SZÉKFOGLALÓK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

HORVÁTH JÁNOS

# DISZTRIBÚCIÓK ÉS TOPOLOGIKUS VEKTORTEREK

MAGYAR · TUDOMÁNYOS · AKADÉMIA ·

1825

Szerkesztő
GLATZ FERENC

Olvasószerkesztő
Pótó János

ISBN 963 508 191 X
ISSN 1419-8959

Kiadja
a Magyar Tudományos Akadémia, 2000
Felelős kiadó: Szabó B. István
Kiadói szerkesztő: Burucs Kornélia
Nyomdai előkészítés: MTA Történettudományi Intézete kiadványcsoportja
Tördelő: Csányi Attila
Nyomdai munkálatok: AKAPRINT Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Freier László ügyvezető igazgató

Horváth János
az MTA külső tagja

# Disztribúciók és topologikus vektorterek

Elhangzott 1999. május 19-én

1. Laurent Schwartz 1944-ben fedezte föl a disztribúciókat. Legjobb talán, ha mindjárt emlékeztetek definíciójukra. Legyen $\Omega$ az $\mathbf{R}^n$ euklideszi térnek nyílt részhalmaza. Egy $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$ (vagy $\varphi : \Omega \to \mathbf{C}$) függvény Supp $\varphi$ tartóján az $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ halmaz lezárását értjük. Jelölje $\mathcal{D}(\Omega)$ azon $\varphi$ függvények vektorterét, amelyeknek tartója $\Omega$ kompakt részhalmaza, és amelyeknek minden rendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak. A parciális deriváltakra a $\partial^\alpha\varphi$ jelölést fogom használni, ahol $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ és $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ a derivált rendje.

Mármost az $\Omega$ halmazon definiált $T$ *disztribúció* olyan lineáris leképzés $\mathcal{D}(\Omega)$-ból az $\mathbf{R}$ vagy a $\mathbf{C}$ testbe, amelyre a következő feltétel teljesül:

Az $\Omega$ halmaz minden kompakt $K$ részhalmazához megadható egy pozitív $C_K$ szám és egy pozitív $m_K$ egész szám úgy, hogy

$$\left|T(\varphi)\right| \le C_K \max_{|\alpha| \le m_K} \max_{x \in \Omega} \left|\delta^\alpha \varphi(x)\right|$$

minden olyan $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ függvényre, melyre Supp $\varphi \subset K$.

Schwartz elméletét a dualitás nyelvén fogalmazta meg. Ha $\mathcal{D}(K)$-val jelöljük $\mathcal{D}(\Omega)$ azon alterét, amelyet a Supp $\varphi \subset K$ feltételnek eleget tevő $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ függvények alkotnak, akkor $\mathcal{D}(\Omega) = \cup_K \mathcal{D}(K)$.

Mint mindjárt részletezni fogom, mindegyik $\mathcal{D}(K)$ téren bevezethető egy ún. Fréchet-féle topológia és a $\mathcal{D}(\Omega)$ téren ezen topológiák induktív limesze.

Mármost a $T$ lineáris leképezés akkor disztribúció, ha erre az induktívlimesz-topológiára nézve folytonos.

Lars Hörmander az 1980-as években egy négykötetes művet írt lineáris parciális differenciálegyenletekről. Ennek első kötetét teljesen a Schwartz-féle disztribúcióknak szenteli. Hörmander azt írja, hogy elkerülte a „Fréchet-terek sorozatának induktívlimesz-topológiája" terminológiáját, nehogy bátorítsa azt a valamikor elterjedt tévhitet, amely szerint ennek ismerete lényeges a disztibúcióelmélet megértéséhez. Mások túlmentek ezen az álásponton, és azt állították, hogy a topologikus vektorterek teljesen fölöslegesek a disztribúcióelméletben. Egy különösen sértő hangú cikk kipellengérezi a hordózott tereket, amelyeket a gúny növelése érdekében az angol nyelvű szövegben francia nevükön mint „espaces tonnelés" említ. Célom megmutatni, hogy Hörmandernek igaza van ugyan, de a lokálisan konvex vektorterek – így a hordózott terek – igenis hasznosak a disztribúcióelméletben.

Legyen $E$ egy az $\mathbf{R}$ vagy a $\mathbf{C}$ test felett értelmezett vektortér. Ha az $E$ téren olyan topológiát definiáltunk, melyben az összeadás és a skalárissal való szorzás művelete, vagyis az $(x,y) \mapsto x + y$ és $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ $(x,y \in E,\ \lambda \in \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C})$ leképezések folytonosak, ekkor $E$ *topologikus vektortér*. Az ilyen topológiát az $E$ tér 0 origójának környezetei teljesen meghatározzák – minden más pont környezeteit eltolás útján kapjuk meg. Neumann János 1935-ben [10] bevezette a következő fogalmat: az $E$ topologikus vektortér akkor *lokálisan konvex*, ha minden pont mindegyik környezete (vagy a 0 pont minden környezete) tartalmazza a pontnak egy konvex környezetét.

Vezessünk be néhány hasznos elnevezést! Az $A \subset E$ halmaz *abszorbeálja* (elnyeli) a $B \subset E$ halmazt, ha létezik olyan pozitív $\lambda_0$ szám, melyre $B \subset \lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$, valahányszor $|\lambda| \geq \lambda_0$. Az $A \subset E$ halmaz *abszorbens* (elnyelő), ha minden véges halmazt abszorbeál. Szintén Neumann Jánostól származik a következő fogalom [10, Def. 5, 7. o.]: A $B \subset E$ halmaz *korlátos*, ha a 0 pont minden környezete abszorbeálja. Végül az $A \subset E$ halmaz *kiegyensúlyozott*, ha $\lambda A \subset A$ minden $\lambda$ skalárisra, melyre $|\lambda| \leq 1$.

Könnyen belátható, hogy egy topologikus vektortérben a 0 pont minden környezete abszorbens. Egy lokálisan konvex térben a 0 pont mindegyik környezete tartalmaz egy kiegyensúlyozott, konvex és zárt környezetet. Megfordítva, ha $\mathcal{U}$ az $E$ vektortér abszorbens, kiegyensúlyozott, konvex részhalmazainak egy családja, akkor azon halmazok, amelyek véges sok $\lambda U$ ($\lambda > 0, U \in \mathcal{U}$ halmaz közös részét tartalmazzák, a 0 pont egy környezetrendszerét alkotják egy lokálisan konvex topológiára nézve.

Ilyen $\mathcal{U}$ családot *szeminormák* egy családjával adhatunk meg, azaz olyan $p : E \to \mathbf{R}$ leképezések segítségével, melyekre $p(x) \leq 0, p(x + y) = p(x) + p(y)$

és $p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x)$ $(x,y \in E, \lambda \in \mathrm{R}$ vagy C). Valóban, az $\{x \in E : p(x) \leq 1\}$ halmaz abszorbens, kiegyensúlyozott és konvex. Így a fentebb bevezetett $\mathcal{D}(K)$ térben a topológiát a $p_\alpha(\varphi) = \max_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ $(\alpha \in \mathrm{N}^n)$ vagy a $p_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ által megadott szeminormák családja definiálja.

Mivel $p_m(\varphi) \neq 0$, valahányszor $\varphi \neq 0$, a $\mathcal{D}(K)$ tér Hausdorff-féle. De a $(p_m)$ család megszámlálható, aminek következtében $\mathcal{D}(K)$ topológiája metrizálható. Továbbá $\mathcal{D}(K)$ teljes, azaz benne minden Cauchy-sorozat konvergens. A metrizálható és teljes lokálisan konvex tereket nevezzük *Fréchet-terek*nek.

Legyen $(E_\gamma)$ lokálisan konvex vektortereknek egy családja, legyen $E$ egy vektortér, és minden $\gamma$ indexre legyen $j_\gamma$: $E_\gamma \to E$ lineáris leképezés. Ekkor értelmezhetjük az $E$ téren a *lokálisan konvex induktív limesz* topológiát mint a legfinomabb lokálisan konvex topológiát, amelyre a $j_\gamma$ leképezések folytonosak. Az $E$ térnek egy abszorbens, kiegyensúlyozott, konvex $V$ részhalmaza akkor környezete a 0 pontnak erre a topológiára nézve, ha minden $\gamma$ indexre $j_\gamma^{-1}(V)$ a 0 pont környezete az $E_\gamma$ térben. Mármost $\mathcal{D}(\Omega)$ topológiája a lokálisan konvex induktív limesze a $\mathcal{D}(K)$ terek topológiáinak a $\mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(\Omega)$ identikus leképezésekre vonatkozólag. Tehát egy lineáris $T$ leképezés $\mathcal{D}(\Omega)$-ból a skalárisok testébe (azaz egy lineáris alak) akkor disztribúció, ha a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér $\mathcal{D}'(\Omega)$ duális terébe, azaz a folytonos lineáris alakok vektorterébe tartozik.

A $\mathcal{D}(\Omega)$ tér esetében a helyzet tulajdonképpen egyszerűbb. Található ugyanis az $\Omega$ nyílt halmaz kompakt részhalmazainak olyan $(K_l)$ sorozata, amely növekvő, és $\Omega$ minden kompakt részhalmaza része valamelyik $K_l$ halmaznak. Ekkor a folytonos lineáris leképezések egy

$$\mathcal{D}(K_0) \to \mathcal{D}(K_1) \to \ldots \to \mathcal{D}(K_l) \to \ldots \to \mathcal{D}(\Omega)$$

sorozatát kapjuk, és $\mathcal{D}(\Omega)$ topológiája a $\mathcal{D}(K_l) \to \mathcal{D}(\Omega)$ identikus leképezések lokálisan konvex induktív limesze.

Tekintsük általánosan vektortereknek egy

$$E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_l \to \ldots$$

sorozatát és egy $E$ vektorteret, ahol mindegyik $j^l_{l+1}$: $E_l \to E_{l+1}$ lineáris leképezés injektív, minden $l$ indexre létezik egy $j^l$: $E^l \to E$ injektív lineáris leképezés, és $j^l = j^{l+1} \mathrm{o} j^l_{l+1}$. Tegyük még fel, hogy mindegyik $E_l$ Fréchet-tér, hogy $E = \cup_l j^l(E_l)$, és hogy a $j^l_{l+1}$leképezések folytonosak és nyíltak (azaz szigorú morfizmusok, más szóval: ha az $E^l$ teret azonosítjuk $j^l_{l+1}(E_l)$ képével, akkor $E_{l+1}$ az $E_l$ téren a saját topológiáját indukálja). Ekkor az $E$ téren a $j^l$ leképezések által meghatározott lokálisan konvex induktív limesz topológiát a „Fréchet-terek sorozatához tartozó szigorú lokálisan konvex induktív limesz” topológiának nevezzük.

Mármost Fréchet-terek sorozatának ilyen induktívlimesz-topológiájára három állítás érvényes:

a) $E$ Hausdorff-féle tér [4, 2.12, Corol. 1, 161. o.].

b) Ha $B$ az $E$ tér korlátos részhalmaza, akkor létezik egy $l$ index és az $E_l$ térnek egy korlátos $B_l$ részhalmaza úgy, hogy $j^l(B_l) = B$ [4, 2.12, Th. 2, 161. o.].

c) Az $E$ tér *teljes*, azaz az $E$ térben minden Cauchy-szűrő konvergens [4, 2.12, Corol., 164. o.] (Megjegyzés: A teljes topologikus vektortér fogalmát is Neumann János értelmezte először [10]. A tétel G. Köthétől származik; M. Valdivia egy különösen egyszerű bizonyítását adta [18, note 2, 246. o.].)

Mint mindjárt látni fogjuk, az első két állítás a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér esetében nagyon egyszerűen, közvetlenül is belátható. A harmadik állításnak, mely szerint a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér teljes, nincsen jelentősége a disztribúcióelmélet szempontjából. Metrizálható terekben a teljesség azért lényeges, mert az ilyen $E$ terekben érvényes R. Baire tétele: ha $E$ a zárt $F_n$ részhalmazok növekvő sorozatának egyesített halmaza, akkor valamelyik $F_n$ tartalmaz belső pontot. A $\mathcal{D}(\Omega)$ térre ez nem áll fenn, hiszen $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}(K_l)$ alterek egyesített halmaza, mindegyik $\mathcal{D}(K_l)$ zárt (mert teljes), és egyikben sincs belső pont [mert $\mathcal{D}(K_l) \neq \mathcal{D}(\Omega)$]. Ebből egyébként következik, hogy $\mathcal{D}(\Omega)$ nem metrizálható.

Ezek szerint Hörmandernek igaza van!

Lássuk most a beígért két bizonyítást!

A $\mathcal{D}(\Omega)$ tér Hausdorff-féle. Elöljáróban jegyezzük meg, hogy egy topologikus vektortér akkor Hausdorff-féle, ha minden $x \neq 0$ pontjához létezik az origónak egy környezete, amely nem tartalmazza az $x$ pontot (azaz eleget tesz a $T_1$ axiómának). Ha $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ és $\varphi_0(x_0) = \lambda \neq 0$ valamely $x_0$ pontban, akkor $V = \{\varphi \in \mathcal{D}\,(\Omega) : |\varphi(x)| \leq \frac{1}{2}|\lambda|,\ x \in \Omega\}$ 0-nak olyan környezete, amely nem tartalmazza a $\varphi_0$ függvényt.

Ha $B$ a $\mathcal{D}(\Omega)$ térnek korlátos részhalmaza, akkor létezik az $\Omega$ halmaznak olyan kompakt $K$ részhalmaza, hogy Supp $\varphi \subset$ K minden $\varphi \in B$ függvényre, azaz $B \subset \mathcal{D}(K)$ [és nyilván $B$ korlátos is $\mathcal{D}(K)$-ban]. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Induktívan megadható az $\Omega$ halmaz kompakt részhalmazainak olyan szigorúan növekvő $(K_l)$ sorozata, hogy $\Omega = \cup K_l$, és minden $l$ indexhez létezik egy $\varphi_l \in B$ függvény és egy $x_l \in K_l \backslash K_{l-1}$ pont úgy, hogy $\varphi_l(x_l) = \lambda_l \neq 0$. Ekkor az abszorbens, kiegyensúlyozott, konvex
$V = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : x \in K_l \backslash K_{l-1} \Rightarrow |\varphi\,(x)| \leq \frac{1}{\lambda}|\lambda_l|\}$ halmaz a 0 pont környezete a $\mathcal{D}(\Omega)$ térben. Ha ugyanis $\mu_m = \min_{l \leq m} \frac{1}{l}\,|\lambda_l|$, akkor $V \cap \mathcal{D}(K_m)$ tartalmazza a 0 pont $\{\varphi \in \mathcal{D}(K_m) : x \in K_m \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \mu_m\}$környezetét a $\mathcal{D}(K_m)$ *térben.* Másrészt tegyük fel, hogy $B \subset \lambda V$ valamely $\lambda > 0$ számra. Az $l$ indexet elég nagyra választva $\frac{\lambda}{l} < 1$, és így $|\varphi_l(x_l)| = |\lambda_l| \leq \frac{\lambda}{l}|\lambda_l| < |\lambda_l|$, ami lehetetlen.

2. Az egyenletes korlátosság klasszikus tétele így mondható ki: Legyen $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ az $E$ Banach-térben definiált lineáris alakok egy családja, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

a) minden $\gamma \in \Gamma$ indexre létezik egy olyan $M_\gamma > 0$ szám, hogy $|u_\gamma(x)| \leq M_\gamma \|x\|$, valahányszor $x \in E$;

b) minden $x \in E$ ponthoz létezik olyan $N(x) > 0$ szám, hogy $|u_\gamma(x)| \leq N(x)$, valahányszor $\gamma \in \Gamma$.

Ekkor érvényes a következő állítás:

c) létezik egy $M > 0$ szám, amelyre $|u_\gamma(x)| \leq M\|x\|$, valahányszor $x \in E$ és $\gamma \in \Gamma$.

Az (a) feltétel egyszerűen azt jelenti, hogy mindegyik $u_\gamma$ folytonos, vagyis az $E'$ duális térhez tartozik.

Ahhoz, hogy a (b) feltételt más módon fejezzük ki, tekintsünk általánosan egy Hausdorff-féle lokálisan konvex $E$ vektorteret és ennek $E'$ duális terét. Az $E'$ téren a $\sigma(E', E)$ *gyenge* topológiát a $p_x(u) = |u(x)|$ szeminormák definiálják, ahol $x$ befutja az $E$ teret ($u \in E'$). Ekkor (b) azt mondja ki, hogy $\{u_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ korlátos a $\sigma(E', E)$ topológiában.

Végül (c) azzal ekvivalens, hogy az $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ család egyformán egyenletesen folytonos, azaz minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik a 0 pontnak egy $V$ környezete úgy, hogy $|u_\gamma(x) - u_\gamma(y)| \leq \varepsilon$, valahányszor $\gamma \in \Gamma$ és $x - y \in V$.

Az egyenletes korlátosság tétele tehát az az állítás (amely Banach-terekre igaz), amely szerint egy lokálisan konvex Hausdorff-féle $E$ tér $E'$ duálisában minden gyengén korlátos halmaz egyformán egyenletesen folytonos. Jellemezni akarjuk magának az $E$ térnek egy tulajdonságával azokat a tereket, amelyekre az egyenletes korlátosság tétele érvényes. Ebből a célból bevezetünk egy fogalmat, amely lényegében Farkas Gyulától származik (a terminológiát a projektív geometria sugalmazta). Egy $A \subset E$ halmaz polárisan az $A^\circ = \{u \in E' : x \in A \Rightarrow |u(x)| \leq 1\}$ halmazt értjük. Hasonlóképpen ha $B \subset E'$, akkor ennek polárisa $B_\circ = \{x \in E : u \in B \Rightarrow |u(x)| \leq 1\}$. Az ún. Hahn–Banach tétel (amelyet Riesz Frigyes és Eduard Helly már 1912 körül ismert [2]) közvetlen következménye, hogy $(A^\circ)_\circ$ az $A \subset E$ halmaz kiegyensúlyozott, konvex, zárt burka.

Könnyű belátni, hogy a $B \subset E'$ halmaz akkor és csak akkor egyformán egyenletesen folytonos, ha $B \subset V^\circ$, ahol $V$ az $E$ tér origójának egy környezete.

Ahhoz, hogy az $E'$ tér $\sigma(E', E)$-korlátos halmazait hasonló módon írhassuk le, a következő, Bourbakitól származó elnevezést kell bevezetnünk: Az $E$ tér egy $H$ részhalmazát *hordó*nak nevezzük, ha abszorbens, kiegyensúlyozott, konvex és zárt. A szó Pierre Samueltől származik, és ha meggondoljuk, hogy

„kiegyensúlyozott" („équilibré") régebben „cerclé" volt franciául, ami azt jelenti, hogy „fémpántokkal körülvett", akkor az elnevezés valóban találó, mert egy hordó abszorbens (abszorbeálja a beléje öntött bort), zárt (különben a bor kifolyna), és szemmel láthatólag konvex. Mármost az $E'$ tér egy $B$ halmaza akkor és csak akkor gyengén korlátos, ha $B \subset H^{\circ}$, ahol $H$ hordó az $E$ térben.

Ezek szerint az egyenletes korlátosság tétele akkor és csak akkor érvényes, ha az $E$ térben minden hordó a 0 pontnak környezete: az ilyen tereket nevezzük *hordózott* tereknek. (Jegyezzük meg, hogy egy lokálisan konvex térben a 0 pont minden környezete tartalmaz egy környezetet, amely hordó!)

Az egyenletes korlátosság tételének ilyen átfogalmazása segítségével könnyen be tudjuk bizonyítani, hogy terek bizonyos osztályaira érvényes.

Minden Fréchet-tér hordózott. Legyen ugyanis $H$ hordó az $E$ Fréchet-térben. Ekkor $E = \bigcup nH$, mivel $H$ abszorbens. Az $x \mapsto nx$ ($n \in \mathbf{N}$) leképezés az $E$ térnek önmagára való homeomorfizmusa, így mindegyik $nH$ halmaz zárt. Baire fentebb idézett tételéből következik, hogy valamely $nH$ halmaz, és így $H$ maga is, tartalmaz egy belső $x_0$ pontot. Mivel $H$ kiegyensúlyozott, a $-x_0$ pont is belső pontja $H$-nak. Végül $H$ konvexitásából könnyen folyik, hogy $0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}(-x_0)$ is belső pontja $H$-nak, quod erat demonstrandum.

Még egyszerűbben látható be a következő állítás: Legyen $(E_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ hordózott terek egy családja és $j_\gamma : E_\gamma \to E$ lineáris leképezés egy $E$ vektortérbe. Ekkor az $E$ tér hordózott a lokálisan konvex induktív limesz topológiájára vonatkozólag. Valóban, legyen $H$ hordó $E$-ben. Mindegyik $\gamma$ indexre $j_\gamma^{-1}(H)$ hordó az $E_\gamma$ térben, és így a 0 pont környezete. Tehát $H$ a 0 pont környezete az $E$ térben.

Ezek szerint a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér hordózott, aminek messzemenő folyományai vannak a disztribúciók elméletében. Például legyen $(T_n)$ a disztribúciók egy sorozata, és tegyük fel, hogy $(T_n(\varphi))$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ függvényre konvergens. Ekkor a $\varphi \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)$ leképezés disztribúció [3, Theorem 2.1.8., 38. o.]. Így $\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\frac{dx}{x}$ disztribúciót definiál az $\mathbf{R}$ számegyenesen, amelyet v. p. $(1/x)$-szel jelölünk, és az $1/x$ függvény *Cauchy-féle főértékének* nevezünk.

Általánosabban legyen $\Lambda$ a komplex számsík nyílt halmaza és $\Lambda_0$ a $\Lambda$ halmaz nyílt részhalmaza. Tegyük fel, hogy mindegyik $\lambda \in \Lambda_0$ értéknek megfelel egy $T_\lambda$ disztribúció, és hogy minden $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ függvényre a $\lambda \mapsto T_{\lambda(\varphi)}$ leképezés holomorf $\Lambda_0$ -ban. Ha ezeknek a függvényeknek van analitikus folytatásuk a $\Lambda$ halmazba, akkor disztribúció az a leképezés, amely $\varphi$-hez $T_\lambda(\varphi)$ analitikus folytatásának a $\lambda \in \Lambda$ pontban vett értékét rendeli hozzá [5; 6]. Ez a háttere például Riesz Marcell általánosított potenciáljának [8].

3. A $\mathcal{D}(\Omega)$ térnek még egy nevezetes tulajdonsága van, ti. az Ascoli–Arzelà-tételből következik, hogy minden korlátos zárt részhalmaza kompakt, azaz ún. *Montel-féle tér*. (Riesz Frigyesnek egy híres tétele alapján egy Banach-térnek csak akkor lehet ez a tulajdonsága, ha dimenziója véges.)

Hogy ennek jelentőségét belássuk, megint néhány fogalmat kell bevezetnünk. Legyen $E$ lokálisan konvex Hausdorff-tér. Az $E$ tér $E'$ duálisán a $\beta$ ($E'$, $E$) *erős* topológiát úgy definiáljuk, hogy $W$ a 0 pontnak környezete, ha az $E$ tér valamely korlátos $B$ halmazára $W \supset B^\circ$. Jelöljük $E'_\beta$-val a duális teret az erős topológiával felruházva és $E''$-vel az $E'_\beta$ tér duálisát, az $E$ tér ún. *biduálisát*. Az $x \mapsto \tilde{x}$ leképezés az $E$ térből az $E''$ térbe az $\tilde{x}(x') = x'(x)$ egyenlőséggel van definiálva ($x' \in E'$); ez lineáris és injektív. Az $E$ teret akkor nevezzük *reflexív*nek, ha az $x \mapsto \tilde{x}$ leképezés szürjektív és homeomorfizmus, hacsak az $E''$ téren a $\beta(E'', E'_\beta)$ topológiát tekintjük. Az $E$ tér reflexív, ha hordózott és minden korlátos, gyengén zárt részhalmaza gyengén kompakt. Természetesen a $\sigma(E, E')$ gyenge topológiát az $E$ téren az $x \mapsto |x'(x)|$ szeminormák definiálják, ahol $x' \in E'$.

Egy lokálisan konvex Hausdorff-féle $E$ teret akkor nevezünk *Montel-tér*nek, ha hordózott és benne minden zárt, korlátos halmaz kompakt. George Mackey egy tétele [4, chap. 3, 5, Theorem 3] alapján minden $\sigma(E, E')$-korlátos halmaz az $E$ tér eredeti topológiájában is korlátos, amiből tüstént következik, hogy minden Montel-tér reflexív.

Ezek szerint a $\mathcal{D}'(\Omega)$ tér duálisa a $\mathcal{D}(\Omega)$ tér. A $\mathcal{D}(\Omega)$ teret azonban a $\mathcal{D}'(\Omega)$ tér alterének tekinthetjük, ha egy $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ függvényhez hozzárendeljük a $T_\psi : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x)\psi(x)\,dx$ disztribúciót. A $\mathcal{D}(\Omega)$ tér reflexivitásából folyik, hogy $\mathcal{D}(\Omega)$ sűrű a $\mathcal{D}'(\Omega)$ térben. Legyen ugyanis $\psi \in \mathcal{D}''(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ olyan, hogy $T_\varphi(\psi) = 0$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ függvényre. Ekkor $T_{\bar\psi}(\psi) = \int |\psi(x)|^2\,dx = 0$, és így $\psi = 0$. Mármost az állítás a Hahn–Banach-tétel következménye.

4. Legyen $E$ és $F$ két vektortér ugyanazon test felett. Mint ismeretes, a két tér *tenzorszorzatán* egy $(E \otimes F, \otimes)$ párt értünk, ahol $E \otimes F$ vektortér, $\otimes : E \times F \to E \otimes F$ bilineáris leképezés, és a következő teljesül: ha $B : E \times F \to G$ bilineáris leképezés egy harmadik $G$ vektortérbe, akkor létezik egy és csak egy lineáris $L : E \otimes F \to G$ leképezés úgy, hogy $B = L \circ \otimes$. Ez a tulajdonság a tenzorszorzatot izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza. Ha $x \in E$, $y \in F$, akkor a $\otimes(x, y)$ elemet $x \otimes y$-nal szokás jelölni, és $E \otimes F$ elemei $\Sigma(x_i \otimes y_i)$ alakban írhatók.

Legyen $X$ az $\mathbf{R}^m$ tér és $Y$ az $\mathbf{R}^n$ tér nyílt részhalmaza. A $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ tér elemei az $(x, y) \mapsto \Sigma\varphi_i(x)\psi_i(y)$ alakú függvények, ahol

$x \in X, y \in Y, \varphi_j \in \mathcal{D}(X), \psi_j \in \mathcal{D}(Y)$. Ha $S \in \mathcal{D}'(X), T \in \mathcal{D}'(Y)$, akkor a $(\varphi, \psi) \mapsto S(\varphi)T(\psi)$ leképezés bilineáris alak a $\mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(Y)$ téren. Ennek megfelel egy $S \otimes T$-vel jelölt lineáris alak a $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ téren, azaz $(S \otimes T)(\Sigma\varphi_j\psi_j) = \Sigma S(\varphi_j)T(\psi_j)$. A $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ tér altere a $\mathcal{D}(X \times Y)$ térnek, és rajta $S \otimes T$ folytonos a $\mathcal{D}(X \times Y)$ által indukált topológiára nézve. Másrészt $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ sűrű a $\mathcal{D}(X \times Y)$ térben [4, chap. 4, 8, Proposition 1], így az $S \otimes T$ lineáris alakot folytonosság útján kiterjesztve nyerjük az $S \otimes T \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ disztribúciót.

Hörmander nem vezet be topológiát a $\mathcal{D}(\Omega)$ téren, így nála nincs értelme annak, hogy $\mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(Y)$ sűrű a $\mathcal{D}(X \times Y)$ térben. A tenzorszorzatot kerülő úton definiálja, felhasználva a konvolúció fogalmát, amelyről alább lesz szó.

Minden $T \in \mathcal{D}(X \times Y)$ disztribúció egy $\mathcal{K}_T$ folytonos lineáris leképezést definiál a $\mathcal{D}(X)$ térből a $\mathcal{D}'(Y)$ térbe. Ezt a $(\mathcal{K}_T\varphi)(\psi) = T(\varphi \otimes \psi)$ összefüggés adja meg, $\varphi \in \mathcal{D}(X), \psi \in \mathcal{D}(Y)$. Mivel ezt a kifejezést szimbolikusan az $\int\int T(x, y)\varphi(x)\psi(y)\, dx\, dy$ alakban lehet írni, a $T$ disztribúciót a $\mathcal{K}_T$ kifejezés *magjának* nevezik. Schwartz nevezetes magtétele azt mondja ki, hogy ha $\mathcal{K}$ folytonos lineáris leképezés a $\mathcal{D}(X)$ térből a $\mathcal{D}'(Y)$ térbe, akkor létezik egy és csak egy $T \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ mag, amelyre $\mathcal{K} = \mathcal{K}_T$.

Most átadom a szót Laurent Schwartznak, akinek hallatlanul érdekes önéletrajzából idézek [15, 293. o.]:

„Kellett egy disszertációtémát találni [Grothendieck számára]. Ajánlottam neki egyet 1952 tavaszán, közvetlenül azelőtt, hogy a nyarat Brazíliában töltöttem: valamilyen jó topológiát értelmezni az $E$, $F$ lokálisan konvex terek $E \otimes F$ tenzorszorzatán. Akkor kezdtem megírni a vektorértékű disztribúciókat, és világos volt, mi a jó topológia a $\mathcal{D}'(F) = \mathcal{L}(\mathcal{D}; F)$ téren (a $\mathcal{D}$-ből $F$-be vezető folytonos lineáris leképezések tere) úgy, hogy jó topológiát indukáljon a $\mathcal{D}' \otimes F$ sűrű altéren, és $\mathcal{D}'(F)$ teljes burka legyen $\mathcal{D}' \otimes F$-nek erre a topológiára vonatkozólag. De nem jutottam igazán valamire, bizonyítékaként annak, hogy még nem kezeltem jól a topologikus vektortereket. Grothendieck volt a megfelelő ember arra, hogy egy ilyen tenzortopológiát találjon. Július végén egy nagyon kiábrándult levelet kaptam tőle Brazíliában: $E \otimes F$-en két lokálisan konvex topológia is létezik, egyik éppen olyan természetes, mint a másik, és különbözőek! Tehát itt nem lehet semmi érdekeset csinálni. Nem tudtam mit válaszolni neki. Pedig $D' \otimes F$-en egyetlen szóba jövő topológia volt. De nehézségek és veszteségek győzelmek forrásai lehetnek. Két héttel később egy diadalmas levelet kaptam: a két topológia megyezik $\mathcal{D}' \otimes F$ esetében. Léteznek lokálisan konvex $E$ terek, amelyeket »nukleáris«-nak nevezett el úgy, hogy minden $F$-re megegyezik a két topológia $E \otimes F$-en. Minden világos lett. A $\mathcal{D}'$ tér nukleáris. A nukleáris szó onnan ered, hogy ha $F$ egy másik $\mathcal{D}'$ tér, akkor így meg lehet kapni a magtételt, amelyet az 1950-es nemzetközi matematikai kongresszuson adtam elő."

A magtételnek a nukleáris terek elméletére épített bizonyítása megtalálható Schwartz nagy értekezésében [14, 93. o.] és F. Treves könyvében [17, No. 51, 531. o.]. A tételre többen (Bogdanowicz, Dieudonné, Ehrenpreis, Gask, Hörmander [3, 5.2, I. 129. o.]) találtak elemi bizonyításokat, de úgy érzem, ha valaki, aki funkcionálanalízissel foglalkozik, nem ismeri a nukleáris tereket, akkor olyan, mint egy számelmélet-specialista, aki csak a prímszámtétel *Erdős-Selberg*-féle bizonyítását ismeri, de a Riemann-féle $\zeta$-függvényt nem.

5. Legyen $f$ és $g$ két, az $L^1(\mathbf{R}^n)$ térbe tartozó függvény. A két függvény $f*g$ konvolúcióján az $(f*g)(x)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ révén definiált függvényt értjük, amely szintén $L^1(\mathbf{R}^n)$-be tartozik. A fentiekhez hasonlóan minden $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ függvényhez egy $T_f\in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ disztribúciót rendelhetünk hozzá, melyre $T_f(\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)f(x)\,dx$. Az $f*g$ függvény által definiált disztribúcióra érvényes a

$$T_{f*g}(\varphi)=\int\int\varphi(x)f(x-y)g(y)\,dx\,dy=\int\int f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy$$

összefüggés. Ez természetessé teszi az $S$ és $T$ disztribúciók $S*T$ konvolúciójának az $(S*T)(\varphi)=(S\otimes T)(\varphi^\Delta)$ képlettel való definiálását, ahol $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ és $\varphi^\Delta(x,y)=\varphi(x+y)$. Ez azonban sajnos lehetetlen, mert $\varphi^\Delta$ tartója az $\mathbf{R}^{2n}$ térben csak akkor kompakt, ha $\varphi$ identikusan eltűnik.

Hogy a csávából kikerüljünk, függvényeknek egy új, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$-nél nagyobb, lokálisan konvex terét kell bevezetnünk. Legyen $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ azon függvényekből alkotott vektortér, amelyeknek bármilyen rendű deriváltjai léteznek, folytonosak és korlátosak. A $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ tér topológiáját a $\varphi\mapsto\max_{|\alpha|\le m}\sup_x|\partial^\alpha\varphi(x)|$ szeminormák családjával értelmezzük ($m\in\mathbf{N}$). Továbbá legyen $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$ a $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ tér azon altere, amelynek elemei az olyan függvények, amelyek deriváltjaikkal együtt eltűnnek a végtelenben, azaz olyanok, hogy minden $\alpha\in\mathbf{N}^n$-hez és $\varepsilon>0$-hoz létezik egy kompakt $K$ halmaz $\mathbf{R}^n$-ben úgy, hogy $|\partial^\alpha\varphi(x)|\le\varepsilon$, valahányszor $x$ a $K$ halmazon kívül van. A $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$ teret a $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ topológiája által indukált topológiával ruházzuk fel. Ekkor a $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ térből a $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$ térbe vezető identikus leképezés folytonos, és $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ sűrű $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$-ben. Így a $B_0(\mathbf{R}^n)$ tér $B_0'(\mathbf{R}^n)$duálisának minden eleme egy és csak egy megszorítást ad a $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ térre, vagyis az így nyert $\mathcal{B}_0'(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ leképezés injektív. Ennek folytán $\mathcal{B}_0'(\mathbf{R}^n)$ elemeit bizonyos disztribúcióknak, az *integrálható* disztribúcióknak fogjuk tekinteni. Mindjárt meglátjuk, mi a jogcím erre az elnevezésre.

Legyen $T \in \mathcal{B}'_0(\mathbf{R}^n)$ *és* $\psi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. Ekkor lehet definiálni a $T(\varphi)$ kifejezést [1]. Sőt $T \to T(\psi)$ folytonos lineáris alak a $\mathcal{B}'_0(\mathbf{R}^n)$ téren, és minden folytonos lineáris alakot egy $\psi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ függvény határoz meg ezen a módon. Így $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ a $\mathcal{B}'_0(\mathbf{R}^n)$ tér duálisa és $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^n)$ biduálisa. Ha **1**-gyel jelöljük azt az állandó függvényt, amely minden pontban az 1 értéket veszi fel, akkor értelme van a $T(\mathbf{1})$ kifejezésnek, amelyet a $T \in \mathcal{B}'_0(\mathbf{R})$disztribúció *integrál*jának nevezünk, és amelyre néha az $\int T$ jelölést használjuk.

Mármost azt mondjuk, hogy két disztribúció, $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, konvolválható [7], ha minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ függvényre $\varphi^\Delta \cdot (S \otimes T)$ integrálható, azaz a $\mathcal{B}'_0(\mathbf{R}^{2n})$ térbe tartozik, és ekkor az $S * T$ konvolúciót az

$$(S*T)(\varphi) = \varphi^\Delta \cdot (S \otimes T)(\mathbf{1}) = \int \varphi^\Delta \cdot (S \otimes T)$$

képlettel definiáljuk.[1] Ez a definíció tartalmazza a konvolúció összes korábbi esetét, például azt, amikor az $S$ és $T$ disztribúciók egyikének kompakt a tartója,[2] vagy $S = f \in L^p(\mathbf{R}^n), T = g \in L^q(\mathbf{R}^n)$ és $1/p + 1/q \geq 1$.

Az $S * T$ konvolúció definíciójának több változata van, amelyekre nézve utalok Shiraishi [16] és Roider [12] cikkeire. Végül meg akarom említeni, hogy (akárcsak a magtétel esetében) néha a lokálisan konvex terek mélyebb tulajdonságaira van szükség. Példa erre N. Ortner és P. Wagner szép cikke [11], amely a *bornologikus, ultrabornologikus* és *disztingvált* tér fogalmát használja, vagy saját [9] dolgozatom, amelyben disztingvált terek és Pták homeomorfizmustétele szerepelnek.

1 Egy $T$ disztribúció és egy végtelen sokszor differenciálható $\psi$ függvény $\psi \cdot T$ szorzatát a $(\psi \cdot T)(\varphi) = T(\psi\varphi)$ képlet definiálja, ahol $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2 Azt mondjuk, hogy $T = 0$ az $U \subset \Omega$ nyílt halmazban, ha $T(\varphi) = 0$, valahányszor Supp $\varphi \subset U$; a $T$ disztribúció tartója komplementer halmaza a legnagyobb nyílt halmaznak, amelyben $T$ zérus.

# Irodalom


[1] Dierolf, P., Voigt, J.: Convolution and S'-convolution of distributions. *Collect. Math.*, 29, 1978, 185–196.

[2] Fuchssteiner, B., Horváth, J.: Die Bedeutung der Schnitteigenschaften beim Hahn–Banachschen Satz. *Jahrbuch Überblicke Mathematik,* 1979, 107–121.

[3] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators.* Springer, 1983–1985.

[4] Horváth, J.: *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison–Wesley, 1966.

[5] Horváth, J.: Finite parts of distributions. In *Linear Operators and Approximation, Proceedings of the Conference held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, Black Forest, August 14–22, 1971.* Eds. P. L. Butzer, J.-P. Kahane and B. Sz.-Nagy. Birkhäuser, 1972. 142–158.

[6] Horváth, J.: Distribuciones definidas por prolongación analítica. *Rev. Colombiana Mat.*, 8, 1974, 47–95.

[7] Horváth, J.: Sur la convolution des distributions. *Bull. Sci. Math.* (2), 98, 1974, 183–192.

[8] Horváth, J.: Composition of hypersingular integral operators. *Appl. Anal.*, 7, 1978, 171–190.

[9] Horváth, J.: Espaces de fonctions localement intégrables et de fonctions intégrables à support compact. *Rev. Colombiana Math.*, 21, 1987, 167–186.

[10] Neumann, J. von: On complete topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37, 1935, 1–20.

[11] Ortner, N., Wagner, P.: Applications of weighted $D_{L^p}'$-spaces to the convolution of distributions. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 37, 1989, 579–595.

[12] Roider, B.: Sur la convolution des distributions. *Bull. Sci. Math.* (2), 100, 1976, 193–199.

[13] Schwartz, L.: *Théorie des distributions.* Hermann, 1966.

[14] Schwartz, L.: Théorie des distributions à valeurs vectorielles (I). *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* 7, 1957, 1–141.

[15] Schwartz, L.: *Un Mathématicien aux Prises avec le Siècle.* Odile Jacob, 1997.

[16] Shiraishi, R.: On the definiton of convolutions for distributions. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 23, 1959, 19–32.

[17] Treves, F.: *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press, 1967.

[18] Valdivia, M.: On $B_r$-completeness. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* 25, fasc. 2, 1975, 235–248.

# SZÉKFOGLALÓK
## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN 1995–1998
## I–II. KÖTET

Bartók Mihály: Térkémiai tényezők szerepe a fémkatalízisben
Bárdossy György: A radioaktív hulladék hazai elhelyezésének földtudományi alapjai
Farkas Tibor: Membránfoszfolipidek molekuláris összetétele és a testhőmérséklet
Ferge Zsuzsa: A civilizációs folyamat fenyegetettsége
Freund Tamás: Agykérgi neuronhálózatok szerkezete és működése
Görög Sándor: A gyógyszeranalitika szépségei
Hanák Péter: Modernizáció és antikapitalizmus Magyarországon
Horváth József: Növényvírusok in vivo
Ihász Mihály: A pepticus fekélyek korszerű sebészi kezelése
Kákosy László: Théba a Ptolemaiosz- és a római korban
Kálmán Alajos: Barangolások kristályrácsokban
Kulcsár Szabó Ernő: Költészet és dialógus
Kunos György: Opio-melanokortin peptidek szerepe a vérkeringés agyi szabályozásában
Lipták András: Fehérje-szénhidrát kölcsönhatások
Makkai Mihály: A kategóriaelmélet szerepe a matematika megalapozásában
Marosi Sándor: A földrajzi tájkutatások összetettsége és alkalmazhatósága
Meskó Attila: Környezettudomány, környezeti geofizika
Méhes Károly: Régi és új módszerek az orvosi genetikában
Palánkai Tibor: Az integráció mérésének néhány elméleti-stratégiai kérdése
Pálinkás Gábor: Molekuláris oldatkémia
Palkovits Miklós: Agypályák – idegi hálózatok
Reményi Károly: Paradoxonok a tüzeléstechnikában
Rézler Gyula: Az arbitrálás szociológiája
Róna-Tas András: Honfoglalás és népalakulás a középkori Eurázsiában
Sajó András: A jogosultságok lehetősége
Sárközy András: Hibrid problémák a számelméletben
Solymos Rezső: Az erdészeti, fatermési és erdőnevelési kutatások eredményei és alkalmazásuk az erdőgazdasági gyakorlatban (1958–1998)
Somfai László: Kottakép és műalkotás
Szabadváry Ferenc: Magyar tudománytörténeti tabló, előtérben a kémia
Szakály Ferenc: Török kori történelmünk kritikus kérdései
Teplán István: Antitumor aktivitású peptidek
Terplán Zénó: A gépszerkezettanról
Tőke László: Szupramolekuláris kémia; koronaéterek
Venetianer Pál: A génsebész műszerei: a restrikciós-modifikációs enzimek
Vékás Lajos: A szerződési szabadság alkotmányos korlátai
Vicsek Tamás: A természet geometriája
Zimányi József: A maganyagtól a kvarkanyagig a nehézion-fizikában

# SZÉKFOGLALÓK 1995–1998, III–V. kötet