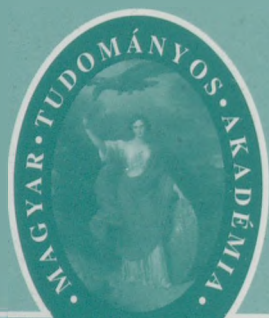


SZÉKFOGLALÓK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIAÁN

NAGY ISTVÁN

VÁLTOZÓ STRUKTÚRÁJÚ
NEMLINEÁRIS RENDSZEREK



1825

Szerkesztő
GLATZ FERENC

Olvasószerkesztő
Pótv János

ISBN 963 508 207 X
ISSN 1419-8959

Kiadja
a Magyar Tudományos Akadémia, 2000
Felelős kiadó: Szabó B. István
Kiadói szerkesztő: Burucs Kornélia
Nyomdai előkészítés: MTA Történettudományi Intézete kiadványcsoportja
Tördelő: Csányi Attila
Nyomdai munkálatok: AKAPRINT Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Freier László ügyvezető igazgató

Nagy István
az MTA rendes tagja

Változó struktúrájú nemlineáris rendszerek

Elhangzott 1999. március 24-én

Az akadémiai székfoglaló előadás első és egyik legnehezebb kérdése a témaválasztás. Jelen esetben három szempont játszott meghatározó szerepet. Az első az volt, hogy a téma legyen alkalmas a hallgatóság érdeklődésének a felkeltésére, figyelmének a megragadására. Minthogy a választott téma vagy legalábbis annak egyes részei, nevezetesen a káoszelmélettel és a fraktálgeometriával kapcsolatosak, a természettudományok többségében – vagy talán még az a kijelentés is megkockáztatható, hogy mindegyikében – a tudományos kutatás frontvonalában vannak, az érdeklődés felkeltése remélhető volt. A szerző szűkebb értelemben vett saját szempontja volt, hogy e kérdéskörök kutatási területéhez vagy szorosan kapcsolódtak, vagy azzal egybeestek. Végül, de nem utolsósorban fontos szerepet játszott még az is, hogy a témakörben új nemzetközi és saját eredményekről lehetett beszámolni.

A téma aktualitását jelzi és érdekességét fokozza az a körülmény, hogy a nemlineáris rendszerek elméletében a tudományos felfogás századunk utolsó negyedében megváltozott. Korábban úgy vélték a matematikusok és a fizikusok és az ő nyomukon az élettelen és élő természettudományokkal foglalkozó kutatók, hogy a nemlineáris dinamikus rendszerek nagy része egymástól független egyedi esetet képvisel, s mindegyik külön-külön a saját belső törvénye szerint viselkedik. Léteznek ugyan többségükben közelítő, úgynevezett „általános” módszerek a nemlineáris dinamikus

rendszerekre, de ezek alkalmazhatósága egyrészt csak megszorításokkal a nemlineáris rendszereknek egy-egy osztályára korlátozódik, másrészt alkalmatlanok számos kérdés, jelenség megválaszolására. Ilyen „általános” módszer például: linearizálás kis változásokra, szakaszos linearizálás, közelítés leíró függvénnyel, ábrázolás fázissíkban, Ljapunov-féle stabilitási kritérium stb. A lineáris és a nemlineáris rendszerek leírására vonatkozó eltérő felfogás alapja, forrása a matematikai háttér volt. Míg a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldására részleteiben kidolgozott, általános érvényű módszerek állnak rendelkezésre, addig a nemlineáris differenciálegyenletek közül csak kevésnek ismerjük a megoldását zárt alakban, általános érvényű elmélet nem volt ismert.

Az utolsó negyedszázadban a káoszelmélet alapjainak a kiépítése tört utat annak az új tudományos felfogásnak, miszerint a nemlineáris dinamikus rendszerek világában is ki lehet építeni általános érvényű elméletet, amely e rendszerek széles körére vonatkozik. Csaknem mindenkit meglepett az ilyen rendszerekben felfedezett közös tulajdonságok nagy száma, valamint az a körülmény, hogy ezek a tulajdonságok diszciplínákon is átnyúlnak, megtalálhatók villamos, mechanikai, biológiai, asztronómiai, kémiai stb. folyamatokban.

Jelen közlemény hangsúlyosan a nemlineáris dinamikus rendszereknek csak az egyik osztályával, a változó struktúrájú rendszerekkel kíván foglalkozni, de még ezek körét is szűkíti, mivel kizárja az optimumkereső, adaptív, tanuló, önszervező alosztályokat. Az általános érvényű részeken túl azokra a rendszerekre korlátozódik, amelyekben a struktúra a *ki-be kapcsolások* sorozata miatt változik. E rendszerekben a nemlinearitás elsődleges forrása az, hogy a kapcsolások időpontjai az állapotváltozók függvényei.

A bevezetést követően e munka négy fejezetre tagozódik. Az *Előzmények* című első fejezet a nem autonóm rendszerekkel, a frekvencia- és időtartománybeli módszerekkel, a nemlineáris rendszerek három állapotával, vagyis a fix pontokkal, a határciklussal, valamint a kváziperiodikus állapottal foglalkozik, a *Változó struktúrájú, szakaszosan lineáris nemlineáris rendszerek* című második fejezet *Bevezetésébe* a témakör kijelölése és két egyszerű példa került. Majd a matematikai háttért követően a határciklus kapcsán már leírt vizsgálati módszerre visszavezetett stabilitás-ellenőrzés ismertetése olvasható. A *Káoszelmélet és fraktálgeometria* című harmadik fejezet rövid bevezetőt követően a kaotikus állapotba való átmenetek faj-

táiról, két gyakran idézett példáról, a káosz és a fraktálgeometria érintkezési pontjáról és az „árnyék” tételről szól röviden. Végül az utolsó fejezet a *Változó struktúrájú rendszerek* cím alatt három példát említ, amelyekben túlnyomórészt saját eredményekről számol be. A közlemény a *Zárszóval* fejeződik be.

1. Előzmények

A valóságos rendszerek mindig disszipatívak. A továbbiakban figyelmünket ilyen rendszerekre korlátozzuk. Ezeknél a kezdeti állapotot követő tranziens után a rendszer mindig elér az állapottérben valamely fix pontot vagy görbét vagy felületet stb. Ezeket a geometriai alakzatokat *attraktoroknak* nevezzük, kifejezve ezzel azt, hogy az attraktorok az állapottérben a rendszer munkapontjának a mozgása által leírt trajektóriákat magukhoz „vonzzák”, a trajektóriák a kezdeti tranziens folyamatot követően az attraktorokon állapodnak meg. A rendszer adott paramétercsoportjához általában egynél több attraktor tartozik. A kezdeti feltételeknek azon csoportját, amelyből a rendszer trajektóriája ugyanahhoz az attraktorhoz tart, az *attraktor bázisának* nevezzük. Két attraktorbázis közös határát *separatrixnak* hívják.

A nemlineáris dinamikus rendszerek elméletében meghatározó szerepet játszanak az attraktorok, amelyek lehetnek például *fix pontok* (más neven: szinguláris, egyensúlyi, kritikus vagy statikus pontok) vagy *határciklusok*, amelyek periodikus viselkedést írnak le [1]. Különösen fontosak a fix pontok és a határciklusok közvetlen környezetében a mozgást leíró trajektóriák stabilitására vonatkozó megfontolások, továbbá a rendszerparaméterek függvényében a fix pontok és a határciklusok keletkezését, eltűnését és stabilitását vizsgáló *bifurkációs elmélet* kérdéskörei.

Nemautonóm, autonóm rendszerek. Szokásos és előnyös a nemlineáris dinamikus rendszerek tárgyalását ezek két nagy osztályával, a *nemautonóm* és az *autonóm* rendszerekkel kezdeni.

A *nemautonóm* rendszereket az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}^*, t) \tag{1.1}$$

elsőrendű, kapcsolt differenciálegyenlet-rendszer írja le, ahol az \underline{x} állapot-

vektor, illetve a $\underline{v} = \underline{f}$ vektor transzponáltja

$$\underline{x}^* = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (1.2)$$

$$\underline{v}^* = \underline{f}^* = [f_1, f_2, \dots, f_n], \quad (1.3)$$

míg $\dot{\underline{x}} = \underline{v}$ az \underline{x} vektornak a t idő szerinti első deriváltja, azaz a sebességvektor. Az \underline{x} vektor x_1, x_2 elemei az állapotváltozók. Ebbe az osztályba tartoznak azok a rendszerek, amelyek időtől függő kényszerhatásoknak vannak kitéve, vagyis amelyekre

$$\underline{u}^* = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)] \quad (1.4)$$

külső jelek, „erők” hatnak.

Az *autonóm* rendszereket leíró

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}^*) \quad (1.5)$$

differenciálegyenlet-rendszer mindössze abban különbözik (1.1)-től, hogy itt a t idő expliciten nem jelenik meg. Ez azt a fizikai körülményt fejezi ki, hogy ezek a rendszerek magukra vannak hagyva, külső kényszerhatásoknak nincsenek kitéve.

Az (1.5) egyenlet ismeretében az autonóm rendszer állapotát az \underline{x} állapotvektor, vagyis az n számú állapotváltozó egyértelműen meghatározza az n dimenziós állapottérben. A rendszer szabadsági foka n .

A nemanonóm rendszereket leíró (1.1) egyenletet matematikailag át lehet alakítani az (1.5) egyenletnek megfelelő alakúvá a következőképpen. Vezessük be az $x_{n+1} = t$ új állapotváltozót. Ilyenkor (1.5)-ben az utolsó differenciálegyenlet

$$\dot{x}_{n+1} = 1 \quad (1.6)$$

lesz, vagyis az állapotváltozók száma és a rendszer szabadsági foka eggyel megnő.

Valamennyi nemlineáris dinamikus rendszer leírható az (1.5) alatti egyenlettel, bár bizonyos esetekben n végtelen nagy is lehet. Ebbe az utóbbi kategóriába tartoznak a parciális differenciálegyenletekkel és az integrál-differenciálegyenletekkel leírható rendszerek, továbbá az időkésést tartalmazók [1].

Az (1.5) egyenletben használt alak mindenekelőtt azért előnyös, mert alkalmas a fix pontok meghatározására. Fix pontoknak ugyanis az állapotter azon pontjait nevezzük, amelyekben valamennyi állapotváltozó deriváltja zérus, vagyis

$$0 = \underline{f}(\underline{x}^*) . \quad (1.7)$$

A fix pontok meghatározása tehát n számú kapcsolt nemlineáris algebrai egyenletrendszer megoldását jelenti.

Lineáris, nemlineáris rendszerek. Tanulságos összevetni a lineáris és a nemlineáris rendszereket és rámutatni a jelentősebb különbségekre.

Nemautonóm, lineáris rendszerek esetében a dinamikát az $\bar{y}_i(j\omega) = \bar{x}_o/\bar{x}_i$ frekvencia válaszfüggvény egyértelműen jellemzi, ahol \bar{x}_o , illetve \bar{x}_i a kimenő, illetve a bemenő jel komplex vektora. Nemlineáris rendszer esetében szinuszos bemenő jelhez általában nem szinuszos kimenő jel tartozik. Még ha a nem szinuszos kimenő jel alapharmonikusa segítségével be is vezetjük az $\bar{y}_n(j\omega) = \bar{x}_{o1}/\bar{x}_i$ frekvencia válaszfüggvényt, akkor is tudni kell, hogy $\bar{y}_n(j\omega)$ általában függ a kezdeti feltételektől és a bemenő szinuszos jel amplitúdójától. Itt \bar{x}_{o1} a kimenő jel alapharmonikusának az amplitúdója.

Az autonóm lineáris rendszerek vagy stabilisak, vagy labilisak. A viselkedésüket leíró matematikai eszköztár kidolgozott, ismert. Nemlineáris autonóm rendszerekre a kép sokkal színesebb, gazdagabb. Négyféle esetet különböztetünk meg. Az egyik lehetséges esetben a rendszer x_o kimenő jele a kezdeti állapottól függően az $\underline{x}_{o1}, \underline{x}_{o2}, \dots, \underline{x}_{oi}$ fix pontok valamelyikéhez tart, ahol az \underline{x}_o vektorok az n -ed rendű állapotter vektorai. A másik lehetséges változatban a trajektória a rendszerparaméter értékeihez és a kiindulási állapothoz tartozó *határciklushoz* tart. Ha a rendszer állapotának a leírására három vagy ennél több állapotváltozó szükséges, akkor további két állapot lehetséges. Az egyik a *kváziperiodikus*, a másik a *kaotikus* állapot.

Hangsúlyozni kell, hogy a nemlineáris dinamikus rendszereket leíró nemlineáris differenciálegyenletek elmélete távolról sem lezárt témakör, erőteljesen kutatott terület. Az egyik fő trend az általános vagy legalábbis általánosabb módszerek és szabályok kutatása, mindenekelőtt a bifurkációs és a káoszelmélet kapcsán.

A következőkben az autonóm rendszerek említett négy állapotáról egyenként, kissé részletesebben szólunk.

1.1. Fix pontok [1, 2]

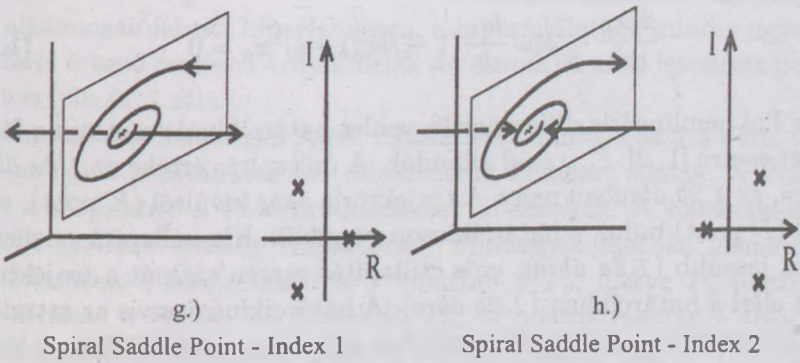
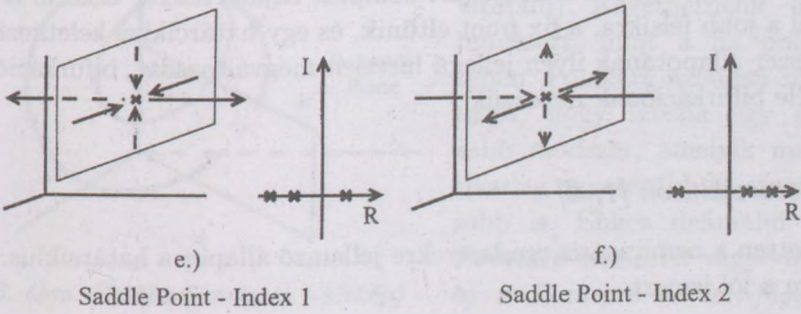
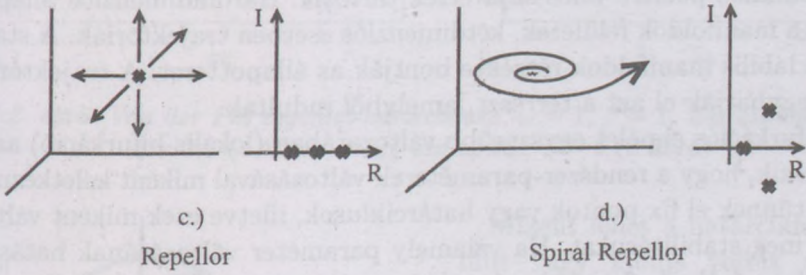
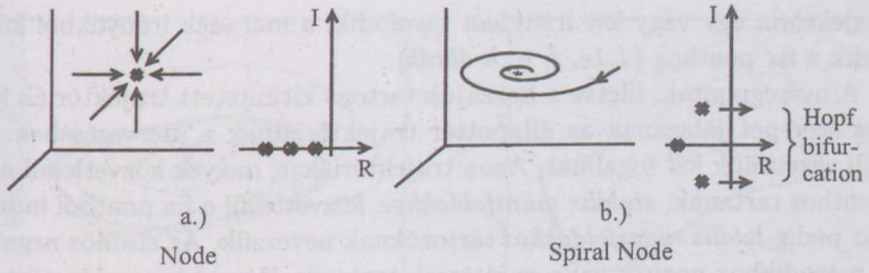
Mint említettük, a rendszer adott paramétercsoportjához tartozó fix pontokat az (1.7) alatti n számú kapcsolt nemlineáris algebrai egyenlet $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ megoldásai szolgáltatják. (Az o indexet az egyszerűség érdekében elhagytuk.) Példaképpen háromdimenziós állapotteret feltételezve és $\underline{f}(\underline{x})$ -et az \underline{x}_k fix pont körül linearizálva, a \underline{J}_k Jakobi-mátrix:

$$\underline{J}_k = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \partial f_1/\partial x_3 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \partial f_2/\partial x_3 \\ \partial f_3/\partial x_1 & \partial f_3/\partial x_2 & \partial f_3/\partial x_3 \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

ahol x_1, x_2 és x_3 a három állapotváltozó. A \underline{J}_k mátrix sajátértékei λ_1, λ_2 és λ_3 , míg a jobb, illetve bal oldali sajátvektorai $\underline{s}_{1j}, \underline{s}_{2j}$ és \underline{s}_{3j} , illetve $\underline{s}_{1b}, \underline{s}_{2b}$ és \underline{s}_{3b} . A rendszert $\Delta \underline{x}_0$ értékkel kimozdítva az \underline{x}_k egyensúlyi állapotából, az állapotváltozók kis eltérései

$$\Delta \underline{x} = e^{\underline{J}_k t} \Delta \underline{x}_0 = \left[\sum_{m=1}^3 e^{\lambda_m t} \underline{s}_{mj} \underline{s}_{mb}^* \right] \Delta \underline{x}_0 \quad (1.9)$$

egyenletből számíthatók. A sajátértékek helyzete a komplex síkon módot nyújt a fix pontok osztályozására (1.1 ábra). Összesen nyolc esetet különböztethetünk meg. A *csomópont* (node) esetében mind a három sajátérték a negatív valós tengelyen található (1.1a ábra). A *spirális csomópont* (spiral node) esetében a sajátértékek közül kettő konjugált komplex párt alkot, de változatlanul mind a három sajátérték valós része negatív (1.1b ábra). A fix pont csak ebben a két esetben stabilis. A rendszert kimozdítva kis mértékben a fix pontból, minden állapotváltozó minden irányból visszatér a fix pontba, vagy aperiodikusan (1.1a ábra), vagy csillapodó lengésekkel (1.1b ábra). A maradék hat eset mindegyikében a sajátértékek közül egyik vagy többnek a valós része pozitív, a fix pont labilis. A trajektória egy vagy több irányban aperiodikusan (1.1c, e, f, g ábrák) vagy lengő módon (1.1d, h ábrák) távolodik a fix ponttól. A mozgás aperiodikus, ha a sajátértékek valósak, de spirális alakot is ölthet, ha egy konjugált komplex sajátérték is jelen van. A *fókusz* (repellor) és a *spirális fókusz* (spiral repellor) esetében valamennyi sajátérték valós része pozitív, a trajektória minden irányban távolodik a fix ponttól. A *nyereg-* (saddle) *pontok* esetében egy (index 1) vagy két (index 2) sajátérték valós része pozitív. A



1.1. ábra. Fix pontok osztályozása, háromdimenziós eset

trajektória egy vagy két irányban távolodik, a maradék irányokból közeledik a fix ponthoz (1.1e, f, g, h ábrák).

A nyeregpontok, illetve a hozzájuk tartozó kitüntetett trajektóriák fontos szerepet játszanak az állapotter trajektóriáinak a szervezésében. Be kell vezetnünk két fogalmat. Azon trajektóriákat, melyek közvetlenül a fix ponthoz tartanak, *stabilis manifoldokhoz*, közvetlenül a fix pontból indulókat pedig *labilis manifoldokhoz* tartozóknak nevezzük. Az elsőhöz negatív, a másodikhoz pozitív valós sajátérték tartozik. Háromdimenziós állapotterben a manifoldok felületek, kétdimenziós esetben trajektóriák. A stabilis és a labilis manifoldok részekre bontják az állapotteret. A trajektóriák nem hagyhatják el azt a térrészt, amelyből indultak.

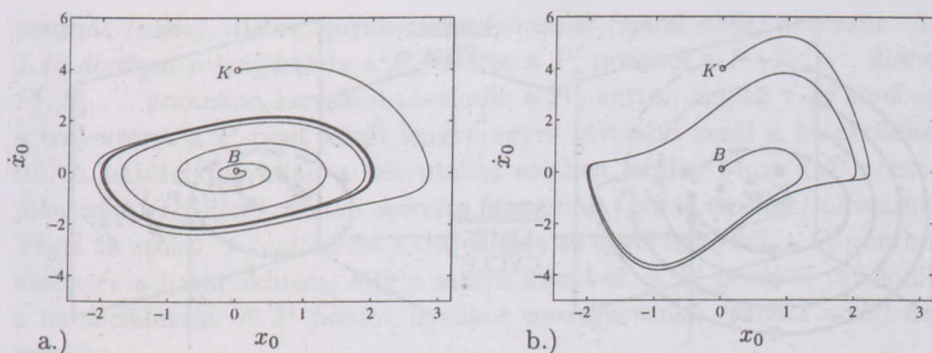
A bifurkációs elmélet egyszerűbb változatában (lokális bifurkáció) azzal foglalkozik, hogy a rendszer-paraméterek változásával miként keletkeznek, illetve tűnnek el fix pontok vagy határciklusok, illetve ezek miként változtatják meg stabilitásukat. Ha valamely paraméter változásának hatására például az 1.1b ábrában a konjugált komplex sajátértékpár átkerül a bal félsíkról a jobb félsíkra, a fix pont eltűnik, és egy határciklus keletkezhet. A rendszer állapotának ilyen jellegű hirtelen megváltozását, bifurkációját Hopf-féle bifurkációnak nevezzük.

1.2. Határciklusok [1, 2]

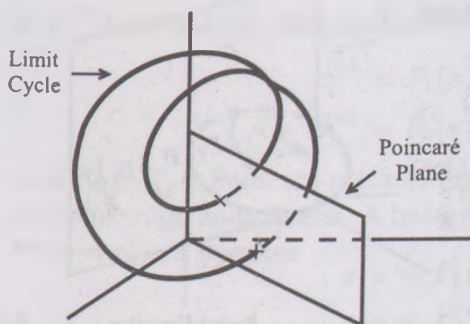
Kifejezetten a nemlineáris rendszerekre jellemző állapot a határciklus. Az 1.2 ábra a jól ismert

$$\frac{d^2x_o}{dt^2} - 2\xi\omega \frac{dx_o}{dt}(1 - \beta x_o^2) + \omega^2 x_o = 0 \quad (1.10)$$

Van der Pol nemlineáris differenciálegyenlet határciklusát mutatja a fázisikon két esetre [1, 2]. ξ , ω és β állandók. A csillapítás értéke az 1.2a ábrában kicsi, az 1.2b ábrában nagy. A trajektória akár kívülről (K pont), akár belülről (B pont) indul, a határcikluson végződik. Kis csillapítás mellett a folyamat lassúbb (1.2a ábra), erős csillapítás esetén viszont a trajektória gyorsan eléri a határciklust (1.2b ábra). A határciklus, vagyis az attraktor ez esetben stabilis. A határciklus azonban általános esetben labilis is lehet. Most is arról van szó, hogy ha kimozdítjuk a rendszert a határciklusról, vajon visszatér-e a határciklusra, vagy távolodik-e attól.



1.2. ábra. Van der Pol egyenlet határciklusa, $\omega = 1, \beta = 1$. Kis csillapítás, $\xi = 0,2$ (a ábra). Nagy csillapítás, $\xi = 1$ (b ábra)



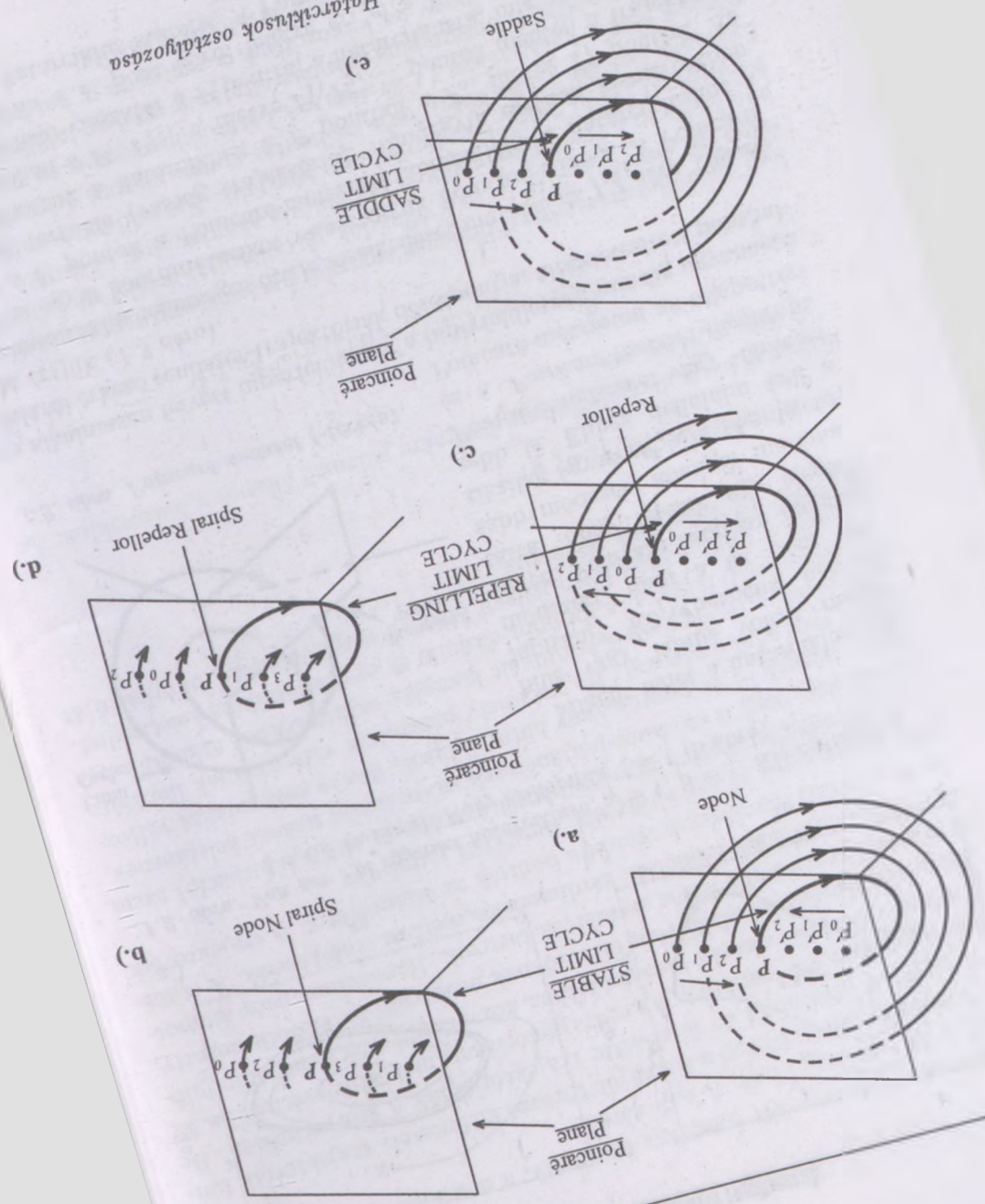
1.3. ábra. Poincaré-metszet (-térkép)

Miként lehet a határciklus stabilis vagy labilis voltát megállapítani? Követhetnénk hasonló módszert, mint a fix pont esetében. Poincaré azonban megmutatta, hogy létezik egy elegánsabb módszer, amelyik matematikailag egyszerűbb és szemléletesebb is. Ehhez definiálni kell a *Poincaré-metszetet* vagy *-térképet* és a *Poincaré-metszet-függvényt*. Poincaré-metszeten az állapotter-

ben alkalmasan felvett hiperfelületen, a hiperfelületnek mindig ugyanazon oldaláról érkező rendszer-trajektóriák dőféspontjai által létesített ponthalmaszt értjük (1.3 ábra).

A határciklus lehetséges ötféle viselkedését mutatja az 1.4 ábra. Célszerűen az egyik koordinátasíkot választottuk Poincaré-síknak. A Poincaré-síkon a P pontok a Poincaré-metszetet ábrázolják. A határciklushoz a P pont tartozik (vastag trajektória). Mindegyik esetben kismértékben kimozdítottuk a határciklust a P pontból a P_0 , illetve P'_0 pontba. Az 1.4a ábrában a P_1, P_2, \dots , illetve P'_1, P'_2, \dots pontok mentén a trajektória aperiodikusan visszatér a P pontra, a határciklusra, míg az 1.4b ábrában a trajektória a P pont körül lengve éri el a határciklust. Mind a két esetben a határciklus stabilis. A Poincaré-sík P pontját ilyenkor *csomó-*

1.4. ábra. Határciklusok osztályozása



Hagy István

pontnak (*node*), illetve *spirális csomópontnak* (*spiral node*) nevezzük. Az 1.4c ábrában a trajektória a P_0 , illetve a P'_0 pontból a P_1, P_2, \dots , illetve P'_1, P'_2, \dots pontokon keresztül távolodik a P ponttól, míg az 1.4d ábrában a trajektória a P pont körül lengve egyre távolabb kerül a határciklustól. A határciklus mind a két utóbbi esetben labilis. Most a P pontot *fókusz*nak (*repellor*), illetve *spirális fókusz*nak (*spiral repellor*) nevezzük. Végül az utolsó, 1.4e ábrában a trajektória az egyik irányból, a P_0 pontból visszatér a határciklusra, míg a másik irányból, a P'_0 pontból távolodik a határciklustól. A P pontot ilyenkor *nyeregpon*tnak (*saddle node*) nevezzük.

Léteznek azok a diszkrét függvények, az úgynevezett Poincaré-metszet-függvények, amelyeknek a segítségével a Poincaré-síkban a P_{n-1} -edik pont $x_1^{(n-1)}$ és $x_2^{(n-1)}$ koordinátáinak ismeretében kiszámíthatjuk a P_n pont $x_1^{(n)}$ és $x_2^{(n)}$ koordinátáit. Háromdimenziós állapotter esetében

$$x_1^{(n)} = F_1(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}) \quad (1.11)$$

$$x_2^{(n)} = F_2(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}), \quad (1.12)$$

ahol F_1 és F_2 a Poincaré-metszet-függvények (PMF), x_1 és x_2 a Poincaré-sík derékszögű koordinátái. A határciklushoz tartozó P pontban $x_1 = x_{1P}$ és $x_2 = x_{2P}$, s ilyenkor

$$x_{1P} = F_1(x_{1P}, x_{2P})$$

$$x_{2P} = F_2(x_{1P}, x_{2P}).$$

A határciklus, illetve a hozzátartozó P pont jellegét a PMF Jakobi-mátrixa

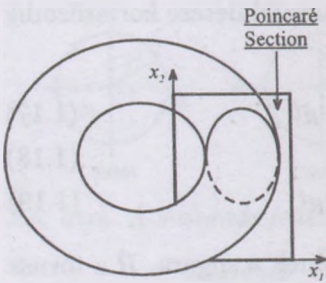
$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial x_1 & \partial F_1 / \partial x_2 \\ \partial F_2 / \partial x_1 & \partial F_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

dönti el, ahol a deriváltakat a P pontban kell kiszámítani. Megjegyzendő, hogy az F függvények meghatározása körülményes, és általában nem ismertek.

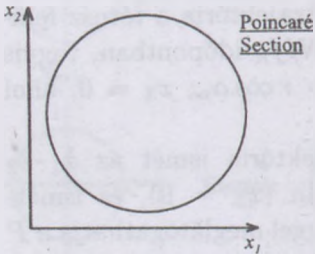
Az F függvények bevezetéséből származó egyik előny, hogy a dimenziószám eggyel csökken. Esetünkben a háromdimenziós állapotter helyett egyenleteink kétdimenziósak [(1.11), (1.12)]. Másik előny, hogy differenciálegyenletek helyett differenciaegyenlethez jutunk.

A Jakobi-mátrix ismeretében a P pont körüli kis változásokra

$$\Delta \underline{x}^{(n)} = \underline{J} \Delta \underline{x}^{(n-1)} = \underline{J}^n \Delta \underline{x}_0 \quad (1.14)$$



1.9. ábra. Tórusz és a Poincaré-sík



1.10. ábra. Poincaré-metszet kváziperiodikus állapotban

jes körforgás alatt a kis r sugarú körön éppen $n = 2$ teljes fordulat játszódik le, s így a trajektória ismét a P pontban lesz. Kissé részletesebben az 1.8a ábra segítségével követhetjük a trajektória útját. Válasszuk a Poincaré-metszetnek az $x_1 \sim x_2$ sík által a tóruszból jobb oldalon kimetszett síkot (1.9 ábra). E síkot a tórusz a K kör mentén metszi. A trajektória a P vagy O pontból indulva az R sugarú körön egy, illetve kettő, illetve három teljes fordulat megtétele után az 1., illetve 2., illetve 3. pontba kerül, az r sugarú körön $2/3$, illetve $4/3$, illetve $6/3$ fordulat zajlik le. Egy másik példát látunk az 1.8b ábrán, ahol $f_r/f_R = 3/5$. Frekvencia- vagy fáziszárt (frequency or phase locked) állapotnak nevezzük azokat az eseteket, amikor $f_r/f_R =$ racionális szám. Ilyenkor a folyamat periodikus.

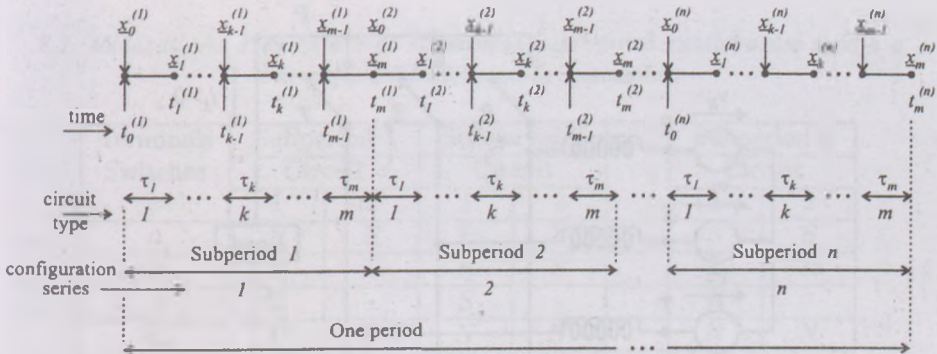
Ha $f_r/f_R =$ irracionális szám, és a trajektória ismét a P pontból indul, még egyszer a P pontba soha nem kerül vissza, a folya-

mat nem periodikus. Ezt az állapotot *kváziperiodikus állapotnak* nevezük. A R sugarú körön minden fordulat megtétele után a Poincaré-síkon a K körön egy-egy többé nem ismétlődő pontot kapunk (1.10 ábra). A Poincaré-metszet az r sugarú körön található pontthalmaz.

2. Változó struktúrájú, szakaszosan lineáris nemlineáris rendszerek

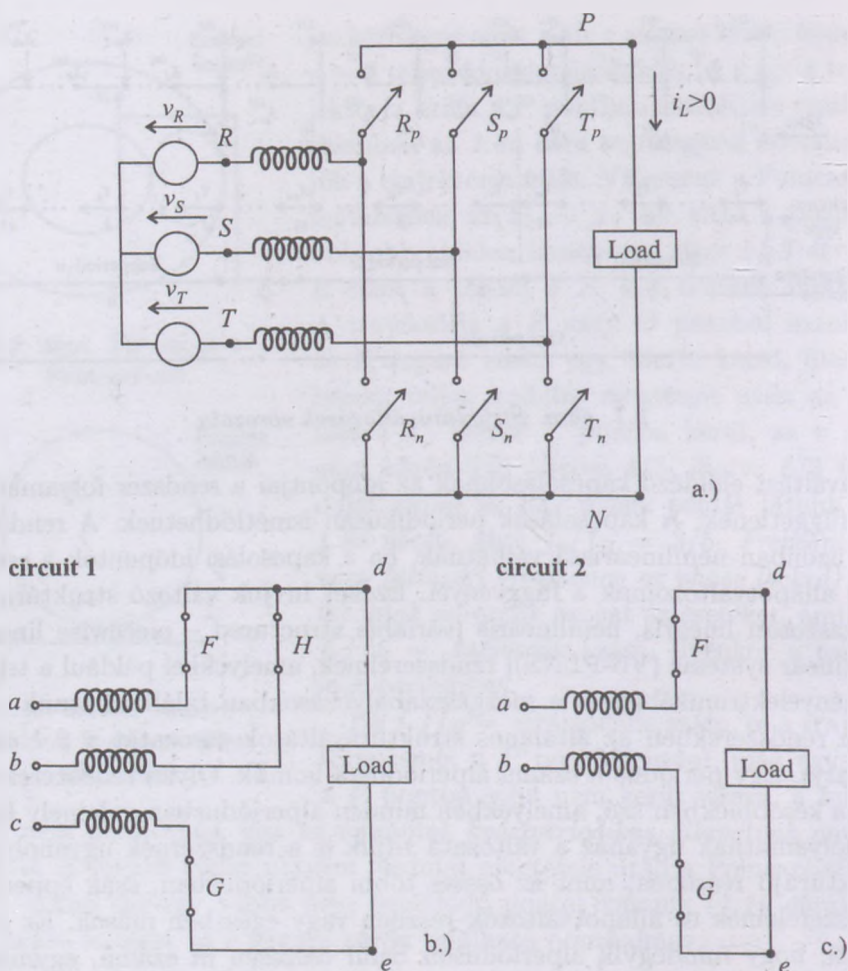
2.1. Bevezetés

A műszaki megoldások jelentős részében a rendszer struktúrája változik. Ezen osztályon belül vannak olyanok, amelyeknél a struktúraváltás ugrásszerű, periodikus, és a változások között a rendszer lineáris, vagyis *szakaszosan lineáris*. Ilyenekkel találkozunk a digitális elektronikában, teljesítményelektronikában, a mozgásszabályozásban. Ezek a rendszerek lineárisak maradnak, ha az ugrásszerűen, sorozatban bekövetkező és struk-



2.1. ábra. Struktúraváltozások sorozata

túraváltást előidéző kapcsolásoknak az időpontjai a rendszer folyamataitól függetlenek. A kapcsolások periodikusan ismétlődhetnek. A rendszerek azonban nemlineárisá válhatnak, ha a kapcsolási időpontok a rendszer állapotváltozóinak a függvényei. Ezeket hívjuk változó struktúrájú, szakaszosan lineáris, nemlineáris [variable structured – piecewise linear, nonlinear systems (VS-PLNS)] rendszereknek, amelyekkel például a teljesítményelektronikában és a mozgásszabályozásokban találkozhatunk. Az ilyen rendszerekben az általános struktúraváltások sorozatát a 2.1 ábra mutatja. Egy periódus n számú alperiódusra bomlik. Olyan rendszerekről lesz a későbbiekben szó, amelyekben minden alperiódusban valamely fizikai folyamatnak ugyanaz a változata zajlik le a rendszernek ugyanolyan struktúrájú részében, mint az összes többi alperiódusban, csak éppen a rendszer elemek és állapotváltozók részben vagy egészen mások. Ez azt jelenti, hogy mindegyik alperióduson belül összesen m számú, egymást követő struktúrasorozat mindegyik tagja, például a k -adik tagja, azonos felépítésű a többi k -adik taggal. Az egyes struktúrák fennállásának ideje $\tau_1 \dots \tau_k \dots \tau_m$. A struktúraváltások időpontjai, például az 1-es, illetve a 2-es alperiódusban a k -adik szakasz kezdetén $t_{k-1}^{(1)}$, illetve $t_{k-1}^{(2)}$, míg a k -adik szakasz végén $t_k^{(1)}$, illetve $t_k^{(2)}$. Az \underline{x} állapotváltozó vektor ugyancsak az 1-es, illetve a 2-es alperiódusban a k -adik szakasz kezdetén $\underline{x}_{k-1}^{(1)}$, illetve $\underline{x}_{k-1}^{(2)}$, és a k -adik szakasz végén $\underline{x}_k^{(1)}$, illetve $\underline{x}_k^{(2)}$. A leírt típusú rendszerekkel és folyamatokkal legtöbbször olyan esetekben találkozunk, amelyekben a rendszert periodikusan gerjesztjük. A struktúraváltások periodicitása és a folyamat periodicitása ilyenkor megegyeznek. (A rendszer nemlinearitása



2.2. ábra. Háromfázisú hídkapcsolás (a ábra). Az alperiódus 1-es (b ábra) és a 2-es (c ábra) struktúrája (áramkör)

miatt szubharmonikus folyamat is felléphet, amikor is a struktúraváltások és a rendszerben lejátszódó folyamatok periodicitása különválnak. Sőt, katodikus folyamat is bekövetkezhet. E folyamatokat a 2. fejezetben kizárjuk a vizsgálati körünkből.)

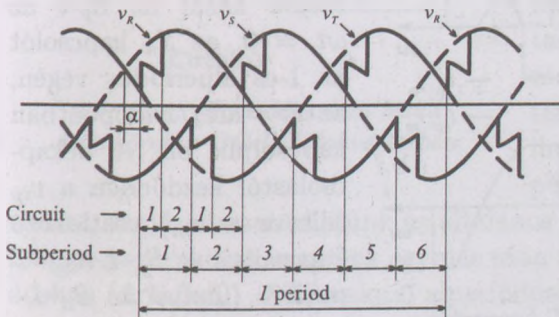
Ezen a helyen indokolt két egyszerű példát bemutatni a VS-PLNS esetek köréből. Mind a két példa a teljesítményelektronika területéről való.

2.1. táblázat. Az 1-es és a 2-es struktúrák kapcsainak csatlakozási módja a háromfázisú hídkapcsolás kapcsaihoz

Terminals Switches	Subperiod 1		Subperiod 2		...	Subperiod 6	
	Circuit		Circuit			Circuit	
	1	2	1	2		1	2
<i>a</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>T</i>		<i>S</i>	<i>S</i>
<i>b</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>R</i>	<i>S</i>		<i>T</i>	<i>R</i>
<i>c</i>	<i>T</i>	–	<i>S</i>	–		<i>R</i>	–
<i>d</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>N</i>	<i>N</i>		<i>N</i>	<i>N</i>
<i>e</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>P</i>	<i>P</i>		<i>P</i>	<i>P</i>
<i>F</i>	<i>R_p</i>	<i>R_p</i>	<i>T_n</i>	<i>T_n</i>		<i>S_n</i>	<i>S_n</i>
<i>G</i>	<i>T_n</i>	<i>T_n</i>	<i>S_p</i>	<i>S_p</i>		<i>T_n</i>	<i>R_p</i>
<i>H</i>	<i>S_p</i>	–	<i>R_n</i>	–		<i>R_p</i>	–

2.2. táblázat. Időfüggvények megnevezései az első két alperiódusban a 2.3 ábra alapján

	Subperiod 1		Subperiod 2	
	Circuit		Circuit	
	1	2	1	2
<i>v_a</i>	<i>v_R</i>	<i>v_R</i>	<i>v_T</i>	<i>v_T</i>
<i>v_b</i>	<i>v_S</i>	<i>v_T</i>	<i>v_R</i>	<i>v_S</i>
<i>v_c</i>	<i>v_T</i>	–	<i>v_S</i>	–
<i>v_{gh}</i>	<i>v_{PN}</i>	<i>v_{PN}</i>	<i>v_{NP}</i>	<i>v_{NP}</i>

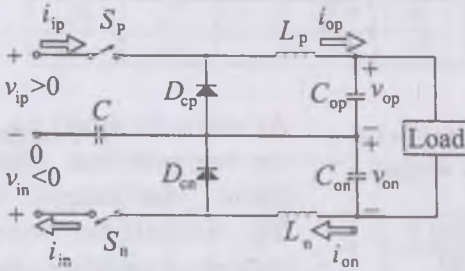


2.3. ábra. Háromfázisú hídkapcsolás időfüggvényei

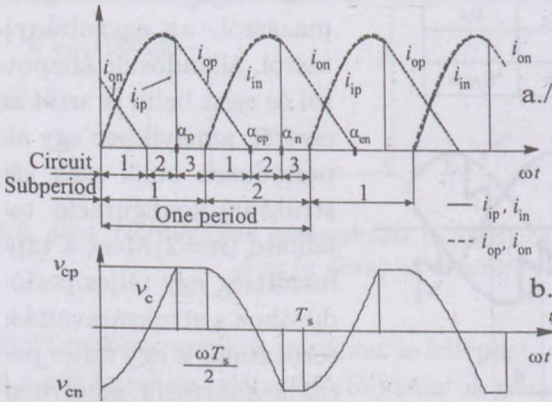
(2.2b ábra), majd azt követi a 2-es áramkör (2.2c ábra). Az 1-es áramkör

Az első a jól ismert v_R, v_S, v_T szimmetrikus háromfázisú feszültséggel táplált, háromfázisú vezérelt hídkapcsolás (2.2a ábra). Szóljunk ezen a helyen csak a legegyszerűbb alkalmazásról, az egyenirányításról, állandósult állapotról és ezen belül is arról az esetről, amelyikben egy alperióduson belül csak két struktúra-konfiguráció található ($m=2$). Most a tápfeszültség egy teljes periódusához a struktúraváltásorozatnak is egy teljes periódusa tartozik, amelyben összesen hat alperiódus található. Mindegyik alperiódusban megtalálható először az 1-es áramkör

esetében vagy a P pozitív, vagy az N negatív oldalon zajlik két vezérelt kapcsoló között áram-kommutáció. A 2-es áramkör változatban mind a P , mind az N oldalon csak egy vezérelt kapcsoló vezet áramot. A 2.1 táblázat mutatja, hogy az 1-es és a 2-es áramkör a, b, c, d és e kapcsaihoz, illetve az F, G és H vezérelt kapcsolóihoz a háromfázisú hídkapcsolás (2.2a ábra) mely kapcsai, illetve bekapcsolt vezérelt kapcsolói tartoznak az egyes alperiódusokban. A háromfázisú hídkapcsolásban az összes többi vezérelt kapcsoló kikapcsolt állapotban van. Az alperiódusokban a struktúrák ismétlődése miatt az egymásnak megfelelő változók időbeli lefolyása is ismétlődik, vagy negatív előjellel ismétlődik. Ez követhető a 2.3 ábra és a 2.2 táblázat alapján az első két alperiódusban.

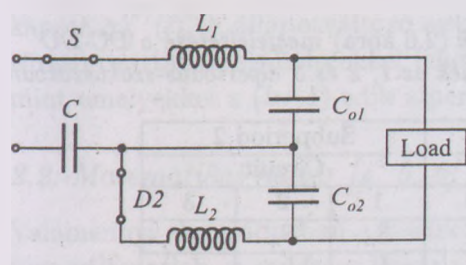


2.4. ábra. Rezonáns DC-DC konverter



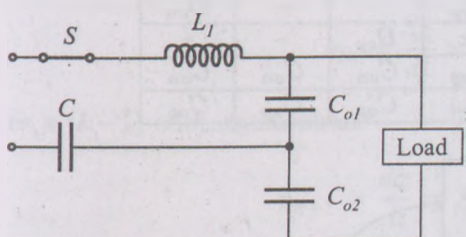
2.5. ábra. Rezonáns DC-DC konverter időfüggvényei

A második, már kevésbé ismert példa egy rezonáns, kétcsatornás DC-DC konverter (2.4 ábra), amelynek két bemenő (v_{ip}, v_{in}) és két kimenő (v_{op}, v_{on}) feszültsége van. Most is állandósult állapotot tételizzünk fel, továbbá szaggatott áramvezetésre szorítkozunk. A legfontosabb időfüggvények a 2.5 ábrán láthatók. A vezérelt kapcsolók közül az S_p -t az $\omega t = 0$, az S_n kapcsolót az 1-es alperiódus végén, az $\omega t = \omega T_s/2$ időpontban kapcsoljuk be. A bekapcsolástól kezdődően a v_{ip} (illetve a v_{in}) csatlakozó kapcsaiból az S_p - L - v_{op} - C pozitív (illetve az S_n - L - v_{on} - C negatív) csatornában i_{ip} (illetve i_{in}) szinü-



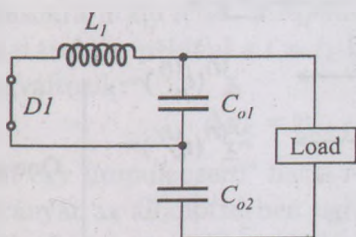
Circuit 1

a.)



Circuit 2

b.)



Circuit 3

c.)

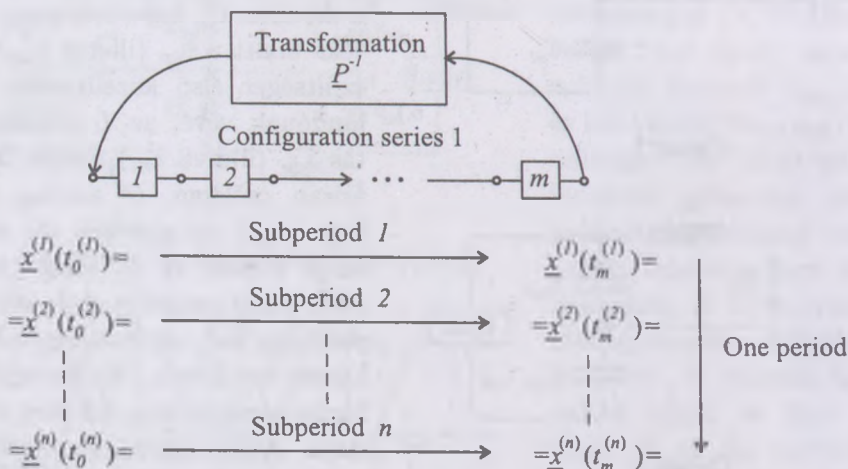
2.6. ábra. Alperiódusokon belüli áramkörök a DC-DC konverterben

szos áramimpulzus folyik (2.5a ábra), amely a C kapcsolt kapacitás v_c feszültségét v_{cn} értékről átpolározza v_{cp} -re (illetve v_{cp} -ről átlendíti v_{cn} -re (2.5b ábra). Az α_p (illetve α_n) szögére a v_c feszültség eléri a v_{ip} (illetve a $v_{in} < 0$) értéket. ($v_{ip} = |v_{in}|$). A D_{cp} (illetve a D_{cn}) diódafeeszültség zérus értékre csökken a megelőző záró irányú feszültségről. Az i_p (illetve i_{in}) áram a vezérelt kapcsolóról átkommutál a diódára. C_o kapacitás nagy értéke miatt a v_{op} (illetve v_{on}) feszültséget első közelítésben állandónak véve, az L induktivitás i_{op} (illetve i_{on}) árama lineárisan csökken, és az α_{ep} (illetve α_{en}) szögértékre éri el a zérus értéket. A T_s ideig tartó (2.5b ábra) periódus alatt két alperiódus van, és mindegyikben három struktúra. Az ismétlődő három struktúrát a 2.6 ábra mutatja. A 2.6 ábra elemeinek a megfeleltetése a DC-DC konverter éppen aktív kapcsolási elemeihez a 2.3 táblázatból látszik. A példák módját adnak az általánosításra,

vagyis visszatérhetünk az általános esethez. A rendszerből elhatárolható m struktúra, amelyek egymás után aktivizálódnak az első alperiódusban (2.7 ábra). A következő alperiódusok mindegyikében ugyanolyan struktúrasorozatokon játszódnak le a folyamatok, mint az első alperiódusban. A különbség csak annyi, hogy a rendszernek részben vagy egészben más-más részeiben zajlanak le periodikus folyamat esetében ugyanolyan változások, mint amelyek az első alperiódusban, ámde alperiódusonként

2.3. táblázat. Az 1, 2 és 3 áramkörök (2.6 ábra) megfeleltetése a DC-DC konverter éppen aktív kapcsolási részeinek az 1, 2 és 3 alperiódus-szakaszokban

	Subperiod 1			Subperiod 2		
	Circuit			Circuit		
$m =$	1	2	3	1	2	3
S	S_p	S_p	-	S_n	S_n	-
L_1	L_p	L_p	L_p	L_n	L_n	L_n
L_2	L_n	-	-	L_p	-	-
$D1$	-	-	D_{cp}	-	-	D_{cn}
$D2$	D_{cn}	-	-	D_{cp}	-	-
C_{o1}	C_{op}	C_{op}	C_{op}	C_{on}	C_{on}	C_{on}
C_{o2}	C_{on}	C_{on}	C_{on}	C_{op}	C_{op}	C_{op}



2.7. ábra. Az alperiódusok mindegyikében ugyanolyan struktúrasorozat aktivizálódik, mint az első alperiódusban

részben vagy maradéktalanul más változók a szereplők. Nem szükséges tehát periodikus állandósult állapotban az alperiódusonként egymás után bekapcsolódó újabb és újabb struktúrarészekre és azok változásaira új egyenleteket felírni és azokat megoldani. Ehelyett valamennyi alperiódus folyamatát egyetlen, például a legelső alperiódushoz tartozó struktúrasorozaton és azok változóival lehet vizsgálni. A $(k - 1)$ -edik alperiódus végén kiadódó állapotváltozó $\underline{x}_m^{(k-1)}(t_m^{(k-1)})$ vektort megfelelő transzformációval vissza kell transzformálni a k -edik alperiódus kezdetére. Az így

kapott $\underline{x}_0^{(k)}(t_0^{(k)})$ állapotváltozó vektorral, valamint ugyanezzel a struktúrasorozattal és egyenletekkel lehet számolni a k -adik alperiódusban is, mint amelyekkel a $(k-1)$ -edik alperiódusban.

2.2. Matematikai háttér [4, 5, 6]

Valamennyi alperiódusban a k -adik struktúra ugyanaz. Ameddig a struktúra változatlan, a rendszer lineáris (szakaszosan lineáris). A rendszer viselkedését leíró lineáris állapotegyenlet a k -adik szakaszban:

$$\underline{v}_k = \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}_k \underline{x} + \underline{B}_k \underline{u} \quad (2.1)$$

és a $(k-1)$ -edik szakaszban:

$$\underline{v}_{k+1} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}_{k+1} \underline{x} + \underline{B}_{k+1} \underline{u}. \quad (2.2)$$

Ahol a k -adik szakaszban \underline{x} a rendszer állapotváltozó vektora, \underline{A}_k , \underline{B}_k rendszermátrixok, \underline{u} a gerjesztő jelek vektora. Az egyszerűség kedvéért az alperiódusokra utaló felső, zárójelbe tett indexet elhagytuk (2.1 ábra). A szakaszhatárokon, például a $t = t_k$ időpontban a sebességvektor ugrásszerűen megváltozik:

$$\Delta \underline{v}_k = \underline{v}_{k+1, \text{start}} - \underline{v}_{k, \text{end}}. \quad (2.3)$$

$\Delta \underline{v}_k$ mint egy „impulzuserő” hat a rendszerre, és a rendszer trajektóriájának az irányát az állapotterben ugrásszerűen változtatja meg.

A (2.1) állapotegyenlet megoldása ismert. Az \underline{x} állapotvektor értéke a k -adik szakasz végén

$$\underline{x}(t_k) = \underline{x}_{pk} + e^{\underline{A}_k \tau_k} [\underline{x}(t_{k-1}) - \underline{x}_{pk}], \quad (2.4)$$

ahol \underline{x}_{pk} a partikuláris megoldás a k -adik szakaszban, $\underline{x}(t_{k-1})$ az állapotvektor értéke a k -adik szakasz kezdetén a $t = t_{k-1}$ időpontban. A homogén egyenlet megoldásához a

$$\underline{W}_k(\tau) = e^{\underline{A}_k \tau} \quad (2.5)$$

súlyfüggvény-mátrix ismerete szükséges.

Ismerve az $\underline{x}_0(t_0)$ állapotvektor értékét az alperiódus kezdetén, szakaszról szakaszra haladva kiszámíthatjuk az $\underline{x}_m(t_m)$ állapotvektor értékét az alperiódus végén (2.1 ábra). A vezérlő jelek, a struktúrák és a gerjesztő

jelek ismétlődése miatt az állapotvektornak az i -edik alperiódus elején és végén felvett értéke között egy \underline{P} periodicitási mátrix teremt kapcsolatot állandósult állapotban:

$$\underline{x}(t_m) = \underline{P} \underline{x}(t_0)$$

vagy

$$\underline{x}(t_0) = \underline{P}^{-1} \underline{x}(t_m), \quad (2.6)$$

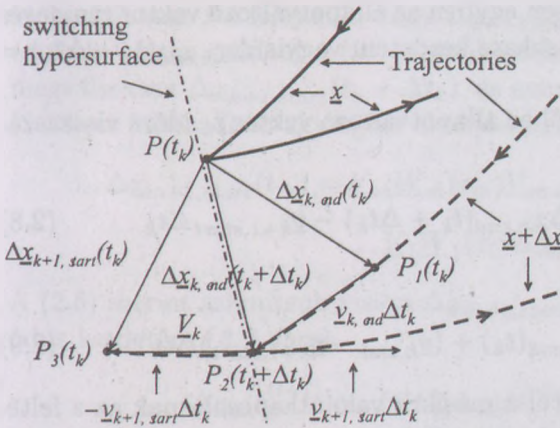
ahol a \underline{P} elemei 1, -1 és 0 értékűek a vizsgált rendszertől függő elrendezésben. [A felső zárójelbe tett (i) indexet elhagytuk]. \underline{P} módot nyújt arra, hogy az állapotváltozó i -edik alperiódus végén felvett értékét visszaszámítsuk az i -edik alperiódus kezdetére [(2.6) egyenlet], abban az értelemben, hogy az $(i + 1)$ -edik alperiódust is ugyanazon a struktúrasorozaton és állapotváltozókkal vizsgáljuk, mint az i -edik alperiódusban. Az állapotváltozók száma csökkenhet periodikus állapotban. Ki kell választani az alperióduson belüli struktúrasorozatból azt, amelyikben az egyidejűleg energiátárolást végző, független energiátárolók száma maximális. Az állapotváltozók száma erre a számra redukálható.

A módszer kiterjeszthető átmeneti állapot vizsgálatára is. Ilyenkor is csökkenhet az állapotváltozók száma arra az értékre, amely az egész rendszeren belül egyidejűleg energiátárolást végző, független energiátárolók maximális számával egyenlő.

2.3. Stabilitásvizsgálat [1, 4, 5, 6]

A periodikus gerjesztés, vezérlés és az így fellépő periodikus struktúrasorozat eredményeképpen a rendszer trajektóriája periodikus lehet az állapot térben állandósult állapotban, vagyis a rendszer határciklusba kerülhet. A stabilitásvizsgálat elvben a 2.2 pontban leírtak szerint végezhető. A gondot az okozza, hogy ha kismértékben kimozdítjuk a trajektóriát a határciklusból, a t_k kapcsolási időpontok és a τ_k időtartamok kismértékben megváltoznak. Így az egyes szakaszokra korábban meghatározott τ_k értékek és a $\underline{W}_k(\tau_k)$ súlyfüggvény-mátrixok közvetlenül nem használhatók.

Kis változások esetén mód van azonban változatlan t_k kapcsolási időpontokkal és így változatlan τ_k időtartamokkal, vagyis az eredeti $\underline{W}_k(\tau_k)$ súlyfüggvény-mátrixokkal számolni (Rác-módszer [4, 5]). A módszer a 2.8 ábra alapján érthető meg. A rendszer trajektóriája a kis változást



2.8. ábra. Változatlan kapcsolási időpontokkal történő számítás elve

megelőzően a határciklusban az állapottérben a kapcsolási hiperfelületet a t_k időpontban, a $P(t_k)$ pontban éri el. A kapcsolat eredményeképpen a trajektória sebességvektora (iránya) ugrásszerűen megváltozik [folytonos vonal, (2.3) egyenlet]. Az állapotváltozó vektor $\Delta \underline{x}$ megváltozása miatt azonban a trajektória új nyomvonalat követ (szaggatott vonal). A trajektória a t_k

időpontban a P_1 pontot éri el. Az állapotváltozó vektor megváltozása $\overline{P_1(t_k)P(t_k)} = \Delta \underline{x}_{k,end}(t_k)$. A trajektória a kapcsolási hiperfelületet a $(t_k + \Delta t_k)$ időpontban a P_2 pontban éri el. A P_1 és P_2 pontok közötti „távolság” $\overline{P_2(t_k + \Delta t_k)P_1(t_k)} = \underline{v}_{k,end} \Delta t_k$, ahol $\underline{v}_{k,end}$ a sebességvektor értéke a k szakasz végén. Az állapotváltozó vektor megváltozása a kapcsolási hiperfelületen $\overline{P_2(t_k + \Delta t_k)P(t_k)} = \Delta \underline{x}_k(t_k + \Delta t_k)$. A kapcsolat után a sebességvektor értéke a $(k + 1)$ szakasz kezdetén $\underline{v}_{k+1,start}$. A rendszer egyes szakaszokon belüli linearitása miatt mód van arra, hogy a trajektória $P_2(t_k + \Delta t_k)$ pontját visszavetítsük a t_k időpontra olyan módon, hogy a trajektória $(k + 1)$ kezdeti szakaszát negatív idők irányában a $\underline{v}_{k+1,start}$ sebességvektor segítségével kiterjesztjük. Így jutunk el a $P_3(t_k)$ pontba, amelynek távolsága a P_2 ponttól $\overline{P_3(t_k)P_2(t_k + \Delta t_k)} = -\underline{v}_{k+1,start} \Delta t_k$. Ily módon lehetőség van az állapotváltozó vektor virtuális megváltozásának $\overline{P_3(t_k)P(t_k)} = \Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k)$ értékének a meghatározására, amely csak matematikai absztrakció, és arra szolgál, hogy a $(k + 1)$ -edik szakaszban a trajektória változatlanul a t_k időpontból induljon.

Határozzuk meg a t_k időpontban fennálló kapcsolatot a $\Delta \underline{x}_{k,end}(t_k)$ és a $\Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k)$ állapotváltozó vektorok kis változásai között. A P - P_1 - P_2 „háromszög”-ből az állapotváltozó vektor k -edik szakasz végén fennálló tényleges megváltozása

$$\Delta \underline{x}_{k,end}(t_k + \Delta t_k) = \Delta \underline{x}_{k,end}(t_k) + \underline{v}_{k,end} \Delta t_k . \quad (2.7)$$

$\Delta \underline{x}_{k,end}(t_k + \Delta t_k)$ természetesen egyben az állapotváltozó vektor tényleges megváltozása a $(k+1)$ -edik szakasz kezdetén, vagyis $\Delta \underline{x}_{k,end}(t_k + \Delta t_k) = \Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k + \Delta t_k)$.

A $P-P_2-P_3$ „háromszög”-ből az állapotváltozó vektor t_k időre visszazámított megváltozása:

$$\Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k) = \Delta \underline{x}_{k,end}(t_k + \Delta t_k) - \underline{v}_{k+1,start} \Delta t_k . \quad (2.8)$$

A két utolsó összefüggésből

$$\Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k) = \Delta \underline{x}_{k,end}(t_k) + (\underline{v}_{k,end} - \underline{v}_{k+1,start}) \Delta t_k . \quad (2.9)$$

Legtöbbször az egyik állapotról a másikra való átkapcsolásnak az a feltétele, hogy az állapotváltozó vektor egyik komponense s így annak megváltozása is zérus legyen. A kapcsolási feltétel tehát (2.7)-ből

$$\underline{s}^* \Delta \underline{x}_{k,end}(t_k + \Delta t_k) = \underline{s}^* [\Delta \underline{x}_{k,end}(t_k) + \underline{v}_{k,end} \Delta t_k] = 0 , \quad (2.10)$$

ahol \underline{s}^* vektor választja ki a kapcsolást előidéző állapotváltozó komponenst. Az utolsó egyenletből Δt_k -t kifejezve és (2.9)-be helyettesítve, megkapjuk a keresett összefüggést:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k) &= \left[\underline{I} - \frac{\underline{v}_{k,end} - \underline{v}_{k+1,start}}{\underline{s}^* \underline{v}_{k,end}} \underline{s}^* \right] \Delta \underline{x}_{k,end}(t_k) = \\ &= \underline{V}_k \Delta \underline{x}_{k,end}(t_k) , \end{aligned} \quad (2.11)$$

ahol \underline{I} az egységmátrix, \underline{V}_k a váltómátrix, amely a t_k időponthoz tartozó $\Delta \underline{x}_{k,end}(t_k)$ valóságos állapotvektor-változást átváltja ugyancsak a t_k időponthoz tartozó $\Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k)$ fiktív állapotvektor-változásba. (2.4) és (2.5) alapján kis változásokra

$$\Delta \underline{x}_{k,end}(t_k) = e^{\underline{A}_k \tau_k} \Delta \underline{x}_{k,start}(t_{k-1}) = \underline{W}_k(\tau_k) \Delta \underline{x}_{k,start}(t_{k-1}) . \quad (2.12)$$

Az utolsó két egyenletből

$$\Delta \underline{x}_{k+1,start}(t_k) = \underline{V}_k \underline{W}_k(\tau_k) \Delta \underline{x}_{k,start}(t_{k-1}) . \quad (2.13)$$

A \underline{V}_k váltómátrix és a \underline{W}_k súlyfüggvény-mátrix segítségével kapcsolatot lehet teremteni a k -edik és a $(k+1)$ -edik szakaszban az állapotváltozó vektorok kis megváltozásainak a kezdeti értékei között a t_{k-1} és a t_k változatlan

időpontokban. Ne felejtsük, hogy $\Delta \underline{x}_{k+1, start}(t_k)$ és $\Delta \underline{x}_{k, start}(t_{k-1})$ fiktív értékek, hiszen például a $(k + 1)$ -edik szakasz kezdetén az állapotváltozó megváltozása $\Delta \underline{x}_{k+1, start}(t_k + \Delta t_k)$, és nem $\Delta \underline{x}_{k+1, start}(t_k)$! Alkalmazzuk (2.13)-at kaszkádban egy egész alperiódusra:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}_{m+1, start}(t_m) &= \underline{V}_m \underline{W}_m(\tau_m) \underline{V}_{m-1} \underline{W}_{m-1}(\tau_{m-1}) \dots \\ &\dots \underline{V}_1 \underline{W}_1(\tau_1) \Delta \underline{x}_0(t_0) = \underline{Y} \Delta \underline{x}_0(t_0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

A (2.6) szerint számítsuk vissza $\Delta \underline{x}_{m+1, start}(t_m)$ -et az $(i + 1)$ -edik alperiódus kezdetére (2.7 ábra):

$$\Delta \underline{x}_0(t_0^{(i+1)}) = \underline{P}^{-1} \underline{Y} \Delta \underline{x}_0(t_0^{(i)}) = \underline{Z} \Delta \underline{x}_0(t_0^{(i)}). \quad (2.15)$$

A $t_0^{(1)}$ kezdő időponttól kezdve i -szer alkalmazva (2.15)-öt

$$\Delta \underline{x}_0(t_0^{(i+1)}) = \underline{Z}^i \Delta \underline{x}_0(t_0^{(1)}) = \left(\sum \bar{\lambda}_k^i \underline{s}_{kj} \underline{s}_{kb}^* \right) \Delta \underline{x}_0(t_0^{(1)}). \quad (2.16)$$

A rendszerünk vizsgálatát visszavezettük a *Határciklusok* című 1.2 pontban leírtakra [lásd (1.15) és (1.16) egyenleteket]. A rendszer stabilitásának a feltétele tehát

$$|\bar{\lambda}_k| < 1. \quad (2.17)$$

A rendszer akkor stabilis, ha a \underline{Z} mátrix valamennyi sajátértéke az egysugarú körön belül található.

3. Káoszelmélet és fraktálgeometria

3.1. Bevezetés [1, 2, 3, 7]

Mint ahogy már korábban említettük, a nemlineáris rendszerek egyik lehetséges állapota a kaotikus állapot. A kaotikus állapot szükséges feltétele a nemlinearitás és a három- vagy többdimenziós rendszer. Mindenekelőtt soroljuk fel a kaotikus állapottal is rendelkező rendszerek fontosabb tulajdonságait.

- E rendszerek vagy pontosabban modelljeik determinisztikusak, matematikai leírásuk egzakt, ismert.
- Rendkívül érzékenyek a kezdeti feltételekre, ezek végtelen kis megváltozása is már egészen más pályára terelheti a rendszer mozgását.

- Hosszú távon, távolabbi időkből nem predikálható a rendszer állapota, annak ellenére, hogy a rendszer determinisztikus.
- A trajektóriái az állapottérben nem reprodukálhatók, nem periodikusak, a trajektóriák nem metszik egymást, korlátosak az állapottérben, és végül közeli trajektóriák exponenciálisan divergálnak egymástól.
- Annak ellenére, hogy a mozgás véletlenszerűnek tűnik, rend és strukturáltság fedezhető fel benne, ami a determinisztikus sajátságából ered.

A disszipatív rendszerek trajektóriái – mint már utaltunk rá – a kezdeti feltételektől függő tranziens folyamatot követően az állapottérben vagy fix ponthoz, vagy határciklushoz, vagy kváziperiodikus görbéhez tartanak, amelyeket *attraktornak* vagy megkülönböztetésül *klasszikus attraktornak* nevezünk. A fenti állapotok mindegyikét reguláris állapotnak tekintjük. Ha a rendszer kaotikus állapotba kerül, akkor is bárhol is indítottuk, előbb-utóbb rákerül egy attraktorra, az úgynevezett *különös (strange) attraktorra*.

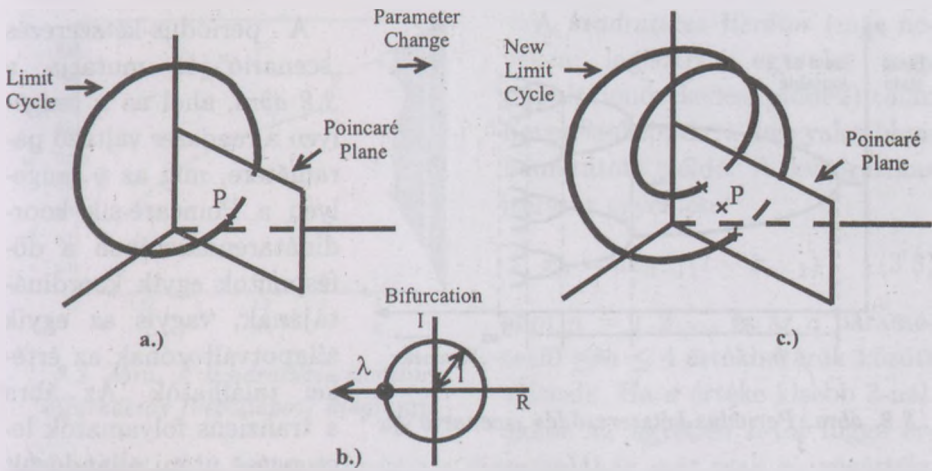
3.2. Átmenetek a kaotikus állapotba

A káoszelmélet egyik jelentős eredménye, hogy szabályosságokat sikerült megállapítani a kaotikus állapotba való átmenetekben. Eszerint az átmenet a reguláris állapotból a kaotikusba általában két széles osztály valamelyike szerint zajlik le, nevezetesen a rendszer valamelyik paraméterének a változása miatt, vagy

- *lokális bifurkáció*
- *globális bifurkáció*

útján. Az első esetben egy határciklus válik labilissá. A másodikban több fix pont és/vagy több határciklus labilissá válása a kiváltó ok.

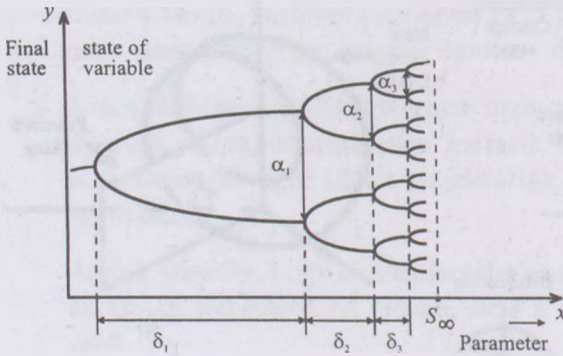
A *lokális bifurkációnak* nevezett átmenetnek három alosztálya van: *periódus-kétszerezés (period doubling)*, *kváziperiodicitás* és *intermittencia (intermittency)*. A *globális bifurkációnak* is van két alosztálya: *kaotikus tranziens* és a *krízis (crises)*. Leggyakoribb út a kaotikus állapotba a periódus-kétszerezésen és a kváziperiodicitáson keresztül vezet. Mi csak az elsőről szólnunk itt kissé részletesebben.



3.1. ábra. Periódus-kétszereződés

A kváziperiodikus útról csupán annyi kerüljön ide, hogy ilyenkor fix pontból indul a rendszer, és valamelyik paraméter változásának hatására bifurkáció útján először határciklusba, majd újabb bifurkáció és újabb frekvencia megjelenésével kváziperiodikus állapotba kerül, és végül innen jut el a kaotikus állapotba. Megjegyzendő, hogy Landau Nobel-díjas orosz fizikus a század közepén a folyadékáramlásban a turbulens jelenség modellezésére végtelen nagy számú Hopf-bifurkáció-sorozattal létrejövő végtelen sok, egymással irracionális viszonyban álló frekvenciát tartalmazó kváziperiodikus állapotot javasolt [1].

Térjünk rá a periódus-kétszerezés jelenségének a szemléltetésére. Legyen a háromdimeziós rendszerünk határciklusban, amelynek trajektóriája a Poincaré-síkot a P pontban dőfje (3.1a ábra). Tegyük fel, hogy a rendszer egyik paraméterét megváltoztatva a határciklushoz tartozó Poincaré-térkép-függvény Jakobi-mátrixának egyik sajátértéke kilép az egysugarú körből (3.1b ábra). A határciklus labilissá válik, a periódus-kétszerezés esetén kialakul egy új határciklus. A trajektória a Poincaré-síkot ilyenkor egy teljes periódus lezajlása során a P pont környezetében kétszer dőfi (3.1c ábra). A rendszerparamétert tovább változtatva, eljutunk egy következő paraméterértékig, amelynél újabb bifurkáció lép fel. Ettől kezdve a trajektória az új határciklus egy teljes periódusa során kettő helyett már négyszer dőfi a Poincaré-síkot. A periódus-kétszerezés jelensége így folytatódik minden határon túl.



3.2. ábra. Periódus-kétszereződés „scenarió”-ja

A periódus-kétszerezés „scenarió”-ját mutatja a 3.2 ábra, ahol az x tengelyen a rendszer változó paramétere, míg az y tengelyen a Poincaré-sík koordinátarendszerében a döféspontok egyik koordinátájának, vagyis az egyik állapotváltozónak az értékei találhatóak. Az ábra a tranziens folyamatok lecsengése utáni állandósult

állapotot mutatja. Az ilyen típusú ábrákat végállapot- vagy bifurkációs vagy Feigenbaum-diagramnak nevezzük. Feigenbaum kimutatta, hogy az egymás után következő bifurkációs pontok között a paramétertengelyen mért δ_n távolságok aránya állandó értékhez tart, miközben a bifurkációs pontok száma végtelen nagy értékhez tart, vagyis

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} = 4,6692 \dots, \quad (3.1)$$

ahol δ a Feigenbaum-konstans. Az állapotváltó tengely irányában a bifurkációs pontokon mért α_n távolságok aránya is állandó értékhez tart n minden határon túli növekedése esetén, tehát

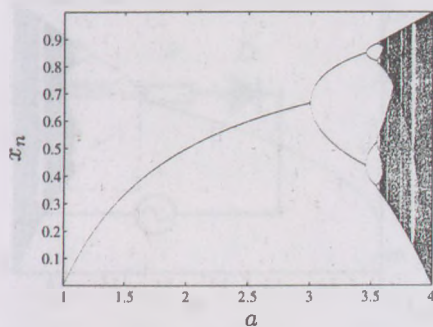
$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 2,5029 \dots, \quad (3.2)$$

ahol α az ún. Feigenbaum- α .

Hangsúlyozni kell, hogy δ éppen olyan általános érvényű és jelentőségű szám a káoszelméletben, mint a π , e vagy az aranymetszés.

3.3. Példák a periódus-kétszerezésre és a kaotikus állapotra

A periódus-kétszerezés útján létesülő kaotikus állapotra két példát mutatunk be. Az egyik példa számítási, a másik mérési eredmény.



3.3. ábra. A kvadratikus iterátor bifurkációs (végállapot) diagramja

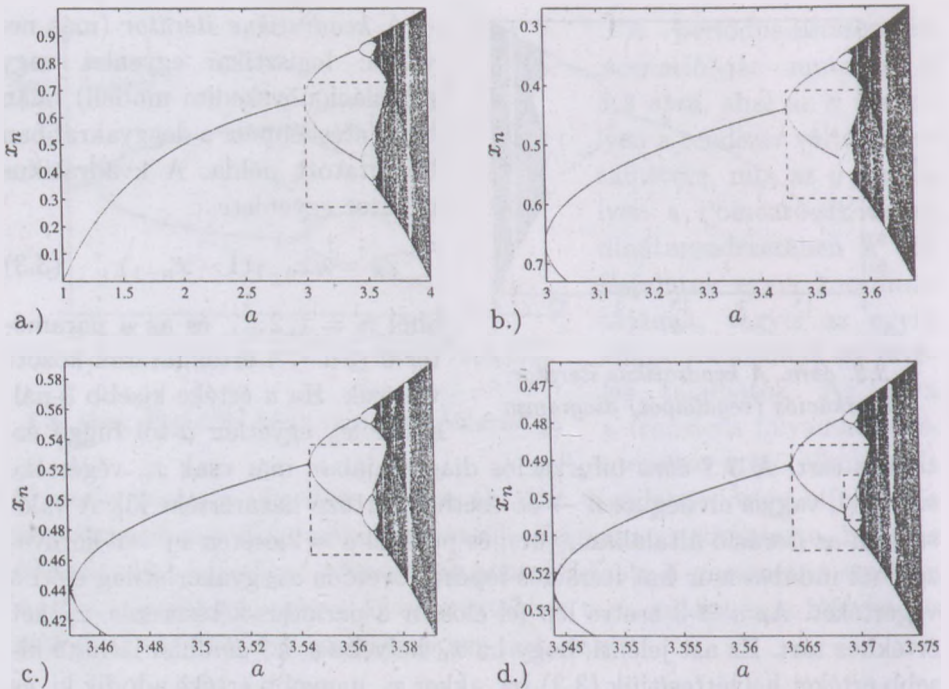
tékhez tart. A 3.3 ábra bifurkációs diagramjában már csak x_n végértéke szerepel, vagyis elvileg az $n \rightarrow \infty$ esethez tartozó határértéke [3]. A valóságban az iteráció általában gyors, és például $a = 2$ esetén $x_1 = 0$ környezetéből indulva már hat iterációs lépést követően x_n gyakorlatilag eléri a végértékét. Az $a \cong 3$ esetre lép fel először a periódus-kétszerezés, x_n két értékhez tart. Ez azt jelenti, hogy ha x_n helyébe a 3.3 ábrában látható kisebb értékét helyettesítjük (3.3)-ba, akkor x_n nagyobb értéke adódik ki, és megfordítva x_1 kezdeti értékét 0 és 1 között akármekkora választjuk is, a kezdeti tranziens után x_n eléri a 3.3 ábrában látható két értékét. a -t tovább növelve $a \cong 3,5$ környékén mind x_n nagyobb, mind a kisebb értékében egyszerre bekövetkezik egy újabb periódus-kétszerezés, vagyis ettől kezdve x_n -ek ugyanahhoz az a értékhez már négy értéke tartozik. Az újabb és újabb bifurkációkhoz a Feigenbaum-konstansnak megfelelően a értékének egyre kisebb és kisebb megváltozása szükséges. A periódus-kétszerezési tartomány az úgynevezett Feigenbaum-pontig, vagyis $a = S_\infty = 3,5699\dots$ -ig tart. Ettől jobbra már a kaotikus tartomány található, amely nem egyszerűen csak kaotikus állapotokat takar, hanem egyéb érdekes struktúrákat is. Ilyenek például a sávhasadás-sorozatok, amelyet megint csak a Feigenbaum-konstans és -pont uralnak, továbbá a többszörös periodicitást mutató ablaksorozatok. Ezekről e helyen nem kívánunk szólni [3].

Megemlékezzünk azonban a bifurkációs (végállapot) diagram egyik jellegzetes tulajdonságáról, az *önhasonlóságról (self-similarity)*, mivel ez a fraktálokra is jellemző. A 3.4a ábrában még egyszer megjelenik a kvadratikus iterátor végállapot-diagramja az első bifurkációs pontból induló és a periódus-kétszerezés alsó görbeszakaszát magába foglaló négyszög ke-

A kvadratikus iterátor (más neven: logisztikai egyenlet vagy populációnövekedési modell) talán bevezetéképpen a leggyakrabban bemutatott példa. A kvadratikus iterátor egyenlete

$$x_n = ax_{n-1}(1 - x_{n-1}), \quad (3.3)$$

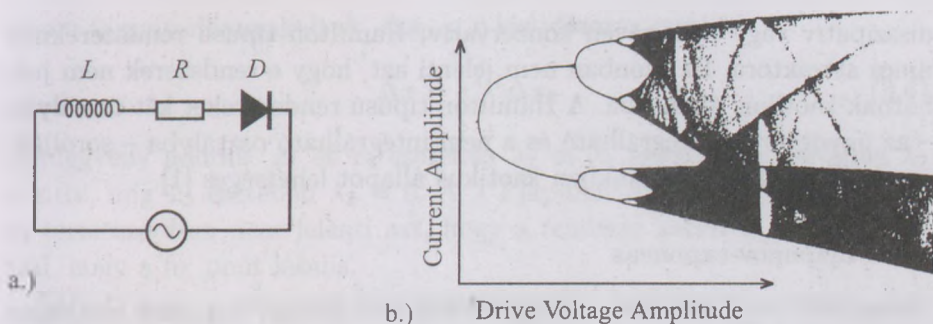
ahol $n = 1, 2, \dots$, és az a paraméter $0 \leq a \leq 4$ értékhatárok között változik. Ha a értéke kisebb 3-nál, akkor x_n egyetlen a -tól függő ér-



3.4. ábra. Önhasonlóság a kvadratikus iterátor végállapot-diagramjában

rettel kiegészítve. Nagyítsuk ki megfelelő mértékben a keretben található részt, és egyidejűleg az x tengely körül fordítsuk meg azt 180° -kal. Az eredmény a 3.4b ábrában látható. Az a és b ábrák közötti hasonlóság nyilvánvaló. A 3.4b ábra, majd a 3.4c ábra keretbe foglalt részén ugyanazt elvégezve, mint amit a 3.4a ábra kereten belüli részével tettünk, a 3.4c, illetve d ábrákhoz jutunk. Látszik, hogy valamennyi ábra hasonló az összes többihez. E műveletsort tetszőleges számban folytathatjuk, mindig a többi ábrához hasonlót kapunk. Ez az önhasonlóság a végállapot-diagramban (3.4a, b, c, d ábrák).

A második példa is jól ismert az irodalomból. A 3.5a ábra egy egyszerű áramkört mutat, amely soros $R-L$ körből és ezzel sorba kapcsolt $p-n$ átmenetből áll, amelyre szinuszos feszültséggenerátor csatlakozik. A nemlineáris áramkör mérésrel felvett végállapot-diagramját a 3.5b ábra mutatja. Ebben az áramamplitúdó változása látható a tápfeszültség amplitúdójának a függvényében. A periódus-kétszerezési „scenario” és a kao-



3.5. ábra. Szinuszos feszültségre kapcsolt L - R - pn áramkör (a ábra). Mért végállapot-diagram (b ábra). [8, 2]

tikus tartomány élesen kirajzolódik. Megjegyezzük, hogy most csak két energiatárolónk és két állapotváltozónk van, és mégis fellép kaotikus állapot. A második energiatároló a p - n átmenet nemlineáris kapacitása. A kaotikus állapot azért lehetséges, mert a rendszer szinuszos feszültséggenerátorral gerjesztett, tehát nem autonóm. A rendszert autonómmá lehet alakítani formailag, ha a t időt új, harmadik állapotváltozónak tekintjük [lásd az (1.6) egyenlettel kapcsolatban mondottakat], s így a kaotikus állapot fellépéséhez szükséges három állapotváltozó már megvan.

3.4. Kaotikus állapotot jellemző mennyiségek

Felvetődik a kérdés, hogy miként lehet megállapítani, mennyiségileg jellemezni a kaotikus állapotot. A mennyiségi jellemzők több okból lehetnek fontosak: segíthetnek elkülöníteni a rendszer zajos viselkedését a kaotikustól. Segítségükkel a rendszereket osztályokba sorolhatjuk. Változásuk a rendszer dinamikus viselkedésének módosulására utalhat. Léteznek mennyiségi jellemzők. Ezeket két csoportba lehet sorolni. Az egyik csoportba tartozók az *állapottrajektóriák időbeli változását* jellemzik. A másik csoportba tartozók a *trajektóriák geometriai tulajdonságát* vizsgálják. A mennyiségi jellemzők közül gyakran használt a *Ljapunov-exponens*, a *fraktáldimenzió* és a *Kolmogorov-entrópia*. Az első csoportból a Ljapunov-exponensről, a másodiktól a fraktáldimenzióról szólunk.

Ismét utalunk arra, hogy a jelen székfoglaló disszipatív rendszerekre korlátozódik. Ezek trajektóriái a kezdeti tranziens lezajlását követően attraktorra vagy kaotikus állapotban különös attraktorra kerülnek. A nem

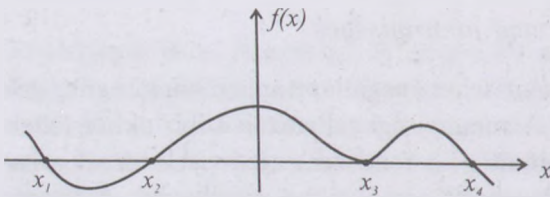
disszipatív vagy más néven konzervatív, Hamilton típusú rendszereknek nincs attraktora. Ez azonban nem jelenti azt, hogy e rendszerek nem juthatnak kaotikus állapotba. A Hamilton típusú rendszereket két osztályba – az úgynevezett integrálható és a nem integrálható osztályba – sorolják, amelyek közül az utóbbiakban kaotikus állapot lehetséges [1].

3.4.1. Ljapunov-exponens

Disszipatív rendszerekben a trajektóriák a tranziens folyamat lezajlását követően mindig eljutnak a kezdeti feltételhez tartozó attraktorra. Indítsunk el az attraktorról és tőle $d_0 < \epsilon$ kis távolságban fekvő másik pontból a $t = 0$ időpontban két trajektóriát. A trajektóriák egymástól való távolsága kielégíti a

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \tag{3.4}$$

egyenletet, ahol a λ paraméter a trajektóriákhoz tartozó úgynevezett Ljapunov-exponens. Az attraktoron továbbhaladva és a fenti eljárást megismételve további λ értékek számíthatók. Ezek átlaga adja a $\bar{\lambda}$ átlag Ljapunov-exponens. Ha λ és $\bar{\lambda}$ pozitív, az egymástól kis távolságban az attraktorról, illetve környezetéből indított trajektóriák egymástól mért távolsága exponenciálisan nő. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a rendszer kaotikus állapotban van.



3.6. ábra. $f(x)$ függvény fix pontjai

Egydimenziós állapotterben az attraktorok fix pontok és nyeregpontok lehetnek (1.1 pont). A példaképpen a 3.6 ábrában felrajzolt $f(x)$ nemlineáris függvénynek x_1, x_2, x_3 és x_4 négy gyöke, az $\dot{x} = f(x)$ állapot-

egyenletnek négy kitüntetett pontja van. Ezek közül x_1 és x_4 csomópont, x_2 fókusz és x_3 nyeregpont. Az $f(x)$ függvényt a fenti négy pont közvetlen környezetében Taylor-sorba fejtvé a

$$\Delta \dot{x} = \left(\frac{df(x)}{dt} \right)_k \Delta x = \lambda_k \Delta x \tag{3.5}$$

linearizált állapotegyenletet kapjuk, ahol λ_k a k -adik ponthoz tartozó Ljapunov-exponens, $\Delta x = x - x_k$. A Taylor-sor második és nagyobb fok-

számú tagjait elhanyagoltuk. $\Delta x_0 < \varepsilon$ kis változás esetén

$$\Delta x = e^{\lambda_k t} \Delta x_0 \quad (3.6)$$

időfüggvény adódik. x_1 és x_4 esetében λ_1 és λ_4 negatív, x_2 esetében λ_2 pozitív, míg x_3 esetében $\lambda_3 = 0$. A λ Ljapunov-exponens pozitív értéke itt természetesen nem jelenti azt, hogy a rendszer kaotikus, csupán arra utal, hogy a fix pont labilis.

Ahhoz, hogy a rendszer kaotikus állapotba kerülhessen, legalább három dimenzióra, állapotváltozóra van szükség. Az egymáshoz igen közeli két pontból indított két trajektória most akkor távolodik exponenciálisan egymástól, ha az egyik (vagy a pontok közelsége miatt, ami ugyanaz) vagy a másik indítási ponthoz tartozó Jakobi-mátrix három sajátértéke, vagyis Ljapunov-exponense közül az egyik pozitív. Ugyanis bizonyított, hogy a három Ljapunov-exponens közül az egyik szükségszerűen zérus [9]. E szabály alól az egyedüli kivétel a fix pont. Az átlagos Ljapunov-exponens zérus értéke azt jelenti, hogy a hozzárendelt exponenciális tag a két közeli pontból indított trajektóriára sem közelítő (vonzó), sem távolodó (taszító) hatást nem gyakorol. Az is bizonyított, hogy disszipatív rendszer esetében az indítási pontot körülvevő, ε sugarú gömb köbtartalma csökken, ami csak úgy lehetséges, ha legalább az egyik átlagos Ljapunov-exponens negatív. Ezek szerint kaotikus esetben a három átlagos Ljapunov-exponens közül az egyik zérus, a másik negatív, és csak a harmadik pozitív. Háromnál nagyobb dimenziós állapottér esetén az átlagos Ljapunov-exponensek között több mint egy is felvehet pozitív értéket. Ha az átlagos Ljapunov-exponensek közül a zérus érték mellett a maradék kettő negatív, illetve csak az egyik negatív, a másik zérus, akkor a rendszer határciklusban, illetve kváziperiodikus állapotban van.

3.5. Fraktáldimenzió [1, 2, 3]

A dimenzió fogalmat részben geometriai alakzatok jellemzésére használjuk. A pont, a vonal vagy zárt görbe, a felület és a térfogat dimenziója rendre 0, 1, 2 és 3 egész szám. A dimenzió fogalmat átvitt értelemben az állapottér jellemzésére is használjuk, és azt mondjuk, hogy az állapottér D dimenziója a rendszer állapotának leírásához szükséges állapotváltozók minimális számával egyenlő. Ismeretes, hogy disszipatív rendszerek esetében valamely D dimenziójú azonos attraktor bázison belüli „térfogat”-ban

található kezdeti feltételekből induló trajektóriák a megfelelő attraktorra érnek (1. fejezet), amely lehet egy $(D - 1)$ dimenziójú „felület” vagy egy alacsonyabb dimenziójú alakzat. Ezt úgy is ki szokták fejezni, hogy a D dimenziójú „térfogat” zérus térfogatra zsugorodik, az attraktor térfogata az állapotterben zérus kell hogy legyen. Az attraktor Poincaré-metszetének dimenziója az attraktorénál még eggyel kisebb.

Meglepetésként hatott, amikor kiderült, hogy léteznek olyan geometriai alakzatok, amelyek dimenziója nem egész szám. Ezeket Mandelbrot után (1982) *fraktáloknak* nevezik, annak megfelelően, hogy dimenziójuk tört-szám.

Számos definíció létezik a fraktáldimenzióra. Ezek általában eltérő számszerű eredményt adnak. E helyen ezek közül csak egyről, az úgynevezett D_b *box számláló dimenzióról* szólunk, amelyet először Kolmogorov alkalmazott [10]. Eszerint D_b -t a kérdéses geometriai alakzatra úgy kell meghatározni, hogy azt b oldalhosszúságú és n számú boxszal maradéktalanul lefedjük, majd képezzük $b \rightarrow 0$ határátmenettel a

$$D_b = - \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log n}{\log b} \quad (3.7)$$

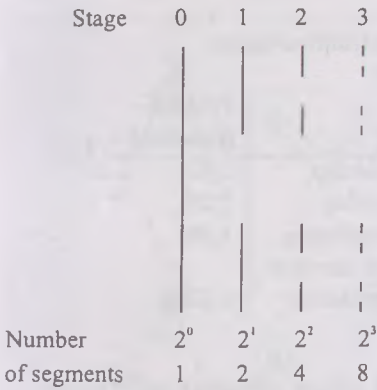
hányadost.

Ha a fenti definíciót példaképpen a kétdimenziós térben helyet foglaló pontra alkalmazzuk, akkor a box egy b oldalhosszúságú egyetlen négyzet. A (3.7) egyenlet, mint ahogy vártuk, $D_b = 0$ értéket ad. Ha a geometriai alakzat l hosszúságú vonal, akkor $n = l/b$ számú boxra van szükségünk, s így

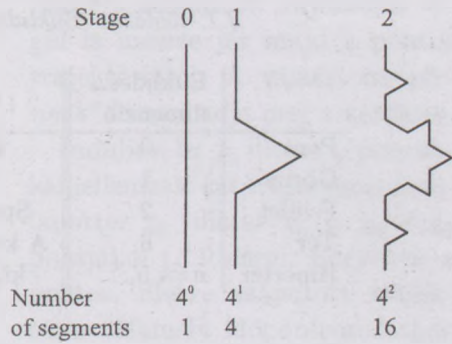
$$D_b = - \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log l/b}{\log b} = - \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log l - \log b}{\log b} = 1,$$

vagyis D_b -re a várt 1 érték adódik.

A továbbiakban alkalmazzuk a (3.7)-ben definiált D_b dimenziót két olyan geometriai alakzatra, amelyekre nem egész szám adódik. Az első a híres „Cantor set” = *Cantor-halmaz* legyen, amelyet F fokozatokban építünk ki. A 0. fokozatban egy egységnyi hosszú vonalszegmensből indulunk ki (3.7 ábra). Az 1. fokozatban elhagyjuk a vonal középső 1/3-át. A két maradék szegmens hossza egyenként 1/3. A 2. fokozatban ismét elhagyjuk a szegmensek középső 1/3-át. Összesen $2^2 = 4$ szegmens marad, s mindegyik hossza egyenként $(1/3)^2 = 1/9$ -ed. Az F . fokozatban



3.7. ábra. Cantor set = Cantor-halmaz. Fraktáلالakzat fraktáldimenziója 0,63



3.8. ábra. Koch-görbe. Fraktáلالakzat fraktáldimenziója 1,26

ismét elhagyjuk a maradék szegmensek középső $1/3$ -át. Összesen 2^F szegmenst kapunk, egyenként $(1/3)^F$ hosszban. $F \rightarrow \infty$ esetben jutunk el a Cantor-halmazhoz. Határozzuk meg ennek az alakzatnak a D_b dimenzióját. $b = (1/3)^F$ oldalhosszúságú és minimálisan 2^F számú boxra van szükségünk.

$$D_b = -\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log 2^F}{\log(1/3)^F} = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63 \dots$$

A Cantor-halmaz D_b dimenziója 0 és 1 közé eső nem egész szám. Úgy szokták mondani, hogy a Cantor-halmaz több, mint pontok összessége, de kevesebb, mint egy vonal, egy fraktáلالakzat.

Második példánkat, a svéd matematikusról elnevezett Koch-görbét az egynél nagyobb, D_b dimenziójú geometriai alakzatok közül választottuk. Ez egy folytonos, végtelen hosszú és sehol sem differenciálható görbe. Most is egy egységnyi hosszúságú egyenes vonalból indulunk ki (3.8 ábra). Az 1. fokozatban töröljük a középső $1/3$ hosszúságú szegmenst, és helyébe egyenként $1/3$ hosszú sátrat iktatunk. A 2. fokozatban mind a négy $1/3$ hosszú szegmens középső egyharmad része helyébe egyenként $(1/3)^2$ oldalhosszúságú sátrat helyezünk. Az F . szakaszban 4^F szegmensünk lesz, egyenként $(1/3)^F$ oldalhosszal. A görbét teljesen lefedő boxok minimális

3.1. táblázat. Euklideszi és fraktáldimenziók

	Euklideszi dimenzió		Fraktál- dimenzió
Pont	0	Cantor-halmaz	0,63 ...
Görbe	1	Koch-görbe	1,26 ...
Felület	2	Sierpinski-szőnyeg	1,89 ...
Tér	3	A kvadratikus iterátor	
Hipertér	$n=4,5, \dots$	különös attraktora	0,5388 ...

száma 4^F , oldalhosszuk $b = (1/3)^F$. A Koch-görbe dimenziója

$$D_b = - \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log 4^F}{\log (1/3)^F} = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26 \dots$$

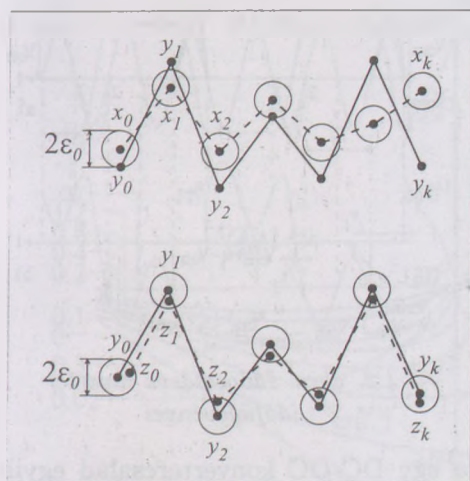
Érdekességgéppen megemlítjük, hogy ha egyenlő oldalú háromszögből indulunk ki, és a háromszög mindegyik oldalára egy Koch-görbét építünk ki, akkor egy véges területet bezáró, végtelen hosszú kerületű geometriai alakzathoz, az úgynevezett Koch-hópehelyhez jutunk.

A fraktáldimenzió a káoszelméletben fundamentális szerepet tölt be. Ugyanis a *különös attraktorok fraktálgeometriai alakzatok* vagy megfordítva, ha egy attraktor fraktáldimenziójú, akkor a rendszer kaotikus állapotban van.

A 3.1 táblázat az euklideszi és a fraktáldimenziókat szemlélteti. Itt a (3.3) egyenlettel leírt kvadratikus iterátorra megadott fraktáldimenzió az $a = S_\infty = 3,5699 \dots$ úgynevezett Feigenbaum-értékhez tartozik, amelytől a kaotikus tartomány kezdődik (3.3 ábra).

3.6. Árnyék (shadowing) lemma [3]

Korábban már hangsúlyoztuk a kaotikus rendszerek egyik alapvető tulajdonságát, rendkívüli érzékenységüket a kezdeti feltételekre. Jogos a kérdés: érdemes-e a kaotikus rendszerek tulajdonságait számítógépen, numerikus eszközökkel vizsgálni, hiszen a számítás során, a számítás véges pontossága miatt óhatatlanul felhalmozódó és exponenciálisan növekvő hibák



3.9. ábra. Árnyék (shadowing) lemma

vekedésével megszakad, a számított y trajektória a pontos x trajektóriától messze jár.

Van azonban az „árnyék” lemma szerint egy z_0 kezdeti pont az x_0 kezdeti pont ε_0 sugarú környezetében, amelyből induló pontos trajektória z_k pontjai mind az y_k pontok ε_0 sugarú környezetében maradnak. A z_k pontsorozattal jellemzett pontos trajektória tehát árnyékként követi a számított trajektóriát, amely tehát az exponenciálisan növekvő számítási hiba ellenére jól jellemzi a nemlineáris, kaotikus rendszer viselkedését.

4. Változó struktúrájú rendszerek

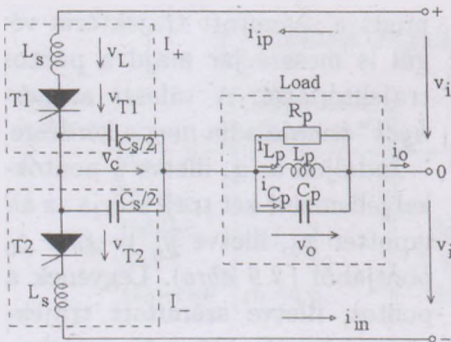
4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben példaként három változó struktúrájú rendszert mutatunk be a teljesítményelektronika és a mozgásszabályozás köréből. Az első egyenfeszültségből középfrekvenciás váltakozó feszültséget előállító, időosztásos alinverterekből felépülő inverter. A kapcsolást és a működést követően a rendszer labilis tartományáról és szubharmonikus állapotáról lesz szó. A második példa indukciós motor toleranciasávós áramszabályozása. A rendszer ismertetése után a kezdeti feltételekre vonatkozó rendkívüli érzékenységről, a kaotikus állapotról és a kaotikus állapotba való

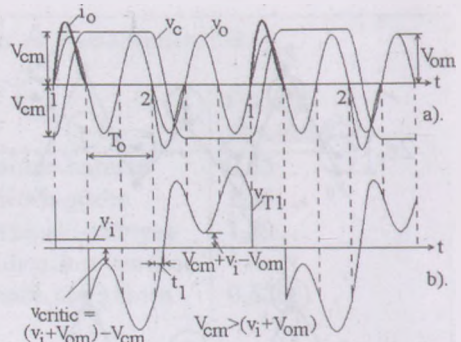
miatt a számított trajektória végül is messze jár majd a pontos trajektóriától. A választ az „árnyék” lemma adja meg a kérdésre.

Induljon az x , illetve y pontokkal jellemzett két trajektória az állapotter x_0 , illetve $y_0 = x_0 + \varepsilon_0$ pontjából (3.9 ábra). Legyenek a pontos, illetve számított trajektória valamely időpontsorozathoz tartozó pontjai $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, illetve $y_0 = x_0 + \varepsilon_0, y_1 = x_1 + \varepsilon_1, y_2 = x_2 + \varepsilon_2, \dots, y_k = x_k + \varepsilon_k$. Kaotikus rendszerekben az $|\varepsilon|$ hibák exponenciálisan nőnek.

A kapcsolat x_k és y_k között k növekedésével megszakad, a számított y trajektória a pontos x trajektóriától messze jár.



4.1. ábra. Időosztásos inverter alapkapscsolása

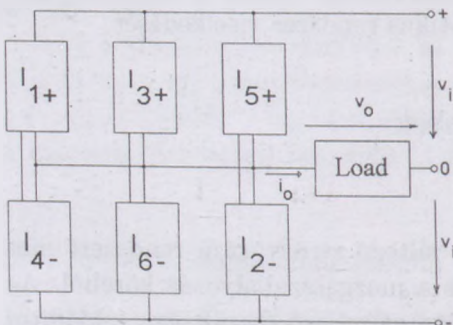


4.2. ábra. Időosztásos inverter időfüggvényei

átmenetről esik szó. Az utolsó példa egy DC-DC konvertercsalád egyik tagjának kaotikus állapotát írja le a család ismertetését követően.

4.2. Időosztásos inverter [11, 12]

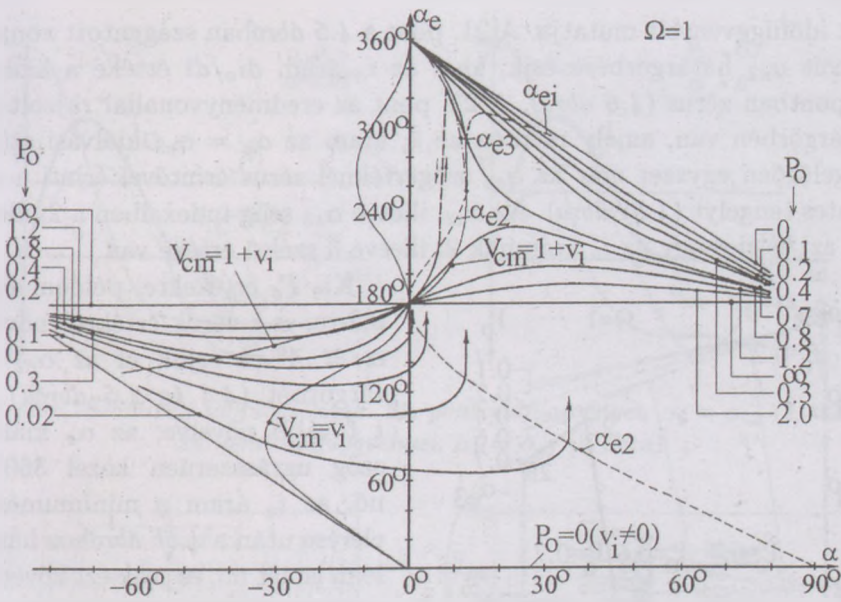
Az inverter alapkapscsolása a szaggatott vonallal körülhatárolt I_+ pozitív és I_- negatív alinvertert, az $R_p-L_p-C_p$ párhuzamos rezgőkörből álló terhelést tartalmazza (4.1 ábra). A táplálás középpontos, a pozitív és a negatív oldalon egyaránt v_i értékű sima egyenfeszültség-forrás. Az alinverterek soros $L_s-C_s/2$ rezgőkörből és egy tirisztorból állnak.



4.3. ábra. Időosztásos inverter 2×3 alinverterből

A kapcsolás működése a 4.2 ábra alapján követhető. A terhelés kis csillapítása miatt a v_o kimenő feszültség szinuszosnak tekinthető frekvenciája a párhuzamos rezgőkör sajátfrekvenciájához közeli értékű. A $T1$, illetve $T2$ tirisztort a v_o feszültség minden harmadik zérusátmenetkor a pozitív, illetve negatív félperiódus kezdetén kapcsoljuk be (4.2a ábra). Pozitív, illetve negatív i_o áramimpulzus folyik át a

tirisztor bekapcsolását követően az alinverteren, amelynek eredményeképpen C_s kondenzátor v_c feszültség V_{cm} értékről ellenkező előjelű V_{cm} értékre lendül át. A 4.2b ábra a $v_{T1} = v_i - (v_c + v_o)$ tirisztor feszültség időfügg-



4.4. ábra. Az α_e kialakvási szög az α gyújtásszög függvényében. Paraméter a P_o kimenő teljesítmény

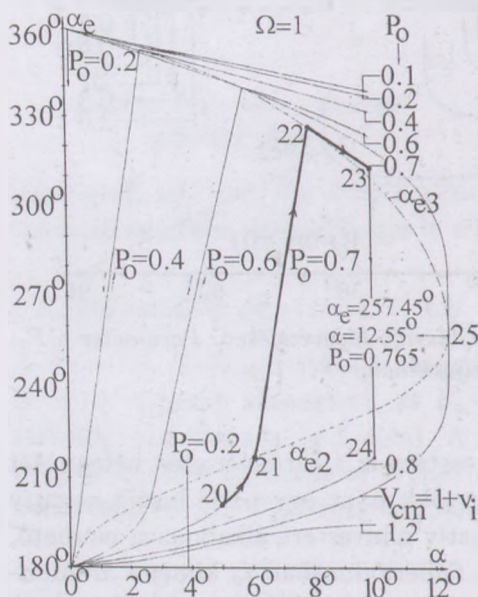
vénye látható. Megfelelő méretezés esetén az i_o áramvezetés befejezését követően v_{T1} a kimenő v_o feszültség több mint egy periódusáig negatív marad. Három pozitív és három negatív alinvertert alkalmazva elérhető, hogy a v_o kimenő feszültség minden félperiódusában i_o kimenő áramimpulzus folyjék (4.3 ábra).

4.2.1. Az inverter jelleggörbéi

A 4.4 ábra az inverter statikus jelleggörbéjét mutatja az α_e - α síkon, ahol α_e az i_o áramimpulzus kialakvási szöge, α a tirisztor bekapcsolási szöge. A P_o kimenő teljesítmény a paraméter. A jelleggörbesereget azzal a feltételezéssel számítottuk ki, hogy a v_o szinuszos feszültség frekvenciája megegyezik az alinverterek soros rezgőköreinek a sajátfrekvenciájával. Az inverter veszteségeit elhanyagoltuk.

Számunkra elsősorban az $\alpha_e(\alpha, P_o)$ jelleggörbeseregnek a 4.5 ábrában kinagyított része érdekes. Itt néhány kitüntetett munkapontot 20-szal indulóan megszámoztunk. A 4.6a, illetve b ábra a 21., illetve 22. pont számí-

tott időfüggvényeit mutatja. A 21. pont a 4.5 ábrában szaggatott vonallal rajzolt α_{e2} határgörbére esik, ahol az i_o áram di_o/dt értéke a kialakási időpontban zérus (4.6 ábra). A 22. pont az eredményvonallal rajzolt α_{e3} határgörbén van, amely mentén az i_o áram az $\alpha_e = \alpha_{e3}$ kialakási szögét megelőzően egyszer már az α_{ee} szögértéknél zérus érintővel érinti a vízszintes tengelyt (4.6b ábra). Az α_{e2} , illetve α_{e3} szög indexeiben a 2, illetve a 3 azt jelzi, hogy az i_o áramnak 2, illetve 3 szélső értéke van.

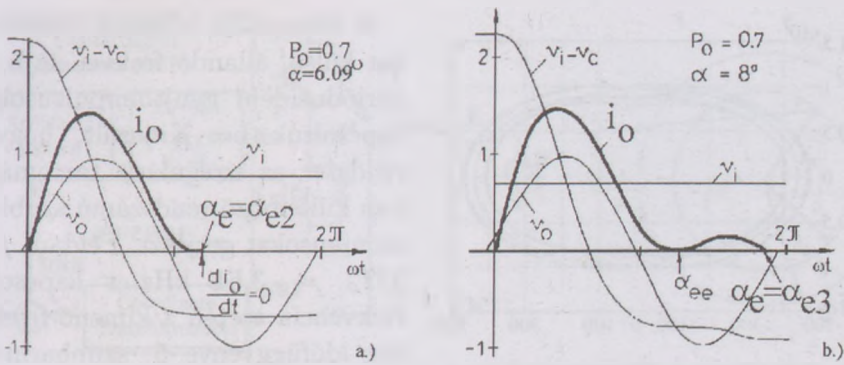


4.5. ábra. Az $\alpha_e(\alpha, P_o)$ jelleggörbe kinagyított részlete

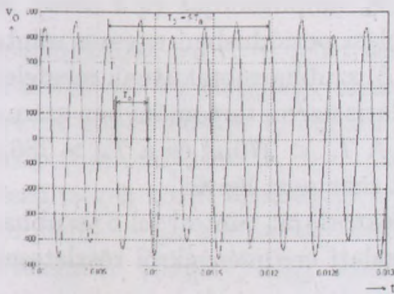
Kis P_o értékekre, például $P_o = 0,2$ -re, α -t zérus értékről növelve $\alpha \cong 4^\circ$ -ra érjük el az α_{e2} határgörbét (4.4 és 4.5 ábrák). α -t tovább növelve, az α_e kialakási szög ugrásszerűen közel 360° -ra nő, az i_o áram a minimumérték elérése után a 4.6b ábrához hasonlóan ismét nő, és csak ezt követően csökken zérusra, mintegy kialakul egy második árapulzus. Ezt követően α -t csökkentve, a $P_o = 0,2$ görbe $\alpha \cong 0$ értékre éri el az α_{e3} határgörbét (4.5 ábra). α -t tovább csökkentve az i_o áram második, kisebb pulzusrésze ugrásszerűen eltűnik, az α_e kialakási szög közel 360° -ról ugrásszerűen 180° alá csökken. Hiszterézis hurok alakul ki, hiszen α_e ugrásszerű növekedéséhez nagyobb α ($\alpha \cong 4^\circ$)

tartozik, mint amekkora α értéknél ($\alpha \cong 0$) csökken le α_e ugrásszerűen.

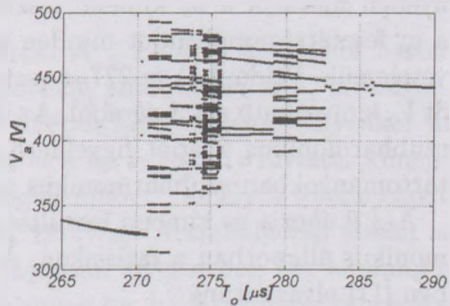
P_o -t növelve, az α tengelyen mért hiszterézis hurok szélessége csökken, és zérusra zsugorodik. A $P_o = 0,4; 0,6$ és $0,7$ értékekre már a fentiekkel éppen ellentétben a $P_o = \text{áll.}$ görbék kisebb α értékre érik el az α_{e2} határgörbét, mint α_{e3} -at. Így a 4.5 ábra 21. és 22. pontjai közötti α értékekre a közelítő modell alapján statikus állapotra érvényes megoldást nem lehet találni. A laboratóriumi kísérletek is alátámasztják, hogy ebben a tartományban a rendszer irregulárisan viselkedik.



4.6. ábra. Számított időfüggvények. 21. pont időfüggvényei, $\alpha_e = \alpha_{e2}$ (a ábra).
22. pont időfüggvényei, $\alpha_e = \alpha_{e3}$ (b ábra)



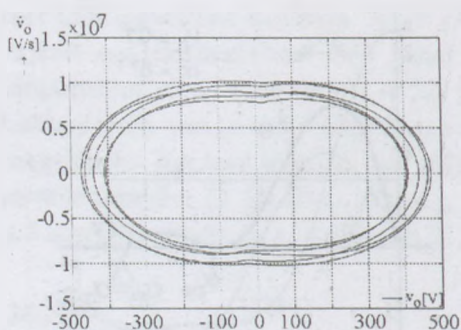
4.7. ábra. Kimenő feszültség időfüggvényei



4.8. ábra. Végérték- vagy bifurkációs diagram

4.2.2. Az inverter szimulációja

Abból a célból, hogy a rendszer viselkedését minden üzemállapotban követni tudjuk, az egyik legnagyobb egyszerűsítést jelentő feltételezést, a terhelés szinuszos feszültséggenerátoros helyettesítését fel kellett adni. Ez az egyszerűsítés az alinverterek szétcsatolását jelentette, vagyis megengedte az alinverterek egyenkénti két energiatárolós modellezését. Az új, összetett modellben a terhelés már párhuzamos veszteséges rezgőkör, az energiatárolók száma 11 (7 induktivitás és 4 kapacitás), míg a struktúrák száma 12.



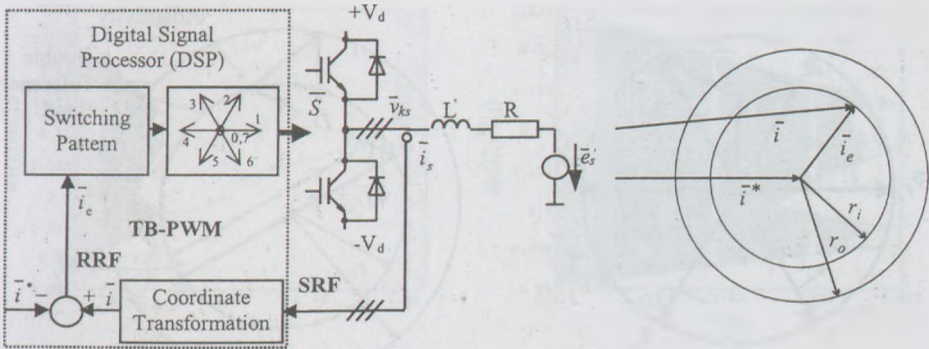
4.9. ábra. Fázissík-trajektória 5. szubharmonikus esetén ($T_o = 275\mu s$)

A szimuláció során a tirisztorkat külső, állandó frekvenciájú, T_o periódusidejű gyújtóimpulzusokkal kapcsoltuk be. Kiderült, hogy a rendszer az irreguláris tartományban különböző rendszámú szubharmonikusokat gerjeszt. Például $f_o = 1/T_o = 3,61$ kHz-es kapcsolási frekvencia esetén a kimenő feszültség időfüggvénye 5. szubharmonikus tartalmú (4.7 ábra). A végérték- vagy bifurkációs diagram a T_o kapcsolási periódusidő függvényében mutatja a v_o kimenő feszültség V_a amplitúdóját (4.8 ábra). Itt a v_o feszültségamplitúdót minden kapcsolási periódusban egyszer mintavételeztük. Például $T_o = 277\mu s$ esetén az 5. szubharmonikusnak megfelelő öt V_a kiolvasható a 4.8 ábrából. Az irreguláris üzemi tartományban számos szubharmonikus állapot figyelhető meg. A $T_o < 270\mu s$ és a $T_o > 286\mu s$ tartományokban szubharmonikus állapot már nem lép fel.

A 4.9 ábra a v_o kimenő feszültség trajektóriáját tünteti fel 5. szubharmonikus állapotban a fázissíkon. A vizsgálati eredményekről részletesebben [11] olvashatunk.

4.3. Indukciós motor toleranciasávós áramszabályozása [13, 14, 15]

A változó struktúrájú nemlineáris rendszerekre bemutatandó második példa blokkvázlatát a 4.10 ábrán láthatjuk. A \bar{v}_{ks} kapcsolófeszültségű indukciós motort az L' tranziens induktivitással, R sztátor ellenállással és e'_s tranziens reaktancia mögötti feszültséggel modelleztük. A szabályozás célja, hogy a három sztátor áram pillanatértéke a szimmetrikus, szinuszos referenciaáramot adott toleranciasávon belül kövesse. E célt oly módon érjük el, hogy a háromfázisú feszültséginverter \bar{v}_{ks} kimenő feszültségét a toleranciasávós szabályozó révén mindig a „megfelelő” értékre kapcsoljuk. A szabályozó az \bar{i}_s állórész áramvektort az inverter kapcsolási frekvenciájával forgó koordinátarendszerbe transzformálja, s eredményül az \bar{i} áramvektort állítja elő, amelyet az \bar{i}^* referencia áramvektorral összehasonlítva kapjuk az \bar{i}_e hibaáram-vektort. e'_s , \bar{v}_{ks} és \bar{i}_s álló, míg \bar{i} , \bar{i}^* és \bar{i}_e forgó

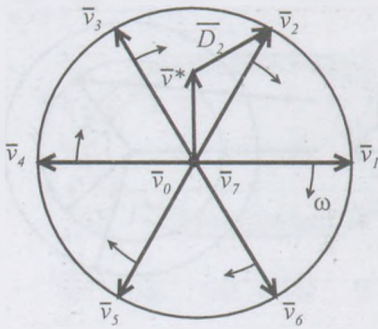


4.10. ábra. Indukciós motor toleranciasávós szabályozása

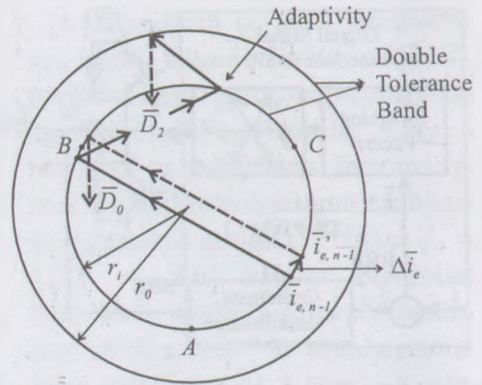
4.11. ábra. Áramszabályozás két toleranciasávja

koordináta-rendszerben felírt térvektorok. A 4.11 ábra az utóbbi három áramvektort ábrázolja egy olyan állapotban, amelyben az \vec{i}_e hibaáramvektor éppen eléri a r_i sugarú belső toleranciakör peremét. Ilyenkor az adaptív szabályozó a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_6$ aktív és a \vec{v}_0, \vec{v}_7 inaktív inverter kimenő feszültségek közül kiválasztja a „legmegfelelőbbet”, amely a toleranciakörön belül tartja a hibaáram-vektort (4.12 ábra). A szabályozás abban az értelemben adaptív, hogy felismeri, vajon az inverterben két kommutáció vagy gyors kapcsolássorozat következne-e be, ha a reguláris kapcsolási mintát követné. Ha az említett akármelyik nemkívánt eseményre kerülne sor, akkor „megfelelő módon” eltér a reguláris kapcsolási mintától, átmenetileg megengedi, hogy a hibaáram-vektor kilépjen a belső r_i sugarú toleranciakörből. Az inverter struktúrájának és így a kimenő feszültségének a változtatására legközelebb akkor kerül sor, amikor a hibaáram-vektor az r_o sugarú külső toleranciakör peremét éri el. Egy vagy két kapcsolás után \vec{i}_e visszakérül a belső toleranciakörbe.

Stacioner állapotban \vec{i}^* álló vektor, míg \vec{i}_e és \vec{i} végpontja a toleranciasávon belül vándorol. A $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_6$ inverter kimenőfeszültség-vektorok \vec{v}_{k_s} ($k = 0, 1, \dots, 7$) forgó koordináta-rendszerbe transzformált értékei, amelyek az ω kapcsolási körfrekvenciával forognak (4.12 ábra). \vec{v}^* az a fiktív inverter kimenő feszültség, amely \vec{i}^* referenciaáramot eredményezné. Ebből látszik, hogy mindig a \vec{v}^* -hoz legközelebbi inverter kimenőfeszültség-vektorok közül, vagyis az ábránk esetében $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_0$ és \vec{v}_7 közül célszerű választani. Bizonyítható, hogy a hibaáram-vektor változási sebesség vek-



4.12. ábra. Hat aktív áramszabályozás két toleranciasávjára



4.13. ábra. $\Delta \bar{i}_e$ kis változás \bar{i}_e trajektória nagy megváltozását eredményezheti

tora, így a változási irány vektora \bar{D} jó közelítéssel

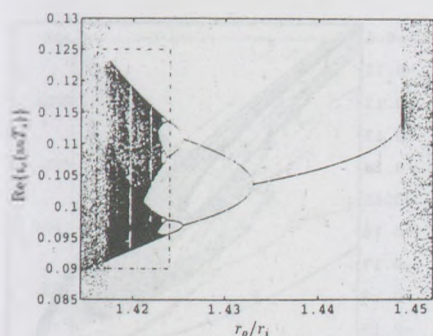
$$\bar{D} = \frac{d\bar{i}_e}{dt} \cong \frac{1}{L'} (\bar{v}_k - \bar{v}^*) . \quad (4.1)$$

Például \bar{v}_2 -t változtatva \bar{i}_e végpontja \bar{D}_2 irányban mozog (4.12, 4.13 ábrák).

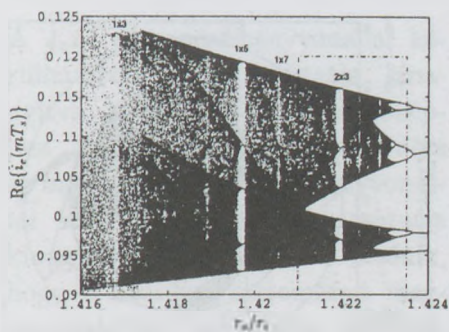
4.3.1. Érzékenység a kezdeti feltételekre

A kaotikus rendszerek egyik fontos, közös tulajdonsága, mint említettük a 3.1 pontban, az, hogy rendkívül érzékenyek a kezdeti feltételre. A tárgyalt áramszabályozásra ezt szemlélteti a 4.13 ábra. A belső toleranciakör kerülete három, egyenként 120° -os szakaszra, az \overline{AB} , a \overline{BC} és a \overline{CA} szakaszokra van felbontva. Ha a hibaáram-trajektória eléri a belső toleranciakört, akkor – reguláris esetben, vagyis túlnyomórészt – az előző felsorolás sorrendjében a szabályozó a \bar{v}_2 , a \bar{v}_0 vagy \bar{v}_7 és a \bar{v}_3 vektorokat választja, s így eléri, hogy a trajektória a toleranciakörön belül maradjon.

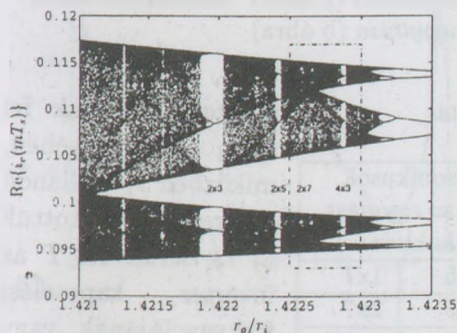
Tételezzük fel, hogy a hibaáram-trajektória a toleranciakör kerületén elhelyezkedő $\bar{i}_{e,n-1}$, illetve a tőle $\Delta \bar{i}_e$ elemi távolságban levő $\bar{i}'_{e,n-1}$ pontból indul. A \overline{CA} szakasznak megfelelően az \bar{i}_e trajektória iránya mind a két esetben \bar{D}_3 . Az első esetben közvetlenül a B pont alatt, a másodikban közvetlenül a B pont felett éri el a trajektória ismét a belső toleranciakört. Ezt követően a trajektória iránya az első esetben \bar{D}_2 , míg a másodikban egy ettől teljesen eltérő \bar{D}_0 lesz.



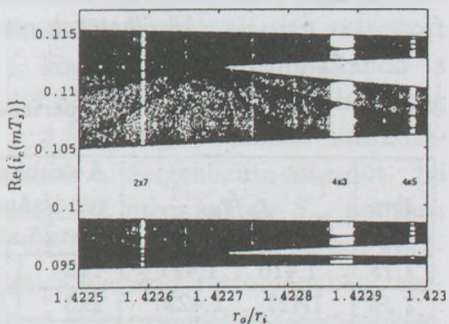
4.14. ábra. Toleranciasávós áramszabályozás bifurkációs diagramja



4.15. ábra. A 4.14 ábra eredményvonallal körülvelt részének nagyítása



4.16. ábra. A 4.15 ábra eredményvonallal körülvelt részének nagyítása

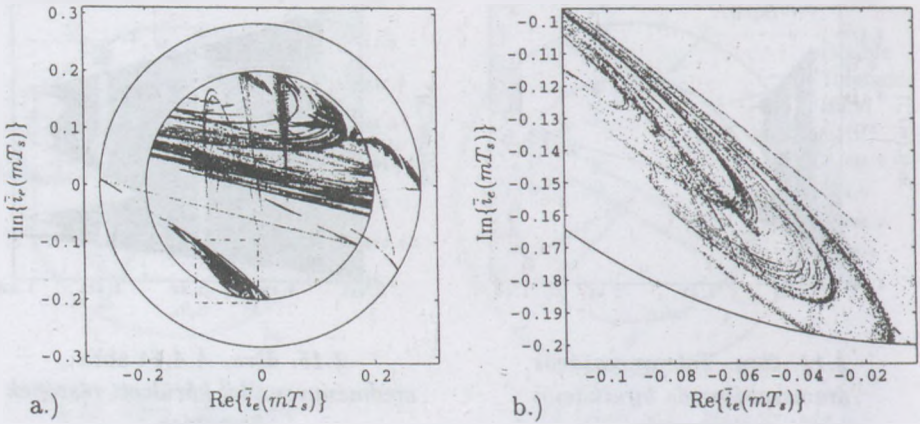


4.17. ábra. A 4.16 ábra eredményvonallal körülvelt részének nagyítása

A leírt példa két üzenetet is hordoz. Egyrészt bemutatja, hogy a rendszer nemlineáris, hiszen elemi változás nem elemi, nagy változást eredményez. Másrészt jól érzékelteti a rendszer kezdeti feltételekre való roppant érzékenységét. Ez jelzés arra, hogy a rendszerünk kaotikus állapotba kerülhet.

4.3.2. Periodikus, átmeneti és kaotikus állapot

A különböző rendszerállapotok vizsgálatára a legalkalmasabb a bifurkációs diagram. Szabályozási paraméternek a toleranciakörök sugarainak arányát, r_o/r_i -t választva, a számított bifurkációs diagramban a hibaáramvektor valós részének, $\text{Re}\{v_e\}$ -nek a $t = nT$ időpontokban mintavételezett



4.18. ábra. Poincaré-térkép kaotikus állapotban (a ábra). Eredményvonallal körülhatárolt rész nagyítása (b ábra)

4.1. táblázat. Ablak-periodicitás

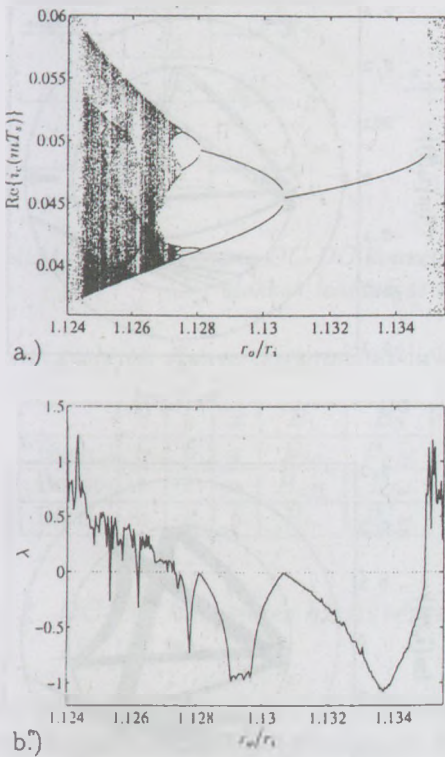
ábra	r_o/r_i	A szubharmonikusok rendszáma az egymást követő ablakokban		
4.15	1,416...1,421	1x3	1x5	1x7
4.16	1,421...1,4227	2x3	2x5	2x7
4.17	1,4227...1,42305	4x3	4x5	4x7

4.2. táblázat. Feigenbaum-állandó

$(r_o/r_i)_0$	$(r_o/r_i)_1$	$(r_o/r_i)_2$	$(r_o/r_i)_3$	δ
1,433	1,42543	1,423639	1,423238	4,4663
1,4212	1,4227	1,42305	1,423127	4,5454

értékeit rajzoltuk fel r_o/r_i függvényében, miközben r_i -t állandó értéken tartottuk (4.14 ábra). Itt T az inverter kapcsolási frekvenciájának, vagy ami ugyanaz, az \vec{e}'_s feszültségvektor frekvenciájának a T_s periódusidejéből $T = T_s/6$ módon számított hatod periódusidő. Az inverter és a motor-

modell hatoldalú szimmetriája miatt ugyanis az \vec{i}_e periódusideje T a normál periodikus állapotban, amely például az $r_o/r_i = 1,44$ környezetében áll fenn. r_o/r_i -t csökkentve valamivel $r_o/r_i = 1,43$ érték felett egy periódus-kétszerezési „scenario” kezdődik, először második, majd negyedik, nyolcadik stb. szubharmonikus állapot létesülésével, olyképpen, hogy a bifurkációs pontok egyre sűrűbben követik egymást (vö. a 3.2 és a 4.14 ábrákat). A periódus-kétszerezés tartománya átvezet a kaotikus tartományba, amely $r_o/r_i \cong 1,423$ értéktől balra található.

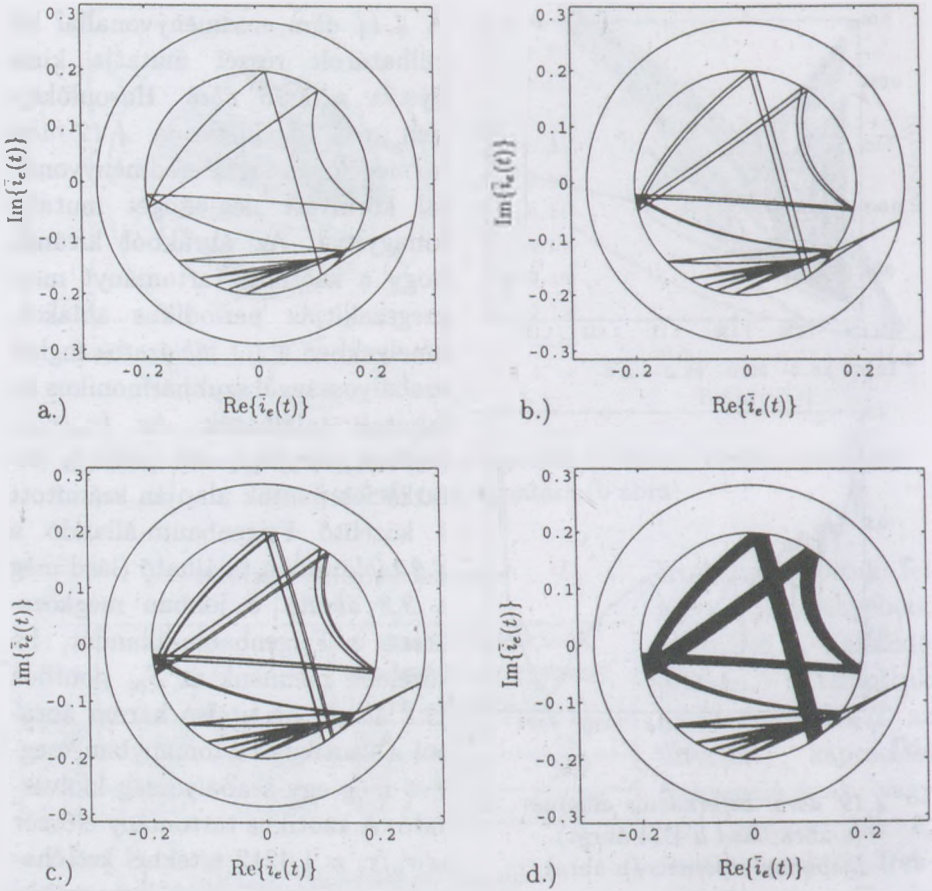


4.19. ábra. Bifurkációs diagram (a ábra, lásd a 4.14 ábrát).
 Ljapunov-exponens (b ábra)

sávhasadások követik, olyképpen, hogy a sávok mindig kétszereződnek, vagyis két sáv után négy, majd nyolc stb. keletkezik a periódus-kétszerezési „scenário”-hoz hasonlóan. Ezt hívják *sávhasadásnak*. Az érdekes és meglepő az, hogy a sávhasadás fellépéséhez tartozó r_o/r_i értékek közötti távolságokat is határértékben a Feigenbaum-állandó jellemzi (4.2 táblázat).

A Poincaré-térkép útján is bemutatatható a kaotikus állapot. Itt a hibaáram-vektor valós és képzetes részeinek a síkján, a Poincaré-síkon tüntetjük fel az \vec{i}_e vektor mintavételi pontokban felvett értékeit. Periodikus, illetve szubharmonikus állapotban egyetlen pont, illetve a szubharmonikus rendszámával megegyező számú pont jelenik meg a térképen. Kaotikus állapotban pontthalmazt kapunk (4.18a ábra). Az ábra eredményvonallal körülhatárolt négyszögét kinagyítva a 4.18b ábra mutatja. A rendszerünk

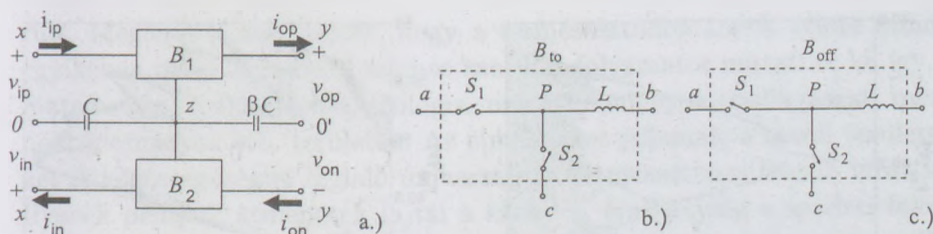
A 4.14 ábra eredményvonallal körülhatárolt részét mutatja kinagyítva a 4.15 ábra. Hasonlóképpen a 4.16, illetve a 4.17 ábra a megelőző ábra eredményvonallal körülvett négyszögét mutatja kinagyítva. Az ábrákból kitűnik, hogy a kaotikus tartományt megmetszik periodikus ablakok, amelyekben a 4.1 táblázatba foglalt szabályossággal szubharmonikus állapotok találhatóak. Az $(r_o/r_i)_0$, $(r_o/r_i)_1$, $(r_o/r_i)_2$ és $(r_o/r_i)_3$ bifurkációs pontok alapján számított δ közelítő Feigenbaum-állandó a 4.2 táblázatban található (lásd még a 3.2 ábrát). δ jobban megközelelténé a Feigenbaum-állandót, ha közelebb mennénk az S_∞ ponthoz (3.2 ábra). Az utolsó három ábrából a kaotikus tartományban meglevő még egy szabályosság kiolvasható. A kaotikus tartomány először az $r_o/r_i = 1,4212$ értéknél kettéhasad (4.2 táblázat), majd ezt további



4.20. ábra. Hibaáram-vektor trajektóriák. Periodikus (a ábra), 2. rendű (b ábra), 4. rendű (c ábra) szubharmonikus és kaotikus (d ábra) állapot

determinisztikus voltát tükrözi a pontthalmaz nagyfokú strukturáltsága, rendezettsége. A térkép pontjai a különös attraktorhoz tartoznak.

A 4.19a ábrában még egyszer feltüntettük a bifurkációs diagramot (lásd a 4.14 ábrát), míg a b ábrában a számított Ljapunov-exponens látható. $\bar{\lambda}$ a periodikus és a periódus-kétszerezési tartományban mindenhol negatív, a bifurkációs pontokat kivéve, ahol az értéke zérus. $\bar{\lambda}$ a kaotikus tartományban mindenhol pozitív, kivéve a periodikus ablakokat, ahol értéke zérus alá csökken.



4.21. ábra. Rezonáns DC-DC konvertercsalád alapkapsolása (a ábra). B_1 és B_2 blokkok lehetséges kapcsolásai (b és c ábrák)

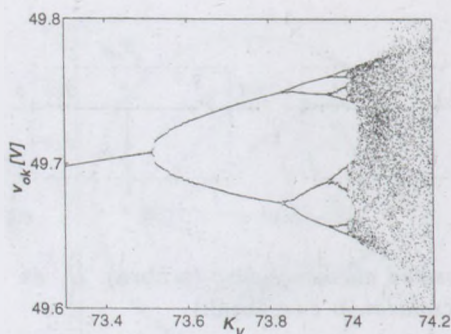
4.3. táblázat. Konverter-konfigurációk

	x	y	z	B_1	B_2
Buck	a	b	c	B_{to}	B_{off}
Boost	b	c	a	B_{off}	B_{to}
B&B	c	a	b	B_{to}	B_{off}

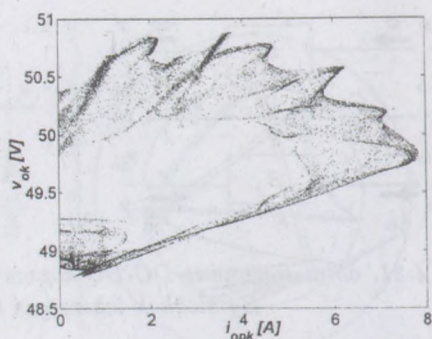
Végül a 4.20 ábrák hibaáramvektor trajektóriákat mutatnak, nevezetesen periodikus (a ábra), 2. rendű (b ábra)-, 4. rendű (c ábra) szubharmonikus és kaotikus (d ábra) állapotot.

4.4. DC-DC konverter hiszterézissávós feszültségszabályozása [16, 17, 18, 19, 20, 21]

Az általunk kifejlesztett 12 tagú kétcsatornás, rezonáns konvertercsalád egyik tagjának a hiszterézissávós feszültségszabályozásán mutatjuk be, hogy ez a változó struktúrájú rendszer is kaotikus állapotba juthat. A konvertercsalád alapkapsolását a 4.21a ábra mutatja. A pozitív, illetve negatív csatorna bemenő feszültsége v_{ip} , illetve v_{in} , kimenő feszültsége v_{op} , illetve v_{on} . A be-, illetve kimenő oldalon a kapcsolt kapacitás C , illetve βC , ahol β egy állandó. A B_1 és a B_2 blokkok lehetséges két kapcsolását a 4.21b, illetve c ábrák mutatják. Itt S_1 és S_2 egy irányban vezető vezérelt kapcsolók. Attól függően, hogy B_1 , illetve B_2 helyére B_{to} vagy B_{off} kerül beépítésre, és hogy az x - y - z kapcsokhoz a B_{to} és a B_{off} áramkörök a - b - c kivezetései milyen sorrendben csatlakoznak, megvalósítható buck, boost vagy buck&boost (B&B) konverter (4.3 táblázat), vagyis olyan egység, amely csak csökkenteni vagy csak növelni tudja a kimenő feszültséget, vagy mind a két feladatra alkalmas. Mind a három konvertertípus négy változatban valósítható meg. Egyrészt az S_2 kapcsolót D_2 diódával helyettesíthetjük, másrészt a βC kapacitás elhagyható oly módon, hogy a buck és a B&B kapcsolásokban rövidzárat, a boost kapcsolásban szakadást iktatunk a helyébe. Természetesen az így kiadódó 12 kapcsolás mindegyike



4.22. ábra. Bifurkációs diagram egy része



4.23. ábra. Poincaré-térkép

egyedi tulajdonságokkal is bír.

A konverterek két csatornáját működtethetjük szimmetrikus vagy aszimmetrikus, továbbá folytonos vagy szaggatott üzemben. Mindegyik esetben az energia közel szinuszos áramimpulzusok sorozata formájában érkezik a bemenet felől a kimenetre. A kimenő feszültség változtatása vagy az S_1 kapcsolók kapcsolási frekvenciájának, vagy az S_2 kapcsolók bekapcsolási szögének a változtatásával történik. A kapcsolások működésének a részletezésétől e helyen eltekintünk, és az irodalomra utalunk.

Bemutatjuk a buck konverter PWM útján kivitelezett kimenő feszültség szabályozására kapott bifurkációs diagram egy részét (4.22 ábra) és a Poincaré-térképét (4.23 ábra) kaotikus állapotban [21]. A bifurkációs diagramban v_{ok} a kimenő feszültségnek a PWM-hez használt fűrészfogregzés periódusidejével mintavételezett értéke, K_v a szabályozó hibajele és a PWM egység közötti erősítési tényező. Poincaré-síknak a v_{ok} kimenő feszültség és a mintavételezett i_{ok} kimenő áram síkját választottuk. Itt az S_2 kapcsolók diódával, a βC kapacitás rövidzárral volt helyettesítve. A két utolsó ábrával kapcsolatban hasonló megállapítások tehetők, mint amelyek elhangzottak a 4.14 és a 4.18 ábrákkal kapcsolatban.

5. Befejezés

Mintegy 300 évvel Newton *Principiájának* megjelenése után, a 20. század utolján új elmélet, a káoszelmélet, és új geometria, a fraktálgeometria született. Mind a kettő rövid időn belül a kutatások homlokterébe ke-

rült. Meglepetésként hatott, hogy a természettudományok szinte mind-egyikében rövid időn belül számos kaotikus folyamatot mutattak ki, így a matematika, fizika, kémia, biológia, orvostudományok, csillagászat, mérnöktudományok stb. területén. Az elméleteket jellemző, a távoli területeket is közös egységbe foglaló univerzalitás természetesen létezik most is. Ilyenek például: átmenetek fajtái a káoszba, érzékenység a kezdeti feltételekre, különös attraktor stb. vagy az univerzális numerikus jellemzők: Feigenbaum-konstansok, Ljapunov-exponens, fraktáldimenzió stb. Szóltunk a káoszelmélet és a fraktálgeometria találkozási pontjáról is.

A káoszelmélet bizonyos értelemben megváltoztatta természettudományos felfogásunkat is. A civilizációnk hajnalán oly csekélyek voltak az ismereteink, hogy magától értetődően a jövőkép maradéktalanul az ismeretlenség homályába veszett. Természettudományos ismereteink bővülésével, amely különösen az utóbbi évszázadokban gyorsult fel, kialakult egy nézet, amelyet talán legjobban Pierre Simon Laplace (1749–1827) fejezett ki a *Theorie Analytique des Probabilités* című, 1820-ban megjelent művében:

An intelligent being who knew for a given instant all forces by which nature is animated and possessed complete information on the state of matter of which nature consists – provided his mind were powerfull enough to analyse these data – could express in the same equation the motion of the bodies of the universe and the motion of the smallest atoms. Nothing would be uncertain for him, and he would see the future as well as the past at one glance.

Ez a nézet többé-kevésbé változatlan formában, hosszú ideig tartotta magát. A halálos dőfést a káoszelmélettől kapta azzal, hogy még azon determinisztikus rendszerek esetében, amelyekben pontosan ismerjük a törvényeket, s matematikai egzakt formába le tudjuk írni a jelenségeket, sem tudjuk egy idő múltán előre megmondani a rendszer állapotát. Lehetséges, hogy ez bizonyos értelemben visszatérést is jelent az ősember „természettudományos” világképéhez, de a spirálisnak egy sokkal magasabb szintjén, ahonnan a kitekintésünk összehasonlíthatatlanul messzebb fekvő távlatokig tart.

Zárszó

Végezetül köszönetemet kell kifejeznem mindenekelőtt két tanítómesternek, Dr. Kovács K. Pál akadémikusnak és Dr. Rácz Istvánnak, a műszaki tudomány doktorának, akik már nincsenek közöttünk. Külön köszönettel tartozom Dr. Tuschák Róbert és Dr. Vámos Tibor akadémikusoknak, akik különböző, de meghatározó módon befolyásolták életpályámat. Engedtessek meg, hogy a nagyszámú volt és jelenlegi munkatársaim, akiknek hálaival, köszönettel tartozom, csak névtelenül szerepeljenek itt. Meg kell azonban név szerint is említenem Sütő Zoltán volt és Dranga Oktávián, Hamar János jelenlegi doktoranduszaimat és Zabán Károly kollégámat, akik a székfoglalóm előkészítésében nagy segítségemre voltak.

Végül, de nem utolsósorban kiemelten szeretnék megemlékezni szüleimről, feleségemről, leányomról, akiknek megértést, segítséget, bátorítást, szeretetet, egyszóval mindent köszönhetek.

Irodalom

- [1] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. New York, USA: Oxford University Press, 1994.
- [2] F. C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1992.
- [3] H. O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals*. New York, USA: Springer-Verlag, 1992.
- [4] I. Rácz, J. Borka, K. Lupán, and D. Miklós, "Quasi-periodic dynamic behaviour of piecewise linear multi-parameter systems," *Periodica Polytechnica*, vol. 13, no. 3, pp. 205–219, 1969.
- [5] I. Rácz, "Tirisztoros kapcsolások szabályozástechnikai elmélete," *Elektrotechnika*, pp. 215–218, 1973.
- [6] F. Csáki, *Fejezetek a szabályozástechnikából, állapotegyenletek*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó, 1973.
- [7] T. Kapitaniak, *Chaos for Engineers*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1998.
- [8] R. van Buskirk and C. Jeffries, "Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators," *Phys. Rev. Journal, A* 31(5), pp. 3332–3357, 1985.
- [9] H. Haken, "At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point," *Physical Letters* 94A, pp. 71–74, 1983.

- [10] A. N. Kolmogorov, "A new invariant for transitive dynamical systems," *Dokl. Akad. Nank. SSSR* 119, pp. 861–864, 1958.
- [11] I. Nagy, O. Dranga, and E. Masada, "Study of subharmonic generation in a high frequency time-sharing inverter," *The Transactions of The Institute of Electrical Engineers of Japan, A Publication of Industry Applications Society*, vol. 120-D, pp. 574–580, Apr. 2000.
- [12] I. Nagy, O. Dranga, and E. Masada, "Bifurcations in a high frequency time-sharing inverter," in *EPE-PEMC 2000 International Conference*, (Košice, Slovak Republic), Sept. 5–7, 2000.
- [13] I. Nagy, Z. Sütő, L. Matakas Jr., and E. Masada, "Features of adaptive PWM explored by the theory of chaos," in *Proceedings of the 6th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'95)*, vol. 1, (Sevilla, Spain), pp. 1.013–1.018, Sept. 19–21, 1995.
- [14] H. Tsuboi and I. Vajda, eds., *Applied Electromagnetics and Computational Technology II*, vol. 16 of *Studies of Applied Electromagnetics and Mechanics*, ch. Z. Sütő and I. Nagy: Study of Chaotic and Periodic Behaviours of a Hysteresis Current Controlled Induction Motor Drive, pp. 233–244. Amsterdam, The Netherlands: IOS Press, 2000.
- [15] Z. Sütő, I. Nagy, and K. Zabán, "Nonlinear current control of three phase converter," in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE'98)*, vol. 2, (Pretoria, South Africa), pp. 353–358, July 7–10, 1998.
- [16] J. R. Wood, "Chaos: A real phenomenon in power electronics," *IEEE APEC'89 Record*, pp. 115–124, 1989.
- [17] I. Nagy, "Resonant dc-dc configurations," in *EPE'89 Third European Conference on Power Electronics*, vol. III., (Aachen, W.-Germany), pp. 1495–1500, 1989.
- [18] I. Nagy, J. Hamar, I. Dénes, and Z. Puklus, "Sliding mode control of a dc-dc dual channel resonant converter," in *Proceedings of PCIM 2000 Conference*, (Nürnberg, Germany), June 6–8, 2000.
- [19] I. Nagy, P. Korondi, and J. Hamar, "Design considerations of a two channel dc-dc resonant converter," in *PEMC'98*, vol. 2, (Prague, Czech Republic), pp. 2–85–2–90, Sept. 8–10, 1998.
- [20] I. Nagy, P. Korondi, Z. Vranycz, and E. Masada, "Ratio control of two dc power flows in a new resonant converter family," in *IPEMC'97*, vol. 2, (Hangzhou, China), pp. 609–614, Nov. 3–6, 1997.
- [21] I. Nagy and O. Dranga, "Bifurcation in a dual channel resonant dc-dc converter," in *ISIE'2000*, (Puebla, México), Dec. 4–8, 2000.

SZÉKFOGLALÓK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIAŊN 1995–1998 I–II. KÖTET

- Bartók Mihály: Térékémiai tényezők szerepe a fémkatalízisben
Bárdossy György: A radioaktív hulladék hazai elhelyezésének földtudományi alapjai
Farkas Tibor: Membránfoszfolipidek molekuláris összetétele és a testhőmérséklet
Ferge Zsuzsa: A civilizációs folyamat fenyegetettsége
Freund Tamás: Agykérgi neuronhálózatok szerkezete és működése
Görög Sándor: A gyógyszeranalitika szépségei
Hanák Péter: Modernizáció és antikapitalizmus Magyarországon
Horváth József: Nővényvírusok in vivo
Ihász Mihály: A pepticus fekélyek korszerű sebészeti kezelése
Kákosi László: Théba a Ptolemaiosz- és a római korban
Kálmán Alajos: Barangolások kristályrácsokban
Kulcsár Szabó Ernő: Költészet és dialógus
Kúnos György: Opio-melanokortin peptidek szerepe a vérkeringés agyi szabályozásában
Lipták András: Fehérje-szénhidrát kölcsönhatások
Makkai Mihály: A kategóriaelmélet szerepe a matematika megalapozásában
Marosi Sándor: A földrajzi táj kutatások összetettsége és alkalmazhatósága
Meskó Attila: Környezettudomány, környezeti geofizika
Méhes Károly: Régi és új módszerek az orvosi genetikában
Palánkai Tibor: Az integráció mérésének néhány elméleti-stratégiai kérdése
Pálinkás Gábor: Molekuláris oldatkémia
Palkovits Miklós: Agypályák – idegi hálózatok
Reményi Károly: Paradoxonok a tüzeléstechnikában
Rézler Gyula: Az arbitrállás szociológiája
Róna-Tas András: Honfoglalás és népalakulás a középkori Eurázsiaiban
Sajó András: A jogosultságok lehetősége
Sárközy András: Hibrid problémák a számelméletben
Solymos Rezső: Az erdészeti, fatermési és erdőnevelési kutatások eredményei és alkalmazásuk az erdőgazdasági gyakorlatban (1958–1998)
Somfai László: Kottakép és műalkotás
Szabadváry Ferenc: Magyar tudománytörténeti tabló, előtérben a kémia
Szakály Ferenc: Török kori történelmünk kritikus kérdései
Teplán István: Antitumor aktivitású peptidek
Terplán Zénő: A gépszervezetről
Tőke László: Szupramolekuláris kémia; koronaéterek
Venetianer Pál: A génszész műszerei: a restrikciós-modifikációs enzimek
Vékás Lajos: A szerződési szabadság alkotmányos korlátai
Vicsék Tamás: A természet geometriája
Zimányi József: A maganyagtól a kvarkanyagig a nehézion-fizikában

SZÉKFOGLALÓK 1995–1998, III–V. kötet

- Árkai Péter: A regionalis metamorfózis és jelentősége a Kárpát-medence kéregfejlődésében
Bauer Győző: Az oxidatív stressz és az antioxidánsok hatása a simaizomszövetekre
Berces Tibor: A gyokreakciók sokszínű világa: a reakciók kinetikája és termokémiaja
Brassai Zoltán: Vegytartalmi zavarok új kezelési lehetőségei
Csányi Vilmos: Uvelkedés, környezet, genek – etológiai tanulmányok
Dohy János: Biotechnológia és állattenyésztés – új eredmények, kihívások, kilátások
Fonyó Zsolt: Integrált vegyipari rendszerek folyamatszintézise
Friedrich Péter: Feherjék, enzimek, emlékezet
Gáspár Zsolt: A számítógépek hatása a tartószerkezetek mechanikájára
Géczy Barnabás: Kontinuitás, krízis, katasztrófa az ammoniteszek törzsejlődésében
Gratzer György: Hálóelméleti függetlenségi tételek
Harmathy Attila: A magyar polgári jogról 1999-ben
Kaszpra Ottó: Néhány hidraulikai probléma a vízellátásban
Katvani László: Differenciálegyenletek megoldásainak stabilitási tulajdonságai
Heszky László: Morfogenezis haploid és somatikus sejtekből in vitro
Kollósi Miklós: Kiroptikai spektroszkópia: változatok egy témára
Honti László: Az uráli/finnugor „ősnyelv”ről
Horváth János: Disztribúciós és topológikus vektorterek
Kiss Lajos: Az új európai víznév kutatás
Kosa László: A magyar néprajz 1945 után
Krisztó Gyula: Előd
Lámfalussy Sándor: Szerkezeti változások az európai pénzpiacra
Lőrincz Lajos: Összehasonlítás a közigazgatás kutatásában
Major György: Napsugárzás a légkörben és a felszínen
Nagy Béla: A háziállatok enterális colibacillosisai
Nagy Elemér: A klasszikus fizikától az anyagtudományig
Nagy István: Változó struktúrájú nemlineáris rendszerek
Nagy Tóth Ferenc: Fényhatásvizsgálat egysejtű zöldmoszatokon
Naray Szabó Gábor: Elektrosztatikus katalízis
Németh Judit: A nehézion fizika és asztrofizikai alkalmazásai
Orbán Miklós: Kémiai periodicitás időben és térben
Pápay József: Föld alatti gáztárolás porózus közetekben
Papp László: A legyek ritkaságáról
Péter Mihály: Néhány gomba- és baktériumfaj uvelkedése a létfeltételek alsó határára
Petrányi Győző: A szuppresszív immunreguláció alkalmazása a transzplantáció és a reprodukció immunológia klinikai gyakorlatában
Pleh Csaba: A relativizmus kérdései és a mai pszicholingvisztika
Salamon Miklós: Közetmechanika fejlődése – egyéni szemszögből
Sitkei György: A talaj–kerék kapcsolat néhány elméleti kérdése
Spät András: A kalcium jel és a mitokondrium működése
Szabad György: A parlamentáris kormányzati rendszer megteremtése, védelmezése és kockáztatása Magyarországon (1848–1867)
Szabó András: Alkotmány és büntetőjog
Szabó Miklós: Tumultus Gallicus
Szegedy Maszák Mihály: A Nyugat és a világirodalom
Szentes Tamás: Fejlődés, rendszerváltás és versenyképesség a globalizálódás korában
Tóth Klára: Szelektív érzékelők jelentősége a kémiai analízisben
Uray Zoltán: Sugársérülések mérséklése kémiai és biológiai anyagokkal
Urály György: Talajfolyamatok szabályozásának tudományos megalapozása
Varga János: Földeskü
Vaskovics László: Társadalmi modernizáció és a szülői szerepváltozás összefüggései
Vétes Attila: Fullerénvegyületek Mössbauer spektroszkópiája
Vizkelety András: A Leuveni Kódex magyar scriptorai
Zalai Ernő: Neumann János: klasszikus vagy neoklasszikus?