SZÉKFOGLALÓK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

HATVANI LÁSZLÓ

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSAINAK STABILITÁSI TULAJDONSÁGAI

MAGYAR · TUDOMÁNYOS · AKADÉMIA ·
1825

Szerkesztő
GLATZ FERENC

Olvasószerkesztő
Pótó János

ISBN 963 508 193 6
ISSN 1419-8959

Kiadja
a Magyar Tudományos Akadémia, 2000
Felelős kiadó: Szabó B. István
Kiadói szerkesztő: Burucs Kornélia
Nyomdai előkészítés: MTA Történettudományi Intézete kiadványcsoportja
Tördelő: Csányi Attila
Nyomdai munkálatok: AKAPRINT Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Freier László ügyvezető igazgató

Hatvani László
az MTA levelező tagja

Differenciálegyenletek megoldásainak stabilitási tulajdonságai

Elhangzott 1999. október 13-án

1. Alapfogalmak

Tekintsük az

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszert, ahol $t \in \mathrm{R}_+ := [0, \infty)$ a független változó (idő), $x \in R^n$ az állapothatározók vektora, $x = x(t)$ a keresett függvény, x' ennek az idő szerinti deriváltja, $f : \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ adott folytonos függvény. Ha $t_0 \in \mathrm{R}_+$ egy rögzített időpillanat, és $x_0 \in \mathrm{R}^n$ egy rögzített állapot, akkor $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0)$ jelöli az (1.1) egyenletnek egy tetszőleges olyan megoldását, amely kielégíti az $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételt. Feltesszük, hogy az $x(t) \equiv 0$ függvény megoldása az (1.1) egyenletnek (0-megoldás), amely ekvivalens azzal a feltétellel, hogy $f(t, 0) \equiv 0$ $(t \in \mathrm{R}_+)$. A nyilvánvaló mechanikai analógia alapján ezt úgy is szokás mondani, hogy $x = 0$ *egyensúlyi állapota* az (1) rendszernek: ha egy időpillanatban a rendszer az $x = 0$ állapotban van, akkor örökre ott is marad. Feltesszük még azt is, hogy az egyensúlyi állapot kis környezetéből induló megoldások értelmezve vannak a t idő akármilyen nagy értékeire.

Az egyensúlyi állapot jellemző tulajdonsága a *stabilitás* vagy *instabilitás*. A stablitás fogalma a mechanikából ered. Például a legrégebbi mechanikakönyvekben is megtalálható az a kijelentés, hogy a matematikai inga alsó egyensúlyi helyzete stabilis, a felső pedig instabilis, anélkül, hogy a stabilitás fogalma egyáltalán definiálva lett volna. A stabilitás ma is legáltalánosabban elfogadott definícióját egy hosszú fejlődési folyamat után a nagy orosz matematikus és mechanikus, A. M. Ljapunov adta meg doktori értekezésében [37] 1892-ben. Ezzel szigorú matematikai megfogalmazását adta annak a mechanikában elfogadott felfogásnak, hogy az egyensúlyi állapot stabilis, ha a kitérés és a sebesség nagysága tetszőlegesen kicsiny marad a mozgás során, feltéve, hogy a kezdeti időpillanatban elegendően kicsiny volt. Azt a jelenséget, amikor a kitérés és a sebesség még el is hal a mozgás során, vagyis a rendszer aszimptotikusan viszatér egyensúlyi állapotába, aszimptonikus stabilitásnak nevezte.

DEFINÍCIÓ. Az (1.1.) egyenlet 0-megoldását:

a) *stabilisnak* nevezzük, ha bármely $t_0 \in \mathrm{R}_+$ kezdeti időpillanathoz és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ szám, hogy ha a kezdeti kitérés teljesíti az $|x_0| < \delta(t_0, \varepsilon)$ egyenlőtlenséget, akkor $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ teljesül $t \geq t_0$ esetén. (Itt $|\cdot|$ tetszőleges normát jelöl $\mathbf{R}^n$-ben.)

b) *aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis, továbbá bármely $t_0 \in \mathrm{R}_+$ számhoz létezik olyan $\sigma(t_0) > 0$, hogy $|x_0| < \sigma|t_0|$ esetén $\lim_{t\to\infty} |x(t; t_0, x_0)| = 0$.

A differenciálegyenletek megoldásai közül az egyensúlyi állapotokon kívül különösen fontosak mind az elmélet, mind az alkalmazások szempontjából a periodikus megoldások. A fenti definíció csak egyensúlyi helyzetekről szól ugyan, de magában foglalja az $x = \varphi(t)$ periodikus megoldás stabilitásának fogalmát is. Végrehajtva ugyanis a független változó $y = x - \varphi(t)$ transzformációját ismét (1.1) alakú rendszert kapunk, és az $x = \varphi(t)$ periodikus megoldás az új rendszer $y = 0$ egyensúlyi helyzetbe megy át.

Annak érdekében, hogy ismertetendő eredményeimet a differenciálegyenletek elméletében elhelyezzem, kitérek röviden a differenciálegyenletek osztályozására. *Autonóm*nak nevezzük az (1.1) rendszert, ha jobb oldala nem függ explicite a t időtől. Ez megfelel annak, hogy zárt, izolált rendszer differenciálegyenletes modelljének jobb oldala nem függ explicite az időtől, míg más rendszerekkel kapcsolatban lévő rendszer, illetve valamilyen külső hatás (irányítás) alatt álló rendszer modelljének jobb oldala általában függ az időtől, vagyis egy *nem-autonóm* differenciálegyenlet-rendszer. (Például a klasszikus háromtest-probléma egyenlete autonóm, de a korlátozott háromtest-probléma, amikor a két kis tömegű testnek a nagy tömegűre gyakorolt vonzásától eltekintünk, már nem-autonóm egyenlettel írható le.)

A mechanikában előforduló rendszereket szokás azon szempont szerint is osztályozni, hogy bennük a teljes mechanikai energia invariáns-e a mozgások során, vagy nem. Az első esetben a rendszert konzervatívnak nevezzük. A. N. Kolmogorov 1954-ben, Amszterdamban, a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson a topologikus módszerek dinamikai alkalmazásáról szólva kiemelte [34]: „A topologikus módszerek, mint ismeretes, lényeges alkalmazást nyertek a rezgések elméletében, nevezetesen az automatikus szabályozásban, elektrotechnikában és így tovább felmerülő teljesen konkrét problémák megoldásában is. Ezek a valós fizikai és műszaki alkalmazások azonban főképpen *nem-konzervatív* rendszerekre vonatkoznak. Ilyen rendszerekben a vizsgálatok fő célja az izolált aszimptotikusan stabilis mozgások (nevezetesen stabilis egyensúlyi helyzetek és stabilis határciklusok) meghatározása. [...] *Konzervatív* rendszerekben aszimptotikusan stabilis mozgások nincsenek."

Ebben az előadásban nem-konzervatív, általában nem-autonóm rendszerrekkel foglalkozva feltételeket fogalmazok meg differenciális rendszerek 0-megoldásának, illetve mechanikai rendszerek egyensúlyi állapotának aszimptotikus stabilitására. A második szakaszban az ellenálló közegben történő mozgásról, vagyis a csillapított rezgőmozgásról lesz szó. A harmadik szakaszban egy instacionárius nem-konzervatív Hamilton-rendszert, az

$$x'' + a(t)x = 0$$

ún. Jacobi-egyenletet tárgyalom. Végezetül a negyedik szakaszban a differenciálegyenletek elméletének egy viszonylag fiatal ágához, a retardált differenciálegyenletekhez kapcsolódó stabilitási eredményeket fogok ismertetni.

2. Mozgás ellenálló közegben

Amikor itt tudományos vizsgálataimról beszámolhatok, abban a rendkívüli megtiszteltetésben van részem, hogy eredményeimet Akadémiánk világhírnévre szert tett egykori tagjának, Fejér Lipótnak munkásságához kapcsolhatom. Ő *Tömegpont egyensúlya ellenálló közegben* című, a Matematikai és Természettudományi Értesítőben, a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának folyóiratában megjelent [12], később a Crelle Journalban is publikált [13] dolgozatában a következő problémát vetette fel.

Egységnyi tömegű anyagi pont ellenálló közegben történő mozgását az

$$x'' = \frac{\partial U}{\partial x} - f(v)\frac{x'}{v}$$

$$y'' = \frac{\partial U}{\partial y} - f(v)\frac{y'}{v}$$

$$z'' = \frac{\partial U}{\partial z} - f(v)\frac{z'}{v}$$
$$v := (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}, \quad f(v) > 0 \quad (v > 0) \tag{2.1}$$

másodrendű differenciálegyenlet-rendszer írja le, ahol $U = U(x, y, z)$ a pontra ható erők eredőjének potenciálfüggvénye, v a sebesség nagysága, $f = f(v)$ pedig a súrlódási együttható. Ismeretes, hogy ha az egyensúlyi helyzetben az U függvénynek szigorú helyi maximuma van, és a mozgások során súrlódás nem lép fel, az egyensúlyi helyzet stabilis. Ezt Lagrange fogalmazta meg, majd Dirichlet bizonyította be teljes általánosságban (l. [45]). Fejér Lipót azt a problémát vizsgálta, hogy milyen hatással van a stabilitásra a súrlódási erő megjelenése. Erre vonatkozóan bebizonyította:

2.A. TÉTEL (Fejér L., 1906): „Ha a potenziálfüggvénynek az egyensúlyi helyzetben izolált maximuma van, akkor a jövőre nézve stabilitás van, míg a múltra vonatkozólag labilitás is lehetséges."

Vagyis a stabilitás megőrződik súrlódás hatása alatt is. Ez összhangban van tapasztalatainkkal, de éppen tapasztalataink alapján ennél többet várunk. Nevezetesen azt, hogy a mozgás „elhal" az idő során. Fejér Lipót tesz is egy megjegyzést erről. Megállapítja, hogy a mozgás során „a v sebesség végtelen sokszor tetszőlegesen kicsinnyé lesz", ami formulával írva azt jelenti, hogy

$$\liminf_{t\to\infty} v(t) = 0.$$

Erre a következtetésre abból a megállapításból jut, hogy bármely mozgás során az $\int_0^t f(v(\tau))v(\tau)d\tau$ integrál korlátos marad. Ebből a tényből további vizsgálat nélkül tényleg nem lehet a sebességre vonatkozóan többet mondani, mégis azt sugallják tapasztalataink, hogy a sokkal többet mondó

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

formula is igaz, éspedig nemcsak a Fejér Lipót által vizsgált egyetlen anyagi pont, hanem tetszőleges pontrendszer esetén is.

Vizsgáljuk egy n szabadsági fokú rendszer mozgását. Jelölje a rendszer helyzetét leíró általánosított koordináták oszlopvektorát $q = (q_1, q_2,..., q_n)^T \in \mathrm{R}^n$, a sebességvektort $q' = (q'_1, q'_2, ..., q'_n)^T$, a kinetikai energiát a $T = T(q, q') = (A(q)q', q')$ kvadratikus alak, a potenciális energiát $\Pi = \Pi(t, q)$, a súrlódási együtthatók pozitív szemidefinit mátrixiát pedig $B = B(t,q) \in \mathrm{R}^{n\times n}$. Ismeretes [45], hogy a rendszer mozgását a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}-Bq' \tag{2.2}$$

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet írja le. A sebességek nullához tartását ezen rendszer egy speciális esetére a következő tétel garantálja (l. [45]):

2.B. TÉTEL (V. Rumjancev, 1957): Tegyük fel, hogy az (1.1) rendszerben

$$\Pi(t,q)\equiv 0, \quad B(t,q)\equiv B(q).$$

Ha $B(q)$ pozitív definit, akkor a $q = q' = 0$ egyensúlyi állapot stabilis, és tetszőleges mozgásra teljesül, hogy

$$\lim_{t\to\infty} q'(t)=0.$$

Ez a tétel azt mondja, hogy stacionárius és erőmentes rendszer esetén a sebességek nullához tartanak. Konkrét példával illusztrálva: vízszintes asztallapon súrlódva haladó golyó sebessége elhal. Éppen ezen konkrét példa mentén tovább gondolkodva felmerül az emberben, hogy a golyónak nemcsak a sebessége tart nullához, hanem „aszimptotikusan meg is áll" a golyó, vagyis a helykoordinátáinak is létezik a határértéke. Sőt azt várjuk, hogy a golyó akkor is aszimptotikusan megáll, ha pl. egy vízszintesen álló csészében mozog, vagyis hogy Rumjancev 2.B. tétele kiterjeszthető arra az esetre, amikor potenciális erők is hatnak, feltéve, hogy a potenciális energiának az egyensúlyi helyzetben szigorú minimuma van, vagyis a potenciáis erők stbilis típusúak. Ezeket a várakozásainkat igazolja a következő

2.C. TÉTEL (L. Hatvani, 1985): Ha a $\Pi = \Pi(q)$ potenciális energiának a $q = 0$ pontban szigorú minimuma van, és

$$(B(t,q)q',q') \geq (Bq)q',q')$$

teljesül egy alkalmas $B(q)$ pozitív definit mátrixfüggvénnyel a $q = 0$, $q' = 0$ egyensúlyi állapot egy környezetében az idő tetszőleges értékeire, akkor a $q = 0$, $q' = 0$ egyensúlyi állapot stabilis, és

$$\lim_{t\to\infty} q'(t)=0, \quad \lim_{t\to\infty} q(t)=q_*\in R^n$$

teljesül minden, az egyensúlyi állapot egy kis környezetéből induló mozgásra.

Ez a tétel is felvet egy izgalmas problémát: előfordulhat, hogy $q_* \neq 0$, vagyis a rendszer egy nem-egyensúlyi helyzetben áll meg aszimptotikusan? Első látásra azt gondolnánk, hogy ez nem fordulhat elő, hiszen a potenciális erő a rendszert minden nem-egyensúlyi helyzetből a $q = 0$ egyensúlyi helyzetbe szeretné visszatéríteni. A válasz mégis igenlő, amit a következő egyszerű példa mutat. Az

$$x'' + (2+e^t)x' + x = 0$$

skaláris egyenletnek ($T = x'^2/2$, $\Pi = x^2/2$, $B = 2+e^t$) az $x(t) := c(1+e^{-t})$ függvény bármely $c \in \mathrm{R}$ esetén megoldása, és ugyanakkor $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$. Ez a *túlfékezés* esete: a súrlódási együttható olyan gyorsan nő, hogy a pont nem tud visszatérni egyensúlyi helyzetébe, mivel az állandóan ébredő, nem-eltűnő potenciális erővel egyensúlyt tud tartani a súrlódási erő még akkor is, ha a sebesség nullához tart. Így van ez mindig, ha a súrlódási együttható az időnek végtelenbe tartó függvénye? Nem, hiszen egyszerű számolás mutatja, hogy az

$$x'' + tx' + x = 0$$

egyenlet általános megoldása

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left\{c_1 + c_2\int_0^t \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)ds\right\},$$

tehát minden megoldás nullához tart, ha $t \to \infty$.

Tehát felmerül a következő kérdés: mely súrlódási együtthatók esetén teljesül a 2.C. tételben garantált q_* vektorra a $q_* = 0$ egyenlőség, vagyis milyen súrlódás mellett állíthatjuk, hogy a rendszer aszimptotikusan visszatér $q = 0$, $q' = 0$ egyensúlyi állapotába?

A kérdés tanulmányozásához a mechanika legalapvetőbb összefüggéséből, az

$$(A(q(t))q'(t), q'(t)) + \Pi(q(t)) = -\int_{t_0}^t (B(\tau, q(\tau))q'(\tau), q'(\tau))\,d\tau + \text{konst.} \qquad (2.3)$$

elevenerő-egyenletből kell kiindulni, amely jól mutatja, hogy mi okozza a nehézségeket. Az egyenlet jobb oldalán álló integrált kell becsülni de úgy, hogy csak a $(t, q) \mapsto B(t, q)$ függvényt ismerjük, a mozgást leíró $t \mapsto (q(t), q'(t))$ függvényt nem, csak annyit tudunk róla, hogy megoldása a (2.2) egyenletnek. Fejér Lipót nagyon találóan magyarázza el, miért nehéz a probléma [12]: „Ismeretes dolog, hogy ha az ellenálló közegben történő mozgás lefolyására, mi több, annak véglefolyására nézve keresünk előleges tájékoztatást, úgy ez az »ellenállás nélküli« mozgással való összehasonlítás révén nemigen nyerhető. Ennek oka abban rejlik, hogy az ellenállást képviselő

$$\left(-f(v)\frac{x'}{v},\ -f(v)\frac{y'}{v},\ -f(v)\frac{z'}{v}\right)$$

erő nem az ellenállás nélküli mozgás pillanatnyi sebességvektorával ellentett irányú – tehát oly sebességi iránnyal, mely, hogy úgy fejezzük ki magunkat, nem *explicite*, hanem a (2.1) egyenletek által *implicite* van megadva. Ezen megjegyzés talán értéket ad a következő tételnek" – írja közvetlenül a 2.A. tétel kimondása előtt.

A fejezet hátralévő részében ezzel a kérdéssel foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért csak egy szabadsági fokú rendszereket tárgyalunk, először azoknak is a legegyszerűbb lineáris formáját:

$$x'' + h(t)x' + x = 0 \qquad (h(t) \geq 0). \tag{2.4}$$

Ebben az esetben az $x = 0$ megoldás aszimptotikus stabilitása ekvivalens azzal, hogy tetszőleges x megoldás esetén

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0, \tag{2.5}$$

tehát problémánk egybeesik a stabilitáselmélet legklasszikusabb problémájával, a (2.4) lineáris egyenlet triviáis megoldásának aszimptotikus stabilitását biztosító feltételek meghatározásával.

Ismert az elemekből, hogy ha $h(t) \equiv h_0 > 0$, vagyis a h súrlódási együttható állandó, akkor (2.4) 0-megoldása aszimptotikusan stabilis, éspedig a megoldások $h_0 < 2$ esetben („kis súrlódás") oszcillálva, $h_0 \geq 2$ esetben („nagy súrlódás") nem-oszcillálva tartanak nullához. Ezt általánosítja a (2.4) nem-autonóm egyenletre a következő tétel:

2.D. TÉTEL (J. Levin és J. Nohel, 1960): Ha léteznek olyan $\underline{h}$, $\bar{h}$ konstansok, hogy

$$0 < \underline{h} \leq h(t) \leq \bar{h} < \infty \qquad (t \geq 0) \tag{2.6}$$

teljesül, akkor a (2.4) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

A súrlódási együtthatókat a nem-autonóm (2.4) egyenlet esetén is szokás nagyság szerint osztályozni, éspedig annak megfelelően, hogy a Levin–Nohel-tétel (2.6) egyenlőtlenségpárjából melyik oldalt hagyjuk el. Ennek megfelelően:

kis súrlódás: $0 \leq h(t) \leq \bar{h} < \infty \qquad (t \geq 0)$;
nagy súrlódás: $0 < \underline{h} \leq h(t) < \infty \qquad (t \geq 0)$;
általános eset: $0 \leq h(t) < \infty \qquad (t \geq 0)$.

A három eset három különböző technikát igényel. Nagy súrlódás esetén a túlfékezés jelenségét kell kizárnunk a h együtthatóra vonatkozó alkalmas növekedési feltétellel. A [26] dolgozatban sikerült olyan szükséges és elegendő feltételt találnunk erre az esetre, amelyből a korábbi feltételek könnyedén levezethetők. A kis súrlódás esete (még inkább az általános eset) már nehezebbnek bizonyult. Még a kis súrlódás esetére sem sikerült eddig szükséges és elegendő feltételt találni. Foglalkozzunk először ezzel az esettel, amikor is a nem-oszcilláló megoldásokról könnyű belátni, hogy nullához tartanak (a túlfékezés jelensége nem léphet fel); a nehézséget az oszcilláló megoldások okozzák, amelyeknél a kinetikai és a helyzeti energia egymásba alakulása ismétlődik.

KIS SÚRLÓDÁS

$$x'' + h(t)x' + x = 0 \qquad (0 \le h(t) \le \bar{h} < \infty). \tag{2.7}$$

A (2.3) összefüggésből levezethető, hogy az aszimptotikus stabilitás szükséges feltétele az

$$\int_0^\infty h(t)dt = \infty \tag{2.8}$$

divergencia teljesülése. Monoton h esetén ez a feltétel elegedő is:

2.E. TÉTEL (R. Ballieu és K. Peiffer, 1978): Tegyük fel, hogy h monoton. Ekkor a (2.7) egyenlet 0-megoldásának aszimptotikus stabilitásához szükséges és elegendő a (2.8) teltétel teljesülése.

Nem-monoton együtthatókra először azt az esetet sikerült elintézni, amikor az együttható „átlagosan" pozitív konstans felett marad:

2.F. TÉTEL (A. Surkov, 1984): Ha léteznek olyan $B > 0$, T konstansok, amelyekkel

$$\int_0^t h(\tau)d\tau \ge Bt \quad (t \ge T)$$

teljesül, akkor (2.7) 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

Elegendő-e megkövetelni az $\int_0^t h$ integrál egy lassúbb divergenciáját? Erre a kérdésre ad igenlő, és a hatványfüggvényekkel való összehasonlításban éles választ a következő tétel [19]:

2.1. TÉTEL.

A) Ha

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{2/3}} \int_0^t h(\tau)d\tau > 0, \tag{2.9}$$

akkor a (2.7) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

B) Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan h együtthatófüggvény, hogy

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t^{2/3-\varepsilon}} \int_0^t h(\tau)d\tau > 0,$$

de a (2.7) egyenlet 0-megoldása *nem* aszimptotikusan stabilis.

Tehát az aszimptotikus stabilitáshoz elegendő, hogy a súrlódási együttható integrálközepe az idő tetszőlegesen nagy értékeire „néha" legalább $t^{-1/3}$ nagyságrendű legyen, de tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén nem elegendő, hogy az integrálközép valahonnan kezdve „örökre" $B \cdot t^{-1/3-\varepsilon}$ fölött maradjon.

A súrlódás stabilizáló hatása úgy érvényesül, hogy hatására a mechanikai energia disszipálódik, hőenergiává alakul át. A disszipálódás egyirányú folyamat, tehát a súrlódási erő hatása az idő folyamán összegeződik. Ezért a mozgások végkifejlete (aszimptotikus viselkedése) szempontjából a súrlódási együtthatónak nem a pillanatnyi értékei, hanem az integrálja a meghatározó. Ennek a szempontnak a 2.1. tételben szereplő alsó becslés kiválóan megfelel (szemben a Levin–Nohel-tétel egyenletes $h(t) \geq \underline{h} > 0$ becslésével), mégis javításra szorul. Hajtsuk végre ugyanis a következő gondolatkísérletet! Tegyük fel, hogy egy h súrlódási együttható esetén aszimptotikus stabilitás van. Módosítsuk most a h együtthatót $\tilde{h}$-ra a

$$\tilde{h}(t) := \begin{cases} h(t) & 0 \leq t < \tilde{t} \\ 0 & \tilde{t} \leq t \leq \tilde{t} + 2k\pi \\ h(t-2k\pi) & t > \tilde{t} + 2k\pi \end{cases}$$

definícióval, ahol $\tilde{t} > 0$ tetszőlegesen rögzített időpont, k pedig tetszőleges természetes szám. (2.7) a $[\tilde{t}, \tilde{t} + 2k\pi]$ intervallumon egy harmonikus oszcillátor, a mozgások 2π-periodikusak, ezért a módosított rendszer mozgásai az idő nagy értékeire ugyanolyanok, mint az eredeti rendszeréi, vagyis az aszimptotikus stabilitás a módosított rendszer esetében is érvényes, akármekkora is a k természetes szám. Sőt, ugyanezt állapíthatjuk meg akkor is, ha a fenti módosítást nemcsak egyetlen $\tilde{t}$ időpontban végezzük el, hanem akár végtelen sokszor is. Ilyen módosításokkal viszont az $\int_0^t \tilde{h}$ növekedési rendje tetszőlegesen csökkenthető. Ebből azt a következtetést kell levonnunk, hogy az integrálközép nem alkalmas ún. szakaszos fékezés hatásának kimutatására, ilyenekre más típusú feltételeket kell találnunk.

Szakaszos fékezésről akkor beszélünk, ha létezik egymásba nem nyúló intervallumok $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozata úgy, hogy a súrlódási együtthatóról a kis súrlódást biztosító $h(t) \leq \bar{h}$ egyenlőtlenségen kívül további információnk csak az

$\cup_{k=1}^{\infty} I_k$ halmazon van. Levin és Nohel tételének szakaszos fékezésre történő első általánosítása volt a

2.G. TÉTEL (R. A. Smith, 1961): Tegyük fel, hogy $h(t) \geq \underline{h} > 0$ teljesül az $\cup_{k=1}^{\infty} I_k$ halmazon. Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^3 = \infty, \tag{2.10}$$

akkor a (2.7) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis. Továbbá a (2.10) feltételben a „3" kitevő éles. (Itt és a továbbiakban $|I_k|$ az I_k intervallum hosszát jelöli.)

Ebben a tételben a $h(t) \geq \underline{h} > 0$ feltétel nem felel meg annak az előzőekben említett természetes kívánalomnak, hogy a súrlódás összhatására kell feltételt megszabni. Ez az oka annak, hogy a Levin–Nohel-tétel következménye a 2.G. tételnek, de a Surkov-tétel nem vezethető le belőle. Most megfogalmazunk egy olyan eredményt, amelyből nemcsak a Surkov-tétel, hanem a 2.1. tétel is speciális esetként adódik.

2.2. TÉTEL. Ha létezik egymásba nem nyúló intervallumok egy $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozata, amelyre a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+|I_k|^2} \left(\int_{I_k} h(t)\,dt \right)^3 = \infty \tag{2.11}$$

divergenciafeltétel teljesül, akkor a (2.7) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

2.3. KÖVETKEZMÉNY. Ha a $(|I_k|)_{k=1}^{\infty}$ sorozat korlátos, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{I_k} h(t)\,dt \right)^3 = \infty,$$

akkor a (2.7) egyenlet 0-megoldása szimptotikusan stabilis. Igaz még, hogy a „3" kitevő ebben az állításban éles.

2.4. KÖVETKEZMÉNY. Ha létezik olyan $\delta > 0$ konstans, hogy

$$\frac{1}{1+|I_k|^{2/3}} \int_{I_k} h(t)\,dt \geq \delta, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

akkor a (2.7) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis. Igaz még, hogy a „2/3" kitevő ebben az állításban éles.

A 2.1. tétel A) állítása a 2.2 tételnek egyszerű következménye. Ehhez elegendő bebizonyítani, hogy (2.9) teljesülése esetén létezik egy $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ intervallum-sorozat és egy $\gamma > 0$ szám,

$$\frac{1}{1+|I_k|^2}\left(\int_{I_k} h(t)dt\right)^3 \geq \gamma, \quad k=1,2,..., \tag{2.12}$$

hiszen ekkor (2.11) annál inkább igaz.

Tegyük fel, hogy (2.9) teljesül. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges T számhoz található $t_* > T$, amelyre

$$\frac{1}{t_*^{2/3}}\int_0^{t_*} h(\tau)\, d\tau \geq \delta.$$

Legyen $\gamma := (\delta / 4)^3$. Megmutatjuk, hogy tetszőleges a számhoz létezik olyan $b \geq a+1$ szám, hogy (2.12) teljesül ezzel a γ-val és az $I_k = (a, b)$ intervallummal. Valóban, válasszuk b-t olyan nagyra, hogy

$$\frac{1}{b^{2/3}}\int_0^a h(t)dt < \frac{\delta}{2}, \quad \frac{1}{b^{2/3}}\int_0^b h(t)dt \geq \delta$$

egyaránt teljesüljenek. Ebben az esetben

$$\left(\frac{1}{1+(b-a)^2}\right)^{1/3}\int_a^b h(t)dt \geq \frac{1}{2}\frac{1}{b^{2/3}}\left(\int_0^b h(t)dt - \int_0^a h(t)dt\right) \geq \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{4} = \gamma^{1/3},$$

tehát (2.12) valóban teljesül.

A kis súrlódás esetének tárgyalását fejezzük be a nevezetes Smith-tétel (2.G. tétel) és a 2.2. tétel összehasonlításával. Ehhez a (2.11) feltételt érdemes a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|I|_k^3}{1+|I|_k^2}\left(\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} h(t)dt\right)^3 = \infty \tag{2.11'}$$

alakba átírni. Ha a súrlódási együtthatónak az intervallumokon felvett átlagos értéke pozitív konstans felett marad (ez a Smith-tételben teljesül, hiszen ott az együttható egyenletesen $\underline{h} > 0$ felett marad), akkor a (2.11') ekvivalens (2.10)-zel. Tehát (2.11') és (2.10) összehasonlítása mutatja, hogy a 2.2. tétel hogyan általánosítja Smith tételét. Ennek fényében érdekes gyakorlat elgondolkozni azon, hogy igaz marad-e a 2.2. tétel, ha az $1/(1+|I_k|^2)$ együttható helyére 1-et írunk, vagyis hogy igaz-e a 2.3. következmény az $(|I_k|)_{k=1}^{\infty}$ sorozat korlátossága nélkül.

ÁLTALÁNOS ESET

Annak érdekében, hogy érzékeltessük a vizsgálatoknak nemlineáris irányokba való kiterjeszthetőségét is, az általános eset tárgyalásánál nemcsak a $0<\underline{h}\leq h(t)\leq \bar{h}<\infty$ feltételtől tekintünk el, hanem a (2.4) lineáris egyenlet helyett eleve egy általánosabb modellből indulnk ki. Tekintsük az

$$x''+h(t,x,x')x'+f(x)=0 \tag{2.13}$$

másodrendű differenciálegyenletet, ahol $h:\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}_+$, $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ adott függvények, f folytonos és $f(x)x>0$, ha $x\neq 0$. Tehát azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik a konzervatív $x''+f(x)=0$ nemlineáris oszcillátor $-h(t,x,x')x'$ alakú súrlódási erő hatására. A súrlódási együtthatóról mindössze azt tesszük fel, hogy létezik olyan $\delta>0$ szám, és léteznek olyan $a,b:\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$ folytonos függvények, hogy

$$a(t)\leq h(t,x,y)\leq b(t),\quad \text{ha}\quad x^2+y^2\leq\delta, t\geq 0. \tag{2.14}$$

2.5. TÉTEL. Ha létezik egymásba nem nyúló intervallumok $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\int_{I_k}a\right)^3}{1+|I_k|^2}\times\frac{1}{(\sup_{I_k}b)^2\left(1+\min\left\{\sup_{I_k}a,\int_{I_k}a\right\}\right)^2}=\infty, \tag{2.15}$$

akkor a (2.13) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

Ebben az általános esetben is felmerül a kérdés: mennyire éles a (2.15) feltétel? Mint korábban említettük, a kis súrlódás esetére nem ismeretes az aszimptotikus stabilitásnak szükséges és elegendő feltétele még az egyszerűbb (2.4) lineáris egyenletre sem – kivéve egy speciáis esetet. Tekintsük a (2.7) egyenletet abban az esetben, ha h lépcsős főggvény, vagyis

$$h(t):=\begin{cases}h_k>0, & \text{ha } t\in I_k, k=1,2,\dots\\ 0 & \text{különben,}\end{cases} \tag{2.16}$$

ahol $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ adott számsorozat, és az

$$I_k=[\alpha_k,\beta_k],\ \alpha_k<\beta_k<\alpha_{k+1},\quad k=1,2,\dots$$

intervallum-sorozat is adott. Ezzel az együtthatóval a (2.7) egyenlet általános megoldása képlettel felírható: az $[\alpha_k,\beta_k]$és a$[\beta_k,\alpha_{k+1}]$ intervallumokon (2.7) egy-egy lineáris konstans együttható differenciálegyenlet, ezeket meg kell oldani, majd az egyes intevallumokra vonatkozó megoldásokat „össze kell ragasztani". Ezzel a módszerrel találta Elbert Árpád szép dolgozatában [10] a következő szükséges és elegendő feltételt:

2.H. TÉTEL (Á. Elbert, 1997): Tegyük fel, hogy az $(|I_k|)_{k=1}^{\infty}$ és a $(h_k|I_k|)_{k=1}^{\infty}$ sorozatok korlátosak.

Ekkor a (2.16) együtthatóval felírt

$$x'' + h(t)x' + x = 0$$

egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis akkor és csakis akkor, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k |I_k|^3 = \infty. \tag{2.17}$$

Fogalmazzuk meg 2.5 tételünk következményét lépcsősfüggvény-együtthatókra:

2.6 KÖVETKEZMÉNY. Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k |I_k|^3}{(1+|I_k|^2)(1+\min\{h_k; h_k|I_k|\})^2} = \infty, \tag{2.18}$$

akkor a (2.16) együtthatóval felírt

$$x'' + h(t)x' + f(x) = 0$$

nemlineáris egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

Az Elbert Árpád tételében szereplő korlátossági feltételek teljesülése esetén (2.18) feltételünk (2.17)-re redukálódik. De (2.17) az Elbert Árpád által vizsgált esetben szükséges és elegendő, ami azt mutatja, hogy (2.18), illetve (2.15) elég éles.

A jelen előadás terjedelme nem engedi meg, hogy a tételek részletes bizonyításait ismertessük. Mint azt a (2.3) elevenerő-egyenletnél megjegyeztük, az alapvető probléma a

$$\int_0^{\infty} h(t)(x'(t))^2\,dt$$

integrál konvergenciájának vagy divergenciájának kimutatása, ahol $t \mapsto x(t)$ az egyenlet egy megoldása, amit nem ismerünk. A bizonyítások módszere az, hogy a fenti helyett az

$$\int_0^\infty h(t)\xi^2(t)\,dt$$

integrál konvergenciáját, illetve divergenciáját vizsgáljuk, ahol ξ befutja egy jól megválasztott függvénycsalád elemeit (L. Hatvani és V. Totik, 1993).

3. A Jacobi-egyenlet

Induljunk ki egy anyagi pont egyenes vonal mentén történő harmonikus rezgőmozgásából:

$$x'' + a^2x = 0 \quad (0 < a = \text{állandó}),$$

ahol a^2 a $-a^2x$ Hooke-féle rugalmassági visszatérítő erőben szereplő rugalmassági együttható. Jól ismert, hogy a mozgásokat az $x(t) = A\cos(at + \varphi)$ képlet írja le, ahol A a rezgés amplitúdója, a a frekvenciája, φ pedig a fázisállandó. A rendszer konzervatív: a $H(x, x') = x'^2/2 + a^2x^2/2$ teljes mechanikai energia állandó marad a mozgások során. Az $x = 0$, $x' = 0$ egyensúlyi állapot stabilis, de nem aszimptotikusan.

Tegyük most fel, hogy a rugalmassági együttható az idő haladtával változik, éspedig növekszik:

$$x'' + a^2(t)x = 0, \quad a: [0,\infty) \nearrow [a_0, \infty). \tag{3.1}$$

A $H(t, x, x') = x'^2/2 + a^2(t)x^2/2$ teljes mechanikai energia növekszik a mozgások során, mivel $H'(t, x, x') = 2(a'(t)/a(t))a^2(t)x^2/2 \geq 0$. Ez a képlet azt is mutatja, hogy az energianövekedés sebessége arányos a pillanatnyi helyzeti energiával. Ha a $G(t, x, x') = x'^2/2a(t) + x^2/2$ „módosított energiának” számítjuk ki a (3.1) szerinti változását, akkor $G'(t, x, x') = -2(a'(t)/a(t))x'^2/2a(t) \leq 0$ adódik, tehát G a mozgás során csökken. Ha a t_* időpontban $|x|$-nek helyi maximuma van, akkor $G(t_*, x(t_*), x'(t_*)) = x(t_*)^2/2$, amiből kapjuk, hogy a rezgés amplitúdója csökken. Ez természetes, hiszen amikor a rendszer az $x = 0$ egyensúlyi helyzetén halad át, akkor a rendszernek csak mozgási energiája van, ami nem függ a-tól, és ha ugyanakkor az $a^2(t)$ rugalmassági együttható nő, akkor az ugyanakkora mennyiségű mozgási energia a nagyobb rugalmassági együtthatójú rendszerben csak kisebb maximális kitérést tud produkálni.

A (3.1) egyenlet az $x' = y$ helyettesítés után ekvivalens az

$$x' = \frac{\partial H(t,x,y)}{\partial y}, \quad y' = \frac{\partial H(t,x,y)}{\partial x}; \quad \left(H(t,x,y) = \frac{y^2}{2} + a^2(t)\frac{x^2}{2}\right)$$

instacionárius Hamilton-rendszerrel. Az energiamegmaradás törvényéből következik, hogy stacionárius Hamilton-rendszer ($H = H(x, y)$) egyensúlyi állapota nem lehet aszimptotikusan stabilis. N. P. Erugin [11] vetette fel a kérdést: instacionárius Hamilton-rendszernek lehet-e aszimptotikusan stabilis egyensúlyi állapota? Sikerült találnia egy ilyen Hamilton-rendszert, de annak Hamilton-függvénye csak szakaszonként volt sima. Problémaként tűzte ki annak eldöntését, hogy sima rendszert lehet-e találni ugyanilyen tulajdonsággal. A következő tétel ezt a kérdést válaszolja meg:

3.A. TÉTEL. (L. Hatvani és A. Krámli, 1975): Ha $H : R_+ \times R^n \times R^n$ folytonosan differenciálható, akkor a

$$q' = \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p}, \quad p' = \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial q}$$

Hamilton-rendszernek nem lehet aszimptotikusan stabilis egyensúlyi állapota.

Az ezen tétel által leírt jelenség érvényesül abban, hogy a (3.1) egyenlet tetszőleges nemtriviális x megoldására az $|x'|$ maximumai nem csökkenhetnek, hiszen a $H(t, x, x') = x'^2/2 + a^2(t)x^2/2$ mechanikai energia nem-csökkenő a mozgások mentén, és ha t_*-ban $|x'|$-nek helyi maximuma van, akkor $x(t_*) = 0$, így $H(t_*, x(t_*), x'(t_*)) = x'^2(t_*)/2$. Tehát $x'(t) \not\to 0$, ha $t \to \infty$. De az $|x|$ maximumai, a rezgés amplitúdói csökkennek! M. Biernackiban [3] merült fel először a kérdés: ha $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$, akkor igaz-e, hogy a (3.1) egyenlet megoldásaira $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ teljesül? Ez a kérdés egy egész kutatási irányt indított el, amely napjainkbanis tovább fejlődik.

DEFINÍCIÓ. A (3.1) egyenlet nemtriviális x megoldását *kis megoldás*nak nevezzük, ha $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Biernacki kérdésére már egy év alatt érkezett egy válasz:

3.B. TÉTEL (H. Milloux, 1934): Ha a folytonosan differenciálható, és $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$, akkor a (3.1) egyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

Milloux egyidejűleg konstruált egy olyan egyenletet, amelyben $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$, ugyanakkor nem minden megoldás kicsi. Röviddel ezután született egy elegendő feltétel arra is, hogy minen megoldás kicsi legyen:

3.C. TÉTEL (G. Armellini, L. Tonelli és G. Sansone, 1938): Ha $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$, és az a függvény „nem ugrásszerűen" nő, akkor a (3.1) egyenletnek csak kis megoldása van.

Mivel a továbbiakban nem lesz szükségünk rá, a „nem ugrásszerű" növekedés pontos (egyébként meglehetősen bonyolult) definícióját most mellőzzük. Csupán megjegyezzük róla: az „ugrásszerű növekedés" azt jelenti, hogy a függvény növekedése lokalizálható egy nem túl sűrűn elhelyezkedő, kis összhosszúságú intervallumrendszerre.

Nagyon izgalmas a kérdés: milyen gyakori a (3.1) egyenletek között, hogy az egyenlet minden megoldása kicsi? Pontosabban szólva, ha $\mathfrak{E}$ jelöli az összes olyan (3.1) alakú egyenletek halmazát, amelyekben $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$, akkor generikus tulajdonsága-e $\mathfrak{E}$-ben, hogy az egyenlet minden megoldása kicsi? (A generikus tulajdonság definícióját l. [42]-ben.) A kérdés elég nehéznek tűnik, hiszen (3.1) nem integrálható típusú. Vizsgáljuk a problémát először egy egyszerű, de azért az alkalmazások szempontjából is fontos függvényosztályra, a lépcsős függvények osztályára.

Legyenek adottak a

$$0 < a_0 < \ldots < a_{k-1} < a_k < \ldots; \quad 0 \leq t_0 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots$$
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty$$

sorozatok, és tekintsük az

$$x'' + a_k^2 x = 0, \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (3.2)$$

differenciálegyenletet. Ennek külön tanulmányozása már csak azért is indokolt, mert rá az Armellini–Tonelli–Sansone-tétel nem alkalmazható, hiszen minden lépcsős függvény *ab ovo* ugrásszerűen növekszik. Elbert Árpád erre az egyenletre is alkalmazta korábban már említett módszerét:

3.D. TÉTEL (Á. Elbert, 1997): Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{1 - \frac{a_k}{a_{k+1}};\ 1 - \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right\} \cdot \sin^2\left(a_{k+1}(t_{k+1} - t_k)\right) = \infty,$$

akkor a (3.2) egyenlet minden megoldása kicsi.

Elbert tételének feltételét a gyakorlatban nehéz ellenőrizni. Ugyanakkor, ha megpóbálunk olyan (3.2) típusú egyenletet konstruálni, amelynek nem minden megoldása kicsi [14], akkor azt tapasztaljuk, hogy az ilyen egyenletek eléggé „kivételesek". Innen adódik a sejtés, hogy „majdnem minden" (3.2) alakú egyenlet minden megoldása kicsi. A probléma a valószínűségszámítás eszköztárát használva a következőképpen fogalmazható: legyen $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ adott, és legyen $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy véletlen sorozat. Mi annak a valószínűsége, hogy a (3.2) egyenlet minden megoldása kicsi?

Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor a szomszédos kapcsolási idők közötti különbség egyenletes eloszlású ugyanazon az intervallumon.

3.1. TÉTEL (L. Hatvani és L. Stachó, 1998):Tegyük fel, hogy minden k természetes szám esetén a $\tau_k := t_k - t_{k-1}$ mennyiség egy valószínűségi változó, amelynek eloszlása egyenletes a [0, 1] intervallumon. Ekkor 1 valószínűséggel a (3.2) egyenlet minden megoldása kicsi.

A gyakorlatban fontos az az eset is, amikor τ_k exponenciális eloszlású.

3.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a $\tau_k := t_k - t_{k-1}$ mennyiség exponenciális eloszlású a λ_k paraméterrel:

$$P(t_k - t_{k-1} < s) = 1 - e^{-\lambda_k s}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ha

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{a_k} < 2,$$

akkor 1 valószínűséggel (3.2) minden megoldása kicsi.

A

$$\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \text{ a (3.2) egyenlet minden } x \text{ megoldására}\}$$

esemény független a $t_1 - t_0,\ t_2 - t_1, \ldots,\ t_N - t_{N-1}$ valószínűségi változók értékeitől, bármilyen nagy is az N szám. A Kolmogorov-féle $0-1$ törvény szerint ebből az következik, hogy az esemény valószínűsége 0 vagy 1. Ha τ_k egyenletes eloszlású, mint a 3.1. tételben, de $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ nem feltétlenül monoton, akkor mindkét eset előfordulhat:

3.3. TÉTEL. Legyen $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ tetszőleges pozitív tagú sorozat, és tegyük fel, hogy bármely $k \in \mathrm{N}$ esetén a $\tau_k := t_k - t_{k-1}$ mennyiség egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [0, 1] intervallumon.

A) Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1 + \frac{a_k}{a_{k+1}}}{2} + \frac{1}{2}\left| 1 - \frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} \right| \left| \frac{\sin a_k}{a_k} \right| \right) = \infty,$$

akkor 1 valószínűséggel (3.2) minden megoldása kicsi.

B) Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1 + \frac{a_k}{a_{k+1}}}{2} - \frac{1}{2}\left| 1 - \frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} \right| \left| \frac{\sin a_k}{a_k} \right| \right) \neq \infty,$$

akkor 0 annak a valószínűsége, hogy a (3.2) minden megoldása kicsi legyen.

4. Retardált differenciálegyenletek

A retardált differenciálegyenletek abban különböznek a közönségesektől, hogy a keresett x függvéy deriváltjának $x'(t)$ értéke az x függvénynek nemcsak a t időpontbeli $x(t)$ értékétől (a jelen állapottól), hanem korábbi időpillanatokban felvett értékeitől (a múltbeli állapotoktól) is függ. Például:

$$x'(t) = -ax(t) + b\int_{t-h}^{t} x(u)du \quad (a, b \in \mathrm{R}, a > 0). \qquad (4.1)$$

Ebben az egyenletben a retardálás mértéke $h > 0$. A rendszer állapotát a t időpillanatban az $x_t(s) := x(t+s)$ $(-h \leq s \leq 0)$ függvény írja le. Ez azt jelenti, hogy a folyamathoz tartozó állapottér a $C = C([-h, 0]; \mathrm{R})$ végtelen dimenziós függvénytér.

Általánosan, tekintsük az

$$x'(t) = F(t, x_t) \quad (F(t, 0) \equiv 0) \qquad (4.2)$$

retardált funkcionál-differenciálegyenletet (rövidítve: FDE-t), ahol $F: \mathrm{R}_+ \times C \to \mathrm{R}^n$, $C := C([-h, 0]; \mathrm{R}^n)$, és F folytonos. A kezdetiérték-probléma (vagy Cauchy-probléma) a következő alakú:

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x_t) \\ x(t_0 + s) = \varphi(s) \quad (-h \leq s \leq 0), \end{cases}$$

t_0 a kezdeti időpont, φ a kezdőfüggvény. Ha F folytonos, és korlátos halmazokat korlátos halmazokba visz, akkor ennek létezik legalább egy megoldása: $t \mapsto x(t; t_0, \varphi)$ [16].

A (4.2) egyenlet 0-megoldásának stabilitási tulajdonságait a közönséges differenciálegyenleteknél (rövidítve: KDE-eknél) adottakkal analóg módon definiálhatjuk (l. 1. Alapfogalmak). Analóg módon a KDE-ekhez, a FDE-ek megldásainak stabilitásvizsgálatában is a Ljapunov-féle direkt módszer a leghatékonyabb. Tekintettel kell azonban lenni egy új körülményre. Mint ismeretes, a KDE-ek stabilitáselméletében az $x \mapsto V(x)$ Ljapunov-függvények az $|x|$ normát helyettesítő pszeudonormák szerepét játsszák. Ugyanez a szerepük a FDE-ek esetében is, de itt a fázistér a végtelen dimenziós $C = C([-h, 0]; \mathrm{R}^n)$ függvénytér, amelyben a különböző normák nem ekvivalensek, tehát az analóg $V: C \to \mathrm{R}_+$ *Ljapunov-funkcionálok* nagyon sokfélék lehetnek.

Lássunk először egy példát! Kísérletezzünk a (4.1) egyenlet esetén a KDE-eknél tipikus $V_1(x) = |x|$ függvénnyel. Ennek a (4.1) szerinti deriváltja:

$$V_1'(x) = -a|x| + b\,\mathrm{sgn}\,x(t)\int_{t-h}^{t} x(u)\,du,$$

amelynek előjeléről a második tag miatt semmit nem állíthatunk. Egészítsük ki a kindulási V_1 függvényt egy alkalmas funkcionállá:

$$V(\varphi) := |\varphi(0)| + \int_{-h}^{0} |b| \int_{-h}^{0} |\varphi(s)|\,ds. \tag{4.3}$$

Ezt a (4.1) egyenlet egy $t \mapsto x(t)$ megoldása mentén tekintve a

$$t \mapsto V(x_t) = |x(t)| + \int_{-h}^{0} |b| \int_{t-h}^{t} |x(s)|\,ds$$

függvényt kapjuk, amelynek deriváltja

$$V'(t, x_t) = -(a + |b|h)|x(t)| \le 0,$$

feltéve, hogy $a \ge |b|h$. Ez jeltartó, tehát V már egy alkalmas funkcionál.

Ljapunov módszerét FDE-ekre N. Krasovskii [35] terjesztette ki. Az aszimptotikus stabilitásra vonatkozó alaptétel így szól:

4.A. TÉTEL (N. Krasovskii, 1958): Tegyük fel, hogy létezik egy $V: \mathrm{R}_+ \times C \to \mathrm{R}_+$ folytonos funkcionál, és léteznek $W_1, W_2, W: \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ szigorúan monoton növekvő, folytonos, a 0-ban eltűnő függvények („ékek”), amelyekkel a (4.2) egyenlet tetszőleges x megoldása és minden $t \in \mathrm{R}_+$ esetén teljesülnek a

(i) $W_1(|x(t)| \le V(t, x_t)$;

(ii) $V(t, x_t) \le W_2(\|x_t\|_\infty)$;

(iii) $V'(t, x_t) \le -W(|x(t)|)$

feltételek, továbbá

(iv) bármely $K \subset C$ korlátos halmazra az $F(\mathrm{R}_+ \times K)$ halmaz korlátos.

Ekkor a (4.2) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

Ha ezt a tételt a (4.1) egyenletre és a (4.3) funkcionálra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy a 0-megoldás aszimptotikusan stabilis, feltéve, hogy $a > |b|h$.

A (4.1) egyenlet egy olyan folyamatot modellez, amelyben a $-ax(t)$ egy negatív visszacsatolás, és így stabilizáló hatású, a $b\int_{t-h}^{t} x(u)\,du$ egy retardált perturbáció, amelynek lehet stabilizáló és destabilizáló hatása is. Az előbbi eredmény azt mutatja, hogy ha a negatív visszacsatolás majorálja a perturbációt, akkor aszimptotikus stabilitás van.

Az alkalmazásokban az a és b együtthatók nem mindig állandók, függhetnek az időtől. Ekkor a (4.1) egyenlet

$$x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)\int_{t-h}^{t} \lambda(s)x(s)\,ds \quad (a(t) \geq 0) \tag{4.4}$$

alakú. A (4.3) funkcionál megfelelője a nem-autonóm (4.4) egyenletre a következő:

$$V(t, x_t) := |x(t)| + \beta \int_{-h}^{0} \int_{t+s}^{t} |b(u-s)\lambda(u)x(u)|\,du\,ds, \tag{4.5}$$

amelynek (4.4) szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} V'(t, x_t) \leq & -\left[a(t) - \beta |\lambda(t)| \int_{t}^{t+h} |b(\tau)|\,d\tau\right] |x(t)| \\ & -(\beta - 1)|b(t)| \int_{t-h}^{t} |\lambda(u)x(u)|\,du. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A 4.A. tételt alkalmazva ($\beta = 1$) kapjuk:

4.B. KÖVETKEZMÉNY. Ha létezik olyan γ konstans, hogy

(i) $a(t) - |\lambda(t)| \int_{t}^{t+h} |b(s)|\,ds \geq \gamma > 0 \quad (t \in \mathrm{R}_+)$

és

(ii) a $t \mapsto a(t), b(t), \int_{t-h}^{t} |\lambda(u)|\,du$ függvények korlátosak R_+-on,

akkor a (4.4) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

A (ii) feltételben az a függvény korlátossága szemet szúr, hiszen minél nagyobb a negatív visszacsatolás együtthatója, annál nagyobb az esély az aszimptotikus stabilitásra. Ez a természetellenes megszorítás a 4.A. télel (iv) feltételének következménye. A tétel megszületésétől 1991-ig nyitott kérdés volt, hogy a tételből a (iv) feltételt el lehet-e hagyni. 1991-ben bizonyította be Makay Géza [39, 40], hogy a feltételt nem lehet elhagyni. Ha nem lehet elhagyni, akkor próbáljuk olyan feltételekkel helyettesíteni, amelyek nem vezetnek természetellenes megkötésekhez. A 4.A. tétel más szempontból is javításra szorul: a (iii) feltétel nem engedi meg, hogy V' becslése közvetlenül is függjön az időtől, pedig nem-autonóm rendszereknél ez gyakori, hiszen (4.2) jobb oldala közvetlenül is függ t-től (pl. lásd a (4.6) egyenlőtlenségben az $|x(t)|$ együtthatóját). A (4.6) formula arra is utal, hogy V' becslése nemcsak $|x(t)|$-től, vagyis az x_t szegmens egyetlen (az $s = 0$ helyen felvett) értékétől függhet, hanem függhet az egész szegmenstől is [lásd a (4.6) jobb oldalán álló második tagot], ami ha negatív (mint ott is), segítheti a $t \mapsto V(t, x_t)$ függvény nullához tartását és így az aszimptotikus stabilitást. A 4.A. tételnek több ilyen irányú továbbfejlesztése született [5–8, 18, 20–21, 24, 31, 33, 39, 50, 52–54], amelyek közül itt most egyet említünk példaként:

4.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy létezik egy $V: \mathrm{R}_+ \times C \to \mathrm{R}_+$ folytonos funkcionál, továbbá léteznek szigorúan növekvő, folytonos, a 0-ban eltűnő $W_1, W_2, W_3, W: \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ függvények és egy mérhető $\eta: \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ függvény, úgy, hogy a

(i) $W_1(|x(t)|) \leq V(t, x_t)$;

(ii) $V(t, x_t) \leq W_2(|x(t)|) + W_3\left(\int_{t-h}^{t} x^2(u)\,du\right)$;

(iii) $V'(t, x_t) \leq -\eta(t) W\left(\int_{t-h}^{t} x^2(u)\,du\right)$

egyenlőtlenségek teljesülnek a (4.2) egyenlet minden x megoldása és minden $t \in \mathrm{R}_+$ esetén. Ekkor a következőket állíthatjuk:

I. (T. Burton és L. Hatvani, 1990): Ha

$$\int_0^\infty \eta(t)\,dt = \infty,$$

akkor a (4.2) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

II. Ha

$$\lim_{(T-t_0)\to\infty} \int_{t_0}^{T} \eta(t)\,dt = \infty$$

a $t_0 \in \mathrm{R}_+$ paraméterre vonatkozóan egyenletesen, akkor az aszimptotikus stabilitás egyenletes a $t_0 \in \mathrm{R}_+$ kezdeti időpontra és a φ kezdeti függvényre vonatkozóan, ami azt jelenti, hogy a megoldások 0-hoz tartásának sebessége nem függ t_0-tól és φ-től, feltéve, hogy φ az azonosan 0 függvény egy kis $\|\cdot\|_\infty$-környezetéből való.

A vázolt módszer alkalmazásával a (4.4) egyenletre a (4.5) Ljapunov-funkcionál felhasználásával bebizonyítható a következő

4.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\beta > 1$ konstans, hogy

(i) $a(t) \geq \beta |\lambda(t)| \int_t^{t+h} |b(s)|\,ds \quad (t \in \mathrm{R}_+)$,

és

(ii) $\int_0^\infty \left[a(t) - |\lambda(t)| \int_t^{t+h} |b(s)|\,ds\right] dt = \infty.$

Akkor a (4.4) egyenlet 0-megoldása aszimptotikusan stabilis.

Ez a tétel eleget tesz azoknak a kívánalmaknak, amelyeket a 4.B. következmény után megfogalmaztunk, hiszen az a, b, λ függvényekre nincs korlátossági feltétel, és a függvény „időnként” kicsi is lehet, akár el is tűnhet. Azért ez a tétel is tartalmaz egy további kihívást: igaz-e az állítás $\beta=1$ esetén? Ez a kérdés ma is nyitott.

Irodalom

1. Armellini, G.: Sopra una equazione differenziale della dinamica. *Rend. Acad. Linzei*, 1935, 21, 113–116.
2. Ballieu, R. J. and Peiffer, K.: Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})|\dot{x}|^{\alpha}\dot{x}+g(x)=0$. *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, 34, 321–332.
3. Biernacki, M.: Sur l'equation differentielle $x''+A(t)x=0$. *Prace Mat.-Fiz.*, 1933, 40, 163–171.
4. Burton, T. A.: Uniform asymptotic stability in functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*,1978, 68, 195–199.
5. Burton, T. A. and Hatvani, L.: Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functional. *Tohoku Math. Journal*, 1989, 41, 65–104.
6. Burton, T. A. and Hatvani, L.: On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations. *Differential and Integral Equations*, 1990, 3, 285–293.
7. Burton, T. A. and Makay, G.: Asymptotic stability for functional differential equations. *Acta Math. Hungar.*, 1994, 65, 3, 243–251..
8. Busenberg, S. V. and Cooke, K. L.: Stability conditions for linear nonautonomous delay differential equations. *Quart. Appl. Math.*, 1984, 42, 295–306.
9. Elbert, Á.: On asymptotic stability of some Sturm-Liouville differential equations. *General Seminar of Mathematics*, University of Patras, 1996/97, 22–23, 57–66.
10. Elbert, Á.: Stability of some difference equations. In *Advances in Difference Equations* (Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations, Veszprém, Hungary, August 7–11, 1995). Gordon and Breach Science Publishers, London, 1997, 155–178.
11. Erugin, N. P.: On the theory of canonical systems. *Differencialnye Uravneniya*, 1966, 2, 1317–1332.
12. Fejér, L.: Tömegpont egyensúlya ellenálló közegben. *Mat. és Term. Értesítő*, 1906, 24, 109–120.
13. Fejér, L.: Über Stabilität und Labilität eines materiallen Punktes im wiederstrebenden Mittel. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1906, 131, 216–223.
14. Galbraith, A. S., McShane, E. J. and Parrish, G. B.: On the solutions of linear second order differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1965, 53, 247–249.
15. Graef, J. R. and Karsai, J.: On irregular growth and impulses in oscillator equations. In *Advances in Difference Equations* (Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations, Veszprém, Hungary, August 7–11, 1995). Gordon and Breach Science Publisher, London, 1997, 253–262.
16. Hale, J. and Verduyn Lunel, S. M.: *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer Verlag, New York, 1993.
17. Hatvani, L.: On partial asymtotic stability and instability. IV. Energy-like Lyapunov functions. *Acta Sci. Math.*, 1985, 49, 157–167.

18. Hatvani, L.: On the asymptotic stability of the solutions of functional equations. In *Qualitative Theory of Differential Equations*. Coll. Math. Soc. János Bolyai, 53. North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1988, 227–238.
19. Hatvani, L.: Integral condition on the asymptotic stability for the damped linear oscillator with small damping. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, 124, 415–422.
20. Hatvani, L.: Annulus arguments in the stability theory for functional differential equations. *Differential and Integral Equations*, 1997, 10, 975–1002.
21. Hatvani, L.: On the asymptotic stability by Lyapunov functionals with semidefinite derivative. *Nonlinear Anal.*, 1997, 30, 4713–4721.
22. Hatvani, L.: On the Armellini–Tonelli–Sansone theorem. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 1997, 12, 76–81.
23. Hatvani, L.: On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 1998, 4, 321–330.
24. Hatvani, L.: Lyapunov's direct method for nonautonomous FDE's. *Functional Differential Equations*, 1998, 5, 315–323.
25. Hatvani, L. and Krámli, A.: A condition for non-asymptotical stability. *Differential Equations*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, vol. 15. North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1975, 269–275.
26. Hatvani, L., Krisztin, T. and Totik, V.: A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator. *J. Differential Equations*, 1995, 119, 209–223.
27. Hatvani, L. and Stachó, L.: On small solutions of second order differential equations with random coefficients. *Archivum Mathematicum*, 1998, 34, 119–126.
28. Hatvani, L. and Totik, V.: Asymptotic stability of the equilibrium of the damped oscillator. *Differential and Integral Equations*, 1993, 6, 835–848.
29. Karsai, J.: On the global asymptotic stability of the zero solution of the equation $\ddot{x} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = 0$. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1984, 19, 385–393.
30. Karsai, J.: On the asymptotic stability of the zero solution of certain nonlinear second order differential equations. In *Differential Equations: Qualitative Theory (Szeged, 1984)*. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 47, North-Holland, Amsterdam and New York, 1987, 495–533.
31. Kato, J.: Lyapunov's second method in functional differential equations. *Tohoku Math. J.*, 1980, 32, 487–497.
32. Kato, J.: On the conjecture in the Lyapunov method for functional differential equations. In *Proceedings of the World Congress of Nonlinear Analysis.* Walter de Gruyter, Berlin, 1996.
33. Ko, Yonhee: An asymptotic stability and a uniform asymptotic stability for functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, 119, 535–545.
34. Kolmogorov, A. N.: Théorie générale des systèmes dynamiques et mecanique classique. In *Proc. International Congress of Mathematics, Amsterdam, September 2–9, 1954*, Vol. 1, 315–333.
35. Krasovskii, N. N.: *Stability of Motion*. Stanford Univ. Press, Stanford, 1963.
36. Levin, J. J. and Nohel, J. A.: Global asymptotic stability of nonlinear systems of differential equations and applications to reactor dynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1960, 5, 194–211.
37. Liapounoff, A. M.: *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annals of Math. Studies, 17. Princeton Univ. Press, Princeton, 1949.
38. Macki, J. W.: Regular growth and zero-tending solutions. In *Ordinary Differential Equations and Operators.* Lecture Notes of Math., 1032. Springer Verlag, New York, 1982, 358–374.

SZÉKFOGLALÓK 1995–1998, III–V. kötet

Árkai Péter: A regionális metamorfózis és jelentősége a Kárpát-medence kéregfejlődésében
Bauer Győző: Az oxidatív stressz és az antioxidánsok hatása a simaizomszövetekre
Bérces Tibor: A gyökreakciók sokszínű világa: a reakciók kinetikája és termokémiája
Brassai Zoltán: Végtagkeringési zavarok új kezelési lehetőségei
Csányi Vilmos: Viselkedés, környezet, gének – etológiai tanulmányok
Dohy János: Biotechnológia és állatnemesítés – új eredmények, kihívások, kilátások
Fonyó Zsolt: Integrált vegyipari rendszerek folyamatszintézise
Friedrich Péter: Fehérjék, enzimek, emlékezet
Gáspár Zsolt: A számítógépek hatása a tartószerkezetek mechanikájára
Géczy Barnabás: Kontinuitás, krízis, katasztrófa az ammoniteszek törzsfejlődésében
Gratzer György: Hálóelméleti függetlenségi tételek
Harmathy Attila: A magyar polgári jogról 1999-ben
Haszpra Ottó: Néhány hidraulikai probléma a vízépítésben
Hatvani László: Differenciálegyenletek megoldásainak stabilitási tulajdonságai
Heszky László: Morfogenezis haploid és szomatikus sejtekből in vitro
Hollósi Miklós: Kiroptikai spektroszkópia: változatok egy témára
Honti László: Az uráli/finnugor „ősnyelv"-ről
Horváth János: Disztribúciók és topologikus vektorterek
Kiss Lajos: Az új európai víznévkutatás
Kosa László: A magyar néprajz 1945 után
Kristó Gyula: Előd
Lámfalussy Sándor: Szerkezeti változások az európai pénzpiacon
Lőrincz Lajos: Összehasonlítás a közigazgatás kutatásában
Major György: Napsugárzás a légkörben és a felszínen
Nagy Béla: A háziállatok enterális colibacillosisai
Nagy Elemér: A klasszikus fizikától az anyagtudományig
Nagy István: Változó struktúrájú nemlineáris rendszerek
Nagy Tóth Ferenc: Fényhatásvizsgálat egysejtű zöldmoszatokon
Náray-Szabó Gábor: Elektrosztatikus katalízis
Németh Judit: A nehézion-fizika és asztrofizikai alkalmazásai
Orbán Miklós: Kémiai periodicitás időben és térben
Pápay József: Föld alatti gáztárolás porózus kőzetekben
Papp László: A legyek ritkaságáról
Péter Mihály: Néhány gomba- és baktériumfaj viselkedése a létfeltételek alsó határán
Petrányi Győző: A szuppresszív immunreguláció alkalmazása a transzplantáció és a reproduktív immunológia klinikai gyakorlatában
Pléh Csaba: A relativizmus kérdései és a mai pszicholingvisztika
Salamon Miklós: Kőzetmechanika fejlődése – egyéni szemszögből
Sitkei György: A talaj–kerék kapcsolat néhány elméleti kérdése
Spät András: A kalcium jel és a mitokondrium működése
Szabad György: A parlamentáris kormányzati rendszer megteremtése, védelmezése és kockáztatása Magyarországon (1848–1867)
Szabó András: Alkotmány és büntetőjog
Szabó Miklós: Tumultus Gallicus
Szegedy-Maszák Mihály: A Nyugat és a világirodalom
Szentes Tamás: Fejlődés, rendszerváltás és versenyképesség a globalizálódás korában
Tóth Klára: Szelektív érzékelők jelentősége a kémiai analízisben
Uray Zoltán: Sugársérülések mérséklése kémiai és biológiai anyagokkal
Várallyay György: Talajfolyamatok szabályozásának tudományos megalapozása
Varga János: Földeskü
Vaskovics László: Társadalmi modernizáció és a szülői szerepváltozás összefüggései
Vértes Attila: Fullerénvegyületek Mössbauer-spektroszkópiája
Vizkelety András: A Leuveni Kódex magyar scriptorai
Zalai Ernő: Neumann János: klasszikus vagy neoklasszikus?