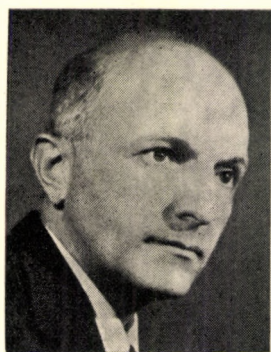




Kollár Lajos
Dulácska Endre
HÉJAK HORPADÁSA

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST



KOLLÁR LAJOS — DULÁCSKA ENDRE

HÉJAK HORPADÁSA

A szerzők a héjstabilitás problémáit közérthetően igyekeznek az olvasó elé tárni. Szemléletes áttekintést adnak a héjhorpadás fizikai jelenségeiről, s a gyakorlati felhasználásra alkalmas formában foglalják össze az igen terjedelmes irodalom eredményeit. Az áttekintés során arra törekedtek, hogy lehetőleg minden jelenséget és problémát szemléletesen bemutassanak. A gyakorlati alkalmazhatóság érdekében képletek és diagramok formájában közlik a méretezéshez jól használható eredményeket. Ily módon a könyv alkalmas segédeszköz a héjstabilitás problémakörében a tervezési feladatok megoldásához, alapot nyújt a további kutatásokhoz, s egyben elősegíti e problémakör egységes oktatását.



AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

Kollár Lajos · Dulácska Endre

Héjak horpadása



Kollár Lajos · Dulácska Endre

Héjak horpadása



Akadémiai Kiadó · Budapest 1975

ISBN 963 05 0396 4

©Akadémiai Kiadó, Budapest 1975.

Printed in Hungary

Tartalomjegyzék

Előszó	9
1. Bevezetés	11
1.1. Célkitűzés	11
1.2. A héjhorpadási jelenségek áttekintése	12
1.3. A könyv felépítése	16
2. Hengerhéjak horpadása	18
2.1. Alkotóirányú (axiális) nyomás	18
2.2. Hajlított henger	35
2.3. Gyűrűirányú (ívirányú) nyomás	36
2.4. Az alkotó- és a gyűrűirányú nyomás együttes hatása	43
2.5. A gyűrűirányú húzás stabilizáló hatása az alkotóirányú nyomásra	44
2.6. Csavart henger	47
2.7. Csavarás és tengelyirányú nyomás együttes hatása	50
3. Kúphéjak horpadása	51
3.1. Alkotóirányú nyomás	51
3.2. Hidrosztatikus nyomás	52
3.3. Az alkotóirányú és a hidrosztatikus nyomás együttes hatása	54
4. Gömbhéjak és elliptikus felületű kupolák stabilitása	55
4.1. Gömbhéj horpadása egyenletes radiális teher hatására	55
4.2. Féloldalasan terhelt gömbsüveghej horpadása	72
4.3. Két irányban különböző görbületű kupolahéjak horpadása	72
5. Hiperbolikus paraboloidhéjak stabilitásproblémái	77
5.1. Torznégyszög alakú héj horpadása egyenletes teher okozta nyírófeszültség hatására	77
5.2. Hiperbolikus membránhéjak kinematikai határozatlansága	79
6. Szabad szélű héjak stabilitásproblémái	82
6.1. A szabad szélű héjak stabilitásáról általában	82
6.2. Héjívvek és héjgerendák stabilitása	84
6.2.1. Stabilitásvizsgálatok az ív síkjában	85
6.2.2. Stabilitásvizsgálatok az ív síkjára merőlegesen	89
6.2.3. Vékonyfalú gerendák kifordulása	91
6.2.4. A héjlemez helyi horpadása	93
7. Ortotróp héjak horpadása	94
7.1. Az ortotróp héj általában	94
7.2. Az ortotróp héj lineáris kritikus terhe	96

7.3.	Az ortotróp henger lineáris kritikus terhe	97
7.3.1.	Az ortotróp henger axiális nyomása (belső túlnyomással vagy anélkül)	98
7.3.2.	Az ortotróp henger hajlításból származó axiális nyomása	99
7.3.3.	A külső felületi nyomással terhelt, gyűrűirányban nyomott ortotróp henger	100
7.3.4.	A hidrosztatikus nyomással terhelt ortotróp henger	101
7.3.5.	Az ortotróp henger csavarása	101
7.3.6.	Az ortotróp hengerre ható különböző teherfajták együttes hatása	104
7.4.	Az ortotróp kúphejak lineáris kritikus terhe	105
7.5.	Az ortotróp gömbhejak lineáris kritikus terhe	105
7.6.	Az ortotróp hiperbolikus paraboloidhéj lineáris kritikus terhe	105
7.7.	Az ortotróp héjakra vonatkozó nemlineáris és kísérleti vizsgálatok	107
7.7.1.	A hengerre vonatkozó nemlineáris és kísérleti vizsgálatok	107
7.7.2.	Az egyéb héjakra vonatkozó nemlineáris és kísérleti eredmények	112
8.	Szendvics-, bordás, rácsos és hullámos héjak stabilitása	114
8.1.	Szendvicshejak	114
8.1.1.	Az általános horpadás	116
8.1.2.	A helyi kihajlás	118
8.2.	Bordás héjak	119
8.2.1.	A bordák közötti héjmezők horpadása és a bordázás szükséges sűrűsége	120
8.2.2.	A bordákkal hajlításra együttműködő lemezszerűség	125
8.2.3.	A külpontos bordázattal kapcsolatos problémák	129
8.2.4.	A bordás lemez harántkontrakciós tényezője (ν)	133
8.2.5.	A bordák szükséges sűrűsége a folytonos ortotróp héjként való számításhoz	134
8.2.6.	A bordás héjjal egyenértékű ortotróp héj merevségi tényezői	134
8.3.	Rácsos héjak	135
8.3.1.	Egyrétegű rácsos héjak	135
8.3.2.	Kétrétegű rácsos héjak	137
8.4.	Hullámos héjak	138
9.	A stabilitáselmélet eredményeinek gyakorlati felhasználása	143
9.1.	A héjak kritikus terhét befolyásoló tényezők és hatások	143
9.2.	A számításba veendő mértékadó hullámosság (külpontosság)	144
9.3.	A külpontosan nyomott rugalmas héj felső kritikus terhének közelítő meghatározása	147
9.4.	A képlékenység hatása	149
9.5.	A fémhéjak problémái	155
9.5.1.	A fémek alakváltozási tényezője	155
9.5.2.	A fémhéjak méretei	156
9.6.	A vasbeton héjak problémái	156
9.6.1.	A beton alakváltozási jellemzői	157
9.6.2.	A vasbeton keresztmetszet héjhorpadási merevségi jellemzője	159
9.6.3.	A vasbeton héj felső kritikus terhének meghatározása	160

9.7. A kritikus teher meghatározása modellkísérletekkel és megépült szerkeze- teken végzett mérésekkel	165
9.8. A biztonsági tényező	167
A könyvben szereplő, máshonnan átvett ábrák és forrásaik jegyzéke	170
Irodalom	172
Tárgymutató	183
Névmutató	189

Előszó

A tudományok fejlődését többek között azon lehet lemérni, hogy mennyivel egyszerűbben tehető ma közkinccsé a régebben csak bonyolultan leírható ismeretanyag. Ez a mű a fenti alapelvnek egy speciális területen való megvalósítására törekszik: a héjhorpadási problémáknak közérthető és gyakorlatilag közvetlenül használható összefoglalását kísérli meg.

Az első szerzőtől az 1–6., valamint a 8.2.—8.3. fejezetek, a második szerzőtől pedig a 7., 8.1., 8.4. és 9. fejezetek származnak, de mindkét szerző az egész műért közösen vállalja a felelősséget.

A szerzők köszönettel tartoznak dr. KORÁNYI Imre professzornak, akinek kezdeményezésére a mű létrejött, mindazoknak a szerzőknek és kiadóknak, akiktől a 170–171. oldalon felsorolt ábrákat átvették és az Akadémiai Kiadónak a könyv magas színvonalú kiállításáért. Végül itt szeretnének megemlékezni dr. MENYHÁRD Istvánról, akitől megtanulták: hogyan lehet egyesíteni a tervezőmérnöki és a tudományos szemléletet. Ha ezt sikerült e műben megvalósítani, az nagyrészt az ő érdeme.

Dr. Kollár Lajos

Dr. Dulácska Endre

1. Bevezetés

1.1. Célkitűzés

A szerkezettervező mérnök az olyan általános számítási módszert részesíti előnyben, amellyel szerkezetének erőjátékát vagy stabilitási biztonságát lehetőleg nem túlzottan nagy számítási munkával tudja meghatározni.

Rúdszerkezeteknél az erőjáték meghatározására a tartók statikája ad ilyen általános módszert, a stabilitásszámításra viszont csak differenciálegyenletet írhatunk fel, amelyet minden esetre külön kell megoldanunk, a peremfeltételeknek megfelelően. A kézikönyvek azonban ma már a kész megoldásoknak elég sok változatával szolgálnak a tervező mérnöknek. Ezek között interpolálva felveheti a rúd szükséges méreteit, sőt a végleges méretezést is elvégezheti.

A héjak stabilitási problémái természetesen sokkal bonyolultabbak, mint a rudakéi, ezért a tervező itt még kevésbé kaphat általános módszert a stabilitásproblémák megoldására. E témakör irodalma főleg részproblémák megoldásából áll, s ezeket a tervező mérnök már csak idő hiányában sem tudja áttekinteni. Ezenkívül az egyes cikkek természetesen a tárgyalt részprobléma különlegességeit emelik ki, s nem adnak áttekintést a problémakör egészéről.

E mű összeállítása során lényegében kettős célt tűztünk magunk elé. Egyrészt szemléletes áttekintést kívánunk adni a héjhorpadás problémakörének fizikai jelenségeiről, másrészt a gyakorlati felhasználásra alkalmas formában kívánjuk kiszűrni az igen terjedelmes irodalom eredményeit.

Az áttekintés során elsősorban nem az irodalom minél teljesebb feldolgozására, és nem is az elmélet részletes ismertetésére törekedtünk, hanem arra, hogy lehetőleg minden jelenséget és probléma-ágot sorra vegyünk és szemléletesen bemutassunk. A gyakorlati alkalmazhatóság érdekében képletek és diagramok formájában közöljük a méretezéshez jól használható eredményeket, és utalunk arra, hogy a részletkérdések kimerítő tárgyalását az irodalomban hol találhatjuk meg. Számos problémánál közelítő eljárást ismertetünk, főleg ha szemléletesebb és egyszerűbb a pontosnál, de korlátait mindig igyekszünk megadni.

Ami a tárgyalásmódot illeti, a nagy elméleti nehézségek miatt csak néhány jellegzetes esetre mutatjuk be a rugalmas horpadásszámítás levezetését, a többi esetben csak az elméleti vizsgálat eredményét ismertetjük.

Az irodalmi összeállításban felsorolt alábbi művek összefoglaló módon foglalkoznak a héjhorpadással:

[1.1] széles körű áttekintést ad a héjhorpadási problémákról,

[1.2] a henger- és gömbhéjhorpadás legújabb elméleti eredményeit foglalja össze,

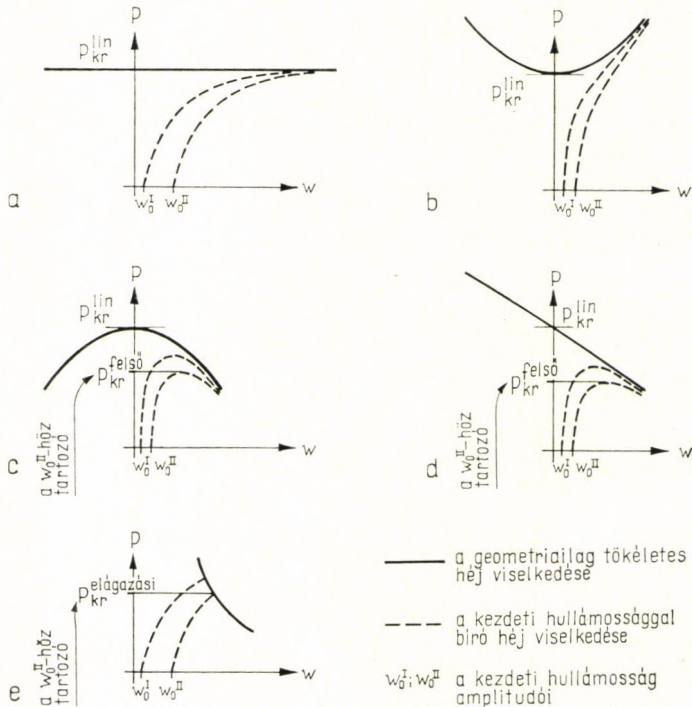
[1.3] a kritikusan túli viselkedéssel kapcsolatos, elsősorban KOTTER elméletén alapuló kutatásokról számol be,

[1.4] és [1.5] pedig referátumszerűen dolgoz fel többszáz cikket.

1.2. A héjhorpadási jelenségek áttekintése

Amint a központosan nyomott rugalmas rudak stabilitásvizsgálatában, itt is kereshetjük a tehernek azt a kritikus értékét, amely mellett létrejöhet egy, a ki nem horpadt állapothoz végtelenül közel eső szomszédos, kihorpadt egyensúlyi helyzet („elágazási probléma”). Ehhez a vizsgálathoz a végtelenül kicsi elmozduláskomponenseknek (ill. deriváltjaiknak) csak első hatványait kell figyelembe venni, mivel a második hatványok már egy nagyságrenddel kisebbek és így elhanyagolhatók. Ezt a továbbiakban „*lineáris elmélet*”-nek fogjuk hívni.

Az így meghatározott lineáris kritikus teher (P_{kr}^{lin}) azonban sok esetben lényegesen nagyobb a kísérletek adta kritikus tehernél. Ezért a horpadás után bekövetkező nagy alakváltozásokat is követnünk kell, és ehhez az úgynevezett „nagy alakváltozásos” (*nemlineáris*) elméletet kell használnunk. Ennek lényege abban áll, hogy a horpadási alakot megszabó eltolódáskomponensek magasabb rendű hatványait is figyelembe vesszük („*geometriai nemlinearitás*”). A nemlineáris rugalmas instabilitásvizsgálat KOTER alapvető dolgozata ([2.24], ill. [2.25]) szerint úgy építhető fel, hogy a horpadási alak(oka)t a ki nem horpadt állapottól mért eltolódáskomponensek hatványsorába fejtjük, és e hatványsorból annyi tagot veszünk figyelembe, amennyit a számítási lehetőségek megengednek. A legegyszerűsített esetben a kritikus teher (P_{kr}) a kezdeti hullámosság amplitúdójától (w_0) függően változik, és a kritikus teher (P_{kr}) a kezdeti hullámosság amplitúdójától (w_0) függően változik, és a kritikus teher (P_{kr}) a kezdeti hullámosság amplitúdójától (w_0) függően változik.



1.1. ábra. A kritikuson túli teherbírás jellegzetes esetei a horpadási alakváltozás függvényében

szerűbb esetben a héjfelületre merőleges (legnagyobb) w eltolódáskomponens második hatványait vesszük figyelembe, a héjfelülettel párhuzamos két eltolódáskomponensnek azonban csak az első hatványait tartjuk meg, mivel ezek sokkal kisebbek a merőleges eltolódáskomponensnél, és így ez utóbbi négyzetével azonos nagyságrendűek. Ily módon nyomon követhetjük a behorpadt héj viselkedését a héjvastagság többszörösét kitevő alakváltozásokig is. Az elvégzett vizsgálatok szerint a szerkezet az 1.1a. — e. ábrákon vázolt görbék valamelyikének megfelelően viselkedik (lásd pl. [1.6]-ban). Az ábrákon a függőleges tengelyre a terhet (P), a vízszintes tengelyre pedig a héjfelületre merőleges horpadási elmozdulást (w) raktuk fel.

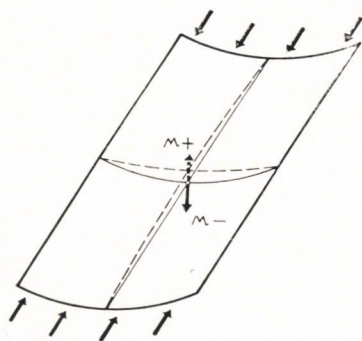
Az 1.1a. típusú görbék azt mutatják, hogy központos esetben a kritikus teher elérése után indifferens egyensúlyi állapotba kerül a szerkezet: *teherbírása konstans marad*. A kezdeti kiülbontosság (hullámosság) hatására nagyobb lesz ugyan az alakváltozása, de a görbéknek nem lesz tetőpontjuk, mivel aszimptotikusan közelkednek a központos eset vízszinteséhez. Így a kiülbontásokban nem beszélhetünk „kritikus” teherről. Ez a diagram héjaknál ritkán fordul elő, jól leírja viszont sok rúdszerkezet stabilitási viselkedését.

A héjakra sokkal többször jellemző a többi görbétípus.

Az 1.1b. ábra a kritikuson túli *emelkedő teherbírás* esetét mutatja. Központos esetben van „kritikus erő”, de kezdeti hullámosság esetén ez „elmosódik”: a szerkezet horpadási alakváltozása fokozatosan nő, miközben teherbírása is növekszik. Az ilyen szerkezet tehát nem érzékeny a kezdeti hullámosságokra. A legismertebb példát erre a síklemezek szolgáltatják, amelyeket még az is jellemez, hogy $+w$ -nél és $-w$ -nél azonosan („szimmetrikusan”) viselkednek. Az emelkedő kritikuson túli teherbírás fizikai feltételeivel a 6.1. pontban foglalkozunk. Ide tartozik — bizonyos geometriai arányoknál — a gyűrűirányban nyomott, valamint a csavart henger is (2.3. és 2.6. pontok).

Az 1.1c.,d.,e., ábrákkal leírható szerkezeteket az jellemzi, hogy egy bizonyos kritikus teherérték elérése után *csökken a teherbírásuk*. Az 1.1c. ábra héjszerkezete $+w$ -nél és $-w$ -nél azonosan viselkedik: a horpadási viselkedés szempontjából „szimmetrikus”. Ha a héjat akár a felület geometriai tökéletlensége, akár hajlítás folytán „zavarás” éri, (ezt az ábrákon „kezdeti hullámosság”-gal jelöltük), akkor már a tökéletes héjra meghatározható P_{kr}^{lin} elérése előtt elérjük a teherbírás maximumát ($P_{kr}^{felső}$ -t), amelynél „*átpattan*” a héj. E $P_{kr}^{felső}$ lesz most a kritikus teher, amely nagymértékben függ a kezdeti hullámosság w_0 amplitúdójától. Az ilyen szerkezetek tehát igen érzékenyek a kezdeti hullámosságokra, és semmiképpen sem méretezhetjük őket a lineáris kritikus teher alapján. Így viselkedik a hidro sztatikusan nyomott és a csavart henger (ez utóbbi csak bizonyos geometriai arányoknál), valamint az alkotóirányban nyomott henger, ha helyi (aszimmetrikus) hullámokban horpad (2.3., 2.6. és 2.1. pontok).

Az 1.1d. ábra szerkezete a $+w$ és a $-w$ szempontjából „aszimmetrikusan” viselkedik. A gyakorlat szempontjából azonban csak az ábra eső

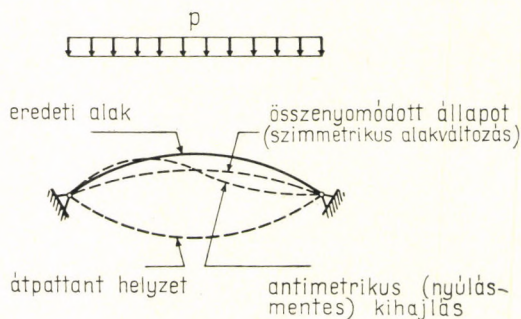


1.2. ábra. Példa az „aszimmetrikusan” viselkedő szerkezetre

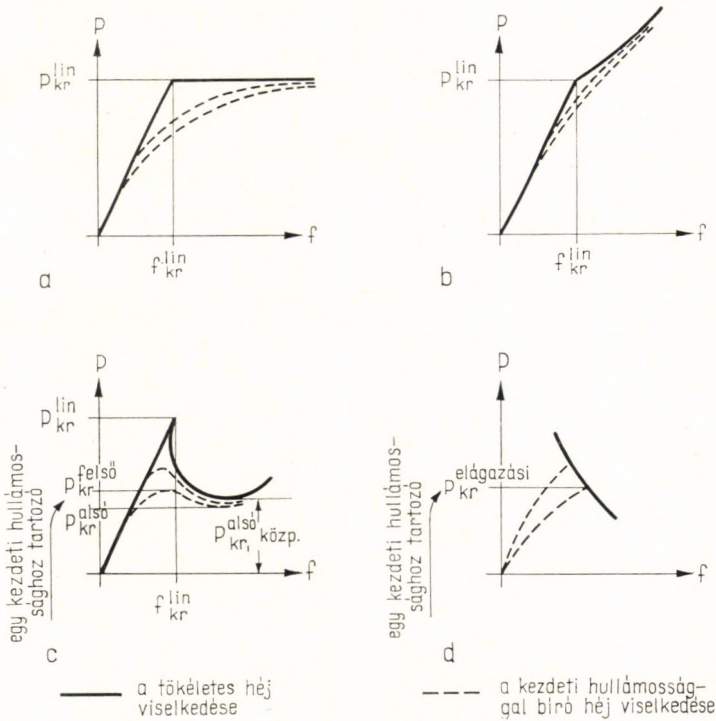
(jobb oldali) ága a fontos: az ennek megfelelő előjelű kezdeti hullámosság hatása ugyanis lényegében ugyanaz, mint az 1.1c. ábra esetében volt. Az aszimmetrikus viselkedés fizikai magyarázata az, hogy a szerkezet az egyik irányú kihajlási deformáció során „merevedik”, a másik irányúnál viszont „lágyl”. Jó példa erre a radiális külső nyomással terhelt teljes gömbhéj körszimmetrikus behorpadása [4.21]: ha kifelé horpadna, a horpadási hullámon belül nőnie kellene a héj görbületének, azaz merevedne, így inkább befelé horpad, miközben ellapul, azaz egyre lágább lesz (9.3. ábra). Hasonlóan viselkedik ([2.57] 305. o. szerint) az alkotóirányban nyomott hengerhéj-mező, ha gyűrű- és alkotóirányban egy-egy félhullámban horpad (1.2. ábra): ha kifelé deformálódik, nő a görbülete és merevedik, ellenkező esetben lágyl. A 6. fejezetben ismertetendő héjívvek is különbözőképpen viselkednek az ív síkjában bekövetkező kétirányú meggörbülés hatására, a központosan nyomott ív azonban — mivel két fele ellenkező értelemben görbül meg — „szimmetrikus” a kritikuson túli viselkedés szempontjából.

Végül az 1.1e. ábra azt a különleges esetet mutatja, amikor a héj egy bizonyos alakú kezdeti hullámosságnak megfelelően deformálódni kezd (pl. az 1.1c. ábra valamelyik szaggatott vonala szerint), és mielőtt még elérné a görbe tetőpontját jelentő „átpattanási” terhet ($P_{kr}^{felső}$), egy ponton „elágazik” e görbéből egy másik horpadási alak, és e szerint megy tönkre a héj. Ez utóbbi horpadási alak azonban csak a már (más alakban) deformálódott héjon ágazik el ilyen alacsony teherintenzitásnál, a deformálatlan héjon csak magasabb teherintenzitás okozna ilyen alakkal instabilitást.

Ez az elágazási jelenség az 1.1a. ábra szaggatott vonalainak megfelelő deformációval kapcsolatban is előfordulhat, és nemcsak eső (aszimmetrikus) elágazás következhet be, hanem az 1.1b., ill. c. ábrának megfelelő szimmetrikus elágazás is. Szemléletesen mutatja ezt a stabilitásvesztési módot az egyenletes teherrel terhelt lapos ívtartó viselkedése (1.3. ábra). Ismeretes [2.51], hogy az ilyen lapos ív kétféle alakban hajolhat ki: kellő mértékű összenyomódás után szimmetrikusan átpattanhat lefelé (az 1.1c. ábra valamelyik szaggatott görbéje szerint), vagy pedig nyúlásmentes alakváltozással, antimetrikus alakban kihajolhat. Mármost előfordulhat az az eset, hogy a teher hatására szimmetrikusan összenyomódik az ív, még nem annyira, hogy szimmetrikusan átpattanjon, de ahhoz eléggé, hogy az összenyomódás következtében megnövekedett nyomóerő antimetrikusan ki-



1.3. ábra. A lapos ív szimmetrikus deformációjából elágazó antimetrikus kihajlás



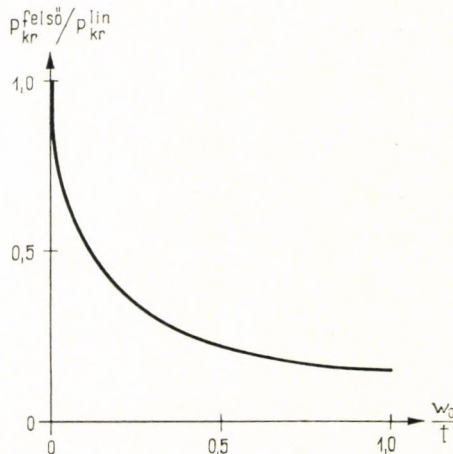
1.4. ábra. A kritikuson túli teherbírás jellegzetes esetei a teher irányába eső elmozdulás függvényében

hajltsa. (Ez az elágazás maga most az 1.1c. ábrának felel meg, azaz $+w$ és $-w$ szempontjából szimmetrikus.) Az ilyen kihajlást előidéző teher intenzitása szemmel láthatóan kisebb lesz a deformálatlan ívtartó antimetrikus kihajlását okozó tehernél.

Az 1.1e. ábrával kapcsolatban mondottakból az is kitűnik, hogy héjaknál — ellentétben a rudak és lemezek esetével — nem mindig a horpadási alakkal konform kezdeti hullámosság a legveszélyesebb, hanem esetleg egy egészen másfajta, mint az „elágazó” horpadási alak. Amint majd látni fogjuk, pl. az alkotóirányban nyomott hengerhéj (2.1. pont) és a radiálisan nyomott gömbsüveghéj (4.1. pont) viselkedhet az 1.1e. ábrának megfelelően.

Az 1.1. ábra diagramjait a horpadási w elmozdulás helyett a teher irányába eső „átlagos” elmozdulás (f) függvényében is felrakhatjuk. Mivel f első közelítésben w^2 -tel arányos (lásd pl. [2.51]-ben), ezért a görbék jellege bizonyos fokig megváltozik és az 1.4. ábrának megfelelő lesz. Az 1.4a. ábrához nincs hozzáfűznivalónk. Az 1.4b. ábra különböző meredekségekkel (különböző törésszöggel) folytatódhat P_{kr}^{lin} -től kezdve. Az 1.4c. ábra egyaránt megfelelhet az 1.1c. és az 1.1d. ábráknak, a P_{kr}^{lin} -től eső görbe-ág kezdeti érintője különböző lehet (vö. a 8.2.3a. ábrával). Ennek a diagramnak a mélypontján túli, emelkedő szakaszát is megrajzoltuk, mivel több esetre kiszámították. Végül az 1.4d. ábra az 1.1e. ábrának felel meg.

A kritikuson túli eső teherbírású héjszerkezetek (1.1c., d., e., ill. 1.4c., d. ábrák) gyakorlati méretezéséhez célszerű a P_{kr}^{lin} -hoz viszonyított $P_{kr}^{felső}$ kritikus erőt a w_0 kezdeti hullámossági amplitúdó és a t falvastagság arányának függvényében felrakni. Így általában az 1.5. ábrán vázolt görbéhez jutunk, amely igen meredek, ill. függőleges érintővel indul, és ezzel szemléletesen mutatja e szerkezeteknek a kezdeti hullámosságokkal szemben tanúsított nagyfokú érzékenységét.



1.5. ábra. Az átpattanást okozó kritikus teher függése a kezdeti hullámosságtól

A héjak egy része bizonyos fajta terhek hatására sok kis helyi hullámban horpad. Ezeknek a kritikus terhe gyakorlatilag nem függ a peremfeltételektől, feltéve, hogy a peremek megtámasztása nem gyengébb magánál a héjnál. Más esetekben azonban a horpadási hullámok kiterjedhetnek a héj teljes szélességére (vagy hosszúságára) is. Ebben az esetben már lényeges lesz a peremfeltételek hatása.

1.3. A könny felépítése

A 2—6. fejezetekben a különböző alakú *homogén, izotróp* (egy lemezből álló, „tömör”) héjakról foglaljuk össze az 1.2. pontban elmondott jelenségekről rendelkezésünkre álló ismeretanyagot, mindig tökéletesen *rugalmas* anyagot véve alapul.

Előnyösen növelhetjük a héjak merevségét *bordázással*, sőt kialakíthatjuk a héjfelületet magának a lemeznek az elhagyásával, csupán háromszög-hálózatú rudakból is (*rácsos héjak*). A bordázás vagy rácsosítás általában anizotróppá teszi a héjat, ami tetemesen megnehezíti a horpadásszámítást és néhány új jelenséget is okoz. Ezért a 7. fejezetben az *anizotróp héjak* stabilitáselméletének legfontosabb eredményeit is ismertetni fogjuk, aminek segítségével a bordás és a rácsos héjakon kívül a *hullámos* és a *szendvics*héjak viselkedését is leírhatjuk (8. fejezet). Ez utóbbiaknak a hajlítási nyírásra bekövetkező alakváltozása sokkal nagyobb a tömör héjakénál, így ennek a stabilitásra gyakorolt hatására is kitérünk.

A héjhorpadással kapcsolatos sok bizonytalanság miatt természetesen igen nagy szerepe van a *kísérleteknek*. Ezek eredményeit a lehetőségekhez képest részletesen fogjuk közölni.

Tárgyalásunk végén (a 9. fejezetben) sorra vesszük, mivel kell a rugalmas stabilitáselmélet bemutatott eredményeit kiegészítenünk, illetve korrigálnunk ahhoz, hogy *acél-, vasbeton- vagy más anyagból* készült héjszerkezetekre alkalmazhassuk őket. E kiegészítésekben ugyancsak a gyakorlati használhatóság és az egyszerűség volt a fő célunk.

Elsősorban azt kell figyelembe vennünk, hogy a héjak anyaga legfeljebb csak bizonyos határig lineárisan rugalmas, utána képlékennyé válik („fizikai nemlinearitás”). A héjstabilitási vizsgálatok bonyolultsága miatt eddig alig néhány próbálkozás történt a *képlékenységi* elméleti figyelembevételére. Ezért meg kell elégednünk egy egyszerű közelítő módszerrel, amely a gyakorlati számítás során a rugalmas elmélet alapján meghatározott eredményeket az anyag képlékeny tulajdonságának megfelelően korrigálja.

A vasbetonhéjakban fellépő *hajszáltrepedések* a héjlemez merevségét jelentősen csökkentik a repedetlen keresztmetszethez képest, ezért a kritikus teher is erősen csökken a repedések felléptével. Ezért bemutatjuk, miként lehet a repedések merevségsökkentő hatását figyelembe venni.

A vasbeton héj anyagának *kúszása* (a lassú alakváltozás) ugyancsak lényegesen csökkentheti a kritikus terhet. A képlékenységhöz hasonló nehézségek miatt azonban ezt is csak közelítően tudjuk figyelembe venni.

Néhány szót szólnunk a kritikus teher *kísérleti meghatározásáról*.

Végül sorra vesszük mindazokat a még felmerülő szempontokat (a héj kritikusan túli viselkedése stb.), amelyek megszabják, hogy mekkora a célszerű *biztonsági tényező*.

2. Hengerhéjak horpadása

A következő igénybevételek esetére ismertetjük a stabilitásprobléma megoldásait:

alkotóirányú (axiális) nyomás, valamint az ezzel rokon hajlítás,
gyűrűirányú (hidrosztatikus) nyomás,
csavarás.

Kitérünk arra is, hogy két különböző igénybevétel együttes hatására mikor következik be a horpadás.

2.1. Alkotóirányú (axiális) nyomás

A kísérletek szerint az alkotóirányban nyomott henger kis helyi hullámokban horpad. A végek megtámasztása (a két peremfeltétel) általában csak akkor van hatással a horpadásra, ha rövid a henger. Alapvetően kétféle horpadási alak jöhet létre: tengelyszimmetrikus, gyűrűalakú hullámok, vagy pedig hálós elrendezésű ki- és behorpadások (2.1a. ábra).

Egyes kísérletekben a 2.1b. ábrának megfelelő horpadási hullám-alakok jelentkeztek. Ennek egyik oka az, hogy a törőgépek többnyire adott összenyomódást kényszerítenek a héjra, amit ez csupán a középső szakasz behorpadásával is követni tud, másik oka pedig a peremek merevítő hatása. (Súlyterhelés esetéül csak ez utóbbi jut szerephez [2.41].)

A *lineáris elmélet* szerinti kritikus feszültségre mi itt egy egyszerűsített levelezést mutatunk be [2.12] alapján, amely kihasználja a kísérleteknek azt az eredményét, hogy *hálós* horpadási alak esetén egy horpadási hullám csak kis területre terjed ki, és így ezen belül *laposnak* tekinthető a héj.

A lapos héjak általános egyensúlyi és összeférhetőségi egyenlete x, y derékszögű koordinátákban a következő [2.17], [2.35], [2.56]:

$$B\Delta w - L_P F = p, \quad (2.1a)$$

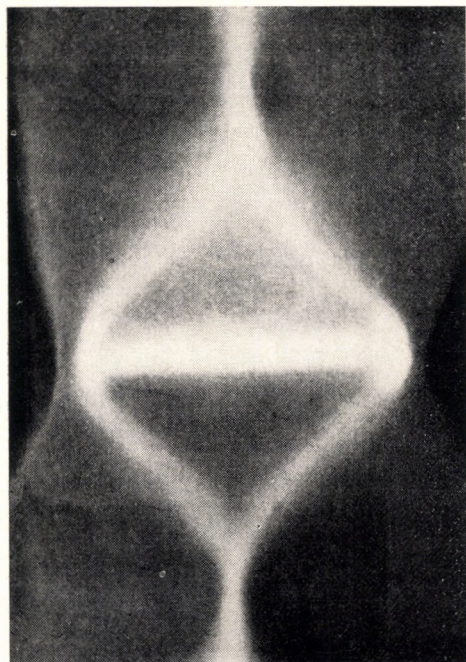
$$\Delta F + D(1 - \nu^2)L_P w = 0. \quad (2.1b)$$

Itt

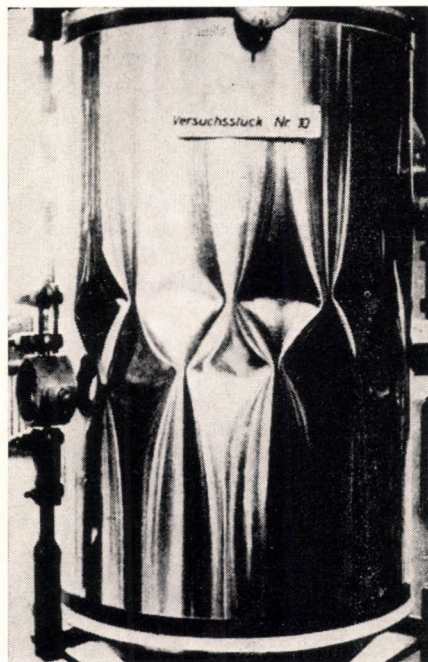
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.2a)$$

és

$$L_P = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.2b)$$



a



b

2.1. ábra. Az alkotóirányban nyomott hengerháj horpadási alakjai

a Laplace- és a Pucher-féle differenciáloperátor,

$z(x, y)$ — a héjfelület egyenlete,

w — a héjfelületre merőleges elmozdulás (a héj horpadási alakváltozása),

F — a feszültségfüggvény.

A feszültségfüggvény második deriváltjai a membran-metszeterőket adják meg:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = n_x, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = n_y, \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -n_{xy}. \quad (2.3c)$$

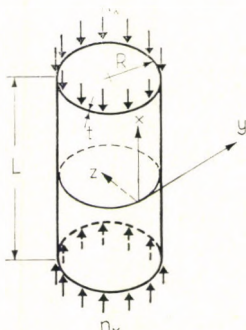
Továbbá:

$$B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \text{ a héj hajlítási merevsége,}$$

$$D = \frac{Et}{1-\nu^2} \text{ a héj nyúlási merevsége,}$$

E — a rugalmassági tényező,
 t — a héj vastagsága,
 ν — a harántkontrakciós tényező,
 p — a felületre merőleges teher.

Mivel a (2.1a–b) alapegyenleteket úgy vezették le, hogy az alakváltozásoknak az elmozdulásokkal való kifejezéséből csak a lineáris tagokat vették figyelembe, ezért a (2.1a–b) egyenletek is lineárisak, és a belőlük kapható kritikus teher is a lineáris elmélet kritikus terhe lesz.



2.2. ábra. Alkotóirányban nyomott henger

A (2.1a,b) egyenletek általános érvényűek, így tartalmazhatják a horpadás előtti membránállapot egymással egyensúlyban levő p külső terhét és véges membránereit, valamint a horpadás folyamán keletkező igen kis membránereő-növekményeket és a horpadás előtti véges membránereőknek a horpadási görbülettel való szorzatából keletkező, a héjfelületre merőleges, kis \bar{p} teher-növekményeket is. A továbbiakban elhagyjuk a (2.1a,b) egyenletekből a horpadást megelőző (egyensúlyban levő) erőjártékot és csak a horpadás során keletkező erő- és teherrészeket tartjuk meg. A (2.1a) és (2.1b) egyenletekből kiküszöböljük) F -et. Ehhez az első egyenletet $\Delta\Delta$ -val, a másodikat L_P -vel szorozzuk és összeadjuk őket:

$$B\Delta^4 w + D(1 - \nu^2)L_P^2 w = \Delta^2 \bar{p}. \quad (2.4)$$

Hengerhéj esetén (2.2. ábra):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

és (ha a z tengely befelé mutat)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{R},$$

így

$$L_P = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2.5a)$$

Alkotóirányú nyomás okozta horpadás esetében a felületre merőleges \bar{p} terhet a horpadást megelőző állapot n_x metszeterőjének a horpadási görbülettel való szorzata szolgáltatja:

$$\bar{p} = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.5b)$$

Mindezeket behelyettesítve (2.4)-be, w -re a következő homogén differenciálegyenletet kapjuk:

$$B\Delta^4 w + D(1 - \nu^2) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = n_x \Delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.6)$$

Ez ún. „sajátérték-feladat”: meg kell határoznunk n_x -nek azon értékeit, amelyek mellett w -re zérustól különböző megoldás lehetséges. Ha felvesszünk w -re egy hálós („saktáblaszerű”) horpadást adó

$$w = w_1 \sin \frac{\pi}{l_x} x \sin \frac{\pi}{l_y} y \quad (2.7)$$

kihajlási alakot, amelyben l_x és l_y a horpadási félhullámhosszak, és behelyettesítjük (2.6)-ba, w -vel egyszerűsítve a következő kifejezés adódik a kritikus alkotóirányú nyomóerőre (amely mellől elhagytuk a mínusz előjelet):

$$n_x = B\pi^2 \frac{\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}{\frac{1}{l_x^2}} + \frac{D(1-\nu^2)}{R^2\pi^2} \frac{\frac{1}{l_x^2}}{\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}. \quad (2.8)$$

Ebben még ismeretlen az x és y irányú horpadási félhullámhossz. Ezek arányát egyelőre állandónak vesszük, és minimalizáljuk n_x -et

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}{\frac{1}{l_x^2}} \right]$$

szerint:

$$\frac{\partial n_x}{\partial \left[\frac{\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}{\frac{1}{l_x^2}} \right]} = B\pi^2 - \frac{D(1-\nu^2)}{R^2\pi^2} \frac{\frac{1}{l_x^2}}{\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^4} = 0. \quad (2.9)$$

Innen:

$$\frac{\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}{\frac{1}{l_x^2}} = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{D(1-\nu^2)}{BR^2}}. \quad (2.10)$$

Ezt (2.8)-ba helyettesítve megkapjuk a kritikus alkotóirányú nyomóerő minimális értékét:

$$n_{x,kr}^{lin} = 2 \sqrt{\frac{BD(1-\nu^2)}{R^2}} = \frac{Et^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)} R}. \quad (2.11)$$

Ez $\nu = 0,3$ esetére az

$$n_{x\text{kr}}^{\text{lin}} = 0,606 \frac{Et^2}{R} \quad (2.12)$$

értékét adja.

A kritikus nyomófeszültség pedig:

$$\sigma_{x\text{kr}}^{\text{lin}} = \frac{n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}}{t} = \frac{Et}{\sqrt{3(1-\nu^2)} R} \quad (2.13)$$

Amint látjuk, az eredményből kiesett a két félhullámhossz aránya. A horpadási hullám nagyságára ugyan fennáll a (2.10) megkötés, de a kritikus feszültség független a hullám alakjától. Ez fizikailag — az energiamódszer alapján — azzal szemléltethető, hogy pl. $l_x = l_y$ (négyzetes hullám) esetén ugyan nagyobb a hajlítási munka, de kicsi a gyűrűirányú húzásból származó nyúlási munka. Ha pedig $l_y \rightarrow \infty$ (tengelyszimmetrikus, „gyűrűalakú” horpadás), akkor kisebb a hajlítási munka, mivel csak egyirányú hajlítást szenved a héj, de megnő a gyűrűirányú húzás munkája.

A bemutatott levezetés azért nem teljesen általános, mert egyrészt feltételezi, hogy a héj lapos, másrészt pedig előre megkötötte a horpadási alakváltozást a (2.7) kifejezéssel. Ugyanezt a kritikus feszültséget kapjuk meg azonban akkor is, ha (2.7) helyett 45° -kal elforgatott hálós horpadási alakot veszünk fel, sőt akkor is, ha tengelyszimmetrikus (gyűrűalakú) horpadást tételezünk fel. Ez utóbbi esetben egyértelmű kifejezést kapunk az alkotóirányú horpadási félhullámhosszra [2.51]:

$$l_x = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{Rt}}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \approx 1,72 \sqrt{Rt} \quad (2.14)$$

(ha $\nu = 0,3$).

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy kizárólag a tisztán alkotóirányú erővel terhelt izotróp héj mutatja ezt a sajátosságot, hogy ti. lineáris kritikus terhe független a horpadási alaktól. Már a kritikuson túli viselkedésben is eltér egymástól a hálós és a gyűrűszerű horpadás. A héj ortotrópiája, vagy pedig az alkotóirányú erőn kívül működő gyűrűirányú húzás eltávolítja egymástól a különböző horpadási alakokhoz tartozó lineáris kritikus terhek nagyságát (2.5 pont).

A teljesen általános, pontos levezetést [2.6]-ban, [2.17]-ben, [2.43]-ban vagy [2.51]-ben találhatjuk meg. Ugyanezt az eredményt adja, mint a (2.13) kifejezés.

A kísérleti eredmények azonban csak mintegy 15–60%-át adták ennek a lineáris elmélet szerinti kritikus feszültségnek. A 2.3a., b., c. ábrákon összeállítottuk az irodalomban [2.9], [2.33], [2.53], [2.57] fellelhető kísérletek eredményeit.

Ezt a nagy eltérést többféleképpen magyarázzák.

Ki lehet mutatni, hogy maga a lineáris elmélet is adhat kisebb kritikus feszültséget, ha megváltoztatjuk a *peremfeltételeket*. HOFF és SOONG [2.19] többféle peremfeltételre oldották meg a tengelyirányban nyomott hengert és azt találták, hogy

befogott végű henger lineáris kritikus feszültsége egyenlő (2.13)-mal, vagy nagyobb nála,

csuklósan („sarokpántosan”) támaszkodó végű henger lineáris kritikus feszültsége viszont csak akkor lehet egyenlő (2.13)-mal vagy nagyobb nála, ha a „sarokpántos” megtámasztás olyan kényszert jelent, amely meggátolja a héj pontjainak kerületirányú v elmozdulását. Amennyiben e helyett a kerületmenti n_{xy} nyírófeszültségről kötjük ki, hogy zérus legyen, akkor a kritikus feszültség a közönséges lineáris elmélet adta (2.13) érték felére esik le. A teljesen *szabad végű* henger lineáris kritikus terhe 0,38-szorosa a (2.13) adta értéknek, igen rövid hengerre pedig még ennél is kevesebb.

THIELEMANN és ESSLINGER [2.49] számításai megerősítették HOFF és SOONG fenti eredményét: ha a „szabadon támaszkodó” peremfeltételhez $n_{xy} = 0$ -t és $m_x = 0$ -t (alkotóirányú nyomatékmentességet) írunk elő, akkor a lineáris kritikus feszültség a (2.13) adta érték felére csökken.

A lineáris kritikus terhet a *horpadás előtti deformációk* is csökkenthetik [2.16], [2.46]. Az ezt figyelembe vevő elméletet „consistent theory”-nak nevezik, mivel ugyanazokkal a peremfeltételekkel számítja a kihajlást megelőző deformációkat, mint magát a kihajlást. Fizikailag ez azt jelenti, hogy az előzetes alakváltozás folyamán a harántkontrakció következtében megváltozik a nyomott henger átmérője, és mivel a támasz ezt nem követi, a henger egyenes alkotói meggörbülnek. Ez az elmélet tehát egy deformálódott henger horpadását vizsgálja. Mivel ebben a számításmódban e megelőző alakváltozásokat nem tekintik végtelenül kicsinek, ezek akkor is csökkentik a kritikus terhet, ha egyébként ortogonálisak volnának a horpadási alakra (pl. helyi, hálós alakú horpadás előtt tengelyszimmetrikusan deformálódik a henger). Ily módon befogott végű hengerre $0,93 \sigma_{xkr}^{lin}$ -t kaptak.

ALMROTH [2.2] a „consistent theory”-t az $n_{xy} = 0$ -t előíró peremfeltételekre alkalmazta és azt találta, hogy *befogott* végek esetében az $n_{xy} = 0$ előírás gyakorlatilag nem csökkenti a fenti $0,93 \sigma_{xkr}^{lin}$ értéket, *szabadon támaszkodó* végek esetén viszont ő is $0,5 \sigma_{xkr}^{lin}$ -t kapott az $n_{xy} = 0$ előírással.

Szerencsére azonban nem reálisak ezek a peremfeltételek, amelyek az $n_{xy} = 0$ előírással a szabad kerületmenti elmozdulást engedik meg. A „klasszikus” sarokpántos megtámasztás kétségtelenül a kerületmenti v elmozdulást zárja ki, ami megfelel a valóságos megtámasztási kényszereknek. Valóban igen nehéz lenne megvalósítani az $n_{xy} = 0$ peremfeltételt, de még az $m_x = 0$ -t is. Ezenkívül, mint majd a nemlineáris elmélet tárgyalása során bemutatjuk, az $n_{xy} = 0$ kerületi feltétellel bíró hengerhéjak lényegesen kevésbé érzékenyek a kezdeti hullámosságokra, mint a szokásos $v = 0$ előírás szerint megtámasztott héjak (2.9. ábra). Mindent összevetve tehát nem kell törődnünk a méretezéskor σ_{xkr}^{lin} -nak az $n_{xy} = 0$ peremfeltétel okozta csökkenésével.

Az eddig elmondottak „közepes” hosszúságú hengerhéjakra vonatkoztak.

A teljesség kedvéért még kitérünk arra is, hogy *igen rövid henger* esetén a héj L hosszúságú, széles síklemezként horpad, *igen hosszú henger* esetén pedig az egész henger mint csőkeresztmetszetű rúd akar kihajolni.

Mind a három jelenséget együtt ábrázolja FLÜGGÉ [2.17] diagramja, amely rövid héjakra az

$$\omega_1 = \frac{\sqrt[4]{12(1 - \nu^2)}}{\pi} \frac{L}{\sqrt{Rt}}, \quad (2.15a)$$

hosszú héjakra pedig az

$$\omega_2 = \frac{1}{\pi \sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{L}{R} \sqrt{\frac{t}{R}} \quad (2.15b)$$

paraméter függvényében adja meg a $\sigma_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ kritikus alkotóirányú feszültséget (2.4. ábra), a végeken csuklós (sarokpántos) megtámasztást feltételezve. A bal oldali diagram emelkedő ága a lemezszerű horpadást, a jobb oldali diagram eső ága az egész héj rúdszerű kihajlását jelenti (csuklós rúdvégeket alapul véve). A két diagrapár középső szakasza pedig a héjlemez eddig tárgyalt „helyi horpadását” adja meg ([2.13] képlet).

A leglényegesebb lépés a kísérleti eredmények megmagyarázása felé a *nemlineáris horpadásmélet* kidolgozása volt. Ennek alapegyenletét geometriailag tökéletes héjra először DONNELL írta fel 1934-ben [2.8]. Abban tér el a lineáris elmélettől, hogy nem szorítkozik végtelenül kis elmozdulásokra, hanem figyelembe veszi — legalábbis a felületre merőleges w elmozdulásnak — az alakváltozásokban szereplő másodfokú tagjait is. Így az alakváltozásoknak az elmozduláskomponensekkel való lineáris kifejezése (lásd pl. [2.6] 286. o. vagy [2.17] 201. o.) a következő tagokkal bővül (vö. [2.6] 303. o., vagy [2.51] 338. o.):

$$\varepsilon_x'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (2.16a)$$

$$\varepsilon_y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (2.16b)$$

$$\gamma_{xy}'' = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.16c)$$

Ha az ezekkel a másodfokú tagokkal kiegészített kifejezésekkel vezetjük le a laposhéjak (2.1a) egyensúlyi és (2.1b) összeférhetőségi egyenletét és a (2.1a) egyensúlyi egyenlet Pucher-operátorába (2.2b) az eredeti héjfelület görbületei és csavarodása helyett a deformálódott felület megfelelő adatait írjuk be, akkor — figyelembe véve a (2.5a–b) összefüggéseket — az alábbi alakokhoz jutunk [2.13], [2.20]:

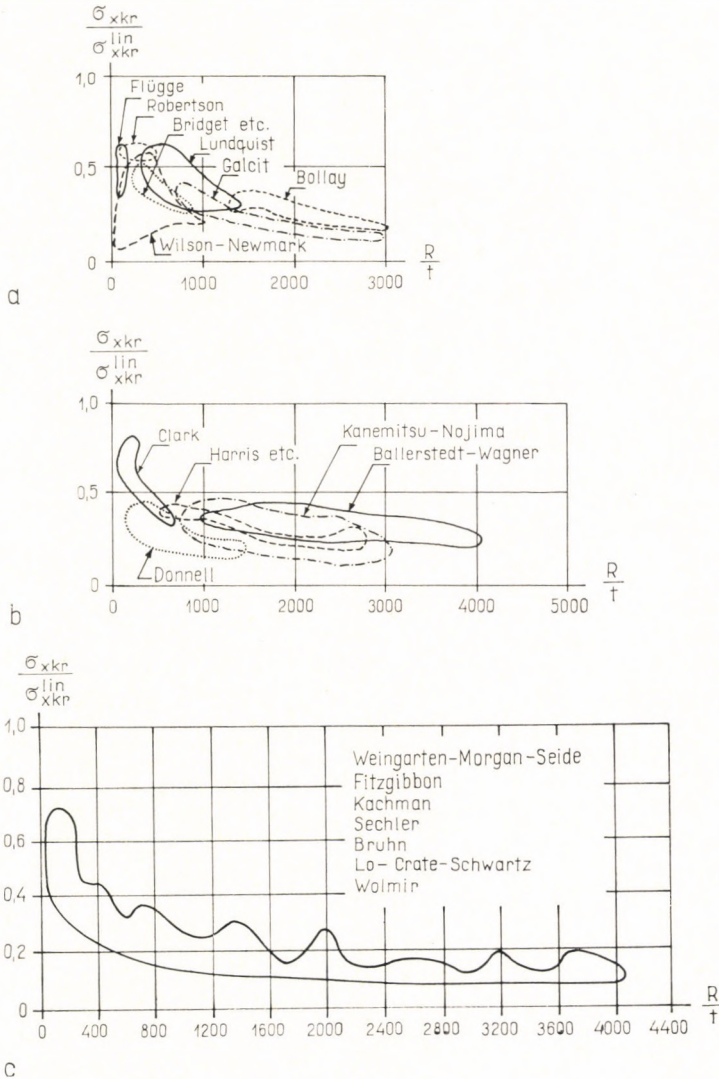
$$B\Delta\Delta w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.17a)$$

$$\Delta\Delta F + D(1-\nu^2) \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.17b)$$

Ez a két egyenlet azonos a Donnell-féle egyenletekkel, amelyeket ő a pontos (a héj laposságát *nem* feltételező) levezetéséből úgy kapott, hogy elhagyta a többihez képest kicsi tagokat. Ezekben az irodalomban gyakran szereplő Donnell-egyenletekben tehát ugyanazok az elhanyagolások szerepelnek, mint a laposhéj-egyenletekben. Jogosultságuk is csak addig áll fenn, amíg egy horpadási hullámon belül valóban laposnak tekinthető a héj.

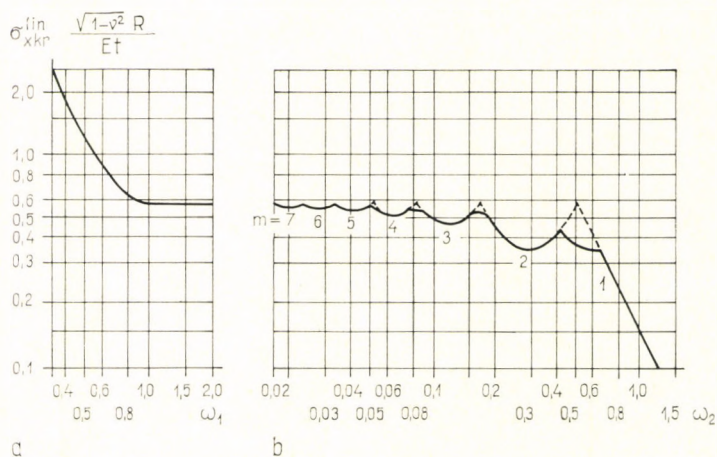
A Donnell-egyenleteket tehát két dolog jellemzi: egyrészt hogy feltételezik a héj laposságát, másrészt hogy a magasabb fokú tagokból csupán a (2.16a—c)-vel megadottakat veszik figyelembe. Az irodalomban hol az egyik, hol a másik jellegzetességre utalnak, amikor a „Donnell-típusú” egyenleteket említik.

A nemlineáris egyenletek közvetlen megoldásának ismert matematikai nehézségei miatt többnyire nem az egyensúlyi, hanem az energiamódszert használják



2.3. ábra. Kísérleti eredmények alkotóirányban nyomott hengerhéjakról

a szerzők: alkalmas horpadásfüggvényt vesznek fel w -re valamilyen egyszerűen kezelhető trigonometriai sor formájában, majd (2.17b)-be helyettesítve, az ismert trigonometriai összefüggéseket felhasználva linearizálják a másodfokú kifejezéseket, utána kiszámítják F -et és a (2.3a—c) összefüggésekből a metszeterőket. Ily módon felírható a kihajlott héjfelület teljes potenciális energiája, amelynek minimalizálása tudvalevőleg helyettesíti az egyensúlyi egyenletet. E potenciális energia kifejezését w sorának együtt-hatói szerint minimalizálva annál pontosabb megoldást kaphatunk, minél több tagot vettünk w sorából [2.6], [2.51].



2.4. ábra. Az alkotóirányú kritikus feszültség pontos görbéje.
 a — rövid héj, b — hosszú héj

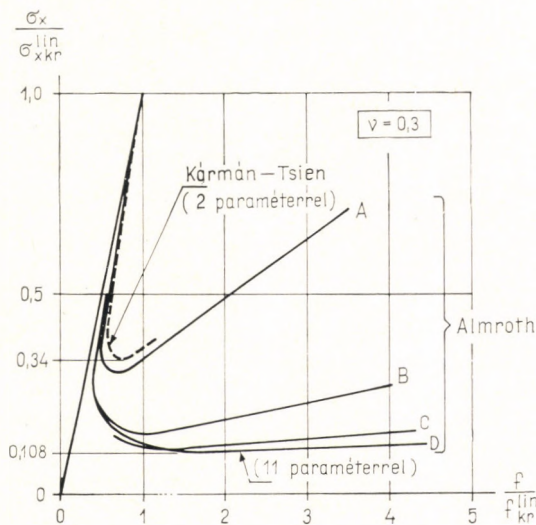
KÁRMÁN és TSIEN [2.21] 1941-ben a most leírt módon vizsgálták közelítően (2 szabad paraméterrel) a tökéletes henger horpadás utáni viselkedését egy kombinált horpadási alak alapulvételével. Kitűnt, hogy a horpadási hullám alakja folytonosan változik a horpadási folyamat során (ezért kell lehetőleg minél több paramétert tartalmazó, kombinált alakot felvenni). Számításuk eredményeképp a 2.5. ábrán vázolt legfelső görbét kapták. Az abszcisszatengelyre az alkotóirányú teher saját elmozdulásának (f) és a lineáris kritikus teherhez tartozó f_{kr}^{lin} elmozdulásnak az arányát raktuk fel. A görbe jellegéből minden további elméleti vizsgálat nélkül is nyilvánvaló, hogy a henger igen érzékeny a kezdeti hullámosságokra, amivel majd később foglalkozunk.

Ugyancsak a Donnell-féle egyenletekből kiindulva LEGGETT—JONES [2.29], MICHELSEN [2.36], KEMPNER [2.22], ALMROTH [2.1] egyre több szabad paraméter felvételével számították ki a henger horpadás utáni viselkedésére jellemző alakváltozás-görbét. A görbe jellege nem változott, de a mélypontja, vagyis $\sigma_{kr}^{alsó}$ értéke a lineáris kritikus feszültség (2.13) %-ában kifejezve a Kármán—Tsién-féle 34%-ról 10,8%-ra csökkent a szabad paraméterek számának 11-re való növelésével (2.5. ábra, A, B, C, D görbék). Mindezen számítások szerint az egész görbe és ezzel együtt $\sigma_{kr}^{alsó} / \sigma_{kr}^{lin}$ is független t/R -től, azaz a henger geometriai arányaitól.

HOFF, MADSEN és MAYERS [2.18] az előző kutatóknál több szabad paramétert (azaz a horpadási w elmozdulás Fourier-sorából egyre több tagot) vettek fel és arra az eredményre jutottak, hogy a tagok számának minden határon túl való növelésével $\sigma_{kr}^{alsó}$ értéke zérussá válik, ezzel egyidejűleg azonban t/R -nek is 0-nak kell lennie, a kihorpadt alak pedig az ún. Yoshimura-alakzatot veszi fel (2.6. ábra).

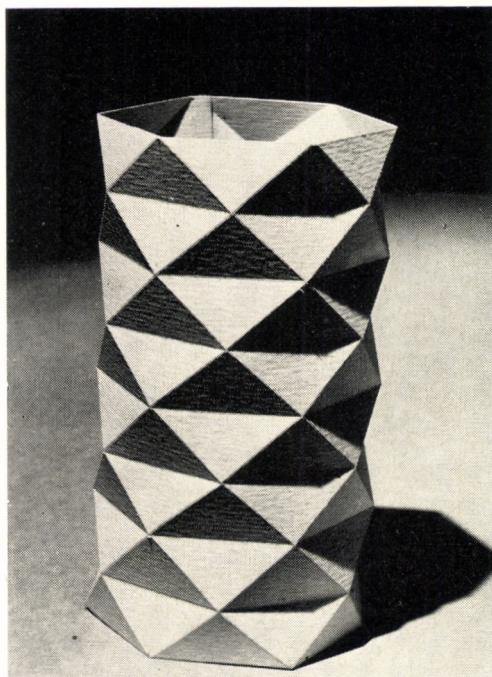
A Yoshimura-alakzat igen szemléletesen mutatja meg az alkotóirányban nyomott henger „átpattanásra” való hajlamát. A Yoshimura-alakzat ugyanis nyúlásmentes „leképezése” a hengerfelületnek: az egyes sík háromszögek a megfelelő hengerpalást-darabok kiegyenesítésével állnak elő, de az élek mentén „végtelenül nagy” hajlítási alakváltozásnak kell létrejönnie [2.18], [2.23]. A hengerfelület azonban geometriai okból csak *nyúlásos alakváltozáson keresztül* tud eljutni a Yoshimura-alakzatba. Ez magyarázza meg tehát az átpattanási hajlamot: a végállapot kisebb ellenállást jelent, mint a hozzá vezető út.

A Yoshimura-alakzat — éppen az élek mentén szükséges végtelenül nagy hajlítási alakváltozás miatt — csak akkor jöhet létre, ha a héjnak nincs hajlítási merevsége, azaz — mivel a hajlítási merevség t^3 -bel, a nyúlási merevség t -vel arányos — ha $t \rightarrow 0$ (vagyis $t/R \rightarrow 0$). Véges vastagságú héj ($t/R > 0$) esetén a fal véges hajlítási merevsége miatt nemcsak az élek mentén hajlik meg a héj, hanem az egyes háromszög-lapok is többé-kevésbé meggörbülnek és ez eltérést okoz a Yoshimura-alakzattól. Ilyenkor természetesen $\sigma_{kr}^{alsó}$ is nagyobb lesz 0-nál. A kísérletek valóban azt a tendenciát mutatják, hogy minél vékonyabb a héj, annál inkább a Yoshimura-alakzatban akar kihorpadni.



2.5. ábra. Az alkotóirányban nyomott tökéletes hengerhéj kritikusan túli viselkedése

A Yoshimura-alakzat a „rombuszos” néven ismert horpadási alaknak határese-
te ($t \rightarrow 0$ -nál). A „rombuszos” alak első közelítésben a $w = w_1 \cdot \sin \frac{\pi}{l_x} x \cdot \sin \frac{\pi}{l_y} y +$
 $+ w_2 \cdot \sin \frac{2\pi}{l_x} x$ kifejezéssel írható le, tehát úgy is felfogható, mint egy gyűrűs és
egy hálós alak kombinációja. Ugyanaz a (2.11) lineáris kritikus teher tartozik
hozzá, mint a hálós vagy a gyűrűs alakhoz [2.44].



2.6. ábra. A Yoshimura-alakzat

HOFF, MADSEN és MAYERS azzal indokolják a $\sigma_{x,kr}^{alsó} \rightarrow 0$ -t adó eredményüket, hogy a Kármán—Tsien-módszer a potenciális energiának a kerületmenti hullám-
szám (n) szerinti minimizálását is megkívánja, és így $n < 2$ adódott, ami viszont
geometriai okból lehetetlen. Közrejátszhat még az is, hogy a Donnell-egyenlete-
ken [azaz a (2.16) képleteken] alapuló nemlineáris számítás csak a végtelenül
vékonyfalú hengerhéj horpadási alakváltozását tudja szabatosan leírni. A (2.16a —
c) egyenletekben szereplő (w deriváltjainak második hatványait tartalmazó) nem-
lineáris tagok ugyanis csak korlátozott mértékű horpadási alakváltozásokig írják
le kielégítő pontossággal a megnyúlásokat. Így előfordulhat, hogy a 2.5. ábra gör-
béinek csak a kezdeti szakaszához elégségesek, a mélypont környezetéhez már

nem. A végtelenül vékony héj Yoshimura-alakzata azonban nyúlásmentes, így ezt szabatosan írják le. A véges vastagságú héj nagyobb horpadási alakváltozásainak követéséhez viszont még további, magasabb fokú tagokat is bele kellene vonni a számításba. Ez igen nagy mértékben bonyolítaná az amúgy is terjedelmes számítást, amelyekben az egyenletek nemlineáris voltán kívül az is nehézséget okoz, hogy a horpadási alak maga is változik a horpadás folyamán. A Donnell-egyenletek viszont minden esetben elegendően pontosak ahhoz, hogy a kezdeti hullámossággal bíró hengernek a méretezéshez szükséges $\sigma_{kr}^{felső}$ -jét (1.1c. ábra) meghatározzuk, l. alább. Ehhez ugyanis a hengernek sokkal kisebb horpadási alakváltozást kell végeznie, mint $\sigma_{kr}^{alsó}$ -hoz.

A geometriailag tökéletes héjra vonatkozó $\sigma_{kr}^{alsó}$ pontos értékének egyébként sincs különösebb gyakorlati jelentősége, mert ha a henger valóban tökéletes lenne, akkor csak a lineáris elmélet adta felső határnál, σ_{kr}^{lin} -nál horpadna. Ha pedig a gyártási tökéletlenségek folytán kezdeti hullámossága van, akkor sem $\sigma_{kr}^{alsó}$ -nál horpad, hanem a kezdeti hullámosság mértékétől függően más és más feszültségnél (1.1c. ábra). Sőt még azt sem mondhatjuk, hogy a tökéletes hengerre kiszámított $\sigma_{kr}^{alsó}$ egyben alsó határértéke is a tökéletes henger valódi kritikus feszültségeinek, mert — mint később látni fogjuk — kellően nagy kezdeti hullámosság esetén ennél kisebb feszültségnél is behorpad a henger.

Ki kell még térnünk a *tengelyszimmetrikus (gyűrűs) alakban horpadó hengerhéj* kritikusan túli viselkedésére. Ez ugyanis az 1.1a. ábrának megfelelően viselkedik [2.44], azaz konstans teherbírása van. A jelenség ugyanis lényegében azonos a rugalmasan ágyazott rúd (a gyűrűk által rugalmasan megtámasztott alkotóirányú szálak) kihajlásával [2.51]. Ez magyarázza, hogy a kísérleti hengerek miért horpadnak mindig „rombuszos,” ill. „hálós” alakban, és sohasem tengelyszimmetrikusan.

Ha a (2.16) egyenleteknél pontosabb összefüggéseket használunk, azaz további nemlineáris tagokat veszünk figyelembe a nyúlások (és a görbületek) kifejezésében, akkor természetesen finomabban tudjuk követni a horpadási jelenséget. MAYERS és REHFELD [2.34] ily módon megállapították, hogy a kritikusan túli viselkedés kismértékben függ az R/t aránytól. Ennek azonban nincs nagy gyakorlati jelentősége.

Ahhoz, hogy kellő megbízhatósággal méretezhessük a hengerhéjakat horpadásra, arra van szükség, hogy meghatározzuk különböző nagyságú kezdeti hullámosságok esetén $\sigma_{kr}^{felső}$ -t, vagyis a henger tényleges kritikus feszültségét.

A kezdeti hullámosság alapulvételével először DONNELL és WAN [2.9] számították ki a henger kritikus feszültségét és az egész alakváltozási görbét. Őt szabad paramétert vettek fel az alakváltozás kifejezésében és feltételezték, hogy a kezdeti hullámosság *konform* a mindenkor horpadási alakkal. Mivel a horpadási alak maga is változik a horpadás során, ezért a konformitás feltételezése elméletileg helytelen, bár éppen $\sigma_{xkr}^{felső}$ -t helyesen adhatná meg, ha igaz lenne az a feltetelezés, hogy a horpadási alakkal konform kezdeti hullámosság a legveszélyesebb.

DONNELL és WAN — a tökéletes hengernél ismertetett módszerrel — a potenciális energia minimizálásával és bizonyos közelítéseket alkalmazva — az 1.1c. ábra szaggatott vonalaihoz hasonló görbéket kaptak, amelyeknek tetőpontjait w_0/t függvényében felrakva megkapjuk $\sigma_{xkr}^{felső}$ -t, azaz a tényleges horpasztófeszültséget, a kezdeti hullámosság w_0 amplitúdójának függvényében.

DONNELL és WAN eredeti levezetésükben nem a w_0/t aránnyal jellemezték a kezdeti hullámosság mértékét, hanem egy U „hullámossági tényezővel” („un-evenness factor”). Definíciója:

$$w_0/t = U \frac{l_x^{1,5} \cdot l_y^{0,5}}{\pi^2 t^2} = U \frac{R^2}{m^{1,5} n^2 t^2}. \quad (2.18)$$

Itt l_x és l_y az x és y irányú kezdeti hullámosság félhullámhossza,

$$n = \frac{\pi R}{l_y} = \frac{\text{félkerület}}{\text{félhullámhossz}} = \frac{\text{kerület}}{\text{hullámhossz}}, \quad (2.19a)$$

$$m = \frac{l_y}{l_x} \text{ a két félhullámhossz aránya.} \quad (2.19b)$$

DONNELL és WAN a horpadási kísérletek alapján m -et 0,75-re vették fel, n -re pedig a lineáris horpadáselmélet (2.10) adta

$$n = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu)^2}}{m + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{R}{t}} \approx 0,87 \sqrt{\frac{R}{t}} \quad (2.20)$$

értéknél mintegy 10 – 30%-kal kisebbet kaptak. Mivel ez az általuk kapott n -érték nemcsak R/t -től, hanem U -tól is függ, ezért az egyszerűség kedvéért (2.18)-ba a lineáris horpadáselmélet (2.20) n -jét helyettesítettük be és így az alábbi összefüggést kaptuk:

$$\frac{w_0}{t} \approx 2U \frac{R}{t}. \quad (2.21)$$

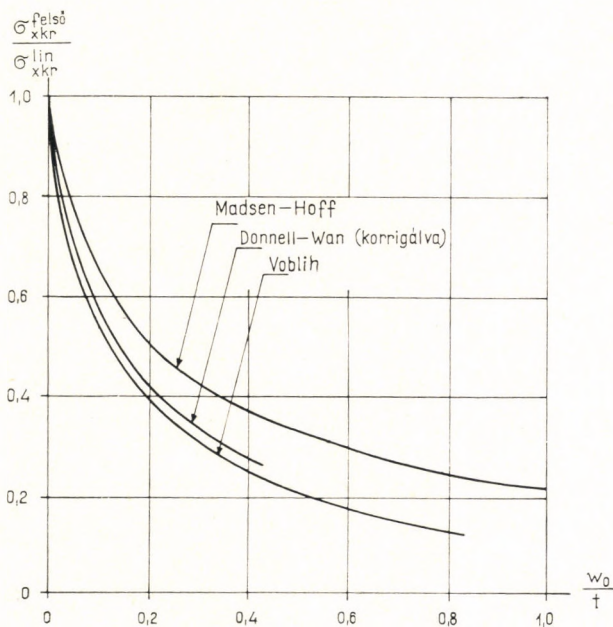
Ezen (2.21) összefüggés alapján „kalibráltuk át” DONNELL és WAN görbéjét a 2.7. ábrán U -ról w_0/t -re. Mivel DONNELL és WAN valódi n -je (2.20)-nál kisebb, ezért a pontos (változó) w_0/t -érték nagyobb lesz a (2.21) képlettel megszabottnál. A 2.7. ábra görbéje tehát tulajdonképpen magasabban fut, mint berajzoltuk, de a leírt közelítéssel a biztonság javára tévedtünk és bizonyos fokig kompenzáltuk azt a hibát, amit a számításba vett kis paraméter-szám okozott.

VOBLIH [2.52] DONNELL és WAN módszeréhez hasonlóan számította ki a kritikus feszültséget, de eltérő alakú (tengelyszimmetrikus) kezdeti hullámosság alapulvételével, más paraméter-számmal. Eredményei közel állnak DONNELL és WAN-nak az előzők szerint korrigált görbéjéhez (2.7. ábra).

MADSEN és HOFF [2.33] nem feltételezték az állandó konformitást a kezdeti hullámosság és a kihorpadási alak között. Nagyobb paraméter-számra, rendkívül terjedelmes számítások után a 2.7. ábrán vázolt legfelső görbét kapták, amely alig tér el DONNELL és WAN korrigált diagramjától.

Ezek a számítások mind csak egy-egy görbét adtak, amely tehát független a henger geometriai arányaitól (R/t -től). A kísérleti eredményeknek a 2.3a., b., c. ábrákon jelentkező tendenciáját, amely szerint R/t növekedésével egyre csökken a tényleges horpasztófeszültség, csak az magyarázhatja, hogy a kezdeti w_0 hul-

lámosság az R sugárral arányos, és független a modell t falvastagságától (lásd [2.41]-et is). Más szóval ez azt jelenti, hogy karcsúbb (nagy R/t -jű) héjon általában a falvastagsághoz képest nagyobb kezdeti hullámosságot várhatunk, hasonlóan a közönséges nyomott rudak esetéhez, ahol szintén a karcsúsággal valamilyen arányban növekvő kezdeti külpontosságot veszünk alapul.

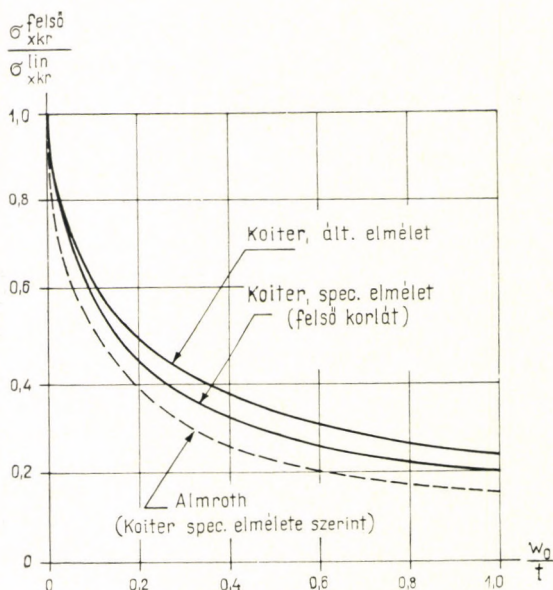


2.7. ábra. Az átpattanást okozó alkotóirányú feszültség függése a kezdeti hullámosságtól

Az eddig ismertetett számításmódok valamennyien megegyeznek abban, hogy előre felveszik — bizonyos számú szabad paraméterrel — a kezdeti hullámosságot, és csupán összehasonlító számításokkal valószínűsítik, hogy valóban a főlvev alakú kezdeti hullámosság szolgáltatta — adott w_0/t -hez — a legkisebb $\sigma_{xkr}^{\text{felső}}$ -t.

KOITERnek az 1.2. pontban ismertetett általános módszere [2.24], [2.25] lehetővé teszi, hogy — csupán a deformációknak a falvastagsághoz viszonyított kicsiségét feltételezve — egyszerűen meg tudjuk vizsgálni bármely alakú kezdeti hullámosság és horpadási alak hatását, és ki tudjuk közülük választani a legveszélyesebbet. A rövidség kedvéért most e módszernek egy, a héjhorpadásra alkalmazott egyszerűsített változatát ismertetjük [2.20], ill. [4.14] alapján. A számítás ugyancsak a Donnell-egyenletekből indul ki, ami az elmozduláskomponensek magasabb hatványai közül csak w második hatványait tartja meg. A módszer a vizsgálandó kezdeti hullámosság és horpadási alak felvételétől a teljes potenciális energia minimalizálásáig lényegében megegyezik a (2.17a,b) egyenletek után leírtakkal.

Ezek után az energia w -ben negyedfokú kifejezésének differenciálásával kapott harmadfokú egyenletrendszerből elhagyja a w/t harmadik hatványát tartalmazó tagokat. Az így kapott másodfokú egyenletek léggé egyszerűekké válnak ahhoz, hogy közvetlenül lehessen velük megvizsgálni a különböző típusú (tengelyszimmetrikus, aszimmetrikus, azaz hálós, ill. kombinált) kezdeti hullámosságoknak és a különböző horpadási alakoknak, ill. kombinációiknak hatását. A horpadási alakok a lineáris horpadáselméletnek a (2.10) egyenlet hullámhossz-arányait kielégítő ún. „sajátfüggvényei”. Ezek — bár a lineáris elmélet szerint ortogonálisak — a nemlinearitás miatt összekapcsolódnak és mint kombinációk jelentkeznek.



2.8. ábra. Az átpattanást okozó alkotóirányú feszültség függése a kezdeti hullámosságtól

KOITER általános elméletéből több fontos eredmény következett. Így kiderült, hogy héjknál nem mindig a horpadási alakkal konform kezdeti hullámosság a legveszélyesebb. Sok esetben ugyanis az 1.1e. ábrán vázolt módon adódik (adott w_0/t -hez) a legkisebb $\sigma_{kr}^{fels\o}$: az egyik sajátfüggvénnyel konform kezdeti hullámossággal kezd el deformálódni a héj, majd mielőtt elérné a görbe tetőpontjához tartozó $\sigma_{kr}^{fels\o}$ -t, egy ponton ebből ágazik el egy másik horpadási alak. Ez az elágazási pont lesz tehát a legkisebb $\sigma_{kr}^{fels\o}$ -nek megfelelő érték. Más szavakkal ezt úgy is mondhatjuk, hogy több sajátfüggvény kombinálódása adhatja meg a legveszélyesebb kihajlási módot.

KOITER általános elmélete — a w/t tagok magasabb hatványainak elhanyagolása miatt — annál kevésbé pontos, minél nagyobbak a horpadási alakváltozások. A tökéletes héj kritikusan túli viselkedését leíró görbe kezdeti érintőjét azonban pontosan adja meg, mivel ez $w = 0$ -hoz tartozik. Jó eredményeket ad kis w_0/t

kezdeti hullámosságok esetén, mert ekkor $\sigma_{kr}^{felső}$ eléréséig a w horpadási alakváltozás is kicsi marad. A módszer pontosságának tisztázására KOITER kidolgozta ún. „speciális elméletét” [2.26]. Ennek lényege az, hogy bizonyos speciális kezdeti hullámosságoknál a horpadási folyamatra az általános elméletben alkalmazott közelítés (a w^3 -tagok elhanyagolása) nélkül tud megoldást találni, amely így felső korlátja lesz a pontos megoldásnak. A 2.8. ábrán bemutatjuk KOITER általános és speciális elméletének eredményét az alkotóirányban nyomott hengerre. A speciális elmélet a tengelyszimmetrikus kezdeti hullámosságra vonatkozik, amelyből az 1.1e. ábra szerint ágazik ki az aszimmetrikus horpadás. (Ez utóbbihoz $\nu = 0,272$ -t vett alapul.)

Érdekes megfigyelnünk, hogy a tengelyszimmetrikus kezdeti hullámosság (és a hozzá tartozó ugyanilyen deformáció) első pillanatra „ártalmatlannak” tűnik, hiszen — mint már mondtuk — kritikusan túli viselkedése az 1.1a. ábrának felel meg. Mégis ez adja — jelenlegi ismereteink szerint — a legkisebb kritikust terhet, az 1.1e. ábrával kapcsolatban mondottaknak megfelelően, amely szerint a héj átugrik egy másik horpadási alakba.

KOITER speciális elmélete szerint (tengelyszimmetrikus kezdeti hullámosság alapulvételével) ALMROTH [2.2] pontosabban határozta meg a $\sigma_{kr}^{felső}$ -görbét és valamivel kisebb értékeket kapott (2.8. ábra).

A 2.7. és a 2.8. ábra azt mutatja, hogy a különböző alakú (gyűrűs, hálós, ill. kombinált) kezdeti hullámosságokra különböző módon levezetett eredmények igen közelálló görbéket adnak az alkotóirányban nyomott hengerre. Ezt a kérdést tehát gyakorlati szempontból megoldottnak tekinthetjük. A kezdeti hullámosságot a várható építési pontosság alapján kell megbecsülni (1. a 9.2. pontot). Az ennek alapján meghatározott $\sigma_{kr}^{felső}$ -t a 2.3a., b., c. ábrák segítségével ellenőrizhetjük, de figyelembe kell vennünk, hogy ezeken az ábrákon részben igen nagy gondal gyártott modellek eredményei vannak feldolgozva.

Igen rövid vagy *igen hosszú* hengerek kevésbé hajlamosak az átpattanásra, mivel — mint korábban említettük — ezekben az esetekben a jelenség átmege a lemezhorpadásba, ill. a rúdkihajlásba, ezeknél pedig már nincs átpattanás, hanem csak a külpontos nyomás ismert alakváltozás-növekedése. Megtörténhet azonban, hogy a külpontosan terhelt, hosszú henger rúdként deformálódni kezd, és a belső oldalán a hajlítás folytán megnövekedő feszültség helyi horpadást okoz (1. a 2.2. pontot). Ekkor az 1.1e. ábrán vázolthoz hasonló elágazási jelenség és átpattanás következik be.

NARASIMHAN és HOFF [2.37] megvizsgálták az $n_{xy} = 0$ peremfeltételű sarokpántosan támaszkodó hengerhéj kritikusan túli viselkedését a kezdeti hullámosságok figyelembevételével. Az ilyen peremfeltételekhez tartozó lineáris elmélet horpadási alakjának megfelelő kezdeti hullámosság alapulvételével két L/R arányra a 2.9. ábrán vázolt görbéket kapták. A diagramon feltüntettük a 2.7. ábra „normális” peremfeltételű (pontosabban: végtelen hosszú) héjának MADSEN — HOFF-tól származó görbéjét is. Láthatjuk, hogy az $n_{xy} = 0$ peremfeltételű héj alacsonyabbról induló görbéje metszi a magasabbról induló „normális” görbét. Amint tehát már korábban mondtuk, nincs gyakorlati jelentősége az $n_{xy} = 0$ peremfeltétel okozta σ_{kr}^{lin} -csökkenésnek.

A horpadási hullámhosszat, ill. hullám-alakot még nem tisztázták olyan mértékben, mint a horpasztófeszültséget. A kísérletek azt mutatták, hogy a kerületmenti és az alkotóirányú félhullámhossz $m = l_y/l_x$ aránya 0,7 és 1,0 között van, de a

lineáris elmélet adta (2.20) értéknél lényegesen kevesebb kerületmenti hullám keletkezik. Ezért empirikus képleteket állítottak fel. Így DE NEUFVILLE és CONNOR [2.39] 47 Mylar-hengeren végzett 550 kísérlet alapján a következő közelítő formulát konstruálták a kerületmenti hullámszámra:

$$n \approx 2,7 \sqrt[4]{\frac{R}{t}} \sqrt{\frac{R}{L}}, \quad (2.22)$$

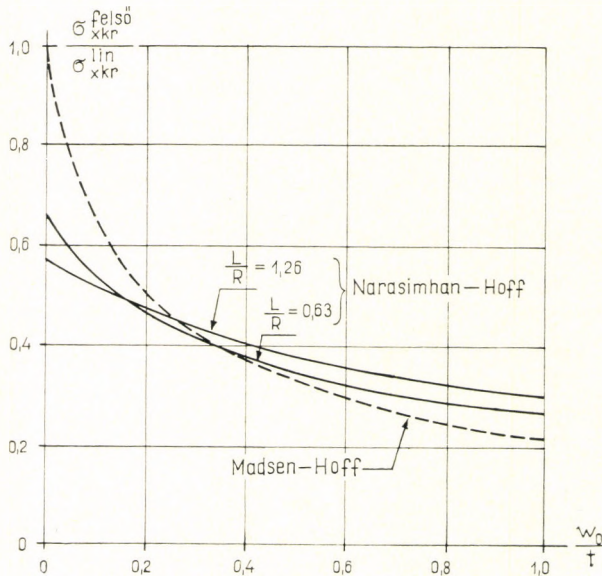
amelyben tehát a henger L hossza is szerepel, R/t pedig a negyedik gyök alatt áll. A kísérletekben R/t 800 és 1600, R/L pedig 1, $1/2$ és $1/3$ értékű volt, a képlet tehát csak e határok között tekinthető megbízhatónak.

HOFF [1.2] $R/t = 540 \sim 760$ és $R/L = 0,1 \sim 2$ között változó geometriai paraméterű hengerekre az

$$n \approx 0,286 \sqrt{\frac{R}{t}} \left(\frac{R}{L}\right)^{0,36} \quad (2.23)$$

összefüggést találta megfelelőnek.

Mind a két empirikus képlet kifejezésre juttatja azt a körülményt, hogy a henger hosszának csökkenésével nő a kerületmenti hullámszám. Ezt a véges hosszúságú hengerre vonatkozó elméleti vizsgálatok is kimutatták [2.14]. A henger hosszát nem tartalmazó hullámszám-képletek tehát csak „végtelenül hosszú”



2.9. ábra. Az $n_{xy} = 0$ és a „normális” peremfeltételű hengerháj át pattanási terhének csökkenése a kezdeti hullámosság hatására

hengerre igazak. (A horpasztófeszültség ugyanezen vizsgálatok szerint gyakorlatilag független a henger hosszától.)

A kerületmenti hullámszámra vonatkozó egyik legfontosabb megállapítás az, hogy a horpadás folyamán változik. Ezt már a tökéletes hengerre vonatkozó számítások is megmutatták. A 2.10. ábra [2.6] alapján egy $R/t = 1000$ arányú henger kritikusan túli viselkedését ábrázolja a w/t horpadási alakváltozás függvényében, $l_x = l_y$ -t (azaz négyzetes horpadási mezőket) és $\nu = 0,3$ -at feltételezve. Láthatjuk, hogy a henger viselkedését leíró görbe tulajdonképpen alsó burkolója a különböző kerületmenti hullámszámokhoz tartozó feszültségalakváltozási görbéknek, és hogy a horpadási folyamat során egyre csökken az n kerületmenti hullámszám.

A horpadás folyamatáról készített nagy sebességű filmfelvételek [2.48], [2.15] azt mutatták, hogy amennyiben a henger a lineáris kritikus feszültség közelében kezd el horpadni („majdnem tökéletes” hengerek), akkor először a lineáris elméletnek megfelelő horpadási hullámszám keletkezik, s ez „ugrik át” egyre nagyobb hullámhosszúságú horpadási alakokba, miközben leesik a henger által elviselt feszültség (2.5. ábra). Kevésbé tökéletes hengerek pedig eleve nagyobb hullámhosszúságú horpadási alakkal indulnak, de ez is megváltozik a horpadási folyamat során. A modelleken végül is nem a kezdeti, hanem a végleges (aránylag kis feszültséghez tartozó), nagyobb hullámhosszúságú horpadási alakokat lehet megfigyelni.

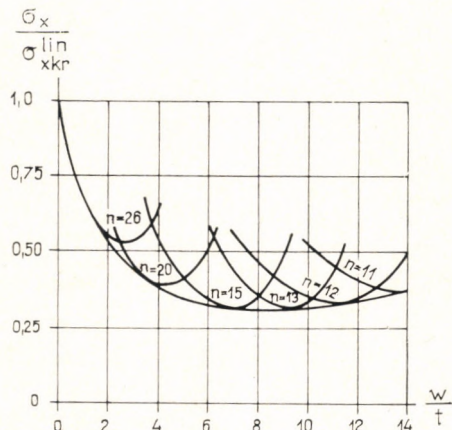
Így nyilvánvaló, hogy a kerületmenti hullámszámot a mindenkor σ_x alkotóirányú feszültséggel kell kapcsolatba hozni. PFLÜGER [2.41] közelítő elméleti levezetése szerint a (2.20) formulába a konstans 0,87 tényező helyett egy, a $\sigma_x/\sigma_{xkr}^{lin}$ aránytól függetlenül változó faktort kell tenni. A PFLÜGER által e faktorra megadott görbéket egy kiegyenlítő egyenessel megközelítve az

$$n \approx 0,93 \frac{\sigma_x}{\sigma_{xkr}^{lin}} \sqrt[4]{1 - \nu^2} \sqrt{\frac{R}{t}} \quad (2.24)$$

kifejezést kapjuk.

2.2. Hajlított henger

Ha a henger két végén két egymással ellentétes erőpárt működtetünk, akkor a hengerfalban az erőpárok síkjában fekvő átmérő mentén lineárisan változó feszültség ébred. Az erre vonatkozó részletes vizsgálatok [2.45] — a lineáris elmélet szerint — azt adták, hogy a kritikus maximális hajlítási feszültség alig nagyobb



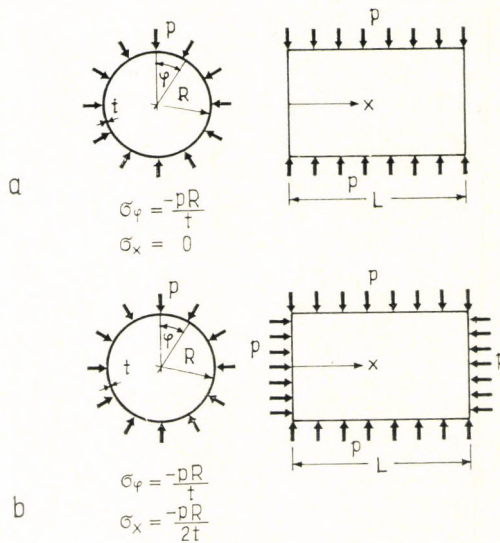
2.10. ábra. A kerület menti hullámszám csökkenése a horpadás folyamán

az egyenletes nyomás kritikus feszültségénél, tehát gyakorlatilag mindig egyenlőnek vehető vele. Ez az eredmény fizikailag azzal magyarázható, hogy a henger aránylag kis kiterjedésű hullámokban horpad, tehát nem tehermentesíti az, hogy a távolabbi részeken kisebb nyomófeszültség ébred.

2.3. Gyűrűirányú (ívirányú) nyomás

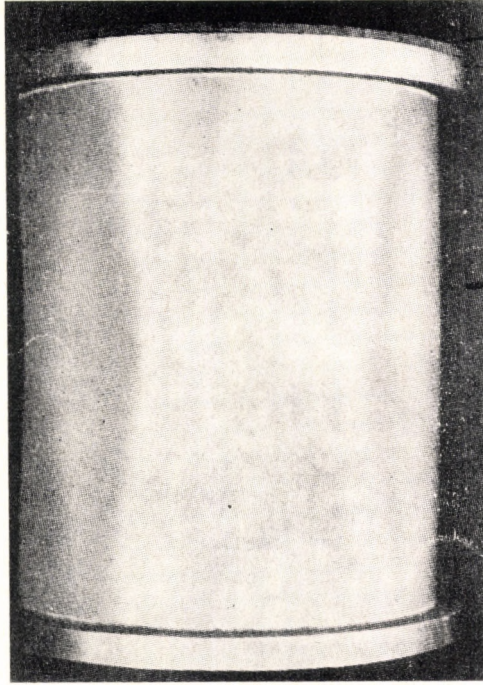
Ha a hengerhéjat a felületére merőleges palástnyomással terheljük, akkor gyűrűirányú nyomófeszültség (σ_φ) ébred benne (2.11a. ábra). A kísérletek tanúsága szerint a kritikus teher elérésekor úgy horpad a héj, hogy alkotóirányban csak egy (fél)hullám keletkezik, gyűrűirányban azonban több (2.12. ábra). Az alkotóirányú nyomás esetével ellentétben tehát a peremfeltételeknek a kritikus teherre lényeges hatásuk van, mert nyilvánvaló, hogy ha a héjat megtámasztó két *gyűrűirányú* peremív alkotóirányban távol van egymástól (vagyis a héj hosszabb), akkor kisebb kritikus erőnél horpad a héj, mintha rövidebb lenne.

A következőkben olyan *teljes* hengerről fogunk beszélni, amely a végein — ha csak mást nem mondunk — sarokpántosan kapcsolódik a diafragmáihoz.

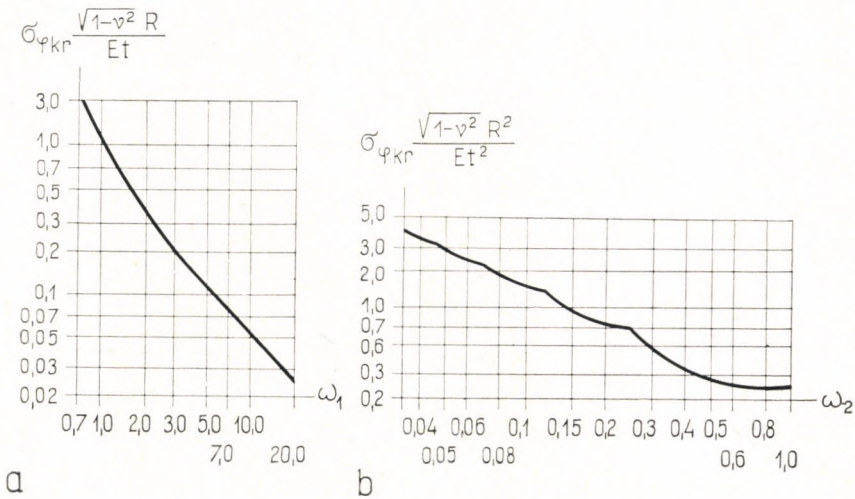


2.11. ábra. Gyűrűirányban és hidrosztatikus nyomott hengerhéj. a — csak a paláston ható nyomás (gyűrűirányban nyomott henger) b — a véglapokon is ható (hidrosztatikus) nyomás

A lineáris horpadásmélet szerint [2.17], [2.43], [2.51] meglehetősen bonyolult képlet adódik a kritikus $\sigma_{\varphi, kr}$ gyűrűfeszültségre. FLÜGGE azonban némi közelítések árán egyszerűsítette és egy diagrampárban ábrázolta a kritikus $\sigma_{\varphi, kr}$ gyűrűfeszültséget, mégpedig ω_1 (2.15a) függvényében rövid héjakra, ω_2 (2.15b) függvényében pedig hosszúakra (2.13. ábra). A diagrampárnak a héj L hosszúságának



2.12. ábra. Hidrosztatikusan nyomott henger horpadása



2.13. ábra. A kritikus gyűrűirányú nyomófeszültség pontos görbéje. a — rövid héj, b — hosszú héj

növekedtével egyre csökkenő jellege azt a tényt tükrözi, hogy az alkotóirányú szálak hajlításából (és az ezzel kapcsolatos membránerőkből) származó merevítő hatás a héj hosszabbodásával egyre csökken, és a kritikus gyűrűfeszültség a négy félhullámban horpadó körgyűrű-rúd kritikus feszültségéhez közeledik. Ha pedig a héj nagyon rövid, akkor síklemezszerűen horpad.

LUNDGREN [2.32] a harántkontrakciós tényező $\nu = 0,2$ -es értékével a következő képletekkel közelítette meg a fenti eredményeket (2.11a. ábra):

Ha

$$L > 2,3 \sqrt{Rt},$$

akkor

$$\sigma_{\varphi \text{ kr}} = E \frac{0,89 \frac{t}{L} \sqrt{\frac{t}{R}}}{1 - 1,18 \frac{\sqrt{Rt}}{L}}, \quad (2.25a)$$

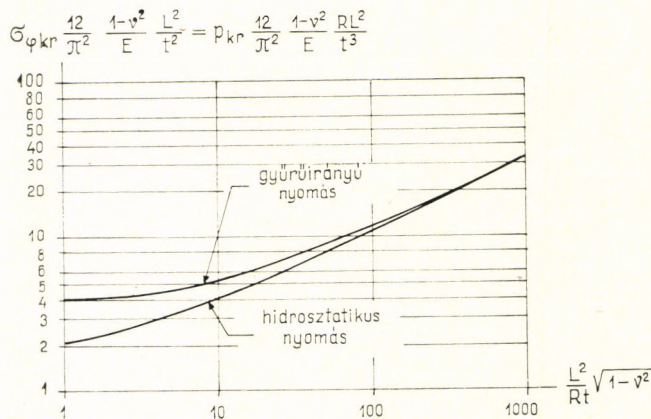
ha pedig

$$L < 2,3 \sqrt{Rt},$$

akkor

$$\sigma_{\varphi \text{ kr}} = E \left[3,4 \left(\frac{t}{L} \right)^2 + 0,025 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right]. \quad (2.25b)$$

Ezzel nagyjából megegyezik BATDORF diagramja (a 2.14. ábrán látható felső görbe), aki $\nu = 0,3$ -at alapul véve közelítette meg a lineáris elmélet pontos eredményét [2.3].



2.14. ábra. A gyűrűirányban, ill. hidrosztatikusan nyomott henger közelítő kritikus feszültsége a lineáris elmélet szerint

A *kerület menti* (egész) *hullámszámra* (2.19a) a lineáris elmélet adta bonyolult kifejezést [2.32] szerint a következőképpen közelíthetjük meg ($\nu = 0,2$):

ha

$$L > 2,3 \sqrt{Rt},$$

akkor

$$n = \pi \frac{R}{L} \sqrt{0,85 \frac{L}{\sqrt{Rt}} - 1}, \quad (2.26a)$$

ha pedig

$$L < 2,3 \sqrt{Rt},$$

akkor

$$n = \pi \frac{R}{L}. \quad (2.26b)$$

Ki kell térnünk a 2.11b. ábra szerinti, a *véglapjain is hidrosztatikus nyomással* terhelt henger horpadására is, mivel a kísérletek egy részénél ilyen terhelést alkalmaztak. Ilyen esetben alkotóirányban feleakkora nyomófeszültség ébred, mint gyűrűirányban:

$$\sigma_x^{\text{hidrosztat}} = \frac{\sigma_\varphi^{\text{hidrosztat}}}{2} = - \frac{pR}{2t} \quad (2.27)$$

Ez az alkotóirányú nyomófeszültség természetesen csökkenti a külső p nyomás kritikus értékét, mégpedig annál nagyobb mértékben, minél rövidebb a henger. Ennek okát egyszerűen beláthatjuk: az alkotóirányú nyomófeszültség hatása a horpadásra ugyanis annál nagyobb, minél inkább megközelíti a tiszta alkotóirányú nyomás $\sigma_{x \text{ krit}}$ kritikus feszültségét. Másrészt $\sigma_{x \text{ krit}}$ nem függ a henger hosszától, a gyűrűirányú kritikus feszültség ($\sigma_{\varphi \text{ krit}}$) azonban igen. Ebből az következik, hogy minél rövidebb a henger (azaz minél kisebb az L/\sqrt{Rt} geometriai paraméter), annál nagyobb lehet σ_φ , és így annál nagyobb lesz a vele együtt növekvő $\sigma_x = \sigma_\varphi/2$ hatása is. A 2.14. ábra alsó görbéje ábrázolja BATDORFnak a pontos lineáris elméletet megközelítő eredményét [2.3]. Látható, hogy $L/\sqrt{Rt} = 4$ -nél a kétféle kritikus teherintenzitás közötti eltérés már kisebb, mint 20%. LUNDGREN (2.25a) képlete nagyobb L/\sqrt{Rt} paraméterek esetén valóban átmegey a véglapokon is ható hidrosztatikus nyomásra BATDORF [2.3] által levezetett, $\nu = 0,3$ -ra érvényes

$$\sigma_{\varphi \text{ kr}} \frac{t}{R} = p_{\text{kr}}^{\text{hidrosztat}} = \frac{0,92 Et^{5/2}}{LR^{3/2}} \quad (2.28)$$

közelítő képletbe, melyet főleg az amerikai irodalom használ [3.5], [2.54].

BATDORF (és LUNDGREN) közelítő eredményeit nagy \bar{L}/\sqrt{Rt} , ill. kis R/t értékeknél korlátozza a körgyűrűrúd (2.29a) képlettel megszabott kritikus terhe. A héj kritikus p terhe ugyanis semmiképpen nem lehet kisebb a körgyűrűrúdnénál. Ezzel összefüggésben a 2.14. ábrán már fel nem tüntetett nagyobb L/\sqrt{Rt} -értékeknél az R/t aránytól is függ a kritikus teher.

Voltak olyan kísérletsorozatok, amelyeknek modelljei gyakorlatilag pontosan a lineáris elmélet most ismertett kritikus nyomófeszültségénél horpadtak. Ilyenek voltak STURM [2.47], LITTLE [2.30], WEINGARTEN—SEIDE [2.54], WINDENBURG—TRILLING [2.55], valamint LUNDGREN [2.32] kísérletei. (Az utóbbi szerző mintadarabjai részben a képlékeny tartományba estek, s ezt figyelembe véve egyezett az eredmény.)

Más kísérletsorozatok (pl. az Egyesült Államokbeli David Taylor Model Basin három kísérletsorozata, (lásd [2.10]-ben és [2.11]-ben) kisebb kritikus terheket mutattak. Hasonló eredményeket adtak szovjet kísérletek is [2.57]. Ezek a modellek általában a lineáris elmélet adta kritikus teher 60—100%-ánál horpadtak. Mindez arra vall, hogy gyűrűirányú nyomás esetén a henger lényegesen kevésbé érzékeny a kezdeti hullámosságokra, mint alkotóirányú nyomás esetén.

Az irodalomban található kísérletek közül WEINGARTEN—SEIDE-éi [2.54] valamint a David Taylor Model Basin-éi [2.10], [2.11] vonatkoznak a véglapokon is ható hidrosztatikus nyomásra, az L/\sqrt{Rt} paraméter azonban (egy-két darabtól eltekintve) mindig nagyobb volt 4-nél (maximum 60). STURM kísérletei [2.47] részben hidrosztatikus, részben gyűrűirányú nyomásra vonatkoztak, de L/\sqrt{Rt} legkisebb értéke 14 volt, tehát közömbös a terhelés módja.

LUNDGREN [2.32] súlyteherrel vette igénybe vasbeton dongahéjait. Ez a teherfajta annyiban különbözik a folyadék- (vagy levegő-) nyomástól, hogy megtartja eredeti irányát, szemben az utóbbival, amely merőleges marad a behorpadt felületre is. Ez a különbség a kritikus teher nagyságában is jelentkezik. Megbecsléséhez közöljük a hosszú hengerhéjnak megfelelő körgyűrű-rúd kritikus külső nyomásának képletét [2.6] alapján a két esetre:

folyadéknyomás:

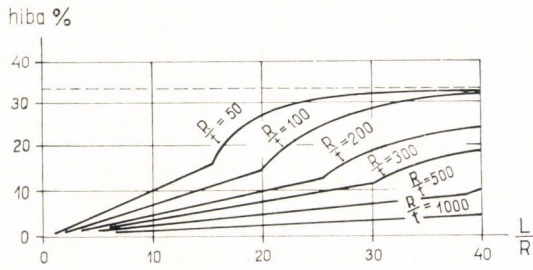
$$p_{kr} = 3 \frac{EI}{R^3}, \quad (2.29a)$$

iránytartó teher:

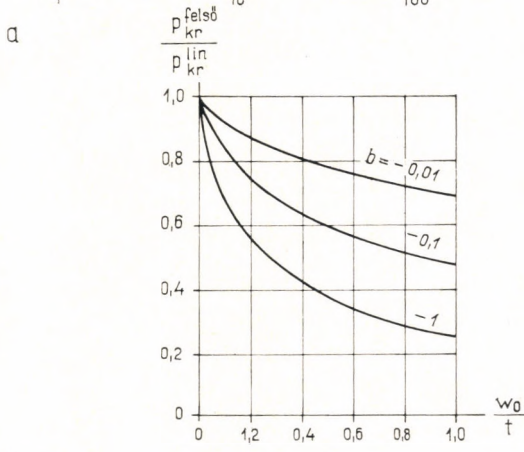
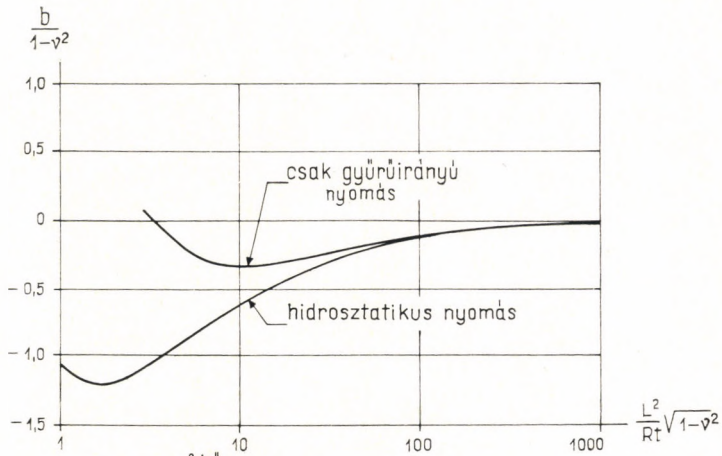
$$p_{kr} = 3,265 \frac{EI}{R^3}, \quad (2.29b)$$

azaz kb. 9%-kal nagyobb.

A *nemlineáris* elmélet alapjául eddig valamennyi szerző az alkotóirányú nyomásnál ismertett Donnell-egyenletet használta. Ezekről tudnunk kell, hogy csak addig nyújtanak kielégítő pontosságot, amíg a kerületmenti hullámszám (2.19a) nem lesz $n = 4$ -nél kisebb. Ez szükséges ugyanis ahhoz, hogy még „laposnak” tekinthessük a héjnak egy horpadási félhullámhosszon belüli szakaszát. A laposságból származó közelítésekkel a nemlineáris elmélet keretében elkövetett hibát még nem vizsgálták meg. Jó tájékoztatást kaphatunk azonban DIERKSnek a lineáris elméletre vonatkozó hibaszámításából [2.7]. DIERKS azt találta, hogy a laposhéj-elmélettel $n = 3$ esetén kb. 10%-kal, $n = 2$ -nél pedig 33%-kal kapunk nagyobb kritikus terhet a pontosnál. Ilyen kis kerületmenti hullámszám csak a körgyűrű-rúdszerűen horpadó, aránylag hosszú héjakon keletkezik. [2.7] alapján a 2.15. ábrán adjuk meg a laposhéj-elmélettel a lineáris kritikus teher nagyságában elkövetett hibát a héj geometriai adatainak függvényében. Ez egyszersmind a nemlineáris laposhéj-elmélet hibájára is tájékoztatást nyújt. (A korábban is-



2.15. ábra. A laposhéj-elmélettel elkövetett hiba

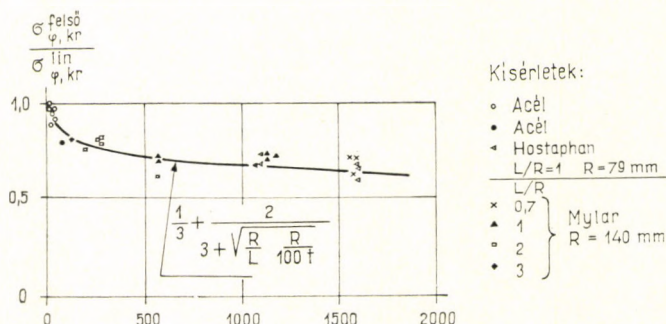


b

2.16. ábra. A gyűrűirányban, ill. hidrosztatikusan nyomott hengerháj kritikusan túli viselkedése

mertettett lineáris elméletnek [2.13. ábra, ill. (2.25a, b) képletek] nincsen ilyen érvényességi korlátja, mivel nem feltételezte a héj laposságát.)

A kezdeti hullámosságokat is figyelembe vevő nemlineáris elmélettel először DONNELL számította ki a hidrosztatikusan nyomott henger (2.11b. ábra) kritikusan túli viselkedését, mégpedig [2.10]-ben a diafragmnál csuklós megtámasztást, [2.11]-ben pedig befogást véve alapul.



2.17. ábra. PFLÜGER kísérletei és méretezési javaslata

DONNELL a horpadási alakra csak három szabad paraméteret tartalmazó kifejezést vett fel. Valószínűleg ez az oka annak, hogy kis L/\sqrt{Rt} -kre emelkedő kritikusan túli teherbírási görbéket kapott, ami ellentmondásban van az alább ismertetendő eredményekkel.

BUDIANSKY és AMAZIGO [2.5] ugyancsak a Donnell-egyenletekből kiindulva a Koiter-féle általános módszerrel vizsgálták a problémát. Azt találták, hogy a tökéletes héj kritikusan túli viselkedése az 1.1b., ill. 1.1c. ábrának felel meg, azaz alakváltozás-görbéjét kis w horpadási amplitúdók esetén a sorbafejtés első tagjai-ként megtartott

$$p/p_{kr}^{lin} = 1 + b(w/t)^2 \quad (2.30)$$

kifejezés írja le. A kritikusan túli teherbírás változását a horpadási folyamat elején tehát a b együttható jellemzi: ha b pozitív, akkor a kritikusan túli teherbírás emelkedik (1.1b. ábra), ha pedig negatív, akkor esik (1.1c. ábra), mégpedig annál erősebben, minél nagyobb b abszolút értéke. E b mennyiségre az L^2/Rt paraméter függvényében a 2.16a. ábra két görbéjét kapták. Ezek közül a csak gyűrűirányú nyomásnak alávetett henger görbéjén világosan látszik a korábban említett három szakasz: kis L/\sqrt{Rt} -knél (rövid henger: lemezhorpadás) emelkedő kritikusan túli teherbírása van a héjnak (1.1b. ábra), közepes L/\sqrt{Rt} -knél eső teherbírást mutat (átpattan: 1.1c. ábra), nagy L/\sqrt{Rt} -knél viszont a körgyűrű-rúdhoz tart, amelynek, mint minden rúdhoz — legalábbis kezdetben — állandó a kritikusan túli teherbírása (1.1a. ábra). Ezzel összhangban vannak WOLMIR számításai is [2.57], aki szintén közepes L/\sqrt{Rt} -kre kapta a legkisebb $p_{kr}^{alsó}$ -t.

A kísérleti eredmények valóban mutatják a 2.16a. ábrának megfelelő tendenciát (l. a [2.5]-ben és az [1.1]-ben közölt összehasonlításokat).

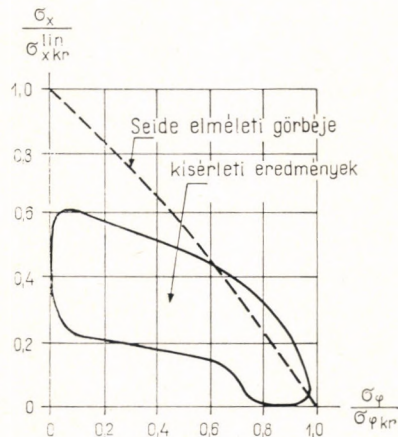
A 2.16b. ábra görbéi — ugyancsak [2.5] alapján — megadják a kezdeti hullámossággal bíró henger kritikusan túli teherbírási görbéjének $p_{kr}^{felső}$ tetőpontját, a kritikusan túli teherbírási-görbe kezdeti hajlására jellemző b mennyiség és a falvastagsághoz viszonyított w_0/t kezdeti hullámosság függvényében. E görbék azonban már csak közelítő jellegűek (ellentétben a pontos 2.16a. ábrával).

Magukat a kritikusan túli teher-alakváltozás-görbéket (tökéletes és kezdeti hullámossággal bíró hengerre) DIERKS [2.7] valamint THIELEMANN és ESSLINGER [2.50] számították ki bizonyos közelítésekkel és csak néhány geometriai arány esetére. A számítások és a kísérletek alapján PFLÜGER [2.42] egy egyszerű, könnyen használható méretezési képletet adott meg a tiszta gyűrűirányú nyomásra. Az átmérő $1/400$ -adrészével egyenlő kezdeti hullámosságra ($w_0 = 2R/400$) a 2.17. ábra görbéje adja meg jó közelítéssel az átpattanást okozó $\sigma_{\varphi kr}^{felső}$ -t, a (2.25a) ill. (2.25b) képletekkel meghatározott $\sigma_{\varphi kr}^{lin}$ -hoz képest, R^2/Lt függvényében.

A kísérleti hengereken megfigyelt kerületmenti hullámszám általában kisebb a lineáris elmélet megadta értéknél (2.26a, b). Ez — az alkotóirányban nyomott hengernél mondottakhoz (2.10. ábra) hasonlóan — amiatt áll elő, hogy a horpadási folyamat során kisebb hullámszámú alakzatokba „ugrik át” a héj. DIERKS [2.7] és PFLÜGER [2.42] elméleti vizsgálatai szerint a (2.26a, b) képletek adta hullámszámot kb. 10%-kal kell csökkenteni, sőt PFLÜGER kísérletei még ennél is kb. 30%-kal kisebb hullámszámot adtak átlagban, az egyes kísérletek pedig erősen szórtak.

2.4. Az alkotó- és a gyűrűirányú nyomás együttes hatása

A lineáris elmélet alapján elvégzett részletes vizsgálatok [2.17], [2.51] azt mutatják, hogy a kétféle igénybevétel együttes hatását ábrázoló diagram egyenes szakaszokból álló, az origóból nézve kifelé domborodó törtvonal. A [3.6] és [2.54] dolgozatok szerint ez egy egyeneshez közel álló (lapos), kissé kifelé domborodó görbével közelíthető meg. A 2.18. ábrán bemutatjuk SEIDE elméleti görbáját,

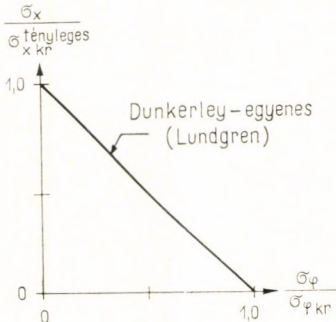


2.18. ábra. Alkotó- és gyűrűirányban nyomott hengerek. Elméleti görbe és kísérleti eredmények

valamint [2.54] és [2.57] alapján a kísérleti eredményeket. Minél inkább dominál az alkotóirányú nyomás, annál inkább eltérnek a kísérleti eredmények a lineáris elmélet eredményeitől az alkotóirányú nyomásról szóló részben mondottak miatt, s körülbelül a lineáris kritikus feszültség 1/3-ához futnak be. A görbe kifelé domborodó jellegét azonban megerősítik a kísérleti eredmények. (Megjegyezzük, hogy

SEIDE nem a tiszta gyűrűirányú nyomást, hanem a véglapokra is ható hidrosztatikus nyomást vette alapul és rakta fel az abszcissa-tengelyre.)

LUNDGREN [2.32] a biztonság javára egyenesnek veszi ezt a lapos görbét és a



$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{x \text{ kr}}} + \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi \text{ kr}}} = 1 \quad (2.31)$$

„Dunkerley-egyenes” [2.40], [2.27] javasolja a méretezéshez (2.19. ábra). Ezt adja meg [2.57] is. Itt $\sigma_{x \text{ kr}}$ az alkotóirányú tényleges kritikus feszültséget jelenti (a lineáris kritikus feszültségnek tört részét, amelyet a korábban mondottak szerint, pl. a 2.7. vagy a 2.8. ábrából határozhatunk meg), $\sigma_{\varphi \text{ kr}}$ -t viszont a (2.25a–b) képletekből vehetjük.

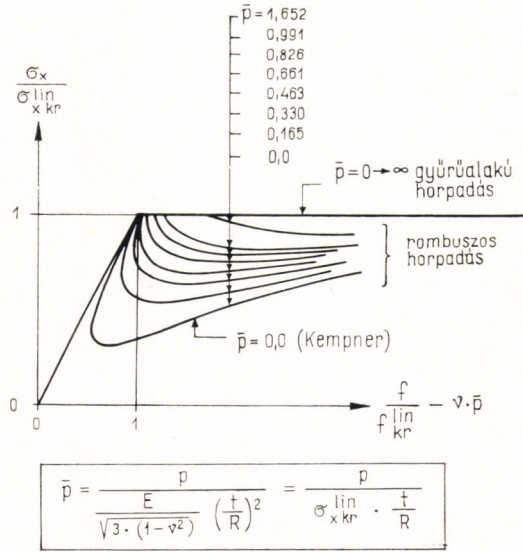
2.19. ábra. Az alkotó- és gyűrűirányú nyomás együttes hatásának közelítő vizsgálata

2.5. A gyűrűirányú húzás stabilizáló hatása az alkotóirányú nyomásra

Ha a tökéletes hengerben (belső nyomás következtében) gyűrűirányú húzás ébred, ez — amint szemlélettel is belátható — akadályozza az aszimmetrikus horpadásokat, amelyek gyűrűirányú hullámosodással járnak (hálós, rombuszos), de nem befolyásolja a tengelyszimmetrikus (gyűrű alakú) kihajlást, mivel ez utóbbi során a gyűrűk mentén nem hullámosodik a héj. (A részletes vizsgálatok [2.44] szerint belső túlnyomás esetén nem jöhet létre hálós horpadás, csupán rombuszos vagy gyűrűs.) Ennek következtében a 2.20. ábrán vázolt jelenség áll elő, ahol a gyűrűirányú húzást a p belső nyomás segítségével ábrázoltuk [2.44]. (Ha a belső nyomás a henger két véglapjára is hat, akkor az emiatt csökkent értékű alkotóirányú nyomófeszültséget kell σ_x -nek tekintenünk.) A gyűrűirányú húzás növekedtével a rombuszos horpadás lineáris kritikus feszültsége nagyobb lesz a gyűrűsénél, és a horpadás utáni teherbírás görbéi is laposabbak lesznek: mélypontja is feljebb kerül. A tökéletes henger tehát gyűrűsen kezdene horpadni, s amikor tengelyirányú f összenyomódása akkora lesz, hogy eléri a rá ható belső túlnyomásnak megfelelő rombuszos horpadási görbét, akkor e görbe eső ágán horpad tovább: a horpadási alak „átugrik” gyűrűsből rombuszosba. E rombuszos horpadás a kísérletek szerint már kis belső nyomás hatására is a 2.21. ábrán vázolt alakban következik be.

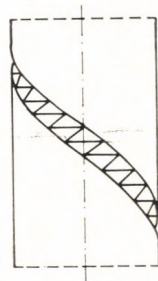
Kezdeti hullámossággal bíró hengerre HUTCHINSON [2.20] végzett vizsgálatokat KOITER módszere alapján. Azt találta, hogy ha a kezdeti hullámosság aszimmetri-

2.20. ábra. A belső túlnyomás hatása az alkotóirányú kritikus nyomófeszültségre, tökéletes hengerháj esetén

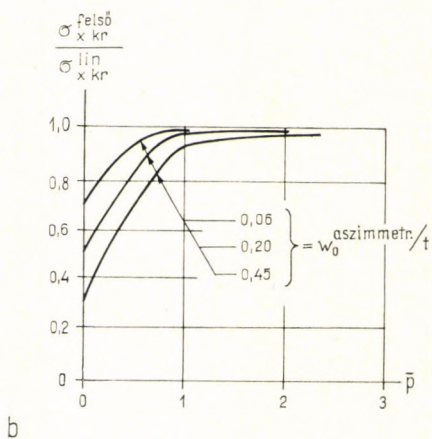
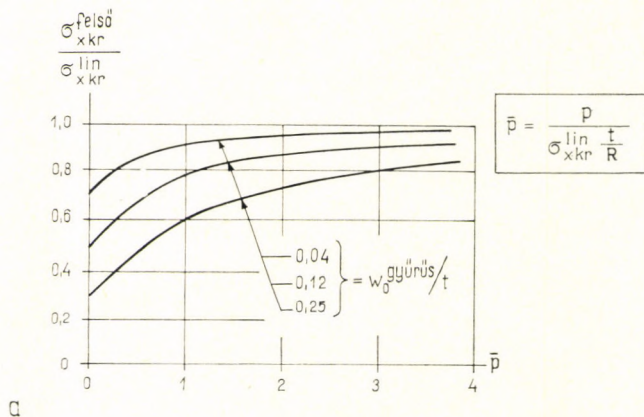


kus (hálós, rombuszos) alakú, akkor ezt a belső nyomás mintegy „kivásalja”, és így nagymértékben emeli a kritikus alkotóirányú nyomófeszültséget a $p = 0$ esethez képest. A gyűrűs (tengelyszimmetrikus) kezdeti hullámosságot azonban nem tudja a belső nyomás kiegyenesíteni, így a horpadás folyamata úgy indul meg, mintha $p = 0$ lenne: tengelyszimmetrikusan deformálódik a héj, majd ebből ágazik el az aszimmetrikus horpadás. A belső nyomás csak ez utóbbit tudja hátráltatni. Gyűrűs kezdeti hullámosság esetén tehát lényegesen kisebb mértékben emeli a belső nyomás az alkotóirányú kritikus feszültséget.

HUTCHINSON számításainak eredményeit ($\nu = 0,3$ -mal) tengelyszimmetrikus kezdeti hullámosságra a 2.22a. ábrán, aszimmetrikus (hálós) kezdeti hullámosságra pedig a 2.22b. ábrán mutatjuk be. (A rombuszos alaknak megfelelő kezdeti hullámosság görbéi a kettő közé esnek).



2.21. ábra. A belső túlnyomásnak alávetett, alkotóirányban nyomott henger horpadási alakja



2.22. ábra. A kezdeti hullámosság hatása a belső túlnyomásnak alávetett hengerhéj kritikus alkotóirányú nyomófeszültségére. *a* – tengelyszimmetrikus kezdeti hullámosság, *b* – aszimmetrikus kezdeti hullámosság

A tengelyszimmetrikus kezdeti hullámosságra vonatkozó eredményt HUTCHINSON KOITER speciális elméletével is ellenőrizte és kis eltérést kapott a 2.21. ábrához képest.

Gyűrű alakú horpadás egy belső nyomással terhelt silónál a valóságban is előfordult, amint ezt HOOLEY az 1965-ös budapesti IASS-szimpozionon ismertette.

2.6. Csavart henger

Ha egy hengert két végén ellenkező értelmű csavarónyomatékkal terhelünk, akkor a hengerfalban egyenletes tiszta nyírás keletkezik, és a héj a nyírófeszültség egy bizonyos értékénél behorpad. A lineáris elmélet alapján végzett vizsgálatok szerint [2.43], [2.51] kétféle hengert kell megkülönböztetnünk:

1. *Hosszú* a henger, ha sarokpántos végmegtámasztás esetén

$$\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{L^2 t}{(2R)^3} > 5,5, \quad (2.32)$$

befogott végek esetén pedig

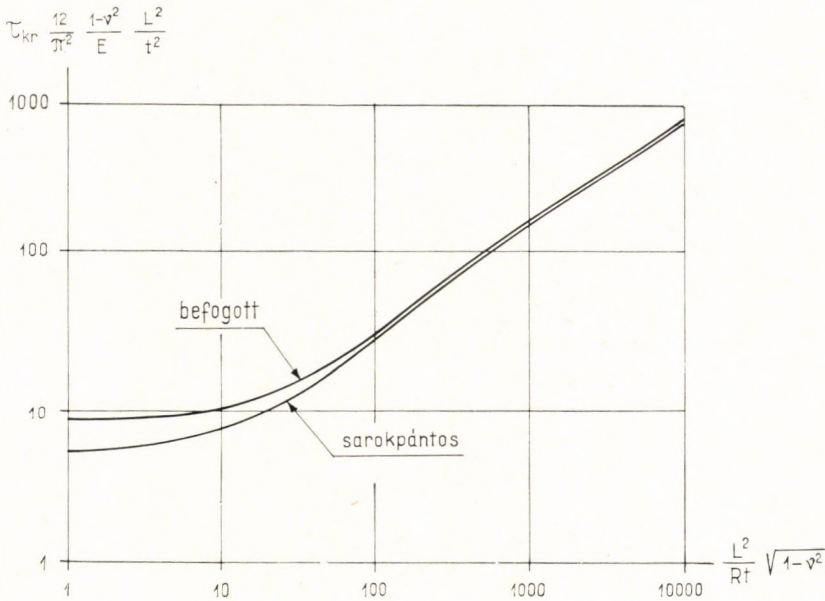
$$\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{L^2 t}{(2R)^3} > 7,8 \quad (2.33)$$

(a betűk jelentését lásd a 2.11. ábrán).

A „hosszú” henger peremfeltételei nem befolyásolják a kritikus nyírófeszültséget. Kétféleképpen veszítheti el stabilitását a csavarás hatására:

a) Rúdként elcsavarodva kihajlik. Az ezt okozó kritikus nyírófeszültség:

$$\tau_{kr} = E \frac{\pi R}{L}, \quad (2.34)$$



2.23. ábra. A csavart hengerhéj lineáris elmélet adta kritikus nyírófeszültsége

b) Behorpadhat, ehhez

$$\tau_{kr} = \frac{E}{3\sqrt{2}(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{t}{R}\right)^{3/2}. \quad (2.35)$$

Általában a (2.35) képlet ad kisebb kritikus feszültséget.

2. Rövid a henger, ha a (2.32)–(2.33) képletekben megfordul az egyenlőség jele.

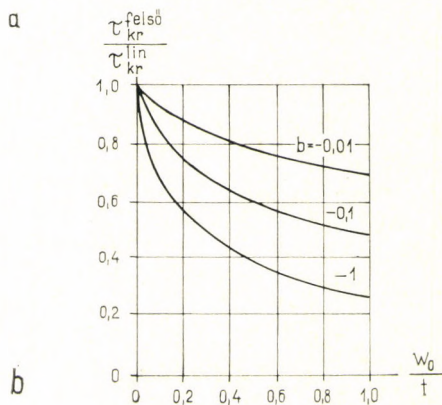
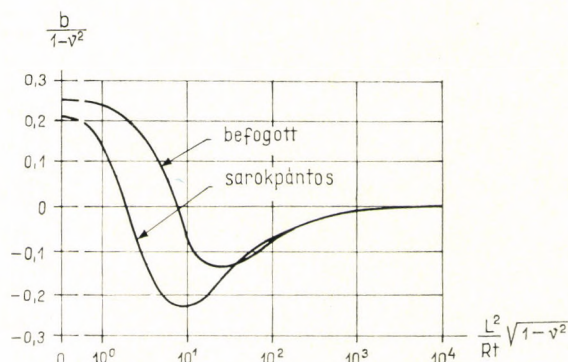
A kritikus nyírófeszültség nagysága ekkor DONNELL szerint [2.51]

sarokpántos végek esetén:

$$\tau_{kr} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^2}{L^2} \left[2,8 + \sqrt{2,6 + 1,4(1-\nu^2)^{3/4} \left(\frac{L}{\sqrt{2Rt}}\right)^3} \right], \quad (2.36)$$

befogott végek esetén pedig:

$$\tau_{kr} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^2}{L^2} \left[4,6 + \sqrt{7,8 + 1,67(1-\nu^2)^{3/4} \left(\frac{L}{\sqrt{2Rt}}\right)^3} \right]. \quad (2.37)$$



2.24. ábra. A csavart hengerhéj kritikuson túli viselkedése

Ezek alapján BATDORF a 2.23. ábrán látható módon ábrázolta a kritikus nyírófeszültséget az L/\sqrt{Rt} geometriai paraméter függvényében.

A sarokpántos végű hengerre vonatkozó képletet KROMM tovább javította [2.51] és a következő, valamivel kisebb eredményt adó kifejezést kapta:

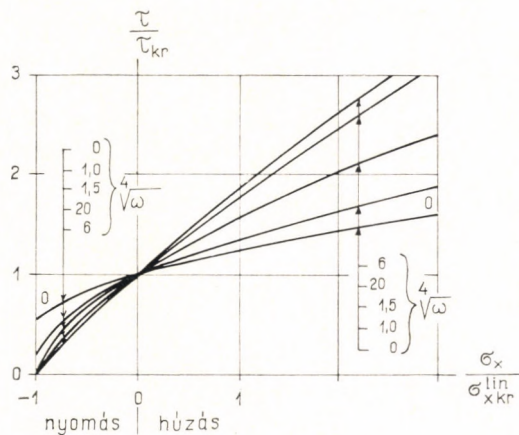
$$\tau_{kr} = 4,39 \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{t^2}{L^2} \sqrt{1 + 0,0257(1 - \nu^2)^{3/4} \left(\frac{L}{\sqrt{Rt}} \right)^3}. \quad (2.38)$$

A horpadási alak csavarvonal alakú hullámokból, ill. ilyenek kombinációiból áll [2.51].

A kísérletek [2.51], [1.1], [2.4], [2.57] általában 15–20%-kal kisebb kritikus nyírófeszültséget adtak a lineáris elméletnél. Tiszta nyírás esetében tehát a henger igen kevésbé érzékeny a kezdeti hullámosságokra.

A nagy alakváltozások (Donnell-féle) egyenletekkel először Loo [2.31] számította ki a csavart henger kritikusan túli alakváltozás-görbéit, mégpedig tökéletes és kezdeti hullámossággal bíró hengerekre, négy szabad paramétert véve fel a horpadási alak kifejezésében. NASH [2.38] tovább fejlesztette a számítást és öt paraméterrel írta le a horpadási alakot. E számítások kimutatták, hogy a kerületmenti hullámszám a horpadás során csökken.

Mindezeknél pontosabb eredményt kapott BUDIANSKY [2.4], aki KOITER általános módszerével pontosan határozta meg a tökéletes hengerre vonatkozó kritikusan túli teherbírás-görbe kezdeti szakaszára jellemző b mennyiséget (vö. az 1.1 b., c. ábrákkal és a 2.3 ponttal) mégpedig mind sarokpántos, mind befogott végek esetére (2.24a. ábra). Kezdeti hullámossággal bíró hengerre pedig az elmélet közelítően adja meg az átpattanást okozó (az 1.1c. ábra szerint értelmezett) $\tau_{kr}^{felső}$ értéket a 2.24b. ábrán.



2.25. ábra. Alkotóirányú nyomás és csavarás együttes hatása a lineáris elmélet szerint

A 2.24a. ábra valóban azt mutatja, hogy csak aránylag szűk paraméter-határok között esik le a csavart henger kritikuson túli alakváltozás-görbéje, és így megerősíti azt a kísérletekből levonható tapasztalatot, hogy egy henger akkor a legérzékenyebb a kezdeti hullámosságokra, ha tengelyirányban nyomjuk. Hidrosztatikus nyomás esetén kevésbé érzékeny, csavarás esetén pedig már igen kicsi a kezdeti hullámosság hatása.

2.7. Csavarás és tengelyirányú nyomás együttes hatása

Ezt a problémát a lineáris elmélet alapján KROMM vizsgálta [2.28], [7.21]. Eredményeit a 2.25. ábrán közöljük. Itt τ_{kr} a (2.36) képlettel megadott kritikus nyírófeszültség tiszta nyírás (csavarás) esetére, σ_{xkr}^{lin} a (2.13) képlet lineáris kritikus nyomófeszültsége alkotóirányú nyomásra, az ω geometriai paraméter jelentése pedig:

$$\omega = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^4} \frac{L^4}{R^2 t^2}. \quad (2.39)$$

A diagram érdekessége, hogy a $\sqrt[4]{\omega} = 6$ -hoz tartozó görbe szélső helyzetet foglal el. A $\sqrt[4]{\omega} = 20$ -nak megfelelő görbét $\sqrt[4]{\omega} = \infty$ -ig is érvényesnek vehetjük [7.21].

3. Kúphéjak horpadása

A kúphéjak horpadására vonatkozó vizsgálatok azt derítették ki, hogy viselkedésük hasonlít a hengerhéjakéhoz, ezért tárgyalásuk nagyon leegyszerűsödik.

A következőkben csak állandó falvastagságú kúp- és csonkakúphéjakkal foglalkozunk. Mindig feltételezzük, hogy a (csonka-) kúphéj fenéklemeze (és csonkakúp esetén a tetőlemeze) a saját síkjában végtelenül merev és csuklósan kapcsolódik a héjhoz.

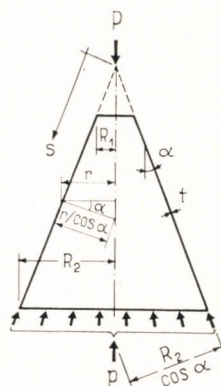
3.1. Alkotóirányú nyomás (3.1. ábra)

Ebben az esetben a kúpban csak

$$\sigma_{\text{alk}} = \frac{P}{2\pi r t \cos \alpha} \quad (3.1)$$

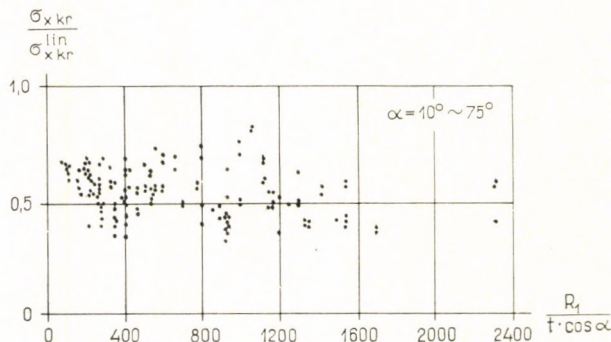
nagyságú alkotóirányú feszültség keletkezik.

A problémát a lineáris elmélet alapján SEIDE [3.4] oldotta meg. Levezetésének végeredménye az, hogy a kúp horpadás szempontjából olyan hengerrel helyettesíthető, amelynek görbületi sugara a kúp valódi főgörbületi sugarával, $r/\cos \alpha$ -val egyenlő. Ily módon pontról pontra változó görbületi sugarú hengert kapnánk. Mivel (3.1) szerint az alkotóirányú feszültség a görbületi sugarral éppen úgy fordítva arányosan változik, mint (2.13) szerint a henger kritikus feszültsége, ezért — a lineáris elmélet szerint — mindegy lenne, hogy melyik pontban határozzuk meg a helyettesítő hengert.

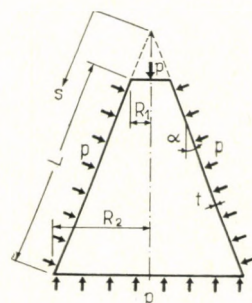


3.1. ábra. Alkotóirányban nyomott kúphéj

A hengerhorpadásnál mondottak szerint azonban nagyobb R/t arányoknál nagyobb a kezdeti hullámosság, és emiatt nagyobb mértékben csökken a kritikus teher (2.3a—c. ábrák). Így a helyettesítő henger görbületi sugarát célszerűen a kúp maximális görbületi sugarával, $R_2/\cos\alpha$ -val vesszük egyenlőre.



3.2. ábra. Alkotóirányban nyomott kúphej. Kísérleti eredmények



3.3. ábra. Hidrosztatikusan nyomott kúphej

A kúphej viselkedése abban is hasonlít a hengeréhez, hogy ha a végén nem a kerületmenti elmozdulásmentességet ($v = 0$) írjuk elő, hanem a nyírófeszültségmentességet ($n_{xy} = 0$), akkor — a hengerhez hasonlóan — a lineáris kritikus feszültség a felére esik le [3.1].

A kísérletek — a hengerhez hasonlóan — sokkal kisebb tényleges horpasztófeszültséget mutattak [3.2], [2.53]. A kritikus feszültség csökkenése kb. ugyanolyan mértékű, mint hengerhéjak esetében, kivéve a nagyobb R/t -k tartományát: kb. $R/t > 1000$ -tól kezdve többet bírtak a kúphejak, mint a megfelelő hengerhéjak (3.2. ábra). Ezt azonban a biztonság javára elhanyagolhatjuk, s ez esetben teljesen a hengerhéjakról mondottak szerint méretezhetünk.

A kísérleti héjak általában a szélesebb végükön horpadtak, körbemenő kis hullámokban, néhány sorban egymás felett. A kisebb sugarú részen kevésbé horpadtak be, a legnagyobb behorpadás a legnagyobb (R_2) sugarú szél mentén jelentkezett. Ez összhangban van az elméleti eredményekkel.

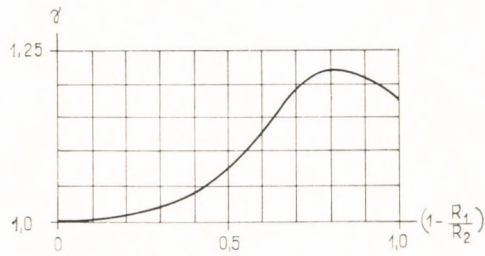
3.2. Hidrosztatikus nyomás (3.3. ábra)

Ebben az esetben a kúpban ébredő feszültségek az alábbiak:

$$\sigma_{gyűrű} = - \frac{ps \operatorname{tg} \alpha}{t}, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{alk} = \frac{\sigma_{gyűrű}}{2}. \quad (3.3)$$

3.4. ábra. A helyettesítő henger kritikus feszültségének szorzója hidrosztatikus nyomás esetén



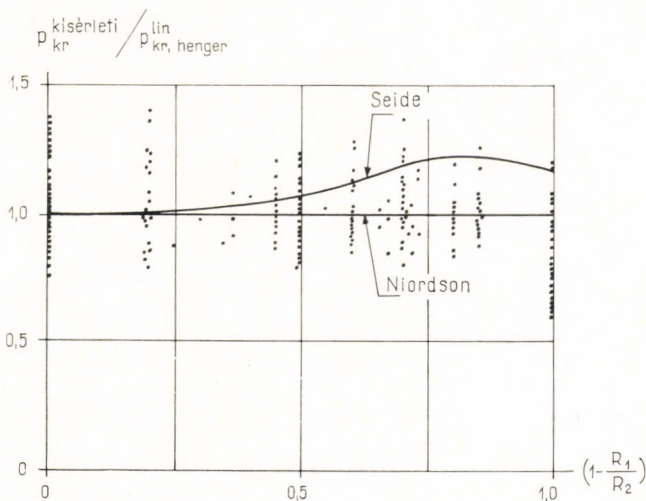
Az elméleti vizsgálatok eredményei kismértékben eltérnek egymástól. NIORDSON [3.3] levezetése szerint a (csonka)-kúp horpasztófeszültsége egyenlő egy olyan hengerével, amelynek görbületi sugara:

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2}, \quad (3.4)$$

hossza pedig a kúppalást ferde L hosszával egyenlő (3.3. ábra). E helyettesítő henger kritikus nyomását a Batdorf-képlet (2.28) szolgáltatja.

SEIDE [3.5] szerint a helyettesítő henger kritikus feszültségét még meg kell szorozni egy $(1 - R_1/R_2)$ -től függő γ tényezővel, mely a 3.4. ábrából vehető ki.

SEIDE azt is kimutatja, hogy a csanakakúp-héj — a hengerhez hasonlóan — alkotóirányban egy félhullámban horpad, ha $0 \leq (1 - R_1/R_2) \leq 0,64$ (kis nyílászögű kúpok). $(1 - R_1/R_2) > 0,64$ esetén a csúcs felé eső szakaszon egy kisebb hosszúságú második félhullám is létrejön. Ennek nyilván az a magyarázata, hogy a csúcs környéke ilyen esetekben már számottevően merevebb a többi résznél, és



3.5. ábra. Kísérleti eredmények a hidrosztatikusan nyomott kúphéjjal

így mintegy „rövidebb lesz” a helyettesítő henger. Valószínűleg ez okozza a 3.4. ábrán vázolt γ tényező 1-nél nagyobb értékét is e tartományban.

A kísérleti eredmények [3.5], [2.54] általában a fenti elméleti értékek körül helyezkednek el, és — a gyűrűirányban nyomott hengerhez hasonlóan — nem kisebbek az elméleti érték 60%-ánál. A 3.5. ábrán bemutatjuk a [2.54] irodalomban közölt kísérleti eredményeket a henger lineáris kritikus nyomásértékéhez viszonyítva. Láthatjuk, hogy zömében max. 20%-kal térnek el NIORDSON elméleti nyomásértékétől. Ennél nagyobb (40%-os) csökkenés csak az $(1 - R_1/R_2) = 1,0$ geometriájú teljes kúpnál fordul elő, tehát éppen azon a tájon, ahol SEIDE γ tényezője 1-nél nagyobb. Ezért és az egyszerűség kedvéért azt javasoljuk, hogy NIORDSON eredményét fogadjuk el és a helyettesítő hengerrel számoljunk.

3.3. Az alkotóirányú és a hidrosztatikus nyomás együttes hatása

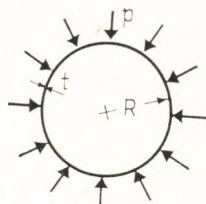
Ezzel a problémával elméletileg SEIDE [3.6] foglalkozott. Kísérleti ellenőrzést [2.54]-ben találhatunk. Lényegében azt az eredményt adják, hogy az alkotóirányú nyomás szempontjából egyenértékű henger kritikus terhe és a hidrosztatikus nyomás szempontjából egyenértékű henger kritikus terhe között a Dunkerley-egyenessel megszabott összefüggés kissé a biztonság javára tér el (l. a 2.18., 2.19. ábrákat és a hozzájuk fűzött megjegyzéseket).

4. Gömbhéjak és elliptikus felületű kupolák stabilitása

4.1. Gömbhég horpadása egyenletes radiális teher hatására

A kétszer görbült, elliptikus felületek közül állandó görbülete folytán a gömbhég tárgyalható matematikailag a legegyszerűbben, és ez van az irodalomban a legjobban kidolgozva. Először bemutatjuk a horpadásvizsgálatot a lineáris elmélet alapján, az egyensúlyi módszerrel.

A pontos levezetés nem veszi figyelembe, hogy egy-egy horpadási hullám csak a gömbfelület kis részére terjed ki, és emiatt a héjfelületnek a horpadásban szereplő része *laposnak* tekinthető. Ezért igen hosszú és bonyolult számításra és Legendre-féle gömbfüggvényekre vezet [2.17], [2.51]. Mivel azonban e levezetés, valamint a kísérletek eredményeképpen tudjuk, hogy egy horpadási hullám átmérője a gömb sugarához képest kicsi és így ezen belül a héjat lapos felületnek tekinthetjük, a lapos héjak egyenleteiből indulhatunk ki, ami lényegesen egyszerűbb teszi a levezetést.



4.1. ábra. Radiálisan nyomott gömbhég

A következőkben bemutatjuk a kritikus tehernek a laposhég-egyenleteken alapuló levezetését [2.6], [2.57], [2.12].

A lapos héjak általános (2.4) egyenletébe most a gömbnek megfelelő geometriai kifejezéseket írjuk, melyek a gömb középpontja felé mutató z tengely esetén, a laposság folytán jogossá váló közelítésekkel a következő alakot öltik (4.1. ábra):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{R}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 0. \\ L_P &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{R} \Delta.\end{aligned}\tag{4.1}$$

A horpadást megelőző állapot metszeterői:

$$\begin{aligned} n_{xy} &= 0, \\ n_x &= n_y = -\frac{pR}{2}. \end{aligned} \quad (4.2a)$$

A horpadás közben fellépő \bar{p} teher a (4.2a) nyomóerőknek a w horpadási alakváltozásból származó görbületváltozással való szorzata lesz:

$$\bar{p} = -\frac{pR}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{pR}{2} \Delta w. \quad (4.2b)$$

Mindezeket (2.4)-be helyettesítve a következőt kapjuk:

$$B\Delta^4 w + \frac{D(1-\nu^2)}{R^2} \Delta^2 w = -\frac{pR}{2} \Delta^3 w. \quad (4.3)$$

A w -re a hengerhez hasonlóan egy „hálós” horpadási alakot leíró

$$w = w_1 \sin \frac{\pi}{l_x} x \sin \frac{\pi}{l_y} y \quad (4.4)$$

kifejezést véve fel, a következő egyenlet adódik a kritikus p_{kr} nyomásra:

$$p_{kr} \frac{R}{2} = B\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) + \frac{D(1-\nu^2)}{R^2 \pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)}. \quad (4.5)$$

Ha differenciáljuk p_{kr} -t $\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)$ szerint, és a deriváltat zérussal tesszük egyenlővé, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{D(1-\nu^2)}{BR^2}}. \quad (4.6)$$

A horpadási alak tehát ismét határozatlan, hasonlóan a tengelyirányban nyomott hengeréhez (2.10).

(4.6)-ot (4.5)-be helyettesítve megkapjuk a kritikus teher értékét:

$$p_{kr}^{lin} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{t^2}{R^2} = \frac{1,16}{\sqrt{1-\nu^2}} E \frac{t^2}{R^2}. \quad (4.7)$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk p_{kr}^{lin} -re, ha *körszimmetrikus* alakváltozást tételezünk fel a lapos héjon.

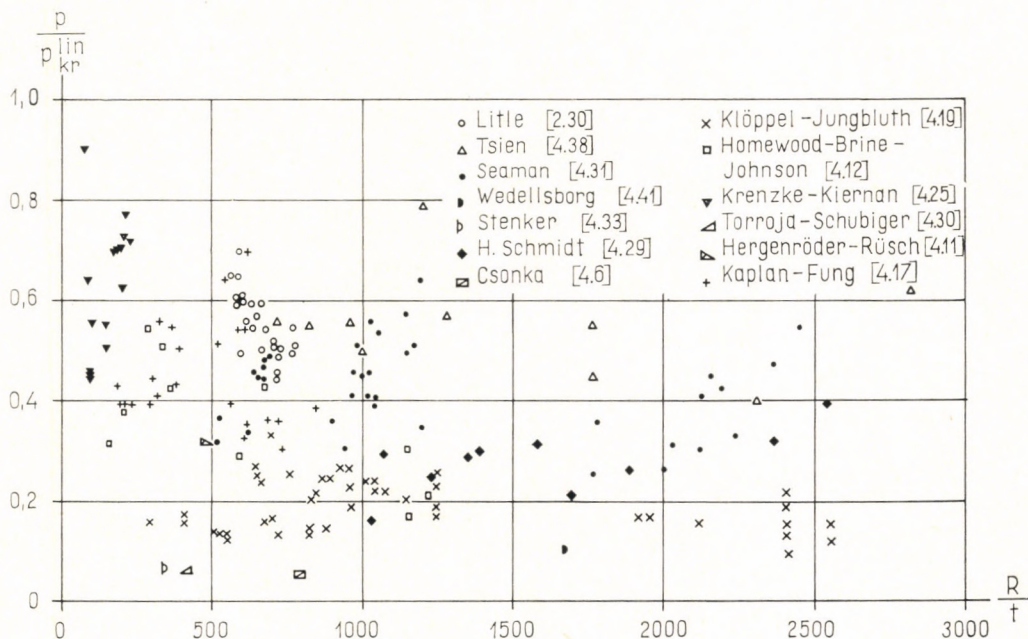
A kritikus tehernek ezt az értékét a pontos (azaz a héj laposságát nem feltételező) számítással először ZOELLY vezette le 1915-ben [4.43], körszimmetrikus horpadási alak alapulvételével. Később VAN DER NEUT disszertációjában [4.27] kimutatta, hogy hálós, azaz aszimmetrikus horpadási alakváltozást feltételezve

is ugyanerre az eredményre jutunk. A kritikus tehernek ezt az értékét a továbbiakban p_{kr}^{lin} -nek fogjuk nevezni. A kísérletek azonban lényegesen kisebb kritikus terhet adtak, mint ez a lineáris elmélet alapján levezetett elméleti kritikus teher. A 4.2., 4.3. ábrában összeállítottuk az irodalomban található kísérletsorozatok eredményét az R/t , illetve a λ paraméter függvényében. (λ a gömbsiüveg-héj jellemző paramétere, lásd a (4.11) képletet és a 4.9. ábrát.) H. SCHMIDT [4.29] kísérleti eredményei közül λ függvényében csak a négy szélső esetet reprezentálót rajzoltuk fel a 4.3. ábrába. A többi ezek között helyezkedett el. Az egyszerűség kedvéért ezekbe az ábrákba rajzoltuk be a nem gömbfelületű héjakra fellelhető eredményeket is (l. alább a d) pontot).

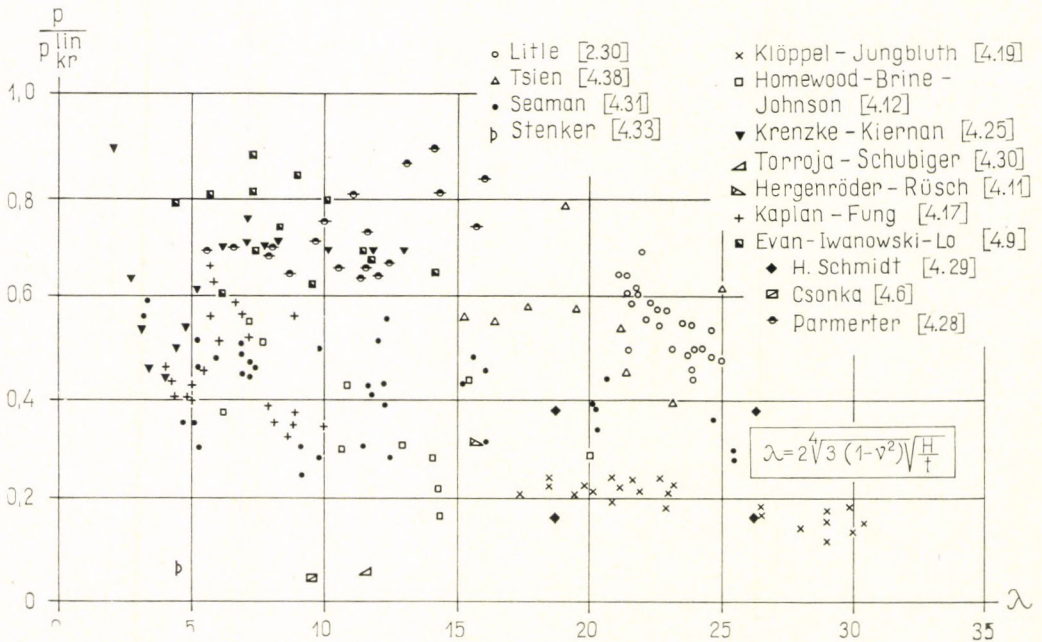
A kísérleti eredményeket a következő szempontokkal tudjuk áttekinthetőbbé tenni:

a) Néhány kísérlethez különleges technológiával *gyakorlatilag tökéletes* gömbhéjat állítottak elő, kezdeti hullámosságok nélkül. Ilyenek voltak: PARMETER [4.28], KRENZKE és KIERNAN [4.25], EVAN-IWANOWSKI [4.9] kísérletei. Eredményeik valóban magasabban fekszenek a többiekénél, akik kevésbé tökéletes héjakat horpasztottak. Ide sorolhatjuk még ADAM és KING [4.1]-nek és CARLSON—SENDELBECK—HOFF [4.5]-nak az ábrákon fel nem tüntetett kísérleteit is, amelyekkel a p_{kr}^{lin} 80, ill. 86%-át is elérték.

b) A kísérletek másik csoportjában *gyenge volt a hépvállak megtámasztása* (nem volt elég merev a talpgyűrű, vagy — sokszög alaprajzú héjak esetében — „fél-merev” diafragmák támasztották meg a héjak széleit, amelyeknek oldalirányban nem volt merevségük). Ide tartoznak: CSONKA [4.6], TORROJA és SCHUBIGER [4.30].



4.2. ábra. Gömbhéj-kísérletek eredményei R/t függvényében



4.3. ábra. Gömbháj-kísérletek eredményei a λ paraméter függvényében

H. SCHMIDT [4.29], HERGENRÖDER—RÜSCH [4.11], STENKER [4.33] héjai, valamint KLÖPPEL és JUNGBLUTH kísérleteinek [4.19] egy része (ez utóbbiakat részletesen l. később).

KAPLAN—FUNG [4.17], HOMEWOOD—BRINE—JOHNSON [4.12], SEAMAN [4.31] és LITTLE [2.30] modelljeinek megtámasztása is gyengébb volt a teljes befogásnál (l. a [4.39]-ben közölt értékelést). Ezek kisebb kritikus tehernél horpadtak, mint a többiek.

c) A következő kísérleti héjak *nem voltak kör alaprajzúak*, ami a b) pontbeli hatáson kívül azzal a következménnyel is jár, hogy az erőjáték is eltér a kör alaprajzzal együttjáró körszimmetriától, és pontosan nem definiálható helyi zavarokat okozhat. Ilyenek: CSONKA, TORROJA és SCHUBIGER, H. SCHMIDT, valamint HERGENRÖDER—RÜSCH kísérletei.

d) A héjfelület a következő kísérletekben *nem volt gömb*: CSONKA, TORROJA és SCHUBIGER, H. SCHMIDT. Erre vonatkozóan l. a 4.3. pontot.

e) A legalacsonyabban fekvő három kísérleti pontot *vasbetonból* készült héjak szolgáltatták (CSONKA, TORROJA és SCHUBIGER, STENKER). A beton hajszálrepedései, a kúszás és esetleg a nagyobb kivitelezési pontatlanságok jutottak itt szerephez, l. részletesebben a 9.6. pontban.

f) Végül megemlítjük, hogy valamennyi kísérleti héj *lapos* volt, kivéve TSIEN [4.38] és LITTLE héjait, valamint KLÖPPEL—JUNGBLUTH, HOMEWOOD—BRINE—JOHNSON, SEAMAN és KRENZKE modelljeinek egy részét. WANG [4.39] nagyszámú kísérletet feldolgozó tanulmányában rámutat arra, hogy csak a lapos héjak kritikus terhe függ a λ paramétertől (4.11), a meredekeké nem.

A terhelés módja (iránytartó, pl. súlyteher, vagy a behorpadó felületre merőlegesen ható teher, pl. hidrosztatikus nyomás) [4.32] szerint — ellentétben a hidrosztatikusan nyomott hengerrel — gyakorlatilag nem ad különbséget a kritikus teher értékében, így erre nem is térünk ki.

A lineáris kritikus teher és a kísérleti eredmények eltéréseinek megmagyarázására kidolgozták a gömbhéjhorpadást az ún. *nagy alakváltozásos* elmélettel. Ennek lényege a hengerhéjnal már tárgyaitak szerint az, hogy — a horpadó héjszakasz laposságára vonatkozó feltevést megtartva — a héjfelületre merőleges w elmozdulás első deriváltjainak négyzetét tartalmazó tagokat is figyelembe vesszük az alakváltozások kifejezésében. Ezzel nemcsak a deformálatlan alakkal szomszédos egyensúlyi helyzetig tudjuk követni a horpadás jelenségét, hanem a héjvastagság többszörösét kitevő alakváltozásokig is. Kezdeti hullámosság nélküli (*tökéletes*) teljes gömbfelületre először KÁRMÁN és TSIEN vizsgálták meg ily módon a horpadást [4.18]. Előre felvették a tengelyszimmetrikus horpadási hullám alakját, kiterjedését egy szabad paraméterrel jellemezték, eszerint minimalizálták a terhet minden teherintenzitás-lépcsőnél, és ily módon meghatározták a kritikuson túli teherbírásgörbe mélypontját, amelyre ($\nu = 0$ -val) a

$$p_{kr}^{alsó} = 0,365 \frac{Et^2}{R^2} \quad (4.8)$$

eredményt kapták (4.4. ábra). Az abszcisszatengelyre a teher átlagos f elmozdulásának és a lineáris kritikus teher elérésekor bekövetkező f_{kr}^{lin} elmozdulásnak az aránya van felrakva. Mivel az átlagos f elmozdulás a gömb ΔV térfogatváltozását adja meg, azért $f/f_{kr}^{lin} = \Delta V/\Delta V_{kr}^{lin}$, ha ΔV_{kr}^{lin} -nel jelöljük a lineáris kritikus teherhez tartozó térfogatváltozást. A függőleges tengelyre a p/p_{kr}^{lin} arányt raktuk fel, ami a (4.8) képlet esetében 0,315-nek felel meg.

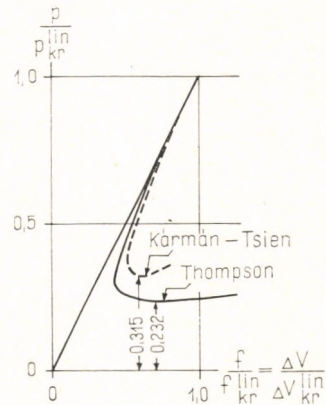
Később TSIEN [4.38] a számítás pontosságának fokozásával a

$$p_{kr}^{alsó} = 0,312 \frac{Et^2}{R^2} \quad (4.9)$$

eredményt kapta, azaz a lineáris kritikus teher 0,27-szeresét.

A KÁRMÁN—TSIEN-féle levezetésről FRIEDRICH [4.10] és MUSTARI—SZURKIN [4.26] megállapították, hogy két elvi hibát tartalmaz, de ezek a végeredményben nagyjából kiegyenlítik egymást. Az egyik hiba, hogy elhanyagolták a gömbfelület pontjainak érintőirányú elmozduláskomponenseit, a másik pedig, hogy nem a teljes potenciális energia minimumát határozták meg, hanem csak a teherét (vö. a nemlineáris módszer leírásával a 2.1. fejezetben).

THOMPSON [4.34] négy szabad paraméterrel írta fel a horpadási hullám alakját, amivel ki tudta mutatni, hogy az át pattanás során a horpadási hullámnak mind az alakja, mind a kiterjedése erősen változik, mégpedig a teherintenzitás csökkenésével növekszik a horpadási félhullámhossz (4.5. ábra). Fel-



4.4. ábra. A tökéletes gömbhéj kritikuson túli viselkedése

tételezte, hogy az alakváltozás végig tengelyszimmetrikus. Így ($\nu = 1/3$ -dal) a 4.4. ábra második görbéjét kapta, melynek mélypontja:

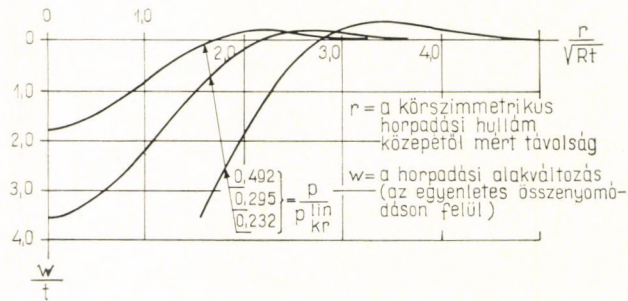
$$p_{kr}^{alsó} = 0,283 \frac{Et^2}{R^2},$$

azaz a lineáris kritikus teher 0,232-szerese.

Szovjet kutatók hasonló elvek alapján további számításokat végeztek és egyre kisebb számértéket kaptak a $p_{kr}^{alsó}$ képletében szereplő tényezőre. Így MUSTARI [4.26a] 0,22-t, GABRILJANC és FEODOSZJEV [4.10a] 0,13-at. Legújabbán pedig DOSZTANOVA és RAJZER [4.7a] $\nu = 0$ -val a

$$p_{kr}^{alsó} = 0,126 \frac{Et^2}{R^2} \quad (4.10)$$

értéket kapták, azaz a lineáris kritikus teher 0,108-szorosát.

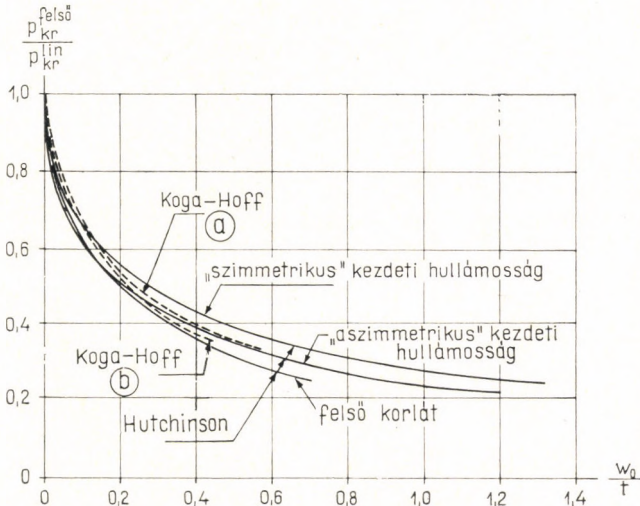


4.5. ábra. A horpadási hullám alakjának változása a horpadás folyamán

Mindezek az eredmények azt mutatják, hogy egy tökéletes gömb ugyan elméletileg csak a lineáris kritikus tehernél horpad be, de a görbe alakjából nyilvánvaló, hogy a héj nagyon érzékeny a kezdeti hullámosságokra.

A teljes gömbre vonatkozó további vizsgálatok a legnagyobbbrészt KOITER munkásságán alapulnak, aki — a 2. fejezetben mondottak szerint — a lineáris horpadásmélethez kiadódó összes lehetséges horpadási alakot beleveszi a számításba, és ezekből az — egyébként a lineáris elméletben egymással ortogonális — alakokból kiválasztja azokat a csoportokat, amelyek a nemlinearitás miatt kombinálódnak egymással, és a legkisebb kritikus terhet szolgáltatják. HUTCHINSON [4.14] ily módon, az aszimmetrikus horpadási alakokat is figyelembe véve, a laposhéj-egyenletekkel vizsgálta a tökéletes gömböt, és egy olyan görbét kapott, amely THOMPSONnak a 4.4. ábrán vázolt diagramjánál meredekebben esik le, de nem számította ki a görbe mélypontját. A kezdeti hullámossággal bíró gömbre pedig azt kapta, hogy az 1.1c., ill. d. (vagy az 1.1e.) ábrának megfelelően viselkedik.

Az átpattanást okozó $p_{kr}^{elágazási}$ (vagy $p_{kr}^{felső}$) teher értékét a falvastagsághoz viszonyított kezdeti hullámossági amplitúdó függvényében ($\nu = 1/3$ -dal számítva) a 4.6. ábrán vázolt két felső görbe adja meg, mégpedig attól függően, hogy a kezdeti hullámosság alakját a legveszélyesebb kombinációt adó, két egymással kapcsolódó horpadási alak [$w_1 = a_1 \cos (bx)$ és $w_2 = a_2 \sin (cx) \sin (\sqrt{3} cy)$] közül melyikkel veszi konformnak. A felső görbéhez w_1 -gyel konform („szimmetrikus”),



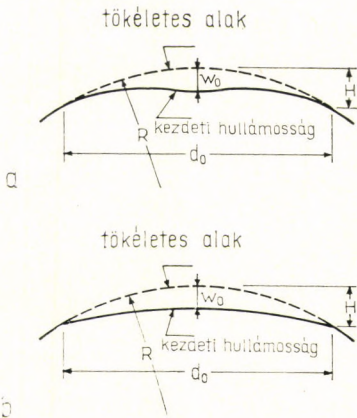
4.6. ábra. A kezdeti hullámosság hatása a gömbhéj átpattanási terhére

kezdeti hullámosság tartozik és az 1.1e. ábrának megfelelően horpad a héj, az alsó görbe kezdeti hullámossága pedig w_2 alakú („aszimmetrikus”) és az 1.1e. ábra szerinti átpattanás következik be. (A felvett „hullámcs” horpadási alakok nem adhatják ki az 1.1d. ábrának megfelelő, $\pm w$ -re „aszimmetrikus” viselkedést.) HUTCHINSON vizsgálata gyakorlatilag teljesen általánosnak mondható, hiszen nem szorítkozott tengelyszimmetrikus alakú kezdeti hullámosságokra, csupán a KOITER módszerében rejlő közelítések teszik nagyobb kezdeti hullámossági amplitúdókra pontatlanná. Ezt illusztrálja a 4.6. ábra legelső görbéje, amely KOITER speciális elméletének megfelelően egy kiválasztott kezdeti hullámossági alakra kapható egzakt (tehát nagyobb kezdeti hullámossági amplitúdókra is pontos) megoldás eredményét mutatja be. Mivel ez nem a legveszélyesebb esetet tükrözi, ezért a pontos görbének még valamivel mélyebben kell futnia.

KOITER [4.22] nem használta fel a laposhéj-egyenletek nyújtotta közelítéseket, viszont tengelyszimmetrikus kezdeti hullámosságra és horpadási alakra szorítkozott. Eredményei igen közel állnak HUTCHINSON-éihoz.

Mivel KOITER módszere — legalábbis eredeti alakjában, a hatványsor magasabb tagjainak elhagyása miatt — nagyobb kezdeti hullámosságok esetén egye

pontatlanabb, ezért más szerzők azt az utat választották, hogy csak tengelyszimmetrikus horpadási alakváltozásra és kezdeti hullámosságra szorítottak, ezt viszont igyekeztek pontosan megoldani. Indokolta ezt az a kísérleti megfigyelés is (l. pl. [4.21]-ben), hogy a gömbhéj-modellek — legalábbis a horpadási folyamat elején — mindig tengelyszimmetrikusan deformálódnak.



4.7. ábra. Az alapul vett kezdeti hullámosságok

azért viselkedhetnek másképpen a különböző λ -jú kezdeti hullámossággal bíró gömbhéjak, mert az egész jelenség nemlineáris, és attól függően, hogy a kezdeti hullámosság d_0 átmérője mennyire tér el a gömbhéj „természetes” (a lineáris elméletnek megfelelő) horpadási félhullámhosszától, más és más lesz a viselkedése a horpadás folyamán. Másrészt pedig a teljes gömbnek a kezdeti hullámosságon belül levő része hasonlóan viselkedik, mintha d_0 átmérőjű, a szélén befogott gömbfüveg volna [4.4], ennél pedig a jelenség természetéből is érthető, hogy csipkegörbe adódik (l. később).

A 4.8. ábra azt mutatja, hogy a $\lambda = 2$ és 4 közötti értékeknél kapjuk adott w_0/t -hez a legkisebb $p_{kr}^{felső}$ -t. Ez a λ -érték nagyjából megegyezik a lineáris horpadás-elmélet tengelyszimmetrikus esetre vonatkozó félhullámhosszának megfelelő $\lambda_{lin} = 2,35$ értékkel [1.2].

KOGA és HOFF [4.21] BUSHNELLétől eltérő numerikus módszerrel oldották meg a teljes gömb tengelyszimmetrikus horpadását a 4.7. ábrán vázolt mindkét fajta kezdeti hullámosság esetére. Azt találták, hogy az *a* alakú kezdeti hullámossághoz akkor kapják a legkisebb $p_{kr}^{felső}$ -t, ha $\lambda \approx 4$, a *b* alakúhoz pedig akkor, ha $\lambda \approx 3$. Ez az utóbbi eredmény nagyjából megegyezik BUSHNELLével (l. a 4.8. ábrát).

E legkisebb $p_{kr}^{felső}$ -ket w_0/t függvényében a 4.6. ábrán *a*-val és *b*-vel jelölt két szaggatott görbe ábrázolja.

A *b*-vel jelölt görbe gyakorlatilag egybeesik BUSHNELLnek a 4.8. ábrán feltüntetett burkolójával, ami jó kontroll az eredményre.

Figyelemre méltó, hogy KOGA és HOFF két görbéje alig tér el egymástól, ami

A fenti elvek alapján BUSHNELL [4.4] számos geometriai arányra kiszámította a szimmetrikus alakú átpattanást okozó, az 1.1d. ábra szerint értelmezett $p_{kr}^{felső}$ -t a 4.7b. ábrának megfelelő alakú kezdeti hullámosság esetére, a falvastagsághoz viszonyított kezdeti hullámossági amplitúdó (w_0/t) függvényében. Különböző d_0 átmérőjű kezdeti hullámosságokhoz más és más görbéket kapott, amelyek „csipkegörbévé” rakhatók össze (4.8. ábra). Az ábrán a kezdeti hullámosság d_0 átmérőjét a (4.11) képlettel definiált λ paraméterrel jellemeztük, amelyben a H magasság a kezdeti hullámosság helyére képzelt eredeti gömbfüveg magasságát jelenti (4.7b. ábra). E csipkegörbe alsó (szaggatva megrajzolt) burkolóját tekinthetjük a méretezéshez felhasználható görbének.

Magának a csipkegörbének a létrejöttét két körülménnyel magyarázhatjuk. Egyrészt

két körülménnyel magyarázhatjuk. Egyrészt

Magának a csipkegörbének a létrejöttét két körülménnyel magyarázhatjuk. Egyrészt

Magának a csipkegörbének a létrejöttét két körülménnyel magyarázhatjuk. Egyrészt

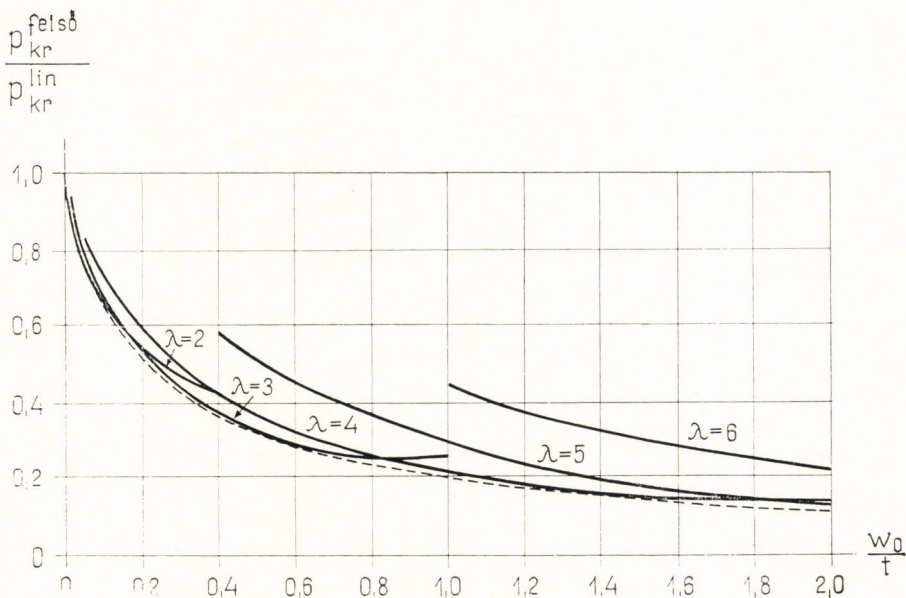
Magának a csipkegörbének a létrejöttét két körülménnyel magyarázhatjuk. Egyrészt

Magának a csipkegörbének a létrejöttét két körülménnyel magyarázhatjuk. Egyrészt

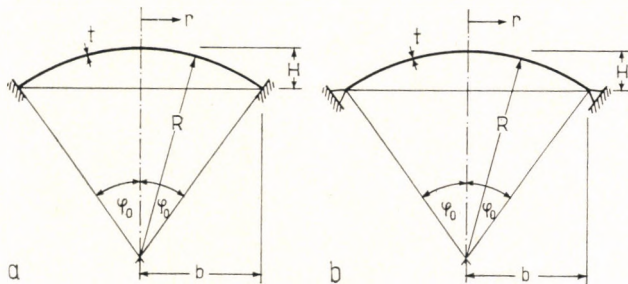
Magának a csipkegörbének a létrejöttét két körülménnyel magyarázhatjuk. Egyrészt

azt mutatja, hogy gyakorlati célokra elegendő a kezdeti hullámosságot az alakjától függetlenül csupán a w_0 amplitúdójával jellemezni.

A HUTCHINSON-féle, aszimmetrikus kezdeti hullámosságot és horpadási alakváltozást is figyelembe vevő görbékkel való jó egyezés valószínűleg a következő két körülmény egymást lerontó hatásának köszönhető: egyrészt KOGA és HOFF—HUTCHINSONnal ellentétben — nem használták a KOITER módszerében alkalmazott közelítéseket, s emiatt valamivel mélyebben futó görbét kaptak. Másrészt pedig, mint már említettük, a kísérletek szerint a horpadási alak — legalábbis a horpadási folyamat elején — valóban tengelyszimmetrikus, és így ez a feltételezés legfeljebb csak kismértékben növeli a számított $p_{kr}^{felső}$ -t. Végeredményben

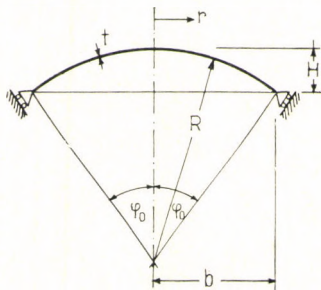


4.8. ábra. A kezdeti hullámosság hatása BUSHNELL szerint



4.9. ábra. Gömbsüveghéj. a — befogott, b — csuklós

megállapíthatjuk (l. [4.22]-ben is), hogy a gömbhéj horpadására — ellentétben a hengerhéjjal — nagyjából ugyanazt az eredményt kapjuk, akár szimmetrikus kezdeti hullámosságra és horpadási alakváltozásra szorítkozunk, akár figyelembe vesszük az antiszimmetrikus alakváltozást is.



4.10. ábra. Hengerszekerekkel megtámasztott gömbfüveghej

Az elméleti vizsgálatok másik csoportja a peremén mereven befogott (vagy sarokpántosan megtámasztott) gömbfüvegre vonatkozik. A jelöléseket a 4.9. ábrán tüntettük fel. A befogott gömbfüveg viselkedésének megértéséhez először vegyük szemügyre a 4.10. ábra szerint megtámasztott gömbfüveget, amelynek szélei szabadon gördülhetnek egy kúpfelületen, de nem tudnak elfordulni. Ez hasonló helyzetben van, mintha a teljes gömbnek egy darabja lenne: a külső nyomás hatására akadálytalanul össze tud nyomódni anélkül, hogy hajlítást szenvedne. A lineáris horpadáselemélet szerint e gömbfüveg kritikus terhére egy csipkegörbe adódik, melynek alsó érintője vízszintes és megegyezik a tökéletes alakú teljes gömbhéj (4.7) képlet

szerinti lineáris kritikus terhével [4.3], [4.13]. Az ily módon megtámasztott gömbfüveg tehát majdnem pontosan úgy akar horpadni, mint a teljes gömbhéj.

Ha már most a gömbfüveg széle mereven be van fogva, vagy elmozdulásmentesen van csuklósan megtámasztva (4.9. ábra), akkor a héj — még ha kezdetben tökéletes alakú volt is — a horpadás előtt hajlítást szenved a teher hatására, mert maga a gömbfüveg a benne ébredő nyomófeszültségek következtében összenyomódik, a végtelen merevnek tekinthető perem azonban nem. Ez a hajlítási alakváltozás bizonyos esetekben ugyanolyan jellegű, mint a horpadási alakváltozás, más esetekben pedig ellenkező jellegű. A levezetések szerint ez a

$$\lambda = 2 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{H}{t}} = 2,63 \sqrt[4]{1 - \nu^2} \sqrt{\frac{H}{t}} \quad (4.11)$$

geometriai paramétertől függ, ahol H a gömbfüveg magassága (4.9. ábra). (Ebben a paraméterben nem szerepel a gömbfüveg átmérője, vagyis a héj görbületi sugara.)

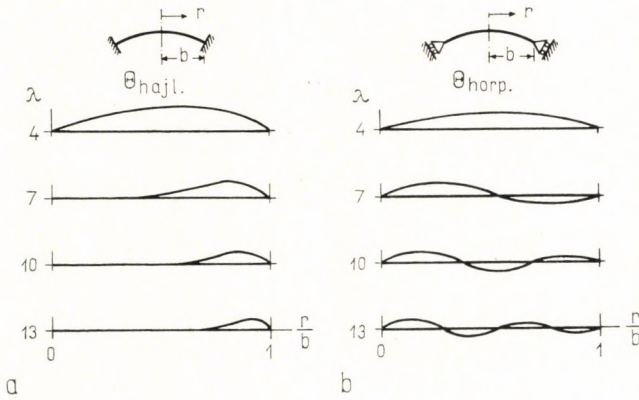
A 4.11a. ábrán bemutatjuk [4.3] alapján a λ paraméter néhány értékére a befogott gömbfüveg (4.9a. ábra) érintőhajlásának megváltozása (elfordulási) ábráját, mely a hajlításból származik, összehasonlítva a 4.10. ábra szerint megtámasztott gömbfüveg tengelyszimmetrikus horpadási elfordulás-ábrájával (4.11b. ábra). (A gömbfüveg ugyanis az utóbbi módon horpadna a „legszívesebben”). Láthatjuk, hogy $\lambda = 4$ és 10 esetén egyező jellegű a két görbe, $\lambda = 7$ és 13 esetén pedig ellenkező jellegű.

E hajlítási alakváltozások következtében a tökéletes alakú gömbfüveghej is úgy viselkedik, mintha kezdeti hullámossága lenne, és így alakváltozása az 1.1d. ábra külpontos görbéinek felel meg. [4.3], [4.42] és [4.35] alapján e görbék $p_{kr}^{felső}$ és $p_{kr}^{alsó}$ értékeit λ függvényében teljes vonallal ábráztuk a 4.12. ábrán. A $p_{kr}^{felső}$ -görbe jellegzetessége, hogy oszcillál a $p_{kr}/p_{kr}^{lin} = 1$ egyenes körül. A 4.11.

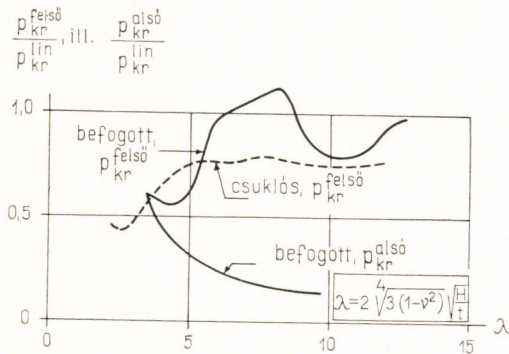
ábrával összevetve láthatjuk, hogy ahol a teher hatására bekövetkező hajlítási alakváltozás azonos jellegű a horpadási alakváltozással, ott a lineáris elméletnél kisebb kritikus terhénél horpad a héj, ahol pedig ellenkező jellegű, ott nagyobb kritikus terhénél.

Ugyanezen az ábrán szaggatott vonallal ábrázoltuk [4.42] alapján a *csuklósan* megtámasztott (4.9b. ábra) gömbcsüveg $p_{kr}^{felső}$ -görbéjét. Ez alacsonyabban fut a befogott gömbcsüveg görbéjénél, de hasonló jellegű.

A befogott gömbcsüveg 4.12. ábra szerinti $p_{kr}^{felső}$ -görbéje azonban lényegesen magasabb kritikus terhet ad, mint a befogott gömbcsüveggel végzett kísérletek (4.3. ábra). Ezért az eltérés tisztázása felé a következő lépés a gömbcsüveghéj *kezdeti hullámosságának* figyelembevétele volt. Először BUDIANSKY [4.3], majd a számítást tovább finomítva THURSTON és PENNING [4.37] dolgoztak ki módszert a *tengelyszimmetrikus* kezdeti hullámossággal bíró befogott gömbcsüveghéj horpadásvizsgálatára. A nemlineáris elmélettel követték a héj alakváltozását és az

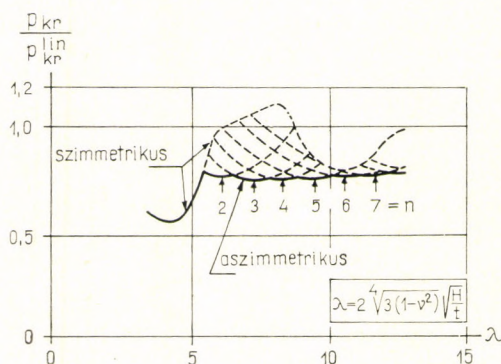


4.11. ábra. A hajlítási és a horpadási alakváltozás érintőinek hajlásszöge

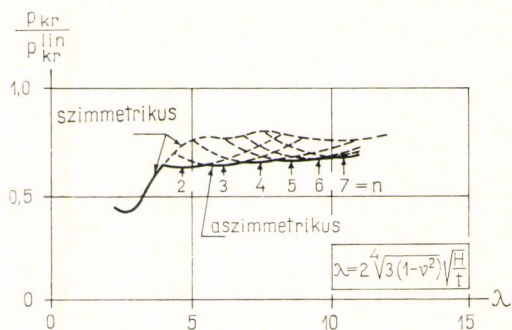


4.12. ábra. A tökéletes gömbcsüveghéj átpattanási kritikus terhe (szimmetrikus horpadási alakváltozást feltételezve)

1.1d. ábra szerinti $p_{kr}^{felső}$ -t határozták meg, tengelyszimmetrikus horpadást feltételezve. Az utóbbi szerzők 40 olyan modellt vizsgáltak meg kísérletileg és számítással, amelyeket szándékosan bizonyos mértékű kezdeti hullámosságúra gyártottak igen nagy pontossággal. A modelleknek mintegy a felét (az igen vékony, valamint a majdnem tökéletes héjakat) kivéve számítás és mérés meglehetősen



4.13. ábra. A befogott, tökéletes gömbcsüveg szimmetrikus alakváltozásából kiágazó aszimmetrikus kihajlás kritikus terhe



4.14. ábra. A csuklós, tökéletes gömbcsüveg szimmetrikus alakváltozásából kiágazó aszimmetrikus kihajlás kritikus terhe

4.14. ábrák WEINITSCHKE számításai alapján mutatják be a befogott és a csuklósan megtámasztott gömbcsüveg héj görbéjét (n = az aszimmetrikus horpadási alak gyűrűirányú hullámszáma). E görbék jellegzetessége, hogy a tökéletes gömbcsüveg tengelyszimmetrikus horpadását feltételező 4.12. görbékkel szemben nem oszcillálnak, hanem meglehetősen állandó jellegűek, λ -tól gyakorlatilag függetlenek.

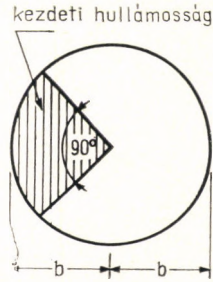
ARCHER és FAMILI [4.2] ugyanezt a görbét kapták meg a szimmetrikusan deformálódó, befogott gömbcsüveg héj aszimmetrikus rezgésének vizsgálatából. A kritikus terhet a sajátfrekvencia zérussá válása szolgáltatta.

A 4.13. ábra azt mutatja, hogy a befogott gömbcsüveg csak $\lambda > 5,5$ -nél hajlamos az aszimmetrikus horpadásba való átugrásra, ennél kisebb λ -értékeknél tengelyszimmetrikusan horpad.

jól egyezett. THURSTON később tovább tökéletesítette a számítási módszert [4.36] és valamivel kisebb $p_{kr}^{felső}$ -ket kapott.

Mindezek a vizsgálatok azonban nem vették figyelembe az aszimmetrikus alakú horpadás lehetőségét, pedig a gömbcsüveg-héj-modellek horpadási folyamatáról készült nagy sebességű filmfelvételekből (pl. [4.19]) kitűnt, hogy a gömbcsüveg-héjak sok esetben aszimmetrikusan horpadnak, legalábbis a horpadási folyamat egy részében. A jelenség tehát az 1.1e. ábrának felel meg. Ennek alapján a további elméleti vizsgálatok azt kutatták, hogy a tökéletes gömbcsüveg tengelyszimmetrikus deformációjából, melyet a nagy-alakváltozások (nemlineáris) elmélettel követnek, milyen teherrel tud elágazni egy „szomszédos” aszimmetrikus horpadás. Maga ez az elágazás a lineáris elmélettel vizsgálható, vagyis egy lineáris sajátérték-feladatot kell kombinálni a nemlineáris tengelyszimmetrikus alakváltozással. HUANG [4.13] és WEINITSCHKE [4.42] egymástól függetlenül megoldva a feladatot ugyanarra az eredményre jutottak: λ függvényében a $p_{kr}^{elágazási}$ -t csipkegörbe ábrázolja. A 4.13. és

4.15. ábra. A felvett aszimmetrikus kezdeti hullámosság alaprajza

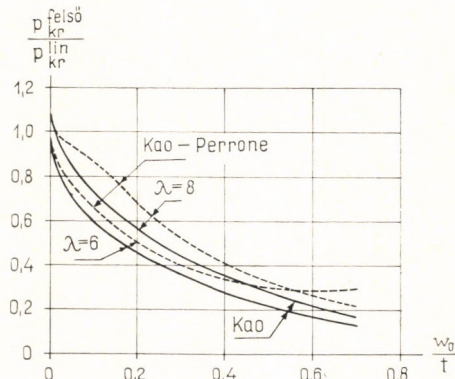


Ez az aszimmetrikus horpadást is figyelembe vevő elmélet már meglehetősen jól egyezik a „majdnem tökéletes” gömbcsüveghejakon végzett kísérletek eredményeivel (a 4.3. ábrán feltüntetett KRENZKE—KIERNAN-, EVAN-IWANOWSKI- és PARMETER-féle pontokkal). Még mindig számottevő eltérés mutatkozik azonban a „kevésbé tökéletes” gömbhéjakon végzett kísérletektől, amiből az következik, hogy figyelembe kellene venni az aszimmetrikus kezdeti hullámosság hatását is. Az első ilyen — nagy matematikai nehézségekkel járó — számítást KAO és PERRONE végezték el, majd KAO még pontosabb módszerrel javította az eredményeket [4.16]. A befogott gömbcsüveg negyedrészen (4.15. ábra) vettek fel egy, a 4.7a. ábrához hasonló metszetű kezdeti hullámosságot, és a laposhéjak nagy alakváltozásos elméletével követték a deformációt a teher növekedésének függvényében. A teher maximuma adta meg $p_{kr}^{felső}$ -t. Két λ -értékre számították ki a különböző w_0/t -khez tartozó $p_{kr}^{felső}/p_{kr}^{lin}$ arányt (4.16. ábra). Ezeket tekinthetjük a méretezéshez felhasználható görbéknek. (A $\lambda = 8$ -hoz tartozó görbe $w_0 = 0$ -nál $p_{kr}^{felső}/p_{kr}^{lin} = 1,0$ -nél nagyobb értékről indul, ami megfelel a 4.12. ábrának.)

KAO és PERRONE azt is megvizsgálták, hogy mekkora hatása van a kezdeti hullámosság alaprajzi alakjának. Azt találták, hogy ha a 4.15. ábrán a kezdeti hullámosság 90° -os középponti szögét 45° -ra csökkentették, az átpattanást okozó teher alig változott.

A teljes gömbre és a befogott (ill. sarokpántosan megtámasztott) gömbcsüvegre vonatkozó elméleti eredményeket összevetve az alábbi következtetésekre jutunk:

A teljes gömb horpadásvizsgálatában a héjat két részre lehet bontani [4.21]: egy horpadó, lapos gömbcsüvegre és a megmaradó részre, amely csak kismértékű alakváltozásokat szenved a csatlakozási feltételből. A befogott gömbcsüveg tehát csupán abban különbözik a teljes gömbtől, hogy a széle elfordulás és eltolódás ellen valamivel merevebben van megtámasztva, kritikus terhének tehát nagyobbak kell lennie a teljes gömbnél, vagy legfeljebb egyenlőnek vele. (A sarokpántosan megtámasz-



4.16. ábra. A kezdeti aszimmetrikus hullámosság hatása a gömbcsüveghej átpattanási terhére

tott göombsüveg kritikus terhe már esetleg kisebb is lehet a teljes gömbnél.) Ez a magyarázata tehát annak, hogy a teljes gömb és a göombsüveg átpattanást okozó kritikus terhére a kezdeti hullámosság függvényében igen közel álló görbéket kaptak. Akkor várható érezhető eltérés, ha a göombsüveg kiterjedése kisebb, mint a teljes gömbön kialakulni akaró horpadási hullám mérete, azaz kisebb λ -értékeknél (4.11).

A teljes gömb és a göombsüveg viselkedésének hasonlósága arra is fényt vet, hogy miért horpadnak a teljes gömbhéj-modellek szimmetrikusan, ill. miért fogadhatjuk el a teljes gömbhéjak szimmetrikus horpadásméletét a méretezéshez (4.6. ábra). Láthattuk, hogy a teljes gömb a $\lambda = 3$ körüli kezdeti hullámosságokra a legérzékenyebb. Az ilyen gömbhéjak viszont a hasonló λ -jú befogott göombsüveg-ekhez hasonlóan viselkednek, ezek pedig a 4.13. ábra szerint $\lambda < 5.5$ -nél nem akarnak aszimmetrikusan horpadni. Valóban, BUSHNELL [7.4] vizsgálatai szerint a teljes gömbhéjak is csak akkor hajlamosak az aszimmetrikus horpadásra, ha λ nagyobb, mint kb. 6 [1.2].

Az is nyilvánvaló az eddigiekből, hogy ha a göombsüveg vállának megtámasztása gyengébb a köréje képzelt teljes gömbfelület adta megtámasztásnál, akkor kisebb kritikus terhet kapunk. Ez az eset áll fenn a „félmerév” diafragmákkal megtámasztott, sokszög alaprajzú héjaknál.

A 4.6. és a 4.16. ábrák alapján már méretezni tudjuk a gömbhéjakat horpadásra, ha előre felvesszük a várható méretpontatlanságok értékét. Ezek a diagramok azonban nem tartalmazzák a modellkísérletek (4.2., 4.3. ábrák) leírásánál *b*, *c*, *d* és *e* pontok alatt szereplő körülményeket (a héj megtámasztásának gyengeségét, a nem kör alakú alaprajzot, a gömbtől eltérő héjalakot és a vasbeton anyagi tulajdonságait), noha a 4.2., 4.3. ábrákon feltüntetett modellkísérleti eredményeket csak mindezek figyelembevételével lehetne kielégítően megmagyarázni. Ezeket a hatásokat ugyanis jelenleg még nem tudjuk elméletileg, pontosan vizsgálni, ezért félempirikus módszerekkel, modellkísérletekkel és közelítő számításokkal igyekezünk legalább kvalitatíve követni őket. A következőkben ezeket tekintjük át.

A vasbeton anyagi tulajdonságait a 9.6. pontban leírt közelítő módon tudjuk figyelembe venni.

Mivel a héj anyagának lokális *megfolyása* is oka lehet egyes modellek korai törésének, ezért az újabb számítások némelyike megadja a horpadási hullám környezetében ébredő legnagyobb feszültség értékét is. Ezt azonban még nem tudjuk gyakorlatilag használható formába önteni, így ismét kénytelenek vagyunk megelégedni a 9.4. pontban leírt közelítő módszerrel.

Áttérve már most a tapasztalati módszerekre, KLÖPPEL és JUNGBLUTH [4.19] a már említett kísérletsorozatuk alapján *félempirikus képletet* állítottak fel a totálisan terhelt göombsüveg kritikus p_{kr} terhére. Szerintük (l. a 4.9. ábrát):

$$p_{kr} = k(\varphi_0) \cdot k(R/t) \cdot 0,3 E \frac{t^2}{R^2}, \quad (4.12)$$

ahol

$$k(\varphi_0) = 1 - 0,175 \frac{\varphi_0 - 20^\circ}{20^\circ} \quad (4.13a)$$

és

$$k(R/t) = 1 - 0,07 \frac{R}{400 t}. \quad (4.13b)$$

E képlet érvényességi határai:

$$20^\circ \leq \varphi_0 \leq 60^\circ, \quad (4.14a)$$

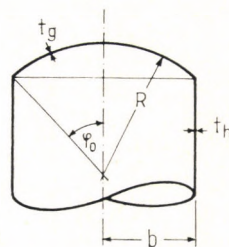
$$400 \leq R/t \leq 2000. \quad (4.14b)$$

A (4.12) képlet tulajdonképpen a Kármán–Tsien-féle (4.8), ill. a Tsien-féle javított (4.9) képletet korrigálja a $k(\varphi_0)$ és a $k(R/t)$ tényezőkkel. Az áttekinthetőség kedvéért szélső értékeiket a 4.1. táblázatban adjuk meg:

4.1. TÁBLÁZAT

$\varphi_0 =$	20°	60°
$k(\varphi_0) =$	1,0	0,65
$R/t =$	400	2000
$k(R/t) =$	0,93	0,65

A (4.12) képlet elvileg a tökéletes gömbsüveg $p_{kr, közp}^{alsó}$ -ját adja meg (1.4c., 4.4. ábrák). Valójában azonban a kezdeti hullámossággal bíró héj $p_{kr}^{felső}$ -jeként használhatjuk, mivel a kísérletekben ezt mérték. A 0,3-as tényezőnek megfelelő kezdeti hullámossági amplitúdó a 4.16. ábra szerint $w_0/t \approx 0,4$.



4.17. ábra. Hengerhéjhoz csatlakozó gömbsüveg-héj

A kísérletek szórása a (4.12) képlethez képest max. $\pm 20\%$ volt. KLÖPPEL és JUNGBLUTH fémhéjai úgy voltak megtámasztva, hogy a gömbsüveg alakúra domborított héjlemez sík peremét két végtelen merevnek tekinthető gyűrű közé szorították be.

A kritikus tehernek a megtámasztás merevségétől való függését vizsgálándó, KLÖPPEL és ROOS [4.20] olyan kísérletsorozatot hajtott végre, amelyben a héjak — a tartályépítés gyakorlatának megfelelően — hozzájuk hegesztett hengerhéjban folytatódtak, peremgyűrű nélkül (4.17. ábra). A hengerfal nem kapott külső

nyomást, csak a gömbhéj. A gömb t_g és a henger t_h falvastagságának arányát változtatva azt találták, hogy a (4.12) képlet szolgáltatta kritikus terhet még egy

$$\lambda_1 = 0,65 \left(1 + \frac{R/t_g}{400 + R/t_g} \right) (\Phi_M + 0,5) \cos \varphi_0 \quad (4.15)$$

tényezővel kell megszorozni, ahol

$$\Phi_M = \frac{\kappa}{1 + \kappa}, \quad (4.16a)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{b}{R}} \sqrt{\left(\frac{t_h}{t_g} \right)^3} \quad (4.16b)$$

és

$$t_h/t_g \leq 2,5. \quad (4.17)$$

A λ_1 tényező $b/R = 1/3$ és $R/t_g \sim 2000 = 1000$ esetén érvényes értékeire a 4.2. táblázat ad tájékoztatást.

4.2. TÁBLÁZAT

ha $t_h/t_g =$	0	1	2,5
akkor (R/t -től függően): $\lambda_1 =$	0,53~0,57	0,9~1,0	1,25~1,35

A kísérleti eredmények eltérése a (4.15)-tel korigált (4.12) képlettől max. $+ 23 \sim - 11\%$ volt.

A fentiek értékes tájékoztatást adnak a megtámasztó perem merevségének hatására: ha nincs külön perem ($t_h/t_g = 0$), akkor ez a tény kb. a felére csökkenti a KLÖPPEL—JUNGBLUTH szerint megtámasztott héj kritikus terhét. A hengerfal által kifejtett befogási merevség kb. a $t_h/t_g = 1$ aránynál éri el a Klöppel—Jungbluth-féle megtámasztás merevségét, vastagabb hengerfal pedig — természetesen — tovább növeli p_{kr} -t. Ez a hatás egyébként nyilvánvaló, ha meggondoljuk, hogy a kísérletekben mindig a perem mellett kezdett aszimmetrikusan behorpadni a héj.

A Klöppel—Roos-féle kísérletsorozat tudomásunk szerint az első, amely módszeresen próbálta megvizsgálni a gömbsüveghéj megtámasztási merevségének hatását a kritikus terheire. Ezt továbbfejleszti VAN KOTEN és HAAS [4.23], [4.24] közelítő elméleti vizsgálata, amely megkísérli összehasonlítani a gömbsüveghéj kör alakú peremgyűrűjének merevségét a „hiányzó” héjfelületével. Dolgozatukban a gyűrűnek csak az egyenletesen megoszló csavarónyomatékok okozta elfordulás ellen tanúsított merevségét veszik figyelembe. Levezetésük a Kármán—Tsien [4.18], ill. a Tsien [4.38]-féle utat követi (l. a (4.8), (4.9) képleteket és a (4.12) képlethez fűzött megjegyzést). Végeredményük a következőkben foglalható össze:

Ismerve a gömbsüveg-héjnak a peremén ható, egyenletesen megoszló hajlítónyomatékokkal szemben tanúsított $s_{\text{héj}}$ merevségét:

$$s_{\text{héj}} \approx \frac{Et^3}{4\sqrt{Rt}}, \quad (4.18)$$

valamint a peremgyűrűnek az ugyanezen (ránézve csavaró-)nyomatékokkal szemben tanúsított s_{perem} merevségét:

$$s_{\text{perem}} = \frac{EI_{\text{perem}}}{(R \sin \varphi_0)^2}, \quad (4.19)$$

(itt I_{perem} a peremgyűrűnek a gyűrű síkjába eső tengelyre vonatkozó hajlítási inercianyomatéka!), ki kell számítanunk az

$$\alpha_1 = \frac{2}{1 + \frac{s_{\text{héj}}}{s_{\text{perem}}}} \leq 2 \quad (4.20)$$

paramétert. Ennek függvényében a 4.3. táblázat szerint csökken a (4.8) – (4.9) képletek általánosításaképpen kapható

$$p_{\text{kr}} = cE \frac{t^2}{R^2} \quad (4.21)$$

kifejezés c együtthatója.

4.3. TÁBLÁZAT

$\alpha_1 =$	2,0	1,5	1,0	0,5	0
$c =$	0,32	0,25	0,17	0,09	0,01

Az $\alpha_1 = 2,0$ eset felel meg VAN KOTEN–HAAS szerint a teljes (gyengítetlen) gömbhéj esetének (4.9).

Láthatjuk, hogy VAN KOTEN–HAAS eredményei szerint p_{kr} függ mind a φ_0 félnyílásszögtől, mind a peremgerenda merevségétől, de másképp, mint a Klöppel–Roos-féle képletek szerint. Éppen ezért nem is tekinthetjük a fentieket e kérdéskör lezárásának. Mindenesetre VAN KOTEN és HAAS képletükkel jól meg tudták közelíteni pl. a Torroja–Schubiger-féle kísérlet [4.30] aránylag alacsony eredményét.

Háromféle megtámasztás merevségének a kritikus teherre gyakorolt hatását vizsgálta WANG, RODRIGUEZ-AGRAIT és LITTLE [4.40] 52 PVC-gömbsüveghejón. Azt találták, hogy a csak függőlegesen megtámasztott (vízszintesen szabadon elcsúszó) héjak kísérleti kritikus terhe (az 1.l.d. ábra szerinti $p_{\text{kr}}^{\text{első}}$) átlagosan 0,19 $p_{\text{kr}}^{\text{lin}}$ -ra, az elmozdulásmentes csuklóval („sarokpántosan”) megtámasztottaké 0,53 $p_{\text{kr}}^{\text{lin}}$ -ra, a mereven befogott szélűeké 0,635 $p_{\text{kr}}^{\text{lin}}$ -ra adódott, ahol $p_{\text{kr}}^{\text{lin}}$ a (4.7.) képlet adta értéket jelenti.

4.2. Féloldalasan terhelt gömbsüveghéj horpadása

KLÖPPEL és ROOS [4.20] féloldalasan terhelt gömbsüveghéjak horpadását vizsgálták. Ezzel most nem kívánunk részletesen foglalkozni, csupán tájékoztatásul közöljük, hogy a horpadást okozó féloldali teher intenzitása közel áll a totális kritikus teheréhez.

Megjegyezzük azonban, hogy [9.4] szerint a lapos ív szimmetrikus átpattanását okozó teherintenzitás kisebb lesz, ha nem totálisan, hanem parciálisan terheljük az ívet: a két szélső, felfelé elmozduló szakaszát terheletlenül hagyjuk. Ez a teherintenzitás-csökkenés elérheti a 30%-ot is, ha a középső szakaszt egyetlen koncentrált erővel terheljük (ekkor a középső, lesüllyedő szakaszra elosztva képzelt koncentrált erő tekintendő teherintenzitásnak). Ez tájékoztatást nyújt a „mértékadóan” parciálisan terhelt gömbsüveghéj esetére is, amivel most nem foglalkozunk részletesen.

4.3. Két irányban különböző görbületű kupolahéjak horpadása

A mérnöki gyakorlatban sokszor fordulnak elő *nem gömbfelület* szerint kialakított kupolák, kör-, ellipszis- vagy négyszög-, ill. sokszögalaprajz felett. Tárgyalásuk — változó görbületük miatt — nagy matematikai nehézségekkel jár. Ezért ezekre a héjformákra sokkal kevesebb vizsgálatot végeztek, mint a gömbhéjra. Mindezek miatt a gyakorlatban sokszor a gömbhéjra levezetett kifejezés általánosításaként kapható

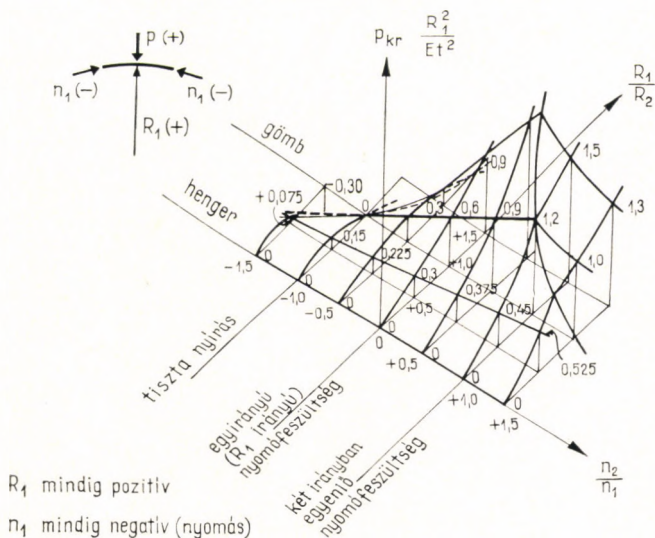
$$p_{kr} = cE \frac{t^2}{R_1 R_2} \quad (4.22)$$

képletet használják, a gömbhéj görbületi sugarának négyzete helyébe a két főgörbületi sugár $R_1 R_2$ szorzatát téve, a c együttható értékét pedig a gömbhéjagnál mondottak szerint vagy a kísérletek alapján veszik fel. (A 4.2. és 4.3. ábrákba is ennek megfelelően rajzoltuk be a nem gömbfelületű héjak kísérleti eredményeit.) A következőkben megvizsgáljuk ennek a képletnek a jogosultságát.

Különböző főgörbületű felületek horpadását a laposhéj-elmélet alapján DULÁCSKA vizsgálta a lineáris elmélet szerint [4.8], mégpedig a két főgörbületi sugár arányán kívül a két főgörbület irányában ható nyomóerők (n_1 és n_2) arányának függvényében is. Eredményül ($\nu = 0,27$ -et alapul véve) a 4.18. ábrán látható felületet kapta, amely a héjfelületre merőleges kritikus p_{kr} terhet adja meg. A levezetés figyelmen kívül hagyta a peremek merevítő hatását, így az eredmények csak a több hullámban horpadó héjakra érvényesek, ahol már nem jutnak szerephez a peremfeltételek. Az ily módon horpadó héjagnál az a feltétel is teljesül, hogy a keletkező horpadási hullámon belül a héj laposnak tekinthető.

Az ábra jól mutatja, hogy a gömbhéj lineáris kritikus terhe $n_1 = n_2$ -nél csúcserőértéket ér el az $n_1 \neq n_2$ esetekhez képest. Ez érthetővé teszi a hidrosztatikusan nyomott gömbhéj nagyfokú érzékenységét a kezdeti hullámosságokra, azaz meredeken eső kritikuson túli teherbírását.

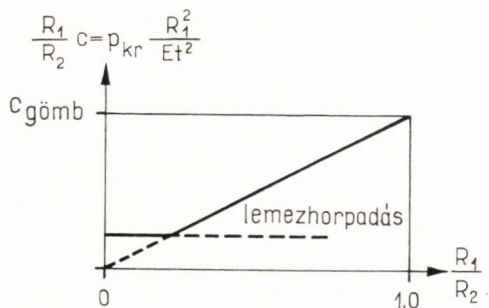
A 4.18. ábrából az is megállapítható, hogy a lineáris kritikus teher szempontjából a (4.22) képlettel kismértékű hibát követünk el a biztonság kárára. A (4.22)



4.18. ábra. Kupolahéj kritikus terhe a lineáris elmélet szerint, a két főgörbületi sugár és a két főirányban ébredő nyomófeszültség arányának függvényében

képletet ugyanis a 4.19. ábra egyenesével szemléltethetjük. Ha R_1 -et konstansnak tartjuk és R_2 -t növeljük R_1 -től ∞ -ig, akkor a kritikus terhelés a gömb lineáris kritikus terheléstől csökken le a hidrosztatikusan nyomott henger 0 értékéig. Ez tehát a 4.18. ábrának valamilyen, az $R_1/R_2 = 1,0$ és $n_2/n_1 = 1,0$ pontból kiinduló metszete. E metszet iránya az $R_1 < R_2$ eseteknél érvényes n_2/n_1 hányados értékétől függ, de mindenképpen lefelé domborodó görbe lesz, szemben a 4.19. ábra egyenesével.

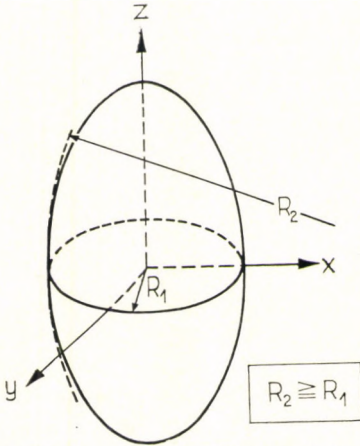
A 4.18. ábra $R_1/R_2 \rightarrow 0$ -nál elveszti érvényességét. Ekkor ugyanis a horpadási hullám nem lesz többé „helyi”, korlátozott méretű, hanem igyekszik minél jobban kiterjedni, és a kiterjedésnek csak a peremek szabnak határt. A kritikus terhelés így nem esik le 0-ra, hanem legalább akkora marad, mint a héjjal egyező alap-



4.19. ábra. A (4.22) közelítő képlet szemléltetése

területű síklemez horpasztófeszültségének megfelelő teher. A 4.19. ábra egyenese így szintén nem lesz 0-ig érvényes, hanem alulról korlátozza a lemezhorpadásnak megfelelő vízszintes egyenes.

HYMAN és HEALEY [4.15] a 4.20. ábrán vázolt forgási ellipszoid kritikus hidrosztatikus nyomását számították ki, $\nu = 0.3$ alapulvételével, a lineáris elmélettel (ami az általuk használt energiamódszer esetén az elmozduláskomponensek másodfokú kifejezéseinek figyelembevételét igényli). A kísérletek (és a szemlélet) alapján feltételezték, hogy a horpadás az xy sík környezetében következik be, tehát az R_2 sugarú simuló kör mentén laposnak tekintették a horpadó héjat, de az R_1 sugarú kör mentén nem tekintették laposnak. Levezetésük így módon az $R_2 \rightarrow \infty$ esetben az R_1 kör mentén előálló kis hullámszám esetén is kielégítően pontos (szemben a laposhéj Donnell-egyenleteivel, vö. a 2.3. pontban mondottakkal). Vizsgálatukat azonban csak a 4.20. ábrán vázolt zárt forgástestben a hidrosztatikus nyomás hatására ébredő n_2/n_1 arányra terjesztették ki. E nyomóerők értéke az xy sík környékén



4.20. ábra. A vizsgált forgási ellipszoid

$$n_1 = -\frac{pR_1}{2} \left(2 - \frac{R_1}{R_2} \right), \quad (4.23a)$$

$$n_2 = -\frac{pR_1}{2}, \quad (4.23b)$$

arányuk tehát:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2 - \frac{R_1}{R_2}}, \quad (4.24)$$

az általuk felvett rész-terhek pedig:

$$p_1 = \alpha p = -\frac{n_1}{R_1} = \left(1 - \frac{R_1}{2R_2} \right) p, \quad (4.25a)$$

$$p_2 = (1 - \alpha) p = -\frac{n_2}{R_2} = \frac{R_1}{2R_2} p. \quad (4.25b)$$

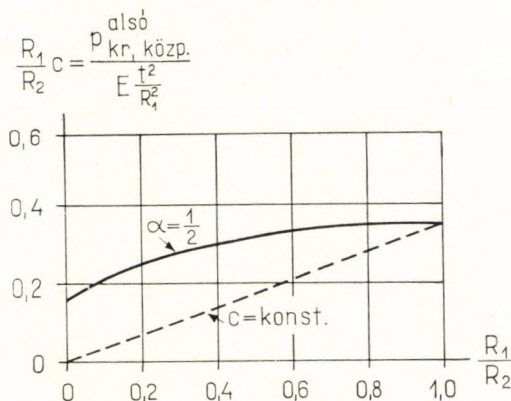
Itt α -val jelöltük a két főirány teherviselésének arányát.

HYMAN és HEALEY eredménye igen közel áll a (4.24) aránynak megfelelő Dulácska-féle számértékekhez (4.18. ábra). A különbséget az az említett körülmény okozza, hogy az xy síkban nem tekintették laposnak a héjat. Ezért egyrészt az $R_2 \rightarrow \infty$ esetben (hidrosztatikusan nyomott henger) is véges nagyságú kritikus terhet kapnak, másrészt a kritikus teher függ a t/R_1 aránytól (ha $R_1 \neq R_2$).

A különböző főgörbületű felületek horpadását a *memlineáris* elmélettel először VAN KOTEN és HAAS vizsgálták [4.24]: KÁRMÁN–TSIEN módszerével meghatározták a tökéletes felületű kupola 1.4c. ábra szerint értelmezett $p_{kr, közp}^{alsó}$ -ját (vö.

a 4.4 ábrával is). A (4.25) képletekkel értelmezett α teherelosztási tényező 1/2-es értékére a 4.21. ábrán teljes vonallal kihúzott görbét kapták. $R_1/R_2 = 0,25$ -nél más α -értékekre is megvizsgálták $p_{kr, közp}^{alsó}$ -t és azt találták, hogy alig függ α -tól.

A $p_{kr, közp}^{alsó}$ -ra vonatkoztatott (4.22) képletet (állandó nagyságú c tényező) a szaggatott ferde egyenes ábrázolja.



4.21. ábra. A két főirányban különböző görbületű héj kritikusan túli viselkedésének közelítő vizsgálati eredményei

VAN KOTEN és HAAS eredményeinek értékeléséhez figyelembe kell vennünk, hogy a számítási nehézségek miatt a horpadási hullám szélét síkban fekvő ellipszisnek feltételezték. A kis és nagy tengely arányát így a héj geometriája megszabja, tehát csupán két szabad paraméterük marad: a horpadási hullám kiterjedése és amplitúdója. A hullám-alak e megkötöttsége miatt nem lehet figyelembe venni, hogy más α -értéknél (más n_2/n_1 -aránynál) eltorzul a hullám alakja, és azt sem tudjuk, hogy a feltételezett hullám-alak milyen α -értéknél áll legközelebb a valósághoz. Kis R_1/R_2 -arányoknál (amelynek határeset a hidrosztatikusan nyomott henger) ezenkívül az antimetrikus horpadási alak is mértékadó lehet, amit ez az eljárás nem vesz figyelembe. A módszer e megkötöttségek miatt a valóságosnál nagyobb kritikust terhet szolgáltat. Nincs kizárva tehát, hogy $\alpha \neq 1/2$ esetén a pontos görbék bizonyos R_1/R_2 arányoknál a konstans c -nek megfelelő szaggatott egyenes alá metszhetnek.

VAN KOTEN és HAAS vizsgálatai azonban megmutatták, hogy a horpadás utáni viselkedést leíró görbe — legalábbis $\alpha = 1/2$ -re — a konstans c -nek megfelelő egyeneshez képest felfelé domborodik. Ez ellentétben áll a lineáris kritikus teherrel a 4.18. ábrával kapcsolatban mondottakkal. Ezt a látszólagos ellentmondást a kritikusan túli viselkedés részletesebb vizsgálata oldja fel, amelyet KOTER módszerével DANIELSON végzett el [4.7] ugyancsak a 4.20 ábrán vázolt forgási ellipszoid hidrosztatikus terhelésével kapcsolatban. A különböző R_1/R_2 arányokhoz itt a (4.25) képletekkel megszabott α tartozik, ami $R_1 = R_2$ esetén $\alpha = 1/2$ -be megy át. DANIELSON vizsgálata szerint a kezdeti hullámosságokra az $R_1/R_2 = 1$ főgörbületi arányú gömb a legérzékenyebb: ennek esik le a legmeredekebben a

kritikusan túli teherbírás-diagramja (4.4. ábra). Ha R_1/R_2 aránya eltér az egységtől, akkor rohamosan csökken a héjnak a kezdeti hullámosságokkal szemben fennálló érzékenysége, és igen hamar megközelíti az $R_2 \rightarrow \infty$ -nel jellemzett, hidrosztatikusan nyomott, végtelen hosszú henger viselkedését, amelyet tudvalevőleg az 1.1a. ábra ír le. Ez egyébként a 4.18. ábrával is összhangban van: a lineáris kritikus tehernek az $R_1 = R_2$ (és $n_1 = n_2$) esetben bekövetkező csúcsértéke plauzibilissá teszi a kezdeti hullámossággal szemben fennálló nagyfokú érzékenységet. (A jelenség hasonló az alkotóirányban nyomott hengerhéjről a 2.9. ábrával kapcsolatban mondottakhoz.)

Mindezek alapján gyakorlati célokra használhatónak mondhatjuk a (4.22) képletet. Tekintettel azonban VAN KOTEN és HAAS módszerének közelítéseire, valamint arra, hogy DANIELSON számítása minden R_1/R_2 arányhoz csak egy α -értékre vonatkozik, célszerű a szokásosnál nagyobb biztonsági tényezőt használni, ha a szóban forgó héj paraméterei nagyobb mértékben eltérnek az ismertett vizsgálatokban feltételezettektől. E nagyobb biztonsági tényező használata addig indokolt, amíg részletesebb vizsgálatok nem tisztázzák a kezdeti hullámossággal bíró héj $p_{kr}^{felső}$ -jét minden R_1/R_2 -re és α -ra.

A (4.22) képlet c tényezőjét a gömbhéj kezdeti hullámossága alapján, $p_{kr}^{felső}$ -re vonatkoztatva kell felvennünk, a 4.1. pontban leírtak szerint.

5. Hiperbolikus paraboloidhéjak stabilitásproblémái

5.1. Torznégyszög alakú héj horpadása egyenletes teher okozta nyírófeszültség hatására

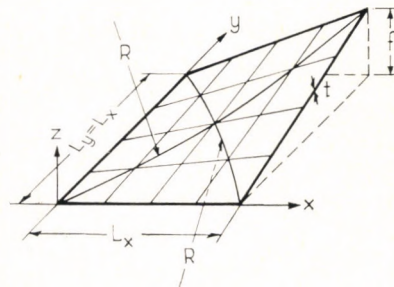
A peremlein csuklósan (sarokpántosan) megtámasztott, lapos torznégyszög-héj (5.1. ábra) stabilitását részletesen megvizsgálták p egyenletesen megoszló függőleges teher hatására, a lineáris elmélet alapján. RALSTON [5.5] 17 tagú sor alakjában vette fel a w horpadási alak-függvényt és a peremfeltételeket is figyelembe véve a következő végeredményt kapta az $L_x = L_y$ esetre (négyzet alaprajzú héj):

$$p_{kr} = \rho \frac{f^2}{L_x^4} \frac{2Et^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (5.1)$$

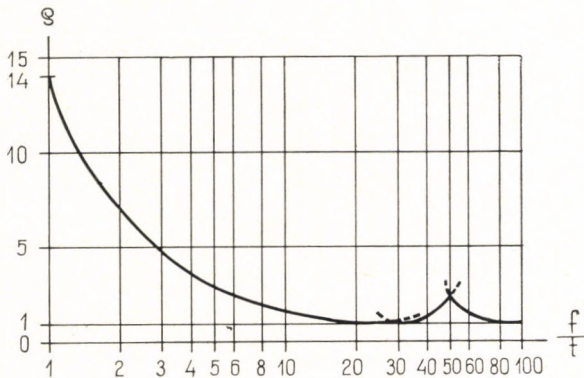
Itt ρ a pontos számítás eredményeképpen kapott csipkegörbe, amelyet (néhány [nehezen ábrázolható, sűrű „csipke” elhagyásával) f/t függvényében az 5.2. ábrán tüntettünk fel ($\nu = 0,3$ -ra). Láthatjuk, hogy kb. $f/t > 25$ -től kezdve a csipkegörbe alsó érintője (burkolója) $\rho = 1$ -et ad. A $\rho = 1$ -re vonatkozó eredményt igen egyszerűen is megkaphatjuk [2.12].

RALSTONÉVAL megegyező eredményt vezetett le LA TEGOLA is [5.3].

Szemléletesen ábrázolhatjuk a síklemezbe való átmenetet ($f \rightarrow 0$), ha nem a



5.1. ábra. Torznégyszög-héj



5.2. ábra. A torznégyszög-héj kritikus terhének együtthatója

kritikus terhet, hanem a belőle keletkező kritikus nyírófeszültséget rakjuk fel f/t függvényében. A membránhék elméletéből ismeretes (l. pl. [2.17], [2.35]), hogy

$$n_{xy} = p \frac{L_x L_y}{2f}. \quad (5.2)$$

Így ($L_x = L_y$):

$$\tau_{kr} = p_{kr} \frac{L_x^2}{2ft} = \left(\rho \frac{f}{t} \right) \frac{Et^2}{L_x^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (5.3a)$$

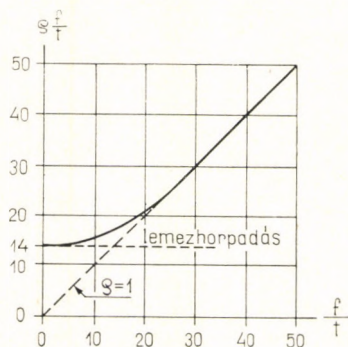
A $\rho f/t$ szorzat-tényezőt az 5.3. ábrán raktuk fel (ρ csipkegörbáját az alsó érintőjével helyettesítve). Az $f = 0$ -nál adódó $\rho f/t = 14$ érték a négyzet alakú, csuklósan támaszkodó síklemez horpasztófeszültségének felel meg tiszta nyírás esetén [2.51]. A héj görbületének (vagyis f -nek) növekedtével τ_{kr} először lassan, majd mind gyorsabban növekszik, s $f/t = 25$ -nél már gyakorlatilag belefut a $\rho = 1$ -hez tartozó egyenesbe. Ezt fizikailag úgy értelmezhetjük, hogy a horpasztófeszültséget egészen lapos héj esetében a hajlítási merevség egymaga szolgáltatja, de a görbület növekedtével egyre nagyobb szerephez jut a membránmerevség, s ez növeli fel τ_{kr} -t a $\rho = 1$ egyenes adta értékig.

Az (5.3a) képletben szereplő L_x^2/f mennyiség a négyzetalaprajzú hiperbolikus paraboloidhéj R főgörbületi sugarával egyenlő (5.1. ábra). Ha még figyelembe vesszük, hogy a héjban uralkodó tiszta nyírási feszültségállapotban a τ nyírófeszültség egyenlő az egyik főgörbület irányában ható σ_1 nyomófeszültséggel, akkor $\rho = 1$ esetében az (5.3a) képlet átmegy a

$$\sigma_{1kr} = \frac{Et}{\sqrt{3(1-\nu^2)} R} \quad (5.3b)$$

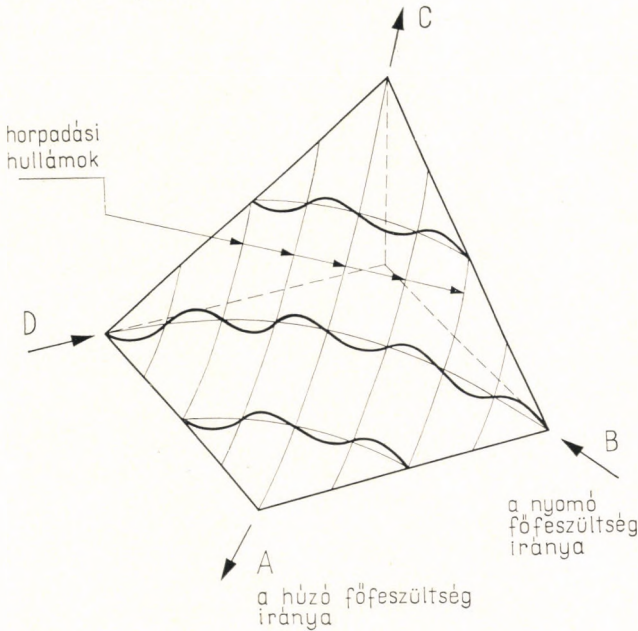
kifejezésbe, amely megegyezik az alkotóirányban nyomott henger (2.13) képletével.

A torznégyszög alakú hiperbolikus paraboloiddal végzett kísérletek [5.4] azt mutatták, hogy a horpadási hullámok a nyomó főfeszültség irányában rövidek,



5.3. ábra. A torznégyszög-héj kritikus nyírófeszültségének átmenete a síklemezébe

rá merőlegesen pedig kifutnak a szélekig (5.4. ábra). A modellek a lineáris elmélettel számított (5.1) kritikus tehernek általában 70%-ánál horpadtak, ennél kisebb kritikus terhet csak olyan héjakon észleltek, amelyeknek gyenge volt a peremtartójuk. Hasonló tehát a helyzet a gyűrűirányban nyomott és a csavart hengerhez: ott is nagyjából ennyivel volt kevesebb a kísérleti kritikus teher a lineáris elmélet eredményénél.



5.4. ábra. A torznégyszög-héj horpadási alakja

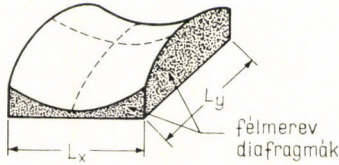
A kísérleti héjak általában emelkedő kritikuson túli teherbírást mutattak. Fizikailag ezt azzal magyarázhatjuk, hogy az A és C sarokpontokat összekötő húzott szál (5.4. ábra) mintegy felfüggeszti a kihorpadó nyomott szálakat. Ez a hatás nyilvánvalóan függ attól, hogy a sarokpontok mennyiben tekinthetők vízszintes értelemben mereven megtámasztottaknak. Függ ezenkívül a peremtartók vízszintes merevségétől is, mivel a héj előnyösebb helyzetbe kerül, ha nemcsak az AC szál, hanem a többi húzott szál is felfüggeszti.

5.2. Hiperbolikus membránhéjak kinematikai határozatlansága

Ki kell térnünk még a hiperbolikus héjaknak egy különleges tulajdonságára, amely bizonyos esetekben befolyásolhatja stabilitásukat. Ennek lényege az, hogy bizonyos alakú hiperbolikus héjak olyan peremfeltételek mellett is képesek nyúlásmentes alakváltozásra, amelyek más héjak esetén biztosítják a határozott és merev megtámasztást. (A nyúlásmentes alakváltozás csak meggyűrűlésből és elcsavarodásból áll, tehát csak a héj hajlítási merevsége jut szerephez, membrán-

merevsége nem.) Erre érdekes példákat mutat be VLASZOV [5.6]. A jelenség elméletét hiperbolikus paraboloidra GEYLING [5.1], [5.2] dolgozta ki. Eredményeit a következőkben foglalhatjuk össze:

Ha a nyereg alakú hiperbolikus paraboloidot (5.5. ábra) olyan „fémerev” diafragmákkal támasztjuk meg, amelyek csak a saját síkjukban merevek, rá



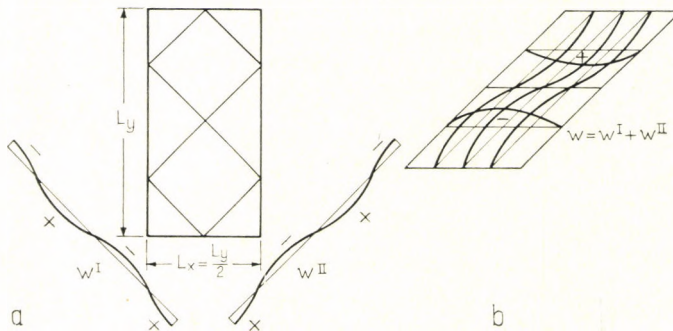
5.5. ábra. Nyereg alakú hiperbolikus paraboloid

merőlegesen teljesen lágyak, akkor a héj minden olyan esetben képes nyúlásmentes alakváltozásra, amikor egy perempontból kiindulva az egyenes alkotók mentén véges számú körbejárással visszaérkezünk a kiinduló pontba (5.6. ábra). Minél több körbejárás után érkezünk vissza, annál kisebb hullámhosszakban kénytelen elvégezni a héj a nyúlásmentes alakváltozást, tehát ilyenkor a hajlítási merevség egyrészt már gyakorlatilag megakadályozza az alakváltozást, másrészt pedig ez az alakváltozás sokkal sűrűbb hullámokban következik be, mint a héj horpadási alakja, ezért kevésbé veszélyes.

Ha azonban olyan alakú a héj, mint pl. az 5.6. ábra, ahol egy 1 : 2 oldalarányú, alaprajzban egymásra merőleges alkotóserégű hiperbolikus paraboloidot tüntetünk fel, akkor a nyúlásmentes alakváltozás nagy hullámhosszakban jöhet létre, tehát a héj igen „lágy” lesz. Mivel pedig ez az hiperbolikus héjalak, amely az egyenes terhet vállnyomás nélkül képes membránként viselni [2.17], [2.35] és így a gyakorlatban szívesen alkalmazzák, ezért a probléma jelentősége nemcsak elméleti.

A nyúlásmentes alakváltozás elméletileg két, az egyenes alkotókkal párhuzamos hengerfelület összegeként áll elő (5.6a. ábra), a vázolt w^I és w^{II} görbék tehát az egyenes alkotók irányában konstans felületeket jelentenek, amelyeket összegezve kapjuk meg az 5.6b. ábrán vázolt teljes nyúlásmentes alakváltozást. Amint látjuk, ez éppen egy négyzethálós deformáció, a peremeken valóban zérus w értékkel.

Mármost ha egy ilyen lehetséges nyúlásmentes alakváltozás megegyezik a héj kihajlási alakjával, akkor a héj kritikus terhe, pontosabban a hatására keletkező



5.6. ábra. A nyereg alakú hiperbolikus paraboloid nyúlásmentes alakváltozása

belső kritikus erőrendszer ugyanakkora lesz, mint egy ugyanilyen alakban horpadó síklemezé. Ez a problémakör azonban még kidolgozásra vár.

A tárgyalt nyúlásmentes alakváltozás az 5.5. ábrának megfelelő (nyereg alakú) hiperbolikus paraboloidhéj peremein vízszintes eltolódásokat igényel, amit a félmerev ívek meg is engednek.

Más a helyzet azonban az 5.1. ábra szerint határolt héjjal, amely úgy is tekinthető, mint az 5.6. ábra egyenes alkotókkal határolt egyik belső darabja. Ennek határvonalán nyúlásmentes alakváltozás esetén az 5.6b. ábrából láthatóan nem teljesül a $w = 0$ feltétel, tehát ha a határvonal nem enged meg w elmozdulást, akkor nem is jöhet létre nyúlásmentes alakváltozás. Ezzel összhangban van az előző pontban ismertetett elméleti és kísérleti eredmény, amely nem vesz tudomást a most leírt nyúlásmentes alakváltozásról.

6. Szabad szélű héjak stabilitásproblémái

6.1. A szabad szélű héjak stabilitásáról általában

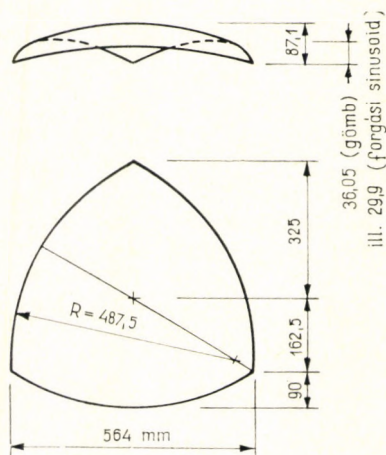
Az eddig tárgyalt héjfajták mindegyike a pereme mentén végig meg volt támasztva. A modern építészetben azonban egyre inkább tért hódítanak a szabad peremű héjak, mert megjelenésük sokkal könnyedebb, mint a peremtartós héjaké.

A szabad perem következtében ezek a héjak általában nem lokálisan horpadnak be (mint pl. a tengelyirányban nyomott henger vagy a radiálisan nyomott gömb-süveg), hanem az *egész szerkezet* hajlik ki. Kombinálódik tehát bennük az egész szerkezet „ívszerű” kihajlása a „héjszerű” horpadással.

A szabad peremű héjak horpadása még meglehetősen feltáratlan terület. A következőkben ezért egy olyan modellkísérletet ismertetünk, amelyből más szabad szélű héjakra is érvényes következtetéseket vonhatunk le.

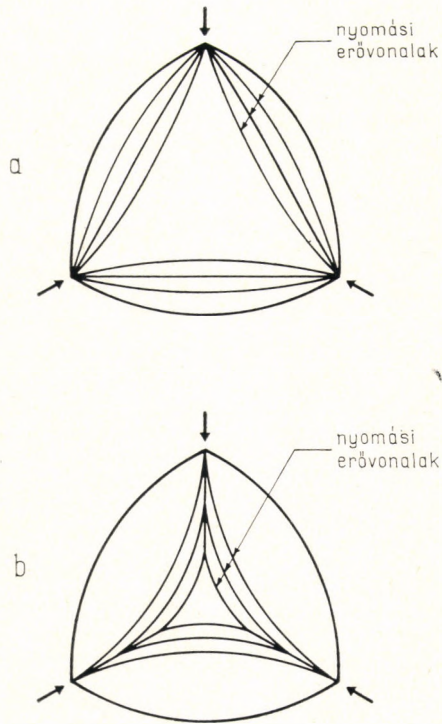
A kísérletet két, egymástól kismértékben eltérő forgásfelület (gömb és forgási sinusoid) szerint kialakított, 3 mm vastag plexiből készült modellen végezték [6.16]. Méreteiket a 6.1. ábra mutatja. A szerkezet csupán a három sarokpontján támaszkodott egy-egy gömbcsuklóra, peremei merevítetlenek voltak. Egyenletes terheléssel terhelve a modellek alakja közelítően egybeesett a támaszfelülettel, azaz csak aránylag kis nyomatók ébredtek bennük.

A terhelés folyamán a modellek peremei a héj helyi horpasztóterhelésénél (4.1. pont) lényegesen kisebb teherintenzitásnál hullámosodni kezdtek, azaz megindult az egész szerkezet „ívszerű” kihajlása. Az általánosított Southwell-szerkesztéssel (l. 9.7. pont) megállapítottuk, hogy a szerkezetnek az 1.1b. ábrának megfelelően



6.1. ábra. A megvizsgált szabad szélű héjmodellek méretei

6.2. ábra. A belső erők átrendeződése



növekvő kritikusan túli teherbírása van [9.17]. Valóban, a szerkezet egyik esetben sem a stabilitás elvesztése miatt ment tönkre, hanem a támasz közelében szenvedett hajlítási törést.

Az emelkedő kritikusan túli teherbírást szemléletesen magyarázhatjuk a 6.2. ábrával. A szerkezet először a 6.2a. ábra szerint viseli a terhet, azaz úgy viselkedik, mintha három ívből állna. A peremek fodrosodása után átrendeződik az erőjáték: az erővonalak a héj belső, kihajlásnak kevésbé kitett részére „húzódnak be” (6.2b. ábra), ezzel tehermentesült a külső rész (amely ezért nem hajlott ki erősebben), a belső rész pedig még lényegesen nagyobb nyomást bírt el.

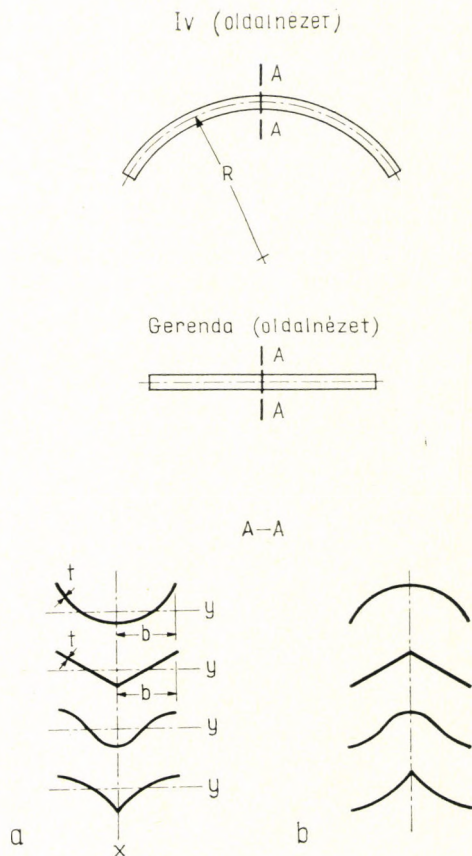
A szabad szélű héjakra ebből a modellkísérletből az alábbi következtetést vonhatjuk le: az egész szerkezet kihajlása szempontjából akkor számíthatunk emelkedő kritikusan túli teherbírásra, ha az erőjáték a szabad szélektől a héj belseje felé tud átrendeződni, s a héjnak ez a belső része nagyobb terhet képes hordani, mint az eredeti, de a szabad peremein is nyomott szerkezet [9.17].

Konkrét szerkezet méretezéséhez általában célszerű modellkísérletet végezni, kivéve az elméletileg megoldott és a 6.2. pontban ismertető héjíveket.

6.2. Héjvék és héjgerendák stabilitása

A szabad szélű héjak közül a héjvék (és héjgerendák) stabilitási problémái vannak részletesen megoldva, ezért az alábbiakban ezeket tekintjük át röviden.

A *héjvék* síkgörbe tengelyű, vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű rudak (6.3. ábra). A rúdkeresztmetszeteknek van egy szimmetriatengelyük, amely beleesik



6.3. ábra. Héjvék és héjgerendák

az ív síkjába. A keresztmetszet egyébként tetszőleges lehet. Ha az ívtengely egyenes, akkor előáll a *héjgerenda*.

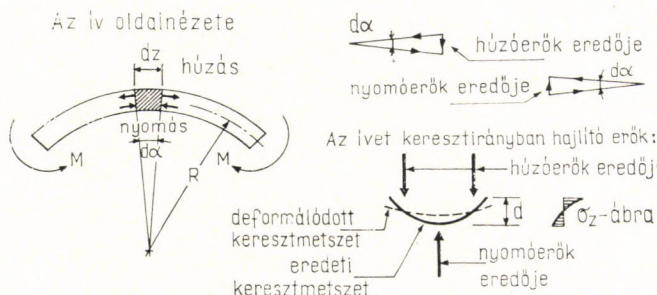
A keresztmetszetek szimmetriája miatt külön vizsgálhatjuk az ív síkjában a rá merőlegesen bekövetkező instabilitási jelenségeket.

6.2.1. Stabilitásvizsgálatok az ív síkjában

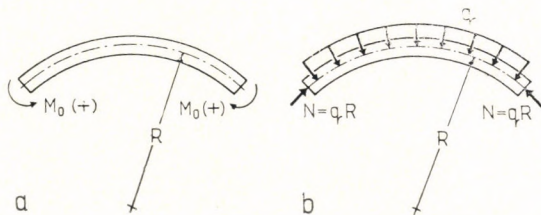
Az ív síkjában bekövetkező kihajlási jelenségeket nem vizsgálhatjuk csupán a klasszikus ívstabilitási elmélettel, mivel keresztmetszetük is deformálódik. Ez könnyen belátható a 6.4. ábrából.

A hajlításból ébredő ívirányú húzó- és nyomófeszültségeknek az ívtengelyre merőleges eredője keresztirányban hajlítja az ívkeresztmetszetet. A vékony keresztmetszet ennek hatására tetemes alakváltozást szenved, „kitér” ez elől a hajlítás elől. Emiatt az ív hajlítással szemben tanúsított merevsége sokkal kisebb lesz a közönséges ívtartóénál, amelynek a keresztmetszete nem deformálódik. Ezt a jelenséget zárt csövekre először KÁRMÁN [6.4] és BRAZIER [6.1] írta le.

A keresztmetszeteknek ez a deformációja azt eredményezi, hogy az ív *tiszta hajlításakor* (6.5a. ábra) az M hajlítónyomaték és a χ görbületváltozás között a 6.6. ábrán vázolt alakú összefüggés áll fenn. (Itt I_y az ívkeresztmetszetnek a vízszintes y tengelyre vonatkozó, elemi úton számított inercianyomatékát jelenti.) Ebből az ábrából kiténik, hogy az ív meggörbülése hajlítónyomaték hatására lényegesen nagyobb, mint az elemi elmélet szerint várható volna, másrészt pedig a 6.5a. ábra szerint értelmezett pozitív nyomaték esetén a héjív *tiszta hajlítás hatására is elveszti stabilitását*: ellapul és átpattan, ha a hajlítónyomaték eléri egy M_{kr} értéket. Negatív nyomaték esetén ez nem következik be, mivel ez esetben a keresztmetszet feldomborodik, azaz merevedik (l. a 6.6. ábra görbéljének alsó szakaszát), szemben a pozitív nyomaték hatására bekövetkező ellapulással, azaz lágyulással. A $+M$ és $-M$ hatására tanúsított különböző viselkedés magyarázza



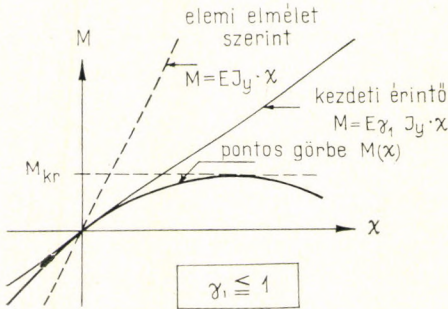
6.4. ábra. A keresztmetszet ellapulása



6.5. ábra. A két terhelési alapeset. a — tiszta hajlítás, b — központos nyomás

az 1.2. pontban említett, az 1.1d. ábrának megfelelő „aszimmetrikus” viselkedést, amit a központos nyomásnál fogunk bővebben tárgyalni. A levezetés részleteit és feltevéseit lásd [6.5]-ben, vagy [6.6]-ban és [6.7]-ben. A kritikus hajlítónyomatékot, vagyis a 6.6. ábrán vázolt $M(\chi)$ -görbe tetőpontját a 6.3. ábra négyféle lapos ívkeresztmetszetére a 6.7. ábrán adjuk meg, mégpedig a

$$\beta b = \frac{\sqrt[4]{3b}}{\sqrt{tR}} = \frac{1,316 \cdot b}{\sqrt{tR}} \quad (6.1)$$



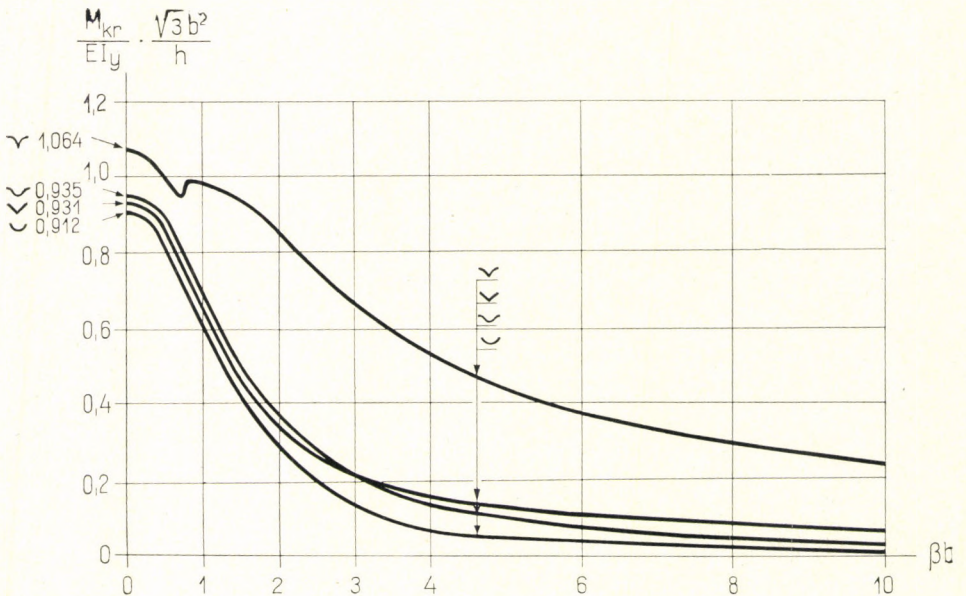
6.6. ábra. A héjív viselkedése hajlításra

geometriai paraméter függvényében. A betűk jelentését l. a 6.3. ábrán. A héjgerendára a $\beta b = 0$ eset vonatkozik.

A 6.7. ábra világosan mutatja, hogy valamennyi keresztmetszet esetén annál kisebb az átpattanást okozó M_{kr} nyomaték, minél erősebb az ív eredeti görbülete.

(A szárny alakú keresztmetszet görbéjében $\beta b = 0,75$ -nél látható diszkontinuitás abból származik, hogy maga

az $M(\chi)$ -görbe is két domborulatot tartalmaz, és $\beta b = 0,75$ alatt az első, felette pedig a második domborulat adja a maximális M_{kr} nyomatékot.)



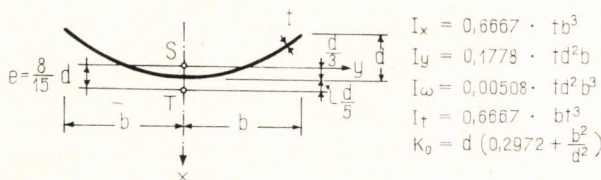
6.7. ábra. Az ellapulást okozó kritikus hajlítónyomaték nagysága

A 6.3. ábra négyféle keresztmetszetének a 6.2.1.—6.2.3. pontokban szükséges geometriai adatait a 6.8. ábrán tüntettük fel. S jelöli a keresztmetszet súlypontját, T a nyírasközéppontját. (Ügyeljünk arra, hogy az ábrákon az x tengely függőleges, az y pedig vízszintes!)

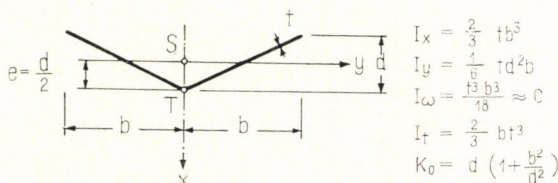
Megemlítjük még, hogy a *hajlítási feszültségek* az ívkeresztmetszetben a magasság mentén nemlineárisan oszlanak meg, valamint hogy a hosszirányú hajlítás hatására a héjlemezben *keresztirányú hajlítónyomaték* is ébred [6.5], [6.7].

A héjvégek másik fontos alap-igénybevétele a *központos nyomás*, amely körív-tengely esetén egyenletes radiális terhet jelent (6.5b. ábra). Erre vonatkozóan a 6.6. ábráról azt olvashatjuk le, hogy kis görbületek esetén az $M(\chi)$ -görbe kezdeti érintőjével számíthatjuk az alakváltozásokat. Ehhez ismernünk kell azt a $\gamma_1 \leq 1$ tényezőt, amellyel az elemi I_y inercianyomatékot redukálnunk kell, hogy megkapjuk a hatékony $\gamma_1 I_y$ inercianyomatékot.

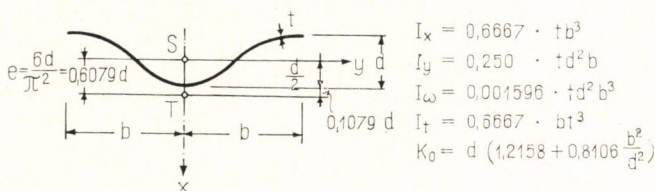
a Lapos másodfokú parabola



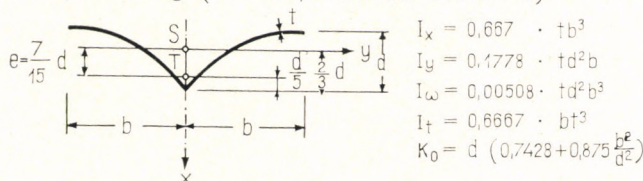
b Lapos ∇



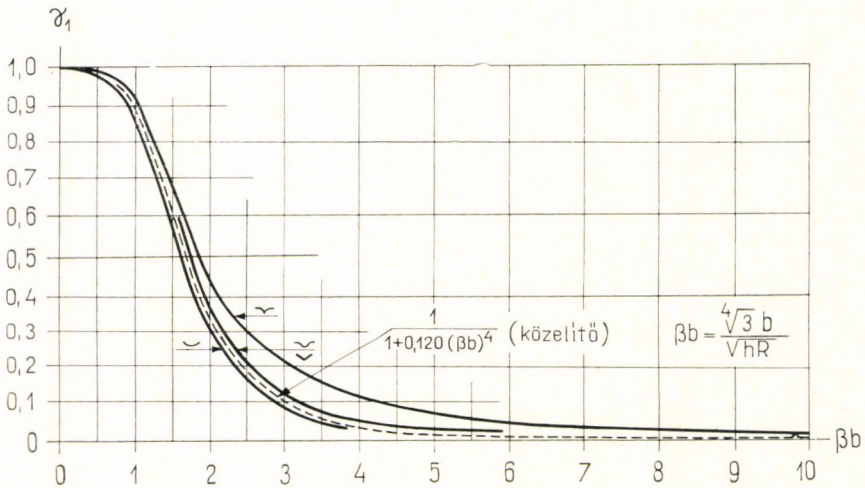
c Lapos hullámvonal (cosinus)



d Lapos szárny (2 db 2F. parabolából összetéve)



6.8. ábra. Keresztmetszeti jellemzők

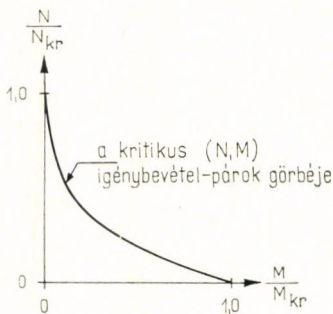


6.9. ábra. A hatékony inercianyomaték szorzója

Ezt a γ_1 tényezőt [6.5], ill. [6.6] alapján βb függvényében a 6.3. ábra négyféle keresztmetszetére a 6.9. ábrán mutatjuk be. Szaggatott vonallal feltüntetünk egy egyszerű képlettel számítható közelítő γ_1 -görbét is. Láthatjuk, hogy valamennyi keresztmetszet γ_1 -görbéje hasonló jellegű, és hogy — az M_{kr} -görbékhez hasonlóan — βb növekedtével rohamosan csökkennek.

A $\gamma_1 I_y$ hatékony inercianyomatékkal már az ívstabilitás szokásos módszerei szerint határozhatjuk meg a kritikus központos N_{kr} nyomóerőt. Ez azonban csak az 1.1c., ill. 1.1d. ábra szerint értelmezett N_{kr}^{lin} lesz. Mivel az ív mindig antimetrikus alakban hajlik ki, és így a két fele ellenkező meggörbülést szenved, ezért az 1.1d. ábra szerint értelmezett „aszimmetrikus” viselkedése nem válik nyilvánvalóvá. Az egész ív kritikuson túli teherbírása azonban csökkenő jellegű, így meg kell vizsgálnunk az ívekre általában mértékadó *féloldalas teherből* származó *külpontos nyomás* hatását.

A részletes vizsgálat [6.3] a 6.10. ábrán látható összefüggést adta az együttesen kihajlást okozó N nyomóerő és M hajlítónyomaték között. A görbét egyrészt



6.10. ábra. A központos nyomás és a hajlítás együttes hatása a hégív ellapulására

az jellemzi, hogy az origó felől nézve domború, másrészt pedig, hogy függőleges érintővel indul az $N/N_{kr} = 1$ pontból. Ez pedig azt jelenti, hogy már igen kis nyomaték (azaz külpontosság) is nagymértékben csökkenti a kritikus nyomóerőt. A 6.9. ábra görbéje tehát pl. a 2.7. vagy a 2.8. ábráéinak felel meg, csak ott nem a hajlítónyomaték, hanem a kezdeti hullámosság van felrakva a vízszintes tengelyre.

Ha a központosan nyomott héjívnek egy virtuális (kihajlási) alakváltozást adunk, akkor ennek megfelelő nyomaték keletkezik benne, és teherbírása a 6.6. ábra szerint rohamosan leesik. Ebből az is következik, hogy a héjívnek központos nyomás hatására bekövetkező kihajlása az 1.4c., ill. 1.5. ábrával jellemzett csoportba tartozik, tehát központos nyomás esetén is fel kell vennünk egy véten külpontosságból származó nyomatékot, és a tiszta központos nyomás N_{kr} kritikus nyomóerejét ennek megfelelően csökkentenünk kell [6.3], [6.5].

6.2.2. Stabilitásvizsgálatok az ív síkjára merőlegesen

Az ív síkjára merőleges kihajlási jelenségeket az egyenes tengelyű, vékonyfalú rudak elcsavarodó kihajlásához [6.2] hasonlóan tárgyalhatjuk, mivel a héjívек oldalirányban úgy hajolnak ki, mint *görbe tengelyű, nyitott keresztmetszetű rudak*. A keresztmetszetek ellapulása csak az ív síkjában lejátszódó alakváltozásokat befolyásolja, az oldalirányú alakváltozások szempontjából a keresztmetszeteket alaktartónak tekinthetjük.

Az oldalirányú instabilitási jelenségekben összeolvad az ívszerkezet oldalirányú kihajlása a héjlemez horpadásával: a szabad perem „helyi” horpadásának hullámhossza kiterjed az ív egész hosszára, s ez azonos az ív elcsavarodó kihajlásával vagy kifordulásával. (E két jelenség azonosságát egyenes tengelyű nyomott szögacél-szelvényekre [2.51] mutatja be.)

A héjívек oldalirányú stabilitásuk szempontjából az alábbiakban különböznek a *közönséges* (tömör keresztmetszetű) *ívtartóktól*:

a) csavarási merevségük sokkal kisebb oldalirányú hajlítási merevségüknél és így sokkal érzékenyebbek az oldalirányú instabilitásra,

b) nyírasközéppontjuk nem esik a súlypontba,

c) vékonyfalúak, s emiatt az ívirányú szálakban ható nyomófeszültségek alakváltozás után is kénytelenek a deformálódott vékony fal érintőjének irányába mutatni, mivel a vékony fal csak igen kis ívirányú nyomatékot tud felvenni. E jelenségből többlet-kigörbítő hatás származik.

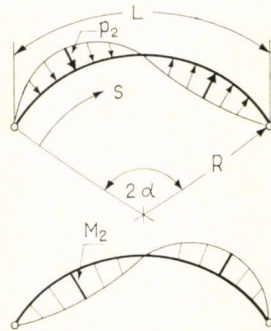
Ez utóbbi két tulajdonság számszerűen nagymértékben megváltoztatja, mégpedig a legtöbbször csökkenti a kritikus erő nagyságát a közönséges ívtartókéhoz képest.

Az ív (vagy gerenda) két végének *megettámasztásmódját* háromféle szempontból kell jellemeznünk az oldalirányú stabilitásvizsgálathoz:

a) *elcsavarodás ellen hogyan van megettámasztva* (mereven vagy rugalmasan, pl. felfüggesztve stb.),

b) szabadon *öblösödhetnek-e* a végkeresztmetszetek, vagy ez meg van-e gátolva,

c) *oldalirányú hajlítás* szempontjából: szabadon elfordulhatnak-e a végkeresztmetszetek (oldalirányban csuklós megettámasztás), vagy — mereven, ill. rugalmasan — be vannak-e fogva.



$$p = p_2 \sin \lambda_2 s$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{L} = \frac{\pi}{\alpha R}$$

$$M = M_2 \sin \lambda_2 s$$

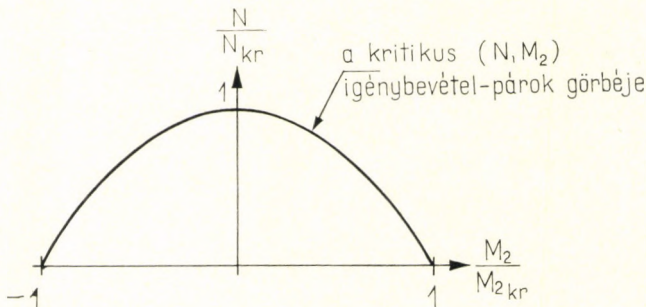
$$M_2 = \frac{p_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2}$$

6.11. ábra. Antimetrikus terhelés

Az *egyensúlyi módszert* csak egészen speciális megtámasztásmód, terhelés és ívalak esetében használhatjuk egyszerűen [6.8], [6.9], [6.10], [6.5]. A mérnöki gyakorlatban előforduló általános ívalak és terhelések esetében az *energiamódszer* vezet célra [6.11], [6.5], amellyel zárt képleteket vezetünk le többféle megtámasztásmód és teher esetében az oldalirányú instabilitást okozó kritikus teherre, ha az egyszerűség kedvéért körív alakú ívtengelyt és állandó ívkeresztmetszetet feltételezünk. Így megoldottuk a központos nyomás (6.5b. ábra) hatására bekövetkező elcsavarodó kihajlást [6.11], [6.14], a tiszta hajlítás (6.5a. ábra) okozta kifordulást [6.11], valamint az antiszimmetrikus teherből ébredő antiszimmetrikus nyomaték (6.11. ábra) okozta kifordulást [6.13], [6.14].

Megvizsgáltuk a központos nyomás (6.5b. ábra) és az antiszimmetrikus teher (6.11. ábra) együttes hatását is, mivel az ívekre ható féloldalas teher e kettő megfelelő összegezésével állítható elő [6.13].

A két teherfajta kihajlást okozó kombinációit a 6.12. ábra görbéje ábrázolja. Itt M_2 -vel jelöltük az ívnegyedben keletkező nyomatékokat (6.11. ábra), N -nel pedig a totális teherből keletkező, állandó nagyságú nyomóerőt. Ez a görbe éppen ellenkező jellegű, mint az ív síkjában bekövetkező kihajlásra kapott 6.10. diagram. A magyarázat a következő:



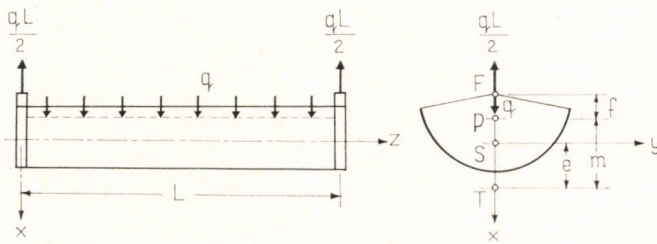
6.12. ábra. A központos nyomás és az antiszimmetrikus teher együttes hatása a héjív oldalirányú stabilitására

Az oldalirányú stabilitás leírt eseteit a *lineáris elmélettel* vizsgáltuk. Az ennek ellenőrzésére elvégzett modellkísérletek, valamint az elméleti megfontolások is [6.15] azt mutatják, hogy az oldalirányú kihajlások jellege az 1.1b. (ritkábban az 1.1a.) ábrának felelnek meg. Sok esetben tekintélyes teherbírás-növekedést tapasztaltunk a modellek (lineáris) kritikus terhének túllépése után. Így az oldalirányú instabilitás eseteit az *elágazási problémák* körébe sorolhatjuk, tehát összegezésükre érvényes a Dunkerley-tétel [2.27], [2.40], amiből a 6.12. ábra kifelé domborodó görbéje is következik.

6.2.3. Vékonyfalú gerendák kifordulása

A következőkben röviden ismertetjük a 6.3. ábrának megfelelő keresztmetszetű vékonyfalú *héggerendák* kifordulását okozó kritikus teher meghatározását.

A gerenda legyen a két végén a keresztmetszettel mereven (pl. kalodával) összekötött F pontban felfüggesztve (6.13. ábra) és terhelje a tengelye mentén egyenletesen megoszló q teher, mégpedig — az általánosság kedvéért — a T nyírasközéppont felett m magasságban. A felfüggesztett gerendavégekből megkaphatjuk a csavarás ellen mereven megfogott tartóvég esetét is, ha a felfüggesztési pont f magasságát a képletekben végtelenül nagyoknak vesszük.



6.13. ábra. Felfüggesztett héggerenda

A gerenda két végét a gátolt csavarás szempontjából szabadon öblösödőnek tekintjük. (A végeken alkalmazott diafragma merevítő hatása a [6.12]-ben elvégzett vizsgálat szerint igen kicsi.)

Először a 6.3a. ábrának megfelelő, *felül nyitott* keresztmetszetű gerendákkal foglalkozunk, amikor tehát a gerenda szabad szélei kapnak a hajlításból nyomást. Ekkor a kifordulás lényegében csak elcsavarodási alakváltozásból áll [6.12]. A

$$\left(\frac{ql^2}{8} \right)_{kr} = M_{kr} \quad (6.2)$$

kritikus hajlítónyomatékot ilyenkor a következő másodfokú egyenletből kell kiszámítanunk:

$$a_2 M_{kr}^2 + a_1 M_{kr} + a_0 = 0. \quad (6.3)$$

Az együtthatók a következők:

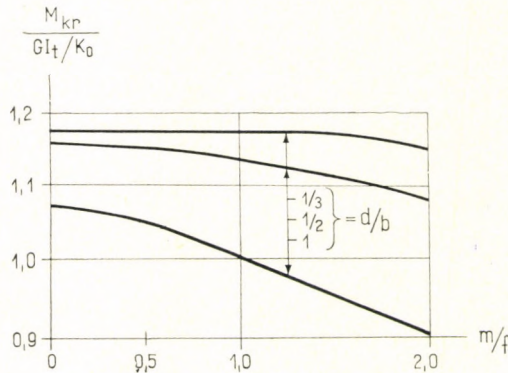
$$a_2 = 5,145 K_0^2 + 12,36 K_0 m + 10,17 K_0 \frac{m^2}{f} + 1,6 m^2 + 1,441 \frac{m^3}{f}, \quad (6.4a)$$

$$a_1 = - \left[24,29 K_0 GI_t + 1043 K_0 \frac{EI_\omega}{l^2} + 19,74 m GI_t + 1597 m \frac{EI_\omega}{l^2} + \right. \\ \left. + 14,58 \frac{m^2}{f} GI_t + 1281 \frac{m^2}{f} \frac{(EI_\omega)^2}{l^2} \right], \quad (6.4b)$$

$$a_0 = 21,9 (GI_t)^2 + 2163 GI_t \frac{EI_\omega}{l^2} + 19214 \frac{(EI_\omega)^2}{l^4}. \quad (6.4c)$$

A fenti kifejezésekben szereplő keresztmetszeti jellemzőket a 6.8. ábrán adtuk meg.

A jobb áttekinthetőség kedvéért a 6.14. ábrán grafikusán is megadjuk a gerendát kifordító M_{kr} nyomaték nagyságát arra az esetre, ha a keresztmetszet V-alakú (ekkor $EI_\omega \approx 0$ -nak vehető) és ha a teher a gerenda önsúlya, mely a súlypontban hat ($m = e$). Láthatjuk, hogy az elcsavarodás ellen mereven megfogott gerenda-



6.14. ábra. A felül nyitott, V-keresztmetszetű héjgerenda kifordító nyomatéka a súlypontban ható teher esetén

végek ($m/f = 0$) esetéhez képest a véges magasságban való felfüggesztés az ábrán feltüntetett $m/f = 2$ értékig (azaz a keresztmetszet magasságának 3/4-ében alkalmazott felfüggesztésig) nem okoz túlságosan nagymértékű csökkenést a kritikus nyomatékban.

A 6.3b. ábrának megfelelő, *alul nyitott* keresztmetszetű héjgerendák azonban (amikor tehát a gerenda szabad szélei húzást kapnak) másképpen viselkednek, mivel most az oldalirányú meggörbülés is szerephez jut. A (6.2) szerinti kifordító

nyomatékot most is a (6.3) másodfokú egyenletből kell kiszámítani, de az együtthatók [6.5] szerint a következők lesznek:

$$a_2 = \frac{l^2}{EI_x} \left(-0,04701 - 0,01684 \frac{m}{f} + 0,06657 \frac{K_0}{f} \right), \quad (6.5a)$$

$$a_1 = - \left[K_0 + 1,747 m + 1,416 \frac{m^2}{f} + 0,1435 \frac{l^2}{fEI_x} \left(GI_t + EI_\omega \frac{\pi^2}{l^2} \right) \right], \quad (6.5b)$$

$$a_0 = 2,155 \left(GI_t + EI_\omega \frac{\pi^2}{l^2} \right). \quad (6.5c)$$

A betűk jelentését l. a 6.8. és a 6.13. ábrákon.

Ezekbe a kifejezésekbe m -et és K_0 -t negatív előjellel kell behelyettesítenünk a keresztmetszeteknek a 6.8. ábrához képest megfordított helyzete miatt.

A felfüggesztési pont magassága most már sokkal erősebben befolyásolja a kifordító nyomaték nagyságát, mint a 6.4a. ábra felül nyitott keresztmetszeteinél. Másrészt viszont az alul nyitott keresztmetszetű héjgerendák kifordító nyomatéka olyan nagy szokott lenni, hogy többnyire vagy az ellapulást okozó nyomaték (6.7. ábra) vagy a középső, nyomott héjlemez helyi horpadását okozó nyomaték lesz mértékadó. ~~Ezért még~~ röviden kitérünk ez utóbbira is.

6.2.4. A héjlemez helyi horpadása

Ezt a jelenséget csak akkor kell külön megvizsgálnunk, ha *nem esik egybe* az egész szerkezet oldalirányú kihajlásával, ami a 6.3b. ábrának megfelelő, alul nyitott keresztmetszetű gerendák esetében következik be. Ezeknél a keresztmetszet közepe nyomófeszültséget kap, szélei pedig húzást szenvednek. Ilyenkor a nyomott héjlemez-rész biztonságát helyi horpadásra az előző fejezetek valamelyike szerint kell megvizsgálnunk. Néhány speciális vizsgálati szempontot találhatunk [6.5]-ben.

7. Ortotróp héjak horpadása

7.1. Az ortotróp héj általában

Az eddig tárgyalt *izotróp* héjakat az jellemzi, hogy rugalmas tulajdonságaik minden irányban azonosak. Ez a modell azonban csak az egyféle és izotróp tulajdonságú anyagból és egyetlen tömör lemezből álló héj viselkedésének leírására alkalmas.

A gyakorlatban statikai és szerkesztési előnyök miatt gyakran alkalmaznak összetettebb (rácsos, bordás, hullámos, szendvics- stb.) héjakat. Ezek tulajdonságai azonban általában annyira eltérnek az izotróp héjakétól, hogy viselkedésüket kielégítő pontossággal csak az anizotróp héjak elméletével írhatjuk le.

Az általános anizotrópia figyelembevétele rendkívül bonyolult, ezért a következőkben az anizotrópiának csak egy különleges esetével, az ortotrópiával foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért továbbá azt is kikötjük, hogy a héjlemez keresztmetszete szimmetrikus legyen a középfelületre.

Az ortotrópiánál a héj minden pontjában van két, egymásra és a középfelületre merőleges sík, amelyekhez képest szimmetrikusan elhelyezkedő (egyébként tetszőleges) két irányban a héj rugalmas tulajdonságai azonosak. E két síknak a középfelületre illeszkedő sikkal való metszésvonalai az ortotrópia fő irányai.

Ezeket a fő irányokat koordináta-rendszerként felvéve, a héjlemez merevségi mátrixa a következőképp írható fel, ha elhanyagoljuk a hajlítási nyírásból származó alakváltozást (figyelembevételel 1. a szendvichéjajknál, a 8.1. pontban):

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D' & D_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} D_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_x & B' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B' & B_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ w'' \\ w'' \\ w' \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

A (7.1)-ben ε_x , ill. ε_y az x , ill. y irányú fajlagos megnyúlás, γ_{xy} az x, y síkbeli szögtorzulás, w a felületre merőleges elmozdulás és $'$ ill. \cdot az x , ill. y differenciálás jele, B_x, B_y a héjlemez x , ill. y irányú hajlítási, illetve B_{xy} a csavarási merevségi jellemzője, D_x, D_y az x , ill. y irányú nyúlási, illetve D_{xy} a membránnyírási merevségi jellemző. $B',$ ill. D' a ν harántkontrakció hatását tartalmazó hajlítási, illetve nyúlási merevségi jellemzők. (Megjegyezzük, hogy az irodalomban más módon definiált nyírési és csavarodási merevségek is előfordulnak. Ezekkel a mátrix felírása is módosulna.)

A merevségi mátrix mindig szimmetrikus a főátlóra [7.30], és ezért a vesszővel jelzett merevségi jellemzők a két irányban megegyeznek.

Egyes esetekben, pl. a két irányban különböző csavarási merevségű bordákkal merevített bordáslemezekenél, a B_{xy} csavarási merevségi jellemző két különböző részből tevődik össze (l. a 8. fejezetben).

Az ortotróp fő irányoknak a héj különböző pontjaiban olyanoknak kell lenniük, hogy azokra kezelhető koordináta-rendszert tudjunk fektetni.

Az ilyen ortotróp héjlemez vizsgálata még mindig elég bonyolult, ezért megvizsgáljuk a harántkontrakció hatását tartalmazó B' és D' merevségi jellemzők elhanyagolásának lehetőségét. Ez esetben ugyanis a merevségi mátrixnak csak a fő átlói lesznek kitöltve.

Az izotróp héjaknál a ν harántkontrakciós tényező olyan szorzótényezőekben fordul elő, amelyeknek szélső értéke az $\frac{1}{1-\nu^2}$, ill. az $\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$ kifejezés (lásd pl. a (2.11) és (4.7) képleteket). $\nu = 1/3$ értéknél a két kifejezés 1,125, ill. 1,06-ra adódik. Így a harántkontrakció $\nu = 0$ felvétellel történő elhanyagolása 11–6%-kal kisebb kritikus terhet szolgáltat.

Az ortotróp héjak számos fajtájánál ν hatása még kisebb. Pl. a bordás héjlemez esetében csak a lemez ν értéke befolyásolja az eredményt, a bordaé viszont nem. Így a $\nu = 0$ feltevessel várhatóan a fenti százalékoknál kisebb hibával kapjuk a kritikus terhet, és az mindig kisebb a pontosnál. Tekintve, hogy a $\nu = 0$ feltevessel a stabilitási problémák lényegesen egyszerűbben vizsgálhatók az egyébként bonyolult ortotróp elmélet keretén belül, és az ismertetendő irodalmi eredmények szerzői is számos esetben ezzel a feltevessel éltek, a következőkben a ν harántkontrakciós együtthatót zérusnak vesszük.

Így a középsíkra szimmetrikus felépítésű héjlemez merevségét hat merevségi jellemzővel lehet leírni. Az ortotróp héjlemez egyszerűsített merevségi mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} D_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ w'' \\ w'' \\ w'' \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

A hat merevségi jellemző ($B_x, B_y, B_{xy}, D_x, D_y, D_{xy}$) meghatározását az egyes héjfajták esetében részben a 8. fejezetben részletezzük, részben pedig utalunk az irodalomra [7.10], [7.31]. Segítségükkel az állandó merevségű, lapos ortotróp héjak egyensúlyi és összeférhetőségi kihajlási differenciálegyenletei derékszögű koordináta-rendszerben a következőképpen írhatók fel [2.13]:

$$\begin{aligned} & - (B_x w^{IV} + 2B_{xy} w'''' + B_y w''') + F''(z_0'' + w_0'' + w'') - \\ & - 2F_0'(z_0' + w_0' + w') + F''(z_0'' + w_0'' + w'') + \\ & + w'' F_0'' - 2w_0' F_0' + w'' F_0'' = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\frac{F_{IV}}{D_y} + \frac{2F''}{D_{xy}} + \frac{F''}{D_x} = -w \cdot (z_0'' + w_0'') + 2w' \cdot (z_0' + w_0') - w''(z_0 + w_0) - w \cdot w'' + w'^2. \quad (7.4)$$

A (7.3) és (7.4) az ortotróp lapos héjra vonatkozó Donnell-típusú egyenletek, amelyek a felületre merőleges w alakváltozásnak másodfokú tagjait is figyelembe veszik.

Ezekben az egyenletekben z_0 a felület, w_0 a kezdeti hullámosság és a statikusan felhordott teher okozta alakváltozás összege, w a horpadási alakváltozás, F_0 a statikusan felhordott teherhez, F pedig a horpadáshoz tartozó feszültségfüggvény.

A továbbiakban értelemszerűen érvényesek mind a megoldás módjára, mind a lineáris és nemlineáris tagok figyelembevételére a korábbi fejezetekben mondottak.

7.2. Az ortotróp héj lineáris kritikus terhe

A nemlineáris tagok elhagyásával megkaphatók a lineáris kritikus teher differenciálegyenletei. A gyakorlati esetek sokszor jól megközelíthetők a

$$z_0 = \frac{1}{2R_x} x^2 + \frac{1}{2R_y} y^2 \quad (7.5)$$

lapos paraboloidfelülettel. Ennél a felületnél az egyensúlyi és az összeférhetőségi egyenlet — derékszögű alaprajzot és sarokpántos peremet feltételezve, valamint az

$$\begin{aligned} F_0'' &= n_x = \text{constans}, \\ F_0'' &= n_y = \text{constans}, \\ F_0' &= n_{xy} = 0 \end{aligned}$$

erőrendszert, és $w_0 = 0$ -t, azaz geometriailag tökéletes héjat figyelembe véve megoldható a

$$w = W \cos \frac{\pi}{l_x} x \cos \frac{\pi}{l_y} y \quad (7.6)$$

kifejezéssel. Itt W egy állandó és l_x , ill. l_y az x , ill. y irányú kihajlási hullámhossz.

A héj kritikus terhéhez tartozó n_x , n_y kritikus belső erőrendszer [2.13] szerint a következő karakterisztikus egyenletből határozható meg:

$$\begin{aligned} \frac{n_x}{l_x^2} + \frac{n_y}{l_y^2} &= \pi^2 \left[\frac{1}{l_x^2} \left(\frac{B_x}{D_y} \right) + \frac{1}{l_x^2 l_y^2} \left(\frac{2B_{xy}}{D_y} + \frac{2B_x}{D_{xy}} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{l_x^4 l_y^4} \left(\frac{B_x}{D_x} + \frac{4B_{xy}}{D_{xy}} \frac{B_y}{D_y} \right) + \frac{1}{l_x^2 l_y^6} \left(\frac{2B_{xy}}{D_x} + \frac{2B_y}{D_{xy}} \right) + \\ &+ \left. \frac{1}{l_y^2} \left(\frac{B_y}{D_x} \right) + \left(\frac{1}{l_y^2 R_x} + \frac{1}{l_x^2 R_y} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{1}{l_x^4 D_y} + \frac{2}{l_x^2 l_y^2 D_{xy}} + \frac{1}{l_y^4 D_x} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (7.7)$$

A (7.7) egyenletben azokat az l_x és l_y kihajlási hullámhosszakat kell a lehetséges értékek közül választani, amelyek a legkisebb kritikus erőt adják.

Az izotróp héjaknál néhány igénybevételi módnál (pl. a gömb radiális nyomása és a henger axiális nyomása) többféle kihajlási alakhoz azonos kritikus teher tartozott. Az ortotróp héjaknál ez nem így van. A legkisebb kritikus teherhez minden esetben egyértékűen meghatározott l_x és l_y tartozik [7.22], [7.30]. Ezért a kihajlási hullámhosszak hibás felvétele a pontosnál nagyobb lineáris kritikus terhet eredményez.

Az izotróp héjakhoz hasonlóan a paraboloidfelület eredménye közelítésképpen alkalmazható nem paraboloid felületű héjakra is. A követelmény csak az, hogy egy kihajlási hullámhosszon belül a tényleges felület jól közelítse a paraboloidfelületet.

Így pl. a radiálisan nyomott teljes gömbfelület esetén $R_x = R_y = R$, és $n_x = n_y = pR/2$. Ezekkel az adatokkal a (7.7) egyenletből meghatározható a p_{kr}^{lin} kritikus teher.

A 2.2. ábrának megfelelő körhenger esetében $R_y = R$, $R_x = \infty$, és $y = R_\varphi$. Ezzel meghatározható a henger kritikus terhe a (7.7) egyenletből.

A következőkben — részben az eddig vázoltak, részben pedig az irodalomban található pontos és egyéb közelítő módszerek alapján — bemutatjuk a különböző fajtájú ortotróp héjak kritikus terhének meghatározását.

7.3. Az ortotróp henger lineáris kritikus terhe

Az ortotróp hengert bizonyos esetekben a hat merevségi jellemzőből képezett, a fő tulajdonságokat jól jellemző három paraméter segítségével célszerű tárgyalni [7.1], [7.22], [7.30]. E paraméterek a következők:

$$\begin{aligned}\vartheta_s &= \frac{\sqrt{D_x D_y}}{D_{xy}}, \\ \vartheta_p &= \frac{B_{xy}}{\sqrt{B_x B_y}}, \\ \gamma &= \frac{B_x D_y}{B_y D_x}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Az izotróp héinak $\vartheta_p = \vartheta_s = \gamma = 1$ felel meg.

Ha $1/\gamma > 1$, akkor gyűrűsen merevítettnek és ha $1/\gamma < 1$, akkor axiálisan merevítettnek nevezzük a hengert. Előljáróban megjegyezzük, hogy a rövid hengerek kivéve azonos anyagmennyiség mellett mindig a gyűrűsen merevített hengerháj kritikus terhe a nagyobb, ezért a gyűrűs merevítés előnyösebb.

A kihajlási alaknak az L_x hosszúságú henger esetében több jellegzetes formája van. Az egyik az axiális nyomás egyes eseteiben mértékadó gyűrűs horpadás. Ennél a hossz tengelyre nézve körszimmetrikus hullámokban horpad a héj. Így $l_y = \infty$, és $l_x = L_x/m$, ahol $m = 1, 3, 5, \dots$. Az axiális nyomás más eseteiben

és a gyűrűirányú nyomásnál a hálós horpadás mértékadó. Ennél $l_x = L_x/m$, és gyűrűirányban teljes hengernél $l_y = R\pi/n$, hengerpanelnél pedig $l_y = L_y/n$, ahol L_y a henger panelgyűrű irányban mért ívhossza, $n = 2, 3, \dots$. Ezenkívül előfordulhat rombuszos horpadásalak is, lásd a 7.7.1. pontban.

A csavart henger kihajlásalakja a hossz tengelyre ferden elhelyezkedő, x irányban L_x hosszúságú félhullám, gyűrűirányban pedig több hullámból áll [7.21].

7.3.1. Az ortotróp henger axiális nyomása (belső túlnyomással vagy anélkül)

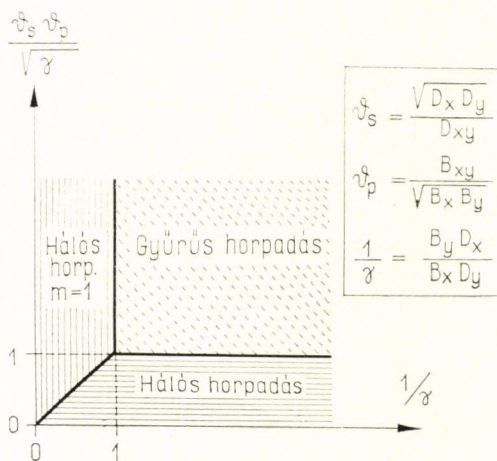
Axiális nyomás esetén (3.3. ábra) a horpadási alak vagy gyűrűs, vagy hálós. Hogy melyik következik be, illetve melyikhez tartozik a kisebb kritikus teher, azt részletes vizsgálatok alapján GERARD [7.9] mutatta ki. Az eredményeket a 7.1. ábra szemlélteti.

Ha a (7.8) képletekkel kiszámított paraméterek és a 7.1. ábra alapján a héjra a gyűrűs kihajlás a mértékadó, akkor a kritikus axiális nyomás a következő képletből számítható [2.13], [7.9], [7.30]:

$$n_{x\text{kr}}^{\text{lin}} = \frac{2}{R} \sqrt{B_x D_y} . \quad (7.9)$$

Az izotróp hengerhéjhoz hasonlóan a gyűrűs horpadáshoz tartozó kritikus terhet a henger belső nyomása nem befolyásolja.

Ha a 7.1. ábrából hálós horpadásalak adódik, akkor a hengerre ható belső p nyomás növeli a kritikus terhet, de legfőképpen a gyűrűs kihajlás kritikus terhéig



7.1. ábra. Az axiálisan nyomott ortotróp hengerhéjak horpadásformái a merevségi paraméterek függvényében

A hálós horpadásalakhhoz tartozó kritikus teher a (7.7) képlet szerint számítható, a legkisebb kritikus terhet adó hullámszámot meghatározó n megkeresésével. Az n hullámszámot folyamatos függvénynek tekintve minimumszámítással meghatározható egy olyan n , amely a különböző n értékekhez tartozó csipkegörbe burkolójának minimumát adja mint kritikus terhet. Így a pontos kritikus teher ennél legfeljebb csak nagyobb lehet. A kritikus teher ilyen módon való meghatározásának a belső nyomás hatását is figyelembe vevő kifejezése [7.22], [7.30] szerint a következőképp írható fel:

$$n_{xkr} = \frac{2}{R} \sqrt{B_x D_y} \left[\frac{pR^2}{2\mu^2} \sqrt{B_x D_y} + \sqrt{\frac{1 + 2\beta\mu^2 + \gamma\mu^4}{1 + 2\theta_s\mu^2 + \mu^4}} \right]. \quad (7.10)$$

E kifejezésben $\beta = \theta_p \sqrt{\gamma}$, és $\mu^2 = \left(\frac{l_y}{l_x}\right)^2 \sqrt{\frac{B_y}{B_x}}$, p pedig a gyűrűfeszültséget ébresztő belső nyomás. A μ^2 és l_y értéke a következő két egyenletből határozható meg:

$$\frac{\mu^2[\mu^4(\theta_s\gamma - \beta) + \mu^2(\gamma - 1) + \beta - \theta_s]}{(1 + 2\theta_s\mu^2 + \mu^4) \sqrt{(1 + 2\beta\mu^2 + \gamma\mu^4)(1 + 2\theta_s\mu^2 + \mu^4)}} - \frac{pR}{2\mu^2} \sqrt{B_x D_y} = 0, \quad (7.11)$$

$$\frac{4\mu^4}{(1 + 2\theta_s\mu^2 + \mu^4)(1 + 2\beta\mu^2 + \gamma\mu^4)} - \frac{4R^2\pi^4}{l_y^4} (B_y/D_y) = 0. \quad (7.12)$$

A belső p nyomásnak más a hatása az axiálisan merevített és más a gyűrűsen merevített hengerhájak esetén.

A gyűrűsen merevített ($1/\gamma > 1$) héjnál, mint már említettük, két horpadási alak lehetséges (l. a 7.1. ábrát). Ha a héj gyűrűsen horpad, akkor a belső nyomás nem gátolja a horpadást, és így a belső nyomás nem növeli a kritikus terhet. Ha a héj hálósan horpad, akkor a belső nyomás gátolja a horpadást. A belső túlnyomás nélküli esetben azonban a hálós horpadás kritikus terhe csak kevésbé kisebb a gyűrűs kihajlás kritikus terhénél, ezért a belső túlnyomás hatása is mérsékelt, mivel a kritikus teher legfeljebb a gyűrűs kihajlás kritikus terhének értékéig emelkedhet.

Egészen más a helyzet az axiálisan merevített hengerhájak esetében. Ezeknél a hálós kihajlás kritikus terhe belső túlnyomás nélkül sokkal kisebb, mint a gyűrűs kihajlása, és ezért a belső nyomás többszörös kritikuserő növekedést képes okozni.

7.3.2. Az ortotróp henger hajlításból származó axiális nyomása

Az izotróp anyagú zárt henger hajlításánál láttuk, hogy a hajlításból származó axiális irányú kritikus nyomófeszültség alig magasabb a tiszta axiális nyomás kritikus feszültségénél. Mint ahogy HOLSTON kimutatta [7.12], az ortotróp hengereknel hasonló a helyzet. Így a hajlítás okozta horpadást az axiális nyomás kritikus feszültségének képleteivel vizsgálhatjuk.

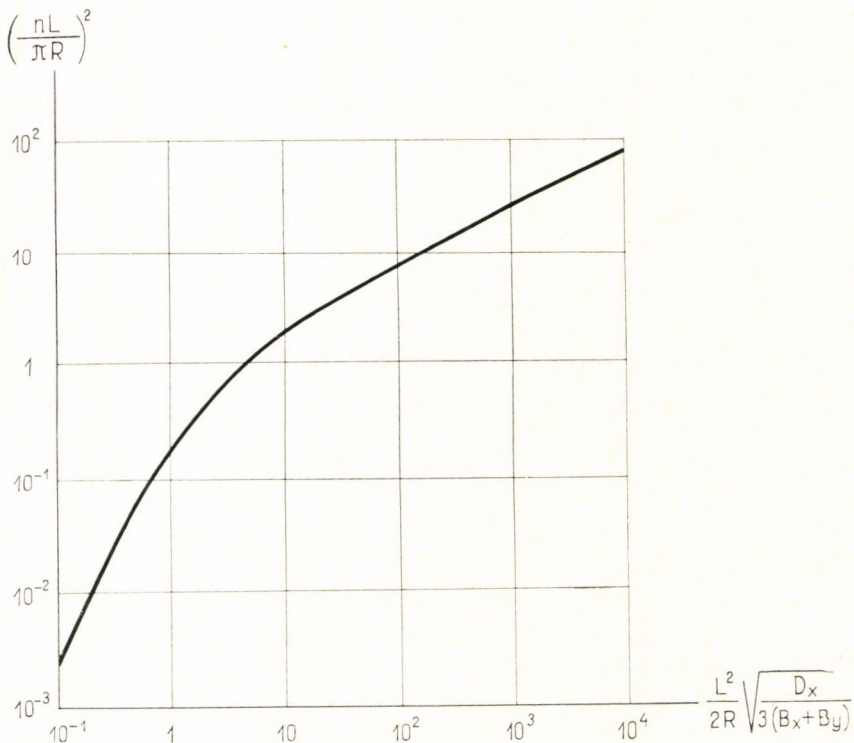
7.3.3. A külső felületi nyomással terhelt, gyűrűirányban nyomott ortotróp henger

A 2.11a. ábrán vázolt terhelési esetben a kritikus teher a (7.7) egyenletből határozható meg az $n_x = 0$ és $n_y = pR$ membránerők figyelembevételével. Az x irányú l_x kihajlási hossz mindig kiterjed a teljes L hengerhosszra, így $l_x = L$. Az l_y gyűrűirányú kihajlási hosszat úgy kell megválasztanunk, hogy a legkisebb kritikus erőt adja. Az l_y -t meghatározó n érték nagyságrendjének becslésére zárt körhenger esetében felhasználhatjuk a 7.2. ábra hidrosztatikus nyomás esetére ajánlott diagramját [7.3].

Igen hosszú zárt henger esetén a végek megtámasztásának már nincs hatása a kritikus teher nagyságára, és így az mint a gyűrű kritikus terhe határozható meg. Így a (7.7) egyenletből a

$$p_{kr}^{gyűrű} = \frac{4B_y}{R^3} \quad (7.13)$$

kritikus teher adódik. Ez az érték 33%-kal magasabb a pontos (2.29a, b) képlet szerinti értéknél. Az eltérés — hasonlóan az izotróp héjakhoz — abból származik, hogy ez esetben a kihajlási hossz szakaszán a héj már nem tekinthető laposnak.



7.2. ábra. A gyűrűirányban nyomott henger horpadási félhullámszáma

Ha a héj hosszú, de lapos ívelt panel, akkor az y irányú kihajlási hossz $l_y \approx \approx L_y/2$ -re vehető, és így a lapos ív kritikus terhet nyerjük:

$$p_{kr}^{iv} = \frac{4\pi^2 B_y}{RL_y^2}. \quad (7.14)$$

A $p_{kr}^{gy\ddot{u}r\ddot{u}}$, ill. a p_{kr}^{iv} kritikus terhek a közepes L , ill. L_x hosszúságú héjak kritikus terhének alsó korlátját képezik.

A hosszú és közepes hosszúságú héjaknál a gyűrűirányú merevítés hatása dominál. Rövid héjaknál azonban fokozatosan előtérbe lép az axiális merevítések kritikus erőt növelő hatása is, és így a kritikus teher lényegesen magasabbra is növekedhet.

7.3.4. A hidrosztatikus nyomással terhelt ortotróp henger

A 2.11b. ábrán vázolt hidrosztatikus nyomás lényegében hasonló az előző pontban ismertetett felületi nyomáshoz, azzal a különbséggel, hogy axiális nyomás is ébred, melynek értéke $n_x = \frac{pR}{2}$. A gyűrűirányú nyomás $n_y = pR$, és az axiális

irányú kihajlási hullámhossz itt is a teljes hengerhosszra terjed ki, így $l_x = L$. A kritikus nyomás ismét a (7.7) egyenletből határozható meg. Gyűrűs merevítésű zárt henger esetére BODNER [7.3] megoldotta a minimalizálást és eredményül a 7.2. ábrán bemutatott diagramot kapta.

E diagramból leolvasható a legkisebb p_{kr}^{lin} kritikus terhet szolgáltató gyűrűirányú kihajlási n hullámszám. A hullámszám ismeretében a kritikus hidrosztatikus nyomás [1.1], [7.3] szerint a következő kifejezésből számítható:

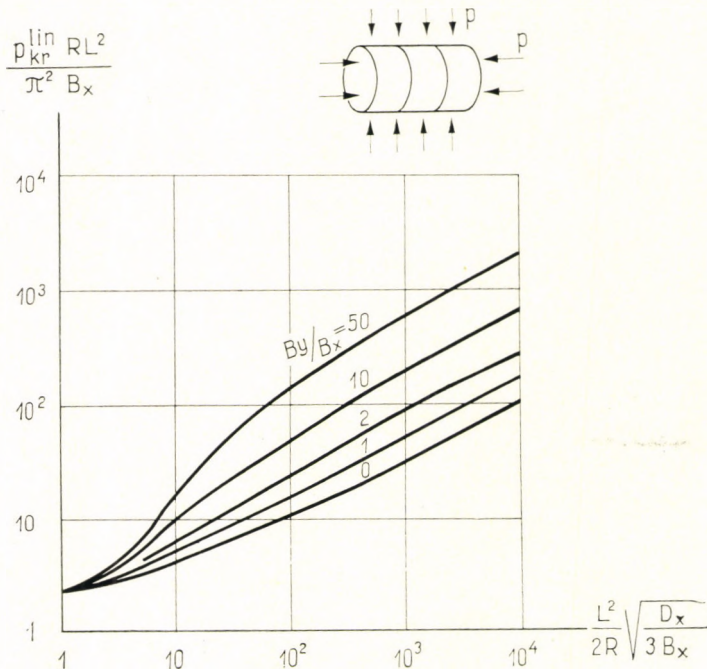
$$p_{kr} = \frac{2\pi^2 B_x}{RL^2} \left[1 + \frac{n^2 L^2}{\pi^2 R^2} \left(1 + \frac{B_y}{B_x} \right) - \frac{6L^4}{R\pi^4} \left(1 + \frac{n^2 L^2}{\pi^2 R^2} \right)^3 \right]. \quad (7.15)$$

A kritikus nyomás értékei a 7.3. ábrán közölt Bodner-féle diagramsor alapján közvetlenül is meghatározhatók.

7.3.5. Az ortotróp henger csavarása

Mivel a csavarás okozta n_{xy} nyíróerő nem szerepel a (7.7) egyenletben, ez nem alkalmas a csavarás okozta kihajlás vizsgálatára. Sőt, még eddig egyáltalán nem találtak olyan kihajlásalakot, melynek felhasználásával a kritikus nyírás egyenlőségi módszerrel pontosan meghatározható volna. Ezért a vizsgálatot különböző felvett horpadásalakokkal, az energiamódszer segítségével végzik el.

SIMITSES [7.24] megállapította az egyes merevségi jellemzők befolyását a kritikus teherre. Azt kapta, hogy B_y -nek mindig, B_{xy} -nak a közepes és rövid hengereknél, B_x -nek pedig a rövid hengereknél van jelentős hatása. Megállapításai szerint D_y és D_{xy} -nak a csavarási kritikus teherre való hatása jelentéktelen.



7.3. ábra. A gyűrűirányban merevített, hidrosztatikus külső nyomással terhelt henger lineáris kritikus terhe

MILLIGAN és GERARD [7.20] meghatározták a közepes hosszúságú csavart ortotrop hég kritikus n_{xy} nyíróerejét. Ez a következő:

$$n_{xy \text{ kr}} = 0,89 Z^{3/4} \frac{\pi^2 B_x}{L^2}, \quad (7.16)$$

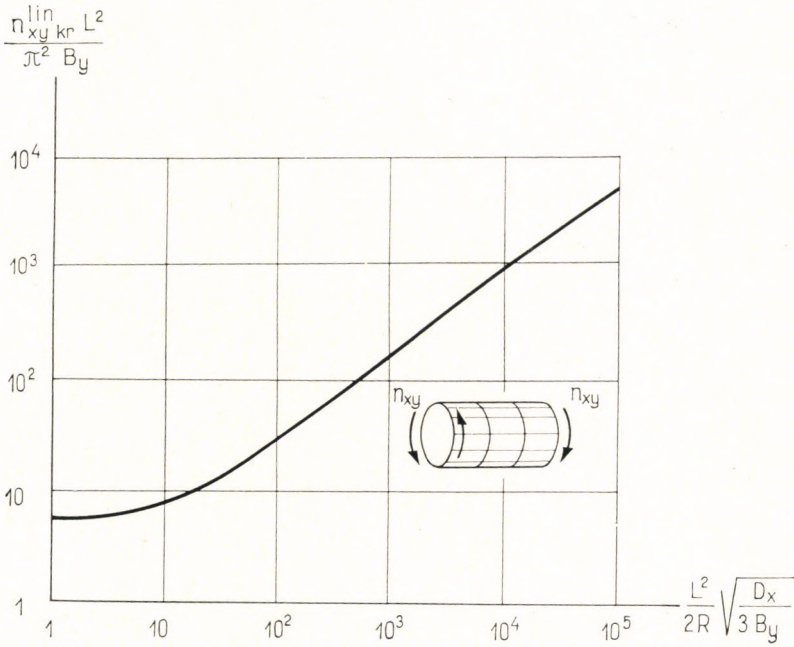
ahol Z_t a következő kifejezésből számítható:

$$Z_t = \frac{D_y L^4}{12 R^2 B_x} \sqrt{\frac{D_y}{D_x} \left(\frac{B_y}{B_x}\right)^{5/6}}. \quad (7.17)$$

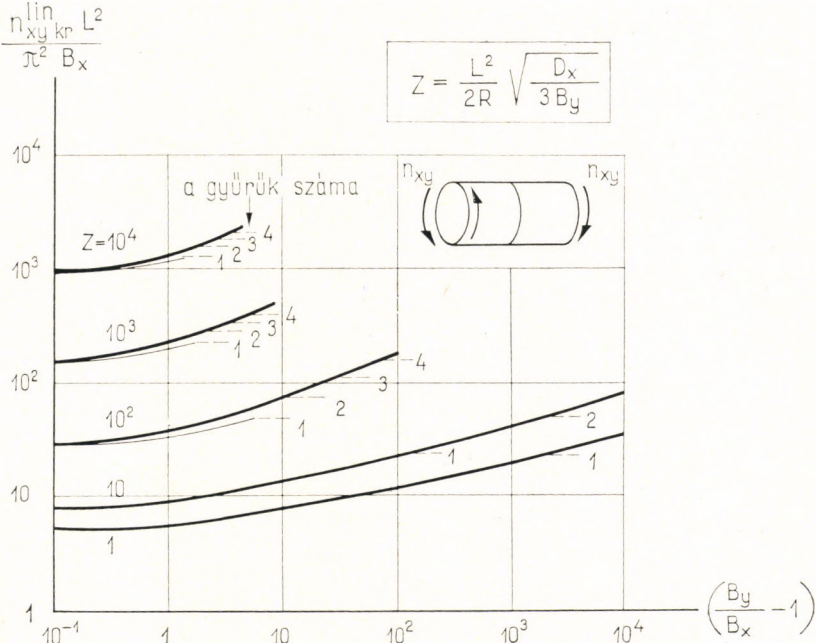
HAYASHI [1.1], [7.11] is meghatározta a közepes hosszúságú és rövid csavart hengerek kritikus terhét. Eredményét diagramban dolgozta fel, melyet a 7.4. ábrán mutatunk be.

A csavart hengereknél a horpadási hullámfelület mindig hosszúkás, mely az axiális iránnyal kisebb szöget zár be, mint a gyűrűiránnyal. A gyűrűirány így sokkal meredekebb szögben metszi a horpadási hullámot, és ezért a gyűrűirányú merevítésnek sokkal erősebb a hatása.

STEIN és társai [1.1], [7.29] a gyűrűszen merevített csavart hengerre vonatkozó megoldásban figyelembe vették azt is, hogy a gyűrűirányú merevítés diszkrét



7.4. ábra. Az ortotróp csavart henger lineáris kritikus nyírőereje



7.5. ábra. A gyűrűirányban bordázott ortotróp csavart henger lineáris kritikus nyírőereje

bordákból áll, és a bordáknak a henger hosszán belüli száma felső korlátot szab a kritikus erőnek, mert a bordák közötti héjlemez külön is behorpadhat. Anyagában ortotróp henger esetében ezt a korlátozást természetesen nem kell figyelembe venni. STEIN eredményeit diagramban dolgozta fel, melyet a 7.5. ábrában mutatunk be. Az ábrán definiált Z paraméter segítségével a kritikus nyíróerő közvetlenül meghatározható.

7.3.6. Az ortotróp hengerre ható különböző teherfajták együttes hatása

Az ortotróp hengerre egyszerre ható különböző teherfajták együttes hatására csak egyes számpéldák megoldásaiból, illetve a kísérleti tapasztalatokból következtethetünk. HOLSTON [7.12] korábban említett eredménye szerint az axiális nyomás és a henger hajlításából származó nyomás kritikus értékei azonosnak vehetők. Mint az izotróp héjknál láttuk, az axiális és a felületi nyomás hatása SEIDE [2.45] alapján biztonságosan közelíthető az

$$\frac{n_x}{n_{xkr}} + \frac{n_y}{n_{ykr}} = 1$$

kifejezéssel.

MAH—ALMROTH—PITNER [7.15] példái azt mutatják, hogy a henger hajlításából származó axiális nyomás és a felületi nyomás hatása az

$$\left(\frac{n_x^{\text{hajlító}}}{n_{xkr}} \right)^2 + \frac{n_y}{n_{ykr}} = 1$$

összefüggéssel vehető figyelembe.

BATDORF [2.3] kimutatta, hogy a nyírás és az axiális nyomás hatása az

$$\left(\frac{n_{xy}}{n_{xykr}} \right)^2 + \frac{n_x}{n_{xkr}} = 1$$

törvényszerűségnek engedelmeskedik.

Végül pedig a belső nyomásra STEIN és társai [7.29], a külső nyomásra pedig SIMITSIS [7.24] mutatták ki, hogy ha a felületi nyomásból származó n_y húzás és nyomás is lehet, akkor a kritikus nyírás és nyomás összefüggése:

$$\left(\frac{n_{xy}}{n_{xykr}} \right)^2 + \frac{n_y}{n_{ykr}} = 1.$$

Összevont vizsgálat nem ismeretes. Logikai úton előállítható egy olyan Dunkerley-féle összefüggés, amely $n_y =$ nyomás esetén az összes felsorolt feltételeknek biztonsággal megfelel. Ez a közelítő általános stabilitási feltétel a következő:

$$\frac{n_x}{n_{xkr}} + \frac{n_y}{n_{ykr}} + \left(\frac{n_{xy}}{n_{xykr}} \right)^2 = 1. \quad (7.18)$$

Amíg a kérdést alaposabban nem tisztázzák, addig a (7.18) közelítő általános stabilitási feltétel alkalmazását ajánljuk.

7.4. Az ortotróp kúp-héjak lineáris kritikus terhe

Az ortotróp kúp-héjakra vonatkozó vizsgálatokat legnagyobbbrészt SINGER és társai [7.2], [7.25], [7.26], [7.27] végezték el.

Megállapításaik szerint az ortotróp kúp-héj ugyanúgy számítható a helyettesítő hengerrel, mint az izotróp héj (1. a 3. fejezetet), de a helyettesítő hengert a kúp-héjnak megfelelő ortotrópiával és merevségi adatokkal a jelen fejezet szerint kell számítani.

7.5. Az ortotróp gömbhéjak lineáris kritikus terhe

Az ortotróp teljes gömbhéjra ható egyenletesen megoszló külső radiális nyomás lineáris kritikus értékét pontos vizsgálat hiányában a paraboloidhéjjal való közelítéssel számíthatjuk. Így a kritikus teher a (7.7) egyenletből határozható meg, az $R_x = R_y = R$, és $n_x = n_y = \frac{pR}{2}$ helyettesítésekkel. A gömbhéjknál a

többszörös szimmetria miatt az x és y irányú merevségi adatok általában meg-egyeznek egymással. Emiatt a legkisebb kritikus terhet az $l_x = l_y$ feltétel adja meg, és így a kritikus teher meghatározásához csak egyszeres szélsőérték-számítás szükséges.

Az előbb említett $l_x = l_y$ esetben a (7.7) egyenletből felírva a kritikus terhet, a következőt kapjuk:

$$p_{kr}^{lin} = \frac{4}{R^2} \sqrt{(B_x + 2B_{xy} + B_y) \left(\frac{1}{D_x} + \frac{2}{D_{xy}} + \frac{1}{D_y} \right)^{-1}}. \quad (7.19)$$

Ha a merevségek nem egyeznek meg a két irányban, és így $l_x \neq l_y$, vagy ha $n_x \neq n_y$, akkor természetesen kétirányú minimumszámítással kell l_x és l_y -t, majd ezekből a p_{kr}^{lin} értékét meghatározni.

7.6. Az ortotróp hiperbolikus paraboloidhéj lineáris kritikus terhe

Az 5.5. ábrának megfelelő hiperbolikus paraboloid nyeregfelület kritikus terhe a (7.7) egyenletből határozható meg. A számításnál figyelembe kell venni, hogy a két főgörbületi sugár és esetleg a két metszeterő is ellenkező előjelű.

Az 5.1. ábrának megfelelő, az egyenes alkotók irányában ortotróp torznégyszöghéj már nem számítható a (7.7) egyenlettel, mert a felületnek csavarodása is van. Ezenkívül ennél a héjtípusnál $n_x = n_y = 0$, és az egyenletesen megoszló terhet csupán az n_{xy} nyíróerő egyensúlyozza. Az n_{xy} pedig nem szerepel az egyenletben. Ezért vissza kell nyúlnunk a (7.3) és (7.4) egyenletekhez. Ezeket a $z_0 = fxy/L_x L_y$ héjfelület és az $n_x = n_y = 0$ és $w_0 = 0$ feltételek figyelembevételével kell megoldanunk.

E differenciálegyenletek megoldása — a kísérletekből és az erőjátékból következően — olyan, hogy a horpadási hullám hossza az egyik irányban a héj teljes szélességére kiterjed, a másik irányban pedig sok félhullám keletkezik (hasonlóan az 5.4. ábrához). Megtartjuk a második irányban a sok félhullámot, de az első irányban közelítően görbületmentes alakváltozást veszünk. Az így elkövetett hiba általában elhanyagolhatóan kicsi, és mindig a biztonságot szolgálja.

Mivel a héj nem a főgörbületi irányokkal, hanem az alkotókkal párhuzamosan ortotróp, ezért a hullámok irányát a főgörbületi iránytól α szöggel el kell forgatni [7.6]. Így a differenciálegyenlet közelítő megoldása:

$$w = W \cdot \sin a (y \cdot \operatorname{tg} \alpha - x).$$

A megoldást a differenciálegyenletbe behelyettesítve, a karakterisztikus egyenlet a következő lesz:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{B_x}{D_y} \right) a^8 + \left(\frac{2B_{xy}}{D_y} + \frac{2B_x}{D_{xy}} \right) a^8 \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{B_x}{D_x} + \frac{4B_{xy}}{D_{xy}} + \frac{B_y}{D_y} \right) a^8 \operatorname{tg}^4 \alpha + \\ & + \left(\frac{2B_{xy}}{D_x} + \frac{2B_y}{D_{xy}} \right) a^8 \operatorname{tg}^6 \alpha + \left(\frac{B_y}{D_x} \right) a^8 \operatorname{tg}^8 \alpha + 4 \frac{f^2}{L_x^2 L_y^2} a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha = \quad (7.20) \\ & = 2n_{xy} \left(\frac{a^8 \operatorname{tg} \alpha}{D_y} + \frac{2a^6 \operatorname{tg}^3 \alpha}{D_{xy}} + \frac{a^6 \operatorname{tg}^5 \alpha}{D_x} \right). \end{aligned}$$

Az n_{xy} kritikus nyíróerőt a minimális értéket adó a és α értékek behelyettesítésével kell a (7.20) egyenletből meghatározni.

A kritikus nyíróerő az 5.3. ábrához hasonlóan nem lehet kisebb, mint a torznégyszöggel azonos alapterületű ortotróp lemez kritikus nyíróereje. Az eltérés az izotróp héjtól az, hogy az ortotróp lemez kritikus nyíróereje többnyire viszonylag magasabb, mint az izotróp lemezé, és így az 5.3. ábrán jelzett lemezhorpadási levágás viszonylag magasabb héjaknál is jelentkezik. Az ortotróp lemez kritikus nyíróereje, ha L_y a rövidebb oldalhossz, SEYDEL szerint [2.40] alapján a következőképp írható fel:

$$n_{xy \text{ kr}} = \frac{\pi^2}{L_y^2} \sqrt[4]{\frac{B_x B_y^3}{L_x^3}} \left[2 + (0,6 + \vartheta_s) \left(2,1 + 2,5 \frac{L_y^2}{L_x^2} \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \right) \right]. \quad (7.21)$$

A (7.20), ill. (7.21) egyenletekből meghatározható legkisebb $n_{x \text{ kr}}$ értékkel a kritikus teher a

$$p_{\text{kr}} = \frac{2f}{L_x L_y} n_{xy \text{ kr}} \quad (7.22)$$

kifejezésből számítható.

7.7. Az ortotróp héjakra vonatkozó nemlineáris és kísérleti vizsgálatok

Az ortotróp héjakra a nemlineáris nagy alakváltozások szakaszán lényegesen kevesebb vizsgálatot végeztek, mint az izotróp héjakra, és e vizsgálatok általában csak a geometriailag tökéletes héjakra vonatkoztak. Ennek oka többértű:

a) először az izotróp héj viselkedését kell alaposan megismerni, és csak ezután lehet ennek tapasztalatai alapján az ortotróp héjat vizsgálni;

b) az ortotróp héj nemlineáris horpadásának elméleti vizsgálata lényegesen bonyolultabb, mint az izotróp héjé;

c) a gyakorlatban az ortotróp héjak zömét kitevő bordás héjakon a kísérleti kritikus teher és a számított lineáris kritikus teher aránya sokkal közelebb áll 1-hez, mint a hasonló alakú izotróp héjaknál. Sok esetben a lineáris kritikus tehernél horpad a héj.

Az elvégzett vizsgálatok zöme az ortotróp hengerre vonatkozik. Ez is érthető, hiszen a gyakorlatban főleg henger alakú ortotróp héjakat használnak (pl. repülőgép, hajó, tengeralattjáró, rakéta), és ezekhez képest csak viszonylag kevés egyéb felületet alkalmaznak a magasépítésben.

7.7.1. A hengerre vonatkozó nemlineáris és kísérleti vizsgálatok

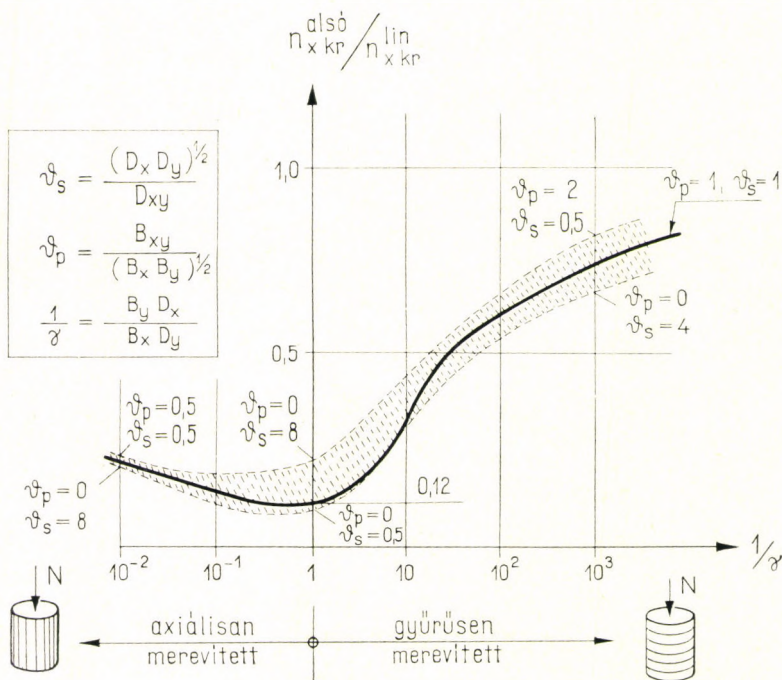
Az axiálisan nyomott, geometriailag tökéletes henger kritikuson túli viselkedésére egyszerűsített nemlineáris elmélettel először MARCH [7.16] adott megoldást. Ezt bővített horpadásalak-felvétellel SCHNELL és társai [7.22], [7.30] továbbfejlesztették, de általános megoldást nem nyújtottak. Egy gyűrűsen merevített és egy axiálisan merevített számpéldán mutatták be, hogy az axiálisan merevített henger hálós horpadásához lényegesen kisebb lineáris kritikus teher tartozik, mint a gyűrűs horpadáshoz, és hogy a teherbírás az izotróp hengerekhez hasonlóan lecsökken a lineáris kritikus tehernek kb. a harmadát kitevő, rombuszos horpadásalakokkal járó $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}$ -ra. Gyűrűs merevítésű számpéldájuknak a hálós és gyűrűs horpadásalakhoz tartozó lineáris kritikus terhe majdnem megegyezett egymással, és $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}$ értéke az $n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ -nak mintegy háromnegyedét tette ki. Az $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}$ -hoz rombusz alakú horpadásalak tartozik. Axiális merevítésű hengernél a rombuszalak alkotóirányban hosszabb, gyűrűs merevítésű hengernél pedig rövidebb, mint gyűrűirányban. A rombusz alakú horpadásalakhoz magasabb lineáris kritikus teher tartozik, mint a hálós horpadásalakhoz. Az axiálisan nyomott ortotróp hengerhéj horpadása tehát a következőképpen megy végbe:

A geometriailag tökéletes ortotróp hengerek az $n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ elérésekor hálósan, egyes gyűrűsen merevített hengerek gyűrűsen kezdenek horpadni. Viszonylag kis amplitúdójú horpadásnál a horpadásalak már átugrik a rombusz alakú horpadásalakba, amelyhez — az izotróp hengerekhez hasonlóan — eső teherbírás tartozik.

Az idézett vizsgálatokból tehát kitűnt, hogy az axiálisan nyomott ortotróp henger egyes esetekben hasonlóan viselkedik, mint az izotróp, más esetekben a viselkedés annál lényegesen kedvezőbb.

Ezen eredmények nyomán ALMROTH [7.1] kiterjedt számításokat végzett a $0 \leq \vartheta_p \leq 2, 0,5 \leq \vartheta_s \leq 8,0$ paraméterű, axiálisan nyomott, geometriailag töké-

letes ortotróp hengerek alsó kritikus terhének megállapítására. A hosszú hengerekre végzett vizsgálatának eredményei megmutatták, hogy az $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}/n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ arány csak kevésbé függ a ϑ_s és ϑ_p paramétereiktől, de jelentősen változik a henger gyűrűsen vagy axiálisan merevített voltát meghatározó γ tényező változásával. Ez az arány legkisebb az izotróp hengerénél, kismértékben növekszik, ha axiálisan merevítjük a hengert és nagymértékben növekszik, ha gyűrűirányban merevít-

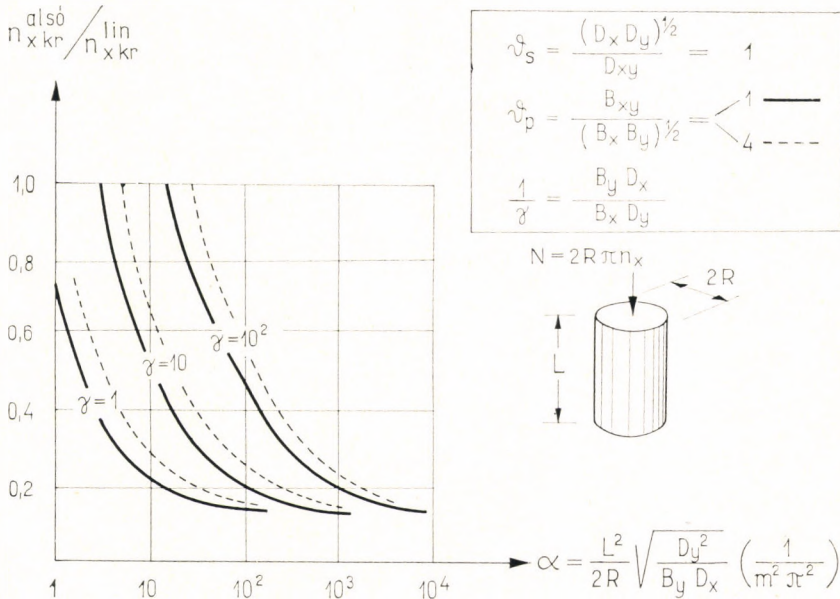


7.6. ábra. A gyűrűirányú, ill. alkotóirányú merevítés hatása az alkotóirányban nyomott hosszú henger alsó kritikus terhére

jük. (Meg kell jegyezni, hogy ha nem az n_x értékeket, hanem a σ_x értékeket hasonlítanánk össze, akkor az axiálisan bordázott hengerekénél a vizsgált arány magasabb volna, mert az axiális bordázat maga is vesz fel nyomófeszültséget.) Vizsgálatainak eredményeit egy sereg diagramban dolgozta fel. E diagramokból megszerkesztettük a 7.6. ábrát, melynél a vizsgált ϑ_s és ϑ_p tartomány pontozott területtel van jelölve. A pontozott terület szélét jelző szaggatott vonalat úgy kaptuk, hogy azokat a ϑ_s , ill. ϑ_p értékeket választottuk, amelyek szélső értéket adtak. A pontozott területen belül vastag vonallal húztuk ki a $\vartheta_s = \vartheta_p = 1$ paraméterekhez tartozó $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}/n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ értéket. A vastag görbének az ordinátatengellyel való metszéspontja az izotróp hengernek felel meg.

ALMROTHnak rövid hengerekre vonatkozó eredményei szerint az axiális merevítés hatása is előtérbe lép, és az $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}/n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ aránya a henger hosszának csökkenésével is erősen növekedhet. Eredményeit a legjellemzőbb esetekre a 7.7. ábrában mutatjuk be.

SCHNELL és társainak vizsgálatai azt is kimutatták [7.30], hogy a henger belső nyomása nemcsak a lineáris kritikus teher nagyságát emelheti a gyűrűs alakú horpdásnak megfelelő szintre, hanem az $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}/n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ arányt is megnöveli. Ez a növelés természetesen ott erősebb, ahol eredetileg alacsony az $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}$, tehát az axiálisan merevített hengernél.



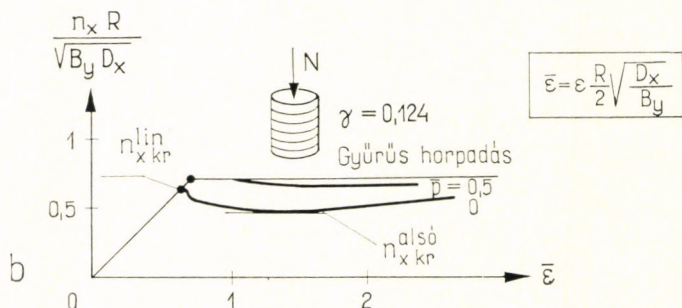
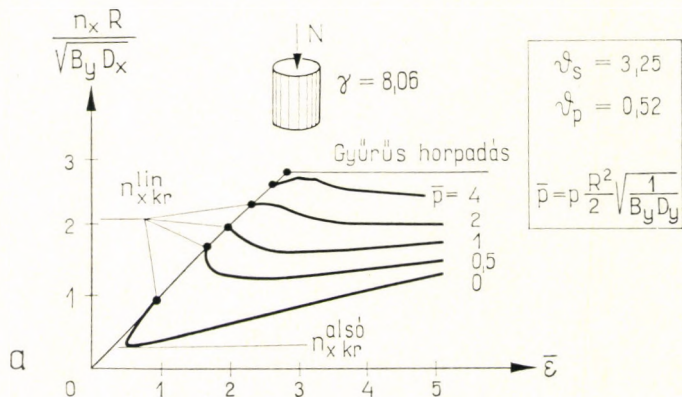
7.7. ábra. Az alkotóirányban merevített és ugyanebben az irányban nyomott ortotróp henger alsó kritikus terhe

[7.50] két kidolgozott számpéldája alapján a 7.8a., ill. 7.8b. ábrán szemléltetésképpen bemutatjuk egy axiálisan és egy gyűrűsen merevített, geometriailag tökéletes henger belső nyomás okozta teherbírás-változását.

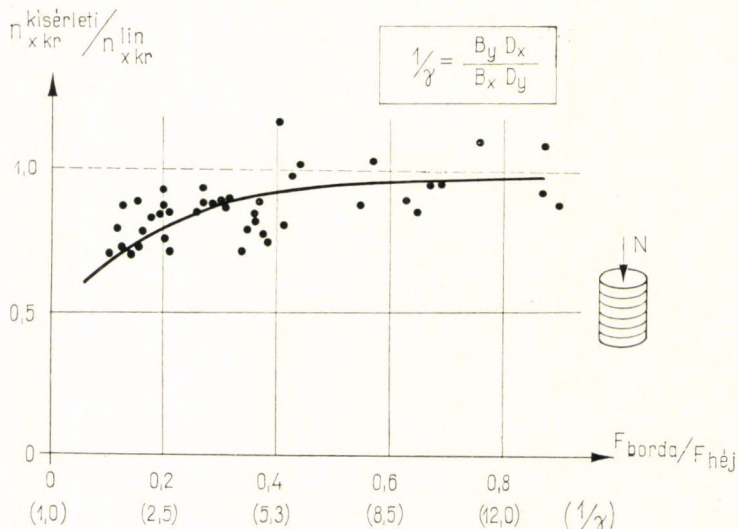
A kísérleti eredmények [7.9], [7.23], [7.28] azt mutatták, hogy az axiális bordákkal merevített hengerek érzékenyebbek a kezdeti tökéletlenségekre, mint a gyűrűs bordákkal merevítettek. A gyűrűsen merevített héjak közül a gyenge merevítésűek az érzékenyebbek. Az anyagukban ortotróp héjak [7.23] érzékenyebbek mutatkoztak, mint a bordázott héjak.

A 7.9. ábrán bemutatjuk egy gyűrűsen bordázott axiálisan nyomott kísérlet-sorozat [7.28] eredményét. A kísérleti értékeket a borda és a héjterület arányának függvényében raktuk fel, és zárójelben feltüntettük az egyes értékekhez kiszámított $1/\gamma$ paraméter nagyságát is. A kísérleti értékek növekvő bordamerevségnél megközelítik a lineáris kritikus terhet. Ennek oka a következőképp magyarázható:

Ismeretes az axiálisan nyomott izotróp hengerek kísérleti vizsgálataiból (2.3. ábra), hogy a felső kritikus terhet jelentő kísérleti kritikus teher a növekvő



7.8. ábra. A p belső nyomás hatása az axiálisan nyomott ortotróp henger horpadására: a – példa axiálisan merevített hengerre, b – példa gyűrűsen merevített hengerre



7.9. ábra. Gyűrűsen merevített, axiálisan nyomott hengerkísérleti eredmények a borda és a héj keresztmetszeti területei hányadosának függvényében felhordva

R/t aránnyal csökken. E csökkenés a kísérleti értékek középértékeként jól közelíthető az

$$n_{x\text{ kr}}^{\text{felső}} \approx \frac{n_{x\text{ kr}}^{\text{lin}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{1000} \frac{R}{t}} \quad (7.23)$$

kifejezéssel. A bordás hengernél a bordák hatását egy közelítő izotróp „helyettesítő” \bar{t} vastagsággal vehetjük számításba. Ez a helyettesítő vastagság az

$$\frac{E\bar{t}^3}{12} E\bar{t} = \sqrt{B_x B_y} \cdot \sqrt{D_x D_y} \quad (7.24)$$

kifejezésből számítható. A bordázat megnöveli a t vastagságot \bar{t} -re és így a bordás héj R/\bar{t} értéke alacsony lesz. Ha ezt az értéket helyettesítjük a (7.23) képletbe, akkor a lineáris kritikus terhet megközelítő felső, azaz kísérleti kritikus terhet kapunk.

A (7.24) képletből meghatározott \bar{t} értéket betéve (7.23)-ba, a kiszámított értékeket vastag vonallal berajzoltuk a 7.9. ábra kísérleti eredményeket jelző pontjai közé. A berajzolt görbe gyakorlatilag a kísérleti eredmények középértékét adja, így a vázolt hatást szemléletesen mutatja.

A gyűrűsen merevített henger magasabb kritikus terhét egyrészt az a körülmény magyarázza, hogy ennél a héjtípusnál a gyűrűirányú bordák csak merevítésre vannak felhasználva, az axiális bordák viszont — axiálisan nyomott hengernél — maguk is nyomottak, és így kihajlásra hajlamosak. Az axiális bordák merevségének egy része a saját kihajlásuk megakadályozására fordítódik, és csak a maradék rész merevíti a héjat. Másrészt a gyűrűirányú horpadási hullámhossz a geometriai adottságok miatt legfeljebb a terület egynegyede lehet, az axiális irányú hullámhossznak viszont geometriai szempontból csak a henger hossza szab határt. Ez a körülmény hosszú hengereknél lényegesen kedvezőbb tulajdonságokat biztosít a gyűrűirányú bordázatnak.

Harmadszorra pedig azt a körülményt kell megemlítenünk, hogy ÁRBÓCZ és társai [7.28] rendkívül szabatos mérései szerint az azonos technológiával gyártott héjmodellek közül az axiális bordázatúak jóval nagyobb kezdeti hullámossággal rendelkeztek, mint a gyűrűirányban bordázottak. Ez a körülmény mutatja, hogy milyen nagy befolyása lehet a gyártástechnológiának a kezdeti hullámosságok mértékére és ezen keresztül a tényleges kritikus terhekre.

Összefoglalva az ortotróp hengerre vonatkozó eredményeket, a következőket állapíthatjuk meg:

Az ortotróp henger valóságos kritikus terhe a kísérletek tanúsága szerint sokkal közelebb van a lineáris kritikus terhez, mint az izotróp hengéré. Ezen belül is a gyűrűirányú merevítés hatása nagyobb.

E körülményeket az ortotróp héjnak a következő tulajdonságaival magyarázhatjuk:

a) Az ortotróp héj alsó kritikus terhe viszonylagosan magasabb, mint az izotróp héjé. Ezen belül is magasabb a gyűrűsen merevített héjé. Így az izotróp héj $n_{x\text{ kr}}^{\text{alsó}}/n_{x\text{ kr}}^{\text{lin}} \approx 0,10 \sim 0,15$ értéke helyett az ortotróp héjnél $0,25 \sim 0,70$ értéket kapunk.

b) A görbületi sugár és az egyenértékű (izotróp) héjvastagság aránya a bordás héjaknál jóval kisebb, mint az izotróp héjaknál. A kisebb R/t arányhoz pedig magasabb $n_{x\text{kr}}^{\text{felső}}$ tartozik. Így az izotróp héjakra vonatkozó $n_{x\text{kr}}^{\text{felső}}/n_{x\text{kr}}^{\text{lin}} \approx 0,3 \sim 0,5$ arány helyett a bordás héjakra $0,7 \sim 0,9$ értékek adódnak.

c) A kis csavarási merevségű bordázattal bíró bordás héjaknál B_{xy} értéke viszonylag alacsony. A lineáris kritikus teherben B_{xy} -nak ugyanolyan hatása van, mint B_x és B_y -nak együttvéve, mert a horpadási alak négyszög. Az alsó kritikus teherhez a körhöz vagy ellipszishez közelebb álló rombusz alakú horpadás tartozik, és ennél a csavarási merevség hatása lényegesen kisebb. Emiatt tovább csökken az $n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ és $n_{x\text{kr}}^{\text{alsó}}$ közötti különbség.

d) Rövid, axiális bordákkal merevített héjmodelleknél a nyomólapnál történő lapratámaszkodás részleges befogó hatása a nagyobb \bar{t} egyenértékű vastagság miatt nagyobb, mint a bordázatlan vagy gyűrűsen bordázott héjaknál.

Így az $n_{x\text{kr}}^{\text{kísérleti}}/n_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ arány az izotróp héjakra kapott $0,15 \sim 0,60$ értékkel szemben a bordázott ortotróp héjak kísérleteinél végül is $0,7 \sim 1,1$ körüli értékre növekszik.

A gyűrűirányban nyomott [7.23] és a csavart [7.20] ortotróp hengerekre vonatkozó kísérleti eredmények azt mutatták, hogy ilyen igénybevételekre a henger a lineáris kritikus tehernél horpad. Ez természetesen várható is volt, hiszen az izotróp henger is lényegesen kevésbé volt érzékeny a kezdeti hullámosságokra e két-fajta igénybevétel esetén, mint axiális nyomásnál. Az ortotróp henger axiális nyomásánál $a-d$ pontok alatt ismertetett hatások nagyrészt fennállnak a gyűrűirányú nyomásnál és a csavarásnál is, ezért az ortotróp henger általában még kevésbé érzékeny a tökéletlenségekre, mint az izotróp. Ezért a felső kritikus terhe is magasabb, és így a $p_{x\text{kr}}^{\text{kísérleti}}/p_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ arány megközelíti, sőt el is érheti az egységet, és e körül ingadozhat.

7.7.2. Az egyéb héjakra vonatkozó nemlineáris és kísérleti eredmények

Az ortotróp kúphéjakra vonatkozó nemlineáris [7.13] és kísérleti vizsgálatok [7.25], [7.26], [7.27] azt mutatták, hogy az egyenértékű hengerrel történő helyettesítés nemcsak a lineáris kritikus teher meghatározására, hanem a kritikuson túli viselkedés vizsgálatára is alkalmas. Így az ortotróp kúphéj nemlineáris viselkedése a 7.6.1. pontban ismertetett hengertulajdonságok figyelembevételével a 4. fejezetben mondottak szerint közelíthető meg.

Az ortotróp gömbhéjakra nem találhatóak egzakt nemlineáris vizsgálatok. Különböző és kísérleteken alapuló félempirikus vizsgálatok ismeretesek [7.4], [7.5], [7.7], [7.18].

Így pl. BUSHNELL [7.4] a kezdeti hullámossággal módosítja a héj geometriáját, és az ilyen héjon sajátérték-problémaként határozza meg a kritikus terhet. Homogén izotróp héjra készített, ilyen alapon számított példái alapján megszerkeszthető a kritikus tehernek a kezdeti hullámosságtól függő görbéje. Ez a görbe konform az izotróp héj felső kritikus terhének a kezdeti hullámosságtól függő csökkenését ábrázoló görbével: $w_0/t = 0,25$ -nél $0,55$, $w_0/t = 0,50$ -nél pedig $0,35$ $p_{x\text{kr}}^{\text{lin}}$ értéket kapunk kritikus teherként (vö. pl. a 4.6. ábrával). Az így megszerkesztett görbét tehát az ortotróp gömbhéj felső kritikus terhének görbéjeként fogadhatjuk el. A [7.18] szerinti bordás kísérleti gömbsüveghéjak R/t értékei 50 körül mozogtak.

Ennek megfelelően az eddigi fejtegetésekkel összhangban kritikus terhük nem tért el 10%-nál jobban a lineáris kritikus tehertől. A horpadási alak is megfelelt a lineáris elméletnek.

Az ortotróp hiperbolikus paraboloidhéjakat általában különböző hullámos lemezek torzításával állítják elő. Nemlineáris vizsgálatot az ilyen héjakra nem végeztek, de nem is igen lenne értelme, mert a kísérletek [7.8], [7.17] igazolták, hogy az izotróp hiperbolikus paraboloidhéjhoz hasonlóan az ortotróp héj is emelkedő kritikuson túli teherbírással rendelkezik. A [7.17] kísérletek a héjhorpadás, a [7.8] kísérletek pedig a lemezhorpadás tartományába estek. A kritikus teher 10%-on belül egyezett a 7.5. pont alapján meghatározható lineáris kritikus teherrel.

Mint az előzőekből látható, az ortotróp héjak kutatásának témakörét még távolról sem mértették ki. Sok kutatnivaló van még a nemlineáris horpadás és különösen a felső kritikus terhek meghatározása területén.

8. Szendvics-, bordás, rácsos és hullámos héjak stabilitása

E négy héjfajtának közös tulajdonsága, hogy nemcsak az egész héj általános horpadása, hanem valamely alkotóelem helyi kihajlása is tönkreteszi a szerkezetet. E két eset kritikus teherintenzitása általában nem esik egybe, és ilyenkor gyakorlatilag nem befolyásolják egymást. Ha a szerkezet arányai olyanok, hogy az általános horpadás és a helyi kihajlás nagyjából ugyanannál a teherértéknél következik be, akkor a stabilitásvesztés két formája úgy hat egymásra, hogy csökken a kritikus teher. E csökkenés 10–15% körülire becsülhető, de egyes esetekben ennél nagyobb csökkenés is lehetséges.

Az egész héj általános horpadása szempontjából e négy héjfajta a 7. fejezetben leírt ortotróp héjnak, speciális esetekben pedig izotróp héjnak tekinthető, és így a 7. fejezet szerint számítható.

A következőkben sorra vesszük a szendvics-, bordás, rácsos és hullámos héjakat. Amelyiknél szükséges, ott megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett tekinthetők az egész héj általános horpadása szempontjából homogén ortotróp héjnak. Megadjuk e héjak merevségi jellemzőinek számításához szükséges adatokat. Ezenkívül tárgyalni fogjuk a helyi kihajlásvizsgálat szempontjait is.

8.1. Szendvicshéjak

Szendvicsszerkezetnek nevezzük az olyan háromrétegű szerkezeteket, amelyeknél két nyúlásra merevebb, viszonylag vékony fedőréteg egy, a nyúlási alakváltozás szempontjából lágy, a fedőrétegeknél lényegesen vastagabb nyírt gerincet, az úgynevezett bélést zár közre.

A fedőréteg többnyire folytonos lemez, de lehet rácsfelület vagy bordázat is (8.3, ill. 8.4 pontok). A bélés könnyű, homogénnek tekinthető, esetleg szivacszerű anyagokból (pl. balsafa vagy különböző műanyaghabok), alakítható ki, de kiképezhető lemezes-cellás szerkezetként is. Ezekből a két legjellegzetesebbet, a méhsejt-bélést és a dobozos bélést mutatjuk be a 8.1.1. ábrán.

A bélést és a fedőrétegeket természetesen úgy kell egymáshoz kapcsolni, hogy a hajlításból és horpadásból származó nyíróerők a kapcsolatot ne tegyék tönkre a horpadás bekövetkezése előtt.

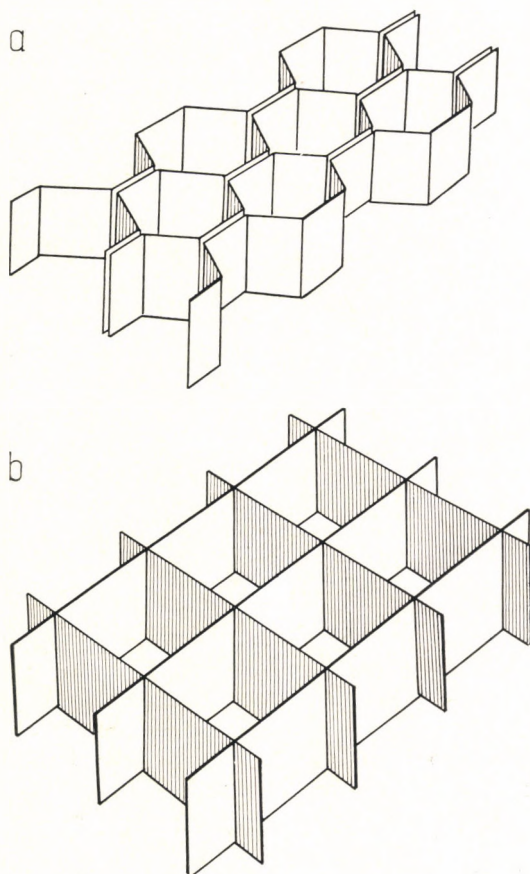
A szendvicsszerkezeteket rendszerint úgy számítják, hogy a fedőrétegnek csak a nyúlási, a bélésnek pedig csak a nyírási merevségét veszik tekintetbe. Ennek

megfelelően a szendvicselem hajlítási és nyúlási merevségi jellemzői a következőképpen írhatók fel:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{E_f t h^2}{2}, \\ D &= 2E_f t. \end{aligned} \right\} (8.1.1)$$

Itt E_f , ill. t a fedőréteg rugalmassági tényezője, ill. vastagsága, h pedig a teljes szendvicselem szerkezeti magassága, azaz a fedőrétegek középfelületei közötti távolság.

A szendvicshéjnak a lágy gerinc miatti nyírási alakváltozása a kritikus terhet lényegesen lecsökkentheti, és ezért ez a „szendvicshatás” általában már nem hanya-



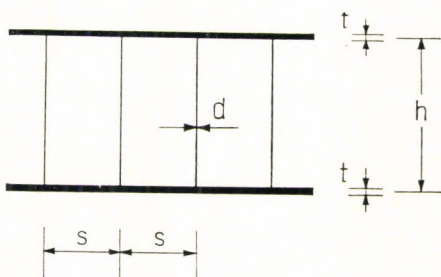
8.1.1. ábra. Cellaszerkezetű bélések. *a* — méhsejtbélés, *b* — dobozos bélés

golható el, mint ahogy azt a homogén héjaknál tettük. A nyírási alakváltozás, azaz a „szendvicshatás” a

$$\varrho = \frac{1}{G_c h} \quad (8.1.2)$$

tényezővel jellemezhető. Itt G_c a bélés nyírási alakváltozási tényezője. A 8.1.1b. ábrán bemutatott dobozos bélés esetén a 8.1.2. ábra adataival a helyettesítő nyírási alakváltozási tényező a

$$G_{\text{helyettesítő}} = G_c \frac{d}{s} \quad (8.1.3)$$



8.1.2. ábra. Cellaszerkezetű béléssel készült szendvicselem keresztmetszete

képletből számítható. Ha a bélés a 8.1.1a. ábrán bemutatott „méhsejt” szerkezetű, akkor a $G_{\text{helyettesítő}}$ (8.1.3) képlet szerinti értékét a méhsejt átlója és kiterített félkerülete hányadosával mint szorzótényezővel kell csökkenteni.

A szendvicsszerkezet mind a fedőréteg, mind a bélés szempontjából lehet izotrop vagy ortotrop. Az ortotrop szendvicshéjak ismertetése igen terjedelmes lenne, és ezért a jelen fejezetben csak az izotrop szendvicshéjakat

tárgyaljuk. Pontosabb számítás hiányában az ortotrop fedőrétegű szendvicshéjak közelítően a 7. fejezet alapján, az ortotrop bélésű héjak pedig a

$$\varrho \approx \frac{1}{2} (\varrho_x + \varrho_y) \quad (8.1.4)$$

közeliítő összefüggéssel vizsgálhatók. Itt ϱ_x , ill. ϱ_y az x , ill. y irányban meghatározható ϱ tényező. A [8.1.1], [8.1.5], [2.13] irodalomban pontosabb eljárás is található. A szendvicshéjak elméletének jó összefoglalása és széles körű irodalomjegyzéke található HABIP ismertetésében [8.1.2].

8.1.1. Az általános horpadás

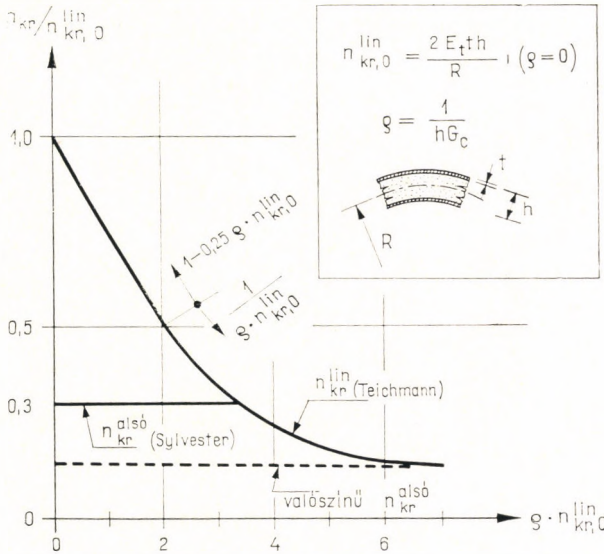
A szendvicshéj horpadási viselkedése abban különbözik a „tömör” héjakétól, hogy a bélésnek a hajlítási nyírás okozta alakváltozása, azaz a „szendvicshatás” a héj kritikus terhét számottevően csökkenti.

Az axiálisan nyomott szendvicshengerhéj lineáris kritikus terhét először TEICHMANN és társai határozták meg [8.1.7]. Kísérleteik kimutatták, hogy nyírásra látgy ($\varrho \cdot n_{\text{kr},0}^{\text{lin}} > 4$) bélés esetén a kísérleti eredmények összhangban vannak a lineáris elmélettel, és így $\varrho \cdot n_{\text{kr},0}^{\text{lin}} > 4$ esetén a lineáris elmélet alkalmazható. A nyírásra merev ($\varrho \cdot n_{\text{kr},0}^{\text{lin}} < 1$) bélésű héjakkal végzett kísérletek azonban lényegesen alacsonyabb kritikus teherértékeket adtak, mint a lineáris elmélet. Itt $n_{\text{kr},0}^{\text{lin}}$ -nak neveztük a „szendvicshatás” nélkül számítható axiális irányú lineáris kritikus erőt.

A Kármán—Tsien-féle nemlineáris elmélettel először MARCH és KUENZI [8.1.4] határozták meg a hengerháj alsó kritikus terhét, majd a Kempner-féle módon pontosítva a számítást SYLVESTER [8.1.6] ennek mintegy háromnegyedét kapta.

Az axiálisan nyomott szendvics hengerháj $q \cdot n_{kr,0}^{\text{lin}}$ függvényében felrajzolt kritikus terheit a 8.1.3. ábrán mutatjuk be.

SYLVESTER eredményeit értékelve meg kell gondolnunk, hogy az általa meghatározott $n_{kr}^{\text{alsó}}$ teher egyenesen egyrészt elmszi a lineáris kritikus teher görbáját, másrészt a homogén héjnak megfelelő $q = 0$ esetben $n_{kr}^{\text{alsó}}/n_{kr}^{\text{lin}} = 0.3$ értéket ad.



8.1.3. ábra. Axiálisan nyomott szendvicsszerkezetű hengerháj kritikus terhe

Ezzel szemben ismeretes, hogy az újabb, pontosabb számítások a homogén héjra a korábbi 0,3 körüli értékek helyett a 0,108 értéket adták [2.1]. Így a pontosabb számítás az alsó kritikus teher vonalát várhatóan lejjebb tolná, és a logikus elképzelésnek megfelelően alulról simulna a lineáris kritikus teher hiperbolájához. Ezt a valószínű vonalat a 8.1.3. ábrán szaggatott vonallal tüntettük fel.

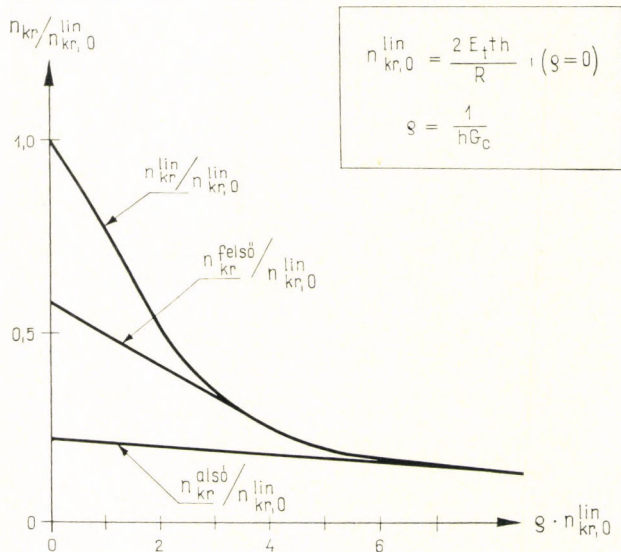
A szendvics gömbháj radiális nyomása esetére YAO [8.1.8] terjesztette ki a vizsgálatokat. Lényegében azt kapta, hogy ebben az esetben is a 8.1.3. ábra diagramja használható.

Mind a gömbsüveghéjakkal végzett kísérletek [8.1.3], mind a PLANTEMA [8.1.5] által idézett hengerkísérletek arra mutatnak, hogy a kezdeti hullámossággal bíró hég $n_{kr}^{\text{felső}}$ értékét jelentő kísérleti kritikus teher és a lineáris kritikus teher viszonya a homogén héjakhoz hasonlóan az R/h aránytól függ.

A tervezéshez a kezdeti hullámossággal bíró hég felső kritikus terhének $n_{kr}^{\text{felső}}$ értékére volna szükség. Ennek meghatározására azonban nem végeztek elméleti vizsgálatokat. A kísérletek [8.1.1], [8.1.5] azt mutatták, hogy a héjnak a kezdeti

hullámossággal szembeni érzékenysége ρ növekedésével csökken. A $\rho = 0$ esetben természetesen a homogén héjak eredményeivel határozhatjuk meg a felső kritikus terhet.

A gyakorlatban úgy járhatunk el, hogy a $\rho = 0$ esetben meghatározzuk a kezdeti hullámossággal bíró homogén héj $n_{kr}^{felső}$ kritikus terhét, majd ezt egy érintő egyenessel kötjük össze a szendvics-héj lineáris kritikus terhének $\rho \cdot n_{kr,0}^{lin}$ függvényében



8.1.4. ábra. Az axiálisan nyomott szendvics-henger $n_{kr}^{felső}$ értékének közelítő meghatározása

felrakott görbéjével. Így $n_{kr}^{felső}$ -re egy olyan közelítő egyenest nyerünk, amely a kísérleteknek megfelelően a nagy ρ értékeknél az n_{kr}^{lin} -hez simul, $\rho = 0$ esetben a megfelelő homogén héj értékeiből indul ki. Ez az egyenes zérus értékű kezdeti hullámosságnál a lineáris kritikus tehernek megfelelő értékből indul ki, legmélyebb helyzetéül pedig a valószínű alsó kritikus teher ($n_{kr}^{alsó}$) egyenesét vehetjük, amelyet a 8.1.3. ábrán szaggatva jelöltünk. A felső kritikus teher ($n_{kr}^{felső}$) egyenesének ily módon történő közelítő meghatározását a 8.1.4. ábrán mutatjuk be.

A csavart henger, illetve a felületi nyomással terhelt, gyűrűirányban nyomott henger eseteivel itt nem foglalkozunk, hanem utalunk PLANTEMA könyvére [8.1.5], amely ezeket a kérdéseket részletesen tárgyalja.

8.1.2. A helyi kihajlás

A helyi kihajlásnak többféle formája fordulhat elő.

A bélés rugalmasan támasztja meg a fedőréteget és ezért a fedőréteg kihajlása — melyet fodrosodásnak nevezünk — mint egy rugalmasan ágyazott lemez horpadása következik be.

A fedőlemez σ_{kr}^f kritikus feszültsége $\nu_c = 0,3$ esetben a $\frac{4t}{h} \sqrt{\frac{E_f}{E_c}} \leq 1$ határig a

$$\sigma_{kr}^f = \beta_1 \sqrt[3]{E_f E_c^2}. \quad (8.1.5)$$

képletből számítható [8.1.1], ahol $\beta_1 = 0,57$. Itt ν_c a bélés harántkontrakciós együtthatója, E_f , ill. E_c pedig a fedőréteg, ill. a bélés rugalmassági tényezője.

Egy másik helyi tönkremeneteli forma a kezdeti hullámossággal bíró fedőlemeznek a bélésről való leválása, és így nagyobb kihajlási hullámhosszal bekövetkező tönkremenetele. Az ehhez tartozó kritikus fedőlemezfeszültséget [8.1.1] szerint a

$$\sigma_{kr} = \beta_2 \sqrt[3]{E_f E_c^2} \quad (8.1.6)$$

képletből számíthatjuk, melyben β_2 a [8.1.1]-ben szereplő adathalmazt közelítő interpolációs formulával a következőképpen adható meg:

$$\beta_2 \approx \frac{1}{1,33 + 25 \frac{w_0}{h} \frac{E_c}{\sigma_{tap}}} \quad (8.1.7)$$

Itt w_0 a fedőlemez kezdeti hullámosságának maximális amplitudója, σ_{tap} pedig a fedőlemez és a bélés közötti tapadószilárdság.

Vannak olyan szendvicsszerkezetek, amelyeknél a helyi tönkremeneteli harmadik formája a lokális kihajlás.

A bordás-dobozos, illetve a méhsejt vagy hullámlemez gerinccel készített szendvicshéj lokális kihajlása a fedőlemez elemeinek mint nyomott lemezeknek, illetve a bélés elemeinek mint nyírt lemezeknek a horpadásával következik be. A vizsgálat is az ezeknek megfelelő módszerekkel történhet.

A bordáshéjknál (8.2. pont) elemzettek szerint biztosan elkerülhetjük a lokális kihajlást, ha az ehhez tartozó kritikus teher nagyobb, mint a szendvicshéj általános kihajlásához tartozó kritikus teher kétszerese.

A rácsos bélésű szendvicshéj bélésének helyi kihajlását a rácsrudak kihajlása jelenti. Ha a számításnál a rácsrudak kihajlási hosszát a csomópontok közötti távolság $\sqrt{2}$ -szeresére vesszük fel, akkor egyedi kritikus terhük kétszerese lesz a héj általános kritikus terhének, és ezáltal biztosan elkerülhetjük a lokális kihajlást.

A szendvicshéjak helyi kihajlásának még igen sok részletkérdése van, melyekre itt nem tudunk kitérni. Ezek jó ismertetése a tervezéshez szükséges diagramokkal együtt megtalálható [8.1.1]-ben.

8.2. Bordás héjak

A bordás héjak „helyi” instabilitás-problémája: a bordák közti héjlemez horpadása. Először ezt vizsgáljuk, mert ebből következik a bordázás szükséges sűrűsége is. Ezután térünk rá a héjat egészében helyettesítő folytonos héj meghatározásának problémáira, azaz a bordákkal hajlításra együttműködő lemezszelességre, a

lemez egyik oldalán elhelyezett (külpontos) bordázással kapcsolatos problémákra és a harántkontrakciós tényezőre. A fenti kérdések tisztázása után állapíthatók meg az egyenértékű ortotrop héj merevségi állandói és végezhető el az általános horpadásszámítás.

E fejezetrészben t magának a bordák nélküli héjlemeznek a vastagságát jelöli.

8.2.1. A bordák közötti héjmezők horpadása és a bordázás szükséges sűrűsége

A bordázással nagymértékben megnövelhetjük az egész héjszerkezet kritikus terhet. Ha azonban a bordák távolsága nagyobb, mint a bordázatlan héjon szabadon kialakuló horpadási hullám méretei, akkor a bordák közötti héjmező ugyanakkora kritikus feszültségnél horpad, mint a bordázatlan héj. Ezzel kapcsolatban két utat követhetünk. Az egyik lehetőség az, hogy megengedjük a bordák közötti héjlemezek behorpadását, de gondoskodunk arról, hogy a bordák (a behorpadt lemez velük együttműködő szélességével együtt) felvegyék a teljes terhet. Ezt az elvet a repülőgépipítésben szokták követni.

A magasépítésben azonban általában nem tartjuk kívánatosnak a bordák közötti héjmezők behorpadását a használati teher alatt. Ennek az alábbi következményei vannak: ha a bordák távolsága nagyobb vagy egyenlő, mint a merevítetlen héj szabadon kialakuló horpadási félhullámhossza, akkor a bordák csak annyiban növelik a teherbírást, amennyiben keresztmetszetük maga is felveszi a héjra ható teher egy részét. Ekkor azonban gazdaságatlanabb lesz a szerkezet, mintha a bordák anyagát arra használnánk fel, hogy megnöveljük vele a héj vastagságát. Ez utóbbi esetben ugyanis nemcsak annyival nő a héj teherbírása, amennyivel több anyagot tettünk bele, hanem a nagyobb vastagság következtében nagyobb lesz a kritikus feszültség is. Így ilyen ritka bordázatnak nincs értelme. Mindezek miatt általában célszerű a bordázást sűrűbbre választani, mint a merevítetlen héj horpadási félhullámjának méretei. A bordatávolság megválasztásához tehát egyrészt ismernünk kell a merevítetlen héj horpadási alakjának méreteit, másrészt pedig azt is tudnunk kell, hogy mennyivel nő meg az ennél sűrűbben bordázott és a bordáknál megtámasztottnak képzelt héjmező kritikus feszültsége a merevítetlen héjéhez képest. Az alábbiakban sorra vesszük néhány jellegzetes héjalak és terhelési eset horpadási félhullámjának méreteit, és az ennél kisebb héjmezők kritikus feszültségét.

A korábbi tárgyalásban láttuk, hogy a tökéletes héj a lineáris elméletnek megfelelő hullámhosszal, a kezdeti hullámossággal bíró héj pedig ennél nagyobb hullámhosszal kezd el horpadni, és a hullámhossz mindenképpen növekszik a horpadás során (2.10. ábra). A biztonság javára követünk el tehát hibát, ha a szükséges bordatávot a merevítetlen héj lineáris elmélet adta legkisebb horpadási félhullámhosszánál kisebbre állapítjuk meg. Gyakorlatilag akkor tekinthető a bordázat biztosan hatékonynak, ha a bordatávolság nem nagyobb a merevítetlen héjlemez horpadási hullámhosszának 0,7-szeresénél. Ezt másképpen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a bordák közötti héjmező kritikus terhe legalább kétszerese legyen a merevítetlen héjlemez kritikus terhének.

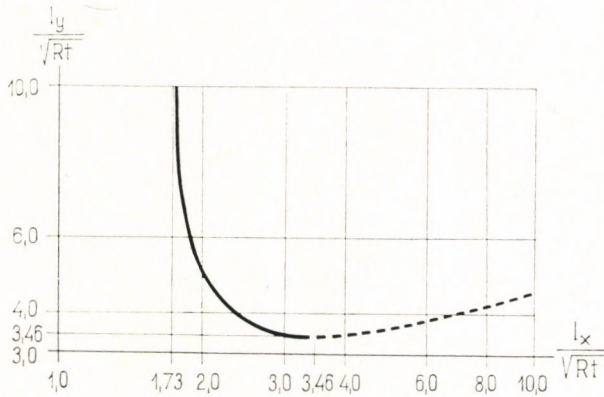
Alkotóirányban nyomott hengerhéjmező kritikus terhe. A teljes hengerhéj erre az igénybevételre kis, helyi hullámokban horpad. A lineáris elmélet szerint szabadon

kialakuló horpadási hullám két félhullámhossza (l_x és l_y) között a (2.10) képlet adja meg az összefüggést, amit a következő alakba írhatunk:

$$l_y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\pi\sqrt{Rt}} \cdot l_x - \frac{1}{l_x^2}}} \quad (8.2.1)$$

A két félhullámhossz aránya határozatlan.

Ennek alapján az összetartozó l_x és l_y félhullámhosszakat $\nu = 0,3$ alapulvételével a 8.2.1. ábrán rajzoltuk fel. A diagramból levonható legfontosabb következtetés az, hogy l_x nem lehet kisebb $1,73 \sqrt{Rt}$ -nél, l_y pedig $3,46 \sqrt{Rt}$ -nél. Egyirányú



8.2.1. ábra. Az alkotóirányban nyomott hengerhéj horpadási félhullámhosszai a lineáris elmélet szerint

bordázás esetében tehát e méretek egyikénél közelebbre kell elhelyezni egymáshoz a bordákat. Ha pedig kétirányú bordázást alkalmazunk, akkor a kétirányú bordatávolság legyen kisebb, mint a velük arányos horpadási félhullámhosszaknak a diagram megszabta hossza.

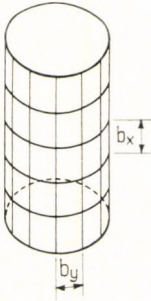
Az ennél sűrűbb bordázással merevített héjmező kritikus feszültségét a lineáris elmélet szerint a (2.8) kifejezésből kaphatjuk meg (a bordázások vonalában sarokpántok megtámasztást alapul véve), ha az l_x , illetve l_y kihajlási félhullámhosszakul a b_x , ill. b_y bordatávolságokat helyettesítjük be (8.2.2. ábra):

$$n_{x\text{kr}}^{\text{lin}} = \frac{\pi^2 Et^3}{12(1-\nu^2) b_x^2} \left(\frac{b_x^2}{b_y^2} + 1 \right)^2 + \frac{Et b_x^2}{\pi^2 R^2} \frac{1}{\left(\frac{b_x^2}{b_y^2} + 1 \right)^2} \quad (8.2.2)$$

Ugyanezt az eredményt szolgáltatja a héj laposságának feltételezése nélkül elvégzett levezetés is [2.51].

A (8.2.2) képlet mind alkotó-, mind gyűrűirányban egy félhullámú horpadást vesz alapul. Ez mindaddig igaz, amíg $b_x \leq b_y$. Ha azonban $b_x > b_y$, akkor — a

8.2.2. ábra. Bordázott hengerháj



síklemmezhez hasonlóan — alkotóirányban több félhullámban horpadhat a héjmező, s ezért kritikus ereje legfeljebb a mindkét irányban b_y méretű héjmező alábbi kritikus erejével egyezhet meg:

$$n_{x\text{kr}}^{\text{lin}} = \frac{\pi^2 E t^3}{3(1 - \nu^2) b_y^3} + \frac{E t b_y^2}{4\pi^2 R^2}. \quad (8.2.3)$$

A (8.2.2)–(8.2.3) képletek első tagja a héjmezővel megegyező méretű síklemmez hajlítási merevségét képviseli, a második tag pedig a görbeségből származó többlet- (membrán-) merevséget.

A héjmező kritikusan túli viselkedését KOTTER [8.2.8] vizsgálta és a 8.2.3a. ábrán vázolt kezdeti érintőket kapta a tökéletes héjmező kritikusan túli alakváltozás-görbéjéhez (f = az alkotóirányú összenyomódás). Az ábrán $\Theta = b_y / \sqrt{Rt}$ a héjmező görbületére jellemző geometriai paraméter. A síklemmeznek $\Theta = 0$ felel meg. Kis Θ -értékeknél tehát emelkedő jellegű a kritikusan túli teherbírás, így a lineáris kritikus terhet vehetjük érvényesnek. $\Theta > 0,64$ -nél azonban negatívvá válik a kezdeti érintő. Ekkor a kezdeti hullámosság w_0 amplitúdójának függvényében a 8.2.3b. ábra adja meg az átpattanást okozó $n_{x\text{kr}}^{\text{felső}}$ nagyságát két Θ -értékre. A héjmező viselkedése tehát középponti szögének növekedtével egyre inkább megközelelti a teljes hengerét.

Megerősítik mindezeket TAMATE és SEKINE [8.2.16] számításai is, melyeket $b_x = b_y$ méretű héjmezők kritikusan túli viselkedésére végeztek.

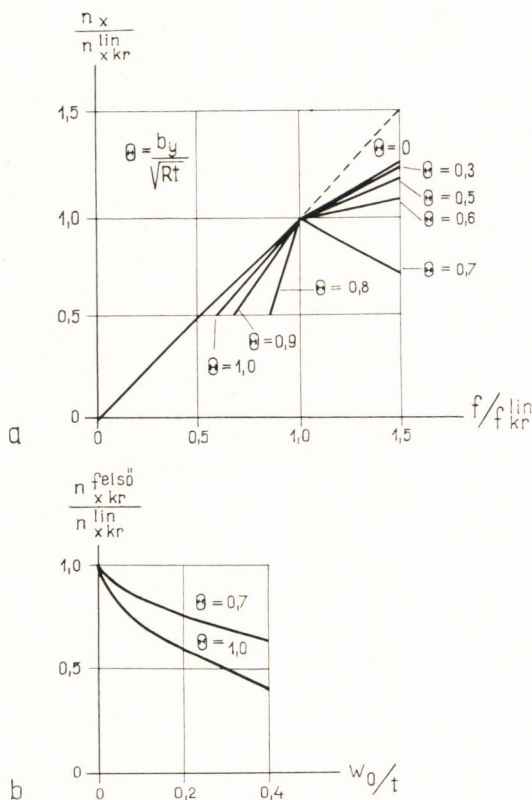
A kísérletek [2.51], [2.57] összhangban vannak az elmélet most ismertetett eredményeivel.

A [2.57]-ben közölt elméleti vizsgálatokból egy, a gyakorlati célokra jól hasznosítható következtetést vonhatunk le. A tökéletes hengerhéjmező átpattanás utáni $\sigma_{\text{kr}}^{\text{alsó}}$ -jára ugyanis — nem teljesen pontos számítással — ugyanakkora érték adódott, mint az ugyanakkora (b_x, b_y) oldalhosszakkal bíró síklemmez horpasztófeszültsége. Ismeretes azonban, hogy a síklemmez konstans, ill. emelkedő kritikusan túli teherbírással rendelkezik. Általánosságban azt mondhatjuk tehát, hogy ha egy héjmező kritikus terhét nem tudjuk pontosan meghatározni, akkor — általában a biztonság javára elkövetett hibával — vehetjük helyette az ugyanolyan módon igénybevett, azonos oldalhosszúságú síklemmez horpasztóterhét.

Gyűrűirányban nyomott hengerhéjmező kritikus terhe. Mivel gyűrűirányú nyomásra a bordázatlan hengerhég a megtámasztások között teljes hosszában egy félhullámban horpad, s csak gyűrűirányban keletkezik benne több félhullám, ezért a gyűrűirányban bordázott hég mezőinek kritikus erejét ugyancsak a (2.25) képletek szolgáltatják, csak most L helyébe a gyűrűirányú bordák b_x távolságát kell betennünk.

A lineáris elmélet alapján elvégzett pontosabb vizsgálatok [8.2.14] szerint a hégmező a teljes hengerénél kisebb tehernél is horpadhat, ha az alkotóirányú bordák távolsága olyan gyűrűirányú hullámszámot tesz lehetővé, melyet a teljes hengeren a kerületmenti folytonosság megakadályoz. Ez a csökkenés azonban a 10%-ot sem éri el, és a kritikus teher semmiképpen nem lehet kisebb a csipkegörbe burkolójának megfelelő kritikus tehernél.

Az alkotóirányú bordák gyakorlatilag csak akkor növelik a kritikus erőt, ha sűrűbben helyezkednek el, mint a (2.26) képlet megszabta félhullámhossz. Ekkor a gyűrűirányú félhullámszámot is tartalmazó pontos képletből [2.17], [2.51] határozhatjuk meg a kritikus erőt, félhullámhossznak most természetesen a b_y bordatávolságot véve.



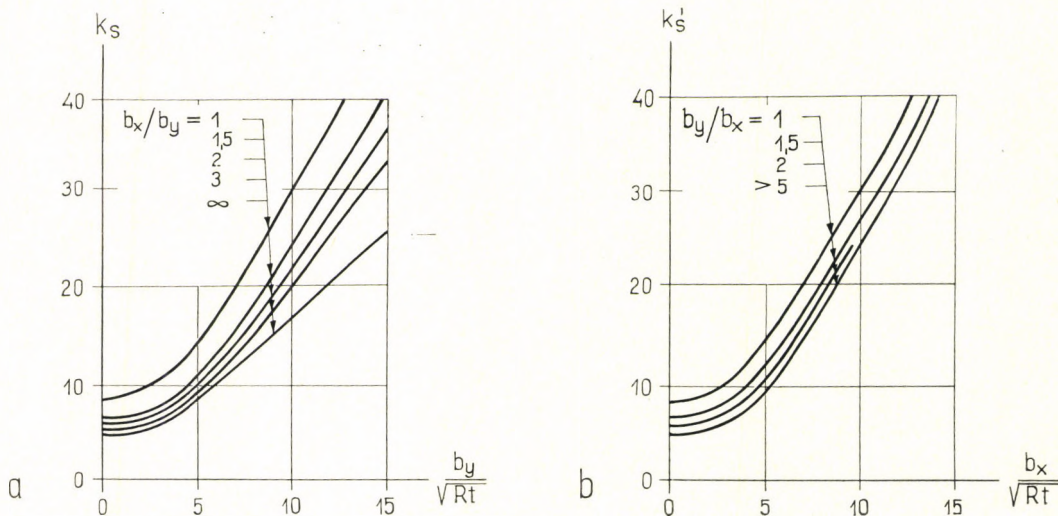
8.2.3. ábra. Az alkotóirányban nyomott hégmező kritikuson túli viselkedése

Tiszta nyírásra igénybevett hengerhéjmező kritikus terhe. A lineáris elmélet szerinti kritikus nyírófeszültség ebben az esetben a következőképpen fejezhető ki (8.2.2. ábra):

$$\text{ha } b_x \geq b_y: \quad \tau_{kr} = k_s E \left(\frac{t}{b_y} \right)^2, \quad (8.2.4a)$$

$$\text{és ha } b_x \leq b_y: \quad \tau_{kr} = k'_s E \left(\frac{t}{b_x} \right)^2. \quad (8.2.4b)$$

A k_s , ill. k'_s tényezőt KROMM és SCHAPITZ kutatásai [7.21] szerint a 8.2.4a., ill. 8.2.4b. ábrából vehetjük.



8.2.4. ábra. A tiszta nyírásra igénybevett hengerhéjmező kritikus terhének szorzója

Radiálisan terhelt gömbhéjmező kritikus terhe. A szabadon horpadó, bordázatlan gömbhéj horpadási félhullámhosszait — négyszögletes horpadási alak alapulvételével — a (4.6) egyenletből kaphatjuk meg:

$$l_y = \sqrt{\frac{1}{\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi^2 Rt} - \frac{1}{l_x^2}}}. \quad (8.2.5)$$

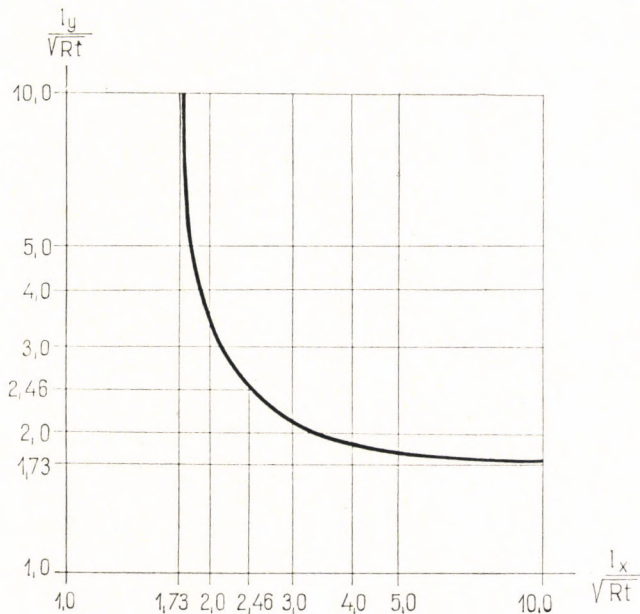
$\nu = 0,3$ -ra az összetartozó félhullámhosszakat a 8.2.5. ábrán tüntettük fel. Láthatjuk, hogy egyik irányban sem lehet a félhullámhossz rövidebb, mint $1,73 \sqrt{Rt}$.

Ha tehát növelni akarjuk a héjmező kritikus terhet a merevítetlen gömbhéj képest, akkor olyan sűrűn kell elhelyeznünk a bordákat, hogy a b_x és b_y bordatávolságok kisebbek legyenek a 8.2.5. ábra összetartozó értékpárjainál. Ebben

az esetben a kritikus nyomóerőt a (4.5) képlet szolgáltatja, l_x és l_y helyébe b_x -et és b_y -t téve:

$$n_{x\text{kr}}^{\text{lin}} = n_{y\text{kr}}^{\text{lin}} = p_{\text{kr}} \frac{R}{2} = \frac{\pi^2 E t^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{b_x^2} + \frac{1}{b_y^2} \right) + \frac{E t}{\pi^2 R^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{b_x^2} + \frac{1}{b_y^2} \right)}. \quad (8.2.6)$$

A (8.2.6) képlet jobb oldalának első tagja a hajlítási (síklemez-)merevséget, második tagja a görbületi korrekciót (a membrán-merevséget) képviseli. Ha



8.2.5. ábra. A radiálisan nyomott gömbhéj horpadási félhullámhosszai a lineáris elmélet szerint

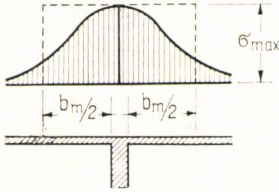
$R \rightarrow \infty$, azaz a gömbhéjat aránylag kis mezőkre osztottuk fel, akkor egyre inkább közeledünk a síklemezhez: a kritikuson túli viselkedés emelkedő teherbírást fog mutatni, s nem jelentkezik a kritikus tehernek az átpattanás okozta nagymértékű csökkenése (4.4. ábra). Ez csak akkor jut teljes szerephez, ha a bordatávolságok elérik a merevítetlen héj horpadási félhullámhosszait. A jelenség a 8.2.3a. ábrához hasonló.

8.2.2. A bordákkal hajlításra együttdolgozó lemezszélesség

A bordával összeépített lemezben a hajlításból változó intenzitású feszültség ébred (8.2.6. ábra). Együttdolgozó lemezszélességnek, mint ismeretes, a bordákhoz csatlakozó lemeznek azt a b_m szélességű szakaszát nevezzük, amelyet a bordákkal teljes mértékben együttdolgozónak számítva (benne állandó feszültséget feltéte-

lezve) ugyanakkora hajlítási merevséget, illetve ugyanakkora szélsőszál-feszültséget kapunk, mint a bordáslemez valódi hajlítási merevsége, ill. maximális szélsőszál-feszültsége. Így elvileg kétféle együttlőzö lemezszelességet kaphatunk.

A különbség lényegében abból ered, hogy a lemez nyúlását $\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E$ -vel számítjuk, a bordáét viszont $\epsilon_x = \sigma_x/E$ -vel, és így azonos ϵ_x -hez a bordában és a lemezben más σ_x tartozik. A kétféle együttlőzö szélesség azonban egybeesik, ha a ν harántkontrakciós tényezőt 0-nak vesszük.



8.2.6. ábra. A bordával együttlőzö lemezszelesség

A horpadásszámításhoz nem a lemezben keletkező szélsőszál-feszültség, hanem a hajlítási merevség a mértékadó, így elvileg az azonos merevség alapján kapható együttlőzö lemezszelességgel kell számolnunk. Mivel azonban ennél legfeljebb néhány %-kal nagyobb az azonos feszültség alapján kapható együttlőzö szélesség, ezért ez utóbbit is használhatjuk.

Az együttlőzö szélesség attól függően is kétféle lehet, hogy megengedjük-e a héjmezők horpadását vagy sem. Az építőmérnöki gyakorlatban általában nem engedjük meg a héjmezők kihorpadását, így elsősorban a ki nem horpadó lemezzel fogunk foglalkozni.

Az együttlőzö lemezszelesség számítása ki nem horpadó héjmezők esetén. Síklemezre, a borda sinusos lehajlása esetén (ami megfelel a horpadási hullámnak), CHWALLA alapvető vizsgálatai szerint [8.2.3] a borda hossza mentén állandó b_m együttlőzö szélességet kapunk. Ennek a horpadási félhullámhosszhoz (l -hez) viszonyított értékét a harántkontrakciós tényező (ν) függvényében a 8.2.I. táblázatban foglaljuk össze.

8.2.I. TÁBLÁZAT

$\nu =$	0,3	0,2	0,1	0
$b_m/l =$	0,363	0,380	0,402	0,424

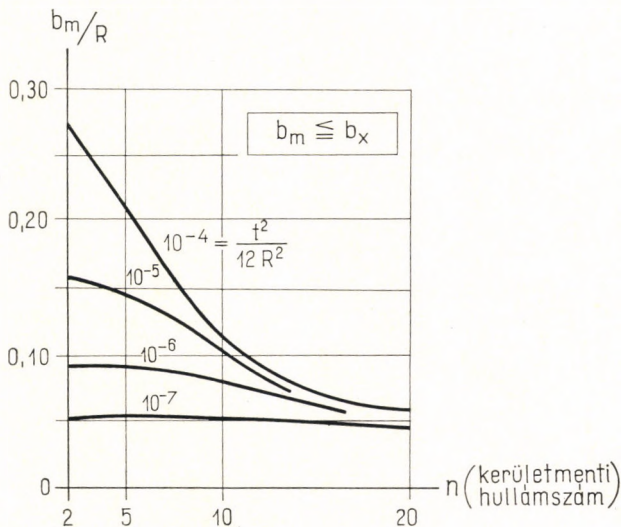
Ezek az értékek az egy bordához kapcsolódó végtelenül széles lemezre vonatkoznak. Az együttlőzö lemezszelesség azonban természetesen nem lehet nagyobb a bordák távolságánál, ez tehát korlátozza a táblázat értékeit.

Bonyolultabb a helyzet, ha a borda nem síklemezhez csatlakozik, hanem görbe héjfelülethez. A hengerhéjnak az alkotóirányú bordával együttlőzö szélességére a Schorer-féle közelítő hengerhéj-elmélet [7.10], [2.32] segítségével, $\nu = 0$ -val és az azonos maximális feszültség alapján az alábbi tájékoztató érték vezethető le [8.2.7]:

$$\frac{b_m}{l_x} = 2,17 \sqrt[4]{\frac{Rt}{l_x^2}}, \quad (8.2.7)$$

ahol l_x az alkotóirányú horpadási félhullámhossz.

Mivel a levezetés egyetlen alkotóirányú bordát tételezett fel, ezért b_m figyelembe vehető maximális értéke a bordák gyűrű irányú b_x távolságával lehet egyenlő. Ezenkívül (a Schorer-elmélet közelítései miatt) azt is külön ellenőriznünk kell, hogy a (8.2.7) képlet adta b_m nem nagyobb-e a síklemezre kapható b_m -nél (8.2.I.táblázat), mivel a hengerháj együttdolgozó szélességének mindenképpen kisebbnek kell lennie a síklemezénél.



8.2.7. ábra. A hengerhájnak a gyűrűirányú bordával együttdolgozó szélessége

A hengerhájnak a gyűrűirányú bordákkal együttdolgozó b_m lemezszélességét az azonos merevség követelménye alapján BIEZENO és KOCH számították ki [8.2.2] a b_x bordatávolság és a kerületmenti horpadási (egész) hullámszám (n) függvényében, különböző t/R arányokhoz. Táblázataikból az egyszerűség kedvéért a 8.2.7. ábrán a $b_x = \infty$ -hez tartozó együttdolgozó szélességeket tüntettük fel. Ha ezeket használjuk fel, akkor figyelembe kell vennünk, hogy az együttdolgozó szélesség nyilvánvalóan nem lehet nagyobb a bordák b_x távolságánál.

A 8.2.7. ábra adta együttdolgozó szélesség R (illetve n) növekedésével egyre inkább megközelíti a síklemez együttdolgozó szélességét (8.2.I. táblázat), de mindig kisebb nála.

LUNGGREN [2.32] ugyancsak a $b_x = \infty$ esetre az

$$\frac{n^4 t^2}{12 R^2} \ll 1 \quad (8.2.8)$$

közelítéssel az alábbi képletet vezette le az együttdolgozó szélességre:

$$b_m = 1,52 \left(1 - 0,29 n^2 \frac{t}{R} \right) \sqrt{tR}, \quad (8.2.9)$$

amely a (8.2.8) tartományon belül igen jól egyezik a 8.2.7. ábra görbéivel.

A hengerháj imént ismertetett együttdolgozó szélességeinek kiszámításához ismernünk kellene a horpadási hullám bordairányú félhullámhosszát. Ez azonban függ a bordáslemez merevségétől, ami az együttdolgozó lemezszélesség függvénye. Ezért csak próbálgatással juthatunk célhoz, fokozatosan javítva a felvett együttdolgozó szélességet, ill. félhullámhosszát.

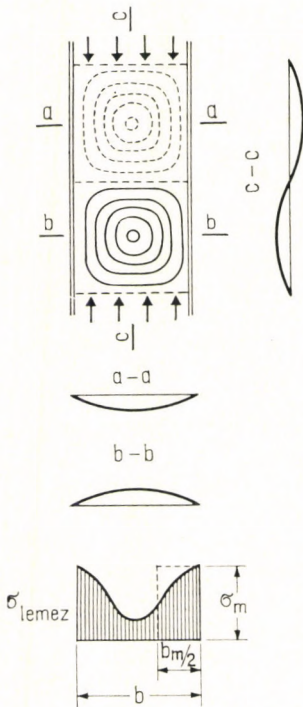
BODNER [7.3] korrekciót javasolt a Biezeno—Koch-féle együttdolgozó szélességhez, hogy a merevítő bordák területének 0 felé való csökkenése esetén kiadja a teljes bordatávolságot. Ennek azonban csak igen gyenge bordázat esetében van jelentősége.

A bordásháj viselkedése a héjlemez kihorpadása után. A héjlemez kihorpadása után a bordák teherbírása — a kísérletek és az elméleti vizsgálatok szerint egyaránt — még számottevő mértékben növekszik. Ezt a repülőgépipítésben ki is használják oly módon, hogy bizonyos, rövid ideig ható terhekre megengedik a héjlemez kihorpadását, mert a teher csökkenése után a lemez ismét kisimul. A mérnöki szerkezetekben azonban ezt nem szokták megengedni, bár egyes esetekben gazdasági előnnyel járna.

A következőkben csak röviden vázoljuk a héjlemez kihorpadásakor fellépő jelenségeket és az ezzel kapcsolatos méretezési nehézségeket.

A bordák közötti *sík*lemez a bordairányú egyenletes nyomás hatására a 8.2.8. ábrán vázolt alakban horpad ki. A bordairányú megrövidülés a lemez a bordáktól távolabb levő $c-c$ metszetben nagyrészt magával a horpadási alakváltozással tudja követni, s aránylag kis összenyomódásra kényszerül. A bordákhoz közeledve azonban egyre csökken a kihorpadás, itt tehát egyre nagyobb összenyomódást szenved a lemez. A lemez által felvett σ nyomófeszültség, az összenyomódással arányos lévén, a 8.2.8. ábrán feltüntetett diagram szerint oszlik meg. A merevítőborda vonalában a teljes megrövidülésnek megfelelő σ_m feszültség ébred, tőle távolabb kisebb. A b_m „együttdolgozó lemezszélesség” azt a szélességet jelenti, amellyel a lemez az eredeti szerkezettel egyenlő bordairányú erőt tudna viselni, ha ezen belül a lemez mindenütt σ_m feszültséget venne fel.

Ezt az együttdolgozó lemezszélességet MARGUERRE [8.2.9] vizsgálatai szerint harmadfokú egyenletből határozhatjuk meg, amihez igen célszerű grafikont találhatunk [7.21]-ben. Az együttdolgozó szélesség azonban egyrészt a szerkezetre ható teher növekedtével, másrészt a borda kihajlási alakváltozásával is csökken, mivel eközben a lemez egyre nagyobb mértékben nyomódik össze. (A jelenség bizonyos fokig hasonló a berepedt vasbetonhajaknak a 9.6. fejezet részben leírt merevségesökkenéséhez.) Így már az is nehézségekkel jár, ha a bordát mint egyszerű nyomott rudat akarjuk kihajlásra méretezni, mivel hajlítási merevsége függ a terheléstől és a kihajlási alakváltozás nagyságától [7.21].



8.2.8. ábra. A kihorpadó lemez együttdolgozó szélessége

Tovább bonyolódik a helyzet a kihorpadó *bordáshéj*knál. Az együttműködő szélességet ugyan EBNER [8.2.4] egyszerű közelítő feltevése alapján még meg tudjuk határozni (lásd. [7.21]-ben), de még nincs megoldva a terheléstől és az alakváltozástól függő merevségekkel bíró ortotróp héj horpadásvizsgálata. Ezért nem is foglalkozunk tovább e problémakörrel.

8.2.3. A külpontos bordázattal kapcsolatos problémák

A héjlemezt kétféleképpen bordázhatjuk: a lemez mindkét oldalán, szimmetrikusan, vagy csak a lemez egyik oldalán (külpontos bordázat). Az első esetben a bordák merevségeinek egyenletes szétosztása után az ortotróp héjknak a 7. fejezetben ismertetett egyenletei korrektül írják le a szerkezet viselkedését, de ezt a bordázatfajtát — akár vasbetonból, akár fémből készül a héj — sokkal körülményesebb megvalósítani a külpontos bordázatnál. Ezenkívül gazdaság-talanabb is nála, mert a külpontosan elhelyezett bordázat ugyanakkora borda-keresztmetszettel lényegesen nagyobb hajlítási merevséget biztosít.

A külpontosan bordázott héj viselkedése azonban már nem írható le korrektül a 7. fejezetben ismertetett egyenletekkel. A különbségek egyszerűbb megértése végett vizsgáljuk először a síklemezen a külpontos bordázat szerepét, ideértve azt az esetet is, amikor a héjlemez egyik oldalán egyik irányú, másik oldalán másik irányú bordák futnak végig.

A külpontosan bordázott síklemez. A bordázat külpontos elhelyezése azt eredményezi, hogy nincs a bordáslemeznek olyan „semleges felülete”, amely mind a hajlítási, mind a csavarási igénybevételek hatására feszültségmentes marad. Pontosabban szólva: a csavarónyomaték nemcsak elcsavarodást okoz, hanem a lemezben szögtorzulást és ezzel kapcsolatban membrán-nyírófeszültségeket is ébreszt. E membrán-nyírófeszültségekből azután természetesen membrán-húzó- és nyomófeszültségek is keletkeznek a lemezben. Ez lényegében ugyanaz a jelenség, mint a nyitott szelvényű rudak csavarásakor fellépő „öblösödés”.

Mindebből részletesebb vizsgálat nélkül is látható, hogy a külpontos bordákkal merevített síklemez csavarási ellenállása nagyobb lesz, mint a tulajdonképpeni „csavarási merevség”.

A külpontosan bordázott lemez hajlásának differenciálegyenlete e hatás folytán nyolcadrendű lesz [8.2.6], [8.2.17], szemben a szimmetrikusan bordázott lemez negyedrendű differenciálegyenletével.

Ahhoz, hogy az ortotróp lemezek negyedrendű egyenleteit használhassuk, el kell hanyagolnunk a külpontosan elhelyezkedő bordázat folytán létrejövő többlet-merevséget, és csak a bordáslemez valódi csavarási merevségét kell számításba vennünk. A stabilitásvizsgálat szempontjából ily módon mindig a biztonság javára követünk el hibát, hiszen a lemezt lágyabbnak vesszük a valóságosnál.

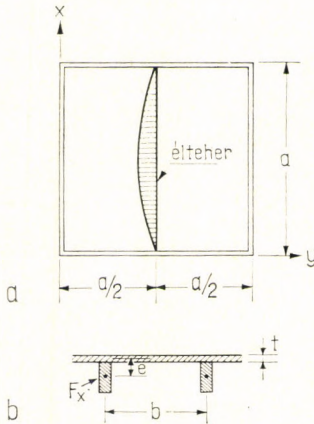
Az így elkövetett hibára vonatkozólag igen jó tájékoztatást kaphatunk TRENKS dolgozatából [8.2.17], amelyben összehasonlította a külpontosan bordázott síklemez pontos számítással kapható lehajlását (azaz merevségét) azzal a közelítéssel, amikor csupán a bordáslemez tényleges csavarási merevségét vesszük számításba. Kimutatta, hogy ez a hiba annál nagyobb,

minél nagyobb a bordák súlypontjának külpontossága a lemez vastagságához képest,

minél nagyobb a borda keresztmetszete a lemezkeresztmetszethez képest, minél kisebb a bordáslemez inercianyomatéka a lemezvastagság köbéhez képest, és

minél nagyobb szerepe van az elcsavarodásnak a lemez alakváltozásában.

Számszerűen azt kapta, hogy egy $e/t \leq 12$ külpontosságú négyzetes lemez (8.2.9. ábra) a közepén sinusos élteher hatására egyirányú bordázatnál legfeljebb 30%-kal, két irányban egyforma merev bordázatnál pedig legfeljebb 6%-kal többet hajlik le, mintha nem hanyagolnánk el a bordázat külpontosságát.



8.2.9. ábra. A megvizsgált külpontosan bordázott lemez

PFLÜGER felírta és megoldotta a külpontosan bordázott síklemez pontos horpadási differenciál-egyenleteit csavarásra lágy (nyitott szelvényű), valamint csavarásra merev (zárt szelvényű) bordák esetére [8.2.11], [8.2.12]. Egyirányú bordázat és ugyanebben az irányban nyomott lemez esetében PFLÜGER diagramjait összehasonlítottuk az ortotrop lemezelmélettel kapható kritikus feszültségekkel, amelyekben tehát csupán a bordáslemez tényleges csavarási merevségét vettük számításba. A kapott eltérés számszerűen jól egyezett a Trenks-féle hibaadatokkal.

A külpontosan bordázott héjak. Bordás héj esetében a bordázat külpontos elhelyezése a síklemezénél ismerttetett merevség-növelő hatáson kívül még a következő jelenséget okozza: nem mindegy, hogy a bordázat a héj domború (külső), vagy homorú (belső) felületén helyezkedik-e el. E különbség megértéséhez [8.2.5] alapján vizsgáljunk meg egy alkotó- és gyűrűirányban bordázott hengerhéjat. Az itt mondottak érvényesek lesznek a kettősen görbült bordáshéjakra is.

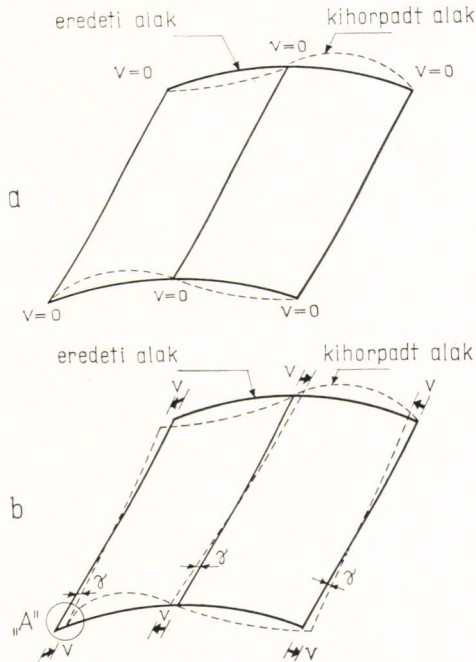
Először is definiálnunk kell néhány fogalmat. Inflexiós pontnak fogjuk nevezni a (gyűrűirányú) hajlítási semleges szál inflexiós pontját, csomópontnak pedig azokat a pontokat, amelyek a horpadási alakváltozás során sem radiálisan, sem gyűrűirányban nem tolódnak el. (A csomópontok általában nem fekszenek a hajlítási semleges szálon.) A csomópontokat összekötő vonalakat csomóvonalaknak hívjuk.

Ha a horpadás során gyűrűirányú hullámok keletkeznek, akkor az ívhossznak a görbület miatt a kifelé domborodó félhullámok mentén meg kellene nyúlnia, a befelé domborodó félhullámok mentén pedig össze kellene nyomódnia abban az esetben, ha az inflexiós pontok gyűrűirányban nem mozdulnának el (8.2.10a. ábra). A héj nyilvánvalóan igyekszik kiküszöbölni ezt a hosszváltozást, és ezért az inflexiós pontok gyűrűirányban el fognak tolni a befelé domborodó félhullámok felől a kifelé domborodók irányában. Ha alkotóirányban nem változna a horpadási hullámok amplitúdója (vagyis alkotóirányban igen hosszú félhullámok keletkeznének), akkor az inflexiós pontoknak ez az eltolódása teljesen ki tudná küszöbölni a gyűrűirányú hosszváltozást. Ha azonban alkotóirányban változik a horpadási amplitúdó, akkor az inflexiós pontoknak különböző mértékben kell eltolódnia, illetve szakaszonként ellenkező irányban tolni el. Ez pedig a 8.2.10b. ábra szerint nyírási alakváltozást okoz a héj síkjában. Ez a nyírási alakváltozás,

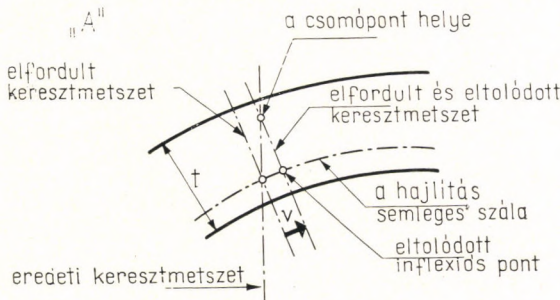
illetve az ezt akadályozó nyírási merevség teszi merevebbé a héjat a síklemeznél a horpadás szempontjából.

Ez a nyírási alakváltozás a héjnak a gyűrűirányú hajlítási semleges felületében lép fel a 8.2.10b. ábrának megfelelően. A csomóvonalakon átmenő felületben azonban nem ébred ilyen nyírási alakváltozás, mivel a csomóvonalak — definíciószerűen — nem tolnak el ívirányban.

A csomóvonalak mindig kifelé tolnak el a gyűrűirányú hajlítási semleges felületétől, mivel az inflexiók pontok mindig a kifelé domborodó félhullám felé tolnak el a gyűrűirányban (l. a 8.2.11. ábrát, amely a 8.2.10b. ábra „A” részletét nagyítja ki).



8.2.10. ábra. A külpontosan bordázott héj horpadási alakváltozása



8.2.11. ábra. A külpontosan bordázott héj inflexiók pontjának eltolódása a horpadás során

Mármost annál nagyobb nyírási alakváltozás ébred a héj nyírást felvevő felületében, minél messzebb van e felület a csomóvonalakon átmenő felülettől. A bordázat nélküli vagy szimmetrikusan bordázott héj esetében a nyírást felvevő felület meg egyezik a hajlítási semleges felülettel, így az ilyen „közönséges” héjaknak a síklemezhez képest jelentkező horpadási többlet-merevsége abból a nyírási alakváltozásból származik, amely a nyírást felvevő felületben amiatt ébred, hogy bizonyos távolságra fekszik a kifelé eltolódott csomóvonalaktól.

A kívül bordázott héj nyírást felvevő felülete (a belül elhelyezkedő héjlemez) messzebb van a csomóvonalaktól, mint a „közönséges” héjak hajlítási semleges felülete, így e kívül bordázott héjak többlet-merevséget fognak felmutatni. A belül bordázott héj nyírást felvevő héjlemeze biztosan közelebb lesz a csomóvonalakhoz, mint a kívül bordázott héjaké, de nem lehet általánosságban megmondani, hogy közelebb vagy távolabb kerül-e a csomóvonalaktól, mint a „közönséges” héjak esetében. Így a belül bordázott héjaknak a horpadási merevsége biztosan kisebb lesz a kívül bordázott héjakénál, sőt még esetleg az azonos merevségi jellemzőkkel bíró, de szimmetrikusan bordázott héjakénál is.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a külső és a belső bordázat merevsége közötti különbség csak abban az esetben jelentkezik, ha a horpadási alakváltozás elcsavarodást is tartalmaz, azaz a horpadási hullámhossz a két irányban nagyjából egyforma nagy. A belső és a külső bordázat tehát ugyanabból az okból jelent eltérő merevítő hatást, mint ami miatt a síklemez külpontos bordázata is többlet-merevséget okozott: az „öblösödési többlet-merevség” következtében, csakhogy héjaknál — a görbültség miatt — ez a hatás a síklemezhez képest tovább fokozódik (külső bordázat), ill. csökken (belső bordázat).

Az eddig ismertetett jelenséget a héjak külpontosan elhelyezett bordáival kapcsolatos „elsőrendű hatás”-nak hívják. Van azonban egy „másodrendű hatás” is, amely a harántkontrakcióval van összefüggésben és amely ellenkező értelemben hat.

Vegyük szemügyre először a külső bordázat esetét: az alkotóirányú félhullámok közül a kifelé domborodók a belül levő héjlemezben összenyomódást okoznak. Ez a harántkontrakció miatt gyűrűirányban nyúlást okoz, ami csökkenti az inflexiós pontoknak az elsőrendű hatásnál leírt gyűrűirányú eltolódását. A befelé domborodó félhullámokban viszont a belül levő héjlemez húzást szenved, ami ugyancsak a harántkontrakció miatt gyűrűirányú összenyomódást kelt. Ez szintén csökkenti az inflexiós pontok gyűrűirányú eltolódásának mértékét. Az inflexiós pontok kisebb mértékű eltolódása azonban csökkenti a 8.2.10. ábrán vázolt nyírási alakváltozást, ennek folytán tehát lágyabb lesz a héj.

Belül elhelyezett bordázat esetében a másodrendű hatás fordítva játszódik le, mivel a lemez a héj külső szélén helyezkedik el. Megnő a 8.2.10. ábrán vázolt nyírási alakváltozás: ennek folytán a héj merevebbé válik.

Mindent összevetve tehát a másodrendű hatás a kívül bordázott héjat teszi lágyabbá a belül bordázottnál, azaz éppen ellenkezőleg, mint az elsőrendű hatás.

A másodrendű hatás az elcsavarodás nélküli horpadási alakváltozásoknál is jelentkezik, ha a bordák a horpadási hullámok irányában helyezkednek el. Ilyen eset pl. az alkotóirányban bordázott hengerhéjak tengelyszimmetrikus horpadása. A harántkontrakció következtében ugyanis változó gyűrűirányú nyúlás és ennek folytán nyírási alakváltozás lép fel a héjlemezben. Ha a héjlemezt harántkontrakciós tényezője zérus, akkor természetesen a másodrendű hatás is zérussá válik.

Szemlélettel nem mindig dönthető el egyértelműen, hogy melyik fog dominálni az ellenkező értelemben ható első- és másodrendű hatás közül, azaz, hogy a külső vagy a belső bordázat ad-e nagyobb merevséget. GEIER [8.2.5], valamint SINGER—BARUCH—HARARI [8.2.13] vizsgálatai szerint gyűrűirányban (vagy hidrosztatikusan) nyomott henger esetében hosszú hengernél a belső bordázat, rövid hengernél viszont a külső bordázat merevebb. Más esetekben azonban, amikor a horpadási hullám nem ilyen elnyújtott, hanem a négyzeteshez áll közel, általában a külső bordázat biztosít nagyobb merevséget.

A külső és a belső bordázat merevsége között azonos keresztmetszeti méretek mellett a számítások általában 20—30%-ig terjedő különbségeket adtak, de szélső esetben előfordultak 80—100%-os különbségek is.

Az irodalomban többféle esetre is megoldották a külpontosan bordázott héjak horpadásának pontos differenciálegyenleteit. Ezek a megoldások azonban olyan bonyolultak, hogy nem írhatók fel képletszerűen, hanem csak adott numerikus esetekre számították ki őket. Ezért itt nem foglalkozunk velük részletesebben, csak utalunk a jelenséget felfedező VAN DER NEUT [8.2.10] és más szerzők dolgozataira [8.2.5], [8.2.13], [8.2.1], [8.2.15], [7.4].

A bordás héjat — a síklemmezhez hasonlóan — akkor vezethetjük vissza az előző fejezetben ismertetett egyszerű ortotróp héjra, ha elhanyagoljuk a bordák külpontosságának hatását. Ily módon — az eddig elmondott fizikai magyarázat alapján — a stabilitásvizsgálat szempontjából külső bordázat esetében mindig a biztonság javára közelítünk azzal, hogy elhanyagoljuk a külpontos bordázat okozta csavarási többletmerevséget (pontosabban: öblösödési merevséget), és csak a tiszta csavarási merevséget vesszük számításba. Amint mondtuk ugyanis, a külpontos bordázat „öblösödési többlet-merevségét” az elsőrendű hatás a belül bordázott héjak esetében nulla alá is csökkentheti, azaz a magából a héj görbültségéből származó többlet-merevséget is felemésztheti (ha ti. a csomóvonalak a nyírást felvevő felületbe esnek.) Így belső bordázás esetében nem biztos, hogy a biztonság javára közelítünk az öblösödési merevség elhanyagolásával, de más módot egyelőre nem látunk arra, hogy e héjakat is aránylag nem túlzottan nagy számítási munkával méretezhessük horpadásra. Bizonyos mértékig ellensúlyozza ezt a biztonság-csökkenést a másodrendű hatásnak a belső bordázat esetén jelentkező merevítő hatása, ill. a Poisson-szám elhanyagolásának biztonságot növelő szerepe (8.2.4. pont).

A különböző hengeres bordáshéjakon végzett kísérletek [7.9] során nem mutatkozott észrevehető különbség a kívül, ill. belül bordázott héjak p_{kr} , kísérleti horpasztóterhében.

A fentiek alapján tehát a horpadásszámításhoz elhanyagoljuk a bordázat külpontosságát és az egyszerű ortotróp héj képleteivel számolunk.

8.2.4. A bordás lemez harántkontrakciós tényezője (ν)

A bordákban működő húzó-nyomóerők okozta harántkontrakció nyilvánvalóan érdektelen. A harántkontrakciónak tehát csupán a lemez keresztmetszeti megnyúlásával kapcsolatban van szerepe, így hatása mindent összevéve sokkal kisebb, mint a bordázatlan héjnál.

A harántkontrakció elhanyagolásával mindig kisebbre vesszük a merevségeket a valóságosnál, mivel ν a nevezőkben szerepel $(1 - \nu^2)$ alakban (amint a 7. fejezetben kimutattuk). Ezért figyelembe véve, hogy a fent mondottak szerint amúgy is igen kicsi a hatása, a számítás egyszerűsítése céljából és a biztonság javára célszerű ν -t 0-nak venni.

8.2.5. A bordák szükséges sűrűsége a folytonos ortotróp héjként való számításhoz

Ahhoz, hogy a bordázott héjat folytonos ortotróp héjként számíthassuk, annak a követelménynek is teljesülnie kell, hogy az ortotróp héj horpadási hullámának ne csak a csomópontjain (inflexiós pontjain) legyen borda, hanem egy-egy félhullámon belül is. Az irodalomban eltérő adatok találhatók arról, hogy hány borda legyen egy félhullámon belül. Az biztos, hogy ha egy félhullámhossz négy bordatávval egyenlő, akkor a bordázat már elég sűrű ahhoz, hogy az ortotróp folytonos héjjal való helyettesítést gyakorlatilag minden esetben pontosnak tekinthessük [8.3.1]. Néhány összehasonlító vizsgálatból [7.14], valamint a rácsos héjakra vonatkozó eredményekből [8.3.2] azonban arra következtethetünk, hogy ennél kevesebb bordával is kielégítő eredményeket kaphatunk egészen addig, amíg egy félhullámhossz legalább két bordatávolsággal egyenlő.

Mivel a bordázott (ortotróp) héj horpadási hullámhossza általában lényegesen nagyobb a merevítetlen héjénál (a horpadási félhullámhossz általában a hatékony vastagság négyzetgyökével arányos, a bordás héj hatékony vastagsága pedig sokszorosa a merevítetlen héjénak), ezért ha a bordázást a 8.2.1. pont szerint sűrűbbre választjuk, mint a merevítetlen héj félhullámhossza, akkor általában automatikusan teljesítjük azt a feltételt is, hogy a bordás héj félhullámhossza több bordatávolsággal legyen egyenlő.

8.2.6. A bordás héjjal egyenértékű ortotróp héj merevségi tényezői

A leírt közelítésekkel (csak a lemez vesz fel membránnyírást, elhanyagoljuk a bordázat külpontosságának hatását és a harántkontrakciót) a következőképpen írhatjuk fel a bordás héj ortotróp merevségi tényezőit, ha két, egymásra merőleges (x és y) irányú bordázatunk van:

A membránmerevségek:

$$D_x = E \left(t + \frac{F_x}{b_y} \right), \quad (8.2.10a)$$

$$D_y = E \left(t + \frac{F_y}{b_x} \right), \quad (8.2.10b)$$

$$D_{xy} = 2Gt. \quad (8.2.10c)$$

A lemezmerevségek pedig:

$$B_x = \frac{EI_x}{b_y}, \quad (8.2.11a)$$

$$B_y = \frac{EI_y}{b_x}, \quad (8.2.11b)$$

$$B_{xy} = \frac{Gt^3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{GI_{tx}}{b_y} + \frac{GI_{ty}}{b_x} \right). \quad (8.2.11c)$$

Itt F_x, F_y — egy-egy x , ill. y irányú borda keresztmetszeti területe (a lemez nélkül),
 b_x, b_y — a bordatávolságok (8.2.2. ábra),
 I_x, I_y — egy-egy x , ill. y irányú borda és a vele hajlításra együttműködő lemezszélesség együttes inercianyomatéka,

I_{tx}, I_{ty} — egy-egy x , ill. y irányú borda csavarási inercianyomatéka,

$G = \frac{E}{2}$ — a nyírási rugalmassági modulus.

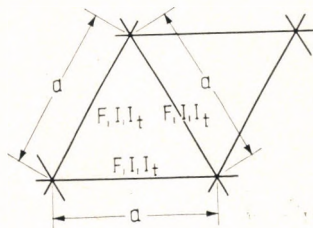
8.3. Rácsos héjak

Nagyobb nyílású héjszerkezeteket sok esetben acélszerkezetből célszerű tervezni oly módon, hogy a héj felületét háromszöghálózattal borítjuk be, és csak az e háromszöghálózat oldalainak megfelelő rudakat képezzük ki teherviselő szerkezetként. A héjalás ilyenkor nem számít bele a teherviselésbe. Maga a rácozás lehet egy- vagy kétrétegű.

8.3.1. Egyrétegű rácsos héjak

Az egyrétegű rácozásról szóló főbb tudnivalókat — WRIGHT alapvető dolgozatának [8.3.6] eredményeit csavarásra is merev rácsrudak esetére továbbfejlesztve — a következőkben foglaljuk össze:

Ha a rácozás egyenlő oldalú háromszögekből áll, a három irányban futó rudak szelvényei azonosak, és a rudak a csomópontokban mereven kapcsolódnak egymás-



8.3.1. ábra. Az izotróp héjjal helyettesíthető egyrétegű rácsos héj

hoz (8.3.1. ábra), akkor a rácsos héj egy állandó vastagságú izotróp tömör héjjal helyettesíthető, melynek vastagsága:

$$t' = 2 \sqrt{\frac{3EI + GI_t}{EF}}, \quad (8.3.1)$$

rugalmissági modulusa pedig:

$$E' = \frac{2F}{\sqrt{3} at'} E, \quad (8.3.2)$$

ahol: a — egy rúd hálózati hossza,

F — egy rúd keresztmetszeti területe,

I — egy rúd inercianyomatéka (a héjfelület érintőjébe eső keresztmetszeti tengelyre),

I_t — egy rúd csavarási inercianyomatéka,

E — a rudak anyagának rugalmassági modulusa

és G — a rudak anyagának nyírási modulusa.

E helyettesítő héj harántkontrakciós tényezője (a rácsrudak anyagától függetlenül) húzásra:

$$\nu' = 1/3. \quad (8.3.3)$$

Hajlításra valamivel kisebb ν'' adódik, és ennyiben a szerkezet $GI_t > 0$ esetén nem szabatosan izotróp. Mivel azonban a 7. fejezetben mondottak szerint a harántkontrakciós tényező amúgy is elhanyagolható, ennek nincs különösebb jelentősége.

A bordás héjakhoz hasonlóan itt is felmerül a kérdés, hogy milyen sűrű rácsozás esetén ad a helyettesítő homogén héj kielégítően pontos eredményt. FORMAN és HUTCHINSON [8.3.2] meghatározták a fenti feltételeknek megfelelő hálózatú radiálisan terhelt gömbhéj és alkotóirányban nyomott hengerhéj lineáris kritikus terhét a pontos számítással (a valódi rácsos szerkezetet véve alapul), valamint a helyettesítő izotróp héj segítségével. Számításaikban a rudak csavarási merevségét a csőkeresztmetszetnek megfelelő $GI_t = 0,769 \cdot EI$ értékűre vették fel. Vizsgálataik eredményeként azt kapták, hogy amíg $a/\sqrt{Ri} \leq 2$ (ahol $i = \sqrt{I/F}$ egy rúd inerciasugara, R pedig a héj görbületi sugara), azaz a felvett GI_t/EI arány mellett jó közelítéssel érvényes $t' = 3,88 i$ egyenértékű falvastagságot behelyettesítve $a/\sqrt{Rt'} \leq 1$, addig a kontinuum-módszer legfeljebb 10%-kal nagyobb (lineáris) kritikus terhét szolgáltat a pontos értéknel.

A 8.2.1. és a 8.2.5. ábrák segítségével könnyen átszámíthatjuk ezt az eredményt a rúdhossznak és a helyettesítő héj horpadási félhullámhosszának arányára. Mivel a lineáris elmélet nem adja meg egyértelműen a horpadási hullám két méretét, ezért a biztonság javára mindegyik esetben a minimális lehetséges méretet vettük alapul, és így — közelítően — azt kaptuk, hogy a 10%-os hibahatárt akkor biztosíthatjuk, ha a rácsos héjnak a lineáris elmélet adta félhullámhossza legalább két rúdhosszal egyenlő.

A 10%-os hibahatárt [8.3.2] szerint azzal a kikötéssel is biztosíthatjuk, hogy a helyettesítő héj (lineáris) kritikus terhének elérésekor egyik rúdban se keletkezzék nagyobb erő, mint a két végén csuklós megfogás feltételezésével kapható saját Euler-erejének 70%-a.

Ha a rácozás eltér az egyenlő oldalú háromszöghálózattól, akkor a helyettesítő héj anizotróp lesz [8.3.3]. Ezzel most nem foglalkozunk részletesen.

Az egyrétegű rácsos héjaknak két „helyi” stabilitásproblémája van. Az egyik az egyes rácsrudak csomópontok közötti kihajlása, amelyre — a csatlakozó rudak esetleges befogó hatásának elhanyagolásával — két végén fix csuklós megtámasztást alapul véve méretezhetjük a rudakat. A másik probléma a csomópontok „átpattanása”, koncentrált (pl. szerelési) teher alatt. Erre vonatkozóan az irodalomra utalunk [8.3.6], [8.3.1].

8.3.2. Kétrétegű rácsos héjak

A kétrétegű rácsos héj egy izotróp folytonos héjjal egyenértékű [8.3.7], [8.3.4], ha a két réteg egyforma és mindegyik egyenlő oldalú háromszöghálózatot alkotó, egyforma szelvényű rudakból áll (8.3.2. ábra). E helyettesítő héjnak vastagsága

$$t' = \sqrt{3} h, \quad (8.3.4)$$

rugalmassági modulusa pedig:

$$E' = \frac{4}{3} \frac{F}{ah} E, \quad (8.3.5)$$

ahol h a két rács-sík egymástól mért távolsága, a többi betű jelentését pedig a (8.3.1)—(8.3.2) képleteknél találjuk meg.

A harántkontrakciós tényezőt most is a (8.3.3) képlet szolgáltatja.

A kétrétegű rácsos héj helyettesítő kontinuummal végzett horpadásszámításának pontosságát eddig nem vizsgálták meg részletesen. Logikusnak tűnik azonban, hogy az egyrétegű rácsos héjakra vonatkozó [8.3.2] összehasonlítás eredményeit kétrétegű szerkezetre is érvényesnek tekintsük, mégpedig függetlenül attól, hogy a rudak a csomópontokban mereven vagy csuklósan kapcsolódnak-e egymáshoz. A kétrétegű rácsszerkezet hajlítási merevségét ugyanis — az egyrétegűével ellentétben — nem a merev csomóponti kapcsolat, hanem a rudak húzási merevsége biztosítja.

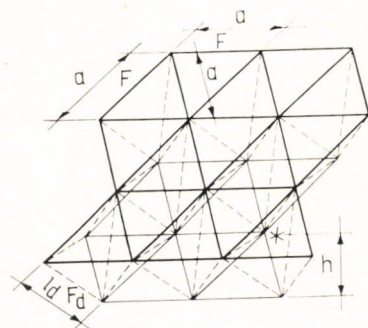
E kétrétegű szerkezet a hajlítási nyírás szempontjából többnyire sokkal lágyabb a hajlítás szempontjából vele egyenértékű izotróp tömör héjnál, így tulajdonképpen egy szendvicshéjjal egyenértékű (l. a 8.1. pontot). Ha a két rács-síkot összekötő valamennyi diagonális rúd hossza és keresztmetszeti területe azonos, akkor a szerkezet a nyírási alakváltozás szempontjából izotróp, és a „szendvics hatásra” jellemző q tényező a következő:

$$q = \frac{\sqrt{3} l_d^3}{E F_d h^2}, \quad (8.3.6)$$

ahol (8.3.2. ábra):

l_d — a diagonális rudak hossza,

F_d — ugyanezeknek a keresztmetszeti területe.



8.3.2. ábra. Az izotróp szendvics-héjjal helyettesíthető kétrétegű rácsos héj

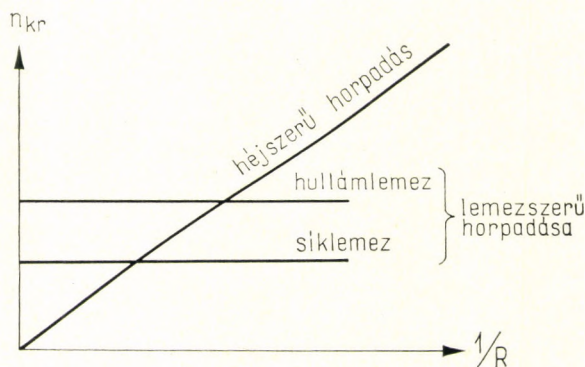
Ha a két hálózat nem egyenlő oldalú háromszögekből áll, akkor a helyettesítő héj anizotrop [8.3.4]. Ha pedig a két réteg nem egyforma, akkor a szerkezet nem tömör héjjal, hanem bordáslemezzel egyenértékű [8.3.5].

E szerkezet „helyi” instabilitási problémája: a rácsrudak kihajlása a csomópontok között, amire a legegyszerűbben a két végén fix csukló feltételezésével méretezhetjük a rudakat (a többi rúd esetleges befogó hatásának elhanyagolásával), de ez a méretezési mód nem veszi figyelembe a helyi kihajlás és az általános horpadás esetleges kedvezőtlen egymásrahatását.

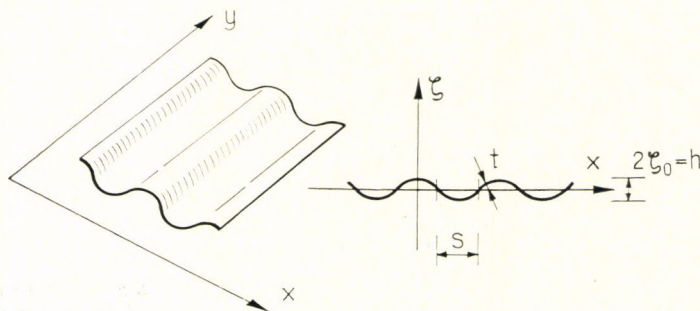
8.4. Hullámos héjak

A hullámos héjakat általában hullámlemezek (8.4.2. ábra) vagy trapézlemezek (8.4.3. ábra) torzításával, ill. meghajlításával állítják elő. Ennek megfelelően a hullámos héjak a leggyakrabban hiperbolikus paraboloid, vagy hengerhéj alakúak [8.4.1], [8.4.3], de előfordult elliptikus felületű alkalmazás is [2.35].

Az ilyen hullám- vagy trapézlemeznek az a tulajdonsága, hogy a hullámosításra merőleges y irányban nagy a hajlítási merevsége, a hullámosítás x irányában viszont kicsi a nyúlási merevsége. A merevségeknek ez a tulajdonsága azt eredmé-

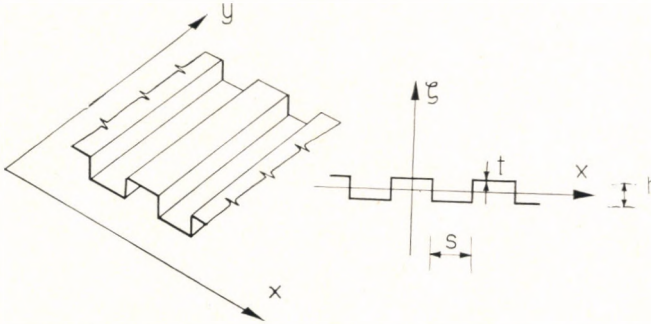


8.4.1. ábra. A héjszerű és lemezszerű kritikus teher



8.4.2. ábra. Hullámlemez keresztmetszete

nyezi, hogy azokban az esetekben, amikor a kritikus teher e nyúlási és hajlítási merevségek szorzataként adódik („héjszerű” horpadás), a héj kritikus terhe ugyanakkora lesz, mintha hullámosítatlan lemezből készült volna [7.6.]. Lényeges kritikus teher növekedést a hullámosítás csak akkor okoz, ha a kritikus terhet döntő mértékben a hajlítási merevség szabja meg („lemezszerű” horpadás).



8.4.3. ábra. Trapézlemez keresztmetszete

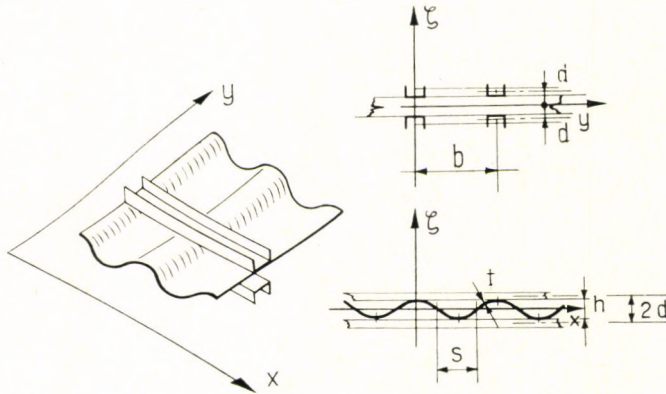
E jelenség jobb megértéséhez azt kell meggondolnunk, hogy a kritikus teher akkor adódott a nyúlási és hajlítási merevségek szorzataként, amikor a peremfeltételek nem befolyásolták a horpadási hullám hosszát, és a kritikus terhet minimizálással határoztuk meg (mint pl. az axiálisan nyomott hengernél, a gömbnél, vagy a nem túl lapos hiperbolikus paraboloidnál). Ezeket az eseteket nevezük most „héjszerű” horpadásnak. A héj görbületének ($1/R$ -nek) függvényében felrakva a kritikus terhet, ferde egyenest kapunk (8.4.1. ábra).

Ha azonban a horpadási hullám hosszát a peremfeltételek korlátozzák, akkor — szélső esetben — nem jut szerephez a héj görbülete (azaz nyúlási merevségei), hanem csupán a hajlítási merevségei szabják meg a kritikus terhet („lemezszerű” horpadás), l. a 8.4.1. ábra vízszintes egyeneseit. Ekkor a kritikus terhet a héjnak megfelelő alaprajzú és peremfeltételű lemez kritikus erejeként számíthatjuk. A hajlítási merevségek kombinációját a hullámosítás mindenképpen megnöveli. Így a hajtogatásnak, ill. hullámosításnak csak a merevséget növelő hatása marad meg, és a hullámlemez „lemezszerű” horpadásához tartozó vízszintes egyenes (8.4.1. ábra) a sima lemez egyeneséhez képest magasabban helyezkedik el. Ez történik például a hullámlemezből készülő lapos hiperbolikus paraboloidhéjak horpadásánál.

A héj pontos kritikus terhét meghatározó görbe a héjszerű és a lemezszerű horpadáshoz tartozó kritikus teher egyeneseihez mint aszimptotákhoz simul, amint például az 5.3. ábrán a hiperbolikus paraboloid torznégyszöghéj esetében.

Ennek megfelelően a két horpadási viselkedése a két aszimptota metszéspontja körül a tiszta „héjszerű” és a „lemezszerű” horpadások közötti átmenetet mutatja. De ez az átmeneti szakasz viszonylag kis terjedelmű, és a kritikus teher sem lényegesen nagyobb az aszimptoták által megszabottnál. Ezért a héj viselkedése jól jellemezhető a tiszta héjszerű, ill. lemezszerű horpadáshoz tartozó egyenesekkel.

Növelhető a hullámos héj merevsége a hullámokon keresztirányban végigfutó bordák vagy lemezek (8.4.4. ábra) alkalmazásával [2.35]. Ezek megnövelik a hullámosítással párhuzamos x irányban a hajlítási és nyúlási merevséget, és így a merevített hullámlemez-héj kritikus terhét is emelik. Ennél a típusnál az x irányban a hullámos lemez mintegy a rácsozást képezi. E rácsozás azonban nem egyenes rudakból, hanem íves hullámokból áll. Így a kombinált keresztmetszet hajlítási-nyírása hajlítási deformációt is okoz a hullámos „rácscrudakban”, ezért a



8.4.4. ábra. Merevített hullámlemez keresztmetszete. (A merevítés más profil, sőt síklemez is lehet)

nyírési alakváltozás már semmiképpen sem hanyagolható el. Emiatt a kritikus teher meghatározásánál a szendvicshéjakról a 8.1. pontban mondottakat is figyelembe kell venni.

A hullámos vagy trapéz keresztmetszetű héjaknál a lokális kihajlás, azaz az elemek helyi horpadása csak a lemezszerű horpadás esetén fordulhat elő, mert a héjszerű horpadás kritikus terhe mindenképpen alacsonyabb az igen kis hullámhosszal horpadó lokális kihajláshoz tartozó kritikus tehernél. A merevített hullámlemez-héjban azonban a lokális kihajlást már a héjszerű horpadásnál is vizsgálni kell. Ehhez a 8.1. pontban adtunk szempontokat.

A leírt hullám-, ill. trapézlemez-héjak ortotróp héjként történő horpadás-számításához szükséges keresztmetszeti jellemzőit a következőkben ismertetjük.

A hullámlemez merevségi jellemzői. A hullámlemez keresztmetszetét a 8.4.2. ábrán mutatjuk be. A parabola alakú hullámok laposságát és a $\nu = 0$ értéket feltételezve, valamint a bordás héjakhoz hasonlóan alhanyagolva az öblösödés hatását, [7.6] alapján felírhatók a merevségi jellemzők:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= B_{xy} = B, \\ B_y &= B(1 + \Theta), \\ D_x &= \frac{D}{1 + \Theta}, \\ D_y &= D_{xy} = D. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.1)$$

E kifejezésekben:

$$\left. \begin{aligned}
 B &= \frac{Et^3}{12}, & D &= Et, \\
 \Theta &= \frac{12}{st^2} \int_0^s \zeta^2 dx = \frac{32}{5} \left(\frac{\zeta_0}{t} \right)^2.
 \end{aligned} \right\} (8.4.2)$$

Az y irányban véges görbülettel bíró hullámos héj x irányú összenyomódását (pl. a gyűrűirányban körbefutó hullámokkal bíró hengerhéj alkotóirányú nyomása esetén) a hullámok egyre fokozódó kigömbülése folytán ébredő y (gyűrű-) irányú húzó-, ill. nyomóerők gátolják. A gyakorlati esetekben ez a hatás kicsi (számpéldák alapján legfeljebb 10–20% nagyságrendűségűre becsülhető), és ezenkívül az eddig tárgyalt héjhorpadási esetekben a D_x összenyomódási merevségnek alig van szerepe (7.6. ábra). Mindezek miatt D_x értékének meghatározásánál elhanyagoltuk ezt a hatást.

A trapézlemez merevségi jellemzői. A 8.4.3. ábrán bemutatott trapézlemez keresztmetszeti jellemzőit a hullámlemezhez hasonlóan lehet levezetni. Itt már nem lehet a laposságot feltételezni, mert a ζ irányú lemezzszakaszok hatása is jelentős lehet. A következő képletekben a $\nu = 0$ feltevéssel meghatározott keresztmetszeti jellemzőket adjuk meg:

$$\left. \begin{aligned}
 B_x &= B \frac{1}{1 + h/s}, \\
 B_y &= B \left[1 + 3 \left(\frac{h}{t} \right)^2 + \frac{h}{s} \left(\frac{h}{t} \right)^2 \right], \\
 B_{xy} &= B(1 + h/s).
 \end{aligned} \right\} (8.4.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_x &= D \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{h}{t} \right)^2 + \frac{h}{s} \left(\frac{h}{t} \right)^2}, \\
 D_y &= D(1 + hs), \\
 D_{xy} &= D \frac{1}{1 + h/s}.
 \end{aligned} \right\} (8.4.4)$$

E képletekben $B = Et^3/12$ és $D = Et$.

A merevített hullámlemez merevségi jellemzői. A 8.4.4. ábrán bemutatott merevített hullámlemez keresztmetszet y irányú merevségi jellemzői a merevítetlen hullámlemezzel egyeznek meg. Az x irányban viszont a lemez merevségi értékei a merevítés lényegesen nagyobb merevségi jellemzői mellett elhanyagolhatók, így csak ez utóbbiak szerepelnek a kifejezésekben. A lemeznírási merevséget a merevítő bordák nem növelik számottevően, ezért ebben csak a hullámos „lemezrácsozás” merevsége szerepel. A csavarási merevség pedig, ha a bordák csavarási merevségét elhanyagoljuk, közelítően a hullámlemez csavarási merevségként írható fel.

Így a merevített hullámlemezhez merevségi jellemzői a következők:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{2E}{b} (Fd^2 + I), \\ B_y &= B(1 + \Theta), \\ B_{xy} &= B, \\ D_x &= \frac{2E}{b} F, \\ D_y &= D_{xy} = D. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.5)$$

E képletben B , D , Θ a (8.4.2) szerintiék, F , ill. I egy darab merevítő elem keresztmetszeti területe, ill. saját súlyponti tengelyére számított tehetetlenségi nyomatéka.

Megjegyezzük, hogy az alsó-felső merevítő bordázat egymáshoz képest y irányban eltolva is elhelyezhető.

A gerincet képező hullámlemez nyírási alakváltozásából származó szendvics-hatást a szendvicshéjaknál bemutatott ϱ tényező segítségével vehetjük figyelembe. Értékét úgy határozhatjuk meg, hogy a hullámlemez-gerinc nyírási alakváltozását egyenlővé tesszük a szendvicslemez nyírási alakváltozásával, és ebből kifejezzük a ϱ tényezőt. Az ilyen módon x , ill. y irányban meghatározott ϱ_x , ill. ϱ_y tényezők a következők:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_x &= \frac{1}{Et} \left(\frac{s}{h} \right)^2 (1 + 0,25\Theta), \\ \varrho_y &= \frac{1}{Et} \frac{2s}{t}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.6)$$

A kritikus teher izotróp szendvicshéjként való becsléséhez a

$$\varrho \approx \frac{\varrho_x + \varrho_y}{2} \quad (8.1.4)$$

közelítő kifejezést használhatjuk. Kényesebb esetekben ortotróp szendvicshéjként számíthatjuk a szerkezetet [2.13], [8.1.5] szerint.

9. A stabilitáselmélet eredményeinek gyakorlati felhasználása

Az előző fejezetekben ismertettük a rugalmas stabilitáselmélet eredményeit. Ezek ismerete azonban még nem elégséges egy konkrét héj stabilitásvizsgálatának elvégzéséhez. A megfelelő biztonságú tervezéshez egyrészt tudnunk kell, hogy mekkorára vegyük fel a rugalmas stabilitásvizsgálat alapadatait, másrészt figyelembe kell vennünk, hogy a héjszerkezetekhez alkalmazott anyagok tulajdonságai általában eltérnek a lineárisan rugalmas anyagéitól. Így a képlékenység, betonanyagú héjknál pedig a repedések és a lassú alakváltozás lényegesen csökkenthetik a kritikus terhet.

A következőkben azokkal a szempontokkal foglalkozunk, amelyeket a héj-tervezési stabilitásvizsgálatnál feltétlenül figyelembe kell vennünk.

9.1. A héjak kritikus terhét befolyásoló tényezők és hatások

A héjak kritikus terhét befolyásoló tényezőket a következőképpen csoportosíthatjuk:

A kritikus teher függ:

- a héj anyagi tulajdonságaitól, melyet az E alakváltozási tényezővel jellemezhetünk,
- a héjlemez B hajlítási és D nyúlási merevségi jellemzőjétől. Ezeket a héjszerű horpadás eseteiben [9.8] alapján együttesen a

$$K = \sqrt{BD} \quad (9.1)$$

héjhorpadási merevségi jellemzővel vehetjük figyelembe;

- a héj görbületi viszonyaitól, melyet a főgörbületi sugarak jellemeznek.

E tényezők viszont a következő adatoktól, ill. hatásoktól függnek:

- az E alakváltozási tényező függ az alkalmazott anyag
 - minőségétől (szilárdságától),
 - lassú alakváltozásától,
 - fajlagos igénybevételeitől. (Ez tartalmazza az anyag képlékeny tulajdonságának hatását is.)

A K héjhorpadási merevségi jellemző függ

- a kivitelezett és a tervezett vastagsági méretek arányától, vasbeton héj esetén pedig még
 - a beton repedéseitől, valamint
 - a betonban alkalmazott acélbetétek mennyiségétől, minőségétől és a keresztmetszetben elfoglalt helyzetétől is.

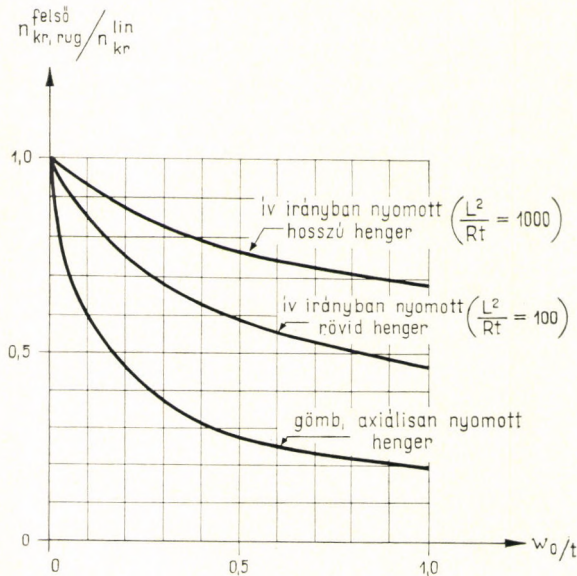
- A héj görbületi sugarai függenek a
- kivitelezési hibák és a
 - hajlítónyomatékok

okozta kezdeti hullámosságtól, melyet a metszeterők kezdeti külpontosságával, azaz a w_0 kezdeti hullámossági amplitúdóval (külpontossággal) veszünk figyelembe.

A következőkben először a rugalmas anyagú héjak kritikus terhének meghatározásához szükséges kezdeti w_0 külpontosság felvételét tárgyaljuk (9.2—9.3 pont). Ezután a héjanyag képlékenységének hatásával foglalkozunk (9.4 pont). Utána a fémhéjak, illetve vasbeton héjak különleges problémáit, a kúszást és a berepedést tárgyaljuk (9.5, ill. 9.6 pont). Majd a kritikus teher mérésekkel megközelíthető értéke (9.7 pont), végül pedig a biztonsági tényező megválasztásának szempontjai következnek (9.8 pont).

9.2. A számításba veendő mértékadó hullámosság (külpontosság)

A 2. és 4. fejezetben ismertettük, hogy miként csökkenteti a hullámosság a kritikus terhet. Ezek közül a legalacsonyabb értéket a gömbhéjra vonatkozó KAO—PERRONE [4.16] vizsgálatok adják. Ők azonban egy irreálisan kedvezőtlen feltétellel dolgoztak, mert egy aszimmetrikus, csak a héjnegyedre kiterjedő hullámosságot



9.1. ábra. A henger és gömbhéjak felső kritikus terhének esikkenése a w_0 kezdeti hullámossági amplitúdó függvényében

vettek figyelembe. A valóságban a maximális hullámosságnak legfeljebb csak egy része lehet ilyen tulajdonságú. Ezért megtehetjük, hogy a biztonságos méretezéshez ezeket az eredményeket csak részben vegyük figyelembe. Ha az elméleti eredményeket e szempontok mérlegelésével értékeljük, akkor a 9.1. ábrán bemutatott görbéket nyerjük. Így a gömb és az axiálisan nyomott henger görbéje egybeesik. Ezek kellő megbízhatósággal alkalmazhatók az ismert kezdeti hullámosságú henger és gömbhéjak felső kritikus terhének számítására.

Az eddig tárgyaltak azonban nem nyújtanak támpontot arra, hogy mekkorára kell felvinnünk w_0 értékét, ezért ezzel is kell foglalkoznunk. Amint a 9.1. ábrán látjuk, a kezdeti külpontosság nagymértékben csökkenti a héjak kritikus terhét. Igen fontos tehát, hogy helyesen vegyük számításba.

A kezdeti külpontosság két részből áll. Az egyik a véletlen jellegű, kiviteli pontatlanságból származó kezdeti hullámosság, melynek számításba veendő amplitúdóját $w_{0, vél}$ -nek jelöljük.

A kezdeti külpontosság másik része a számítható külpontosság, melyet az erőjáték törvényszerűségeinek megfelelően a hajlításelmélettel tudunk meghatározni. E külpontosságot $w_{0, szám}$ -nak jelöljük.

E két külpontosság maximumainak egybeesése kevésbé valószínű. Ezért az egybeesés valószínűségének meghatározásánál úgy járhatunk el, hogy a valószínűségszámítás közelítő szabályai szerint a nagyobbikat teljes értékkel, a kisebbiket pedig félértékkel vesszük számításba. Így a mértékadó külpontosság az

$$w_{0, M} \geq \begin{cases} w_{0, vél} + 0,5w_{0, szám} \\ 0,5w_{0, vél} + w_{0, szám} \end{cases} \quad (9.2)$$

érték közül a nagyobbik. Ezzel a hullámosságok középértékeinek egybeesési valószínűségét vettük tekintetbe. A külpontosságoknak a középértéktől való eltérését, azaz a szórást a biztonsági tényezőben vesszük figyelembe.

A véletlen jellegű külpontosság. Ha megfigyeljük az elméletileg meghatározott kritikus tehernek a kezdeti külpontosságtól függő csökkenését (9.1. ábra) és az axiálisan nyomott henger és a gömb kísérleti eredményeinek az R/t aránytól függő csökkenését (2.3. és 4.2. ábrák), egyértelműen azonos törvényszerűséget látunk. Ennek az az oka, hogy minél kisebb a héj falvastagsága, annál pontatlanabban lehet csak kivitelezni.

Mindkét esetben az $R/t = 1000$ aránynál a felső burkoló 0,7, az alsó burkoló pedig 0,1 értékű. A két érték számtani közepeként 0,4 adódik. De [9.2] szerint a kísérleti értékek eloszlása nem szimmetrikus: a hengerkísérleteknél a középérték mintegy 10%-kal lejjebb van, mint az átlagérték. A gömbkísérletek eredményeinek leszámolással történő kiértékelésével hasonló eredményt kapunk. Így a középérték 0,36-ra vehető.

A w_0 kezdeti külpontosság szerinti teherbíráscsökkenés gömb és axiálisan nyomott henger esetén közelítően kifejezhető a

$$p_{kr}^{felső} / p_{kr}^{lin} = \frac{1}{1 + 6 \frac{w_0}{t}} \quad (9.3)$$

hiperbolával (9.2a. ábra). A kísérleti kritikus tehernek a görbületi sugár és a vastagság arányától függő csökkenésének középértéke pedig a

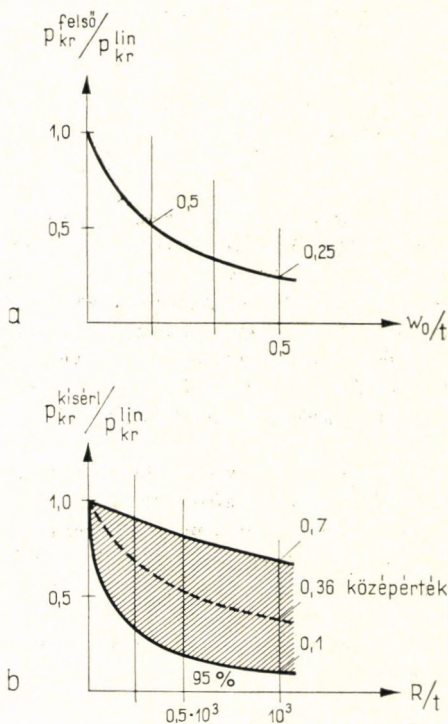
$$p_{kr}^{felső}/p_{kr}^{lin} = \frac{1}{1 + 1,7 \frac{R}{1000t}} \quad (9.4)$$

összefüggéssel közelíthető meg (9.2b. ábra). A két érték egyenlítéséből a figyelembe veendő véletlen külpontosság középértékére a

$$w_{0, vé} = \frac{R}{3500} \quad (9.5)$$

érték adódik. A véletlen külpontosságot mérésekkel is ellenőrizték [9.1]. Az $R/t = 1000$ arányú hengereken alkotórányban a későbbi kihajlási helyeken mért véletlen hullámosság $R/3000$ érték körül mozgott. Így a (9.5) szerinti érték kellően megbízhatónak látszik.

A számítható külpontosság. A számítható külpontosságot a héjak hajlításelméletével tudjuk meghatározni. A membrán-erőjáték szerint számítható héjak perm-



9.2. ábra. a — az axiálisan nyomott henger és a radiális nyomással terhelt gömbhöz közelítően közös értékűnek vett felső kritikus tehernek a kezdeti hullámosság w_0 max. amplitudójának értékétől függő változása, b — a henger- és gömbkísérletek szórási tartománya a görbületi sugár és a falvastagság R/t arányának függvényében

zavaraiból származó kezdeti külpontosság értékeire [9.8] tartalmaz egyszerű képleteket.

A számítható külpontosságok értékeibe feltétlenül bele kell vennünk a dinamikus hatásokból keletkező rezgések okozta külpontosságokat is, ha azok nagyságrendje w_0 -hoz mérhető, mert intenzívebb rezgéskeltés esetén a rezgések amplitúdója által megnövekedett kezdeti hullámosság már horpadást okozhat a szerkezeten. Ilyen számításba veendő rezgések pl. a hajók és repülőgépek héjszerkezeteinél a motorok által keltett rezgés, és egyes ipari épületekben elhelyezett, rázó hatású gépek által keltett rezgés.

Az épületek térelfedésén az ott dolgozó személyek koncentrált terhe által keltett alakváltozás is okozhat kellemetlen külpontosság-növekedést, ha nagysága w_0 -hoz mérhető. Ennek hatását a lapos ívek átpattanásának [9.4] analógiájával vehetjük figyelembe.

9.3. A külpontosan nyomott rugalmas hég felső kritikus terhének közelítő meghatározása

A külpontosan nyomott képlékeny anyagú hég és a beton- vagy vasbeton anyagú hég felső kritikus terhének meghatározásához szükségünk lesz a homogén, rugalmas anyagú hég $P(w)$ erő-alakváltozás görbéire (1.1. ábrák). Ez azonban csak kevés esetre van feldolgozva (pl. a [2.57]-ben szereplő dongahégmező-példában és a [4.21] szerinti gömb-példában), mert a w alakváltozások helyett a legtöbbször az erőirányú f összenyomódás függvényében ábrázolják a terhet (1.4. ábrák).

Így szükségünk van egy eljárásra, amellyel a külpontosan nyomott hég $P(w)$ erő-alakváltozás-diagramját megközelíthetjük.

A tökéletes héjra az erő-alakváltozás-diagram több esetben ismert. A közelítő eljárás abból áll, hogy a külpontosan nyomott egyenes rúd (1.1a. ábra).

$$p = p_{kr} \left(1 - \frac{w_0}{w} \right) \quad (9.6)$$

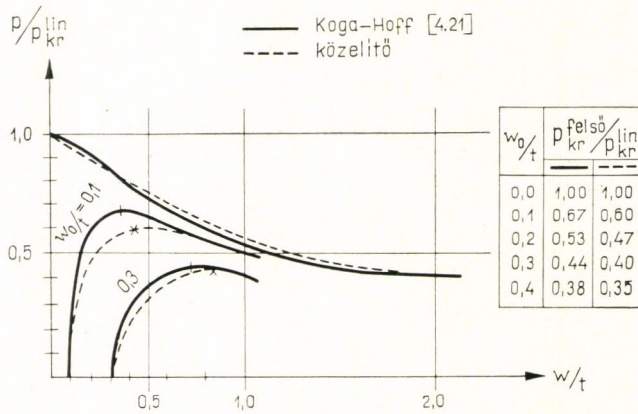
összefüggését arányos csökkentéssel oly módon torzítjuk, hogy ne a p_{kr} vízszintes egyeneséhez, hanem a tökéletes hég kihajlását ábrázoló $P(w)$ -görbéhez simuljon.

Ha a tökéletes hég $P(w)$ -diagramja sincs meg, de ismert a p_{kr}^{lin} , és a $p_{kr}^{alsó}$ értéke, továbbá a $p_{kr}^{alsó}$ -hoz tartozó w_{kr} érték, akkor az 1.1d. ábra szerinti, aszimmetrikus viselkedésű tökéletes hég $P(w)$ -görbét megközelíthetjük egy olyan másodfokú parabolával, amely a $p/p_{kr}^{lin} = 1$ pontból indul, alsó vízszintes érintője a $p_{kr}^{alsó}$ értékénél van, az érintési pont pedig a $p_{kr}^{alsó}$ -hoz tartozó w_{kr} érték. Az 1.1c. ábra szerinti szimmetrikus viselkedésű tökéletes héjak $P(w)$ görbéi vízszintes érintővel indulnak ugyan, de ezeknél a biztonság javára szolgál az eső érintőjű parabolával való közelítés.

Ha a tökéletes hég alsó kritikus terhéhez tartozó w_{kr} érték sem ismert, akkor a parabola közelítés megtartása mellett a hasonló esetekre megoldott értékek közül a kisebbet kell választanunk, mert ez adja a kisebb kritikus terhet. Mivel a w_{kr} mindig nagyobb a kétszeres lemezvastagságnál, általában biztonságosan használhatjuk a

$$w_{kr} = 2t \quad (9.7)$$

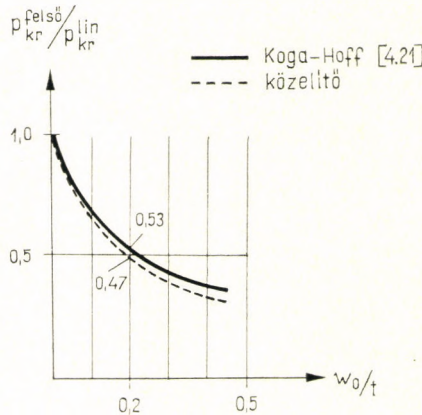
értéket.



9.3. ábra. A teljes gömbháj kritikuson túli viselkedése és a teherbírási görbe közelítő előállítása

E közelítő eljárást a [4.21] teljes gömb példáján a 9.3. ábrán mutatjuk be. A $p_{kr}^{fels\o}$ felső kritikus terhe és a w_0 kezdeti külpontosság közelítő és KOGA—HOFF szerinti pontos összefüggésének összehasonlítása a 9.4. ábrán látható.

Az irodalomban eddig felrajzolt görbékből úgy látszik, hogy a kezdeti hullámossággal bíró háj felső kritikus terhe csökkenésének gyakorlatilag határt szab a tökéletes háj alsó kritikus terhének értéke. Az ezzel megegyező $p_{kr}^{fels\o}$ -höz tartozó w_0 értéknél nagyobb külpontosság esetében ugyanis a görbének általában nincs maximumpontja, mert a növekvő alakváltozáshoz végig növekvő teherbírás tartozik, és így ilyen esetekben a felső kritikus terhe már nem értelmezhető.



9.4. ábra. A gömbháj felső kritikus terhe csökkenésének pontos és közelítő értéke a kezdeti hullámosság w_0 amplitúdójának függvényében

9.4. A képlékenység hatása

A héjakhoz alkalmazott anyagok (pl. acél, alumínium, vasbeton) általában képlékeny tulajdonságokkal rendelkeznek, és így eltérnek a lineárisan rugalmas anyagmodelltől. Ha a héj horpadása közben képlékeny alakváltozás következik be, akkor a kritikus teher kisebb lesz a rugalmas elmélet alapján meghatározottnál. Ezért a képlékenység hatását feltétlenül figyelembe kell venni.

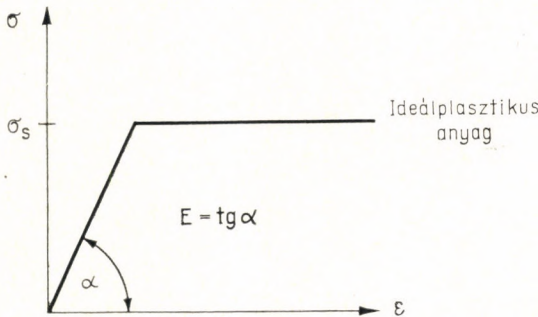
Az irodalomban újabban található néhány olyan dolgozat, amely a horpadás közben keletkező legnagyobb feszültség környékén fellépő képlékeny viselkedést is figyelembe veszi, de ezek a — meglehetősen bonyolult — számítások ma még gyakorlatilag nem hasznosíthatók. Ezért meg kell elégednünk egy közelítő módszerrel [9.9], amelynek azonban előnye, hogy elég nagy pontossága mellett viszonylag egyszerű és általánosan alkalmazható.

A vizsgálatnál ideálisan rugalmas — képlékeny (ideálpasztikus) anyagot tételezünk fel, melynek $\sigma(\epsilon)$ feszültség — nyúlás diagramját a 9.5. ábrán mutatjuk be. Ezzel az anyagmodellel elég jól megközelíthetők a fémhéjak tulajdonságai, sőt az alakváltozási jellemzők megfelelő megválasztásával a vasbeton héjak tulajdonságai is.

A módszer alapja az a JEŽEK által [9.16] rudakra alkalmazott felismerés, hogy a teherintenzitás rugalmas határa (n_{rug}) és a törési határa (n_t) a külpontosan nyomott szerkezet felső kritikus terhét viszonylag szűk határok közé szorítja. E határok között egy szerkesztéses közelítő módszerrel elegendő pontossággal meghatározható a felső kritikus teher, sőt a két határ számtani átlaga is jól használható értéket ad.

Itt n_{rug} rugalmas határnak nevezzük azt, amikor a feszültség a mértékadó keresztmetszet valamely szélső szálában eléri a σ_s folyási határt, n_t törési határnak pedig azt az állapotot, amelynél a teljes mértékadó keresztmetszet pasztifikálódott. Az n_t és n_{rug} tehát keresztmetszetre vonatkozó mennyiségek, és a keresztmetszetre ható erő mindekori külpontosságától függnének, és miután a legnagyobb horpadási alakváltozás keresztmetszetére értelmezzük őket, közelítően az egész szerkezet állapotára is jellemzőnek tekinthetők.

A vizsgálatnál a 9.3. pontban leírt közelítő erő-horpadási alakváltozás diagramot fogjuk alkalmazni, a $w_{\text{kr}} = 2t$ feltétellel. (Pontos diagram létezése esetén természetesen az használandó.) A módszer alapelvét egy $n_s/n_{\text{kr}}^{\text{lin}} = 1$ tulajdonságú



9.5. ábra. Az ideálisan rugalmas — képlékeny anyag $\sigma(\epsilon)$ feszültség — nyúlás diagramja

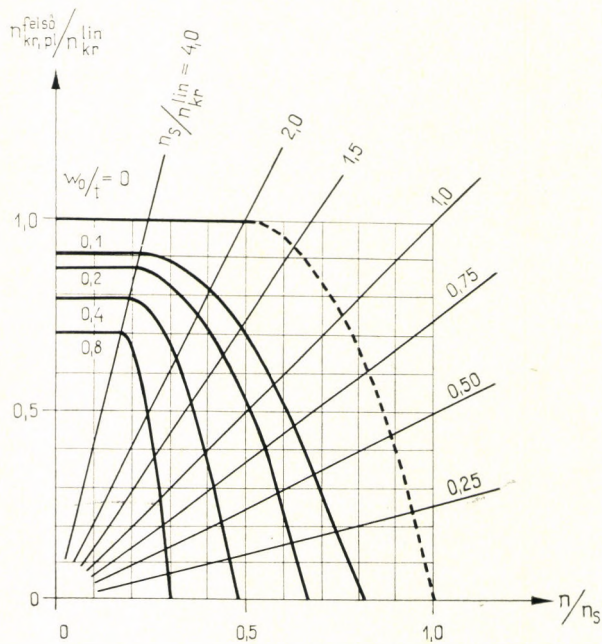
elmetszik a rugalmas alakváltozás vonalát, és a héj minden esetben eső teherbírá-súvá válik. A 9.7b. ábrán viszont az az eset van feltüntetve, mikor a rugalmas kritikus erő jóval kisebb a képlékeny központos törőerőnél. Ilyenkor a rugalmasan is eső teherbírá-sú héj megmarad eső teherbírá-súnak. Az emelkedő teherbírá-sú héj kritikusan inneni viselkedése változatlan, a kritikuson túli (tehát már horpadással járó) teherbírá-sa egy darabig emelkedő marad, majd eső vonalúvá alakul át.

Konkrét esetben a héj kritikus terhét a 9.8 ábrán bemutatott szerkesztéssel lehet meghatározni.

A szerkesztés menete [9.9] alapján a következő:

Először meghúzzuk az I. és a II. tengelyeket. A II. tengely 1,0 pontjában merő-leges III. tengelyt emelünk, melynek léptéke megegyezik az I. tengelyével. A III. tengely később meghatározandó H_0 értékét és az origót a IV. egyenessel kötjük össze. Az I. tengely $n_{kr, rug}^{felső}/n_{kr}^{lin}$ pontjától az V. vízszintest húzzuk, amely az A pont-ban metszi el a IV. egyenest. Innen érintőlegesen egy függőleges tengelyű másod-fokú parabolát (VI.) szerkesztünk a II. tengelyen felmért n_{pl}/n_S pontig, majd az origótól a III. tengely n_S/n_{kr}^{lin} értékéhez húzott egyenessel (VII.) elmetszük a parabolát. Ezt a B metszéspontot visszavetítjük az I. tengelyre, és ez adja meg az $n_{kr, pl}^{felső}/n_{kr}^{lin}$ keresett értékét.

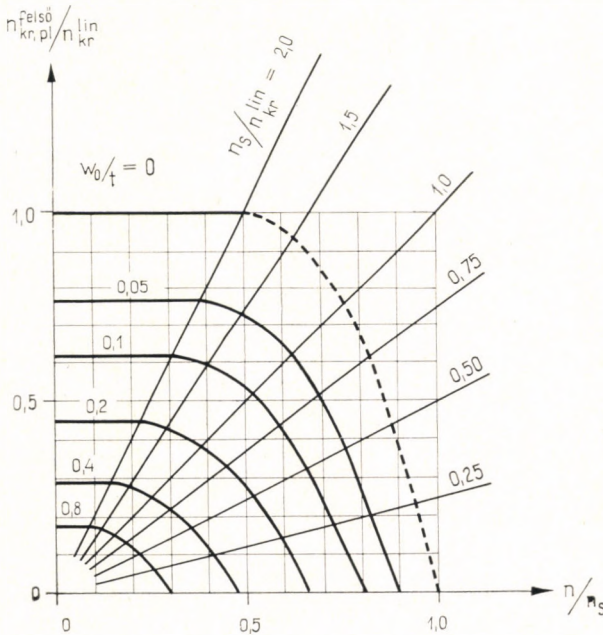
Itt $n_{kr, rug}^{felső}$ ill. $n_{kr, pl}^{felső}$ -nek neveztük a rugalmas, ill. a képlékeny felső kritikus erőt, n_S -nek neveztük azt az erőt, mely központos nyomás esetén, n_{pl} -nek pedig azt, amely az adott kezdeti külpontosság mellett teljes folyási állapotot okoz a kereszt-metszetben.



9.9. ábra. Diagramsereg ív irányban nyomott hosszú henger képlékeny kritikus terhének meghatározására

A III. tengelyre felmerendő H_0 nagyságát az az n_S/n_{kr}^{lin} érték adja meg, amelyhez tartozó n_{rug} görbe az $n_{kr, rug}^{felső}$ ponton halad át, mert ez választja el a rugalmas és a képlékeny tartományokat. Az ehhez az n_{rug} görbéhez tartozó n_S és az n_{kr}^{lin} hányadosa lesz H_0 $\left[H_0 = \frac{n_S(n_{rug})}{n_{kr}^{lin}} \right]$.

Jó közelítéssel az ív irányban nyomott homogén hengernél $H_0 = 4$, alkotó irányban nyomott homogén henger és hidrosztatikus nyomással terhelt homogén gömb esetén pedig $H_0 = 2$ értékkel számolhatunk.



9.10. ábra. Diagramsereg alkotóirányban nyomott henger és radiális külső nyomással terhelt gömb képlékeny kritikus terhének meghatározására

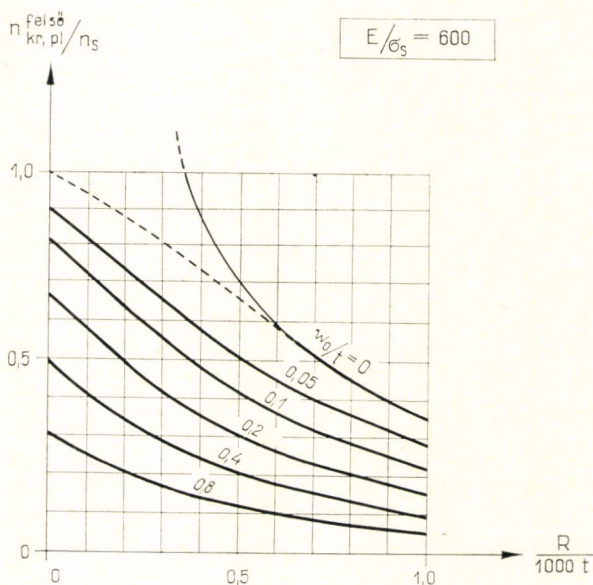
Homogén héjlemez feltételezésével [9.9]-ben megszerkesztettük a képlékeny kritikus teher meghatározásához szükséges diagramokat gömb és axiálisan nyomott henger, valamint ív irányban nyomott hosszú henger esetére. E diagram-seregeket a 9.9. és 9.10. ábrákon mutatjuk be. A kritikus teher a w_0/t görbéje és az n_S/n_{kr}^{lin} egyenese metszéspontjáról olvasható le a függőleges tengelyen.

A görbevonalú $\sigma(\varepsilon)$ -diagrammal rendelkező anyagnak ideálpasztikus anyagmodellrel való helyettesítése bármilyen kis külpontosság esetén jól közelít, de központos nyomás esetében jelentősebb hibát okoz a biztonság kárára [9.16].

A központosan nyomott szerkezet kritikus erejének meghatározására [9.7]-ben mutattunk be pontos eljárást. Az előbb említett hiba elkerülésére a 9.9., 9.10., 9.11. ábrákon a $w_0/t = 0$ (központos nyomás) esetére megrajzolt szaggatott vonalat [9.7] alapján szerkesztettük meg.

Ha az E alakváltozási tényező és a σ_S folyáshatár $E/\sigma_S = 600$ aránya mellett meghatározzuk R/t függvényében a kritikus terhet, akkor egy hasonló diagram-sereget kapunk, mint amilyent a rudakra a karcsúság függvényében szoktunk felrajzolni. Az $E/\sigma_S = 600$ az $A 50.35$ acél, a lágyalumínium, ill. a szokványos beton eseteinek felel meg. E diagram-sereget a 9.11. ábrán mutatjuk be.

Az ábráról láthatjuk, hogy a héj görbéi lejjebb futnak, mint a rudak esetében érvényes görbék.



9.11. ábra. Nagyszilárdságú acél, lágyalumínium, ill. betonanyagú héjak képlékeny kritikus erejének változása R/t függvényében

A megszerkesztett diagramok $\pm 10\%$ hibahatáron belül megközelíthetők a

$$\left(\frac{n_{kr, pl}^{felső}}{n_{kr, rug}^{felső}} \right)^2 + \left(\frac{n_{kr, pl}^{felső}}{n_{pl}} \right)^2 = 1 \quad (9.8)$$

„négyzetes Dunkerley-képletnek” nevezhető összefüggéssel. Ebből a kritikus erő közvetlenül is felírható. Ezt teherre átírva, a képlékeny felső kritikus teherre a

$$p_{kr, pl}^{felső} = \zeta \cdot p_{kr, rug}^{felső} \quad (9.9)$$

képletet nyerjük, ahol

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{p_{kr, rug}^{felső}}{p_{pl}} \right)^2}} \quad (9.10)$$

Valószínű, hogy a héjak anyagának képlékeny viselkedése az irodalomban szereplő és a korábbi fejezetekben idézett modellkísérletekben (2.3. és 4.2. ábrák) is okozhatott $p_{kr}^{felső}$ -csökkenést, de ezt a mért adatok elégtelen volta miatt utólag nehéz lenne figyelembe venni.

9.5. A fémhéjak problémái

Amint az előző pontban láttuk, a képlékeny tulajdonságok figyelembevételéhez az alkalmazott anyagot ideálpasztikusnak tételezzük fel. Most azt kell megvizsgálnunk, hogy miként kell a héjépítésben alkalmazott valóságos anyagok ideálpasztikus alakváltozási modelljét megválasztanunk.

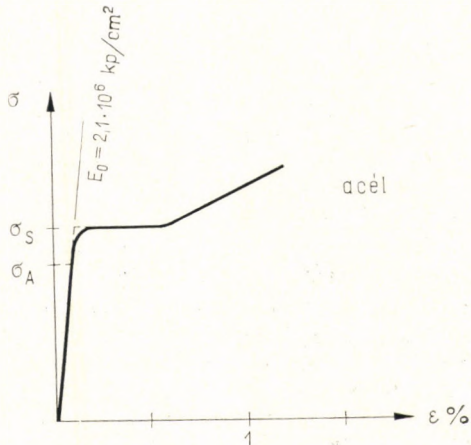
Fémhéjak építéséhez a gyakorlatban kétféle fémet alkalmaznak — az acélt és az alumíniumot —, ezért a következőkben csak ezekkel foglalkozunk.

9.5.1. A fémek alakváltozási tényezője

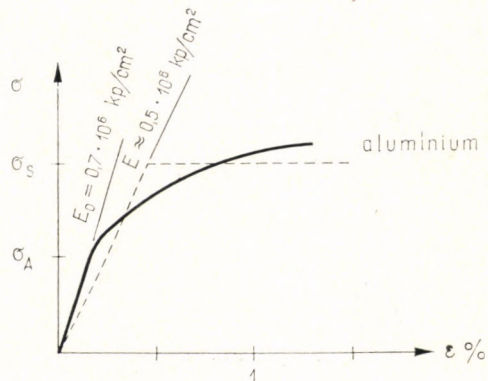
Az acél alakváltozási tényezője. Az acélok közül csak a határozott folyási határral rendelkezőket tárgyaljuk. Ezek ideálpasztikus modellje biztonságosan alkalmazható a határozott folyáshatárral nem rendelkező acélokra is, mert az ideálpasztikus modell a pontosnál kisebb merevséget eredményez, feltéve, hogy σ_S -et megfelelően választjuk meg.

Az acélananyag $\sigma(\varepsilon)$ diagramja (9.12. ábra) a σ_A arányossági határ után görbülve simul a σ_S folyáshatár vonalához. A görbült szakasz viszonylag kicsi, és így az ideálpasztikus anyagmodell E alakváltozási tényezőjét a kezdeti $E_0 = 2\,100\,000$ kp/cm² rugalmassági tényezővel lehet azonosnak venni (9.12. ábra).

Az alumínium alakváltozási tényezője. Alumíniumanyagoknál a σ_A arányossági határ a σ_S folyáshatárhoz képest alacsonyabban helyezkedik el, mint az acélnál.



9.12. ábra. Az acél idealizált $\sigma(\varepsilon)$ feszültség–nyúlás diagramja



9.13. ábra. Az alumínium idealizált $\sigma(\varepsilon)$ feszültség–nyúlás diagramja

A diagram innen görbül és határozott folyást egyáltalán nem mutat (9.13. ábra). Ennek ellenére megközelíthető egy kiegyenlítő ideálpasztikus anyagmodellel, ha az alakváltozási tényezőt megfelelően választjuk meg. Így kapjuk, hogy az ideálpasztikusnak tekintett alumíniumanyag E alakváltozási tényezője mintegy 0,7-szerese az alumínium $E_0 = 700\,000$ kp/cm² kezdeti rugalmassági tényezőjének. Így alumíniumnál az $E \approx 500\,000$ kp/cm² alakváltozási tényező használható (9.13. ábra).

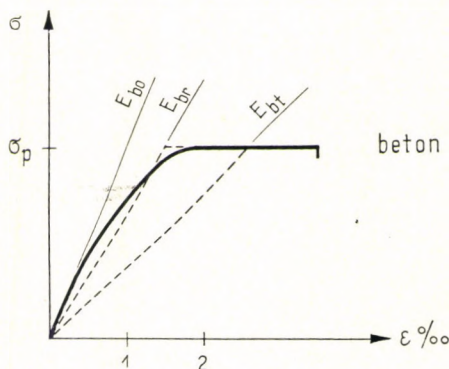
9.5.2. A fémhajak méretei

Amint a 9.4. pontban láttuk, a képlékeny kritikus teher meghatározásához szükségünk van a $p_{kr, rug}^{felső}$ rugalmas kritikus teher értékére és a mértékadó keresztmetszetben az adott kezdeti különpontosság mellett teljes folyást okozó p_{pl} képlékeny törőteher értékére. A rugalmas horpadást döntő módon az átlagos keresztmetszeti méretek határozzák meg, ezért a $p_{kr, rug}^{felső}$ értékének meghatározásához az átlagos keresztmetszeti méretűnek tekinthető tervszerinti méreteket vehetjük számításba. A p_{pl} törőtehernél azonban már jelentkezik az egyes keresztmetszetek méret-hibája, mert a törés egy keresztmetszetben is bekövetkezhet. Ezért a p_{pl} törőteher számításához az engedélyezett mérettűréssel csökkentett méreteket kell számításba venniük.

9.6. A vasbeton héjak problémái

A hék anyagának a horpadásvizsgálathoz szükséges alakváltozási tulajdonságai vasbeton szerkezeteknél nem adhatók meg egy-egy számmal, mert az alakváltozás a beton repedéseitől, vasalásától és a betonkúszástól is függ, és így a tehernek nemlineáris függvénye. Ezért szükséges a vasbeton alakváltozási és merevségi jellemzőinek részletesebb tárgyalása.

A vasbetonban alkalmazott vasbetétek anyagmodellje az előző pont alapján vehető fel.



9.14. ábra. A beton idealizált $\sigma(\varepsilon)$ feszültség – nyúlás diagramja

A beton $\sigma(\varepsilon)$ feszültség – nyúlás diagramja már kezdettől fogva görbe (9.14. ábra). Ezt a görbeséget tulajdonképpen egy, a feszültséggel nem arányosan növekvő („nemlineáris”) lassú alakváltozás okozza, és ezt mint a beton képlékenységet vesszük figyelembe. Ezenkívül a betonnak van egy a feszültséggel arányos „lineáris” lassú alakváltozása is, melyet a gyakorlatban kúszásnak nevezünk. A $\sigma(\varepsilon)$ diagramot megközelítő ideálpasztikus anyagmodell E_b alakváltozási tényezőjét tehát attól függően kell megválasztanunk, hogy tartós-e a teher vagy rövid idejű. A tartós tehernél ugyanis kialakul a teljes lassú alakváltozás, míg a rövid

idejű tehernél (pl. próbateher) ennek csak kis része jön létre. Így az ideálpasztikus anyagmodellt tartós terhek esetében az E_{bt} tartós alakváltozási tényező, rövid ideig tartó terhek esetében viszont az E_{br} rövid idejű alakváltozási tényező jellemzi. Tartós tehernek az a teher tekintendő, amely a szerkezet élettartama során legalább egy évig működik. Ennyi idő alatt ugyanis gyakorlatilag kialakul a teljes lassú alakváltozás.

Igen rövid ideig tartó terhek (pl. rezgés) esetén egyáltalán nincs lassú alakváltozás, és ezért az ilyen hatások vizsgálatánál a beton E_b alakváltozási tényezőjét az E_{b0} rugalmassági tényezővel lehet egyenlőnek venni.

Így végül is a lassú alakváltozást a beton E_b alakváltozási tényezőjének megfelelő megválasztásával vesszük figyelembe.

A berepedt vasbeton keresztmetszet elemeit (a húzott acélbetéteket és a nyomott betonövet) a megfelelő alakváltozási tényezők bevezetésével, egységes ideálpasztikus anyagmodellel vesszük figyelembe. A két ideálpasztikusnak tekintett anyag együttes alkalmazásához feltesszük, hogy a képlékenységi hatásának vizsgálatánál a teljes keresztmetszet is ideálpasztikusnak tekinthető. A valóságban a keresztmetszetben a folyás megindulása nemcsak a geometriai méretek, hanem az alkalmazott acélbetétek mennyiségétől is függ. Ezt azonban a vasbeton keresztmetszetek szokásos számítása automatikusan figyelembe veszi.

A vasbeton tehát a rugalmas homogén anyagtól a következőkben tér el:

- a nyomott betonrészeknek van lassú alakváltozása (lineáris kúszása),
- van képlékenysége (nemlineáris kúszása),

és végül

— a húzott öv bereped, a keresztmetszet merevsége lecsökken, és szerepet kap az alkalmazott acélbetét, annak helyzete, mennyisége és minősége.

9.6.1. A beton alakváltozási jellemzői

A rugalmassági tényező (E_{b0}). A beton kezdeti E_{b0} rugalmassági tényezője tulajdonképpen a pillanatnyi hatásokra (pl. rezgés) bekövetkező alakváltozásokra jellemző.

Az E_{b0} rugalmassági tényező a beton szilárdságától függ, középpértéke az általánosan elfogadott összefüggés [9.24] szerint:

$$E_{b0} = 550\,000 \frac{\sigma_p}{150 + \sigma_p} \text{ kp/cm}^2. \quad (9.11)$$

Itt σ_p a beton hasáb- (prizma)-szilárdsága, melyet a σ_k kockaszilárdság 80%-ára lehet felvenni. Így:

$$\sigma_p = 0,8 \sigma_k. \quad (9.12)$$

A tervezés során a rugalmassági tényező szórását az anyagminőség szórásával vesszük figyelembe, azaz E_{b0} -t nem a középpértékű szilárdsághoz, hanem a minősítési szilárdsághoz rendeljük. Minősítési szilárdságnak nevezzük a megkívánt quantilishoz tartozó küszöbszilárdságot.

A lassú alakváltozás (lineáris kúszás). A betonháj horpadási alakváltozása a kúszástól, azaz a beton lassú alakváltozásától is függ. Bár a lassú alakváltozás nem változtatja meg a rugalmassági tényező értékét, a változatlan teher alatt a

kezdeti külpontosság hatására bekövetkező időben növekvő horpadási alakváltozá számítástechnikailag az E_{b0} csökkentésével vehető figyelembe.

A lineáris kúszás időbeli lefolyását a Dischinger-féle [9.5]

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{\text{rugalmas}} + d\varepsilon_{\text{kúszási}} = \frac{1}{E_{b0}} d\sigma + \frac{\sigma}{E_{b0}} d\varphi$$

differenciálegyenlettel és a benne szereplő

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon_{\text{kúszási}}(t)}{\varepsilon_{\text{rugalmas}}} \quad (9.13)$$

kúszásfüggvénnyel szoktuk jellemezni. E kúszásfüggvénynek a végértéke $\varphi(\infty) = \varphi_1$ lassú alakváltozási tényező, mely a szerkezet vastagságától, az alkalmazott cement mennyiségétől és minőségétől, a vízcementtényezőtől, valamint a beton környezetének nedvességtartalmától függ [9.3]. Átlagos viszonyokat véve, csak a betonminőségtől tehetjük függővé φ_1 értékét, és így a következőt kapjuk:

$$\varphi_1 = 6 - 2 \log K_{\text{min}} \quad (9.14)$$

Itt K_{min} a beton minősítési kockaszilárdsága megterheléskor kp/cm^2 értékben, a \log pedig a 10 alapú logaritmus.

Az MSz 15022/1–1972 magyar vasbetonszabvány is a (9.14) kifejezést adja meg a lassú alakváltozás figyelembevételére. A (9.14) kifejezés Bn 250 szilárdsági osztály esetében $\varphi_1 = 1,4$ értéket ad, amely megegyezik a DIN 1045–1972 által átlagos viszonyokra előírt értékkel.

Az *alakváltozási tényező* (E_b). A lineáris kúszás hatását bizonyos – eső kritikusan túli teherbírású – szerkezeteknél pontosan figyelembe véve meghatározták a kritikus teher nagyságát [9.15]. Ezeknek az eredményeknek az értékeléséből megállapítható, hogy a kúszás hatásának az E_{b0} csökkentésével, vagyis egy E_b alakváltozási tényezővel való figyelembevétele a biztonság javára tett közelítés. Így a tartós alakváltozási tényezőt az általánosan elfogadott kifejezéssel számíthatjuk [9.17]:

$$E_{bt} = \frac{E_{b0}}{1 + \varphi_1} \quad (9.15)$$

Emelkedő teherbírású szerkezetekre ilyen vizsgálatok nem ismeretesek. Valószínűnek látszik, hogy e szerkezeteknél a kúszás hatása kisebb. Amíg nem állnak rendelkezésre pontosabb eredmények, addig – a biztonság javára törekvő közelítéssel – az emelkedő teherbírású héjak vizsgálatához is a (9.15) képletet alkalmazhatjuk.

Ha a teher csak rövid ideig (pl. néhány óráig) működik a szerkezetre, akkor a lassú alakváltozásnak csak egy kis része következik be [9.3]. Ezt a lassú alakváltozás-részt, és a $\sigma(\varepsilon)$ görbe kiegyenlítését összevontan figyelembe véve a rövid ideig tartó terhek (pl. próbateher) hatásainak vizsgálatához alkalmazandó E_{br} „rövid idejű” alakváltozási tényezőt az E_{b0} rugalmassági tényező 70%-ára vehetjük fel [9.24]. Így

$$E_{br} = 0,7 E_{b0} \quad (9.16)$$

A továbbiakban E_b mindig a megfelelő értéket jelenti, tehát tartós teher hatásának vizsgálatánál $E_b = E_{bt}$, rövid ideig tartó teher vizsgálatánál $E_b = E_{br}$, és rezgések hatásának vizsgálatánál $E_b = E_{b0}$.

9.6.2. A vasbeton keresztmetszet héjhorpadási merevségi jellemzője

A beton és vasbeton lemezes szerkezetek, így a héjak vastagsága is általában eltér a tervezett mérettől. Az ÉTI-ben lefolytatott, megépült vasbetonlemezekre vonatkozó nagyarányú mérésorozatok [9.19], [9.25] és elemzésük kimutatta, hogy a méretek középértéke az 1,05-szörös tervezett lemezvastagságra adódik, az egyes keresztmetszeti méretek alsó szélső értéke pedig a tervezett keresztmetszetek 1 cm-rel csökkentett értékével vehető számításba. A kihajlásnál döntő módon az átlagos keresztmetszeti méretek a meghatározók, és csak közvetlenül a törésnél jelentkezik az egyes keresztmetszetek mérethibája. Így a héjak stabilitási vizsgálatánál a többi vasbeton szerkezet stabilitási vizsgálatához hasonlóan a keresztmetszeti méretek a rugalmas kritikus teher számításánál a tervezett mérettel, a p_{pl} törőteher számításánál pedig az 1 cm-rel csökkentett mérettel vehetjük számításba.

A vasbetonhéj horpadásvizsgálatához [9.8] indokolása alapján bevezetjük a $K = \sqrt{BD}$ (9.1) szerinti „héjhorpadási merevségi jellemzőt”. Itt B , ill. D a héjkeresztmetszet hajlítási, ill. nyúlási merevségi jellemzője.

A vasbeton szerkezeteknél a B hajlítási merevség és a D nyúlási merevség a vasalástól és a nyomóerő külpontosságától függ, mert a külpontosság növekedésével a beton húzott öve fokozatosan bereped, és így a merevség csökken.

A merevségi jellemzőket a vasbeton szerkezetek II. stádiumának megfelelő értékkel, vagyis a húzott oldalon berepedt, lineárisan rugalmas keresztmetszet adataival vesszük figyelembe.

Ha a keresztmetszetben acélbetétet alkalmazunk, akkor a berepedés előtti K_{beton} merevségi jellemző értéke az $E_a/E_b = n$ -szeres acélbetétterület értékével megnövekszik. (Itt E_a az acélbetét, E_b pedig a beton alakváltozási tényezője.) Az ennek az állapotnak megfelelő héjhorpadási merevségi jellemzőt K_{teljes} -nek nevezzük. A metszeterő külpontosságának növelésével a héjhorpadási merevségi jellemző a berepedés miatt csökken (lásd pl. a 9.16b. ábrát). Ha a külpontosság eléri a fél keresztmetszetséretet, akkor a K héjhorpadási merevségi jellemző már erősen megközelíti a végtelen nagy külpontosság (azaz a hajlítás) esetében érvényes héjhorpadási merevségi jellemző

$$K_i = E_b \sqrt{F_i J_i} \quad (9.17)$$

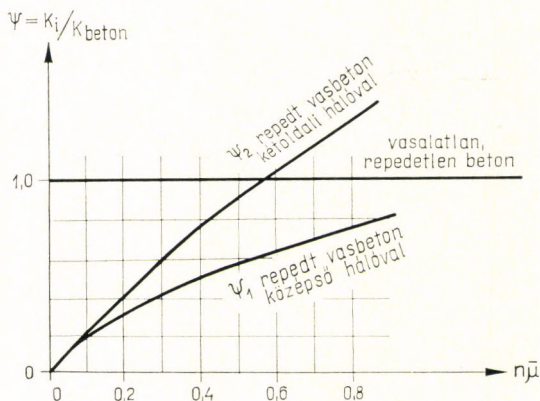
értéket. Itt F_i , ill. J_i a hajlított, berepedt vasbeton keresztmetszettel egyenértékű, úgynevezett „ideális” keresztmetszet területe, ill. inercianyomatéka.

A vasbetonelmélet [9.20], [9.21] szerinti számítással meghatározhatók F_i és J_i értékei és kifejezhető a

$$\psi = K_i / K_{beton} \quad (9.18)$$

hányados értéke.

A vasbeton héjszerkezeteknél kétféle vasalástípus jöhet szóba: a középső háló és a kétoldali háló. A középső háló esetére meghatározott ψ_1 és a kétoldali hálóra meghatározott ψ_2 értékeket [9.8] alapján a 9.1. táblázatban adjuk meg, ill. a 9.15. ábrán szemléltetjük.



9.15. ábra. A vasbeton héjlemez héjhorpadási merevségi jellemzőjének számításához szolgáló ψ tényezők változása az acélbetét-mennyiség függvényében ($K_i = \psi \cdot K_{\text{beton}}$)

Itt $n = E_a/E_b$, $\bar{\mu}$ pedig a keresztmetszetben alkalmazott összes egyirányú acélbetét keresztmetszeti területének és a beton keresztmetszet területének aránya.

A ψ_2 értékénél a biztonság javára tett közelítéssel elhanyagoltuk a nyomott betonban levő hálót, mert számításbavétele komplikációt okoz, hatása pedig jelentéktelen.

ψ_1 és ψ_2 értékei:

9.1. TÁBLÁZAT

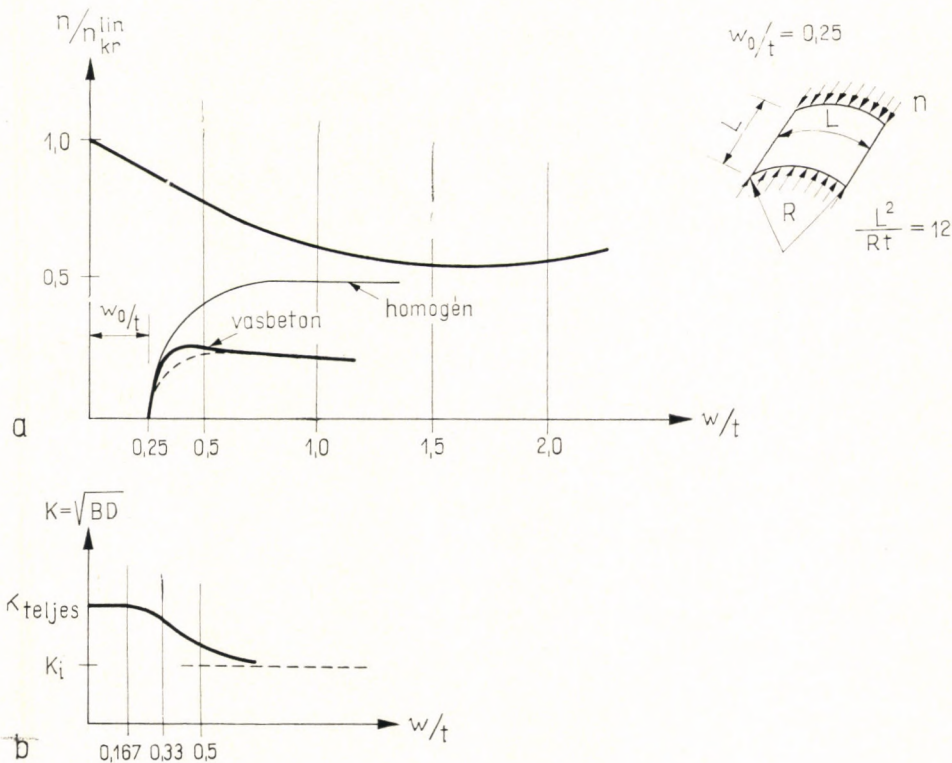
$n\bar{\mu}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
ψ_1 (középső háló)	0	0,21	0,33	0,43	0,52	0,66	0,77
ψ_2 (kétoldali háló)	0	0,22	0,40	0,60	0,77	1,05	1,33

9.6.3. A vasbeton héj felső kritikus terhének meghatározása

Először csak a berepedés hatását — a növekvő külpontossággal a repedések miatt egyre csökkenő héjhorpadási merevségi jellemzőt vesszük figyelembe. Utána a kúszás hatását — a korábban mondtak szerint — az E_b alakváltozási tényezővel vesszük tekintetbe. Ezzel meghatározzuk a vasbeton héj rugalmas felső kritikus terhét. Majd a 9.4. pont eredményeinek felhasználásával előállítjuk a vasbeton héj képlékeny felső kritikus terhét.

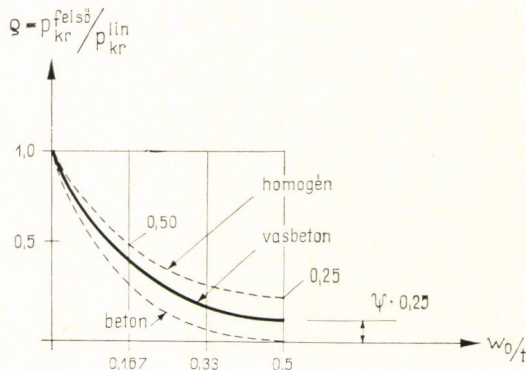
A rugalmas vasbeton héj felső kritikus terhe. A horpadási hullámok területén a külpontosság, és így a vasbeton héjhorpadási merevségi jellemzője is helyről helyre változik. A horpadási alakváltozásra mégis a merevségi jellemzőnek a legnagyobb amplitúdó helyén érvényes értéke van a legnagyobb hatással. Tekintve, hogy a horpadási hullám többi részén a merevségi jellemző ennél nagyobb, a biztonság javára tett kis elhanyagolással feltételezhetjük, hogy az egyébként izotróp vasbeton héj horpadási merevségi jellemzője a horpadási hullám teljes területén azonosnak vehető a legnagyobb amplitúdó helyén érvényes értékkel, így a hely szerint állandó, és ezért a differenciálegyenletek állandó együtthatójúak lesznek. Ezért a valamely w alakváltozáshoz tartozó p teher a w_{\max} -hoz tartozó héjhorpadási merevségi jellemzővel számítható.

E feltétel alapján a [9.8] szerinti eljárást a 9.16. ábrán, a [2.57]-ben homogén rugalmas anyagú dongahéjmezőre megoldott példán mutatjuk be. A tökéletes dongahéj erő-horpadási alakváltozás diagramja az ábrán a lineáris kritikus teher pontjából kiágazó parabolajellegű vastag vonal. Ha a homogén héjra $w_0 = 0,25 t$ külpontossággal működik a teher, ill. ha a héj ekkora maximális amplitúdójú hullámossággal rendelkezik, akkor a teher növekedésével növekvő w külpontosság [2.57] alapján az ábrán vékony vonallal rajzolt görbe szerint változik.



9.16. ábra. A rugalmas vasbeton héj felső kritikus terhének meghatározása

A 9.16b. ábrán bemutattuk a vasbeton keresztmetszet K merevségi jellemzőjének a w külpontossággal való változását. A homogén anyagra vonatkozó $p(w)$ görbe minden egyes w értékhez tartozó ordinátáját annyival kisebbre kell vennünk, amennyivel a K héjhorpadási merevségi jellemző csökkent. Így a 9.16a. ábrán folyamatos vastag vonallal rajzolt görbét nyerjük.



9.17. ábra. A rugalmas vasbeton héj q értékei

E görbék maximumpontja határozza meg a vasbeton keresztmetszetű rugalmas héjnak az adott mértékadó külpontossághoz tartozó kritikus terhét. Ezt a

$$p_{kr, rug, vb}^{felső} = q \cdot p_{kr}^{lin} \quad (9.19)$$

formában írhatjuk fel.

Ha a vasbeton keresztmetszet héjhorpadási merevségi jellemzőjét kezdetlől fogva a K_1 merevségi jellemzővel számítjuk, akkor a felső ábrán a vékony szaggatott vonallal húzott görbét nyerjük. Amint látható, az ehhez tartozó kritikus teher valamivel kisebb a pontosabban meghatározhatótnál, így a biztonság javára tévedünk vele.

Vizsgálataink szerint a rugalmas felső kritikus teher meghatározására a 9.3. pontban leírt eljárást a biztonság javára tett közelítéssel alkalmazhatjuk a $w_{kr} = 2t$ és a $p_{kr}^{alsó} = 0,25 p_{kr}^{lin}$ adatokkal. Így megszerkeszthetjük a vasbeton gömb- és henger-héjak felső kritikus teherértékeit. Ezen értékekre [9.8] szerint a következő interpolációs formula illeszthető:

$$q = \left\{ 1 - 2 \frac{w_0}{t} + \sqrt[3]{\psi \left[\frac{2}{3} \frac{w_0}{t} + \frac{1}{5} \left(\frac{w_0}{t} \right)^2 + 2 \left(\frac{w_0}{t} \right)^3 \right]} \right\} \quad (9.20)$$

E formula $\psi = 0$ esetén a húzószilárdság nélküli betonhéj görbét, $\psi = 1$ esetén pedig a rugalmas, homogén héjra a 9.1. ábrán javasolt görbét szolgáltatja. A vasbeton héj q értékei e két határgörbe között helyezkednek el (lásd a 9.17. ábrát).

A (9.20) egyenletből a w_0/t és ψ különböző értékeihez kiszámított q tényezőket a 9.2. táblázat tartalmazza.

A vasbeton héj rugalmas kritikus terhének meghatározására szolgáló ϱ tényező

ψ \ w_0/t	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1,00	1,000	0,815	0,660	0,534	0,434	0,359	0,304	0,267	0,246	0,243	0,242
0,90	1,000	0,812	0,655	0,526	0,425	0,348	0,291	0,252	0,229	0,221	0,218
0,80	1,000	0,809	0,649	0,518	0,415	0,336	0,278	0,237	0,212	0,200	0,194
0,70	1,000	0,805	0,642	0,510	0,405	0,324	0,264	0,222	0,194	0,180	0,174
0,60	1,000	0,801	0,635	0,500	0,393	0,311	0,249	0,205	0,175	0,158	0,145
0,50	1,000	0,797	0,628	0,490	0,381	0,297	0,234	0,188	0,156	0,137	0,121
0,40	1,000	0,792	0,619	0,478	0,367	0,281	0,217	0,169	0,136	0,114	0,097
0,30	1,000	0,786	0,608	0,465	0,351	0,263	0,197	0,149	0,114	0,091	0,073
0,25	1,000	0,783	0,602	0,457	0,342	0,253	0,187	0,138	0,103	0,079	0,061
0,20	1,000	0,778	0,596	0,448	0,331	0,242	0,175	0,126	0,091	0,067	0,049
0,15	1,000	0,774	0,587	0,437	0,319	0,229	0,161	0,112	0,078	0,054	0,036
0,10	1,000	0,768	0,578	0,425	0,305	0,213	0,146	0,097	0,063	0,040	0,024
0,05	1,000	0,760	0,563	0,407	0,285	0,193	0,125	0,078	0,045	0,025	0,012
0,00	1,000	0,729	0,512	0,343	0,216	0,125	0,064	0,027	0,008	0,001	0,000

ψ = a vasbeton 9.1.táblázat szerinti tényezője

w_0 = a kezdeti külpontosság (hullámosság)

t = a keresztmetszet vastagsága

$p_{kr, rug, vb}^{felső} = \varrho \cdot p_{kr}^{lin}$

Igy a $w_0/t < 0,5$ esetben a (9.20) összefüggéssel, ill. a 9.2. táblázat ϱ értékeivel határozható meg a (9.19) kifejezésből a rugalmas vasbeton héj felső kritikus terhe. A homogén kupolahéjagnál a peremzavarok következtében a szimmetrikus horpadásból leágazó antimetrikus horpadás miatt a ϱ tényező legfeljebb 0,6 értékű lehet (l. a 4.14. ábrát). Ehhez a 9.2. táblázat szerint ($\psi = 1$ eset) $w_0 = 0,125 t$ hullámossági amplitúdó tartozik, és ezért vasbeton kupolahéjagnál nem vehetünk számításba ennél kisebb hullámossági értéket.

Amint a vasbeton keresztmetszet héjhorpadási merevségi jellemzőjénél mondtuk, a $w_0/t > 0,5$ értékeknél már a vasbeton keresztmetszetnek a hajlításhoz tartozó $K_i = \psi \cdot K_{beton}$ héjhorpadási merevségi jellemzője vehető figyelembe. Mivel K_i értéke nem függ w_0 -tól, azért ez esetekben a rugalmas vasbeton héj kritikus terhe is a rugalmas homogén héj felső kritikus terhének ψ -szeresével számítható, azaz a $w_0/t > 0,5$ esetekben a $w_0/t = 0,5$ esetre vonatkozó ϱ értékek használhatók.

A képlékeny vasbeton héj felső kritikus terhe. A vasbeton héj képlékeny viselkedését a (9.9) kifejezéssel vehetjük figyelembe. Így végül is összegezve az eddigieket, a vasbeton héjak tulajdonságait (bepedést, vasalást, lassú alakváltozást és képlékenységet) figyelembe vevő felső kritikus terhet a (9.9) és (9.19) kifejezések egybevetésével a

$$p_{kr, pl, vasbeton}^{felső} = \zeta \cdot p_{kr, rug, vb}^{felső} = \zeta \cdot \varrho \cdot p_{kr}^{lin} \quad (9.21)$$

kifejezéssel számíthatjuk. Itt $p_{kr, pl, vb}^{felső}$ a képlékeny tulajdonságokkal is rendelkező vasbeton héj felső kritikus terhe, p_{kr}^{lin} a rugalmas anyagúnak képzelte, E_b alakváltozási tényezőjű héj lineáris kritikus terhe, ζ a képlékeny tulajdonságokat figyelembe

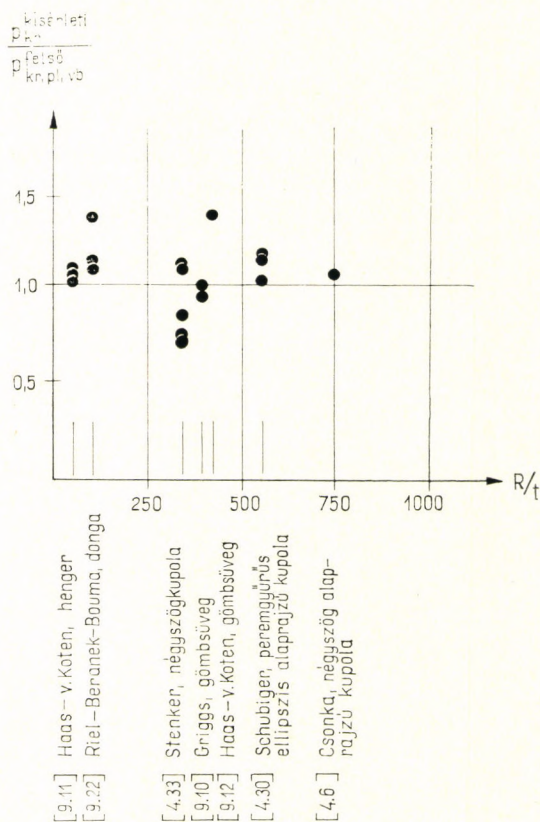
vevő, (9.10) szerinti tényező, ρ pedig a rugalmas vasbeton héj és a rugalmas homogén héj felső kritikus terhének aránya, melyet a (9.20) képletből vagy a 9.2. táblázatból határozhatunk meg.

Kiszámítottuk a [4.6], [4.30], [4.33], [9.10], [9.11], [9.12] és [9.22] irodalomban ismertett kísérleti vasbetonhéjak horpasztó terhet a (9.21) képlettel [9.8], és összehasonlítottuk a kísérleti értékekkel. Az értékeket R/t függvényében a 9.18. ábrán mutatjuk be.

A kísérleti kritikus teher és a számított kritikus teher hányadosainak középértéke 1,01, a szórás pedig 20%. Ez azt jelenti, hogy a bemutatott számítási eljárás a valóságot tükrözi.

A nagy szórást mutató Stenker-féle kísérletek kivitelezése során igen sok bizonytalansági tényező szerepelt (pl. a héj törtvonalú középfelülete, homokzsák terhelés stb.), amelyek indokolják a nagy szórást.

A vasbeton héjak speciális tulajdonságait figyelembe vevő, most ismertett számításmód azt eredményezi, hogy a 4.2. és 4.3. ábrában alul elhelyezkedő, vasbeton héjakra vonatkozó értékek felemelkednek az átlaghoz.



9.18. ábra. Az irodalomban ismertett kísérleti eredmények összevetése az ismertett eljárással számított értékekkel

9.7. A kritikus teher meghatározása modellkísérletekkel és megépült szerkezeteken végzett mérésekkel

Amint az eddigi tárgyalásból láttuk, még a legegyszerűbb héjalakok stabilitás-problémái sincsenek mind kielégítően megoldva. Újszerű héjalakok kritikus terhéet tehát a tervezés során elméletileg általában nem tudjuk megbízhatóan meghatározni, hanem csak modellkísérletekkel. Ennek során a héjat tönkremenetelig terhelhetjük, de a kritikus (törő-) terhen kívül fontos tudnunk, hogy a kritikuson túli teherbírása konstans, eső vagy emelkedő-e, mert ez alapvetően fontos a biztonsági tényező megállapításához. Felmerülhet ezenkívül az igény is, hogy költségkímélés céljából — legalábbis bizonyos terhekre — a héjat ne terheljük törésig, de állapítsuk meg a fenti adatokat.

Erre a kérdésre a horpadási (w) alakváltozásnak a terhelés függvényében való mérése és felrajzolása többnyire nem ad megbízható választ, mivel az 1.1a., b., c., d. ábrákon vázolt szaggatott vonalak emelkedő ága annyira hasonló jellegű, hogy nem lehet őket egymástól megkülönböztetni, és nem lehet megbízható módon extrapolálni a tetőpontot, azaz a kritikus terhet. Ezen segít a Southwell-féle szerkesztés [2.51], amely az 1.1a. ábrának megfelelő esetekben a kezdeti külpontossággal (hullámossággal) bíró szerkezetek alakváltozás-diagramját egyenessé alakítja át. A kihajlási w alakváltozás ilyenkor a következőképpen függ a kezdeti w_0 hullámosságtól:

$$w = w_0 \frac{1}{1 - P/P_{kr}^{lin}}. \quad (9.22)$$

Ebben az a szokásos közelítés szerepel, hogy a kezdeti hullámosság ugyanolyan alakú, mint a kihajlási görbe, ami a legtöbbször jó közelítéssel teljesül.

Bevezetve a kezdeti hullámosságtól mért

$$w - w_0 = \delta \quad (9.23)$$

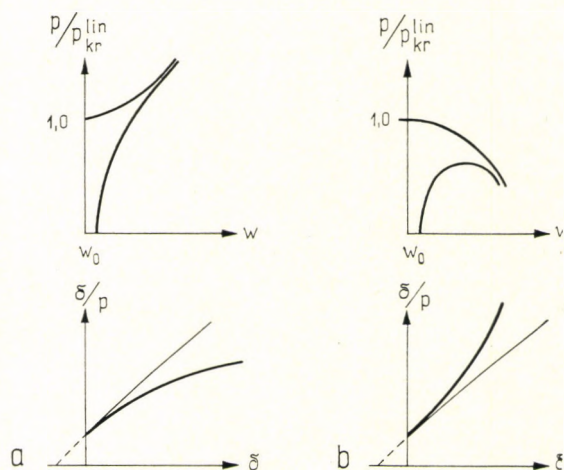
elmozdulást, a (9.22) egyenlet átrendezhető a következő alakba:

$$\frac{\delta}{P} = \frac{\delta + w_0}{P_{kr}^{lin}}. \quad (9.24)$$

Ez pedig egy *egyenes* egyenlete a δ és δ/P koordináták szerint. Ha tehát mérjük több P teherhez a keletkező δ -t és felrakjuk az adatokat a $[\delta, \delta/P]$ koordinátarendszerben, akkor egyenest kell kapnunk, amelynek cotangense adja meg a kritikus terhet.

A Southwell-szerkesztés előnye, hogy megbízhatóbbá teszi a kritikus teher extrapolálását. A héjhorpadás területén ezenkívül a $P = p$ helyettesítéssel még arra is felhasználhatjuk, hogy kiderítsük, az 1.1a., b., c. ábrák közül melyiknek megfelelően viselkedik a héj. Kimutatható ugyanis [9.17], [9.23], hogy az emelkedő kritikuson túli teherbírású szerkezetek hasonlóképpen megszerkesztett Southwell-diagramja lefelé (9.19a. ábra), a csökkenő teherbírásúak pedig felfelé (9.19b. ábra) görbül. Ha tehát felrakjuk a mért δ és δ/p értékeket és egyenes helyett a 9.19. ábra valamelyik görbét kapjuk, akkor egyértelműen besorolhatjuk a héjstabilitási problémát az 1.1b. vagy c—d. ábráknak megfelelő csoportba, és ennek megfelelően állapíthatjuk meg a biztonsági tényezőt. A kritikus teher nagyságára azonban ilyenkor nem következtethetünk megbízhatóan.

Nem egyértelmű azonban a helyzet az 1.1e. ábrán vázolt esetben. Előfordulhat ugyanis, hogy az alakváltozási diagram kezdő része az 1.1a. ábrának felel meg és ilyenkor a Southwell-diagram egyenes lesz, jóllehet a később bekövetkező elágazás esökkenő kritikuson túli teherbírást okoz.



9.19. ábra. Az emelkedő, ill. eső teherbírási meghatározása a Southwell-szerkesztéssel

A lineáris kritikus teher törés nélküli meghatározásának másik módja a *rezgés-mérés* [2.12], [9.6]. Ezt elsősorban megépült szerkezeteken célszerű alkalmazni, de modellkísérletek során is elvégezhető. Azon alapszik, hogy állandó nagyságú nyomóerőkkel igénybevett lapos héjakra is fennáll a rudakra régóta ismert [9.14]

$$N = N_{\text{öns}} \sqrt{1 - \frac{p}{p_{\text{kr}}^{\text{lin}}}} \quad (9.25)$$

összefüggés. Ebben

p = a héjra ható teher (az önsúlyt is beleértve),

$p_{\text{kr}}^{\text{lin}}$ = a lineáris kritikus teher,

$N_{\text{öns}}$ = a terheletlen (csak önsúlyával terhelt) héj saját rezgésszáma, figyelmen kívül hagyva az önsúlyból származó nyomóerőknek a rezgésre gyakorolt hatását,

N = a p teherrel terhelt héj saját rezgésszáma, a nyomóerők hatásának figyelembevételével.

A (9.25) képlet feltételezi, hogy a p teher nem növeli a héj tehetetlen rezgő tömegét. Ez akkor teljesül, ha pl. a héjmodellét légnomással vagy lágyrugózású felfüggesztésre helyezett súlyokkal terheljük. Ha azonban a héjjal mereven összekötött (pl. ráhelyezett) súlyteherrel terhelünk, akkor figyelembe kell vennünk, hogy a héj rezgő tömege megnő, és emiatt lassabb lesz a rezgésszáma (a nyomóerők

hatásának figyelembevétele nélkül is). Mivel a tömeg a saját rezgésszám képletének nevezőjében négyzetgyök alatt szerepel, ezért a (9.25) képletet a következőképpen kell módosítanunk:

$$N = \frac{N_{\text{öns}}}{\sqrt{p/p_{\text{öns}}}} \cdot \sqrt{1 - p/p_{\text{kr}}^{\text{lin}}}, \quad (9.26)$$

ahol $p_{\text{öns}}$ = az önsúlyteher.

Ha tehát megmérjük a héj saját rezgésszámát két különböző (egymáshoz lehetőleg nem túlságosan közel eső) teher alatt, akkor két egyenletet írhatunk fel az $N_{\text{öns}}$ és $p_{\text{kr}}^{\text{lin}}$ ismeretlenekre, amelyből meghatározhatjuk $p_{\text{kr}}^{\text{lin}}$ -t. Ebből azután következtethetünk a nemlineáris elmélet szerinti (valódi) kritikus teherre.

A (9.25) és (9.26) képletek érvényességének az a feltétele, hogy a sajátrezgés alakja egyezzen meg a horpadási alakkal. Ez azonban nem mindig teljesül. Ezért általában egyidejűleg annyi helyen kell mérést végezni, hogy a különböző hullámhosszúságú rezgések szétválaszthatók legyenek, és külön-külön meg tudjuk hozzájuk határozni a rezgésszámokat. Ezután mindegyikből ki kell számítani a kritikus terhet, és a legkisebb lesz a mértékadó.

A Southwell-szerkesztéshez hasonlóan a rezgésmérés sem alkalmazható az 1.1e. ábrának megfelelő esetben.

A Southwell-módszernél és a rezgésmérésnél egyaránt csak kis alakváltozásokat kényszerítünk a szerkezetre, ezért nem tartalmazzák a képlékenység, a lassú alakváltozás és a vasbeton horpadás okozta repedéseinek merevségcsökkentő hatását, mert ezek legfeljebb csak részben tudnak kifejlődni. Tartalmazzák viszont a számítással csak durván közelített peremmerevítések és a héj saját súlya által okozott repedések hatását.

Így e módszerek csak az elméleti eredményekkel összehangolva, azok kiegészítéseként alkalmazhatók.

9.8. A biztonsági tényező

A kritikus teherrel szemben meglévő biztonságot determináló, általunk választandó k biztonsági tényezőnek függenie kell:

- a kritikus teher számításához felhasznált elmélet pontosságától,
- a héj tönkremenetelének hirtelen vagy fokozatosan bekövetkező jellegétől (eső vagy emelkedő, ill. állandó, kritikusan túli teherbírás),
- az elméleti modell és a tényleges héj közötti
 - anyagminőség-,
 - teherérték-,
 - méret- és
 - alakeltérésektől,
- e hatások szórásaitól és a hatások és szórások egyidejűségétől.

A felsorolt hatások másképpen jelentkeznek a rugalmas kritikus teher, és megint másképpen az adott kezdeti kilépésszámhoz tartozó p_{pl} képlékeny törőteher meghatározása során. A kezdeti hullámosság miatti görbületi sugár változásnak egyrészt más a hatása a $p_{\text{kr}}^{\text{1első, rug}}$ rugalmas kritikus teher értékére, és más a p_{pl} képlékeny törőteher értékére, mert pl. a gömbnél a rugalmas kritikus teher képletében

$1/R^2$, a törőteher képletében viszont $1/R$ szerepel, mert $p_{pl} = \frac{2n_{pl}}{R}$. Másrészt a kép-

lékeny teherbírás w függvényében mindig eső jellegű, míg a kritikuson túli rugalmas teherbírás lehet emelkedő jellegű is.

E körülmények miatt a rugalmas kritikus teherhez k_{rug} biztonsági tényező, a képlékeny törőteherhez pedig k_{pl} biztonsági tényező adódnék. Ezekkel a héj $p_{kr, H}$ kritikus határterhére a (9.8) kifejezést a következőképpen írhatjuk fel:

$$\left(\frac{p_{kr, H} \cdot k_{rug}}{p_{kr, rug}^{felső}} \right)^2 + \left(\frac{p_{kr, H} \cdot k_{pl}}{p_{pl}} \right)^2 = 1.$$

A helyzet azonban az, hogy nem áll rendelkezésünkre olyan kísérleti vagy elméleti anyag, amelyből a szétválasztott biztonsági tényezőt külön-külön meg tudnánk becsülni. Ezért meg kell elégednünk a

$$k = k_{rug} = k_{pl}$$

egységes biztonsági tényezővel. Ez természetesen nem nyújt átmenetet a horpadás nélküli törésvizsgálathoz.

A héj stabilitási biztonságát a legegyszerűbben úgy lehet biztosítani, ha minden hatásból a legkedvezőtlenebb szélső értéket vesszük, ezekkel határozzuk meg a kritikus terhet és ezt csökkentjük a biztonsági tényezővel. Ezt a módszert a részbiztonságok összegezésének nevezhetjük. Az eljárás feltétlenül biztonságos, de gazdaságtalan, mert nem veszi figyelembe, hogy a különböző adatok legkedvezőtlenebb értékei általában nem esnek egybe.

A másik, pontosabb eljárás a valószínűségi számítás alkalmazása. Ennél a kritikus tehernek a méretezéshez felhasználandó küszöbértékét lényegében úgy kapjuk, hogy a kísérleti eredmények középértékéből levonjuk az eredő szórás α -szorosát. Itt α a vállalt kockázathoz tartozó quantilistól függő számérték. A közönséges szerkezeteknél megállapodás szerint [9.3] 2,5%-os quantilist veszünk figyelembe. Ez azt jelenti, hogy a kísérleti értékekre illesztett haranggörbe területének legfeljebb 2,5%-a lehet a küszöbérték alatti terület. Ebben az esetben az $\alpha = 2,0$ érték adódik.

A héjszerkezetekre egy kombinált eljárást javasolunk. Ennek lényege a következő:

Azon hatásoknál, amelyeknek a szórását nem ismerjük, de a minősítő érték, ill. a méretezéshez alapul vett értékek az alsó szélső értéket adják, ezt az értéket vesszük figyelembe. Tehát eljárásunk ezek tekintetében a részbiztonságok összegezése. Így az alsó szélső értékkel, azaz a minősítési értékkel vesszük számításba a fémek és a beton minőségének szórását, és így a rugalmassági tényező, ill. az alakváltozási tényező szórását is. A keresztmetszeti méreteket pedig a kedvezőtlen méreteltérésekkel, azaz a hasznos keresztmetszettel vesszük figyelembe. Így a rugalmas kritikus teher számításához a terv szerinti méretet, a képlékeny törőteher számításához pedig az engedélyezett méreteltéréssel csökkentett méretet használjuk. (Az ezen értékekből számított kritikus terhet alsó „min” indexszel jelöljük meg.) A terhek szórását úgy vesszük figyelembe, hogy a p_M mértékadó terhet vesszük számításba.

Azoknál a hatásoknál viszont, melyeknek szélső értéke nem ismeretes, a kísérleti értékek elemzésén alapuló valószínűségi számítási módszert alkalmazzuk. Így

a kísérleti adatok szórásának számításba vételével vesszük figyelembe az elmélet pontosságának hatását, az alakeltéréseket leíró kezdeti hullámosság értékének a számításba vett középértéktől való eltéréseit, és a különböző hatások szórásainak egyidejűségét.

Ha az elméleti számítási módszer olyan, hogy a valóságot híyen írja le, akkor a számított törőérték megegyezik a kísérleti törőértékek középértékével. Az egyes tényezők és különösképpen a kezdeti külpontosság szórása miatt a kísérleti kritikus terhek értékek ez esetben is szórnak. Ezt a szórást a szokványos fém- és vasbeton szerkezeteknél a határfeszültségekbe beépített $k \approx 1,25$ értékű biztonsági tényezővel vesszük számításba. A héjak stabilitásvizsgálatánál a határfeszültség nem szerepel, és ezért a biztonsági tényezővel nem a szilárdságot, hanem a kritikus terhet kell csökkenteni. Ezenkívül az eső teherbírású héjak kísérleti eredményei a szokásos szerkezetekénél jobban szórnak, mert a kezdeti külpontosságra fokozottan érzékenyek. Ezért — és a katasztrofális tönkremenetel veszélye miatt — nagyobb biztonsági tényezővel kell számolni.

Normáleloszlás feltételezése mellett a szokásos 97,5%-os gyakoriság esetére a valószínűségi számítás [9.2] szabályai szerint a k biztonsági tényező a

$$k = \frac{1}{1 - 2S} \quad (9.27)$$

képletből számítható. Itt S a kísérleti teherbírás adatok relatív szórása. A vasbeton, ill. acélszerkezetekre előírt $k = 1,25$ értékű biztonsági tényező $S = 0,10$ relatív szórásnak felel meg, tehát legalább ekkora értéket kell számításba vennünk. Az eső teherbírású henger- és gömbkísérletek szórása körülbelül egyforma. Meghatároztuk a 4.2. ábra adataiból a szórást a $250 < R/t < 1000$ tartományban. Így $S = 0,30$ értékű relatív szórást kaptunk. Ugyanilyen szórást kaptak a hengerkísérletek kiértékelésénél is [9.13]. Ha ezt az S értéket betesszük a (9.27) képletbe, akkor a fém- és vasbeton-szerkezetű henger- és gömbhéjakra a $k = 2,5$ biztonsági tényezőt nyerjük.

Ha a héj olyan, amelyre nincs kidolgozott elmélet, vagy az elmélet nem látszik megbízhatónak, akkor egyedi megfontolások, ill. modellkísérletek alapján indokolt a kritikus terhet pontosabb meghatározása és esetleg a biztonsági tényező növelése.

A biztonsági tényező megválasztása után a héj horpasztó határterhe a

$$p_{kr, H} = \frac{p_{kr, pl, min}^{felső}}{k} \quad (9.28)$$

kifejezésből számítható. Itt $p_{kr, pl, min}^{felső}$ a képlékeny tulajdonságokkal is rendelkező héjnak a minősítési értékekből számított kritikus terhe.

Stabilitás szempontjából a tervezett héj akkor megfelelő, ha a p_M mértékadó terhe kisebb vagy egyenlő a horpasztó határteherrel, azaz

$$p_M \leq p_{kr, H} \quad (9.29)$$

A könyvben szereplő, máshonnan átvett ábrák és forrásaik jegyzéke

Ábra	Szerző	Kiadó, ill. folyóirat	Forrás
1.1.	THOMPSON	Zschr. angew. Math. Phys.	[1.6]
1.4.	THOMPSON	Zschr. angew. Math. Phys.	[1.6]
2.1a.	PFLÜGER	Stahlbau	[2.41]
2.1b.	SCHNELL	North-Holland Publ., Amsterdam	[2.44]
2.3a.	DONNELL—WAN	Journ. Appl. Mech.	[2.9]
2.3b.	MADSEN—HOFF	Stanford Univ.	[2.33]
2.4.	FLÜGGE	Springer Verlag, Berlin	[2.17]
2.8.	KOITER	Proc. Roy. Netherl. Acad. Sci.	[2.26]
2.9.	NARASIMHAN—HOFF	Journ. Appl. Mech.	[2.37]
2.10.	BÜRGERMEISTER—STEUP— —KRETSCHMAR	Akademie-Verlag, Berlin	[2.6]
2.12.	THIELEMANN—ESSLINGER	Stahlbau	[2.50]
2.13.	FLÜGGE	Springer Verlag, Berlin	[2.17]
2.14.	BATDORF	NACA TN	[2.3]
2.15.	DIERKS	Abh. Braunsch. Wiss. Ges.	[2.7]
2.16.	BUDIANSKY—AMAZIGO	Journ. Math. Phys.	[2.5]
2.17.	PFLÜGER	Stahlbau	[2.42]
2.20.	SCHNELL	North-Holland Publ., Amsterdam	[2.44]
2.21.	SCHNELL	North-Holland Publ., Amsterdam	[2.44]
2.22.	HUTCHINSON	AIAA Journ.	[2.20]
2.23.	BATDORF	NACA TN	[2.3]
2.24.	BUDIANSKY	Springer Verlag, Berlin— —Heidelberg—New York	[2.4]
2.25.	SCHAPITZ	VDI-Verlag, Düsseldorf	[7.21]
3.2.	WEINGARTEN—MORGAN—SEIDE	AIAA Journ.	[2.53]
3.4.	SEIDE	North-Holland Publ., Amsterdam	[3.5]
3.5.	WEINGARTEN—SEIDE	AIAA Journ.	[2.54]
4.4.	THOMPSON	National Acad. Sci., Washington, D. C.	[4.34]
4.5.	THOMPSON	Nat. Acad. Sci., Washington, D.C.	[4.34]
4.6.	HUTCHINSON	Journ. Appl. Mech.	[4.14]
	KOGA—HOFF	Intern. Journ. Solids Struct.	[4.21]
4.11.	BUDIANSKY	North-Holland Publ., Amsterdam	[4.3]
4.12.	THURSTON	Journ. Appl. Mech.	[4.35]
	WEINITSCHKE	Journ. Math. Phys.	[4.42]
4.13.	WEINITSCHKE	Journ. Math. Phys.	[4.42]
4.14.	WEINITSCHKE	Journ. Math. Phys.	[4.42]

4.16.	KAO—PERRONE	Journ. Appl. Mech.	[4.16]
	KAO	Journ. Appl. Mech.	[4.16]
4.21.	VAN KOTEN—HAAS	IASS-Symposium, Leningrad	[4.23]
7.2.	BODNER	Journ. Appl. Mech.	[7.3]
7.3.	BODNER	Journ. Appl. Mech.	[7.3]
7.4.	HAYASHI	8th Int. Congr. Appl. Mech.	[7.11]
7.5.	STEIN—SANDERS—CRATE	NACA-Reports No. 989	[7.29]
7.8.	SCHNELL	Pergamon Press, Oxford— —London—New York—Paris	[7.30]
8.2.3.	KOITER	Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam	[8.2.8]
8.2.4.	SCHAPITZ	VDI-Verlag, Düsseldorf	[7.21]
8.2.10.	GEIER	Wiss. Ges. Luft- u. Raumfahrt	[8.2.5]
8.2.11.	GEIER	Wiss. Ges. Luft- u. Raumfahrt	[8.2.5]

Irodalom

Az 1. fejezethez

- [1.1] FUNG, Y. C.—SECHLER, E. E., Instability of Thin Elastic Shells. Structural Mechanics. (Proc. 1st Symp. Naval Struct. Mech., Stanford Univ., Calif. 1958.) Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris 1960. 115—168.
- [1.2] HOFF, N. J., Some Recent Studies of the Buckling of Thin Shells. Aeronaut. Journ. (London) 73 (1969) 1057—70.
- [1.3] HUTCHINSON, J. W.—KOITER, W. T., Postbuckling Theory. Applied Mechanics Reviews 23 (1970) 1353—66.
- [1.4] NASH, W. A., Recent Advances in the Buckling of Thin Shells. Applied Mechanics Reviews 13 (1960) 161—164. Instability of Thin Shells. Applied Mechanics Surveys. Spartan Books, Washington, D.C. 1966.
- [1.5] NOWAK, Z.—ŻYCZKOWSKI, M., Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych. (Újabb tanulmányok áttekintése a vékonyfalú héjak stabilitása tárgyából.) Mechanika teoreticzna i stosowana I (1963) 31—66.
- [1.6] THOMPSON, J. M. T., A General Theory for the Equilibrium and Stability of Discrete Conservative Systems. Zschr. angew. Math. Phys. 20 (1969) 797—846.

A 2. fejezethez:

- [2.1] ALMROTH, B. O., Postbuckling Behaviour of Axially Compressed Circular Cylinders. AIAA Journ. 1 (1963) 630—633.
- [2.2] ALMROTH, B. O., Influence of Imperfections and Edge Restraint on the Buckling of Axially Compressed Cylinders. NASA CR-432. 1966, April.
- [2.3] BATDORF, S. B., A Simplified Method of Elastic-Stability Analysis for Thin Cylindrical Shells. I. Donnell's Equation, NACA TN-1341, 1947. II. Modified Equilibrium Equation, NACA TN 1342, 1947.
- [2.4] BUDIANSKY, B., Post-Buckling Behavior of Cylinders in Torsion. Theory of Thin Shells. (Second IUTAM-Symposium, Copenhagen, 1967) Ed. NIORDSON. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1969. 212—233.
- [2.5] BUDIANSKY, B.—AMAZIGO, J. C., Initial Post-buckling Behavior of Cylindrical Shells under External Pressure. Journ. Math. Phys. 47 (1968) 223—35.
- [2.6] BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.—KRETZSCHMAR, H., Stabilitätstheorie, Teil II. Akademie-Verlag, Berlin 1963.
- [2.7] DIERKS, K., Zur Kreiszyllinderschale unter Manteldruck. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 17 (1965) 139—153.
- [2.8] DONNELL, L. H., A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders Under Axial Compression and Bending. Trans. ASME 56 (1934) 795.
- [2.9] DONNELL, L. H.—WAN, C. C., Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns Under Axial Compression. Journ. Appl. Mech. 17 (1950) 73—83.
- [2.10] DONNELL, L. H., Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders Under External Pressure. Journ. Appl. Mech. 23 (1956) 569—575.
- [2.11] DONNELL, L. H., Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders with Fixed Edges Under External Pressure (Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.) American Society of Mechanical Engineers, New York, 1958.

- [2.12] DULÁCSKA, E., Héjszerkezetek kritikus terhének kísérleti meghatározása. Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények 10 (1966) 293–300.
- [2.13] DULÁCSKA, E., Héjak rezgése és stabilitása. BUVÁTI, Műszaki Osztály, Budapest 1968.
- [2.14] DYM, C. L.—HOFF, N. J., Perturbation Solutions for the Buckling Problems of Axially Compressed Thin Cylindrical Shells of Infinite or Finite Length. Journ. Appl. Mech. 35 (1968) 754–762.
- [2.15] ESSLINGER, M., Hochgeschwindigkeitsaufnahmen vom Beulvorgang dünnwandiger, axialbelasteter Zylinder. Stahlbau 39 (1970) 73–75.
- [2.16] FISCHER, G., Über den Einfluß der gelenkigen Lagerung auf die Stabilität dünnwandiger Kreiszyinderschalen unter Axiallast und Innendruck. Zschr. Flugwiss. 11 (1963) 111–119.
- [2.17] FLÜGGE, W., Statik und Dynamik der Schalen. 3. Aufl. Springer Verlag, Berlin 1962.
- [2.18] HOFF, N. J.—MADSEN, W. A.—MAYERS, J., Postbuckling Equilibrium of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells. AIAA Journ. 4 (1966) 126–133.
- [2.19] HOFF, N. J.—SOONG, T. C., Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression. Int. Journ. Mech. Sci. 7 (1965) 489–520.
- [2.20] HUTCHINSON, J., Axial Buckling of Pressurized Imperfect Cylindrical Shells. AIAA Journ. 3 (1965) 1461–66.
- [2.21] KÁRMÁN, TH. VON—TSIEN, H. S., The Buckling of Thin Cylindrical Shells Under Axial Compression. Journ. Aeronaut. Sci. 9 (1941) 303.
- [2.22] KEMPNER, J., Postbuckling Behavior of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells. Journ. Aeronaut. Sci. 21 (1954) 329–335.
- [2.23] KIRSTE, L., Abwickelbare Verformung dünnwandiger Kreiszyinder. Österreichisches Ingenieur-Archiv, 8 (1954) 149–151.
- [2.24] KOITER, W. T., Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht. (A rugalmas egyensúly stabilitásáról.) Disszertáció. Delft Amsterdam — H. J. Paris 1945.
- [2.25] KOITER, W. T., Elastic Stability and Post-buckling Behavior. Proc. Symp. Nonlinear Problems. University of Wisconsin Press, Madison (1963) 257–275.
- [2.26] KOITER, W. T., The Effect of Axisymmetric Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells Under Axial Compression. Proc. Roy. Netherl. Acad. Sci., Ser. B, 66 (1963) 265–279.
- [2.27] KORÁNYI, I., Stabilitási kérdések a mérnöki gyakorlatban. Kihajlás a síkban. Akadémiai Kiadó, Budapest 1965.
- [2.28] KROMM, A., Jahrbuch der Deutschen Luftfahrt-Forschung, 1940. 1832.
- [2.29] LEGGETT, D. M. A.—JONES, R. P. N., The Behavior of a Cylindrical Shell under Axial Compression when the Buckling Load has been Exceeded. Aeronautical Research Council, R. & M. London, (1942) 2190.
- [2.30] LITTLE, W. A., Reliability of Shell Buckling Predictions. Research Monograph No. 25. M. I. T. Press, Cambridge, Mass. 1964.
- [2.31] LOO, T. T., Effects of Large Deflections and Imperfections on the Elastic Buckling of Cylinders Under Torsion and Axial Compression. (Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.) New York, American Society of Mechanical Engineers, 1955. 345–357.
- [2.32] LUNDGREN, H., Cylindrical Shells. Vol. 1. The Institution of Danish Civil Engineers. 1960.
- [2.33] MADSEN, W. A.—HOFF, N. J., The Snap-through and Postbuckling Equilibrium Behavior of Circular Cylindrical Shells Under Axial Load. Stanford University Department of Aeronautics and Astronautics. Report No 227. (1965) Stanford, California.
- [2.34] MAYERS, J.—REHFIELD, L. W., Further Nonlinear Considerations in the Postbuckling Behavior of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells. Proc. 9th Midwestern Mechanics Conference, Wisconsin, Madison, 1965. Wiley & Sons, New York 1967.
- [2.35] MENYHÁRD I., Héjszerkezetek számítása és szerkesztése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966.
- [2.36] MICHELESEN, H. F., The Behavior of Thin Cylindrical Shells after Buckling under Axial Compression. Journ. Aeronaut. Sci. 15 (1948) 738–744.

- [2.37] NARASIMHAN, K. Y.—HOFF, N. J., Snapping of Imperfect Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length. *Journ. Appl. Mech.* 38 (1971) 162—171.
- [2.38] NASH, W. A., Buckling of Initially Imperfect Cylindrical Shells Subject to Torsion. *Journ. Appl. Mech.* 24 (1957) 125—130.
- [2.39] NEUFVILLE, R. L. DE—CONNOR, J. J. JR., Postbuckling Behavior of Thin Cylinders. *Journ. Eng. Mech. Divis. Proc. ASCE*, 94 (1968), No 2, 585—602.
- [2.40] PFLÜGER, A., *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1950.
- [2.41] PFLÜGER, A., Zur praktischen Berechnung der axial gedrückten Kreiszylinderschale. *Stahlbau* 32 (1963) H. 6. 161—165.
- [2.42] PFLÜGER, A., Zur praktischen Berechnung der Kreiszylinderschale unter Manteldruck. *Stahlbau* 35 (1966) H. 8. 249—252.
- [2.43] PONOMARJOV, Sz. D., Szilárdsági számítások a gépezetben. 7. kötet. Stabilitás, Gumielemek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966.
- [2.44] SCHNELL, W., Zur Stabilität dünnwandiger längsgedruckter Kreiszylinderschalen bei zusätzlichem Innendruck. (Proc. Symp. Theory of Thin Elastic Shells, Delft 1959), 167—188. North-Holland Publ., Amsterdam 1960.
- [2.45] SEIDE, P.—WEINGARTEN, V. I., On the Buckling of Circular Cylindrical Shells Under Pure Bending. *J. Appl. Mech.* 28 (1961) 112—116.
- [2.46] STEIN, M., Some Recent Advances in the Investigation of Shell Buckling. *AIAA Journ.* 6 (1968) 2339—45.
- [2.47] STURM, R. G., A Study of the Collapsing Pressure of Instability of Thin-Walled Cylinders. University of Illinois Engineering Experimental Station. Bulletin No. 329. (1941)
- [2.48] TENNYSON, R. C., Buckling Modes of Circular Cylindrical Shells under Axial Compression. *AIAA Journ.* 7 (1969) 1481—87.
- [2.49] THIELEMANN, W.—ESSLINGER, M., Einfluß der Randbedingungen auf die Beullast von Kreiszylinderschalen. *Stahlbau* 33 (1964) H. 12. 353—361.
- [2.50] THIELEMANN, W.—ESSLINGER, M., Beul- und Nachbeulverhalten isotroper Zylinder unter Außendruck. *Stahlbau* 36 (1967) H. 6. 161—175.
- [2.51] TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, New York 1961.
- [2.52] ВОВЛИН, В. А. (ВОЕБЛЫХ, В. А.), О влиянии начальных отклонений на величину критической нагрузки для круговых цилиндрических оболочек. *Прикл. Мех.* I (1965) 500—505.
- [2.53] WEINGARTEN, V. I.—MORGAN, E. J.—SEIDE, P., Elastic Stability of Thin-Walled Cylindrical and Conical Shells under Axial Compression. *AIAA Journ.* 3 (1965) 500—505.
- [2.54] WEINGARTEN, V. I.—SEIDE, P., Elastic Stability of Thin-Walled Cylindrical and Conical Shells under Combined External Pressure and Axial Compression. *AIAA Journ.* 3 (1965) 913—920.
- [2.55] WINDENBURG, D. F.—TRILLING, C., Collapse by Instability of Thin Cylindrical Shells under External Pressure. *Trans. ASME* 56 (1934) 819—825.
- [2.56] WLASSOW, W. S., *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik*. Akademie-Verlag, Berlin 1958.
- [2.57] ВЛАСОВ, В. З., (VLASOV, V. Z.), *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*. Гостехиздат, Москва 1949.
- [2.57] WOLMIR, A. S., *Biegsame Platten und Schalen*. Verlag für Bauwesen, Berlin 1962.

A 3. fejezethez:

- [3.1] BARUCH, M.—HARARI, O.—SINGER, J., Low Buckling Loads of Axially Compressed Conical Shells. *Journ. Appl. Mech.* 37 (1970) 384—392.
- [3.2] LACKMAN, L.—PENZIEN, J., Buckling of Circular Cones Under Axial Compression. *Journ. Appl. Mech.* 27 (1960) 458—460.
- [3.3] NIORDSON, F. I. N., Buckling of Conical Shells Subjected to Uniform External Lateral Pressure. *Trans. Roy. Inst. Techn. Stockholm*. No. 10. 1947.

- [3.4] SEIDE, P., Axisymmetrical Buckling of Circular Cones Under Axial Compression. *Journ. Appl. Mech.* 23 (1956) 625—628.
- [3.5] SEIDE, P., On the Buckling of Truncated Conical Shells Under Uniform Hydrostatic Pressure. (Proceedings Symp. Theory of Thin Elastic Shells Delft, 1959). North-Holland Publ., Amsterdam 1960.
- [3.6] SEIDE, P., The Stability of Thin Conical Frustrums Subjected to Axial Compression and External Pressure. TRW Space Technology Labs., Inc. (1960) Kézirat.

A 4. fejezethez:

- [4.1] ADAM, H. P.—KING, P. A., Experimental Investigation of the Stability of Monocoque Domes Subjected to External Pressure. *Experimental Mechanics* 5 (1965) 313—320.
- [4.2] ARCHER, R. R.—FAMILI, J., On the Vibration and Stability of Finitely Deformed Shallow Spherical Shells. *Journ. Appl. Mech.* 32 (1965) 116—120.
- [4.3] BUDIANSKY, B., Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells. (Proc. Symp. Theory of Thin Elastic Shells Delft, 1959). North-Holland Publ., Amsterdam 1960.
- [4.4] BUSHNELL, D., Nonlinear Axisymmetric Behavior of Shells of Revolution. *AIAA Journ.* 5 (1967) 432—439.
- [4.5] CARLSON, R. L.—SENDELBECK, R. L.—HOFF, N. J., Experimental Studies of the Buckling of Complete Spherical Shells. *Experimental Mechanics*, 7 (1967) 281—288.
- [4.6] CSONKA P., Egy kétirányban görbe kupolaszerű héj kihajlása. *Az ÉKME Tud. Ülésszaka* 1955. 253—260. Budapest 1957.
- [4.7] DANIELSON, D. A., Buckling and Initial Postbuckling Behavior of Spheroidal Shells under Pressure. *AIAA Journ.* 7 (1969) 936—944.
- [4.7a] DOSZTANOVA, Sz. H. — RAJZER, V. D., (ДОСТАНОВА, С. Х. — РАЙЗЕР, В. Д.) Исследование устойчивости пологих оболочек положительной кривизны методом локальных вариаций. *Строит. мех. и расч. соор.* (1973) 34—39.
- [4.8] DULÁCSKA, E., A héjak kritikus terhéről. *Az IASS magyar tagozatának héjszerkezeti kollokviuma.* Budapest, 1968. november. 69—82. (Építéstudományi Intézet)
- [4.9] EVAN-IWANOWSKI, R. M.—LOO, T. C., Deformations and Stability of Spherical Shells under Action of Concentrated Loads and Uniform Pressure. *Techn. Report* 834 (11), No. 4. Syracuse University Research Institute, 1962.
- [4.10] FRIEDRICH, K. O., On the Minimum Buckling Load for Spherical Shells. *Th. v. Kármán Anniversary Vol.* 1941. 258.
- [4.10a] GABRILJANC, A. G. — FEODOSZJEV, F. I., (ГАБРИЛЬЯНЦ, А. Г. — ФЕОДОСЬЕВ, Ф. И.) Об осесимметричных формах равновесия упругой сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного давления. *Прикл. мат. и мех.* 25 (1961) №.6.
- [4.11] HERGENRÖDER, A.—RÜSCH, H., Recent Findings in the Testing of Models. *Proc. Symp. Shell Research, Delft 1961.* North-Holland Publ., Amsterdam 1961.
- [4.12] HOMEWOOD, R. H.—BRINE, A. C.—JOHNSON, A. E. JR., Experimental Investigations for the Buckling Instability of Monocoque Shells. *Proc. Soc. Experimental Stress Analysis* 18 (1961) 88—96.
- [4.13] HUANG, N. C., Unsymmetrical Buckling of Thin Shallow Spherical Shells. *Journ. Appl. Mech.* 31 (1964) 447—457.
- [4.14] HUTCHINSON, J. W., Imperfection Sensitivity of Externally Pressurized Spherical Shells. *Journ. Appl. Mech.* 34 (1967) 49—55.
- [4.15] HYMAN, B. I.—HEALEY, J. J., Buckling of Prolate Spheroidal Shells under Hydrostatic Pressure. *AIAA Journ.* 5 (1967) 1469—77.
- [4.16] KAO, R.—PERRONE, N., Asymmetric Buckling of Spherical Caps With Imperfections. *Journ. Appl. Mech.* 38 (1971) 172—178.
KAO, R., A Note on Buckling of Spherical Caps with Initial Asymmetric Imperfections. *Journ. Appl. Mech.* 39 (1972) 842—844.

- [4.17] KAPLAN, A.—FUNG, Y. C., A Nonlinear Theory of the Bending and Buckling of Thin Elastic Shallow Shells. NACA TN 3212 (1954)
- [4.18] KÁRMÁN, TH. VON—TSIEN, H. S., The Buckling of Spherical Shells by External Pressure. *Journ. Aeronaut. Sci.* 7 (1939) 43.
- [4.19] KLÖPPEL, K.—JUNGBLUTH, O., Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger Kugelschalen. (Versuche und Bemessungsformeln.) *Stahlbau* 22 (1953) 121—130.
- [4.20] KLÖPPEL, K.—ROOS, E., Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger, versteifter und unversteifter Kugelschalen für voll- und halbseitige Belastung. *Stahlbau* 25 (1956) 49—60.
- [4.21] KOGA, T.—HOFF, N. J., The Axisymmetric Buckling of Initially Imperfect Complete Spherical Shells. *Int. Journ. Solids Struct.* 5 (1969) 679—697.
- [4.22] KOITER, W. T., The Nonlinear Buckling Problem of a Complete Spherical Shell under Uniform External Pressure. I, II, III and IV, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. Series B. Vol. 72* (1969) 40—123.
- [4.23] KOTEN, H. VAN—HAAS, A. M., The Influence of the Edge Stiffness and of the Angle of Aperture on the Stability of a Spherical Shell. *Symposium IASS, Leningrad* 1966.
- [4.24] KOTEN, H. VAN—HAAS, A. M., The Stability of Doubly Curved Surfaces Having a Positive Gaussian Curvature Index. *Heron* 17 (1970—71) No. 4.
- [4.25] KRENZKE, M. A.—KIERNAN, T. J., Elastic Stability of Near-Perfect Shallow Spherical Shells. *AIAA Journ.* 1 (1963) 2855—2857.
- [4.26] MUSTARI, H. M.—SZURKIN, R. G., (МУШТАРИ, Х. М.—СУРКИН, Р. Г.), О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия сферической оболочки при действии равномерно распределенного внешнего давления. *Прикл. мат. и мех.* 14 (1950) 573.
- [4.26a] MUSTARI, H. M., (МУШТАРИ, Х. М.) К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления. *Прикл. мат. и мех.* 19 (1955) № 2.
- [4.27] NEUT, A. VAN DER, De elastische stabiliteit van de dunwandige bol. (Dissertáció.) Delft 1932.
- [4.28] PARMETER, R. R., The Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells under Uniform Pressure. *Dissertáció. California Institute of Technology.* 1963.
- [4.29] SCHMIDT, H., Ergebnisse von Beulversuchen mit doppelt gekrümmten Schalenmodellen aus Aluminium. *Proc. Symp. Shell Research, Delft* 1961. North-Holland Publ., Amsterdam 1961.
- [4.30] SCHUBIGER, E., Die Schalenkuppel im vorgespannten Beton der Kirche Felix und Regula in Zürich. *Schweizerische Bauzeitung*, 68. (1950). 223—228.
- [4.31] SEAMAN, L., The Nature of Buckling in Thin Spherical Shells. *Dissertáció. Cambridge, Mass. M. I. T. Department of Civil Engineering*, 1961.
- [4.32] SIMITSES, G. J.—COLE, R. T., Effect of Load Behavior on the Buckling of Thin Spherical Shells under Pressure. *Journ. Appl. Mech.* 35 (1968) 420—422.
- [4.33] STENKER, H., Gesamtbericht von Großversuchen an doppelt gekrümmten Montageschalen für raumabschließende Geschoßdecken. *Wiss. Zschr. Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar VIII.* (1961) 181—202.
- [4.34] THOMPSON, J. M. T., The Elastic Instability of a Complete Spherical Shell. *Aeronaut. Quart.* 13 (1962) 189—201.
The Post-buckling of a Spherical Shell by Computer Analysis. *Proc. World Conference on Shell Structures, San Francisco* 1962. Washington, D. C., National Academy of Sciences, 1964.
- [4.35] THURSTON, G. A., A Numerical Solution of the Nonlinear Equations for Axisymmetric Bending of Shallow Spherical Shells. *Journ. Appl. Mech.* 28 (1961) 557—568.
- [4.36] THURSTON, G. A., A New Method for Computing Axisymmetric Buckling of Spherical Caps. *Journ. Appl. Mech.* 38 (1971) 179—184.
- [4.37] THURSTON, G. A.—PENNING, F. A., Effect of Axisymmetric Imperfections on the Buckling of Spherical Caps under Uniform Pressure. *AIAA Journ.* 4 (1966) 319—327.
- [4.38] TSIEN, H. S., A Theory for the Buckling of Thin Shells. *Journ. Aeronaut. Sci.* 9 (1941) 373—384.

- [4.39] WANG, L. R. L., Discrepancy of Experimental Buckling Pressures of Spherical Shells. *AIAA Journ.* 5 (1967) 357–359.
- [4.40] WANG, L. R. L.—RODRIGUEZ-AGRAIT, L.—LITTLE, W. A., Effect of Boundary Conditions on Shell Buckling. *Journ. Eng. Mech. Divis. Proc. ASCE*, 92. (1966), No 6, 101–116.
- [4.41] WEDELLSBORG, B. W., Critical Buckling Load on Large Spherical Shells. *Journ. Struct. Divis. Proc. ASCE*, 88. (1962), St 1, 111–121.
- [4.42] WEINITSCHKE, H. J., On Asymmetric Buckling of Shallow Spherical Shells. *Journ. Math. Phys.* 44 (1965) 141–163.
- [4.43] ZOELLY, R., Über ein Knickproblem an der Kugelschale. *Dissertáció* Zürich 1915.

Az 5. fejezethez:

- [5.1] FLÜGGE, W.—GEYLING, F. T., A General Theory of Deformations of Membrane Shells. *Abh. IVBH* 17 (1957) 23–46.
- [5.2] GEYLING, F. T., A General Theory of Deformations of Membrane Shells. (Dissertáció) Stanford University, Stanford, Calif. 1953.
- [5.3] LA TEGOLA, A., Sulla stabilità dell'equilibrio del guscio piatto a forma di paraboloide iperbolico. *Giornale di Genio Civile* 105 (1967) 809–817.
- [5.4] LEET, K. M., Study of Stability in the Hyperbolic Paraboloid. *Journ. Eng. Mech. Divis. Proc. ASCE*, 92. (1966) No 1.
- [5.5] RALSTON, A., On the Problem of Buckling of a Hyperbolic Paraboloidal Shell Loaded by Its Own Weight. *Journ. Math. Phys.* 35 (1956) 53–59.
- [5.6] VLASZOV, V. Z.—GARAI T., Nyomatékmentes forgáshéjak kinematikai határozatlanságának feltétele. *MTA VI. oszt. közl. XIX* (1956) 21 i – 223.

A 6. fejezethez:

- [6.1] BRAZIER, L. G., On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other „Thin” Sections. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.* 116, (1927) 104–114.
- [6.2] CSELLÁR Ö.—HALÁSZ O.—RÉTI V., Vékonyfalú acélszerkezetek. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest 1965.
- [6.3] DULÁCSKA, E., Külpontosan nyomott héj-ívek stabilitása. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 7 (1963) 135–142.
- [6.4] KÁRMÁN, TH. VON, Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichsrohre. *VDI-Zeitschrift*, 55 (1911) 1889–95.
- [6.5] KOLLÁR, L., Statik und Stabilität der Schalenbogen und Schalenbalken. *W. Ernst und Sohn*, Berlin—München — *Akadémiai Kiadó*, Budapest 1973.
- [6.6] KOLLÁR L., Közponosan nyomott héj-ívek stabilitása. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 4 (1960) 599–619.
- [6.7] KOLLÁR L., Hajlított héj-ívek stabilitása. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 5 (1961) 29–52.
- [6.8] KOLLÁR L., Héj-ívek elcsavarodó kihajlása. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 6 (1962) 89–100.
- [6.9] KOLLÁR L., Hajlított, vékonyfalú görbe rudak (héj-ívek) kifordulása. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 7 (1963) 143–157.
- [6.10] KOLLÁR, L., Lateral Buckling of Bent Shell-Arches, Taking into Consideration Non-Linear Stress Distribution. *Bulletin of the International Association for Shell Structures*, No. 19 (1964)
- [6.11] KOLLÁR, L.—IVÁNYI, GY., Kippen und Biegedrillknicken von Schalenbogen mit Hilfe der Energiemethode. *Bautechnik-Archiv*, Heft 19. *W. Ernst und Sohn*, Berlin—München 1966.
- [6.12] KOLLÁR L.—GÁRDONYI Z., Vékonyfalú, felfüggesztett gerendák kifordulása. *MTA VI. Oszt. Közl.* 37 (1966) 385–407.
- [6.13] KOLLÁR L.—GÁRDONYI Z., Héjívek oldalirányú stabilitása antimetrikus terhekre. *MTA VI. Oszt. Közl.* 39 (1967) 187–205.
- [6.14] KOLLÁR L.—GÁRDONYI Z., Vonóvasas héjívek oldalirányú stabilitása. *MTA VI. Oszt. Közl.* 40 (1968) 303–318.

- [6.15] KOLLÁR, L., On Post-Buckling Behaviour of Shell-Arches. Bull. IASS, N. 30 (June 1967).
- [6.16] SZITTNER A., A Budapesti Sportcsarnok modellkísérlete. Az IASS magyar tagozatának héjszerkezeti kollokviuma. Budapest, 1968. november. 203—219. (Építéstudományi Intézet.)

A 7. fejezethez:

- [7.1] ALMROTH, B. O., Postbuckling Behavior of Orthotropic Cylinders under Axial Compression. AIAA Journ., 2 (1964) 1795—1799.
- [7.2] BARUCH, M.—SINGER, J., Instability of Conical Shells. Aeronaut. Quart. 16 (1965) 187—204.
- [7.3] BODNER, S. R., General Instability of a Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shell under Hydrostatic Pressure. Journ. Appl. Mech. 24 (1957) 269—277.
- [7.4] BUSHNELL, D., Symmetric and Nonsymmetric Buckling of Finitely Deformed Eccentrically Stiffened Shells of Revolution. AIAA Journ., 5 (1967) 1455—1462.
- [7.5] CRAWFORD, R. F.—SCHWARTZ, D. B., General Instability and Optimum Design of Grid-Stiffened Spherical Domes. AIAA Journ. 3 (1965) 511—515.
- [7.6] DULÁCSKA, E., Stability of Anisotropic Hyperbolic Paraboloid Shells. Acta Techn. Ac. Sci. Hung. 59 (1967) 123—130.
- [7.7] EBNER, H., Angenäherte Bestimmung der Tragfähigkeit radial versteifter Kugelschalen unter Druckbelastung. Proceedings IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells. North-Holland Publ., Amsterdam 1960, 95—121.
- [7.8] FISCHER, M., Versuche zur Ermittlung des Tragverhaltens einer hyperbolischen Paraboloidschale aus einlagigen Trapezprofilblechen. Stahlbau, 4—5 (1972) 110—115, 145—150.
- [7.9] GERARD, G., Compressive Stability of Orthotropic Cylinders. Journ. Aerospace Sci. (1962 Oct.) 1171—89.
- [7.10] GIRKMANN, K., Flächentragwerke. 5. Aufl. Springer Verlag, Wien 1959.
- [7.11] HAYASHI, T., Torsional Buckling of Orthogonal Anisotropic Cylinders. 8th Int. Congr. Appl. Mech. 1952.
- [7.12] HOLSTON, A., Buckling of Inhomogeneous Anisotropic Cylindrical Shells by Bending. AIAA Journ. 9 (1968) 1837—1841.
- [7.13] KROLAK, M., The Stability of Orthotropic Conical Shells Under Axial Compressive Load According to the Nonlinear Theory. Archivum Budowy Maszyn 16,3 (1969) 333—351.
- [7.14] LAKSHMIKANTHAM, C.—GERARD, G., Minimum Weight Design of Stiffened Cylinders. Aeronaut. Quart. (1970) Febr. 45—68.
- [7.15] MAH, G. B.—ALMROTH, B. O.—PITNER, E. V., Buckling of Orthotropic Cylinders. AIAA Journ. 4 (1968) 598—602.
- [7.16] MARCH, H. W., Buckling of Long Thin Plywood Cylinders in Axial Compression. Forest Prod. Laboratory, Rep. No. 1322-A. (Sept.) 1943.
- [7.17] McDERMOTT, J. F., Single-Layer Corrugated-Steel-Sheet Hypars. Proc. ASCE, Journ. Struct. Divis. (1968) St 6, 1279—1293.
- [7.18] MEYER, R. R.—BELLIFANTE, R. J., Fabrication and Experimental Evaluation of Common Cones Having Waffle-Like Stiffening. Douglas Aircraft Corp. Rept. SM-47742 (Nov. 1964.)
- [7.19] MILLIGAN, R.—GERARD, G.—LAKSHMIKANTHAM, C., General Instability of orthotropically stiffened cylinders under Axial Compression. AIAA Journ. 4 (1966) 1906—1913.
- [7.20] MILLIGAN, R.—GERARD, G., General Instability of Orthotropically Stiffened Cylinders under Torsion. AIAA Journ. 5 (1967) 2071—2073.
- [7.21] SCHAPITZ, E., Festigkeitslehre für den Leichtbau. 2. Aufl. VDI-Verlag, Düsseldorf 1963.
- [7.22] SCHNELL, W.—BRÜHL, CH., Die längsgedrückte orthotrope Kreiszylinderschale bei Innendruck. Zschr. Flugwiss. 7 (1959).

- [7.23] SCHULZ, V., Zur Beulstabilität anisotroper Zylinderschalen aus glasfaser-verstärktem Kuntstoff. *Bauing.* 47 (1972) H.5. 157–163.
- [7.24] SIMITSES, G., Instability of Orthotropic Cylindrical Shells under Combined Torsion and Hydrostatic Pressure *AIAA Journ.* 5 (1967) 1463–1469.
- [7.25] SINGER, J.—FERSHT, R., Buckling of Orthotropic Conical Shells Under External Pressure. *Journ. Appl. Mech.* 29 (1962) 212–214.
- [7.26] SINGER, J., Buckling of Orthotropic and Stiffened Conical Shells. NASA Technical Note. Collected Papers on Instability of Shell Structures (1962) 463–479.
- [7.27] SINGER, J., The Influence of Stiffener Geometry and Spacing on the Buckling of Axially Compressed Cylindrical and Conical Shells. *Theory of Thin Shells, IUTAM Symposium Copenhagen 1967.* Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1969, 234–263.
- [7.28] SINGER, J.—ARBOCZ, J.—BABCOCK, CH. D., Buckling of Imperfect Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression. *AIAA Journ.* 9 (1971) 68–75
- [7.29] STEIN, M.—SANDERS, J. L.—CRATE, H., Critical Stress of Ring-Stiffened Cylinders in Torsion. *NACA Report No. 989.* (1951).
- [7.30] THIELEMANN, W. F., New Developments in the Nonlinear Theories of the Buckling of Thin Cylindrical Shells. *Aeronautics and Astronautics. Proc. of the Durand Cent. Conference at Stanford University 1959.* Pergamon Press. Oxford—London—New York—Paris 1960.
- [7.31] TIMOSHENKO, ST.—WOJNOWSKY-KRIEGER, S., *Lemezek és héjak elmélete.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966.

A 8. fejezethez:

- [8.1.1] ALLEN, H. G., *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels.* Pergamon Press, Oxford—London—Edinburgh—New York—Toronto—Sydney—Paris—Braunschweig 1969.
- [8.1.2] HABIP, L. M., A Survey of Modern Developments in the Analysis of Sandwich Structures. *Appl. Mech. Reviews* 18 (1965) No. 8.
- [8.1.3] LIN, M. S.—POPOV, E. P., Buckling of Spherical Sandwich Shells. *Exp. Mech.* (1969) Oct., 433–440.
- [8.1.4] MARCH, H.—KUENZI, E., Buckling of Cylinders of Sandwich Construction. *Forest Products Lab., Rep. 1830* (Dec) 1957.
- [8.1.5] PLANTEMA, J. F., *Sandwich Construction. The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates and Shells.* Wiley and Sons, New York—London—Sydney 1966.
- [8.1.6] SYLVESTER, R. J., Buckling of Sandwich Cylinders Under Axial Load. *Journ. Aeronaut. Sci.* (1962) July, 863–872.
- [8.1.7] TEICHMANN, F. K.—WANG, C.—GERARD, G., Buckling of Sandwich Cylinders under Axial Compression. *Journ. Aeronaut. Sci.* 18 (1951) No. 6.
- [8.1.8] YAO, J. C., Buckling of Sandwich Sphere under Normal Pressure. *Journ. Aeronaut. Sci.* (1962) March, 264–305.
- [8.2.1] BARUCH, M.—SINGER, J., Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure. *Journ. Mech. Eng. Sci.* 5 (1963) 23–27.
- [8.2.2] BIEZENO, C. B.—GRAMMEL, R., *Technische Dynamik.* 2. Aufl. Bd. I. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953.
- [8.2.3] CHWALLA, E.: Die Formeln zur Berechnung der „voll mittragenden Breite“ dünner Gurt- und Rippenplatten. *Stahlbau* 9 (1936) H. 10., 73–78.
- [8.2.4] EBNER, H.: Theorie und Versuche zur Festigkeit von Schalenrumpfen. *Luftfahrt-Forschung* 14 (1937) 93–115.
- [8.2.5] GEIER, B.: Beullasten versteifter Kreiszyinderschalen. *Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt* (1965) 440–47.
- [8.2.6] GIENCKE, E., Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. *Stahlbau* 24 (1955) 128–129.
- [8.2.7] JANKÓ, L., A hengerhéjak az alkotóirányú bordával együtdolgozó szélessége. *Disszertáció (kézirat).*

- [8.2.8] KOITER, W. T.: Buckling and Post-buckling Behaviour of a Cylindrical Panel under Axial Compression. Nationaal Luchtvaartlaboratorium (Nat. Aeron. Res. Inst.) Amsterdam, Report S. 476 (1956).
- [8.2.9] MARGUERRE, K.: Die mittragende Breite der gedrückten Platte. Luftfahrt-Forschung 14 (1937) 121—128.
- [8.2.10] NEUT, A. VAN DER: The General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression. Nationaal Luchtvaartlaboratorium (Nat. Aeron. Res. Inst.) Amsterdam, Report S. 314 (1947).
- [8.2.11] PFLÜGER, A., Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte. Ing.-Archiv 16 (1947) 111—120.
- [8.2.12] PFLÜGER, A., Das Beulproblem der orthotropen Platte mit Hohlsteifen. Zschr. Flugwiss. 5 (1957) H. 6, 178—181.
- [8.2.13] SINGER, J.—BARUCH, M.—HARARI, O., Inversion of the Eccentricity Effect in Stiffened Cylindrical Shells Buckling under External Pressure. Journ. Mech. Eng. Sci. 8 (1966) 363—373.
- [8.2.14] SINGER, J.—MEER, A.—BARUCH, M., Buckling of Cylindrical Panels under Lateral Pressure. Aeronaut. Journ. (London) 73 (1969) 169—172.
- [8.2.15] STUHLMANN, C.—DE LUZIO, A.—ALMROTH, B.: Influence of Stiffer Eccentricity and End Moment on Stability of Cylinders in Compression. AIAA Journ. 4 (1966) 872—877.
- [8.2.16] TAMATE, O.—SEKINE, H., Post-buckling Behaviour of Thin Curved Panels under Axial Compression. Bulletin Japan. Soc. Mech. Engrs. 12 (1969) 415—420.
- [8.2.17] TRENKS, K., Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten. Bauing. 29 (1954) 372—377.
- [8.3.1] BUCHERT, K. P., Buckling Considerations in the Design and Construction of Doubly Curved Space Structures. International Conference on Space Structures, London, 1966, Department of Civil Engineering, University of Surrey.
- [8.3.2] FORMAN, S. E.—HUTCHINSON, J. W., Buckling of Reticulated Shell Structures. Int. Journ. Solids Struct. 6 (1970) 909—932.
- [8.3.3] KERÉK A., Az egyrétegű, általános háromszöghálózató rácsozából álló anizotrop hajlított héjak számítása. Műszaki Tudomány, 50 (1974).
- [8.3.4] KOLLÁR L.—HEGEDÜS I., Kétrétegű, általános háromszög hálózató rácserkezet megoldása folytonos számítási modellel. Műszaki Tudomány, 46 (1973) 53—70.
- [8.3.5] KOLLÁR L., Különböző merevségekkel bíró alsó-felső övsíkú, kétrétegű tér-rácsok számítása a kontinuum-módszerrel. Műszaki Tudomány, 47 (1973) 225—236.
- [8.3.6] WRIGHT, D. T., Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells. Journ. Struct. Divis. Proc. ASCE, (1965), St 1, 173—201.
- [8.3.7] WRIGHT, D. T., A Continuum Analysis for Double Layer Space Frame Shells. Abh. IVBH. 26 (1966).
- [8.4.1] ABDEL-SAYED, G., Critical Shear Loading of Curved Panels of Corrugated Sheets. Proc. ASCE, Journ. Eng. Mech. Divis. (1970), No. 6, 895—911.
- [8.4.2] Mc.DERMOTT, J. F., Single-Layer Corrugated-Steel-Sheet Hypars. Proc. ASCE, Journ. Struct. Divis. (1968) No. 6, 1279—1293.
- [8.4.3] NILSON, H. A., Light Gage Steel Sheet Roofs. Proc. World Conference on Shell Structures. San Francisco, Calif. 1962.

A 9. fejezethez:

- 9.1] ARBOCZ, J., The Effect of General Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells. Journ. Appl. Mech. 30 (1969) 28—38.
- [9.2] BOLOTIN, V. V.: Statisztikai módszerek a szerkezetek mechanikájában. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1970.
- [9.3] C.E.B.: Empfehlungen zur Berechnungen und Ausführung von Stahlbetonbauwerken. Deutscher Beton-Verein 1966.

- [9.4] DICKIE, J. F.—BROUGHTON, P.: Stability Criteria for Shallow Arches. Proc. ASCE, Journ. Eng. Mech. Divis. 97 (1961), EM 3, 951—965.
- [9.5] DISCHINGER, F.: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. Bauing. 18 (1937), 604.
- [9.6] DULÁCSKA E.: Héjszerkezetek stabilitásvizsgálata. Mélyépítéstudományi Szemle XVI. 5 (1966). 242—246.
- [9.7] DULÁCSKA, E., Praktische Stabilitätsuntersuchung von zentrisch gedrückten Tragwerken aus Material mit veränderlichem Elastizitätsmodul. Bautechnik 10 (1972) 340—345.
- [9.8] DULÁCSKA E., Beton- és vasbetonhéjak horpadásvizsgálata. Műszaki Tudomány, 48/3—4 (1974).
- [9.9] DULÁCSKA E., Az ideálisan rugalmas — képlékeny anyagú héjak horpadásvizsgálata. Mélyépítéstudományi Szemle XXIV. (1974) 2, 77—84.
- [9.10] GRIGGS, H., Buckling of Reinforced Concrete Shells. Proc. ASCE, Journ. Eng. Mech. Divis. 97. (1971), EM 3, 687—700.
- [9.11] HAAS, A. M.—VAN KOTEN, H., On the Buckling Behaviour of Doubly Curved Shells. RILEM Symposium, Buenos Aires 1971.
- [9.12] HAAS, A. M.—VAN KOTEN, H., The Stability of Doubly Curved Thin Shells. RILEM Symposium, Buenos Aires 1971.
- [9.13] HARRIS, L. A.—SUER, H. S.—SUENE, W. T.—BENDJAMEN, R. J., The stability of thin-walled unstiffened circular cylinders. Journ. Aeronaut. Sci. 24 (1947) No. 8.
- [9.14] HOHENEMSER, K.—PRAGER, W., Dynamik der Stabwerke. Springer Verlag, Berlin 1933.
- [9.15] HUANG, N. C., Nonlinear Creep Buckling of Some Simple Structures. University of California, San Diego. Report IRPA-66-80, 1960.
- [9.16] JEŽEK, K., Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Springer Verlag, Wien 1937.
- [9.17] KOLLÁR L., Héjszerkezetek stabilitási viselkedése a kritikuson túli állapotban. Az IASS magyar tagozatának héjszerkezeti kollokviuma. Budapest, 1968. november. Építéstudományi Intézet, 145—162.
- [9.18] KOLLÁR L., A kúszás hatása a szerkezetek kritikus terhére. Mélyépítéstud. Szemle XVIII. (1968) 10, 472—79.
- [9.19] KORDA J.—MÓNA J., A vasbeton szerkezetek méreteiben mutatkozó tényleges eltérések és azok számításba vétele. ÉMI Jelentés, Budapest 1969.
- [9.20] MIHALICH GY.—PALOTÁS L., Vasbetonépítéstan I. A vasbeton szilárdságtana. Tankönyvkiadó, Budapest 1964.
- [9.21] LÖSER, B., Bemessungsverfahren. W. Ernst und Sohn, Berlin 1940.
- [9.22] RIEL, A. C.—BERANEK, W. J.—BOUMA, A. L., Tests on Shell Roof Models of Reinforced Mortar. Proceedings of the Second Symposium on Concrete Shell Roof Construction (July 1957), Teknisk Ukeblad, Oslo.
- [9.23] ROORDA, J., Some Thoughts on the Southwell Plot. Proc. ASCE, Journ. Eng. Mech. Divis. (1967), EM 6, 37—48.
- [9.24] ROŠ, M., Die materialtechnischen Grundlagen und Probleme des Eisenbetons im Hinblick auf die zukünftige Gestaltung der Stahlbeton-Bauweise. EMPA-Bericht, Nr. 162 (1950).
- [9.25] SZEPESSZENTGYÖRGYI O., ÉMI Tudományos Beszámoló az állandó terhekre vonatkozó ISO előírás kidolgozása c. témáról. Budapest 1966.

Tárgymutató

A

- Alakváltozási tényező 143, 155, 157, 160
Alkotóirányú bordákkal együttműködő lemezszélesség 126
Alkotóirányban nyomott hengerhéj 12, 15, 18, 22, 26, 29, 31, 33, 40, 43, 44, 49, 56, 78, 107, 109, 117, 147, 153, 161
— — — alsó kritikus terhe 12, 15, 26, 29, 107, 111, 117, 147
— — — felső kritikus terhe 12, 15, 29, 31, 33, 107, 111, 147, 161
— — — kritikuson túli teherbírása 12, 15, 27, 32, 35, 40, 46, 48, 107, 111, 117, 147, 161
— — — lineáris kritikus terhe 12, 15, 20, 22, 25, 28, 33, 44, 46, 51, 97, 107, 109, 117, 144, 153
— — — hengerhéjmező lineáris kritikus terhe 121, 122
— — — hengerhéjmező kritikuson túli viselkedése 123
— — — kúphéj 12, 15, 51
— — — lineáris kritikus terhe 12, 15, 51
Alkotóirányú összenyomódás 15, 27, 45, 122
Alsó kritikus teher, elliptikus kupolahéj 12, 15, 75, 96
— — —, hengerhéj 12, 15, 26, 29, 41, 43, 107, 111, 147
— — —, hiperbolikus paraboloidhéj 12, 15, 112
— — —, gömbhéj 12, 15, 60, 147
— — —, gömbfüveghéj 12, 15, 65, 69
Alumínium héj 155
Anizotróp héj 94
Arányossági határ 155
Aszimmetrikus horpadási alak 13, 44, 56, 66
— kezdeti hullámosság 12, 15, 46, 61
Axiálisan merevített henger 16, 97, 99, 107, 114, 119, 126, 134
— nyomott szendvics hengerhéj 116

Á

- Általános horpadás, szendvics héj 114, 116

- Átpattanás 12, 15, 27, 31, 33, 42, 49, 59, 61, 72, 122, 137

B

- Befogott peremű henger 22, 47, 48
— — gömbfüveghéj 63, 65, 67, 71
Belső nyomás 44, 45, 98, 109
Biztonsági tényező 17, 145, 165, 167
Bordákkal hajlításra együttműködő lemezszélesség 119, 126
Bordás hengert helyettesítő izotróp tömör héj 111
— héj 114, 119
— —, kihorpadt héjlemez 128
— —, nem kihorpadt héjlemez 126
— — — — — héjjal egyenértékű ortotróp héj 134
— — — — — merevségi tényezői 134
Bordáslemez 95
— — — — — harántkontrakciós tényezője 113
Bordázás 16, 97, 101, 103, 107, 114, 119, 120, 126, 134, 140
— sűrűsége 120, 134

C

- Cementtartalom 158
Consistent theory 23

Cs

- Csavarási merevség 89, 94, 112, 129, 135, 141
Csavart henger 13, 47, 101, 103, 112
Csavarvonalalakú hullámok 49
Csipkegörbe 26, 62, 64, 77
Csomópont 130, 134
Csomóvonal 130, 134
Csuklós peremű elliptikus paraboloidhéj 96
— — gömbfüveghéj 63, 65, 67, 71
— — hengerhéj 23, 33, 36, 42, 47, 121
— — hiperbolikus paraboloidhéj 77
— — kúphéj 51

D

- Dischinger-féle differenciálegyenlet 158
Diafragma 36, 42, 57, 80

Dobozos bélés 114
Dongahéj 40, 161
Donnell-féle egyenletek 24, 29, 31, 40, 49,
74, 96
Dunkerley-egyenes 44, 54
Dunkerley-tétel 91, 104, 154

E

Egyenértékű héjvastagság 111, 136, 137
– izotróp hengerhéj 111, 136, 137
Egyenlőoldalú háromszög rácsozás 135
Egysúlyi módszer 18, 25, 56, 77, 90
Egyrétegű rácsozás 135
Együttműködő lemezszelesség 119, 126,
128
– –, kihorpadt héjlemez 128
– –, nem kihorpadt héjlemez 126
Elcsavarodó kihajlás 47, 89
Ellapulás 85
Ellapulást okozó kritikus hajlítónyoma-
ték 86
Elliptikus felületű kupolák stabilitása
55, 72, 74, 96
Emelkedő kritikuson túli teherbírás 12,
15, 42, 79, 83, 122, 125, 150, 158, 165
Energiamódszer 22, 25, 77, 90, 101
Erőirányú héjösszenyomódás 15, 27, 45,
122, 147
Eső kritikuson túli teherbírás 12, 15, 27,
42, 107, 122, 150, 158, 165
Extrapoláció 165

F

Felső kritikus teher, elliptikus kupolahéj
12, 15, 76, 150, 154, 161, 163
– – –, gömbhéj 12, 15, 62, 144, 147,
150, 153, 161, 163
Felső kritikus teher, gömbsüveghéj 12,
15, 65, 67, 69, 71, 153, 161, 163
– – –, hengerhéj 12, 15, 29, 31, 33,
41, 46, 49, 107, 111, 144, 147, 150,
154, 161, 163
– – –, hiperbolikus paraboloidhéj 12,
15, 112, 150, 154, 161, 163
Felületre merőleges teher 20, 36, 40, 52,
59, 72, 74
Félmerev diafragma 36, 42, 57, 80
Féloldalasan terhelt gömbsüveghéj 72
Fémhéjak 155
Feszültségfüggvény 19, 96
Folyási határ 149, 154
Forgási ellipszoidhéj 74

G

Gátolt csavarás 91
Geometriailag tökéletes héj 12, 15, 20,
24, 27, 29, 42, 44, 49, 57, 59, 66, 96,
107, 147

Gömbfüggvény 55
Gömbhéj horpadása 12, 15, 55, 59, 63,
97, 144, 147, 153, 161, 163
– (teljes) alsó kritikus terhe 12, 15, 60,
147
– – felső kritikus terhe 12, 15, 63, 144,
147, 150, 153, 161, 163
– – kritikuson túli teherbírása 12, 15,
59, 61, 144, 147, 150, 153, 161, 163
– – lineáris kritikus terhe 12, 15, 56,
63, 97, 144, 153
Gömbsüveghéj horpadása 12, 15, 63, 65,
67, 71, 72, 153, 161, 163
– alsó kritikus terhe 12, 15, 65, 69
– felső kritikus terhe 12, 15, 65, 67, 71,
153, 161, 163
– kritikuson túli teherbírása 12, 15, 65,
67, 69, 71, 153, 161, 163
– lineáris kritikus terhe 12, 15, 65, 68,
71
– rezgése 66
Görbe tengelyű rudak 89

Gy

Gyakoriság 169
Gyűrűalakú kihajlási alak 18, 22, 23,
29, 44, 65, 99, 107, 110, 130
Gyűrűirányú bordákkal együttműködő
lemezszelesség 127
Gyűrűirányban nyomott henger 12, 15,
36, 41, 43, 100, 112, 152
– – – alsó kritikus terhe 12, 15, 41,
43, 112
– – – felső kritikus terhe 12, 15, 41,
43, 112, 152
– – – kritikuson túli teherbírása 12,
15, 41, 43, 112, 152
– – – lineáris kritikus terhe 12, 15,
36, 100
– – hengerhéjmező lineáris kritikus
terhe 123
Gyűrűirányú húzás stabilizáló hatása 44
Gyűrűs horpadás 18, 22, 29, 44, 65, 99,
107, 110, 130
Gyűrűsen merevített henger 97, 99, 101,
103, 107, 110

H

Hajlítási merevség 19, 27, 78, 94, 115,
122, 126, 135, 138, 140, 143, 160
Hajlított henger 35
– héjív 85
Hajszálrepedések 17, 58, 143
Hasábszilárdság 157
Harántkontrakciós tényező 20, 23, 33,
38, 59, 94, 120, 126, 133, 136

- Hatékony inercianyomaték 88
- Hálós horpadási alak 18, 22, 28, 32, 44, 56, 80, 99, 107
- Helyettesítő henger 51, 53
- héjvastagság 111, 136, 137
 - nyírási alakváltozási tényező 116
- Helyi horpadás 13, 16, 18, 22, 24, 82, 83, 93, 114, 118, 119, 137, 138
- Hengerhéj horpadása 12, 15, 18, 20, 22, 26, 29, 31, 33, 40, 43, 46, 49, 78, 97, 100, 107, 111, 144, 147, 152, 160
- alsó kritikus terhe 12, 15, 26, 29, 41, 43, 107, 111, 117, 147
 - felső kritikus terhe 12, 15, 29, 31, 33, 41, 46, 49, 107, 111, 144, 152, 160
 - kritikuson túli teherbírása 12, 15, 27, 29, 31, 35, 40, 42, 46, 48, 107, 111, 144, 147, 152, 160
 - lineáris kritikus terhe alkotóirányú nyomásból 12, 15, 20, 22, 25, 28, 33, 44, 46, 51, 97, 107, 109, 117, 144, 153
 - - - csavarásból 12, 15, 47, 101, 112
 - - - gyűrűirányú nyomásból 12, 15, 38, 100, 144, 152
 - - - hajlításból 12, 15, 35, 99
 - - - hidrosztatikus nyomásból 12, 15, 38, 40, 44, 53, 101, 112
- Héjgerenda 84
- kritikus kifordítónyomatéka 92
- Héjhorpadási jelenségek 12, 15
- Héjív 14, 84
- ellapulást okozó kritikus hajlítónyomatéka 86
- Héjszerű horpadás 82, 139
- Hidrosztatikusan nyomott elliptikus kupola 12, 15, 72, 74
- gömb horpadása 12, 15, 55, 59, 61, 144, 147, 153
 - alsó kritikus terhe 12, 15, 53, 147
 - felső kritikus terhe 12, 15, 61, 147, 153
 - kritikuson túli teherbírása 12, 15, 59, 61, 144, 147, 153
 - lineáris kritikus terhe 12, 15, 56, 97, 144, 153
 - gömbsüveghej 12, 15, 65, 68, 71
 - alsó kritikus terhe 12, 15, 65, 67, 71
 - felső kritikus terhe 12, 15, 65, 67, 71
 - kritikuson túli teherbírása 12, 15, 65, 67, 71
 - lineáris kritikus terhe 12, 15, 65, 67, 71
 - henger 12, 15, 36, 41, 44, 101, 102
 - alsó kritikus terhe 12, 15, 41, 44, 100, 144, 152
- Hidrosztatikusan nyomott henger felső kritikus terhe 12, 15, 41, 44, 100, 144, 152
- - - kritikuson túli teherbírása 12, 15, 41, 44, 100, 144, 152
 - - - lineáris kritikus terhe 12, 15, 38, 40, 44, 53, 101, 112, 144, 152
 - - - kúphej 12, 15, 52
- Hiperbolikus paraboloidhéj horpadása 12, 15, 77, 105, 112
- lineáris kritikus terhe 12, 15, 77, 105
 - nemlineáris vizsgálatok 12, 15, 112
 - paraboloid membránhejak kinematikai határozatlansága 79
- Horpadáselmélet, lineáris, 12, 20, 30, 36, 43, 47, 50, 51, 61, 72, 77, 86, 91, 96, 121, 136
- nemlineáris 12, 15, 24, 28, 40, 59, 65, 74, 96, 107, 122, 150, 158, 165
- Horpadási alakváltozás 12, 19, 26, 28, 38, 44, 49, 56, 59, 65, 77, 96, 106, 111, 131
- Horpadás előtti deformáció 20, 23
- Horpadási félhullámhossz 21, 30, 33, 56, 60, 96, 100, 106, 111, 121, 136
- Horpadási merevségi jellemzők 19, 27, 78, 94, 115, 126, 135, 143, 159
- Horpasztó határteher 169
- Hosszú henger 23, 33, 36, 47, 100, 108, 144, 152
- Hullámlemez 140
- merevségi tényezői 140
- Hullámos héj 16, 114, 138
- Hullámossági tényező 30

I

- Ideális betonkeresztmetszet 159
- Ideálisan rugalmas anyag 149
- rugalmas-képlékeny anyag 149, 155
- Inflexió pont 130, 134
- Iránytartó teher 40, 59
- héjak 11, 22
- Izotróp héjjal helyettesíthető egyrétegű rácsos héj 135
- szendvicshejjal helyettesíthető kétrétegű rácsos héj 137
- Ívszerű horpadás 14, 72, 82, 88, 101
- Ívtartó 14, 72, 82, 88, 101

K

- Karakterisztikus egyenlet 96, 106
- Kerületmenti elmozdulásmentesség 23, 33, 52, 64, 71
- hullámszám 28, 35, 39, 40, 49, 66, 99, 127
 - nyírófeszültségmentesség 23, 33, 52

- Kezdeti hullámossági amplitúdó 12, 16, 31, 32, 34, 41, 48, 61, 63, 67, 69, 96, 112, 117, 144, 148, 163
- hullámossággal bíró gömbhéj 12, 15, 59, 60, 61, 76, 96, 144
- – – gömbsüveg 12, 15, 65, 67, 96
- – – hengerhéj 12, 15, 29, 34, 43, 46, 49, 56, 117, 163
- – – kúphej 12, 15, 52
- külpontoság 12, 15, 29, 34, 43, 46, 49, 50, 52, 59, 60, 61, 65, 67, 76, 96, 117, 144, 163
- Képlékeny vasbetonhéj felső kritikus terhe 150, 154, 161, 163
- Képlékenységi 17, 143, 150, 154, 161, 163
- Kétoldali hálós vasalás 159
- Kétrétegű rácsos héj 135, 137
- Kifordulás, héjgerenda 91
- Kihajlási félhullámhossz 21, 30, 33, 56, 60, 96, 100, 106, 111, 121, 136
- Kihorpadt héjlemez, bordáshéj 128
- Kinematikai határozatlanság 79
- Kísérletek 17, 18, 22, 27, 34, 39, 43, 49, 52, 57, 66, 68, 71, 79, 82, 107, 133, 159, 164, 165
- Kivitelezési hibák 144
- Kockaszilárdság 157
- Konformitás 29, 32, 61, 112
- Kontinuum-módszer 136
- Körgyűrűd kritikus terhe 40
- Körzimetriai alakváltozás 13, 18, 29, 44, 56, 65, 99, 107
- Közepes hosszúságú henger 23, 102
- Középső hálós vasalás 159
- Központosan nyomott héjív 85
- Kritikus (lineáris) alkotóirányú nyomás, henger 12, 15, 22, 28, 33, 44, 50, 51, 97, 107, 109, 117, 144, 153
- – – – kúp 12, 15, 52, 105
- – – – hidrosztatikai nyomás, elliptikus kupola 12, 15, 72, 74, 96
- – – – gömbhéj 12, 15, 56
- – – – gömbsüveghej 12, 15, 65, 68, 71
- – – – hengerhéj 12, 15, 38, 40, 44, 53, 101, 112
- – – – kúphej 12, 15, 52, 105
- – nyírófeszültség, hengerhéj 12, 15, 47, 50, 102
- – hiperbolikus paraboloidhéj 12, 15, 77, 106
- felső nyírófeszültség, hengerhéj 12, 49
- teher, alsó 12, 15, 29, 75, 107, 111, 147
- –, felső 12, 15, 29, 33, 49, 61, 65, 67, 71, 107, 111, 147, 150, 154, 161, 163
- –, lineáris 12, 15, 20, 22, 28, 33, 38, 40, 44, 52, 59, 63, 72, 74, 77, 96, 100, 102, 104, 105, 121, 144, 153
- Kritikus (lineáris) tengelyirányú összenyomódás 15, 27, 45, 122, 147
- Kritikusan túli teherbírás, emelkedő 12, 15, 42, 79, 83, 122, 125, 150, 158, 165
- – –, eső 12, 15, 27, 42, 107, 122, 150, 158, 165
- – –, gömbhéj 12, 15, 59, 61, 144, 147, 150, 153, 161, 163
- – –, gömbsüveghej 12, 15, 63, 65, 67, 71, 153, 161, 163
- – –, hengerhéj 12, 15, 27, 32, 35, 40, 42, 46, 48, 107, 111, 144, 147, 152, 160
- – –, kupola 12, 15, 75
- Kupolahéjak horpadása 12, 15, 55, 72, 74, 96
- alsó kritikus terhe 12, 15, 75
- felső kritikus terhe 12, 15, 76
- kritikusan túli teherbírása 12, 15, 75, 76
- lineáris kritikus terhe 12, 15, 72, 96
- Kúphej lineáris kritikus terhe 12, 15, 52, 105
- Kúszás 17, 58, 158
- Külpontos bordázás 120, 129
- Külpontosan nyomott héjív 88
- – rugalmas héj kritikus terhe 147, 154, 161
- – képlékeny héj felső kritikus terhe 150, 154

L

- Laplace-differenciáloperátor 19
- Laposhéj 18, 24, 40, 55, 72, 77, 95, 101, 121, 140
- Lapos ív 14, 72, 82, 88, 101
- Lassú alakváltozás 17, 143, 156, 158
- alakváltozási tényező 158
- Legendre-féle gömbfüggvény 55
- Lemez-cellás szerkezet 114
- Lemezszerű horpadás 23, 33, 38, 42, 73, 122, 126, 138,
- Lineáris horpadáselemlet 12, 18, 20, 30, 36, 40, 43, 47, 50, 51, 61, 72, 77, 86, 91, 96, 121, 136
- kritikus teher, elliptikus kupola 12, 15, 55, 72, 74, 96
- – –, henger 12, 15, 22, 25, 28, 33, 38, 40, 44, 46, 50, 97, 100, 102, 104, 112, 117, 121, 144, 152
- – –, hiperbolikus paraboloidhéj 12, 15, 77, 105
- – –, gömbhéj 12, 15, 56, 59, 97, 105, 124, 144, 153
- – –, gömbsüveghej 12, 15, 65, 71
- – –, kúphej 12, 15, 52, 105
- tengelyirányú összenyomódás 15, 27, 45, 122

M

- Membránerő 19, 56, 78, 129, 146
 Membránmerevség 19, 27, 78, 94, 114, 122, 134, 138, 140, 143, 159
 Merevített hullámlemez merevségi jellemzői 141
 Merevségi mátrix 94
 Méhsejt-bélés 114
 Méhsejt-szerkezet 116
 Mértékadóan parciálisan terhelt gömb-süveghej 72
 Mértékadó hullámosság 144, 145
 Modellkísérletek 17, 18, 22, 25, 27, 34, 39, 43, 49, 52, 57, 66, 68, 71, 79, 82, 107, 133, 158, 164, 165

N

- Nagy alakváltozásos elmélet 12, 15, 24, 28, 40, 59, 65, 74, 79, 83, 96, 107, 122, 150, 158, 165
 Nemlineáris horpadásmélet 12, 15, 24, 28, 40, 59, 65, 74, 79, 83, 96, 107, 122, 150, 158, 165
 Normáleloszlás 169
 Növekvő kritikuson túli teherbírás 12, 15, 42, 79, 83, 122, 125, 150, 158, 165

Ny

- Nyírási alakváltozás 16, 94, 115, 130, 132, 137, 140
 — középpont 89
 — merevség 19, 27, 78, 94, 114, 115, 122, 132, 134, 135, 138, 140, 143, 159
 Nyúlásmentes alakváltozás 14, 29, 79

O

- Oldalirányú stabilitás 89
 Ortogonális alakváltozás 23, 61
 Ortotróp gömbhéj lineáris kritikusan terhe 12, 15, 105
 — — — — nemlineáris vizsgálata 112
 — henger alsó kritikusan terhe 12, 15, 107, 111
 — — — — felső kritikusan terhe 12, 15, 107, 111
 — — — — kritikusan túli teherbírása 12, 15, 107, 111
 — — — — lineáris kritikusan terhe, alkotóirányú nyomásból 13, 15, 97, 107, 109
 — — — — — csavarásból 13, 15, 101, 103, 112
 — — — — — gyűrűirányú nyomásból 13, 15, 100, 112

- Ortotróp henger lineáris kritikusan terhe hajlításból 13, 15, 99
 — — — — — hidrosztatikus nyomásból 13, 15, 101, 112
 — — — — — héjak horpadása, lineáris 94
 — — — — — nemlineáris 107
 — — — — — hiperbolikus paraboloidhéj lineáris kritikusan terhe 12, 15, 105
 — — — — — nemlineáris vizsgálata 12, 15, 113
 — — — — — lemez lineáris kritikusan nyíróereje 12, 15, 106
 — — — — — kúphéj lineáris kritikusan terhe 105
 — — — — — nemlineáris vizsgálata 12, 15, 112

Ö

- Öblösödés 89, 129, 132, 140
 Öblösödési merevség 133

P

- Peremek hatása 16, 22, 33, 34, 36, 42, 48, 52, 57, 63, 65, 69, 70, 73, 79, 82, 89, 100, 139, 146
 Peremgyűrű 57, 64, 71
 Potenciális energia 26, 29, 31, 59
 Pucher-differenciáloperátor 19, 24
 Prizmaszilárdság 157

R

- Rácsos héj 16, 114, 135
 Rácsos héjat helyettesítő izotrop tömör héj 136
 — — — — — szendvicshej 137
 Radiálisan nyomott gömb 12, 15, 55, 59, 61, 144, 147, 153
 — — — — — alsó kritikusan terhe 12, 15, 59, 147
 — — — — — felső kritikusan terhe 12, 15, 61, 147, 153
 — — — — — kritikusan túli teherbírása 12, 15, 59, 61, 144, 147, 153
 — — — — — lineáris kritikusan terhe 12, 15, 56, 97, 144, 153
 — — — — — gömbsüveghej 12, 15, 65, 68, 71
 — — — — — alsó kritikusan terhe 12, 15, 65, 67, 71
 — — — — — felső kritikusan terhe 12, 15, 65, 67, 71
 — — — — — kritikusan túli teherbírása 12, 15, 65, 67, 71
 — — — — — lineáris kritikusan terhe 12, 15, 65, 67, 71
 — — — — — henger horpadása 12, 15, 36, 41, 44, 100, 144, 152
 — — — — — alsó kritikusan terhe 12, 15, 41, 44, 100, 144, 152

Radiálisan nyomott henger felső kritikus terhe 12, 15, 41, 44, 100, 144, 152
 – – – kritikuson túli teherbírása 12, 15, 41, 44, 100, 144, 152
 – – – lineáris kritikus terhe 12, 15, 38, 40, 44, 101, 112, 144, 152
 – terhelt gömbhéjmező lineáris kritikus terhe 125

Relatív szórás 169

Repedezettség 17, 58, 143, 157

Rezgés 65, 157, 166

Részbiztonságok összegezése 168

Rombuszos horpadási alak 28, 44, 107

Rövid henger 23, 33, 37, 48, 102, 108, 144

– idejű alakváltozási tényező 157

– – teher 156

Rugalmas határ 149

Rugalmasan ágyazott lemez 118

– – rúd 29

Rugalmassági tényező 20, 115, 135, 136, 137, 143, 155, 157, 158

Rugalmas vasbeton héj felső kritikus terhe 161

Rúdszerű kihajlás 24, 33, 153

S

Sajátérték feladat 21, 32, 112

Sajátfrekvencia 66, 166

Sakktáblaszerű horpadás 21

Sarokpántos megtámasztás, elliptikus paraboloidhéj 96

– – gömbsüveghéj 63, 65, 67, 71

– – hengerhéj 23, 33, 36, 42, 47, 121

– – hiperbolikus paraboloidhéj 77

Síklemesz 13, 23, 38, 42, 73, 77, 122, 126, 128, 138

Soutwell-szerkesztés 82, 165, 166

Sz

Szabad szélű héjak 82, 84

– végű henger 23

Számítás szerinti kezdeti külpontosság 145

Szendvicshatás 115, 137, 142

Szendvicshéj 16, 114, 137, 142

–, általános horpadás 114, 116

–, helyi horpadás 114, 118

Szendvics gömbhéj radiális nyomása 117

– hengerhéj axiális nyomása, lineáris kritikus terhe 117, 118

– – axiális nyomása, alsó kritikus terhe 117

– – axiális nyomása, felső kritikus terhe 118

Szendvicselemes hajlítási merevsége 115

– nyírási merevsége 116

– nyúlási merevsége 115

Szimmetrikus bordázás 129

– horpadási alak 13, 18, 23, 44, 56, 65, 99, 107

– kezdeti hullámosság 12, 15, 30, 43, 46, 61, 65

Szórás 145, 157

T

Talpgyűrű 57, 64, 71

Tartós alakváltozási tényező 157

– teher 156

Teherintenzitás rugalmas határa 149

– törési határa 149

Tengelyirányú összenyomódás 15, 27, 44, 45, 122, 147

Tengelyszimmetrikus horpadási alak 18, 22, 29, 44, 56, 65, 97, 99, 107

– kezdeti hullámosság 12, 15, 30, 43, 46, 61, 65

Tiszta nyírás 49, 50, 78

Torznegyszöghej horpadása 77

– lineáris kritikus terhe 77

Tökéletes héj 12, 15, 20, 24, 27, 29, 42, 44, 49, 57, 59, 66, 96, 107, 147

Törési határ 149

Trapézlemez 138

– merevségi tényezői 141

U

Unevenness factor 30

V

Valószínűségszámítás 145, 168, 169

Vasalás 143, 157, 160

Vasbeton dongahéj 40, 161

– héj 17, 40, 58, 144, 149, 156, 160, 161, 163

– – alsó kritikus terhe 160

– – felső kritikus terhe 161, 163

– – kritikuson túli teherbírása 156, 160, 161, 163

– – lineáris kritikus terhe 161

– keresztmetszet-héjhorpadási merevségi jellemzői 159

Vékonyfalú gerendák 91

Véletlen jellegű kezdeti külpontosság 145

Vízcementtényező 158

Y

Yoshimura-alakzat 27

Névmutató

A

Adam, H. P. 57
Almroth, B. O. 23, 26, 33, 104, 107, 108
Amazigo, J. C. 42
Archer, R. R. 66

Á

Árbócz J. 111

B

Baruch, M. 133
Batdorf, S. B. 38, 39, 49, 53, 104
Baranek, W. J. 164
Bouma, A. L. 164
Biezeno, C. B. 127, 128
Bodner, S. R. 128
Brazier, L. G. 85
Brine, A. C. 57, 58
Budiansky, B. 42, 49, 65
Bushnell, D. 62, 63, 112

C

Carlson, R. L. 57
Chwalla, E. 126
Connor, J. J. jr. 34

Cs

Csonka P. 57, 58, 164

D

Danielson, D. A. 75, 76
Dierks, K. 40, 43
Dischinger, F. 158
Donnell, L. H. 24, 29, 39, 31, 40, 42, 48,
49, 74, 96
Dosztanova, Sz. H. 60
Dunkerley, S. 44, 54, 91, 104, 154

E

Ebner, H. 129
Esslinger, M. 23, 43
Evan-Iwanowski, R. M. 57, 67

F

Famili, J. 66
Feodoszjev, F. I. 60
Flügge, W. 23, 25, 36
Forman, S. E. 136
Friedrichs, K. O. 59
Fung, Y. C. 57, 58

G

Gabriljanc, A. G. 60
Geier, B. 133
Gerard, G. 98, 102
Geyling, F. T. 80
Griggs, H. 164

H

Haas, A. M. 70, 71, 74, 75, 76, 164
Habip, L. M. 116
Harari, O. 133
Hayashi, T. 102
Healey, J. J. 74
Hergenröder, A. 97, 58
Hoff, N. J. 22, 23, 27, 28, 30, 33, 34, 57,
61, 62, 148
Holston, A. 99, 104
Homewood, R. H. 57, 58
Huang, N. C. 66
Hutchinson, J. W. 44, 45, 46, 61, 62, 63,
136
Hyman, B. I. 74

J

Ježek, K. 149
Johnson, A. E. jr. 57, 58
Jones, R. P. N. 26
Jungbluth, O. 57, 58, 68, 69, 70

K

- Kao, R. 67, 114
 Kaplan, A. 57, 58
 Kármán, Th. von 26, 27, 28, 59, 60, 69,
 70, 74, 85, 117
 Kempner, J. 26, 45
 Kiernan, T. J. 57, 67
 King, P. A. 57
 Klöppel, K. 57, 58, 68, 69, 70, 71, 72
 Koch, J. J. 127, 128
 Koga, T. 61, 148
 Koiter, W. T. 11, 12, 31, 32, 33, 44, 46,
 49, 60, 61, 62, 75, 122
 Koten, H. van 70, 71, 74, 75, 76, 164
 Krenzke, M. A. 57, 58, 67
 Kromm, A. 49, 50, 124
 Kuenzi, E. 117

L

- Laplace, P. S. 19
 La Tegola, A. 77
 Legendre, A. M. 55
 Leggett, D. M. A. 26
 Litle, W. A. 40, 58, 71
 Loo, T. C. 49
 Lundgren, H. 38, 39, 40, 44, 127

M

- Madsen, W. A. 27, 28, 30, 33, 34
 Man, G. B. 104
 Marguerre, K. 128
 March, H. W. 107, 117
 Mayers, J. 27, 28, 29
 Michielsen, H. F. 26
 Milligan, R. 102
 Mustari, H. M. 59, 60

N

- Narasimhan K. Y. 33, 34
 Nash, W. A. 49
 Neufville, R. L. de 34
 Neut, A. van der 56, 133
 Niordson, F. I. N. 53, 54

P

- Parmenter, R. R. 57, 67
 Penning, F. A. 65
 Perrone, N. 67, 114
 Pittner, E. V. 104

*

- Pflüger, A. 435, 42, 43, 130
 Plantema, J. F. 117, 118
 Pucher, A. 19, 24

R

- Rajzer, V. D. 60
 Ralston, A. 77
 Rehfield, L. W. 29
 Riel, A. C. 164
 Rodriquez-Agrait, L. 71
 Roos, E. 69, 70, 71, 72
 Rüsche, H. 57, 58

S

- Schapitz, E. 124
 Schmidt, H. 57, 58
 Schnell, W. 107, 109
 Schorer, H. 126, 127
 Schubiger, E. 57, 58, 71, 164
 Seaman, L. 58
 Seide, P. 25, 40, 43, 44, 51, 53, 54, 104
 Sekine, H. 122
 Sendelbeck, R. L. 57
 Seydel, E. 106
 Simitses, G. 101, 104
 Singer, J. 105, 133
 Soong, T. C. 22, 23
 Southwell, R. V. 82, 165, 166
 Stein, M. 102, 104
 Stenker, H. 57, 58, 164
 Sturm, R. G. 40
 Sylvester, R. J. 117

Sz

- Szurkin, R. G. 59

T

- Tamate, O. 122
 Teichmann, F. K. 116, 117
 Thielemann, W. 23, 43
 Thompson, J. M. T. 59, 60, 61
 Thurston, G. A. 65, 66
 Torroja, E. 57, 58, 71
 Trenks, K. 129
 Trilling, C. 40
 Tsien, H. S. 26, 27, 28, 58, 59, 60, 69, 70,
 74, 117

V

- Vlaszov, V. Z. 80
 Voblih, V. A. 30

Z

Zoelly, R. 56

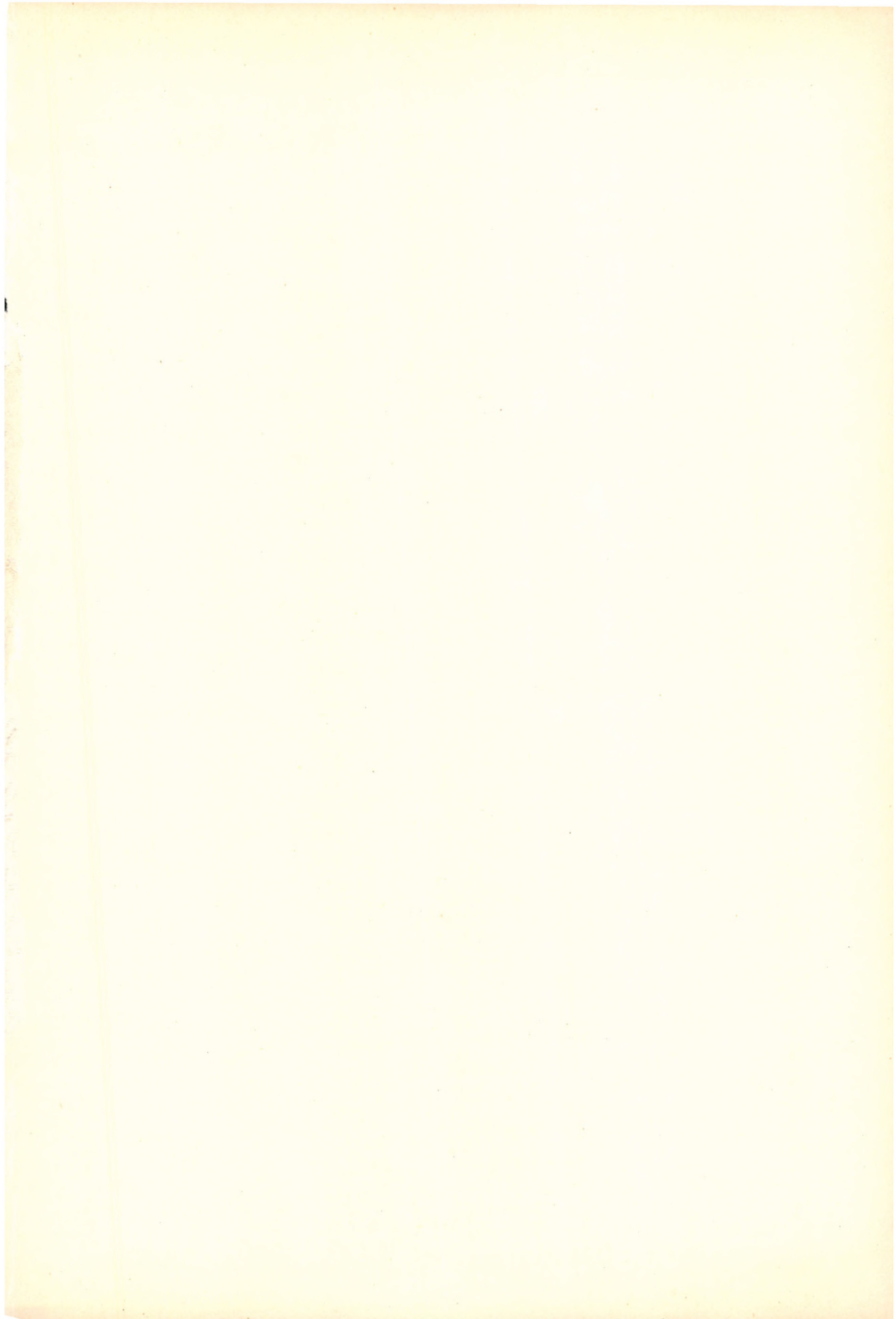
Y

Yao, J. C. 117
Yoshimura 27, 29

W

Wan, C. C. 29, 30
Wang, L. R. L. 58, 71
Wedellsborg, B. W. 57
Weingarten, V. I. 25, 40
Weinitschke, H. J. 66
Windenburg, D. F. 40
Wolmir, A. S. 25, 42
Wright, D. T. 135

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: Baik Éva
Műszaki szerkesztő: Kovács Gábor
Terjedelem: 16,8 (A/5) ív – AK 93 k 7577
75.395 Akadémiai Nyomda, Budapest
Felelős vezető: Bernát György



Az Akadémiai Kiadó
gondozásában jelent meg

Gerle György

KÖRNYEZET ÉS TELEPÜLÉSHÁLÓZAT

301 oldal · 10 ábra, 3 melléklet · Kötve 70,— Ft

Granasztoi Pál

ÉPÍTÉSZET ÉS URBANISZTIKA

Településtudományunk néhány mai problémája

119 oldal · Kötve 30,— Ft

Mendöl Zsuzsa

MÁLNAI BÉLA

(Architektúra)

47 oldal · 47 táblán 51 fotó, ill. rajz · Kötve

43,— Ft

Nagy Elemér

ERIK GUNNAR ASPLUND

(Architektúra)

32 oldal · 48 táblán 72 fotó, ill. rajz · Kötve

40,— Ft



AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

Ára: 44,— Ft

ISBN 963 05 0396 4