséges szivattyú-emelőmagasság:

$$\Delta p_{sziv} = p_9 - p_{10} . \quad (8.3.33)$$

- A szükséges fojtások:

Az (1) radiátor előtt:

$$\Delta p_{1,1} = p_1 - p_{1'} = 0 . \quad (8.3.34)$$

A (2) radiátor előtt:

$$\Delta p_{3,3'} = p_3 - p_{3'} , \quad R_{3,3'} = \frac{\Delta p_{3,3'}}{\dot{V}_2^2} . \quad (8.3.35)$$

A (3) radiátor előtt:

$$\Delta p_{5,5'} = p_5 - p_{5'} , \quad R_{5,5'} = \frac{\Delta p_{5,5'}}{\dot{V}_3^2} . \quad (8.3.36)$$

A (4) radiátor előtt:

$$\Delta p_{7,7'} = p_7 - p_{7'} , \quad R_{7,7'} = \frac{\Delta p_{7,7'}}{\dot{V}_4^2} . \quad (8.3.37)$$

8.3.2. Az inverz feladat: ismert szivattyú-jelleggörbe esetén a kialakuló áram- és nyomáskép meghatározása

A feladatban adottak a hálózat geometriai jellemzői, amelyekkel a szakaszok hidraulikai ellenállás tényezői (R_i) kiszámíthatók, adottak a szabályozószelepek beállításai, $R_{i,i'}$. Ismerjük továbbá a szivattyú emelőmagasságát (Δp_{sziv}), vagy a szivattyú jelleggörbáját, amely

$$\Delta p = A \dot{V}^2 + B \dot{V} + C . \quad (8.3.38)$$

Meghatározandók a radiátorokban a térfogatáramok ($\dot{V}_i$)!

Adott a szivattyú emelőmagassága Δp_{sziv}

A feladat megoldásához fel kell írunk a csomóponti és hurokegyenletek rendszerét!

A csomóponti egyenletek

A (3) csomópontra:

$$\dot{m}_{5,3} - \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = 0 . \quad (8.3.39)$$

Az (5) csomópontra:

$$\dot{m}_{7,5} - \dot{m}_3 - \dot{m}_{53} = 0. \quad (8.3.40)$$

A (7) csomópontra:

$$\dot{m}_{9,7} - \dot{m}_4 - \dot{m}_{75} = 0. \quad (8.3.41)$$

A hurokegyenletek

Az (1) hurokra:

$$p_4 = p_3 - l_{1,3} \rho_{90} g + h \rho_{80} g + l_{2,4} \rho_{70} g - \Delta p_{1,3} - \Delta p_{1,1'} - \Delta p_{1, \text{rad}} - \Delta p_{2',2} - \Delta p_{2,4}, \quad (8.3.42)$$

$$p_4 = p_3 + h \rho_{80} g - \Delta p_{3,3'} - \Delta p_{2, \text{rad}} - \Delta p_{4',4}. \quad (8.3.43)$$

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$h \rho_{80} g - \Delta p_{3,3'} - \Delta p_{2, \text{rad}} - \Delta p_{4',4} + l_{1,3} \rho_{90} g - h \rho_{80} g - l_{2,4} \rho_{70} g + \Delta p_{1,3} + \Delta p_{1,1'} + \Delta p_{1, \text{rad}} + \Delta p_{2',2} + \Delta p_{2,4} = 0. \quad (8.3.44)$$

Az összevonások után, feltételezve, hogy $l_{1,3} \approx l_{2,4}$:

$$-\Delta p_{3,3'} - \Delta p_{2, \text{rad}} - \Delta p_{4',4} + l_{1,3} (\rho_{90} - \rho_{70}) g + \Delta p_{1,3} + \Delta p_{1,1'} + \Delta p_{1, \text{rad}} + \Delta p_{2',2} + \Delta p_{2,4} = 0. \quad (8.3.45)$$

A (2) hurokra:

$$p_6 = p_5 - l_{3,5} \rho_{90} g + l_{4,6} \rho_{70} g + h \rho_{80} g - \Delta p_{3,5} - \Delta p_{3,3'} - \Delta p_{2, \text{rad}} - \Delta p_{4',4} - \Delta p_{4,6}, \quad (8.3.46)$$

$$p_6 = p_5 + h \rho_{80} g - \Delta p_{5,5'} - \Delta p_{3, \text{rad}} - \Delta p_{6',6}. \quad (8.3.47)$$

A két egyenletet egymásból kivonva és rendezve:

$$-\Delta p_{5,5'} - \Delta p_{3, \text{rad}} - \Delta p_{6',6} + l_{3,5} (\rho_{90} - \rho_{70}) g + \Delta p_{3,5} + \Delta p_{3,3'} + \Delta p_{2, \text{rad}} + \Delta p_{4',4} + \Delta p_{4,6} = 0. \quad (8.3.48)$$

A (3) hurokra:

$$p_8 = p_7 - l_{5,7} \rho_{90} g + l_{6,8} \rho_{70} g + h \rho_{80} g - \Delta p_{5,7} - \Delta p_{5,5'} - \Delta p_{3, \text{rad}} - \Delta p_{6,6'} - \Delta p_{6,8}, \quad (8.3.49)$$

$$p_8 = p_7 - \Delta p_{7',7} - \Delta p_{4, \text{rad}} - \Delta p_{8,8'} + h \rho_{80} g. \quad (8.3.50)$$

A két egyenletet egymásból kivonva és rendezve:

$$-\Delta p_{7',7} - \Delta p_{4, \text{rad}} - \Delta p_{8,8'} + l_{5,7} (\rho_{90} - \rho_{70}) g + \Delta p_{5,7} + \Delta p_{5,5'} + \Delta p_{3, \text{rad}} + \Delta p_{6,6'} + \Delta p_{6,8} = 0. \quad (8.3.51)$$

A (4) hurokra:

$$p_{10} = p_9 - l_{7,9} \rho_{90} g - \Delta p_{7,9} - \Delta p_{7',7} - \Delta p_{\text{rad}, 4} - \Delta p_{8,8'} - \Delta p_{8,10} + h \rho_{80} g + l_{8,10} \rho_{70} g, \quad (8.3.52)$$

$$p_{10} = p_9 - \Delta p_{\text{sziv}}. \quad (8.3.53)$$

A két egyenletet egymásból kivonva és rendezve:

$$-\Delta p_{\text{sziv}} + (l_{7,9} \rho_{90} - l_{8,10} \rho_{70}) g + h \rho_{80} g + \Delta p_{7,9} + \Delta p_{8,10} + \Delta p_{4, \text{rad}} + \Delta p_{7',7} + \Delta p_{8,8'} = 0. \quad (8.3.54)$$

Az egyenletekben ismeretlen az $\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3, \dot{m}_4$.

Az $\dot{m}_{9,7}$ a radiátorok igényeinek összegével egyenlő:

$$\dot{m}_{9,7} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \dot{m}_4. \quad (8.3.55)$$

Az ismeretlenek meghatározására a hurokegyenletek használhatók fel oly módon, hogy mindegyik Δp helyébe a

$$\Delta p = R \dot{V}^2 \quad (8.3.56)$$

kifejezést helyettesítjük. Ha feltesszük, hogy $l_{1,3} = l_{2,4}, l_{3,5} = l_{4,6}, l_{5,7} = l_{6,8}$, a megoldandó egyenletrendszer az alábbiak szerint alakul:

$$-R_{3,3'} \dot{V}_2^2 - R_{2, \text{rad}} \dot{V}_2^2 - R_{4',4} \dot{V}_2^2 + l_{1,3} (\rho_{90} - \rho_{70}) g + R_{1,3} \dot{V}_1^2 + R_{1',1} \dot{V}_1^2 + R_{1, \text{rad}} \dot{V}_1^2 + R_{2',2} \dot{V}_1^2 + R_{2,4} \dot{V}_1^2 = 0, \quad (8.3.57)$$

$$-R_{5,5'} \dot{V}_3^2 - R_{3, \text{rad}} \dot{V}_3^2 - R_{6',6} \dot{V}_3^2 + l_{3,5} (\rho_{90} - \rho_{70}) g + R_{3,5} (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)^2 + R_{3,3'} \dot{V}_2^2 + R_{2, \text{rad}} \dot{V}_2^2 + R_{4',4} \dot{V}_2^2 + R_{4,6} (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)^2 = 0, \quad (8.3.58)$$

$$-R_{7',7} \dot{V}_4^2 - R_{4, \text{rad}} \dot{V}_4^2 - R_{8,8'} \dot{V}_4^2 + l_{5,7} (\rho_{90} - \rho_{70}) g +$$

$$\begin{aligned}
& +R_{5,7} (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)^2 + R_{5,5'} \dot{V}_3^2 + R_{3, \text{rad}} \dot{V}_3^2 + R_{6,6'} \dot{V}_3^2 + \\
& +R_{6,8} (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)^2 = 0,
\end{aligned} \tag{8.3.59}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta p_{\text{sziv}} + (l_{7,9} \rho_{90} - l_{8,10} \rho_{70}) g - h \rho_{80} g + \\
& +R_{7,9} (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4)^2 + R_{8,10} (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4)^2 + \\
& +R_{7,7'} \dot{V}_4^2 + R_{4, \text{rad}} \dot{V}_4^2 + R_{8,8'} \dot{V}_4^2 = 0
\end{aligned} \tag{8.3.60}$$

További összevonásokkal:

$$\begin{aligned}
& - (R_{3,3'} + R_{2, \text{rad}} + R_{4,4'}) \dot{V}_2^2 + \\
& + (R_{1,3} + R_{1',1} + R_{1, \text{rad}} + R_{2',2} + R_{2,4}) \dot{V}_1^2 + \\
& + l_{1,3} (\rho_{90} - \rho_{70}) g = 0,
\end{aligned} \tag{8.3.61}$$

$$\begin{aligned}
& - (R_{5,5'} + R_{3, \text{rad}} + R_{6,6'}) \dot{V}_3^2 + (R_{3,5} + R_{4,6}) (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)^2 + \\
& + (R_{3,3'} + R_{2, \text{rad}} + R_{4',4}) \dot{V}_2^2 + l_{3,5} (\rho_{90} - \rho_{70}) g = 0,
\end{aligned} \tag{8.3.62}$$

$$\begin{aligned}
& - (R_{7',7} + R_{4, \text{rad}} + R_{8',8}) \dot{V}_4^2 + (R_{5,7} + R_{6,8}) (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)^2 + \\
& + (R_{5',5} + R_{3, \text{rad}} + R_{6',6}) \dot{V}_3^2 + l_{5,7} (\rho_{90} - \rho_{70}) g = 0,
\end{aligned} \tag{8.3.63}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta p_{\text{sziv}} + (R_{7,9} + R_{8,10}) (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)^2 + \\
& + (R_{7',7} + R_{4, \text{rad}} + R_{8',8}) \dot{V}_4^2 + \\
& + (l_{7,9} \rho_{90} - l_{8,10} \rho_{70}) g - h \rho_{80} g = 0.
\end{aligned} \tag{8.3.64}$$

A nemlineáris egyenletrendszerben ismeretlenek a térfogatáramok, tehát: $\dot{V}_1$, $\dot{V}_2$, $\dot{V}_3$, $\dot{V}_4$, ismert minden ellenállás-tényező: a vezetékszakaszok $R_{i,j}$ ellenállás-tényezői, a radiátorok $R_{j, \text{rad}}$ ellenállás-tényezői, a fojtási tényezők $R_{i'j}$ és a szivattyú emelőmagassága Δp_{sziv} .

A nemlineáris egyenletrendszer pl. sorozatos közelítéssel oldható meg. Felvesszük $\dot{V}_1$ értékét, ez után a (8.3.61), (8.3.62), és (8.3.63) egyenletekkel meg tudjuk határozni a $\dot{V}_2$, $\dot{V}_3$ és $\dot{V}_4$ értékét. Ezeket az értékeket behelyettesítjük a

(8.3.64), egyenletbe, és ellenőrizzük az egyenlőség teljesülését. Ha az egyenlőség nem teljesül, $\dot{V}_1$ értékének módosításával az eljárást megismételjük.

A fenti egyenletrendszer segítségével vizsgálható az alapprobléma is. Ha adott, illetve előírt $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$ és $\dot{V}_4$, akkor meghatározható a keringetéshez szükséges szivattyú-emelőmagasság, a hálózat nyomásképe, és a szükséges fojtások.

Adjuk össze a (8.3.61)...(8.3.64) egyenleteket, majd rendezés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{sziv}} = & (l_{7,9} + l_{5,7} + l_{3,5} + l_{1,3}) \rho_{90} g + (R_{7,9} + R_{8,10}) (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4)^2 + \\ & + (R_{5,7} + R_{6,8}) (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)^2 + (R_{3,5} + R_{4,6}) (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)^2 + \\ & + (R_{1,3} + R_{1',1} + R_{1,\text{rad}} + R_{2',2} + R_{2,4}) \dot{V}_1^2 - \\ & - (l_{2,4} + l_{4,6} + l_{6,8} + l_{8,10}) \rho_{70} g - h \rho_{80} g. \end{aligned} \quad (8.3.65)$$

A ((8.3.65) egyenlet segítségével tehát kiszámíthatjuk a szükséges szivattyú-emelőmagasságot. Ismert $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$ és $\dot{V}_4$, igények esetén a gravitációs felhajtóerők:

$$\Delta p_{\text{grav}} = \left[(l_{7,9} + l_{5,7} + l_{3,5} + l_{1,3}) \rho_{90} - (l_{2,4} + l_{4,6} + l_{8,10}) \rho_{70} - h \rho_{80} \right] g.$$

Ezután a szükséges fojtások kiszámítása következik.

Visszatérünk a (8.3.61)...(8.3.64) egyenletek rendszerére, és azokból kiszámítjuk az $R_{7,7'}$, $R_{5,5'}$, $R_{3,3'}$, és $R_{1,1'}$ fojtási tényezőket. Ezután már felépíthető a nyomásábra a következőképpen:

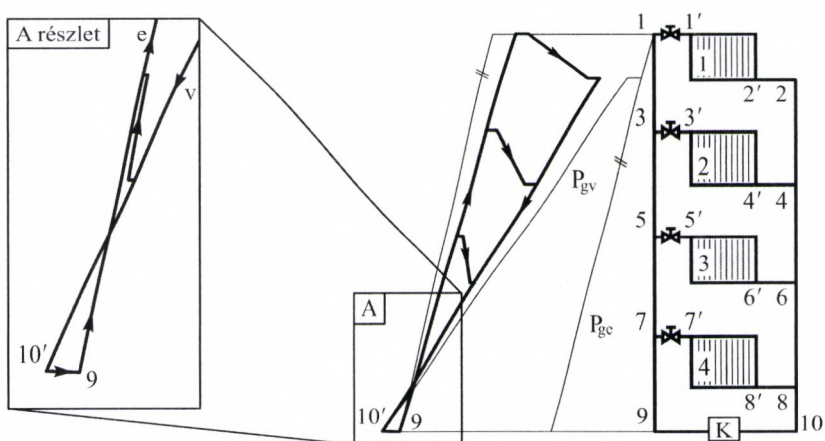
A szivattyú előtti nyomás p_{10} meghatározható a (8.3.1) képlettel. A visszatérő vezetéken a p_8, p_6, p_4, p_2 nyomásértékeket a (8.3.2)...(8.3.10) képletekkel, a radiátorok kimenő csomópontjain, illetve a radiátorok bemenő csomópontjain a nyomások értékeit a (8.3.11)...(8.3.22) képletekkel számolhatjuk ki. Az előremenő vezetéken a p_7, p_5, p_3, p_1 nyomások értékei a (8.3.50), (8.3.47), (8.3.43) és (8.3.42) egyenletekből állapíthatók meg. Ezekben az egyenletekben szereplő fojtási nyomásvesztések értékeit – $\Delta p_{7,7'}$, $\Delta p_{5,5'}$, $\Delta p_{3,3'}$, $\Delta p_{1,1'}$ – az $R_{7,7'}$, $R_{5,5'}$, $R_{3,3'}$, és $R_{1,1'}$ fojtási tényezők segítségével határozhatjuk meg.

Adott a szivattyú jelleggörbéje: $\Delta p = A \dot{V}^2 + B \dot{V} + C$.

A megoldáshoz a (8.3.64) egyenletbe behelyettesítjük a Δp_{sziv} -tag helyébe a

$$\Delta p_{\text{sziv}} = A (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4)^2 + B (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4) + C$$

kifejezést!



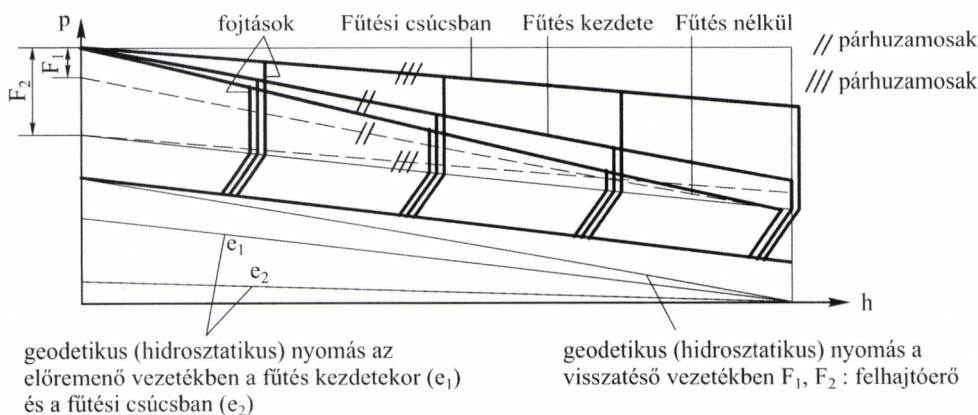
8.3.3. ábra. Nyomásábra központi fűtési hálózaton

Az eljárás a továbbiakban hasonló. Felvesszük $\dot{V}_1$ értékét, majd a (18.2.61), (8.3.62) és (8.3.63) egyenletekkel meghatározzuk $\dot{V}_2$, $\dot{V}_3$ és $\dot{V}_4$ értéket.

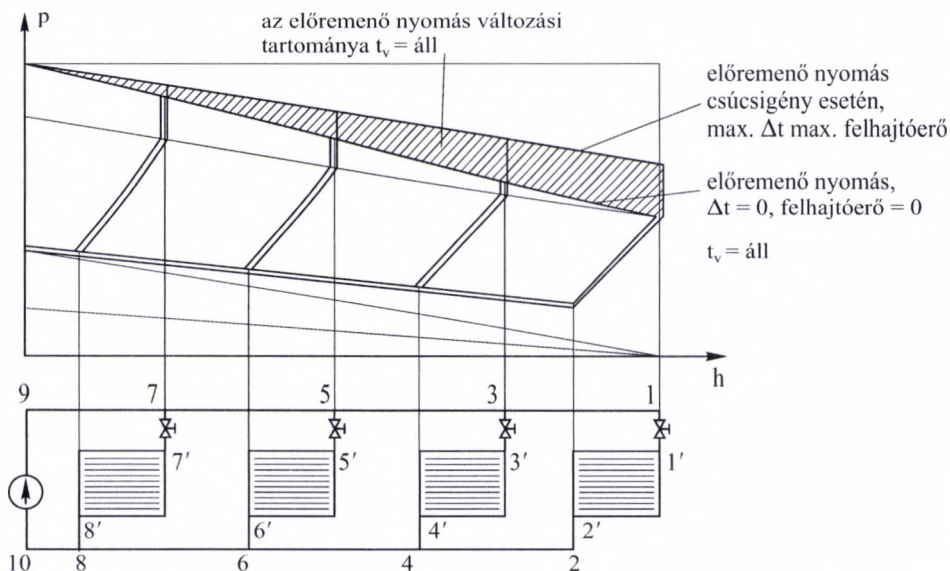
Ezeket a (8.3.64) egyenletbe behelyettesítjük, és ellenőrizzük az egyenlőség teljesülését. Ha az egyenlőség nem teljesül, $\dot{V}_1$ értékét módosítjuk, és az eljárást a kívánt pontosság eléréséig folytatjuk.

Gravitációs hatások, a felhajtóerő elemzése

A tisztán gravitációs hatások alapján megvalósuló áramlást és nyomsképet a 8.3.3. ábra mutatja. Látható, hogy a legalsó szinten a radiátorban megfordulhat az áramlás. Az áramlás instabil. Gravitációs elven, többszintes épületekben fűtés – kellő stabilitással – nem valósítható meg.



8.3.4. ábra. Nyomásábra központi fűtési hálózaton



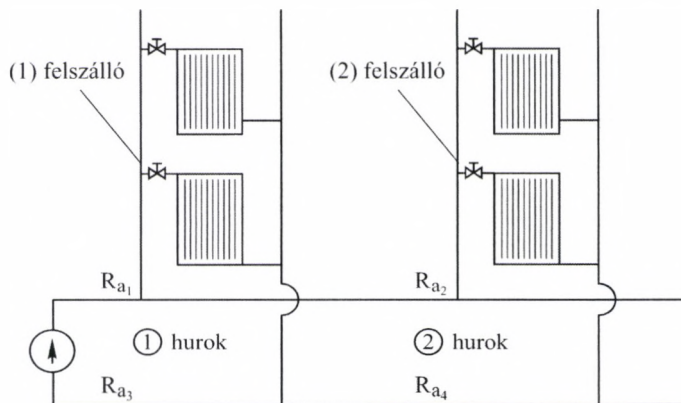
8.3.5. ábra. Nyomásábra központi fűtési hálózaton

Gravitációs hatások, a felhajtóerő befolyása szivattyús fűtéseken

A 8.3.4. és 8.3.5. ábrában bemutatjuk a hálózat nyomásábráját az előremenő és visszatérő vezetékben azonos hőmérsékletű víz keringetése esetére, illetve a fűtési időszak különböző munkapontjaira – a fűtési időszak kezdete és csúcsidőszak – állandó vízmennyiség keringetésével. Látható, hogy fűtés nélkül, az alsó szinteken kell a fűtőtestek előtt a fojtásokat beállítanunk, a legfelső szinten fojtás nélküli állapotot terveztünk. A fűtési időszakban és fűtési csúcsban a rendszer "elszabályozódik", illetve a rendszert újra kell szabályoznunk. A nyomásábra szét-tartóvá válhat, a felső szinteken nagyobb mértékű fojtást kell alkalmaznunk, mint az alsó szinteken. A gravitációs hatások jelentőssé válhatnak, amit a fojtásokkal kell kompenzálnunk, hogy az előírt fűtővíz-eloszlás ne változzék. Ha a gravitációs hatást a szivattyú-kiválasztásnál figyelembe akarjuk venni, akkor azt a legkisebb gravitációs hatás figyelembevételével tegyük, tehát a fűtés kezdeti időszakában fennálló előremenő és visszatérő vízhőmérséklet alapulvételével. Ellenkező esetben ellátási zavarok mutatkozhatnak.

8.3.3. Tetszőleges számú felszálló vezetékpárt tartalmazó fűtési hálózatok hidraulikai analízise

Adottak, előírtak a fogyasztási igények ($\dot{V}_i$), és a vezetékszszakaszok hidraulikai ellenállás-tényezői, keressük a szivattyú szükséges munkapont jellemzőit!



8.3.6. ábra. Több felszálló vezetékpárt tartalmazó fűtési hálózat

Mindegyik felszálló vezetékpáron a (8.3.65) egyenlettel meghatározzuk $\Delta p_{sziv} \equiv \Delta p_1$, $\Delta p_{sziv} \equiv \Delta p_2$, stb. behelyettesítéssel a felszálló vezetékpárok talpontián szükséges nyomáskülönbségeket (8.3.6. ábra).

Ezt követően visszatérünk a (8.3.61)...(8.3.64) egyenletek rendszerére, és azokból kiszámítjuk az $R_{7,7'}$, $R_{5,5'}$, $R_{3,3'}$, és $R_{1,1'}$ fojtási tényezőket, ezek ismeretében a (8.3.42) és (8.3.53) egyenletek segítségével felépíthető a nyomásábra, meghatározhatók a hálózat különböző pontjaiban szükséges nyomások értékei.

Ezután a szivattyú munkapontjának meghatározása a vízszintes hálózatok hidraulikai analízisének módszerével végezhető.

Adott a szivattyú jelleggörbéje: $\Delta p = AV^2 + BV + C$, keressük a radiátorokba jutó térfogatáramokat

Mind az 1, mind a 2 stb. felszálló vezetékparra felírjuk a (8.3.61) ... (8.3.64) egyenletrendszerrel azzal a módosítással, hogy a (8.3.64) egyenletet bővítjük az R_{a1} , R_{a2} , R_{a3} és R_{a4} alapvezetékekre jutó nyomásveszteségekkel. A (8.3.64) egyenlet helyett annyi egyenletet kell felírnunk, ahány felszálló vezetékpárt tartalmaz a fűtési hálózat.

A teljes egyenletrendszer az alábbiak szerint írható fel:

- az (1) felszálló vezetékparra a hurokegyenletek rendszere a (8.3.61)...(8.3.64) egyenletek szerint;
- a (2) felszálló vezetékparra a hurokegyenletek rendszere a (8.3.61)...(8.3.64) egyenletek szerint;
- az 1. hurokra a hurokegyenlet:

$$\begin{aligned}
 & -A(\dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} + \dot{V}_{13} + \dot{V}_{14} + \dots)^2 - B(\dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} + \dot{V}_{13} + \dot{V}_{14} + \dots) + \\
 & + (R_{a1} + R_{a2})(\dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} + \dot{V}_{13} + \dot{V}_{14} + \dots)^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (R_{7,9} + R_{8,10}) (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)^2 + \\
& + (R_{7',7} + R_{4,\text{rad}} + R_{8',8}) \dot{V}_4^2 + \\
& + (l_{7,9} \rho_{90} - l_{8,10} \rho_{70}) g - h \rho_{80} g = 0.
\end{aligned} \tag{8.3.66}$$

- a 2. hurokra a hurokegyenlet:

$$\begin{aligned}
& -A(\dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} + \dot{V}_{13} + \dot{V}_{14} + \dots)^2 - B(\dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} + \dot{V}_{13} + \dot{V}_{14} + \dots) + \\
& + (R_{a_1} + R_{a_2})(\dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} + \dot{V}_{13} + \dot{V}_{14} + \dots)^2 + \\
& + (R_{a_3} + R_{a_4})(\dot{V}_{21} + \dot{V}_{22} + \dot{V}_{23} + \dot{V}_{24})^2 + \\
& + (R_{7,9} + R_{8,10}) + (\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4)^2 + \\
& + (R_{7',7} + R_{4,\text{rad}} + R_{8',8}) \dot{V}_4^2 + (l_{7,9} \rho_{90} - l_{8,10} \rho_{70}) g - h \rho_{80} g = 0.
\end{aligned} \tag{8.3.67}$$

Az egyenletrendszer a többi felszálló vezetékpár szerint bővíthető.

A kapott nemlineáris egyenletrendszer pl. sorozatos közelítéssel oldható meg. Felvesszük $\dot{V}_{1,1}$ és $\dot{V}_{2,1}$ értékét, ez után a (8.3.59), (8.3.60), és (8.3.63) egyenletekkel meg tudjuk határozni a $\dot{V}_{1,2}$, $\dot{V}_{1,3}$, $\dot{V}_{1,4}$, $\dot{V}_{2,2}$, $\dot{V}_{2,3}$, és $\dot{V}_{2,4}$ értékét. Ezeket az értékeket behelyettesítjük a (8.3.66) és (8.3.67) egyenletekbe, és ellenőrizzük az egyenlőségek teljesülését. Ha az egyenlőségek nem teljesülnek, $\dot{V}_{1,1}$ és $\dot{V}_{2,1}$ értékének módosításával az eljárást megismétljük és a kívánt pontossáig folytatjuk.

8.4. Fűtési hálózatok ismeretlen ellenállásainak identifikációja

Az eljárást elsősorban távfűtési hálózatokra alkalmazhatjuk, de épületek belső fűtési hálózatai esetében is eredményes lehet.

Kiterjedt hálózattal rendelkező csővezeték-rendszerek legsúlyosabb problémái közé tartozik egyrészt a hálózatfejlesztés kérdése, vagyis annak eldöntése, hogy a hálózat valamely pontjára ráköthetők-e újabb fogyasztók (és nem adódnak-e ezáltal ellátási zavarok), másrészt a valóságos nyomásviszonyok meghatározása, amely részben az előző kérdés tisztázása, de más okból is, például a mechanikusan keltett nyomáshullámok tranziens viszonyait megelőző állapot, valamint a tranziens viszonyok között fellépő csillapítás számítása miatt szükséges.

A hálózatfejlesztés problémájának különösen a kiterhelés határára jutott rendszerek esetén van jelentősége. Az esetleges tartalékok feltárása azt eredményezhetné, hogy a későbbi időszakban jelentkező ellátási feladatok nem jelentéktelen hányada új beruházások nélkül volna megvalósítható.

Az elméleti számítások szerint az áramlási kép – ismert módon, a hálózatrészek ellenállás-tényezőinek, valamint a Kirchhoff-törvények felhasználásával – a nyomásvesztéseket kifejező hidraulikai egyenletekkel és a csomóponti térfogat-áram-mérleggel írható le és határozható meg.

Valamely hálózatrész ellenállás-tényezője:

$$R = \frac{\Delta p}{\dot{V}^2} . \quad (8.4.1)$$

Az ellenállás-tényező a hálózatrész geometriai és anyagi-műszaki jellemzői segítségével is kifejezhető. Amennyiben a kérdéses hálózatrész pl. egy vezeték-szakasz, akkor az ellenállás-tényező:

$$R = \left(\lambda \frac{l}{d_B} + \zeta \right) \frac{8\rho_F}{d_B^4 \pi^2} . \quad (8.4.2)$$

Az ellenállás-tényezők ismeretében a hidraulikai kép a csomópontokra felírt tömeg-, illetve térfogatmegmaradást kifejező egyenletekkel, valamint a fogyasztói helyek és a betáplálási pont közötti útvonalakon a nyomásvesztesség nagyságát kifejező egyenletrendszer segítségével határozható meg, az alábbiak szerint:

$$\Delta p = \sum R_i \dot{V}_i^2 + \Delta p_k , \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (8.4.3)$$

$$\dot{V}_j = \sum_{i=1}^{n_j} \dot{V}_i , \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.4.4)$$

Az eddigi számítási gyakorlat alapja tehát az ellenállás-tényezők kiszámítása.

Az ellenállás-tényezők és az áramlási kép számított pontossága attól függ, hogy milyen pontosan ismerjük a hálózat egyes szakaszainak geometriai és egyéb, a számítási eredményeket befolyásoló (hossz, átmérő, érdesség, alaki ellenállás stb.) jellemzőit. Alapvetően kérdéses és bizonytalan elem például a csőérdesség, amely pl. a gyártástechnológiától, az üzemeltetési időtől és viszonyoktól is függ. Tovább növeli a bizonytalanságot, hogy a ténylegesen megvalósult rendszer hidraulikai dokumentációja nem, vagy csak pontatlanul áll rendelkezésre.

Tapasztalatok szerint az ellenállások és a hidraulikai kép fenti módon végrehajtott számítása esetén az eredmények pontossága nem jobb, mint $\pm 30\%$. Ez abból adódik, hogy a hálózat geometriai jellemzői – különösen egy régóta üzemelő, nem kellőképpen dokumentált, áttervezéseket is magán viselő, többszörösen átszabályozott hálózat esetében – legfeljebb ilyen pontosságúak. A geometriai jel-

lemzők becslésével számított hálózati ellenállások és áramlási kép alapján, a kiterhelés határára jutott hálózat vagy hálózatrészek esetében nem lehet megbízható választ adni arra, hogy a hálózat hogyan reagál új fogyasztók bekapcsolására. Különösen nagy átmérőjű vezetékeket tartalmazó hálózat vagy hálózatrészek esetén nő a bizonytalanság a pontos geometriai adatok hiánya miatt. Azonos alakiellenállás-tényezők esetén ugyanis az egyenértékű hosszak – közel az átmérővel arányosan – növekszenek.

A továbbiakban két olyan eljárást ismertetünk, amelyek a korábban alkalmazott mérési eljárásokkal szemben új mérési helyek létrehozása és a hálózatrészek geometriai jellemzőinek ismerete nélkül teszik lehetővé bármely hálózatrész ellenállásának meghatározását.

Az eljárások attól függően különböznek egymástól, hogy a hálózat folyadék-szállítása, tehát a fogyasztók vételezése a mérés időtartama alatt állandó értéken tartható, vagy pedig jelentős mértékű véletlen ingadozásokat mutathat.

Erre való tekintettel külön eljárást mutatunk be a determinisztikus fogyasztói vételezésre és a sztochasztikus fogyasztások esetére.

8.4.1. Ellenállások identifikációja állandó értékű fogyasztások esetén

Állandó értékű fogyasztások – gyakorlatilag kizárólagosan – csak forróvíz-keringetésű távfűtőhálózatokban valósulnak meg. Az itt bemutatásra kerülő identifikációs eljárás tehát elsősorban forróvíz-keringetésű távfűtőhálózatok esetében alkalmazható.

Az eljárás lényege, hogy a hálózatban egy meghatározott elv szerint különböző üzemállapotokat állítunk be, miközben minden egyes üzemállapotban a meglévő mérőhelyeken, a betáplálási pontokban és a fogyasztói helyeken megmérjük az előremenő és visszatérő vezetékekben uralkodó nyomást vagy nyomáskülönbséget, valamint a keringetett víz-térfogatáramot.

Minden egyes üzemállapotban a mért jellemzők mérési adatait felhasználva felírjuk a Kirchhoff-törvényeket. A Kirchhoff-törvények felírásával kapott egyenletekben az ellenállások a keresett ismeretlen mennyiségek. Csak egy üzemállapotra felírt egyenletrendszerben nagyobb az ismeretlenek száma, mint az egyenletek száma. Ezért annyi üzemi állapotot és összetartozó mérési adataegyüttest kell létrehozni, amelynek eredményeképpen a Kirchhoff-törvényekkel képezhető egyenletek száma legalább annyi, mint a keresett ismeretlen ellenállások száma.

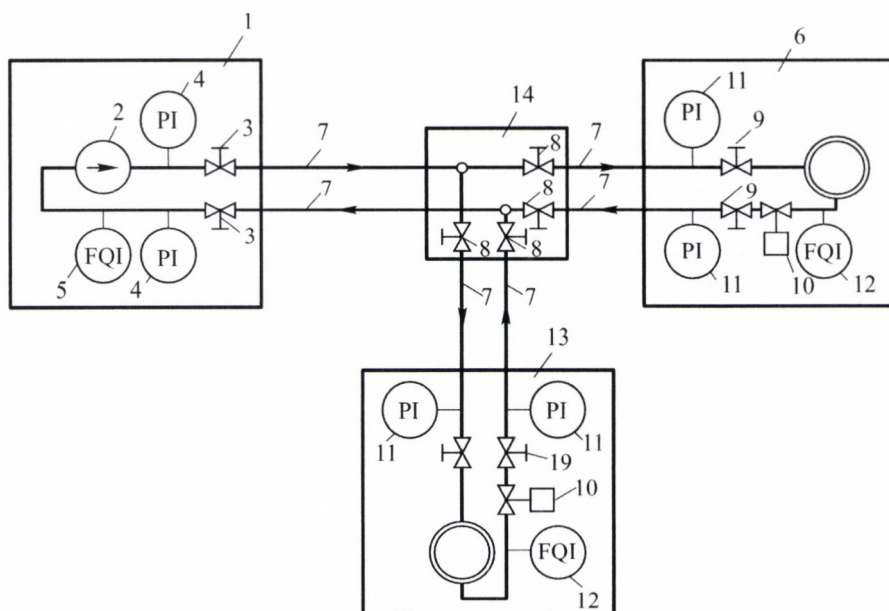
A különböző üzemállapotok beállításakor azt az elvet követjük, amelyet a lineáris függetlenség elvének nevezhetünk. Ennek értelmében valamely beállított üzemállapotban bármely tetszőleges csomópontban vagy vezetékekben a nyomás vagy nyomáskülönbség értéke, vagy a térfogatáram nem kapható meg az előző üzemállapotban mért nyomás-, illetve térfogatáram értékéből ugyanazzal a számmal való szorzással.

A különböző üzemállapotokat úgy állítjuk elő, hogy a fogyasztói helyeken meglevő kézi működtetésű elzáró- vagy fojtószerelvények segítségével az adott fogyasztói helyre beáramló térfogatáram értékét olyan mértékig (szükség esetén nullára) csökkentjük, hogy a hálózat többi mérési pontjában, de legalább a betáplálási pontban a mért jellemzők értékében a mérőműszerek hibahatárát meghaladó mértékű változás következzen be.

A mérési eljárásnak valójában két változata adódik attól függően, hogy a fogyasztói helyeken tudunk-e térfogatáramokat mérni, vagy sem. Ha fogyasztói helyeken nem mérünk térfogatáramokat, akkor természetesen a hálózatban a térfogatáramok eloszlása is ismeretlen. A feladat ez esetben is az, hogy legalább annyi „lineárisan független” üzemi állapotot állítsunk be, amelynek eredményeképpen a felírható Kirchhoff-egyenletek száma megegyezik az összes ismeretlen hálózati jellemző – az ellenállás-tényezők és a térfogatáramok – számával. A helyzet tovább bonyolódik azzal is, hogy a Kirchhoff-egyenletek nemlineárisakká válnak. A mérési eljárás fenti két alternatíváját a továbbiakban külön-külön ismertetjük, és „lineáris” illetve „nemlineáris” eljárásnak különböztetjük meg.

8.4.1.1. Lineáris eljárás

A lineáris eljárás tényleges alkalmazását a 8.4.1. ábra szerinti példán mutatjuk be. Az eljárás első lépéseként az (1) betáplálási pontban, a (7) csővezeték-



8.4.1. ábra. Egyszerűsített forróvíz-távfűtőhálózat az üzemi mérőhelyek feltüntetésével az identifikációs eljárás bemutatásához

hálózaton és a (6), (13) fogyasztói helyeken az összes (3), (8), (9) kézi működtetésű, valamint (10) automatikusan működő elzáró- vagy fojtószerelvényt teljesen nyitott állapotba helyezzük és rögzítjük, majd ebben az állapotban az (1) betáplálási pontban és a (6), (13) fogyasztói helyeken a (4) és (11) nyomásmérőkön, illetve nyomáskülönbség-mérőkön, valamint (5) és (12) térfogatáram-mérőkön regisztráljuk a nyomás-, nyomáskülönbség- és térfogatáram-értékeket. Ezután pl. a (13) fogyasztói helyen a (9) kézi működtetésű elzárószerelvény teljes zárásával a (13) fogyasztói hely vételezését megszüntetjük, és ebben az üzemállapotban is megmérjük az (1) betáplálási pontban és a (6) fogyasztói helyen a (4) és (11) nyomásmérőkön, illetve nyomáskülönbség-mérőkön és térfogatáram-mérőkön az üzemi értékeket.

A mért értékekkel:

$$\Delta p_{01} = R_0 \dot{V}_{01}^2 + R_1 \dot{V}_{11}^2 + \Delta p_{11}, \quad (8.4.5)$$

$$\Delta p_{01} = R_0 \dot{V}_{01}^2 + R_2 \dot{V}_{21}^2 + \Delta p_{21}, \quad (8.4.6)$$

$$\Delta p_{02} = R_0 \dot{V}_{02}^2 + R_1 \dot{V}_{12}^2 + \Delta p_{12}, \quad (8.4.7)$$

ahol

- R_0 az (1) betáplálási pont és a (14) csomópont közötti vezeték-pár-együttes ellenállása;
- R_1 a (6) fogyasztói hely és a (14) csomópont közötti vezeték-pár-együttes ellenállása;
- R_2 a (13) fogyasztói hely és a (14) csomópont közötti vezeték-pár-együttes ellenállása;
- Δp_{01} az első üzemi állapotban az (1) betáplálási pontban az előremenő és visszatérő vezeték között mért nyomáskülönbség;
- Δp_{02} a második üzemi állapotban az (1) betáplálási pontban az előremenő és visszatérő vezeték között mért nyomáskülönbség;
- $\dot{V}_{01}$ az (1) betáplálási pontban az első üzemállapotban mért térfogatáram;
- $\dot{V}_{02}$ az (1) betáplálási pontban a második üzemállapotban mért térfogatáram;
- $\dot{V}_{11}$ a (6) fogyasztói helyen az első üzemállapotban mért térfogatáram;
- $\dot{V}_{12}$ a (6) fogyasztói helyen a második üzemállapotban mért térfogatáram;
- $\dot{V}_{21}$ a (13) fogyasztói helyen az első üzemállapotban mért térfogatáram;
- Δp_{11} a 6 fogyasztói helyen a első üzemállapotban az előremenő és visszatérő vezeték között mért nyomáskülönbség;
- Δp_{21} a (13) fogyasztói helyen az első üzemállapotban az előremenő és visszatérő vezeték között mért nyomáskülönbség;
- Δp_{12} a (6) fogyasztói helyen a második üzemállapotban az előremenő és visszatérő vezeték között mért nyomáskülönbség.

A felírt egyenletek száma megegyezik a keresett R_0 , R_1 , R_2 ismeretlenek számával, amelyekből azok meghatározhatók.

Általános esetben a mért adatok és a hálózat ismeretlen ellenállás-tényezői a

$$\Delta \mathbf{p} = \dot{\mathbf{V}} \mathbf{R} \quad (8.4.8)$$

mátrixegyenlettel írhatók le, amelyben az $\mathbf{R}$ ellenállásvektor az ismeretlen. Az $\mathbf{R}$ ellenállásvektor meghatározása lineáris egyenletrendszer megoldásával lehetséges, formálisan az

$$\mathbf{R} = \dot{\mathbf{V}}^{-1} \Delta \mathbf{p} \quad (8.4.9)$$

szerint.

A (8.4.8) lineáris egyenletrendszer megoldásához célszerűen felhasználhatjuk a Gauss–Seidel-iterációt.

8.4.1.2. Nemlineáris eljárás

A nemlineáris eljárás alkalmazása során – a 8.4.1. ábra példájánál maradván – egy további üzemállapot beállítása szükséges. Ez a (6) fogyasztói helyen a (9) elzárószerelvénnyel segítségével, a beáramló térfogatáram zérusra csökkentésével válik lehetségessé. A különböző üzemállapotokban ugyanakkor elmarad a térfogatáramok mérése a fogyasztói helyeken.

A nemlineáris eljárás alkalmazása során a következő egyenletek írhatók fel:

$$\Delta p_{01} = R_0 \dot{V}_{01}^2 + R_1 \dot{V}_{11}^2 + \Delta p_{11}, \quad (8.4.10)$$

$$\Delta p_{01} = R_0 \dot{V}_{01}^2 + R_2 \dot{V}_{21}^2 + \Delta p_{21}, \quad (8.4.11)$$

$$\Delta p_{02} = R_0 \dot{V}_{02}^2 + R_1 \dot{V}_{12}^2 + \Delta p_{12}, \quad (8.4.12)$$

$$\Delta p_{03} = R_0 \dot{V}_{03}^2 + R_2 \dot{V}_{23}^2 + \Delta p_{23}. \quad (8.4.13)$$

Természetesen

$$\dot{V}_{02} = \dot{V}_{12}, \quad \dot{V}_{03} = \dot{V}_{23}, \text{ továbbá } \dot{V}_{01} \quad (8.4.14)$$

ismert mennyiségek, amelyeket a betáplálási helyen mérünk. Az egyenletrendszerben ismeretlen mennyiségek: R_0 , R_1 , R_2 , $\dot{V}_{11}$, $\dot{V}_{21}$. Tegyük fel, hogy

$$\Delta p_{11} = \Delta p_{21} = \Delta p_a. \quad (8.4.15)$$

Osszuk végig az egyenleteket a 0 indexű térfogatáram-négyzetekkel:

$$R_{01} = R_0 + R_1 \left(\frac{\dot{V}_{11}}{\dot{V}_{01}} \right)^2 + \frac{\Delta p_a}{\dot{V}_{01}^2}, \quad (8.4.16)$$

$$R_{01} = R_0 + R_2 \left(\frac{\dot{V}_{21}}{\dot{V}_{01}} \right)^2 + \frac{\Delta p_a}{\dot{V}_{01}^2}, \quad (8.4.17)$$

$$R_{02} = R_0 + R_1 + \frac{\Delta p_{12}}{\dot{V}_{02}^2}, \quad (8.4.18)$$

$$R_{03} = R_0 + R_2 + \frac{\Delta p_{23}}{\dot{V}_{03}^2}. \quad (8.4.14)$$

A fenti egyenletrendszer öt ismeretlent tartalmaz, tehát még nem alkalmas az ismeretlenek meghatározására. Bevezetjük az R_1 és R_2 ellenállások eredő-ellenállását. Akkor a három üzemállapotra az alábbi három egyenlet írható fel:

$$R_{01} = R_0 + R_{cr} + \frac{\Delta p_a}{\dot{V}_{01}^2}, \quad R_{01} = \frac{\Delta p_{01}}{\dot{V}_{01}^2}, \quad (8.4.20)$$

$$R_{02} = R_0 + R_1 + \frac{\Delta p_{12}}{\dot{V}_{02}^2}, \quad R_{02} = \frac{\Delta p_{02}}{\dot{V}_{02}^2}, \quad (8.4.21)$$

$$R_{03} = R_0 + R_2 + \frac{\Delta p_{23}}{\dot{V}_{03}^2}, \quad R_{03} = \frac{\Delta p_{03}}{\dot{V}_{03}^2}. \quad (8.4.22)$$

Másrészt

$$\frac{1}{\sqrt{R_{cr}}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}. \quad (8.4.23)$$

Az ismeretlen R_0 , R_1 , R_2 , R_{cr} meghatározására négy egyenlet áll rendelkezésre.

8.4.2. Az eljárások pontossága

Az ismertett eljárások hatékonyságát és megbízhatóságát alapvetően befolyásolja a mérendő hálózat konfigurációja és a mérések pontossága. Például „egyszakaszos hálózatra” mint extrém esetre:

$$R = \frac{\Delta p}{\dot{V}^2}. \quad (8.4.24)$$

Tegyük fel, hogy a mérés véletlen hibái – mind a nyomáskülönbség, mind a térfogatáram esetében – normális eloszlást alkotnak, és a megadott hibahatárok egy középvértékre szimmetrikusak és azonosak. Annak a valószínűsége, hogy a hibahatárként megadott értéket vagy annál nagyobb értéket mérünk a két jellemző valamelyikére:

$$P(|H_m| \geq H_h) \leq Q \text{ (megadott szám)} < 1, \quad (8.4.25)$$

ahol

H_h a hibahatár megadott értéke,

H_m a mérés hibája.

Az R ellenállásban jelentkező pozitív hibahatár:

$$H_R^+ = \frac{1 + H_h}{(1 - H_h)^2} - 1, \quad (8.4.26)$$

$$H_R^+ > H_h, \quad (8.4.27)$$

tehát a hibahatár megnő, a hibatartomány szélesedik. Ugyanakkor annak valószínűsége, hogy ekkora hiba ténylegesen bekövetkezik, a független valószínűségek tétele alapján:

$$P(H \geq H_R^+) \leq Q^2 < Q, \quad (8.4.28)$$

tehát jelentősen csökkent.

A mérési eljárás stratégiájának kialakítása és alkalmazása során tehát kiemelten vizsgálandó kérdés az ellenállások értékében elkövethető hibák és a hibák előfordulási valószínűségének elemzése.

A mérési stratégia és a számítás végrehajtásának alapelve formálisan:

$$P(H \geq H_R(R_i)) \leq Q, \quad (8.4.29)$$

$$H_R(R_i) \leq K_i \quad \left. \vphantom{P(H \geq H_R(R_i)) \leq Q} \right\} \forall R_i, i = 1, 2, \dots, z, \quad (8.4.30)$$

ahol K_i és Q megadott számok.

Az előző feltételek kielégítése megszabja az alkalmazható mérőműszereket, azok hibahatárára vonatkozó előírásokat. Ha viszont adottak a mérőműszerek, meghatározott hibahatárokkal, akkor csak az ellenállásoknál elkövethető hibák minimalása lehet célunk.

A továbbiakban vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy egy tetszőleges hálózat ellenállás-tényezőinek identifikációja során az ellenállás-tényezők pontossága hogyan függ a mérési adatok pontosságától, de nem vizsgálva, hogy az ellenállás-tényezők így kiszámított hibái milyen valószínűséggel realizálódnak!

Az ellenállás-tényezők identifikációjának alapproblémája egy

$$Ax = b$$

típusú lineáris egyenletrendszer megoldás. Kérdés tehát az, hogy az egyenletrendszer megoldásaként kapott x vektor pontossága hogyan függ az A mátrix és a b

vektor elemeinek pontosságától. Másképpen, ha az A mátrix megváltozik egy $\delta_1 A$ szerint és a b vektor egy $\delta_4 b$ vektornak megfelelően, akkor keressük az

$$(A + \delta_1 A)(x_0 + \delta_2 x) = b,$$

illetve az

$$A(x_0 + \delta_3 x) = b + \delta_4 b$$

egyenletrendszerek megoldását, ahol x_0 az egyenletrendszernek az A és b pontos együtthatókhoz tartozó pontos megoldása.

A megoldás hibáira nézve – a matematikai levezetést mellőzve – az alábbi becslések adhatók:

A megoldás relatív hibája a b oszlopvektor relatív hibája függvényében:

$$\frac{\|\delta_3 x\|}{\|x_0\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\delta_4 b\|}{\|b\|},$$

ahol $\|\delta_3 x\|$, $\|x_0\|$, $\|\delta_4 b\|$, $\|b\|$ a szóban forgó vektorok tetszőleges normái és $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ a fenti vektornormákkal kompatibilis mátrixnormák.

A megoldás relatív hibája az A együttható mátrix normája relatív változásának függvényében, ha fennáll, hogy

$$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1,$$

$$\frac{\|\delta_3 x\|}{\|x_0\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\delta_1 A\|}{\|A\|}}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\delta_1 A\|}{\|A\|}}.$$

Mindegyik becslésben szerepel az $\|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ szorzat, amely bizonyos mértékben jellemzi az A mátrixnak a megváltozásokkal szembeni érzékenységét. Az $\|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ számot a mátrix adott normára vonatkozó kondíciós számának nevezzük. Ha egy mátrix kondíciós száma kicsi, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix jólkondicionált (illetve jól meghatározott), és az egyenletrendszer együtthatóinak kis megváltozása nem vonja maga után a megoldás nagy mértékű megváltozását.

Mint láttuk, a becslések alapját az ún. vektor- és vele kompatibilis mátrixnormák képezik. Egy $\|A\|$ mátrixnorma akkor kompatibilis egy $\|x\|$ vektornormával, ha teljesül az

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

egyenlőtlenség.

Az a vektor normáján egy olyan $\|a\|$ valós számot értünk, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\|a\| > 0, \text{ ha } a \neq 0, \text{ és } \|0\| = 0,$$

$$\|c a\| = |c| \cdot \|a\| \text{ tetszőleges } c \text{ komplex számra,}$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

A komplex szám-n-esek n -dimenziós terében – tehát problémánkra alkalmazhatóan – három különböző normát definiálunk. Ezek a következők.

Oktaédernorma:

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^n |a_k|, \text{ a vektor elemei abszolút értékeinek összege.}$$

Gömbnorma:

$$\|a\|_2 = |a| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}, \text{ ez a norma a vektor hosszával egyenlő.}$$

Kockanorma:

$$\|a\|_\infty = \max_i |a_i|, \text{ a vektor maximális abszolút értékű eleme.}$$

Egy komplex elemű kvadratikus mátrix normáján olyan, $\|A\|$ -val jelölt nem-negatív valós számot értünk, amely kielégíti az alábbi összefüggéseket:

$$\|A\| \geq 0, \text{ ha } A \neq 0, \text{ és } \|0\| = 0,$$

$$\|c A\| = |c| \cdot \|A\|,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Mátrixokra is sokféleképpen definiálható norma. Az előzőkben a vektorokra bevezetett oktaéder-, gömb- és kockanormák mindegyikével kompatibilis mátrix-norma:

$$\|A\|_M = n \cdot \max_{i,j} |a_{i,j}|,$$

a maximális abszolút értékű mátrixelem szorozva a mátrix elemeinek számával.

Csak a gömbnormával kompatibilis mátrixnorma a spurnorma, amely

$$\|A\|_n = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\text{Sp}(A^* A)},$$

ahol Sp a mátrix „spurja”, A^* az A transzponáltja.

Egyébként bizonyíthatóan, tetszőleges A mátrixra:

$$\|A\|_n \leq \|A\|_m.$$

Érdeemes megemlíteni, hogy tetszőleges $\|x\|$ vektornormából egy vele kompatibilis mátrixnorma a

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

kifejezéssel állítható elő, amit természetes normának nevezünk. A természetes norma az adott vektornormával kompatibilis mátrixnormák közül a legkisebb.

A vektorokra definiált oktaéder-, gömb- és kockanormához rendelt természetes mátrixnormák a következők:

Oktaédernormához:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

(a mátrixoszlopok elemeinek abszolút értékeiből képezett „abszolút oszlopösszegek” maximuma).

Gömbnormához:

$$\|A\|_2 = \max_k \sqrt{\lambda_k(A^*A)},$$

ahol $\lambda_k(A^*A)$ az A^*A sajátértékei.

Kockanormához:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

(a sorok elemeinek abszolút értékeiből képzett „abszolút sorösszegek” maximuma).

Az elmondottak alapján végül is megállapítható, hogy adott mérőműszerek, tehát adott mérési hibák esetén az ellenállás-tényezők hibáit alapvetően a felírt egyenletrendszer kondíciósza-
ma határozza meg.

A mérési stratégia alapelve tehát az, hogy az ellenállás-tényezőket olyan egyenletrendszer felírásával határozzuk meg, amelynek a kondíciósza-
ma minimális. A kondíciósza-
m két lépcsőben minimálható: először egy adott mérési állapotban olyan egyenleteket írunk fel, amelynek a kondíciósza-
ma minimális. Ezután olyan további mérési állapotokat valósítunk meg, amelyekből az előzőnél kisebb kondíciósza-
mú egyenletrendszer írható fel. A kondíciósza-
m minimálása tehát egyrészt egy adott mérési állapothoz tartozó belső minimalizáció, másrészt a mérési állapotok sorozatával történő minimalizálás.

8.4.3. Az ellenállások lineáris regressziója

Az előzőekben láttuk, hogy amennyiben egy hálózaton az alapállapottól eltérő új üzemi állapotot valósítunk meg, a felírható egyenletek száma már meghaladja az ismeretlen ellenállás-tényezők számát. Hogy mely egyenleteket tartsuk meg a számítás céljára, az a kondíciószám minimalásával állapítható meg.

Ha további üzemi állapotok valósíthatók meg, az egyenletrendszer túlhatározottsága tovább növekszik és felvetődik a lehetősége a mérési adatok matematikai-statisztikai kiértékelésének, és remélhető az a tendencia, hogy a mérési hibák fokozatosan kiegyenlítik egymást, a mérések hibáinak átlaga a nullához konvergál.

A mérési feladat a következőképpen is megfogalmazható: Keressük a $\Delta p \approx \eta$ és a $\dot{V}_1^2 \approx \xi_1, \dots, \dot{V}_n^2 \approx \xi_n, i = 1, \dots, n$ (ahol n a sugaras rendszer összes csőszáma) valószínűségi változók közötti függvénykapcsolatot, vagyis az η változónak a $\xi_1, \dots, \xi_n$ változók valamely függvényével való közelítését. Legyenek egy mérésorozat eredményeképpen a mért értékek:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1, \\ \xi_2 &= x_2, \\ &\vdots \\ \xi_n &= x_n.\end{aligned}\tag{8.4.31}$$

Ebben az esetben ekkor $\{\xi_1 = x_1 \dots \xi_n = x_n\}$ jelenti a $\xi_1 \dots \xi_n$ valószínűségi változó vektor egy megfigyelt értékét, így az $(x_1, \dots, x_n)$ vektort mintának, illetve a mintavétel eredményének nevezzük.

Tegyük fel, hogy η értékét az $A(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n)$ függvénnyel közelítjük, ekkor az elkövetett hiba:

$$\eta - A(\xi_1, \dots, \xi_n).\tag{8.4.32}$$

Az A függvényt úgy választjuk meg, hogy a fenti valószínűségi változó négyzetének várható értékét minimalizáljuk, azaz

$$M\left\{\left[\eta - A(\xi_1, \dots, \xi_n)\right]^2\right\} = \text{minimum!}\tag{8.4.33}$$

Legyen $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ az $\eta, \xi_1 \dots \xi_n$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, akkor az előbbi feltétel így alakul:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[y - A(x_1, \dots, x_n)\right]^2 f(y, x_1, \dots, x_n) dy dx_1 \dots dx_n = \min.\tag{8.4.34}$$

Igazolható, hogy ekkor A a várható értéke η -nak $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n$ feltétel mellett, azaz

$$A(x_1, \dots, x_n) = M(\eta | \xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n), \quad (8.4.35)$$

vagy az együttes sűrűségfüggvényből:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(y, x_1, \dots, x_n) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y, x_1, \dots, x_n) dy}. \quad (8.4.36)$$

Ez éppen az η -nak a $\xi_1, \dots, \xi_n$ -re vonatkozó regressziós felülete. Ha az $(\eta, \xi_1, \dots, \xi_n)$ változók együttes eloszlása $n + 1$ dimenziós normális eloszlás, akkor ez a felület sík.

A gyakorlatban tapasztalati adatok alapján keressük a regressziós felület jó közelítését, miután az együttes eloszlásfüggvény általában nem ismeretes, illetve csak komplikált és hosszadalmas kísérletsorozattal határozható meg.

Esetünkben a függvénykapcsolatról feltehetjük, hogy $y = f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$, vagy a már alkalmazott jelölésekkel:

$$\Delta p = \sum_{i=1}^n x_i R_i, \quad (8.4.37)$$

ahol

$a_1, \dots, a_n$ a függvénykapcsolat együtthatói;

R_i az adott csőszakasz ellenállás-tényezője;

$x_i = \dot{V}_i^2$ az adott csőszakaszon átfolyó térfogatáram.

Az összes mérési adat birtokában, az összes huroktörvény felírása után legyen m db egyenletünk. Legyen n csőszakaszunk a hálózatban, azaz n ismeretlen R ellenállás-tényező van. Feltevés szerint $m > n$. Az egyenletrendszert tömören így írhatjuk fel:

$$\Delta p_k = \sum_{i=1}^n R_i \dot{V}_{ik}^2, \quad k = 1, \dots, m. \quad (8.4.38)$$

Egy méréssel az adott rendszerről több mintát is vehetünk.

Az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{11}^2 & \dot{V}_{21}^2 & \dots & \dot{V}_{n1}^2 \\ \dot{V}_{12}^2 & & & \\ \vdots & & & \\ \dot{V}_{1m}^2 & & & \dot{V}_{nm}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_m \end{bmatrix}. \quad (8.4.39)$$

A $\dot{V}$ mátrix m sorból és n oszlopból áll, Δp m -elemű.

Mivel több egyenletünk van, mint ismeretlenünk, az egyenletrendszer túlhatározott. De mind a Δp , mind a $\dot{V}$ értékek csak a műszerek hibájának megfelelő pontossáig vannak meghatározva; nincs olyan n db R_i érték, amely minden egyenletet pontosan kielégítene. Ebben az esetben célunk olyan R_i értéksorozat meghatározása, amely az összes egyenletre nézve a legpontosabb megoldást adja. A megoldást lineáris regresszióval kaphatjuk, azaz feladatunk az

$$F(R) = \sum_{k=1}^m \left(\Delta p_k - \sum_{i=1}^n R_i \dot{V}_{ik}^2 \right)^2 = \min. \quad (8.4.40)$$

feltétel mellett az R meghatározása.

Mint az a matematikai analízisből ismert, a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az ismeretlenek szerinti első parciális deriváltak rendre zérusok legyenek, tehát

$$\frac{\partial F(R)}{\partial R_j} = 0, j = 1, \dots, n. \quad (8.4.41)$$

Elvégezve a

$$\frac{\partial \left[\sum_{k=1}^m \left(\Delta p_k - \sum_{i=1}^n R_i \dot{V}_{ik}^2 \right)^2 \right]}{\partial R_j} = 0, j = 1, \dots, n \quad (8.4.42)$$

parciális differenciálást, majd az egyenleteket rendezve, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\sum_{k=1}^m 2 \left(\Delta p_k - \sum_{i=1}^n R_i \dot{V}_{ik}^2 \right) (-\dot{V}_{jk}^2) = 0, j = 1, \dots, n, \quad (8.4.43)$$

mivel

$$\frac{\partial R_i}{\partial R_j} \delta_j^i, \text{ ahol } \delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases} \quad (8.4.44)$$

Ez megfelelő rendezés után:

$$\sum_{i=1}^n R_i \sum_{k=1}^m \dot{V}_{ik}^2 V_{jk}^2 = \sum_{k=1}^m \Delta p_k \dot{V}_{jk}^2, j = 1, \dots, n. \quad (8.4.45)$$

Mátrixos alakban írva az egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m \dot{V}_{1k}^2 \dot{V}_{1k}^2 & \dots & \sum_{k=1}^m \dot{V}_{nk}^2 \dot{V}_{1k}^2 \\ \sum_{k=1}^m \dot{V}_{1k}^2 \dot{V}_{2k}^2 & & \\ \vdots & & \\ \sum_{k=1}^m \dot{V}_{1k}^2 & \dots & \sum_{k=1}^m \dot{V}_{nk}^2 V_{nk}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m \Delta p_k \dot{V}_{1k}^2 \\ \sum_{k=1}^m \Delta p_k \dot{V}_{2k}^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m \Delta p_k \dot{V}_{nk}^2 \end{bmatrix}. \quad (8.4.46)$$

A (8.4.46) n-edrendű lineáris egyenletrendszer megoldása a (8.4.38) egyenletekre nézve a legjobban közelítő R_i értéksorozatot szolgáltatja.

A lineáris regresszió alkalmazhatóságának vizsgálata

Minden matematikai módszer alkalmazásánál meg kell vizsgálnunk felhasználásának jogosságát. E pontban a lineáris regresszió alkalmazhatóságának feltételét vizsgáljuk.

Tekintsünk n számú valószínűségi változót, amelyek közül egyet vizsgálunk a többi függvényeként! Jelölje a $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ együttes sűrűségfüggvényét $f(x_1, \dots, x_n)$.

Vizsgáljuk most ζ_1 -et a többi függvényeként! Ekkor

$$M(\zeta_1 | x_2 \dots x_n) = A(x_2 \dots x_n) = M(\zeta_1 | \zeta_2 = x_2 \dots \zeta_n = x_n) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1 \dots x_n) dx_1}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \dots x_n) dx_1}$$

lesz a regressziós felület.

Ha a $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ együttes eloszlása n -dimenziós normális eloszlás, akkor a regressziós felület sík, azaz $x_1 = a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$, ami éppen feladatunkban is szerepel.

Szükséges tehát megvizsgálni, hogy mennyiben jogos az utóbbi felvetés. Ehhez vezessük be a kovarianciamátrixot, amely

$$D = \{\lambda_{ij}\}, \text{ ahol } \lambda_{ij} = \lambda_{ji} = M(\zeta_i \zeta_j).$$

Ekkor a ζ_i valószínűségi változók szórásnégyzetei:

$$\sigma^2(\xi_i) = \lambda_{ij}.$$

Vegyük most az n -dimenziós vektorra j -elemű mintát,

$$(\xi_{1j}, \xi_{nj}), j = 1, \dots, m.$$

Ekkor a következő becslés alkalmazható:

$$\lambda_{ik} \approx \lambda_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{i0}) (\xi_{kj} - \bar{\xi}_{k0}),$$

ahol

$$\bar{\xi}_{i0} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \xi_{ij} \text{ és } \bar{\xi}_{k0} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \xi_{kj}.$$

Legyen most D_{ik} a D megfelelő eleméhez tartozó aldetermináns. Ekkor ξ_1 és $(\xi_2, \dots, \xi_n)$ közötti többszörös korrelációs együttható:

$$r_{1(2\dots n)} = \frac{M(\xi_1 \xi_1^*)}{\sigma(\xi_1) \sigma(\xi_1^*)},$$

ahol

$$\xi_1^* = a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n,$$

amelyben

$$a_{1k} = \frac{D_{1k}}{D_{11}}.$$

A többszörös korrelációs együttható kifejezhető az alábbi módon is:

$$r_{1(2\dots n)} = \sqrt{1 - \frac{|J|}{\lambda_{11} D_{11}}}.$$

Így

$$0 \leq r_{1(2\dots n)} \leq 1.$$

Ha $r_{1(2\dots n)} = 1$, akkor (1 valószínűséggel) ξ_1 ténylegesen lineáris kifejezése a $\xi_2, \dots, \xi_n$ változónak, tehát valóban n -dimenziós, többszörös normális eloszlású az $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sűrűségfüggvény, és így a

$$\xi^* = a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n,$$

felvetés is helyes.

Ez azonban jelen problémákkal ekvivalens feltételezés, ha $\zeta_1 = \Delta p$ és

$$\zeta_2 = \dot{V}_1^2 \dots \zeta_n = \dot{V}_{n1}^2$$

összerendeléseket megadjuk.

A módszer alkalmazásához, tehát adott méréssorozat végrehajtásánál ezen r többszörös korrelációs együtthatót kell kiszámítanunk, és 1-től való eltérését megvizsgálunk.

9. MELEGVÍZ-FŰTÉS HIDRAULIKAI MÉRETEZÉSE

A melegvíz-fűtések hidraulikai méretezésének legjelentősebb elméleti problémáját – mind a mai napig – az optimum definiálása, illetve érvényesítése jelenti.

Többé-kevésbé tisztázatlanok a megengedhető sebességek, az áramlási zajok, az esetleges kavitáció, az üzembiztosan megengedhető nyomások, nyomásvesztések értékei és ezek korlátként való bevonásának gazdasági-matematikai modellezése.

E fejezetben – bár a feltételi egyenletek, műszaki korlátok analízisére nem térünk ki –, de adunk egy parciális optimum keresési módszert, amely az optimumtól való eltérés mértékét is jól érzékelteti.

Fűtési hálózatok hidraulikai méretezésén

- a névleges hőmérsékletlépcső,
- a vezetékhálózat átmérőinek,
- a szabályozást végző szerelvényeknek és
- a szivattyú munkapontjának és a szivattyú típusának

kiválasztását értjük.

A méretezés lehet műszaki szempontú, hagyományos, heurisztikus és/vagy optimumorientált.

9.1. A hőmérsékletlépcső meghatározása a mértékadó (leghidegebb) állapotra

A hőszállítási egyenlet:

$$\dot{Q}_m = \dot{m}c\Delta t, \quad (9.1.1)$$

ahol:

$\dot{Q}_m$ a 99%-os megbízhatósági szintű, mértékadó hőigény,

$$\Delta t = t_e - t_v. \quad (9.1.2)$$

A hőszállítási egyenletben ismerjük a mértékadó hőigényt és keressük az előremenő és visszatérő forró víz hőmérséklet értékeit.

A $\Delta t = t_c - t_v$ meghatározásának lehetőségei:

- Heurisztikus módszerek: a hagyományosan alkalmazott, a korábbi rendszerek tervezéséhez felvett értékek alkalmazása, pl. 150/80, 130/70 °C,
- Komplex optimalizáció: ennek alkalmazásakor egyidejűleg határozzuk meg az összes termikus és hidraulikai jellemzőt, közöttük az előremenő és visszatérő forró víz hőmérsékletek értékét.

9.2. A fűtési vezetékrendszer átmérőinek meghatározása

A méretezés módszerei:

- hagyományos tervezés: a rendelkezésre álló betáplálási nyomáskülönbség felvétele, a mértékadó hidraulikai áramkörre a fajlagos, hosszúság egységre eső nyomásvesztés (s') megállapítása;
- hagyományos tervezés: az áramlási sebesség felvétele (1-2 m/s), a hálózat ellenőrzése a megengedett nyomásvesztésekre;
- az átmérők kiválasztása a gazdasági optimum elve alapján: parciális optimalizáció, komplex optimalizáció.

9.2.1. Hagyományos tervezés

Megállapítjuk minden vezetékszakra a mértékadó hőáramot ($\dot{Q}_{99\%}$).

Kiszámítjuk a vezetékszakaszokra az áramló tömegáramot:

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_{99\%}}{c \Delta t}, \quad ((9.2.1))$$

ahol Δt az előzőekből már ismert.

Az $\dot{m}$ tömegáram ismeretében a vezetékszakaszon az áramlási sebesség:

$$w = \frac{4\dot{m}}{d^2 \pi \rho}. \quad (9.2.2)$$

E kifejezésben egyelőre ismeretlen a d szabványos átmérő.

Megállapítjuk a rendelkezésre álló betáplálási nyomáskülönbséget (Δp_{sziv}). Ezt elosztjuk a mértékadó – legnagyobb terhelésű – áramkör geometriai vezeték-hosszúságával, amely az előremenő és visszatérő vezetékek hosszúságának összege. Ezzel megkaptuk a fajlagos, a hosszúságegységre eső nyomásvesztést (s').

Ennek ismeretében megállapítjuk a vezetékszakaszon felhasználható nyomásvesztéséget: $\Delta p_i = s' l_i$.

Tudjuk továbbá, hogy

$$s' = \left(\frac{\lambda_i}{d_i} + \sum \xi \right) \frac{\rho}{2} w_i^2. \quad (9.2.3)$$

A w helyébe behelyettesítjük a (9.2.2) kifejezést:

$$s' = \left(\frac{\lambda_i}{d_i} + \sum \xi \right) \frac{8 \dot{m}_i^2}{d^4 \pi^2 \rho}. \quad (9.2.4)$$

Ebből a keresett vezetékátmérő:

$$d_i = \sqrt[4]{\left(\frac{\lambda_i}{d_i} + \sum \xi \right) \frac{8 \dot{m}_i^2}{\pi^2 \rho}}. \quad (9.2.5)$$

A (9.2.5) egyenlet implicit, iterációval oldható meg. A legközelebbi, nagyobb szabványos vezetékátmérőt választjuk.

A vezetékszszakaszok átmérőjének meghatározása után ki kell számítanunk a vezetékszszakaszokra a nyomásvesztéseket, fel kell építenünk a hálózat nyomásábráját, ellenőriznünk kell, hogy nem lépnek-e fel a biztonsági filozófiával ütköző nyomásértékek. E vizsgálat keretében végre kell hajtánunk a kitüntetett üzemiállapotokra a hidraulikai analízist, szimulálnunk kell üzemzavari állapotokat és minősítenünk kell a hálózatot az üzemzavari helyzetek kiküszöbölése tekintetében.

Szükség esetén az így meghatározott szabványos átmérőértékeken módosítunk. A legtöbb esetben az átmérőértékek csökkenthetők, mivel a (9.2.5) képlettel kiszámolt értékeket folyamatosan felfelé kerekítettük, miáltal a rendelkezésre álló nyomásvesztéséget nem használjuk ki.

9.2.2. A vezetékátmérők meghatározása parciális optimalizációval

A komplex optimalizáció során egyidejűleg határozzuk meg az összes termikus és hidraulikai jellemzőt, közöttük a vezetékátmérőket a hőleadók felületét, a keringtetett tömegáramot és a névleges hőmérsékletképcsőt.

A parciális optimalizáció szerint feltételezzük, hogy ismertek a vezetékszszakaszokon a mértékadó állapotra a keringtetett forró víz térfogatáramok és a hőmérsékletlépcső, vagyis az előremenő és visszatérő víz hőmérséklet.

A vezetékszszakaszok átmérőit – ezek ismeretében – úgy határozzuk meg, hogy a vezetékhálózat beruházásának és üzemeltetésének együttes költsége minimális legyen.

A komplex optimalizációval szemben ez a méretezés parciális optimalizációnak tekinthető.

9.2.3. Optimalizáció vezetékszakaszonként

A módszer optimumorientált, és kétlépcsős.

Az első lépéső: minden vezetékszakasza meghatározzuk azt a szabványos vezetékmérőt, amellyel a vizsgált vezetékszakaszon a beruházási költség évi leírása és az áramoltatás szivattyúzási költsége együttesen minimális.

Ezt követően felépítjük a hálózat nyomásábráját, és meghatározzuk, hogy mekkora fojtások szükségesek a mértékadó hidraulikai áramkörre csatlakozó mellékáramkörökön, illetve vezetékszakaszonokon.

Az optimalizáció második lépésője: felépítjük a hálózat költségábráját is az egyes vezetékszakaszaakra megállapított $K_{i\text{opt}}$ abszolút optimális költségek összegeként. Erre rámérjük a fojtásokból származó többletszivattyúzási költségeket is. Ebben a tartományban helyezkedik el a hálózat valódi elméleti optimális üzemeltetési költsége. Ennek meghatározása úgy lehetséges, hogy módszeresen megvizsgáljuk a mellékáramköröket, hogy egyes vezetékszakaszaok átmérőinek csökkentésével van-e mód a fojtások csökkentésére, miközben az átmérők csökkentésével a beruházási költségeket is csökkentjük.

Az optimalizáció célfüggvénye egy vezetékszakasza:

$$K_i = \left\{ a_i \left\{ B_{ij}(d_{ij}) \right\} l_i + 8\tau e \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_{ij}} + \xi \right) \rho \frac{\dot{V}_i^3}{d_{ij}^4 \pi^2} \right\}, \forall i. \quad (9.2.6)$$

Az optimális átmérő kiválasztása

$$K_{i\text{opt}} = \min_{\substack{d_{ij} \\ j=1 \dots n}} \left\{ a_i \left\{ B_{ij}(d_{ij}) \right\} l_i + 8\tau e \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \sum \xi_i \right) \rho \frac{\dot{m}_i^3}{d_{ij}^4 \pi^2 \rho^2} \right\}, \forall i, d_i'', \quad (9.2.7)$$

10. MELEGVÍZ-FŰTÉSEK SZABÁLYOZÁSA

10.1. A hőszállítással kapcsolatos alapismeretek melegvízfűtési rendszerekben

10.1.1. A hőszállítás feladata

A fűtés rendszerének megtervezésekor az egyik legfontosabb feladat, hogy mindig rendelkezésre álljon akkora hőteljesítmény a hőforrásban, illetve a fogyasztónál, amely lehetővé teszi a fogyasztó hőigényének – bármely időpontban – előírt megbízhatósággal való kielégítését. A fűtési fogyasztói hőigények a meteorológiai tényezők függvényében időben folyamatosan változnak. A fűtési hőigények a külső hőmérséklettől – első közelítésben – lineárisan függenek. Az egyéb meteorológiai tényezők ezt a függést sztochasztikussá teszik. A hőszállítás feladata a hőforrásban rendelkezésre álló teljesítményt igénybe véve a hőhordozó közeg segítségével a fogyasztói helyen a szükséges teljesítmény rendelkezésre állásának biztosítása. A hőszállítás feladatát a hőszállítási egyenlet írja le. Forró vizes fűtés esetén:

$$\dot{Q}(\tau) = \dot{m} c (t_c - t_v). \quad (10.1.1)$$

A hő szállítása során a hő az előremenő vezetékben – t_c előremenő forró víz-hőmérséklettel – a hőleadóhoz érkezik, ott lehűl, majd a visszatérő vezetéken a hőforrásba visszajut. A forró vizet az előremenő és visszatérő vezeték zárt rendszerében keringtetjük. A forró víz az áramlás során nyomásvesztéseget szenved. A forró víz keringtetését ezért szivattyúval végezzük. A forró víz nyomása a szivattyú nyomócsonkjánál legnagyobb, a nyomás az áramlás során csökken és a szivattyú szívócsonkjánál a legkisebb. Az áramló közeg nyomásának alakulását a vezetékrendszerben az ún. nyomásábra mutatja. A keringetés tervezése során meg kell határoznunk a nyomásábrát és ellenőriznünk kell azt, hogy a fellépő nyomások a rendszer egyetlen pontján se haladják meg a rendszerelemek nyomásfokozatához tartozó nyomásértékeket, de mindenütt legyenek nagyobbak mint a forró víz telítési hőmérsékletéhez tartozó telítési nyomásértékek. Természetesen a szivattyú szívócsonkjánál is a forró víz nyomása legyen nagyobb, mint a gyártó által előírt érték. A fenti követelményértékeknek mind az üzemeltetési, mind az üzem-szüneti időszakra teljesülniük kell.

10.1.2. A hőszállítással kapcsolatos alapfogalmak

A fűtési rendszerek létesítésével és üzemeltetésével, valamint a hőszállítással kapcsolatos legfontosabb fogalmak az alábbiak szerint csoportosíthatók:

- a fogyasztó hőigénye,
- a fogyasztó csúcshőigénye, névleges mértékadó tervezési igény,
- a fogyasztó csúcshőigénye, névleges mértékadó tényleges igény,
- a fogyasztók egyidejű csúcshőigénye,
- ellátási biztonság,
- előremenő és visszatérő vízhőmérséklet, hőmérsékletlépcső, szabályozási diagram,
- hőfogyasztás, fogyasztási tartamdiagram,
- a hőszállítás hatásfoka, hőveszteség,
- a hőtermelés hatásfoka, kiadott csúcshő, kiadott hőmennyiség,
- beépített hőteljesítmény, kiadható hőteljesítmény,
- felhasznált tüzelőanyag mennyisége,
- szabályozás: mennyiségi, minőségi (az előremenő és visszatérő vízhőmérsékletek változtatása), kombinált (az előremenő és visszatérő vízhőmérsékletek, valamint a keringetett tömeg változtatása, változó tömegáramú keringetés),
- szabályozási diagramok,
- nyomástartás,
- nyomásábra, névleges nyomás.

10.1.3. A hőszállítás mennyiségi jellemzői

A hőszállítás mennyiségi jellemzőit – jelöléseikkel és dimenzióikkal együtt – röviden a 10.1.1. táblázatban mutatjuk be:

10.1.1. táblázat

1.	$\dot{Q}$	kW, MW	a fűtésrendszer hőigénye,
2.	$\dot{Q}_i$	kW, MW	a fogyasztó hőigénye,
	$\dot{Q}_m$	kW, MW	a fogyasztó mértékadó, névleges, legnagyobb (tervezési és/vagy tényleges) hőigénye,
3.	$\dot{Q} \leq \sum \dot{Q}_i$	kW, MW	a fogyasztók egyidejű hőigénye,
4.	$e = \frac{\dot{Q}}{\sum \dot{Q}_i}$		egyidejűségi tényező,
5.	$\dot{Q}_r$	kW, MW	rendelkezésre álló teljesítmény,
6.	$P[(\dot{Q}_r(\tau)) \geq \dot{Q}_i(\tau)] \geq k$		előírt konstans, az ellátás megbízhatósága: a teljesítmény rendelkezésre állásának valószínűsége nagyobb mint egy előírt érték,

10.1.1. táblázat (folytatás)

7.	$Q_i = \int \dot{Q}_i \, d\tau$	kWh, MWh kJ, GJ	a vizsgált időtartam alatt szolgáltatott hő mennyisége,
8.	$t_e, t_v, \Delta t = t_e - t_v$ A primer rendszerben: $t_e \equiv t'_1, t_{1e}, t_{pe},$ $t_v \equiv t'_1, t_{1v}, t_{pv}$ A szekunder rendszerben: $t_e \equiv t'_2, t_{2e}, t_{se}$ $t_v \equiv t'_2, t_{2v}, t_{sv}$	$^{\circ}\text{C}, \text{K}$	előremenő vízhőmérséklet, visszatérő vízhőmérséklet, hőmérsékletlépcső,
9.	$\dot{V}$	m^3/s	a hőhordozó közeg térfogatárama,
10.	$\dot{m} = \dot{V} \rho$	kg/s	a hőhordozó közeg tömegárama,
11.	$\dot{Q} = \dot{m} c \Delta t$ A primer rendszerben: $\dot{m} \equiv \dot{m}_1, \dot{m}_p$ A szekunder rendszerben: $\dot{m} \equiv \dot{m}_2, \dot{m}_s$	kW, MW	forróvíz-hőáram,
12.	$\dot{Q} = \dot{m}_g i_1 - \dot{m}_{gk} i_2$	kW, MW	gőz-hőáram,
13.	$\dot{m}_m$	kg/s	a mértékadó, névleges tömegáram,
14.	$\Delta p = R \dot{V}^2$	Pa	a hőhordozó közeg nyomásvesztése, ahol R a vezetékszakaszhidraulikai ellenállás-tényezője,
15.	$P = \dot{V} \Delta p$	kW, MW	az áramlás hidraulikai teljesítménye,
16.	$P_{sz} = \dot{V} \Delta p / \eta_{sz,h}$	kW, MW	a szivattyú felvett teljesítménye, a hajtómotor leadott teljesítménye,
	$P_m = P_{sz} / \eta_m$	kW, MW	a hajtómotor felvett teljesítménye,
17.	$\eta_{hsz} = \frac{\dot{Q}_{ki}}{\dot{Q}_{be}}$		a hőszállítás hatásfoka, ahol $\dot{Q}_{be}$ hálózatra betáplált hő, $\dot{Q}_{ki}$ a fogyasztónak átadott hő,
18.	$\dot{Q}_{ki} = \dot{Q}_{be} - \dot{Q}_v$	kW, MW	$\dot{Q}_v$ a hálózati hővesztés,
19.	$\eta_{ht} = \frac{\dot{Q}_{be}}{\dot{Q}_{eh}}$		a hőtermelés hatásfoka, ahol $\dot{Q}_{eh}$ a kazánba bevitt energiahordozó energiatartalma,
20.	$E = \int \dot{Q}_{eh} d\tau$	J, kJ, GJ	a felhasznált energiahordozó mennyisége.

10.2. A névleges szabályozási diagramok készítésének elvei

A hőszállítással kapcsolatos egyik legfontosabb alapfogalom az ún. névleges szabályozási diagram, amely a külső hőmérséklet függvényében – ún. minőségi szabályozás esetén – állandó forróvíz-tömegáram mellett azokat az előremenő és visszatérő vízhőmérséklet-értékeket tartalmazza, amelyek a fogyasztói hőigények

(fűtési és HMV-igények) kielégítéséhez a hő szállításához szükségesek. A névleges szabályozási diagramok alapvetően függenek a primer oldalon alkalmazott kapcsolástól, elsősorban attól, hogy a fűtési és HMV-hőcserélők sorosan vagy párhuzamosan vannak kapcsolva.

A névleges szabályozási diagramok a ma már általánosan alkalmazott változó tömegáramú keringetés esetén a hőigények várható értékére készülnek. A fogyasztók a várható értékhez képest mutakozó igényeiket a hőleadókba jutó tömegáram fojtásával állítják be. Az ehhez tartozó új szivattyúmunkapont beállítása a szivattyú fordulatszámának változtatásával történik.

A névleges szabályozási diagramok elkészítésének menete az alábbi lépésekből áll:

1. meghatározzuk a hőszükséglet várható értékeit a külső hőmérséklet függvényében,
2. a hőszállítási egyenletből meghatározzuk a várható hőigények kielégítéséhez szükséges hőmérsékletlépcső – az előremenő és visszatérő forró víz hőmérsékletek különbségének – értékeit a külső hőmérsékletek függvényében,
3. előállítjuk a szekunder rendszer hőmérséklet-szabályozási diagramját,
4. a szekunder fűtési víz hőmérsékletek és a primer forró víz hőmérsékletlépcső-értékeiből előállítjuk a primer előremenő és visszatérő vízhőmérsékletek értékeit.

A fűtési hőigény várható értéke a külső hőmérséklet függvényében:

$$\dot{Q} = (kA + nV \rho c) (t_b - t_k), \quad (10.2.1)$$

ahol

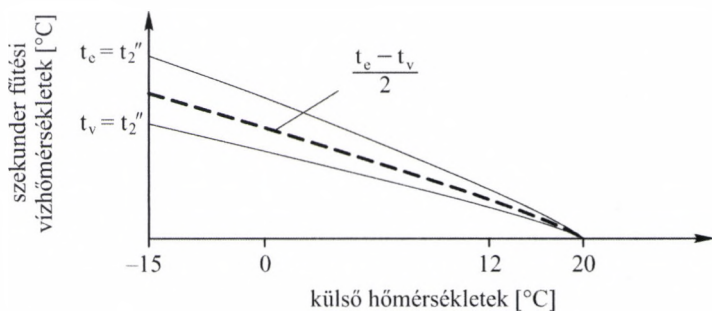
- A a fűtött tér határoló felülete,
- V a fűtött tér térfogata,
- k a határoló felület eredő hőátviteli tényezője,
- n légcseres-szám,
- ρ a levegő sűrűsége,
- c a levegő fajhője,
- t_b a fűtött tér levegőhőmérséklete,
- t_k a külső levegő hőmérséklete.

A radiátor által leadott hő, amennyiben ismerjük a radiátor felületét:

$$\dot{Q}_{\text{rad}} = k A_{\text{rad}} \left(\frac{t'_2 + t''_2}{2} - t_b \right) = k_{\text{rad}} A_{\text{rad}} \Delta t_k. \quad (10.2.2)$$

Ebben az egyenletben $\dot{Q}_{\text{rad}}$ és A_{rad} ismert, és $\dot{Q}_{\text{rad}}$ függvénye a külső (t_k) hőmérsékletnek. A $\dot{Q}_{\text{rad}}$ egyenlő a fűtött tér hőszükségletével, vagyis

$$\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k) = (kA + nV \rho c) (t_b - t_k). \quad (10.2.3)$$



10.2.1. ábra. A szekunder fűtési hőmérsékletszabályozási diagram

A k_{rad} értéke a radiátor közepes túlhőmérsékletének függvényében

$$k_{\text{rad}} = k_0 \Delta t_k^M,$$

ahol

$$M = 0,25-0,33;$$

$$k_0 = \text{konstans, értéke a radiátor típusától függ.} \quad (10.2.4)$$

Ezzel

$$\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k) = k_0 A_{\text{rad}} \Delta t_k^{1+M}. \quad (10.2.5)$$

A radiátor közepes túlhőmérséklete az (10.2.5) egyenletből a $\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k)$ függvényében meghatározható, azaz

$$\Delta t_k = \left[\frac{\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k)}{k_0 A_{\text{rad}}} \right]^{\frac{1}{1+M}}, \quad (10.2.6)$$

illetve

$$\frac{t_2' + t_2''}{2} - t_b = \left[\frac{\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k)}{k_0 A_{\text{rad}}} \right]^{\frac{1}{1+M}}. \quad (10.2.7)$$

Ha figyelembe vesszük a

$$\dot{Q}_{\text{rad}} = \dot{m}_2 c (t_2' - t_2'') \quad (10.2.8)$$

összefüggést, két egyenlet áll rendelkezésünkre a t_2' és t_2'' pontos meghatározására, miáltal megkapjuk a 10.2.1 ábrán ábrázolt két görbét a szekunder előremenő és visszatérő vízhőmérsékletek alakulására a külső hőmérséklet függvényében.

Az (10.2.7) és (10.2.8) egyenletekből a szekunder előremenő és visszatérő fűtővíz hőmérséklete:

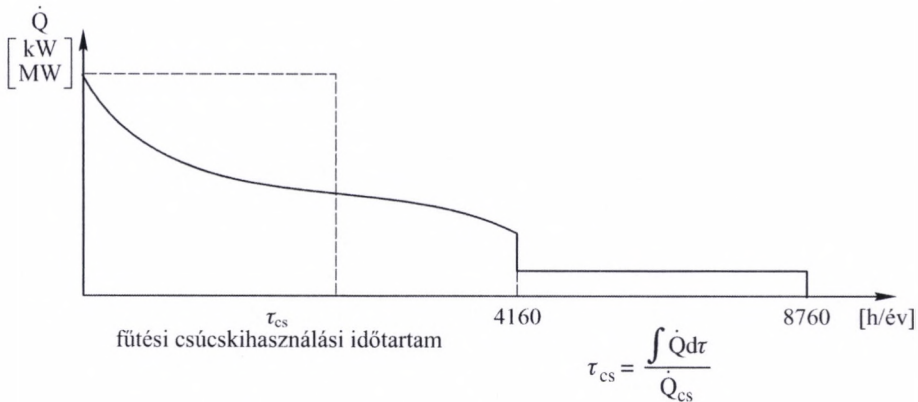
$$t'_2 = t_b + \left[\frac{\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k)}{k_0 A_{\text{rad}}} \right]^{\frac{1}{1+M}} + \frac{\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k)}{2 \dot{m}_2 c}, \quad t''_2 = t'_2 - \frac{\dot{Q}_{\text{rad}}(t_k)}{c \dot{m}_2}. \quad (10.2.9)$$

A (10.2.9) egyenlet alkalmazásához még további feltevésekkel kell élnünk, mégpedig:

- vagy felvesszük a szekunder keringetett tömegáram értékét ($\dot{m}_2$),
- vagy fel kell vennünk t'_2 és t''_2 értékét a méretezési (névleges) állapotra ($-12 \dots -15^\circ\text{C}$).

10.3. A hőigények rendezett gyakorisági diagramja, tartamdiagramja

A tartamdiagram (10.1.3. ábra) azt mutatja, hogy az év során mekkora az az időtartam, ameddig valamely értékű vagy annál nagyobb fogyasztói hőigény várhatóan fennáll. A tartamdiagram statisztikai érvényű. Sok év fogyasztási adatai alapján állítható össze. Rendelhetünk hozzá megbízhatósági szintet. A külső meteorológiai jellemzők statisztikája alapján – minden külső meteorológiai állapothoz meghatározott hőszükségletet alapul véve – előállítható elméleti úton is.



10.3.1. ábra A hőigények rendezett tartamdiagramja

10.4. A változó tömegáramú fűtővíz-keringetés szabályozása

A változó tömegáramú forróvíz-keringetési fűtésrendszerekben a hőleadóknál az ún. fojtásos szabályozást alkalmazzák. A fojtásos szabályozást termostatikus szeleppel valósítják meg. A szabályozó szelep fojtja a radiátorba érkező térfogatáramot, ezzel a vezetékszakaszhossz ellenállása megnő, s ezáltal csökken a hőleadóba jutó forróvíz-térfogatáram. Ha ez a fojtás jelentős mértékű, illetve a hálózaton több hőleadóban egyidejűleg beavatkozás történik, érzékelhetően megváltozik a hálózat eredő hidraulikai ellenállása, és a szivattyú új munkapontba kerül, a fogyasztók által igényelt forróvíz-térfogatáram és a szivattyú szállítása egyensúlyba kerül (M_1 munkapont).

Változtatható fordulatszámú szivattyúhajtás esetén – a kisebb forróvíz-térfogatáram igényhez – beállítható egy új, gazdaságosabb munkapont.

A termostatikus szelepekkel történő automatikus szabályozás alkalmazhatóságának az a feltétele, hogy bármely munkapontból legyen szó, a radiátorszelepre jutó nyomáskülönbségnek kisebbnek kell lennie egy határértéknél, általában 0,5 bar-nál. Ennek biztosítása céljából indokolt az ún. strangszabályozók beépítése, a strangra jutó nyomáskülönbség beállítása. A strangszabályozónak automatikusnak és dinamikusnak kell lennie. A fűtési rendszer beszabályozását meg kell előznie a rendszer hidraulikai analízisének, az áramlási kép modellezésének a különböző üzemállapotokban.

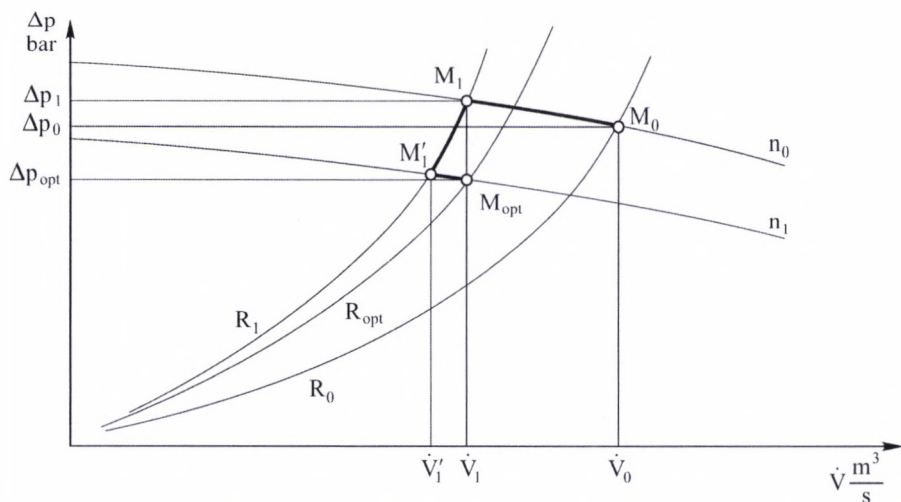
10.4.1. Az optimális munkapont meghatározása számítással

Az új, optimális elméleti munkapont – akkor lenne meghatározható, ha minden hőleadónál mérnénk az új térfogatáram-igényt és ismernénk a hálózat hidraulikai jellemzőit, az egyes hálózatelemek hidraulikai ellenállásait. Az optimális munkapont beállítását a 10.4.1. ábra szerint végezhetnénk.

A számítással meghatározott M_{1opt} szivattyúmunkaponthoz tartozó n_{1opt} szivattyúfordulatszám beállításakor a fogyasztók azt éreznék, hogy a megkívánt $\dot{V}_1$ térfogatáram helyett csak $\dot{V}'_1 < \dot{V}_1$ térfogatáram jut el hozzájuk (M_1 munkapont). Ezért a szabályozók az R_1 -hez tartozó fojtások mértékét csökkentik, és beállítják azokat a fojtásértékeket, amelyekkel a hálózat eredő hidraulikai ellenállása R_{1opt} , a keringetőszivattyú fordulatszámát pedig a szabályozó n_1 értékére állítja be.

Jelmagyarázat:

- $\dot{V}_0$ eredeti térfogatáram-igény, munkapont M_0 ,
- $\dot{V}_1$ módosult térfogatáram-igény, munkapont M_1 ,
- R_0 eredeti eredő hidraulikai ellenállás, munkapont M_0 ,



10.4.1. ábra. Az optimális szivattyú munkapont meghatározása változó tömegáramú forró víz keringetés esetén

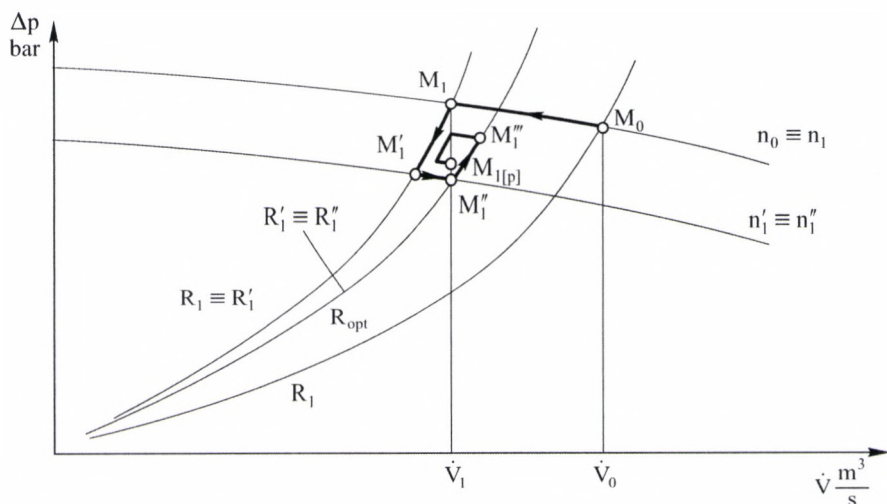
- R_1 a hőközponti fojtásokkal beállított új eredő hidraulikai ellenállás, munkapont M_1 ,
- R_{1opt} az igényelt $\dot{V}_1$ új forró víz-térfogatáramhoz tartozó optimális elméleti eredő hidraulikai ellenállás,
- M_{1opt} az igényelt $\dot{V}_1$ új forró víz-térfogatáramhoz tartozó optimális elméleti szivattyú munkapont.

10.4.2. Az optimális munkapont beállítása automatikus szabályozással

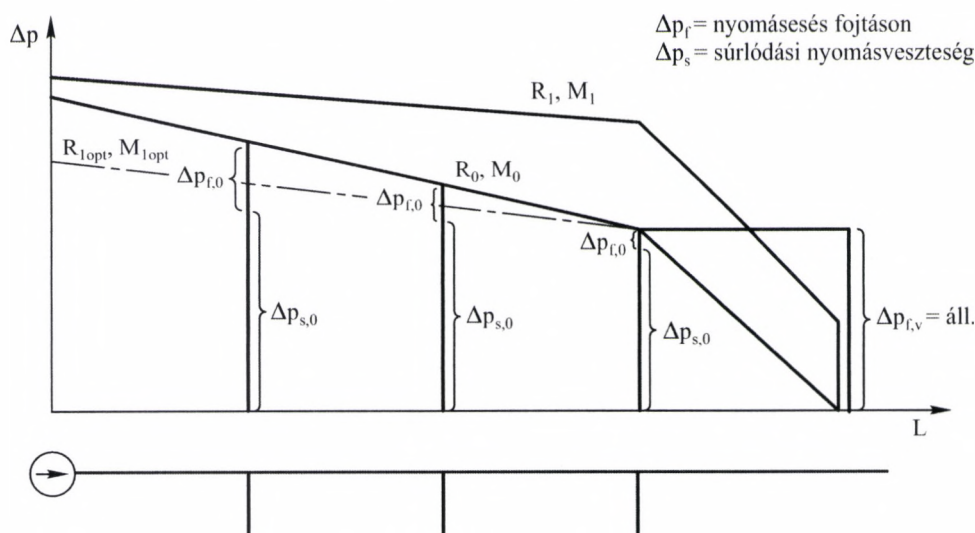
On-line, optimális folyamatirányítás lehetőségeinek hiányában az M_{1opt} munkapont beállítása (közelítő beállítása) automatikus, visszacsatolós szabályozással valósítható meg. A szabályozás történhet az ún. végponti nyomás vagy a betáplálási nyomás állandóságának megkötésével. A végponti nyomás állandóságára való szabályozás gazdaságosabb.

A végponti visszacsatolós szabályozásban a hálózat hidraulikai végpontjának nyomáskülönbség-értéket figyeljük, a szabályozó azt tartja állandó értéken. A szabályozás folyamata – ideális esetben – a 10.4.2. ábra szerint megy végbe (illetve hajtható végre), DDC szabályozóval tetszőleges időfüggvény szerint. A nyomásképváltozást a 10.4.3. ábra mutatja.

A fogyasztói hőközpontokban végrehajtott fojtások eredményeképpen a hálózat eredő hidraulikai ellenállása R_0 -ról R_1 -re változik, a szivattyú munkapontja M_0 -ból M_1 -be vándorol. A hálózat hidraulikai végpontjára előírt Δp nyomáskülönbség megnő az alábbi okok következtében:



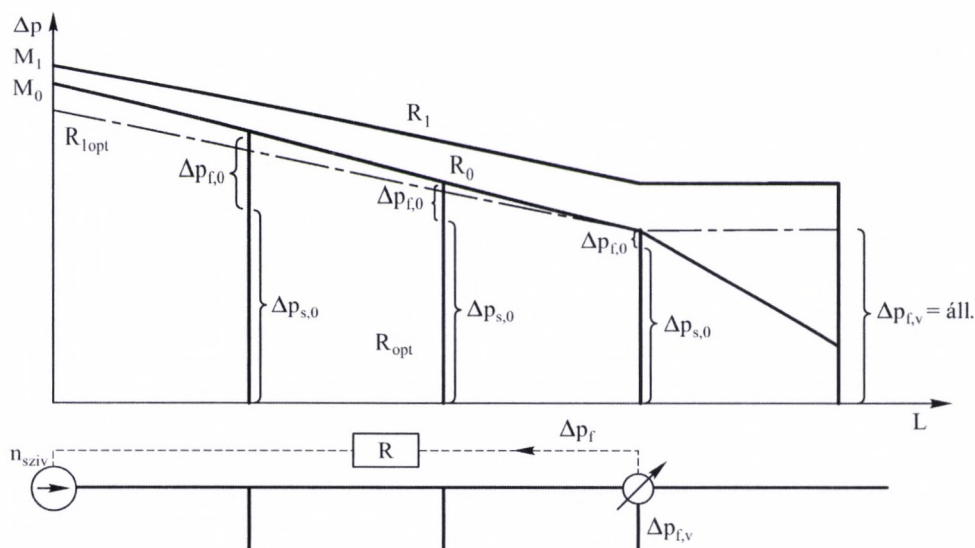
10.4.2. ábra. Az optimális munkapont beállítása automatikus szabályozással



10.4.3. ábra. A hálózati nyomáskép változása a különböző szivattyú-munkapontokban fordulatszám-szabályozás esetén

- a szivattyú által előállított nyomáskülönbség megnő,
- a szivattyú kevesebb térfogatáramot szállít, és a hálózaton, a gerincvezetékben a nyomásveszteség csökken.

Az M_1 munkapontban a szivattyú fordulatszám-szabályozója beavatkozik és előírt függvény szerint csökkenti a szivattyú fordulatszámát addig, amíg a végponti Δp az előírt értékre csökken. Ekkor a szivattyú munkapontja M'_1 . Ezt köve-

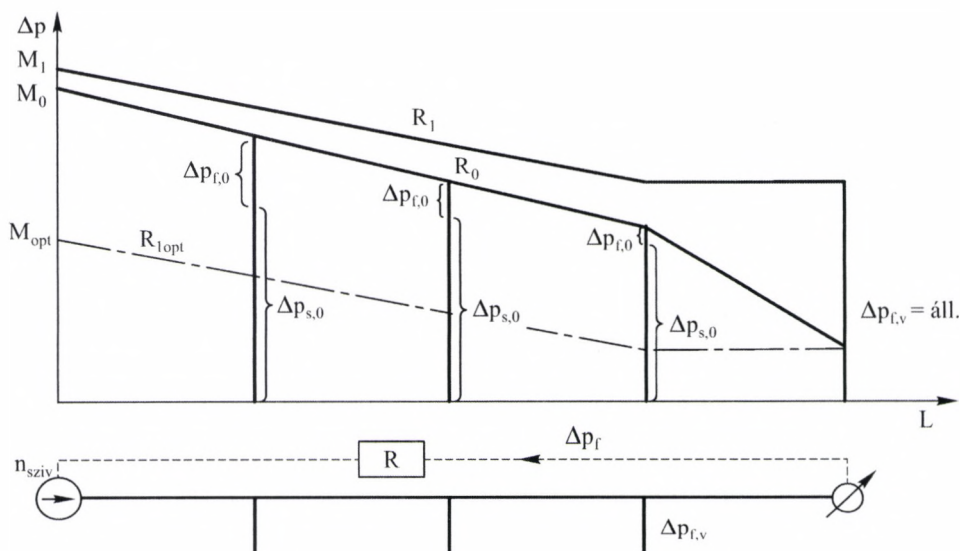


10.4.4. ábra. A hidraulikai végpontról történő szivattyú – fordulatszám szabályozás helyes megoldása. Ha a végponti fogyasztó kizárja magát, a szabályozó – $\Delta p_{f,v}$ megkövetelt állandósága miatt – M_{opt} munkapontba viszi a hálózatot, de az ellátás továbbra is biztosított.

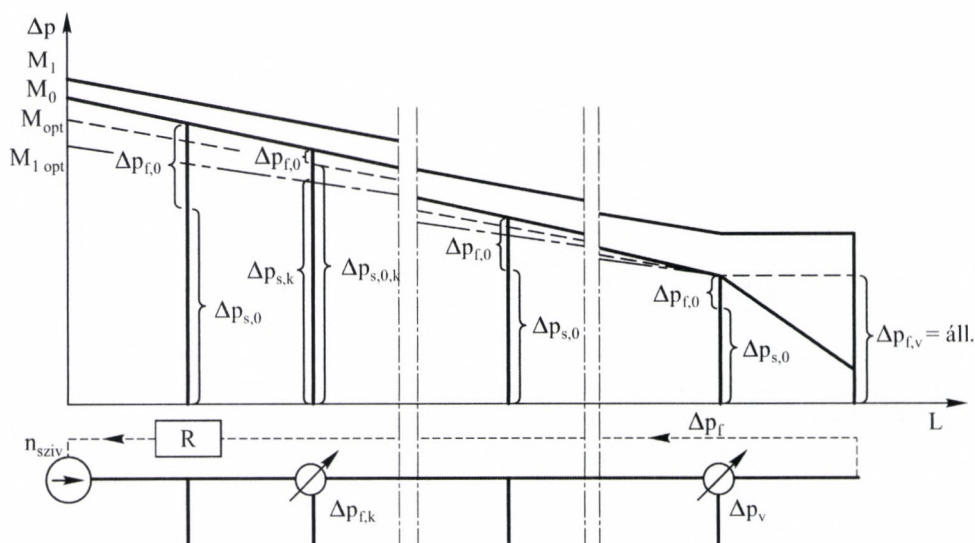
tően a termostatus szelepek – a légtér hőmérsékletének csökkenésén keresztül – érzékelik, hogy a V_l forróvízáram-igényük helyett $V'_l < V_l$ forróvíz-áram jut hozzájuk, és ezért a szabályozószelepek nyitnak, és visszaszabályoznak a V_l igényhez tartozó M_l munkapontba, illetve az R_l hálózati ellenállás-karakteristikára. Ennek következtében a szivattyú fordulatszám-szabályozója ismét növelni kezdi a szivattyú fordulatszámát addig, amíg be nem áll az előírt végponti Δp . A szivattyú ekkor az M_l munkapontban van. Az M_{opt} munkapontot a szabályozás tehát iterációs lépések sorozatával állítja be.

Az automatikus, végponti nyomáskülönbségről történő szabályozásban a nyomáskülönbség – jeladó helyes elhelyezése a 10.4.4. ábra szerint oldható meg. A helytelen megoldást a 10.4.5. ábra mutatja.

Nagy rendszerek esetében végponti nyomáskülönbségről történő szabályozás esetében előfordulhat – a végponti hőleadó erős fojtásakor, és a hálózat elején lévő fogyasztók eredeti vízárám – igényének megmaradása mellett –, hogy a hálózaton egyes fogyasztók ellátatlanok maradnak. Ez a probléma részben kiküszöbölhető a hálózat közbenső pontjain elhelyezett nyomáskülönbség-jeladók alkalmazásával, amelyekre szintén előírjuk a nyomáskülönbség állandó értéken tartását (10.4.6. ábra). Ez a megoldás persze erős korlátozást jelent az elérhető fordulatszám-csökkentésre és a vízárám-keringetésre nézve abban az esetben, amikor ezek a fogyasztók is csökkentik a fogyasztásukat, és főlegesen tartják a környezetükben magas értéken az előremenő és visszatérő vezeték közötti nyomáskülönbséget.



10.4.5. ábra. A hidraulikai végponttól történő szivattyú – fordulatszám szabályozás rossz megoldása. Ha a végponti fogyasztó kizárja magát, a szabályozó – $\Delta p_{f,v}$ megkövetelt állandósága miatt – M_{opt} munkapontba viszi a hálózatot. Az ellátás ekkor már nem biztosított.



10.4.6. ábra. Kiterjedt rendszerben a szivattyú fordulatszám szabályozás megoldása több pontból vett jel segítségével. Probléma: a k fogyasztó a $V_{0,k}$ vízárám igényéhez a $\Delta p_{f,k}$ nyomáskülönbség nem lenne elég, ezért a $\Delta p_{s,0,k}$ állandóságával felül kell bírálni a $\Delta p_{f,k}$ állandóságát. Ha viszont $V_k < V_{0,k}$, akkor megengedhető lenne $\Delta p_{f,k} < \Delta p_{s,0,k}$. Ez már csak intelligens folyamatirányítással oldható meg. Nagy rendszerekben a $\Delta p_{f,v} = \text{áll.}$ feltételre való szabályozást felül kell vizsgálni a hálózat közbenső pontjáról vett $\Delta p_{f,k}$ jellel törtéző összehasonlítással

10.4.3. A szivattyú fordulatszám-szabályozásának időfüggvénye

Ha a hőleadókban beavatkozások (fojtások) történnek, a szivattyú munkapontja M_0 -ból M_1 -be vándorol. Ez a „vándorlás” időben folyamatos is lehet, és elméletileg nem biztos, hogy M_1 helyzete stabilizálódik. ennek következtében a végponti nyomáskülönbség értéke is folyamatosan változhat, ingadozhat.

10.4.3.1. Szabályozás „lépés-megállás-lépés” stratégiával

Ha a hidraulikai végponti nyomáskülönbség $\Delta p'_{fv}$ értéke megemelkedett, a szivattyú fordulatszámát csökkentjük akkora Δn értékkel, amelynek eredményeképpen a hidraulikai végponti nyomáskülönbség az M_0 munkaponthoz tartozóan $\Delta \Delta p_{fv}$ értékkel csökken. Ekkor megállunk $\Delta \tau$ ideig, és ismét összehasonlítjuk a tényleges Δp_{fv} értéket a parancsolt $\Delta p_{fv,0}$ értékkel.

Ha továbbra is fennáll $\Delta p_{fv}(\tau) > \Delta p_{fv,0} + \Delta \Delta p_{fv}$, a fordulatszám-csökkentést Δ értékkel tovább folytatjuk.

A szivattyú által előállított nyomáskülönbség és a szivattyú fordulatszámának összefüggése (parabolikus közelítéssel):

$$\Delta p = A(n) \dot{V}^2 + B(n) \dot{V} + C(n). \quad (10.4.1)$$

A hálózat eredő ellenállásának függvényében

$$\Delta p = R \dot{V}^2. \quad (10.4.2)$$

Ebből:

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{\Delta p}{R}}. \quad (10.4.3)$$

Ezt behelyettesítve a (10.4.1) egyenletbe:

$$\Delta p = A(n) \frac{\Delta p}{R} + B(n) \sqrt{\frac{\Delta p}{R}} + C(n). \quad (10.4.4)$$

Ebből az implicit egyenletből meghatározható, hogy a kívánt Δp szivattyú emelőmagassághoz mekkora fordulatszám szükséges.

A nyomásváltozás sebessége a fordulatszám, illetve fordulatszám-változás függvényében:

$$\frac{d\Delta p}{dn} = \frac{dA(n)}{dn} \cdot \frac{\Delta p}{R} + \frac{A(n)}{R} \cdot \frac{d\Delta p}{dn} + \frac{dB(n)}{dn} \sqrt{\frac{\Delta p}{R}} + \frac{B(n)}{2R} \cdot \Delta p^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d\Delta p}{dn} + \frac{dC(n)}{dn}. \quad (10.4.5)$$

Rendezés után:

$$\frac{d\Delta p}{dn} = \frac{\frac{dA(n)}{dn} \cdot \frac{\Delta p}{R} + \frac{dB(n)}{dn} \sqrt{\frac{\Delta p}{R}} + \frac{dC(n)}{dn}}{1 - \frac{A(n)}{R} - \frac{1}{2} \cdot \frac{B(n)}{R} \cdot \Delta p^{-1/2}}. \quad (10.4.6)$$

Ebből a szivattyú emelőmagasságának időbeli változása a fordulatszám időbeli változásának függvényében (a lengések elhanyagolása esetén):

$$\frac{d\Delta p}{d\tau} = \frac{dn}{d\tau} \cdot \frac{\frac{dA(n)}{dn} \cdot \frac{\Delta p}{R} + \frac{dB(n)}{dn} \sqrt{\frac{\Delta p}{R}} + \frac{dC(n)}{dn}}{1 - \frac{A(n)}{R} - \frac{1}{2} \cdot \frac{B(n)}{R} \cdot \Delta p^{-1/2}}. \quad (10.4.7)$$

10.4.3.2. A megengedett fordulatszám-változtatási sebesség kiszámítása

Legyen egységugrás gerjesztés mellett a rendszer valamely vizsgált pontján a nyomásemelkedés átmeneti függvénye (méréssel meghatározva) $h(t)$.

Nem egységugrás gerjesztés esetén a Duhamel-tétel szerint a nyomásváltozás:

$$\Delta p(\tau) = \int_0^t x(\tau) h'(t - \tau) d\tau, \quad (10.4.8)$$

ahol $x(\tau)$ a gerjesztőfüggvény, h' az átmeneti függvény idő szerinti deriváltja.

Legyen a gerjesztés a szivattyú fordulatszámának változtatása, és a rendszer valamely érzékeny pontján az erre adott választ keressük:

$$\Delta p(\tau) = \int_0^t \frac{dn}{d\tau} h'(t - \tau) d\tau. \quad (10.4.9)$$

A feladatot inverz módon kell megfogalmaznunk, milyen lehet a szivattyú fordulatszámának változtatása ahhoz, hogy $\Delta p(\tau)$ ne legyen veszélyes mértékű. Ekkor a Duhamel-integrál egy integrálegyenlet formáját ölti, ahol adott $\Delta p(\tau)$ és keressük $\frac{dn}{d\tau}$ függvényt.

11. A MELEG VIZES FŰTÉSI RENDSZEREK ÜZEMELTETÉSÉNEK KOMPLEX TERVEZÉSE

Meglévő rendszerek üzemeltetésének tervezése azt jelenti, hogy bármely időszakban és napszakban – tetszőleges meteorológiai körülmények között – akkora teljesítménnyel állunk a fogyasztói hőközpontokban a fogyasztók rendelkezésére, amelyből a fogyasztók a hőigényüket ki tudják elégíteni. Az üzemeltetés tervezés elsősorban napszaki, illetve rövidtávú igény előrejelzési és irányítási szabályozási feladatok megoldását jelenti. Az üzemeltetés tervezése és irányítása történhet optimum-orientáltan, illetve az optimalizáció kitűzésének mellőzésével. A hőellátó-rendszerek műszaki fejlettsége, műszerezettsége, telemechanikája, az üzemvitel-figyelő és adatátviteli rendszerek jelenléte indokoltta teheti az optimum-orientált üzemszervezést és üzemirányítást.

11.1. A hőellátás üzemeltetésének alapelvei és feladatai

1. A betáplált hő és a fogyasztás összhangjának megteremtése kétszintű szabályozással .

Szabályozás a hőforrásban:

- tüzelés szabályozása,
- az előremenő víz hőmérséklet szabályozása.
- a keringetett víz áram szabályozása változtatható fordulatszámú szivattyúhajtással.

Szabályozás a felszálló vezetékpáron, strangszabályozás.

Szabályozás a hőleadón:

- víz áram-szabályozás kézi szabályozással vagy termosztatikus radiátorszelep alkalmazása.

2. Üzembiztonság figyelése és fenntartása.
3. Karbantartási feladatok végrehajtása.
4. A fentiekkel kapcsolatos döntések meghozatala (heorisztikusan, vagy a gazdasági optimum elve alapján döntési modellek segítségével).

11.2. Távhőszolgáltató rendszerre illeszkedő fűtési rendszerek optimális üzemeltetése

Optimális üzemeltetésen azt az üzemeltetési módot értjük, amelynek során a fogyasztók hőigényét előírt biztonsággal kielégítjük, és eközben a felmerülő összes üzemeltetési költség a lehető legkisebb, matematikai értelemben minimális.

A melegvíz-fűtési rendszerek optimális üzemeltetésének modellezésében alapvető irányítási-döntési változónk a hőtermelés-hőbetáplálás mértéke (Q_{bc}), illetve az előremenő forróvíz-hőmérséklet és a tömegáram. A forró víz hőmérsékletével és a tömegárammal további szabályozástechnikai tagokon keresztül a szabályozott jellemző értékét, a fűtött helyiség hőmérsékletét szabályozzuk.

Az üzemeltetés akkor optimális, ha

$$K(\tau) = \int K_{ii}(Q_{bc}, t_c, m) d\tau \rightarrow \min!,$$

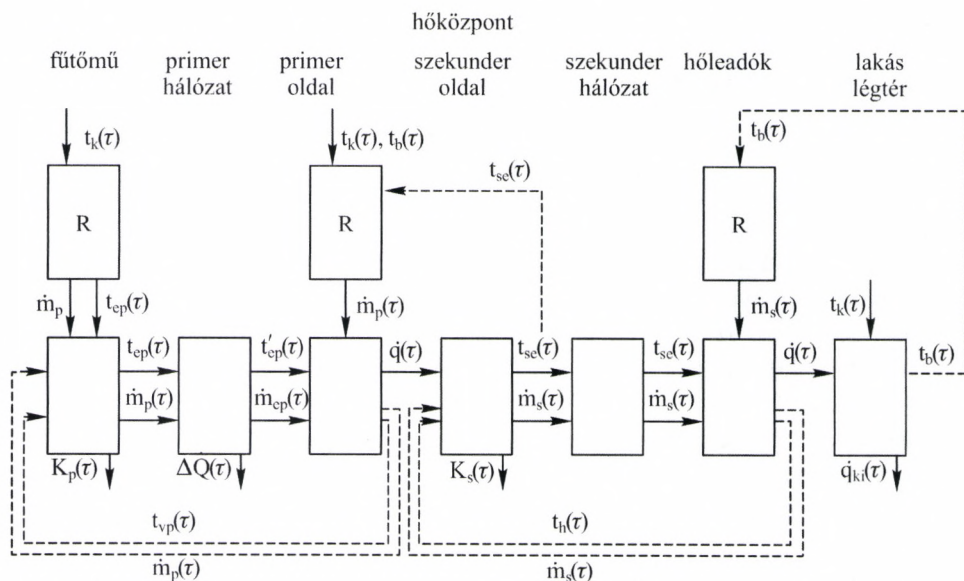
és e közben kielégítjük az alábbi mellékfeltételeket:

A belső hőmérséklet

$$t_{bi} = t_{bi}(\tau) \geq R_i(\tau),$$

előírt függvény.

A belső hőmérséklet a külső meteorológiai tényezők és a szabályozás függvénye:



Szabályozási kritérium $t_b(\tau) \geq t_R(\tau)$

Szabályozási cél $\int K(\tau) d\tau \rightarrow \min!$

11.2.1. ábra Távfűtési rendszerek üzemirányításának egyszerűsített döntési modellje

$$t_{bi} = t_{bi}(M_1, M_2, \dots, M_n, t_c, m),$$

ahol:

$M_1, M_2, \dots, M_n$ meteorológiai tényezők.

A szabályozási feladat: a mindenkori hőigények kielégítése úgy, hogy az üzemeltetés költsége minimális legyen.

Ha ismert $Q(t)$, akkor

$$t_c(\tau) = ?$$

$$m(\tau) = ?$$

$$t_v(\tau) = ?$$

$$\Delta p(\tau) = ?$$

úgy, hogy $K(\tau) \rightarrow \min. !$

A szabályozási modellt, mint döntési feladatot a 11.2.1. ábra mutatja.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Abramowitz, M.–Stegun, I. A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 1966.
- Ádám Gy.–Bálint P.–Fekete Á.–Hársing L.: Az élettan tankönyve. Medicina, Budapest, 1968.
- ASHRAE Guide. 1954.
- ASHRAE Handbook of Fundamentals. New York, 2004.
- Bachmann, A.: Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. Springer Verlag, Berlin, 1938.
- Bánhidi L.: Kis hőtehetetlenségű sugárzó mennyezet fűtések. Épületgépészet XI-II. (1964) 127-130.
- Bánhidi L.: Nagycsarnokok sugárzó ernyős fűtése. ÉTI Tervezési Tájékoztató. Budapest, 1966.
- Bánhidi L.: Zárt terek hőérzeti méretezése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
- Bánhidi, L.: Thermal comfort studies in Hungary. International Conference on Human-environment systems. Tokyo 1991. Pergamon Press, 1993, pp 23-25.
- Bánhidi L.: Ember, épület energia. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1994.
- Bánhidi L.–Kajtár L.: Komfortelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- Carlsaw, H. S.–Jaeger, S. C.: Conduction of heat in solids, 2nd Ed. Clarendon Press, Oxford, 1959.
- Chrenko, F. A.: Heated ceilings and comfort. J. of the Inst. of Heating and Ventilating Engineers 20 (1963) 375-396. és 21 (1963) 145-154.
- CR 1752: Ventilation for Buildings Design Criteria for the Indoor Environment. CEN Report 1998.
- CR-MSZ 1752: Ventilation for Buildings. Brussels, 1998.
- Du Bois, E. F.: The mechanism of heat loss and temperature regulation Stanford University Press, Stanford, 1937.
- Fanger, P. O.: Thermal comfort. McGraw Hill, New York, 1973.
- Fanger, P. O.–Bánhidi, L.–Olesen, B.–Langkilde, G.: Comfort limits for heated ceilings. ASHRAE Transaction 86 (1980) Pt2.

- Garbai L.: A hőveszteség számítása és mérése az ipari energetikában. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987,
- Garbai L.–Bánhidi L.: Hőátvitel az épületgépészeti és ipari berendezésekben. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2001.
- Garbai, L.–Barna, L.–Bartal, I.–Méhes, Sz.: On the system theory of the heat flux. Two inputs problems. Application of fractional differential and integral operators, WSEAS Transactions on Heat and Mass transfer, Issue 4, Volume 1, April 2006, page 506-515
- Garbai L.–Dezső Gy.: Áramlás energetikai csővezetékrendszerekben. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986
- Garbai, L.–Fényes, T.: On the system theory of the heat flux, I–II–III. Hungarian Journal of Industrial Chemistry, Budapest,
- Garbai, L.–Krope, J.–Bartal, I.–Méhes, Sz.: Theory of linear and non-linear transient heat conduction in composite systems, WSEAS Transactions on Heat and Mass transfer, Issue 4, Volume 1, April 2006, page 398-408.
- Gröber–Eck–Grigull: Grungesetze der Wärmeübertragung. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.
- Hardy, J. D.–Du Bois, E. F.: Basal metabolism, radiation, convection and evaporation at temperature of 22 to 35°CJ. of Nutrition 15 (1938) 477.
- Harmatha A.: Határréteg egyenletek és hasonlóság. Energia és Atomtechnika. XXVI. évf. 1973. 10.sz.
- Huber, A.: Eine Näherungsmethode zur Auflösung Volterrascher Integralgleichungen. Monatshefte für Mathematik und Physik, 47 (1939), 240-246. oldal
- Imre L.: Hőátvitel összetett szerkezetekben. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983.
- Jászay T. : Műszaki Hőtan. Hőközlés. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- Kollmar, A.–Liese, W.: Die Strahlungsheizung. R. Oldenbourg, München, 1957.
- Korn, A. G.: Matematika mérnököknek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- Körmendi I.: Faxen módszere rétegbe ágyazott csőrendszer hőleadásának számítására. Épületgépészet, XIII. (1967) 11-17.
- Lengyel, Gy.: Könnyűszerkezetes ipari csarnok gázüzemű infravörös fűtése. Diplomaterv, Budapest, BME, 1978.
- Lipták A. – Garbai L.: A távfűtések gazdaságosságát befolyásoló tényezők vizsgálata. Energia és Atomtechnika. XXXXI. évf. 10-11. sz. 1979.
- Lükov, A. V.: Teoria teploprovodnosti, Vyssaja skola, Moscow, 1967.
- Macskási Á.: Nagycsarnok sugárzó fűtése. MTI Jegyzet, Budapest, 1968.
- Macskási Á.: Központi fűtés I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- Macskási Á.: Sugárzó fűtés. Egyetemi jegyzet. Budapest, 1973.
- Macskási Á.–Bánhidi L.: Sugárzó fűtések. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.
- Mc Nall, Jr. P.E.–Biddison, R.E: Thermal and Comfort Sensations of Sedentary Person Exposed to Asymmetric Radiant Fields. ASHRAE Trans. 76. I., 1970.

- Menyhárt J.: Az épületgépészet kézikönyve. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
- Menyhárt J.–Beck I.–Garbai L.: Melegtechnológiai szigetelő szerkezetek fejlesztése. Kutatási zárójelentés. BME I. Épületgépészeti Tanszék, 1984.
- Molnár Z.: Beépített sugárzó fűtés hőleadásának számítása Rydberg–Huber-eljárással és ennek összehasonlítása más számítási módokkal. Épületgépészet IX. (1960) 81-89.
- Nielsen, M.–Pedersen, L.: Studies on the heat loss by radiation and convection from the clothed human body. Acta Physiol. Scand 27 (1952).
- Olsen, B. W.: Thermal Comfort Requirements for Floors. Meeting of the Commission E1 (Air Conditioning) of the International Institute of Refrigeration in Belgrade, 16-18. 1977.
- Olsen, S.–Fanger, P. O.–Jensen, P.B.–Nielsen, O. J.: Comfort limits for man exposed to asymmetric thermal radiation. Proc. of the CIB Commission W45 (Human requirements) Symp. Thermal Comfort and Moderate Heat stress Building Research Station, London, 1972.
- Pleszkás I. – Garbai L.: Melegtechnológiai berendezések hővédelme. Magyar Népköztársasági Országos Szabványjavaslat, az MSZ 4674/1-4. egyes részei helyett. Építéstudományi Egyesület gondozásában. 1985.
- Rapp, G. M.–Gagge, A. P.: High intensity radiant heat. ASHRAE Guide and Data Book Systems, (1971).
- Ražnjevici, K.: Hőtechnikai táblázatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.
- Rohsenow, W. M.–Hartnett, J. P.: Handbook of Heat Transfer. McGraw-Hill Book Company, 1973.
- Rubner, M.: Archiv für Hyg. 1896. 27.
- Rydberg, J.–Huber, Ch.: Varmeavgivning fran Röi i Betong. Eller Mark Svenska Varme och Sanitetstekniska Föreningens Handlingar IX. (1964).
- Völgyes I.: Fűtéstechnikai adatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- Wenzel, H. G.–Müller, E. A.: Untersuchung der Behaglichkeit des Raumklimas bei Deckenheizung. Internat. Z. Physiol., Arbeitsphysiol. 16, 335-355, 1967.
- Winslow, C. E.–Harrington, L. P.: Temperature and human life. Princeton Univ. Press, Princeton, 1949.

JELÖLÉSEK

Jel Megnevezés

Latin betűk

A	felület, keresztmetszet
a	hőmérséklet-vezetési tényező
a	állandó
a	hosszúság, távolság
a	hődiffúziós
B	állandó
B _i	Biot-szám
b	szélesség, távolság
b	állandó
C	állandó
C	sugárzási együttható
c	fajlagos hőkapacitás (fajhő)
D	átmérő
d	átmérő
E	az emberi test hőleadása
F	korrekciós tényező
f	felületi tényező, korrekciós tényező
Gr	Grashof-szám
H	belső hőfejlődés
h	magasság
I	ruházat szigetelőképessége
j	hőáramsűrűség
K	Prandtl-számok viszonya
k	hőátviteli tényező
L	hosszúság, jellemző méret
L	légzéssel leadott hő
l	hosszúság

M	metabolizmus
N	érvényességi kritérium
Nu	Nusselt-szám
p	nyomás
P	Prandtl-számok viszonya
Pr	Prandtl-szám
Q	hőleadás
$\dot{Q}$	hővesztesség, hőteljesítmény
$\dot{q}$	fajlagos hőleadás
r	sugár
R	hővezetési ellenállás, hőátadási ellenállás, hőátviteli ellenállás, sugár, hidraulikai ellenállás
Re	Reynolds-szám
s	komplex változó
T	abszolút hőmérséklet
T	hőmérséklet
t	hőmérséklet
v	sebesség
$\dot{V}$	térfogatáram
w	sebesség
x	távolság
y	fűtőcső és ernyőlemez kapcsolatának korrekciós tényezője

Görög betűk

α	hőátadási tényező
β	köbös hőtágulási együttható
Δ	különbség
δ	rétegvastagság
ε	emissziós tényező
Θ	Laplace-transzformált hőmérséklet
κ	hőátbocsátási tényező a fűtött rétegből a környezetbe
κ	hődiffuzivitás
λ	hővezetési tényező
Λ	hőmérséklet-behatolás hullámhossza
ν	kinematikai viszkozitás
$\bar{\nu}, \nu_k$	a hőátadó közeg közepes kinematikai viszkozitása (a közeg és a hőátadó fal hőmérsékletének számtani átlagára vetítve)
ξ	távolság
ρ	sűrűség
σ	hősugárzási együttható

σ	Boltzmann-állandó
ϑ	túlhőmérséklet
ϕ	hőáram
ϕ	közepes besugárzási tényező
φ	hőáramsűrűség
φ	besugárzási tényező
Ψ	szög
τ	idő

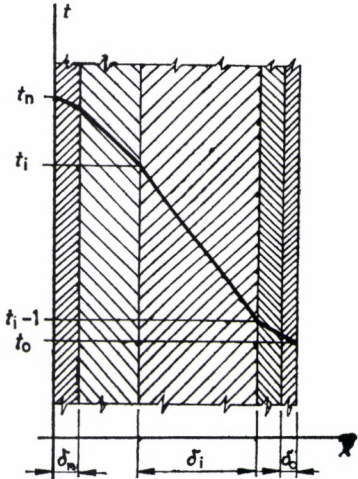
Indexek

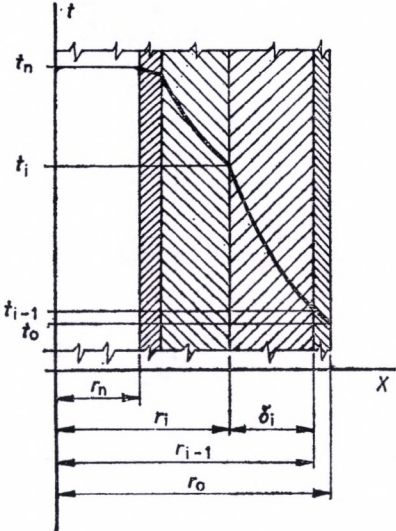
A	felület
b	bőr
bf	bőrfelület
cl	ruházat
cli	ruhadarabok
cs	cső
Du	Du Bois
e	egyenértékű felület
ei	i-edik egyenértékű felület
e	felfelé
e	eleje
eff	effektív, tervezett
F	fal
H	hengerre vonatkozó
h	hideg
h	hőáramra utal
hs	hőáramsűrűségre utal
i	hővezető réteg
i	lefelé
ij	i és j felület között
ir	infravörös sugárzásos hő
k	környezet
k	konvekciós
k	közepes
k	kölcsönös
k,i	i-edik réteg közepes jellemzője
ks	közepes sugárzási
kü	külső
l	vonalmenti, hosszúságegységre vonatkoztatott
lam	lamináris
M	mennyezet

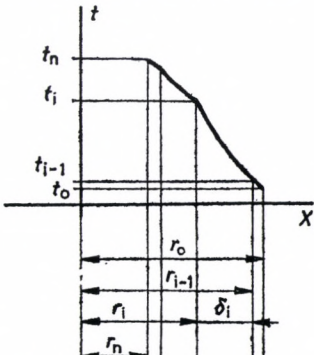
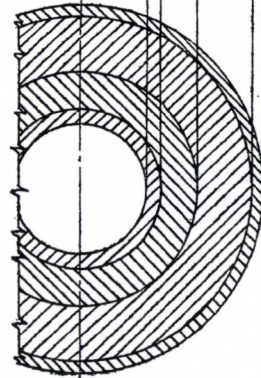
m	meleg
me	megengedett
n	rétegszám
n	n-edik réteg felülete (meleg oldal)
n	nem sugárzó
n,0	az n- és a 0 indexű hely között
n,0	az n-edik réteg meleg felülete és a 0-dik réteg hideg felülete
2,1	a 2 és az 1 indexű hely között
o	leárnycolt rész
P	padló
P	ember (person)
p	ember (person)
re	rejtett
S	síkfelületre vonatkozó
s	sugárzási
s	sugárzó fűtőtest
sz	szigetelés
tur	turbulens
v	vonakoztatási felület
v	vezetési
v	vége
vi	i-edik rétegre vonatkozik
w	fűtőközeg hőmérséklete
w	fűtött fal hőmérséklete

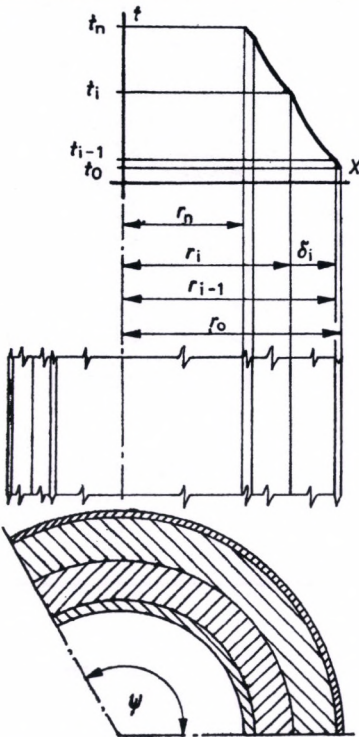
I. FÜGGELÉK

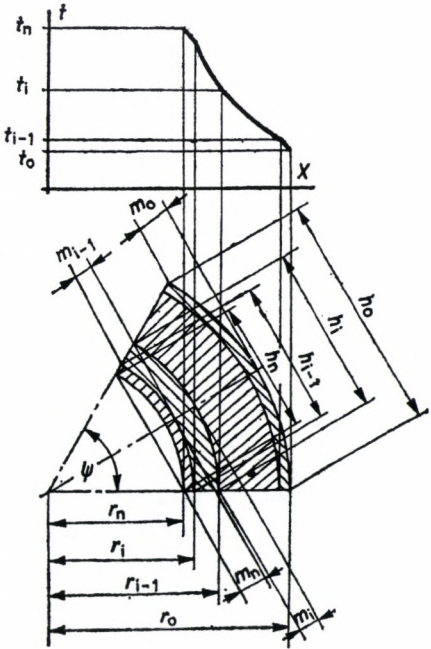
Hővezetési ellenállások különböző geometriákra és
hővezetési anyagjellemzők

Szerkezet	Felület, egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hőveze- tési ellenállás
Sík fal 	A határfelület geometriai alakjának megfelelően számítandó	$\frac{A_0}{A_i} \quad \frac{A_i}{A_n}$	$R_v = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$

Szerkezet	Felület, egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Hengeres fal	 $A = 2\pi r l$	A_0	$R_v = r_o \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_o \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
		A_n	$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
	$A_{e,i} = \frac{2\pi(r_{i-1} - r_i)}{\ln \frac{r_{i-1}}{r_i}}$	A_0	$R_v = A_0 \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
	$A_{e,i} = \frac{A_{i-1} - A_i}{\ln \frac{A_{i-1}}{A_i}}$	A_n	$R_v = A_n \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

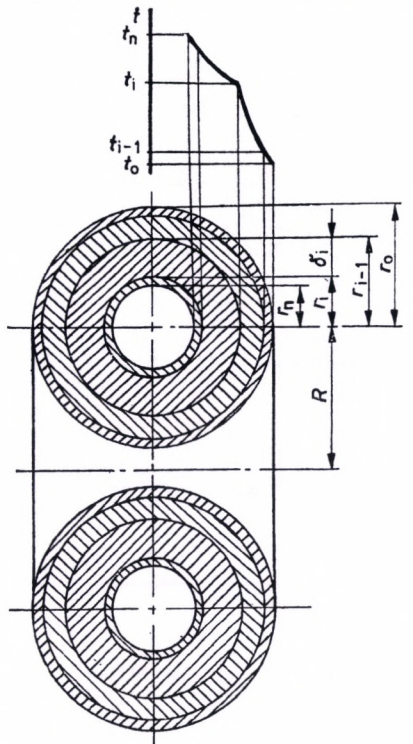
Szerkezet	Felület, egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Gömbfal	 $A = 4\pi r^2$	A_0	$R_v = r_o^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i-1}} \right)$
		A_n	$R_v = r_n^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i-1}} \right)$
	 $A_{e,i} = \sqrt{A_{i-1} A_i}$	A_0	$R_v = A_0 \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
		A_n	$R_v = A_n \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

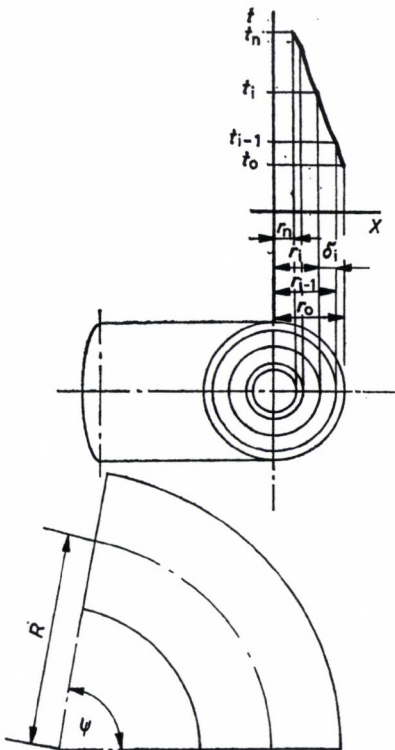
Szerkezet	Felület, egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Henger- szegmensfal	 $A = r l \bar{\psi}$	A_0	$R_v = r_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
		A_n	$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
	$A_{e,i} = \frac{\bar{\psi}(r_{i-1} - r_i)}{\ln \frac{r_{i-1}}{r_i}}$ $A_{e,i} = \frac{A_{i-1} - A_i}{\ln \frac{A_{i-1}}{A_i}}$	A_0	$R_v = A_0 \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
		A_n	$R_v = A_n \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

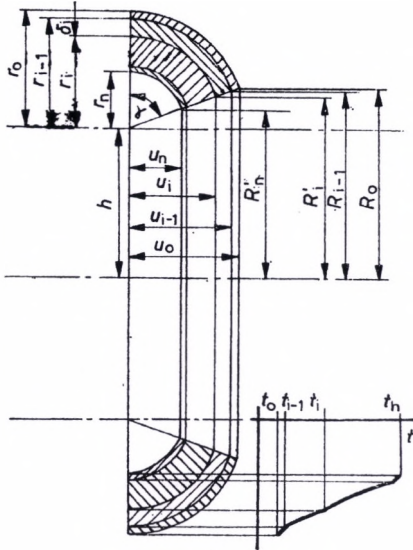
Szerkezet	Felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Gömbösiüveg fal 	$A = 2\pi r^2 \left(1 - \cos \frac{\psi}{2}\right)$ $A = 2\pi r m$ $A = \frac{\pi h^2}{2 \left(1 + \cos \frac{\psi}{2}\right)}$	A_0	$R_v = r_o^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i-1}} \right)$ $R_v = r_o^2 \left(1 - \cos \frac{\psi}{2}\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_{i-1}} \right)$ $R_v = r_o m_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_{i-1}} \right)$ $R_v = h_o^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{r_i}{h_i^2} - \frac{r_{i-1}}{h_{i-1}^2} \right)$ $R_v = A_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{r_i}{A_i} - \frac{r_{i-1}}{A_{i-1}} \right)$

Szerkezet		Felület, egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Gömbsüveg fal				$R_v = r_0^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i-1}} \right)$
				$R_v = r_n^2 \left(1 - \cos \frac{\psi}{2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_{i-1}} \right)$
				$A_n \quad R_v = r_n m_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_{i-1}} \right)$
				$R_v = h_n^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{r_i}{h_i^2} - \frac{r_{i-1}}{h_{i-1}^2} \right)$
				$R_v = A_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{r_i}{A_i} - \frac{r_{i-1}}{A_{i-1}} \right)$

Szerkezet		Egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Gömbsüveg fal		$A_{e,i} = \sqrt{A_i A_{i-1}} =$ $= 2\pi \left(1 - \cos \frac{\psi}{2}\right) r_i r_{i-1} =$ $= 2\pi \sqrt{r_i m_i r_{i-1} m_{i-1}} =$ $= \frac{2\pi m_i m_{i-1}}{1 - \cos \frac{\psi}{2}} =$ $= \frac{\pi h_i h_{i-1}}{2 \left(1 + \cos \frac{\psi}{2}\right)}$	A_0	$R_v = A_0 \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
			A_n	$R_v = A_n \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

Szerkezet	Felület, egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Tóruszfal	 $A = 4\pi^2 Rr$	A_0	$R_v = r_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
		A_n	$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
	$A_{e,i} = \frac{4\pi^2 R(r_{i-1} - r_i)}{\ln \frac{r_{i-1}}{r_i}}$ $A_{e,i} = \frac{A_{i-1} - A}{\ln \frac{A_{i-1}}{A_i}}$	A_0	$R_v = A_0 \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
		A_n	$R_v = A_n \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

Szerkezet	Felület, egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Toroidális ívfal 	$A = 2\pi\psi Rr$	A_0	$R_v = r_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
		A_n	$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$
			$R_v = r_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{A_{i-1}}{A_i}$
	$A_{e,i} = \frac{2\pi\psi R(r_{i-1} - r_i)}{\ln \frac{r_{i-1}}{r_i}}$ $A_{e,i} = \frac{A_{i-1} - A_i}{\ln \frac{A_{i-1}}{A_i}}$	A_0	$R_v = A_0 \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
		A_n	$R_v = A_n \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

Szerkezet	Felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Toruszszegecsfal 	$A = 2\pi r u +$ $+ 2\pi r h \arcsin \frac{u}{r}$	A_0	$R_v = r_0 \left(\frac{u_0}{h \arcsin \frac{u_0}{r_0}} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \times$ $\times \ln \frac{u_i + h \arcsin \frac{u_i}{r_i}}{u_{i-1} + h \arcsin \frac{u_{i-1}}{r_{i-1}}} \cdot \frac{r_{i-1}}{r_i}$
	$A = 2\pi^2 r \sin \bar{\gamma} +$ $+ 2\pi r h \bar{\gamma}$		$R_v = r_0 \left(\frac{r_0 \sin \bar{\gamma}}{h \bar{\gamma}} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \times$ $\times \ln \frac{r_i \sin \bar{\gamma} + h \bar{\gamma}}{r_{i-1} \sin \bar{\gamma} + h \bar{\gamma}} \cdot \frac{r_{i-1}}{r_i}$
	$A = 2\pi r (u + h \bar{\gamma})$		$R_v = r_0 \left(\frac{u_0}{h \bar{\gamma}} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{u_i + h \bar{\gamma}}{u_{i-1} + h \bar{\gamma}} \cdot \frac{r_{i-1}}{r_i}$
	$A = 2\pi (ru + hs)$		$R_v = r_0 \left(\frac{r_0 u_0}{h s_0} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1} u_i + h s_{i-1}}{r_i u_{i-1} + h s_i}$

Szerkezet		Forgatott kör középpontjának sugara	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Torusz- szegmensfal	Ugyanaz, mint a 3.10. táblázatban	$h = R' - \sqrt{r^2 - u^2}$	A_n	$R_v = r_n \left(\frac{u_n}{h \arcsin \frac{u_n}{r_n}} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \times$ $\times \ln \frac{u_i + h \arcsin \frac{u_i}{r_i}}{u_{i-1} + h \arcsin \frac{u_{i-1}}{r_{i-1}}} \frac{r_{i-1}}{r_i}$
		$h = R' - r \cos \bar{\gamma}$		$R_v = r_n \left(\frac{r \sin \bar{\gamma}}{h \bar{\gamma}} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \times$ $\times \ln \frac{r_i \sin \bar{\gamma} + h \bar{\gamma}}{r_{i-1} \sin \bar{\gamma} + h \bar{\gamma}} \frac{r_{i-1}}{r_i}$
		$h = R' - r \cos \frac{s}{r}$		$R_v = r_n \left(\frac{u_n}{h \bar{\gamma}} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{u_i + h \bar{\gamma}}{u_{i-1} + h \bar{\gamma}} \frac{r_{i-1}}{r_i}$
				$R_v = r_n \left(\frac{r_n s_n}{h s_n} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i-1} u_i + h s_{i-1}}{r_i u_{i-1} + h s_i}$

Szerkezet		Egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Torusz-szegmensial		$A_{e,i} = \frac{A_{i-1} - A_i}{\ln \frac{A_i r_{i-1}^2}{A_{i-1} r_i^2}}$	A_n	$R_v = A_0 \frac{\left[\frac{(r_{i-1} + r_i) \sin \bar{\gamma}}{h \bar{\gamma}} + 1 \right] \delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
				$R_v = A_0 \frac{\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{h \arcsin \frac{u_i}{r_i}} + 1 \right) \delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
				$R_v = A_0 \frac{\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{h \bar{\gamma}} + 1 \right) \delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
				$R_v = A_0 \frac{\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{h s_i} + 1 \right) \delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

Szerkezet		Egyenértékű felület	Vonatkoztatási felület	Hővezetési ellenállás
Torusz-szegmensfal			A_n	$R_v = A_n \frac{\left[\frac{(r_{i-1} + r_i) \sin \bar{\gamma}}{h \bar{\gamma}} + 1 \right] \delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
				$R_v = \frac{\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{h \arcsin \frac{u_i}{r_i}} + 1 \right) \delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$
				$R_v = A_n \frac{\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{h \bar{\gamma}} + 1 \right) \delta_i}{\lambda_i}$
				$R_v = A_n \frac{\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{h s_i} + 1 \right) \delta_i}{\lambda_i A_{e,i}}$

Fémek λ hővezetés tényezője

Az anyag neve	Képlet	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Alumínium 99,75 % – 99 %	Al	– 190 0 200 300 800	83,15 273,15 473,15 573,15 1073,15	2 700	255,860 229,111 229,111 222,133 125,604
	Al	– 100 0 100 300	173,15 273,15 373,15 573,15	—	209,340 209,340 207,014 222,133
Antimon, tiszta	Sb	– 190 – 100 0 100 300 500	83,15 173,15 273,15 373,15 573,15 773,15	6 690	20,934 19,190 17,678 16,282 15,817 18,608
Cink, tiszta	Zn	– 100 0 100 200 300	173,15 273,15 373,15 473,15 573,15	7 130	115,137 112,811 109,904 105,833 101,181
Ezüst 99,98 % – 99,9 %	Ag	– 190 0 100 300	83,15 273,15 373,15 573,15	10 500	425,658 418,680 416,354 407,050
		– 100 0 100 300 500	173,15 273,15 373,15 573,15 773,15	10 500	419,843 410,539 391,931 361,693 362,856
Mangán	Mn	0	273,15	7 300	50 242
Molibdén 99,84 %	Mo	– 180 – 100 0 100 1000	93,15 173,15 273,15 373,15 1273,15	10 200	174,450 138,397 137,234 137,234 98,855
Ólom, tiszta	Pb	– 250 – 200 – 100 0 20 100 300 500	23,15 73,15 173,15 273,15 293,15 373,15 573,15 773,15	11 340	48,846 40,705 36,867 35,123 34,774 33,378 29,773 16,747
Ón, tiszta	Sn	– 150 – 100 0 100 200	123,15 173,15 273,15 373,15 473,15	7 300	79,084 74,432 66,058 59,313 56,987

(folytatás)

Az anyag neve	Képlet	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Réz, tiszta 99,98%-os	Cu	-180	93,15	8 930	464,037
		-100	173,15		407,050
		0	273,15		386,116
		100	373,15		379,138
		200	473,15		373,323
		400	673,15		364,019
		600	873,15		353,552
— elektrolitikus	Cu	-180	93,15	8 900	488,460
		0	273,15		395,420
		100	373,15		391,931
		300	573,15		381,464
		800	1073,15		367,508
— kereskedelmi	Cu	20	293,15	8 300	372,160
Vas 99,92%	Fe	20	293,15	7 850	73,269
		100	373,15		67,454
		200	473,15		61,639
		400	673,15		48,846
		600	873,15		38,379
		800	1073,15		29,075
		0	273,15	7 800	59,313
		100	373,15		56,987
		200	473,15		52,335
		400	673,15		44,194
		600	873,15		37,216
		800	1073,15		29,075
		20	293,15	7 280	55,824...
					63,965
		20	293,15	7 280	50,009
		100	373,15		49,428
		300	573,15		46,520
		500	773,15		37,216
		0	273,15	7 800	45,357
		100	373,15		45,357
		300	573,15		43,031
		500	773,15		37,216
		800	1073,15		30,238
Volfrám	W	-190	83,15	19 300	217,481
		0	273,15		166,309
		100	373,15		151,190
		500	773,15		119,789
		1000	1273,15		98,855
		1500	1773,15		113,974
		2000	2273,15		136,071
		2400	2673,15		146,538

Ötvözetek λ hővezetési tényezője

Ötvözet neve	Összetétel, %	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Acél	0,1 C	0	273,15	7850	59,313
		100	373,15		52,335
		200	473,15		52,335
		300	573,15		46,520
		400	673,15		44,191
		600	873,15		37,216
		900	1173,15		33,727
	0,2 C	20	293,15	7850	50,009
	0,6 C	20	293,15	7850	46,520
	— besszemer-	0,52 C, 0,34 Si	20	293,15	7850
— króm-nikkel	Cr...Ni	20	293,15	7900	13,956
		200	473,15		17,445
		500	773,15		20,934
	15 Cr, 13 Ni, 2 W, 0,5 C	20	293,15	—	11,630
		200	473,15		11,630
300		573,15	12,212		
500		773,15	12,793		
800	1073,15	16,282			
Acél, króm-nikkel	10 Cr, 34 Ni	20	293,15	—	12,212
		100	373,15		13,375
		200	473,15		15,119
		300	573,15		16,282
		500	773,15		19,190
	15 Cr, 27 Ni, 3 W, 0,5 C	20	293,15	—	11,281
		100	373,15		12,793
		200	473,15		13,956
		300	573,15		15,119
		500	773,15		18,608
Alumínium-bronz	95 Cu, 5 Al	20	293,15	7800	82,573
Alumíniumötvözet	96 Al, 1,8 Cu, 0,9 Fe, 0,9 Cr, 0,4 Si	20	293,15	—	104,670
	92 Al, 8 Cu	−100	173,15	≈2800	109,322
		0	273,15		127,930
		20	293,15		131,419
		100	373,15		143,049
		200	473,15		152,353
	92 Al, 8 Mg	−100	173,15	≈2600	84,899
		0	273,15		102,344
		20	293,15		105,833
		100	373,15		123,278
		200	473,15		147,701
	88 Al, 10 Zn, 2 Cu	0	273,15	2900	143,049
		20	293,15		145,375
100		373,15	154,679		

Ötvözet neve	Összetétel, %	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Alumíniumötvözet	84 Al, 12 Si, 1,2 Cu, 1 Ni	0	273,15	≈ 2800	134,908
		20	293,15		134,908
		100	373,15		137,234
		200	473,15		139,560
Mangánacél	1,6 Mn, 0,5 C	20	293,15	≈ 7850	40,705
		100	373,15		40,705
		300	573,15		37,216
		500	773,15		34,890
	2 Mn	20	293,15	≈ 7850	32,564
	5 Mn	20	293,15	≈ 7850	18,608
Krómacél	0,8 Cr, 0,2 C	100	373,15	≈ 7850	39,542
		200	473,15		37,216
		400	673,15		31,401
		600	873,15		26,749
	5 Cr, 0,5 Mn, 0,1 C	20	293,15	8100...9000	37,216
		100	373,15		31,635
		200	473,15		31,053
		500	773,15		33,727
	15 Cr, 0,1 C	20	293,15	8100...9000	25,586
		500	773,15		25,586
Króm-nikkel-acél	0,8 Cr, 3,5 Ni, 0,4 C	20	293,15	8100...8700	34,890
		100	373,15		36,053
		200	473,15		37,216
		400	673,15		37,216
		600	873,15		31,401
	17...19 Cr, 8 Ni, 0,1...2 C	20	293,15	8100...9000	14,538
		100	373,15		15,701
		200	473,15		16,864
		300	573,15		18,608
		500	773,15		20,934

Ötvözet neve	Összetétel, %	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Sárgaréz	70 Cu, 30 Zn	500 600	773,15 873,15	≈ 8600	119,789 120,952
	67 Cu, 33 Zn	0 100 200 300 400 500 600	273,15 393,15 473,15 573,15 673,15 773,15 873,15	≈ 8600	100,018 106,996 112,811 120,952 127,930 134,908 151,190
	60 Cu, 40 Zn	0 100 200 300 400 500 600	273,15 373,15 473,15 573,15 673,15 773,15 873,15	≈ 8600	105,833 119,789 137,234 152,353 168,635 186,080 200,036
	61,5 Cu, 38,5 Zn	20 100	293,15 373,15	—	79,084 88,388
	90 Cu, 10 Zn	-100 0 100 200 300 400 500 600	173,15 273,15 373,15 473,15 573,15 673,15 773,15 873,15	≈ 8600	88,388 102,344 117,463 133,745 148,864 166,309 180,265 195,384
	70 Cu, 30 Zn	0 100 200 300 400	273,15 373,15 473,15 573,15 673,15	≈ 8600	105,833 109,322 110,485 113,974 116,300

Építőanyagok λ hővezetési tényezője

Építőanyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Agyag	23	296,15	1545	1,256
Agyagtalaj (44,7 tf % nedves) — száraz	23 25	296,15 298,15	1495 1500...1600	1,675 0,930
Agyagtégla, erősen égetett	20 20	293,15 293,15	1800 2000	0,954 1,128
Aszfalt	0 20 30	273,15 293,15 303,15	2120	0,605 0,698 0,744
Bazalt	0 20 100	273,15 293,15 373,15	≈ 2900	1,651 1,675 1,768
Beton, teljesen száraz	20 20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15 293,15	500 1000 1500 2000 2250	0,128 0,233 0,407 0,663 0,837
	20 20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15 293,15	500 1000 1500 2000 2250	0,186 0,361 0,593 0,896 1,105
— légszáraz	20 20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15 293,15	500 1000 1500 2000 2250	0,256 0,488 0,791 1,140 1,337
— 10%-os nedvességtartalom	20 20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15 293,15	500 1000 1500 2000 2250	0,256 0,488 0,791 1,140 1,337
— vasalt	20	293,15	—	1,512
— kohósalak-adalékú, belülről	20	293,15	—	0,582
— kohósalak-adalékú, kívülről	20	293,15	—	0,698
— kőadalékú	20 20 20	293,15 293,15 293,15	1800 2000 2200	0,965 1,163 1,512
— vasbeton, kőadalékos	20 20	293,15 293,15	1600...1800 1800...2200	0,930 1,279...1,512
— habkőzúzalék-adalékú	20 20 20	293,15 293,15 293,15	800 1000 1200	0,372 0,500 0,628
— habkőbeton belülről	20	293,15	—	0,349
— habkőbeton kívülről	20	293,15	—	0,465
— betonlemezek habkőbetonból	20 20 20	293,15 293,15 293,15	800 1000 1200	0,372 0,512 0,628

Építőanyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
— könnyűbeton, lemez, öntött	20	293,15	800	0,314
	20	293,15	1000	0,419
	20	293,15	1200	0,535
	20	293,15	1600	0,914
— habkőbeton blokkokból épült fal	20	293,15	800	0,512
	20	293,15	1000	0,616
— fal könnyűbetonból (blokkok salakból, lyukacsos beton, légbeton, porózus beton és hasonló)	20	293,15	800	0,465
	20	293,15	1000	0,558
	20	293,15	1200	0,651
	20	293,15	1400	0,744
	20	293,15	1600	0,814
— betonblokk falazat úsztatott kőből, üreges és lyukacsos beton stb.	20	293,15	800	0,465
	20	293,15	1000	0,558
	20	293,15	1200	0,651
	20	293,15	1400	0,744
— gáz- és habbeton	20	293,15	600	0,174...0,349
	20	293,15	800	0,233...0,523
	20	293,15	1000	0,349...0,698
	20	293,15	1200	0,465...0,930
	20	293,15	1400	0,582...1,163
Bitumen	20	293,15	1100	0,174
Cement, por	20	293,15	—	0,070
	100	373,15	—	0,477
— tömörítve	20	293,15	—	1,047
Csempék és borítólemezek	20	293,15	—	1,047
Fa, (száraz) belül	20	293,15	—	0,140
— (száraz) kívül	20	293,15	—	0,209
— vörösfenyőrostokra merőleges	25	298,15	620	0,140
— balzafa, könnyűfa rostokra merőleges	20	293,15	200...300	0,081...0,105
	25	298,15	100...200	0,047...0,066
— enyvezett lemezek	20	293,15	—	0,140...0,209
— bükk, tölgy, merőleges a rostokra	20	293,15	700...900	0,209...0,267
— bükk, tölgy, párhuzamos a rostokkal	20	293,15		0,349...0,372
— dió	70	343,15	700	0,267
— enyvezett lemez	0	273,15	588	0,109
	20	293,15		0,114
— farostlemezek	20	293,15	200	0,047
— fenyőfélék, boróka, merőleges a rostokra	20	293,15	400...600	0,128...0,186
— fenyőfélék, boróka, párhuzamos a rostokkal	20	293,15		0,279

Építőanyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
— foser lemezek, cellotex, kapag s hasonló	20	293,15	400	0,055
	20	293,15	600	0,074
— furnír	0	273,15	600	0,151
— juhar, merőleges a rostokra — juhar, párhuzamos a rostokkal	30	303,15	710	0,158
	30	303,15		0,419
— kemény	20	293,15	1200...1400	0,337
— kőris — kőris, merőleges a rostokra — kőris, párhuzamos a rostokkal	25	298,15	740	0,163
	25	298,15		0,174
	25	298,15		0,302
— mahagóni — mahagóni — mahagóni, merőleges a rostokra — mahagóni, párhuzamos a rostokkal	17	290,15	550 700	0,213
	25	298,15		0,151
	25	298,15		0,151
	25	298,15		0,314
— nyírfá, merőleges a rostokra	25	298,15	680	0,134
— puzspáng, pukszus	17	290,15	900	0,149
— tik (indiai fa) — tik, merőleges a rostokra	25	298,15	720	0,140
	25	298,15		0,163
— tölgy	17	290,15	650	0,243
Facement	20	293,15	—	0,174
Fakéreg	20	293,15	337	0,074
	20	293,15	346	0,065
Fűrészelt fa	0	273,15	215	0,070
	30	303,15		0,072
Fagyapot	20	293,15	330	0,052
Fal lyukacsos téglából, kívülről	20	293,15	800	0,395
	20	293,15	1200	0,558
— vályogból	20	293,15	1700	0,989
— tömör téglából, belülről	20	293,15	1600...1800	0,698
	20	293,15		0,872
— üreges téglából	20	293,15	800	0,349...0,523
	20	293,15	1600	0,523...0,756
— zúzott kőből	20	293,15	—	1,512...2,442
Föld, agyagos vagy agyag, 28% nedvességgel	20	293,15	1500	1,512
	20	293,15	2000	2,559
Föld — homokos talaj 8% nedvességgel	20	293,15	1500	1,047
	20	293,15	2000	1,745

Építőanyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK	
	t , °C	T , K			
Fűrészpor	30	303,15	140	0,058	
— légszáraz	20	293,15	190...215	0,058...0,070	
— kitöltőanyag	20	293,15	190...215	0,116	
Gátlemez	20	293,15	—	0,093...0,140	
Gipsz	20	293,15	800	0,395	
	20	293,15	1000	0,512	
	20	293,15	1200	0,663	
	— lemezek	20	293,15	800	0,314
	— tetőfedéshez	20	293,15	—	0,349
	— belső falakhoz	20	293,15	—	0,291
	— könnyű lemezek	20	293,15	—	0,174
	Gránit	20	293,15	2600...2900	2,908...4,071
	Habarcs	20	293,15	—	0,930
20		293,15	1600	0,663	
20		293,15	1800	0,861	
20		293,15	2000	1,070	
20		293,15	2200	1,396	
— könnyűbeton, blokkoknál		20	293,15	1600...1800	0,930...1,163
— tégláknál		20	293,15	1600...1800	0,698...0,930
20		293,15	1600	0,628	
20		293,15	1800	0,814	
20		293,15	2000	1,012	
20		193,15	2200	1,279	
— belülről		20	293,15	1600...1800	0,698...0,930
— kívülről		20	293,15		0,930...1,163
— a habarcsot tartó elem nélkül, belülről		20	293,15		0,698
— a habarcsot tartó elem nélkül, kívülről		20	293,15		0,872
— a habarcsot tartó elemmel, belülről		20	293,15		0,465
— a habarcsot tartó elemmel, kívülről		20	293,15		0,698
Habkő		20	293,15	600	0,186...0,314
		20	293,15	800	0,267...0,407
	20	293,15	1000	0,349...0,465	
	20	293,15	1400	0,582...0,663	
Homok, átlagos	20	293,15	1500...1800	0,930	
— nedves	20	293,15	1500	0,302	
	20	293,15		0,326	
	0	273,15	1800...2000	1,745	
— száraz	20	293,15	—	0,582	
— tengeri 0% nedvességgel	20	293,15	1600	0,314	
— 10% nedvességgel	20	293,15	—	1,244	
— 20% nedvességgel	20	293,15	—	1,756	
— telített	20	293,15	—	2,442	
— termőföld	20	293,15	—	2,326	

Építőanyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Homok, természetes szennyezettségű	20	293,15	—	0,326
0% nedvességgel				
— természetes szennyezettségű, 10% nedvességgel	20	293,15	—	0,965
— természetes szennyezettségű, 20% nedvességgel	20	293,15	—	1,326
— természetes szennyezettségű, telített	20	293,15	—	1,884
Homokkő	20	293,15	2200...2500	1,279...2,093
— száraz	20	293,15	2250	1,291
— nedves	20	293,15		1,675
Kagylós mészkő	20	293,15	2680	2,442
— 10% tf.% nedvesség	20	293,15	2680	0,962
— 20% tf.% nedvesség	20	293,15		1,256
— 30% tf.% nedvesség	20	293,15		1,465
Karborundum	20	293,15	—	0,212
Kavics (homok) habkő alapanyagú mint kitöltőanyag	20	293,15	600	0,326
Kavics mint kitöltőanyag	20	293,15	1500...1800	0,930
Kerámia	20	293,15	2200...2500	1,047...1,570
Kohósalak	20	293,15	800	0,244...0,384
	20	293,15	1000	0,314...0,442
	20	293,15	1200	0,372...0,500
	20	293,15	1400	0,465...0,570
Korkementlinóleum	20	293,15	535	0,081
Könnyű építési lemezek mineralizált fareszelékből	20	293,15	200	0,062
	20	293,15	400	0,083
	20	293,15	600	0,128
Kőzet, gabró	20	293,15	—	2,559
	20	293,15	—	2,908
	20	293,15	—	1,745
Kvarcit	20	293,15	2800	6,048
Linóleum	20	293,15	1180	0,186
Magnezit	1000	1273,15	—	1,651
Márvány	20	293,15	2500...2800	2,093...3,489
Mész	20	293,15	—	0,123
Mészhomokkő	20	293,15	1600	0,814
	20	293,15		0,930
	20	293,15		1,047

Építőanyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Mészhomokkő	20	293,15	400	0,105
	20	293,15	600	0,145
	20	293,15	800	0,198
	20	293,15	1000	0,273
	20	293,15	1200	0,337
	20	293,15	1600	0,989
	20	293,15	1800	1,163
	20	293,15	2000	1,396
Mészkö (amorf)	20	293,15	2550	1,221
Mészkö (CaCO ₃)	0	273,15	2650	2,268
	20	293,15		2,210
	100	373,15		1,919
Ónix	20	293,15	—	2,326
Pala	20	293,15	—	1,396
	20	293,15	2700	1,512...1,977
	100	373,15		1,977
	20	293,15	2700	2,326...3,373
Porcelánföld	20	293,15	—	2,442
Porfir merőleges a rétegre párhuzamos a réteggel	20	293,15	2600	1,396
	20	293,15		2,326
Rabiczfal gipszből	20	293,15	—	0,291
Rabiczfal betonból	20	293,15	—	0,582
Salak, beton, salakblokk falban	20	293,15	1100...1300	0,582...0,814
— kohóból, mint kitöltőanyag	20	293,15	300...400	0,221
	20	293,15	—	0,186
— kazán	20	293,15	700...750	0,326
— kazánsalak mint kitöltőanyag	20	293,15	700...750	0,326
Salonit (azbesztpala) nagy azbeszttartalommal	20	293,15	1800...1900	0,174...0,349
— 10...15% azbeszttel	20	293,15	1800	0,640...0,523
	20	293,15	2100	0,698
— 30% azbeszttel, 10% nedvességgel	20	293,15	2200	0,791
Samott-tégla	100	373,15	1800...2200	0,465...1,163
	500	773,15		0,698...1,396
	1000	1273,15		1,745
Szilikatégla	100	373,15	1800...2200	1,105
	500	773,15		1,047...1,279
	1000	1273,15		1,105...1,396

Építőanyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Tégla	20	293,15	800	0,279
	20	293,15	1000	0,326
	20	293,15	1200	0,384
	20	293,15	1400	0,442
	20	293,15	1600	0,523
	20	293,15	1800	0,733
	20	293,15	2000	1,233
	20	293,15	—	0,233...0,349
— falazó, szokásos nedvességtartalom	20	293,15	—	0,233...0,349
	20	293,15	1600	0,651
	20	293,15	1800	0,756
	20	293,15	2000	0,861
— lyukacsos	20	293,15	2200	1,012
	20	293,15	600...800	0,116...0,174
	20	293,15	1600...1800	0,384...0,523
	100	373,15	1400...2000	0,442
— száraz	200	473,15		0,547
	600	873,15		0,965
	1000	1273,15		1,291
	1000	1273,15		1,291
Tetőfedő lemez	20	293,15	1000...1200	0,140...0,349
— kemény	20	293,15	790	0,151
Üveg, közönséges (ablak)	20	293,15	2400...3200	0,582...1,047

Hőszigetelő anyagok λ hővezetési tényezője

Az anyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Acélgyapot	20	293,15	104	0,058
Alfol, síkeljárás	0	273,15	3,6	0,030
	20	293,15		0,033
	300	573,15		0,056
— gyűrűeljárás	20	293,15	3,6	0,047
Alumíniumforgács	20	293,15	40	0,093
Azbeszt	0	273,15	383	0,112
	50	323,15		0,115
	100	373,15		0,119
	— 200	73,15	470	0,084
	— 150	123,15		0,117
	— 100	173,15		0,137
	— 50	223,15		0,149
	0	273,15		0,154
	20	293,15		0,156
	100	373,15		0,163
	0	273,15	580	0,200
	20	293,15		0,202
	100	373,15		0,212
	200	473,15		0,221
	— 200	73,15	700	0,156
	— 100	173,15		0,221
	0	273,15		0,233
	20	293,15		0,235
	100	373,15		0,244
Azbesztlemez, lágy, hajlékony	20	293,15	420	0,085
	20	293,15	500	0,070
	20	293,15		0,151
Azbesztlemez	20	293,15	2000	0,698
	25	298,15	140	0,050
	20	293,15	50	0,058
	20	293,15		0,058
	20	293,15		0,093
	20	293,15		0,160
	20	293,15		0,200
Cukornád	20	293,15	25	0,045
	20	293,15	50	0,040
	20	293,15	100	0,042
	20	293,15	150	0,047
	20	293,15	200	0,053
	20	293,15	250	0,060
	20	293,15		

Az anyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Enyvezett lemez (összeragasztott, vékony deszkák ragasztásához)	0 20	273,15 293,15	590	0,109 0,114
Fa, kéreg	20	293,15	337	0,074
— nemez	20 20	293,15 293,15	330 350	0,052 0,065
— reszelék	20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15	150 200 250 300	0,058 0,059 0,062 0,065
— reszelék mint töltőanyag	20	293,15	100...140	0,093
Fenyő, boróka	20	293,15	342	0,080
Flanel	20	293,15	160	0,055
Fűrészpor	20	293,15	200	0,058
Gyapjú	20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15	50 100 150 200	0,038 0,036 0,036 0,038
	20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15	250 300 350 400	0,041 0,043 0,047 0,050
	— salakból —200 —100 0 20	73,15 173,15 273,15 293,15	100	0,010 0,020 0,031 0,034
	—200 —100 0 20	73,15 173,15 273,15 293,15	120	0,012 0,021 0,033 0,035
	— salakból, kőgyapot (szilán) 20 20 20 20 20	293,15 293,15 293,15 293,15 293,15	100 200 300 400 500	0,034 0,040 0,047 0,055 0,058
Habanyagok műanyagból	20	293,15	15	0,035
Habkőkavics (homok) mint töltőanyag	20	293,15	600	0,326
Habkő, természetes	0	273,15	300...600	0,087...0,174
Igelit	20	293,15	1390	0,151
Iporka	0	273,15	15	0,031

Az anyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Juta	20	293,15	10	0,060
	32	305,15	15	0,053
	20	293,15	25	0,044
	20	293,15	50	0,036
	20	293,15	100	0,037
	20	293,15	200	0,041
	20	293,15	300	0,047
Kapk	20	293,15	5	0,036
	20	293,15	25	0,035
	20	293,15	50	0,038
	20	293,15	100	0,043
	20	293,15	150	0,048
Kavics mint töltőanyag	20	293,15	1500...1800	0,930
Kender, száraz — manila-	32	305,15	43	0,076
	20	293,15	45	0,049
Kohósalak	20	293,15	750	0,326
Kovaföld — égetett	200	473,15	466	0,126
	200	473,15	605	0,171
	200	473,15	790	0,185
	20	293,15	1600	0,430
	20	293,15	1800	0,547
	20	293,15	2000	0,698
Kovaföld- és magnéziumtartalmú anyagok	100	373,15	200	0,055
	100	373,15	300	0,063
	100	373,15	400	0,073
	100	373,15	500	0,087
Kovaföld- és magnéziumtartalmú anyagok	100	373,15	600	0,106
	100	373,15	800	0,157
	100	373,15	1000	0,221
Kovaföldmassza	50	323,15	450...840	0,072...0,170
	100	373,15		0,074...0,172
	200	473,15		0,080...0,176
	300	573,15		0,086...0,180
Kovaföldpor	-200	73,15	50	0,013
	0	273,15		0,035
	100	373,15		0,049
	0	273,15	200	0,042
	100	373,15		0,051
	300	573,15		0,070
	500	773,15		0,088
	700	973,15		0,108
	0	273,15	250	0,055
	100	373,15		0,064
	300	573,15		0,083

Az anyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Kovaföldpor	0	273,15	350	0,065
	100	373,15		0,074
	300	573,15		0,095
	500	773,15		0,116
— formában égetve	0	273,15	350...700	0,072...0,131
	50	323,15		0,081...0,140
	100	373,15		0,088...0,148
	200	473,15		0,105...0,164
	300	573,15		0,121...0,174
	500	773,15		0,140...0,198
— égetett	20	293,15	200	0,060
	20	293,15	300	0,069
	20	293,15	400	0,081
	20	293,15	500	0,098
	20	293,15	600	0,117
	20	293,15	700	0,140
	20	293,15	800	0,163
	20	293,15	900	0,186
	20	293,15	1000	0,212
	20	293,15	1200	0,267
	20	293,15	1400	0,337
Könnyű építő blokkok (falban) betonból, kohósalakból, porózus betonból	20	293,15	600	0,407
	20	293,15	800	0,477
	20	293,15	1000	0,570
	20	293,15	1200	0,663
	20	293,15	1400	0,779
Könnyű építési farostlemezek	20	293,15	200	0,062
	20	293,15	300	0,072
	20	293,15	400	0,083
	20	293,15	500	0,105
	20	293,15	600	0,128
Len	20	293,15	19	0,051
	20	293,15	25	0,044
	20	293,15	50	0,040
	20	293,15	100	0,041
	20	293,15	150	0,043
	20	293,15	200	0,047
Len, száraz szálak párhuzamosak a meleg áramlásával	32	305,15	80	0,077
	32	305,15	154	0,120
Len — szálak merőlegesek a meleg áramlására	32	305,15	80	0,034
	32	305,15	154	0,038
Magnézium	—200	73,15	130	0,021
	—100	173,15		0,029
	0	273,15		0,038
	20	293,15		0,041
	100	373,15		0,049
	20	293,15	250	0,055
	20	293,15	500	0,104

Az anyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Magnézium-karbonát	100	373,15	—	0,097
Magnézium-oxid, por — por, sajtolt	0	273,15	200	0,073
	20	293,15	800	0,605
Magnéziumsalak	50	323,15	270	0,073
	100	373,15		0,077
	200	473,15		0,084
Műfalemezek (farostlemez, cellotex stb.)	20	293,15	200	0,047
	20	293,15	300	0,051
	20	293,15	400	0,055
	20	293,15	500	0,064
	20	293,15	600	0,074
Nemez, rongyból	20	293,15	200	0,041
	20	293,15	600	0,087...0,093
— szőrből	20	293,15	270	0,035...0,081
Pamut	-200	73,15	81	0,033
	-100	173,15		0,044
	0	273,15		0,056
	20	293,15		0,058
	100	373,15		0,067
	20	293,15	10	0,041
— szövet	20	293,15	40	0,036
Pamut, fonott	20	293,15	245	0,077
— szövött	20	293,15	330	0,070
Parafa, blokkok	20	293,15	150	0,042
	20	293,15	200	0,048
	20	293,15	300	0,059
— lemezek expandált parafából	0	273,15	120	0,036
	20	293,15		0,038
	50	323,15		0,041
— lemezek impregnált parafából	0	273,15	155	0,041
	20	293,15		0,043
	50	323,15		0,045
— szemcsék	20	293,15	50	0,030
	20	293,15	100	0,035
	20	293,15	150	0,041
	20	293,15	200	0,045
	20	293,15	250	0,051
	20	293,15	300	0,056
	20	293,15	350	0,060
— 1...3 mm nagyságú szemcsék, expandáltak	-200	73,15	50	0,009
	-100	173,15		0,021
	0	273,15		0,034
	100	373,15		0,047
— természetes	0	273,15	150	0,041

Az anyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Parafa, természetes 1...3 mm nagyságú szemcsék	100 200	373,15 473,15	—	0,053 0,066
— durva szemcséjű, 5 mm nagyságú	0 100	273,15 373,15	90	0,048 0,063
Póréhagymarost	0 10 20	273,15 283,15 293,15	24	0,031 0,034 0,035
Rézforgács	20	293,15	3600	0,041
Salakgyapot	20	273,15	200	0,047
Salak, szén	0 20	273,15 293,15	700	0,151 0,163
— kohó	50	323,15	360	0,110
Selyem, szál	–200 –150 –100 –50 0 50 100	73,15 123,15 173,15 223,15 273,15 323,15 373,15	58	0,013 0,016 0,022 0,028 0,034 0,041 0,048
— szövött	30	303,15	—	0,047
— fonal	–200 –100 0 100	73,15 173,15 273,15 373,15	100	0,024 0,037 0,050 0,060
— mű	20 20 20	293,15 293,15 293,15	170 300 464	0,049 0,042 0,051
Szalma	0 20	273,15 293,15	140	0,045 0,050
Szizál	20	293,15	109	0,038
Szőr	20	293,15	90	0,042
— ló	20 60	293,15 333,15	172	0,052 0,052
— egyéb állati	20	293,15	176	0,037
Tengeri fű	20	293,15	80	0,035

Az anyag neve	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
	t , °C	T , K		
Torokpor	20	293,15	300	0,047
	20	293,15	400	0,055
	20	293,15	500	0,062
	20	293,15	600	0,070
	20	293,15	700	0,077
Tőzeg, darabos	20	293,15	120	0,047
— sajtolt, száraz	20	293,15	—	0,052
Tőzeglápok	0	273,15	210	0,050
	20	293,15		0,052
	50	323,15		0,056
	20	293,15	200...400	0,047...0,093
Tőzegmoha	20	293,15	160	0,042
— por	0	273,15	190	0,047
	20	293,15		0,048
	50	323,15		0,052
Üvegfonal	0	273,15	220	0,035
	50	323,15		0,043
	100	373,15	—	0,050
	200	473,15		0,066
— a szálak merőlegesek a hő áramlásának irányára	0	273,15	186	0,035
	50	323,15		0,044
	100	373,15		0,055
	200	473,15		0,079
	300	573,15		0,107
Üveggyapot	20	293,15	50	0,037
	20	293,15	100	0,036
	20	293,15	200	0,040
	100	373,15	200	0,052
	300	573,15	200	0,105
	20	293,15	300	0,043
	20	293,15	400	0,055
Üvegszövet	20	293,15	100	0,038
	20	293,15	200	0,048
Vászon	25	298,15	265	0,066
	25	298,15	600	0,070

Tűzálló és kerámiai anyagok λ hővezetési tényezője

Az anyag neve	Alapanyagok %-os aránya	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Cirkontégla	62 ZrO ₂	0	273,15	3600	2,442
		200	473,15		2,326
		400	673,15		2,210
		600	873,15		2,093
		800	1073,15		1,977
		1000	1273,15		1,919
		1200	1473,15		1,919
Karbonium	50 SiC	0	273,15	2200	5,815
		200	473,15		5,234
		400	673,15		4,652
		600	873,15		4,303
		800	1073,15		3,954
		1000	1273,15		3,605
		1200	1473,15		3,256
	75 SiC	0	273,15	2300	16,282
		200	473,15		13,026
		400	673,15		11,049
		600	873,15		9,886
		800	1073,15		8,839
		1000	1273,15		7,908
		1200	1473,15		7,211
	100 SiC	0	273,15	—	72,106
		200	473,15		48,846
		400	673,15		37,216
		600	873,15		29,075
		800	1073,15		23,412
		1000	1273,15		19,771
		1200	1473,15		16,864
Korund	80 Al ₂ O ₃	0	273,15	2700	2,326
		200	473,15		2,175
		400	673,15		2,093
		600	873,15		2,035
		800	1073,15		2,000
		1000	1273,15		1,977
		1200	1473,15		1,954
	100 Al ₂ O ₃	0	273,15	3750	20,934
		200	473,15		10,700
		400	673,15		7,908
		600	873,15		6,513
		800	1073,15		5,699
		1000	1273,15		5,117
		1200	1473,15		4,768
Kromit	40...45 Cr ₂ O ₃	0	273,15	2750	1,279
		200	473,15		1,396
		400	673,15		1,512
		600	873,15		1,628
		800	1073,15		1,628
		1000	1273,15		1,686
		1200	1473,15		1,686

Az anyag neve	Alapanyagok %-os aránya	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Magnezit	50 MgO	0	273,15	2000	2,675
		200	473,15		2,559
		400	673,15		2,326
		600	873,15		2,093
		800	1073,15		1,861
		1000	1273,15		1,686
		1200	1473,15		1,512
	75 MgO	0	273,15	2600	5,001
		200	473,15		4,536
		400	673,15		4,071
		600	873,15		3,605
		800	1073,15		3,140
		1000	1273,15		2,791
		1200	1473,15		2,442
	100 MgO	0	273,15	3500	43,031
		200	473,15		25,586
		400	673,15		16,282
		600	873,15		11,630
		800	1073,15		8,723
		1000	1273,15		6,397
		1200	1473,15		5,234
Porcelán	55 Al ₂ O ₃ , 45 SiO ₂	0	273,15	2350	0,930
		200	473,15		1,396
		400	673,15		1,745
		600	873,14		2,035
		800	1073,15		2,268
		1000	1273,15		2,442
Samott	50...75 SiO ₂ , 20...50 Al ₂ O ₃	0	273,15	800	0,209
		200	473,15		0,244
		400	673,15		0,279
		600	873,15		0,314
		800	1073,15		0,349
		1000	1273,15		0,384
		1200	1473,15		0,419
		0	273,15	1000	0,291
		200	473,15		0,326
		400	673,15		0,361
		600	873,15		0,407
		800	1073,15		0,442
		1000	1273,15		0,488
		1200	1473,15		0,523
		0	273,15	1200	0,384
		200	473,15		0,407
		400	673,15		0,442
		600	873,15		0,477
		800	1073,15		0,523
		1000	1273,15		0,558
		1200	1473,15		0,605

Az anyag neve	Alapanyagok %-os aránya	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Samott	50...75 SiO ₂ , 20...50 Al ₂ O ₃	0	273,15	2000	1,070
		200	473,15		1,128
		400	673,15		1,198
		600	873,15		1,256
		800	1073,15		1,337
		1000	1273,15		1,401
		1200	1473,15		1,489
		0	273,15	2200	1,558
		200	473,15		1,651
		400	673,15		1,745
		600	873,15		1,838
		800	1073,15		1,942
		1000	1273,15		2,047
		1200	1473,15		2,152
Széntégla	89 C	0	273,15	1200	0,698
		200	473,15		0,872
		400	673,15		1,047
		600	873,15		1,279
		800	1073,15		1,454
		1000	1273,15		1,628
Szilika	95 SiO ₂	0	273,15	1900	1,070
		200	473,15		1,163
		400	673,15		1,279
		600	873,15		1,396
		800	1073,15		1,535
		1000	1273,15		1,686
		1200	1473,15		1,861
Szillimanit	60...80 Al ₂ O ₃	0	273,15	1000	0,174
		200	473,15		0,209
		400	673,15		0,233
		600	873,15		0,267
		800	1073,15		0,302
		1000	1273,15		0,337
		1200	1473,15		0,372
		0	273,15	1500	0,465
		200	473,15		0,488
		400	673,15		0,523
		600	873,15		0,558
		800	1073,15		0,593
		1000	1273,15		0,628
		1200	1473,15		0,663

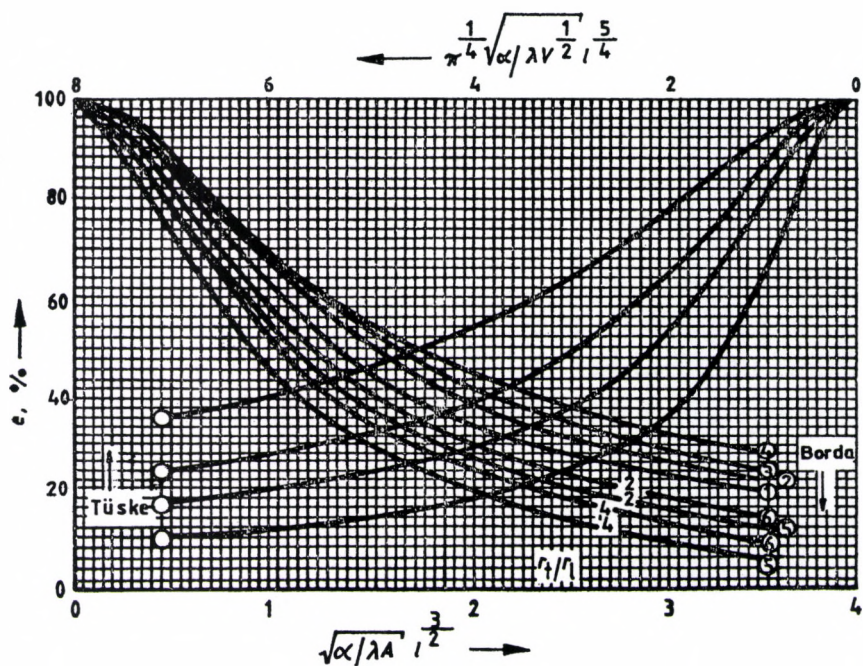
(3. folytatás)

Az anyag neve	Alapanyagok %-os aránya	Hőmérséklet,		Sűrűség, ρ , kg/m ³	Hővezetési tényező, λ , W/mK
		t , °C	T , K		
Szillimanit	60...80 Al ₂ O ₃	0	273,15	2000	1,105
		200	473,15		1,105
		400	673,15		1,105
		600	873,15		1,105
		800	1073,15		1,105
		1000	1273,15		1,105
		1200	1473,15		1,105
		0	273,15	2500	2,152
		200	473,15		2,047
		400	673,15		1,954
		600	873,15		1,884
		800	1073,15		1,826
		1000	1273,15		1,779
		1200	1473,15		1,745

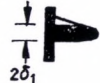
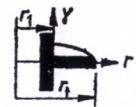
II. FÜGGELÉK

Bordahatásfokok kifejezései és hőáramképletek
különleges geometriákra

A bemutatásra kerülő bordák és tüskék bordahatásfokának alakulása

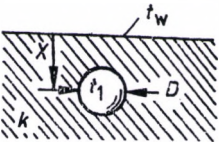


Bordahatások számítása

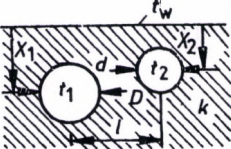
Egyenes bordák	Derékszögű $y = \delta$		$e = \frac{1}{ml} \operatorname{tgh} ml, \quad m = \sqrt{\alpha/\lambda\delta}$ $A = 2\delta l$
	Parabolikus $y = \delta_1(1 - x/l)^{1/2}$		$e = \frac{1}{m_1 l} \frac{I_{2/3} \left(\frac{4}{3} m_1 l \right)}{I_{-1/3} \left(\frac{4}{3} m_1 l \right)}, \quad m_1 = \sqrt{\alpha/\lambda\delta_1}$ $A = \frac{4}{3} \delta_1 l$
	Háromszögű $y = \delta_1(1 - x/l)$		$e = \frac{1}{m_1 l} \frac{I(2m_1 l)}{I_0(2m_1 l)}$ $A = \delta_1 l$
	Parabolikus $y = \delta_1(1 - x/l)^2$		$e = \frac{2}{\sqrt{4(m_1 l)^2 + 1} + 1}$ $A = \frac{2}{3} \delta_1 l$
Kör alakú bordák	Derékszögű $y = \delta$		$e = \frac{2}{ml(r_1/r_1 + 1)} \left[\frac{I_1(mr_1) K_1(mr_1) - I_1^*(mr_1) K_1(mr_1)}{I_0(mr_1) K_1(mr_1) + I_1(mr_1) K_0(mr_1)} \right]$ $A = 2\delta(r_1 - r_1)$
	Hiperbolikus $y = \delta_1(r_1/r)$		$e = \frac{2}{m_1 l(r_1/r_1 + 1)} \left[\frac{I_{2/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \right) I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \sqrt{r_1/r_1} \right) - I_{2/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \sqrt{r_1/r_1} \right) I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \right)}{I_{1/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \right) I_{2/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \sqrt{r_1/r_1} \right) - I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \sqrt{r_1/r_1} \right) I_{1/3} \left(\frac{2}{3} m_1 r_1 \right)} \right]$ $A = 2\delta_1 r_1 \ln \frac{r_1}{r_1}$

Kör keresztmetszetű tuskék	7		$e = \frac{1}{\sqrt{2}ml} \operatorname{tgh} \sqrt{2}ml$	$V = \pi \delta^2 l$
	8		$e = \frac{2}{\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_1 l\right)} \frac{I_1 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_1 l\right)}{I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_1 l\right)}$	$V = \frac{\pi}{2} \delta_1^2 l$
	9		$e = \frac{4}{(2 \sqrt{2} m_1 l)} \frac{I_2 (2 \sqrt{2} m_1 l)}{I_1 (2 \sqrt{2} m_1 l)}$	$V = \frac{\pi}{3} \delta_1^2 l$
	10		$e = \frac{2}{\sqrt{\frac{8}{9} (m_1 l)^2 + 1 + 1}}$	$V = \frac{\pi}{5} \delta_1^2 l$

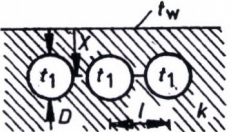
Végtelen hengeres üreg féligvégtelen közegben (ábrában $k \equiv \lambda$)

	$\begin{aligned} q'/\lambda(t_1 - t_w) &= 2\pi/\cosh^{-1}(2x/D) \\ &= 2\pi/\ln[2x/D + \sqrt{(2x/D)^2 - 1}] \\ &= 2\pi/\ln(4x/D) \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &\approx D \\ x &> 2D \\ x &\gg D \end{aligned}$
---	--	---

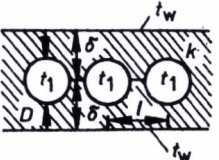
Két végtelen hengeres üreg féligvégtelen közegben

	$\begin{aligned} q'_1/\lambda(t_1 - t_w) &= \\ &= 2\pi \left\{ \frac{\ln\left(\frac{4x_1}{D}\right) \ln\left(\frac{4x_2}{d}\right) + \left[\ln \sqrt{\frac{(x_1 + x_2)^2 + l^2}{(x_1 - x_2)^2 + l^2}} \right]^2}{\ln\left(\frac{4x_2}{d}\right) - \left(\frac{t_2 - t_w}{t_1 - t_w}\right) \ln \sqrt{\frac{(x_1 + x_2)^2 + l^2}{(x_1 - x_2)^2 + l^2}}} \right\}^{-1} \end{aligned}$	$\begin{aligned} D &> d \\ x_1 &> 2D \\ x_2 &> 2d \end{aligned}$
---	--	--

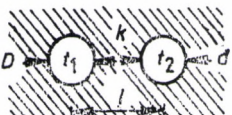
Végtelen hengeres üregek sora féligvégtelen közegben

	$q'/\lambda(t_1 - t_w) = 2\pi/\ln[(2l/\pi D) \sinh(2\pi x/l)]$	$x > D$
---	--	---------

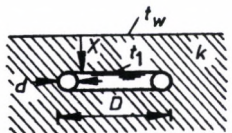
Végtelen hengeres üregek sora végtelen lemezben

	$q'/\lambda(t_1 - t_w) = 2\pi/\ln[(2l/\pi D) \sinh(\pi\delta/l)]$	$\delta > D$
---	---	--------------

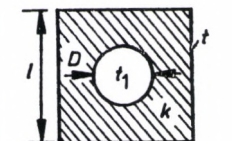
Két végtelen hengeres üreg végtelen közegben

	$q'/\lambda(t_1 - t_2) = 2\pi/\cosh^{-1}[(4l^2 - D^2 - d^2)/2Dd]$	$D > d$
---	---	---------

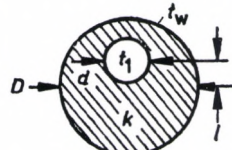
Vízszintes toroidális üreg féligvégtelen közegben

	$q'/\lambda D(t_1 - t_w) = 2\pi^2/\ln\left\{8\left(\frac{D}{d}\right)\left[\frac{\ln(2D/x)}{\ln(8D/d)} + 1\right]\right\} = (2\pi^2/\ln(8D/d))$	$\frac{d}{2} \ll x < \frac{D}{2}$ $x \gg D$
---	---	--

Hengeres üreg hasáb alakú közegben

	$q'/\lambda(t_1 - t_w) = 2\pi/\ln(1,08l/D)$	$l > D$
---	---	---------

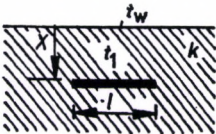
Excentrikus hengeres üreg henger alakú közegben

	$q'/\lambda(t_1 - t_w) = 2\pi/\cosh^{-1}[(D^2 + d^2 - 4l^2)/2Dd]$	$D > d$
---	---	---------

Vékony függőleges szalag féligvégtelen közegben

	$q'/\lambda(t_1 - t_w) \doteq 2,38/(x/l)^{0,24}$	$\frac{1}{2} < \frac{x}{l} < 12$
---	--	----------------------------------

Vékony vízszintes szalag féligvégtelen közegben

	$q'/\lambda(t_1 - t_w) \doteq 2,94/(x/l)^{0,32}$	$\frac{1}{2} < \frac{x}{l} < 12$
---	--	----------------------------------

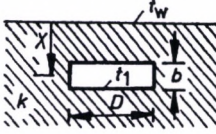
Vékony derékszögű lemez féligvégtelen közegben

	$\begin{aligned} q/\lambda a(t_1 - t_w) &= \pi/\ln(4a/b) \\ &= 2\pi/\ln(2\pi x/b) \\ &= 2\pi/\ln(4a/b) \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &= 0 \\ a \gg b, \quad x &> 2b \\ x &\gg a \end{aligned}$
---	---	--

Vékony kör alakú lemez féligvégtelen közegben

	$\begin{aligned} q/\lambda D(t_1 - t_w) &= 2 \\ &= 4 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &\gg D \end{aligned}$
---	---	--

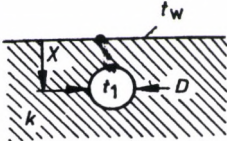
Derékszögű üreg féligvégtelen közegben

	$q'/\lambda(t_1 - t_w) = (a/2b + 5,7)/\ln(3,5x/a^{1/4}b^{3/4})$	$a > b$
---	---	---------

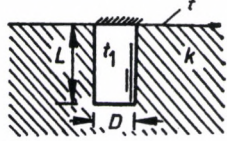
Félgömb alakú üreg féligvégtelen közegben

	$q/\lambda D(t_1 - t_w) = \pi$	
---	--------------------------------	--

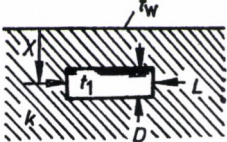
Gömb alakú üreg féligvégtelen közegben

	$\frac{q}{\lambda D}(t_1 - t_w) = \frac{2\pi}{1 - D/4x}$ $= 2\pi$	$x > D/2$ $x \gg D$
---	---	------------------------

Függőleges hengeres üreg féligvégtelen közegben

	$\frac{q}{\lambda L}(t_1 - t_w) = \frac{2\pi}{\ln(4L/D)}$	$L > D$
---	---	---------

Vízszintes hengeres üreg féligvégtelen közegben

	$\frac{q}{\lambda L}(t_1 - t_w) = \frac{2\pi}{\ln(4x/D)}$ $= \frac{2\pi}{\ln(2L/D)}$	$D < x < L$ $x \gg D$
---	--	--------------------------

Hőátbocsátás véges falakban, szögletekben és zártszelvényű idomokban

Az 1. ábrán bemutatott végtelen, derékszögű falszegleten a hőáramsűrűség függvénye t_1 és $t_2 < t_1$ előírt falhőmérséklet mellett

$$q' = \lambda \left\{ \frac{x}{1} + \frac{y}{\delta} + \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{l^2 + \delta^2}{4l\delta} \right) + \frac{\delta}{1} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1}{\delta} \right) + \frac{1}{\delta} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\delta}{1} \right) \right] \right\} (t_1 - t_2).$$

A 2. ábrán bemutatott zárt szelvényű falazat esetében az empirikus hővezetési ellenállás:

Ha

$$\delta_s = \delta_f = \delta_c = \delta \quad \text{és} \quad a, b, c > \frac{\delta}{5},$$

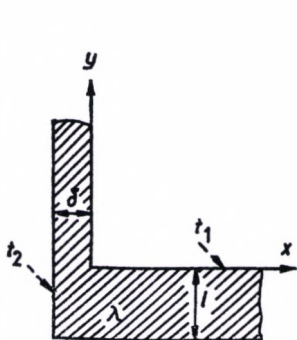
$$R = \lambda^{-1} \left[\frac{S_1}{\delta} + 1,86(a + b + c) + 1,20\delta \right]^{-1}.$$

Ha $a, b > \frac{\delta}{5}$ és $c < \frac{\delta}{5}$,

$$R = \lambda^{-1} \left[\frac{S_1}{\delta} + 1,86(a + b) + 0,35\delta \right]^{-1}$$

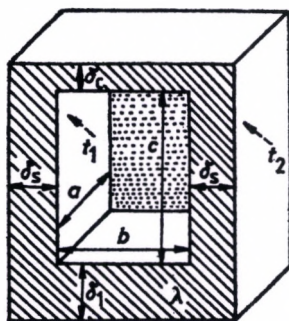
Ha $a > \frac{\delta}{5}$ és $b, c < \frac{\delta}{5}$, $R = \lambda^{-1} \left[\frac{0,79\sqrt{S_1 S_2}}{\delta} \right]^{-1}$

S_1 és S_2 a falazat teljes belső és külső palástfelülete.



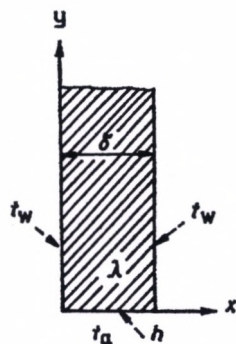
1. ábra.

Végtelen, derékszögű
falszeglet



2. ábra.

Zárt szelvényű falazat



3. ábra.

Félvégtelen lemez

$$\text{Ha } \delta_s \neq \delta_f \neq \delta_c,$$

és

$$a, b, c > \frac{\delta_{\max}}{5},$$

$$R = \lambda^{-1} \left[\frac{4ac}{\delta} + ab \left(\frac{1}{\delta_f} + \frac{1}{\delta_c} \right) + 1,08 \left[(a+b) + 2,16(a+c) + 0,4(\delta_s + \delta_f + \delta_c) \right]^{-1} \right].$$

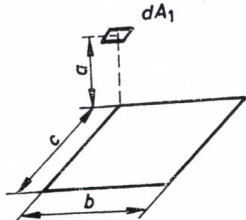
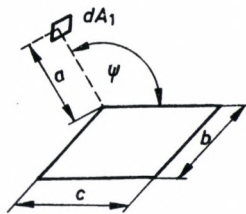
A 3. ábrán bemutatott félvégtelen lemez esetében az $y = 0$ koordinátájú síkon (a δ ; 1 felületen) fellépő hőáram és az $(x; 0)$ helyen fellépő hőmérséklet értékeket a következő táblázat mutatja be.

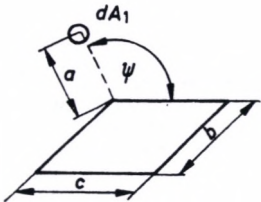
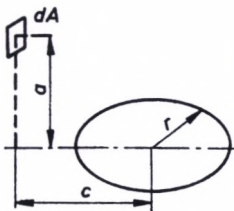
Hőáram- és hőmérsékletértékek

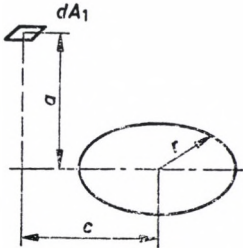
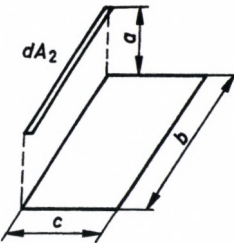
$\alpha\delta/\lambda$	0,001	0,01	0,1	1	10	20	100	200	1000
$q'/\lambda(t_w - t_a)$	0,001	0,01	0,097	0,792	3,107	3,971	5,984	6,827	8,603
x/δ	$(t - t_a)/(t_w - t_a)$								
0,05		0,999	0,989	0,906	0,552		0,111		
0,1		0,998	0,982	0,854	0,406		0,069		
0,2		0,997	0,973	0,788	0,275		0,036		
0,3		0,997	0,968	0,750	0,219		0,027		
0,5		0,996	0,964	0,723	0,186		0,022		

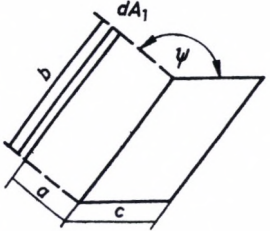
III. FÜGGELÉK

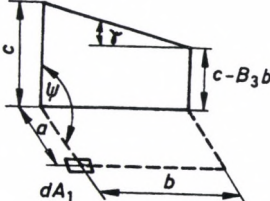
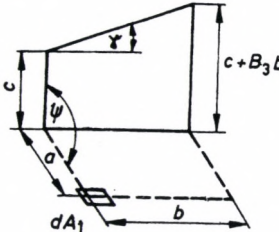
A besugárzási tényezők és a kölcsönös sugárzási
együtthatók, valamint a sugárzási anyagjellemzők
értékei

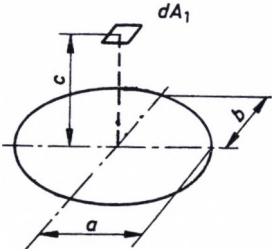
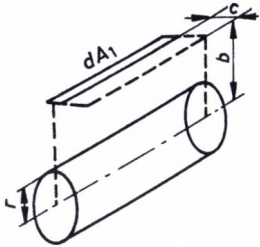
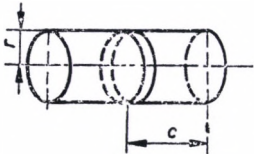
Geometriai elrendezés		Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű dA_1 elemi felület sugároz egy vele párhuzamos téglalapfelületre		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{B_1}{\sqrt{1+B_1^2}} \arctg \frac{B_2}{\sqrt{1+B_1^2}} + \frac{B_2}{\sqrt{1+B_2^2}} \arctg \frac{B_1}{\sqrt{1+B_2^2}} \right)$ $B_1 = \frac{b}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$
Egy nagyobb hőmérsékletű dA_1 elemi felület sugároz egy vele ψ szöget bezáró téglalapfelületre		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2\pi} \left[\arctg B_1 + \frac{1}{B_3} (B_2 \cos \psi - 1) \arctg \frac{B_1}{B_3} + \right.$ $\left. + \frac{B_1 \cos \psi}{B_4} \left(\arctg \frac{B_2 - \cos \psi}{B_4} - \arctg \frac{\cos \psi}{B_4} \right) \right]$ $B_1 = \frac{b}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$ $B_3 = \sqrt{1+B_2^2 - 2 \cos \psi}$ $B_4 = \sqrt{B_1^2 + \sin^2 \psi}$

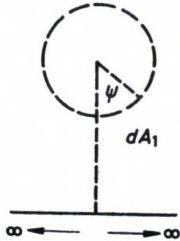
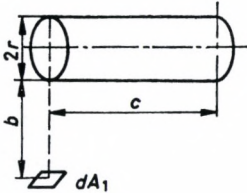
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, pontszerű dA_1 gömbfelület sugároz egy vele ψ szöget bezáró téglalapfelületre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{4\pi} \left[\arctg \frac{B_1(B_2 - \cos \psi)}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 1 - 2B_2 \cos \psi}} + \arctg \frac{B_1 \cos \psi}{\sqrt{1 + B_1^2}} \right]$ $B_1 = \frac{b}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$
Egy nagyobb hőmérsékletű dA felület sugároz egy rá merőleges körfelületre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 + B_2^2 - B_1^2}{\sqrt{(1 - B_1^2 + B_2^2)^2 - 4 \cdot B_1^2 B_2^2}} \right]$ $B_1 = \frac{r}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$

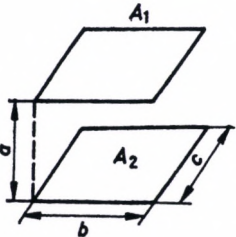
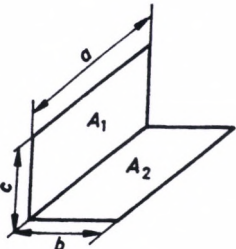
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű dA_1 elemi felület sugároz egy vele párhuzamos körfelületre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2B_2} \cdot \frac{1 + B_1^2 + B_2^2}{\sqrt{(1 + B_1^2 + B_2^2)^2 - 4 \cdot B_1^2 B_2^2} - 1}$ $B_1 = \frac{r}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$
Egy nagyobb hőmérsékletű, vonalszerű dA_1 elemi felület sugároz egy vele párhuzamos téglalapfelületre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi B_1} \left[\sqrt{1 + B_1^2} \arctg \left(\frac{B_2}{\sqrt{1 + B_1^2}} \right) - \right.$ $\left. - \arctg B_2 + \frac{B_1 B_2}{\sqrt{1 + B_1^2}} \arctg \left(\frac{B_1}{\sqrt{1 + B_1^2}} \right) \right]$ $B_1 = \frac{b}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$

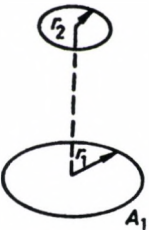
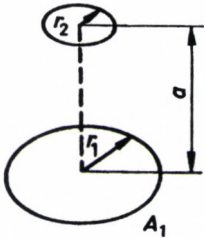
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, vonalszerű dA_1 elemi felület sugároz a vele ψ szöget bezáró téglalapfelületre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctg B_1 + \frac{\sin^2 \psi}{2B_1} \ln \left[\frac{B_1^2 + B_3^2}{(1 + B_1^2)B_3^2} \right] - \right.$ $- \frac{\sin 2\psi}{2B_1} \left[\frac{\pi}{2} - \psi + \arctg \left(\frac{B_2 - \cos \psi}{\sin \psi} \right) \right] +$ $+ \frac{B_4}{B_1} \left[\arctg \left(\frac{B_2 - \cos \psi}{B_4} \right) + \arctg \left(\frac{\cos \psi}{B_4} \right) \cdot \cos \psi + \right.$ $\left. \left. + \frac{B_2 \cos \psi - 1}{B_3} \arctg \left(\frac{B_1}{B_3} \right) \right] \right\}$ $B_1 = \frac{b}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$ $B_3 = \sqrt{B_2^2 - 2B_2 \cos \psi + 1}$ $B_4 = \sqrt{B_1^2 - \sin^2 \psi}$

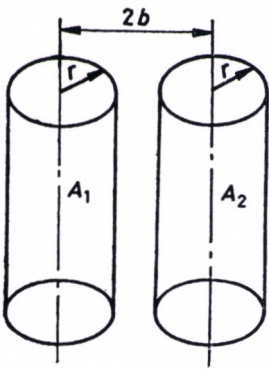
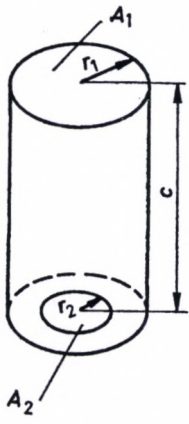
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arctan B_1 + \frac{B_2 \cos \psi - 1}{B_5} \left[\arctan \left(\frac{(B_2^2 + 1)B_1 + B_3(B_2 \cos \psi)}{B_5} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \arctan \left(\frac{B_3(B_2 - \cos \psi)}{B_5} \right) \right] + \frac{B_1 \cos \psi}{B_4} \left[\arctan \left(\frac{\cos \psi}{B_4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \arctan \left(\frac{B_1 B_3 + B_2 - \cos \psi}{B_4} \right) \right] \right\}$
Egy nagyobb hőmérsékletű dA_1 elemi felület sugároz egy ψ szöget bezáró trapéz-felületre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arctan B_1 + \frac{(B_2 + B_1 B_3) \cos \psi - 1}{B_5} \left[\arctan \left(\frac{B_1 B_3^2 + B_3(B_2 - \cos \psi)}{B_5} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \arctan \left(\frac{B_1 - B_3(B_2 - \cos \psi)}{B_5} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{B_1 \cos \psi}{B_4} \left[\arctan \left(\frac{\cos \psi}{B_4} \right) + \arctan \left(\frac{B_2 - \cos \psi}{B_4} \right) \right] \right\}$ $B_1 = \frac{b}{a} \quad B_4 = \sqrt{B_1^2 + \sin^2 \psi}$ $B_2 = \frac{c}{a} \quad B_5 = \sqrt{(B_3^2 + 1) \sin^2 \psi + (B_2 - \cos \psi)^2}$ $B_3 = \operatorname{tg} \gamma \quad B_6 = \sqrt{(B_3^2 + 1) \sin^2 \psi + (B_2 + B_1 B_3 - \cos \psi)^2}$

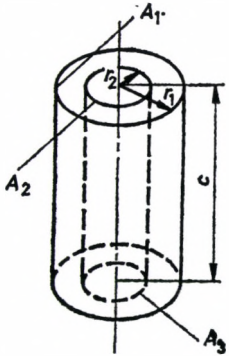
Geometriai elrendezés		Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű dA_1 elemi felület sugároz egy vele párhuzamos, ellipszis alakú lemezre		$\varphi_{1-2} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}}$
Egy nagyobb hőmérsékletű végtelen hosszú dA_1 felületsáv sugároz a vele párhuzamos, végtelen hosszú hengerre		$\varphi_{1-2} = \frac{br}{b^2 + c^2}$
Egy nagyobb hőmérsékletű belső, gyűrű alakú dA_1 elemi hengerfelület sugároz a henger fenéklapjára		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{B^2 + 2}{\sqrt{B^2 + 4}} - B \right)$ $B = \frac{c}{r}$

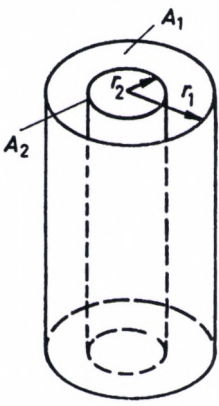
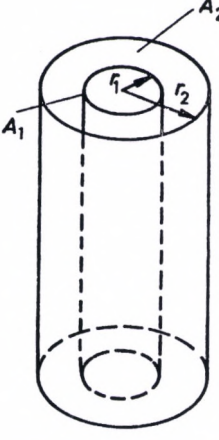
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, gyűrű alakú dA_1 elemi hengerfelület sugároz a henger tengelyével párhuzamos, végtelen kiterjedésű sík felületre	 $\varphi_{1-2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \psi)$
Egy nagyobb hőmérsékletű dA_1 elemi felület sugároz egy vele párhuzamos tengelyvonalú hengerre. Az elemi felület a henger egyik végénél helyezkedik el.	 $\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi B_1} \left[\arctg \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 - 1}} + B_2 \left(\frac{B_3^2 - 2B_1}{B_3 B_4} \arctg \frac{B_3}{B_4} \sqrt{\frac{B_1 - 1}{B_1 + 1}} - \arctg \sqrt{\frac{B_1 - 1}{B_1 + 1}} \right) \right]$ $B_1 = \frac{b}{r}$ $B_2 = \frac{c}{r}$ $B_3 = \sqrt{(1 + B_1^2)^2 + B_2^2}$ $B_4 = \sqrt{(1 - B_1^2)^2 + B_2^2}$

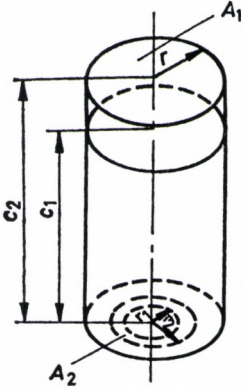
Geometriai elrendezés		Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, A_1 téglalapfelület sugároz a vele azonos nagyságú A_2 párhuzamos téglalapfelületre		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{B_1 B_2} \ln \left(\frac{B_3 B_4}{B_3 + B_4 - 1} \right) + \frac{2\sqrt{B_3}}{B_1} \arctg \frac{B_2}{\sqrt{B_3}} + \right. \\ \left. + \frac{2\sqrt{B_4}}{B_2} \arctg \frac{B_1}{\sqrt{B_4}} - \frac{2}{B_2} \arctg B_1 - \frac{2}{B_1} \arctg B_2 \right]$ $B_1 = \frac{b}{a} \quad B_3 = 1 - B_1^2$ $B_2 = \frac{c}{a} \quad B_4 = 1 + B_2^2$
Egy nagyobb hőmérsékletű A_1 téglalapfelület sugároz a rá merőleges A_2 másik téglalapfelületre		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi B_1} \left\{ \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(1+B_1^2)(1+B_2^2)}{1+B_1^2+B_2^2} \left(\frac{B_1^2(1+B_1^2+B_2^2)}{(1+B_1^2)(B_1^2+B_2^2)} \right)^{B_1^2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{(B_2^2(1+B_1^2+B_2^2))}{(1+B_2^2)(B_1^2+B_2^2)} \right)^{B_2^2} \right] + B_1 \arctg \frac{1}{B_1} + B_2 \arctg \frac{1}{B_2} - \right. \\ \left. - \sqrt{B_1^2+B_2^2} \arctg \left(\frac{1}{B_1^2+B_2^2} \right) \right\}$ $B = \frac{b}{a}$ $C = \frac{c}{a}$ Ha $a \rightarrow \infty$ $\varphi_{1-2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c}{b} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2} \right]$

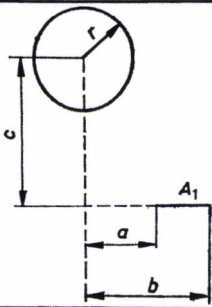
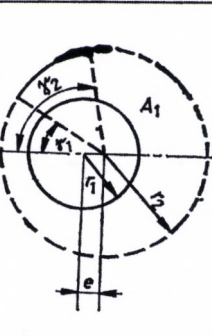
Geometriai elrendezés		Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, kör alakú A_1 felület sugároz a vele párhuzamos, de nagyon távol levő kör alakú felületre		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{r_2}{r_1} - \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2} \right]$
Egy nagyobb hőmérsékletű, kör alakú A_1 felület sugároz a vele párhuzamos, a távolságra levő második kör alakú felületre		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2B_1^2} (B_3 - \sqrt{B_3^2 - 4B_1^2 B_2^2})$ $B_1 = \frac{r_2}{a}$ $B_2 = \frac{r_1}{a}$ $B_3 = 1 + B_1^2 + B_2^2$

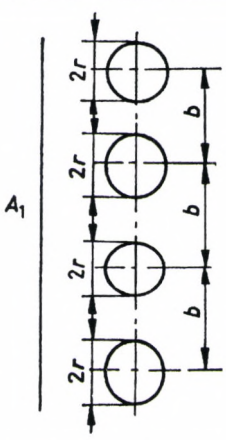
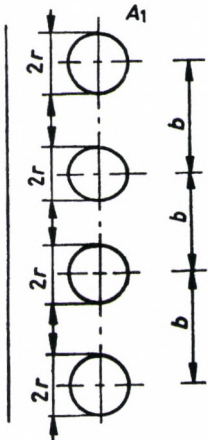
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen hosszú A_1 hengerfelület sugároz a vele azonos átmérőjű, párhuzamos, végtelen hosszú hengerfelületre	 $\varphi_{1-2} =$ $= \frac{2}{\pi} \left[\sqrt{B^2 - 1} + \arcsin \left(\frac{1}{B} \right) - B \right]$ $B = \frac{b}{r}$
Egy henger, nagyobb hőmérsékletű, belső A_1 felülete sugároz a henger tengelyére merőleges, kör alakú A_2 felületre	 $\varphi_{1-2} = \frac{1}{4B_1} \times$ $\times [\sqrt{B_1^4 - 2B_1^2(1 - B_2^2) + (1 - B_2^2)^2} - (1 - B_2^2 + B_1^2)]$ $B_1 = \frac{c}{r_1}$ $B_2 = \frac{r_1}{r_2}$

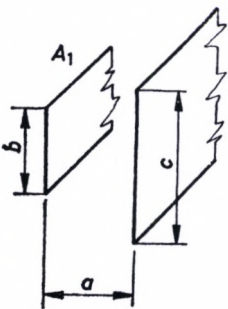
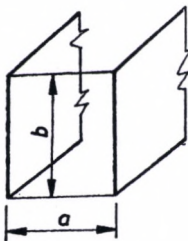
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy henger nagyobb hőmérsékletű, belső A_1 felület sugároz egy vele koncentrikus belső henger A_2 külső felületére és a két henger közötti teret lezáró, a két henger tengelyvonalára merőleges A_3 körgyűrű alakú felületre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{B_1} - \frac{1}{\pi B_1} \left\{ \arccos \frac{B_4}{B_3} - \frac{1}{2B_2} \sqrt{(B_3+2)^2 - 4B_1^2} \arccos \left(\frac{B_4}{B_1 B_3} \right) + B_4 \arcsin \left(\frac{1}{B_1} \right) - \frac{\pi B_3}{2} \right\}$ $\varphi_{1-1} = 1 - \frac{1}{B_1} + \frac{2}{\pi B_1} \arctg \left(\frac{2 \sqrt{B_1^2 - 1}}{B_2} \right) -$ $- \frac{B_2}{2\pi B_1} \left\{ \frac{\sqrt{4B_1^2 + B_2^2}}{B_2} \arcsin \left[\frac{4(B_1^2 - 1) + B_2^2 \left(1 - \frac{2}{B_1^2} \right)}{B_2^2 - 4(B_1^2 - 1)} \right] - \right.$ $\left. - \arcsin \left(1 - \frac{2}{B_1^2} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{4B_1^2 + B_2^2}}{B_2} - 1 \right) \right\}$ $\varphi_{1-3} = \frac{1}{2} (1 - \varphi_{1-2} - \varphi_{1-1})$ $B_1 = \frac{r_1}{r_2}$ $B_2 = \frac{r}{r_2}$ $B_3 = B_1^2 + B_2^2 - 1$ $B_4 = B_2^2 - B_1^2 + 1$

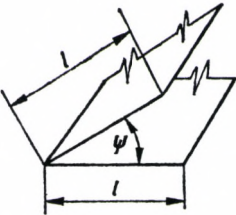
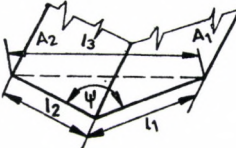
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy végtelen hosszú henger nagyobb hőmérsékletű, belső A_1 felülete sugároz egy vele koncentrikus, végtelen hosszúságú henger A_2 külső felületére	 $\varphi_{1-2} = \frac{r_2}{r_1}$
Egy végtelen hosszú henger nagyobb hőmérsékletű, külső A_1 felülete sugároz egy vele koncentrikus, végtelen hosszúságú henger A_2 belső felületére	 $\varphi_{1-2} = 1$

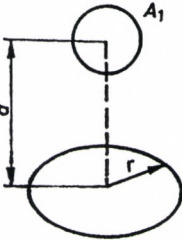
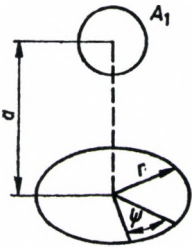
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű henger belső, A_1 részfelülete sugároz a henger tengelyére koncentrikus A_2 körgyűrűre 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{4(B_2 - B_1)} \times$ $\times [\sqrt{B_2^4 + 2B_2^2(1 + B_3^2) + (1 - B_3^2)^2} -$ $- \sqrt{B_2^4 + 2B_2^2(1 + B_4^2) + (1 - B_4^2)^2} +$ $+ \sqrt{B_1^4 + 2B_1^2(1 + B_4^2) + (1 - B_4^2)^2} -$ $- \sqrt{B_1^4 + 2B_1^2(1 + B_3^2) + (1 - B_3^2)^2}]$ $B_1 = \frac{c_1}{r}$ $B_2 = \frac{c_2}{r}$ $B_3 = \frac{r_1}{r}$ $B_4 = \frac{r_2}{r}$

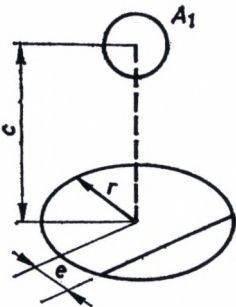
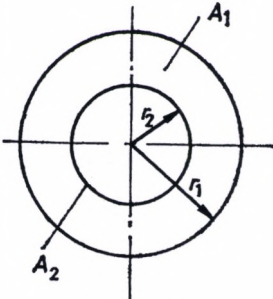
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező	Képlet-szám
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen hosszú A_1 sáv sugároz egy vele párhuzamos tengelyű, végtelen hosszú hengerfelületre	 $\varphi_{1-2} = \frac{r}{b-a} \left(\arctg \frac{b}{c} - \arctg \frac{a}{c} \right) \quad (2.35)$	
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen hosszú A_1 külső hengerfelület sugároz egy vele párhuzamos tengelyű, excentrikus elhelyezkedésű belső hengerfelület sávjára	 $\varphi_{1-2} = \frac{1}{2\pi} \times \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} + \arctg \left(\frac{r_2 + e}{r_2 - e} \tg \frac{\gamma_2}{2} \right) - \arctg \left(\frac{r_2 + e}{r_2 - e} \tg \frac{\gamma_1}{2} \right) \right] \quad (2.36)$	

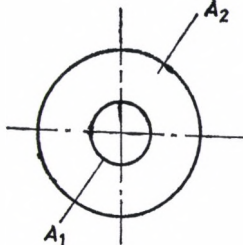
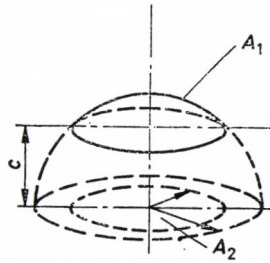
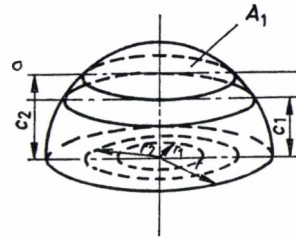
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen kiterjedésű A_1 sík sugároz egy csősorra. A csősor tengelyvonalainak síkja párhuzamos a végtelen kiterjedésű síkkal.  The diagram shows a vertical array of four circles representing cylinders. A horizontal line to the left of the array is labeled A_1. The vertical distance between the centers of adjacent cylinders is labeled $2r$. The horizontal distance from the vertical centerline of the array to the vertical line passing through the center of each cylinder is labeled b.	$\varphi_{1-2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{b}\right)^2} + \frac{2r}{b} \arctg \sqrt{\left(\frac{b}{2r}\right)^2 - 1}$
Egy nagyobb hőmérsékletű A_1 csősor sugároz egy végtelen kiterjedésű síkra. A csősor tengelyvonalainak síkja párhuzamos a végtelen kiterjedésű síkkal.  The diagram shows a vertical array of four circles representing cylinders. A horizontal line to the left of the array is labeled A_1. The vertical distance between the centers of adjacent cylinders is labeled $2r$. The horizontal distance from the vertical centerline of the array to the vertical line passing through the center of each cylinder is labeled b.	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{2r} - \sqrt{\left(\frac{b}{2r}\right)^2 - 1} + \arctg \sqrt{\left(\frac{b}{2r}\right)^2 - 1} \right]$

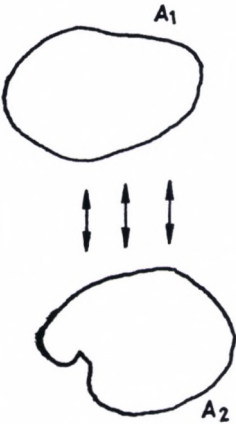
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen hosszú A_1 sáv sugároz egy vele párhuzamos másik sávra. 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2B_1} [\sqrt{(B_1+B_2)^2+4} - \sqrt{(B_2-B_1)^2+4}]$ $\varphi_{1-2} = \frac{1}{2B_2} [\sqrt{(B_1+B_2)^2+4} - \sqrt{(B_1-B_2)^2+4}]$ $B_1 = \frac{b}{a}$ $B_2 = \frac{c}{a}$
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen hosszú sáv sugároz egy vele azonos nagyságú és párhuzamos másik sávra. 	$\varphi_{1-2} = \varphi_{2-1} = \frac{a}{b} \left[\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} - 1 \right]$

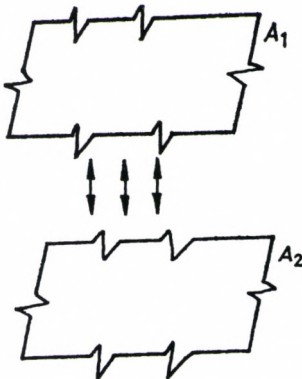
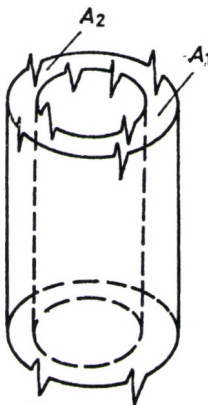
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen hosszú sáv sugároz egy vele azonos nagyságú másik sávra. A két sáv egymással ψ szöget zár be. 	$\varphi_{1-2} = \varphi_{2-1} = 1 - \sin \frac{\psi}{2}$
Egy nagyobb hőmérsékletű, végtelen hosszú A_2 sáv sugároz egy másik A_1 sávra. A két sáv nem azonos nagyságú, egymással ψ szöget zár be. 	$\varphi_{1-2} = \frac{l_1 + l_2 - l_3}{2l_1}$

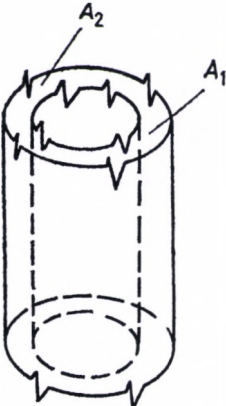
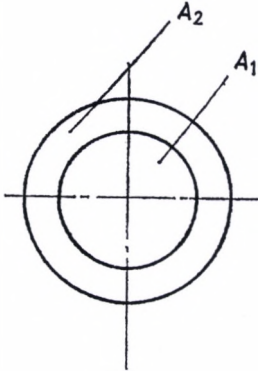
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű A_1 gömbfelület sugároz egy olyan kör alakú felületre, amelynek forgástengelye átmegy a gömb középpontján 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \right]$
Egy nagyobb hőmérsékletű A_1 gömbfelület sugároz egy ψ nyílásszögű köríkhöz tartozó kör forgástengelye átmegy a gömb középpontján. 	$\varphi_{1-2} = \frac{\psi}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \right]$

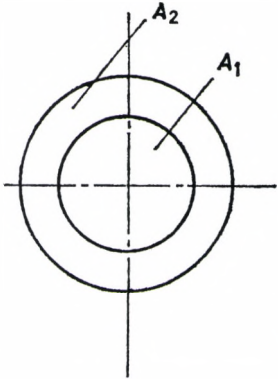
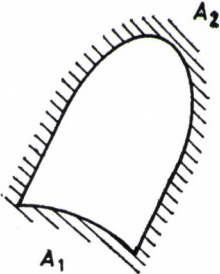
Geometriai elrendezés	Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű A_1 gömbfelület sugároz egy körszeletre. A körszelethez tartozó kör forgástengelye áthalad a gömb középpontján. 	$\varphi_{1-2} = \frac{1}{8} - \frac{\arccos B_2}{2\pi \sqrt{1 + \frac{1}{B_1^2}}} +$ $+ \frac{1}{4\pi} \arcsin \left(\frac{B_1^2 - B_2^2 - 2B_1^2 B_2^2}{B_1^2 + B_2^2} \right)$ $B_1 = \frac{c}{r}$ $B_2 = \frac{e}{r}$
Egy nagyobb hőmérsékletű A_1 belső gömbfelület sugároz egy vele koncentrikus A_2 külső gömbfelületre 	$\varphi_{1-2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$

Geometriai elrendezés		Besugárzási tényező
Egy nagyobb hőmérsékletű A_1 külső gömbfelület sugároz egy A_2 belső gömbfelületre.		$\varphi_{1-2} = 1$
Egy nagyobb hőmérsékletű göbbsüveg A_1 belső felülete sugároz az alapkörének síkjával párhuzamos felező síkban fekvő, koncentrikus körre.		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{4(1-B_1)} [\sqrt{4B_2^2 + (1-B_2^2)^2} - \sqrt{4B_1^2 B_2^2 + (1-B_2^2)^2}]$ $B_1 = \frac{c}{r}$ $B_2 = \frac{r_1}{r}$
Egy nagyobb hőmérsékletű gömbön A_1 belső felülete sugároz az alapkörének síkjával párhuzamos felező síkban fekvő, koncentrikus körgyűrűre.		$-\frac{1}{4(B_2-B_1)} [\sqrt{4B_2^2 B_4^2 + (1-B_4^2)^2} - \sqrt{4B_2^2 B_3^2 + (1-B_3^2)^2} +$ $+ \sqrt{4B_1^2 B_3^2 + (1-B_3^2)^2} - \sqrt{4B_1^2 B_4^2 + (1-B_4^2)^2}]$ $B_1 = \frac{c_1}{r} \quad B_3 = \frac{r_1}{r}$ $B_2 = \frac{c_2}{r} \quad B_4 = \frac{r_2}{r}$

Geometriai elrendezés	Kölcsönös sugárzási együttható
A_1 szürke felület sugároz abszolút fekete környezetbe	 $C_k = \varepsilon_1 C_s$
Két tetszőleges diffúz felület	 $C_k = \frac{C_1 C_2}{C_s}$

Geometriai elrendezés	Kölcsönös sugárzási együttható	
Két párhuzamos, végtelen nagyságú tükröző- vagy diffúz felület		$C_k = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}}$
Két végtelen hosszú, koncentrikus henger közül A1 tükröző vagy diffúz, A2 diffúz		$C_k = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s} \right)}$

Geometriai elrendezés	Kölcsönös sugárzási együttható
Két végtelen hosszú, koncentrikus henger közül A_1 tükröző vagy diffúz, A_2 tükröző.	 $C_k = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}}$
Koncentrikus gömbfelületek közül A_1 tükröző vagy diffúz, A_2 diffúz.	 $C_k = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s} \right)}$

Geometriai elrendezés	Kölcsönös sugárzási együttható
Koncentrikus gömbfelületek közül az A_1 tükröző vagy diffúz, A_2 pedig tükröző	 $C_k = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}}$
Két határoló felülettel rendelkező üreg. Az A_1 felület sík vagy konvex tükröző vagy diffúz, A_2 konkáv diffúz.	 $C_k = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s} \right)}$

Fémek ϵ_n feketeségi (sugárzási) foka

Az anyag neve	Jel és összetétel	A felület állapota	Hőmérséklet,		Feketeségi fok, ϵ_n^*
			$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Acél		bádog, köszörült	940 1100	1213,15 1373,15	0,520 0,610
		bádog, hengerelt	20	293,15	0,057
		bádog, kemény, fényezett oxidréteggel	25	298,15	0,82
		bádog, jelentős, érdes oxidréteggel	25	298,15	0,80
		600 °C-on oxidálva	200 600	473,15 873,15	0,79 0,79
		oxidált, érdes	40 370	313,15 643,15	0,94 0,97
		lágú, olvasztott	1600 1800	1873,15 2073,15	0,28 0,28
		cső	0 200	273,15 473,15	0,745 0,800
szerszám		cinkkel bevont bádog	—	—	0,262
Acélöntvény		fényezett	770 1040	1043,15 1313,15	0,52 0,56
Alumínium	Al	megmunkálatlan	25	289,15	0,070
		polírozott	23 225 575	296,15 498,15 848,15	0,040 0,039 0,057
		megmunkált	170	443,15	0,039
		600 °C-on oxidált	200 600	473,15 873,15	0,110 0,190
		alumínium tetőhöz	43	316,15	0,216
		alumíniummal bevont rézfelület, 600 °C-ig terjedő melegítéssel	200 600	473,15 873,15	0,180 0,190
		alumíniummal bevont rézfelület, 600 °C-ig terjedő melegítéssel	200 600	473,15 873,15	0,520 0,570
Arany	Au	finoman fényezett	225 625	498,15 898,15	0,018 0,035
		fényezett	20	293,15	0,025
		nem fényezett	20	293,15	0,47

(1. folytatás)

Az anyag neve	Jel és összetétel	A felület állapota	Hőmérséklet,		Fekete- ségi fok, ε_n^*
			$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Bizmut	Bi	fényezett	80	353,15	0,340
Cink	Zn	fényezett	230 325	503,15 598,15	0,045 0,053
		sötét	20 50 280	293,15 323,15 553,15	0,25 0,21 0,21
		oxidálva 400 °C-ig terjedő melegítéssel	400	673,15	0,11
		(cinkkel bevont vasbádog) fényezett	28	301,15	0,228
		(cinkkel bevont vasbádog) szürkére oxidált	24	297,15	0,276
Ezüst	Ag	fényezett	20	293,15	0,025
		tükrőfényes	225 625	498,15 898,15	0,0198 0,0342
		fényezett	370	643,15	0,0312
Fehérfém		fényesre ónozva	— —	— —	0,056 0,086
Higany	Hg	—	0 100	273,15 373,15	0,09 0,12
Króm	Cr	fényezett	150	423,15	0,058
Krómacél		(lemez) oxidált	—	—	0,870
Króm-nikkel	Cr—Ni	—	52 1035	325,15 1308,15	0,64 0,76
Manganin		simára hengerelt	118	391,15	0,048
Molibdén	Mo		725 2600	998,15 2873,15	0,096 0,292
Nikkel	Ni	fényezett	100 230 375	373,15 503,15 648,15	0,045 0,070 0,087
		oxidált	100	373,15	0,41
		600 °C-on oxidált	200 600	473,15 873,15	0,370 0,48
		(nikkelezett vasbádog) fényezett	24	297,15	0,056

Az anyag neve	Jel és összetétel	A felület állapota	Hőmérséklet,		Fekete-ségi fok, ϵ_n^*
			$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Nikkel	Ni	sötét	20	293,15	0,111
		(nikkelezett fényezett vas)	23	296,15	0,045
		(nikkelezett maratott vas) nem fényezett	20	293,15	0,110
		huzal	185 1000	458,15 1273,15	0,096 0,186
Nikkel-oxid		—	650 1255	923,15 1528,15	0,59 0,86
Nikkelötvözetek	Ni—Cr	600 °C-on oxidált	200 600	473,16 873,15	0,41 0,46
	18% Cr, 8% Ni acélal	gyengén ezüstös, érdes, melegítés után barna	215 490	488,15 763,15	0,44 0,36
	18% Cr, 8% Ni acélal	525 °C-os 25 h-ig tartó melegítés után	225 525	498,15 798,15	0,62 0,73
	Cr—Ni (18...32% Ni, 55...68% Cr, 20% Zn)	szürke, oxidált	20	293,15	0,262
	20% Ni, 25% Cr	sötétszürke, időjárás hatására oxidált	215 525	488,15 798,15	0,90 0,97
	60% Ni, 12% Cr	sima, fekete, időjárás hatásá- ra keletkezett vastag oxidréteg	270 560	543,15 833,15	0,89 0,82
Ólom	Pb	fényezett	130 230	403,15 503,15	0,056 0,074
		szürke, oxidált	20	293,15	0,28
		200 °C-on oxidált	200	473,15	0,63
Ón	Sn	fényes	20	293,15	0,070
		ónozott acéllemez	24	297,15	0,056 0,086
Platina	Pt	fényezett	225 625	498,15 898,15	0,054 0,104
		platinaszalag	925 1115	1198,15 1388,15	0,12 0,17
		platinaszál	25 1230	298,15 1503,15	0,036 0,192
		huzal	225 1375	498,15 1648,15	0,073 0,182

Az anyag neve	Jel és összetétel	A felület állapota	Hőmérséklet,		Fekete- ségi fok, ϵ_n^*
			$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Réz	Cu	elektrolitikusan tisztított, gondosan polírozott	80	353,15	0,018
		polírozott	20 115	293,15 388,15	0,030 0,023
		enyhén sötét	20	293,15	0,037
		durva csiszolású	20	293,10	0,070
		oxidált	130	403,15	0,760
		600 °C-ig terjedő melegítéssel oxidálva	200 600	473,15 873,15	0,570 0,550
		feketére oxidálva	20	293,15	0,780
		megmunkált	—	—	0,640
		olvasztott	1075 1275	1348,15 1548,15	0,160 0,130
		cső	—	—	0,360
Réz-oxid		—	800	1073,15	0,660
		—	1100	1373,15	0,540
Sárgaréz	Cu—Zn	fényezett	19 300	292,15 573,15	0,05 0,032
		sötét	56 338	329,15 611,15	0,202 0,221
		durván hengerelt	22	295,15	0,06
		hengerelt, csiszolt	22	295,15	0,20
		barnított	—	—	0,42
		oxidált	338	611,15	0,22
		600 °C-on oxidált	200 600	473,15 873,15	0,61 0,59
		cső	—	—	0,208
Sziluminöntvény		fényezett	150	423,15	0,186
Szürkeöntvény		fényezett	200	473,15	0,21
		megmunkált	22 830 990	295,15 1103,15 1263,15	0,435 0,60 0,70
		600 °C-on oxidált	200 600	473,15 873,15	0,64 0,78

Az anyag neve	Jel és összetétel	A felület állapota	Hőmérséklet,		Fekete- ségi fok, ϵ_n^*
			$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Szürkeöntvény		érdes, erősen oxidált	40 250	315,15 523,15	0,95 0,95
		öntödei kéreg, nyers	100	373,15	0,80
		olvasztott	1330	1603,15	0,28
Tantál	Ta		1325 2525	1598,15 2798,15	0,193 0,31
Vas	Fe	(elektrolitikus) finoman fényezett	175 225	448,15 498,15	0,052 0,064
		fényezett	425 1020	698,15 1293,15	0,144 0,377
		csiszolt	20	193,15	0,242
		fényesre hántolt	150	423,15	0,128
		fényesre köszörült	20	293,15	0,24
		vörös rozsdás	20	293,15	0,61
		erősen rozsdás	20	293,15	0,85
		oxidált, sima	125 525	398,15 798,15	0,78 0,82
		olvasztott, oxidált	20 360	293,15 633,15	0,94 0,94
		hengereelt	20	293,15	0,77
		(vasbádóg) sima	900 1040	1173,15 1313,15	0,55 0,60
		(öntöttvas) megmunkálatlan	925 1115	1198,15 1388,15	0,87 0,95
		tűzálló, oxidált	80	353,15	0,613
		vas-oxid	500 1200	773,15 1473,15	0,85 0,89
Volfrám	W	—	230 2230	503,15 2503,15	0,053 0,31
		Volfrám szál	3300	3573,15	0,39
		használt	25 3300	298,15 3573,15	0,032 0,035

Nemfémek anyagok ε_n feketeségi (sugárzási) foka

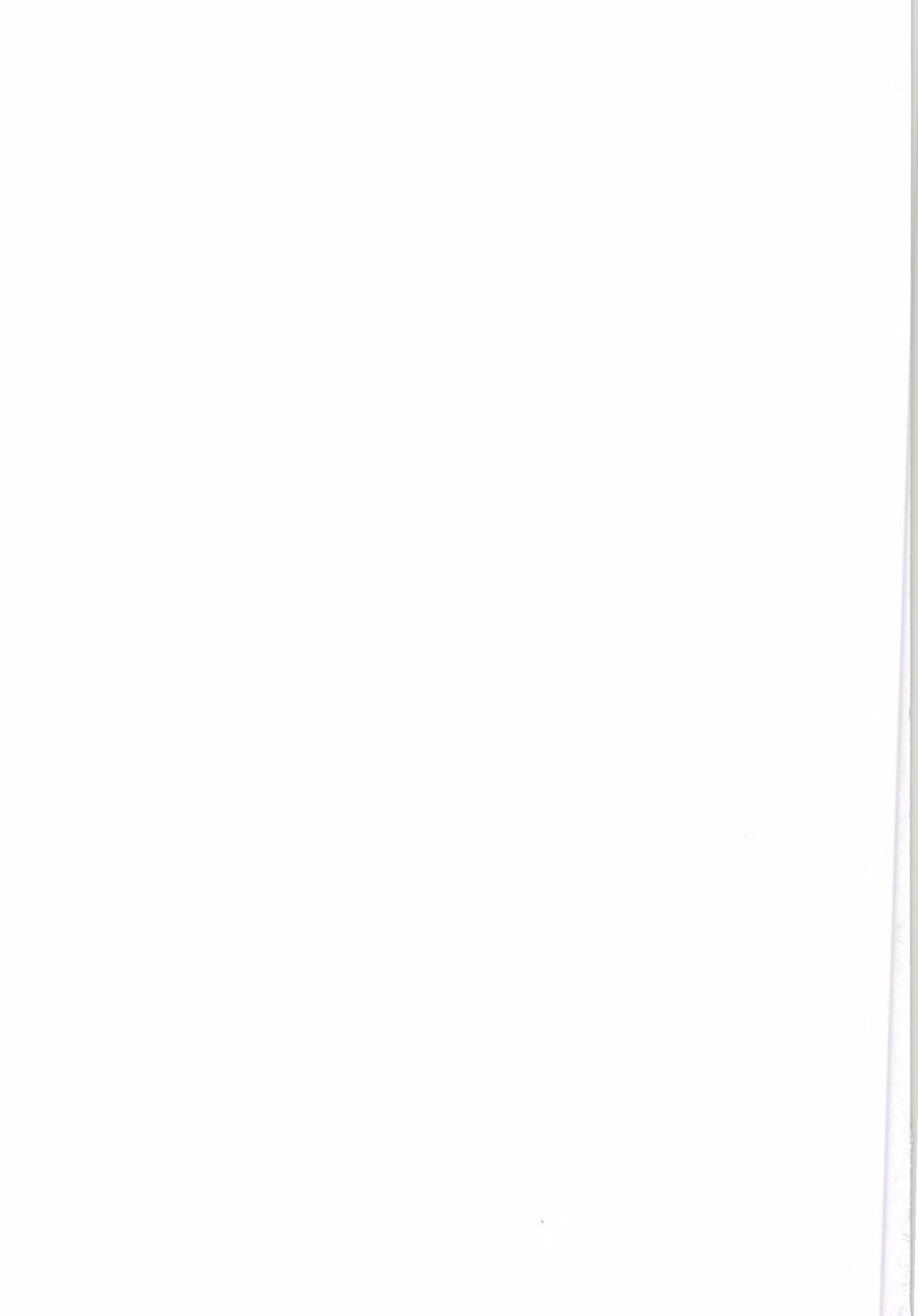
Az anyag neve	A felület állapota	Hőmérséklet,		Feketeségi fok, ε_n^*
		$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Égetett agyag	Égetett	70	343,15	0,91
Azbesztlemez — papír — pala	—	24	297,15	0,96
	—	40 370	313,15 643,15	0,93 0,95
	—	20	293,15	0,96
	—			
Dinasztégla	zománcozott, érdes	1100	1373,15	0,85
	nem zománcozott, érdes	1000	1273,15	0,80
Fa — bükk — tölgy	gyalult	20 70	293,15 343,15	0,90 0,925
	gyalult	70	343,15	0,935
	gyalult	21	294,15	0,885
	gyalult			
Falazat	vakolt	0 200	273,15 473,15	0,93 0,93
Gipsz		0 200	273,15 473,15	0,90 0,90
Gránit	csiszolt	—	—	0,427
Gumi, puha — kemény	sűrű	24	297,15	0,86
	fekete, érdes	24	297,15	0,95
Gyapjúszövet	—	20	293,15	0,75
Homokkő	sima, csiszolt	—	—	0,576
Jég	sima, víz érdes	0 0	273,15 273,15	0,966 0,985
Kátránypapír	—	20	293,15	0,93
Korom	—	0 370	273,15 643,15	0,945 0,945
Korundpor papíron	érdes	80	353,15	0,855
Kvarc	olvasztott, érdes	20	293,15	0,93
Linóleum	—	20	293,15	0,885
Magnezit	—	1390	1663,15	0,39

Az anyag neve	A felület állapota	Hőmérséklet,		Feketeségi fok, e_n^*
		$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Márvány	szürke, fényezett	22	295,15	0,93
	sima, csiszolt	—	—	0,545
Mészhabarcs	fehér, érdes	20	293,15	0,93
		200	473,15	0,93
Pala	csiszolt	60	333,15	0,665
		200	473,15	0,665
Pamut	—	—	—	0,78
Papír	—	20	293,15	0,80
		95	368,15	0,92
Porcelán	mázás	20	293,15	0,93
Samott	—	1200	1473,15	0,60
Samottkő	zománcozott	1000	1273,15	0,75
		1220	1493,15	0,60
Selyemszövet	—	20	293,15	0,77
Tiszta szén	csiszolt	125	398,15	0,81
		625	898,15	0,79
Szén	—	1040	1313,15	0,53
		1405	1678,15	0,53
Szilikátkő	érdes	1000	1273,15	0,80
		1220	1493,15	0,66
Szilimanitkő	—	1390	1663,15	0,29
Tégla	vörös, érdes	20	293,15	0,93
Tűzálló anyagok	erősen sugárzó	500	773,15	0,80
		600	873,15	0,85
		1000	1273,15	0,90
	gyengén sugárzó	500	773,15	0,65
		600	873,15	0,70
		1000	1273,15	0,75
Üveg	sima	20	293,15	0,90
		90	363,15	0,94
Zománc, fehér	vasra olvasztott	20	293,15	0,90

Bevonatok ϵ_n feketeségi (sugárzási) foka

Az anyag neve	A felület állapota	Hőmérséklet,		Feketeségi fok, ϵ_n^*
		$t, ^\circ\text{C}$	T, K	
Alumínium-bronz	—	100	373,15	0,20
		100	373,15	0,40
Alumínium festékek 325 °C-ra melegítve	—	150	423,15	0,35
		315	588,15	0,35
Alumínium festékek (különbözők)	érdes, sima	100	373,15	0,27
		100	373,15	0,67
Alumíniumlakk	érdes	20	293,15	0,39
Bakelitlakk	—	80	353,15	0,935
Lakk, fehér	—	40	313,15	0,80
		95	368,15	0,95
	fényezett	25	298,15	0,876
	matt	40	313,15	0,96
		95	368,15	0,98
	— spiritusz	25	298,15	0,82
— radiátor	—	100	373,15	0,925
Mínium	—	20	293,15	0,93
		100	373,15	0,93
Olaj	vastag réteg	—	—	0,82
Olajfesték	—	0	273,15	0,885
		200	473,15	0,885
Olajos felület	sima	—	—	0,78
Sellak, fekete	fényezett	21	294,15	0,82
	matt	75	348,15	0,91
		145	418,15	0,91
Víz	—	—	—	0,8
Vízüveg és korom felület	—	20	293,15	0,96
		100	373,15	0,96
Zománclakk, olvasztott	fehér, érdes	20	293,15	0,90

* ϵ_n feketeségi tényező a felület normálisának irányában. A teljes sugárzásra vonatkozólag feltételezhető: fémek fényes felületére általában $\epsilon=1, 2\epsilon_n$, más sima felületű festéknél $\epsilon=0,95\epsilon_n$, az érdes felületekre $\epsilon=0,98\epsilon_n$.



A könyv – több évtizedes hiányt pótolva – áttekintést ad a fűtéstechnika időszerű, elméleti problémáiról.

Bemutatja a hőigényszámítás elméleti alapjait, valószínűségelméleti modelljét, a kockázati elvű méretezési és számítási módszereket.

Összefoglalja a fűtéstechnikában felmerülő stacionárius és instacionárius hővezetési feladatokat és a hősugárzás, hőátadás elméletét. Ismerteti a sugárzó fűtések méretezését. Rövid komfortelméleti összefoglalást ad.

Ismerteti a fűtéstechnikában előforduló tartályokban, hőtárolókban tárolt közegek fűtésének és hűtésének dinamikáját.

Bemutatja a melegvizes fűtési hálózatok hidraulikai analízisét, méretezését és szabályozását.

ISBN 978-963-05-8598-9



9 789630 585989