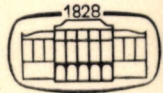


Jánossy Lajos

# RELATIVITÁS

# ELMÉLET

a fizikai valóság alapján



Akadémiai Kiadó, Budapest

---

Jánossy Lajos

# RELATIVITÁS ELMÉLET

a fizikai valóság alapján

---

A könyv mind az általános, mind a speciális relativitáselmélet kérdéseit felöleli. Bemutatja az Einstein és mások által kidolgozott matematikai formalizmust. A mű fő jellemzője, hogy elsősorban kísérleti eredményekre támaszkodik, amelyeket a szerző kísérleti fizikusként a fény természeti megismerésének problémakörében elért, ez utóbbinak ugyanis igen nagy jelentősége van a relativitáselmélet elvi kérdéseiben. A tanulmány lépésről-lépésre elemzi, hogyan lehet a fénysebességet kísérletileg pontosan meghatározni. Az elemzésből az is kiderül, hogy miért éppen a Michelson—Morley-kísérlet volt alkalmas a fényterjedés sajátosságainak megvizsgálására.

A kötetben a szerző Magyarországon és külföldön több cikkben és tanulmányban közzétett nézeteit foglalja össze, melyek korábban is sok vitát váltottak ki, s a jelen kötet célja is alkotó viták ösztönzése elsősorban a témával foglalkozó fizikusok és filozófusok körében.



AKADÉMIAI KIADÓ • BUDAPEST

---





RELATIVITÁSELMÉLET  
A FIZIKAI VALÓSÁG ALAPJÁN



# RELATIVITÁSELMÉLET A FIZIKAI VALÓSÁG ALAPJÁN

ÍRTA

JÁNOSSY LAJOS



AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST 1973

A mű eredeti címe:

L. JÁNOSSY

THEORY OF RELATIVITY BASED ON PHYSICAL REALITY

Akadémiai Kiadó, Budapest 1971

© Akadémiai Kiadó, 1973 · Jánossy Lajos

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

Felelős szerkesztő: Dr. Horváth Ferenc

Műszaki szerkesztő: Csákvári András

A borító- és kötésterv Scherer József munkája

Terjedelem: 27,3 (A/5) iv – AK k 7376

73.73971 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

Printed in Hungary



# TARTALOM

BEVEZETÉS	19
<i>I. Fejezet</i>	
A FÉNY TERJEDÉSÉRE ÉS AZ EHEZ KAPCSOLÓDÓ JELENSÉGEKRE VONATKOZÓ KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA	19
A) <i>A kritikus sebesség</i>	19
B) <i>Fényjelek terjedési sebességének mérése</i>	20
1. Egy általános megjegyzés	20
2. GALILEI javaslata	21
3. Csillagászati módszerek	21
a) RÖMER megfigyelései	21
b) A fény aberrációja	23
4. Laboratóriumi módszerek	23
a) FOUCAULT és FIZEAU módszerei	23
b) FIZEAU és FOUCAULT kísérletei	24
5. A fény terjedési sebessége fénytörő anyagokban	25
a) A törésmutató	25
b) A fénysebesség mérése optikai törőanyagban	26
C) <i>A fénysebesség meghatározása interferométeres módszerrel</i>	27
1. A Michelson-féle interferométer	27
2. A fény fázissebességének mérése	29
3. A Fizeau-féle kísérlet	30
D) <i>A Doppler-effektus</i>	31
1. Mozgó forrás	31
2. A Doppler-effektus megfigyelése	33
E) <i>A merőleges Doppler-effektus</i>	34
1. Kísérleti tények	34
2. A merőleges Doppler-effektus fizikai értelmezése	35
3. A Doppler-effektussal kapcsolatos további megfontolások	36
a) A mozgó megfigyelő kérdése	36
b) Akusztikai és elektromágneses Doppler-effektus	37

F) <i>Néhány relativisztikus jelenség</i>	39
1. A bomlási idő változása a sebességgel	39
2. A tömeg változása a sebességgel	40
3. Elvi megjegyzés a tömegváltozási formula mérésének módszeréről	41

## II. Fejezet

AZ ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK HORDOZÓJÁVAL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK	45
A) <i>Az éter kérdése</i>	45
B) <i>Kísérleti vizsgálatok</i>	48
1. A Föld tengelyforgása	48
2. A Sagnac-féle kísérlet	48
3. A Michelson—Gale-kísérlet	50
C) <i>Az éterhez viszonyított transzlációs mozgás</i>	51
1. Gömbhullám alakú jel terjedése	53
2. Fényterjedés egy mozgó koordináta-rendszerhez viszonyítva	54
3. Michelson—Morley-kísérlet	56
4. A Michelson—Morley-kísérlet negatív eredményének értelmezése	58
5. A kontrakciós hipotézissel kapcsolatos megfontolások	60
D) <i>További Michelson—Morley-típusú kísérletek</i>	61
1. A Trouton—Noble-kísérlet	61
2. Isaak és munkatársainak kísérlete	63
E) <i>Általános megfontolások a negatív eredményű kísérletek sorozatához</i>	65

## III. Fejezet

### A MÉRÉS PROBLEMATIKÁJA

A) <i>Mértékek problémája</i>	69
1. Reprerentációk	69
2. Egy példa: az elektromos töltés mértéke	70
3. A kitüntetett reprezentációk	73
4. A hossz mértékszámok	74
B) <i>Térkoordináta-rendszerek</i>	76
1. Koordinátavektorok meghatározása	76
2. Koordinátamértékek explicit megállapítása	78
3. Az ellentmondásmentesség kérdése	79
4. Különböző reprezentációk	80
C) <i>Koordinátareprezentációval kapcsolatos problémák</i>	82
1. Megjegyzés a „nemeuklideszi” geometriáról	82
2. Koordinátatranszformációk és -deformációk	83
3. Ortogonális transzformációk	85
a) Definíciók	85
b) Az ortogonális mátrixok csoporttulajdonságai	86
4. Merev testek	88

#### IV. Fejezet

##### A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ

A) <i>Időskála</i>	91
1. Általános megjegyzések	91
2. Az atomi-időskála	94
3. Fényjelek segítségével konstruált vonatkoztatási rendszerek	95
B) <i>A Lorentz-transzformáció mint koordinátatranszformáció</i>	97
1. A Lorentz-transzformáció explicit alakja	98
2. A Lorentz-mátrixok paramétereinek fizikai jelentése	100
C) <i>A fény homogén terjedése</i>	102
1. A homogén terjedés fogalma	102
2. A fény homogén terjedésének próbája	103
3. Összefüggés különböző reprezentációk között	105
a) A terjedési tenzor transzformációja	105
D) <i>Összefüggés a fényjelekkel, illetve szilárd testekkel konstruált vonatkoztatási rendszerek között</i>	107

#### V. Fejezet

##### A LORENTZ-ELV

A) <i>A Lorentz-transzformáció mint deformáció</i>	111
1. Deformáció operátorok	111
2. A Lorentz-deformáció	112
3. A Lorentz-deformációk egyes különleges fajtái	114
B) <i>A Lorentz-elv megfogalmazása</i>	116
1. Az éteráramlás meghatározásával kapcsolatos negatív eredmények értelmezése a Lorentz-elv segítségével	117
2. Nemortogonális reprezentációk	119
3. A Lorentz-elvre vonatkozó általános megjegyzés	120
C) <i>A dinamikai elv</i>	121
1. A Lorentz-deformáció mechanizmusa	123
a) Relaxációs folyamatok	123
b) A hőmérsékletváltozás és sebességváltozás összehasonlítása	123
c) Nem összefüggő rendszerek deformációja	124
d) Nem összefüggő rendszerek hosszkontrakciója	125
2. A Lorentz-csoport alcsoportjainak jelentősége	126

#### VI. Fejezet

##### A LORENTZ-ELV BELSŐ ELLENTMONDÁSMENTESSÉGE

A) <i>A Lorentz-elvvel kapcsolatos kinematikai megfontolások</i>	129
1. Sebességek összeadási törvénye	129
2. Az összeadási formula és a Lorentz-deformációk	132
B) <i>Szilárd testek kontrakciója és az órák lelassulásával kapcsolatos megfontolások</i>	134
1. Az „óraparadoxon”	138
2. Az „ikerparadoxon”	142

## VII. Fejezet

RELATIVISZTIKUS MECHANIKA		145
A)	<i>Energia és impulzus</i>	145
	1. NEWTON első törvénye	145
	2. Rugalmas ütközések	146
	3. Rugalmatlan ütközések	150
B)	<i>Tömeg és energia ekvivalencia</i>	151
	1. Megjegyzés az energiával való tömegnövekedés mechanizmusára	152
C)	<i>Távoli ütközések</i>	152
	1. Kísérleti tapasztalatok	153
D)	<i>Mechanikai törvények négyesvektorokkal és -tenzorokkal kifejezve</i>	154
	1. Newton-féle törvények	155
	2. Az energia—impulzus-tenzor	157

## VIII. Fejezet

AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐ		159
A)	<i>A Maxwell-féle egyenletek</i>	159
	1. Más megfogalmazás	160
B)	<i>A Maxwell-egyenletek megoldásai</i>	162
	1. Mértéktranszformáció	164
	2. Késleltetett potenciálok	165
	3. Avanzsált potenciálok	166
	4. Kóbor hullámok	167
C)	<i>Maxwell-féle egyenletek négyestenzorokban kifejezve</i>	169
	1. A retardált négyespotenciál	171
	2. Fényjelek mozgása a Maxwell-egyenletek tükrében	173
D)	<i>A Maxwell-egyenletek és a Lorentz-elv</i>	175
	1. Ponttöltés mezője	177

## IX. Fejezet

AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐ RELATIVISZTIKUS EFFEKTUSAI		181
A)	<i>Elsőrendű effektusok</i>	181
	1. Az effektív térerősségek	181
	2. Dipól mezők	182
B)	<i>A négyesáram transzformációs tulajdonságai</i>	184
	1. Zárt áramkör elektromos mezője	185
C)	<i>További elsőrendű effektusok</i>	187
	1. Doppler-effektus és aberráció	187
	2. A Doppler-effektusban fellépő frekvenciák	188
	3. Az aberráció	189

4. A <i>Doppler</i> -effektusban fellépő intenzitások	190
5. A csillagfény aberrációja	191
6. Fényterjedés fénytörő közegben	193
a) Diszperzió	196
7. A <i>Fizeau</i> -féle kísérlet	197
D) <i>Másodrendű effektusok</i>	200
1. A töltés hatása sajátmagára	200
2. Tömegdefektus	203
E) <i>A kontinuum relativisztikus mechanikája</i>	204
1. A <i>Trouton</i> — <i>Noble</i> -féle kísérlet elemzése	204
F) <i>Tranziens jelenségek</i>	205

### *X. Fejezet*

#### A GRAVITÁCIÓ ELMÉLETE 209

A) <i>A megfigyelt tények</i>	209
B) <i>A gravitációs elmélet problémájának felvetése</i>	210
1. A probléma matematikai megfogalmazása	211
2. Homogén tartományok kísérleti kritériuma	212
a) Egy példa	213
3. Az egyenesvonalú vonatkoztatási rendszer megalkotása	214
a) Lokálisan homogén tartományok	215
b) Homogén tartományokra érvényes kritériumok	215
4. Majdnem egyenes vonatkoztatási rendszerek	219
5. Hasonló tartományok	221
C) <i>Az általánosított Lorentz-elv</i>	223
1. A <i>Lorentz</i> -elv általános megfogalmazása homogén tartományokban	223
2. Inhomogén tartományra vonatkozó általánosítás	224
a) Egy fizikai példa	225
3. Kis fizikai rendszerekre érvényes <i>Lorentz</i> -elv	226
a) Első közelítés	226
b) Második közelítés	226
4. A <i>Lorentz</i> -elv megfogalmazásában fellépő többértelműség	228

### *XI. Fejezet*

#### AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT LORENTZ-ELV ALKALMAZÁSAI 231

A) <i>Geodetikus pályák</i>	231
1. Definíció	231
2. A geodetikus pályák <i>Lorentz</i> -invarianciája	232
a) Geodetikus pályák és a <i>Lorentz</i> -elv	233
B) <i>Gravitációs mezőben érvényes mozgásegyenletek</i>	233
1. Variációs elvek	234
a) Eltérések a geodetikus pályáktól	234
2. A variációs elv fizikai tartalma	235

C) <i>Relativisztikus effektusok gravitációs mezőben</i>	237
1. <i>Mozgásegyenletek gravitációs mezőben</i>	238
2. <i>A mozgásegyenletek integráljai</i>	239
a) <i>Perihélium mozgás</i>	241
b) <i>Fényelhajlás a Nap közelében</i>	242
c) <i>A spektrumvonalak vörös eltolódása</i>	243
D) <i>Összefüggés a gravitációs források és a <math>g</math> terjedési tenzor között</i>	244
1. <i>Einstein-féle gravitációs egyenletek</i>	245
2. <i>Energia—impulzus megfontolások</i>	247
3. <i>A gravitációs egyenletek Schwarzschild-féle megoldása</i>	248
4. <i>Relativisztikus effektusok a Schwarzschild-megoldásnak megfelelő mezőben</i>	250
a) <i>Bolygómozgás</i>	250
b) <i>A fényelhajlás</i>	251
E) <i>Az elektromágneses mező és a gravitáció</i>	251
1. <i>Egy invariáns fogalmazás</i>	252
2. <i>Az éter elektromágneses polarizációjának kérdése</i>	252
3. <i>Megjegyzés az elektromágneses mező általános egyenletének ellentmondásmentességéről</i>	253
F) <i>A gravitációs mező energia és impulzus törvényei</i>	254
1. <i>A gravitációs erő</i>	255
2. <i>A gravitációs egyenletek más szempontból nézve</i>	256
3. <i>A gravitációs erő mechanizmusa</i>	256

## XII. Fejezet

### KOZMOLÓGIAI PROBLÉMÁK

	259
A) <i>A fizikai törvények invariáns megfogalmazásának jelentősége</i>	259
1. <i>Tenzorok és kitüntetett mértékek</i>	260
2. <i>A <math>g</math> tenzor fizikai jelentése</i>	261
3. <i>A terjedési tenzor normálformája</i>	262
B) <i>Speciális reprezentációk fizikai tartalma</i>	265
1. <i>Speciális reprezentációk</i>	265
2. <i>Energia—impulzus-eloszlás</i>	265
C) <i>Kozmológiai problémák</i>	267
1. <i>Asztronómiai megfigyelések eredményei</i>	267
2. <i>A Friedmann-féle megoldás</i>	268
D) <i>A Friedmann-féle megoldás elemzése</i>	270
1. <i>A galaxisok recessziója</i>	270
a) <i>Intergalaktikus távolságok mértéke</i>	270
b) <i>Doppler-effektus</i>	272
E) <i>A Mach-elv</i>	273
a) <i>A Thirring-effektus</i>	273

## I. Függelék

TENZORANALÍZIS HOMOGEN TARTOMÁNYOKBAN	277
A) <i>Vonatkoztatási rendszer</i>	277
1. A Lorentz-rendszer	277
2. Egyenes vonatkoztatási rendszerek	278
3. A $g$ terjedési tenzor	278
4. A Lorentz-transzformáció	279
5. Lineáris koordinátatranszformációk standard formája	280
B) <i>Vektorok és tenzorok</i>	281
1. Kétdimenziós tenzorok	282
a) Invariáns szorzatok	282
b) Pszeudoskalár mennyiségek	283
C) <i>Mezők</i>	284
1. Az $\mathfrak{R}$ operátor	285
a) A Grad operátor	285
b) További operátorok	286

## II. Függelék

TENZOROK INHOMOGEN TARTOMÁNYBAN	287
A) <i>Többdimenzionális mértékek</i>	287
1. $k$ -dimenzionális mértékek	287
2. Többdimenzionális mennyiségek szorzása	287
B) <i>Permutációs operátorok</i>	289
1. Ciklikus permutáció	290
2. Egy mátrix transzponáltja	291
3. A $\pi_i$ operátorok	292
C) <i>Az <math>\mathfrak{R}</math> operátor görbe reprezentációkban</i>	292
1. Többdimenzionális tenzorok	293
2. Szimmetria tulajdonságok	295
3. Az $\epsilon^{(4)}$ antiszimmetrikus tenzor	295
D) <i>Tenzormezők</i>	296
1. A Christoffel-féle szimbólum	298
2. Kovariáns differenciálás	300
E) <i>Homogén tartományokra érvényes kritériumok</i>	302
1. Majdnem egyenes reprezentációk	304
$(4)$	
2. Az $\mathbf{R}$ tenzor szimmetriái	305
$(4)$	
3. Az $\mathbf{R}$ tenzor redukált formája	307
Név- és tárgymutató	309





## BEVEZETÉS

1. E könyvben azokat a tényeket igyekszünk újraértékelni, amelyekre a speciális és általános relativitáselméletet építették fel. Ezen értékelés eredményeként ismertetünk egy matematikai formalizmust, amely matematikai szempontból pontosan egyenértékű a relativitáselmélet ismert formalizmusával. Az ismert jelenségeket elemző tárgyalás azonban bizonyos mértékben különbözik a szokásos tárgyalásmódtól; az ismeretek bemutatása jobban hasonlít a régi könyvekben és tankönyvekben található tárgyalásmódhoz, mint amelyek a modern könyvekben találhatók. Mindig nagy tiszteletben tartottam LAUENAK a relativitáselmületről szóló könyvét,\* és az ismertető gondolatok egy része az abban talált megjegyzésekre épül.

2. Egy jól kidolgozott elmélet újrafogalmazása első látásra veszélyes kezdeményezésnek tűnik. Különösen veszélyesnek tűnhet, ha ezen elmélet a jelenségek magyarázatára — miként ez a relativitáselméletnél egyértelműen fennáll — egy teljes és megbízható matematikai formalizmust ad. Azon a véleményen vagyok azonban, hogy egy elmélet feladata nem egyszerűen az, hogy matematikai formulákat állítson fel, amelyek éppenséggel leírják bizonyos fizikai jelenségeket; véleményem szerint az elméletnek a fizikai jelenségek mélyebb megértéséhez és feltárásához kell vezetnie.

A relativitáselmélet az eredeti fogalmazásában nem fogható fel pusztán a jelenségeket megfelelő matematikai formulákkal leíró próbálkozásnak. A relativitáselmélet a tér és idő részletes elméletét igyekszik nyújtani. A relativitáselmélettel szemben gyakorolt kritikám éppen ezzel a kérdéssel függ össze. Véleményem az, hogy a relativitáselmélet bizonyos természeti jelenségeket nagyon helyesen tükröz, az elméletnek azonban nincs köze a „tér és idő struktúrájához”. Ezért próbálkozom a fizikai jelenségek egy másfajta elemzésével.

Ezeket a gondolatokat — matematikai kidolgozás nélkül — összefoglaltam egyik népszerű könyvemben.\*\*

3. Elöljáróban néhány személyes élményt is szeretnék említeni, amelyek arra késztettek, hogy a relativitáselméletet ily módon újrafogalmazzam. Elképzelhetőnek tartom, hogy kollégáim között vannak olyanok, akik hasonló élményben részesültek.

\* M. VON LAUE: Die Relativitätstheorie. Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1923.

\*\* JÁNOSY L.: Relativitáselmélet és fizikai valóság, Gondolat Kiadó, 3. kiadás 1969.

A relativitáselmélettel már fiatal koromban megismerkedtem, ekkor olvasván először EINSTEIN híres népszerű könyvét, amely magyar fordításban is megjelent nemrég.\* A könyv olvasásakor nehézségeim voltak EINSTEIN egyes fogalomképzéseivel szemben. Azonban fiatal és lelkes lévén, meggyőztem magam, hogy ezeket a fogalmakat meg kell hogy értsem és meg is tudom érteni. Ennek bizonyítása érdekében a relativitáselméletet mindenkinek próbáltam megmagyarázni, aki hajlandó volt magyarázataimat meghallgatni. Ilyen próbálkozások folytán megtanultam a relativitáselmélet „nyelvezetét”, és végeredményben „megszoktam” az elmélet fogalmazásait.

E fogalmakkal kapcsolatosan azonban sohasem hagyott el egy bizonyos kellemetlen érzés. Évekkel ezután több ízben tartottam a manchesteri egyetemen a relativitáselmélettel foglalkozó kollégiumokat. Ahogy az évek múltak, kifejlesztettem egy technikát, amelynek segítségével sikerült a hallgatóimat meggyőzni arról, hogy valóban megértették a relativitáselméletet. Azzal párhuzamosan azonban, ahogyan sikerült ezt a módszereket tökéletesíteni, úgy romlott le a fogalmak helyességéről kialakított saját meggyőződésem. Végeredményben arról kellett meggyőződnöm, hogy a fogalmak filozófiai szempontból nem helytállóak. — 1950-ben történt hazatérésem óta bajlódom azzal, hogy miképpen lehetne az elméletet más módon megfogalmazni anélkül, hogy a bevált matematikai formalizmust megváltoztatnánk. A kötet ezeknek az erőfeszítéseknek az eredményeit tartalmazza.

4. Mindmáig emlékezetes számomra az az izgalom, amit akkor éreztem, amikor EINSTEIN könyvében azt olvastam, hogy ha egy koordináta-rendszerrel áttérünk egy másikra, akkor az látszik helyesnek, hogy nemcsak a térkoordinátákat, hanem ugyanakkor az időkoordinátát is transzformáció alá vetjük.

Ha azonban ezt a kitévelt elemezzük — amelyre később a térről és időről alkotott forradalmi elképzelések épültek — már egy józanabb felfogásra jutunk. Eseményeket négy koordináta segítségével írhatunk le, ti. három térkoordináta határozza meg az  $\mathbf{r}$  helyzetvektort; az időnek a *mérték-számát*, vagy röviden mértékét, a  $t$ -t, amely az esemény időpontját határozza meg, megadhatjuk mint negyedik koordinátát. Azt írhatjuk, hogy  $\mathbf{x} = \mathbf{r}, t$  az esemény négyes koordinátája.

Ha most egy koordináta-reprezentációból egy másikra térünk át, akkor transzformált koordinátákat vezethetünk be:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

ahol  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  az  $\mathbf{x}$ -nek megfordítható négyes függvénye. Ha az  $\mathbf{x}$  négyes koordinátával eseményeket tudunk leírni, akkor éppen úgy leírhatjuk ezen eseményeket az  $\mathbf{x}'$  koordinátákkal is. Ha valamilyen speciális koordináta-mértékeket,  $\mathbf{x}$ -et és  $\mathbf{x}'$ -öt vezetünk be az események jellemzésére, akkor

\* A. EINSTEIN: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1921. Magyarul: A speciális és általános relativitás elmélete, Gondolat, 1963.

csak neveket adunk az eseményeknek, amelyek segítségével az eseményeket újra megismerjük. Lényegében tökéletesen mindegy, hogy  $x$  vagy  $x'$ -öt tekintjük az esemény mértékszámának. Az a körülmény, hogy az (1) alatt kifejezett transzformáció az idő- és térkoordináták mértékét keveri, nem látszik különösen lényeges szempontnak. Semmiesetre sem lehet ebből a tér vagy az idő tulajdonságaira következtetni.

Egy fizikai folyamat saját objektív törvényei szerint folyik le, a folyamatot azonban tetszőleges koordinátamértékekben lehet leírni. A folyamat helyes leírásában a koordinátaválasztás szerepének el kell tűnnie, tehát a leírásban nem szabad szerepelnie annak, hogy az események mértékeit  $x$  vagy  $x'$  segítségével jellemezzük.

5. Szokásos az az állítás, hogy a speciális relativitáselmélet a természet-törvényeket a lineáris transzformációkkal szemben invariáns formában, míg az általános relativitáselmélet a törvényeket tetszőleges koordináta-transzformációkkal szemben invariáns formában adja meg. Ezzel a véleménnyel nem értek egyet. Véleményem szerint — és ezt könyvemben részletesen megindokolom — mind a speciális, mind az általános elméletben tárgyalt természettörvényeket a koordináta-reprezentációtól függetlenül lehet megfogalmazni, tehát a törvényeket meg lehet fogalmazni tetszőleges térkoordináta-mértékek és időmértékek segítségével. A valódi különbség az elméletek között az, hogy a speciális relativitáselmélet a jelenségeket olyan közelítésben tárgyalja, amelyben a gravitációs hatások elhanyagolhatók, — ezzel szemben az általános relativitáselmélet a természettörvényeket olyan tartományokban is próbálja lerögzíteni, amelyekben a gravitációs effektusok már nem elhanyagolhatók. Ilyenfajta álláspontot képvisel A. V. FOCK is. Az a véleményem, hogy az érvelés sok vonatkozásban FOCK érveléséhez hasonlít.

A lineáris transzformációk valóban nagy szerepet játszanak a gravitációmentes tartományokban. Ez onnan származik, hogy egy gravitációmentes tartományban egy zárt rendszert egyetlen mozgásba hozhatunk, és — amennyiben megfelelő koordinátamértékeket választottunk — ezt a mozgást lineáris transzformációk segítségével írhatjuk le. Egy olyan tartományban viszont, amelyben gravitációs hatások lépnek fel, egy zárt rendszer mozgása folyamán változásokon fog keresztülmenni, minthogy a rendszer körülvevő gravitációs mező a mozgás során változik. Ez esetben a változást lineáris transzformációval nem tudjuk leírni.

6. Felfogásunk szerint a fizikában általában — de különösen a relativitáselméleten belül — arra fektetjük a fő súlyt, hogy objektív folyamatokat eivánunk leírni, és objektíven létező mennyiségekkel találkozunk. E mennyiségeket számokkal írjuk le, és így kapunk mértékszámokat. Egy fizikai mennyiség kvantitatív leírása azonban sok módon lehetséges. Annak érdekében, hogy egy objektív mennyiség és e mennyiség mértékszámja között világosan különbséget tegyünk, gót betűket fogunk használni a mennyiség jellemzésére, — viszont latin betűkkel írjuk a mérőszámokat. Így például azt írjuk, hogy

$$R(a) = a, \quad R'(a) = a', \dots,$$

ahol  $a$  egy fizikai mennyiséget jellemez és  $a, a', \dots$  pedig különböző mérő

számai az  $\alpha$  mennyiségnek, és pedig ezek a mérőszámok az  $R, R', \dots$  reprezentációkra vonatkoznak.

Ilyen értelemben ha az időtranszformációt tekintjük — amelyről fentebb szó volt —, akkor azt mondhatjuk, hogy a koordináta-transzformáció a helyvektor komponenseinek *mértékeit* és ugyanakkor az *időmérték* értékeit változtatja meg. Tehát egy  $\mathcal{E}$  eseményt koordináta- és időmértékek segítségével jellemezhetünk például úgy, hogy

$$K(\mathcal{E}) = \mathbf{r}, t, \quad K'(\mathcal{E}) = \mathbf{r}', t', \dots$$

A  $t$  és  $t'$  mértékek csak részei az  $\mathcal{E}$  esemény reprezentációjának, és így  $t$  és  $t'$  nem az „időt” adják meg, hanem az  $\mathcal{E}$  esemény reprezentációjának időmértékeit.

7. Egy  $\alpha$  mennyiséget  $a, a', \dots$  mértékekkel jellemezhetünk. Magától értetődő, hogy ezek a különböző mértékek nem egyformán hasznosak. Célunk megmutatni, hogyan lehet egy mennyiség lehetséges mértékei közül olyan mértékeket kiválasztani, amelyek bizonyos fizikai tulajdonságokat kiválóan tükröznek. Ilyen *kitüntetett* mértékek nagy szerepet játszanak az elmélet felépítésében. EINSTEIN terminológiája szerint a Lorentz-transzformáció az „idő transzformációját” jelenti. Felfogásunk szerint a Lorentz-transzformáció inkább egyforma kitüntetett mértékrendszerek közötti kapcsolatot ad meg. Azonban — mint ahogy ezt kifejtjük — a Lorentz-transzformáció tartalma egyáltalában nem merül ki abban, hogy bizonyos kordináta-transzformációkat határoz meg.

8. Felfogásunk arra a nézetre vezet, hogy az éter egy közeg, amely hordozója az elektromágneses jelenségeknek és más jelenségeknek is. Így például az étert az anyaghullámok hordozójának is tekintjük. Ez a felfogás lényegében nem mond feltétlenül ellent EINSTEIN nézeteinek.

E könyvben részleteket idézünk EINSTEINnek egy nem nagyon ismert cikkéből, amelyben EINSTEIN a mi felfogásunkhoz elég közeli álláspontot képvisel. A fizikai realitások kérdése a mi tárgyalásunkban egészen másképpen jelenik meg, mint ez sok tankönyvben történik. Ahhoz, hogy ezt illusztráljuk, idézünk LAUE könyvéből egy mondatot, amellyel nem értünk egyet: »Azzal, hogy a relativitáselmélet nem használ ilyen normál koordinátákat, EINSTEIN kijelentése szerint "a teret (úgy, mint az időt) a fizikai tárgyiasság utolsó maradványaitól is megfosztja."\*»

Fontosnak tartjuk azonban, hogy ezzel a mondattal LAUE könyvének csak régi kiadásában találkozunk, és az újabb kiadásból kimaradt. Ebben a kiadásban LAUE már egy, a mi felfogásunkhoz sokkal közelebbi álláspontot képvisel.

Véleményünk szerint abból a tényből, hogy a tér- és időmértékeket tetszőleges koordinátamértékekkel fejezhetjük ki, egyáltalában nem következik az, hogy a koordináták semmiféle fizikai tényeket nem fejeznének ki. Bár-

\* »Indem die allgemeine Relativitätstheorie von derartigen Normalkoordinaten vollständig absieht, entkleidet sie nach einem Ausspruch Einsteins: "den Raum (wie auch die Zeit) des letzten Restes physikalischer Gegenständlichkeit."« M. VON LAUE: Die Relativitätstheorie. Band II, p. 25. Verlag Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1923.

milyen fizikai mennyiséget — például a hőmérsékletet — tetszőleges skálák segítségével írhatunk le, és ugyanazt a hőmérsékletet a legkülönbözőbb mértékszámokkal fejezhetjük ki. Ennek ellenére nem vonhatjuk kétségbe, hogy a hőmérséklet egy objektíve létező mennyiség.

9. Amire azonban figyelniük kell, a következő: mértékszámok között — akkor is, ha ezeket tetszőleges skálákban fejeztük ki — léteznek a mértékszámok választásától függetlenül bizonyos összefüggések, és ezek fejezik ki a fizikai realitásokat.

Vannak mennyiségek, amelyeket tenzorokkal fejezünk ki, mint például az elektromágnességben a  $\mathfrak{F}^{(el)}$ , vagy a mechanikában a  $\mathfrak{T}^{(m)}$  energia-impulzus-tenzort és így tovább. Ilyen tenzorok között a  $g$  nagy szerepet játszik. Ezt a tenzort szokásos a „négydimenziós tér-idő kontinuum mértéktenzor”-ának nevezni. Ezt a tenzort megfontolásaink kezdetén *terjedési tenzornak* nevezzük el, és megmutatjuk, miként jellemzi az elektromágneses hullámok terjedési módját. Később megmutatjuk, hogy e tenzor más jelenségek leírásában is szerepel, és érvelésünk folyamán természetesnek tűnik ezt a tenzort az éter energia-impulzus-eloszlásával összefüggésbe hozni. LAUE a — már említett könyvének újabb kiadásában —  $g$ -t „Führungsfeld”-nek (vezetőmezőnek) nevezi, tehát ő is azon a véleményen van, hogy  $g$  egy mezőt ír le.

10.  $\mathfrak{F}^{(el)}$ ,  $\mathfrak{T}^{(m)}$ ,  $g$ , ... tenzorok, melyeknek elemei numerikus értékekkel rendelkeznek, az általunk választott reprezentációtól függenek. Léteznek azonban olyan matematikai összefüggések e tenzorok között, amelyek függetlenek a reprezentáció megválasztásától, és ezek az összefüggések fejezik ki a fizikai törvényeket az anyagra, a mezőre és a gravitációra vonatkozóan. A  $g$  hasonló szerepet játszik, mint a többi tenzor, és ezért az a véleményünk, hogy  $g$  éppen úgy valami fizikai realitást fejez ki, mint a többi. Ezeket az elgondolásokat a könyv utolsó részében részletesen kifejthetjük.

Mindezen megfontolásokat fontosnak tartjuk. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a könyvben elhangzott állításokat kivétel nélkül le lehet fordítani egy úgynevezett „ortodox” nyelvre. Véleményünk szerint a könyv még az olyan olvasó számára is érdekes lehet, aki különben nem ért egyet a kifejtett filozófiai felfogásunkkal.

\*

Köszönetemet szeretném kifejezni több kollégámnak a könyv írása közben folytatott érdekes és hasznos vitáikért. Így köszönöm KIRÁLY PÉTER kollégámnak néhány speciális kérdés megoldásához nyújtott segítségét, valamint WERNER ANTAL kollégámnak a kézirat előkészítésében adott segítségét.

Hálásan emlékezem a könyvvel kapcsolatban LUKÁCS GYÖRGYRE, akivel éveken át számtalan eszmecsere-t folytattam filozófiai kérdésekről, aki azonban a könyv megjelenését már nem érte meg.



# A FÉNY TERJEDÉSÉRE ÉS AZ EHHEZ KAPCSOLÓDÓ JELENSÉGEKRE VONATKOZÓ KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA

**11.** A relativitáselmélet kérdéseivel való foglalkozás során figyelmünket mindenekelőtt a fény terjedésének módjára kell irányítanunk.

MAXWELL elektromágneses elmélete a fényjelenségeknek mélyreható elemzését adta meg. A következőkben MAXWELL elméletét alátámasztó néhány kísérletet írunk le. A *Maxwell*-elmélet egyik fontos következménye, hogy a fény terjedési sebességének  $c$  értékét az elektromos töltés és a mágneses pólusok egymásra való hatását vizsgáló kísérletek eredményeként meg lehet állapítani olyan kísérletek nélkül is, amelyek közvetlenül a fény terjedésével foglalkoznak.

## A) A KRITIKUS SEBESSÉG

**12.** A *Maxwell*-féle egyenletek, amelyek az elektromágneses mező tulajdonságait írják le, tartalmazzák a sebesség dimenziójú  $c$  állandót. Ez az állandó — melynek értékét elektromos töltések és mágnesek közötti erők megfigyelésével állapíthatjuk meg — az ún. *kritikus sebesség*. A kritikus sebesség számértékét nagy pontossággal megmérték, és kiderült, hogy értéke pontosan megfelel a fénynek vákuumban való terjedési sebességével.

**13.** A következő megfontolást azért ismertetjük, hogy a kritikus sebesség szerepét pontosabban meghatározzuk.

Elektromos töltések egymásra való hatását a *Coulomb*-törvény adja meg; abban az esetben, amikor két ponttöltés,  $e_1$  és  $e_2$  hat egymásra, a köztük ható  $F_{12}^{(e)}$  erő értékét a következő képlet határozza meg:

$$\mathbf{F}_{12}^{(e)} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

ahol  $\mathbf{r}$  az  $e_1$ -ből  $e_2$ -be vezető vektor.

Hasonló módon az erő, amellyel egy  $m_1$  mágneses pólus egy másik  $m_2$  mágneses pólusra hat, úgy írható fel, hogy

$$\mathbf{F}_{12}^{(m)} = \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2)$$

Mint hogy mágneses egypólusok nem léteznek, a fenti összefüggés csak közvetve ellenőrizhető, mégpedig úgy, hogy hosszú mágnesezett rudakat használunk; ezek úgy viselkednek, mintha a végükön egypólusokat hordoznának.

14. Egy elektromos töltés nem gyakorol hatást mágneses pólusra, ha a töltés és a pólus is nyugalomban vannak. Ha azonban pl. a pólus nyugalomban van, és a töltés  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog, akkor a kettő közötti erőt úgy adhatjuk meg, hogy

$$\mathbf{F}^{(em)} = \alpha \frac{em \mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r^3}, \quad (3)$$

ahol  $\mathbf{r}$  az a vektor, amely  $m$ -ből  $e$ -be vezet, és  $\alpha$  egy állandó. Ha az (1), (2) és (3) egyenleteket összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy  $\alpha$  dimenziója reciproknak a sebesség. Az utóbbi sebesség numerikus értékét meg tudjuk állapítani, ha megmérjük, hogy mozgó töltések mekkora erőt fejtenek ki egy mágneses pólusra. E sebességet nevezzük kritikus sebességnek vagy *Kohlrausch-Weber-állandónak*.\*

A legújabb mérések eredményeként megállapították, hogy

$$c' = (299\,790 \pm 30) \text{ km/s} . * \quad (4)$$

A fénysebesség legpontosabb mért értéke pedig

$$c = (299\,792,50 \pm 0,10) \text{ km/s} . **$$

15. Azt a tényt, hogy egy mozgó töltés mágnesre erőhatást gyakorol, kísérletileg először ROWLAND mutatta ki. Olyan pontos kísérletet, melynek segítségével a (4) formulában szereplő kritikus sebességet megállapították, KOHLRAUSCH és WEBER végeztek. E kísérletek során kondenzátort sütöttek ki, és egyrészt az így keletkező áram mágneses hatását, másrészt az áramot okozó töltésnek a kisülés előtti elektrosztatikus hatását állapították meg.

16. Abból az empirikus tényből, hogy  $c = c'$ , MAXWELL arra következtetett, hogy a fény egy elektromágneses jelenség. Mint ahogy ezt később (VIII. fejezet 273. és 274. pont) ki fogjuk mutatni, MAXWELL eredményei kétféle jelenségre vonatkoznak.

Először: ha egy hullámcsomagot vagy egy rövid fényjelet bocsátunk ki, akkor ez  $c$  sebességgel távolodik. Másodsor: a monokromatikus fényhullámokban a fázisfelületek szintén  $c$  sebességgel haladnak.

A következőkben röviden leírjuk azokat a kísérleti módszereket, amelyeknek segítségével a *Maxwell-féle* elmélet igazolást nyert.

## B) FÉNYJELEK TERJEDÉSI SEBESSÉGÉNEK MÉRÉSE

### 1. EGY ÁLTALÁNOS MEGJEGYZÉS

17. A fény terjedési sebességét *elvben* a következő módon lehetne meghatározni. Kibocsátunk  $A$  pontból egy rövid fényjelet, s annak  $B$  pontba érkezését megfigyeljük. Legyen  $A$  és  $B$  pontok közötti távolság  $l$ , akkor

$$c = \frac{l}{t_2 - t_1},$$

ahol  $t_1$  a fényjel kibocsátásának,  $t_2$  pedig a fényjel érkezésének időpontja.

\* F. KOHLRAUSCH: Lehrbuch der praktischen Physik. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1930. p. 684.

\*\* E. R. COHEN and J. W. M. DUMOND: Rep. to the Com. on Nuclidic Masses and Related Atomic Constants of UIPAP. June 1963.



Ilyen méréseket a gyakorlatban nem lehet egyszerű módon végrehajtani, hiszen ahhoz, hogy a  $t_1$  és  $t_2$  időértékeket pontosan meg tudjuk határozni, szükségünk van két,  $P_A$  és  $P_B$  órára, amelyek egyike az  $A$  pontban, míg a másik a  $B$  pontban van felállítva. Ezen órákat olyan pontossággal kell szinkronizálni, hogy a leolvasott kis időkülönbség,  $t_2 - t_1$  pontosan megállapítható legyen. Az első megoldandó — és nem triviális — probléma tehát az órák szinkronizálása.

18. A szinkronizálás legegyszerűbb módszerének az tűnne, hogy az órákat közvetlenül összehasonlítjuk, pl. a  $B$  pontban távcső segítségével megfigyeljük a  $P_A$  óra állását. A távcsőben azonban  $P_A$  órának egy  $P'_A$  képét látjuk. Ha a  $P_B$  óra járását a  $P'_A$  óráké állásával hasonlítjuk össze, figyelembe kell venni, hogy a  $P'_A$  óra éppen a fény véges sebessége folytán késik a  $P_A$  órához képest. Így, ha ezzel a módszerrel akarjuk a  $P_A$  és  $P_B$  órákat összehasonlítani, már előre ismerni kellene a fény terjedési sebességét.

A fenti nehézségen túltehetjük magunkat, ha a  $P_A$  és  $P_B$  órákat távcsővel egy harmadik — az  $A$  és  $B$  pontoktól egyforma távolságra fekvő —  $C$  pontból figyeljük meg. A  $C$  pontból  $P'_A$  és  $P'_B$  képeket látjuk, és az órákat úgy kell szabályozni, hogy e két kép ugyanazt az időmértéket mutassa. A szinkronizáció módszere feltételezi, hogy a fény az  $AC$  és a  $BC$  szakaszon ugyanazzal a sebességgel terjed. A fenti módszer elvben keresztülvihető, azonban — tudomásom szerint — a gyakorlatban nem került megvalósításra.

## 2. GALILEI JAVASLATA

19. Már GALILEI\* is feltételezte, hogy a fény véges sebességgel terjed, és e sebesség meghatározására a következő kísérletet javasolta. Két letakart lámpás egymástól bizonyos távolságra van elhelyezve. Mindkét lámpás mellett áll egy megfigyelő. Az első megfigyelő hirtelen leveszi a fedelet a lámpásról, a második megfigyelő pedig, mihelyt meglátja az első lámpás fényét, felnyitja a második lámpást. Azt kell várunk, hogy az első megfigyelő a második lámpás felvillanását késéssel látja, és a késés megfelel a fény oda-vissza útja időtartamának. A kísérlet végrehajtása során, bár a lámpások egymástól néhány mérföld távolságban voltak elhelyezve, észrevehető késést mégsem találtak. Ebből GALILEI arra a helyes következtetésre jutott, hogy a fény terjedési sebessége igen nagy. Ekkor egy olyan módszert javasolt, amellyel a fény sebessége a Jupiter-holdak segítségével meghatározható.

## 3. CSILLAGÁSZATI MÓDSZEREK

### a) Römer megfigyelései

20. A távoli órák szinkronizálásának szükségességéből származó nehézség a következő módon oldható meg. A  $P_A$  és  $P_B$  órákat kezdetben egymáshoz közel állítjuk fel, és ebben a helyzetükben szinkronizáljuk. Az így szinkroni-

\* Discorsi e Dimostrazione Mat., Elzevir, 1638. 43. o. és R. J. SEEGER: Galileo Galilei his life and his works. Pergamon Press, Oxford, 1966. pp. 186—187.

zált órákat óvatosan egymástól távoli, végleges helyükre, az  $A$  és  $B$  pontok közelébe visszük. Ha az órákat megfelelő elővigyázatossággal mozgatjuk, remélhetjük, hogy a szinkronizáció nem romlik el, amíg végleges helyzetüket elérik, és így a 17. pontban leírt kísérletet ezekkel az órákkal véghezvihetjük.

OLAF RÖMER csillagász 1676-ban végzett megfigyeléseket, melyek eredményeként a fény terjedési sebességét megbecsülte. A kísérlet a fent leírt elv szerint történt.

A Jupiter holdjai, amelyek periodikus pályákon keringenek a Jupiter körül, szolgáltatták a térben elhelyezett órát, amelyet a Földről meg lehet figyelni. A Föld pályamozgása folytán változtatja a Jupitertől való távolságát, és így a Jupiter-óra üteme a Földről nézve lelassul akkor, amikor a Föld távolodik, és felgyorsul, amikor a Föld közeledik a Jupiterhez.

A gyakorlatban megvalósított módszer sémája a következő.

Tételezzük fel, hogy a Jupiter-holdak keringési idejei

$$t_v = t_0 + vT, \quad v = 1, 2, \dots, k \quad (5)$$

időkben végződnek, ahol  $T$  egy körülfordulás ideje, és  $t_0$  a megfigyelt mozgás kezdő pillanata. A  $t_v$  idők helyett a Földről késleltetett  $t'_v$  időpontokat figyelünk meg, ahol

$$t'_v = t_v + l_v/c \quad (6)$$

és  $l_v$  a Föld—Jupiter távolság a  $t'_v$  időpontban.\*

Az (5) és (6) formulából azt találjuk, hogy az első  $k$  körülfordulás ideje

$$t'_k - t'_0 = kT + (l_k - l_0)/c,$$

és a következő  $k$  körülfordulásra azt találjuk, hogy

$$t'_{2k} - t'_k = kT + (l_{2k} - l_k)/c.$$

Az első  $k$  és a második  $k$  körülfordulás idejének különbsége tehát

$$t'_{2k} - 2t'_k + t'_0 = (l_{2k} - 2l_k + l_0)/c,$$

s így

$$c = \frac{l_{2k} - 2l_k + l_0}{t'_{2k} - 2t'_k + t'_0}.$$

RÖMER nem teljes körülfordulásokat figyelt meg, hanem azokat az időpillanatokat, amelyekben a Jupiter-holdak eltűntek a Jupiter árnyékában. Csak az egyszerűség kedvéért írtuk fel az összefüggéseket egész körülfordulásokra.

\* Feltételezhetjük, hogy a Föld mozgási sebessége a fény terjedési sebességéhez viszonyítva olyan kicsi, hogy nem tesz különbséget, hogy  $l_v$ -t  $t_v$  vagy  $t'_v$  időpontban vett Föld—Jupiter távolságnak vesszük.

RÖMER megfigyelése a következő számértékre vezetett:\*

$$c = 220\,000 \text{ km/s} \quad (\text{RÖMER})$$

Bár a fenti számérték eléggé pontatlan, mégis nagy eredménynek kell tekinteni, hogy RÖMER a fény terjedési sebességének nagyságrendjét egyáltalában helyesen állapította meg.

A Jupiter-holdak eltűnésének pillanatát csupán pernyi pontossággal lehet megállapítani, ezért RÖMER módszere — még akkor is, ha azt modern csillagászati eszközökkel visszük végre — a  $c$  pontos meghatározására nem alkalmas.

### b) A fény aberrációja

**21.** A fény terjedési sebességének első meglehetősen pontos megállapítása BRADLEYTÓL\*\* származik, aki 1727-ben megjósolta és meg is figyelte a fény aberráció jelenségét. Ezt az effektust később tárgyaljuk (IX. fejezet, **294.** pont), és ott megmutatjuk, hogy ez a módszer valójában a kritikus sebességet, a  $c'$ -t, és nem  $c$ -t, a fény terjedési sebességét állapítja meg.

## 4. LABORATÓRIUMI MÓDSZEREK

### a) Foucault és Fizeau módszerei

**22.** A fénysebesség meghatározásának a **17.** pontban említett és a távoli órák szinkronizációjával összefüggő nehézségei elkerülhetők, ha oda-vissza fényjeleket használunk. Ezt a körülményt különben már GALILEI is felismerte.

Ha a fényjeleket egy  $A$  pontból egy  $l$  távolságban fekvő  $B$  pontba küldjük és ha a  $B$  pontba érkező fényjeleket tükör segítségével visszaverjük az  $A$  pontba, akkor egy, az  $A$  pontban elhelyezett óra segítségével mérhetjük a  $t_1$  időt, amikor a jel elindul, és a  $t_3$  időt, amikor a fényjel visszatér az  $A$  pontba. Azt írhatjuk tehát, hogy

$$c = \frac{2l}{t_3 - t_1}. \quad (7)$$

Ha a (7) formulát felhasználjuk, feltételezzük, hogy a  $t_2$ , vagyis az az idő, mikor a fényjel a  $B$  pontot eléri:

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2},$$

vagyis feltételezzük, hogy a terjedési sebesség  $c_+$ , amellyel a jel  $A$ -tól  $B$  felé halad, egyenlő a  $c_-$  terjedési sebességgel, amellyel a jel  $B$ -ből  $A$  felé visszatér.

\* R. RÖMER: Mem. Acad. des Sciences, Paris, 1675; valamint C. RAMSAUER: Grundversuche der Physik in historischer Darstellung. I., Springer Verl., 1953. p. 63.

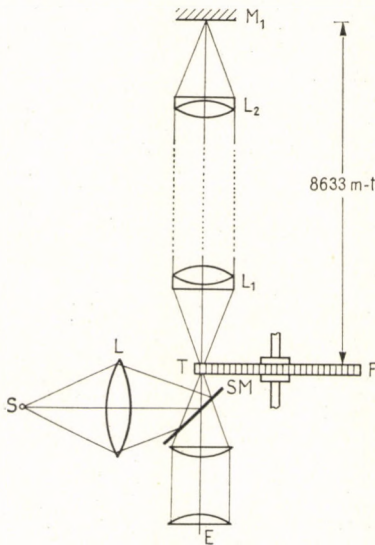
\*\* J. BRADLEY: Phil. Trans., London, 35, 637, 1728.

Ahelyett, hogy egy fényjel  $A$ -tól  $B$ -ig történő haladásának és visszakerülésének idejét mérnénk, azt is tehetjük, hogy az  $A$  pont közelében  $P_A$  órát állítunk fel, és egy távcső segítségével  $P_A$ -nak  $P'_A$  tükörképét — mely tükörképet a  $B$ -ben felállított tükör hoz létre — a távcsőben megfigyeljük. A  $P_A$  óra és  $P'_A$  órákép között egy  $\Delta t = 2l/c$  fáziskülönbséget találunk, és e megfigyelt fáziskülönbség segítségével megállapítjuk, hogy

$$c = 2l/\Delta t.$$

### b) Fizeau és Foucault kísérletei

**23.** A fenti elvnek megfelelően hajtott végre FIZEAU\* 1849-ben kísérleteket, amelyek a fény terjedési sebességének első pontos meghatározását adták. FIZEAU kísérletében óra helyett gyorsan forgó fogaskereket használt. Kis  $S$  fényforrásból (lásd az 1. ábrát) származó fénynyalábot egy féligáteresztő tükör (az ábrán  $SM$ -mel jelölve) segítségével a fogaskerék peremére ejtett. A fénynyaláb két fog közötti nyíláson keresztül az  $l$  távolságban felállított tükörrre esett. A tükör visszaverte a fénysugarakat, és a visszavert fénysugár egy megfelelő optikai berendezés segítségével ugyanazon a nyíláson keresztül visszatért.



1. ábra. A fény terjedési sebességének meghatározása FIZEAU módszerével

Ha a fogaskerék nyugalmi helyzetben van, akkor a forrásból származó fénysugár ugyanazon a nyíláson tér vissza, mint amelyen elindult, és így a nyílást kivilágítja. Ha azonban a fogaskerék forog, és a forgási sebesség olyan, hogy a fény oda-vissza futási ideje alatt a fogaskerék egy fél foggal elfordul, akkor a visszatérő sugarat egy fog eltakarja, és a nyílás ebben az esetben nincs kivilágítva. Ha a fogaskereket gyorsabban és gyorsabban forgatjuk, akkor aszerint, hogy a visszatérő fénysugár fogra esik vagy nyílásra, a foghézag világosnak vagy sötétnek tűnik. A visszatérő sugarat egy  $E$  távcsővön keresztül figyeljük meg, és lát-

juk vagy nem látjuk a fényforrást, aszerint, hogy a fogaskerék milyen sebességgel forog.

A kísérlet során megfigyelték a fényforrás feltűnését és kioltását a szögsebesség függvényében.

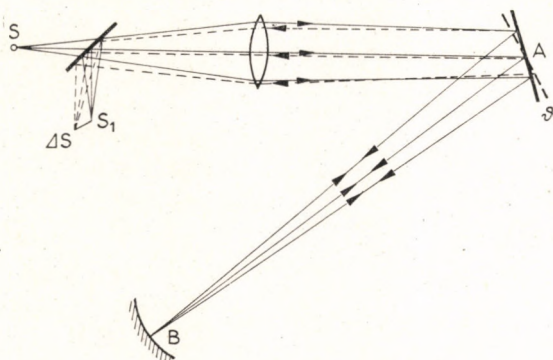
FIZEAU kísérletében a fogaskerék és a visszaverő tükör közötti távolságot  $l = 8633$  méternek választotta, és a fogaskerék  $n = 720$  foggal ren-

\* H. FIZEAU: Comp. Rend. Hebd., 29, 90, 1849; Ann. d. Phys., 79, 167, 1850.

delkezett. A fordulatszám, amelynek egész számú többszörösénél a fényforrás képe feltűnt, úgy adódott, hogy

$$N = \frac{c}{2nl} = 22,6 \text{ fordulat/s.}$$

24. Későbbi kísérleteikben FIZEAU és FOUCAULT\* egy, ARAGO\*\* által javasolt javított kísérleti elrendezést használt. E berendezésnél forgótükörrel használtak. A fény sugar egy  $A$  közelében forgó, míg a visszavert sugar egy nyugalomban levő és  $l$  távolságban elhelyezett  $B$  tükörrre esik (2. ábra).



2. ábra. A fénysebesség meghatározása forgótükörös módszerrel

A  $B$  tükör visszaveri a fényt a forgótükörrre, azonban az a  $\Delta t = 2l/c$  idő alatt — amely alatt a fény  $A$ -tól  $B$ -ig és vissza halad — egy  $\vartheta = \omega \Delta t$  szöggel elfordul, ahol  $\omega$  a tükör szögsebessége. Megmérve a  $\vartheta$  szöget — minthogy az  $\omega$  szögsebességet ismerjük —  $\Delta t$ -t és ezzel  $c$ -t, a fény terjedési sebességét meg tudjuk állapítani.

$c$ -nek kísérletileg ez ideig legpontosabban megállapított értékét a 14. pontban megadtuk.

## 5. A FÉNY TERJEDÉSI SEBESSÉGE FÉNYTÖRŐ ANYAGOKBAN

### a) $A$ törésmutató

25. MAXWELL elméletéből következik, hogy a törésmutatóval rendelkező anyagban a fény terjedési sebessége  $c$ -től különbözik. Az elméletnek e részét később a IX. fejezet C) pontjában fogjuk tárgyalni. Itt a következőket jegyezzük meg:

1) A fény terjedési sebessége  $n$  törésmutatóval rendelkező anyagban az elméletből úgy adódik, hogy

$$V = c/n, \quad (8)$$

\* L. FOUCAULT: Compt. Rend. Hebd., 30, 551, 1850; uo. 55, 501, 1862.

\*\* F. ARAGO: Compt. Rend. Hebd., 7, 954, 1838; 30, 489, 1850; 55, 792, 1862.

és első közelítésben  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  ( $\epsilon$  a dielektromos állandó,  $\mu$  a mágneses permeabilitás). A részletesebb elemzés azonban azt mutatja (lásd a IX. fejezetet), hogy a (8) képlet csak monokromatikus fényre érvényes, és így egy monokromatikus fénynyaláb fázisfelületei

$$V = c/n(v), \quad (9)$$

sebességgel haladnak, ahol  $n(v)$  a  $v$  frekvenciájú fény törésmutatója.

2)  $V$  nemcsak fázisfelületek terjedési sebességét adja meg, hanem a fény hullámhosszához képest nagy hullámsomagok terjedési sebességét is. A (9) összefüggést kísérletileg közvetlenül ellenőrizhetjük vagy úgy, hogy egy optikai törőanyagban a fázisfelületek sebességét mérjük, de oly módon is, hogy egy ilyen anyagban hullámsomagok terjedési sebességét mérjük.

Az  $n(v)$  törésmutatót optikai módon meghatározhatjuk, ha egy sugár irányváltozását a szokásos geometriai optikai módszerrel mérjük. Ebből azonban az következik, hogy  $V$ , illetve  $n(v)$  egymástól független kísérletek segítségével határozható meg, és így a (9) egyenlet kísérletileg ellenőrizhető. A gyakorlatban lefolytatott kísérletek a (9) összefüggés helyességét igazolták.

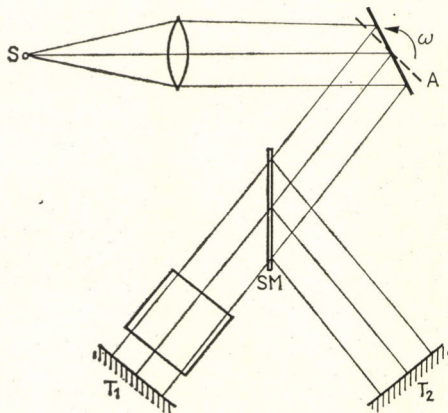
### b) A fénysebesség mérése optikai törőanyagban

26. A forgótükörös Foucault-kísérletet relatív rövid távolság mellett végre lehet hajtani. Ezért ez a módszer alkalmas a fény terjedési sebességének törésmutatóval rendelkező anyagokban történő meghatározására. E célkitűzés érdekében FOUCAULT egy, a 3. ábrán sematikusan vázolt berendezést használt. E berendezésben a forgótükör és az állótükör között egy átlátszó falú víztartályt helyezett el, és így megállapította a víztartályon keresztül a fény oda-vissza futási idejét, és kimutatta, hogy az oda-vissza futási idő valóban

$$V = c/n,$$

ahol  $n$  a víz törésmutatója.

E kísérletben még az is elkerülhető, hogy a forgótükör szögsebességét pontosan meghatározzuk, ha közvetlenül összehasonlítjuk azokat a távolságokat, amelyekben a fény vákuumban, illetve vízben ugyanazon idő alatt teszi meg az oda-vissza utat. Amint a 3. ábrán megmutattuk, ennek a célkitűzésnek megfelelően FOUCAULT a forgótükörrel kiinduló fénysugarat egy  $SM$  félígáteresztő tükör segítségével kettéválasztotta. Az egyik sugár a víztartályon át a  $T_1$  tükrön verő-



3. ábra. A fénysebesség meghatározása optikai törőanyagban

dik vissza, a másik sugármenet pedig akadály nélkül éri el a  $T_2$  tükröt. A  $T_1$  és  $T_2$  tükrök helyzetét úgy kell beállítani, hogy a visszavert sugármenetek egy időben érkezzenek vissza a forgó tükrökre.

### C) A FÉNYSEBESSÉG MEGHATÁROZÁSA INTERFEROMÉTERES MÓDSZERREL

27. Az eddig leírt módszerek a fényjelek mozgásával foglalkoztak. Vegyük például FIZEAU kísérletét. A forgó fogaskerék a beeső fénynyalábot csomagokra szaggatja, és e csomagok oda-vissza futási idejét határozzuk meg. Hasonló módon a forgótükrös kísérlet esetében a tükrő rövid felvillanásokat hoz létre, és e felvillanások terjedési sebességét mérjük.

A következőkben a fény terjedési sebességének interferometrikus módszerekkel történő mérését tárgyaljuk. E kísérletek monokromatikus fénynyalábok vizsgálatával foglalkoznak, és fázisfelületek terjedési sebességét határozzák meg.

#### 1. A MICHELSON-FÉLE INTERFEROMÉTER

28. E kísérletekhez nagyon hasznos berendezés a *Michelson-féle\** interferométer. A berendezés sémáját a következőkben adjuk meg. Az interferométer vázlatát a 4. ábrán mutatjuk.

Az  $S$  forrásból kiinduló fénysugár  $45^\circ$ -os beeséssel  $SM$  féligáteresztő tükörrre esik. A tükörrre eső sugár kettéválik, egy része átmegy a tükörön, a másik része pedig visszaverődik. Így a létrejött két komponens az  $M_1$ , ill.  $M_2$  tükörrre esik, és visszaverődnek az  $SM$  féligáteresztő tükörrre. A visszavert sugarak újra kettéválnak, és a visszavert sugarak megfelelő komponensei a  $T$  távcső felé indulnak el.

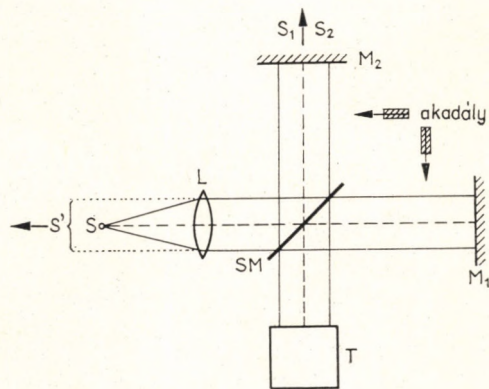
A távcsőben interferenciakép jön létre, s ennek segítségével meg lehet állapítani a két oda-vissza út különbségét, vagyis

$$2l_1 = SM \rightarrow M_1 \rightarrow SM$$

és  $2l_2 = SM \rightarrow M_2 \rightarrow SM$

különbségét. Pontosabban azonban az interferencia-rendszer nem is az  $l_1$  és  $l_2$  távolságok különbségét határozza meg, hanem inkább a

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

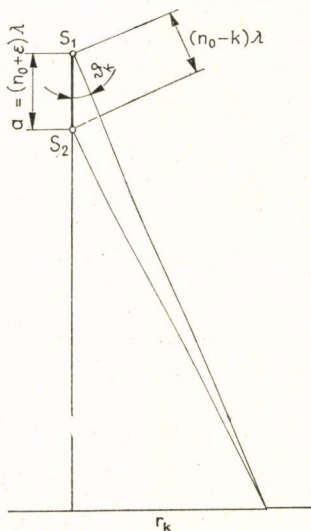


4. ábra. A Michelson-féle interferométer

\* A. A. MICHELSON: Sill. Journ., 15 394, 1878; 18, 390, 1879. Nature, 21, 94 and 120, 1880; Naut. Alm. p. 235, 1885; Astrophys. J., 60, 256, 1924; 65, 1, 1927.

időkülönbség megállapítására alkalmas, ahol  $T_1$ , illetve  $T_2$  azok az idők, amelyek alatt a sugármenet az  $SM$  tükörtől  $M_1$ , illetve  $M_2$ -höz elér és visszatér.

**29.** A *Michelson*-féle interferométer jobb megértéséhez hasznos kissé részletesebb leírást is adni. Ahogyan az a 4. ábrából kitűnik, az  $S$  forrásból kiinduló fényt az  $L$  lencse paralel nyalábra alakítja át. E paralel nyaláb lát-



5. ábra. Az interferenciagyűrűk sugara

szólagosan egy nagyon távoli  $S'$  forrásból származik. A paralel sugarat a féligáteresztő tükör két komponensre osztja. A komponensek visszaverődnek, és a visszaverődött sugárnyalábok megfelelő komponense a távcsőbe esik.

Ha a távcsőben egyesülő sugármenetek egyikét eltakarjuk, akkor a távcsőben a forrás egy tükörképe válik láthatóvá. Nevezzük a tükörképet  $S_1$ -nek, melyet akkor kapunk, ha az  $SM$  és  $M_2$  tükör közötti sugármenetet eltakarjuk.  $S_2$ -nek nevezhetjük a képet, amelyet akkor kapunk, ha  $SM$  és  $M_1$  közötti fényutat megszakítjuk. Mindkét kép a távcsőben az  $M_2$  tükör mögötti virtuális forrásnak tűnik. Ha mindkét sugármenet egyszerre esik a távcsőre, akkor a két virtuális fényforrás képei részben egymást takarva látszanak a távcsőben, és azon a tartományon, ahol a képek egymást fedik, interferenciajelenség lép fel. Az interferenciakép pontosan olyan, mintha a fény két koherens,  $S_1$ -ben, illetve  $S_2$ -ben elhelyezett forrásból származna.

Ha az interferométer felépítése szimmetrikus, tehát ha az  $M_2$  tükröt pontosan abban a síkban helyezzük el, amelyre  $M_1$ -nek az  $SM$  által létrehozott tükörképe esik, akkor az  $S_1$  és  $S_2$  virtuális források összeesnek, és interferenciajelenség nem lép fel. Ebben az esetben az eredeti forrásnak fényes képét látjuk a távcsőben. Ezt a fényes képet *nulla-interferenciaképnek* nevezzük.

Ha viszont az  $M_1$  tükröt párhuzamosan eltoljuk  $\Delta l$  távolsággal, akkor a távcsőben pontosan olyan interferenciaképet figyelünk meg, mintha  $2\Delta l$  távolsággal egymás mögött levő  $S_1$  és  $S_2$  koherens fényforrás fényét figyelnénk meg.

A  $\lambda$  hullámhossz ismeretében az interferenciagyűrűk helyzetéből  $\Delta l$  numerikus értékét meg tudjuk határozni.

**30.** Tételezzük fel, hogy a virtuális források,  $S_1$  és  $S_2$  közötti távolság

$$a = n\lambda, \quad n = n_0 + \varepsilon,$$

ahol  $\varepsilon$   $n$ -nek a nem egész része. A  $k$ -adik világos interferenciagyűrű sugara pedig

$$r_k = F \operatorname{tg} \vartheta_k, \quad \cos \vartheta_k = \frac{n_0 - k}{n_0 + \varepsilon}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$



ahol  $F$  a távcső effektív gyújtótávolsága. Amennyiben  $\vartheta_k$  kicsi, akkor — mint az 5. ábrából látható — azt kapjuk, hogy

$$\vartheta_k \approx \sqrt{\frac{2(k + \varepsilon)}{n_0 + \varepsilon}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

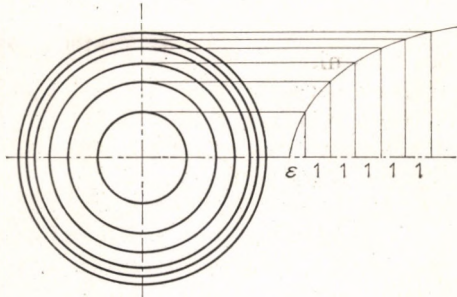
A koncentrikus gyűrűk kifelé haladva egymáshoz mindig közelebb helyezkednek el, mint ezt a 6. ábra mutatja. A megfigyelt gyűrűk eloszlásából  $n_0$  és  $\varepsilon$  meghatározható.

Az effektív távolságokat  $SM \rightarrow M_1$  és  $SM \rightarrow M_2$ -t  $l_1$ -gyel, ill.  $l_2$ -vel jelölve (azaz a terjedési idők szorozva  $c$ -vel), nagy pontossággal meg tudjuk állapítani azok különbségét:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = n\lambda,$$

amennyiben  $\lambda$  ismeretes.  $M_1$  és  $M_2$  tükröket egymáshoz képest párhuzamosan eltolhatjuk mindaddig, amíg az interferenciagyűrűk eltűnnek és nulla interferenciaképet kapunk, vagyis addig, amíg a fényforrás világos képe tűnik fel a távcsőben. Ebben az esetben megállapíthatjuk, hogy  $n = 0$ , tehát  $\Delta l = 0$ .

Ha az  $M_1$  tükröt ahelyett, hogy párhuzamosan eltolnánk, kis szöggel elforgatjuk, akkor az  $S_1$  és  $S_2$  virtuális források egymás mellé kerülnek, és így párhuzamos interferenciacsíkok fognak jelentkezni a gyűrűrendszer helyett. A továbbiakban az interferenciát úgy tárgyaljuk, hogy gyűrűk jelennek meg.



6. ábra. Az interferenciagyűrűk sémája

## 2. A FÉNY FÁZISSEBESSÉGÉNEK MÉRÉSE

**31.** Amint említettük, a *Michelson*-féle interferométer nem is a  $\Delta l$  — a karok hosszának különbségét — méri, hanem inkább a  $\Delta T$  időkülönbséget, a két kar mentén való oda-vissza futási idők különbségét.

Ha ugyanis a hullámfelületek  $l_1$  és  $l_2$  mentén különböző sebességgel haladnak — mondjuk  $c_1$  és  $c_2$  sebességgel —, akkor az interferenciaképből nem a  $\Delta l = l_2 - l_1$  mennyiséget, hanem a

$$\Delta T = \frac{2l_2}{c_2} - \frac{2l_1}{c_1} \quad (10)$$

állapíthatjuk meg. Azt a tényt, hogy nem útkülönbséget, hanem időkülönbséget mérünk, felhasználhatjuk például, amikor a fény terjedési sebességét mérjük fénytörő anyagban.

A fénytörő anyagot az interferométer egyik karjában helyezük el, és ha a tükröket úgy állítjuk be, hogy nulla interferenciát kapjunk — tehát  $\Delta T = 0$ -nak megfelelő képet —, akkor (10) segítségével azt kapjuk, hogy

$$c_1 : c_2 = l_1 : l_2.$$

Ha tehát például  $c_1 = c$  és  $c_2 = c/n$ , akkor

$$n = l_1/l_2.$$

Egy ilyenfajta kísérlet kibővíti a kísérleti eredményt, amelyet a 26. pontban tárgyaltunk. Ha a kísérleteket összevetjük, azt találjuk, hogy mind a hullámfelületek, mind pedig a hullámcsomagok  $c/n(v)$  sebességgel haladnak.

### 3. A FIZEAU-FÉLE KISÉRLET

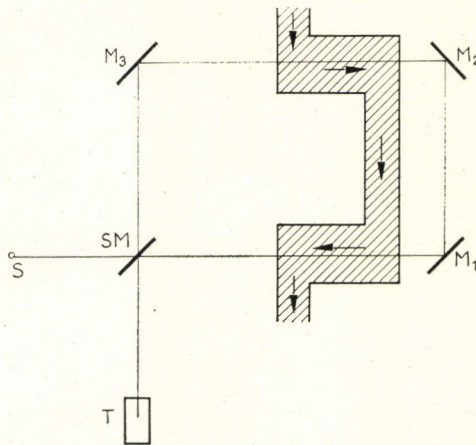
**32.** Hasonló kísérletek segítségével sikerült megállapítani a fázisfelületek terjedési sebességét mozgó folyadékban. A kísérleti berendezést sematikusan a 7. ábrán mutatjuk be.

A kísérletet úgy végezték, hogy a beeső sugarat egy féligáteresztő tükör segítségével két komponensre bontották fel. Az egyik sugár a víz folyásával megegyező, a másik ellenkező irányban halad át a folyadékon, majd utána a sugarak egyesülnek és interferenciaképet hoznak létre.

Mint ezt a későbbiekben kimutatjuk (IX. fejezet, 301.), elméletileg azt kell várnunk, hogy a  $v$  sebességgel folyó  $n$  törésmutatójú folyadékban a fázisfelületek

$$V_{\pm} = \frac{c}{n} \pm v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (11)$$

sebességgel haladnak, ahol a  $+$  előjel egyező, a  $-$  előjel ellenkező irányú haladást jelöl. Azt várjuk tehát, hogy az egyesülő sugarak a folyadék sebességétől függő interferencia eltolódást mutatnak.



A Fizeau-féle kísérlet\* a (11) összefüggést legalábbis kvalitatíve igazolta. A kísérlet és az elmélet között ZEEMAN\*\* talált jó egyezést, aki a diszperziós jelenségre megfelelő korrekciót alkalmazott. Ezek szerint (11) helyett pontosabban

$$V_+ = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n(v_1)^2} \right),$$

$$V_- = \frac{c}{n} - v \left( 1 - \frac{1}{n(v_2)^2} \right)$$

kell írni, ahol  $n(v_1)$  és  $n(v_2)$  a

$$v_1 = v \left( 1 - \frac{v}{c} \right), \quad v_2 = v \left( 1 + \frac{v}{c} \right),$$

7. ábra. Fénysebesség meghatározása mozgó közegben

\* H. FIZEAU: Compt. Rend., 33, 349, 1851.

\*\* P. ZEEMAN: Amst. Akad. Vrl., 1914, 245. o. és 1915. 18. o. és A. SOMMERFELD: Vorlesungen über theor. Physik. Optik, 64. o.

frekvenciákra vonatkozó törésmutató.  $\nu$  a fény eredeti frekvenciája,  $\nu_1$  és  $\nu_2$  pedig a *Doppler*-effektus által eltolt frekvenciákat jelenti, tehát azokat, amelyek a folyadék mozgó atomjaira közvetlenül hatnak. E kérdésre és annak elméleti interpretációjára a IX. fejezetben visszatérünk.

#### D) A DOPPLER-EFFEKTUS\*

**33.** MAXWELL elméletéből következik, hogy a fény terjedési sebessége független a forrásnak a kibocsátás pillanatában levő sebességétől. Félreértések adódnak azonban azzal kapcsolatban, hogy egy mozgó forrás által kibocsátott fény frekvenciája mégiscsak függ a fényforrás mozgásállapotától. Ez utóbbi effektust DOPPLER előre látta. Az effektus azonban nem mond ellent annak a ténynek, hogy a fény terjedési sebessége független a forrás mozgásállapotától.

A fény frekvenciáját ugyanis úgy mérjük, hogy megállapítjuk: milyen ritmusban érik el a fázisfelületek a megfigyelőt. Ezt a ritmust a fényforrás mozgása befolyásolhatja, bár a fázisfelületek maguk pontosan  $c$  sebességgel terjednek, függetlenül a forrás mozgásától.

**34.** Egy atom által kibocsátott hullám a *Maxwell*-egyenletek segítségével kezelhető. A pontos tárgyalás azt mutatja, hogy egy atom gömbhullámokat bocsát ki, és a hullámfelületek izotrop módon  $c$  sebességgel terjednek szét. A legvilágosabban akkor látjuk, hogy ez a kép helyes eredményekre vezet, ha az atom által létrehozott elektromágneses mezőt késleltetett potenciálok segítségével tárgyaljuk (lásd VIII. fejezet).

Tekintsünk tehát egy nyugvó atomot egy  $\mathbf{r} = 0$  pontban, és tételezzük fel, hogy az atom állandó  $\nu$  frekvenciával sugároz. Azonos fázisú felületek tehát

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (12)$$

időközönként bocsátódnak ki, és feltételezhetjük, hogy a felületek

$$t_k = t_0 + kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

időpontokban indulnak el. Egy adott  $t$  időben a felületek az  $\mathbf{r} = 0$  pont körüli koncentrikus gömbökön helyezkednek el.

#### 1. MOZGÓ FORRÁS

**35.** Amennyiben a sugárzó atom állandó  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog, az atom helyzetét  $t$  időpontban

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$$

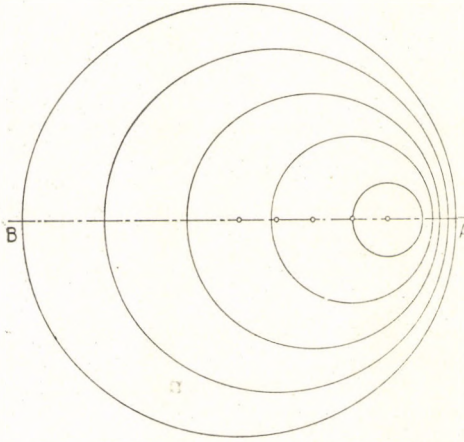
vektorral fejezhetjük ki. A hullámfelületek excentrikus gömbök, középpontjaikat

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{v}t_k$$

helyzetvektorok írják le.

\* CH. DOPPLER: Abh. d. K. Böhmischen Ges. d. Wiss., 2, 465, 1892.

Amennyiben a hullámokat az  $A$  pontban figyeljük meg, amely felé a forrás mozog (lásd a 8. ábrát), akkor a hullámfelületek összezsúfolódnak, és az időközök, amelyekben az  $A$  pontba érkezek,  $T$ -nél kisebb értéket vesznek fel. Ha viszont  $B$  pontból, amelytől a forrás távolodik, figyeljük meg a sugárzást, azt találjuk, hogy ebben az irányban a hullámfelületek ritkulnak, és a hullámfelületek érkezése  $T$ -nél nagyobb időközökben történik. Emellett hangsúlyoznunk kell, hogy az egyes felületek külön-külön  $c$  sebességgel mozognak akkor is, amikor az  $A$  ponton, de akkor is, amikor a  $B$  ponton haladnak keresztül.



8. ábra. Hullámfelületek a Doppler-effektusban

A  $k$ -adik hullámfront pontjai egy  $t > t_k$  időpontban a következő egyenletnek tesznek eleget:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_k)^2 = c^2(t - t_k)^2, \\ \text{ha } t > t_k.$$

A  $k$ -adik front  $t'_k$  időpontban érkezik az  $A$  pontba. Legyen az  $A$  pont koordinátavektora  $\mathbf{R}$ , akkor

$$(\mathbf{R} - \mathbf{v}t_k)^2 = c^2(t'_k - t_k)^2,$$

tehát

$$t'_k = t_k + |\mathbf{R} - \mathbf{v}t_k|/c.$$

Feltételezve, hogy  $R$  távolság sokkal nagyobb, mint  $vt_k$ , akkor elhanyagolva az 1-hez viszonyított  $(vt_k/R)^2$ -tel arányos tagokat, azt írhatjuk, hogy

$$|\mathbf{R} - \mathbf{v}t_k| = R \left( 1 - \frac{vt_k \cos \vartheta}{R} \right),$$

ahol  $\cos \vartheta = \mathbf{R}\mathbf{v}/Rv$ , és  $\vartheta$  a  $\mathbf{v}$  és az  $\mathbf{R}$  vektorok közötti szög. Ebben a közelítésben tehát

$$t'_k = R/c + \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) t_k. \quad (13)$$

Ha azt írjuk, hogy

$$t'_{k+1} - t'_k = T' \quad \text{és} \quad v' = \frac{1}{T'}, \quad (14)$$

akkor (12), (13) és (14) segítségével az kapjuk, hogy

$$v' = \frac{v}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (15)$$

Azt látjuk tehát, hogy a  $v'$  frekvencia a  $\vartheta$  szögtől függ.

Megjegyezzük, hogy a (15) egyenlet aszimptotikusan helyes nagy távolságokra. Gyakorlatban azonban a sugárzást mindig olyan nagy távolságokban figyeljük meg, hogy a közelítő (15) és a pontos kifejezés közötti különbség elhanyagolható, még akkor is, ha az atom  $v \sim c$  sebességgel mozog.

## 2. A DOPPLER-EFFEKTUS MEGFIGYELÉSE

36. A fény *Doppler*-effektusát először GALITZIN és BELEPOLSKY figyelték meg 1895-ben.\* Összehasonlították egy monokromatikus fényforrás frekvenciáját azzal a frekvenciával, amely a forrás mozgó tükörképéből ered.

Két okból választották ezt a módszert. Egyrészt abban az időben kilátástalannak látszott egy fényforrást elég gyorsan mozgatni ahhoz, hogy megfigyelhető effektus lépjen fel. A tükör mozgatása sokkal egyszerűbben megoldható problémának tűnt. Azonkívül a tükörkép  $2v$  sebességgel mozog, ha a tükör csupán  $v$  sebességgel. Ez is növeli az effektust. A mozgó tükörképéből eredő frekvenciára

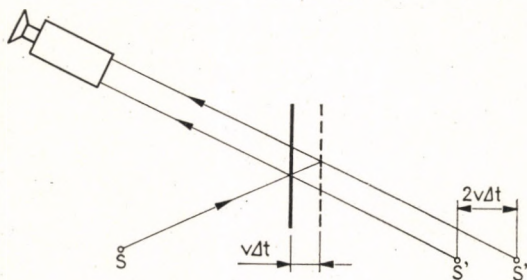
$$v' = \frac{v}{1 - 2v \cos \theta / c}$$

adódott a (15) egyenlettel összhangban. Az a tény viszont könnyen érthető, hogy a mozgó tükörkép frekvenciája pontosan úgy függ a sebességtől, mintha igazi forrás volna (9. ábra).

Ha tudniillik a tükör  $v$  sebességgel mozog a forrás felé, merőlegesen a hullámfelületekre, akkor az egymást követő hullámfelületek csökkenő távolságokban verődnek vissza. Egy hullámfelületnek a futási ideje a forrástól a tükörig és a tükörtől a megfigyelőig a tükör mozgása folytán egymást követő hullámfelületek esetében csökken, tehát a hullámfelületek sűrűsödve érik el a megfigyelőt, pontosan úgy, mintha  $2v$  sebességgel mozgó tükörképéből indultak volna el eredetileg.

A *Doppler*-effektust később sokan mások is megfigyelték. STARK\*\* mozgó atomokból kibocsátott fény *Doppler*-effektusát figyelte meg, és ő is igazolta a (15) képletet. Ma már a *Doppler*-effektust egy kísérletileg jól bizonyított effektusnak vehetjük, és a *Doppler*-effektust arra használjuk fel, hogy segítségével mozgó források sebességét megállapítsuk. Gyorsan mozgó atomok sebességét sokszor az általuk kibocsátott frekvenciák segítségével mérjük.

37. A csillagászatban a *Doppler*-effektus segítségével mérhetők kettős csillagok komponenseinek sebességei.



9. ábra. A mozgótükrrel megfigyelt *Doppler*-effektus sémája

\* Idézve: Grimsehl, Lehrbuch d. Phys., III. kötet 290. o.

\*\* J. STARK: Phys. Zs., 6, 893, 1905; Ann. d. Phys., 21, 401, 1906.

Ilyen dupla csillagok megfigyeléséből alá lehetett támasztani azt a tényt, hogy a fény terjedési sebessége független a forrás mozgásállapotától. Ha ugyanis feltételezzük, hogy a terjedési sebesség mégis függne a forrás sebességétől, akkor azt kell várnunk, hogy egy kettős csillag komponensei egymás körüli keringésük folyamán más és más sebességgel terjedő fényt bocsátanak ki felénk, aszerint, hogy a pályának melyik pontjából indul el a fény. Ez az effektus a dupla csillag komponenseinek megfigyelt pályáját erősen torzítaná.

A  $\beta$ -Auriga kettős csillag megfigyelése bizonyította, hogy a fény terjedési sebessége a forrás mozgásától nem függ.

## E) A MERŐLEGES DOPPLER-EFFEKTUS

### 1. KÍSÉRLETI TÉNYEK

**38.** IVES és STILLWELL\* 1938-ban végrehajtott kísérletei, ugyanúgy, miként OTTING kísérletei\*\* 1939-ben megmutatták, hogy gyorsan mozgó atomok frekvenciája a következő kifejezéssel adható meg:

$$\nu''(\vartheta) = \frac{\nu \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (16)$$

A  $\nu''$  frekvenciák eszerint valamivel kisebbek, mint a (15) formulában megadott  $\nu'$  frekvenciák, amelyeket egyszerű geometriai megfontolásokból vezetünk le. A (16) összefüggésből a  $\vartheta = \pi/2$  esetben következik, hogy

$$\nu''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \nu \sqrt{1 - v^2/c^2} = \nu^*. \quad (17)$$

A (17) formula az ún. *merőleges Doppler-effektust* írja le. A mozgás irányára merőlegesen kibocsátott sugárzás frekvenciája  $\nu^*$ -nak adódik, tehát valamivel kisebb, mint az a  $\nu$  frekvencia, amelyet az atomok nyugalmi állapotban bocsátanak ki. (16)-ot és (17)-et összevéve azt is írhatjuk, hogy

$$\nu''(\vartheta) = \frac{\nu^*}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (18)$$

A (18) összefüggés olyan frekvenciákat ad, amelyeket geometriai megfontolásokból egy  $v$  sebességgel mozgó

$$\nu^* = \nu \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

frekvenciával oszcilláló atomtól várunk.

\* H. E. IVES és G. R. STILLWELL: J. Opt. Soc., 28, 215, 1938.

\*\* G. OTTING: Phys. Zs., 40, 681, 1939.

Így tehát (18)-at fenomenológiailag úgy is értelmezhetjük, hogy feltételezzük, hogy a geometriai megfontolások érvényesek, és egy sugárzó atom frekvenciája  $\nu$ -ról  $\nu^*$ -ra csökken, ha az atomot  $v$  sebességre felgyorsítjuk.

39. Minthogy a szokásos *Doppler*-effektus, amelyet a (15) formula ír le, fényforrások tükörképével is megfigyelhető, felmerül az a kérdés, hogy vajon (15)-öt akkor is (16)-tal kell-e helyettesíteni, ha nem a fényforrás mozog, hanem egy mozgó tükörképből származó fényt vizsgálunk?

Erre a kérdésre nemmel válaszolhatunk a következő megfontolások alapján. Ha egy távoli csillagot tükrön keresztül figyelünk meg, és a tükröt kissé elforgatjuk, akkor a távoli csillag tükörképe óriási sebességgel fog mozogni. Ha a mozgó virtuális forrás fénykibocsátására a (16) és (17) egyenletek érvényben volnának, akkor a távoli csillag tükörképének színe erősen megváltozna a tükör mozgása folytán [könnyen megtörténhetik az is, hogy a tükörkép a fénysebességnél jóval nagyobb sebességgel kezd mozogni, és így a (16) és (17) formulák értelmüket veszítik].

Ilyen effektusok nyilvánvalóan nem lépnek fel, és ebből arra következtethetünk, hogy a (16) és (17) formulák nem alkalmazhatók mozgó tükörképre.

## 2. A MERŐLEGES DOPPLER-EFFEKTUS FIZIKAI ÉRTELMEZÉSE

40. A merőleges *Doppler*-effektus értelmezésénél arra a következtetésre kell jutnunk, hogy ha egy atomot nyugalmi állapotból  $v$  sebességre gyorsítunk fel, az atom belső mozgásának ritmusa egy  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  szorzóval csökken.

Minthogy ezzel a kérdéssel kapcsolatosan félreértések léteznek, e kijelentést részletesebben tárgyaljuk.

Hangsúlyozzuk, hogy a (15) összefüggés

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}$$

levezetése rendkívül egyszerű kinematikai megfontolások alapján történik, és hogy ezek a megfontolások minden körülmények között érvényesek maradnak. Ha egy forrás által különböző irányokban kibocsátott  $\nu''(\vartheta)$  frekvenciákat megfigyeljük, akkor ezen egyszerű kinematikai vagy mértani megfontolások alapján azt várjuk, hogy

$$\begin{aligned} \nu''(\vartheta) \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) &= \text{független } \vartheta\text{-tól} \\ &= \text{a mozgó atom frekvenciája} = \nu(v). \end{aligned} \quad (19)$$

A megfigyelt frekvenciákból a (19) egyenlet bal oldali kifejezésének numerikus értékét meg tudjuk állapítani különböző  $\vartheta$  értékekre. Ha most az ily módon meghatározott értékek valóban  $\vartheta$ -tól függetlennek adódnak, akkor kísérletileg bizonyítottuk, hogy a *Doppler*-effektus kinematikai elmélete helytálló.

Ezek után az ily módon empirikusan talált  $\nu(v)$ -t  $\nu^*$ -gal, az atom által kibocsátott frekvenciával azonosíthatjuk. Ha a kísérletet most különböző  $v$  értékekre folytatjuk le, akkor empirikusan megállapíthatjuk az atom frekvenciájának függését a sebességtől, és igazolhatjuk, hogy valóban

$$\nu(v) = \nu(0) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \nu^* .$$

**41.** Felmerülhetne az a gyanu, hogy a fent vázolt elemzés hibás, és hogy a  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktor valamilyen geometriai effektus által jön létre, amely elkerülte figyelmünket. Hogy ez a gyanú alaptalan, és a  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktor nem kinematikai eredetű, hanem a kibocsátott atom belső mozgása változásától származik, azt világosan lehet látni abból a tényből, hogy a mozgó tükörkép nem mutat merőleges *Doppler*-effektust.

A különbség egy atom tükörképe és egy igazi atom között az, hogy a tükörképnek belső szerkezete nincs, és ezért a látszólagos oszcillációk egyszerűen a tükröződött atom belső mozgását adják vissza. A belső struktúrával rendelkező valódi atom megváltozhat fizikailag, ha mozgásra kényszerítjük. A mozgó atomokon megfigyelt merőleges *Doppler*-effektus mutat arra, hogy egy atom belső frekvenciái valóban lelassulnak, ha az atomot mozgásba hozzuk.

Később számos jelenség elemzéséből látni fogjuk, hogy valóban egy zárt fizikai rendszer belső erőinek sajátosságai folytán a zárt rendszer belső ritmusa lelassul, ha az egész rendszert felgyorsítjuk.

### 3. A DOPPLER-EFFEKTUSSAL KAPCSOLATOS TOVÁBBI MEGGONDOLÁSOK

#### a) *A mozgó megfigyelő kérdése*

**42.** Egy *A* atom  $\nu$  frekvenciájú fényt bocsásson ki. Az atom és *B* megfigyelő mozogjanak egyenes vonal mentén, ellenkező irányban, úgy, hogy az atom  $v$  sebességgel balra, *B* pedig  $w$  sebességgel jobbra haladjon (*10. ábra*).

Az atom és a megfigyelő koordinátáit  $t$  időpontban úgy írhatjuk, hogy

$$x_A(t) = a - vt, \quad x_B(t) = b + wt . \quad (20)$$

Az atom azonos fázisú felületeket bocsát ki:

$$t_k = t_0 + kT, \quad T = \frac{1}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

időpontokban. A kibocsátás  $x_A(t_k)$  pontokban történik, és a kibocsátott hullámfelületek  $t'_k$  időpontokban érkeznek a megfigyelőhöz, és pedig úgy, hogy

$$x_A(t_k) + c(t'_k - t_k) = x_B(t'_k) . \quad (22)$$

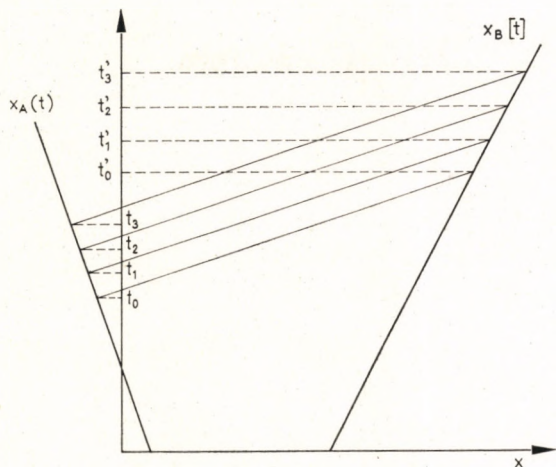


(20)-ból és (22)-ből következik

$$(c + v)t_k = (c - w)t'_k - l,$$

ahol  $l = b - a$ ; tehát (21) segítségével

$$t'_{k+1} - t'_k = \frac{c + v}{c - w} T.$$



10. ábra. Órák ritmusának összehasonlítása  $x-t$  diagramm segítségével

Legyen  $t'_{k+1} - t'_k = T' = 1/\nu'$ ; azt találjuk, hogy

$$\nu' = \frac{c - w}{c + v} \nu, \quad (23)$$

ahol  $\nu'$  az a frekvencia, amellyel a fázisfelületek  $B$  megfigyelőt elérik.

### b) Akusztikai és elektromágneses Doppler-effektus

43. Feltűnő, hogy a (23) kifejezés nem szimmetrikus  $v$ -re és  $w$ -re vonatkozóan. Tehát ha  $v$  és  $w$  sebességek szerepét felcseréljük, akkor  $\nu'$  frekvencia megváltozik. Vegyük azt az esetet, hogy  $v = 0$  és  $w = V$ , tehát azt az esetet, ahol a forrás nyugalomban van, és a megfigyelő  $V$  sebességgel távolodik. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{V}{c} \right)$$

Ha viszont azt az esetet vesszük, amelyben a forrás mozog, és a megfigyelő nyugalomban van, tehát ha  $v = V$  és  $w = 0$ , akkor azt találjuk, hogy

$$\nu' = \nu \left( 1 + \frac{V}{c} \right).$$

Az akusztikában jól ismert jelenség, hogy a *Doppler*-eltolódás nagysága más értéket vesz fel aszerint, hogy a forrás vagy a megfigyelő mozog. A (23) képlet, amely a sebességekben aszimmetrikus, az elektromágneses jelenségekre is érvényes. Ha a fényre vonatkozó *Doppler*-effektust a késleltetett potenciálok segítségével tárgyaljuk, akkor a (23) formulához jutunk, ami mutatja, hogy (23) a *Maxwell*-elméletből is következik.

44. Ha valóban végrehajtható kísérletek eredményeit elemezzük, akkor az elektromágnesség esetében a (23) formula aszimmetrikus volta a következő okból nem mutatkozik. Tekintsünk két *A* és *B* atomot, amelyek ellenkező irányban egyenes vonal mentén mozognak. Sebességük legyen  $-v$ , illetőleg  $w$ , úgy mint az előző esetben. Az így mozgó atomok frekvenciája a 40. pontban tett feltevés értelmében

$$\nu_A = \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \nu_B = \nu_0 \sqrt{1 - w^2/c^2}, \quad (24)$$

ahol  $\nu_0$  az a frekvencia, amellyel *A* és hasonlóan *B* is nyugalmi állapotban sugároz. A mozgó *A* atom  $\nu_A$  frekvenciával sugároz, és a fázisfelületek a szintén mozgó *B* atomra  $\nu'_A$  frekvenciával esnek. (23) értelmében azt várjuk, hogy

$$\nu'_A = \nu_A \cdot \frac{c - w}{c + v}. \quad (25)$$

Jelöljük a  $\nu'_A/\nu_B$  hányadost *Q*-val. (24) és (25) segítségével azt látjuk, hogy

$$Q = \frac{\nu'_A}{\nu_B} = \left( \frac{c - v}{c + v} \cdot \frac{c - w}{c + w} \right)^{1/2}. \quad (26)$$

Megjegyezzük, hogy *Q* olyan mennyiség, amelyet közvetlenül kísérletileg meg tudunk határozni, hiszen *Q* két frekvencia hányadosa, ti. a  $\nu'_A$  a *B*-re eső sugárzás, és  $\nu_B$  a *B* atom rezgési frekvenciájának hányadosa. E hányadost a *B*-vel együtt mozgó megfigyelő kísérletileg meg tudja állapítani.

A (26) kifejezés arra mutat, hogy a megfigyelhető *Q* érték  $v$  és  $w$ -ben szimmetrikus. Ily módon az elektromágneses hullámok esetében — az akusztikai esettől eltérően — a *valódi* kísérlet *Q* számértékének meghatározásához vezet, és így az eredmény  $v$  és  $w$ -ben szimmetrikus, tehát a megfigyelhető mennyiségekben nem lép fel különbség aszerint, hogy a forrás vagy a megfigyelő mozog.

Ha viszont *A* és *B* szerepét felcseréljük, a (26) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\nu'_A/\nu_B = \nu'_B/\nu_A = Q. \quad (27)$$

Mint ahogy már hangsúlyoztuk, *Q* mennyiséget közvetlenül kísérletileg tudjuk mérni. (27)-ből az következik, hogy meggondolásunk szerint *Q*-ra ugyanazt a számértéket kell kapnunk, függetlenül attól, hogy az *A* atom frekvenciáját a *B*-ből származó sugárzással vagy a *B* atom frekvenciáját a *A* atomból érkező sugárzással hasonlítjuk össze.

Azonban a  $\nu'_A/\nu_B$  és  $\nu'_B/\nu_A$  számértékeit két *különböző* kísérlet eredményeként kapjuk meg. Az tehát, hogy a (27) összefüggés fennáll-e vagy sem, kísérletileg eldönthető. Amennyiben kísérletileg a (27) összefüggés fennáll,

akkor e kísérlet alátámasztja a feltételezést, hogy a mozgó atomok frekvenciája valóban a (24) képletnek megfelelően az atomok mozgási sebességével változik. Így a (24) képlet helyességét ellenőrzés tárgyává tehetjük anélkül, hogy a  $v$  és  $w$  értékeit ismernénk.

A valóságban lefolytatott kísérletek, amelyeket ISAAK, CHAMPENEY és KHAN\* végeztek, a (27) képlet helyességét igazolják — amire egyébként még visszatérünk [II. fejezet, 85.].

45. Az a mennyiség, amelyet közvetlenül meg tudunk mérni, tehát

$$Q^2 = \frac{c - v}{c + v} \cdot \frac{c - w}{c + w}. \quad (28)$$

E mennyiség fizikai jelentését a következő módon tudjuk jobban megvilágítani. Vezessünk be egy  $V$  mennyiséget, úgy, hogy

$$Q^2 = \frac{c - V}{c + V}. \quad (29)$$

(28) és (29) összehasonlításából rövid számítás eredményeként azt kapjuk, hogy

$$V = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}. \quad (29a)$$

A  $V$  sebesség — kis korrekciótól eltekintve —  $v$  és  $w$  sebességek összege. A *Doppler*-effektus szempontjából a  $V$  mennyiség a forrás és a megfigyelő relatív mozgását jellemzi. Ezt a mennyiséget „relativisztikus” viszonylagos sebességnek nevezhetjük. E kérdésre később [VI. fejezet, A) pont] részletesebben kitérünk.

## F) NÉHÁNY RELATIVISZTIKUS JELENSÉG

46. A következőkben két effektust tárgyalunk. Ezek az effektusok nincsenek közvetlen összefüggésben a fény terjedési sebességével, a későbbiek során azonban fontosnak bizonyulnak.

### I. A BOMLÁSI IDŐ VÁLTOZÁSA A SEBESSÉGGEL

47. A 38. pontban említett megfigyelés alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy egy atom belső frekvenciái lelassulnak, ha az atomot mint egészet  $v$  sebességű mozgásra készítjük. Instabil elemi részecskékkal kapcsolatosan hasonló effektust figyeltek meg.

A kozmikus sugárzásban fellépő  $\mu$  mezonok megfigyelései azt mutatták,\*\* hogy egy  $\mu$  mezon elbomlik, és a bomlási félidő nyugalmi állapotban

$$\tau_0 = 2,1983 \pm 0,0008 \mu\text{s}.***$$

\* D. C. CHAMPENEY, G. R. ISAAK és A. M. KHAN: Phys. Letts, 7, 241, 1963.

\*\* Lásd: L. JÁNOSSY: Cosmic Rays, Clarendon Press, Oxford, 1950. II. kiadás.

\*\*\* Review of Particle Properties UCRL—8030.

A kozmikus sugárzásban található  $\mu$  mezonok a légkörünk magas rétegeiben a primer kozmikus sugárzás hatására keletkeznek. Ha feltételezzük, hogy ezek a  $\mu$  mezonok a fény sebességét megközelítő sebességgel haladnak, akkor a bomlási idő alatt megtett utat

$$l_0 \approx c\tau_0 \approx 650 \text{ m}$$

-nek kellene becsülni.

A kísérletek azonban azt mutatják, hogy a  $\mu$  mezonok sok kilométeres távolságot is haladnak, vagyis  $l_0$  távolságnál sokkal hosszabb utat is képesek bomlás nélkül megtenni. A  $\mu$  mezonok e viselkedését meg lehet magyarázni azzal a feltevéssel, hogy egy  $\mu$  mezon, amely  $v$  sebességgel mozog, egy

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (30)$$

élettartammal rendelkezik. A (30) formulát úgy is lehet értelmezni, hogy a  $\mu$  mezon belső ritmusa lelassul, ha a  $\mu$  mezon nagy sebességgel halad. Ezen lelassulás pontosan oly módon történik, mint egy atom belső oszcillációjának lelassulása, amelyet a merőleges *Doppler*-effektussal kapcsolatban tárgyaltunk. Rossi\* és mások kísérletei azt mutatták, hogy a (30) összefüggés valóban leírja a mozgó  $\mu$  mezonok bomlási idejét.

Figyelemre méltó az a tény, hogy a kozmikus sugárzási kísérletek a (30) formulát igazolják olyan nagy  $v \approx c$  sebességek esetében is, ahol a bomlási idő változása igen nagy, a  $\tau/\tau_0$  érték nagyságrendileg 10–100.

A teljesség kedvéért azonban azt is megjegyezzük, hogy ezekben a kísérletekben  $v$  értékét nem lehetett közvetlenül mérni. A kísérleti adatok elemzésében a sebesség és impulzus közötti összefüggést fel kellett használni. E kérdésre később visszatérünk.

A  $\mu$  mezonok bomlásának megfigyelésével sikerült a (30) képlet helyességét ellenőrizni. Azóta ezt más instabil részecskék — többek között a mesterségesen gyorsított részecskék — bomlásának megfigyelése is alátámasztotta.

## 2. A TÖMEG VÁLTOZÁSA A SEBESSÉGGEL

**43.** Egy másik jelenség, amely későbbi megfontolásokban fontos szerepet játszik, a tömeg változása a sebességgel.

Elméleti megfontolások alapján ABRAHAM\*\* arra a következtetésre jutott, hogy az elektron tömege a mozgási sebességgel növekszik. A tömegnövekedést az elektron saját magára gyakorolt elektromágneses hatására alapozta. ABRAHAM elméletét LORENTZ\*\*\* módosította, és egy, az ABRAHAM által adott formulától eltérő tömegnövekedési formulát adott meg.

KAUFMANN\*\*\*\* kísérletei 1901-ben bizonyították, hogy az elektron

\* B. ROSSI és D. B. HALL: Phys. Rev., 59., 223, 1941; B. ROSSI et al.; Phys. Rev., 61, 675, 1942.

\*\* M. ABRAHAM: Ann. d. Phys., 10, 105, 1903. Lásd még A. SOMMERFELD: Atombau und Spektrallinien, 1950. 313. o.

\*\*\* H. A. LORENTZ: The Theory of Electrons, Leipzig, 1909.

\*\*\*\* W. KAUFMANN: Ann. d. Phys., 19, 487, 1906.

tömege valóban nő a sebességgel, a kísérletek pontossága azonban nem volt elég ahhoz, hogy az *Abraham*- és *Lorentz*-féle formulák közötti döntést lehetővé tették volna.

49. Elméleti megfontolások alapján kezdettől fogva feltételezték, hogy a *Lorentz*-féle formula,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

és nem az *Abraham*-féle formula — amelyet explicite nem adunk meg — írja le az elektron valódi tömegnövekedését. Nagyszámú kísérletet végeztek, amelyek célkitűzése a *Lorentz*-féle formula helyességének bizonyítása volt. Sok kísérleti eredményt úgy értékelték, hogy a *Lorentz*-féle formula javára döntötte volna el a kérdést. Amint azonban a részletes elemzés mutatta,\* e kísérletek nem voltak elég pontosak a kérdés eldöntésére. Az első kísérlet, amelyből valóban arra lehetett következtetni, hogy a tömegnövekedést a *Lorentz*-féle és nem az *Abraham*-féle formula írja le helyesen, ROGERS, és REYNOLDS, ROGERSTÓL\*\* származik. A kísérleteket később STAUB\*\*\* lényegesen pontosította.

50. ZREILOV, TAPKIN és FARAGÓ\*\*\*\* kísérleteket végeztek, amelyek során a fénysebesség 83%-ával haladó protonok tömegét mérték. A protonok sebességét Čerenkov-sugárzás segítségével állapították meg, és azt találták, hogy a tömeg értékét a *Lorentz*-formula tizedszázalékosnál kisebb hibával adja meg.

Az összes eredményeket összevetve, fel kell tételeznünk, hogy a *Lorentz*-formula elektronok és protonok esetében helytálló, és feltételezhetjük, hogy a formula másfajta részecskék esetében is érvényes.

### 3. ELVI MEGJEGYZÉS A TÖMEGVÁLTOZÁSI FORMULA MÉRÉSÉNEK MÓDSZERÉRŐL

51. A kísérletek, amelyek a tömegváltozási formula ellenőrzésével foglalkoznak, olyan kísérletekre épülnek, ahol elektromos töltéssel rendelkező gyorsan mozgó részecskéket elektromos és mágneses mezők segítségével eltérítünk. A pályák elemzése a sebességre és gyorsulásra ad felvilágosítást. Ahhoz azonban, hogy a pályákból a tömegre következtethessünk, dinamikai megfontolásokat is fel kell használni. Az eltérítési kísérletek elemzésénél fel kell tételezni, hogy az  $\mathbf{F}$  erő, amely az  $e$  töltéssel és  $\mathbf{v}$  sebességgel rendelkező részecskére hat, a *Lorentz*-formulának megfelelően

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right),$$

\* P. FARAGÓ és L. JÁNOSSY: Nuovo Cim., 5, 1411, 1957.

\*\* ROGERS, REYNOLDS and ROGERS: Phys. Rev., 57, 379, 1940.

\*\*\* H. H. STAUB és munkatársai: Helv. Phys. Acta, 36, 981, 1963.

\*\*\*\* V. P. ZREILOV, A. A. TAPKIN és P. FARAGÓ: Soviet Phys., JETP 7, 384, 1958.

ahol  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  az elektromos és mágneses térerősséget jelenti. Feltételezzük továbbá, hogy az erő impulzusváltozást hoz létre, tehát

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (31)$$

Feltételezve, hogy

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v},$$

ahol

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

(31) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m_0 \dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0 (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) \mathbf{v}/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}};$$

vagy

$$\mathbf{F} = m_l \dot{\mathbf{v}}_1 + m_t \dot{\mathbf{v}}_2,$$

ahol

$$m_l = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad m_t = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

és

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})\mathbf{v}/v^2, \quad \dot{\mathbf{v}}_2 = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_1,$$

ahol  $\dot{\mathbf{v}}_1$  és  $\dot{\mathbf{v}}_2$  a gyorsulás komponensei a sebességgel párhuzamos, illetve a sebességre merőleges irányban. A fenti formulákból azt is látjuk, hogy ha a tömeget mint az erő és a gyorsulás hányadosát definiáljuk, a tömeg számértéke a sebesség és erő közötti szögtől is függ. Az  $m_l$  tömeg abban a szélső esetben jelentkezik, mikor a gyorsulás a sebesség irányában történik és  $m_t$  adódik, amikor a gyorsulás a sebességre merőleges.

**52.** A laboratóriumban végrehajtott kísérletek több módon történtek. ROGERS és társai kísérleteik során, hasonlóképpen STAUB és munkatársai is kísérletükben a részecskéket körpályákra kényszerítették. Ahhoz, hogy egy részecskét  $v$  sebességgel egy  $R$  sugarú körpályájára kényszerítsünk, egy

$$F = mv^2/R$$

erőre van szükség. Az elektromos mező esetében  $F = Ee$ , egy homogén  $\mathbf{B}$  mágneses térerősség esetében pedig

$$F = eBv/c.$$

Az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  térerősséget úgy szabályozhatjuk, hogy az elektromos, illetve mágneses mezőben haladó részecskék ugyanolyan sugarú körpályára kényszerülnek. A mozgásegyenletekből az következik, hogy

$$eE = eBv/c = mv^2/R. \quad (32)$$

(32)-ből mind  $m$ , mind  $v$  értékét megállapíthatjuk:

$$v = cE/B, \quad m = eRB^2/c^2E.$$

Ha a különböző sebességű részecskék  $m$  értékét mérjük, megkapjuk  $m$  függését a sebességtől.

ZREILOV és munkatársai kísérletében a protonok sebességét Čerenkov-sugárzás segítségével állapították meg, és a tömeg értékét a mágneses eltérítésből határozták meg. E kísérletek a transzverzális tömeg sebességfüggését igazolják.

**53.** Megjegyezzük, hogy a fenti kísérletek valójában az  $e/m$  arányt állapítják meg. A kísérletek elemzésénél fel kell tételezni, hogy  $e$  nem változik a sebességgel. E kérdésre a **280.** pontban visszatérünk.

Megjegyezzük azonban, hogy a feltételezés, hogy  $e$  nem változik a sebességgel, részben definíció kérdése, de másrészt kísérletileg ellenőrizhető tény is tartalmaz. Anélkül, hogy a részletekre törekednénk, megemlítjük, hogy a Stern—Gerlach-kísérletben mágneses momentummal rendelkező, semleges atomok egy erősen inhomogén mágneses mezőben haladnak keresztül. Mint-hogy az atomok erős mágneses mezőben mozognak, fel kell tételezni, hogy egyenként nagyon pontosan semlegesek, mert másképpen a Lorentz-erő folytán az atomsugár szétfolyna. Minthogy a Stern—Gerlach-kísérletnél sikerült a sugarat az erős mágneses mezőben pontosan fókuszálni, arra következtetünk, hogy az atommagok töltése az elektronok töltését pontosan semlegesíti annak ellenére, hogy az elektronok az atomokon belül mozognak. Ha a töltés a sebesség függvénye volna, akkor a semlegesítés nem lenne tökéletes.





## AZ ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK HORDOZÓJÁVAL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK

### A) AZ ÉTER KÉRDÉSE

**54.** MAXWELL elméletéből következik, hogy a fény — de általában minden elektromágneses hatás —  $c = c'$  sebességgel halad, ahol  $c'$  a kritikus sebesség. A *Maxwell*-egyenleteket részletesebben a VIII. fejezetben fogjuk tárgyalni, és meg fogjuk mutatni, hogy e következtetés a *Maxwell*-elmélet lényeges részét teszi ki.

Nem kerülhetjük ki a kérdést, hogy *mihez képest* haladnak az elektromágneses hullámok  $c$  sebességgel?

Erre a kérdésre egyszerű válasz lenne, ha azt állítanánk, hogy a fény  $c$  sebességgel halad a kibocsátó forráshoz képest. Egy ilyen feltételezés azonban a jól bevált *Maxwell*-elmélettel ellentétben van, és azonkívül kísérletileg közvetlenül is cáfolható. E feltevés — bár elvethető — mégis szerepel az irodalomban, és *ballisztikus elméletnek* nevezték el.

Egy elektromágneses hullám (vagy elektromágneses zavar), ha egyszer elhagyta forrását, akkor  $c$  sebességgel halad tovább, függetlenül attól, hogyan jött létre. Az egyetlen értelmes magyarázata ennek a ténynek, ha feltételezzük, hogy a hullám vagy zavar a hordozójához képest mozog  $c$  sebességgel. A hordozót — ha MAXWELL terminológiáját használjuk — *éternek* nevezhetjük. A következőkben — MAXWELL elképzeléseivel élve — feltételezzük, hogy a fény az éterhez képest halad  $c$  sebességgel.

**55.** A félreértések elkerülése érdekében hangsúlyozzuk, hogy itt az éterről kizárólag mint elektromágneses és esetleg másfajta hullámok — pl. az elemi részecskék anyaghullámai — *hordozójáról* beszélünk.

A múlt században néhány mechanikai modellt javasoltak, mely hivatott volt az éter tulajdonságait mesterséges módon magyarázni. Ilyen modelleknek nincs semmi értelmük, hiszen semmiféle ok nincs arra, hogy feltételezzük, hogy az éter olyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint egy szilárd test, amely atomokból és molekulákból van felépítve, — ellenkezőleg, éppen azt kell feltételezni, hogy a szilárd testek, atomok, molekulák stb. tulajdonságai végeredményben az éter tulajdonságaiból származtathatók.

**56.** Ezzel a kérdéssel különben MAXWELL is tisztában volt, és azok a mechanikai modellek, amelyeket ő adott az éterre, illusztrációként szerepeltek, hogy kortársai részére érthetővé tegye a komplikált jelenségeket, anélkül azonban, hogy ő komolyan vette volna e modellek realitását. Idézünk MAXWELL műveiből egy erre vonatkozó érdekes fejtegetést.

„865. E sok kiváló tudós felfogásában előítélet vagy a priori ellenkezés nyilvánul meg azon hipotézis ellen, amely szerint létezik egy olyan közeg, amelyben a fény- és hőszugárzás, valamint a távolba ható elektromos hatások lefolyanak. Valóban igaz az, hogy egy időben azok, akik a fizikai jelenségek okain töprengtek, azt a szokást fejlesztették ki, hogy minden egyes távolhatást egy különleges éterfolyadékkal magyaráztak, amelynek szerepe és feladata e különleges hatások előidézése. A teret három- és négyszeresen is kitöltötték mindenféle éterekkel, amelyeknek tulajdonságai csupán arra szolgáltak, hogy 'mentsék a látszatot', és ezért az egyszerűbben gondolkodó kutatók inkább hajlandók voltak elismerni NEWTON vonzástörvényét — mint távolba való hatást —, de még a Cotes-féle dogmát is, amely szerint a távolban való hatás az anyag eredeti tulajdonsága, valamint azt is, hogy e ténynél érthetőbb magyarázat nem is létezhet. Emiatt a fény hullámelmélete nagy ellenkezéssel találkozott, mely nem az ellen irányult, hogy az elmélet nem tudta a jelenségeket megmagyarázni, hanem azon felfogás ellen, amely szerint létezik egy közeg, amelyben a fény terjed.

866. Láttuk, hogy az elektrodinamikai hatásokat leíró matematikai kifejezések, GAUSS felfogásában, arra a meggyőződésre vezettek, hogy az elektromágneses hatások időben való terjedésének elmélete valóban az elektrodinamika talpköve lenne. Mármost képtelenek vagyunk az időben való terjedést másként elképzelni, mint egy anyagi szubsztanciának térben történő repülését vagy mint egy mozgás- vagy feszültségállapot terjedést a térben már létező közegben. . . . Tehát mindezek az elméletek olyan közeg felfogásához vezetnek, amelyben a továbbterjedés történik, és ha egy ilyen hipotézist elfogadunk, úgy gondolom, ezen hipotézisnek kimagasló helyet kell elfoglalnia vizsgálatainkban, és igyekeznünk kell e közeg minden részletre kiterjedő modelljét felállítani, és ez volt minden igyekezetem e tanulmány során.”\* (Saját fordításom — J. L.)

\* Idézet J. C. MAXWELL: A Treatise on Electricity and Magnetism Clarendon Press, Oxford, 1881. II. kötet. 448—449. o. könyvből. A pontosság kedvéért megadjuk az eredeti szöveget is:

„865. There appears to be, in the minds of these eminent men, some prejudice, or a priori objection, against the hypothesis of a medium in which the phenomena of radiation of light and heat and the electric actions at a distance take place. It is true that at one time those who speculated as to the causes of physical phenomena were in the habit of accounting for each kind of action at a distance by means of a special aethereal fluid, whose function and property it was to produce these actions. They filled all space three and four times over with aethers of different kinds, the properties of which were invented merely to 'save appearances', so that more rational enquirers were willing rather to accept not only Newton's definite law of attraction at a distance, but even the dogma of Cotes, that action at a distance is one of the primary properties of matter, and that no explanation can be more intelligible than this fact. Hence the undulatory theory of light has met with much opposition, directed not against its failure to explain the phenomena, but against its assumption of the existence of a medium in which light is propagated

866. We have seen that the mathematical expressions for electrodynamic action led, in the mind of Gauss, to the conviction that a theory of the propagation of electric action in time would be found to be the very keystone of electrodynamics. Now we are unable to conceive of propagation in time, except either as the flight of a material substance through space, or as the propagation of a condition of motion or stress in a medium already existing in space. . . . Hence all these theories lead to the conception of a medium in which the propagation takes place, and if we admit this medium as an

56. MAXWELL tehát feltételezte, hogy az elektromágneses hullámok az éter állapotában fellépő zavarok, és e perturbációk úgy terjednek — távoli hasonlaltal élve —, mint a hanghullámok a levegőben. Mi az étert körülbelül úgy képzeljük el, mint ahogy ezt EINSTEIN kifejtette egy nem nagyon közismert cikkében.\*

„Az általános relativitáselmélet étere abban különbözik a klasszikus mechanika, illetve a speciális relativitáselmélet éterétől, hogy az előbbi nem 'abszolút', hanem a helytől függő tulajdonságait a ponderábilis anyag határozza meg. . . . Az, hogy az általános relativitáselméletben nem léteznek kitüntetett tér—idő koordinátarendszerek, amelyek a metrikával egyértelmű összefüggésben állnának, nem az elmélet matematikai formájára, hanem inkább az elmélet fizikai tartalmára jellemző. . . .

De még ha ezekből a lehetőségekből valódi elméletek érnének be, akkor sem volna lehetséges az étert, vagyis a fizikai tulajdonságokkal ellátott kontinuum fogalmát az elméleti fizikában mellőzni; ez így van, minthogy az általános relativitáselmélet, amelynek alap gondolataihoz előreláthatóan a fizikusok mindig ragaszkodni fognak, kizárja a közvetlen távolhatást: minden közelhatásra felépülő elmélet azonban feltételez mezőket és így az 'éter' létezését is.”

57. EINSTEINnek az éterrel kapcsolatos polémiája azon állítás ellen szól, hogy „az éter abszolút nyugalomban van”. Így EINSTEIN tagadja egy  $K_0$  vonatkoztatási rendszer létezését, amely abszolút nyugalomban van.

Véleményünk szerint az a kérdés, hogy elektromágneses hullámok rendelkeznek-e hordozóval, független „az abszolút nyugalom” kérdésétől. Az „abszolút nyugalom” fogalma metafizikus fogalom, amelyet feltétlenül el kell vetni. Ez azonban nem érinti az éternek mint az elektromágneses jelenségek hordozójának szerepét.

EINSTEINéhez hasonló terminológiát használva  $K_0$ -lal jelölhetünk egy koordináta-rendszert, amelyről feltételezzük, hogy az éterhez, tehát az elektromágneses hullámok hordozójához képest nyugalomban van.

---

hypothesis, I think it ought to occupy a prominent place in our investigations, and that we ought to endeavour to construct a mental representation of all the details of its action, and this has been my constant aim in this treatise.”

\* A. EINSTEIN: Über den Aether. Verh. d. Schweizer. Nat. Ges., 105, II. rész, 85—93. o. 1924. Az eredeti szöveg a következő:

„Der Aether der allgemeinen Relativitätstheorie unterscheidet sich also von demjenigen der klassischen Mechanik bezw. der speziellen Relativitätstheorie dadurch, daß er nicht ‚absolut‘, sondern in seinen örtlich variablen Eigenschaften durch die ponderable Materie bestimmt ist . . . Daß es in der allgemeinen Relativitätstheorie keine bevorzugten, mit der Metrik eindeutig verknüpften raumzeitlichen Koordinaten gibt, ist mehr für die mathematische Form dieser Theorie als für ihren physikalischen Gehalt charakteristisch . . .

Aber selbst wenn diese Möglichkeiten zu wirklichen Theorien heranreifen, werden wir des Aether, d.h. des mit physikalischen Eigenschaften ausgestatteten Kontinuums, in der theoretischen Physik nicht entbehren können; denn die allgemeine Relativitätstheorie, an deren grundsätzlichen Gesichtspunkten die Physiker wohl stets festhalten werden, schließt eine unvermittelte Fernwirkung aus: jede Nahwirkungs-Theorie aber setzt kontinuierliche Felder voraus, also auch die Existenz eines 'Aethers'.”

Mint ahogyan hangsúlyoztuk, nem tételezzük fel, hogy a  $K_0$  „abszolút nyugalomban” van. Az a kérdés, hogy vajon az éter, vagyis az elektromágneses hullámok hordozója nyugalomban vagy „abszolút nyugalomban” van, olyan feltevés, amelynek semmi kapcsolata sincs az általunk tárgyalt problémákkal.

További meggondolásaink szempontjából az sem fontos, hogy vajon az éternek távoli részei egymáshoz képest mozognak-e vagy sem. Nagyon kézenfekvő feltételezni, hogy a kozmikus skálán az éter különböző részei egymáshoz képest áramlanak. Így a  $K_0$  rendszer, amelyről szó esett, csak lokális jelentőséggel bír.  $K_0$ -ról fel lehet tételezni, hogy origójának bizonyos környezete az éterrel együtt mozog. E gondolat kvantitatív fogalmazását a könyv utolsó fejezetében fogjuk részletesebben kifejteni.

## B) KÍSÉRLETI VIZSGÁLATOK

**58.** Felvetődik a kérdés: lehetséges-e az éter mozgásállapotát egy adott tartományban kísérletileg megállapítani. Így felmerül a kérdés, hogy vajon a Földnek az éterhez viszonyított mozgását meg lehet-e állapítani? Ahhoz, hogy erre a kérdésre választ adhassunk, két különböző jelenséget kell vizsgálni, egyrészt a Föld tengely körüli forgását, másrészt a translációs mozgását.

### 1. A FÖLD TENGEYFORGÁSA

**59.** Az a tény, hogy a Föld tengelye körül forog, a csillagoknak az égbolton végzett látszólagos mozgásából állapítható meg. De a forgás, a Földön végzett mechanikai kísérletek segítségével is megállapítható; így a *Foucault*-inga segítségével vagy a pörgettyűmozgás megfigyelésével. Figyelemre méltó az a tény, hogy a Föld tengelyforgása optikai kísérletek segítségével is megfigyelhető. Gondolunk itt a *Sagnac*-féle kísérletekre (1913) és ennek kibővített formájára, a *MICHELSON* és *GALE* által 1925-ben végzett kísérletre.

Meg kell jegyezni, ha a Föld tengely körüli forgásáról beszélünk, akkor az elektromágneses hullámok hordozójához viszonyított forgására, tehát az éterhez viszonyított forgásra gondolunk.

### 2. A SAGNAC-FÉLE KÍSÉRLET\*

**60.** Mielőtt a valódi kísérleti eljárást leírnánk, ennek sematikus formáját tárgyaljuk, amely alkalmas a lényeg megvilágítására.

Vegyünk egy  $R$  sugarú körlapot, melynek peremén úgy helyezünk el egy tükörsorozatot, hogy egy fényjelet, amely a kerület  $A$  pontjából indul el, a

\* G. SAGNAC: *Compt. Rend.*, 157, 708, 1913; *J. de Phys.* 5, 177, 1914. továbbá B. POGÁNY: *Ann. d. Phys.*, 80, 217, 1926; 85, 244, 1928; *Naturwiss.*, 15, 177, 1927.

tükrök körül vezetik a lap peremén. Ha a körlap nyugalomban van, akkor a  $t = 0$  pillanatban az  $A$  pontból kiinduló fényjel az  $A$  pontba a

$$T = 2\pi R/c$$

időpontban tér vissza. Ha viszont a körlap tengelye körül  $\omega$  szögsebességgel forog, és a fényjel a forgás mozgásirányába mozog, akkor a  $T = 2\pi R/c$  időpillanatban nem a körlap  $A$  pontjába, hanem egy  $A_0$  pontba ér.  $A_0$  ott fekszik, ahol  $A$  a  $t = 0$  pillanatban volt. A fényjel a továbbmozgó  $A$  pontot a  $T^+$  időpontban fogja utolérni.  $T^+$ -ra fennáll, hogy

$$c T^+ = 2\pi R + R \omega T^+,$$

tehát

$$T^+ = \frac{2\pi R}{c - R \omega} > T.$$

$T^+$  értékét úgy is meghatározhattuk volna, hogy feltételezzük, hogy a fényjel a körlap peremén egy

$$c^+ = c - R \omega \quad (1)$$

a peremhez viszonyított sebességgel haladt. Hangsúlyozzuk azonban, hogy  $T^+$  megállapításánál semmiféle feltételezést nem tettünk arra vonatkozóan, hogy mi a fényjelnek a lap pereméhez viszonyított sebessége. Pusztán azt mutattuk ki, mennyi az az idő, amely alatt a fényjel az előre elszaladó  $A$  pontot utoléri.

Ha a fényjel a forgómozgással ellentétes irányban halad, akkor az  $A$  pontot hamarabb éri el, minthogy az  $A$  pont elébe fut. Ebben az esetben azt találjuk, hogy

$$T^- = \frac{2\pi R}{c + R \omega} < T,$$

ahol  $T^-$  az az idő, amely alatt az  $A$  pontból induló fény visszatér az  $A$  pontba, ha a forgással ellentétes irányban halad. A fenti eredményt úgy is lehetne értelmezni, hogy ebben az esetben a fénynek a körpálya pereméhez viszonyított sebessége

$$c^- = c + R \omega. \quad (2)$$

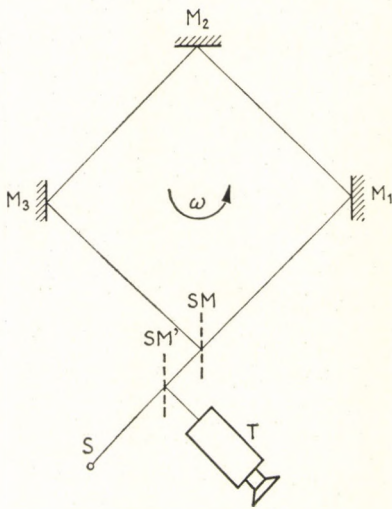
Azonban ugyanúgy, mint az (1) formula esetében, hangsúlyozzuk, hogy a (2) feltételezést nem használtuk fel ahhoz, hogy a  $T^-$  számértéket megállapítsuk.

A két ellenkező irányban szükséges körülfutási idők különbsége tehát

$$T^+ - T^- = 2\pi R \left( \frac{1}{c - R \omega} - \frac{1}{c + R \omega} \right) = \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2 - R^2 \omega^2} \approx \frac{4S \omega}{c^2}$$

ahol  $S = \pi R^2$  a pálya által körülzárt terület.

**61.** SAGNAC kísérleti berendezését sematikusan a 11. ábrán mutatjuk be. Egy forgatható lapra fényforrás, tükrök és távcső van felszerelve. A sugármenet  $S$  pontból indul, és egy féligáteresztő tükör,  $SM$  a sugármenetet kettéválasztja. A sugármenet komponenseit négyzet alakú útra tereljük



11. ábra. A Sagnac-kísérlet sémája

$M_1, M_2, M_3$  tükrök segítségével. Miután a sugár két komponense ellenkező irányban futotta körül a négyzetpályát, újra az  $SM$  féligáteresztő tükörré esnek, és a sugármenetek egy része az  $S$  fényforrás irányába terelődik. Egy második féligáteresztő tükör,  $SM'$  a visszatérő fénysugarakat a  $T$  távcsőbe irányítja. E távcső látóterében interferenciakép jön létre, miként a Michelson interferométer esetében (lásd 30. pont). Az interferenciaképből meg tudjuk állapítani két sugármenet futási idejének különbségét, tehát meg tudjuk állapítani, milyen időkülönbség lép fel, ha az  $SM, M_1, M_2, M_3$  utat a fénysugarak ellenkező irányban teszik meg.

A kísérletben használt  $\omega$  szögsebesség jóval nagyobb, mint a Föld forgásának szögsebessége, így a Föld forgásából származó hatás elhanyagolható.

A Földhöz képest forgásmentes állapotba beállított kísérleti berendezést forgásba hozták, és azt találták, hogy a forgás által létrejött útkülönbség

$$\Delta l = \frac{4S \omega}{c},$$

ahol  $S$  a fénysugarak által körülfutott terület.

A megfigyelt interferencia-eltolódás pontosan megfelel a várakozásnak.

### 3. A MICHELSON – GALE-KISÉRLET\*

**62.** A Sagnac-féle kísérletet MICHELSON és GALE továbbfejlesztették, és így sikerült a Föld tengelyforgását a Sagnac-féle interferometrikus berendezéssel megfigyelni. A Föld forgásának szögsebessége kb.  $0,8 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . A tükrök közötti távolságot kilométeres nagyságrendben választották, és a várt effektus értéke kb.

$$\Delta l = 10\,000 \text{ \AA}$$

volt. Ennek megfelelően az interferenciagyűrűk kb. a gyűrűk közötti távolságok egynegyedével tolódtak el.

\* A. A. MICHELSON és H. G. GALE: *Astrophys. J.*, 61, 140, 1925.

Megjegyezzük, hogy a kísérletet a forgó Földön végezték, és lenetetlen a Föld forgását „megállítani” ahhoz, hogy a berendezést beállítsuk. A szükséges beállítás mégis lehetővé válik, ha felhasználjuk azt a tényt, hogy az effektus az  $S$  területtel növekszik.

Ha egy oda-vissza futó sugarat veszünk, akkor az oda-vissza menő sugár által körülzárt terület nulla kiterjedésű, és a forgás hatása ebben az esetben eltűnik. Elvben tehát a négyzet oldalait oda-vissza futó sugarakkal lehetne beállítani, és miután ezek be vannak állítva, a négyzetet körülfutó sugármenetre áttérni.

MICHELSON és GALE kísérleteik során két sugármenetet használtak. Az egyik a négyzet területét futotta körül, a másik pedig egy keskenyebb téglalapot. A két területet körülfutó sugarak kétféle interferenciaképet hoztak létre, és az interferenciaképek különbségéből következtettek a Föld szögsebességének értékére. Mérési hibán belül a várt eredményt kapták.

### C) AZ ÉTERHEZ VISZONYÍTOTT TRANZLÁCIÓS MOZGÁS

**63.** A forgómozgással ellentétben az éterhez viszonyított *transzlációs* mozgás sebességét mechanikai kísérletekkel nem lehet megfigyelni. Azt a tényt, hogy egy adott rendszer tranzlatorikus mozgását nem lehet megállapítani, már GALILEI is felismerte.

Idézzük egy érdekes részletet GALILEI „Dialogo”<sup>\*</sup> című művéből:

„*Salviati: 'A pillanat alkalmasnak látszik arra, hogy annak kimutatása során, hogy a felsorolt kísérletek nem érnek semmit, feltegyem a koronát azzal, hogy megmutatom, miképpen lehet azokat a lehető legkisebb fáradsággal kipróbálni. Zárkózzál be egy barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal telt vízesedényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödört, melyből a víz egy alája helyezett szűk nyakú edénybe csöpög. Most figyeld meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szobában minden irányba, míg a hajó áll. Meqlátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságokról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz, minden irányban ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely támadhasson abban, hogy az álló hajón mindez így történik. Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni — ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó —, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó vagy sem. Ha ugrasz, ugyanakkora távolságra fogsz jutni, mint az előbb, és bármily gyorsan mozog a hajó, nem tudsz nagyobb ugrani hátrafelé, mint előre: pedig az alattad levő hajópaddó az alatt az idő alatt, míg a levegőben vagy, ugrásoddal ellenkező irányban elmozdul előre. Ha*

\* Párbeszédék, Európa Könyvkiadó, 1959. ford. M. ZEMPLÉN JOLÁN.

társad felé egy tárgyat hajítasz, nem kell nagyobb erővel hajítanod, ha barátod a hajó elején tartózkodik, mint akkor, amikor hátul van. A cseppek épp úgy bele fognak hullani az alsó edénybe, mint előbb, egyetlenegy sem fog az edény mögé esni, pedig az, míg a csepp a levegőben van, több hüvelyknyi utat tesz meg. A halaknak sem kell az edényben nagyobb erőt kifejteni, hogy az edény elejére úszhassanak, és ugyanolyan könnyedséggel fognak a táplálék után menni, ha az az edény bármely részén is van. Végül a szünyogok és a lepkék is különbség nélkül fognak bármely irányba repkedni. Sohasem fog előfordulni, hogy a hátsó falhoz nyomódnak, mintegy elfáradva a gyorsan haladó hajó követésétől, pedig míg a levegőben tartózkodnak, el vannak választva tőle. Ha egy szem tömjént elégetünk, egy kevés füst képződik, mely felszáll a magasba és kis felhő gyanánt lebeg ott, és nem mozdul el sem az egyik, sem a másik irányba. A jelenségek ez egyformaságának az az oka, hogy a hajó mozgásában minden rajta levő tárgy részt vesz, beleértve a levegőt is.”

Felmerülhet az a gondolat, hogy optikai kísérletekkel meg lehetne figyelni a Föld translációs mozgását. Bár ilyen lehetőség nem áll fenn, mégis szükség van a kérdés részletes elemzésére. FIZEAU és FOUCAULT kísérletei a fény terjedési sebességét a Földhöz képest állapították meg, hiszen a kísérleti berendezések a Földhöz voltak rögzítve. Felmerül tehát a kérdés, hogy a Föld mozgása az éterhez képest e kísérletek eredményét befolyásolhatta-e?

Hogy a kérdés nem triviális, ezt a következőkben illusztráljuk.

64. Képzeljünk el egy fényjelet, amely  $t = 0$  pillanatban  $A_0$  pontból indul ki, és legyen  $A_0$  az éterhez képest nyugalomban. A jel egy, az éterhez képest szintén nyugalomban levő  $B_0$  pontot, amely  $l$  távolságban fekszik  $A_0$  ponttól,

$$T = l/c$$

időpontban ér el. Képzeljünk el továbbá két,  $A$  és  $B$  pontot, melyek mindegyike  $v$  sebességgel mozog az  $A_0 \rightarrow B_0$  irányában, úgy, hogy  $t = 0$  pillanatban  $A$   $A_0$ -lal és  $B$   $B_0$ -lal esik össze. Ebben az esetben a  $T^+$  idő — mely alatt az  $A$  pontból kiinduló fénysugár  $B$  pontot eléri — különbözik a  $T$  időtől. Vegyük úgy, hogy az  $A$  és  $B$  pontok koordináta-rendszerünk  $x$  tengelye mentén haladnak, akkor koordinátájukat  $t$  függvényében úgy írhatjuk fel, hogy

$$x_A(t) = vt, \quad x_B(t) = vt + l, \quad v > 0. \quad (3)$$

A fényjel, amely  $t = 0$  időpontban  $A$ -ból elindul,  $t$  időben

$$x_s(t) = ct \quad (4)$$

koordinátával fog rendelkezni.

A (4) formula magába rejti, hogy a fény terjedési sebessége független a forrás mozgásállapotától, tehát (4) a fényjel terjedését függetlenül írja le attól, hogy a fényjel  $A$ -ból vagy  $A_0$ -ból származik. (Például arra gondolhatunk, hogy amikor  $A$   $A_0$  mellett elhalad, egy szikra pattan át  $A$  és  $A_0$  között, és e szikra fénye képezi a fényjelet.) A jel a  $t = T = l/c$  időpontban éri el a  $B_0$  pontot. De ebben a pillanatban még nem érte el a  $B$  pontot, hiszen



a  $B$   $B_0$ -tól távolodott a  $T$  idő folyamán. A fényjel a  $B$  pontot egy  $t = T^+ > T$  időpontban éri el, és  $T^+$  a következő feltételt elégíti ki:

$$x_s(T^+) = x_B(T^+) . \quad (5)$$

Ha az (5) képletbe (3)-at és (4)-et beírjuk, azt találjuk, hogy

$$T^+ = l/(c - v) . \quad (6)$$

Ha viszont egy olyan fényjelet veszünk, amelyik  $B$ -ből  $A$  felé halad, akkor hasonló megfontolások alapján azt találjuk, hogy a  $T^-$  futási idő  $B$ -ből  $A$ -ba

$$T^- = l/(c + v) . \quad (7)$$

Látjuk tehát, hogy  $T^+ > T > T^-$ , tehát a futási időt  $A$  és  $B$  között az éterhez viszonyított mozgás befolyásolja.

**65.** A (6) és (7) képleteket így is értelmezhetjük: Tekintsünk  $C, D, \dots$  pontokat, amelyek mint az  $A$  és  $B$  pont, ugyanazzal az állandó  $v$  sebességgel mozognak  $K$  koordináta-rendszerhez képest.

Az  $A, B, C, \dots$  pontok egy  $K'$  koordináta-rendszer határoznak meg úgy, hogy ezek mind  $K'$ -hoz képest nyugalomban vannak. A fény sebességét  $K'$ -höz viszonyítva az  $A \rightarrow B$  irányban, illetve  $B \rightarrow A$  irányában úgy definiálhatjuk, hogy

$$c^+ = l/T^+, \quad c^- = l/T^- . \quad (8)$$

Ily módon (6)- és (7)-, valamint (8)-ból azt találjuk, hogy

$$c^+ = c - v, \quad c^- = c + v .$$

A (6) és (7) formulák tisztán fenomenológiai megfontolásokon alapulnak. A (6) formulát pontosan oly módon kapjuk meg, mintha a következő kérdésre adnánk választ: egy kutya fut  $c$  sebességgel a nyúl után, amelyik  $v < c$  sebességgel menekül; mennyi időbe fog telni, hogy a kutya a nyulat utolérje, ha a nyúl előnye  $l$ ?

E kérdésfelvetésnél tökéletesen mindegy, hogy mi fut és mi után; vajon a kutya fogja-e meg a nyulat, vagy a fényjel a mozgó Földnek egy pontját éri-e el, — mindez egyforma módon tárgyalható. Ugyanez a helyzet, ha a nyúl elveszíti a fejét és ahelyett, hogy menekülne a kutya elől, a kutya felé fordul, — így nyilvánvalóan gyorsabban fog a kutyaival összeütközni. Ezek szerint tehát minden esetben a  $T^+ > T^-$ . Ennek az egyszerű analógiának a helyességéről meggyőződhetünk úgy is, ha a fényterjedést retardált potenciálokkal írjuk le (lásd **269–271.** pont).

A fenti érvelést alátámasztja — ha egyáltalán alátámasztásra szorul — a *Sagnac*-kísérlet, amelyben közvetlenül megfigyeljük azt a késést, amellyel a fényjel az előle elfutó féligáteresztő tükröt eléri.

## 1. GÖMBHULLÁM ALAKÚ JEL TERJEDÉSE

**66.** Hogy a fenti problémát kicsit általánosabban fogalmazhassuk, vegyünk egy fényjelet, amely  $t = 0$  időpillanatban indul az  $\mathbf{r} = 0$  pontból. A jel  $t > 0$  időpillanatban gömbfelületen helyezkedik el, melynek egyenlete

$$\mathbf{r}_0(t)^2 = c^2 t^2 . \quad (9)$$

Egy  $B$  pontot tekintve, melynek sebessége  $\mathbf{v}$  és melynek koordinátavektora

$$\mathbf{r}_B(t) = \mathbf{l} + \mathbf{v}t, \quad (10)$$

azt találjuk, hogy a fényjel, mely  $t = 0$  pillanatban  $A$  pontból — melynek koordinátavektora ekkor

$$\mathbf{r}_A(0) = 0$$

indul el — a  $B$  pontot  $T^+$  időpillanatban éri el, úgyhogy

$$\mathbf{r}_B(T^+)^2 = \mathbf{r}_s(T^+)^2.$$

Tehát (9) és (10) segítségével azt kapjuk, hogy

$$(\mathbf{l} + \mathbf{v}T^+)^2 - c^2 T^{+2} = 0. \quad (11)$$

(11)-ből az következik, hogy

$$T^+ = \frac{l}{c} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta + \frac{v}{c} \cos \vartheta}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (12)$$

ahol  $\mathbf{vl} = vl \cos \vartheta$ , tehát  $\vartheta$  a  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{l}$  közötti szöveget jelenti.

A  $T^-$  időt, amely alatt a fényjel  $B$ -ből  $A$ -ba halad, úgy kapjuk meg, hogy  $\vartheta$ -t  $\pi - \vartheta$ -val helyettesítjük; és azt látjuk, hogy

$$T^- = \frac{l}{c} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta - \frac{v}{c} \cos \vartheta}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (13)$$

(12) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$T^+ = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \vartheta - v \cos \vartheta}}. \quad (14)$$

## 2. FÉNYTERJEDÉS EGY MOZGÓ KOORDINÁTA-RENDSZERHEZ VISZONYÍTVA

**67.** A haladási idő  $A$ -ból  $B$ -ig ezek szerint  $\mathbf{v}$ -től, vagyis  $B$ -nek a fény hordozójához viszonyított sebességétől függ, — viszont nem függ  $A$  mozgás-állapotától. Vegyük azt az esetet, ahol  $A$  és  $B$  ugyanazzal a  $\mathbf{v}$  sebességgel halad. Ez esetben feltételezhetjük, hogy mindkét pont egy  $K$  koordináta-rendszerhez képest nyugalomban van, amely koordináta-rendszer  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog  $K_0$ -hoz képest.

A fény sebességét egy irányban, amely  $\vartheta$  szöveget zár be  $\mathbf{v}$  irányával, úgy definiálhatjuk, hogy

$$c(\vartheta) = l/T^+,$$

így (14) segítségével azt kapjuk, hogy

$$c(\vartheta) = \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \vartheta} - v \cos \vartheta. \quad (15)$$

E definíció szerint a fény terjedése  $K$ -hoz viszonyítva anizotróp, — hangsúlyozni kell azonban, hogy (15) definíció. Viszont  $T^+$  idő, amely alatt a fényjel  $A$ -ból  $B$ -be halad, fenomenológiai megfontolás alapján határozható meg. A megfontolás olyan típusú, mint a „kutya—nyúl” probléma.

**68.** Térjünk vissza a *Foucault*- és *Fizeau*-féle kísérletek elemzéséhez. Megjegyezzük, hogy e kísérletekben egy fényjel oda-visszaútjának idejét mérjük. Ha feltételezzük, hogy a berendezés  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog az éterhez képest, akkor azt találjuk (12) és (13) segítségével, hogy az oda-vissza futás

$$T(\vartheta) = T^+ + T^- = \frac{2l}{c} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (16)$$

idő alatt történik meg. Ha  $v \ll c$ , akkor  $v^2/c^2$  hatványai szerint kifejtethetjük a fenti kifejezést, és jó közelítésben azt kapjuk, hogy

$$T(\vartheta) = \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \right). \quad (17)$$

A kísérlet  $T(\vartheta)$  meghatározására vezet; a fény sebességértékét úgy határozhatjuk meg, hogy a (16) egyenletet megoldjuk. Írjuk, hogy

$$c_0 = 2l/T(\vartheta),$$

ahol  $c_0$  az a sebességérték, melyet a *Fizeau*-kísérletből kapunk, amennyiben a translációs mozgás hatását elhanyagoljuk. Így azt kapjuk, hogy

$$c = c_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{v^2}{c_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{v^2}{c_0^2} \cos^2 \vartheta} \right\},$$

vagy (17) segítségével közelítőleg

$$c = c_0 \left( 1 + \frac{v^2}{c_0^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \right) + \text{magasabb rendű tagok}. \quad (18)$$

**69.**  $c$  és  $c_0$  relatív különbsége  $v^2/c^2$  nagyságrendű. Ha  $v$ -t 30 km/s-nak veszünk, vagyis ha feltételezzük, hogy a Nap az éterhez képest kb. nyugalomban van, akkor a  $c$  és  $c_0$  aránya 1-től kb.  $10^{-8}$ -al különbözik; ez a különbség kisebb, mint a legpontosabb mérések mérési hibái. Ebből következik, hogy a gyakorlat szempontjából a Föld translációs mozgásának sebessége elhanyagolható, amikor a *Fizeau*-kísérlet eredményét értékeljük.

70. Annak ellenére, hogy a (18)-ban foglalt korrekció gyakorlatilag elhanyagolható, érdekes kérdés marad, hogy a Földnek az éterhez viszonyított transzlációs mozgása kísérletileg valóban megfigyelhető-e? Ezt a kérdést már MAXWELL\* felvetette. MAXWELL ezzel foglalkozó cikkében már egy *Michelson—Morley*-típusú kísérleti berendezést ír le, de azon a véleményen van, hogy a várható effektus túl kicsi ahhoz, hogy megfigyelhető volna. Javaslatot tesz a Jupiter-holdakkal való kísérletre, amelyet keresztülvihetőbbnek tart.

Érdekes, hogy a *Michelson*-féle elrendezéssel a kísérlet a kísérleti technika nagy fejlődése eredményeként elvégezhetővé vált, de a Jupiter-holdakkal való kísérlet a mai napig sem látszik keresztülvihetőnek.

### 3. MICHELSON—MORLEY-KÍSÉRLET

71. A (16) és (17) formulákból következik, hogy egy *Fizeau*-féle berendezésnél  $T(\theta)$  — mely egy fényjel oda-visszafutási idejét adja meg — a  $\theta$  szögtől függ, amelyet a sebesség és a fényút iránya képeznek. A  $c$  és  $c_0$  közötti különbség túl kicsi ahhoz, hogy közvetlenül meg lehessen figyelni, — azonban interferometrikus módszerrel még ilyen kis különbség is elvben megfigyelhető.

Képzeljünk el egy *Michelson*-féle interferométert, amely karjainak hossza  $l_1$  és  $l_2$ . Az  $l_1$  hosszúságú kart párhuzamosan, az  $l_2$  hosszúságút merőlegesen állítva a  $\mathbf{v}$  sebesség irányára a (16) formula segítségével a karok mentén való oda-vissza futási idők különbségét úgy írhatjuk, hogy

$$\Delta T = \frac{2l_1/c}{1 - v^2/c^2} - \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19)$$

$v^2/c^2$  hatványai szerint sorba fejtvé azt találjuk, hogy — ha a magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk —

$$\Delta T = \frac{2(l_1 - l_2)}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}. \quad (20)$$

Ha most az interferométer karjait úgy méretezzük, hogy  $l_1 = l_2 = l$ , tehát ha a karok egyenlőek; azt találjuk, hogy

$$\Delta T = \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}.$$

Úgy tűnik, mintha a fenti kifejezés segítségével  $v$ -t  $\Delta T$  mért értéke segítségével meg lehetne határozni.

A valóságban azonban nem tudjuk megállapítani, hogy egy adott interferométer karjainak hossza valóban egyforma-e. Később (a III. fejezetben) elemezzük a mérések elvi kérdéseit. E helyen csak azt jegyezzük meg, hogy

\* J. C. MAXWELL: Nature 21, 314, 1879—1880.

a hossz-mérés legpontosabb gyakorlati módszere éppen az interferometrikus módszer. Ezért rögzítették a nemzetközi hossz-szabványt interferometrikus alapon.

Így tehát ha  $\Delta T$ -t interferométer segítségével megállapítjuk, akkor  $v$ -t (20) képletből kellene megállapítani, melyben  $l_1$ ,  $l_2$  és  $v^2/c^2$  szerepelnek. Nem tudjuk tehát megállapítani  $v$  segítségével nélkül, hogy  $l_1$  valóban egyenlő  $l_2$ -vel.

72. A  $v$  sebesség értékére látszólagosan információt kaphatunk, ha az interferométert elforgatjuk. Amennyiben a karhosszakat úgy állítjuk be, hogy a beállítás eredményeként  $\Delta T = 0$ , tehát ha a tükröket addig mozgatjuk, míg nulla interferenciakép jelenik meg, akkor (19) alapján azt várjuk, hogy

$$l_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2} l_2.$$

Amennyiben az interferométert e beállítás után óvatosan  $90^\circ$ -kal elforgatjuk, akkor a rövidebb  $l_1$  kar a forgatás folytán  $v$ -re merőleges irányba kerül, a hosszabb kar pedig a sebességgel párhuzamos irányba fordul. Az elforgatott helyzetben tehát a karhosszak különbsége már nem egyenlíti ki, hanem ellenkezőleg, a futási idők különbségét növeli. Az elforgatott helyzetben tehát azt várjuk, hogy

$$\Delta T(90^\circ) = \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}.$$

Általában azt várjuk, hogy

$$\Delta T(\vartheta) = \frac{l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} (1 - \cos 2\vartheta), \quad (21)$$

ahol  $\vartheta$  az első kar és  $\vartheta + \pi/2$  a második kar  $v$  irányával bezárt szöge. Tehát ha elég óvatosan forgatjuk az interferométert, azt várjuk, hogy a forgás folytán (21)-nek megfelelően az interferenciacsíkok elmozdulnak.

A MICHELSON—MORLEY\* és mások által végzett nagyon gondos kísérletek azonban azt mutatták, hogy az interferenciacsíkok nem változnak akkor, ha az interferométert forgatjuk. A kísérleteket úgy végezték, hogy az interferenciacsíkok várt eltolódásának nagyon kis részét is meg lehetett volna figyelni.

73. A Michelson—Morley-kísérletet többek között KENNEDY és THORNDIKE\*\* ismételték meg. Ezekben a kísérletekben olyan interferométert használtak, amelyekben az  $l_1$  és  $l_2$  karhosszak erősen különböztek. Az így megváltoztatott készülékkel végzett kísérletek az eredetihez hasonló negatív eredményre vezettek, tehát az interferenciacsíkok függetlenül attól, hogy az interferométer karhosszai egyenlőek-e vagy különböznek, nem változnak meg a forgás alatt.

\* A. A. MICHELSON és E. W. MORLEY: Amer. J. Sci., 31, 377, 1886.

\*\* R. J. KENNEDY és E. M. THORNDIKE: Phys. Rev., 42, 400, 1932.

#### 4. A MICHELSON—MORLEY-KÍSÉRLET NEGATÍV EREDMÉNYÉNEK ÉRTELMEZÉSE

74. Az első pillanatban elég triviális módon volna magyarázható az a tény, hogy az interferenciacsíkok az interferométer forgatása alatt nem változnak. Ha feltételeznénk, hogy a kísérlet időpontjában a Föld olyan mozgásállapotban van, hogy *véletlenül* éppen ebben az időpontban az éterhez viszonyítottan nem mozog, akkor a kísérlet eredménye nem meglepő. Elképzelhető az a feltételezés, hogy a Naprendszer 30 km/s sebességgel mozog az éterhez képest, és hogy ez a mozgás a megfigyelés pillanatában a Föld pályamozgásával ellentétes irányban történik. Ekkor és ebben az időszakban a kísérlet eredménye érthető.

E lehetséges ellenvetés kiküszöbölésére MICHELSON és MORLEY a kísérletet az év különböző szakaszában megismételték.

Amennyiben egy bizonyos időszakban a Föld az éterrel véletlenül együtt mozogna, akkor egy fél évvel később — minthogy a Föld mozgási iránya az év folyamán változik — ellenkező irányban mozog, tehát a viszonylagos sebesség  $2v$ -re emelkedik. A *Michelson—Morley*-kísérlet azonban bebizonyította, hogy  $T(\theta)$  értéke bármilyen évszakban független  $\theta$ -tól. Arra kell tehát következtetnünk, hogy az interferométer elforgatása nem vezet interferenciaváltozáshoz, függetlenül attól, hogy a Föld milyen translációs mozgást végez a fény hordozójához képest.

Egy másik — elég mesterkéltnél — feltételezés lenne a *Michelson—Morley*-kísérlet értelmezésére, hogy az éter a Földhöz ragad, és így a Föld magával viszi pályája mentén a környezetében levő étert.

E feltételezést — bizonyos mértékben — már a *Michelson—Gale*-kísérlet is cáfolja, hiszen ez azt mutatja, hogy az éter a Föld tengely körüli forgómozgását nem követi. Függetlenül ettől, a feltételezés olyan mesterkéltnél, hogy nem érdemel további elemzést.

75. Véleményünk szerint a *Michelson—Morley*-kísérlet egyetlen elfogadható értelmezése annak feltételezése, hogy bármilyen óvatosan forgatjuk az interferométert, az mégiscsak deformálódik az elforgatás alatt, és e deformáció olyan mértékű, hogy pontosan kompenzálja a kinematikai megfontolásokból meghatározott interferencia-eltolódást.

76. Ez a hipotézis A. H. LORENTZTŐL és FITZ-GERALDTŐL származik. E hipotézis alapján azt feltételezték, ha egy szilárd testet  $v$  sebességű mozgásba hozunk az éterhez képest, akkor a szilárd test  $v$ -vel párhuzamos méretei  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  arányban összehúzódnak, a  $v$ -re merőleges méterek pedig változatlanok maradnak.

E kontrakciós effektust elég primitív módon leírhatjuk úgy is, hogy egy, az éterhez képest mozgó szilárd test az őt áthatoló éter szele folytán „nyomás” alá kerül, és ez a nyomás hozza létre a kontrakciót.

A *Lorentz—Fitz-Gerald*-hipotézisből következik, hogy egy már  $v$  sebességgel mozgó szilárd test összenyomott állapotban van. Ha a szilárd testet  $90^\circ$ -kal úgy forgatjuk el, hogy az eredetileg a sebességhez viszonyítva párhuzamosan álló méretei most a sebességhez  $90^\circ$ -os szögben állnak, és így a megfelelő merőleges méretek párhuzamos irányban fordulnak, akkor a hipotézis értelmében fel kell tételezni, hogy a mozgás irányából kiforduló

méreték a nyomás alól felszabadulnak, és ennek megfelelően  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  arányban kinyúlnak. Hasonló módon azok a méretek, amelyek merőleges irányból a sebességre párhuzamos irányba fordulnak,  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  arányban összehúzódnak. Ezek a deformációk pontosan azok, amelyek szükségesek ahhoz, hogy — elforgatása ellenére — az interferométer állandó interferencia képet adjon. Ha az interferométer forgatása közben nem deformálódna, akkor a (21) formulának megfelelő interferencia-eltolódást mutatná, azonban a deformáció eme eltolódást pontosan kompenzálja.

77. A *Michelson—Morley*-féle kísérlet és a *KENNEDY—THORNDIKE* által módosított kísérlet kissé pontosabb tárgyalása érdekében kiszámítjuk egy mozgó rúd hosszának változását, amely bekövetkezik, ha a rudat a mozgás irányához képest elforgatjuk. Ez a megfontolás azért szükséges, mert *KENNEDY* és *THORNDIKE* publikációikban helytelenül azt állították, hogy a *Lorentz*-kontrakció segítségével kísérletük eredményét nem lehet magyarázni. E helytelen vélemény az irodalomban is elterjedt.\*

A következőkben megmutatjuk, hogy — az elterjedt felfogással ellentétben — a *Kennedy—Thorndike*-kísérlet eredménye éppen úgy, miként a *Michelson—Morley*-kísérleté, a *Lorentz*-kontrakció segítségével értelmezhető.\*\*

78. Egy rudat, melynek hossza nyugalmi állapotban  $a_0$ , gyorsítsunk fel  $v$  sebességre úgy, hogy  $v$  a rúdra merőleges. Ebben az esetben a rúd hossza nem változik. Ha a rudat úgy forgatjuk el, hogy az a sebességhez képest  $\vartheta$  szögbe jut, akkor

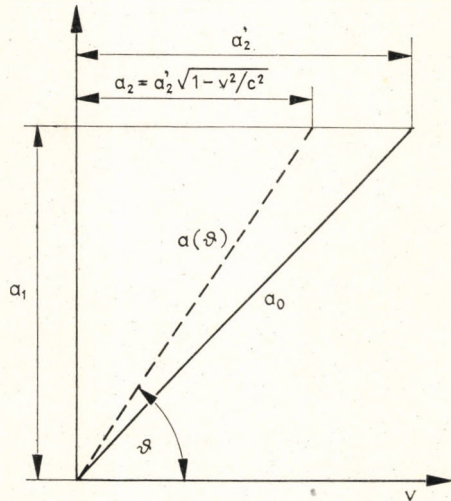
$$a^2(\vartheta) = a_1^2 + a_2^2$$

hosszúságúvá válik, ahol

$$a_1 = a(\vartheta) \sin \vartheta, \quad a_2 = a(\vartheta) \cos \vartheta, \quad (22)$$

$a_1$  és  $a_2$  a mozgó rúd vetületei  $v$ -re párhuzamos és merőleges irányokban (12. ábra). Az  $a_1$  vetület független a sebességtől, az  $a_2$  vetület sebességfüggését pedig az

$$a_2 = a_2' \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (23)$$



12. ábra. Egy mozgó rúd kontrakciója

\* H. DINGLE: The Special Theory of Relativity. London, Methuen and Co. Ltd., New York, J. Wiley and Sons, Inc., 1940.

\*\* L. JÁNOSY: Acta Phys. Hung., 25, 275, 1968.

formula fejezi ki, ahol  $a'_2$  a vetület hossza volna, ha a kontrakció nem lépne fel. Azt írhatjuk tehát, hogy

$$a_1^2 + a_2'^2 = a_0^2 \quad (24)$$

és így (22), (23), (24) segítségével azt találjuk, hogy

$$a^2(\vartheta) \left( \sin^2 \vartheta + \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - v^2/c^2} \right) = a_0^2$$

vagy

$$a(\vartheta) = \frac{a_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta}}. \quad (25)$$

(16)-ba behelyettesítve  $l = a(\vartheta)$ , azt találjuk, hogy

$$T(\vartheta) = \frac{2a_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \text{független } \vartheta\text{-tól,}$$

azt kapjuk tehát, hogy  $T(\vartheta)$  az oda-visszafutás ideje állandó marad a rúd forgatása közben, ha a rúd Lorentz-kontrakciót szenved, úgyhogy a kontrakció minden pillanatban a  $\mathbf{v}$  irányával bezárt szögnek megfelelő értéket vesz fel.

A Michelson-féle kísérletben megfigyelt interferenciagyűrűk rendszere

$$\Delta T(\vartheta) = T_1(\vartheta) - T_2(\vartheta + 90^\circ)$$

értéktől függ, ahol  $\vartheta$  és  $\vartheta + 90^\circ$  a karok és a sebesség közötti szögek.  $T_1(\vartheta)$  és  $T_2(\vartheta + 90^\circ)$  az egyes karok mentén való oda-visszafutási idő. Mint-hogy egyik idő sem függ  $\vartheta$ -tól, a különbség is független  $\vartheta$ -tól, tehát azt várjuk, hogy

$$\Delta T(\vartheta) = \text{független } \vartheta\text{-tól.}$$

A fenti érvelés helyes marad, függetlenül attól, hogy

$$l_1 = l_2 \quad \text{vagy} \quad l_1 \neq l_2\text{-vel.}$$

## 5. A KONTRAKCIÓS HIPOTÉZISSEL KAPCSOLATOS MEGFONTOLÁSOK

**79.** A Lorentz—Fitz-Gerald-féle hipotézissel szemben az az érvelés hangzott el, hogy ez utóbbi csak „ad hoc” hipotézis, amelyet a Michelson—Morley-kísérlet magyarázata érdekében állítottak fel. Véleményünk szerint ennek az érvelésnek nincs nagy jelentősége.

Először is, ha bármilyen jelenséget (például a Michelson—Morley-kísérlet negatív eredményét) megfigyelünk, olyan folyamatokat kell keresnünk, amelyek megmagyarázzák a megfigyelést. Véleményünk szerint a Michelson—Morley-kísérletet csakis azt feltételezve lehet értelmezni, hogy az interferométer elforgatás közben deformálódik. Megkockáztatjuk azt az állítást is, hogy a Michelson—Morley-kísérlet a Lorentz-kontrakció inter-



ferometrikus méréseként fogható fel. A későbbiekben (III. Fejezet) a méréssel kapcsolatos elvi kérdéseket részletesen tárgyaljuk azzal a céllal is, hogy a fenti állítást mélyebben alátámasszuk.

**80.** Az elvi megfontolásoktól eltekintve fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy a Lorentz-kontrakció általános dinamikai megfontolások alapján értelmezhető. Fel kell tételezni ugyanis, hogy egy szilárd test atomjai közötti kölcsönhatás *késleltetett módon* lép fel.

Könnyen belátható, hogy késleltetett kölcsönhatás más egyensúlyi konfigurációhoz vezet, annak megfelelően, hogy az atomokból álló rendszer nyugalmi állapotban van, vagy állandó sebességgel mozog. Erre a kérdésre egyébként még részletesen visszatérünk.

LORENTZ észrevette, hogy a deformációk — mint pl. a hosszkontrakció — valóban az anyagot összetartó erőkre vezethetők vissza, de nem volt képes e jelenségek általános matematikai törvényszerűségeit megfogalmazni. LORENTZ felfogásának az volt a gyöngéje, hogy a különböző effektusokat külön-külön speciális feltételezések alapján igyekezett magyarázni. Az Einstein-féle felfogás nagy előrehaladást jelentett annak felismerése folytán, hogy a különböző relativisztikus effektusok nem függetlenek egymástól, hanem e jelenségek összessége egy általános érvényességgel rendelkező elvből megérthetők.

EINSTEIN véleménye szerint ez az általános elv az idő és tér tulajdonságait írja le. A mi véleményünk ezzel szemben az, hogy a relativisztikus effektusok azzal a feltételezéssel magyarázhatók, hogy a fizikai törvények közös vonásokkal rendelkeznek. Ezeket a vonásokat mint a fizikai törvények bizonyos szimmetria tulajdonságait lehet megfogalmazni. Ennek a feltetésnek a matematikai megfogalmazását a későbbiekben megadjuk. E fogalmazás LORENTZ elgondolásainak következetes folytatásaként fogható fel és EINSTEIN filozófiai elgondolásaitól bizonyos mértékben eltér. A későbbiekben megadandó matematikai fogalmazás azonban kizárólag olyan eredményekre vezet, amelyek az EINSTEIN által levezetett eredményekkel összhangban vannak.

## D) TOVÁBBI MICHELSON—MORLEY-TÍPUSÚ KÍSÉRLETEK

**81.** Miután a Michelson—Morley-kísérlet negatív eredménye ismertté vált, a kísérletek sorozatát végezték, az éterhez való transzlációs sebesség megállapítása érdekében. Ezek mindegyike negatív eredménnyel végződött. Egyik legfontosabb volt ezek közül a Trouton—Noble-féle kísérlet.

### 1. A TROUTON—NOBLE-KÍSÉRLET\*

**82.** Vegyünk két ellenkező előjelű,  $+e$  és  $-e$  elektromos töltést. A  $-e$ -ből  $+e$ -be vezető vektort nevezzük  $\mathbf{r}$ -nek. Ha a töltések nyugalomban vannak, akkor a  $+e$ -re ható erő így írható:

$$\mathbf{F}_0 = e\mathbf{E} = -\frac{e^2\mathbf{r}}{r^3}.$$

\* FR. T. TROUTON és H. R. NOBLE: Proc. Roy. Soc., 72, 132, 1903.

Mint hogy az erő  $\mathbf{r}$  vektor irányában hat, nem lép fel forgatónyomaték, vagyis

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_0 = 0.$$

Ha a töltéspárt  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgatjuk, akkor a pozitív töltés nemcsak a *Coulomb*-vonzás, hanem a mozgó  $-e$  töltés által gerjesztett mágneses mező hatása alatt is lesz. A mágneses térerősség

$$\mathbf{B} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{r})/r^3,$$

és így az  $e$ -re ható erő

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) = \mathbf{F}_0 + \frac{e^2}{c^2 r^3} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}).$$

Mint hogy

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - v^2 \mathbf{r},$$

a párra ható erőnyomaték értéke

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \frac{e^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/r^3.$$

Ha  $\vartheta$ -val jelöljük a  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{r}$  közötti szöveget, akkor a forgatónyomaték abszolút értéke

$$M = \frac{e^2 v^2}{2rc^2} \sin 2\vartheta. \quad (26)$$

lesz.

A fenti levezetésben a retardációt elhanyagoltuk, azonban a pontosabb számítás mutatja, hogy a retardáció figyelembevétele a (26) képletnek csak kis korrekcióját eredményezi.

**83.** A tényleges kísérletben rugalmas szálra egy töltött kondenzátort függesztettek oly módon, hogy  $\vartheta = 45^\circ$ , vagyis a kondenzátorlemezekre merőleges irány a Föld mozgási irányához viszonyítva  $45^\circ$ -ban állt.

Ha a (26) képlet által megadott forgatónyomaték valóban fellép, akkor e nyomaték a felfüggesztő szálát elcsavarja és a kialakuló új helyzetben az elasztikus szál forgatónyomatéka a kondenzátor által gyakorolt forgatónyomatékot semlegesíti. Ha a kondenzátort a felfüggesztő szerkezettel együtt  $90^\circ$ -kal elforgatjuk, a kondenzátor által gyakorolt forgatónyomaték előjele változik, és amennyiben a felfüggesztő szál forgatónyomatéka ugyanaz marad, azt kellene várni, hogy a kondenzátor a felfüggesztő szerkezethez képest bizonyos szöggel elforduljon.

A tényleges kísérlet során megfigyelték, vajon a kondenzátor a felfüggesztő szerkezethez viszonyítva elmozdul-e, ha a Föld tengelyforgása által változik a kondenzátor iránya a Föld pályasebességének irányához képest. A kondenzátor azonban semmiféle mozgást nem mutatott.

A *Trouton–Noble*-kísérlet negatív eredményét úgy értelmezhetjük, hogy az éterhez való mozgás nemcsak a kondenzátorban fellépő elektromágneses erők által gyakorolt forgatónyomatékot változtatja meg, hanem ugyan-

olyan módon megváltoztatja a szálban fellépő ama elasztikus erőket, amelyek az elektromágneses forgatónyomatékokot egyensúlyban tartják.

**84.** Olyan kísérletet is végeztek, ahol a kondenzátort periodikusan feltöltötték és kisütötték, és várták azon oszcillációk fellépését, amelyeket a töltéssel periodikusan változó forgatónyomatékok okoznak. Ez a kísérlet is negatív eredményre vezetett.

További kísérletek során a *Wheatstone*-híd zéró beállítását figyelték és megállapították, hogy a beállítás nem változik, ha a hidat a Föld mozgási irányához képest elforgatjuk. Ebben az esetben is egyszerű meggondolások alapján  $v^2/c^2$  nagyságú effektus lett volna várható.

## 2. ISAAK ÉS MUNKATÁRSAINAK KÍSÉRLETE\*

**85.** Újabbán ISAAK, CHAMPENEY és KHAN kísérletet végeztek, amelynek során az óralelassulással kapcsolatos effektust vizsgálták. A szintén negatív eredménnyel végződő kísérlet elgondolása a következő volt:

Tekintsünk egy  $A$  pontot, mely elektromágneses hullámok forrása (tételizzük fel, hogy  $A$  kezdetben az éterhez képest nyugalomban van) és egy  $B$  pontot, amely  $A$  körül  $R$  sugarú körpályán állandó szögsebességgel mozog. Egy jel, amely  $t$  pillanatban indul el az  $A$  pontból,  $B$ -t egy

$$t' = t + R/c$$

pillanatban éri el, tehát

$$\frac{dt'}{dt} = 1,$$

ezek szerint azt várjuk, hogyha  $A$   $\nu$  frekvenciájú sugárzást bocsát ki, akkor a sugárzás  $B$ -t ugyanezzel a frekvenciával éri el.

Ha most  $A$  az éterhez képest  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog és  $B$  — úgy mint az előbb — a mozgó  $A$  körüli körpályán kering, akkor  $t$  időben  $A$  és  $B$  koordinátavektorai:

$$\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{v}t, \quad \mathbf{r}_B(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{R}(t), \quad (27)$$

ahol  $\mathbf{R}(t)$  a vektor, amely a  $t$  időben  $A$ -ból  $B$ -be vezet. Egy fényjel, mely  $t$  időpillanatban  $A$ -ból indul,  $B$ -t a  $t'$  időben éri el, ahol  $t'$  értéke a következő egyenletből határozható meg:

$$(\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_B(t'))^2 - c^2(t' - t)^2 = 0. \quad (28)$$

Ha a (28) képletet  $t$  szerint differenciáljuk, (27) segítségével azt kapjuk, hogy

$$((t - t')\mathbf{v} - \mathbf{R}(t')) \left( \mathbf{v} \left( 1 - \frac{dt'}{dt} \right) - \dot{\mathbf{R}}(t') \frac{dt'}{dt} \right) = c^2(t - t') \left( 1 - \frac{dt'}{dt} \right).$$

Mint hogy  $\mathbf{R}(t')\dot{\mathbf{R}}(t') = 0$  azt kapjuk, hogy

$$\left( (c^2 - v^2) - \dot{\mathbf{R}}(t') \mathbf{v} - \frac{\mathbf{R}(t') \mathbf{v}}{t' - t} \right) \left( 1 - \frac{dt'}{dt} \right) + \mathbf{v}\dot{\mathbf{R}}(t') = 0.$$

\* G. R. ISAAK et al.: Phys. Lett., 7, 241, 1963.

Megjegyezzük, hogy  $R(t')/(t' - t) \sim c$  és ezért, ha  $(v/c)^2$  nagyságrendű tagokat elhanyagoljuk, akkor a fentiek szerint

$$\frac{dt'}{dt} \approx 1 + \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{R}}(t')}{c^2}.$$

Ebből következik, hogy a sugárzás, mely  $\nu$  frekvenciával indul  $A$ -ból,  $\nu'(t')$  frekvenciával érkezik  $B$ -be:

$$\nu'(t') \approx \frac{\nu}{1 + \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{R}}(t')}{c^2}} \approx \nu \left( 1 - \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{R}}(t')}{c^2} \right). \quad (29)$$

Így tehát, ha az  $A$  forrás a Földdel együtt mozog, akkor a  $B$ -t elérő sugárzás frekvenciája (29) szerint periodikusan fluktuál.

ISAAK és munkatársai kísérletében egy  $A$  pontban elhelyezett  $\gamma$  forrás sugárzása egy, a  $\gamma$  forrás körül forgó  $B$  abszorbersre esett. A *Mössbauer*-effektus segítségével rezonancia abszorpciót figyeltek meg. Ha a Föld tranzlatorikus mozgása folytán a  $B$ -re eső frekvencia a (29) képletnek megfelelően ingadozik, akkor azt lehetne várni, hogy ezen ingadozás folytán az abszorpció mértéke is ingadozna.

**86.** A tényleges kísérlet azonban azt mutatta, hogy a forgás folytán az abszorpció nem ingadozik. A kísérletet olyan pontossággal folytatták le, hogy a várt effektusnak kis százalékát is meg lehetett volna figyelni. A kísérlet negatív eredményét könnyen megérthetjük, ha feltételezzük, hogy az a frekvencia, melynél  $B$  rezonanciaszerűen abszorbeál  $B$ -nek az éterhez viszonyított sebességével, a relativisztikus formula szerint változik, úgy mint ezt a mérőleges *Doppler*-effektus tárgyalásában feltételeztük.

$B$  cikloid pályán mozog, mint ezt a 13. ábra mutatja, sebessége tehát

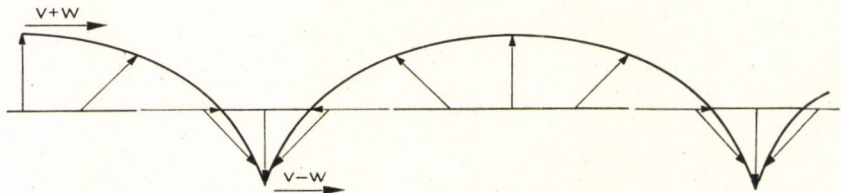
$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{v} + \dot{\mathbf{R}}(t), \quad (30)$$

és az ennek megfelelő frekvencia

$$\nu^*(t) = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{w^2(t)}{c^2}}. \quad (31)$$

Ha (30)-at (31)-be helyettesítjük és feltesszük, hogy  $\dot{R} \ll v$ , a kis tagokat elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$\nu^*(t) \approx \nu_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{R}}(t)}{c^2} \right).$$



13. ábra. A radioaktív forrás pályája ISAAK és munkatársai kísérletében

A  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó  $A$  forrás frekvenciája

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

ezt (29)-be helyettesítve és a kis tagokat elhagyva

$$\nu'(t') \approx \nu_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{R}}(t')}{c^2} \right)$$

adódik, vagyis

$$\nu^*(t') = \nu'(t'),$$

tehát a  $B$  belső frekvenciája  $\nu^*(t)$ , a  $t'$  időpontban megfelel a  $\nu'(t')$  frekvenciának, amellyel az  $A$ -ból származó sugárzás  $t'$  időpontban  $B$ -t éri.

A fenti megfontolások összefoglalásaként a következőket állapíthatjuk meg: ha az  $A$  forrás az éterhez képest állandó  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog, akkor a  $B$  cikloidpályán mozog (lásd a 13. ábrát). Az  $A$  által egyenlő időszakokban kibocsátott fázisfelületek  $B$ -t nem egyforma időszakokban érik el, hanem egy változó  $\nu'(t')$  frekvenciának megfelelő időközökben. Az abszorbens sebessége  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v} + \dot{\mathbf{R}}(t)$  a cikloid pálya mentén periodikusan ingadozik, méghozzá oly módon, hogy az abszorbens belső frekvenciája,  $\nu^*(t')$  pontosan úgy változik mint  $\nu'(t')$  maga, tehát a rezonanciaviszonyok nem változnak a keringés folytán és ez a rendszer tranzlatorikus sebességétől függetlenül fennáll.

Tehát ISAAK és munkatársai kísérlete eredményeként éppen úgy, miként a Michelson—Morley- és a Trouton—Noble-kísérlet során egyaránt azt találjuk, hogy bizonyos tisztán kinetikai megfontolások alapján elvárt effektusok kompenzálódnak más dinamikai effektusok által. Mindegyik kísérletnél két különböző effektus kompenzálja egymást és így a tranzlatorikus mozgás hatását nem tudjuk közvetlenül megfigyelni.

## E) ÁLTALÁNOS MEGGONDOLÁSOK A NEGATÍV EREDMÉNYŰ KÍSÉRLETEK SOROZATÁHOZ

87. Az a tény, hogy egy sorozat minden egyes kísérleténél külön-külön nem sikerül  $\mathbf{v}$ -t, a Föld sebességét az éterhez képest megállapítani, első pillanatban „véletlennek” tűnhet. Így például a Michelson—Morley-kísérlet alkalmas lehetett volna  $\mathbf{v}$  meghatározására, ezt csak az a „véletlen” körülmény akadályozta meg, hogy az interferométer elforgatás közben deformálódott.

Hasonló módon a Trouton—Noble-kísérlettől elvárt eredmény létrejöttét az akadályozta meg, hogy az elektromágneses forgatónyomaték változását más eredetű forgatónyomatékok változásai kompenzálják, mint ez a kísérletből kiderült.

Az Iszaak-féle kísérletnél  $\mathbf{v}$  meghatározását az akadályozza meg, hogy az abszorbens belső frekvenciái az éterhez viszonyított sebességgel változnak.

Hasonló látszólagos véletlenek akadályozzák meg a  $v$  meghatározását másfajta kísérleti módszerekben.

Tudományos szempontból a látszólagos véletlenek e sorozatát nem lehet véletlennek tekinteni, hanem fel kell tételezni, hogy a sorozat mögött törvényszerűség rejlik.

**88.** Hasonló helyzetek a tudomány történetében máskor is előfordultak. Emlékezzünk vissza, hogy a perpetuum mobile kísérletek mind meghiúsultak, és pedíg látszólagos „véletlenek” folytán. Különböző módon megtervezett berendezések nem vezettek eredményre, mert ilyen vagy olyan zavaró körülmények léptek fel. Azt a tényt, hogy e véletlen sorozat nem valódi véletlenekből adódott, először a francia tudományos akadémia állapította meg, kijelentvén, hogy a továbbiakban perpetuum mobile kísérletek kérdésével nem foglalkozik.

A fenti kijelentés elsősorban negatív eredményt foglal magában. E kijelentés azt a nézetet fejezi ki, hogy a sikertelen kísérletek sorozata nem véletlenül alapult, hanem létezik egy általános természettörvény, amely a perpetuum mobile létrehozását lehetetlenné teszi. A következő lépés a törvény felderítése volt: adott esetben az energia megmaradásának törvényéről van szó.

Hangsúlyozzuk, hogy az energia megmaradás törvénye olyan törvény, amely (eddiggi tudásunk szerint) mindennemű jelenségre érvényes. E törvény azonban csak keret-törvény, amely megszabja sok más törvény formáját anélkül, hogy ezeket a törvényeket pontosan meghatározná.

**89.** Megjegyezzük továbbá, ha netán olyan kivételes jelenséggel találkoznánk, amely az energia megmaradásának ellentmondana, akkor e jelenség az energia megmaradási törvény érvényességének határát szűkítené, azonban nem cáfolná meg a törvényt.

Az energia megmaradási törvény nagyon nagy területen igen nagy számú jelenségre érvényes. Mindez világossá teszi, hogy ez az elv a természet egy vonását helyesen tükrözi. A törvénynek e nagy jelentőségét nem semmisítené meg az, ha valahol olyan jelenséggel találkoznánk, amely a törvény érvényességének határán kívül fekédné.

Másik példaként emlékezzünk vissza az alkimisták történetére. Az alkimisták minden siker nélkül próbáltak aranyat előállítani, de sikertelen kísérletek tömege alapján jó néhány kémiai törvényt fedeztek fel. Végül eredményben megtalálták azt az általános törvényt is, amely megmagyarázza, hogy miért nem lehet aranyat kémiai módon előállítani. E törvény annak felismerése volt, hogy a kémiai vegyületek kémiai módszerekkel át nem alakítható elemekből állnak.

Ma már aranyat más elemekből, magkémiai módszerekkel tudunk előállítani. Az alkimisták által felfedezett törvény a kémiának mégis egyik alaptörvénye maradt. Az a tény, hogy ma már ezen alaptörvények határait ismerjük, nem csökkenti a törvény jelentőségét az érvényesség határain belül.

**90.** Sokszor hangoztatják azt az elvet, hogy egy hipotézist csak addig lehet fenntartani, míg egyetlen — a hipotézisnek ellentmondó — tény sem merül fel, és mondják, hogy amennyiben *egyetlen egy*, az adott hipotézisnek ellentmondó tényt találunk, a hipotézist el kell vetni. A tudomány fejlőd-

dése szempontjából azonban nagyon szerencsés körülmény, hogy ezt az elvet csak tankönyvekben hangoztatják, de a tudósok soha nem veszik komolyan.

Ha ugyanis egy hipotézis egy sereg jelenségben helytállónak mutatkozik, akkor ez annak bizonyítéka, hogy a hipotézis a valóságnak legalább egy részét helyesen tükrözi. Ha felmerül egy olyan jelenség, amely az eredeti hipotézisnek ellentmond, mindig egy óvatos és részletes analízisre van szükség annak megállapítására, hogy a szóban forgó jelenség mennyiben érinti a hipotézis érvényességét. A tudományos fejlődés állandósága szempontjából nagyon fontos, hogy a több vonatkozásban helyesnek bizonyult hipotéziseket ne dobjuk el az első nehézség fellépése esetében.

**91.** Ezeket az általános módszertani kérdéseket azzal a célkitűzéssel tárgyaltuk meg, hogy saját eljárásunkat világosabbá tegyük. A *Michelson—Morley*-típusú negatív eredmények sorozatát tekintve ésszerűnek tűnik annak feltételezése, hogy ezeknek a negatív eredményeknek a sorozata nem a véletlen játéka, és hogy létezik egy általános természettörvény, amely megakadályozza, hogy  $v$ -t, a Földnek az éterhez viszonyított sebességét kísérletileg meghatározzuk.

Második lépésként e törvényt meg kell fogalmazni. E törvény általánosan elfogadott formája az *Einstein*-féle relativitás elv. Mi ennek az elvnek egy másfajta fogalmazását adjuk meg és azt *Lorentz-elvnek* nevezzük el. Ennek az elvnek pontos fogalmazását az V. fejezetben fejtjük ki.





## A MÉRÉS PROBLEMATIKÁJA

92. A 79. pontban azt állítottuk, hogy a *Michelson—Morley*-kísérlet a *Lorentz*-kontrakció megfigyelését tartalmazza. E kijelentés alátámasztása és a *Lorentz*-elv pontos megfogalmazása érdekében a mérés kérdésével részletesebben kell foglalkoznunk.

## A) MÉRTÉKEK PROBLÉMÁJA

## 1. REPREZENTÁCIÓK

93. Mennyiségek és azok mértékszámainak részletes elemzése során világosan különbséget akarunk tenni egyrészt a *valódi mennyiség* — amely objektíve létezik, függetlenül attól, hogy mérjük vagy nem —, másrészt a mennyiség mértékszámára, vagy rövidebben mértéke között, amely a mennyiséget számok (vagy számsorozatok) segítségével leírja.

Magától értetődő, hogy fizikai mennyiségek különböző módon jellemezhetőek számok segítségével.

94. Az igazi mennyiségek és ezeknek mértékszámai között *különbségtétel* érdekében *gót* betűkkel fogjuk jelölni az igazi mennyiséget és latin betűket fogunk használni, mennyiségeket reprezentáló mérőszámokra, tehát

$$\mathfrak{E}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \dots \quad (1)$$

jellemzi a különböző mennyiségeket és

$$R(\mathfrak{E}) = E, \quad R(\mathfrak{P}) = P, \quad R(\mathfrak{Q}) = Q \quad (2)$$

adják meg a mérőszámokat,  $E, P, Q, \dots$  tehát számok, melyek az (1)-ben felsorolt mennyiségeket  $R$  reprezentációban jellemzik. Az (1)-ben adott mennyiségeket más reprezentációban is jellemezhetjük. Például  $R'$  reprezentációban azt írjuk, hogy

$$R'(\mathfrak{E}) = E', \quad R'(\mathfrak{P}) = P', \quad R'(\mathfrak{Q}) = Q', \dots$$

$E', P', Q'$  az  $E, P, Q$  függvényeiként állíthatók elő. E függvények  $R$  és  $R'$  reprezentációk közötti transzformációt adják meg.

95. Például  $\mathcal{E}$  legyen egy esemény, amelynek helyét és bekövetkezésének időpontját a  $K$  koordináta-rendszerhez viszonyítva úgy reprezentálhatjuk, hogy

$$K(\mathcal{E}) = \mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}, t$$

és  $\mathbf{r}$  az  $\mathbf{r}$  reprezentációja,  $t$  pedig a koordinátavektora annak a pontnak, melyben az esemény történt. Az esemény időpontjának mértéke  $t$ , az időpont pedig  $t$ .

Egy  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3 \dots \mathcal{E}_n$  úgy reprezentálható, hogy

$$K(\mathcal{E}_k) = \mathbf{x}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

ahol

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k, t_k.$$

Egy másik  $K'$  koordináta-rendszerben (3) helyett azt írjuk, hogy

$$K'(\mathcal{E}_k) = \mathbf{x}'_k, \quad (4)$$

ahol

$$\mathbf{x}'_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (5)$$

$\mathbf{f}$  négy  $f_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) függvény helyett áll. Általában (2), (3) és (4)-nek megfelelő reprezentációtól azt követeljük, hogy egy az egyhez egymásra leképezhetőek legyenek, tehát azt, hogy az (5) transzformáció egy egy-értelmű inverzzel rendelkezzen, tehát (5)-tel egyidejűleg egy

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}'_k)$$

összefüggés létezzen.

A következőkben mennyiségek számok által való reprezentációjának problematikáját tárgyaljuk.

## 2. EGY PÉLDA: AZ ELEKTROMOS TÖLTÉS MÉRTÉKE

96. Azt a problémát, hogyan lehet fizikai mennyiségeket számokkal reprezentálni, tipikus példákkal szemléltetjük. Első példaként induljunk ki a *Coulomb-törvény* következő formájából:

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad (6)$$

ahol  $e_1$  és  $e_2$  az  $e_1$  és  $e_2$  töltések mérőszámai. Hasonló módon  $r$  és  $F$  az  $r$  és  $\mathfrak{F}$  mennyiségek mértékei, ahol  $r$  a töltések közötti távolság és  $\mathfrak{F}$  a töltések között ható erőt jelenti. Tételezzük fel, hogy  $\mathfrak{F}$  és  $r$  mértékeit, tehát  $F$ -et és  $r$ -t a szokásos módon választjuk. Itt csak a töltések mértékszámait kívánjuk elemezni.

Ha  $F$ -t és  $r$ -t mérjük és a (6) egyenletet elfogadjuk, akkor *egy* egyenletet kapunk az  $e_1$  és  $e_2$  ismeretlenek számára. Ha szimmetria megfontolások alapján feltételezzük, hogy  $e_1 = e_2 = e$ , akkor  $e$ -t  $F$  és  $r$  segítségével meg tudjuk állapítani. Általában azonban ahhoz, hogy töltések mérőszámaikat meg-

állapíthassuk, legalább három töltés közötti erőket kell megmérnünk. Azt írhatjuk tehát, hogy

$$F_{kl} = \frac{e_k e_l}{r^2}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (7)$$

ahol  $F_{kl}$  az az erő, amely  $e_k$  és  $e_l$  töltések között hat, ha a két töltés  $r$  távolságban helyezkedik el s a harmadik  $e_m$  töltést eltávolítjuk. A (7) segítségével azt találjuk, hogy

$$e_k = r \sqrt{\frac{F_{kl} F_{km}}{F_{lm}}}, \quad k, l, m = 1, 2, 3 \text{ permutációi.}$$

A gyök előjelét megfelelően kell választani, úgy, hogy a (7) egyenlet jobb oldalának előjele taszítás esetében pozitív, a vonzás esetén negatív legyen.\*

97. Vizsgáljuk  $n > 3$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  töltések esetét. Ebben az esetben az  $e_k$  töltés  $e_k$  mértékét több módon lehet meghatározni. (7) segítségével azt kapjuk, hogy

$$e_k = r \sqrt{\frac{F_{kl} F_{km}}{F_{lm}}} = r \sqrt{\frac{F_{kl'} F_{km'}}{F_{l'm'}}} = \dots, \quad (8)$$

ahol  $k, l, m$  és  $k', l', m'$  két különböző három-három töltésből álló csoportot jellemez, mely csoportok segítségével  $e_k$  meghatározható.

(8)-ból látjuk tehát, hogy  $e_k$  különböző módokon határozható meg. Azt várjuk, hogy e különböző meghatározások ugyanarra az  $e_k$  számértékre vezetnek. Másképpen kifejezve, a (8) képlet a (7) *Coulomb-formula ellentmondásmentességének* ellenőrzésére szolgál. Ha egy adott  $r$  távolsággal végzünk méréseket, akkor ezek a próbák alátámasztják azt a feltételezést, hogy két,  $e_k$  és  $e_l$  töltés közötti erő valóban arányos az  $e_k$  és  $e_l$  mértékekkel.

98. Találkozunk olyan állítással, hogy a (7) képlet egyszerűen a töltések mértékének definíciója. Ez az állítás azonban nem teljes egészében helyes. Látjuk tudniillik, hogy a (8) egyenlet a (7) egyenlet ellenőrzésére felhasználható; ha például négy töltés közötti erőket mérünk és a mérés arra vezetne, hogy

$$\frac{F_{12} F_{13}}{F_{23}} \neq \frac{F_{12} F_{14}}{F_{24}},$$

akkor ez a mérési eredmény a (7) törvénnyel a speciális esetben ellentmondásba kerülne. Tehát (7) nem egyszerűen egy definíciót tartalmaz, hiszen ellenőrizhető. Ugyanakkor — miként ezt most kimutatjuk — a (7) formula definíciót is tartalmaz.

Amennyiben a (8) egyenlet által történő ellenőrzések rendben vannak, még nem következtethetünk egyértelműen arra, hogy a *Coulomb-törvény*

\* Az a tény, hogy az előjeleket ily módon lehet választani, nem a matematikából következhető le, hanem azt fejezi ki, hogy két különböző nemű töltés létezik. Az egynemű töltések taszítják, a különböző nemű töltések pedig vonzzák egymást.

valóban a (7) formulának megfelelő formát ölt. Ha ugyanis (7) helyett azt tételezzük fel, hogy

$$F_{kl} = \frac{\varphi(e'_k) \varphi(e'_l)}{r^2}, \quad (9)$$

ahol  $\varphi(e')$  monoton függvényt jelent akkor, ha (7) helyett (9)-et használunk, (8) helyett azt kapjuk, hogy

$$e'_k = \varphi^{-1} \left( r \sqrt{\frac{F_{kl} F_{km}}{F_{lm}}} \right) = \varphi^{-1} \left( r \sqrt{\frac{F_{kl'} F_{km'}}{F_{l'm'}}} \right) = \dots, \quad (10)$$

ahol  $\varphi^{-1}$   $\varphi$ -nek az inverz függvénye.

Látható, hogy ha (8) kielégül, akkor (10) is kielégül, és fordítva is. Tehát ha néhány különböző  $\varphi$  függvényt behelyettesítünk (9)-be, akkor a *Coulomb-törvény* több olyan formáját találjuk, amelynek mindegyike — ellenőrzés esetében — ellentmondásmentesnek bizonyul, ha az egyik forma ellentmondásmentes.

**99.** Az  $e_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  töltések közötti erőket mérve megállapíthatjuk, hogy (ami a töltéstől való függést illeti) a törvény (9) alakú. Azonban nem kapunk a  $\varphi$  függvényre információt. Valóban,  $\varphi$  választása egészen önkényes és a törvénynek a (7) formulában való felírása annyiban tartalmaz definíciót, hogy  $\varphi(e) = e$  választással él.

A (7) törvény helyett azt is írhatjuk, hogy

$$F_{kl} = C \frac{e_k e_l}{r^2}, \quad (11)$$

ahol  $C$  állandó. A (7) és (11) képletek közötti különbség csak az, hogy a töltésre különböző egységet választottunk. De láttuk, hogy a (7) formulát nagyobb mértékben lehet általánosítani. Ha  $\varphi$  nem lineáris függvény, akkor nem csupán az egységet változtattuk, hanem deformáltuk a skálát, amely szerint a töltéseket mérjük.

**100.** Jelöljük  $e_k$  mértékét  $e_k$ -val, ha a mértéket a (7) formulának megfelelően állapítjuk meg, használjuk viszont az  $e'_k$  jelölést, ha a *Coulomb-törvénynek* a (9) formulában megadott alakját használjuk. Így

$$e_k = \varphi(e'_k).$$

Tehát az  $e_k$  és  $e'_k$  mértékek között létezik egy, egy az egyhez leképezés.

Ily módon  $e_k$ -t és  $e'_k$ -t az  $e_k$  töltés különböző reprezentációjaként vehetjük. Szimbolikusan azt írhatjuk, hogy

$$e_k = R(e_k), \quad e'_k = R'(e_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

ahol  $R$  és  $R'$  két különböző reprezentációt jelent.

### 3. A KITÜNTETETT REPRESENTÁCIÓK

**101.** Ha a *Coulomb*-törvényt mértékszámokban fejezzük ki, akkor az  $R$ , vagy  $R'$  reprezentációt használhatjuk. Az  $R$  reprezentáció egyszerűbb, mint az  $R'$ , minthogy az első esetben a *Coulomb*-törvényben a mértékszámok szorzata fordul elő, míg az  $R'$  reprezentációban, a töltések mérőszámainak komplikáltabb kifejezése szerepel.

Ilyen módon az  $R$  reprezentáció bizonyos előnnyel rendelkezik más reprezentációkkal szemben. De ettől eltekintve más ok is arra késztet, hogy az  $R$  reprezentációt használjuk. Amennyiben két  $e_1$  és  $e_2$  töltést egyesítünk, az egyesített töltések úgy hatnak, mint egy effektív  $e_{12}$  töltés. Szimbolikusan azt is írhatjuk, hogy

$$e_1 \hat{+} e_2 = e_{12}, \quad (12)$$

ahol  $\hat{+}$  azt jelenti, hogy „egyesítjük a töltéseket”. Az  $R$  reprezentációban (12)-öt úgy írhatjuk, hogy

$$e_1 + e_2 = e_{12}. \quad (13)$$

Az  $R'$  reprezentációban azonban (13) helyett azt kell írni, hogy

$$\varphi^{-1}(\varphi(e'_1) + \varphi(e'_2)) = e'_{12}. \quad (14)$$

A (14)-ben felírt összefüggést általánosított összeadásnak is szokásos nevezni.

**102.** Láttuk tehát, hogy  $R$  reprezentációban mind a töltések mértékeinek összege, mind szorzata, a töltések tulajdonságait leíró alapvető törvényekben szerepelnek. Ha ezeket az alapvető törvényeket más reprezentációban írjuk fel, akkor a szorzat és összeg helyett általában komplikáltabb kifejezések szerepelnek.

Az a tény, hogy lehetséges olyan skálákat találni, amelyekben a mérőszámok összege, illetve szorzata egy objektum különleges tulajdonságait fejezi ki, az objektum különleges fizikai tulajdonságát tükrözi.

Legegyszerűbb eset, ahol összeadható mérőszámokat kapunk: valamilyen tárgyak halmaza. Ezeket a halmazokat számokkal jellemezzük és azt találjuk, ha két halmazt egyesítünk, egy új halmazt kapunk, amelynek mérőszáma az eredeti mérőszámok összege. Az emberiség történetében az első eset, ahol ilyen összeadás szerepelt, talán az volt, hogy két csordát egyesítettek, így új csorda jött létre.

**103.** Az elektromos töltések  $R$  reprezentációja kétféle módon van kitüntetve. E reprezentációban két töltés közötti erő a töltés mérőszámainak szorzatával arányos, két töltés egyesülése által létrejött töltés mérőszáma pedig az egyes töltés mérőszámainak összegével egyenlő. Véleményünk szerint általános szabályként fogható fel, hogy *fizikai mennyiségek reprezentációja esetében előnyben részesítjük azokat a reprezentációkat, ahol a mérőszámok összege és szorzata fizikai jelentéssel bír.* (Vannak esetek, ahol csak az összegnek van fizikai jelentése.

Meggyőződésünk, hogy az így kiválasztott mértékszámok a rendszerek fizikai tulajdonságait legjobban tükrözik.

**104.** Ha  $R$  reprezentáció helyett olyan reprezentációt választunk, amely csak az egységtöltés választásában különbözik (lásd a **99.** pontot), ez éppen olyan hasznos, mint maga  $R$ . Így a töltések esetében nem állapíthatunk meg természetes töltés egységet. Bizonyos összefüggésekben az elemi töltést választhatjuk egységnek. Ez az egység azonban számos gyakorlati alkalmazás esetében nagyon kényelmetlennek bizonyulna.

Töltések esetében az egység mértéke nem határozható meg természetes módon, azonban a skála nulla pontja erősen kitüntetett; minden olyan skála választása, amelynek nulla pontja nem a töltésnélküli állapotot jellemzi, rendkívül mesterkéltnek tűnik.

Másik példa a mértékszámok megállapítására a valószínűségskála elemzéséből adódik. Ezt az elemzést máshol megadtuk.\* A valószínűségskála elemzése nagyon hasonló az itteni elemzéshez. Érdekes azonban, hogy a skála esetében a természetes egységet is meg lehet állapítani.

#### 4: A HOSSZMÉRTÉKSZÁMOK

**105.** Ha egy  $l_1$  és egy  $l_2$  hosszúságú rudat egyesítünk egy  $l_{12}$  hosszúságú rúddá, megfelelő mértékszámok esetében azt találjuk, hogy

$$l_1 + l_2 = l_{12}.$$

A hossz skála, amelyben a mértékszámok összeadhatók, a hossz kitüntetett skálájának vehető. Ha egy másik skálát használunk, akkor ebben a skálában az  $l_1$  és  $l_2$  rudak hossza mint  $l'_1 = \varphi^{-1}(l_1)$  és  $l'_2 = \varphi^{-1}(l_2)$  jelentkeznek, és az összetett  $l_{12}$  rúd hossza

$$l'_{12} = \varphi^{-1}(\varphi(l'_1) + \varphi(l'_2))$$

-ként jelenik meg. A  $\varphi$  függvény a skála torzítását jellemzi.

Ha a hosszakat a kitüntetett skála mértékeiben fejezzük ki, szorzatuk területmértéket ad, éspedig

$$S = l_1 l_2,$$

az így kapott területmértékek szintén additívek.

A gyakorlatban — kevés kivételtől eltekintve — nem additív skálák bevezetésének nincs értelme olyan esetekben, ahol additív skálák léteznek. Hangsúlyozni kell azonban, hogy egyáltalán nem triviális tény, hogy bizonyos mennyiségek additív skálával jellemezhetők. Hogy bizonyos fizikai mennyiségek ilyen skálával jellemezhetők, ez általában kísérletileg ellenőrizhető kérdés, — amint ezt például a **101.** pontban az elektromos töltések esetében megmutattuk.

**106.** A következő példával világítjuk meg a kitüntetett reprezentációk szerepét. Képzeljünk el egy egyenes rudat. Gyakorlatilag egy rudat akkor vehetünk egyenesnek, ha éle egy kifeszített zsinórral vagy egy fénysugár pályájával egybeesik. Az egyik definícióról sem állítjuk, hogy több mint egy

\* JÁNOSY L.: Mérési eredmények kiértékelésének elmélete és gyakorlata. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

gyakorlatilag használható módszer, melynek segítségével bizonyos pontossággal megállapíthatjuk egy rúdról, vajon gyakorlati szempontból egyenes-e?

Az egyenes rúd élén  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$  pontokat jelölhetünk ki. Választhatunk továbbá rudakat úgy, hogy az  $r_{kl}$  rúd ( $l > k = 0, 1, 2 \dots n$ ) pontosan a  $\mathfrak{P}_k$  és  $\mathfrak{P}_l$  pontok közé fér.

Először megvizsgálhatjuk, ha az  $r_{kl}$  rudat megfordítjuk, hogy a megfordított állapotban még mindig a  $\mathfrak{P}_k$  és  $\mathfrak{P}_l$  pontok közé fér-e. Miután ezt így találtuk, a rudakat hossz szerint rendezhetjük. Megállapíthatunk így kvalitatív módon egy sorrendet, úgy, hogy

$$r_{k_1 l_1} < r_{k_2 l_2} < \dots$$

Ezek után tetszőleges mértékszámokkal jellemezhetjük a rudakat.

Vegyük

$$R(r_{kl}) = r_{kl},$$

ahol  $r_{kl}$  pozitív számok legyenek, amelyek a

$$r_{k_1 l_1} < r_{k_2 l_2} < \dots \quad (15)$$

egyenlőtlenséget kielégítik, tehát minél hosszabb a rúd, annál nagyobb mértékszámmal jelöljük.

**107.** Kereshetünk egy kitüntetett reprezentációt, úgy, hogy e reprezentációnak megfelelő mérőszámok additívek, tehát kereshetünk olyan mérőszámokat, amelyek

$$r_{kl} + r_{lm} = r_{km}, \text{ ha } k < l < m \quad (16)$$

összefüggéseknek eleget tesznek. Egy ilyen reprezentációt kapunk, hogyha

$$\mathfrak{r}_{kl} = r_l - r_k, \quad l > k \quad (17)$$

választással élünk, ahol  $r_l = r_{0l}, r_k = r_{0k}$  a  $\mathfrak{P}_0$  és  $\mathfrak{P}_l$ , illetve  $\mathfrak{P}_0$  és  $\mathfrak{P}_k$  pontok között elhelyezkedő rudak hosszának mérőszámai. A (17) által definiált mérőszámok additívek.

Ha azonban az  $r_l$  mértékeket tetszőlegesen, csak azzal a megszorítással választjuk, hogy  $l$ -el monoton növekszenek, akkor nem biztos, hogy a (17) által definiált  $r_{kl}$  mérőszámok megfelelőek, hiszen nincs biztosítva, hogy a hosszabb rúdszakaszoknak nagyobb mérőszámok adódnak (17)-ből. Így nem biztos, hogy a (17) által definiált mérőszámok (15)-nek eleget tesznek. Igyekezniünk kell tehát olyan  $r_l$  mérőszámokból kiindulni, hogy a (17) által megállapított  $r_{kl}$ -ek (15)-nek is eleget tegyenek. Amennyiben ez sikerül, ily módon ellentmondásmentes additív skálához jutunk.

**108.** A kérdés az, hogy adott rudak esetében lehetséges-e kitüntetett reprezentációt találni, vagyis  $r_{kl}$  mérőszámokat, amelyek (15)-nek és (16)-nak eleget tesznek? Ez a rudak fizikai tulajdonságaitól függ. A mindennapi gyakorlat azt mutatja, hogy szilárdtest rudak esetében a mérési hibákon belül ilyen mérőszámok megadhatók.

Az érvelést meg is fordíthatjuk és azt mondhatjuk, hogy *ideális szilárd rudaknak* olyanokat *definiálunk*, melyeknek segítségével additív skála előállítható.

Ha viszont valódi rudak segítségével skálát konstruálunk, minden esetben kis szabálytalanságok fognak fellépni. Ezeket a szabálytalanságokat fel tudjuk használni és ezek segítségével meg tudjuk állapítani, hogy a szóban forgó valódi rudak tulajdonságai mennyiben térnek el az ideális rudak tulajdonságaitól.

**109.** Azt is megjegyezzük, hogy ha sikerül  $r_{kl}$  additív mérőszámokat előállítani, akkor ezeket a mérőszámokat helyettesíthetjük:

$$r'_{kl} = ar_{kl}, \quad a > 0.$$

Az  $r'_{kl}$  hosszértékeket új skálában véve adják meg. Új skálát  $a < 0$  értékekkel is bevezethetünk. Ebben az esetben megfordítjuk az eredeti konvenciót és kisebb számokat rendelünk a hosszabb rúdhhoz. Egy ilyen konvenció szokatlan, de ellentmondásmentes.

## B) TÉRKOORDINÁTA-RENDSZEREK

### 1. KOORDINÁTAVEKTOROK MEGHATÁROZÁSA

**110.** A következőkben elemezzük azokat a módszereket, amelyeknek segítségével háromdimenziós koordináta-rendszereket konstruálhatunk. Vegyünk e célra  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$  rögzített pontokat. A pontok közötti távolságokat mérőrudakkal kimérhetjük és így a pontok közötti távolságok (additív) mértékeit

$$K(r_{kl}) = r_{kl}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, N$$

állapíthatjuk meg. Így a kapott értékekre feltételezzük, hogy az

$$r_{kl} + r_{lm} \geq r_{km} \quad (18)$$

összefüggésnek eleget tesznek, ahol az egyenlőségjel akkor érvényes, ha  $\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l$  és  $\mathfrak{P}_m$  egy egyenes vonal mentén helyezkednek el. Ha a (18) összefüggés bárhogyan kiválasztott három pontra érvényes, ez a tény módszerünk kvalitatív ellenőrzésére szolgál. Ez az ellenőrzés többek között alátámasztja a feltételezést, hogy a mérőrudaink mint merev testek viselkednek.

**111.** A  $\mathfrak{P}_k$  pontok  $r_k$  koordinátavektorainak mértékének bevezetése előtt hasznos az  $r_{kl}$  relatív helyzetvektorokat bevezetni, melyek  $\mathfrak{P}_l$  helyzetét  $\mathfrak{P}_k$ -hoz képest rögzítik. Egy  $K$  koordináta-reprezentációban azt írhatjuk, hogy

$$K(r_{kl}) = r_{kl}.$$

A tapasztalatra támaszkodva feltételezzük, hogy egy pont távolsága a másik ponthoz képest három számértékkel jellemezhető, így feltételezzük azt, hogy

$$r_{kl} = r_{kl,1} r_{kl,2} r_{kl,3}$$

ahol  $r_{kl,i}$   $i = 1, 2, 3$   $r_{kl}$ -komponensei.

Arra a kérdésre, hogyan tudjuk megállapítani, hogy pontok helyzetének rögzítésére éppen háromkomponensű vektorokra van szükségünk, később, a **124.** pont végén visszatérünk.



Olyan  $K$  reprezentációkat kereshetünk, amelyekben a relatívhelyzetvektorok mértéke additív, tehát fennáll, hogy

$$\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{r}_{lm} = \mathbf{r}_{km}. \quad (19)$$

A (19) egyenlet ténylegesen három egyenletet képvisel, egy-egy összefüggést ad mindhárom vektorkomponens részére.

A (19) összefüggés automatikusan kielégül, ha azt tételezzük fel, hogy

$$\mathbf{r}_{kl} = \mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k, \quad l, k = 0, 1, \dots, n \quad (20)$$

ahol

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_{0l}, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{0k}.$$

Az  $\mathbf{r}_k$ -t a  $\mathfrak{P}_k, k = 0, 1, 2, \dots$  pont koordinátavektorának vehetjük. A  $\mathfrak{P}_0$  pont, melynek koordinátavektora  $\mathbf{r}_0 = 0$ ,  $K$  origójának vehető.

**112.** Ahhoz, hogy egy kísérletileg ellenőrizhető megállapításhoz jussunk, valamilyen összefüggést kell feltételezni az  $\mathbf{r}_{kl}$  vektorok és  $r_{kl}$ , a távolságok mértékszámai között. Vegyük, hogy az  $r_{kl}$  távolságokat szilárd rudak segítségével állapítottuk meg. Feltételezzük továbbá PYTHAGORAS tételének érvényességét, tehát

$$r_{kl}^2 = \mathbf{r}_{kl}^2, \quad k, l = 0, 1, \dots, n. \quad (21)$$

ahol a rövidség kedvéért azt írtuk, hogy

$$\mathbf{r}_{kl}^2 = \sum_{i=1}^3 r_{kl,i}^2.$$

A (21) összefüggés ortogonális koordináta-rendszerekben érvényes, ferde koordináta-rendszerekben (21) helyett azt vehetjük, hogy

$$r_{kl}^2 = \mathbf{r}_{kl} \mathbf{G} \mathbf{r}_{kl}, \quad (22)$$

ahol  $\mathbf{G}$  egy szimmetrikus pozitív definit mátrix.

Ha speciálisan  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ , akkor (22) (21)-be megy át. A következőkben nem foglalkozunk azzal, hogy reprezentációnk vajon ortogonális vagy ferde ily módon nagyon leegyszerűsíthetjük a számításokat. Így a (22) egyenletet mint egy  $r_{kl}$  távolságok és  $\mathbf{r}_{kl}$  koordináta mértékek közötti hipotetikus összefüggést tekintjük. Az „ortogonális”, illetve „ferde” reprezentáció jelentésének meghatározását későbbre halasztjuk.

**113.** Ahhoz, hogy a (22) egyenletet kísérletileg ellenőrizhessük, (20) segítségével azt írhatjuk, hogy

$$(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \mathbf{G} (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) = r_{kl}^2. \quad (23)$$

Ha  $N + 1, \mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_N$  pontok közötti távolságokat mérjük meg, akkor (23)  $N(N + 1)/2$  egyenletet szolgáltat az  $\mathbf{r}_k, k = 1, 2, \dots, N, 3N$  komponenseire.

Elég nagy  $N$  esetében a (23) egyenletrendszer *túlhatározott*. Matematikai szempontból a (23) egyenletrendszernek ezért egyáltalában nem is kell megoldással rendelkeznie. Ha egy különleges esetben a túlhatározott egyenletrendszer mégis rendelkezik megoldással, nem tekinthetjük ezt a

körülményt véletlennek. Ha egy adott esetben a (23) egyenletrendszer ellentmondásmentes, akkor ez a mérőrudaknak — amelyekkel az  $r_{kl}$  távolságokat mértük — tulajdonságaira enged következtetni. Így a **103.** pont eredményeit kibővítve, arra a következtetésre jutunk, hogy a mérőrudak akkor viselkednek szilárd test módjára, ha a segítségükkel kapott  $r_{kl}$  értékeket a (23) egyenlet formájában kvadratikus kifejezés segítségével lehet előállítani.

## 2. KOORDINÁTAMÉRTÉKEK EXPLICIT MEGÁLLAPÍTÁSA

**114.** A (23) egyenletek explicit megoldásaihoz a következő módon jutunk el. Induljunk ki négy pontból:

$$\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \quad (24)$$

e négy pontról tételezzük fel, hogy nem egy síkban fekszenek. (Később visszatérünk arra, hogyan lehet megállapítani, hogy négy pont nem egy síkban fekszik.)

Tekintsünk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek origója a  $\mathfrak{P}_0$  és melynek tengelyei a  $\overrightarrow{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_k}$ ,  $k = 1, 2, 3$  irányokba mutatnak; továbbá válasszuk az egységeket úgy, hogy a négy pont koordinátavektorait

$$\mathbf{r}_0 = 0, 0, 0, \quad \mathbf{r}_1 = 1, 0, 0, \quad \mathbf{r}_2 = 0, 1, 0, \quad \mathbf{r}_3 = 0, 0, 1, \quad (25)$$

kifejezések adják meg.

Ha (23)-at  $k = 0$ ,  $l = 1, 2, 3$ -ra felírjuk, azt kapjuk, hogy

$$G_{ll} = r_l^2, \quad l = 1, 2, 3, \quad (26)$$

ahol  $r_l$ -t írunk  $r_{0l}$  helyett. A (26) képlet segítségével (23)-ból arra következtetünk, hogy  $k, l = 1, 2, 3$  esetében

$$G_{kl} = \frac{1}{2}(r_k^2 + r_l^2 - r_{kl}^2), \quad \text{ha } k \neq l. \quad (27)$$

Tehát (26) és (27)  $\mathbf{G}$  elemeit meghatározzák, amennyiben a négy — (24)-ben felsorolt — pont koordinátái (25) által meghatározott értékeket vesznek fel.

A későbbiekben szükségünk lesz annak feltételezésére, hogy

$$\det \mathbf{G} \neq 0. \quad (28)$$

Azt, hogy (28) fennáll-e, vagy sem,  $r_{kl}$  numerikus értékeitől függ, hiszen ezek az értékek határozzák meg  $\mathbf{G}$  elemeinek értékeit. A (28) egyenlet jelentése az (mint erre még visszatérünk), hogy a pontok közötti távolságok segítségével megad egy feltételt arra, hogy a (24)-ben felsorolt pontok nem egy síkban fekszenek.

Mellékesen megjegyezzük, hogy abból a tényből, hogy léteznek olyan pontok, melyeknek távolságai a (28)-at kielégítik, azt kell látnunk, hogy a tér legalább háromdimenzionális. Erre a kérdésre a **124.** pont végén visszatérünk.

115. Vizsgáljunk öt pontot:

$$\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_m, \quad m > 3. \quad (29)$$

Ha a (23) egyenletet a pontok közötti távolságokra felírjuk, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$r_k^2 - 2(\mathbf{Gr}_m)_k + \mathbf{r}_m \mathbf{Gr}_m = r_{km}^2, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (30)$$

Ha egy pillanatra feltételezzük, hogy

$$\mathbf{r}_m \mathbf{Gr}_m = r_m^2, \quad (31)$$

akkor a (30) helyett azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{Gr}_m = \mathbf{D}^{(m)},$$

ahol  $\mathbf{D}^{(m)}$  egy vektor, melynek komponensei

$$D_k^{(m)} = \frac{1}{2}(r_k^2 + r_m^2 - r_{km}^2), \quad k = 1, 2, 3, \quad m \geq 4. \quad (32)$$

Igy

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^{(m)}. \quad (33)$$

(33) kizárólag a mért értékek felhasználásával explicit kifejezést szolgáltat az  $\mathbf{r}_m$  vektor komponenseinek számértékeire.

### 3. AZ ELLENTMONDÁSMENTESÉG KÉRDÉSE

116. A (23) egyenletek valóban kielégülnek, ha  $\mathbf{r}_m$ -et a (33)-ból behelyettesítjük a (23)-ba, és tovább feltételezzük azt, hogy (31) fennáll. Az, hogy (31) valóban érvényes, ellenőrizhető úgy, hogy (33)-at, (31)-be behelyettesítjük és akkor a

$$\mathbf{D}^{(m)} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^{(m)} = r_m^2 \quad (34)$$

összefüggést kapjuk. A (34) összefüggés egy másodfokú egyenletet ad  $r_m^2$ -re. Ennek az egyenletnek két megoldása van. Mindkét megoldást a többi távolságok segítségével lehet kifejezni. Amennyiben  $r_m$  mért értéke megfelel a fenti egyenlet egyik megoldásának, akkor (25) és (33) a (29) képletben felsorolt pontok koordinátavektorainak értékeit ellentmondásmentes módon megadja. Ily módon tehát (34) az ellentmondásmentesség egy próbájára vezet. Eme összefüggés segítségével megállapítható, hogy lehetséges-e a (29)-ben felsorolt pontok közötti távolságokat a (23)-ban leírt összefüggésnek megfelelően kifejezni.

117. Ha meggondolásainkat egy hatodik  $\mathfrak{P}_n$  pontra kiterjesztjük, akkor e pont koordinátavektorát,  $\mathbf{r}_n$ -et úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^{(n)},$$

ahol  $\mathbf{D}^{(n)}$  vektor komponenseit (32)-nek megfelelő kifejezések adják meg.

Az így előállított koordinátavektorok akkor adnak egy ellentmondásmentes rendszert, ha (34) mellett még

$$\mathbf{r}_n \mathbf{G} \mathbf{r}_n = r_n^2 \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_n \mathbf{G} \mathbf{r}_m = \frac{1}{2} (r_n^2 + r_m^2 - r_{nm}^2)$$

összefüggések is fennállnak.

Ha a pontok számát tovább növeljük, a fenti módszer segítségével ellentmondásmentes koordinátaértékeket tudunk megállapítani, feltételezve, hogy ilyenek egyáltalában léteznek. Ha  $N > 4$ , akkor a koordinátavektorok  $3N$  komponenseinek

$$M = \frac{1}{2} (N - 3)(N - 4)$$

feltételt kell kielégíteniük ellentmondásmentes esetben.

#### 4. KÜLÖNBÖZŐ REPREZENTÁCIÓK

**118.** Meg kell még vizsgálni azt a kérdést, hogy mennyire befolyásolja eljárásunkat az a tény, hogy a  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$  koordinátavektorokat (25)-nek megfelelően önkényesen választottuk. Megjegyezzük először is, hogy a (33) kifejezés, mely a koordinátavektorok mértékeit adja, csak akkor értelmes, ha (28) teljesül, vagyis, ha  $\mathbf{G}^{-1}$  létezik. Eszerint a  $\mathfrak{P}_k$  pontokat úgy kell választani, hogy  $\mathbf{G}$  determinánusa 0-tól különbözzék. Ezt úgy is lehet értelmezni, hogy amennyiben  $\det \mathbf{G} \neq 0$  a (24)-ben felsorolt pontok nem fekszenek egy síkban. Így azt vehetjük, hogy a

$$\det \mathbf{G} = 0 \quad (35)$$

egyenlet annak definíciója, hogy a pontok egy síkban fekszenek. Megjegyezzük, hogy amennyiben  $\det \mathbf{G} \neq 0$ , akkor a (26)- és (27)-ből adódó  $\mathbf{G}$  pozitív definit.

**119.** Ha sikerül  $N + 1$  pont részére  $\mathbf{r}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ , koordinátavektorokat megállapítani úgy, hogy ezek a koordinátavektorok a (23) kifejezést kielégítsék, akkor a koordinátavektorok lineáris transzformációját képezhetjük:

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{S} \mathbf{r}_k + \mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (36)$$

ahol  $\mathbf{S}$  egy háromszor hármás mátrixot jelent, melynek determinánusa nem egyenlő zéróval. Az  $\mathbf{r}'_k$ -ők éppen úgy felfoghatók, mint a pontok koordinátavektorai, mint az  $\mathbf{r}_k$ -k maguk. Valóban, (36)-ból következik, hogy

$$\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) = (\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) \tilde{\mathbf{S}}^{-1}. \quad (37)$$

Ha most (37)-et (23)-ba behelyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$(\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) \mathbf{G}' (\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) = \mathbf{r}_{kl}^2, \quad (38)$$

ahol

$$\mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1}. \quad (39)$$

Látjuk tehát, hogy amennyiben az  $\mathbf{r}_k$ -k a (23) egyenletrendszert kielégítik, akkor az  $\mathbf{r}'_k$  koordinátavektorok teljesítik a hasonló formájú (38) egyenletrendszert.

**120.** Amikor az  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektorok mértékeit a **114.** pontban megállapítottuk, négy pont koordinátáit (25) szerint önkényesen rögzítettük. Ha viszont abból indulnánk ki, hogy egy megfelelő  $K'$  reprezentációban a négy eredeti pont koordinátavektorai úgy legyenek megadva, hogy

$$\mathbf{r}'_k = r'_{k,1}, r'_{k,2}, r'_{k,3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (40)$$

ahol az  $r'_{kl}$ -ket önkényesen választjuk, ekkor az  $\mathbf{r}'_k$ -kat az eredeti  $\mathbf{r}_k$  transzformáltjainak tekintjük. A transzformáció formája pedig

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{S}\mathbf{r}_k + \mathbf{s}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (41)$$

ahol

$$\begin{aligned} S_{lk} &= r'_{kl} - r'_{0l}, & k, l &= 1, 2, 3. \\ s_l &= r'_{0l}. \end{aligned}$$

Ha egy  $\mathfrak{P}_k$  pont koordinátavektorának  $K$ -ra vonatkozó mértékét a (41) transzformációnak alávetjük, akkor e koordinátavektor reprezentációját egy új  $K'$  rendszerben kapjuk meg. A koordinátavektorok reprezentációját  $K'$ -ben közvetlenül is megkaphatjuk, ha (25) helyett (40) szerint állapítjuk meg a koordinátavektorok mértékeit a  $k = 0, 1, 2, 3$  pontokra. Az egyetlen megszorítás, amelyet a (40) formulában adott értékek esetében figyelembe kell venni az, hogy a koordinátavektor komponenseit úgy kell választani, hogy

$$\det | r'_{kl} - r'_{0l} | \neq 0.$$

E feltétel szükséges ahhoz, hogy  $\det \mathbf{S} \neq 0$  legyen, tehát ahhoz, hogy a (41) transzformáció megfordítható legyen.

A fenti megfontolásokból a következőket látjuk: amennyiben feltételezzük, hogy a távolságok (23) egyenlet szerint kifejezhetők és e feltételezés ellentmondásmentes módon  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektorokhoz vezet, akkor ha a (23) kifejezés helyett (39) kifejezésből indulunk ki, tehát ha  $\mathbf{G}$ -t  $\mathbf{G}'$  mátrixszal helyettesítjük, akkor az új feltételezés szintén ellentmondásmentes koordinátavektor mértékekhez vezet.

**121.** Ha megadunk egy  $\mathbf{G}$  és  $\mathbf{G}'$  mátrixot, akkor találhatóunk olyan  $\mathbf{S}$  mátrixot, hogy (39) teljesül. Azt írhatjuk például, hogy

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}'^{-1/2} \mathbf{G}^{1/2}.$$

Látjuk tehát, hogy amennyiben egy adott  $\mathbf{G}$  mátrix esetében ellentmondásmentes koordinátamértékeket tudunk megadni, akkor ellentmondásmentes koordinátamértékeket kapunk akkor is, ha  $\mathbf{G}$  helyett tetszőleges  $\mathbf{G}'$  mátrixot használunk a távolságot meghatározó kifejezésben. Ezért arra is következtünk, hogy elemezve a pontok közötti  $r_{kl}$  távolságokat, eldönthetjük, hogy ezek a távolságok a pontok koordinátavektoraiból képezett pozitív definit kvadratikus formában kifejezhetőek-e vagy sem. A kvadratikus formában szereplő mátrix elemeire azonban semmilyen információt nem szerezhetünk mérések segítségével.

Ortogonalis koordináták bevezetésére is meg van a lehetőség, melyek esetében  $\mathbf{G}' = \mathbf{I}$ , ha az

$$\mathbf{r}' = \mathbf{G}^{1/2} \mathbf{r}$$

transzformációt alkalmazzuk. Tehát a  $\mathfrak{P}_m$  pont koordinátavektora ortogonalis reprezentációban úgy adódik, hogy

$$\mathbf{r}'_m = \mathbf{G}^{-1/2} \mathbf{D}^{(m)}. \quad (42)$$

**122.** Ahhoz, hogy a fenti eredményt általánosabb formában fejezhessük ki, nevezzük  $\mathfrak{G}$ -t *metrikus tenzornak*. Azt mondjuk, hogy a  $K$  vonatkoztatási rendszerben  $\mathfrak{G}$

$$K(\mathfrak{G}) = \mathbf{G}$$

reprezentációval bír, ahol  $\mathbf{G}$  egy szimmetrikus és pozitív definit mátrix.

A metrikus tenzor

$$\mathbf{G} = K(\mathfrak{G}) \quad \text{és} \quad \mathbf{G}' = K'(\mathfrak{G})$$

reprezentációi között a következő összefüggés áll fenn:

$$\mathbf{G}' = \tilde{\mathfrak{S}}^{-1} \mathbf{G} \mathfrak{S}^{-1},$$

feltételezve, hogy a  $K$  és  $K'$  mértékeiben kifejezett koordinátavektorok

$$\mathbf{r}' = \mathfrak{S} \mathbf{r} + \mathbf{s}$$

szerint függnek össze. Speciális esetként kapjuk meg az ortogonalis reprezentációt, melyről a **121.** pontban szó esett.

## C) KOORDINÁTAREPREZENTÁCIÓVAL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK

### 1. MEGJEGYZÉS A „NEMEUKLIDESZI” GEOMETRIÁRÓL

**123.** A fenti megfontolásokat más módon is kifejezhetjük. Amennyiben  $r_{kl}$  távolságok a (23)-nak megfelelő kvadratikus formában kifejezhetők, azt mondhatnánk, hogy a tér, amelyben a pontok elhelyezkednek, „euklideszi”. Ellenkező esetben — ha a (23) egyenletrendszernek eleget tevő koordinátavektorok nem léteznek — azt is mondhatnánk, hogy a tér „nemeuklideszi”.

Véleményünk szerint azonban ilyen kijelentések értelmetlenek. Az a tény, hogy a túlhatározott (23) egyenletrendszer  $\mathbf{r}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  megoldásokkal rendelkezik, a mérési módszerre és ezen belül a használt mérőrúd tulajdonságaira enged következtetni. Durván fogalmazva, abból, hogy a mérési eredmények ellentmondásmentesek, arra lehet következtetni, hogy a méréshez használt mérőrúdak merev testként viselkednek, vagyis hogy a felhasznált mérőrúdak nem változtatják hosszukat, ha elfordítjuk, vagy egyik helyről a másikra visszük őket.

**124.** A kérdés feltevésnek van egy másik oldala is. A (23) egyenlet a *Pythagoras*-tétel (általánosított) formája és így a fenti eljárást úgy vehetjük,

hogy a *Pythagoras*-tételt kísérleti ellenőrzés alá vetjük. Ez az első látásra paradoxonnak tűnhet, hiszen a *Pythagoras*-tételt geometriai axiómák segítségével szokásos bizonyítani.

Valójában nem paradoxonról van szó. A geometriai axiómák felfogásunk szerint a merev testek bizonyos tulajdonságait írják le. A fent leírt kísérleti vizsgálat tehát arra vezet, hogy eldöntse, vajon a használt mérőrudak valóban ideális merev testként viselkednek-e.

Röviden visszatérünk még arra a kérdésre, vajon honnan tudjuk, hogy a tér valóban háromdimenziós, illetve pontosabban kifejezve, hogy a pontok térbeli helyzetét háromkomponensű mértékszámokkal kell és lehet leírni?

A koordinátamértékeket a (23) túlhatározott egyenletrendszer megoldásaként állapítjuk meg. A (23) egyenletet formálisan tetszőleges komponensű vektorokkal írhatjuk fel. Ha a (23)-at  $n$ -komponensű vektorokra értelmezzük, akkor  $\mathbf{G}$  mátrixot  $n$ -ed rendű pozitív definitnek kell venni. A tapasztalat szerint a (23) egyenletrendszert általában csak akkor tudjuk megoldani, ha  $n \geq 3$ . Az  $n = 1$  vagy 2 esetekben az egyenletrendszer — különleges eseteket kivéve — nem rendelkezik megoldásokkal és így legalább  $n = 3$ -at kell választani ahhoz, hogy megoldásokra jussunk. Ebből arra következtetünk, hogy a koordinátavektorokat legalább 3 komponensűnek kell választani a pontok térbeli leírásához. Tehát a tér háromdimenziós.

Ha egy adott pontrendszer  $n = 2$  vagy  $n = 1$  esetekben is a (23) megoldásokkal rendelkezik, feltételezzük, hogy a pontrendszer síkbeli vagy vonalbeli konfigurációban helyezkedik el. Egy vagy két pont megfelelő eltolásával azonban elérhetjük, hogy olyan pontrendszerhez jussunk, ahol a (23)-nak már nincs megoldása.

## 2. KOORDINÁTATRANSZFORMÁCIÓK ÉS -DEFORMÁCIÓK

**125.** Egy  $\mathfrak{P}_m$  pontokból álló pontrendszer koordinátavektorai legyenek  $\mathbf{r}_m$   $m = 1, 2, \dots, n$ . Adott  $K$  reprezentációban azt találjuk

$$K(\mathbf{r}_m) = \mathbf{r}_m.$$

Egy másik  $K'$  reprezentációban a koordinátavektorok mértékeit lineáris transzformáció segítségével kaphatjuk meg, tehát

$$K'(\mathbf{r}_m) = \mathbf{r}'_m = \mathbf{S}\mathbf{r}_m + \mathbf{s}. \quad (43)$$

A koordinátavektorok lineáris transzformációját azonban más módon is értelmezhetjük. Írjuk (43) helyett

$$\mathbf{r}_m^* = \mathbf{T}\mathbf{r}_m + \mathbf{t}, \quad (44)$$

ahol  $\det \mathbf{T} \neq 0$  és  $\mathbf{t}$  egy állandó vektor. Az  $\mathbf{r}_m^*$  úgy tekinthetők, mint a  $\mathfrak{P}_m^*$  pontok  $m = 1, 2, \dots, n$  koordinátavektorai a  $K$  reprezentációban. Tehát feltételezhetjük, hogy

$$\mathbf{r}_m^* = K(\mathbf{r}_m^*).$$

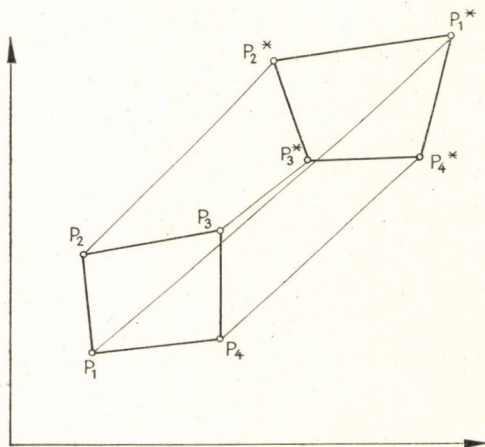
Eme értelmezés szerint a (44) transzformáció egy adott  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  pontrendszerhez egy másik  $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^* \dots \mathfrak{P}_n^*$  pontrendszert rendel. Így a

(44) transzformáció egy pontrendszer deformációját írja le. A deformációt  $K$  rendszerre vonatkozó mértékekben fejeztük ki (14. ábra).

126. Irjuk le ugyanazt a (44) által rögzített deformációt két különböző  $K$  és  $K'$  koordináta-rendszer mértékeiben. Irjuk tehát, hogy

$$K(\mathbf{r}) = \mathbf{r}, \quad K'(\mathbf{r}) = \mathbf{r}',$$

ahol  $\mathbf{r}$  és  $\mathbf{r}'$  (43) szerint kapcsolódnak.



14. ábra. Deformáció sémája

Ha (44)-nek mindkét oldalát a (43) koordinátatranszformációnak alávetjük, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{S}\mathbf{r}_m^* + \mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{r}_m + \mathbf{S}\mathbf{t} + \mathbf{s}, \quad (45)$$

$\mathbf{r}_m$ -et (43) formula segítségével fejezzük ki, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}_m^* - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{s}. \quad (46)$$

(46)-ot, (45)-be behelyettesítve azt találjuk, hogy

$$\mathbf{r}_m^{*'} = \mathbf{T}'\mathbf{r}_m^* + \mathbf{t}', \quad (47)$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}, \quad (48a)$$

$$\mathbf{t}' = (\mathbf{I} - \mathbf{T}')\mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{t}. \quad (48b)$$

A (47) egyenlet a

$$\mathbf{r}_m^{*'} = K'(\mathbf{r}_m^*) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_m' = K'(\mathbf{r}_m)$$

közötti összefüggést írja le, tehát (47) a  $\mathfrak{P}_m$  és  $\mathfrak{P}_m^*$  koordinátavektorai közötti összefüggést a  $K'$  reprezentációban adja meg.

127. Egy még általánosabb jelölési mód szerint azt írhatjuk, hogy

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_m) = \mathfrak{P}_m, \quad (49)$$



ahol  $\mathfrak{I}$  azt a deformációt jellemzi, amelyik a  $\mathfrak{P}_m$  pontokat a  $\mathfrak{P}_m^*$  pontokba viszi át:  $\mathfrak{I}$  reprezentációi  $K$  és  $K'$  rendszerekhez képest:

$$K(\mathfrak{I}) = \mathbf{T}, \mathbf{t},$$

$$K'(\mathfrak{I}) = \mathbf{T}', \mathbf{t}'.$$

A  $\mathbf{T}, \mathbf{t}$  és a  $\mathbf{T}', \mathbf{t}'$  reprezentációk közötti összefüggést (48a,b) képletek adják meg.

A  $\mathfrak{P}_m, m = 1, 2, \dots, n$  mint egy  $\mathfrak{D}$  fizikai rendszer pontjai foghatók fel, tehát

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n.$$

A  $\mathfrak{I}$  deformáció a  $\mathfrak{D}$  pontrendszerből egy

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \dots, \mathfrak{P}_n^*$$

pontrendszerhez vezet, és ezért azt írhatjuk, hogy

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{I}(\mathfrak{D}),$$

ahol  $\mathfrak{D}^*$ -t a  $\mathfrak{D}$  rendszer elmozdításával és deformálásával kapjuk meg. A  $\mathfrak{I}$  operátor határozza meg a változást.

### 3. ORTOGONÁLIS TRANSZFORMÁCIÓK

#### a) Definíciók

**128.** Különösen érdekesek azok az  $\mathbf{O}$  deformációk, melyek a  $\mathfrak{D}$  pontrendszer pontjai közötti  $r_{kl}$  távolságokat változatlanul hagyják. Ha  $\mathbf{T}$  helyett  $\mathbf{O}$ -t írunk, akkor (44) szerint azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_k^* = \mathbf{O}\mathbf{r}_k + \mathbf{t}, \quad (50)$$

tehát

$$\mathbf{r}_{kl}^* = \mathbf{O}\mathbf{r}_{kl},$$

akkor

$$r_{kl}^* = r_{kl} \tilde{\mathbf{O}}\mathbf{G}\mathbf{O}r_{kl}. \quad (51)$$

Ha most  $\mathbf{O}$  eleget tesz az

$$\tilde{\mathbf{O}}\mathbf{G}\mathbf{O} = \mathbf{G} \quad (52)$$

összefüggésnek, akkor (51) segítségével azt találjuk, hogy

$$r_{kl}^* = r_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

és ezek szerint az  $\mathbf{O}$  deformációs mátrix olyan változásra vezet, melyben a pontok közötti  $r_{kl}$  távolságok változatlanok maradnak. Az ilyen matrixokat *ortogonális mátrixoknak* és az (50)-ben kifejezett transzformációkat *ortogonális transzformációknak* nevezzük.

Ha egy  $K_0$  ortogonális reprezentációt, amelyben  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ , választunk, akkor (52)

$$\tilde{\mathbf{O}}\mathbf{O} = \mathbf{1}$$

formát vesz fel.

**129.** Az (52) egyenlet az ortogonális mátrixoknak egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó definícióját adja meg. Azonban azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{O} = K(\mathfrak{D}) .$$

(48a) és (39) segítségével azt találjuk, hogy

$$\mathbf{O}' = \mathbf{SOS}^{-1}, \quad \mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{GS}^{-1}, \quad (53)$$

ahol

$$\mathbf{O}' = K'(\mathfrak{D}) \quad \text{és} \quad \mathbf{G}' = K'(\mathfrak{G})$$

tehát ha (53)-at (52)-be behelyettesítjük, azt találjuk, hogy

$$\tilde{\mathbf{O}}'\mathbf{G}'\mathbf{O}' = \mathbf{G}' .$$

Mindebből azt látjuk, hogy az (52) összefüggés a koordináta-rendszertől függetlenül fennáll, vagyis ugyanazt a formát ölti, a  $\mathfrak{G}$  és  $\mathfrak{D}$  bármelyik reprezentációját választjuk is.

**130.** Az (52) összefüggés kilenc egyenletet ír elő  $\mathbf{O}$  kilenc eleme számára. Azonban minthogy  $\mathbf{G}$  szimmetrikus mátrix, ezért a kilenc egyenletből csak hat független, és ezért az (52)-öt kielégítő mátrixok egy három paramétertől függő családot alkotnak. Ezt a tényt úgy is kifejezhetjük, hogy  $\mathbf{O}$  helyett  $\mathbf{O}_p$ -t írunk, ahol  $p$  a paramétereket jelöli. Ily módon  $\mathbf{O}_p$  jelölést is használhatunk abban az értelemben, hogy

$$K(\mathfrak{D}_p) = \mathbf{O}_p, \quad K(p) = p$$

így tehát  $p$ -t írunk egy adott ortogonális deformáció jellemzésére, és egy  $K$  reprezentáció esetében  $p$ -t írunk a  $p$  reprezentációjaként.

### b) Az ortogonális mátrixok csoporttulajdonságai

**131.** Az  $\mathbf{O}_p, \mathbf{O}_q, \dots$  mátrixok az úgynevezett ortogonális csoportot képezik.

Az ortogonális mátrixok csoporttulajdonságának kimutatására képezzük az (52) egyenlet mindkét oldalának determinánsát. Minthogy  $\det \mathbf{G} > 0$ , azt találjuk, hogy

$$\det \mathbf{O} = \pm 1 . \quad (54)$$

Látjuk tehát, hogy az ortogonális mátrixok egy részének determinánsa  $+1$ , a másik részüké pedig  $-1$ . Az (54) összefüggésből arra következtethetünk, hogy minden  $\mathbf{O}_p$  ortogonális mátrix egy  $\mathbf{O}_p^{-1}$  inverzzel rendelkezik; ha tehát (52)-öt balról  $\tilde{\mathbf{O}}_p^{-1}$ -nel, jobbról pedig  $\mathbf{O}_p^{-1}$ -nel beszorozzuk, azt találjuk, hogy

$$\tilde{\mathbf{O}}_p^{-1} \mathbf{G} \mathbf{O}_p^{-1} = \mathbf{G} ,$$

tehát  $\mathbf{O}_p^{-1}$  maga is ortogonális mátrix. Továbbá, ha  $\mathbf{O}_p$  és  $\mathbf{O}_q$  ortogonális mátrixok, akkor

$$\tilde{\mathbf{O}}_p \mathbf{G} \mathbf{O}_p = \tilde{\mathbf{O}}_q \mathbf{G} \mathbf{O}_q = \mathbf{G} . \quad (55)$$

A szorzat

$$\mathbf{O}_r = \mathbf{O}_p \mathbf{O}_q$$

— mint ahogy megmutatjuk — szintén egy ortogonális mátrix. Ha ugyanis (52)-öt balról  $\tilde{\mathbf{O}}_q$ -val, jobbról pedig  $\mathbf{O}_q$ -val beszorozzuk és figyelembe vesszük, hogy  $\tilde{\mathbf{O}}_r = \tilde{\mathbf{O}}_q \tilde{\mathbf{O}}_p$ , akkor azt kapjuk, hogy

$$\tilde{\mathbf{O}}_r \mathbf{G} \mathbf{O}_r = \mathbf{G}.$$

Az egységmátrix (52)-nek magától értetődően eleget tesz, továbbá a mátrixszorzás asszociatív. Mindebből az következik, hogy az (52) összefüggést kielégítő mátrixok az összes csoportkövetelményeknek eleget tesznek, és így csoportot képeznek.

A  $\det \mathbf{O} = +1$ -et kielégítő mátrixok alcsoportot képeznek, ezeket tényleges ortogonális csoportnak nevezzük.

Mínt hogy az  $\mathbf{O}_p$ -k csoportot alkotnak, következésképpen a mátrixok transzformáltjai, tehát

$$\mathbf{O}'_p = \mathbf{S} \mathbf{O}_p \mathbf{S}^{-1}, \quad (56)$$

szintén csoportot alkotnak. Az (56) egyenlet mellékesen a  $p$  reprezentációi közötti összefüggést is megadja.

**132.** Különös esetként vizsgáljuk azt a koordinátatranszformációt, ahol a transzformációs mátrix ortogonális, azaz  $\mathbf{S} = \mathbf{O}^{(q)}$ . A paraméter felső indexként való használatával tüntetjük fel, hogy  $\mathbf{O}^{(q)}$  nem operátort, hanem koordinátatranszformációt ír le. Ortogonális koordinátatranszformáció esetében (56) helyett azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{O}'_p = \mathbf{O}^{(q)} \mathbf{O}_p \mathbf{O}^{(q)-1}. \quad (57)$$

Az ortogonális transzformációk csoporttulajdonságaiból következik, hogy az (57) jobb oldalán felírt szorzat ortogonális mátrix.

Azok az  $\mathbf{O}'_p$  mátrixok tehát, amelyek az ortogonális deformációk  $K'$ -ben való reprezentációit képezik, ugyanazokat az elemeket tartalmazzák, mint azok, amelyek az ortogonális  $K$  rendszerben reprezentálják. Ugyanazt a deformációt a  $K$  és  $K'$  reprezentációban más és más ortogonális mátrix reprezentálja, tehát a koordinátatranszformáció a paramétereket sajátos módon felcseréli.

A koordinátatranszformációk paramétereit legcélszerűbben úgy határozhatjuk meg, hogy

$$\mathbf{O}^{(q)} = \mathbf{O}_q^{-1}. \quad (58)$$

A fenti definíció értelmében tudniillik

$$\mathbf{r}_{kl}^{*'} = \mathbf{O}^{(q)} \mathbf{O}_q \mathbf{r}_{kl} = \mathbf{r}_{kl}.$$

Igy tehát az  $\mathbf{O}^{(q)}$  transzformáció, amely  $K$ -ból  $K'$ -be vezet, ugyanazokkal az elemekkel rendelkezik, mint  $\mathbf{O}_q$  deformációoperátor, amely  $\mathbf{r}_{kl}$ -ből  $\mathbf{r}_{kl}^{*}$ -ba vezet.

**133.** Felmerül az a kérdés, hogy az  $\mathfrak{D}_p$  transzformáció különböző  $\mathbf{O}_p, \mathbf{O}'_p, \mathbf{O}''_p, \dots$  reprezentációi milyen közös ismertetőjellel rendelkeznek? (56)-ból látjuk, hogy a reprezentáció megváltozása az  $\mathbf{O}_p$  mátrix sajátértékeit változatlanul hagyja. Egy valós elemekkel rendelkező  $\mathbf{O}_p$  mátrix sajátértékeit

$$e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}, 1$$

formába írhatjuk, tehát a sajátértékek csak a valós  $\varphi$  paramétertől függenek. Miként az könnyen belátható, egy ortogonális deformáció

$$\mathbf{r}_n^* = \mathbf{O}_p \mathbf{r}_n + \mathbf{t}$$

mindig úgy tekinthető, mint egy eltolás és egy  $\varphi$  szöggel való elforgatás.  $\varphi$  az  $\mathbf{O}_p$  sajátértékeiből meghatározható.

Egy adott ortogonális mátrixot a  $\varphi$  szög jellemzi olyan értelemben, hogy a reprezentációtól függetlenül  $\varphi$  segítségével a matrix sajátértékei kifejezhetők. Azonban egy ortogonális mátrix egy  $\varphi$  szög nagyságú forgatást *adott irányú* tengely körül ír le, így egy ortogonális mátrixot valóban három paraméter jellemez, tudniillik az elforgatási  $\varphi$  szög és egy, a forgatási tengely irányába mutató egységvektor. Így egy ortogonális mátrix paramétereiként vehetjük a  $\boldsymbol{\varphi}$  vektort, amelynek hossza az elforgatási szög, és iránya a forgatási tengely. Megjegyezzük, hogy koordinátatranszformáció esetében e vektor hossza nem változik.

Mint érdekes különleges esetet említjük meg, hogy minden  $\mathfrak{D}_p$ -hoz található egy olyan ortogonális reprezentáció, melynek formája

$$K_0(\mathfrak{G}) = \mathbf{1},$$

$$K_0(\mathfrak{D}_p) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

ahol  $\varepsilon = +1$  a valódi és  $\varepsilon = -1$  az improprius ortogonális mátrixok esetében.

$\varphi$  mértéke a reprezentációtól független értékkel rendelkezik, tehát

$$K(\varphi) = K'(\varphi) = K''(\varphi) = \dots = \varphi$$

minden vonatkoztatási rendszerben. Az improprius deformáció forgatás mellett a forgástengely síkjára merőleges tükrözést is tartalmaz.

#### 4. MEREV TESTEK

**134.** A (44) deformáció olyan változásokat ír le, melyeket a szilárd test szenved, ha elmozgatjuk, és mechanikai feszültséget hozunk létre. Az (50) ortogonális összefüggésnek megfelelő deformáció akkor jön létre, ha egy merev testet elforgatunk. Egy fizikai rendszert akkor nevezhetünk merevnek, ha pontjai elmozdulását mindig ortogonális transzformációval lehet leírni.

Ez utóbbi kijelentés első pillanatban circulus vitiosus-nak tűnhet. Hiszen a **115.** pont módszereit használva, merev testek segítségével állapítjuk meg a koordinátavektor mértékeit. Most a koordinátamértékek segítségével definiáljuk a merev testeket.

Részletesebben elemezve azonban azt találjuk, hogy a fenti kijelentés fizikai tartalommal rendelkezik.

Koordinátavektorokat mérőrúdak segítségével tudunk megállapítani, melyről feltételezzük, hogy merev testként viselkednek. Hogy ezek a mérő-

rudak valóban merev testként viselkednek-e vagy sem, azt a **116.** pontban leírt megfontolások alapján utólag meg tudjuk állapítani. Tehát arra a következtetésre jutunk, hogy koordináta-rendszereket merev testként viselkedő mérőrudak segítségével tudunk felépíteni. Azonban azt a tényt, hogy ezek a mérőrudak valóban merev testként viselkednek, az eljárás sikere bizonyítja, ti. az a tény, hogy az ily módon kapott koordinátavektorok ellentmondásmentes rendszert alkotnak.

Azt, hogy szilárd testek jó közelítésben merev testként viselkednek, olyan tapasztalatokból tudjuk, amelyeket asztalosok, építészek, mérnökök és geodéták szereztek.

Megjegyezzük azonban, hogy ezek a gyakorlati tapasztalatok csupán azt mutatják, hogy szilárd testek *közeliítőleg* viselkednek merev testként. Ezeket a tapasztalatokat azonban extrapolálhatjuk, és így absztrakció segítségével az ideális merev test fogalmához jutunk. A valódi szilárd testek külső hatások alatt bizonyos mértékben deformálódnak, ezek a deformációk azonban megállapíthatók, ha megvizsgáljuk viselkedésük eltérését az ideális merev testek viselkedésétől.

**135.** Megjegyezzük, hogy ezek a megfontolások a merev test viselkedésének csak szükséges feltételeihez vezetnek. Ha olyan különleges szerkezetű testekkel találkozánk, amelyek mozgás során oly módon deformálódnának, hogy ezek a deformációk egymást pontosan kompenzálják, ilyen testek segítségével megtörténhetne, hogy ellentmondásmentes koordináta-rendszereket konstruálunk, és nem vesszük észre az egymást leplező furfangos deformációkat.



## A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ

## A) IDŐSKÁLA

## 1. ÁLTALÁNOS MEGJEGYZÉSEK

**136.** Mozgó fizikai rendszerek leírásához a koordináta-mértékek mellett időmértékekre is szükségünk van. Legegyszerűbb eset, ha egy részecske pályáját kívánjuk leírni. Egy adott  $K$  reprezentációban a részecske pályáját négyes koordináta segítségével írhatjuk le:

$$\mathbf{x}(p) = \mathbf{r}(p), t(p), \quad (1)$$

ahol  $p$  független paraméter,  $\mathbf{r}(p)$  a részecske helyzetvektora  $t(p)$  időpontban, és feltételezzük, hogy

$$\dot{t}(p) \neq 0.$$

A pont  $p$  szerinti differenciálást jelent. Ahhoz, hogy pályákat ily módon leírassunk, egy vonatkoztatási rendszerre van szükségünk. Vonatkoztatási rendszerként rögzítsünk  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  pontokat, melyek valamilyen  $\mathfrak{R}$  tartományban helyezkednek el, s a pontok közelében  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$  órákat helyezünk el. Egy ilyen  $K$  vonatkoztatási rendszerben önkényes számértékekkel fejezhetjük ki a helyvektorokat:

$$K(\mathbf{r}_\nu) = \mathbf{r}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

az órákat pedig többé-kevésbé önkényes módon szabályozhatjuk.

Tisztán kvalitatív módon azt az igényt támaszthatjuk, hogy az egymáshoz közeli pontok koordinátavektor-mértékei ne különbözzenek egymástól túl erősen, és az egymáshoz közeli órák állásai se különbözzenek nagyon egymástól. Standard órák és pontok segítségével leírhatunk egy vonatkoztatási rendszert. Az  $\mathfrak{R}$  tartományt átszelő részecske pályájának  $\mathbf{x}(p)$  négyes koordinátáit megállapíthatjuk, ha az adott koordinátamértékek között interpolálunk.

**137.** Az előző fejezetben megmutattuk, hogy merev mérőrudak segítségével a koordinátavektoroknak egy kitüntetett reprezentációjához jutunk. Ezek a kitüntetett koordináták a merev testek tulajdonságait tükrözik. Felmerül a kérdés, hogy vajon lehetséges-e időmértékekre is kitüntetett reprezentációt találni, úgy, hogy e reprezentáció valamilyen fizikai folyamatot egyszerű módon tükrözzön?

**138.** Valódi fizikai folyamatokból kiindulva a kitüntetett időmérték bevezetésére megvan a lehetőség. Mielőtt azonban valódi folyamatok elemzé-

séhez kezdünk, hangsúlyozzuk, hogy az *idő mint olyan* nem rendelkezik semmiféle ritmussal, és az időt nagyon különböző időmértékek segítségével lehet kifejezni. Mindaz, amit az időről mondhatunk, az, hogy az idő egy irányban folyik. Az irodalomban elég nagy a zavar, minthogy sokszor a kitüntetett időskála kiválasztását összetévesztik az „idő definíciójával”.

Ha valódi jelenséget elemzünk, akkor folyamatok ritmusát hasonlíthatjuk össze egymással. Megállapíthatjuk így, hogy az egyik folyamat a másikkhoz képest felgyorsul vagy lelassul. Azonban a megfigyelések mindig az időben lefolyó folyamatokra és e folyamatok összehasonlítására vonatkoznak.

**139.** A *Newton*-féle első törvény egy elvi lehetőséget nyújt a kitüntetett időskála megállapítására. Ha tudniillik *NEWTON* első törvénye érvényes, akkor léteznie kell egy olyan *K* vonatkoztatási rendszernek, melynek mértékeiben a szabad részecskék pályája lineáris módon írható le, tehát

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t. \quad (2)$$

A (2) összefüggés kísérletileg ellenőrizhető. Ebből a célból egy egyenesvonalú *K* koordináta-rendszert használhatunk fel, melynek koordinátamértékei szilárd testek segítségével kerültek meghatározásra.

Tételezzük fel, hogy a standard órákat tetszőlegesen állítottuk be. Egy szabad részecske mozgásának időbeli lefolyásának leírásaként feljegyezzük, hogy a különböző standard órák milyen időmértéket mutatnak azokban a pillanatokban, amikor az egyenes vonalon mozgó részecske megközelíti. Ezután megpróbáljuk a standard órák ritmusát és fázisát úgy szabályozni, hogy egynéhány adott részecske a szabályozott órák szerint a (2) egyenlet szerint mozog, tehát azonos időközökben azonos távolságokat tesz meg. Miután néhány megfelelően kiválasztott részecskepálya segítségével az órákat ily módon beszabályoztuk, megvizsgálhatjuk, hogy a most már szabályozott órák segítségével leírt további részecskék pályái szintén a (2) egyenlet szerint adódnak-e.

Tehát egy megfelelő számú szabad részecskepálya megfigyelésével *K* különböző részein fekvő órákat szinkronizálhatunk, és további részecskepályák megfigyelésével a szinkronizáció ellentmondásmentességét ellenőrizhetjük.

Az így beállított órák leolvasásából kapott időmértékeket az időmérték kitüntetett reprezentációjaként foghatjuk fel. *Ideális óráknak* nevezzük azokat az órákat, amelyek automatikusan, korrekció nélkül adják ezeket a kitüntetett mértékeket.

Az ideális órák éppen úgy, mint az ideális merev testek, absztrakciók. Viszont ha néhány olyan igazi órával rendelkezünk, amelyek jó közelítésben úgy viselkednek, mint ideális órák, ezeknek az ideális óra viselkedésétől való eltérését megállapíthatjuk, ha például az igazi órák használata esetén létrejövő eltéréseket a (2) egyenlettől figyelembe vesszük. Azt is mondhatjuk, hogy egy ideális órának állandó ritmusa van, vagy azt is, hogy egyenletesen jár.

**140.** Leírtunk az előbbieken egy módszert, amely *NEWTON* első törvényének segítségével kitüntetett időskála bevezetésére elvben alkalmas.



E módszer azonban csak elvi módszer, melyet a gyakorlatban nem lehet felhasználni, minthogy mindenütt gravitációs mezővel vagyunk körülvéve, és ezért nem rendelkezünk szabadon a (2) formula szerint mozgó részecskékkel.

Ennek ellenére a *Newton*-féle törvények segítségével sikerül órákat szinkronizálnunk. Ehhez a *Newton*-féle törvényeknek azt a formáját kell használnunk, mely megadja, hogyan mozognak a testek külső erők hatására. Így például arra az eredményre jutunk, hogy a Föld tengelye körül állandó szögsebességgel forog. Ebből az következik, hogy a csillagok az égbolton végzett látszólagos mozgását megfigyelve egy egyenletes időskálához jutunk. E skálát *sziderikus* időskálának nevezzük. A mechanikai törvények ellentmondásmentességét úgy ellenőrizhetjük, hogy a csillagászati megfigyelésekből kapott sziderikus időskálát olyan időmértékekkel hasonlítjuk össze, melyeket mechanikai órák segítségével kapunk. Ez utóbbi órák a fenti értelmezés szerint — jó közelítésben — szintén ideális óráknak foghatók fel.

**141.** Másfajta időskálához jutunk, ha a naprendszerben mozgó bolygók pályáit figyeljük meg. A *Newton*-féle törvények szerint ezek a pályák a *Kepler*-féle ellipszisek, amelyek a bolygók közötti kölcsönhatás folytán perihélium-mozgást mutatnak.

A bolygómozgás megfigyeléséből egy olyan vonatkoztatási rendszert tudunk konstruálni, amelynek mértékeiben a *Newton*-féle törvények jó közelítésben érvényesek. Egy ilyen rendszert *inerciális rendszernek* nevezünk.

A bolygómozgás által nyert mértékek ily módon kitüntetett időskálához vezetnek, amelyet *ephemerikus* skálának is neveznek, s amely a legalapvetőbb időskála, amivel ez idő szerint rendelkezünk.

A fenti módszer nemcsak az inerciális rendszerek és kitüntetett időskála bevezetéséhez, hanem egyidejűleg a bolygómozgás törvényeinek belső ellenőrzéséhez is vezet. Ez abból a tényből is látható, hogy nem sikerült egy olyan inerciális rendszert bevezetni, amelyben a *Newton*-féle törvények egészen pontosan érvényesek lennének. A legjobb ilyenfajta rendszer mértékeiben a *Newton*-féle törvények nagyon pontosan érvényesek, a Merkúr pályájának perihéliummozgása azonban kb. 0,4"-cel mégis eltér évente a számított értékektől. Ez az anomália azt mutatja, hogy a *Newton*-féle törvények egy nagyon kicsi, de észrevehető pontatlansággal írják le a valódi mozgást.\*

**142.** Kitüntetett időskálákat tehát különböző módokon konstruálhatunk. Felállíthatunk egy skálát közönséges órák segítségével, másrészt felállíthatunk egy időskálát a Föld forgásának megfigyelése segítségével, és további skála adódik a bolygómozgás megfigyeléséből.

E különböző skálák összehasonlításakor ellenőrizzük az ellentmondásmentességet. Ezek az ellenőrzések részben azt vizsgálják, vajon helytállók-e

\* Végeztek olyan vizsgálatokat, melyekben feltételezték, hogy egy porfelhőben való súrlódás okozná az anomális mozgást. Arra is felhívták a figyelmet, hogy a Nap belsőjében való tömegeloszlás is perturbációt gyakorolhat a Merkúr pályamozgására.

A probléma sokirányú megvizsgálása arra az általánosabb felfogásra vezetett, hogy ezt az anomáliát nem valami külső zavaró körülmény okozza, hanem létezik a *Newton*-féle gravitációs törvénytől való eltérés. E kérdésről való vita azonban még nincs lezárva.

a mozgástörvényeknél alkalmazott hipotézisek; másrészt azonban egyszerűen azt mutatják, hogy a használt órák valóban olyan ideális órák-e, mint ahogy ezt feltételeztük.

Igy például, ha egy ingaóra szabálytalanságokat mutat a sziderikus időskálával összehasonlítva — vagyis, ha az ingaóra mozgása bizonyos mértékben szabálytalan a Föld mozgásához viszonyítva —, akkor bizonyára azt tételezzük fel, hogy az inga nem viselkedik merev testként, vagy az óra mechanizmusában egyéb fogyatékoság található.

**143.** Mélyebb probléma merül fel akkor, ha a sziderikus időskálát az ephemerikus skálával hasonlítjuk össze. A megfigyelések azt mutatják, hogy a két időskála között valóban mutatkoznak eltérések. Csillagászati megfigyelések azt mutatják, hogy nemtriviális eltérés mutatkozik  $t_S$ , a sziderikus időmérték és az ephemerikus  $t_E$  időmérték között, azaz

$$d^2 t_S / dt_E^2 \neq 0.$$

Az eltérés a két skála között csak úgy értelmezhető, ha feltételezzük, hogy a Föld forgása nem egyenletes, ha az ephemerikus skálán mérjük. Minthogy azonban a két skála közül az ephemerikus skála az alapvetőbb, ez azt mutatja, hogy valamilyen fizikai folyamat zavarja a Föld egyenletes forgását.

Nagyon valószínű, hogy a fenti eltérést az okozza, hogy a Földet nem lehet ideális merev testnek tekinteni. A Föld tehetetlenségi nyomatéka kis időbeli változásokat szenved, amely változások a forgást egyenetlenné teszik. Ebben az értelemben a forgó Föld eltér egy tengelye körül forgó ideális merev test által szolgáltatott ideális órától.

## 2. AZ ATOMI-IDŐSKÁLA

**144.** Az atomórák szerkesztése újabban annyira tökéletesedett, hogy már az azok segítségével is képesek vagyunk egy jól definiált  $t_A$  időmértéket előállítani. Felmerül tehát a kérdés: ha egy elég pontos atomórával definiált időmértéket az ephemerikus időmértékkel összehasonlítunk, fennáll-e vajon a

$$d^2 t_A / dt_E^2 = 0 \tag{3}$$

összefüggés. Jelenleg semmi okunk nincs a (3) formulában kételkedni. Amennyiben az esetleges jövőbeli megfigyelések arra vezetnének, hogy a (3) nem áll fenn, elméleti szempontból ez érdekes tényállást jelentene.

Elvi problémaként most is felvethetjük, hogy amennyiben a (3) összefüggéstől eltérő eredmény mutatkoznék, *lehetne-e azt kérdezni, vajon az ephemerikus vagy az atomi-időskála az igazi időskála?*

Ez a kérdés azonban értelmetlen. A (3) összefüggéstől való eltérés egyszerűen arra mutatna, hogy bizonyos mennyiségek, amelyeket állandóknak tartunk, valóságban egymáshoz képest változnak. Megjegyezzük, hogy a sziderikus időskála azon a feltételezésen alapul, hogy a Föld állandó szög-

sebességgel forog. A szögsebesség állandósága azon alapszik, hogy  $M_E$ , a Föld tehetetlenségi nyomatéka állandó. A sziderikus és ephemerikus skálák közötti eltérés viszont azt mutatja, hogy  $M_E$  valójában változásokat szenved. Hasonló módon a (3) összefüggés akkor érvényes, ha bizonyos elemi állandók, egyrészt a  $G$  gravitációs állandó, másrészt az  $e$  elemi töltés, a Planck-féle  $\hbar$  állandó és mások állandó értékkel rendelkeznek. Ha ezen állandók között az egyik a másikhoz képest időben változna, akkor e változás a (3) összefüggéstől való eltéréshez vezethetne.

Olyan elméletet már javasoltak, amely szerint a gravitációs állandó időben változik. Ilyen változás a (3) egyenlettől való eltérésre vezethetne.

### 3. FÉNYJELEK SEGÍTSÉGÉVEL KONSTRUÁLT VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK

**145.** A vonatkoztatási rendszerek, az időskálát beleértve, felépíthetők fényjelek terjedésének megfigyelése segítségével is. Abból a feltételezésből indulhatunk ki, hogy a fény állandó  $c$  sebességgel izotróp módon terjed. Ha ez a feltételezés egy  $K$  vonatkoztatási rendszerben érvényes, akkor fényjelek segítségével a  $K$  rendszer koordináta- és időmértékeit meg tudjuk határozni, miként ezt a következő pontokban részletesen kifejtjük.

**146.** Fényjelek segítségével idő- és koordinátamértékeket két lépésben kaphatunk meg. Képzeljünk el  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$  órákat, melyek  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  pontok közelében helyezkednek el. A  $\mathcal{C}_0$  órát standard órának vesszük. A  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$  órák ritmusát úgy állíthatjuk be, hogy  $\mathcal{C}_0$  óra ritmusával megegyezzenek. Ehhez a  $\mathcal{C}_0$  órát távcső segítségével a  $\mathcal{C}_k$   $k = 1, 2, \dots$  órák helyeiről megfigyeljük. A  $\mathcal{C}_k$  óra ritmusát úgy állítjuk be, hogy megfeleljen a távcsőben megjelenő  $\mathcal{C}_0$  óra  $\mathcal{C}_0^{(k)}$  képe ritmusának. Ha most egymás után  $\mathcal{C}_k$   $k = 1, 2, 3, \dots$  ritmusát, így a  $\mathcal{C}_0$  órához állítottuk, e beállítás ellentmondásmentességéről meggyőződhetünk. Ha ugyanis a beállítás ellentmondásmentes, akkor azt várjuk, hogy az órák ritmusa ne csak a  $\mathcal{C}_0$  óra ritmusával egyezzen meg, hanem egymás között is megegyezzenek a ritmusok. Tehát, ha a  $\mathcal{C}_k$  menetét nem  $\mathcal{C}_0$  képével, hanem  $\mathcal{C}_l^{(k)}$ ,  $l > 0$ , azaz a  $\mathcal{C}_l$   $\mathfrak{P}_k$  pontban megfigyelt képének járásával hasonlítjuk össze; azt kell várni, hogy e két óra ritmusa egymásnak megfeleljen.

Ha ezek az ellenőrzések kielégítőek, ez a tény egyrészt a fény terjedési módjára vonatkozó eredeti hipotézist támasztja alá, másrészt azonban azt is alátámasztja, hogy a  $\mathcal{C}_0$  standard óra ritmusa és az órák közötti távolságok is állandók.

**147.** Miután sikerült a  $\mathcal{C}_k$  órák ritmusát szabályozni, megállapíthatjuk a  $\mathfrak{P}_k$  és  $\mathfrak{P}_l$  pontok közötti  $r_{kl}$  távolságokat a pontok mellett levő  $\mathcal{C}_k$  és  $\mathcal{C}_l$  órák segítségével. Ha a  $\mathfrak{P}_l$  pont közelében egy tükröt állítunk fel, akkor a  $\mathcal{C}_k$  óra segítségével mérhetjük  $t_{kl}$  időt, mely alatt egy fényjel  $\mathfrak{P}_k$ -ből  $\mathfrak{P}_l$ -be és vissza halad. Feltételezzük, hogy

$$r_{kl} = \frac{1}{2} ct_{kl}. \quad (4)$$

Ha most ily módon különböző pontpárok között haladó fényjeleket megfigyelünk, akkor (4) segítségével a pontok közötti távolságok  $r_{kl}$  mérőszámait kísérletileg meghatározhatjuk. Ahhoz, hogy az  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektorok értékeit megállapítsuk, meg kell próbálnunk az

$$(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)^2 = r_{kl}^2, \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (4a)$$

egyenleteket kielégíteni. Mint ahogyan ezt már a **115.** pontban kifejtettük, a fenti egyenletek általában  $n > 4$  esetében túlhatározottak. Abban az esetben, ha a (4a) egyenletrendszernek mégiscsak van megoldása, akkor a megoldásokat a **115.** pont (33) formula segítségével megkaphatjuk. Az eljárás végeredményben ortogonális koordinátareprezentációra vezet.

Megjegyezzük többek között, hogy a (4a) bal oldala szimmetrikus  $k$ -ban és  $l$ -ben, tehát (4a)-nak csak akkor van megoldása, ha  $r_{kl} = r_{lk}$ . Ez utóbbi egyenlőség azért nem triviális, mert  $r_{kl}$ -t és  $r_{lk}$ -t két egymástól független mérés segítségével állapítottuk meg. Az egyik esetben  $\mathfrak{P}_k$ -ből  $\mathfrak{P}_l$  felé induló fényjel oda-visszaútját vizsgáltuk, a másik esetben pedig a megfigyelést  $\mathfrak{P}_l$  pontban végeztük.

Miután az oda-vissza jelekkel meghatározott  $r_{kl}$  értékekről kimutattuk, hogy ellentmondásmentes mértékeket adnak, a második lépéshez folyamodhatunk: az órák fázisainak beállításához. Azt várjuk, hogy a  $\mathcal{C}_0$  órát a  $\mathfrak{P}_k$  pontból figyelve,  $\mathcal{C}_0$ -nak a  $\mathcal{C}_0^{(k)}$  képe  $\Delta t_k = r_k/c$ -vel késik  $\mathcal{C}_0$ -hoz képest. Tehát  $\mathcal{C}_k$  fázisát úgy kell beállítani, hogy a  $\mathcal{C}_0^{(k)}$  képhez  $\Delta t_k$  fáziseltolódást mutasson.

Ha ily módon a  $\mathcal{C}_k$   $k = 1, 2, \dots$  órák fázisait  $\mathcal{C}_0$ -hoz igazítjuk, fel kell tételezni, hogy a  $\mathcal{C}_k$  és  $\mathcal{C}_l$  órák fázisai is megegyeznek. Ezt ellenőrizni lehet úgy, hogy  $\mathcal{C}_l$  órát  $\mathfrak{P}_k$  pontból megfigyeljük, és így a  $\mathcal{C}_k$  órát a  $\mathcal{C}_l^{(k)}$  képpel összehasonlítjuk. Amennyiben az órák fázisa ellentmondásmentesen van beállítva, akkor a két óra beállítása között  $\Delta t_{kl} = r_{kl}/c$  fáziseltolódást kell találnunk.

**148.** A fenti eljárást összefoglalva azt látjuk, hogy a  $\mathfrak{P}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  pontok közötti fényjelek kicserélésével a pontok közelében levő  $\mathcal{C}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  órákat ritmust és fázist illetően szinkronizálhatjuk. Továbbá ezen eljárás eredményeként megállapíthatjuk a  $\mathfrak{P}_k$  pontok  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektorainak  $\mathbf{r}_k$  mértékeit. A koordinátavektorok mértékeit és az órák szinkronizációjának módját, amelyet ez a módszer szolgáltat, többféle próbának vethetjük alá. Ha ezek a próbák mind pozitív eredményhez vezetnek, akkor e módszer — amellet, hogy a vonatkoztatási rendszer megállapításához vezet — a fény terjedésének módjára történő feltételezést is alátámasztja.

Fontos azonban megjegyezni, hogy ezek a próbák — melyeknek megfigyelési eredményeinket alávetjük — csak *szükséges* feltételt szolgáltatnak a fény terjedési módjára vonatkozóan. El lehet képzelni más — nem izotrop — fényterjedési módokat, amelyek mellett a fenti eljárás mégis ellentmondásmentes eredményekre vezetne. Erre a kérdésre a későbbiekben részletesen visszatérünk.

## B) A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ MINT KOORDINÁTATRANSZFORMÁCIÓ

149. A fent leírt módon fényjelek segítségével konstruálhatunk egy vonatkoztatási rendszert. A fényjelek indulásának és érkezésének megfigyelésével megvizsgálhatjuk az így meghatározott rendszer mértékeinek ellentmondásmentességét. A következő összefüggés

$$(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k)^2 - c^2(t_l - t_k)^2 = 0, \quad t_l > t_k \quad (5)$$

várható, ahol  $t_k, \mathbf{r}_k$  egy fényjel indulásának időpontját és helyét határozza meg,  $t_l, \mathbf{r}_l$  pedig e jelnek egy másik pontba érkezését adja meg. Az (5) összefüggést más módon is írhatjuk. Ebből a célból az eseményeket négyesvektorokkal jellemezzük. Írjuk tehát, hogy

$$K(\mathcal{E}) = \mathbf{x} = x_1, x_2, x_3, x_4,$$

ahol  $\mathcal{E}$  az az esemény, amely a  $t$  pillanatban egy  $\mathfrak{P}$  pontban — melynek koordinátavektora  $\mathbf{r}$  — történik, és

$$\mathbf{r} = x_1, x_2, x_3, \quad t = x_4. \quad *$$

Ha két eseményt,  $\mathcal{E}_k$  és  $\mathcal{E}_l$ -t vesszük, ahol  $\mathcal{E}_k$  egy fényjelnek  $\mathfrak{P}_k$  pontból való kiindulást, és  $\mathcal{E}_l$  a jelnek a  $\mathfrak{P}_l$  pontba való érkezését jelenti, akkor (5) helyett azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{x}_{kl} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_{kl} = 0, \quad (6)$$

ahol

$$\mathbf{x}_{kl} = \mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k$$

az  $\mathcal{E}_k$  és  $\mathcal{E}_l$ -es események „négyes távolságát” jelenti, és

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}. \quad (6a)$$

150. Amennyiben sikerül ellentmondásmentesen az órákat szinkronizálni és a koordinátavektorok mértékét ellentmondásmentesen megállapítani, akkor feltételezhetjük, hogy a fényterjedés e mértékekben kifejezve (5) vagy az annak megfelelő (6) formula szerint történik. Azonban azok a próbák, amelyek a módszer ellentmondásmentességét alátámasztják, csak *szükséges* feltételt adnak annak az alátámasztására, hogy a fény valóban izotrop terjed.

Helyettesítsük az  $\mathcal{E}$  esemény  $\mathbf{x}$  koordinátáját

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (7)$$

\* Szándékosan negyedik koordinátaként  $x_4 = t$ -t és nem  $x_4 = ct$ -t vagy  $x_4 = ict$ -t választunk. Azok a szimmetriák, amelyek akkor lépnek fel, ha ez utóbbi definíciókat használjuk, félrevezetők. Ha például  $x_4 = ict$ -t választjuk, akkor a tér- és időkoordináták között látszólagos szimmetriára jutunk, amely szimmetriáknak a valóságban nem felel meg semmi.

formulával, ahol  $\det \mathbf{A} \neq 0$  és  $\mathbf{a}$  egy állandó négyesvektor. Így egy  $K'$  vonatkoztatási rendszert definiálunk. Továbbá írjuk:

$$\mathbf{x}'_{kl} = \mathbf{x}'_l - \mathbf{x}'_k = \mathbf{A} \mathbf{x}_{kl}. \quad (8)$$

A (8)- és (6)-ból azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}'_{kl} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}'_{kl} = 0,$$

tehát amennyiben

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} = \mathbf{\Theta} \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{\Theta} \neq 0 \quad (9)$$

a (6) összefüggés egyenértékű az

$$\mathbf{x}'_{kl} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}'_{kl} = 0 \quad (9a)$$

összefüggéssel. Tehát amennyiben a fényterjedés  $K$ -hoz viszonyítva izotropnak tűnik, akkor  $K'$ -höz viszonyítva is izotropnak tűnik, ha  $\mathbf{A}$  kielégíti (9)-et. Azokat a  $K$  vagy  $K'$  vonatkoztatási rendszereket, amelyekben a fényterjedés (6), illetve (9a) szerint fejeződik ki, *inerciarendszereknek* nevezzük, és — amint erre a VII. fejezet 229. pontjában kitérünk — ezek a rendszerek azonosak a *Newton*-féle elmélet segítségével bevezetett inerciális rendszerekkel.

**151.** Azokat a mátrixokat, amelyek (9)-nek eleget tesznek és amelyeknél  $\mathbf{\Theta} = +1$ , *Lorentz*-mátrixoknak nevezzük, tehát a *Lorentz*-mátrixok definíciója:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Gamma} \quad (10a)$$

A (10a) képletet balról  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ - és jobbról  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ -gyel szorozzuk, és így (10a) helyett a következő ekvivalens összefüggést kapjuk:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Gamma}. \quad (10b)$$

(10b) éppen úgy, mint (10a) a *Lorentz*-mátrixok definíciójaként fogható fel. Az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} \quad (11)$$

transzformációt *Lorentz*-transzformációnak nevezzük.

Látjuk tehát, hogy amennyiben sikerül a  $K$  vonatkoztatási rendszerben olyan  $\mathbf{x}$  négyes koordinátamértékeket konstruálni, hogy e mértékekben kifejezve a fény izotrop terjed, akkor a *Lorentz*-transzformáció segítségével tudunk más olyan  $K'$  vonatkoztatási rendszert konstruálni, melynek  $\mathbf{x}'$  mértékeiben kifejezve a fényterjedés szintén izotropnak adódik.

## 1. LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ EXPLICIT ALAKJA

**152.** A *Lorentz*-mátrixokat definiáló (10) képlet tizenhat egyenletet jelent a *Lorentz*-mátrix tizenhat elemére vonatkozóan. A (10) egyenlet transzponálása esetén saját magába megy át, így látjuk, hogy a tizenhat összefüggésből csak tíz független egymástól. Tehát a  $\mathbf{\Lambda}$  mátrixok, melyek (10)-

nek eleget tesznek, egy hatparaméteres sokaságot képeznek. Azt is írhatjuk, hogy

$$\tilde{\Lambda}^{(q)} \Gamma \Lambda^{(q)} = \Gamma, \quad (12)$$

ahol  $q$  azt a hat paramétert jelenti, amelyek (12)-nek adott megoldását jellemzik.

**153.** A **131.** pontban leírt  $\mathbf{O}^{(q)}$ -ra vonatkozó megfontolásokat a  $\Lambda^{(q)}$ -ra alkalmazva azt találjuk, hogy a Lorentz-mátrixok csoportot alkotnak: az úgynevezett Lorentz-csoportot. Hangsúlyozzuk, hogy ha a (12) egyenletek determinánsát képezzük, azt találjuk, hogy

$$\det \Lambda^{(q)} = \pm 1.$$

**154.** A  $\Lambda^{(q)}$  Lorentz-mátrixok hatparaméteres előállítását legegyszerűbben kétféle háromparaméteres előállítás segítségével kapjuk meg. Nevezzük

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^{(q)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{O} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, & (a) \\ \tilde{\mathbf{O}} &= \mathbf{1}, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ahol  $\mathbf{O}$  harmadrendű ortogonális mátrix. Azt találjuk, hogy az így előállított  $\Lambda^{(q)}$  a (12) egyenletet kielégíti.

A (13) mátrixnak megfelelő transzformáció egy rendszer elforgatásának felel meg, amely elforgatás mellett az időmértékek változatlanok maradnak.

A második háromparaméteres típust egy speciális esetben úgy írhatjuk fel, hogy

$$\Lambda^{(v)} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & -vB \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -vB/c^2 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (14)^*$$

$$B = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

A (14) transzformációt általánosíthatjuk úgy, hogy

$$\Lambda^{(v)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + \frac{\mathbf{v} \circ \mathbf{v}}{v^2} (B - 1) & -\mathbf{v}B \\ -\mathbf{v}B/c^2 & B \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Ha (14)-et vagy (15)-öt (12)-be helyettesítjük, akkor látjuk, hogy  $\Lambda^{(v)}$  valóban Lorentz-mátrix.

\* A (11) transzformációt, ahol  $\Lambda = \Lambda^{(v)}$  és  $\lambda = 0$ , sokszor mint „Lorentz-transzformációt” szokásos idézni. E transzformáció a Lorentz-transzformációnak csak egy speciális esete.

**155.** (13) és (15) egy-egy háromparaméteres sokaságot határoznak meg. Minthogy a Lorentz-mátrixok csoportot alkotnak, következik, hogy

$$\Lambda^{(\varphi)} \Lambda^{(\mathbf{v})} = \Lambda^{(\varphi, \mathbf{v})}$$

szintén Lorentz-mátrix. (13)- és (15)-ből azt találjuk, hogy

$$\Lambda^{(\varphi, \mathbf{v})} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} + \frac{\mathbf{V} \circ \mathbf{v}}{v^2} (B - 1) & -\mathbf{V} B \\ -\mathbf{v} B / c^2 & B \end{pmatrix}, \quad (16)$$

ahol

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \mathbf{v},$$

tehát

$$v^2 = V^2.$$

Írjuk, hogy

$$\Lambda^{(\varphi, \mathbf{v})} = \Lambda^{(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{q} = \varphi, \mathbf{v},$$

így megkaptuk a Lorentz-mátrix hatparaméteres előállítását. Nevezzük  $\varphi$ -nek a három paramétert, amelyek az  $\mathbf{0}$  ortogonális mátrixot rögzítik (lásd a 133. pontot). A  $\mathbf{v}$  sebesség három komponense és  $\varphi$  adják összesítve a hat paramétert.

**156.** Azok a Lorentz-mátrixok, amelyekre

$$v < c, \quad \det \Lambda^{(\mathbf{q})} = +1, \quad A_{44}^{(\mathbf{q})} > 0, \quad (17)$$

a Lorentz-csoport alcsoportját képezik. Ezt az alcsoportot *valódi Lorentz-csoport*nak nevezzük. Kimutatható, hogy a valódi Lorentz-csoport összes elemeit a (17) megszorítással (16) formában elő lehet állítani. Az egész Lorentz-csoportot akkor kapjuk, ha a (16) és (17) által definiált elemek mellett olyanokat is figyelembe veszünk, ahol  $\det \Lambda^{(\mathbf{q})} = -1$ , és olyanokat is, ahol  $B = -B$ -vel helyettesül.

## 2. A LORENTZ-MÁTRIXOK PARAMÉTEREINEK FIZIKAI JELENTÉSE

**157.** (16) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\Lambda^{(\mathbf{q})} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{u} \\ \mathbf{U} & B \end{pmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{u} = -\mathbf{0} \mathbf{v} B, \quad \mathbf{U} = -\mathbf{v} B / c^2$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{0} + \frac{\mathbf{u} \circ \mathbf{U}}{1 + B},$$

$$B = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = (1 + \mathbf{u} \mathbf{0} \mathbf{U})^{1/2}.$$



(10b) segítségével a reciprok Lorentz-mátrix elemeire a következő explicit kifejezést kapjuk:

$$\Lambda^{(q)-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{L}} & -\mathbf{U} c^2 \\ -\mathbf{u}/c^2 & B \end{pmatrix}. \quad (18)$$

**158.** Vegyük egy részecske  $K$ -hoz viszonyított pályáját az  $\mathbf{x}(p)$  paraméter-reprezentációban. Egy Lorentz-transzformált  $K'$  rendszer mértékeiben a pálya egyenlete:

$$\mathbf{x}'(p) = \Lambda^{(q)} \mathbf{x}(p) + \boldsymbol{\lambda}. \quad (19)$$

A tér és időmértékeket szétválasztva

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}'(p) &= \mathbf{L}\mathbf{r}(p) + \mathbf{u}t(p) + \mathbf{I}, \\ t'(p) &= \mathbf{U}\mathbf{r}(p) + Bt(p) + t_0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ahol azt írjuk, hogy  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{I}, t_0$ . A (18) összefüggés felhasználásával azt is írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(p) &= \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{r}'(p) - c^2 \mathbf{U}t'(p) + \mathbf{I}^+, \\ t(p) &= -\mathbf{u}\mathbf{r}'(p)/c^2 + Bt'(p) + t_0^+, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ahol  $\boldsymbol{\lambda}^+ = \mathbf{I}^+, t_0^+$  az inverz összefüggés állandó tagját jelöli.

(19) és (20) segítségével tisztázhatjuk  $\mathbf{q}$  paraméter jelentését.

**159.** Tételezzük fel, hogy  $\mathbf{x}(p)$  és  $\mathbf{x}'(p)$  az  $A$  pont pályáját  $K$ , illetve  $K'$ -höz viszonyítva írják le. A pont  $K$ -hoz, illetve  $K'$ -höz viszonyított sebességét úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{t}, \quad \mathbf{V}'_A = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{\dot{\mathbf{r}}'}{t'}, \quad (22)$$

ahol a pont  $p$  szerinti differenciálást jelent. A (20), illetve (21) egyenletet  $p$  szerint differenciálva, (22) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{V}_A = \frac{\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{V}'_A - c^2 \mathbf{U}}{-\mathbf{u}\mathbf{V}'_A/c^2 + B}, \quad (a) \quad \mathbf{V}'_A = \frac{\mathbf{L}\mathbf{V}_A + \mathbf{u}}{\mathbf{U}\mathbf{V}_A + B}. \quad (b) \quad (23)$$

Vegyük egy pontot, amely  $K'$ -höz képest nyugalomban van, tehát  $\mathbf{V}'_A = 0$ . E pont sebessége  $K$  mértékeiben kifejezve

$$\mathbf{V}_A = -c^2 \mathbf{U}/B = \mathbf{v}. \quad (24a)$$

Hasonlóan egy  $\mathbf{V}_A = 0$ , tehát egy  $K$ -hoz nyugvó pontot vizsgálva azt találjuk, hogy

$$\mathbf{V}'_A = \mathbf{u}/B = -\mathbf{0}\mathbf{v} = -\mathbf{V}. \quad (24b)$$

(24a)-ból és (24b)-ből azt következtetjük, hogy  $K'$ -nek  $K$ -hoz viszonyított sebessége  $K$  mértékeiben kifejezve  $\mathbf{v}$ -vel egyenlő, továbbá  $K$  sebessége  $K'$ -höz viszonyítva  $K'$  mértékeiben kifejezve  $-\mathbf{V}$ -vel egyenlő. Azt látjuk tehát, hogy  $K$  és  $K'$  vonatkoztatási rendszerek (amelyeket egy Lorentz-transzformáció köt össze) általában egymáshoz képest mozognak.

A  $v$  translációs sebesség értéke szoros összefüggésben áll a  $k4$  és  $4k$ ,  $k = 1, 2, 3$  mátrixelemekkel. Az

$$\mathbf{L} = \mathbf{0} + v^2/c^2 \text{ nagyságrendű tagok}$$

mátrix kis sebességek esetében, tehát ha  $v \ll c$  egy közel ortogonális transzformációnak a mátrixa. Ez a transzformáció  $K$  tengelyeinek irányát  $K'$ -höz képest határozza meg. Ha a magasabbrendű tagokat is figyelembe vesszük, akkor azt látjuk, hogy  $K'$  tengelyei a  $K$  rendszer mértékeiben nem pontosan merőlegesek egymásra.

**160.** A Lorentz-transzformáció segítségével a vonatkoztatási rendszerek egy hatparaméteres sokaságát konstruálhatjuk. Ezek a rendszerek translációs mozgást végeznek egymáshoz képest, és tengelyeik egymáshoz képest el vannak forgatva.

A koordinátamértékeket e rendszerek bármelyike szerint véve úgy találjuk, hogy ezekben a mértékekben kifejezve a fény állandó  $c$  sebességgel izotrop terjedést mutat. Az így kapott vonatkoztatási rendszereket Lorentz-rendszereknek nevezhetjük. A Lorentz-rendszer tehát egy olyan inerciális rendszer, amelyben a koordináta- és időmértékeket oly módon választjuk, hogy ezekben a mértékekben a fény terjedése izotropnak tűnik.

## C) A FÉNY HOMOGÉN TERJEDÉSE

### 1. A HOMOGÉN TERJEDÉS FOGALMA

**161.** Az előző részben abból a hipotézisből indultunk ki, hogy a fény az éterhez képest izotrop módon terjed. Ezt a hipotézist ellenőrizhetjük, ha a fényjelek indulását és érkezését megfigyeljük. Azt tételezhetjük fel, hogy egy tartományban a fény akkor terjed izotrop módon, ha sikerül olyan koordinátamértékeket bevezetni, amelyekben kifejezve

$$(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) = 0, \quad (25)$$

ahol

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k, t_k \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_l = \mathbf{r}_l, t_l$$

a fényjel  $\mathfrak{P}_k$  pontból való indulásának  $\mathfrak{P}_l$  pontba való érkezésének négyeskoordinátái.

Az a tény, hogy egy  $\mathfrak{R}$  tartományban található olyan vonatkoztatási rendszert, amelynek mértékeiben a fény terjedése a (25) egyenletnek eleget tesz, csak azt bizonyítja, hogy a megfigyelések nem mondanak ellent annak a feltételezésnek, hogy  $\mathfrak{R}$ -ben a fény valóban izotrop módon terjed. Nem bizonyítják azonban szükségszerűen azt, hogy  $\mathfrak{R}$ -ben a fény valóban izotrop módon terjed. Ennek pontosabb megvilágítására a fényterjedés alternatív módjainak lehetőségeit is tárgyaljuk.

**162.** Feltételezhetjük, hogy a fény az éterhez képest nem izotrop terjed. Kiindulhatunk egy olyan hipotézisből is, amely szerint a fény az éterhez képest hasonló módon terjed, miként — laboratóriumi körülmények között

— egy nem izotrop médiumban. Tehát (25) helyett feltételezhetjük, hogy

$$(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \mathbf{G}(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) - c^2(t_l - t_k)^2 = 0, \quad (26)$$

ahol  $\mathbf{G}$  egy szimmetrikus pozitív definit mátrix.

A (26) képletet azonban általánosíthatjuk, feltételezve, hogy az éter a vonatkoztatási rendszerünkhöz képest  $\mathbf{v}$  sebességgel folyik. Ebben az esetben — amennyiben (26) az éterrel együtt mozgó koordináta-rendszerhez viszonyítva írja le a fényterjedés törvényeit — azt kell feltételeznünk, hogy az a jel, amelyik a  $t = t_k$  pillanatban  $\mathbf{r}_k$  pontból indul, a  $t_l$  pillanatban egy olyan pontba érkezik, amely a fényjel indulásának pillanatában  $\mathbf{r}_l$  koordinátavektorral rendelkezett. Ez a pont azonban a  $t_k$ -tól  $t_l$ -ig tartó időtartam alatt mozgott, és a fényjel érkezési pillanatában a

$$\mathbf{r}_l + \mathbf{v}(t_l - t_k)$$

koordinátavektorokkal rendelkező pontba mozdult el. Az ilyen megfontolás alapján (26) helyett tehát azt írhatjuk, hogy

$$(\mathbf{r}_l + \mathbf{v}(t_l - t_k) - \mathbf{r}_k) \mathbf{G}(\mathbf{r}_l + \mathbf{v}(t_l - t_k) - \mathbf{r}_k) - c^2(t_l - t_k)^2 = 0.$$

Azt is írhatjuk, hogy

$$(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) \mathbf{g}(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) = 0, \quad (27)$$

ahol

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V} & -C^2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

és

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}\mathbf{v}, \quad C^2 = c^2 - \mathbf{v}\mathbf{V},$$

továbbá

$$\det \mathbf{g} = -c^2 \det \mathbf{G}.$$

A **162.** pontban összefoglalt megfontolás, amely a (27)-nek és (28)-nak megfelelő fényterjedési törvényre vezet, pusztán kiegészítő megfontolás. Az indokolástól függetlenül azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy a valóságban a fényterjedés a (27) egyenletnek eleget tesz-e, ahol feltételezzük, hogy  $\mathbf{g}$  egy szimmetrikus mátrix és  $g_{44} < 0$ , és hogy  $\mathbf{g}$  három pozitív és egy negatív sajátértékkel rendelkezik.

## 2. A FÉNY HOMOGEN TERJEDÉSÉNEK PRÓBÁJA

**163.** A fény terjedésének a (27) és (28) által leírt módja a fény *homogén terjedésének* nevezhető. A  $\mathbf{g}$  elemeinek ismeretében a (27) egyenlet kísérletileg ellenőrizhető. Az ellenőrzés módja az izotrop terjedés feltételezése esetében leírt eljáráshoz hasonló. A (27) formula ellenőrzése érdekében tekintsünk  $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$  pontokat és  $\mathbb{C}_0, \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots$  órákat a pontok közelében. Fényjelek segítségével az órák ritmusát szinkronizálhatjuk, pontosan úgy, miként azt a **145.** pontban leírtuk. E szinkronizáció ellentmondásmentes módon való keresztülvihetősége a fény terjedéséről szóló hipotézis helyességét igazolja.

Miután a  $\mathcal{C}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  órákat szinkronizáltuk, a

$$t_{kl} = t^{(1)} + t^{(2)} \quad (29)$$

időket — amelyek alatt a fényjel  $\mathfrak{P}_k$ -ből  $\mathfrak{P}_l$ -be és vissza halad — megmérhetjük. A (27)-ből és (28)-ből az következik, hogy

$$\mathbf{rGr} + 2\mathbf{Vr}t^{(1)} - C^2 t^{(1)^2} = 0, \quad (30)$$

ahol  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k$ , és  $t^{(1)}$  az az idő, amely alatt a fényjel  $\mathfrak{P}_k$ -ből  $\mathfrak{P}_l$ -be halad. A (30) egyenlet megoldása (vegyük figyelembe, hogy  $t^{(1)} > 0$ ):

$$t^{(1)} = \frac{\mathbf{Vr} + \sqrt{C^2(\mathbf{rGr}) + (\mathbf{Vr})^2}}{C^2}.$$

A  $t^{(2)}$  idő, amely alatt a fényjel  $\mathfrak{P}_l$ -ből visszatér  $\mathfrak{P}_k$ -ba, a fenti kifejezésből megkapható, ha  $\mathbf{r}$ -t  $-\mathbf{r}$ -rel helyettesítjük. Így azt kapjuk, hogy

$$t^{(1)} + t^{(2)} = 2(\mathbf{r}\bar{\mathbf{G}}\mathbf{r})^{1/2}/C, \quad (31a)$$

ahol

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{V} \circ \mathbf{V}}{C^2}. \quad (31b)$$

(29)-ből és (31a)-ból következik, hogy

$$(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) - \frac{1}{4} C^2 t_{kl}^2 = 0. \quad (32)$$

A  $\mathfrak{P}_k$  és  $\mathfrak{P}_l$  pontok távolságának mértékét úgy definiálhatjuk, hogy

$$r_{kl} = \frac{1}{2} C t_{kl}. \quad (33)$$

(A (33) egyenlet a hosszegységet — bizonyos önkényességgel — rögzíti. A 271. pontban látni fogjuk, hogy más egység választása célszerűbb lehet.)

Ha (33)-at elfogadjuk, akkor (32) segítségével

$$(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) = r_{kl}^2. \quad (34)$$

A fenti (34) összefüggés formája olyan, mint a III. fejezet 113. pont (23) egyenleté. A (34) összefüggés  $n(n-1)/2$  tagú egyenletrendszer ad  $3n$  ismeretlen koordinátamértékre. A (34) egyenlet jobb oldali kifejezéseit odavissza futó fényjelek segítségével mért távolságoknak vehetjük. Az így adódó egyenletrendszer túlhatározott. Ha ennek a túlhatározott (34) egyenletrendszernek van megoldása, a megoldások a  $\mathfrak{P}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  pontok  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektoraira ellentmondásmentes értékeket szolgáltatnak. Egyébként az a tény, hogy e rendszernek megoldása van, további alátámasztást ad a fény terjedési módját illető feltételezéseinknek.

164. Ha távcső segítségével a  $\mathcal{C}_k$  órát a  $\mathcal{C}_l$  óra közeléből megfigyeljük, akkor  $\mathcal{C}_k^{(l)}$  képet látunk, és ez a kép

$$t^{(1)} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k)/C^2 + \frac{1}{2} t_{kl}$$

késést mutat. Ha az  $\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k$ -kat már meghatároztuk, akkor  $t^{(1)}$ -et is meg tudjuk határozni a fenti képlet segítségével, és így a  $\mathcal{C}_l$  óra fázisát be tudjuk állítani úgy, hogy  $\mathcal{C}_k$  órával szinkronban járjon. Ezzel a módszerrel az összes  $\mathcal{C}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  órák fázisait be tudjuk állítani. Az órák effajta szinkronizációja számos további ellenőrzés lehetőségét teremti meg. Ha ezen eljárás végigvitelével végül is ellentmondásmentes  $\mathbf{r}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  értékeket kapunk a koordinátavektorok mértékeire, és ugyanakkor a  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots$  órákat a fázist és ritmust illetően szintén ellentmondásmentesen be tudjuk állítani; feltételezhetjük, hogy a (27) egyenlet a mérési eredmények alapján a fény terjedési módjával összhangban van.

### 3. ÖSSZEFÜGGÉS KÜLÖNBÖZŐ REPRESENTÁCIÓK KÖZÖTT

**165.** Ha sikerül — éspedig ellentmondásmentesen — olyan koordinátamértékeket találni, amelyekben kifejezve a fény terjedése homogén, tehát a (27) formula szerint kifejezhető, akkor más koordinátarepresentációkat is találhatunk, melyekben a fény terjedése hasonló formában leírható. Az új representációban  $\mathbf{g}$  helyett más  $\mathbf{g}'$  mátrix szerepel a terjedési módot leíró kifejezésben.

Hogy ezt lássuk, bevezethetjük  $\mathbf{x}'$ -öt:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s} \quad (35)$$

új koordináta-mértékként, ahol  $\mathbf{S}$  egy negyedrendű mátrix, és

$$\det \mathbf{S} \neq 0.$$

A fényterjedés új koordinátákban kifejezve úgy írható, hogy

$$\left. \begin{aligned} \text{ahol} \quad & (\mathbf{x}'_l - \mathbf{x}'_k) \mathbf{g}'(\mathbf{x}'_l - \mathbf{x}'_k) = 0, \\ & \mathbf{g}' = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{S}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

A (36) összefüggések ekvivalensek a (27) összefüggésekkel.

Amennyiben tehát  $\mathbf{x}$  mértékek léteznek, amelyekben a (27) kifejezés érvényes, akkor az  $\mathbf{x}'$  mértékekben a (36) összefüggések automatikusan fennállnak.

Írhatjuk a terjedési tenzort  $\mathbf{g}$ -nek, és így

$$K(\mathbf{g}) = \mathbf{g}, \quad K'(\mathbf{g}) = \mathbf{g}'. \quad (37)$$

Amennyiben egy  $K$  vonatkoztatási rendszer létezik, amelyben a terjedési tenzor  $\mathbf{g}$ , olyan  $K'$  vonatkoztatási rendszer is létezik, amelyben a terjedési tenzor  $\mathbf{g}'$ -vel egyenlő.

#### a) A terjedési tenzor transzformációja

**166.** A következőkben arra mutatunk rá, hogy bárhogyan is választjuk  $\mathbf{g}$ -t és  $\mathbf{g}'$ -t, mindig létezik egy (35) formájú transzformáció, amelynek megfelelően a  $\mathbf{g}$  a  $\mathbf{g}'$ -be megy át. Hogy ezt bizonyítsuk, írjuk  $\mathbf{g}$ -t a (28) egyenlet

szerinti formában. Vezessünk be  $\alpha$  matrixot, úgyhogy

$$\tilde{\alpha} \Gamma \alpha = \mathbf{g}. \quad (38)$$

Azt találjuk, hogy  $\alpha$  (38)-at kielégíti, ha

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{1/2} & \mathbf{G}^{-1/2} \mathbf{V} \\ 0 & c/c_0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

$c_0$  a fénysebesség értéke a Lorentz-féle vonatkoztatási rendszer mértékeiben. Tehát feltételezzük, hogy

$$\Gamma_{44} = -c_0^2.$$

Továbbá azt írjuk, hogy

$$C^2 = c^2 - \mathbf{V}\mathbf{v}.$$

$\alpha$  inverzét is explicit felírhatjuk:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{-1/2} & -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{V} c_0/c \\ 0 & c_0/c \end{pmatrix}.$$

Ha (39)-et (38)-ba behelyettesítjük, azonosságra jutunk.

Megjegyezzük, hogy (38)-at akkor is ki lehet elégíteni, ha  $\alpha$  helyett

$$\alpha^{(q)} = \Lambda^{(q)} \alpha$$

veszünk, ahol  $\Lambda^{(q)}$  egy Lorentz-mátrixnak egy Lorentz-rendszerben való reprezentációja. A Lorentz-rendszerben való reprezentációt (négydimenziós) ortogonális reprezentációnak is fogjuk nevezni.

**167.** (38)-hoz hasonlóan bevezethetünk egy  $\alpha'$  mátrixot, amely az

$$\tilde{\alpha}' \Gamma \alpha' = \mathbf{g}' \quad (40)$$

egyenletet kielégíti. Azt találjuk, hogy

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \mathbf{G}'^{1/2} & \mathbf{G}'^{-1/2} \mathbf{V}' \\ 0 & c'/c_0 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

(38)-at és (40)-et összehasonlítva látjuk, hogy

$$\tilde{\alpha}' \tilde{\alpha}^{-1} \mathbf{g} \alpha^{-1} \alpha' = \mathbf{g}'.$$

$$\mathbf{S} = \alpha'^{-1} \alpha \quad (42)$$

mellett azt találjuk, hogy

$$\tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{g}'.$$

A (42) által definiált  $\mathbf{S}$  helyett egy  $\mathbf{S}^{(q)}$  is használható, ahol

$$\mathbf{S}^{(q)} = \alpha'^{-1} \Lambda^{(q)} \alpha. \quad (43)$$

Így tehát a (35) transzformáció a  $K$  reprezentációból olyan  $K'$  reprezentációba vezet, amelyben (36) érvényes, ha  $\mathbf{S}$  (42) vagy (43) szerint van választva.

**168.** A következőkben ha a terjedési mátrixról vagy a terjedési tenzorról beszélünk, feltételezzük, hogy  $e$  mennyiséget egy szimmetrikus mátrix írja le, amelynek három pozitív és egy negatív sajátértéke van, és  $g_{44} < 0$ .

Ha a fény terjedését egy  $\mathfrak{R}$  tartományban figyeljük meg, csupán azt tudjuk megállapítani: vajon a terjedés homogén módon történik-e eme tartományban, vagyis hogy a fényjelek terjedését a (27) kifejezésnek megfelelő kvadratikus formában fejezhetjük-e ki. A  $\mathbf{g}$  terjedési mátrix elemeit azonban kísérleti módon nem tudjuk megállapítani.

Az a kérdés tehát, hogy a fény terjedési módja izotrop vagy sem, értelmetlen kérdés. Csupán azt tudjuk megállapítani, hogy  $\mathfrak{R}$  tartományban a fényterjedés homogén-e vagy sem.

## D) ÖSSZEFÜGGÉS A FÉNYJELEKKEL, ILLETVE SZILÁRD TESTEKKEL KONSTRUÁLT VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK KÖZÖTT

**169.** Miként azt a **110.** pontban megmutattuk, szilárdtest-mérőrudak segítségével lehetséges ellentmondásmentes koordináta-rendszereket felépíteni. Jelöljük a mérőrudak segítségével megállapított koordináta-vektorokat  $\bar{\mathbf{r}}$ -rel. Ezeket a koordinátavektorokat úgy kapjuk, hogy a pontok közötti mérőrúddal mért távolságokat tartalmazó

$$(\bar{\mathbf{r}}_l - \bar{\mathbf{r}}_k) \bar{\mathbf{G}} (\bar{\mathbf{r}}_l - \bar{\mathbf{r}}_k) = \bar{r}_{lk}^2 \quad (44)$$

egyenletrendszer megoldjuk. Ha a mérőrudak helyett fényjeleket használunk, akkor  $r_{kl}$  távolságmértékeket kapunk, és a **163.** pont szerint az  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektorokat mint az

$$(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \left( \mathbf{G} + \frac{\mathbf{V} \circ \mathbf{V}}{C^2} \right) (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) = r_{lk}^2 \quad (45)$$

rendszer megoldásait kapjuk meg. Felmerül a kérdés: létezik-e olyan  $K$  vonatkoztatási rendszer, ahol az  $\bar{\mathbf{r}}_k$  vektormértékek, amelyek (44)-nek eleget tesznek, azonosak  $\mathbf{r}_k$  vektorok mértékeivel, melyek (45)-öt kielégítik. Ennek a kérdésnek megválaszolásához az  $r_{kl}$  és az  $\bar{r}_{kl}$  mértékek közötti összefüggést részletesebben kell megvizsgálnunk.

Mint hogy azok a módszerek, amelyek segítségével egyrészt az  $r_{kl}$ -t, másrészt az  $\bar{r}_{kl}$ -eket mérjük, különböznek egymástól, semmiféle a priori okot nem tudunk megadni, amely szerint a kétféle mértéknek akár meg kell egyeznie, akár különböznie kell. Azonban *empirikus* tény, hogy

$$r_{kl} / \bar{r}_{kl} = \text{konstans} ,$$

vagy ha megfelelő egységet választunk, akkor

$$r_{kl} = \bar{r}_{kl} . \quad (46)$$

**170.** A (46) érvényességét a *Michelson—Morley*-féle kísérlet és a *Kennedy—Thorndike*-kísérlet egyaránt bizonyítja. Azt, hogy ezen kísérletek lényege valóban a (46) formula alátámasztása, a következőkben mutatjuk meg.\* Egy szilárd testen két,  $A$ ,  $B$  pontot jelölhetünk meg. Az a  $T_{AB} = t_{AB} + t_{BA}$  idő, amely alatt egy fényjel a pontok közötti oda-vissza utat megteszi, nem változik, ha a szilárd testet elforgatjuk vagy eltoljuk.

Ha a szilárd test helyzetét megváltoztatjuk, akkor az  $A$ ,  $B$  pontok eltolódnak, és  $A^*$ ,  $B^*$  helyzeteket foglalnak el. A **134.** és **135.** pontokban kifejtettekől arra következtethetünk, hogy egy ideális merev test esetében

$$\bar{r}_{AB} = \bar{r}_{A^*B^*},$$

vagyis a pontok távolságának mértéke nem változik, ha a szilárd test helyzetét megváltoztatjuk.

Az interferométer-kísérletekből viszont arra következtetünk, hogy

$$T_{AB} = T_{A^*B^*},$$

tehát a (33) definíciónak megfelelően

$$r_{AB} = r_{A^*B^*}.$$

Ha két — mérőruddal megállapított — távolság egyenlőnek tűnik,

$$\bar{r}_{AB} = \bar{r}_{PQ},$$

akkor e távolságok szintén egyformáknak tűnnek, ha fényjelek segítségével mérjük őket. Ha ehhez a megjegyzéshez még hozzátesszük, hogy a pontok közötti távolságmértékek egyenes vonalak mentén additívek, akkor azt találjuk, hogy (46) bármely  $\mathfrak{F}_k$  és  $\mathfrak{F}_l$  pontpárra érvényes lesz, ha *egy* kiválasztott pontpárra érvényes. Tehát ha úgy választjuk az egységeket, hogy például

$$r_{12} = \bar{r}_{12},$$

akkor azt várjuk, hogy (46) bármilyen  $k, l$  értékre is érvényes.

**171.** Ha — mint kísérleti tény — feltételezzük, hogy (46) érvényes, akkor a koordinátamértékeket a következő

$$(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \left( \mathbf{G} + \frac{\mathbf{V} \circ \mathbf{V}}{C^2} \right) (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) = r_{kl}^2 \quad (47a)$$

egyenlet megoldásaként kaphatjuk meg (lásd a **163.** pontot, (31b) és (32) egyenleteket). Ugyanakkor

$$(\bar{\mathbf{r}}_k - \bar{\mathbf{r}}_l) \bar{\mathbf{G}} (\bar{\mathbf{r}}_k - \bar{\mathbf{r}}_l) = \bar{r}_{kl}^2 \quad (47b)$$

\* A szokásos felfogás az, hogy a *Michelson—Morley*-kísérlet bizonyítja, hogy „az éter nem létezik”, vagy azt, hogy „a fény minden koordináta-rendszerhez képest isotrop terjed.” — Véleményünk szerint mindkét kitétel a kísérleti tényeken messze túlmenő kitétel tartalmaz. A kísérletből közvetlenül legfeljebb a (46) egyenlet helyességére lehet következtetni, de már ez a következtetés is valamivel túlmegy a mérési eredmények interpretációján. Ezzel a kérdéssel a **74.** és következő pontokban már foglalkoztunk. (Lásd a **189.** pontot is.)



adja meg a másik fajta koordinátamértékeket. E két egyenletrendszer megoldásokkal rendelkezik, ahol

$$\mathbf{r}_k = \bar{\mathbf{r}}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

feltételezve (46) érvényességét, és hogy

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{V} \circ \mathbf{V}}{C^2}. \quad (48)$$

Látjuk tehát, hogy feltételezve:

- (1) az  $\mathcal{R}$  tartományban ellentmondásmentes koordináta-rendszert tudunk felállítani mérőrudak segítségével,
- (2) ellentmondásmentes koordinátavektorokat fényjelekkel meg tudunk állapítani, továbbá, hogy
- (3) empirikusan azt találjuk, hogy a két módszer azonos távolságmértékekre vezet (megfelelő egységek választása esetében),

akkor létezik olyan  $K$  vonatkoztatási rendszer, ahol

$$\mathbf{r}_k = \bar{\mathbf{r}}_k. \quad (49)$$

Hogy ezt a vonatkoztatási rendszert megkapjuk,

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{V} \circ \mathbf{V}}{C^2} \quad (50)$$

választással kell élnünk. E képlet megadja az összefüggést  $\mathbf{g}$  és a  $\bar{\mathbf{G}}$  elemei között.

**172.** Az (1)–(3)-ban felsorolt és a (49)-hez vezető feltételek határozott fizikai tartalommal rendelkeznek:

- (1) szilárd testek fizikai tulajdonságaira,
- (2) a fényterjedés fizikai tulajdonságaira,
- (3) szilárd testek és a fényterjedés tulajdonságainak kapcsolatára.

Megjegyezzük, hogy a szilárd testek ama tulajdonságai, amelyeket az (1) pontban említettünk, egyáltalában nem triviális tulajdonságok. Ezek a tulajdonságok magukban foglalják a *Lorentz-kontrakciót*, amelyeket a szilárd testek szenvednek.

Ide tartozik, hogy a  $\mathbf{g}$  terjedési tenzor elemeit nem tudjuk meghatározni a fényterjedés vagy a szilárd testek tulajdonságainak megfigyelése segítségével, de e kétfajta megfigyelés kombinációjával sem.

*Az a kérdés tehát, hogy a fény egy adott tartományban izotrop módon terjed vagy sem, ezek folytán értelmetlen; csak arra tudunk választ kapni, hogy a fényterjedés az  $\mathcal{R}$  tartományban homogén-e vagy sem.*



## A LORENTZ-ELV

## A) A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ MINT DEFORMÁCIÓ

**173.** Az előzetes meggondolások után meg tudjuk fogalmazni a *Lorentz*-elvet, vagyis azt az általános törvényt, amely megmutatja, miért lehetetlen egy fizikai rendszer translációs mozgását az éterhez képest megfigyelni. Látjuk, hogy a *Michelson* — *Morley*-kísérletben azok a geometriai effektusok, amelyek segítségével  $\mathbf{v}$  meghatározását remélhattük, egy másik effektus, az interferométerkarok *Lorentz*-kontrakciója által kompenzálódnak. Más kísérleteknél — amelyeket a II. fejezetben leírtunk — hasonlóképpen arra a következtetésre jutunk, hogy egy, az éterhez képest mozgó kísérleti berendezés deformációkat szenved, amely deformációk olyan effektusok fellépését kompenzálják, amelyek — ha a kompenzáció nem lépne fel — alkalmasak lennének a rendszernek az éterhez viszonyított mozgását meghatározni.

A következőkben nagyobb részletességgel tárgyaljuk azokat a deformációkat, amelyek alkalmasak olyan effektusok kompenzálására, amelyeket egyébként — kompenzáció nélkül — az éterhez viszonyított mozgás létrehozna. Megmutatjuk, hogy ezek a deformációk egy általános törvény segítségével meghatározhatók. Ezeket a deformációkat *Lorentz-deformációknak* nevezzük el.

## 1. DEFORMÁCIÓ OPERÁTOROK

**174.** Vizsgáljunk egy  $\mathcal{D}$  fizikai rendszert, amely  $\mathfrak{P}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  pontokban elhelyezkedő részecskékből áll. A  $\mathcal{D}$   $K$ -hoz viszonyított  $Q$  reprezentációja:

$$Q = K(\mathcal{D}),$$

ami a  $\mathfrak{P}_k$  pontok

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$$

négyeskoordinátaival fejezhető ki. Nem tételezzük fel, hogy  $\mathcal{D}$  nyugalomban van, és azonkívül azt is megengedjük, hogy  $\mathcal{D}$   $\mathfrak{P}_k$  pontjai egymáshoz képest mozogjanak. A pontok mozgását paraméter-reprezentációban írhatjuk le, tehát

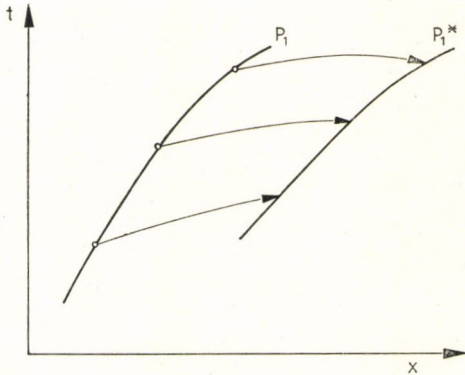
$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(p) = \mathbf{r}_k(p), t(p), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ahol  $t(p) > 0$ .

Így tehát a  $p$  paraméterre különböző értékeket választva megkapjuk a  $\mathfrak{P}_k$  pontok helyzetét különböző  $t(p)$  időpontokban. Egy megfordítható lineáris transzformáció segítségével

$$\mathbf{x}_k^*(p) = \mathbf{T}\mathbf{x}_k(p) + \mathbf{a} \quad (1)$$

új négyeskoordinátákat kapunk. Az  $\mathbf{x}_k^*(p)$  a  $\mathfrak{P}_k^*$  pontok pályáit határozzák meg a  $K$  vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva.



15. ábra. Egy pálya deformációjának sémája

Az (1) által  $\mathbf{T}$  és  $\mathbf{a}$  segítségével meghatározott művelet a  $\mathfrak{P}_k$  pontok pályáihoz új  $\mathfrak{P}_k^*$  pontok pályáit rendeli. Az ily módon bevezetett  $\mathfrak{P}_k^*$  pontok egy  $\mathfrak{Q}^*$  rendszer pontjainak foghatók fel, és ily módon (1) ( $K$  reprezentációjában) az adott  $\mathfrak{Q}$  rendszerhez egy  $\mathfrak{Q}^*$  rendszert rendel hozzá. Szimbolikusan azt is írhatjuk, hogy

$$\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{I}(\mathfrak{Q}) .$$

175. Bár az (1) egyenlet formájában koordinátatranszformációnak felel meg, az egyenlet nem koordinátatranszformációt, hanem deformációt ír le. Ne felejtjük el, hogy az  $\mathbf{x}_k^*(p)$ , miként az  $\mathbf{x}_k(p)$ , a  $K$  vonatkoztatási rendszer mértékeiben írják le a pontok pályáit (15. ábra).

$\mathfrak{Q}$  és  $\mathfrak{Q}^*$  reprezentációját egy  $K'$  rendszerben úgy írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}'_k(p) &= \mathbf{S}\mathbf{x}_k(p) + \mathbf{s} , \\ \mathbf{x}'_k^*(p) &= \mathbf{S}\mathbf{x}_k^*(p) + \mathbf{s} . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ha (2)-öt (1)-gyel összehasonlítjuk, azt találjuk, hogy

$$\mathbf{x}^{*'}(p) = \mathbf{T}'\mathbf{x}'(p) + \mathbf{a}'$$

és

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1} , \\ \mathbf{a}' &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}')\mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{a} . \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Azt írhatjuk tehát, hogy

$$K(\mathfrak{I}) = \mathbf{T}, \mathbf{a} \quad \text{és} \quad K'(\mathfrak{I}) = \mathbf{T}', \mathbf{a}' ,$$

ahol  $\mathbf{T}, \mathbf{a}$  és  $\mathbf{T}', \mathbf{a}'$  a  $\mathfrak{I}$  deformáció  $K$ , illetve  $K'$  rendszerekben való reprezentációi.

## 2. A LORENTZ-DEFORMÁCIÓ

176. Egy különleges deformációtípust kapunk akkor, ha a  $\mathbf{T}$  mátrixot Lorentz-mátrixnak választjuk. Így  $\mathfrak{Q}^*$ -ot a  $\mathfrak{Q}$  Lorentz-deformáltjának nevezzük, ha a  $\mathfrak{Q}$ -ból  $\mathfrak{Q}^*$ -ba vezető deformáció Lorentz-mátrix segítségével történik.

Azt írhatjuk, hogy

$$\mathcal{L}_q(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^*, \quad (4)$$

és ortogonális reprezentációban\* fennáll

$$\mathbf{x}_k^*(p) = \Lambda_q \mathbf{x}_k(p) + \lambda, \quad (5)$$

ahol  $\Lambda_q$  a

$$\tilde{\Lambda}_q \Gamma \Lambda_q = \Gamma \quad (6)$$

egyenletnek tesz eleget.

**177.** A Lorentz-deformációk csoportot alkotnak. Ez a Lorentz-mátrixok csoporttulajdonságaiból következik. A továbbiakban nincs arra szükség, hogy ortogonális reprezentációkra szorítkozzunk. (5) és (6) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_k^*(p) &= \mathbf{M}_q \mathbf{x}_k(p) + \mu, & (a) \\ \tilde{\mathbf{M}}_q \mathbf{g} \mathbf{M}_q &= \mathbf{g}, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ahol

$$\mathbf{g} = K(\mathfrak{g})$$

a terjedési tenzornak  $K$  vonatkoztatási rendszerben való reprezentációja, és

$$K(\mathcal{L}_q) = \mathbf{M}_q, \mu$$

a Lorentz-deformáció  $K$  vonatkoztatási rendszerben érvényes reprezentációja.

A (3) egyenlet felhasználásával azt találjuk, hogy ugyanezt a Lorentz-deformációt a  $K'$  rendszerben

$$\mathbf{M}'_q = \mathbf{S} \mathbf{M}_q \mathbf{S}^{-1}$$

adja meg.  $\mathfrak{g}$  reprezentációja  $K'$ -ben (lásd IV fejezet **165.** pont)

$$\mathbf{g}' = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{S}^{-1}.$$

Ezt felhasználva (7b)-ből következik, hogy

$$\tilde{\mathbf{M}}'_q \mathbf{g}' \mathbf{M}'_q = \mathbf{g}'.$$

Látjuk tehát, hogy egy deformáció, amely egy  $K$  vonatkoztatási rendszerben (7)-nek eleget tesz, minden egyenesvonalú koordináta-rendszerben szintén Lorentz-deformációként jelenik meg. A (4) összefüggés tehát a vonatkoztatási rendszer választásától független jelentésű.

**178.** A (4) összefüggés tartalmának további megvilágítására ortogonális reprezentációt választunk. Az (5) képletet tér- és időrészekre szétválasztva azt is írhatjuk (lásd **158.** pont, (20) képlet), hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_k^*(t^*) &= \mathbf{L} \mathbf{r}_k(t) + \mathbf{u} t + \mathbf{l}, & (a) \\ t^* &= \mathbf{U} \mathbf{r}_k(t) + B t + t_0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

\* Négydimenzionális ortogonális reprezentációnak nevezünk egy olyan reprezentációt, ahol a terjedési tenzor  $\Gamma$ -val egyenlő.

(8) úgy értelmezendő, hogy  $\mathfrak{P}_k^*$  pont a  $t^*$  pillanatban egy  $\mathbf{r}_k^*(t^*)$  koordinátavektorral rendelkezik, és  $t$  független paraméternek tekinthető, amelynek segítségével  $\mathbf{r}_k^*(t^*)$  és  $t^*$  meghatározható.

A félreértések elkerülése érdekében (8) helyett a jelölés kis változtatásával azt is írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_k^*(t) &= \mathbf{L}\mathbf{r}_k(t_k) + \mathbf{u}t_k + \mathbf{1}, & (a) \\ t &= \mathbf{U}\mathbf{r}_k(t_k) + Bt_k + t_0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

A (9a) egyenlet az  $\mathbf{r}_k^*(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  pontok koordinátavektorait  $t$  időben adja, viszont a  $t_k$ -k paraméterek, amelyek különböző  $k$  értékekre a (9b) egyenletből  $t$  függvényeként határozhatók meg. Ha a  $\mathfrak{P}_k^*$  pontok tetszőleges módon mozognak, általában az  $\mathbf{r}_k(t_k)$ -k nemlineáris függvények, és a (9b) összefüggések nemlineáris egyenleteket szolgáltatnak. Ezek segítségével  $t_k$ -k mint  $t$  függvényei meghatározhatók.

Gyakorlati szempontból sokszor kényelmes ezt az egyenletrendszert indirekt módon megoldani. A (9) egyenleteket mint a  $\mathfrak{P}_k^*$  pontok pályáinak parametrikus előállítását lehet tekinteni, ha ti.  $t_k$  különböző értékeit választjuk, és ezeket a (9a)-ba, illetve (9b)-be behelyettesítjük, akkor megkapjuk egyrészt (9a)-ból az  $\mathbf{r}_k^*(t)$  koordinátavektorokat, másrészt (9b)-ből a  $t$  értékeket. Az így kapott  $\mathbf{r}_k^*$  vektorok együttesen a  $t$  értékekkel a  $\mathfrak{P}_k^*$  pontok pályáit meghatározzák.

### 3. A LORENTZ-DEFORMÁCIÓK EGYES KÜLÖNLEGES FAJTÁI

**179.** Vizsgáljuk meg egy olyan  $\Omega$  fizikai rendszer deformációit, amely  $\mathfrak{P}_k$  pontokból áll, és amely  $K$  vonatkoztatási rendszerhez képest nyugalomban van. Feltételezzük tehát, hogy

$$\mathbf{r}_k(t) = \mathbf{r}_k = \text{független } t\text{-től.} \quad (10)$$

Vizsgáljuk meg a bekövetkező Lorentz-deformációkat, ha transzformációmátrixként a következő mátrixokat használjuk:

$$\Lambda_{\varphi} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

illetve

$$\Lambda_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + (B - 1) \frac{\mathbf{v} \circ \mathbf{v}}{v^2} & B\mathbf{v} \\ B\mathbf{v}/c^2 & B \end{pmatrix}. \quad (12)$$

E mátrixok formája olyan, mint  $\Lambda^{(\varphi)}$  és  $\Lambda^{(\mathbf{v})}$ , amelyeket a **154.** pont (13) és (15) formulájában adtunk meg. A (10)-re alkalmazott (11) transzformáció azt adja, hogy

$$\mathbf{r}_k^*(t) = \mathbf{O}\mathbf{r}_k + \text{konstans} = \text{független } t\text{-től.} \quad (13)$$

Tehát a transzformáció  $\mathcal{Q}$ -nak egyszerű elforgatását — amely látszólag deformáció nélkül történik — adja meg.

Mégis óvatosságra van szükség, ha e transzformációt interpretáljuk. Belső deformáció nem lép fel abban az értelemben, hogy a távolságok mértékei

$$r_{kl}^2 = (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k)^2 = (\mathbf{r}_l^* - \mathbf{r}_k^*)^2 = r_{kl}^{*2} \quad (14)$$

változatlanok maradnak. A (13) deformációról kijelenthetjük, hogy  $\mathcal{Q}$  fizikai rendszerben az  $r_{kl}$  távolságok  $K$  rendszerbeli mértékszámából ítélve nem változnak, ha a  $\mathbf{A}_\varphi$  transzformációnak alávetjük. Erre az óvatos fogalmazásra azért van szükség, mert amennyiben a deformációt a  $K$  helyett egy másik  $K'$  vonatkoztatási rendszerben írjuk le, akkor — amennyiben  $K'$   $K$ -hoz képest mozog — azt találjuk, hogy

$$r_{kl}'^2 \neq r_{kl}^{*2},$$

tehát a (14) összefüggés  $\mathcal{Q}$ - és  $\mathcal{Q}^*$ -nak csak egy különleges reprezentációjában érvényes.

**180.** A (12) mátrix szerinti transzformáció a következőkhöz vezet:

$$\mathbf{r}_k^*(t) = \mathbf{r}_k + (B - 1) \mathbf{v} (\mathbf{r}_k \mathbf{v}) / v^2 + B \mathbf{v} t_k + \mathbf{l}_0, \quad (15a)$$

ahol

$$t = B \mathbf{v} \mathbf{r}_k / c^2 + B t_k + t_0. \quad (15b)$$

A képletet leegyszerűsíthetjük, ha azt írjuk, hogy

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k^{(1)} + \mathbf{r}_k^{(2)}, \quad (16)$$

ahol

$$\mathbf{r}_k^{(1)} = \mathbf{v} (\mathbf{r}_k \mathbf{v}) / v^2, \quad (17)$$

$\mathbf{r}_k$ -nak  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos komponense;  $\mathbf{r}_k^{(2)} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k^{(1)}$  a  $\mathbf{v}$ -re merőleges komponens.

(15b) segítségével  $t_k$ -t (15a)-ból eliminálhatjuk, és (16)-ban és (17)-ben bevezetett jelölés segítségével azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_k^*(t) = \mathbf{r}_k^{(1)} / B + \mathbf{r}_k^{(2)} + \mathbf{v} t + \text{konstans}.$$

Látjuk tehát, hogy  $Q^* \mathbf{v}$  sebességgel mozog  $Q$ -hoz képest; továbbá  $Q^* \mathbf{v}$ -re merőleges méretei azonosak  $Q$  megfelelő méreteivel, a  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos méretek azonban egy

$$\frac{1}{B} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

faktorral rövidebbek, mint  $Q$  megfelelő méretei. Tehát  $Q^*$ -t  $Q$ -ból úgy kapjuk, hogy  $Q$ -t  $\mathbf{v}$  sebesség irányában egy  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktorral szorzomjuk.

A  $Q \rightarrow Q^*$  deformáció tehát a deformációknak az a típusa, amelynek bekövetkezését LORENTZ és FITZ-GERALD feltételezték abban az esetben, ha szilárd testet az éterhez képest mozgásba hozunk.

**181.** A Lorentz-deformációnak egy másik típusát  $\mathcal{C}$  óra viselkedésével illusztrálhatjuk. Legyen a  $\mathcal{C}$  óra  $K$ -hoz képest nyugalomban és egy  $\mathbf{r}_k =$  = konstans pontban elhelyezve. Az óra

$$t^{(k)} = kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

időpillanatokban adjon jeleket.

A Lorentz-deformált óra, mint (15)-ből látható:

$$\mathbf{r}_k^*(t) = \mathbf{v}t + \text{konstans}$$

koordinátavektorral rendelkezik, és a jeleket a

$$t^{(k)*} = Bt^{(k)} + \text{konstans}$$

időpontokban adja. Tehát

$$t^{(k)*} = kT^* + \text{konstans},$$

ahol

$$T^* = T/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

A  $\mathcal{C}^*$  óra tehát  $T^* > T$  időszakokként ad jelzéseket, és így ritmusa egy  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktoriall kisebb, mint a  $\mathcal{C}$ -é. Ez az óralelassulási effektus ugyanolyan típusú, mint amellyel mind a Doppler-effektus, mind pedig ISAAC és társai kísérleteinek elemzésénél találkoztunk.

**182.** A Lorentz-deformációk egy további formája inkább ideális kísérletek interpretációjára, mint valódi kísérletek elemzésére hasznos. Tekintsünk egy henger alakú testet, amely  $\omega$  szögsebességgel tengelye körül forog. Egy  $\Delta_{\mathbf{v}}$  transzformáció, ahol  $\mathbf{v}$  a henger tengelyével párhuzamos, a  $\mathcal{Q}$  hengert egy  $\mathcal{Q}^*$  testbe viszi át. Ez utóbbi egy henger, amely a tengely irányában  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog, és

$$\omega^* = \omega\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

szögsebességgel forog tengelye körül. A  $\mathcal{Q}^*$  henger egy  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktoriall összehúzódik a tengely irányában, de azonkívül a henger a tengely körül el is csavarodik. Az elcsavarodás szöge  $a$  távolságban levő két keresztmetszet között

$$\Delta\varphi = \frac{a^* v \omega^*}{c^2 - v^2},$$

ahol

$$a^* = a\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

## B) A LORENTZ-ELV MEGFOGALMAZÁSA

**183.** Ha a megfigyelt jelenségeket összesítjük, akkor a következő elv adódik: *a természeti törvények olyanok, hogy ha  $\mathcal{Q}$  egy valódi fizikai rendszer, akkor a*

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{L}(\mathcal{Q})$$

*Lorentz-deformált rendszerek lehetséges rendszerek, amelyek ugyanazoknak a törvényeknek engedelmeskednek, mint maga  $\mathcal{Q}$ .*



A fenti elvet *Lorentz-elvnek* fogjuk nevezni, minthogy ez az elv a LORENTZ által felvetett ideáknak felel meg.\*

A következőkben megmutatjuk, hogy az így fogalmazott *Lorentz-elv* alkalmas annak megmagyarázására, hogy miért voltak eredménytelenek a próbálkozások egy rendszer translációs mozgásának meghatározására.

### 1. AZ ÉTERÁRAMLÁS MEGHATÁROZÁSÁVAL KAPCSOLATOS NEGATÍV EREDMÉNYEK ÉRTELMEZÉSE A LORENTZ-ELV SEGÍTSÉGÉVEL

**184.** A *Lorentz-elv* megadja azt az általános törvényt, amely megmagyarázza, miért lehetetlen egy fizikai rendszer éterhez viszonyított translációs mozgását meghatározni. Egy példa segítségével illusztráljuk a *Lorentz-elvből* következő eredményt.

Tekintsünk egy *Michelson-féle* interferométert, amely a karjaira merőleges tengely körül lassan forog. A *Michelson—Morley-kísérlet* azt mutatta, hogy egy ilyen forgó interferométerben fellépő interferenciakép stacionárius; nem változik a forgás folytán. A kísérletet két módon értelmezhetjük; egyrészt, hogy ha feltételezzük, hogy az interferométer az éterhez képest nincs translációs mozgásban, és ezért kinematikailag mint merev test forog; másrészt azonban azt is feltételezhetjük, hogy az interferométer az éterhez képest valamilyen  $v$  sebességgel halad, és a forgás alatt a karok periodikusan összehúzódnak, majd újra kitégúlnak. Az összehúzódnak mértéke a *Lorentz-kontrakciónak* felel meg.

A *Lorentz-elvből* az következik, hogy amennyiben  $\mathcal{Q}$  — amely az éterhez képest translációs mozgással nem rendelkezik, és kinematikailag merev testként forog — egy lehetséges rendszer, akkor létezhet egy deformált  $\mathcal{Q}^*$  rendszer, amely egy olyan interferométer, amely az éterhez képest  $v$  sebességgel mozog, tengely körül forog, és karjai a fent leírt módon folytonosan deformálódnak a forgásnak megfelelő ütemben.

Egy, az interferométerrel együtt mozgó megfigyelő nem döntheti el a kérdést, hogy az ő megfigyelésének tárgya vajon  $\mathcal{Q}$  vagy  $\mathcal{Q}^*$ , és ezért nem tudja eldönteni, hogy az interferométerrel együtt mozog-e az éterhez képest.

**185.** E meggondolás mélyebb kifejtése érdekében vizsgáljuk a  $\mathcal{Q}$  fizikai rendszert egy

$$\bar{K}(\mathcal{Q}) = \bar{Q}$$

reprezentációban. Tételezzük fel, hogy  $\mathcal{Q}$  súlypontja  $\bar{K}$ -hoz képest nyugalomban van, tehát a  $\mathcal{Q}$  translációs mozgása  $\bar{K}$  translációs mozgásával egybeesik.

Bármilyen kísérleti eredménynél, amelyből a  $v$  értékére kívánunk következtetni, csakis a  $\mathcal{Q}$   $\bar{K}$  rendszerben való  $\bar{Q}$  mértékeire támaszkodhatunk. Feltételezve, hogy a  $\mathcal{Q}$ -t összetartó belső erők a *Lorentz-elvnek* eleget

\* EINSTEIN nagy eredménye az volt, hogy rájött, hogy a LORENTZ által vizsgált deformációk mind egy egységes elvből érthetők. Ezt az elvet itt másképp fogalmazzuk mint EINSTEIN.

tesznek, a  $\mathbf{v}$  mértékeire a  $\bar{Q}$  mértékszámáiból nem lehet következtetni, amint ezt a következőkben kimutatjuk.

**186.** Vizsgáljuk  $\mathfrak{D}$  és  $\mathfrak{D}^*$  fizikai rendszereket, amelyek egymáshoz képest mozognak, és ahol feltételezzük, hogy  $\mathfrak{D}^*$  a  $\mathfrak{D}$ -nak Lorentz-deformáltja, tehát

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{L}_q(\mathfrak{D}).$$

Mindkét fizikai rendszer megfigyelésének eredményeit egy vonatkoztatási rendszerhez kapcsolt mértékekben fejezhetjük ki. Ha a koordináta-rendszert, amelyben a megfigyelés történik,  $\bar{K}$ -nak nevezzük, akkor azt írhatjuk, hogy

$$\bar{K}(\mathfrak{D}) = \bar{Q}, \quad \bar{K}(\mathfrak{D}^*) = \bar{Q}^*,$$

ahol

$$\bar{Q}^* = L_{\bar{q}}(\bar{Q}), \quad \bar{q} = \bar{K}(q).$$

A  $\bar{K}$  rendszert úgy választjuk, hogy  $\mathfrak{D}$  középpontja e rendszerben nyugszik; ebben az esetben  $\mathfrak{D}^*$  középpontja  $\bar{K}$ -hoz képest mozog. Választhatunk azonban egy másik vonatkoztatási rendszert,  $\bar{K}$ -t úgy, hogy

$$\bar{K}(\mathfrak{D}) = \bar{Q}, \quad \bar{K}(\mathfrak{D}^*) = \bar{Q}^*.$$

A Lorentz-transzformáció tulajdonságaiból az következik, hogy

$$\bar{Q}^* = L_{\bar{q}}(\bar{Q}), \quad \bar{q} = \bar{K}(q).$$

A  $\bar{K}$ -ból  $\bar{K}$ -be vezető Lorentz-transzformációt  $L^{(\mathfrak{p})}$ -vel jelölhetjük, tehát

$$L^{(\mathfrak{p})}(\bar{Q}) = \bar{Q}$$

és

$$L^{(\mathfrak{p})}(\bar{Q}^*) = L^{(\mathfrak{p})} L_{\bar{q}}(\bar{Q}) = \bar{Q}^*.$$

Ha most

$$L^{(\mathfrak{p})} L_{\bar{q}} = \mathbf{1}$$

szerint választjuk a  $\bar{q}$  paramétereket, akkor

$$\bar{Q} = \bar{Q}^*$$

kapunk, vagyis e választás esetében a  $\mathfrak{D}$   $\bar{K}$  rendszerben érvényes  $\bar{Q}$  reprezentációja ugyanazokat a mértékeket tartalmazza, mint  $\mathfrak{D}^*$ -nak  $\bar{K}$  rendszerben való  $\bar{Q}^*$  reprezentációja.

Tehát ha pusztán egy fizikai rendszer  $Q$  mértékeit ismerjük, akkor nem tudjuk eldönteni, hogy e  $Q$  vajon a  $\mathfrak{D}$  vagy  $\mathfrak{D}^*$  reprezentációja? Így tehát ha azt találjuk, hogy

$$K(\bar{\mathfrak{D}}) = Q,$$

ahol  $\bar{\mathfrak{D}}$ -val a megfigyelt rendszert jelöljük, amelyről meg kívánjuk állapítani, hogy vajon hogy mozog az éterhez képest. Feltételezhetjük a megfigyelések alapján, hogy

$$K = \bar{K} \quad \text{és} \quad \bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D},$$

de éppen úgy feltételezhetjük azt is, hogy

$$K = \bar{K} \quad \text{és} \quad \bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^*,$$

tehát nem tudjuk eldönteni, hogy a mi vonatkoztatási rendszerünk vajon úgy mozog, mint  $\mathcal{D}$ , vagy úgy, mint  $\mathcal{D}^*$ ? (Azt is feltételezhetjük, hogy mindkettőhöz képest mozog.) Látjuk tehát, hogy *egy fizikai rendszer megfigyeléséből képtelenek vagyunk olyan következtetésre jutni, amely a rendszer éterhez viszonyított translációs mozgásának sebességét megadja, — feltételezve, hogy a rendszer belső mozgása a Lorentz-elvnek megfelelően történik.*

## 2. NEMORTOGONÁLIS REPREZENTÁCIÓK

**187.** A  $\mathcal{D}$  fizikai rendszer mértékeit elemezve nemcsak  $\mathcal{D}$ -nak az éterhez viszonyított translációs mozgása marad határozatlan, hanem további határozatlanságok is maradnak.

Kiindulhatunk egy olyan  $K$  vonatkoztatási rendszerből is, amelyben a fény terjedését

$$\mathbf{xg}\mathbf{x} = 0 \quad (18)$$

adja meg, ahol  $\mathbf{g}$  állandó elemekkel rendelkezik, de nem szükségszerűen egyenlő  $\mathbf{I}$ -val. Egy ilyen vonatkoztatási rendszert *inerciális rendszerként* lehet venni.

A  $K$  vonatkoztatási rendszer, amelyben a fényterjedést (18) fejezi ki, ferdevonalú koordináta-rendszerként fogható fel, feltételezve, hogy a fény valóban izotrop módon terjed. Azonban az a felfogás is lehetséges, hogy  $K$  ortogonális, viszont a fény terjedése nem izotrop.

Tekintsük egy  $\mathcal{D}$  rendszer  $K$ -ban levő reprezentációját; ha vizsgáljuk  $e$  reprezentációban  $\mathcal{D}$  mértékeit fényjelek segítségével, a vizsgálat eredményeként nem tudjuk eldönteni, hogy a fény valóban milyen módon terjed. Hogy  $e$  kérdést jobban megvilágítsuk, térjünk vissza a *Michelson-interferométer* elemzésére.

Az interferométert óvatosan forgatva azt tudjuk megállapítani, hogy a fénynek a karok mentén történő oda-vissza futásához szükséges idő a forgatás által nem változik. Ez az eredmény összefér azzal a feltételezéssel, hogy egyrészt a fény terjedése izotrop, másrészt a karok hosszai a forgatás által nem változnak. De azt a lehetőséget sem zárhatjuk ki, hogy a fény anizotrop terjed, és a karok hosszai a elforgatás által úgy változnak, hogy az anizotrop terjedés által okozott időkülönbségeket kompenzálják, és így végeredményben az oda-vissza futási idő nem változik.

**188.** Lehetne úgy is érvelni, hogy „egyszerűbb” az első feltételezés, tehát az, hogy a fény terjedése izotrop, és hogy a karok nem deformálódnak. A természet törvényei azonban nem mindig veszik figyelembe a kényelemre vonatkozó kívánságainkat. (Ettől eltekintve a *Michelson—Morley*-kísérletet olyan időkben ismételték, amelyekben a Föld pályasebessége különböző értékeket vett fel; ebből az következik, hogy — legalábbis egyes esetekben — az interferométernek a forgatás folytán deformálnia kellett.)

Meggondolásainkat összefoglalva: a  $\mathcal{D}$  rendszerek mértékeinek meghatározásából és a fény terjedésének megfigyeléséből az alábbiakra tudunk következtetni:

(1) Meg tudjuk állapítani, hogy a fény homogén módon terjed-e, de nem tudjuk megállapítani, hogy a terjedés izotrop módon történik-e;

(2) következtetni tudunk  $\mathfrak{D}$  belső tulajdonságaira, azonban nem tudunk információt szerezni arra: vajon  $\mathfrak{D}$  az éterhez képest translációs mozgást végez-e;

(3) összefüggéseket tudunk megállapítani  $\mathfrak{D}$  tulajdonságai és a fény terjedésének módozatai között. Így kísérletileg meg tudjuk állapítani: vajon a fényjelnek  $\mathfrak{D}$  két pontja közötti oda-vissza futási ideje állandó marad-e, ha  $\mathfrak{D}$ -t elmozgatjuk. Ez utóbbi vizsgálat kimutatja, hogy  $\mathfrak{D}$  ideális szilárd testként viselkedik-e.

Nem kapunk arra vonatkozóan információt, hogy vajon  $\mathfrak{D}$  konfigurációja változatlan marad-e, ha  $\mathfrak{D}$ -t elforgatjuk.

(4) A fénysebesség értékét például a *Fizeau*-féle kísérlettel megállapíthatjuk. Egy ilyen kísérlet — mint ez könnyen belátható —

$$c = (-\det \mathbf{g})^{1/2}$$

értékét határozza meg. Így tehát  $\mathbf{g}$  tíz független komponenséből egyet határozhatunk meg, kilencet tetszőlegesen adunk meg.

**189.** A fenti meg gondolásokból következik, hogy mérések segítségével nem tudjuk ama  $\mathbf{v}$  sebesség értékét megállapítani, amellyel  $K$  rendszerünk az éterhez képest mozog. De nem tudjuk azon paraméterek értékét sem megállapítani, amelyek a fény terjedési módozatát írják le. Tehát éppen úgy *nem tudjuk állítani, hogy a kísérletek a fény izotrop módon való terjedését bizonyítanák, mint ahogy nem tudjuk állítani, hogy a kísérletek az éterhez viszonyított sebességnek a mérését lehetővé teszik.*

Sokszor említik, hogy „a *Michelson—Morley*-kísérlet bizonyítja, hogy a fény izotrop terjed, bármilyen vonatkoztatási rendszerhez képest”. A fenti állítás egyáltalában nem helyes. A *Michelson—Morley*-kísérlet csupán azt bizonyítja, hogy egy fényjelnek egy szilárd test két pontja közötti oda-vissza futási ideje változatlan marad, ha a szilárd testet a test translációs mozgásának megváltoztatása nélkül elforgatjuk.

**190.** Egy homogén tartományban az éter állapotát tíz paraméter határozza meg, amelyből kilencet kísérleti vizsgálatok alapján nem tudunk meghatározni, és pedig azért, mert a természeti törvények (amennyiben a *Lorentz*-elvnek megfelelnek) olyan szimmetriákkal rendelkeznek, amelyek a mérési adatok interpretációjával szemben bizonytalanságokra vezetnek. Ha egy jelenséget e kilenc paraméter egyik értéksorozatával ellentmondásmentesen értelmezhetünk, akkor ugyanezt a jelenséget ellentmondásmentesen értelmezhetjük, ha a kilenc paraméterre más értékeket választunk.

### 3. A LORENTZ-ELVRE VONATKOZÓ ÁLTALÁNOS MEGJEGYZÉS

**191.** Megmutattuk tehát, hogy **183.** pontban megfogalmazott *Lorentz*-elv magyarázza azoknak a kísérleteknek sikertelenségét, amelyek igyekeznek egy fizikai rendszer éterhez viszonyított translációs sebességét meghatározni. Olyan effektusokat, amelyek segítségével e sebesség meghatároz-

ható lenne, csak olyan fizikai rendszerek segítségével lehetne kimutatni, amelynek törvényszerűségei a *Lorentz*-elvnek nem tesznek eleget.

Nyitott kérdés marad: vajon léteznek-e effajta effektusok? vagy más-képpen kifejezve, vajon a természettörvények pontosan vagy csak bizonyos közelítésben tesznek eleget a *Lorentz*-elvnek? Könnyelműek és megalapozatlanok mindazon állítások, hogy nem léteznek olyan effektusok, amelyek a *Lorentz*-elvnek nem tesznek eleget, de az az állítás is, hogy a *Lorentz*-invariancia „abszolút” pontossággal érvényes. Az ilyen kijelentések ezekben az elvekben vallott „vallásos hitnek” felelnek meg, és tudományosan komolytalanok.

Érdekes azonban, hogy a *Lorentz*-elv nagyon sok jelenségre nagyon nagy pontossággal érvényes, és ennek folytán — naiv túlzások nélkül — mondhatjuk, hogy ez az elv a fizika egyik alapvető elve.

### C) A DINAMIKAI ELV

**192. A 183.** pontban megfogalmazott *Lorentz*-elv pontosan megadja annak okát, hogy miért végződtek sikertelenül mindazon kísérletek, amelyek segítségével  $v$ -t, a Földnek az éterhez viszonyított sebességét igyekeztek megállapítani. Az elvből az is következik, hogy a fény izotrop módon való terjedését sem lehet bizonyítani. Ugyanis, mint megmutattuk, közvetlen mérés segítségével  $g$  tíz eleme közül kilencet nem lehet kísérleti mérések segítségével megállapítani.

A *Lorentz*-elv fent megadott formájában azonban nem elegendő ahhoz, hogy a kísérletek kimenetelére részletes pozitív választ adjon. Ez azért van így, mert a *Lorentz*-elv csak azt állapítja meg, melyek azok a lehetséges  $\Omega^*$ ,  $\Omega^{**}$ , . . . konfigurációk, amelyeket a  $\Omega$  rendszer mellett felépíthetünk. Nem ad azonban útmutatást arra, hogy egy  $\Omega$  rendszer bizonyos körülmények között átváltozik-e  $\Omega^*$  konfigurációba.

A valóságban lefolytatott kísérletek elemzéséhez egy olyan elvre van szükségünk, amely arra ad felvilágosítást, hogy mi történik egy adott fizikai rendszerben külső beavatkozás esetén. A valódi kísérletekkel kapcsolatos problémákat példákkal jellemezzük.

A *Michelson*-interferométer esetében azt vizsgáljuk, mi történik a berendezéssel, ha óvatosan elforgatjuk. A *Trouton*—*Noble*-kísérlet esetében pedig azt, hogy mi történik egy töltött kondenzátorral, ha a Föld pályamozgása irányához képest elforgatjuk. A merőleges *Doppler*-effektus és az *Isaac*-féle kísérletek esetében pedig atomok translációs mozgásának változásából származó belső frekvenciaváltozásokat vizsgáljuk.

Mindezekben a kísérletekben egy fizikai rendszer translációs sebességét óvatos módon változtatjuk, és a mozgásváltozás folytán létrejött más fizikai változásokat vizsgáljuk. A jelenségek tárgyalásához tehát szükségünk van egy olyan elvre, amely lerögzíti, mi történik egy fizikai rendszerrel, ha adiabatikus beavatkozásnak van alávetve, amely beavatkozás például a rendszer translációs mozgásállapotát megváltoztatja.

**193.** Ilyen beavatkozás hatására vonatkozóan kijelentéseket tudunk tenni egy elv segítségével, amely elv összefér a *Lorentz*-elvvel, de ennek kibővítését

jelenti. Ezt az elvet a *dinamikus Lorentz-elvnek* nevezzük, és részletesebben a következőkben fejtjük ki.

Kimondhatjuk: *ha egy összefüggő fizikai rendszert óvatosan gyorsítunk, akkor a rendszer a gyorsítás hatása alatt Lorentz-deformációt szenved.*

A fenti elvet a következő módon írhatjuk le:

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{L}_{q(t)}(\mathcal{Q}), \quad (19)$$

ahol  $\mathcal{Q}(t)$  az a konfiguráció, amelyet a  $\mathcal{Q}$  rendszer felvesz, miután  $t$  ideig külső beavatkozásnak volt alávetve, míg  $q(t)$  a megfelelő Lorentz-deformáció paramétereit jelenti. Vehetjük, hogy

$$q(0) = 0,$$

vagyis a beavatkozás kezdetén  $\mathcal{L}_{q(0)}$  az identikus transzformációt jelenti.

Egy adott reprezentációban (19)-et úgy is írhatjuk, hogy

$$Q(t) = L_{q(t)}(Q).$$

**194.** A fenti megfontolást a következő példákkal illusztrálhatjuk:

(1) Ha egy  $l$  hosszúságú rudat óvatosan hosszirányba gyorsítunk, akkor a rúd összehúzódik, úgyhogy  $t$  időben a hosszúság

$$l(t) = l\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$$

értéket vesz fel, ahol  $v(t)$  a  $t$  időben elért sebességet jelenti.

(2) Ha egy órát, amely nyugalomban  $\omega = 2\pi/T$  periódussal rendelkezik, egy  $v(t)$  sebességre gyorsítunk fel, az óra ritmusa megváltozik, éspedig úgy, hogy  $t$  időpontban az óra járási sebessége

$$\omega(t) = \omega\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$$

lesz. Pontosabban fogalmazva: az óra fázisa  $t$  pillanatban

$$\varphi(t) = \omega \int_0^t \sqrt{1 - v(t')^2/c^2} dt'. \quad (20)$$

A (20) összefüggést ISAAC és társai kísérlete, továbbá az elemi részecskék bomlásával, valamint a *Doppler*-effektussal kapcsolatos kísérletek igazolják.

(3) Egy nyugalomban levő rúd nem változtatja hosszát óvatos elforgatás hatására. Tehát egy állandó kis szögsebességgel forgó rúd végpontjainak koordinátáit így is írhatjuk:

$$\mathbf{r}_A(t) = 0, \quad \mathbf{r}_B(t) = l \cos \omega t, \quad l \sin \omega t, \quad 0.$$

Amennyiben a rúd a forgás mellett még  $\mathbf{v}$  sebességgel halad, akkor a rúd hossza periodikusan változik. Ez utóbbi deformáció az, amely a *Michelson—Morley*-kísérlet eredményét magyarázza.

A **193.** pontban fogalmazott dinamikus Lorentz-elv csak közelítőleg érvényes. Egy adott esetben annál pontosabb eredményre vezet, minél kisebb a  $\mathcal{Q}$  rendszer gyorsulása. Mindez a Lorentz-deformációk mechanizmusának tárgyalásával pontosan kimutatható.

## 1. A LORENTZ-DEFORMÁCIÓ MECHANIZMUSA

### a) Relaxációs folyamatok

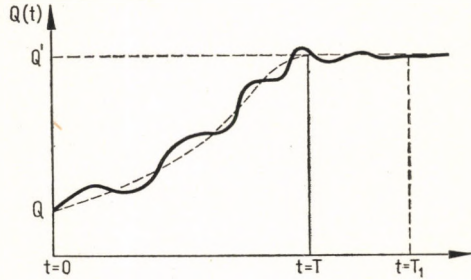
**195.** Felvetjük azt a kérdést: melyek azok a fizikai folyamatok, amelyek a Lorentz-deformációkat okozzák, — például mi okozza egy rúd összehúzódását?

E kérdésre adandó válaszhoz megjegyezzük, hogy egy szilárd rúd atomokból áll, és ezek az atomok dinamikus egyensúlyban vannak. Ha a rudat felgyorsítjuk, az atomok egyensúlyi konfigurációja megváltozik. Miután a külső erők, amelyek a gyorsítást okozták, megszűntek, a mozgó atomok új egyensúly-konfigurációban helyezkednek el. Ez a folyamat mindenestre végbemegy, függetlenül minden relativisztikus effektustól.

Ha egy szilárd rudat gyorsítunk, a gyorsítás által a rúd belsőjében elasztikus hullámokat hozunk létre. Egy egyensúly-konfiguráció, amelyben az atomok mind állandó  $v$  sebességgel mozognak, csak akkor jön létre, miután ezek az elasztikus hullámok lecsillapodtak. Így a külső erő kikapcsolása után nemsokára új egyensúlyi állapot jön létre.

Feltételezve, hogy az atomok közötti erők a Lorentz-elvnek eleget tesznek, azt kell várnunk, hogy a mozgó atomok egyensúlyi konfigurációja valamivel különbözik a nyugvó atomok egyensúlyi konfigurációjától. A relativisztikus effektusokat figyelembe véve azt várjuk, hogy a gyorsítás által létrehozott elasztikus hullámok lecsillapodása után a rúd egy  $Q^*$  konfigurációt vesz fel, amely az eredeti  $Q$  — a nyugalomban levő — rendszer konfigurációjától eltér.

**196.** Ha egy rendszert kis lépésekben gyorsítunk, minden gyorsítás után egy új egyensúlyi konfigurációba tér át a rendszer. Ha viszont a rendszert folytonosan gyorsítjuk, a felvett konfiguráció valamivel a  $Q(t)$  konfiguráció mögött marad vissza, ha  $Q(t)$  a  $t$  pillanatban a sebességnek megfelelő konfigurációt jelenti. A gyorsítás befejezése után fogja a rendszer — egy bizonyos késéssel — a végsebességnek megfelelő konfigurációt felvenni. Ezt a folyamatot a 16. ábrával szematikusan illusztráljuk.



16. ábra. A dinamikus Lorentz-elv sémája

### b) A hőmérsékletváltozás és sebességváltozás összehasonlítása

**197.** A Lorentz-deformációk lényegének jobb megértése céljából a Lorentz-deformációval analóg más folyamatot, egy test hőmérsékletének változását tárgyaljuk. Egy szilárd test atomjainak egyensúlyi konfigurációja a test hőmérsékletétől függ. Ha egy szilárd test hőmérsékletét lassan növeljük,

akkor a melegítés hatására a test kitágul, és így folyamatosan egyensúlyi konfigurációkat vesz fel. Az egyes konfigurációkat a pillanatnyi hőmérséklet határozza meg.

Ha viszont egy rendszer hőmérsékletét nagyon hirtelen sikerül felemelni, akkor a rendszer képtelen a hirtelen hőmérsékletváltozást követni. Első pillanatban a test konfigurációja nem változik, annak ellenére, hogy hőmérséklete megnőtt, és így a rendszer nem jut egyensúlyi állapotba. A hirtelen hőmérséklet-változást követően a rendszer késve veszi fel az egyensúlyi konfigurációt. Fenti jelenség például robbanás esetében történik.

A Lorentz-konfigurációval való analógia a következő: Ha egy rudat hirtelen felgyorsítunk oly módon, hogy megfelelő erőkkkel az összes pontjait egyidejűleg gyorsítjuk, akkor a rúd sebessége változik, azonban a kontrakcióra nem kerül rögtön sor. Miután a gyorsító folyamat befejeződött, a belső erők hatása alatt bizonyos késéssel kontrahált állapot alakul ki.

### c) Nem összefüggő rendszerek deformációja

**198.** Hangsúlyozzuk, hogy a **193.** pont (19) formulájában megfogalmazott dinamikus elv csak *összefüggő* fizikai rendszerekre érvényes. Ezt a fontos megszorítást a következő példával szemléltetjük.

Vegyünk egymástól  $l$  távolságban levő közös tengelyre szerelt két kereket (17. ábra). Tételezzük fel, hogy ezek  $\omega$  szögsebességgel forognak. Ha a rendszert a tengely irányában  $v$  sebességre felgyorsítjuk, akkor a kerekek forgása lelassul, és végeredményben a szögsebességek az

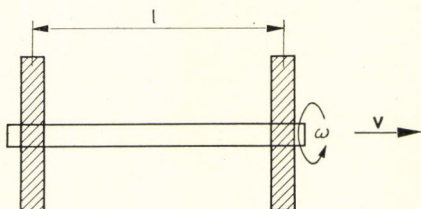
$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

értéket veszik fel. A Lorentz-deformált állapotban nemcsak a kerekek szögsebessége változik  $\omega^*$ -ra, hanem az új konfigurációban a kerekek egymáshoz képest el is vannak fordulva egy

$$\varphi = \frac{\omega^* v l^*}{c^2 - v^2}$$

szöggel, amint ezt a **182.** pontban megmutattuk.

A gyorsulás mechanizmusát elemezve arra a következtetésre jutunk, hogy amennyiben a kerekek nincsenek a tengelyhez rögzítve, tehát szabadon forognak a tengely körül, a gyorsítás a kerekek szögsebességét lelassítja, de a  $\varphi$  szögeltolódás nem jön létre. A kerekek pontosan egyforma erők hatása alatt gyorsulnak, és ezért egyforma módon reagálnak a gyorsulásra. A  $t$  időpontban a kerekek szögsebessége tehát



17. ábra. Az összefüggő és a nem összefüggő rendszer Lorentz-deformációja

$$\omega_1^*(t) = \omega_2^*(t) = \omega \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}.$$



Mint hogy a szögsebességek minden pillanatban egyformák, fáziseltolódás a kerek mozgása között nem jöhet létre.

**199.** Egészen különbözően folyik le a jelenség, ha feltételezzük, hogy a kerek a közös tengelyhez rögzítve vannak. Az adiabatikus elvből következik, hogy a tengely elcsavarodási tendenciát mutat, ha hosszirányban gyorsítjuk. A tengely elcsavarodása a rögzített kerek forgását befolyásolja, és így a rögzített kerek valóban  $\varphi$  szöggel fognak egymáshoz képest elfordulni.

A folyamat részletesebb vizsgálatához megjegyezzük, hogy az elcsavarodó tengelynek a forgó kerek tehetetlenségét le kell küzdenie. Szimmetrikus elrendezés esetén az egyik kerek  $-\varphi/2$ , a másikat pedig  $+\varphi/2$  szöggel fogja elfordítani. Amennyiben a kerek tehetetlenségi nyomatéka nagy, ezeknek az elforgatásoknak a végrehajtásához megfelelő nagy erőkre van szükség.

Előfordulhat az, hogy a gyorsítási szakasz alatt az elforgatáshoz szükséges erők nagyobbak, mint a rendszer belső kohéziója. Ebben az esetben a kerek letörhetnek a tengelyről, és szabadon forognak, azonban teljes fáziseltolódás nélkül. Az is megtörténhet, hogy a tengely törik ketté, ha a tengelyben működő belső erők nem elég nagyok, hogy a kerek egymáshoz képest való elforgatását létrehozzák, de az is előfordulhat, hogy a tengely irreverzibilis deformációt szenved. Ez utóbbi esetekben a végállapot nem felel meg az eredeti állapot Lorentz-deformáltjának, és a gyorsítást nem adiabatikusnak vesszük.

Az az eset, amelyben a kerek szabadon forognak a tengely körül, határesetként fogható fel, — mondván, hogy a „belső erők”, amelyek a kerekeket tartják, nulla nagyságúak —, és ebben az esetben a legkisebb gyorsítás már nem adiabatikus hatásnak felel meg.

#### d) Nem összefüggő rendszerek hosszkontrakciója

**200.** A kérdés fontossága miatt még egy példán keresztül tárgyaljuk a nem összefüggő rendszerek viselkedését. Vizsgáljunk két egyforma  $m$  tömegű testet, amelyek vonatkoztatási rendszerünk  $x$  tengelyén  $l$  távolságban vannak egymástól elhelyezve. A  $t = 0$  időben a testek koordinátái  $x^{(1)} = 0$ ,  $x^{(2)} = l$ . Ha a testeket az  $x$  tengely irányában ható egyforma erőknek vetjük alá, a testek  $t$  pillanatban

$$v_1(t) = v_2(t) = \int_0^t \frac{F}{m} dt = v(t)$$

sebességet vesznek fel, és a testek  $x$  koordinátáit  $t$  időpillanatban

$$x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t) - l = \int_0^t v(t) dt$$

adja meg. Mint hogy a testek pontosan egyforma erőhatásoknak vannak alávetve, egyforma módon reagálnak az erőhatásra, így azt várjuk, hogy

$$x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) = l, \quad t \text{ minden értékére.}$$

A két testből képezett rendszer nem szenved kontrakciót az ily módon történő gyorsítás hatása miatt.

Ha viszont egy rugalmas zsinór segítségével kötjük össze a tömegeket, akkor a zsinór (amely egy zárt rendszernek felel meg) a gyorsítás következtében igyekszik összehúzódní. Így tehát a zsinór hatása által fellép egy kontrakcióra vezető tendencia. Amennyiben a zsinór elég erős, és elég hosszú időt adunk, akkor a zsinór hatása a tömegeket egymáshoz közelebb húzza, úgyhogy végeredményben a tömegek távolsága

$$l^* = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

-re csökken, ahol  $v$  a rendszer végsebességét jelenti. Ha azonban — miként az előbbi példa esetében — a zsinór nem elég erős, elszakadhat vagy irreverzibilis deformációt szenvedhet. Ezekben az esetekben nem áll be a Lorentz-kontrahált konfiguráció.

Mindezekből a megfontolásokból a következő tűnik ki: *Az a határ, amely alatt a gyorsítást adiabatikusnak tekinthetjük, a gyorsított fizikai rendszer tulajdonságaitól függ.*

## 2. A LORENTZ-CSOPORT ALCSOPORTJAINAK JELENTŐSÉGE

**201.** Láttuk, hogy a Lorentz-elv segítségével értelmezni tudjuk különböző kísérletek eredményeit. Felmerül a kérdés, vajon a kísérleti eredmények arra mutatnak-e, hogy a természetben az összes Lorentz-transzformációknak megfelelő deformációk fellépnek? Ezt a kérdést röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy a természettörvények az egész Lorentz-csoporttal szemben invariánsak-e?

A kérdés egyáltalában nem triviális, megmutatjuk azonban, hogy a természettörvények ezen invarianciája csak a *valódi Lorentz-csoporttal szemben* áll fenn, tehát csak azokkal a transzformációkkal szemben, melyekre

$$v < c, \quad (21a)$$

$$B > 0, \quad (21b)$$

$$\det \mathbf{\Lambda}_p = +1. \quad (21c)$$

Az utolsó formulából automatikusan következik, hogy

$$\theta = 1. \quad (21d)$$

(Lásd a **156.** pontot). A (21) egyenleteknek megfelelő mátrixok a Lorentz-csoport alcsoportját képezik. (21a) biztosítja, hogy a transzformációk valós elemekkel rendelkeznek. A (21b) egy fizikai megszorítást jelent, ti. a transzformációk  $B < 0$ -val olyan  $\mathfrak{Q}^*$  rendszerekre vezetnének, amelyekben a belső mozgás az eredeti  $\mathfrak{Q}$  rendszerhez képest időben megfordítva folyrna le. Kísérleti tapasztalatok arra mutatnak, hogy nem minden fizikai folyamat fordítható meg időben. Erre a kérdésre a **263.** pontban visszatérünk.

Egy transzformáció, amelyben  $B > 0$ ,  $\det \mathbf{\Lambda}_p = -1$ , a  $\mathfrak{Q}$  tükörképének megfelelő  $\mathfrak{Q}^*$  rendszert hozna létre. Kísérleti tapasztalat azt is mutatja,

hogy a természetben rendszerek tükörképe nem mindig fordul elő. A (21d) kikötés pedig arra a triviális tényre mutat, hogy egy adott fizikai rendszer méreteit általában nem lehet konstans faktorral megváltoztatni.

**202.** Megjegyezzük, hogy noha csak a valódi *Lorentz*-csoportoz tartozó  $\Lambda_p$ -k vezetnek a valóságban előforduló deformációkhoz, ennek ellenére koordinátatranszformációk esetében az egész *Lorentz*-csoport elemeit felhasználhatjuk. Azt találjuk ti., hogy

$$\Lambda'_p = \Lambda^{(q)} \Lambda_p \Lambda^{(q)-1}$$

és  $\Lambda'_p$  valódi *Lorentz*-csoport tagja lesz, amennyiben a  $\Lambda_p$  e csoport tagja és ez fennáll, függetlenül attól, hogy vajon  $\Lambda^{(q)}$  a valódi *Lorentz*-csoportoz tartozik-e vagy sem.



## A LORENTZ-ELV BELSŐ ELLENTMONDÁSMENTESSÉGE

A) LORENTZ-ELVVEL KAPCSOLATOS  
KINEMATIKAI MEGGONDOLÁSOK

**203.** E fejezetben néhány kinematikai megfontolást tárgyalunk azzal a célkitűzéssel, hogy a Lorentz-elv ellentmondásmentességét alátámasszuk. Ilyen megfontolásokra azért van szükség, mert az irodalomban sokszor ún. „paradoxonokkal” találkozunk, amelyek állítólag a relativitáselméletből következnek. Megmutatjuk, hogy ha a jelenségeket következetesen tárgyaljuk, paradoxonok nem lépnek fel. Az állítólagos paradoxonok feloldása az elmélet szokásos formájában nyilvánvalóan éppen úgy történik, mint az itteni tárgyalásmódban, amely a Lorentz-elvből indul ki.

## 1. SEBESSÉGEK ÖSSZEADÁSI TÖRVÉNYE

**204.** Sok félreértés a sebesség-összeadás kérdésével függ össze; e problémakört ezért részletesebben elemezzük.

Vegyünk két,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  kisméretű fizikai rendszert. Egy  $K$  vonatkoztatási rendszerben e rendszerek koordinátái legyenek

$$\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{v}_A t + \mathbf{a}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{r}_B(t) = \mathbf{v}_B t + \mathbf{b}.$$

$A$  és  $B$  sebességmértékeit úgy írhatjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{v}_A, \quad \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \mathbf{v}_B.$$

Az  $A$ -ból  $B$ -be vezető távolságvektor a  $t$  időpontban

$$\mathbf{r}_{AB}(t) = (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)t + \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

-ként írható fel. Így a távolságvektor változásának üteme

$$\mathbf{v}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}(t)}{dt} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A. \quad (1)$$

$\mathbf{v}_{AB}$ -t definíció szerint mint  $B$ -nek  $A$ -hoz viszonyított sebességének mértékét vehetjük (a mértéket  $K$  vonatkoztatási rendszerben vesszük). A fenti kijelentés egy egyszerű definíció, és ezért azt, hogy vajon  $\mathbf{v}_{AB}$  „valóban”  $B$ -nek  $A$ -hoz viszonyított sebessége, sem bizonyítani, sem cáfolni nem lehet.

(1)-ből következik, hogy

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}, \quad (2)$$

vagyis a  $B$  rendszer  $\mathbf{v}_B$  sebessége egyenlő az  $A$  rendszer  $\mathbf{v}_A$  sebességének és a viszonylagos  $\mathbf{v}_{AB}$  sebességnek az összegével.

A fenti ún. „klasszikus sebesség-összeadási törvény” szükségtelenül rossz hírnevet szerzett magának. Mint ahogy fent kifejtettük, a (2) egyenlet érvényessége az (1) *a relatív sebesség fogalmának definícióján alapul, és ezért a (2) egyenlet érvényessége (vagy érvénytelensége) kísérletileg nem ellenőrizhető.*

Megjegyezzük, hogy az (1) formula hasznos definíciót ad. A  $\mathbf{v}_{AB}$  viszonylagos sebesség, és az (1) definíció szerint megadja az  $\mathbf{r}_{AB}$  távolságvektor időbeli változását egy arányossági faktor segítségével.

**205.** Félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy az (1) egyenlet által adott definíció mellett a relatív sebesség más definícióját is használhatjuk.

Vegyünk egy  $P$  pontot, amely

$$\frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \mathbf{v}$$

sebességgel mozog a  $K$  vonatkoztatási rendszerhez képest.  $P$ -nek egy, a  $K$  rendszerhez képest  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó  $K'$  vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebességét szintén meg tudjuk adni.  $K'$  mértékeiben fennáll, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}'_P}{dt'} = \mathbf{w}' ,$$

ahol  $\mathbf{w}'$   $P$ -nek a  $K'$ -höz viszonyított sebességét  $K'$  mértékeiben adja meg. A  $K$  és  $K'$  koordinátái közötti transzformációt úgy írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{r}' - c^2 \mathbf{U} t' , \\ t &= -\frac{1}{c^2} \mathbf{u}\mathbf{r}' + B t' , \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ahol

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{1} + \frac{\mathbf{v} \circ \mathbf{v}}{v^2} (B - 1) , \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{v} B , \quad \mathbf{U} = -\mathbf{v} B / c^2 . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A  $P$  pont koordinátavektorainak értékét a (3) egyenletbe behelyettesítve  $t$  szerinti differenciálás segítségével azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{V} = \frac{\tilde{\mathbf{L}} \mathbf{w}' - c^2 \mathbf{U}}{-\frac{1}{c^2} \mathbf{u}\mathbf{w}' + B} . \quad (5)$$

Ha (4)-et (5)-be behelyettesítjük, akkor

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2/B}{1 + \frac{\mathbf{v}\mathbf{w}'}{c^2}}, \quad (6)$$

ahol

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2, \quad \mathbf{w}'_1 = \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{w}')/v^2,$$

tehát  $\mathbf{w}'_1$  és  $\mathbf{w}'_2$   $\mathbf{w}'$  komponensei  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos, illetve  $\mathbf{v}$ -re merőleges irányokban. Abban a speciális esetben, amikor  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}'$  párhuzamosak, (6) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$V = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}. \quad (7)$$

Megjegyezzük, hogy a (7) formula különböző szimmetrikus formákba alakítható át. A (7) formulából következik, hogy

$$\frac{c - V}{c + V} = \frac{c - v}{c + v} \cdot \frac{c - w'}{c + w'}, \quad (8)$$

továbbá, hogy

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}} \left/ \left( 1 + \frac{vw'}{c^2} \right) \right. \quad (8a)$$

**206.** A (6) összefüggés az *Einstein*-féle sebesség-összeadási törvény. Az *Einstein*-féle összeadási törvény a klasszikus (2) formulában adott törvénytől tartalmilag eltér, minthogy az *Einstein*-féle törvény két különböző vonatkoztatási rendszer mértékeiben adott  $\mathbf{v}$ , illetve  $\mathbf{w}'$  sebesség összetételéből adódó sebesség mértékszámát adja meg.\*

Valóban,  $\mathbf{v}$   $K$  mértékeiben,  $\mathbf{w}'$  pedig  $K'$  mértékeiben van kifejezve.

A  $\mathbf{w}'$  sebesség a  $P$  pontnak az  $O'$ , vagyis  $K'$  origójához viszonyított sebessége. Ezt a sebességet  $K$  mértékeiben is kifejezhetjük. Minthogy

$$\mathbf{r}_0' = \mathbf{v}t + \text{konstans},$$

azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{w} = \frac{d(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_0')}{dt} = \mathbf{V} - \mathbf{v},$$

vagyis párhuzamos sebességek esetében (7) segítségével

$$w = \frac{w' + v}{1 + \frac{vw'}{c^2}} - v = w' \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{vw'}{c^2}}.$$

A fenti kifejezés az  $O'$  és  $P$  közötti sebesség mértékei, vagyis  $w$  és  $w'$  közötti összefüggést adja meg.

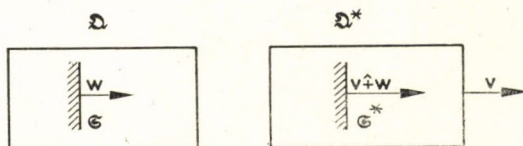
\* A magyar olvasók részére megjegyezzük, hogy ezt a gondolatot NOVOBÁTZKY KÁROLY: A relativitás elmélete című tankönyvében is megtaláljuk. (Tankönyvkiadó, 1963. 2. kiadás, 28. o.)

## 2. AZ ÖSSZEADÁSI FORMULA ÉS A LORENTZ-DEFORMÁCIÓK

**207.** Az összeadási formula valódi fizikai tartalmát a következőkben tárgyaljuk. Vizsgáljunk egy  $\mathcal{Q}$  fizikai rendszert, és ennek  $K$ -hoz viszonyított  $Q$  reprezentációját. Tételezzük fel, hogy  $\mathcal{Q}$  egy  $\mathcal{A}$  pontot tartalmaz, mely pont  $K$ -hoz képest

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{w}$$

sebességgel mozog. Példaként tételezzük fel, hogy  $\mathcal{Q}$  egy  $-K$ -hoz viszonyítva nyugalomban levő  $-$  test, továbbá, hogy  $\mathcal{A}$  egy  $\mathcal{E}$  hullámfelület pontja, amely hullámfelület a 18. ábrának megfelelően  $\mathcal{Q}$ -n keresztülhalad.



18. ábra. A Lorentz-deformáció és a sebesség összeadási törvény

Ha a  $\mathcal{Q}$  rendszert úgy gyorsítjuk fel, hogy végeredményben  $\mathbf{v}$  sebességgel halad  $K$ -hoz képest, a rendszer konfigurációja egy  $\mathcal{Q}^*$  Lorentz-deformált konfigurációba megy át. Az  $\mathcal{E}$  hullámfelület egy  $\mathcal{E}^*$ , az  $\mathcal{A}^*$  pontot tartalmazó hullámfelületbe megy át.  $\mathcal{A}^*$   $\mathbf{r}_A^*$  koordinátavektorát az  $\mathbf{r}_A$  koordinátavektorából a következő módon számíthatjuk ki:

$$\mathbf{r}_A^*(t^*) = \mathbf{L}\mathbf{r}_A(t) + \mathbf{u}t,$$

$$t^* = \mathbf{U}\mathbf{r}_A(t) + Bt,$$

tehát azt találjuk, hogy

$$\mathbf{w}^* = \frac{d\mathbf{r}_A^*(t^*)}{dt^*} = \frac{\mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{u}}{\mathbf{U}\mathbf{w} + B},$$

és hasonlóan a 205. pontban leírt eljáráshoz az adódik, hogy

$$\mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2/B}{1 + \frac{\mathbf{v}\mathbf{w}}{c^2}}, \quad (9)$$

ahol  $\mathbf{w}_1$  és  $\mathbf{w}_2$  a  $\mathbf{w}$  komponenseit jelentik  $\mathbf{v}$ -re párhuzamos, illetve merőleges irányban.

Látjuk tehát, hogy a  $\mathcal{Q}$  rendszer Lorentz-deformációja miatt a felgyorsított  $\mathcal{Q}^*$  rendszerben fellépő  $\mathcal{E}^*$  hullámfelület egy  $\mathbf{w}^* \neq \mathbf{v} + \mathbf{w}$  sebességgel halad.

Az  $\mathcal{E}^*$   $\mathcal{Q}^*$ -hoz viszonyított sebességét  $\mathbf{w}^* - \mathbf{v}$ -nek vehetjük. E sebesség  $\mathbf{w}$ -tól  $v^2/c^2$  nagyságrendű tagokkal különbözik.



Ha  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  egymással párhuzamos, akkor (9) úgy írható, hogy

$$\left. \begin{aligned} w^* &= \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}, & (a) \\ w^* - v &= \frac{w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{vw}{c^2}}, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

és

**208.** A (10a) egyenlet alkalmazása a *Fizeau*-kísérlet eredményét magyarázza. Legyen a  $\Sigma$  rendszer egy  $K$ -hoz képest nyugvó folyadéktömeg. Elektromágneses hullámok a  $\Sigma$  belsejében

$$w = \frac{c}{n}$$

sebességgel haladnak. A sebességet  $K$  rendszer mértékeiben fejeztük ki.  $\Sigma^*$  rendszer legyen hasonló folyadéktömeg, amely  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog  $K$ -hoz képest. Az eredeti hullámfrontoknak, amelyek  $\mathbf{v}$  irányában  $c/n$  sebességgel haladtak, a  $\Sigma^*$ -ban  $\mathcal{S}^*$  hullámfrontok fognak megfelelni, amelyeknek  $K$ -hoz viszonyított haladási sebessége

$$w^* = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{cn}} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \text{magasabb rendű tagok} \quad (11)$$

A **32.** pontban megadtuk a *Fizeau*-kísérlet részletes leírását, az ottani (11) formula megfelel a fenti (11) formulának.

Szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy a (11) formulát nem úgy kaptuk, mint ha  $\mathbf{v}$ -t és  $\mathbf{w}$ -t „összeadtuk” volna, hanem feltételeztük, hogy azok a folyamatok, amelyek a nyugvó folyadékban a hullámfrontok  $w = c/n$  haladási sebességét létrehozták, *Lorentz*-invariánsak. E feltételezésből az következik, hogy azok a folyamatok, amelyek a nyugvó folyadékban  $c/n$  terjedési sebességre vezetnek, a mozgó folyadékban  $w^*$  sebességre fognak vezetni.

A **302.** pontban megmutatjuk, hogy a (11) összefüggés tisztán klasszikus megfontolások alapján levezethető, és a meggondolásban sem a (10) összeadási formulát, sem a *Lorentz*-elvet nem kell felhasználnunk.

## B) SZILÁRD TESTEK KONTRAKCIÓJA ÉS AZ ÓRÁK LELASSULÁSÁVAL KAPCSOLATOS MEGFONTOLÁSOK

**209.** Különböző meggondolások arra a feltevésre készlettek, hogy egy szilárd rúd összehúzódik, ha az éterhez képest felgyorsítjuk. Hasonló módon egy óra lelassul, ha az éterhez képest mozgásba hozzuk. Felületes meggondolás alapján úgy tűnik, hogy ezeknek az effektusoknak a segítségével az óra vagy a rúd sebességét az éterhez képest meg lehet állapítani.

Tételezzük fel, hogy a Föld  $v$  sebességgel mozog az éterhez képest. Egy a Földdel együtt hosszirányban mozgó rúd egy  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktoriall rövidebb, mint nyugalmi állapotában. Ha a rudat a Földhöz képest  $w$  sebességre gyorsítjuk fel és ha  $w$   $v$ -vel egyirányú, akkor a rúdnak a sebességét növeljük az éterhez képest, és a hosszának tovább kell csökkennie. Ha viszont a rudat a Földhöz képest  $w$  sebességre gyorsítjuk és  $w$   $v$ -vel ellentétes irányú, akkor a rúd sebességét az éterhez képest csökkentettük, és így a kontrakció csökken, tehát a rúd hossza várhatóan növekszik.

Így, ha a rudat a Földhöz képest különböző irányokban gyorsítjuk és a gyorsítás eredményeként bekövetkező hosszváltozásokat feltérképezzük, úgy tűnik, hogy ezekre az adatokra támaszkodva  $v$  irányát és nagyságát meg tudjuk állapítani.

Hasonló módon úgy tűnik, hogy ha egy eredetileg a Földhöz képest nyugvó órát különböző irányokba felgyorsítunk, akkor a Lorentz-deformációk által az óra járási sebessége megváltozik és ezek a változások is alkalmasnak tűnhetnek a  $v$  sebesség megállapítására. Bár a fent leírt effektusok kétségtelenül léteznek és egy rúd valóban változtatja hosszát és egy óra az ütemét, ha a sebességét a Földhöz képest megváltoztatjuk, *a mozgó órákkal, vagy mozgó rudakkal keresztülvihető valódi megfigyelések mégsem vezetnek  $v$  meghatározására.*

**210.** Ennek bizonyítására vizsgáljuk az  $A$  és  $B$  órákat. Tételezzük fel, hogy a két óra kezdetben egymáshoz közel van és egymáshoz képest nem mozognak. Ebben az eredeti elhelyezésben szinkronizálhatjuk az órákat. A szinkronizáció után az órákat adiabatikusan felgyorsítjuk a megadott sebességre. Vizsgáljuk először az órák mozgását  $K_0$  vonatkoztatási rendszerhez képest, amelyről feltételezhetjük, hogy az éterhez képest nyugszik. (A későbbiekben majd látjuk, hogy egyáltalában nem lényeges annak feltételezése, hogy  $K_0$  az éterhez képest nyugszik és valójában a meggondolásokat a tetszőlegesen kiválasztott  $K_0$  Lorentz-rendszer segítségével is véghezvihatjuk.)

**211.** Tételezzük fel, hogy az órák  $K_0$   $x$  tengelye mentén mozognak, tehát  $t$  időpontban

$$x_A(t) = a - vt, \quad x_B(t) = b + wt, \quad (12)$$

koordinátákkal rendelkeznek, ahol  $a$ ,  $b$  állandók. Amennyiben az  $A$  óra  $T_A$  időközökben ad jeleket, akkor ezek a jelek

$$t_k = t_0 + kT_A \quad (13)$$

időpontokban indulnak el és a  $k$ -adik jelnek az  $x$  tengelyen haladó pontja a

$t > t_k$  időpontban egy  $x_k(t)$  koordinátával rendelkeznek. (12) segítségével azt kapjuk, hogy

$$x_k(t) = x_A(t_k) + c(t - t_k) = a - (c + v)t_k + ct. \quad (14)$$

Ezek a jelek  $B$  pontot  $t'_k$  időpontokban érik el úgy, hogy

$$x_B(t'_k) = x_k(t'_k),$$

tehát (12) és (14) segítségével azt kapjuk, hogy

$$a - (c + v)t_k + ct'_k = b + wt'_k,$$

és

$$t'_k = \frac{b - a + (c + v)t_k}{c - w}. \quad (15)$$

Azt is írhatjuk, hogy

$$t'_k = t'_0 + kT'_A, \quad (16)$$

ahol  $T'_A$  az az időköz, amellyel az  $A$ -ból induló jelek  $B$ -be érkeznek;  $T'_A$   $B$ -ből nézve az  $A$ -ból származó jelek ritmusaként is felfogható. A (16), (15) és (13) képletekből azt kapjuk, hogy

$$T'_A = t'_{k+1} - t'_k = \frac{c + v}{c - w} T_A.$$

A  $B$ -ben elhelyezett óra ritmusát az  $A$ -ból kapott jelek ritmusával összehasonlítva meghatározhatjuk a

$$Q = T_B/T'_A = \frac{c - w}{c + v} \cdot \frac{T_B}{T_A} \quad (17)$$

arányszám értékét.

Az órák lelassulására vonatkozó hipotézis szerint feltételezzük, hogy

$$T_A = T/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad T_B = T/\sqrt{1 - w^2/c^2}, \quad (18)$$

ahol  $T$  az órák közös periódusa az éterhez nyugvó állapotban.

(18)-at (17)-be behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$Q = \sqrt{\frac{c - v}{c + v} \cdot \frac{c - w}{c + w}}. \quad (19)$$

A 205. pont (8) összefüggését felhasználva azt is írhatjuk, hogy

$$Q = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}, \quad V = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}},$$

vagy

$$V = c \frac{1 - Q^2}{1 + Q^2}. \quad (20)$$

**212.** Ha az órák járását a  $B$  pontból figyeljük meg, akkor pusztán a (17)-ben definiált  $Q$  viszonyszámot tudjuk a megfigyelésekből meghatározni, ti. csak az figyelhető meg, hogy az  $A$  órának a  $B$ -ből megfigyelt ritmusa hogyan viszonylik a  $B$  óra ritmusához. (20)-at figyelembe véve látjuk, hogy  $Q$  számértéke nem elegendő ahhoz, hogy  $v$ -t és  $w$ -t külön-külön meghatározhassuk, csupán a két értéknek *Einstein*-féle  $V$  kombinációja állapítható meg.  $Q$  megfigyelt értéke nem zárja ki azt a feltételezést, hogy  $A$   $v'$ ,  $B$  pedig  $-w'$  sebességgel halad, ahol

$$\frac{v' + w'}{1 + \frac{v'w'}{c^2}} = c \frac{1 - Q^2}{1 + Q^2}. \quad (21)$$

Bármilyen  $v'$ ,  $-w'$  párról, amely (21)-et kielégíti, egyformán feltételezhető, hogy megadja  $A$ , illetve  $B$  éterhez viszonyított sebességét.

**213.** Megmérhetjük  $B$  óra ritmusát  $A$ -ból nézve. Így a

$$Q = \frac{T_A}{T'_B}$$

viszonyt mérhetjük. Minthogy azonban (19)  $v$  és  $w$ -ben szimmetrikus, azt várjuk, hogy

$$Q = Q'. \quad (22)$$

Minthogy  $Q$  és  $Q'$  egymástól független kísérletek eredményeként határozhatók meg, a (22) összefüggés feltevéseink ellenőrzésére ad lehetőséget. Ha a mérések (22)-nek megfelelő értékekre vezetnek, tehát, ha azt találjuk hogy

$$\frac{T_B}{T'_A} = \frac{T'_A}{T'_B},$$

akkor e kísérleti eredmény többek között a (18) egyenletben foglalt hipotézist támogatja, továbbá azt a feltételezést is alátámasztja, hogy létezik egy  $K_0$  vonatkoztatási rendszer, amelyhez viszonyítva a fény izotrop terjed.

**214.** A (19) összefüggés két ismeretlen mennyiségre,  $v$ -re és  $w$ -re egy egyenletet ad meg. Ha más, az előbbtől független összefüggést is találunk a  $v$  és  $w$  között, akkor e két összefüggés segítségével  $v$ -t és  $w$ -t külön-külön meg tudjuk határozni. Ilyen összefüggés azonban, mint megmutatjuk, nem létezik.

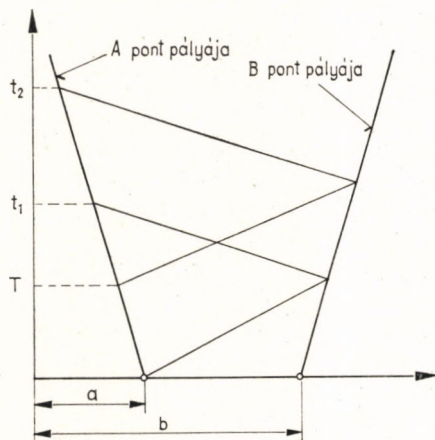
Hogy  $v$  és  $w$  között fennálló, (19)-től független összefüggést próbáljunk találni, az  $A$  és  $B$  közötti relatív sebesség radarmódszerrel történő megállapításához is folyamodhatunk. Egy  $A$ -val együttmozgó megfigyelő bocsásson ki  $t = 0$  és  $t = T$  időpontokban  $B$  felé rádiójeleket. Ezek a jelek  $B$ -ről visszaverődnek; az  $A$  pontba a jelek  $t = t_1$ , illetve  $t = t_2$  időpontokban érkeznek vissza.

Egyszerű geometriai megközelítést alkalmazva (19. ábra):

$$t_1 = \frac{2(b-a)c}{(c-v)(c-w)}, \quad t_2 = \frac{2(b-a)c + (c+v)(c+w)T}{(c-v)(c-w)},$$

tehát azt találjuk, hogy az  $A$  pontban megfigyelt időpontokból a következő mennyiség határozható meg:

$$\frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{(c+v)(c+w)}{(c-v)(c-w)} = 1/Q^2. \quad (23)$$



19. ábra. Két fizikai rendszer közötti relatív sebesség megállapítása  $x-t$  diagramm segítségével

(17)-et és (23)-at összehasonlítva azt látjuk, hogy mindkét mérés — vagyis egyrészt az a mérés, amelynek segítségével az  $A$  és  $B$  órák járását kívánjuk összehasonlítani, másrészt az a mérés, amellyel  $A$  és  $B$  közötti sebességet kívánjuk megállapítani — ugyanannak a  $Q$  mennyiségnek a meghatározására vezetnek. A  $Q$  — mint láttuk —  $V$ , a  $v$  és  $w$  Einstein-féle összegének függvénye. Így tehát a kétféle mérési módszer nem ad lehetőséget  $v$  és  $w$  külön meghatározására, viszont egy további ellentmondásmentességi próbára vezet. Amennyiben ugyanis a két egymástól nagyon különböző mérési módszer különböző számértékekre vezetne  $Q$ -t illetően, ez azt mutatná, hogy feltételezéseink hibásak. Amennyiben a két mérés ugyanarra a numerikus eredményre vezet, e mérések alátámasztják a fényterjedésre és az óralelassulásra vonatkozó feltételezéseinket, azonban az eredmények együttese sem ad lehetőséget  $v$  és  $w$  külön meghatározására.

**215.** Ha a  $B$  pontból  $A$  felé küldjük a radarjeleket, akkor — miként a fenti esetben — azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{Q'^2} = \frac{t'_2 - t'_1}{T'}$$

ahol vesszővel a  $B$  pontban megfigyelt mennyiségeket jelöljük. Minthogy  $v$  és  $w$  szimmetrikusan léptek fel a (23) egyenletben, azt várjuk, hogy  $Q = Q'$  és így

$$\frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{t'_2 - t'_1}{T'}$$

Ez utóbbi összefüggés egy további ellenőrzésre ad lehetőséget, amely azonban szintén nem vezet  $v$  és  $w$  külön meghatározására. Mindebből az következik, hogy különböző mozgó órákkal való megfigyelések csakis a relativisztikus lelassulási formulák igazolására vezetnek, de nem adnak információt az éterhez viszonyított sebesség értékére.

**216.** E megfontolásokat kiterjeszthetjük arra az esetre is, amelynek során az órák mellett rudakat is használunk és a rudak hosszát az oda-vissza haladó fényjelek segítségével állapítjuk meg.

Vizsgáljunk tehát két párhuzamos rudat, az egyik  $-v$ , a másik  $w$  sebességgel halad egy vonal mentén. Az egyik rúd hosszát a másikkal együtt mozgó megfigyelő radarjelekkel állapíthatja meg. Ilyen méréseknek a részletes elemzése a már fent leírt módszerrel olyan kifejezésekre vezet, amelyekből ismét csakis  $V$  értékét lehet megállapítani. Ezen elemzés lényeges vonása, hogy feltételezzük, hogy a rudak  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , illetve  $\sqrt{1 - w^2/c^2}$  arányban húzódnak össze.\*

**217.** A fenti fejtegetések részben a **44.** pontban a merőleges *Doppler*-effektussal kapcsolatosan már kifejtett érveket ismétlik. Itt azonban a megfontolásokat kibővítettük annak megmutatásával, hogy a *Doppler*-frekvenciák megfigyeléséhez más megfigyeléseket is csatolhatunk, de e megfigyelések összessége sem alkalmas  $v$  és  $w$  számszerű megállapítására.

## 1. AZ „ÓRAPARADOXON”

**218.** A következőkben egy problémacsoportot beszélünk meg, amelyet időnként „óraparadoxon”-ként szokásos említeni, bár a valóságban semmiféle paradoxon nem lép fel.

Vizsgáljunk egy periodikus belső mozgással rendelkező zárt fizikai rendszert. Egy ilyen rendszert óráként kezelhetünk. Gondolhatunk például egy oszcilláló atomra, egy oszcilláló kristályra, vagy egy, a tengelye körül állandó szögsebességgel forgó szilárd testre. Egy ilyenfajta óra belső mozgását  $\omega$  szögsebességgel jellemezhetjük. Az órát leolvasva számértékhez jutunk, amelyet a következőkben *leolvasásnak* fogunk nevezni. Leolvasásnak tehát itt a következő mennyiségeket vehetjük

$$\int_0^t \omega dt = T,$$

ahol  $t$  a  $K$  vonatkoztatási rendszernek megfelelő időmérték az órához

\* A számítások részletes leírása megjelent JÁNOSY L. Fizikai Szemle, 16, 108–111, 1966. című cikkében, valamint JÁNOSY L. A relativitáselmélet és fizikai valóság, (Gondolat Kiadó, Budapest, 1969.) című könyvében.

közeli pontban.  $T$  az óra által mutatott időmérték, és azt mondjuk, hogy az órának állandó a ritmusa, ha

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = 0.$$

**219.** Ha az órát egészében felgyorsítjuk, az óra járása a Lorentz-elvnek megfelelően lelassul. Miután elérjük, hogy az óra  $v$  sebességgel mozog, az óra ritmusát

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

adja meg. Ha  $\omega$  állandó, akkor az óra leolvasását  $t$  időben

$$T^* = \int_0^t \omega^* dt = \frac{T}{t} \int_0^t \sqrt{1 - v(t')^2/c^2} dt' \quad (24)$$

adja meg, ahol  $v(t')$  az óra sebessége  $t'$  időpontban.

(24)-ből látjuk, hogy

$$T^* < T.$$

Ha az óra  $v(t)$  sebessége a  $c$  sebességnél mindig sokkal kisebb, akkor  $v^2(t)/c^2$  hatványai szerinti sorfejtést alkalmazhatunk, és magasabb rendű tagok elhagyásával azt találjuk, hogy

$$\Delta T = T - T^* = \frac{\omega \bar{v}^2 t}{2c^2},$$

ahol

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{t} \int_0^t v(t')^2 dt'$$

a sebességnégyzet átlagértéke. Látjuk tehát, hogy a mozgó óra  $\Delta T$  késése arányos a mozgás tartamára átlagolt sebességnégyzettel.

Kísérletileg is ki tudjuk mutatni, hogy egy óra valóban késést szenved a mozgás során; pl. a  $\mu$ -mezon bomlásával kapcsolatos megfigyelések is alátámasztják ezt (lásd a 47. pontot).

**220.** Vegyünk két,  $A$  és  $B$  órát, és tételezzük fel, hogy  $A$  egy állandó  $\mathbf{v}$  sebességgel,  $B$  viszont változó sebességgel,

$$\mathbf{v}_B(t) = \mathbf{v} + \mathbf{w}(t)$$

mozog. Azok a késések, amelyeket  $A$  és  $B$  szenvednek, úgy írhatók fel, hogy

$$\Delta T_A(t) = \frac{\omega v^2 t}{2c^2},$$

illetve

$$\Delta T_B(t) = \frac{\omega}{2c^2} \int_0^t (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 dt = \Delta T_A(t) + \frac{\omega}{c^2} \mathbf{v} \int_0^t \mathbf{w} dt + \frac{\omega t}{2c^2} \bar{w}^2.$$

Azt írhatjuk, hogy

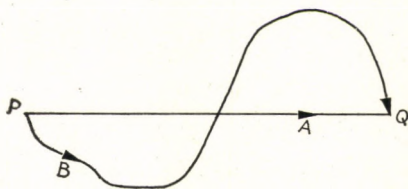
$$\int_0^t \mathbf{w} dt = \mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t) = \mathbf{r}_{AB}(t),$$

tehát arra a következtetésre jutunk, hogy

$$\Delta T_B - \Delta T_A = \frac{\omega}{c^2} \mathbf{v} \mathbf{r}_{AB}(t) + \frac{\omega t}{2c^2} \bar{w}^2.$$

**221.** Tételezzük fel, hogy  $A$  és  $B$  a  $t = 0$  időpontban ugyanaból a  $P$  pontból indulnak el és a  $t = t_1$  időpontban a  $Q$  pontban újra találkoznak.

Ebben az esetben azt írhatjuk, hogy (lásd 20. ábrát)



$$\mathbf{r}_{AB}(0) = \mathbf{r}_{AB}(t_1) = 0,$$

és

$$(\Delta T_B - \Delta T_A)_{t=t_1} = \frac{\omega t_1}{2c^2} \bar{w}^2, \quad (25)$$

tehát

$$\Delta T_B > \Delta T_A.$$

20. ábra. A különböző pályákon mozgó órák lelassulása

Tehát ha az  $A$  és  $B$  órák leolvasását az órák két találkozásával alkalmával össze-

hasonlítjuk, azt találjuk, hogy abban az esetben, ha  $A$  óra állandó sebességgel,  $B$  óra pedig egyenetlenül mozog, a  $B$  óra a találkozások közötti időszakban az  $A$  órához képest késést szenved.

**222.** Vegyük, hogy mindkét óra

$$\mathbf{r}_A(0) = \mathbf{r}_B(0) = 0$$

pontból indul ki és addig haladnak, amíg

$$\mathbf{r}_B(t_1) - \mathbf{r}_A(t_1) = \mathbf{r}$$

távolságban helyezkednek el egymástól. Ebben az esetben azt találjuk, hogy

$$\Delta T_B - \Delta T_A = \frac{\omega \mathbf{r} \mathbf{v}}{c^2} + \frac{\omega t_1}{2c^2} \bar{w}^2. \quad (26)$$

Tételezzük fel pl. hogy a  $B$   $A$ -tól egyenes vonalon távolodik és  $B$ -nek gyakorlatilag állandó a sebessége. Azt írhatjuk, hogy

$$\bar{w}^2 = \frac{r^2}{t_1^2},$$

tehát

$$\frac{\omega t_1}{2c^2} \bar{w}^2 = \frac{\omega r^2}{2c^2 t_1} \rightarrow 0, \text{ ha } t_1 \rightarrow \infty.$$



Ebből azt látjuk, hogy amennyiben  $w$   $B$ -nek  $A$ -tól való eltávolodási sebessége kicsi, akkor a (26) jobb oldalán a második tagot elhanyagolhatjuk és így jó közelítésben

$$\Delta T_B - \Delta T_A \approx \frac{\omega \mathbf{r} \mathbf{v}}{c^2}, \quad (27)$$

Ha  $\mathbf{v} = 0$ , ha tehát  $A$  nyugalomban van és  $B$  nagyon lassan távolodik el  $A$ -tól, akkor

$$\Delta T_A = 0, \Delta T_B = 0, \text{ a magasabbrendű tagoktól eltekintve.}$$

Ebből az következik, hogy *ha egy órát bármily nagy távolságra viszünk el egy  $K_0$  vonatkoztatási rendszerben, akkor — amennyiben a mozgást elég lassan hajtjuk végre — az óra nem fog észrevehető fáziseltolódást szenvedni.*

**223.** Ehhez azonban hozzátesszük, hogy ha  $\mathbf{r} \mathbf{v} \neq 0$ , a  $B$  óra mindig észrevehető fáziseltolódást szenved, ha  $\mathbf{r}$  távolságra elvisszük. Vegyük a  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó  $A$  órát úgy, hogy a  $K$  rendszer origójában van. Ha a  $B$  órát a  $K$  rendszerhez képest lassan elmozgatjuk, a (27) szerint azt látjuk, hogy (kizárva azt az esetet ha  $B$   $\mathbf{v}$  irányára merőlegesen mozog)  $B$  fáziseltolódása  $A$ -hoz képest felhalmozódik és a végleges értéke az  $A$  és  $B$  közötti távolsággal arányos.

Könnyen belátható, hogy  $B$   $A$ -hoz viszonyított fáziseltolódása éppen azt az értéket veszi fel, amely fáziseltolódás megfelel a  $K$  rendszerben fényjelekkel szinkronizált órák fáziskülönbségének. Tehát, *ha egy órát a  $K$  Lorentz-rendszerhez képest nagyon lassan mozgatunk, akkor ez az óra olyan fáziseltolódásokat szenved, hogy leolvasásai megegyeznek a  $K$  rendszerben fényjelekkel a 147. pontban leírt módszerrel beállított órák leolvasásaival.*

Látjuk tehát, hogy ha egy órát a  $K_0$  rendszerben lassan mozgatunk, akkor az óránál észrevehető fáziseltolódás nem jön létre. Ha viszont egy órát egy mozgó  $K$  vonatkoztatási rendszerhez képest lassan mozgatunk, ez utóbbi óra a  $K$  rendszerrel való együttes mozgás folytán fáziseltolódást szenved. Azonban a mozgó óra *látszólagosan* mégsem szenved fáziseltolódást abban az értelemben, hogy mindig a  $K$ -ban szinkronizált órákkal megegyező leolvasásokat mutat. Ebből látjuk, hogy  $K$  és  $K_0$  között olyan kísérletekkel sem tudunk különbséget tenni, ahol órákat lassan mozgatunk egyik helyről a másikra és állásukat összehasonlítjuk a különböző helyeken működő órák állásával.

Itt kitérhetünk arra a kérdésre is, hogy miért nem lehetne MAXWELL javaslatának megfelelően (lásd a 70. pontot) egy finomított Römer-kísérlet segítségével a Naprendszer  $\mathbf{V}$  sebességét az éterhez képest megfigyelni.

A javaslat abból indul ki, hogy egy, a Jupitertől kiinduló fényjel más és más idő alatt éri el a Földet annak megfelelően, hogy a Jupiter—Föld irány a naprendszer  $\mathbf{V}$  sebességével megegyező vagy ellenkező irányba mutat. Ennek megfelelően a Jupiter holdak segítségével mért fénysebesség  $c + V$  és  $c - V$  értékek között kellene hogy ingadozzon a Jupiter keringése során, ha a megfigyeléseket olyan időszakokban vinnék végbe, amelyekben a Jupiter a Földtől  $\mathbf{V}$ , illetve  $-\mathbf{V}$  irányába esik.

E kísérlet valóban célra vezetne, ha a Föld tengelyforgása egyenletes volna. Azonban éppen az óra lelassulási effektus folytán a Föld tengelyforgásának szögsebessége

$$\omega^*(t) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v}(t) + \mathbf{V})^2}{c^2}}$$

állandóan változik. E változás pontosan kompenzálja a keringési időkben fellépő különbségeket, és ezért várható, hogy éppen az óra lelassulási effektus folytán a Römer-féle módszer a fénysebesség ugyanazon számértékéhez vezet, függetlenül attól, hogy a Föld—Jupiter irány hogy viszonylik a naprendszer  $\mathbf{V}$  sebességének irányához.

**224.** A (25) formulához visszatérve azt látjuk, hogy amennyiben az  $A$  és  $B$  órák egy  $t = 0$  pillanatban egy közös helyről elindulnak és  $t = t_1$  pillanatban újra találkoznak, akkor azt várjuk, hogy  $B$   $A$ -hoz képest késést mutat.

Egyesek paradoxonnak tekintik a következőt. Ha  $B$ -t  $A$ -hoz képest gyorsítjuk, ezt a jelenséget úgy is leírhatnánk, hogy  $A$ -t  $B$ -hez képest gyorsítottuk. Ebből azt a helytelen következtetést vonták le, hogy a helyzet tökéletesen szimmetrikus és ezért paradoxonnak tűnik, hogy a szimmetria ellenére az egyik óra mégis csak késik a másikhoz képest.

Ez az érvelés azonban helytelen. Az  $A$  óra egész idő alatt egy Lorentz-rendszerhez képest nyugalomban marad, és ezért bármelyik Lorentz-rendszerhez képest állandó sebességgel mozog. A  $B$  óra viszont egyenetlen mozgása folytán bármelyik Lorentz-rendszerhez képest változtatja sebességét és ebből következik, hogy a két óra mozgásállapota fizikai szempontból különböző. A (25) egyenlet éppen azt mutatja, hogy a nem egyenletesen mozgó óra késik az egyenletesen mozgó órához képest.

Ezt a tényállást egyébként LAUE és mások világosan kifejtették a relativitáselmélet klasszikus tankönyveiben. Az ott található világos érvelések később feledésbe mentek és elég zavaros vita alakult ki a már régebben tisztázott kérdésről.

## 2. AZ „IKERPARADOXON”

**225.** Az „óraparadoxon” még meglepőbbnek tűnik, ha emberekre alkalmazzuk. Ilyen vonatkozásban iker testvérpárról beszélnek, akik egyike a világűrben gyors utazást tesz és utána visszatér a Földre. Azt várjuk, hogy az utazásban részt vett ikertestvér a földön maradt testvérénél fiatalabban érkezik vissza.

Mindehhez feltételezzük, hogy egy emberi lényt is „órának” tekinthetünk, tehát azt, hogy a test összes belső mozgásai lelassulnak egy gyors űrutazás alatt. Feltételezzük továbbá, hogy ezek a belső mozgások újra visszaállnak eredeti ritmusukra a visszaérkezés után.

E kérdéssel való foglalkozásnál először is alá kell húzni, hogy — legalábbis a jelenben — egy tökéletesen spekulatív kérdésről van szó. Az eddig fel-

bocsátott űrhajók 10 km/s nagyságrendű sebességűek voltak. Egy ilyen űrhajóban a lelassulási effektusok nagyságrendje  $1 : 10^{-9}$ . Egynapos utazás alatt az óránál

$$\Delta T \sim 10^{-4} \text{ s}$$

idővesztesség mutatkozik. Egy ilyen idővesztesség emberi lények esetében teljes mértékben elhanyagolható.

Megjegyezzük, hogy az a fizikai megterhelés, amelynek az űrutazás alatt egy űrhajóst alávetünk, könnyen befolyásolhatja egészségi állapotát és lehetséges, hogy egy űrhajós fiziológiailag jóval erősebben öregszik az űrhajózás alatt, mint ez normális körülmények között lenne, így tehát az űrutazás a relativisztikus óralelassulási effektuson túlmenően az űrhajós várható élettartamát befolyásolja. Ez a tény úgy is megfogalmazható, hogy egy élőlény szempontjából az űrutazás, különösen a gyorsulás és lassulás egyáltalában nem fogható fel adiabatikusnak.

**226.** Felmerül az a kérdés, hogy egy emberi lény, és egyáltalában a biológiai folyamatok a fenti értelemben egyáltalán óráként tekinthetők-e? Ha figyelembe vesszük, hogy egy emberi testben lefolyó összes biológiai és fiziológiai folyamatok atomok és molekulák komplex kölcsönhatásán alapulnak, lehetségesnek tűnik az a feltételezés, hogy az összetett folyamat is *Lorentz*-invariáns, úgy mint az egyszerű atomi jelenségek.

Ilyen alapon feltételezhetjük, hogy az űrhajóban elhelyezett emberekben a sebességváltozás folytán valóban lelassulnak az összes folyamatok: az ideg- és az izomműködések, a szív ritmusa. Ugyancsak lelassul az oxigén felhasználásának az üteme, éppen úgy, mint az összes, a testben lefolyó kémiai folyamatok. Egy ilyen „kábult” állapotban elképzelhető, hogy az egész szervezet a normálisnál lassabban öregszik.

Emlékeztethetünk arra, hogy bizonyos baktériumok belső tevékenysége rendkívüli mértékben lelassul, ha lehűtjük őket, és újra történő felmelegítés esetén aktivitásuk újra normális ütemben megkezdődik. Ezek a baktériumok nem öregednek azon idő alatt, amelyben hőmérsékletük alacsony. Az ikerparadoxont tehát úgy értelmezhetjük, hogy az utazás időtartama alatt az ikertestvér szervezete a külső beavatkozások folytán lassabban fejlődik.

Mellékesen megjegyezzük, hogy az utazás után visszatért ikertestvér nem fog hirtelen megöregedni a Földre érkezése után. Egy előadás alkalmával megkérdeztek, hogy az ikertestvér szakálla, mely az utazás alatt kevésbé nőtt meg, a megérkezés pillanatában ki fog-e hirtelen nőni?

Ez pontosan úgy nem fog bekövetkezni, mint ahogy egy  $\mu$ -mezon, amely a légkört nagy sebességgel átszelte és ezért normális élettartamához képest nagyon hosszú időn keresztül élt, nem fog hirtelen elbomlani, ha lelassítjuk, csupán azért, hogy az elveszített időt „behozza”. Mint ahogyan ezt kísérletileg pontosan megállapították, a hosszú út megtétele után — pl. abszorbenssal — lelassított  $\mu$ -mezon pontosan olyan ütemben bomlik, mint az a mezon, amely éppen keletkezett.

Az az állítás azonban — és erre figyelmeztetnünk kell — hogy a biológiai folyamatok pontosan *Lorentz*-invariánsak, messzemenő extrapolációja az ismert ténynek. Hogy ez az extrapoláció valóban helyes tényekhez vezet, csak a jövőbeni kísérletek dönthetik el.



## RELATIVISZTIKUS MECHANIKA

## A) ENERGIA ÉS IMPULZUS

**227.** A **176.** pontban leírt *Lorentz*-transzformáció segítségével egy  $\mathcal{D}$  rendszer  $\mathcal{D}^*$  deformált állapotait meg tudjuk határozni abban az esetben, ha  $\mathcal{D}$ -t  $\mathcal{F}_k$  pontok halmazaként írjuk le. A pontok pályáját paraméter előállításban leírhatjuk, mint

$$\mathbf{x}_k(p) = \mathbf{r}_k(p), t(p), \quad k = 1, 2, \dots,$$

és ennek megfelelően  $\mathcal{F}_k^*$ -t, a deformált rendszer pontjait a következő módon adhatjuk meg:

$$\mathbf{x}_k^*(p) = \mathbf{\Lambda}_q \mathbf{x}_k(p) + \boldsymbol{\lambda}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahol  $\mathbf{\Lambda}_q$  mátrixok egy valódi *Lorentz*-transzformációt írnak le.

Ha azonban egy fizikai rendszert nem egyszerűen egyes pontjainak pályáival akarjuk jellemezni, hanem más mennyiségeket — mint energiát, impulzust, töltést, tömeget stb. — is meg akarunk adni, akkor a fenti formalizmust ki kell bővítenünk.

## 1. NEWTON ELSŐ TÖRVÉNYE

**228.** Vegyünk részecskének egy kis zárt fizikai rendszert; a részecske pályáját négyeskoordinátával, pl.

$$\mathbf{x}(p) = \mathbf{r}(p), t(p)$$

írhatjuk le.

A *Lorentz*-elvből az alábbiakra következtethetünk:

Egy szabad részecske lehetséges állapota az, ha egy adott *Lorentz*-rendszerhez képest nyugalomban van. Ebben az esetben

$$\mathbf{x}(p) = \mathbf{r}, t(p), \quad \mathbf{r} \text{ független } p\text{-től.} \quad (1)$$

E rendszer deformált verzióját úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{x}^*(p) = \mathbf{r} + \mathbf{v}t(p), t(p), \quad (2)$$

ahol  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{r}$   $p$ -től független állandókat jelentenek. Az (1) és (2) egyenlet összehasonlításával arra következtethetünk, hogy a szabad részecskék vagy nyugalomban vannak, vagy egyenes vonalon állandó sebességgel mozognak. Ez az eredmény NEWTON első törvényének felel meg.

**229.** A fenti kijelentés azonban NEWTON első törvényénél jóval többet tartalmaz. Hiszen a (2) formuláról feltételezzük, hogy bármilyen inerciarendszerben érvényes. Az inerciarendszerek azonban olyanok, amelyekben a fényterjedés homogénnek tűnik. Tehát arra a következtetésre jutunk, hogy olyan vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva, amelyben a fény terjedése homogénnek tűnik, a szabad részecskék mozgása egyenesvonalúnak és állandó sebességűnek adódik.

Így tehát a (2) formula szerint fogalmazott Newton-törvény nemcsak a szabad részecskék mozgását adja meg, hanem ugyanakkor összefüggést jelent a részecske mozgása és a fény terjedésének módoszata között.

## 2. RUGALMAS ÜTKÖZÉSEK

**230.** A részecske mozgásának részletesebb leírása céljából felhasználjuk az impulzus és energia fogalmát. A relativitáselmélet előtti klasszikus fizikában feltételezték, hogy

$$\mathbf{p} = m \mathbf{w}, \quad K = \frac{1}{2} m w^2, \quad (3)$$

ahol  $K$  és  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{w}$  sebességű  $m$  tömegű részecske mozgási energiáját, illetve impulzusát jelentik.

Két részecske elasztikus ütközésére vonatkozóan az impulzusmegmaradási törvényt úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{p}_1^{(1)} + \mathbf{p}_2^{(1)} = \mathbf{p}_1^{(2)} + \mathbf{p}_2^{(2)}, \quad (4)$$

ahol

$$\mathbf{p}_i^{(k)} = m_i^{(k)} \mathbf{w}_i^{(k)}, \quad i, k = 1, 2; \quad (5)$$

az  $i$  index 1-es, illetve 2-es értéke a két részecskét, a felső  $k$  index pedig az ütközés előtti, illetve utáni állapotot jellemzi.

A nemrelativisztikus közelítésben feltételezhetjük, hogy a részecskék tömege az ütközés alatt nem változnak, vagyis

$$m_i^{(1)} = m_i^{(2)} = m_i, \quad i = 1, 2.$$

Az energia megmaradási törvényt úgy írhatjuk, hogy

$$K_1^{(1)} + K_2^{(1)} = K_1^{(2)} + K_2^{(2)}, \quad (6)$$

ahol

$$K_i^{(k)} = \frac{1}{2} m_i^{(k)} w_i^{(k)2}, \quad i, k = 1, 2.$$

**231.** A Lorentz-elv alkalmazásával azt várjuk, hogy a (4) és (6) egyenlet által leírt ütközés Lorentz-deformált verziója olyan ütközésnek felel meg, amelyben az energia- és impulzusmegmaradások érvényben vannak. Megvizsgáljuk, hogy a (3) összefüggéseket hogyan kell megváltoztatnunk ahhoz,

hogy a (4)-ben és (6)-ban kifejezett megmaradási törvények *Lorentz*-invariáns formát vegyenek fel.

Egy  $\Lambda_{\mathbf{v}}$  által definiált *Lorentz*-deformáció esetében kiszámíthatjuk, az eredeti ütközés deformált verzióját.

A 207. pont eredményeit alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{w}_i^{(k)*} = \mathbf{w}_i^{(k)} \hat{+} \mathbf{v}, \quad i, k = 1, 2, \quad (7)$$

ahol  $\hat{+}$  az *Einstein*-féle összeadási formula szerinti összeadást jelenti (lásd a 207. pont (9) egyenletét).

A jelölések egyszerűsítése kedvéért a  $k = 1, 2$  felső indexszel — mint eddig is — a részecske ütközése előtti, illetve utáni állapotait jelöljük. Bevezetjük a  $k = 3, 4$  indexeket és ezekkel fogjuk jelölni a deformált állapotra vonatkozó mennyiségeket az ütközés előtti és az ütközés utáni állapotokban. Tehát a

$$\mathbf{w}_i^{(k)*} = \mathbf{w}_i^{(k+2)}, \quad m_i^{(k)*} = m_i^{(k+2)}, \quad \mathbf{p}_i^{(k)*} = \mathbf{p}_i^{(k+2)}, \quad i, k = 1, 2 \quad (8)$$

jelölést használjuk.

Abban az egyszerű esetben amikor a  $\mathbf{w}_i^{(k)}$  és  $\mathbf{v}$  sebességek mind egymással párhuzamosak, a (7) és (8) összefüggések helyett írhatjuk:

$$w_i^{(k+2)} = \frac{w_i^{(k)} + v}{1 + \frac{vw_i^{(k)}}{c^2}}, \quad i, k = 1, 2. \quad (9)$$

(9)-ből az is következik, hogy (lásd 205. pont (8a) egyenletét)

$$1 + \frac{vw_i^{(k)}}{c^2} = (B_i^{(k+2)}/B_i^{(k)}) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (10)$$

ahol

$$B_i^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w_i^{(k)2}}{c^2}}}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

232. Az impulzus megmaradásának törvényét a deformált rendszerben úgy írhatjuk, mint

$$\mathbf{p}_1^{(3)} + \mathbf{p}_2^{(3)} = \mathbf{p}_1^{(4)} + \mathbf{p}_2^{(4)}. \quad (11)$$

Ha (9)-et és (10)-et (5)-be behelyettesítjük, akkor a (8) jelölést használva azt kapjuk, hogy

$$p_i^{(k+2)} = w_i^{(k+2)} m_i^{(k+2)} = \frac{w_i^{(k)} + v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{B_i^{(k)}}{B_i^{(k+2)}/m_i^{(k+2)}}. \quad (12)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$w_i^{(k)} = p_i^{(k)}/m_i^{(k)},$$

akkor (12)-öt (11)-be behelyettesítve azt írhatjuk  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ -vel való szorzás után, hogy

$$(p_1^{(1)} + vm_1^{(1)})\alpha_1^{(1)} + (p_2^{(1)} + vm_2^{(1)})\alpha_2^{(1)} = (p_1^{(2)} + vm_1^{(2)})\alpha_1^{(2)} + (p_2^{(2)} + vm_2^{(2)})\alpha_2^{(2)}, \quad (13)$$

ahol

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{B_i^{(k)}/m_i^{(k)}}{B_i^{(k+2)}/m_i^{(k+2)}}. \quad (14)$$

Tehát az impulzus megmaradásának elvét, amelyet az eredeti ütközés esetében a (4) formulával írtunk le, a deformált ütközés esetében a (13) egyenlet fejezi ki. A (4) törvény akkor Lorentz-invariáns, ha teljesülése esetén a (13) is biztosan teljesül. Megvizsgáljuk azokat a körülményeket, amelyek szükségesek ahhoz, hogy (4) és (13) egymásból következzenek.

A (13) egyenlet ama tagjai, amelyek  $v$ -t nem tartalmaznak, a (4) egyenletre redukálódnak, feltételezve, hogy az  $\alpha_i^{(k)}$ -k mind egyenlőek. Feltételezhetjük, hogy

$$\alpha_i^{(k)} = 1, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2 \quad (15)$$

Ebben az esetben (14)- és (15)-ből következik, hogy

$$m_i^{(k)} = m_i B_i^{(k)} = \frac{m_i}{\sqrt{1 - \frac{w_i^{(k)2}}{c^2}}}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (16)$$

ahol  $m_1$  és  $m_2$  állandók.

A (13)-nak ama tagjai, amelyek  $v$ -t tartalmazzák, kiesnek akkor, ha egyrészt (16) érvényes és azonkívül a

$$m_1^{(1)} + m_2^{(1)} = m_1^{(2)} + m_2^{(2)} \quad (17)$$

összefüggés is ki van elégítve.

Rövid számítás segítségével megmutatható, hogy (4)-ből, (16)-ból és (17)-ből következik az is, hogy

$$m_1^{(3)} + m_2^{(3)} = m_1^{(4)} + m_2^{(4)}.$$

**233.** A fenti megfontolásokat összefoglalva azt látjuk, hogy egy egyenesvonalú elasztikus ütközés esetében a

$$\mathbf{p}_1^{(1)} + \mathbf{p}_2^{(1)} = \mathbf{p}_1^{(2)} + \mathbf{p}_2^{(2)} \quad (18)$$

egyenlet együtt az

$$m_1^{(1)} + m_2^{(1)} = m_1^{(2)} + m_2^{(2)} \quad (19)$$

összefüggéssel azt vonja maga után, hogy az ütközés Lorentz-deformáltjára vonatkozó megfelelő összefüggések is érvényesek, tehát (18)-ból és (19)-ből következik, hogy

$$\mathbf{p}_1^{(3)} + \mathbf{p}_2^{(3)} = \mathbf{p}_1^{(4)} + \mathbf{p}_2^{(4)}$$

és

$$m_1^{(3)} + m_2^{(3)} = m_1^{(4)} + m_2^{(4)},$$



amennyiben az eredeti egyenletekben  $k = 1, 2$ -vel jelölt mennyiségeket a (7) és (16) egyenletek szerint számítjuk át a deformált rendszerben fellépő  $k = 3, 4$ -nek megfelelő mennyiségekre.

Így arra a következtetésre jutunk, hogy ha  $m$  nyugalmi tömeggel rendelkező részecske  $\mathbf{w}$  sebességgel mozog, impulzusa

$$\mathbf{p} = \frac{m \mathbf{w}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (20)$$

Ezt a formulát úgy is értelmezhetjük, hogy

$$\mathbf{p} = m(w) \mathbf{w}, \quad m(w) = \frac{m}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (21)$$

**234.** Fenti megfontolásokból azt látjuk, hogy a (18)-ban megadott impulzusegységmaradási törvény akkor és csak akkor fogalmazható meg Lorentz-invariáns formában, ha (18)-hoz a (19) összefüggést hozzáadjuk. A (18) és (19) egyenletek együttesen Lorentz-invariánsok, amennyiben a tömeget és az impulzust a (21) formula szerint adjuk meg.

A nemrelativisztikus energiamegmaradási törvény, amelyet a (6) képlet fejez ki, nem Lorentz-invariáns; megfontolásainkból azonnal látjuk, hogy általában

$$K_1^{(3)} + K_2^{(3)} \neq K_1^{(4)} + K_2^{(4)},$$

és a fenti egyenlőtlenség még akkor is fennáll, ha a (6) egyenlőség az eredeti konfigurációban ki van elégítve.

A nemrelativisztikus energiamegmaradási törvényt a (19) invariáns összefüggéssel helyettesíteni lehet. Kis sebességek esetében a (19) összefüggés jó közelítésben megfelel a (6) összefüggésnek. Hogy ezt belássuk, sorozzuk be (19)-et  $c^2$ -tel, így azt vehetjük, hogy

$$E_1^{(1)} + E_2^{(1)} = E_1^{(2)} + E_2^{(2)}, \quad (22)$$

ahol

$$E_i^{(k)} = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - w_i^{(k)2}/c^2}} = m_i c^2 + \frac{1}{2} m_i w_i^{(k)2} + \text{magasabbrendű tagok},$$

tehát vehetjük, hogy

$$E_i^{(k)} = E_i + K_i^{(k)},$$

ahol  $E_i = m_i c^2$  a részecske nyugalmi energiáját jelenti és  $E_i^{(k)} - E_i$ -t kinetikus energiának tekintjük.

A részecske relativisztikus energiáját tehát definiálhatjuk, mint

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad (23)$$

ahol  $m$  a részecske nyugalmi tömege és  $w$  a sebessége. E feltételezésekből kiindulva azt találjuk, hogy az elasztikus ütközés esetében a rendszer relativisztikus energiája megmarad.

**235.** A megmaradási elvek elégséges feltételeként jutottunk a (20) és (23) összefüggésekhez. A fellépő paraméterek számát figyelembe véve könnyen megmutathatjuk, hogy adott  $m_i(0)$  értékek mellett ezek a feltételek szükségesek is. Tehát ha feltételezzük, hogy az impulzusvektor a  $\mathbf{w}$  sebesség irányával párhuzamos, az energia és impulzus kifejezéseket a (20) és (23) által kell megadni. (Az energia kifejezéseket egy állandó taggal mindig kibővíthetjük. Egy ilyen tag nem változtatja meg az energia összefüggést.)

### 3. RUGALMATLAN ÜTKÖZÉSEK

**236.** A megmaradási törvényeket csak akkor lehet invariáns módon fogalmazni, ha mind az energia-, mind az impulzusmegmaradási törvényt feltételezzük. Az energia- és impulzusmegmaradási törvények közötti szoros kapcsolat fennállását a következő példa is mutatja.

Egy rugalmatlan ütközés során mozogjon két,  $m_1(0) = m_2(0) = m_0$  tömegű részecske egymás felé

$$\mathbf{w}_1^{(1)} = \mathbf{w} \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_2^{(1)} = -\mathbf{w}$$

sebességekkel. Tételezzük fel, hogy a részecskék összeragadnak az ütközés folytán; az összeragadt rendszer nyugalmi állapotba kerül. Feltételezzük tehát, hogy

$$\mathbf{w}_1^{(1)} = -\mathbf{w}_2^{(1)} = \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}_1^{(2)} = \mathbf{w}_2^{(2)} = 0,$$

és azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_1^{(1)} = -\mathbf{p}_2^{(1)} = \frac{m_0 \mathbf{w}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad \mathbf{p}_1^{(2)} = \mathbf{p}_2^{(2)} = 0,$$

és

$$\mathbf{p}_1^{(1)} + \mathbf{p}_2^{(1)} = \mathbf{p}_1^{(2)} + \mathbf{p}_2^{(2)}.$$

Ha ezt az ütközést most a  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  sebességre vonatkozó transzformáció alatt vetjük alá, azt találjuk, hogy

$$\mathbf{w}_1^{(3)} = \frac{2\mathbf{w}}{1 + \frac{w^2}{c^2}}, \quad \mathbf{w}_2^{(3)} = 0; \quad \mathbf{w}_1^{(4)} = \mathbf{w}_2^{(4)} = \mathbf{w},$$

A transzformált rendszer momentumai:

$$\mathbf{p}_1^{(3)} = \frac{m_0 \mathbf{w}_1^{(3)}}{\sqrt{1 - \frac{w_1^{(3)2}}{c^2}}} = \frac{2\mathbf{w} m_0}{1 - \frac{w^2}{c^2}}, \quad \mathbf{p}_2^{(3)} = 0,$$

$$\mathbf{p}_1^{(4)} = \mathbf{p}_2^{(4)} = \frac{m_0 \mathbf{w}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}$$

értékeket vesznek fel és azt találjuk, hogy

$$\mathbf{p}_1^{(3)} + \mathbf{p}_2^{(3)} = \frac{\mathbf{p}_1^{(4)} + \mathbf{p}_2^{(4)}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad (24)$$

tehát a  $w > 0$  esetében a transzformált rendszerben az impulzusmegmaradási törvény nem teljesül. Ennek a körülménynek az az oka, hogy az eredeti ütközés során az energiamegmaradási elv sérelmet szenvedett. Ezt abból látjuk, hogy

$$E_1^{(1)} = E_2^{(1)} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad E_1^{(2)} = E_2^{(2)} = m_0 c^2.$$

## B) TÖMEG ÉS ENERGIA EKVIVALENCIA

**237.** A rugalmatlan ütközést is tárgyalhatjuk Lorentz-invariáns módon, ha az EINSTEIN szerinti tömeg—energia ekvivalenciát feltételezzük. Az Einstein-féle elv szerint egy rendszer, amelynek összenergiája  $E$ ,

$$m = E/c^2 \quad (25)$$

tömeggel rendelkezik. Ha most a fent leírt inelasztikus ütközésnél a részecskék összeragadnak, a részecskék kinetikus energiája valamilyen más energia formába vált át, így pl. hő képződik. Ezek szerint azt írhatjuk, hogy

$$E_1^{(1)} + E_2^{(1)} = E_1^{(2)} + E_2^{(2)} + Q = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad (26)$$

ahol  $Q$  az ütközés során létrejött hőenergia.

(25) és (26) segítségével azt találjuk, hogy  $2\bar{m}_0$  a két összeragadt részecskéből álló komplex rendszer effektív tömege:

$$2\bar{m}_0 = \frac{E_1^{(1)} + E_2^{(1)}}{c^2} = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}},$$

ezért (24) helyett azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{p}_1^{(3)} + \mathbf{p}_2^{(3)} = \bar{\mathbf{p}}_1^{(4)} + \bar{\mathbf{p}}_2^{(4)},$$

ahol

$$\bar{\mathbf{p}}_1^{(4)} = \bar{\mathbf{p}}_2^{(4)} = \bar{m} \mathbf{w} = \frac{m_0 \mathbf{w}}{1 - \frac{w^2}{c^2}},$$

és

$$\bar{m} = \frac{\bar{m}_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

Az impulzusmegmaradási törvény tehát érvényes marad a transzformált ütközés esetében is, ha figyelembe vesszük a melegezés folytán bekövetkezett tömegnövekedést.

## 1. MEGJEGYZÉS AZ ENERGIÁVAL VALÓ TÖMEGNÖVEKEDÉS MECHANIZMUSÁRA

**238.** Az a tény könnyen érthető, hogy egy makroszkopikus test tömege megnő, ha hőenergiát vesz fel. A hőkezelés eredményeként a testet alkotó atomok hőmozgásának sebessége nő és így az egész test tömegének növekedését visszavezethetjük a molekuláknak a hőmozgás fokozódása által fellépő tömegnövekedésére.

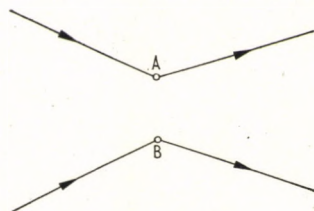
Mint hogy az egyes atomok közötti ütközéseket elasztikusnak vehetjük, a két makroszkopikus test nem elasztikus, hőenergiák létrehozását eredményező ütközését a makroszkopikus testeket képező molekulák elasztikus ütközésének is felfoghatjuk. Ebből világosan látjuk, hogy a makroszkopikus testek ütközése a relativisztikus törvényeknek megfelelően fog történni.

A helyzet valamivel komplikáltabb, ha az ütközés nemcsak hőt fejleszt, hanem a mozgási energia egy része deformációt okoz. Ebben az esetben is — mint ezt a későbbiekben részletesen tárgyaljuk (IX. fejezet, **306.**, **307.**) — a (25) formulának megfelelő tömegváltozás lép fel.

### C) TÁVOLI ÜTKÖZÉSEK

**239.** Két, egymástól távoli pályán mozgó részecske is befolyásolja egymás mozgását. A megmaradási törvény kérdése ebben az esetben nehezebbé válik.

Egy távoli ütközés sematikusan úgy írható le, hogy feltételezzük, hogy a részecskék impulzusa hirtelen megváltozik. Így feltételezhetjük példaként (21. ábra), hogy az 1. részecske impulzusának értéke az  $A$  pontban  $t$  pillanatban  $\mathbf{p}_1^{(1)}$ -ről  $\mathbf{p}_1^{(2)}$ -re változik. Ugyanakkor feltételezhetjük, hogy a 2. részecske egy  $B$  pontban  $\mathbf{p}_2^{(1)}$ -ről  $\mathbf{p}_2^{(2)}$ -re változtatja impulzusát. Vizsgáljunk egy elasztikus ütközést, melynél egy adott vonatkoztatási rendszerben fennáll az impulzusmegmaradási törvény:



21. ábra. A távoli ütközés sémája

$$\mathbf{p}_1^{(1)} + \mathbf{p}_2^{(1)} = \mathbf{p}_1^{(2)} + \mathbf{p}_2^{(2)}.$$

Az eredeti ütközés Lorentz-deformált verziójára szintén fennáll, hogy

$$\mathbf{p}_1^{(3)} + \mathbf{p}_2^{(3)} = \mathbf{p}_1^{(4)} + \mathbf{p}_2^{(4)}.$$

Meg kell azonban jegyezni, hogy a deformált rendszerben az impulzusváltozások nem egy-

idejűleg történnek. Az 1. számú részecske impulzusváltozása az  $A^*$  pontban a  $t = t_A^*$  időpontban, a 2. számú részecske impulzusváltozása pedig  $B^*$  pontban  $t = t_B^*$  pillanatban történik, és általában

$$t_A^* \neq t_B^* .$$

Ha pl.  $t_A^* < t_B^*$ , akkor a

$$t_A^* < t < t_B^*$$

intervallumban az össz-impulzusmegmaradási törvény nem érvényesül, hiszen ebben az időszakban az 1. számú részecske már megváltoztatta impulzusát, a 2. számú pedig még a régi impulzussal rendelkezik.

Ha egy hirtelen ütközés helyett egy folyamatos kölcsönhatás által létrejött ütközést tárgyalunk, azt kell várnunk, hogy az ütközés alatt az impulzusmérleg még akkor sem marad meg, ha az *ütközés után* az impulzusmérleg rendbejön. Még egy olyan esetben is ahol a folytonos ütközésnél az impulzusmérleg fennáll, az ütközés Lorentz-deformált verziójában az impulzusmegmaradási törvény mégsem érvényesül.

E tényleges nehézség azzal magyarázható, hogy a két távoli részecske közötti kölcsönhatást minden esetben sugárzás közvetíti, és a sugárzás maga is energiával és impulzussal rendelkezik. Amint ez később kiderül, az egész rendszer energiája és impulzusa — tehát a két részecske és az általuk kibocsátott sugárzás energiájának és impulzusának összege — szigorúan megmarad (lásd IX. fejezet **310.** pontját).

## 1. KÍSÉRLETI TAPASZTALATOK

**240.** A nemrelativisztikus (4) és (6) képletet aránylag lassan mozgó részecskék megfigyelésével igazolták. Amennyiben ilyen lassan mozgó részecskékre szorítkozunk, akkor a (4) és (6) egyenletek eredményeit a (18), (19) és (22) egyenletekből kapott eredményektől gyakorlatilag nem is lehet megkülönböztetni. Ha viszont gyorsan mozgó elemi részecskék közötti ütközéseket vizsgálunk, akkor a törvény két megfogalmazása közötti különbség nagyon észrevehető lesz. A megfigyelések a (4) és (6) egyenletekkel ellentétben vannak, és inkább a (18), (19) és (22) relativisztikus egyenleteket igazolják.

Még ha a kísérletek a relativisztikus ütközési törvényeket igazolják is, nem tűnik szükségtelennek a kísérleti tényeket jóval kritikusan elemezni, mint ahogyan ez eddig történt, és nem csupán megelégedni azzal, hogy a (4) és (6) egyenletek helytelenek, hanem a relativisztikus törvények pontos érvényességét kellene igazolni.

Megjegyezzük továbbá, hogy a **239.** pontban említett sugárzáseffektusok relativisztikus ütközésekben erősen érezhető hatást hoznak létre. Így pl. atommagokkal ütköző gyors elektronok erős fékezési sugárzást bocsátanak ki.

D) MECHANIKAI TÖRVÉNYEK NÉGYESVEKTOROKKAL  
ÉS -TENZOROKKAL KIFEJEZVE

**241.** Az elasztikus ütközésekkel kapcsolatos eddigi elgondolásainkat matematikailag sokkal egyszerűbben tudjuk kifejezni, ha négyesvektorokat használunk fel. Bár a négyesvektorok és -tenzorok fogalma jól ismert, e tárgykör rövid összefoglalását a Függelékben adjuk meg. Ennek során a megfogalmazásokban néhány, a mi tárgyalásunkra jellemző szempontot is figyelembe vettünk.

Itt csak arra a megjegyzésre szorítkozunk, hogy egy részecske impulzusa és energiája egy kovariáns négyesvektor,

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{p}, \quad - E \quad (27)$$

segítségével fejezhető ki. A deformált részecske energia-impulzus-vektorát írhatjuk, mint

$$\mathbf{\Pi}^* = \tilde{\Lambda}_q^{-1} \mathbf{\Pi}, \quad (28)$$

ahol  $\Lambda_q$  egy Lorentz-mátrix. (Közömbös, hogy (27)-et és (28)-at ortogonális, vagy más egyenes reprezentációban adjuk-e meg.)

Ha egy a vonatkoztatási rendszerhez képest nyugalomban levő részecskét írunk le, ennek energia-impulzus-vektora

$$\mathbf{\Pi} = 0, 0, 0, - m_0 c^2. \quad (29)$$

A  $\Lambda_v$  deformáció segítségével előállított deformált rendszerben azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{\Pi}^* = m \mathbf{v}, \quad - mc^2, \quad (30)$$

ahol

$$m = m_0 B = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Feltételezve tehát, hogy a részecske impulzusa és energiája egy négyesvektort képez, ugyanazokra a kifejezésekre jutunk, mint amit a Lorentz-elvből kiindulva direkt számítás útján kaptunk a **232.** pontban.

**242.** Feltételezve, hogy az impulzus és az energia négyesvektort alkot, automatikusan olyan ütközési törvényt kapunk, amely minden esetben összhangban van az energia és impulzus megmaradással. Ha  $i, k$  két részecske elasztikus ütközését tárgyaljuk, akkor a **233.** pont (18) és (19) egyenlete helyett írhatjuk, hogy

$$\mathbf{\Pi}_1^{(1)} + \mathbf{\Pi}_2^{(1)} = \mathbf{\Pi}_1^{(2)} + \mathbf{\Pi}_2^{(2)}, \quad (31)$$

és

$$\mathbf{\Pi}_i^{(k)} = \mathbf{p}_i^{(k)}, \quad - E_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2.$$

A (31) egyenlet mind az impulzus-, mind pedig az energiamegmaradási törvényt tartalmazza. Továbbá a (31) egyenlet automatikusan Lorentz-in-

variáns törvényt ír le. Ugyanis a  $\Lambda_{\mathbf{v}}^{-1}$  operátort (31) mindkét oldalára alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\Pi_1^{(3)} + \Pi_2^{(3)} = \Pi_1^{(4)} + \Pi_2^{(4)},$$

ahol

$$\Pi_i^{(k+2)} = \Pi_i^{(k)*} = \tilde{\Lambda}_{\mathbf{v}}^{-1} \Pi_i^{(k)}, \quad i, k = 1, 2.$$

**243.** Az energia és impulzus kifejezéseknek a **233.** pontban adott levezetése jóval bonyolultabb, mint az itt megadott négyesvektorokkal való levezetés. A bonyolultabb levezetés mégis fontos, hiszen a **233.** pontban adott levezetés elvileg különbözik a vektorokkal adott levezetéstől. A **233.** pontban adott levezetés mutatja, hogy

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

a nemrelativisztikus ütközési törvények *egyetlen* lehetséges általánosítását tartalmazzák. A négyesvektorok segítségével adott összefüggések pusztán a nemrelativisztikus törvényeknek *egy* lehetséges általánosítását szolgálják, és a négyesvektorok formalizmusa által kapott törvényből nem derül ki, vajon más általánosítás lehetséges-e.

Ez azért fontos, mert — bár a legtöbb fizikailag jelentős mennyiséget négyesvektorokkal és -tenzorokkal írhatjuk le — elvileg mégis elképzelhető az, hogy ily módon le nem írható mennyiségek is léteznek. Ez különösen a gravitációs problémák tárgyalásával kapcsolatosan fontos.

## 1. NEWTON-FÉLE TÖRVÉNYEK

**244.** A *Newton*-törvény szokásos

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (32)$$

formája nem invariáns. Ha ugyanis  $\mathbf{p}$ -t egy négyesvektor térrészenek tekintjük, azt találjuk, hogy e vektor időbeli deriváltja nem invariáns mennyiség. A  $\mathbf{p}$  transzformációs tulajdonságait felhasználva azonban megállapíthatjuk az  $\mathbf{F}$  erő különböző reprezentációkban érvényes mérőszámait. Ezek a mértékek azonban olyan értelemben nem *Lorentz*-invariánsak, hogy nem vehetők egy négyesvektor részeinek.

**245.** Helyettesítsük be (32)-be, hogy

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (33)$$

Azt találjuk, hogy

$$\mathbf{F} = \frac{m_0 \dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0 \mathbf{v}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}},$$

vagy azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (34)$$

ahol

$$\mathbf{F}_1 = m_l \dot{\mathbf{v}}_1, \quad \mathbf{F}_2 = m_t \dot{\mathbf{v}}_2.$$

$\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$ , illetve  $\dot{\mathbf{v}}_1$  és  $\dot{\mathbf{v}}_2$   $\mathbf{F}$ -nek, illetve  $\dot{\mathbf{v}}$ -nak a  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos és merőleges komponenseit jelentik, vagyis

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F})/v^2, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1, \quad (35)$$

és hasonló módon

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v})/v^2, \quad \dot{\mathbf{v}}_2 = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_1, \quad (36)$$

továbbá

$$m_l = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad m_t = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (37)$$

Ebből azt látjuk, hogy egy adott erő más mértékben gyorsít egy tömeget aszerint, hogy a sebesség irányában, vagy az arra merőleges irányban hat.

**246.** Ha a tömegpontok helyett folytonos médiumok mechanikáját vizsgáljuk, akkor tenzorokkal kifejezhető összefüggéseket kapunk. Így módon egy részecskét mint egy kis, mechanikai tulajdonságokkal rendelkező felhőt képzelhetünk el.

Feltételezve, hogy egy részecskét egy tömegeloszlás reprezentál,\* azt írhatjuk, hogy egy  $\delta V$  térfogatban  $\delta \mathbf{p}$  impulzus és  $\delta E$  energia található. Az erő, amely a  $\delta V$  térfogatelemben az anyagra hat, úgy írható, hogy

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{f} \delta V, \quad (38)$$

ahol  $\mathbf{f}$  erőssűrűséget jelent.

A tömegfelhőt úgy osztjuk fel a  $\delta V$  térfogatelemekre, hogy ezek az elemek együtt mozogjanak a felhővel. Így a Lorentz-kontrakciót figyelembe véve írhatjuk, hogy

$$\delta V = \delta V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (39)$$

ahol  $v$  a  $\delta V$  térfogatelemben tartózkodó anyag áramlási sebességét jelenti.

Ha most (32)-öt (38) és (39) segítségével átírjuk, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (40)$$

Ez utóbbi összefüggést egy négyesvektor-összefüggés térrészének vehetjük, így tehát a négyes-erőssűrűség

$$\Phi = B \frac{d\Pi}{dt} \quad (41)$$

egy négyesvektor. (A vektor negyedik komponense a teljesítménysűrűséget adja meg.)

\* A tömegpont mindig idealizáció, és ha egy tömegpontról beszélünk, valóban kis tartományban elhelyezkedő anyagfelhőre gondolunk.



## 2. AZ ENERGIA—IMPULZUS-TENZOR

247. A (41) képlet azt az erősűrűséget határozza meg, amelyre szükség van egy  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  impulzussűrűséggel rendelkező anyagi rendszer mozgásállapotának fenntartásához. Ha ez az anyagi rendszer belső feszültségekkel is rendelkezik, akkor a (40) kifejezést ki kell bővíteni. Egy ilyen, belső feszültségekkel rendelkező rendszer esetében az energiát és impulzust egy

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -c^2 \mathbf{p} \\ -\mathbf{q} & c^2 u \end{pmatrix} \quad (42)$$

alakú tenzor segítségével írhatjuk le, ahol  $\mathbf{p}$  az impulzussűrűség,  $\mathbf{q}$  az energiaáramlás sűrűsége,  $u$  az energiasűrűség és  $\mathbf{a}$  a belső feszültségek tenzorát jelenti. A

$$\text{Div } \mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (43)$$

összefüggés adja meg az  $\mathbf{f}$  erősűrűséget, amelyre szükség van a  $\mathbf{T}$  által leírt állapot fenntartására.

Példaként említjük, hogy ha egy olyan fizikai rendszert vizsgálunk, amely megfelelően választott reprezentációban olyan  $\mathbf{T}$  tenzorral írható le, amelyben  $\mathbf{a} = 0$ , akkor a (43) mozgásegyenlet ebben az esetben pontosan a (41) egyenletre redukálódik.

Olyan konfigurációkban, amelyekben  $\mathbf{a} \neq 0$ , a  $\text{div } \mathbf{a}$  a belső erők sűrűségét írja le.

Zárt rendszerben a

$$\text{Div } \mathbf{T} = 0$$

összefüggés áll fenn. Ha a fenti egyenletben a tér és idő komponenseket különválasztjuk, azt kapjuk hogy

$$\text{div } \mathbf{a} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{q} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

A fenti egyenletek az impulzus-, illetve energiaáramlás kontinuitási egyenleteiként foghatók fel, és így  $\mathbf{a}$  úgy is értelmezhető, mint a belső impulzusáramlássűrűsége.

Olyan esetekben, ahol  $\mathbf{T}$  szimmetrikus, tehát

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}/c^2,$$

egy  $1/c^2$  faktortól eltekintve az energiaáramlás sűrűsége megegyezik az impulzussűrűséggel. Ez az összefüggés az energia tehetetlenségének elvét fejezi ki.



## AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐ

**248.** Egy sor relativisztikus jelenség megértéséhez az elektromágneses mező *Maxwell*-féle elméletét kell felhasználnunk. A jól ismert elmélet rövid összefoglalását a teljesség kedvéért, de ezenkívül azért is megadjuk, mert a fogalmazásban kissé eltérünk a szokásos formától. Ez a formai eltérés a relativitáselmélettel kapcsolatos sajátos felfogásunkkal összhangban van.

## A) A MAXWELL-FÉLE EGYENLETEK

**249.** MAXWELL egyenleteit a következő formában szokásos megadni

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, & \text{(a)} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} + 4\pi \mathbf{i}, & \text{(b)} \\ \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi \rho, & \text{(c)} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. & \text{(d)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\mathbf{E}$  és  $\mathbf{D}$ , ill.  $\mathbf{H}$  és  $\mathbf{B}$  közötti összefüggéseket úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M},$$

ahol  $\mathbf{P}$  és  $\mathbf{M}$  az elektromos, illetve mágneses polarizációt jelentik.

Az  $\mathbf{i}$  áramsűrűséget és a  $\rho$  töltéssűrűséget a kontinuitási egyenlet:

$$\text{div } \mathbf{i} + \frac{1}{c} \dot{\rho} = 0 \quad (2)$$

köti össze. A fenti egyenletekhez még hozzátesszük az  $\mathbf{i}$  áramsűrűséggel és a  $\rho$  töltéssűrűséggel rendelkező anyagra ható ponderomotorikus erőssűrűség kifejezését:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B}.$$

## 1. MÁS MEGFOGALMAZÁS

**250.** A következőkben a *Maxwell*-féle egyenleteket más formában fogjuk használni. Az általunk használt egyenletek csak a formát illetően különböznek az (1a–d) egyenletektől, matematikailag azonban ekvivalensek az utóbbiakkal.\* Azt fogjuk írni, hogy

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, & (a) \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + 4\pi \mathbf{i}_{\text{eff}}, & (b) \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi \varrho_{\text{eff}}, & (c) \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ahol

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_{\text{eff}} &= \mathbf{i} + \text{rot } \mathbf{M} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{P}}, \\ \varrho_{\text{eff}} &= \varrho - \text{div } \mathbf{P}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Meggyőződhetünk arról, hogy (3a–d) (4)-gyel együtt az (1a–d) egyenletekkel matematikailag ekvivalensek. Azt is látjuk, hogy amennyiben (2) érvényes, akkor

$$\text{div } \mathbf{i}_{\text{eff}} + \frac{1}{c} \dot{\varrho}_{\text{eff}} = 0 \quad (5)$$

is érvényes. Továbbá azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{f}_{\text{eff}} = \varrho_{\text{eff}} \mathbf{E} + \mathbf{i}_{\text{eff}} \times \mathbf{B}.$$

Megjegyezzük, hogy (3a–d) egy, csak az  $\mathbf{E}$ -re és  $\mathbf{B}$ -re vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert ad meg.

Az  $\mathbf{i}_{\text{eff}}$  és  $\varrho_{\text{eff}}$  áram- illetve töltéssűrűségeket úgy értelmezhetjük, mint azokat az áram-, illetve töltéssűrűségeket, amelyek az anyagban fellépnek, beleértve az atomok belsejében folyó áramokat és töltéseket is;  $\mathbf{f}_{\text{eff}}$  pedig az erőssűrűséget adja, amely az egyes (esetleg polarizált) atomokra ható erőket is magában foglalja.

Úgy gondoljuk, hogy a *Maxwell*-egyenletek a (3a–d) formában felírva a mező tisztán elektromágneses tulajdonságait írják le és az anyag szerepe a (4) által kerül be az egyenletekbe. A (4) egyenletek azt adják meg ugyanis, hogy  $\mathbf{i}_{\text{eff}}$  és  $\varrho_{\text{eff}}$  értékei hogyan függenek össze az anyag állapotával.

**251.**  $\mathbf{P}$  és  $\mathbf{M}$ , valamint  $\varrho$  és  $\mathbf{i}$  az anyag különböző tulajdonságait írják le. Ezek a mennyiségek az elektromágneses mező és anyag közötti kölcsönhatást határozzák meg. Minthogy a külső mezők polarizációt hoznak létre, áramot indítanak meg és töltéseket mozgatnak, ezért a  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\varrho$  és  $\mathbf{i}$  mennyiségeket a külső mező is befolyásolja.

\* A *Maxwell*-egyenletek részletes tárgyalására Acta Phys. Hung., 20, 59, 1966. és Acta Phys. Hung., 20, 67, 1966. valamint Fizikai Szemle 16, 16, 1966. cikkeimben kitértem.

Régebbi művekben a következő leegyszerűsített feltételezésekből indultak ki:

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \quad \text{és} \quad \mathbf{M} = \chi' \mathbf{B}, \quad (6)$$

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\rho}{c},$$

ahol  $\kappa, \chi' = \chi/\mu$  és  $\sigma$  az anyag jellemzői; Nagyon sokszor azt az esetet tárgyalták, ahol  $\kappa, \chi$  és  $\sigma$  állandók, vagy legfeljebb a hely függvényei. Ezekben a tárgyalásokban  $\kappa, \chi' = \chi/\mu$  helyett inkább

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi' \mu$$

és

$$\mu = \frac{1}{1 - 4\pi\chi'}$$

szerepel, ahol  $\varepsilon$  a dielektromos állandó és  $\mu$  a mágneses permeabilitás. Az a feltételezés, hogy anyagot a dielektromos állandó és a mágneses permeabilitás, továbbá az elektromos vezetőképesség segítségével lehet leírni, az anyag fizikai szerkezetének nagyon durva képéhez vezet.

A (6) feltételezést el kell ejtenünk és ehelyett  $\mathbf{P}, \mathbf{M}, \mathbf{i}$ - és  $\rho$ -t az anyag jellemzőiként kell felfognunk, és figyelembe kell vennünk, hogy ezek a jellemzők mind a külső mező hatásától, mind pedig az anyag fizikai állapotától függenek. A későbbiekben olyan folyamatokat is vizsgálunk, ahol a (6) egyenletet komplikáltabb összefüggésekkel kell helyettesíteni.

**252.** MAXWELL egyenleteiből a következő két összefüggést lehet levezetni:

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} + \frac{1}{c} \dot{u} = - \mathbf{E} \mathbf{i}_{\text{eff}} \quad (7)$$

ahol

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (7a)$$

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (7b)$$

Úgy vehetjük, hogy  $c\mathfrak{S}$  az energia áramlássűrűsége,  $u$  pedig az elektromágneses energia sűrűsége. Bevezethetjük továbbá a

$$\mathbf{T} = - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \circ \mathbf{E} + \mathbf{B} \circ \mathbf{B}) + \mathbf{1} u \quad (8)^*$$

tenzort, amely a következő egyenletet elégíti ki:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{S}} = - \mathbf{f}_{\text{eff}}. \quad (9)$$

\* A (8) egyenlet a Maxwell-féle tenzor egy formáját adja meg, azonban mint definíció kicsit különbözik a szokástól. A (8) definíciót két okból részesítjük előnyben:

(1) A (8) tenzor csak  $\mathbf{E}$ -t és  $\mathbf{B}$ -t tartalmazza és szimmetrikus ezekben a mennyiségekben. A szokásos definícióban a tenzor  $\mathbf{D}$ -t és  $\mathbf{H}$ -t is tartalmazza és nem szimmetri-

A (7) és (9) összefüggések az energia és impulzus mozgását írják le az elektromágneses mezőben. (7) bal oldali kifejezése az energiaáramlás kontinuitás-egyenletét adja meg. Ha a jobb oldali kifejezés nulla, akkor az egyenlet azt az állapotot írja le, ahol  $\text{div } \mathfrak{S}$  a lerakódó energia sűrűségét határozza meg, és ez a lerakódó energia az  $u$  elektromágneses energia sűrűségét megváltoztatja. Abban az esetben, ha a jobb oldal nem egyenlő nullával, a (7) egyenlet jobb oldala megadja azt az időegységenkénti energiamentységet, amely az elektromágneses energiából másfajta energiává változik át.

A (9) egyenlet a Maxwell-féle  $\mathbf{T}$  által meghatározott impulzusáramlást írja le.  $\mathfrak{S}/c$ -t úgy értelmezzük, mint az elektromágneses impulzus sűrűségét. A (9) egyenlet jobb oldali kifejezése adja azt az impulzusmentységet, amely időegység alatt elektromágneses impulzusból másfajta impulzussá alakul át.

A (7) és (9) egyenletek részletes elemzésére másutt térünk ki.\*

## B) A MAXWELL-EGYENLETEK MEGOLDÁSAI

**253.**  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  és  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  eloszlásait bármilyen  $t$  időre (3a) és (3b) segítségével ki tudjuk számítani, feltételezve, hogy az  $\mathbf{i}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t)$  és  $\rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t)$  ismertek és ha a kezdő feltélt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \quad (10)$$

formában adjuk meg.

A (3c) és (3d) egyenletek mellékfeltételként szerepelnek. Könnyen beláthatjuk azonban, hogy amennyiben  $t = 0$  időpontban ezek a mellékfeltételek teljesülnek bármilyen más időpontban is érvényben maradnak, feltételezve, hogy a töltés- és áramsűrűség az (5) egyenletet kielégíti. Ennek megfelelően a (3c) és (3d) egyenletek csupán a kezdőfeltételek megszorítását jelentik.

**254.** A Maxwell-egyenleteket potenciálok segítségével is leírhatjuk. Írjuk, hogy

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (11)$$

kus. A (8) formulában felírt tenzor a tisztán elektromágneses sűrűségeket tartalmazza. Ezzel ellentétben ha a szokásos módon  $\mathbf{D}$ -t és  $\mathbf{H}$ -t is felhasználjuk, akkor az így adódó tenzor az elektromágneses mennyiségek mellett a mező által az anyagban felhalmozódott elasztikus energiát, impulzust is tartalmazza.

(2)  $\mathbf{T}$  előjelét a szokásostól eltérően választottuk. E választás azért előnyös, mert a (8) által definiált  $\mathbf{T}$  a (9) kontinuitási egyenletnek tesz eleget és így  $\mathbf{T}$  komponenseit mint az energia és impulzus áramlási sűrűségét értelmezhetjük. Olyan tartományokban, ahol  $\mathbf{f}_{\text{eff}} = 0$ , a (9) egyenlet az elektromágneses energia és impulzus megmaradását fejezi ki. Olyan tartományokban azonban, ahol  $\mathbf{f}_{\text{eff}} \neq 0$ , (9) kifejezi azt a körülményt, hogy az elektromágneses energia és impulzus változik, de e változást a mechanikai energia- és impulzusváltozás kompenzálja. Ez utóbbi változás az anyagra való erőhatásként jelenik meg.

\* JÁNOSY L.: Acta Phys. Hung., 20, 67, 1966.

és így (3a—d) az úgynevezett hullámegyenletekre írhatók át, azaz

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} &= -4\pi \mathbf{i}_{\text{eff}}, & \text{(a)} \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} &= -4\pi \rho_{\text{eff}}, & \text{(b)} \\ \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} &= 0. & \text{(c)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12a—c) a (3a—d) egyenletekkel ekvivalens a következő értelemben. A potenciálokra a következő formájú kezdőfeltételeket írhatjuk elő:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{A}_0(\mathbf{r}), & \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, 0) &= \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r}), \\ \Phi(\mathbf{r}, 0) &= \Phi_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

A (12c)-t figyelembe véve

$$\dot{\Phi}(\mathbf{r}, 0) = \dot{\Phi}_0(\mathbf{r}) = -c \text{div } \mathbf{A}_0(\mathbf{r}), \quad (14)$$

ezért a (13) kezdőfeltétel nem tartalmazhat  $\dot{\Phi}$ -re vonatkozó önkényes előírást.

A (12a) és (12b)-ből álló egyenletrendszer, a (13) és (14) kezdőfeltételekkel egybevéve,  $\mathbf{A}, \Phi$  értékeit egyértelműen meghatározza bármilyen  $t$  időpontra. A (12c) egyenlet mellékfeltételt ad. Meggyőződhetünk azonban arról, hogy ez a mellékfeltétel  $t$ -nek bármilyen értékére automatikusan teljesül, amennyiben egyetlen  $t$  értékre teljesül, valamint ha a töltés- és áramsűrűségek az (5) kontinuitási egyenletnek megfelelően változnak.

Ily módon (12) megoldása a (11) segítségével a (13a—d) egyenletrendszer kielégítő  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  és  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  térerősségeket szolgáltat. Az így kapott térerősségek (10) összefüggéshez hasonló kezdőfeltételeknek:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) &= -\text{grad } \Phi_0(\mathbf{r}) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) &= \text{rot } \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

tesznek eleget. A (15) kezdőfeltételek a (3c) és (3d) egyenleteknek  $t = 0$  pillanatban automatikusan eleget tesznek, ahogyan ezt a térerősségre vonatkozó kezdőfeltételektől követelni kell.

Látjuk tehát, hogy a (12a—c) egyenletek (11) segítségével a (3a—d) egyenlet megoldásaira vezetnek.

## 1. MÉRTÉKTRANSZFORMÁCIÓ

**255.** A (15) egyenletrendszer meg is fordíthatjuk. A (15) egyenletek kielégülnek, ha — példaként — feltételezzük, hogy

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r}) = -c \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \\ \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot } \mathbf{B}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

(15a)-ból többek között az is következik, hogy

$$\text{div } \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0, \text{ és ezért } \dot{\Phi}_0(\mathbf{r}) = 0.$$

Ha tehát az  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  és  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ -t (a (3c—d) egyenletekkel összeférhetően) megadjuk, mindig találunk a (15)-öt kielégítő  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ ,  $\dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r})$ ,  $\Phi_0(\mathbf{r})$  függvényeket. Ebből következik, hogy a (3a—d)-ben leírt *Maxwell*-egyenletek megoldásai a (12a—c) hullámegyenletek megoldásaiból felépíthetők. A *Maxwell*-egyenletekhez csatolt (10) kezdőfeltételekhez a hullámegyenletek esetében megfelelő (13) és (14) kezdőfeltételeket kielégítő potenciálokat kell hozzárendelni.

Ezek szerint a (3) *Maxwell*-egyenletek a (10) kezdőfeltételeknek eleget tevő megoldásait mindig visszavezethetjük a (12) hullámegyenletek megoldására, megfelelő (13) és (14) kezdőfeltételek mellett. Ez a hozzárendelés azonban a következő értelemben nem egyértelmű. A *Maxwell*-egyenleteknek egy megoldását (11) segítségével  $\mathbf{A}$  és  $\Phi$  potenciálokkal ki tudjuk fejezni. Ugyanezt a megoldást azonban

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \Psi, \quad \Phi'_0 = \Phi - \frac{1}{c} \dot{\Psi} \quad (16)$$

potenciálokkal is kifejezhetjük, ahol  $\Psi$  egy harmonikus függvény, tehát  $\Psi$  függvény, amely a

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Psi} = 0$$

egyenletet minden  $\mathbf{r}, t$  értékre kielégíti. Hiszen  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  értékei nem változnak, ha a (11) egyenletben  $\mathbf{A}$  és  $\Phi$  helyett  $\mathbf{A}'$ -t és  $\Phi'$ -t helyettesítünk be.

A (16) összefüggést mértéktranszformációnak nevezzük.

**256.** Abból a tényből, hogy a mérték határozatlan, egyesek arra a következtetésre jutnak, hogy  $\mathbf{A}, \Phi$  nem igazi fizikai mennyiségeket képviselnek, hanem csak kényelmes matematikai kifejezések, amelyek felhasználhatók a *Maxwell*-egyenletek megoldásához. Véleményünk szerint a potenciáloknak van fizikai tartalmuk. Ennek alátámasztására részletesebben foglalkozunk a hullámegyenletek megoldásaival.



## 2. KÉSLELTETETT POTENCIÁLOK

**257.** A (12a–c) hullámegyenletek egy partikuláris megoldását az áram- és töltéssűrűségekből a következő módon lehet meghatározni:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^{(r)}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\mathbf{i}_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', & (a) \\ \Phi^{(r)}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', & (b) \\ t' &= t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

A (17) egyenletrendszer jobb oldalán fellépő integrálok valóban a (12a–c) egyenletrendszer megoldásait adják, amint erről helyettesítés útján meggyőződhetünk. Ezek a kifejezések (12)-nek csak partikuláris megoldásait adják, hiszen a (17) integrálok  $\mathbf{A}$ -t és  $\Phi$ -t már egyértelműen meghatározzák és nem hagynak lehetőséget a (13) formájú kezdőfeltételek előírására. Azonkívül a (17) által kiszámított potenciálok mértéke is eleve meghatározott.

(12) általános megoldásait úgy kapjuk meg, hogy a (17) megoldásokhoz a homogén hullámegyenlet megfelelő megoldását hozzáadjuk. Jelöljük  $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ - és  $\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ -vel a

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}^{(0)} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}^{(0)} &= 0, \\ \nabla^2 \Phi^{(0)} - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi}^{(0)} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{A}^{(0)} + \frac{1}{c} \dot{\Phi}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

rendszer megoldásait. Megjegyezzük, hogy ez az egyenletrendszer nem triviális megoldásokkal is rendelkezik.

Könnyen belátható, hogy a (12) egyenletrendszer általános megoldásait a következő formában írhatjuk fel

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}^{(r)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}, t), \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \Phi^{(r)}(\mathbf{r}, t) + \Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \right\}$$

Megmutatható, hogy lehet olyan  $\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$  és  $\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$  homogén megoldást találni, hogy a fenti megoldás a *Maxwell*-egyenleteknek egy tetszőlegesen előírt (10) kezdőfeltételnek elegendő megoldását szolgáltatassa.

Megjegyezzük továbbá, hogy  $\mathbf{A}^{(r)}$  és  $\Phi^{(r)}$  (17) által már egyértelműen meg vannak határozva, a mérték bizonytalansága csak a (18) által meghatározandó  $\mathbf{A}^{(0)}$  és  $\Phi^{(0)}$  homogén megoldásokban lép fel.

**258.** (17a–c) által definiált potenciálokat retardált potenciáloknak nevezték el. E potenciálok egyszerű fizikai tartalommal rendelkeznek. Egy

$\mathbf{r}$  koordinátájú  $P$  pontban,  $t$  időben fellépő potenciált azok az áram- és töltéeloszlások határozzák meg, amelyek  $t$  időpont előtti időben  $P$  pont környékében voltak. Egy, a  $P$  ponttól  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  távolságban levő  $P'$  pontban  $t'$  időben elhelyezkedő töltések és áramok hatása a  $P$  pontban a későbbi  $t = t' + R/c$  időpontban érvényesül.

A késés mértéke arra enged következtetni, hogy töltések és áramok hatása  $c$  sebességgel terjed. Erre céloztunk az I. fejezetben, amikor kijelentettük, hogy a *Maxwell*-elméletből az következik, hogy elektromágneses hatások izotrop módon  $c$  sebességgel terjednek.

### 3. AVANZSÁLT POTENCIÁLOK

**259.** A (12a–c) által kifejezett hullámegyenletek (17)-től eltérő, következő formájú megoldásokkal is rendelkeznek:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^{(a)}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\mathbf{i}_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', & (a) \\ \Phi^{(a)}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', & (b) \\ t'' &= t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

A fenti mennyiségeket *avanzsált* potenciáloknak nevezzük. A (19a–c) kinematikus értelmezése az, hogy az áramok és töltések  $t'' > t$  időpontban határozzák meg a  $P$  pontban,  $t$  időben fellépő potenciálokat.

Ilyen „jövőből való hatás” nyilvánvalóan fizikailag értelmetlen és éppen ezért többen hajlandók a potenciálok fizikai tartalmát tagadni, nemcsak azért, mert a potenciálok mértéke határozatlan, hanem azért is, mert a megoldásokban a fizikai jelentéssel nem rendelkező avanzsált potenciálok is szerepelhetnek.

**260.** A mi véleményünk szerint a retardált potenciálok fizikai értelemmel bírnak, az avanzsált potenciálok pedig értelmetlen mennyiségek.\*

Az avanzsált potenciálokat egyszerű módon eliminálhatjuk. Ennek kimutatására jelöljük  $\mathbf{A}^{(r)}\{\mathbf{i}\}$ , illetve  $\mathbf{A}^{(a)}\{\mathbf{i}\}$ -vel a retardált, illetve avanzsált potenciálokat, amelyek az  $\mathbf{i}$  áramsűrűségből (17), illetve (19) szerint adódnak. Jelöljük hasonló módon  $\mathbf{A}\{\mathbf{i}\}$ -vel azt a potenciált, amely ugyanarra az  $\mathbf{i}$  áramsűrűségre a hullámegyenlet egy általános megoldását adja. Az egyenletek linearitását figyelembe véve azt találjuk, hogy

$$\mathbf{A}\{\mathbf{i}\} = \mathbf{A}^{(r)}\{\mathbf{i}'\} + \mathbf{A}^{(a)}\{\mathbf{i}''\}, \quad \mathbf{i}' + \mathbf{i}'' = \mathbf{i}. \quad (20a)$$

Hasonló jelölés mellett skalár potenciálok esetében

$$\Phi\{\rho\} = \Phi^{(r)}\{\rho'\} + \Phi^{(a)}\{\rho''\}, \quad \rho' + \rho'' = \rho. \quad (20b)$$

Ily módon a potenciálokat, amelyek  $\mathbf{i}$ ,  $\rho$  töltéssűrűségből leszármaztathatók, retardált és avanzsált részekre bonthatjuk fel, ahol utóbbiak  $\mathbf{i}'$ ,  $\rho'$ ,

\* JÁNOSSY L.: Acta Phys. Hung., 20, 59, 1966.

illetve  $\mathbf{i}'$ ,  $\varrho''$  forrásúrségekhez tartoznak. Az  $\mathbf{i}$ -t és  $\varrho$ -t megfelelő módon kettébontva elérhetjük, hogy a (20a) és (20b) által adott potenciálok a (12) megoldását tetszőleges kezdőfeltételek mellett biztosítsák.

Első pillanatra ebből az eredményből arra következtethetnénk, hogy a *Maxwell*-egyenletek általános megoldásához mind retardált, mind avanszált potenciálokra szükség van.

**261.** Megjegyezzük azonban, hogy a *Maxwell*-egyenletek egy általános megoldása úgy is írható, hogy

$$\mathbf{A}\{\mathbf{i}\} = \mathbf{A}^{(r)}\{\mathbf{i}\} + (\mathbf{A}^{(r)}\{\mathbf{i}_1\} - \mathbf{A}^{(a)}\{\mathbf{i}_1\}). \quad (21a)$$

Ha tudniillik azt írjuk, hogy

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}' - \mathbf{i}, \quad \mathbf{i}'' = \mathbf{i} - \mathbf{i}', \quad (21b)$$

akkor (21a—b) (20a)-ra vezet. Továbbá azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{(r)}\{\mathbf{i}_1\} - \mathbf{A}^{(a)}\{\mathbf{i}_1\} = \mathbf{A}^{(0)}\{\mathbf{i}_1\}.$$

A fentiek szerint definiált  $\mathbf{A}^{(0)}\{\mathbf{i}_1\}$  a (18) homogén hullámegyenlet megoldását szolgáltatja. Tehát (21a) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{A}\{\mathbf{i}\} = \mathbf{A}^{(r)}\{\mathbf{i}\} + \mathbf{A}^{(0)}\{\mathbf{i}_1\}, \quad (22a)$$

és hasonló módon skalár potenciál esetében

$$\Phi\{\varrho\} = \Phi^{(r)}\{\varrho\} + \Phi^{(0)}\{\varrho_1\}. \quad (22b)$$

Tehát látjuk, hogy az  $\mathbf{A}$  és  $\Phi$  által jellemzett megoldást egyrészt (21a—b) szerint retardált és avanszált, másrészt azonban (22a—b)-nek megfelelően retardált és homogén részre bonthatjuk fel. Véleményünk szerint a (22) szerinti felbontás tükrözi a fizikai valóságot.

#### 4. KÓBOR HULLÁMOK

**262.** A fentiek szerint a *Maxwell*-egyenletek megoldásait előállíthatjuk mint retardált megoldások és homogén megoldások szuperpozícióját. A megoldásokat tehát felbonthatjuk áramok és töltések késleltetett hatásaként értelmezhető részekre, és olyan részekre, amelyek forrás nélküli elektromágneses hullámokat képviselnek.

Felmerül a kérdés, hogy fellépnek-e a természetben olyan hullámok, amelyek a homogén megoldásnak felelnek meg? Amennyiben ilyen hullámok valóban léteznek, akkor ezeket „kóbor hullámoknak” kell minősíteni. E hullámok a világűr átselezik, de nem áramok vagy töltések hatásából származnak. Tapasztalat kérdése annak megállapítása, hogy a természetben ilyen „kóbor hullámok” előfordulnak-e vagy sem.

**263.** Ha a gyakorlatban elektromágneses hullámokkal találkozunk, ezek forrásai után kutatunk, tehát automatikusan feltételezzük, hogy a hullámok „retardált” típusúak.

A csillagászok találtak a világűrűből származó elektromágneses hullámokat és rögtön elméleteket állítottak fel e hullámok forrását illetően.

Egyáltalában nem elvetendő a gondolat, hogy kóborhullámok nem is léteznek. Eszerint feltételezhetnénk, hogy az összes, a valóságban fellépő hullámok retardált típusok. Ezzel azt tételezzük fel, hogy a *Maxwell-egyenletek az elektromágneses mezők mozgására csak szükséges feltételeket szabnak és a természetben az egyenleteknek csak bizonyos partikuláris megoldásai realizálódnak, tudniillik a retardált potenciálok segítségével előállítható megoldások.*

Az avanszált potenciálokra példaként említjük a *Maxwell-egyenletek* megoldásait, amelyek olyan gömbhullámokat írnak le, amelyek  $c$  sebességgel egy pontban összehúzódnak és ott a megfelelő töltés (a hullámra várva) a hullámokat elnyeli. Világos, hogy a *Maxwell-egyenlet* ilyen megoldásai csak matematikai lehetőséget fejeznek ki és hogy ezek a lehetőségek a valóságban nem realizálódnak.

Általában a folyamatok, amelyeket tisztán avanszált potenciállal lehet kifejezni (mint pl. az összehúzódo gömbhullám) úgy tekinthetők, mint a retardált potenciáloknak megfelelő folyamatok időben való megfordítása. Ha azonban feltételezzük, hogy mint a természetben előforduló elektromágneses jelenségek retardált potenciálokkal kifejezhetők, ebből az is következik, hogy az elektromágneses folyamatok irreverzibilisek. E feltételezés azért kézenfekvő, mert bármilyen retardált potenciálokkal kifejezhető folyamat megfordítása egy tisztán avanszált potenciálokkal kifejezendő folyamatra vezet. Tehát amennyiben feltételezzük, hogy csak a retardált potenciálokkal leírt folyamatok valósulnak meg a természetben, akkor e feltételezésből az is következik, hogy a természetben előforduló bármilyen folyamat megfordítottja nem valósul meg.

**264.** Az avanszált megoldások létezése mellett felhozták azt az érvet, hogy a retardált potenciálok a hullámok emisszióját, az avanszált potenciálok pedig a hullámok abszorpcióját képviselik. Nem akarunk itt a kvantum-elektrodinamika problematikájára kitérni. Megjegyezzük azonban, hogy amíg a klasszikus elmélet határain belül lejátszódó folyamatok széles körét vizsgáljuk, semmi szükség nincs avanszált potenciálok bevezetésére, az abszorpció magyarázata esetében sem.

Az elektromágneses mező és anyag közötti energia — impulzus kicserélődést a **252.** pontban részletesen tárgyaltuk. Megmutattuk ott, hogy az elektromágneses mező — amennyiben energiát és impulzust ad át az anyagnak — megfelelő mennyiségű energiát és impulzust veszít. Ez a *Maxwell-egyenletekből* következik. Hogy az energiaátadás mechanizmusát világosabbá tegyük, megjegyezzük, hogyha az atomokra vagy elemi részecskékre elektromágneses sugárzás hat, ezek az eredeti sugárhatás folytán szekunder sugárzást bocsátanak ki. Amennyiben a sugárzás az atomoknak, vagy elemi részecskéknak energiát és impulzust ad át, a szekunder sugárzás a primer sugárzást részben kioltja és így a primer sugárzás energiája és impulzusa éppen annyival csökken, amennyi energiát és impulzust vett fel az anyagi rendszer. Így tehát az abszorpciós folyamatot is retardált megoldások segítségével értelmezhetjük.

Egyébként lényegtelen, hogy mérnökök (a matematikai egyszerűség kedvéért) bizonyos technikai számítási módszerekben időnként avanszált potenciálokat használnak fel.

C) MAXWELL-FÉLE EGYENLETEK  
NÉGYESTENZOROKBAN KIFEJEZVE

**265.** A következőkben a négyesvektor és -tenzor formalizmust használjuk. Ezzel kapcsolatos sajátosság jelöléseink a Függelékben részletes magyarázatot kaptak és ezért ajánljuk az olvasónak a Függelék áttekintését.

A **250.**–**254.** pontokban megadott *Maxwell*-egyenletek egy *K Lorentz*-rendszerben négyesvektorok, illetve -tenzorok segítségével a következő módon írhatók le.

Legyen

$$\Psi = \mathbf{A}, -c\Phi \quad (23)$$

a négyespotenciál és

$$\mathbf{I}_{\text{eff}} = \mathbf{i}_{\text{eff}}, -c\varrho_{\text{eff}} \quad (24)$$

a négyes-áramsűrűség.

(4)-nek megfelelően írhatjuk, hogy

$$\mathbf{I}_{\text{eff}} = \mathbf{I} + \text{Div } \mathbf{\Pi}, \quad (25)$$

ahol

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}, -c\varrho$$

az áram konduktív részét írja le.  $\mathbf{\Pi}$  antiszimmetrikus mátrix, mely a polarizációkat írja le, úgy, hogy

$$\Pi_{ik} = M_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3 \text{ ciklikus permutációja}$$

$$\Pi_{i4} = -cP_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

**266.** Fenti jelöléssel az (5) kontinuitási egyenletet úgy írhatjuk, hogy

$$\text{Div } \mathbf{I}_{\text{eff}} = 0. \quad (26)$$

A (12) egyenleteket írhatjuk, mint

$$L\Psi = -4\pi\mathbf{I}_{\text{eff}}, \quad (27)$$

$$\text{Div } \Psi = 0.$$

( $L$  jelöli a *Laplace*-operátort négy dimenzióban, lásd I. Függelék **449.** pontját.)

A potenciálból a térerősséget

$$\mathbf{F} = \text{Rot } \Psi, \quad (28)$$

szerint kapjuk meg. Ha (28)-at (11)-gyel összehasonlítjuk, azt találjuk, hogy

$$F_{ik} = B_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3 \text{ ciklikus permutációja} \quad (28a)$$

$$\frac{1}{c}F_{i4} = E_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

A (3a–d)-ben összefoglalt *Maxwell*-egyenleteket tehát úgy írhatjuk, hogy

$$\text{Div } \mathbf{F} = 4\pi \mathbf{I}_{\text{eff}}, \quad (29)$$

$$\text{Div } \tilde{\mathbf{F}} = 0,$$

ahol

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} ((\epsilon^{(4)} \cdot \mathbf{F})). \quad (30)$$

(Lásd II. Függelék 468. pontját).

267. Az energiát és impulzust kifejezhetjük négyestenzorokkal

$$\mathbf{T}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}). \quad (31)$$

Ha (31)-et tér-, illetve időrészekre felbontjuk, akkor (7a–b) és (8) segítségével azt kapjuk, hogy

$$T_{ik}^{(2)} = T_{ik}, \quad T_{i4} = T_{4i} = -c \mathfrak{F}_i, \quad T_{44} = c^2 u. \quad (31a)$$

A (7) és (8) egyenleteket írhatjuk, mint

$$\text{Div } \mathbf{T} + \mathfrak{F}_{\text{eff}} = 0, \quad (32)$$

ahol

$$\mathfrak{F}_{\text{eff}} = \mathbf{f}_{\text{eff}}, \quad -c \mathbf{E} \mathbf{i}_{\text{eff}}, \quad (32a)$$

tehát  $\mathfrak{F}_{\text{eff}}$  a ponderomotorikus négyeserő sűrűsége.

268. A (23)–(32) egyenletsorozat a *Maxwell*-egyenleteket négyesvektorokban és -tenzorokban fejezi ki. Ezek az egyenletek az energia- és impulzusmegmaradási törvényeket is tartalmazzák.

Megjegyezzük azonban, hogy az egyenletek ezen új fogalmazása önmagában semmiféle új fizikai eredményhez nem vezet. Ha feltételezzük, hogy a *Maxwell*-egyenletek hármasektorokban és -tenzorokban kifejezve egy vonatkoztatási rendszer mértékeiben érvényesek, akkor a 265.–267. pontokban adott összefüggések automatikusan következnek, hiszen ugyanazokat az összefüggéseket — csak más jelölést felhasználva — fejezik ki.

Ha a négyesvektor és -tenzor összefüggéseket egy tetszőlegesen megfordítható

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

transzformációnak vetjük alá, akkor a Függelékben leírt eredményeket felhasználva azt találjuk, hogy a (23)–(32) egyenletek e transzformáció után is megőrzik formájukat, ha a Div, Rot,  $L$  operátorokat megfelelően definiáljuk.

E fenti eredmény nem meglepő, s csak azt mutatja, hogy a *Maxwell*-egyenletek a természet objektív törvényeit fejezik ki, és e törvények a koordinátavektorok stb. tetszőleges mértékeiben kifejezhetők.

A *Maxwell*-egyenletek egyszerű formája — ha négyesvektorokkal és -tenzorokkal fejezzük ki őket — azt mutatja, hogy a négyespotenciálok, négyesáramok stb. az elektromágneses mennyiségek *kitüntetett mértékeit* adják, mely mértékek különösen alkalmasak az elektromágneses mező leírására.

### 1. A RETARDÁLT NÉGYESPOTENCIÁL

**269.** Már nem egyszerűen jelölési különbségnek minősíthető új eredményhez jutunk a retardált potenciálok vizsgálatával. A (17) összefüggéseket úgy is írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \int \frac{\mathbf{I}_{\text{eff}}(\mathbf{x} + \mathbf{X})}{R} d^3 \mathbf{R}, & (a) \\ \mathbf{X} &= \mathbf{R}, T, & (b) \\ R &= |\mathbf{R}|, T = -R/c. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

A (33) egyenletek a négyeskoordináták tér- és idő komponenseit explicit tartalmazzák és ezért egyáltalában nem magától értetődő, hogy a (33) egyenletek invariáns egyenleteket képeznek.

A következőkben megmutatjuk, hogy a (33) egyenletrendszer a reverzibilis lineáris transzformációkkal szemben invariáns.

Induljunk ki egy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s} \quad (34)$$

lineáris koordinátatranszformációból. Az I. Függelék értelmében kovariáns vektormező esetében

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}') = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

érvényes. Tehát, ha (33) mindkét oldalát  $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ -gyel szorozzuk és figyelembe vesszük, hogy  $\Psi$  és  $\mathbf{I}_{\text{eff}}$  kovariáns mezőket írnak le, azt találjuk, hogy

$$\tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{I}_{\text{eff}}(\mathbf{x} + \mathbf{X}) = \mathbf{I}'_{\text{eff}}(\mathbf{x}' + \mathbf{S}\mathbf{X}),$$

ennélfogva

$$\Psi'(\mathbf{x}') = \int \frac{\mathbf{I}'_{\text{eff}}(\mathbf{x}' + \mathbf{S}\mathbf{X})}{R} d^3 \mathbf{R}, \quad (35)$$

ahol

$$T = -R/c. \quad (36)$$

helyettesítendő be  $\mathbf{X}$  negyedik komponenseként.

Megjegyezzük, hogy a (34) koordinátatranszformáció az integrációs változókat nem érinti és ezért a (35) egyenletben, miként a (33)-ban, az integráció  $\mathbf{R}$  komponenseire vonatkozik.

Bevezethetünk

$$\mathbf{X}' = \mathbf{S}\mathbf{X} \quad (37)$$

szerint új integrációs változókat.

Megjegyezzük, hogy a (37) kifejezés összefüggést fejez ki  $\mathbf{R}$  és  $\mathbf{R}'$  komponensei között. Az  $\mathbf{X}$ -nek a  $T$  komponensét, úgy mint az  $\mathbf{X}'$ -nek a  $T'$  komponensét az  $\mathbf{R}$  és  $\mathbf{R}'$  segítségével kell kifejezni.

A fentiek segítségével be tudunk vezetni egy  $\mathbf{g}$  mátrixot úgy, hogy

$$\mathbf{X}' \mathbf{g} \mathbf{X}' = 0, \quad (38)$$

ahol

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{S}^{-1}. \quad (39)$$

Látjuk, hogy az így formálisan bevezetett  $\mathbf{g}$  mátrix a terjedési tenzor reprezentációja a  $K'$  rendszerben. Ennek a mátrixnak a szerepét az új koordináta-rendszerben a levezetésünk végeredménye fogja megvilágítani.

A tér és idő komponenseket előnyös szétválasztani. Azt írjuk, hogy

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V} & -C^2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Ismert algebrai tételek felhasználásával a következő összefüggéseket kapjuk

$$\det \mathbf{S}^{-1} = \det \mathbf{U}(a - (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}), \quad (40a)$$

$$\det \mathbf{g} = -\det \mathbf{G}(C^2 + \mathbf{V}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{V}). \quad (40b)$$

(39) és (40) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G} &= \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{U} - c^2 \mathbf{B} \circ \mathbf{B}, & (a) \\ \mathbf{V} &= \mathbf{A}\mathbf{U} - c^2 a \mathbf{B}, & (b) \\ C^2 &= c^2 a^2 - \mathbf{A}^2, & (c) \\ \det \mathbf{S} &= c/c', \quad c' = \sqrt{-\det \mathbf{g}}. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

**270.** Ha a (37) egyenletben is szétválasztjuk a tér és idő komponenseket, akkor a (40) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{U}\mathbf{R}' + \mathbf{A}\mathbf{T}', & (a) \\ \mathbf{T} &= -R/c = \mathbf{B}\mathbf{R}' + a\mathbf{T}'. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$\mathbf{T}'$ -öt az első összefüggésből a második segítségével eliminálhatjuk és azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{R} + \frac{\mathbf{A}\mathbf{R}}{ac} = \left( \mathbf{U} - \frac{\mathbf{A} \circ \mathbf{B}}{a} \right) \mathbf{R}'.$$

Fenti összefüggést  $\mathbf{R}'$  szerint differenciálhatjuk, és ha az így kapott kifejezésnek a determinánsát képezzük, egyszerű számítás eredményeként kapjuk, hogy

$$\left( R + \frac{\mathbf{A}\mathbf{R}}{ac} \right) \frac{1}{R} \det \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{R}'} \right) = \det \mathbf{S}^{-1/a}. \quad (43)$$

Ha  $\mathbf{R}$ -t  $\mathbf{R}'$  és  $\mathbf{T}'$  segítségével (41) és (42) alapján kifejezzük, azt találjuk, hogy

$$R + \frac{\mathbf{A}\mathbf{R}}{ac} = \frac{1}{ac} (-C^2 \mathbf{T}' + \mathbf{V}\mathbf{R}'). \quad (44)$$



Azonban (38)-ból következik, hogy

$$C^2 T' = \mathbf{V}\mathbf{R}' - C\sqrt{\mathbf{R}'\overline{\mathbf{G}}\mathbf{R}'},$$

ahol

$$\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{V}\circ\mathbf{V}}{C^2}. \quad (45)$$

Ebben a kifejezésben  $T'$  (38)-nak negatív megoldása. Így tehát (44)-et és (45)-öt (43)-ba behelyettesítve azt találjuk, hogy

$$\frac{1}{R} \det \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{R}'} \right) = \frac{1}{R'}, \quad (46)$$

ahol

$$R' = \frac{C}{c'} \sqrt{\mathbf{R}'\overline{\mathbf{G}}\mathbf{R}'}. \quad (47)$$

**271.** A (47)-et (35)-be behelyettesítve

$$\Psi'(\mathbf{x}') = \int \frac{\mathbf{I}'_{\text{eff}}(\mathbf{x}' + \mathbf{X}')}{R'} d^3 \mathbf{R}'. \quad (48)$$

Látjuk tehát, hogy a négyespotenciált  $K'$ -ben a  $K$ -ban érvényes kifejezés megfelelőjével írhatjuk le. Ennek az eredménynek érdekes vonása az, hogy megállapítja a módszert, amely szerint a retardáció  $K'$ -ben kifejezendő. Arra a következtetésre jutunk, hogy a  $P$  pontban a  $t'$  időpillanatban észlelt,  $P'$ -ből származó hatás  $P'$ -ből a  $t' - |T'|$  időpontban indul, ahol  $|T'|$  egy fényjel  $P'$ -ből  $P$  pontba történő futási ideje. Ez abból látható, hogy  $T'$ -t (38) megfelelő megoldásaként kaptuk.

A **163.** ponttal összehasonlítva látható, hogy a (47) egyenlet  $R'$ -re olyan értéket ad, ami arányos a fényjel  $P$  és  $P'$  közötti oda-vissza futási idejével.

Tehát a (48) kifejezés úgy értelmezendő, hogy az  $R'$  háromdimenziós távolság  $K'$  mértékeiben megfelel a fényjel oda-vissza futási idejének segítségével definiált távolságmértéknek. Megjegyezzük, hogy a (48) kifejezés, amely formájában független a koordináta-rendszer választásától, akkor érvényes, ha az egységeket (47)-nek megfelelően választjuk. Az így választott egységek eltérnek a **163.** pontban választott egységtől.

Ez utóbbi eredmény megfontolásaink ellentmondásmentességét bizonyítja.

## 2. FÉNYJELEK MOZGÁSA A MAXWELL-EGYENLETEK TÜKRÉBEN

**272.** Ha négyestenzorok segítségével írjuk le a *Maxwell*-egyenleteket, ezek a  $\mathbf{g}$  tenzort implicite tartalmazzák, hiszen a vektoroperátorok  $\mathbf{g}$ -t magukban foglalják.

A  $\mathbf{g}$  tenzort eredetileg fényjelek pályájának megfigyelésével vezettük be. Tisztán fenomenológiai megfontolásokból kiindulva feltételeztük, hogy a fényjelek pályája a

$$\mathbf{x}\mathbf{g}\mathbf{x} = 0 \quad (49)$$

egyenletnek tesz eleget. Az elmélet ellentmondásmentességének bizonyítására meg kell mutatnunk, hogy a (49) egyenlet a tetszőlegesen választott koordináta-rendszerekben kifejezett *Maxwell*-egyenletekből is következik.

**273.** A fenti állítás bizonyítására első lépésként egy síkhullámot tárgyalunk. A *Maxwell*-egyenleteket

$$L\Psi = 0, \quad \text{Div}\Psi = 0 \quad (50)$$

formába írhatjuk.

Az (50) egyenletrendszer

$$\Psi = \mathbf{f}(\alpha \mathbf{x}) \quad (51)$$

síkhullám megoldásokkal is rendelkezik (figyelembe véve, hogy  $\mathbf{x}(p)$  egy kontravariáns négyesvektor), ahol  $\alpha$  g nullvektor, mely

$$\alpha \cdot \alpha = 0 \quad (52)$$

-nak eleget tesz és  $\mathbf{f}(u)$  egy négyesfüggvény, amelyre

$$\alpha \cdot \mathbf{f}'(u) = 0 \quad (53)$$

minden  $u$  értékre.

Tekintsük egy  $\mathbf{x}(p)$  négyesvektor által megadott pont pályáját. Ez a pont egy fázis síkon fog feküdni, feltételezve, hogy

$$\alpha \mathbf{x}(p) = \text{konstans},$$

vagyis

$$\alpha \dot{\mathbf{x}}(p) = 0. \quad (54)$$

Az (54) egyenletet többek között úgy elégíthetjük ki, hogy feltételezzük:

$$\dot{\mathbf{x}}(p) = \mathbf{g}^{-1} \alpha = \alpha \mathbf{g}^{-1}. \quad (55)$$

Ezt (52) segítségével láthatjuk be. (52) újbóli felhasználásával (54)-ből azt látjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{x}}(p) \mathbf{g} \dot{\mathbf{x}}(p) = 0. \quad (56)$$

Ez arra mutat, hogy az állandó fázissal rendelkező felületek tartalmaznak olyan pontokat, melyeknek négyeskoordinátája (56)-nak eleget tesz.

**274.** Az a megállapítás azonban, hogy fényjelek — melyek hullámcsomagoknak tekinthetők — szintén (56) szerint mozognak, a fenti pont eredményét meghaladja. Az, hogy ez utóbbi kivétel helytálló, az a retardált formában leírt hullámegyenletekből következik.

Az  $\mathbf{r}_0$  pont közelében  $t_0$  időpontban fényjel úgy képződik, hogy az  $e$  pontban levő atom ezen időben rövid idejű oszcillációt végez. Az atom oszcillációját egy olyan

$$\mathbf{I}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t)$$

forrássűrűség segítségével írhatjuk le, amely csak akkor különbözik nullától, ha  $\mathbf{r} \sim \mathbf{r}_0$ ,  $t \sim t_0$

Ortogonalis reprezentációban  $\mathbf{r}$  pontban a  $t$  időben a potenciálokat a következő kifejezés adja meg:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{I}_{\text{eff}}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau',$$

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}.$$

A forrassűrűségekre tett feltevésünkéből következik, hogy a jobb oldali kifejezés integrandusa eltűnik a

$$t' \sim t_0, \quad \mathbf{r}' \sim \mathbf{r}_0$$

tartomány kivételével. Ennek megfelelően nullától eltérő potenciálokat kizárólag azokban az  $\mathbf{r}$ ,  $t$  négyespontokban találunk, ahol

$$t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c} \sim t_0.$$

Ebből viszont az következik, hogy az  $\mathbf{x}_0$ -ból származó perturbáció  $c$  sebességgel izotrop módon terjedő gömbhullámokat hoz létre.

A koordinátamértékek meghatározásához szükséges fényjelekként ilyen gömbhullámokat használhatunk.

Amennyiben az ortogonalis reprezentációból egy tetszőleges egyenes reprezentációra térünk át, azt találjuk, hogy az ortogonalis reprezentációban gömbhullámként terjedő hullámfelületek a tetszőleges lineáris reprezentációban, (56)-ban leírt kvadratikus kifejezésnek megfelelően terjednek. Ebből arra következtetünk, hogy MAXWELL egyenletei szerint a fényjelek (56)-nak megfelelően terjednek, ha az egyenleteket (56)-nak megfelelő reprezentációban írjuk fel.

## D) A MAXWELL-EGYENLETEK ÉS A LORENTZ-ELV

**275.** A fentiek arra mutattak, hogy a *Maxwell*-egyenleteket a vonatkoztatási rendszertől független módon ellentmondásmentesen írhatjuk fel.

Fizikailag akkor jutunk új eredményekre, ha a *Maxwell*-egyenletekre a *Lorentz*-elvet alkalmazzuk. Ebből a célból vizsgáljunk egy  $\mathfrak{F}$  elektromágneses mezőt. Egyenes reprezentációban az írható, hogy

$$K(\mathfrak{F}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

ahol  $\mathbf{F}$  potenciálokat, térerősséget és forrásokat tartalmazó mennyiségek mértékét jelenti  $K$  reprezentációra vonatkozóan.

A *Lorentz*-elvnek megfelelően azt várjuk, hogy amennyiben  $\mathfrak{F}$  egy, a *Maxwell*-egyenleteknek eleget tevő mezőt jelent, akkor

$$\mathfrak{L}_a(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^*$$

egy hasonló mezőt jelent.

**276.** Az állítás helytállóságát és azt, hogy ez a *Maxwell*-egyenletekből következik, a **186.** ponthoz hasonló megfontolás alapján mutatjuk ki.

Az  $\mathfrak{F}$  mezőnek  $K$ , illetve  $K'$ -re vonatkoztatott  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{F}'$  reprezentációit tekintve legyen  $K(\mathfrak{F}) = \mathbf{F}$ ,  $K'(\mathfrak{F}) = \mathbf{F}'$ . Amennyiben a  $K$  és  $K'$  közötti transzformáció *Lorentz*-transzformáció, a  $g$  terjedési tenzor reprezentációi a két vonatkoztatási rendszerben azonosak, tehát  $K(g) = K'(g) = g$ . Ennek megfelelően a *Maxwell*-egyenletek matematikai szempontból  $K$ -ban és  $K'$ -ben azonosak. Az  $\mathbf{F}'$  mértékek megadják az  $\mathfrak{F}$  mező mértékeit  $K'$ -ben. Ugyanezek a mértékek azonban egy másik — mondjuk  $\mathfrak{F}^*$  mezőnek —  $K$ -ban való reprezentációjaként is felfoghatók. Így azt is írhatjuk, hogy

$$K'(\mathfrak{F}) = \mathbf{F}' \text{ és } \mathbf{F}' = K(\mathfrak{F}^*) = \mathbf{F}^*,$$

vagyis amennyiben az  $\mathbf{F}$  mértékek a *Maxwell*-egyenleteket kielégítő mező mértékeit adják, akkor  $\mathbf{F}^*$  egy másik, a *Maxwell*-egyenletnek szintén eleget tevő mezőnek ugyanabban a  $K$  reprezentáció mértékeiben kifejezett mértékeit adja.

A **186.** pont megfontolásaihoz hasonlóan  $\mathfrak{F}$  és  $\mathfrak{F}^*$  mezőket *Lorentz*-transzformáció köti össze, tehát ha az  $\mathfrak{F}$  mező a *Maxwell*-egyenleteknek eleget tesz, akkor az  $\mathfrak{F}^*$  mező, amely az előbbinek *Lorentz*-deformált verziója, a *Maxwell*-egyenletnek szintén eleget tesz.

**277.** Amennyiben  $\mathfrak{F}$  és  $\mathfrak{F}^*$  az elektromágneses mező térerősségeit jelenti, akkor a reprezentációk közötti összefüggést

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}^*) = \tilde{\mathbf{M}}_q^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{M}_q^{-1}, \quad (57)$$

ahol

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{M}_q \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$$

adja meg;  $\mathbf{M}_q$  egy

$$\tilde{\mathbf{M}}_q \mathbf{g} \mathbf{M}_q = \mathbf{g} \quad (58)$$

egyenletet kielégítő *Lorentz*-mátrixot jelent.

A  $K$ -ról  $K'$ -re vezető *Lorentz*-transzformációt pedig úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{M}^{(q)-1} \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}.$$

Mivel *Lorentz*-transzformációt alkalmaztunk,

$$K(g) = K'(g) = g.$$

Az (57) helyett

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{M}}_q^{-1} \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{M}_q^{-1} \quad (59)$$

írhatunk,

ahol

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_q^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \quad (60)$$

Az (59) összefüggés (57)-tel azonos. Az utóbbi azonban világosan kifejezi azt a tényt, hogy  $\mathbf{F}^*(\mathbf{x})$  és  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  két különböző mező ugyanazon  $K$  vonatkoztatási rendszerben való reprezentációi.

Explicite felírva az eredeti és a deformált mező közötti összefüggést, ortogonális reprezentációban, a 154. pont (15)-ben megadott transzformációját használva azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_1(\bar{\mathbf{x}}) + B \left( \mathbf{E}_2(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})) \right), & (a) \\ \mathbf{B}^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}_1(\bar{\mathbf{x}}) + B \left( \mathbf{B}_2(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}})) \right), & (b) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

ahol az 1, illetve a 2 index a megfelelő vektornak  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos, illetve merőleges komponenseit jelöli, vagyis

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E})/v^2,$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1.$$

Ha a deformált mező térerősségeit is  $\mathbf{v}$ -re párhuzamos, illetve merőleges komponensekre bontjuk, akkor

$$\text{és} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_1(\bar{\mathbf{x}}), & \mathbf{B}_1^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{E}_2^*(\mathbf{x}) &= B \left( \mathbf{E}_2(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2(\bar{\mathbf{x}})) \right) \\ \mathbf{B}_2^*(\mathbf{x}) &= B \left( \mathbf{B}_2(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_2(\bar{\mathbf{x}})) \right) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

A (60) transzformáció tér és idő komponensekre felbontva úgy írható, hogy

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}}, \bar{t},$$

ahol

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t) + \mathbf{r}_2, \\ \bar{t} &= B(t - \mathbf{v}\mathbf{r}/c^2), \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

ahol  $\mathbf{r}_1$  és  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}$  komponenseit a  $\mathbf{v}$  irányával párhuzamos, illetve merőleges irányban jelentik.

## 1. PONTTÖLTÉS MEZŐJE

**278.** Vizsgáljuk egy az  $\mathbf{r} = 0$  pontban elhelyezett nyugalomban levő  $e$  töltés mezőjét;

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad t \text{ bármely értékére.}$$

A transzformált mezőt (61) és (63) segítségével úgy találjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) &= \frac{Be(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{s^3}, \\ \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) &= \frac{Be}{cs^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}), \\ s^2 &= B^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t)^2 + \mathbf{r}_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

ahol

Ahhoz, hogy (64) jelentését jobban megértsük, megjegyezzük, hogy ha  $v \ll c$ , akkor  $B \sim 1$  és  $s \sim r$ . Ebben a közelítésben az elektromos töltés magával hordja az elektromos mezőt oly módon, mintha e mező a töltéssel együtt szilárd testet képezne. A mozgó töltés emellett mágneses mezőt hoz létre, a mágneses erővonalak a sebességvektort gyűrűszerűen veszik körül.

A fenti eredmény a *Biot–Savart*-törvénynek felel meg, és kísérletileg helytálló. Azt látjuk, hogy ez utóbbi kifejezésben a  $c$  állandót inkább a  $c'$  állandóval, azaz a kritikus sebességgel, mint a fénysebességgel kell azonosítani.

**279.** A relativisztikus effektusok tárgyalására vizsgáljuk az elektromos mezőt rögzített időpontban, az

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}t$$

síkban, vagyis vizsgáljuk az elektromos térerősséget a  $\mathbf{v}$  sebesség irányára merőleges, a töltést tartalmazó síkban.

Azt találjuk, hogy

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t = 0, \quad s = |\mathbf{r}_2| = r$$

és így

$$E_2^*(\mathbf{r}, t) = \frac{Be}{r^2},$$

vagyis a térerősség  $B$  faktorial nagyobb a nyugvó töltésnek megfelelő térerősségnél.

A longitudinális irányban, azaz ahol

$$\mathbf{r}_2 = 0 \quad \text{és} \quad s = Br,$$

a következő longitudinális elektromos térerősséget kapjuk:

$$E_1^*(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{B^2 r^2},$$

vagyis a longitudinális mező egy  $1/B^2$  faktorial csökken.

Az extrém relativisztikus esetben, ahol  $B \gg 1$ , a töltés által létrehozott mező egy  $\mathbf{v}$  sebességgel a töltéssel együtt mozgó kis tartományban koncentráldik. E mező  $v \sim c$  sebességgel mozog, és majdnem transzverzális, továbbá a mágneses és elektromos térerősségek majdnem egyforma abszolút értékűek.

Látjuk tehát, hogy a nagyon gyorsan mozgó töltés mezője nagyon hasonlóan viselkedik egy, a töltést követő elektromágneses hullámhoz.

E fenti eredmény kísérletileg ellenőrizhető, és az eredményt valóban alátámasztják bizonyos kísérletek, melyek gyors töltött részecskék ütközésével foglalkoznak.\*

**280.** A mozgó részecske töltésének  $e^*$  mértékét a *Gauss*-tétel segítségével definiálhatjuk, mint

$$e^* = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{S}, \quad (65)$$

ahol az integrálást egy rögzített  $t$  időpontban olyan felületre kell kiterjeszteni, amely a mozgó részecskét körülveszi. A (64) egyenletben adott kifejezések segítségével (65)-ből azt kapjuk, hogy

$$e^* = e.$$

A (65) definíció mellett kitartva arra a következtetésre jutunk, hogy a töltés mérőszáma nem változik, ha a részecskét mozgásba hozzuk.

\* JÁNOSY L.: *Cosmic Rays*. Clarendon Press, Oxford, 1950. 2nd ed.





## AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐ RELATIVISZTIKUS EFFEKTUSAI

### A) ELSŐRENDŰ EFFEKTUSOK

**281.** A  $v \ll c$  sebességeknél megfigyelt effektusokat  $v/c$  hatványai szerinti sorfejtéssel elsőrendű, illetve másodrendű vagy magasabb rendű effektusokra oszthatjuk szét. A tényleges relativisztikus effektusok másod- (vagy magasabb) rendűek.

Létezik azonban néhány elsőrendű effektus, melynek elemzése történelmileg nagy jelentőségű volt. Nem vették mindig figyelembe, hogy ezen elsőrendű effektusok mindegyike relativisztikus elképzelések nélkül is magyarázható. Effajta félreértések például a *Doppler*-effektussal (nem a relativisztikus *Doppler*-effektusról van szó), a fényaberrációval és különösen *FIZEAU* kísérletével kapcsolatosan léptek fel. Az utóbbinál a fény terjedési sebességét mozgó közegben meghatározó vizsgálatokra gondolunk.

Találkozunk olyanfajta állításokkal, melyek szerint „a *Fizeau*-féle kísérlet eredménye bizonyítja, hogy sebességeket az *Einstein*-féle összeadási törvény szerint kell összeadni, és a klasszikus összeadási törvény csak közelítőleg érvényes”. Ezt az állítást már a VI. fejezet **208.** pontjában kritika tárgyává tettük. Az elsőrendű effektusok mechanizmusát részletesen tárgyalva megmutatjuk, hogy a *Fizeau*-féle eredmény értelmezhető tisztán klasszikus alapon, relativisztikus fogalmak használata nélkül.

#### 1. AZ EFFEKTÍV TÉRERŐSSÉGEK

**282.** Azt az állítást, hogy az elsőrendű effektusok relativisztikus elképzelések nélkül értelmezhetők, pontosítani kívánjuk. Azt találjuk, hogy az elsőrendű effektusokat helyesen megkapjuk, feltételezve, hogy

(1) ha egy zárt fizikai rendszert  $v$  sebességre felgyorsítunk, akkor a sebességváltozás észrevehető deformáció nélkül történik. E feltételezés magában foglalja, hogy az első közelítésben elhanyagolhatunk olyan másodrendű effektusokat, mint például a hosszkontrakciót vagy az órák lelassulását. Így például az aberráció problémájával foglalkozva fel fogjuk tételezni, hogy a Földön elhelyezett távcső merev testként viselkedik, és amikor a Föld sebessége a pályamozgás folytán változik, a távcső nem szenved deformációt.

(2) Feltételezzük továbbá, hogy egy  $v$  sebességgel mozgó  $Q$  rendszerre  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  térerősséggel rendelkező elektromágneses mező úgy hat, mintha  $Q$  nyugalomban volna, és

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{eff}} &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B}_{\text{eff}} &= \mathbf{B} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

tézerősségekkel rendelkező mezőben volna elhelyezve.

Az (1) formula csak elsőrendű effektusokat ír le. Ezeket a formulákat a *Biot–Savart*-féle törvény és az indukciós törvény segítségével vezethetjük le. Az előbbiből az következik, hogy  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó töltés

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1a)$$

mágneses tézerősséget hoz létre az utóbbiból, hogy viszont egy  $m$  erősségű mágneses pólus egy

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) = -\frac{m}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1b)$$

elektromos tézerősséget hoz létre, ha  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog.

Feltételezve, hogy a hatás és ellenhatás elve érvényben van (legalábbis a  $v/c$  nagyságrendben), (1a)-ból és (1b)-ből az (1) formulát levezethetjük. Megjegyezzük, hogy az elsőrendű effektusokat – mint az aberrációt vagy a *Fizeau*-féle eredményt – a *Lorentz*-transzformáció segítségével sokkal kényelmesebben kapjuk meg, mint az itt következő részletes klasszikus megfontolások alapján. Ennek ellenére szükségesnek tartjuk a klasszikus megfontolások vázolását, megmutatva ezzel, hogy az effektusok a klasszikus megfontolások alapján a relativisztikus megfontolásokat mellőzve is érthetők. Az a tény, hogy ezeket a klasszikusan értelmezhető effektusokat *Lorentz*-transzformáció segítségével is értelmezhetjük, az elmélet ellentmondásmentességét is bizonyítja.

## 2. DIPÓL MEZŐK

**283.** Egy, az  $\mathbf{r} = 0$  pontban elhelyezett dipólus elektromos tézerősségét úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B} = 0, \quad (2a)$$

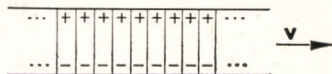
ahol  $\mathbf{p}$  a dipólmomentum. Hasonló módon a mágneses dipóltézerősség:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\text{grad} \frac{\mathbf{m}\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{E} = 0, \quad (2b)$$

ahol  $\mathbf{m}$  a mágneses dipólmomentum.

Mindkét fajta dipólus mozgásban mind elektromos, mind mágneses mezővel rendelkezik. A  $v^2/c^2$  nagyságrendű tagokat elhanyagolva azt találjuk,

hogy az elektromos dipólus elektromos mezője olyan, mintha az eredeti mező a dipólussal együtt mozogna. A mágneses tér komplikáltabb struktúrájú. A mozgó elektromos dipólus mágneses mezőjének a fő (nem relativisztikus) vonását úgy kapjuk meg, hogy nem egyszerűen egy mozgó elektromos dipólust vizsgálunk, hanem egy olyan polarizált szalagot, melynek polarizációja a felületre merőlegesen áll (22. ábra). Ha a szalagot a polarizációra merőleges irányban  $\mathbf{v}$  sebességre felgyorsítjuk, a szalag mágneses mezőt hoz létre, éspedig oly módon, mintha (2b)-nek megfelelő mágneses polarizációval is rendelkezne. Vagyis a mozgó szalag úgy viselkedik, mintha minden eleme egy



22. ábra. Mozgó polarizált szalag sémája

$$d\mathbf{m} = \mathbf{v} \times d\mathbf{p}/c$$

mágneses polarizációval is rendelkezne.

A fenti eredményt azonban elővigyázatosan kell kezelni. Az elektromosan polarizált szalag úgy viselkedik, mintha minden  $dS$  felületelemre merőlegesen egy

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} dS$$

erősségű mágneses dipólus állna. Azonban egy elektromos dipól, ha  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgásba jön, a  $d\mathbf{m}$  mágneses dipólus mezőjétől különböző mezőt hoz létre. A szalagban egymás mellett elhelyezkedett dipólusok mezőjének szuperpozíciója viszont ugyanazt a mezőt adja, mint az ekvivalens mágneses dipólusok szuperpozíciója.

Visszatérve a mozgó polarizált szalag mágneses hatására, megemlítjük, hogy a szalagot úgy is fel lehet fogni, mint  $dS$  keresztmetszetű elektromos dipólusokat

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} dS$$

elektromos dipólmomentummal.

A polarizációnak megfelelő Poisson-töltés  $\pm \mathbf{P}$  felületeltöltésekből áll, így a mozgó szalag felületein ellentétes előjelű konvekciós áramokat hoz létre. Ezen áramok felületi sűrűsége  $\pm |\mathbf{v} \times \mathbf{P}|/c$ , ezek egy olyan mágneses mezőt hoznak létre, mintha a szalag egy

$$\mathbf{M} = \mathbf{v} \times \mathbf{P}/c \quad (2c)$$

mágneses polarizációval rendelkezne.

Hasonló megfontolások alapján egy mágneses polarizációval rendelkező mozgó szalagot vizsgálva azt találjuk, hogy a szalag olyan elektromos mezőt hoz létre, mintha a szalag

$$\mathbf{P} = -\mathbf{v} \times \mathbf{M}/c \quad (2d)$$

elektromos polarizációval rendelkezne.

## B) A NÉGYESÁRAM TRANSZFORMÁCIÓS TULAJDONSÁGAI

**284.** Egyes elektromágneses jelenségek megértéséhez másodrendű effektusokat is figyelembe kell venni. Vizsgáljunk ebből a célból egy állandó  $\rho_0$  sűrűségű elektromos töltéseloszlást. Az áram-töltés sűrűségeloszlást úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{I}_0 = 0, 0, 0, -c \rho_0.$$

A  $\tilde{\Lambda}_v$  transzformáció segítségével  $\mathbf{I}_0$ -ból az eredeti eloszlás egy Lorentz-deformált formáját kapjuk, így

$$\mathbf{I}_0^* = \mathbf{i}, -c \rho,$$

ahol

$$\mathbf{i} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \rho, \quad \rho = B \rho_0.$$

**285.** Egy vezetõben folyó áramot két ellenkezõ elõjelû töltéshalmaz hoz létre. Az egyik elõjelû töltések mozgásban vannak, az ellenkezõ elõjelû töltések pedig nyugalomban, és a két töltéseloszlás sztatikusan egymást kompenzálja. Egy vezetõben fellépõ négyes-áramsűrűségre tehát azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2,$$

ahol

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{i}, -c \rho, \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{0}, c \rho,$$

tehát

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}, 0. \quad (3)$$

A (3) sűrűséghez tartozó deformált sűrűséget pedig úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{I}^* = \mathbf{i}^*, (\mathbf{v}\mathbf{i}) B,$$

ahol

$$\mathbf{i}^* = B \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2, \quad (4)$$

$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  az  $\mathbf{i}$  áramnak a  $\mathbf{v}$  sebességre párhuzamos, illetve merõleges komponenseit jelentik.

Figyelemreméltó az a tény, hogy a semleges négyesáram, melynek sűrűségét a (3) formula adja, olyan deformált négyesáramra vezet, amelyet a (4) formula ad meg, és melyben töltéstöbblet található

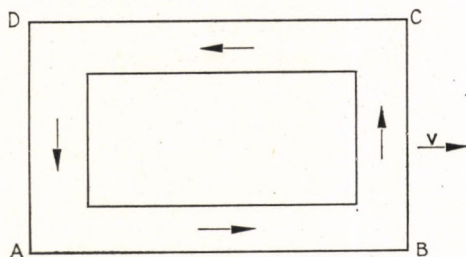
$$\rho^* = -(\mathbf{v}\mathbf{i}) B/c \quad (5)$$

sűrűséggel.

Az (5) formulának az a szokásos magyarázata, hogy a  $\rho^*$  azért lép fel, mert „az egyidejűség a vonatkoztatási rendszertől függ”. Véleményünk szerint egy ilyen kijelentés értelmetlen. Az (5) formula egy egyszerű fizikai tényállásnak felel meg, melyet a következőkben elemzünk.

## 1. ZÁRT ÁRAMKÖR ELEKTROMOS MEZŐJE

**236.** Hogy a  $\rho^*$  töltéstöbblet keletkezésének módját megértsük, vizsgáljunk egy négyszög mentén folyó áramot, úgy, amint ezt a 23. ábra mutatja. Tételezzük fel, hogy addig, amíg a négyszögletes áramkör nyugalomban van, a  $\rho$  sűrűségű töltés  $w$  sebességgel mozog a vezető mentén. Tételezzük fel továbbá, hogy a vezető  $-\rho$  nyugalomban levő töltéssűrűséget is tartalmaz.



23. ábra. Egy  $v$  sebességgel mozgó áramkör sémája

Az így leírt áram tehát a (3) egyenletnek felel meg, és a rendszer csak mágneses mezővel rendelkezik.

Vizsgáljuk most a fent leírt áramkör deformált formáját. Tételezzük fel, hogy a négyszögletes áramkör  $\overrightarrow{AB}$  irányában  $v$  sebességgel mozog. Ebben a deformált konfigurációban a vezetőhöz képest mozgó töltések

$$w_1 = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \quad \text{és} \quad w_2 = \frac{v - w}{1 - \frac{vw}{c^2}}$$

sebességekkel fognak rendelkezni (205. pont (7) formulája). Az  $AB$ , illetve  $CD$  szakaszokban a töltés vezetőhöz viszonyított sebessége tehát

$$W_1 = w_1 - v = \frac{w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{vw}{c^2}},$$

illetve

$$W_2 = w_2 - v = -\frac{w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{vw}{c^2}}.$$

Ha feltételezzük, hogy  $vw > 0$ , azt találjuk, hogy

$$W_1 < W_2,$$

tehát a részecskék a  $C \rightarrow D$  szakaszban a vezetőhöz képest gyorsabban mozognak, mint az  $A \rightarrow B$  szakaszban. Minthogy a töltések nem egyforma

sebességgel mozognak a vezetőben, a töltéssűrűség változik a vezető mentén. Az egységterefogatban található töltés mennyisége a sebességgel fordítottan arányos. (Ezt az effektust a közlekedésben jelentkező dugóval hasonlíthatjuk össze. Ott, ahol a közlekedés lassabban megy, a közlekedési eszközök sűrűsége megnő.) Ennek megfelelően az  $AB$ , illetve  $CD$  szakaszokban a mozgó töltések sűrűsége

$$\rho_1 = \frac{w}{W_1} \rho = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\rho + \mathbf{iv}/c),$$

és

$$\rho_2 = \frac{w}{W_2} \rho = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\rho - \mathbf{iv}/c),$$

ahol

$$\rho \mathbf{w}/c = \mathbf{i}$$

jelölést használtuk. Azt látjuk, hogy az  $AB$ , illetve  $CD$  szakaszok mentén  $\pm \Delta \rho$  töltéssűrűség-különbséget lép fel, melynek nagysága,  $v^2/c^2$  nagyságrendű tagokat elhanyagolva

$$\Delta \rho = \rho^* = \mathbf{iv}/c.$$

A fenti eredményből arra a következtetésre jutunk, hogy ugyanaz az elektromotoros erő, amely az áramkör nyugalomban léte esetén a töltéseket állandó sűrűséggel mozgatja, abban az esetben, ha az áramkör mozgásban van, egyenetlen mozgást hoz létre. Deformált rendszerben egyenetlenül mozgó töltések „közlekedési dugó” módjára többlettöltéseket hoznak létre. Ezek a töltések elektromos mezőt hoznak létre.

**287.** A 23. ábrán vázolt áramkör nagy távolságokra olyan mágneses mezőt hoz létre, amely megfelel  $\mathbf{m}$ , az áramkör síkjára merőleges dipólus mezőjének. Valóban, ha az áramkört  $A \rightarrow B$  irányban  $v$  sebességgel mozgásba hozzuk, akkor  $\pm \Delta \rho$  többlettöltések lépnek fel  $AB$ , illetve  $CD$  mentén, és ezek egy olyan elektromos mezőt hoznak létre, amely az áramkörtől nagy távolságokban a

$$\boldsymbol{\pi} = -\mathbf{v} \times \mathbf{m}/c$$

erősségű dipólus elektromos mezőjének felel meg. Ez az eredmény összhangban van a **283.** pont (2d) formulájával, amely az elektromos és mágneses dipólusok transzformációs tulajdonságait fejezi ki.

A fenti levezetés a relativisztikus sebesség-összeadási formulát használja fel, így tehát a zárt elektromos áram elektromos hatása másodrendű effektusként mutatkozik. A mozgó mágneses dipólus elektromos dipólustere a **283.** pont szerint viszont elsőrendű effektusnak is minősíthető. Ez az összehasonlítás azt mutatja, hogy az első- és másodrendű effektusok megkülönböztetésénél nincsenek éles határvonalak.

## C) TOVÁBBI ELSŐRENDŰ EFFEKTUSOK

### 1. DOPPLER-EFFEKTUS ÉS ABERRÁCIÓ

**288.** Ezek az effektusok a **282.** pont (1) összefüggésének segítségével elsőrendű effektusként tárgyalhatók. Azonban, minthogy mind a *Doppler*-effektusnál, mind pedig az aberrációnál magasabb rendű effektusok is érdekesek, a következőkben a pontos levezetéseket adjuk meg *Lorentz*-deformációkat is figyelembe véve. Könnyen belátható azonban, hogy a *Doppler*-effektus és az aberráció első közelítései kizárólag az (1) képletek használatával, *Lorentz*-transzformáció nélkül is levezethetők.

Vizsgáljunk egy  $K$  koordináta-rendszer origójától nagyon távoli  $A$  pontban fekvő, nyugalomban levő monokromatikus fényforrást. Az  $A$ -ból érkező hullámok  $K$  origója környékén sugárzásmezőt hoznak létre, amely nagyjából síkhullámnak felel meg. A hullámok a *Maxwell*-egyenleteknek eleget tesznek, tehát a

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0 \cos 2\pi(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x} + \Phi) \quad (6)$$

négyespotenciálból levezethetők, ahol  $\Psi_0$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  állandó négyesvektorok, és  $\Phi$  egy állandó.

Ha a (6) kifejezést a *Maxwell*-egyenletekbe behelyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \Psi_0 \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (7)$$

Írjuk, hogy

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\kappa}, \quad -\omega, \quad \omega > 0. \quad (8)$$

(7)-ből és (8)-ból következik, hogy

$$\omega = c\kappa. \quad (9)$$

$\boldsymbol{\kappa}$ -t a hullámterjedési vektornak vehetjük. Azt is írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{k}}{\lambda},$$

tehát  $\mathbf{k}$  az az egységvektor, mely a hullám terjedési irányába mutat.

(6)-ból következik, hogy

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 \sin 2\pi(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x} + \Phi),$$

ahol

$$\mathbf{F}_0 = -2\pi \boldsymbol{\alpha} \times \Psi_0.$$

**289.** Áttérve a fent leírt mező *Lorentz*-deformált konfigurációjára azt a mezőt kapjuk, amely egy  $K$ -hoz viszonyítva  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó,  $A^*$  pontban elhelyezkedő forrásból származik. A **277.** pontban található formulákat felhasználva azt találjuk, hogy

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0^* \sin 2\pi(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Lambda}_{-\mathbf{v}} \mathbf{x} + \Phi), \quad (10)$$

ahol

$$\mathbf{F}_0^* = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{-\mathbf{v}} \mathbf{F}_0 \boldsymbol{\Lambda}_{-\mathbf{v}}. \quad (11)$$

Azt írhatjuk, hogy

$$\alpha \Lambda_{-\mathbf{v}} = \tilde{\Lambda}_{-\mathbf{v}} \alpha = \alpha^*, \quad (12)$$

és így (10) helyett azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0^* \sin 2\pi(\alpha^* \mathbf{x} + \Phi).$$

(11) és (12)-ből azt látjuk, hogy  $\alpha$  és  $\mathbf{F}_0$  a deformációval úgy változik, mint egy négyesvektor, illetve négyestenzor. A deformált hullám hullámhosszát, frekvenciáját és terjedési irányát az

$$\alpha^* = \kappa^*, \quad -\omega^*, \quad \omega^* = c \kappa^* \quad (13)$$

és

$$\kappa^* = \frac{\mathbf{k}^*}{\lambda^*}, \quad \mathbf{k}^{*2} = 1$$

mennyiségek bevezetésével állapíthatjuk meg.

Ha a (12)-be a (13)-at helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= B \kappa_1^* + \kappa_2^* - B \mathbf{v} \omega^*/c^2, & (a) \\ \omega &= B(\omega^* - \mathbf{v} \kappa^*), & (b) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ahol  $\kappa_1^*$  és  $\kappa_2^*$   $\kappa^*$ -nek  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos, illetve merőleges komponenseit jelentik.

## 2. A DOPPLER-EFFEKTUSBAN FELLEPŐ FREKVENCIÁK

**290.** A (14a) egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve és figyelembe véve, hogy

$$\kappa_1^* \kappa_2^* = \kappa_2^* \mathbf{v} = 0,$$

azt találjuk, hogy

$$\kappa^2 = \kappa^{*2} \left[ B^2 \left( \cos \vartheta^* - \frac{v}{c} \right)^2 + \sin^2 \vartheta^* \right], \quad (15)$$

ahol

$$\kappa^* \mathbf{v} / \kappa^* v = \cos \vartheta^*,$$

tehát  $\vartheta^*$  a  $\kappa^*$  és  $\mathbf{v}$  közötti szöveget jelenti.  $B$  és  $v/c$  közötti összefüggést figyelembe véve (15) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\kappa = \kappa^* B \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta^* \right). \quad (16)$$

(9)-ből és (13)-ból tovább következik, hogy

$$\omega^* = \omega \kappa^* / \kappa$$



és így (16) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\omega^* = \frac{\omega/B}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta^*}. \quad (17)$$

A (14) egyenlet inverz kifejezéséből kiindulva a (17) helyett hasonló eljárással az következők, hogy

$$\omega = \frac{\omega^*/B}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}, \quad (18)$$

ahol  $\vartheta$  a  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok közötti szög. A (17) egyenlet a *Doppler-effektus* frekvencia-eloszlását adja meg. E kifejezés azonos a fenomenológiai megfontolások alapján a 38. pontban kapott kifejezésekkel.

### 3. AZ ABERRÁCIÓ

**291.** A (17) és (18) egyenleteket egymással megszorozva azt találjuk, hogy

$$1/B^2 = \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta^*\right),$$

tehát

$$\cos \vartheta^* = \frac{\cos \vartheta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (19)$$

Ez utóbbi kifejezés

$$\sin \vartheta^* = \frac{\sin \vartheta/B}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}$$

formában is írható, és a  $v/c$ -ben magasabb rendű tagokat elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$\Theta = \vartheta - \vartheta^* \sim \frac{v}{c} \sin \vartheta, \quad (20)$$

ahol  $\Theta$  az aberrációs szög. A 293. pontban e formulának az értelmezésére visszatérünk.

#### 4. A DOPPLER-EFFEKTUSBAN FELLÉPŐ INTENZITÁSOK

**292.** A mozgó forrásból kibocsátott fényintenzitás eloszlását úgy határozzuk meg, hogy a deformált hullám energiaáramlását számítjuk ki.

Egy nyugalomban levő forrásból származó térerősséget

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\pi} A, \quad \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (21)$$

formában írhatjuk fel, ahol  $\boldsymbol{\pi}$  a polarizáció irányába mutató egységvektor, tehát

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{k} = 0, \quad \boldsymbol{\pi}^2 = \mathbf{k}^2 = 1,$$

és  $A$  a hullám amplitúdója. A hullámvonalat intenzitását az energiasűrűségével jellemezhetjük, tehát

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{A^2}{4\pi} \quad (22)$$

a deformált hullámvonalat energiasűrűsége pedig

$$u^* = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^{*2} + \mathbf{B}^{*2}) = \frac{A^{*2}}{4\pi}. \quad (23)$$

Ha most behelyettesítjük az  $\mathbf{E}^*$ - és  $\mathbf{B}^*$ -re adódó kifejezéseket a **277.** pont (61) formulájából, akkor (23) segítségével rövid számítás eredményeként azt kapjuk, hogy

$$A^*/A = B \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right), \quad \cos \vartheta = \mathbf{v} \mathbf{k} / v.$$

Ha (21) kifejezés helyett

$$\mathbf{E}^* = \boldsymbol{\pi}^* A^*, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*, \quad \cos \vartheta^* = \mathbf{k}^* \mathbf{v} / v$$

ből indulunk ki, és ha  $\mathbf{E}$ -t és  $\mathbf{B}$ -t  $\mathbf{E}^*$  és  $\mathbf{B}^*$  segítségével fejezzük ki, (22) és (23) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\frac{A^*}{A} = \frac{1}{B \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta^* \right)}.$$

E fenti kifejezés a deformált hullám intenzitását a beesési szög függvényében adja meg. Szélső esetekben azt találjuk, hogy

$$\frac{A^*}{A} = \begin{cases} B \left( 1 + \frac{v}{c} \right), & \vartheta = 0, \\ \frac{1}{B \left( 1 + \frac{v}{c} \right)}, & \vartheta^* = \pi. \end{cases}$$

Az extrém relativisztikus esetben pedig

$$\left(\frac{A^*}{A}\right)^2 \sim \begin{cases} 4B^2, & \vartheta = 0 \\ \frac{1}{4B^2}, & \vartheta^* = \pi. \end{cases} \quad (24)$$

Az extrém relativisztikus esetben tehát, ha  $v \sim c$ ,  $B \gg 1$ , akkor (24)-ből az következik, hogy a sugárzás intenzitása majdnem minden irányban nagyon kicsi lesz, kivételt képez egy kiszűrésű kúp, amelynek tengelye  $\mathbf{v}$  irányában fekszik; ebben a kúpban igen nagy intenzitások lépnek fel.

## 5. A CSILLAGFÉNY ABERRÁCIÓJA

**293.** Az előbbi fejezet eredményei azt az  $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}^*$  változást tárgyalják, amely akkor következik be, ha egy fényforrás adiabatikus gyorsulásnak van alávetve, és  $\mathfrak{S}$ -ből  $\mathfrak{S}^*$ -gá változik. A csillagok aberrációja azonban úgy jön létre, hogy az égbolton a Föld pályasebességének változásával összefüggően a csillagok változtatják látszólagos helyzetüket. Ezekben a megfigyelésekben nem az  $\mathfrak{S}$  forrás deformálódik, hanem  $\mathfrak{D}$ , a megfigyelés eszköze, minthogy Lorentz-deformációt szenved, változik.

Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a  $t = 0$  időpontban az eszköz konfigurációja  $\mathfrak{D}_0$ , és ez a konfiguráció a  $t$  időpontban a

$$\mathfrak{D}_0^* = \mathfrak{L}_v(\mathfrak{D}_0)$$

konfigurációba megy át, ahol  $\mathfrak{L}_v$  a Lorentz-transzformáció, amely a Föld mozgásának sebességváltozása által létrehozott deformációt írja le.

Az  $\mathfrak{F}$  sugárzást megfigyelve  $\mathfrak{F}$ -nek  $\mathfrak{D}_0$ -ra való hatását összehasonlítjuk  $\mathfrak{F}$ -nek  $\mathfrak{D}_0^*$ -ra gyakorolt hatásával. Azonban e megfigyeléseket különböző  $K$  és  $K'$  vonatkoztatási rendszerekhez viszonyítva végezzük, úgy, hogy az első megfigyelés alkalmával az eszköz  $K$ -hoz, a második megfigyelés alkalmával pedig  $K'$ -höz viszonyítva van nyugalomban. Így tehát összehasonlítjuk

$$\mathbf{F} = K(\mathfrak{F}) \quad Q_0 = K(\mathfrak{D}_0)$$

-ra való hatását az

$$\mathbf{F}' = K'(\mathfrak{F}) \quad Q_0^* = K'(\mathfrak{D}_0^*)$$

-ra való hatásával. Minthogy  $K$ -t és  $K'$ -t úgy választottuk, hogy  $\mathfrak{D}_0$ , illetve  $\mathfrak{D}_0^*$  ezekhez képest nyugalomban van, ezért

$$Q_0^* = Q_0.$$

Tehát amit megfigyelünk, az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{F}'$  hatásai olyan készülékekre, amelyek látszólagosan ugyanazzal a konfigurációval rendelkeznek. A megfigyelő szempontjából tehát úgy tűnik, mintha nem a készülék változott volna  $\mathfrak{D}_0 \rightarrow \mathfrak{D}_0^*$ -ra, hanem a sugárzás

$$\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{L}_{-v}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^*$$

módon változott volna meg. Ily módon annak ellenére, hogy azt az esetet

tárgyaljuk, amelyben nem a forrás, hanem a megfigyelési eszköz változtatja mozgásállapotát, mégis a **233.** pontban leírt formulákat használhatjuk, amelyek a mező változását adják meg, ha a forrás mozgásba jön.

Így tehát a **291.** pont (20) egyenletéből kiszámítható egy csillag helyzetének látszólagos változása, amelyet megfigyelünk a Föld pályasebesség-változása és a megfigyelési eszköz ezzel összefüggő változásának következményeként.

A **291.** pontban szereplő (20) formula félreértésre adott alkalmat\* az irodalomban; ezért a következő megjegyzést fűzzük hozzá.\*\*

A  $v$  sebesség a forrás és megfigyelő közötti *relatív sebességet* jelenti, azonban a 30-as években a következő helytelen megfontolást alkalmazták ezzel kapcsolatban.

Ha egy kettős csillag aberrációját megfigyeljük, akkor a sebesség erősen változik a két csillag egymás körüli keringése folytán, és ezért az aberrációs szög — a (20) formula szerint — erős változást szenvedne a keringés tartama alatt. Amennyiben ez az effektus valóban fellépne, akkor a távoli kettős csillagok esetében az aberráció folytán a pálya rendkívüli mértékben felnagyítva jelenne meg. A valóságban a kettős csillagokat megfigyelve ilyen pályaváltozást nem észleltek.

Valójában azonban ez az effektus az elméletből nem is következik. A (20) egyenlet akkor érvényes, ha a forrás és a megfigyelő *egyenletes* sebességgel mozognak. Komplikáltabb mozgás esetén a következő megfontolás érvényes: a  $t$  pillanatban a forrásból származó fény egy  $\mathbf{R}(t)$  pont irányából érkezik, ahol

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_{cs}(t') - \mathbf{r}_M(t), \quad |t - t'| = R/c,$$

ahol  $\mathbf{r}_{cs}(t')$  és  $\mathbf{r}_M(t)$  a csillag  $t'$  pillanatban, illetve a megfigyelő  $t$  pillanatban elfoglalt helyének helyzetvektora. Ebből látszik, hogy mivel zárt pálya esetében  $\mathbf{r}_{cs}(t')$  (bármilyen nagy  $t$  és  $t'$  között a különbség) mindig a pálya egy pontjának a helyzetvektora, ezért  $\mathbf{R}(t)$  mindig a zárt pálya egy pontja felé mutat. Így az aberráció a mozgás fázisát erősen változtatja, azonban a pálya megfigyelt átmérőjét nem változtatja meg.

Az  $\mathbf{r}_M$  időfüggése azt eredményezi, hogy a nem egyenletesen mozgó megfigyelő esetében a dupla csillag *mint egész* aberrációs elmozdulást mutat.

**294.** Látnunk kell azonban, hogy jelentős különbség áll fenn olyan két folyamat között, amelynek egyikében a forrást hozzuk mozgásba, a másikban pedig a megfigyelés eszközét mozgatjuk. Az előbbi folyamatnál a forrás gyorsítása közben egy különleges tranziens sugárzás lép fel. A megfigyelt sugárzás csak a tranziens folyamat befejeződése után írható le az  $\mathbf{F}^*$  mértékkel. Ha azonban nem a fényforrást, hanem a  $\mathcal{Q}$  észlelési eszközt gyorsítjuk, a sugárzás hatásváltozása gyakorlatilag rögtön bekövetkezik. (Az eszköz deformációjának relaxációs idejét — amelyről a **195.** pontban szó volt — gyakorlatilag elhanyagolható rövid periódusnak vehetjük.)

A fenti megfontolásokat más módon is megfogalmazzuk abból a célból, hogy alátámasszuk azt az állításunkat, hogy az aberráció jelensége relativisztikus elképzelések nélkül is érthető.

\* GRIMSEHL: Lehrbuch der Physik 3. kötet 286. o.

\*\* Lásd részletesebben L. JÁNOSSY: Acta Phys. Hung. 31, 353, 1972.

Egy észlelési eszközt sugárzásmezőbe helyezve az eszköz segítségével vég-eredményben a *Poynting*-vektor,

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

irányát határozzuk meg. Ha az észlelési eszközt  $\mathbf{v}$  sebességre felgyorsítjuk, a már mozgó készülék úgy reagál az elektromágneses mezőre, mintha a tér-erősségek az (1) formula által adott  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{eff}}$  értékét vennék fel, tehát a műszer nem a  $\mathfrak{S}$  *Poynting*-vektor irányát, hanem

$$\mathfrak{S}_{\text{eff}} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_{\text{eff}} \times \mathbf{B}_{\text{eff}})$$

irányát fogja kimutatni. A  $\mathfrak{S}$  és  $\mathfrak{S}_{\text{eff}}$  közötti szög, a  $\mathfrak{S}_{\text{eff}}$ -t az (1) formula segítségével kifejezve (magasabb rendű tagok elhanyagolása mellett), az aberrációs szöggel egyenlőnek adódik.

A fizikai folyamat világosabb megértése céljából vegyük azt az esetet, ahol a csillagot egy kis átmérőjű hosszú fémcsőön keresztül figyeljük meg. A cső hullámvezetőként viselkedik, és a csillagból eredő fényhullámok csak akkor képesek a csőön keresztülhaladni, ha a cső a  $\mathfrak{S}$  irányában fekszik. A cső más irányban való elfordításakor, falain az elektromos térerősség által létrehozott áramok hőt fejlesztenek, és a hullám kioltódik. Ha a cső  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog, akkor a hővesztéseket nem az  $\mathbf{E}$ , hanem az  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  okozza. Ebből látható, hogy a csövet a  $\mathfrak{S}_{\text{eff}}$  irányában kell beállítani ahhoz, hogy a mozgó cső a hullámot átengedje.

A fémcső helyett bármilyen más optikai készüléket is használhatunk, így például egy távcsövet, vagy — miként azt BRADLEY tette — egy vízzel töltött távcsövet is. Bármilyen optikai készülék a  $\mathfrak{S}_{\text{eff}}$  irányát fogja meghatározni.

Megjegyezzük, hogy az (1) — az effektív térerősséget megállapító — formulában értelemszerűen  $c$  a  $c'$  kritikus sebességet jelenti, minthogy az (1) formula levezetésében a *Biot—Savart*-törvényt használtuk fel, amelyben a kritikus sebesség értéke szerepel. (Lásd a 14. pontot.) Ily módon a csillag aberrációja segítségével nem annyira a fény sebességét, hanem a kritikus sebességet állapítjuk meg.

A fenti megfontolások nagyon elemiek, azonban mégis szükségesnek találtuk ezek ismertetését, mivel az irodalomban e tárggyal kapcsolatban félreértésekkel találkozunk. (Lásd 293. lábjegyzetét.)

## 6. FÉNYTERJEDÉS FÉNYTÖRŐ KÖZEGBEN

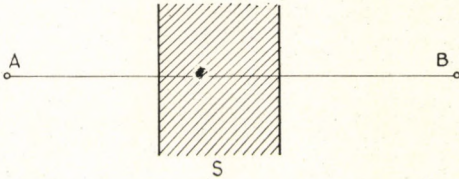
**295.** Vizsgáljunk egy  $A$  fényforrást és  $l$  távolságban  $B$  pontban egy indikátort. Amennyiben a  $t = 0$  időpontban  $A$ -ból fényemisszió indul meg, az emisszió  $t = l/c$  időpontban éri el az indikátort. Ez belátható, ha a retardált

$\Psi(\mathbf{x})$  potenciált — amelyet  $A$  forrás  $B$  pontban létrehoz — kiszámítjuk. Azt kapjuk, hogy

$$\Psi(\mathbf{r}_B, t) = 0, \quad \text{ha } t < \frac{l}{c},$$

ahol  $\mathbf{r}_B$  a  $B$  pont koordinátavektora, és  $l = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$ .

**296.** Az  $A$  és  $B$  pontok közé egy fénytörő  $S$  paralel lemezt helyezve (24. ábra), amint ezt tapasztalatból is tudjuk, az emisszió a  $B$  pontot egy  $t_1 > t$  időpontban éri el. A késést a hullámoknak az  $S$ -en keresztülhaladása okozza.



24. ábra. Hullámok haladása fénytörő médiumon keresztül

E jelenség megvilágítása érdekében megjegyezzük, hogy az  $A$ -ból származó retardált hatás pontosan  $t = l/c$  időpontban érkezik  $B$ -be, mint ahogyan ez a  $\Psi(\mathbf{x})$  explicit kifejezésből kitűnik. A megfigyelt késést azonban az

$S$ -ben meginduló szekunder folyamatok okozzák.

Amennyiben az  $A$ -ból származó sugárzás  $S$ -re esik,  $S$  atomjai oszcillálni kezdenek, és szekunder sugárzást bocsátanak ki, s így a primer hullám,  $S$ -en áthaladva, az  $S$ -ben keltett szekunder hullámok kíséretében kerül ki  $S$ -ből. A következőkben kimutatjuk, hogy a primer hullámot kísérő szekunder hullámok egy  $\Delta t = t_1 - t$  időtartam alatt interferencia által egymást kioltják. Így tehát  $B$ -ben az  $A$ -ból származó sugárzás hatása csak a  $t_1 = t + \Delta t$  időpontban válik érezhetővé, akkor, amikor az interferencia feloldódik.

**297.** A fenti folyamat sematikus matematikai tárgyalását a következőképpen végezhetjük el: Legyen  $A$  egy  $S$ -től távoli bal oldali pont. Az  $S$ -ben létrehozott hullám a következő egyenleteknek tesz eleget:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = -4\pi \mathbf{i}_{\text{eff}},$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = -4\pi \rho_{\text{eff}}, \quad (25)$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0.$$

Ha  $S$  egy töltésmentes dielektrikum, akkor feltételezhetjük, hogy

$$\mathbf{i}_{\text{eff}} = \text{rot } \mathbf{M} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{P}}, \quad (26)$$

és amennyiben nem túl nagy térerősségeket tételezünk fel,

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi' \mathbf{B}, \quad \chi' = \frac{\chi}{\mu}. \quad (27)$$

Ha a dielektrikum homogén, akkor azt is feltételezhetjük, hogy

$$\text{grad } \chi' = \text{grad } \kappa = 0 \quad (S\text{-en belül}),$$

és

$$\text{div } \mathbf{E} = \kappa \text{ div } \mathbf{P} = 0 \quad \text{és} \quad \rho_{\text{eff}} = 0,$$

így tehát (25) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} &= -\frac{4\pi\kappa}{c} \dot{\mathbf{E}} - 4\pi\chi' \text{ rot } \mathbf{B}, & (a) \\ \Phi = 0, \quad \text{div } \mathbf{A} &= 0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Ha most  $\mathbf{E}$ -t és  $\mathbf{B}$ -t potenciálok segítségével írjuk fel (lásd 254. pont (11)), azt találjuk, hogy

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}},$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A},$$

és (28a) helyett írhatjuk, hogy

$$(1 - 4\pi\chi') \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1 + 4\pi\kappa}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0,$$

vagy

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{V^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0, \quad (29)$$

ahol

$$V = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\kappa, \quad \mu = \frac{1}{1 - 4\pi\chi'}.$$

Látjuk tehát, hogy az állandó fázissal rendelkező felületek  $S$  belsejében  $V < c$  sebességgel haladnak.

Hangsúlyozni kell azonban, hogy az  $S$ -ben fellépő sugárzás a beeső primer hullám és az  $S$  atomjai által keltett szekunder hullámok szuperpozíciójából áll. A szekunder sugárzást az atomokban fellépő, a (26)-ban megadott áramok szolgáltatják.

Az összetett hullám határfelülete ezek szerint egy  $V < c$  sebességgel hatol  $S$ -be. Létezik tehát egy olyan tartomány, amelyben a primer sugár (amely  $c$  sebességgel halad) már behatolt, azonban az összetett hullám még nem. Ez a tartomány, amelyben a szekunder hullámok a primer hullámot pontosan kioltják. E tartomány létezését a (29) megoldásából láthatjuk, amely egyetlen az összes forrásokból származó sugárzást leírja.

A Maxwell-egyenletek megoldását az  $S$ -től jobbra fekvő tartományban számítva ki, azt látjuk, hogy ebben a tartományban egy késleltetett síkhullám található. A késleltetett hullám  $c$  sebességgel halad, de csak akkor indul el, amikor az összetett hullám  $S$  jobb oldali felületét elérte.

a) *Diszperzió*

**298.** A fenti megmondolás matematikailag egzakt, de mégsem adja meg a jelenség egészét. A tapasztalat azt mutatja, hogy egy törésmutatóval rendelkező anyagban a hullámfelületek sebességét

$$V = c/n(\omega)$$

adja meg, ahol  $n(\omega)$  a geometriai optikából megállapított törésmutató  $\omega$  frekvencia esetében. A fenti megmondolások csak addig egyeznek meg a megfigyeléssel, ameddig

$$n(\omega) \sim \sqrt{\mu\varepsilon}.$$

Ez az összefüggés csak nagyon alacsony frekvenciák esetében áll fenn.

**299.** A fenti számítás és megfigyelés közötti eltérés oka a (27) formulában foglalt polarizációval kapcsolatos helytelen feltételezés az elektromos polarizációra vonatkozóan. Ha az  $\mathbf{E}$  térerősséget bekapcsoljuk, e térerősség nem polarizálhatja az atomokat rögtön. Bizonyos idő telik el addig, amíg az elektrosztatikus erő az atomokban elhelyezkedő elektronok tehetetlenségét leküzdí, és azokat végleges állapotukba mozgatja el. A tehetetlenség bevezetésére első közelítésben feltételezhetjük, hogy a (27) egyenletet a

$$\ddot{\mathbf{P}}/\omega_0^2 + \mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \quad (30)$$

egyenlettel kell helyettesíteni, ahol  $\omega_0$  az elektronokat harmonikusan kötő erőknek megfelelő frekvenciát jelenti.

A (30) kifejezést SOMMERFELD adta meg először. Hasonló kifejezést alkalmazhatunk  $\mathbf{M}$  és  $\mathbf{B}$  kapcsolatára, azonban — minthogy itt úgyis egy kvalitatív leírásra szorítkozunk — az egyszerűség kedvéért egy nem mágneses anyagot tárgyalunk, úgy, hogy  $\mu = 1$  vagy  $\chi = 0$ .

**300.** Amennyiben a (27) egyenletet (30)-cal helyettesítjük, és feltételezzük, hogy  $\mathbf{M} = 0$ ; azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{i}_{\text{eff}} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{P}}.$$

Ebből következik, hogy

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{P}}. \quad (31)$$

(30) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$-\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\kappa} (\ddot{\mathbf{P}}/\omega_0^2 + \mathbf{P}),$$

és ha (31)-et  $t$  szerint differenciáljuk, akkor

$$\nabla^2 (\ddot{\mathbf{P}}/\omega_0^2 + \mathbf{P}) - \frac{1}{c^2} (\overset{\text{(IV)}}{\mathbf{P}}/\omega_0^2 + \ddot{\mathbf{P}}) = \frac{4\pi\kappa}{c^2} \ddot{\mathbf{P}},$$



ahol

$$(IV) \quad \mathbf{P} = \frac{\partial^4 \mathbf{P}}{\partial t^4}.$$

Fenti összefüggés  $\mathbf{P}$ -re vonatkozó negyedrendű differenciálegyenletet ad. Síkhullám-megoldásokat kapunk, úgy, hogy

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \cos(\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega t),$$

$$K^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{4\pi\kappa\omega^2}{c^2} = 0,$$

$$K^2 = \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4\pi\kappa\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

és így a haladási sebességre azt kapjuk, hogy

$$V(\omega) = \frac{\omega}{K} = \frac{c \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}{\sqrt{\varepsilon - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

Látjuk tehát, hogy az atomi elektronok tehetetlenségét figyelembe véve, a diszperzióknak legalább kvalitatíve helyes leírását kapjuk.

További egyszerű számítás alapján azt kapjuk, hogy  $t \rightarrow t_1$  intervallumban, vagyis a primer hullám érkezése és az összetett hullám érkezése közötti időtartamban a szekunder hullámok nem oltják ki egészen pontosan a primer hullámot, ha a szekunder hullámok keltésében figyelembe vesszük az elektronok tehetetlenségét. Így egy „Vorläufer”-nek nevezett jelenséghez jutunk. Arra következtetünk, hogy az összetett hullám érkezése előtt bizonyos kis sugárintenzitás érkezik. Annak ellenére, hogy ez a jelenség bizonyára létezik, okunk van annak feltételezésére, hogy ez a jelenség a gyakorlatban nem figyelhető meg. Erre a kérdésre nem térhetünk ki részletesen.

## 7. A FIZEAU-FÉLE KÍSÉRLET

**301.** A *Maxwell*-egyenletekből megkaptuk tehát a  $V(\omega) = c/n(\omega)$  fázis-sebességet, amellyel egy hullám törésmutatóval rendelkező közegen halad keresztül. Vizsgáljunk a következőkben egy  $S$  testet, amelyen keresztül  $\omega$  frekvenciájú fény  $V(\omega)$  sebességgel halad.

A *Lorentz*-elv segítségével arra a következtetésre jutunk, hogy amennyiben az  $S^*$  test  $S$ -hez képest  $\mathbf{v}$  sebességgel mozog, egy  $\omega^*$  frekvenciával rendelkező hullám

$$\mathbf{V}^*(\omega^*) = \mathbf{V}(\omega) \hat{+} \mathbf{v}$$

sebességgel fog haladni a mozgó testben. A fenti formula a **207.** pontban levő (9) formula szerint értelmezendő.

Feltételezve, hogy  $\mathbf{v}$   $\mathbf{V}$ -vel párhuzamos, azt találjuk, hogy

$$V^*(\omega^*) = \frac{v + V(\omega)}{1 + \frac{vV(\omega)}{c^2}};$$

és ha  $v/c$ -ben a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk, azt találjuk, hogy

$$V^*(\omega^*) = V(\omega) + v \left( 1 - \frac{1}{n^2(\omega)} \right),$$

és

$$\omega^* = \frac{\omega}{1 - \frac{v}{c}}$$

az a frekvencia, amellyel a fény a mozgó test atomjaira közvetlenül hat.

Tehát az  $\omega$  frekvenciával rendelkező hullám terjedési sebessége,  $v$  sebességgel mozgó közegben,

$$V^*(\omega) = V(\bar{\omega}) + v \left( 1 - \frac{1}{n^2(\bar{\omega})} \right), \quad (32)$$

$$\bar{\omega} = \omega \left( 1 - \frac{v}{c} \right)$$

szerint adódik. A (32) összefüggés arra a feltételezésre épül, hogy mind az elektromágneses mező mozgása, mind e mező kölcsönhatása az atomokkal  $S$ -ben és  $S^*$ -ban a Lorentz-elvnek megfelelően történik.

A (32) egyenlet jelentőségével kapcsolatosan félreértések jelentkeztek egyes szerzőknél (lásd VI. fejezet **208.** pontját). Megjegyezzük továbbá, hogy a (32) összefüggésben leírt effektus  $v/c$  nagyságrendű, tehát egyáltalán nem relativisztikus effektus.

**302.** A következőkben megmutatjuk, hogy a (32) egyenletet a Maxwell-egyenletekből relativisztikus megfontolás nélkül is levezethetjük. Az  $S^*$  atomjai  $v$  sebességgel mozognak, tehát ezek az atomok úgy viselkednek, mintha egy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{eff}} &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B}_{\text{eff}} &= \mathbf{B} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

mező hatása alatt lennének. A polarizációs állandókat  $\kappa$ -nak és  $\chi'$ -nek nevezük, és így a mozgó atomok polarizációját

$$\mathbf{P}_0 = \kappa \mathbf{E}_{\text{eff}}, \quad \mathbf{M}_0 = \chi' \mathbf{B}_{\text{eff}} \quad (34)$$

adja meg. A 283. pont eredményeiből azt látjuk még, hogy a  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó polarizált anyag egy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{M}_0), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0 - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{P}_0) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

polarizációkkal rendelkező nyugvó anyagnak felel meg. A (33), (34) és (35) segítségével azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \kappa \mathbf{E} + \frac{\kappa + \kappa'}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\kappa'}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \\ \mathbf{M} &= \kappa' \mathbf{B} - \frac{\kappa + \kappa'}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \frac{\kappa}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

$\mathbf{E}$ -t és  $\mathbf{B}$ -t az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciál segítségével fejezhetjük ki, így

$$\mathbf{i}_{\text{eff}} = \text{rot } \mathbf{M} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{P}}$$

szintén  $\mathbf{A}$  és deriváltjai segítségével állítható elő. Ily módon a hullám-egyenlet

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = -4\pi \mathbf{i}_{\text{eff}} \quad (36)$$

egy kizárólag  $\mathbf{A}$  változót tartalmazó egyenletre vezethető vissza. Feltételezve, hogy  $\mathbf{A}$  egy síkhullám vektorpotenciálja, tehát

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega t). \quad (37)$$

(36) és (37) segítségével a hullám amplitúdójára kapunk egy egyenletet. Feltételezve, hogy  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{v}$  párhuzamos, a következő összefüggésre jutunk:

$$V^2 - 2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) vV - V_0^2 = 0, \quad (38)$$

ahol  $V = \omega/K$  a hullám terjedési sebessége a mozgó közegben, és

$$V_0 = c/n, \quad n^2 = \epsilon\mu;$$

$v^2/c^2$  nagyságrendű tagokat elhagyva (38)-ból a

$$V = \frac{c}{n} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) v \quad (39)$$

egyenlet következik. A (39) összefüggés megegyezik a más módon levezetett eredménnyel.

Látjuk tehát, hogy egy mozgó közegen áthaladó elektromágneses hullámok haladási sebessége a *Maxwell*-egyenletekből kiszámítható. E számítás

során figyelembe kell venni, hogy a primer hullám mozgó atomokra hat, és a primer hullámmal interferáló szekunder hullámokat mozgó atomok bocsátják ki.

A fenti meggondolásokat könnyen kiterjeszthetjük arra az esetre is, amelyben az atomok elektronjainak tehetetlenségét is figyelembe vesszük, mint ahogy ez a 299. pontban is történt. Ebben az esetben a diszperzió hatása megváltoztatja a kifejezéseket, és (37) formula helyett a 32. pontban levő formulához jutunk.

Látjuk tehát, hogy (39) kifejezés, amely az elektromágneses hullámok mozgó anyagban fellépő terjedési sebességét adja meg — tisztán elektromágneses meggondolásokból — relativisztikus effektusok figyelembevétel nélkül is levezethető.

## D) MÁSODRENDŰ EFFEKTUSOK

### 1. A TÖLTÉS HATÁSA SAJÁTMAGÁRA

**303.** MAXWELL egyenletei segítségével kiszámítható az az erő, amellyel egy elektromos töltés saját magára hat. Vizsgáljunk egy  $e$  töltést, mely  $t = 0$  pillanatban nyugalomban van. A töltésnek megfelelő töltéeloszlást  $\rho(\mathbf{r})$  eloszlásfüggvény adja meg. Legyen az eloszlásfüggvény olyan, hogy

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = e \quad \text{és} \quad \rho(\mathbf{r}) = 0, \quad r > a,$$

tehát egy  $a$  sugarú gömb tartalmazza a töltést.

Az eloszlás által létrehozott  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  térerősséget ki tudjuk számítani, és ennek segítségével azt az erőt, amellyel a töltés saját magára hat.

Ezt az erőt

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (40)$$

adja meg. Ha a töltés nyugalomban van, ezen erő értéke szimmetria okokból eltűnik.

**304.** Kiszámítjuk a részecske mezőjét abban az esetben ha a részecske gyorsul de a  $t = 0$  pillanatban sebessége nulla. Így tehát a részecske sebessége, illetve elmozdulása kis  $t$  értékekre

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} t, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} t^2.$$

Ha feltételezzük, hogy a részecske merev testként mozog, a töltés-, illetve áramsűrűség eloszlását  $t$  időben úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{v}} t \rho \left( \mathbf{r} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} t^2 \right) / c,$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho \left( \mathbf{r} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} t^2 \right).$$

E források a 257. pont (17) egyenlete szerint

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \int \frac{\left(t - \frac{R}{c}\right) \varrho \left(\mathbf{r} + \mathbf{R} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} \left(t - \frac{R}{c}\right)^2\right)}{R} d^3 \mathbf{R}$$

vektorpotenciált hoznak létre, ahol  $t' = t - \frac{R}{c}$ .

Ha  $t$  szerint differenciálunk, és az  $1/c^3$  nagyságrendű vagy kisebb tagokat elhanyagoljuk, azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \Phi_0(\mathbf{r}),$$

ahol

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r} + \mathbf{R})}{R} d^3 \mathbf{R}.$$

Hasonló módon

$$\Phi(\mathbf{r}, 0) = \int \frac{\varrho \left(\mathbf{r} + \mathbf{R} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} R^2/c^2\right)}{R} d^3 \mathbf{R},$$

és ismét a magasabb rendű tagokat elhanyagolva

$$-\text{grad } \Phi(\mathbf{r}, 0) = - \int \frac{\partial \varrho \left(\mathbf{r} + \mathbf{R} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} R^2/c^2\right)}{\partial \mathbf{r}} \frac{d^3 \mathbf{R}}{R} \quad (41)$$

Az integrandust  $\mathbf{R}$  hatványai szerint sorba fejthetjük, és így

$$\begin{aligned} \text{grad } \varrho \left(\mathbf{r} + \mathbf{R} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} R^2/c^2\right) &= \text{grad } \varrho(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - \\ &-\frac{1}{2} \frac{R^2}{c^2} \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial^2 \varrho(\mathbf{r} + \mathbf{R})}{\partial R^2} + \text{kisebb tagok} \end{aligned} \quad (42)$$

egyenletre jutunk. Amennyiben a (42)-t (41)-be behelyettesítjük, és kétszer parciálisan integrálunk, akkor a kis tagokat újra elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$-\text{grad } \Phi(\mathbf{r}, 0) = -\text{grad } \Phi_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \int \frac{\mathbf{R} \circ \mathbf{R} \varrho(\mathbf{r} + \mathbf{R})}{R} d^3 \mathbf{R},$$

tehát a gyorsuló részecske által létrehozott mező

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \int \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{R} \circ \mathbf{R}}{2R^2}\right) \frac{\varrho(\mathbf{r} + \mathbf{R})}{R} d^3 \mathbf{R},$$

ahol

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi_0(\mathbf{r})$$

a nyugalomban levő részecske mezőjét jelenti.

**305.** Ha az egész részecskére integrálunk és (40)-et figyelembe vesszük, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F}^{(s)} = \int \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = -\frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \mathbf{U},$$

ahol

$$\mathbf{U} = \iiint \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{R} \circ \mathbf{R}}{2R^2} \right) \frac{\varrho(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \varrho(\mathbf{r})}{R} d^3 \mathbf{R} d^3 \mathbf{r}. \quad (43)$$

$\mathbf{U}$  egy mátrix, melynek elemei energiadimenziójúak.

**306.** Könnyen beláthatjuk, hogy  $\mathbf{U}$  mátrix elemei olyan nagyságrendűek, mint

$$U_0 = \frac{1}{2} \iiint \frac{\varrho(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \varrho(\mathbf{r})}{R} d^3 \mathbf{R} d^3 \mathbf{r},$$

ahol  $U_0$  a töltés elektrosztatikus energiája.

A töltés mozgásegyenletét tehát úgy írhatjuk, hogy

$$m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^{(\text{out})} + \mathbf{F}^{(s)}, \quad (44)$$

ahol  $\mathbf{F}^{(\text{out})}$  a külső erőt és  $\mathbf{F}^{(s)}$  pedig azt az erőt jelenti, amellyel a töltés önmagára hat. A (43)-at (44)-be helyettesítve azt találjuk, hogy

$$\left( m \mathbf{1} + \frac{\mathbf{U}}{c^2} \right) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^{(\text{out})}. \quad (45)$$

A külső erő a töltött részecskét kevésbé gyorsítja, mint a nem töltött részecskét. A részecske tehát úgy viselkedik, *mintha a töltés hatásaként tömege megnövekedett volna.*

Mint hogy  $\mathbf{U}$  egy tenzor, ezért a töltött részecske így adódó többlettömege általában az iránytól függ. Ha nagyságrendi összefüggésként azt írjuk, hogy

$$\mathbf{U} \sim \mathbf{1} U_0,$$

azt találjuk, hogy a részecskének az effektív tömege

$$m_{\text{eff}} \approx m + \frac{U_0}{c^2}.$$

$m_{\text{eff}} = m + \Delta m$  jelölést használva egy egyenletesen töltött gömb esetében azt találjuk, hogy

$$\mathbf{U} = \frac{2}{3} \cdot \mathbf{1} U_0,$$

tehát

$$\Delta m = \frac{2}{3} \frac{U_0}{c^2}.$$

Ebben az esetben az elektromágneses visszahatás által okozott tömegnövekedés kétharmada annak a növekedésnek, amit a *Lorentz-elv* alapján várunk.

## 2. TÖMEGDEFEKTUS

**307.** Egy  $+e$  és  $-e$  egymástól  $R$  távolságban elhelyezkedő ponttöltés-párt vizsgálva azt találjuk, hogy

$$u = -\frac{e^2}{R},$$

$$\Delta m = -\frac{e^2}{Rc^2}(1 - \cos^2 \vartheta).$$

Látható ebből, hogy a töltések közötti vonzás a látszólagos tömeg *csökkenését* okozza. Tehát ha egy ellenkező töltésekből álló párt gyorsítunk, mindkét töltés a másikra erőhatást gyakorol, amely elősegíti a gyorsítást. A belső erők a gyorsulást elősegítik, és a rendszert könnyebben lehet gyorsítani, mint a megfelelő semleges részecskékből álló rendszert. Ez utóbbi effektus szoros összefüggésben áll a *tömegdefektussal*, melyet egy, több részecskéből felépített, zárt rendszerben észlelünk.

**308.** A **237.** pontban kifejtett megfontolásokból azt várjuk, hogy egy zárt rendszer — például egy részecske — egy

$$m_0 = \frac{E}{c^2}$$

tömeggel rendelkezik, ahol  $E$  az összenergia.  $E$  értékét változtatva azt várjuk, hogy a tömeg is megfelelően változzék. Például, ha egy elektromosan semleges rendszert feltöltünk, akkor elektrosztatikus energiát adunk a rendszernek, és azt várjuk, hogy a tömeg

$$\Delta m_0 = \frac{u}{c^2} \tag{46}$$

-val változzék. A fentebb ismertetett számítás, amelyben egy elektromosan töltött rendszer saját magára gyakorolt erőhatását számítottuk ki, egy látszólagos tömegváltozásra vezet, amely változás nagyságrendje megegyezik a (46)-ból következő változással.

Azt kell feltételeznünk, hogy valódi részecskék tömegváltozása megfelel a *Lorentz-elvnek*. A *Lorentz-elv*ből következő változás és az elektrosztatikus hatásból kiszámított változás között azonban különbség adódik. Ennek oka a következő: ha egy fizikai rendszert elektromosan feltöltünk; belső feszültséget is létrehozunk, amely a *Coulomb-erőket* egyensúlyban tartja. Ezt a feszültséget az atomok közötti kölcsönhatásból származó belső erők hozzák létre; feltételezhető azonban, hogy az atomok közötti kölcsönhatás is retardált természetű, tehát a belső erők is hozzájárulnak a rendszer saját magára ható erejének kialakulásához. Feltételezve, hogy az egész rendszer eleget tesz a *Lorentz-elvnek*, azt kell várnunk, hogy az elektromos kölcsönhatások és az ezek által létrehozott belső erők együttesen a *Lorentz-elvnek* megfelelő tömegnövekedést hoznak létre.

## E) A KONTINUUM RELATIVISZTIKUS MECHANIKÁJA

**309.** Azt várjuk, hogy egy zárt fizikai rendszerben mind az energia, mind az impulzus megmarad, ezért feltételezhetjük, hogy

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(m)} = 0, \quad (47)$$

ahol  $\mathbf{T}^{(m)}$  mechanikai feszültségek tenzora.

A fenti összefüggés  $\mathbf{T}^{(m)}$  tíz elemére négy differenciálegyenletet ad. Így tehát (47) csak szükséges feltételt ad a  $\mathbf{T}^{(m)}$  energia–impulzus-tenzorral rendelkező anyag mozgására. A (47) egyenlethez még *mozgásegyenleteket* kell hozzárendelni, hogy adott kezdőfeltételekből a közeg mozgását ki tudjuk számítani.

**310.** Egy olyan konfigurációban, ahol

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(m)} \neq 0, \quad (48)$$

a rendszer energiája és impulzusa nem marad meg. Egy ilyen rendszerrel akkor találkozunk, ha a rendszer külső erők hatása alatt áll. Legfontosabb ilyenfajta eset egy külső elektromágneses mező hatása alatt álló zárt fizikai rendszer. A külső mező elektromágneses energia – impulzus-tenzorát  $\mathbf{T}^{(el)}$ -vel jelölhetjük, és mint a **252.** pontban megmutattuk,  $\text{Div } \mathbf{T}^{(el)}$  azt az energiát és impulzust adja, amelyet időegységként az elektromágneses mező átad az anyagnak.

Az elektromágneses mező hatása alatt álló mechanikai rendszer esetében feltételezhetjük, hogy a kölcsönhatást figyelembe véve az összenergia és impulzus megmarad, tehát hogy

$$\text{Div } (\mathbf{T}^{(m)} + \mathbf{T}^{(el)}) = 0. \quad (49)$$

A fenti összefüggés azt a körülményt fejezi ki, hogy a külső elektromágneses mező pontosan azt a  $-\mathbf{F}$  erősűrűséget szolgáltatja, melyre (48) szerint szükség van  $+\mathbf{F}$  mechanikai erő semlegesítésére.

### 1. A TROUTON–NOBLE-FÉLE KÍSÉRLET ELEMZÉSE

**311.** Egy töltött kondenzátor által létrehozott mezőt ki tudjuk számítani és a mező ismeretében megkapjuk a ponderomotorikus erőt:

$$\mathbf{F}^{(el)} = -\text{Div } \mathbf{T}^{(el)}, *$$

amellyel a kondenzátor saját magára hat.

Az erőnyomaték, amellyel a kondenzátor magára hat,

$$\mathbf{M}^{(el)} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}^{(el)}$$

sűrűséggel fejezhető ki. Az össz-erőnyomaték egy harmadrendű antiszimmetrikus tenzor segítségével, mint

$$m_{kl} = \int M_{kl}^{(el)} d\tau, \quad k, l = 1, 2, 3$$

\* Az előjel konvencióját illetően lásd a 252. ponthoz írt lábjegyzetet.



adódik. Egy nyugalomban levő töltött kondenzátor esetében azt találjuk, hogy

$$m_{kl}^{(el)} = 0, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

A negyedrendű  $\mathbf{M}^{(el)}$  tenzort Lorentz-transzformációnak vetjük alá, és így az  $\mathbf{M}^{(el)*}$  tenzort kapjuk, amely egy mozgó kondenzátorban fellépő forgatónyomatékokat jellemzi.

Ez utóbbi tenzor térkomponensei nem fognak eltűnni még akkor sem, ha az eredeti tenzor térkomponensei eltűntek, tehát azt várjuk, hogy

$$m_{kl}^{(el)*} \neq 0.$$

Látjuk tehát, hogy a lemezek között ható elektromágneses erők nullától különböző forgatónyomatékokat hoznak létre abban az esetben, ha a kondenzátor translációs mozgásállapotban van. Ennek a forgatónyomatéknak az értékét a 32. pontban, leegyszerűsített módszer alapján kiszámítottuk.

A két töltött lemezből álló kondenzátor azonban nem egy zárt rendszer. Ahhoz, hogy a lemezeket egymástól távol tartsuk, mechanikai támasz kell, amely a lemezek között fellépő vonzóerőt semlegesíti.

Az egész rendszer, ha mind az elektromágneses, mind az elasztikus erőket figyelembe vesszük,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(el)} + \mathbf{T}^{(m)}$  impulzus-energia-tenzorral írható le.

Mint ahogy az egész rendszer egyensúlyban van,

$$\text{Div } \mathbf{T} = 0, \quad \text{így } \mathbf{M} = 0,$$

s ebből következik, hogy

$$m_{kl} = m_{kl}^{(el)} + m_{kl}^{(m)} = 0,$$

és a Lorentz-transzformáció alkalmazása után

$$m_{kl}^* = m_{kl}^{(el)*} + m_{kl}^{(m)*} = 0.$$

Tehát a zárt fizikai rendszerben, amelyben az elektromos erőket a mechanikai erők egyensúlyban tartják, a forgatónyomaték bármilyen reprezentációban eltűnik. Az össz-forgatónyomaték éppen úgy eltűnik nyugalomban levő kondenzátor, mint a translációs mozgást végző kondenzátor esetében.

## F) TRANZIENS JELENSÉGEK

**312.** Az előbbieken láttuk, hogy a Maxwell-egyenletek a Lorentz-elvvel összhangban vannak a következő értelemben: ha egy  $\mathfrak{F}$  mező  $\mathfrak{I}$  áramerősség által jön létre, a

$$\mathfrak{F}^* = \mathcal{L}(\mathfrak{F})$$

Lorentz-deformált mező a Maxwell-egyenletekből a

$$\mathfrak{F}^* = \mathcal{L}(\mathfrak{I})$$

áramsűrűségekből adódik. A Lorentz-elv dinamikai része azt állítja, hogy adiabatikus beavatkozás által  $\mathcal{Q}$  fizikai rendszer egy

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{L}(\mathcal{Q})$$

rendszerbe változik át. Ha ezt az eredményt elektromágneses esetre alkalmazzuk, az adiabatikus hatás eredményeként

$$\mathfrak{F}, \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{F}^*, \mathfrak{S}^* \quad (50)$$

típusú változást várunk.

**313.** Az (50) által leírt deformáció jelentésének tisztázásához megjegyezzük, hogy amennyiben csak mezővel rendelkezünk, a mezőre semmiféle külső beavatkozást nem gyakorolhatunk. Külső beavatkozással csak a mező forrásait tudjuk befolyásolni. Ha egy  $\mathfrak{S}$  forrás eloszlással állunk szemben, akkor a forrást hordozó anyagra tudunk hatni, és így a forrás sűrűségét  $\mathfrak{S}^*$ -re tudjuk megváltoztatni.

Egyszerű példaként vegyünk egy  $P$  töltött részecskét, mely a  $K$  vonatkoztatási rendszerhez képest nyugalomban van. Külső erő segítségével a  $P$  pontot gyorsíthatjuk, és elérhetjük, hogy végeredményben  $\mathbf{v}$  sebességgel mozogjon  $K$ -hoz képest. A már  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó pont mezőjét a **278.** pont (64) egyenlete írja le.

A Maxwell-egyenletek retardált potenciálok formájában felírt megoldásai segítségével a mozgó töltés mezője közvetlenül is kiszámítható. Ha a részecske  $t < 0$  időben nyugalomban van, de a  $t = 0$  pillanatban megindul a gyorsulás, és a részecske végleges  $\mathbf{v}$  sebességét a  $t = t_1$  pillanatban éri el, akkor a részecske sebességét

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \mathbf{v}, & t > t_1 \end{cases}$$

adja meg. A részecske koordinátavektorát úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t') dt', \quad \text{ha } 0 < t < t_1$$

és

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}t, \quad \text{ha } t > t_1,$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{v}t_1.$$

Ha a mozgó részecske mezejét  $t > t_1$  időpontokra kiszámítjuk, azt találjuk, hogy a mezőben három különböző zóna lép fel (25. ábra).

(1) Létezik a  $t > t_1$  időpontokban egy, a töltést körülvevő I-es tartomány, melynek pontjaira fennáll, hogy

$$|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}| < c(t - t_1),$$

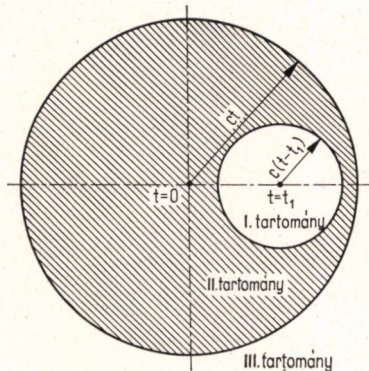
ha  $\mathbf{r}$  az I tartományon belül van.

Ha e tartományban retardált potenciálok segítségével számítjuk ki a mezőt, azt találjuk, hogy az integrálban előforduló retardált idők  $t' > t_1$ , tehát ebben a tartományban a részecske olyan hatást gyakorol, mintha mindig  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgott volna. Így tehát az I tartományban a 278. pont (64) egyenlete alapján számíthatjuk ki a mezőt.

(2) Az I tartományt egy II tartomány veszi körül. Ebben a tartományban a  $t > t_1$  időpontban

$$|\mathbf{r}| < ct, \quad c(t - t_1) < |\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}|,$$

ha  $\mathbf{r}$  a II tartományon belül van.



25. ábra. Az I., II. és III. tartomány sémája

A II tartományban azt a mezőt találjuk, amely a  $0 < t' < t_1$  retardált időkből jött létre, tehát II azt a sugárzásmezőt tartalmazza, amelyet a részecske a gyorsulási periódusban sugárzott ki.

(3) A II tartományt körülveszi a III tartomány, amelyet úgy határozzunk meg, hogy a  $t > t_1$  időkből

$$ct < |\mathbf{r}|,$$

ha  $\mathbf{r}$  a III tartományon belül van.

A III tartományban található mezőt a részecske a  $t < 0$  időben hozta létre, tehát mielőtt a gyorsulás megindult volna; s így ebben a tartományban a mező megegyezik a nyugvó töltés mezőjével. A III tartomány belső határfelülete  $c$  sebességgel radiális irányban mozog kifelé, és így fénysebességgel vonul vissza a tartomány, amelyben a gyorsulás hatása még nem érvényesült.

314. A II és III tartományok visszavonulása oly módon is értelmezhető, hogy a töltést és áramokat tartalmazó részecskét körülvevő elektromágneses mezőt a részecske anyagi folytatásának fogjuk fel. Ha a részecskére és ezáltal a mező forrásaira külső hatást gyakorolunk, első pillanatban a részecske csak a közvetlen környezetében található mezőt viszi magával. A mező külső része csak később reagál az elmozdításra. Az I és a III tartomány között fekvő II tartományban elektromágneses hullámok terjednek,

amelyek az I tartományból származó zavart kiterjesztik a többi tartományra. Ezek az elektromágneses hullámok alakítják át végeredményben az  $\mathfrak{F}$  mezőt az  $\mathfrak{F}^*$  mezőre.

A részecskét körülvevő mezőt egy elasztikus anyaggal összehasonlítva, az egész folyamatot összevethetjük azzal a folyamattal, ahol egy elasztikus közeg középpontját gyorsítjuk. Az elasztikus anyag egy belső pontját elmozgatva a perturbációt elasztikus hullámok terjesztik ki és viszik át a mozgást az anyag külső részeire. Bizonyos idő után az egész elasztikus test egyenletes mozgásba jön, és az elasztikus hullámok lecsillapodnak. Egy részecske elektromágneses mezője ugyanígy viselkedik. Az elasztikus hullámok sebessége az elektromágneses mező esetében  $c$ .

A fenti megfontolás speciális esetre mutatja meg, hogyan folyik le a relaxációs folyamat, amely egy fizikai rendszerben létrehozza a *Lorentz-deformációt*.

## A GRAVITÁCIÓ ELMÉLETE

**315.** Könyvünk e részében a speciális relativitáselmélettel kapcsolatos elgondolásokat az általános relativitáselméletre terjesztjük ki. Az a felfogásunk, hogy az általános relativitáselmélet lényegében a gravitáció elméletét adja. Ez az elgondolásunk találkozik V. A. FOK véleményével.\*

## A) A MEGFIGYELT TÉNYEK

**316.** Az általános relativitáselmélet által eredményesen magyarázott gravitációs jelenségek a következőkben foglalhatók össze:

(1) *Fénysugarak elhajlása gravitációs tömegek közelében.* Ezt az effektust fenomenológiailag úgy is magyarázhatjuk, ha feltételezzük, hogy a fény-sugár részecskékből áll, amelyekre a gravitációs vonzás hat. Ehhez hasonló megfontolások alapján a fény gravitációs mezőben való elhajlását már kb. 1800-ban feltételezték, később ezek a megfontolások feledésbe merültek.

Egy gravitáló tömeg közelében a fény elhajlását azt feltételezve is értelmezhetjük, hogy a tömeget körülvevő gravitációs mező mint optikai törőközeg hat. A Napot körülvevő gravitációs mezőt így egy, a Napot körülvevő lencsének is tekinthetjük. Ha az égboltot e lencsén keresztül figyeljük meg, nagyított képet látunk, és így az égbolton a Nap közelében található csillagok távolságait is felnagyítva észleljük; ez azt a benyomást kelti, mintha a csillagok a Nap környékében a Naptól eltávolodnának.

(2) *Spektrumvonalak gravitációs vörös eltolódása.* Az atomok frekvenciája egy gravitációs centrum közelében megváltozik. Ezt az effektust a Nap és csillagok légkörében levő atomok emissziós és abszorpciós frekvenciáinak megfigyelései támasztják alá, azonban a *Mössbauer*-effektus segítségével laboratóriumi körülmények között is sikerült az effektust kimutatni.\*\*

Azt találták, hogy bizonyos  $\gamma$ -sugarak frekvenciája növekszik, ha a forrást a Föld felszínéről felemeljük. Az effektust a gravitációs potenciálnak a magassággal való csökkenése okozza.

(3) *A Merkúr bolygó anomális perihélium-mozgása.* Gravitációs effektus, hogy gravitációs mezőben tömegek görbevonalú pályán mozognak. Általában azonban a *Newton*-féle törvények szerinti mozgást — amely a tömegek

\* В. А. Фок: Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз Москва, 1961.

\*\* R. L. MÖSSBAUER: Zs. f. Phys., 151, 124, 1958. R. V. POUND és G. A. REBKA, JR.: Phys. Rev. Letters, 4, 337, 1960.

gravitációs mezőben való mozgásának első közelítését adja — klasszikus jelenségnek szokásos minősíteni. Csak a *Newton*-féle törvényeknek megfelelő mozgástól való eltéréseket szokásos relativisztikus effektusnak tekinteni.

A bolygópályák első közelítésben *Kepler*-ellipszisek, azonban a bolygók közötti kölcsönhatás folytán, ezek az ellipszisek perihélium-mozgást végeznek. A Merkúr pályájának perihélium-mozgása kismértékben eltér attól a perihélium-mozgástól, amelyre *NEWTON* elmélete vezet. A Merkúr perihélium-mozgása  $0,4''$ -cel tér el évenként a számított értéktől. Ez az eltérés az általános relativitáselmélet segítségével magyarázható.

(4) *Galaxisok recessziója*. Az általános relativitáselméletnek nagyon fontos kozmológiai eredménye a távoli galaktikus rendszerek recessziójának magyarázata. A jelenséget az elmélet alapján *A. FRIEDMANN*\* előre megjósolta, és *E. HUBBLE*\*\* figyelte meg.

(5) *Ekvivalencia-elv*. A fent megfigyelt effektusokon kívül az általános relativitáselmélet fontos tényként veszi figyelembe a súlyos és tehetetlen tömeg közötti ekvivalenciát. Ezt az effektust *EÖTVÖS* és mások igazolták nagy pontossággal.\*\*\* Az ekvivalencia-elv szerepéről és az elv további következményeiről lásd *TREDER* és *JÁNOSSY* munkáját.\*\*\*\*

## B) A GRAVITÁCIÓS ELMÉLET PROBLÉMÁJÁNAK FELVETÉSE

**317.** Feltűnő gravitációs effektus, hogy tömegek gravitációs mezőben görbevonalú mozgást végeznek. Fénysugarak gravitációs mezőben való eltérése egy másik gravitációs effektus, amely effektus azonban nagyon kicsiny, és csak kedvező körülmények között figyelhető meg. A gravitáció elmélete először is a gravitációs hatás alatt mozgó testek mozgástörvényeit kívánja megállapítani; e törvények jó közelítésben a *Newton*-féle törvényekkel egyeznek meg. Másodszor az elméletnek meg kell találni további természettörvények formáját olyan tartományokban, ahol a gravitációs hatás nem elhanyagolható. Ezeket a törvényeket extrapoláció segítségével találhatjuk meg, kiindulva a törvények gravitáció nélküli tartományokban érvényes formájából.

Például az elektromágneses hullámok terjedését olyan tartományokban, ahol a gravitációs hatás elhanyagolható, a *Maxwell*-egyenletek adják meg. Azokban a tartományokban, ahol a gravitációs effektusok nem elhanyagolhatóak, fel kell tételeznünk, hogy a *Maxwell*-egyenletek még mindig hasonlítanak a gravitációmentes tartományban érvényes formához, azonban ezekben az egyenletekben a gravitációs mezőre jellemző mennyiségek is explicit módon szerepelnek.

\* *A. FRIEDMANN*: *Zs. f. Phys.*, 10, 377, 1922.

\*\* *E. HUBBLE*: *Astrophys. J.*, 74, 43, 1931.

\*\*\* *EÖTVÖS* L.: *Ann. d. Phys.*, 59, 354, 1896; *EÖTVÖS* L., *PEKÁR* D. és *FEKETE* E.: *Ann. d. Phys.*, 68, 11, 1922; *R. H. DICKE*: *Experimental Relativity (Relativity Groups and Topology)*, Ed. *DE WITT* and *DE WITT.*, Blackie and Son Ltd., 1964. 173. o.

\*\*\*\* *JÁNOSSY* L. és *H. J. TREDER.*: *Acta Phys. Hung.* 31, 367, 1972.

Feltételezhetnénk például, hogy forrásmentes tartományban a gravitációs mezőben a *Maxwell*-egyenleteket

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r}, t)} \ddot{\mathbf{A}} = 0 \quad (1)$$

adja meg, ahol  $c(\mathbf{r}, t)$  a fénysebesség  $t$  pillanatban, az  $\mathbf{r}$  helyzetvektorral rendelkező pontban. Abban a tartományban, ahol a gravitációs effektusokat elhanyagolhatjuk, természetesen

$$c(\mathbf{r}, t) = c = \text{konstans}$$

és az (1) egyenlet az ismert hullámeqyenletbe megy át. Az (1) egyenlet nem írja le a valódi törvényt, de példa arra, miként képzelhető el, hogy a gravitációs paraméterek elrejtve már a gravitációs effektust nem tartalmazó formulákban is szerepelhetnek.

Ehhez hasonlóan, ha a gravitációs mező paramétereit bevezetjük a *Schrödinger*-egyenletbe, az így módosított egyenlet a gravitációs mező atomokra gyakorolt hatását foglalja magába.

Ismeretes, hogy az atomok frekvenciái a gravitációs potenciáltól függenek. Így azt kell feltételeznünk, hogy a gravitációs mezőben érvényes *Schrödinger*-egyenlet a gravitációs potenciáltól függő atomi frekvenciákra vezet.

**318.** Tisztán matematikai szempontok figyelembevételével azt találjuk, hogy a *Maxwell*-egyenletek, a *Schrödinger*-egyenlet és másfajta egyenletek nagyon sokfajta általánosításokat engednek meg, amely általánosított formák a gravitációs potenciálokat tartalmazzák.

A következőkben azokat az általánosításokat adjuk, amelyek az általános relativitáselméletből következnek.

Találkozunk olyan felfogással, amely szerint a természettörvényeknek a gravitációs effektusokhoz vezető általánosítása *a priori* megfontolásokból következik. Ilyen megfontolások alapján az a látszat, mintha ezek az általánosítások logikailag az egyetlen lehetséges megoldások volnának, és — e megfontolásoknak egy paradox megfogalmazása szerint — más lehetőségek nem is léteznek, és „a természet kényszerül az általunk *a priori* bevezetett törvényeknek engedelmeskedni”.

Ilyen megfontolások merőben helytelenek. A következőkben azt mutatjuk meg, hogy a relativisztikus általánosítások alapján kapott törvények az anyag és gravitáció tulajdonságaira vonatkozó, jól definiált hipotéziseket tartalmaznak, és minden esetben ténykérdés, hogy ezek a hipotézisek milyen mértékben írják le helyesen a természet jelenségeit.

## 1. A PROBLÉMA MATEMATIKAI MEGFOGALMAZÁSA

**319.** A speciális relativitáselméletben olyan tartományokat vizsgálunk amelyekben a fény homogén módon terjed. Az ilyen tartományokban található fizikai rendszerek viselkedését leíró természettörvények szimmetriával rendelkeznek, amelyeket a *Lorentz*-elvvel lehet kifejezni. A valóságban azonban a fény sehol sem terjed pontosan homogén módon, minthogy a

fény terjedését a gravitáció befolyásolja, és tökéletesen gravitációmentes tartományok nem léteznek. Ennek megfelelően a *Lorentz*-elvet csak olyan közelítésben vehetjük érvényesnek, amelyben a gravitációs effektusok elhanyagolhatók. Felmerül tehát az a kérdés: hogyan lehet a *Lorentz*-elvet általánosítani úgy, hogy az általánosított formája nem elhanyagolható gravitációs mezők jelenlétében is érvényes maradjon?

## 2. HOMOGEN TARTOMÁNYOK KÍSÉRLETI KRITÉRIUMA

**320.** A *Lorentz*-elv általánosításának első lépéseként meg kell vizsgálni, hogyan lehet kísérletileg eldönteni egy tartományról, hogy homogén-e vagy sem. Ez a kérdés egyáltalában nem triviális, és a következőkben megmutatjuk, hogyan lehet e kérdésre választ kapni.

Vizsgáljunk egy  $\mathfrak{R}$  tartományt, amelyben  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_N$  pontok közelében  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_N$  órák vannak elhelyezve.

Tételezzük fel, hogy

(a)  $\mathfrak{R}$  homogén,

(b) hogy a  $\mathfrak{P}_k$  pontok nem mozognak egymáshoz képest,

(c) hogy a  $\mathfrak{P}_k$  pontok az éterhez képest vagy nyugalomban vannak, vagy legfeljebb translációs mozgást végeznek,

(d) hogy a  $\mathfrak{C}_0$  standard óra egyenletes ritmusban jár.

Amennyiben az (a)-tól (d)-ig felsorolt feltételek teljesülnek, akkor létezik a

$$K(r_\nu) = r_\nu$$

a koordinátavektorok olyan reprezentációja, és

$$K(t_\nu) = t_\nu$$

az idők olyan mértéke, hogy ezekben kifejezve a fény terjedését egy  $K$ -ban definiált állandó terjedési tenzorral írhatjuk le:

$$K(g) = g \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}, t\text{-től független.} \quad (2)$$

Megjegyezzük, hogy amennyiben  $K$  egyenesvonalú reprezentáció, amely (2) formulát kielégíti, akkor olyan reprezentációk is léteznek, amelyekben

$$K'(g) = g' \quad \mathbf{x}' = \mathbf{r}', t'\text{-től független,}$$

ahol a  $g'$  mátrix tetszőleges értéket vesz fel.

**321.** Egyenesvonalú reprezentációban kifejezve a fényjelek terjedése az

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) g(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0 \quad (3)$$

összefüggésnek tesz eleget, ahol  $\mathbf{x}_1$  és  $\mathbf{x}_2$  az  $\mathfrak{C}_1$  és  $\mathfrak{C}_2$  események négyeskoordinátái, és  $\mathfrak{C}_1$  a fényjel  $t_1$  időpontban  $\mathfrak{P}_1$  pontból való indulását,  $\mathfrak{C}_2$  pedig  $t_2$  időpillanatban a  $\mathfrak{P}_2$  pontba való érkezését jelenti.

Feltételezve, hogy a jelek egyenes vonal mentén terjednek, egy fényjel pályáját paraméteres reprezentációban

$$\mathbf{x}(p) = \dot{\mathbf{x}} p + \alpha$$



szerint írhatjuk fel, ahol  $\dot{\mathbf{x}}$  állandó komponensekkel rendelkezik, és kielégíti az

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{g}\dot{\mathbf{x}} = 0$$

összefüggést,  $\alpha$  pedig tetszőleges állandó komponensű vektor.

**322.** Amennyiben sikerül egy  $\mathfrak{A}$  tartományban, amely a  $\mathfrak{P}_k$  pontokat és  $\mathfrak{C}_k$  órákat tartalmazza, egy egyenes  $K$  reprezentációt konstruálni, akkor feltételezhetjük, hogy a **320.** pontban felsorolt (a)–(d) feltételek teljesülnek.

A vonatkoztatási rendszert a IV. fejezet A.3 pontjában leírt módszerek segítségével alkothatjuk meg. E módszer  $\mathbf{r}_v$  koordináta- és  $t_v$  időmértékek olyan meghatározására törekszik, hogy ezekben kifejezve fényjelek terjedésére (3) érvényes legyen. Ez a módszer egy erősen túlhatározott egyenletrendszerre vezet. *A megfigyelés tartománya valóban homogén, ha a túlhatározott egyenletrendszernek van megoldása.* Így annak a ténynek belső ellenőrzését kapjuk, hogy az  $\mathfrak{A}$  tartomány valóban homogén-e.

A kérdést közelebbről megvizsgálva azt látjuk, hogy a fenti módszer segítségével nem pusztán az  $\mathfrak{A}$  tartomány homogén voltát, hanem azt is vizsgáljuk, hogy mind a négy, a **320.** pontban (a)-tól (d)-ig felsorolt feltétel ki van-e elégítve. Fizikai szempontból bennünket elsősorban az (a) érdekel, tehát az, hogy  $\mathfrak{A}$  homogén-e.

A (b)-től (c)-ig felsorolt feltételek a  $\mathfrak{P}_v$  pontok mozgására és a  $\mathfrak{C}_v$  órák szinkronizálására vonatkoznak. Ezen utóbbi kérdések gyakorlati szempontból fontosak, azonban a fő kérdéssel kapcsolatosan, azaz hogy  $\mathfrak{A}$  tartományban milyen módon terjed a fény, nem lényegesek.

### a) *Egy példa*

**323.** A Föld környékén a fény igen jó közelítésben homogén módon terjed. Ha a  $\mathfrak{P}_k$  pontokat a Földhöz rögzítve vesszük, — ennek ellenére — nem sikerül a  $\mathfrak{C}_k$  órák ellentmondásmentes szinkronizálása, ha abból indulunk ki, hogy a Földhöz képest a fényterjedés a (3) egyenletnek eleget tesz.

Ez azért van így, mert a Föld tengelyforgása miatt ebben az esetben a (c) feltétel nem teljesül, és ezért a  $\mathfrak{P}_k$  pontok közötti fényjelek kicserélése a IV. fejezet A.3. pontban adott módszerek alkalmazásával nem vezethet ellentmondásmentes vonatkoztatási rendszer megalkotásához.

A *Michelson–Gale*-kísérlet (lásd **62.** pont) azt mutatja, hogy a Föld tengelyforgását interferometrikus módszerrel megfigyelhetjük. Ez a kísérlet éppen azt a körülményt használja fel, hogy a Földdel együtt forgó vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva a fényterjedés nem homogén.

A *Michelson–Gale*-kísérlet azonban nem bizonyítja azt, hogy a Föld környékén a fény valóban inhomogén módon terjed. Ha ti. egy olyan  $K$  vonatkoztatási rendszert vezetünk be, amely nem forog együtt a Földdel; azt találjuk, hogy ez utóbbi rendszerhez képest a fény már homogén terjedést mutat. A Földhöz rögzített  $\mathfrak{P}_k$  pontok  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektorai időben változó értékekkel rendelkeznek ehhez a  $K$  rendszerhez képest. Így tehát figyelembe véve, hogy a  $\mathfrak{P}_k$  pontok nem translációs mozgást végeznek, e

pontokhoz viszonyított mozgó koordináta-rendszert vezethetünk be, amely koordináta-rendszer mértékeiben a (3) egyenlet teljesül.

Másik példaként vegyük a fény elhajlását a Nap környékén. Ebben az esetben arra a következtetésre jutunk, hogy a fényterjedés a Nap környékén valóban inhomogén, és olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \text{konstans}$ , nem létezik.

### 3. AZ EGYENESVONALÚ VONATKOZTATÁSI RENDSZER MEGALKOTÁSA

**324.** Ha a **320.** pontban szereplő (a) feltétel érvényességét akarjuk vizsgálni, tehát azt, hogy az  $\mathfrak{R}$  tartomány homogén vagy nem, de nem kötjük ki a (b)-től (d)-ig felsorolt feltételeket, akkor új módszert kell keresnünk.

Vegyünk  $\mathfrak{P}_k$  pontokat, melyek egy  $\mathfrak{R}$  tartományban helyezkednek el, de tekintsünk el a (b)-től (d)-ig megadott feltételektől, engedjük meg tehát, hogy a  $\mathfrak{P}_k$  pontok egymáshoz képest, valamint az éterhez képest tetszőleges mozgásban legyenek, a  $\mathfrak{C}_k$  órák járása pedig legyen tetszőlegesen beállítva. Vizsgáljuk, hogy a tartomány mennyire homogén.

A  $\mathfrak{P}_k$  pontokhoz önkényes módon  $\mathbf{r}_k$  koordinátavektorokat rendelve, ezek a koordináta-vektorok a tetszőlegesen beállított órákról leolvasott időmértékekkel együtt egészen általános vonatkoztatási rendszert képeznek. Ezen általános vonatkoztatási rendszer kiválasztásánál csak azt a megszorítást tesszük, hogy a koordináta- és időmértékeket „ésszerűen” válasszuk meg, abban az értelemben, hogy egymáshoz közeli pontokat numerikusan nem nagyon különböző koordinátavektorokkal jellemezzük, és az órákat úgy állítjuk be, hogy egymáshoz közeli órák leolvasásai ne nagyon térjenek el egymástól. Ezeket a feltételezéseket szigorúbban is meg lehetne fogalmazni, erre azonban nem térünk ki.

**325.** Egy így megalkotott többé-kevésbé önkényes vonatkoztatási rendszer mértékeinek segítségével fényjelek pályáját empirikusan megállapíthatjuk.  $\mathfrak{P}_k$  pontok koordinátavektorai között és  $\mathfrak{C}_k$  órák leolvasásai között interpolálva, egy adott fényjelpályát

$$\mathbf{x}(p) = \mathbf{r}(p), t(p)$$

formában írhatjuk fel, a  $p$  paraméter különböző értékei megadják a  $t(p)$  időmértékeket, amelyekben a jel  $\mathbf{r}(p)$  koordinátavektorokkal rendelkező pontokon keresztülhalad.

A reprezentációt megszorítjuk azzal, hogy feltesszük:

$$t(p) \neq 0, p \text{ bármely értékére.}$$

Ha így nagyszámú fényjel pályáit írtuk le, megállapíthatjuk: vajon az összes pályák eleget tesznek-e a

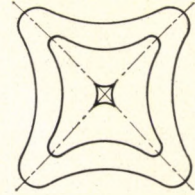
$$\dot{\mathbf{x}}(p) \mathbf{g}(\mathbf{x}(p)) \dot{\mathbf{x}}(p) = 0 \quad (4)$$

összefüggésnek. Pontosabban fogalmazva megállapíthatjuk, hogy a fényjelek bármely  $\mathbf{x}$  négyespont környékében első közelítésben homogén terjedést mutatnak-e. A terjedési tenzor,  $\mathbf{g}$  a használt reprezentációban általában  $\mathbf{x}$ -től függ.

a) *Lokálisan homogén tartományok*

**326.** Hangsúlyoznunk kell, hogy a (4)-ben megadott összefüggés már bizonyos feltevést tartalmaz a fény terjedési módjáról. Legalább elvben meghatározható, hogy egy adott tartományban a fényterjedés (4)-nek megfelelő módon történik vagy sem. Empirikusan megállapíthatjuk ugyanis az  $\dot{\mathbf{x}}_k(p)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  értékeit néhány adott  $\mathbf{x}$  négyesponton áthaladó fényjelre. Ha az így kapott értékeket (4)-be behelyettesítjük, akkor  $n$  egyenletet kapunk  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  elemeire vonatkozóan. Elég nagy  $n$  érték esetében az így kapott egyenletrendszer túlhatározott, és amennyiben ez a túlhatározott egyenletrendszer megoldásokkal rendelkezik, úgy feltételezhetjük, hogy a fényterjedés valóban a (4) egyenletnek eleget tesz.\*

Megjegyezzük, hogy elvben olyan tartományok is elképzelhetők, ahol a fény egészen más módon terjed. Elképzelhető volna egy olyan tartomány, ahol egy pontból kiinduló fázisfelületek az ellipszoidfelületektől nagyon eltérnek, amint ezt szematikusan a 26. ábrában mutatjuk. Az ilyenfajta fényterjedést *lokálisan inhomogén* terjedési módnak nevezhetjük.



26. ábra. A fényterjedés inhomogén módja

A (4) formula szerinti fényterjedés bizonyos hasonlóságot mutat a fénynek inhomogén közegben való terjedéséhez. Így a (4) összefüggés azt tételezi fel, hogy a fény az éterben hasonló terjedési törvénynek tesz eleget, mint egy inhomogén közegben. A (4) feltételezést hipotézisnek vehetjük, amelyet a hipotézisre felépített elmélet sikere alátámaszt.

*Lokálisan homogénnek* fogjuk nevezni azt a tartományt, ahol azt találjuk, hogy egy tetszőleges reprezentációban a fényterjedés

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (5)$$

-nek eleget tesz. Megjegyezzük, hogy az (5) összefüggés a fényjelek pályája szempontjából csak egy szükséges feltételt tartalmaz, tehát a fényjelek pályáját csupán az (5) összefüggésből nem lehet megállapítani.

b) *Homogén tartományokra érvényes kritériumok*

**327.** Felmerülhet a kérdés, hogy egy  $\mathfrak{R}$  tartomány, amelyben az (5) törvény érvényes, homogén-e vagy sem? Amennyiben a tartomány homogén, létezik olyan  $K'$  reprezentáció, hogy  $K'$  mértékeiben

$$\dot{\mathbf{x}}' \mathbf{g}' \dot{\mathbf{x}}' = 0, \quad (6)$$

$\mathbf{g}'$  független  $\mathbf{x}'$ -től

érvényes. Az eredeti  $K$  rendszer és  $K'$  közötti koordinátatranszformációt úgy írhatjuk, hogy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{vagy} \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}'), \quad (7)$$

\* Minthogy a (4) egyenlet homogén,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  csak egy  $\alpha(\mathbf{x})$  faktor erejéig határozható meg. Ezzel kapcsolatos részleteket lásd JÁNOSY L.: Foundations of Phys. I, 1971. 3.

ahol  $\mathbf{f}$  egy invertálható négyesfüggvény, és  $\mathbf{f}^{-1}$  e függvény inverze. A (7) összefüggésből azt látjuk, hogy egy pont, amelynek  $\mathbf{r}$  koordinátavektora  $t$ -től független, általában  $K'$ -hez képest mozog. Hasonlóképpen, ha  $\mathbf{f}$  nemlineáris függvény, azt találjuk, hogy a  $\mathbb{C}_K$  órák ritmusának mértékei  $K$ -ban és  $K'$ -ben különböznek.

**328.** A (7) transzformáció által nyert  $K'$  vonatkoztatási rendszerben a fényterjedés a (6) formula szerint történik, amennyiben fennáll, hogy

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}' \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (8a)$$

ahol

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \circ \overleftarrow{\square}. \quad (8b)$$

Adott  $\mathbf{g}'$  esetében (8a–b) tíz differenciálegyenletet ír elő  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  négy komponensére. Ez a rendszer tehát általában túlhatározott. Arra a következtetésre juthatunk tehát, hogy ha a túlhatározott (8) egyenletrendszer megoldásokkal rendelkezik, ezt a tényt nem vehetjük véletlennek, hanem arra kell következtetnünk, hogy az  $\mathbb{R}$  tartomány homogén.

A  $K'$  vonatkoztatási rendszert, melyet  $K$ -ból a (7) transzformációval kapunk, egyenesvonalú reprezentációnak nevezhetjük.

**329.** A következőkben olyan feltételeket fogalmazunk meg, melyeket  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -nek homogén tartományban ki kell elégíteni; továbbá megadjuk annak az  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  függvénynek explicit kifejezését, mely a görbevonalú  $K$  reprezentációból az egyenes  $K'$  reprezentációba vezet.

A (8a) egyenletből arra következtetünk, hogy

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \alpha' \Lambda^{(p)} \alpha^{-1}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

ahol  $\alpha'$  és  $\alpha$  a  $\mathbf{g}'$  és  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  elemeiből az I. Függelék 435. pont (13) egyenlete szerint határozandó meg,  $\Lambda^{(p)}$  egy Lorentz-mátrix; megjegyezzük, hogy

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x})$$

azaz a Lorentz-mátrix hat paramétere  $\mathbf{x}$  függvénye lehet. A  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ -ekre nagyon bonyolult differenciálegyenlet-rendszert kapunk, és ezért a (9) megoldás nem hasznavehető.

**330.** A II. Függelékben megadtuk (8a–b) explicit megoldását, és azonkívül tárgyaltuk azokat a feltételeket, amelyeknek  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -nek eleget kell tenni ahhoz, hogy a (8a–b) megoldással rendelkezzen. E kérdés nagy fontossága miatt itt röviden összefoglaljuk azokat a megfontolásokat, amelyeknek részletei a II. Függelékben találhatók.

Ha (8a)-t  $\mathbf{x}$  szerint differenciáljuk, és figyelembe vesszük, hogy  $\mathbf{g}' \circ \overleftarrow{\square} = 0$ , azt kapjuk, hogy (lásd a 471. pont (29) egyenletét)

$$(\mathbf{I} + c_3^{-1})(\mathbf{g} \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}) \overset{(3)}{\mathbf{S}}) = \overset{(3)}{\mathbf{g}}(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Ha most a  $\pi_3 = \mathbf{1} - c_3^{-1} + c_3^{-2}$  operátort a (10) egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\overset{(3)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}), \quad (11)$$

ahol

$$\overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \pi_3 \overset{(3)}{\mathbf{g}}(\mathbf{x}).$$

Így a (11) egyenlet egy lineáris differenciálegyenlet-rendszert szolgáltat, amelynek segítségével  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  meghatározható.

Mint hogy a (11) képlet jobb oldala a 2. és 3. indexben szimmetrikus kifejezést ad, az így kapott  $\overset{(3)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$  lehet egy függvény második deriváltja. Azonban mint látni fogjuk, e kifejezés nem felel meg szükségszerűen egy függvény második deriváltjának.

Az a kérdés, hogy a (11) egyenlet rendelkezik-e megoldással, közvetlenül nem válaszolható meg.

**331.** Ahhoz, hogy megkapjuk a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -re vonatkozó feltételt, amely (11) megoldhatóságát biztosítja, célszerű a (11) egyenletet  $\mathbf{x}$  szerint differenciálni. Azt találjuk, hogy

$$\overset{(4)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \overset{(4)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) - (24) \overset{(3)}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\mathbf{x}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}). \quad (12)$$

A (12) egyenlet az  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  részére új differenciálegyenletet ad; amennyiben ez utóbbi egyenlet megoldással rendelkezik, ezt úgy lehet előállítani, hogy előírunk egy kezdőfeltételt (amely (11)-et is kielégíti), és utána lépésről lépésre integrálunk.

Az  $\overset{(4)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$  egy harmadik derivált, és ezért szimmetrikusnak kell lennie az utolsó három indexben. Az ahhoz szükséges és elégséges feltétel, hogy a (12) egy ilyen szimmetriával rendelkező megoldásra vezessen, úgy írható, hogy (részletek a 477. pontban)

$$(1 - (24)) \overset{(4)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Ha a fenti egyenletben  $\overset{(4)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ -et (12) segítségével kifejezzük, azt találjuk, hogy

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \overset{(4)}{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = 0,$$

ahol

$$\overset{(4)}{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \pi_4 \overset{(4)}{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) + \overset{(3)}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\mathbf{x}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$$

a Riemann—Christoffel-tenzor. Mint hogy  $\det \mathbf{S}(\mathbf{x}) \neq 0$ , azt is írhatjuk, hogy

$$\overset{(4)}{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = 0. \quad (13)$$

A (13) összefüggés szükséges feltételt ad, amelyet  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  és deriváltjainak egy homogén tartomány minden pontjában kell kielégíteni. A  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  tehát csak akkor reprezentál egy homogén tartományt, ha a Riemann–Christoffel-tenzor, amely  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  és ennek első és második deriváltjaiból képezhető, a tartományban identikusan eltűnik.

**332.** A (13) feltétel nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele annak, hogy egy tartomány homogén legyen. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy (13)-at érvényesnek feltételezve, egy  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  függvényt konstruálunk, amelynek deriváltjai a (8a) és (8b) összefüggést kielégítik.

Az  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  függvény harmadik deriváltja — ha egy ilyen függvény egyáltalában létezik — a (12) összefüggésben megadott  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ . (12)-t háromszor integrálva megkapjuk az  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  függvényt, vagyis

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{S}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \mathbf{S}'(\mathbf{x}') \circ d\mathbf{x}')^{(3)}. \quad (14)$$

$\mathbf{S}(\mathbf{x})$  értékét az integrál alatt (12)-ből helyettesítjük be, az  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ -et pedig a (12) kifejezésben

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}_0) + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} (\mathbf{S}'(\mathbf{x}') \circ d\mathbf{x}')^{(2)} \quad (15)$$

formában írjuk be, ahol  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ -et (11)-ből kapjuk. Az így nyert kifejezés egy integrációs formula, amelynek segítségével a numerikus analízis ismert módszerei szerint lépésről lépésre az  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  függvényt ki tudjuk számítani.

Azonban (14) és (15) formulák jobb oldalán szereplő integrálokban az  $\mathbf{x}_0$ -tól  $\mathbf{x}$ -ig vezető integrációs utat rögzíteni kell ahhoz, hogy a kifejezések egyértelművé váljanak. A (14)-ben szereplő integrál minden esetben egyértelmű, mert  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  a második és harmadik indexben szimmetrikus, és ebből következik, hogy a felírt integrál értéke csak a határoktól függ, de független az integrációs úttól.

A (15) integrál szintén független az úttól, ha a (12)-ből nyert  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  függvény szimmetrikus a három utolsó indexben. Ez a szimmetria fennáll, ha (13) teljesül. Tehát ha (13) teljesül, akkor a (14) jobb oldalán fellépő integrál az integrációs úttól független, így  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  egyértelműen definiált függvény, és a (8a) és (8b) feltételeknek eleget tesz. Megjegyezzük, hogy  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  és  $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)$  értékét ( $\det \mathbf{S}(\mathbf{x}_0) \neq 0$  megszorítás mellett) tetszőlegesen választjuk; ezek az értékek kezdőfeltételnek felelnek meg.

Látjuk tehát, hogy ha (13) egy  $\mathfrak{R}$  tartományban érvényes, akkor a (15) integrál a (8a–b) egyenletek megoldását adja, tehát ebben az esetben létezik egy  $K(\mathfrak{g}) = \mathbf{g} = \text{konstans}$  reprezentáció.

**333.** Meggondolásainkat összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a fény terjedését egy  $\mathfrak{R}$  tartományban vizsgálva, tetszőleges koordinátamértékeket használva, sikerülhet a fényjelek pályáját az

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = 0$$

egyenlettel leírni. Ha  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  pont környékén a tartomány homogén, akkor a koordinátamértékeket a (14) és (15) segítségével meghatározható

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (16)$$

transzformáció segítségével egyenesvonalú reprezentációra lehet átváltoztatni. Az ily módon előállított  $K'$  reprezentációban azt találjuk, hogy  $K'(g)$  konstans. Az  $\mathbf{x}'$  koordinátamértékek meghatározzák annak az  $\mathfrak{R}$  tartománynak *egyenes*  $K'$  reprezentációját, amelyben a  $K$  reprezentáció görbevonalú reprezentációként szerepel.

**334.** A (16) transzformáció végigvitele nélkül közvetlenül is megállapíthatjuk: vajon  $\mathfrak{R}$  tartomány homogén-e. Tudniillik, a  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = K(g)$  segítségével az  $\mathfrak{R}$  tartományban az  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  <sup>(4)</sup> *Riemann—Christoffel*-tenzor értékét megállapíthatjuk, és amennyiben a tartomány homogén, azt találjuk, hogy az így képezett tenzor egyenlő zéróval.

*Ily módon kizárólag fényjelek segítségével meg tudjuk állapítani, hogy egy adott tartományban a fény homogén terjedést mutat-e, és amennyiben arra a következtetésre jutunk, hogy a terjedés homogén, akkor fényjelek felhasználásával az egyenesvonalú koordináta-rendszert fel is tudjuk építeni.*

A **320.** pontban felvetett kérdéshez visszatérve megjegyezzük, hogy meg tudjuk állapítani: az (a) feltétel fennáll-e vagy sem, függetlenül attól, hogy az órák és pontok, amelyek segítségével fényjelek indulását és érkezését megfigyeltük, a (b), (c) és (d) feltételeknek eleget tesznek-e.

Hangsúlyozzuk, hogy meggondolásaink nem abból indulnak ki, hogy az egyenesvonalú koordináta-rendszert valahogyan *definiáljuk*. Tetszőleges koordináta-rendszerből indulunk ki, és függetlenül attól, hogy hogyan választottuk a koordináta-rendszert, meg tudjuk állapítani, hogy a fény a vizsgált tartományban homogén módon terjed-e. Amennyiben azt találjuk, hogy a fény terjedése homogén, akkor fényjelek segítségével egyenesvonalú koordináta-rendszert fel tudunk építeni.

#### 4. MAJDNEM EGYENES VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK

**335.** Felmerül a kérdés: lehetséges-e inhomogén tartományban olyan vonatkoztatási rendszert találni, amely hasonlít az egyenesvonalú koordináta-rendszerhez. Homogén tartományban egyenesvonalú koordináta-rendszereket használhatunk, azonban éppen úgy használhatunk polár koordinátákat, amelyek görbevonalú koordináták. Kézenfekvő az a gondolat, hogy egy inhomogén tartományban szintén különbséget tudunk tenni egyrészt olyan koordináta-rendszerek között, amelyek az egyenesvonalú koordináták analógiáját jelentik, másrészt olyan koordináta-rendszerek között, amelyek inkább polár koordinátákhoz vagy más görbevonalú koordinátákhoz hasonlítanak. Így feltételezhetjük, hogy egy inhomogén tartományban is különbséget lehet tenni *majdnem egyenes* koordináták és *erősen görbe* koordináták között.

Hogy ilyen koordináta-rendszerhez jussunk, a (12) egyenletet kis mértékben megváltoztatjuk, oly módon, hogy homogén tartományban a változás <sup>(4)</sup> eltűnik. Abból indulunk ki, hogy  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ -nek az utolsó három indexben szim-

metrikusnak kell lennie ahhoz, hogy egy transzformációs függvény harmadik deriváltjait képviselje. A (12) egyenlet jobb oldali kifejezése nem rendelkezik szükségszerűen ilyen szimmetriával. A változtatás abban áll, hogy az egyenlet jobb oldalát átlagolással szimmetrizáljuk, így egy megfelelően szimmetrikus  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle$  függvényt definiálunk, amely szimmetrikus függvényből levezetett transzformáció azonban nem elégíti ki teljesen a (8) egyenlet-rendszert. A szimmetrikus függvényt a következő módon definiáljuk:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{3}(\mathbf{I} + (24) + (34)) \mathbf{S}^{(4)}.$$

Amint ezt a II. Függelékben a 479. pont (50) egyenlete mutatja, a (12) nem szimmetrikus.  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ -re vonatkozó megoldása különbözik  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle$  szimmetrizált megoldástól, a különbség  $\delta \mathbf{S}(\mathbf{x})$ , a *Riemann-Christoffel*-tenzor segítségével a következő módon fejezhető ki:

$$\delta \mathbf{S}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{3}(\mathbf{I} + (23))(\mathbf{S} \cdot \mathbf{R})^{(4)}.$$

Az  $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle$  függvény, amelyet  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle$  segítségével állíthatunk elő, nem vezet olyan  $K$  reprezentációhoz, amelyben  $\mathbf{g}$  pontosan állandó, hanem egy *majdnem* egyenes  $K'$  reprezentációt ad meg, amelyben

$$K'(\mathbf{g}) = \mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \mathbf{g}' + \delta \mathbf{g}'(\mathbf{x}'),$$

ahol

$$\delta \mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \frac{1}{6}(\mathbf{I} + (12)) \mathbf{R}' \mathbf{x}'^2 + \text{magasabb rendű tagok.}$$

Tehát a majdnem egyenes vonatkoztatási rendszerben  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$  majdnem állandó abban az értelemben, hogy a sorfejtés magasabbrendű tagjai nagyságrendben ugyanakkorák, mint  $\mathbf{R}'^{(4)}(\mathbf{x}')$  elemei és ezeknek megfelelő deriváltjai.

**336.** A  $K'$  reprezentációt majdnem egyenesnek lehet minősíteni a fent megadott szempont szerint. Azonban ezt a reprezentációt a *lehetséges leg-egyenesebb* reprezentációként is vehetjük a következő értelemben.

Bármilyen  $K'$  reprezentációt veszünk, amely olyan, hogy az origóban

$$\mathbf{g}'^{(3)}(\mathbf{x}') = 0 \tag{17}$$

érvényes, a *Riemann-Christoffel*-tenzor elemei a  $\mathbf{g}'^{(4)}$  elemeinek lineáris kombinációjából épülnek fel. A lineáris kombináció együtthatói egység nagyságrendűek.

Igy tehát  $\mathbf{R}'^{(4)}$  elemei lehetnek sokkal kisebbek, mint a  $\mathbf{g}'^{(4)}$ , hiszen az aránylag nagy számértékű elemek kompenzálhatják egymást, amikor ezeket az  $\mathbf{R}'^{(4)}$  kifejezésbe behelyettesítjük. Azonban  $\mathbf{g}'^{(4)}$ -nek olyan elemmel is kell rendel-



keznie, amelynek nagyságrendje  $\mathbf{R}'^{(4)}$ , hiszen másként nem volna lehetséges az  $\mathbf{R}'$ -et mint  $\mathbf{g}'^{(4)}$  elemeinek lineáris kombinációját előállítani.

Látható, hogy nem létezik olyan  $K'$  reprezentáció, amely (17)-nek eleget tesz, és amelyben  $\mathbf{g}'^{(4)}$  elemei mind lényegesen kisebbek, mint az  $\mathbf{R}'^{(4)}$  elemei. Arra a következtetésre jutunk tehát, hogy nem létezik olyan  $K'$  reprezentáció, amelyben  $\mathbf{g}'^{(3)} = 0$  mellett  $\mathbf{g}'^{(4)}$  elemei mind jóval kisebbek, mint  $\mathbf{R}^{(4)}$  elemei.

**337.** Amennyiben olyan reprezentációkat is figyelembe veszünk, amelyekben  $\mathbf{g}'^{(3)} \neq 0$ , a fenti eredményt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a

$$\mathbf{g}'^{-1}(\mathbf{g}'^{(3)} \circ \mathbf{g}'^{(3)}); \mathbf{g}'^{(4)}$$

mátrixok tartalmazzanak olyan elemeket is, amelyeknek nagyságrendje az  $\mathbf{R}'^{(4)}$  elemeinek nagyságrendjét eléri. Létezhethet tehát egy olyan reprezentáció, amelyben például  $\mathbf{g}'^{(4)} = 0$ , azonban egy ilyen reprezentációban  $\mathbf{g}'^{(3)}$  elemei megfelelő nagyságúak.

**338.** A fenti megfontolásokat általánosítva mondhatjuk, hogy a **335.** pontban bevezetett majdnem egyenes reprezentációk sajátossága, hogy megfelelő  $\mathbf{g}$  deriváltjaiból képezett homogén kifejezések, nagyságrendben nem lépik túl az  $\mathbf{R}^{(k+2)}$  mátrixok megfelelő elemeit. E megfontolás fordítottjaként megállapítjuk: egy vonatkoztatási rendszer akkor majdnem egyenes, ha

$$\mathbf{g}^{-n}(\mathbf{g}^{(k_1)} \circ \mathbf{g}^{(k_2)} \circ \dots \circ \mathbf{g}^{(k_n)})$$

elemei nagyságrendben nem lépik túl

$$\mathbf{g}^{-1} \mathbf{R}^{(k_1+k_2+\dots+k_n)}$$

elemeit.

A fenti megfontolások nem adják a majdnem egyenes reprezentációk pontos definícióját. Megjegyezzük, hogy  $K'$  és  $K''$  reprezentációk, amelyek a fenti feltételeket kielégítik, kismértékben különbözhetnek egymástól, és mégis mindkettő majdnem egyenes rendszer lehet.

## 5. HASONLÓ TARTOMÁNYOK

**339.** Vizsgáljunk egy nagyobb  $\mathfrak{R}_0$  tartományt, amelyben  $\mathfrak{R}$  és  $\mathfrak{R}^*$  kisebb résztartományok helyezkednek el (lásd a 27. ábrát).  $K$  reprezentációban az  $\mathfrak{R}_0$  tartományban a terjedési szort megadhatjuk, mint

$$K(\mathbf{g}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}).$$

$\mathbf{x}$  és  $\mathbf{x}^*$ -gal jelöljük  $\mathfrak{R}$  és  $\mathfrak{R}^*$  centrumainak koordinátáit, továbbá az  $\mathfrak{R}$  és  $\mathfrak{R}^*$

centrumaihoz viszonyított négyeskoordinátákat,  $\xi$ -vel és  $\xi^*$ -gal jelöljük, így azt írhatjuk, hogy

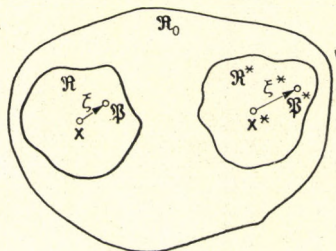
$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\xi) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x} + \xi), \\ \mathbf{g}^*(\xi^*) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}^* + \xi^*). \end{aligned}$$

Kivételes körülmények között  $\mathfrak{R}$  és  $\mathfrak{R}^*$  egymás transzformációiként fejezhetők ki. Pontosabban kifejezve, léteznek esetek, ahol található olyan  $\lambda(\mathbf{x})$  transzformáció, amely szerint

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}(\xi) \mathbf{g}^*(\xi^*) \mathbf{M}(\xi) &= \mathbf{g}(\xi), \\ \mathbf{M}(\xi) &= \lambda(\xi) \circ \bar{\square}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

és

$$\xi^* = \lambda(\xi).$$



27. ábra. Hasonló tartományok

Megjegyezzük, hogy általában (18) túlhatározott differenciálegyenlet-rendszert ad az ismeretlen  $\lambda(\mathbf{x})$ -re. Ha azonban a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  eloszlások  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{x}^*$  környékén megfelelnek bizonyos feltételnek, akkor a (18) rendszert ki lehet elégíteni. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy  $\mathfrak{R}$  és  $\mathfrak{R}^*$  *hasonló tartományok*.

Jelöljük  $\overset{(3)}{\mathbf{M}}(\xi)$ -vel és  $\overset{(4)}{\mathbf{M}}(\xi)$ -vel  $\mathbf{M}(\xi)$  deriváltjait. Így (11)-hez hasonlóan azt írhatjuk, hogy

$$\overset{(3)}{\mathbf{M}}(\xi) = \mathbf{M}(\xi) \cdot (\overset{(3)}{\mathbf{C}}(\xi) - \overline{\overset{(3)}{\mathbf{C}}(\xi)}), \quad (19)$$

ahol

$$\overline{\overset{(3)}{\mathbf{C}}(\xi)} = \overset{(III)}{\mathbf{M}}(\xi) \overset{(3)}{\mathbf{C}}^*(\xi^*) \overset{(2)}{\quad} \quad (19a)$$

és

$$\overset{(3)}{\mathbf{C}}^*(\xi^*) = \frac{1}{2} \pi_3 \overset{(3)}{\mathbf{g}}^*(\xi^*),$$

ahol  $\overset{(III)}{\mathbf{M}}(\xi)$   $\mathbf{M}(\xi)$  elemeiből úgy képezendő, mint  $\overset{(II)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$  az  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  elemeiből. (Lásd II. Függelék 462., (19) egyenlet.) A (19) egyenletrendszer akkor megoldható, ha

$$\overset{(4)}{\mathbf{R}}(\xi) = \overline{\overset{(4)}{\mathbf{R}}(\xi)}, \quad (20)$$

ahol azt írjuk, hogy

$$\overline{\overset{(4)}{\mathbf{R}}(\xi)} = \overset{(IV)}{\mathbf{M}}(\xi) \overset{(4)}{\mathbf{R}}^*(\xi^*) \overset{(4)}{\quad}.$$

**340.** A (20) egyenletrendszer 20 differenciálegyenletet ad  $\lambda(\xi)$  négy komponensére. Viszont  $\mathbf{M}(\xi)$  hat önkényes paramétert tartalmaz, tehát ha az  $\mathbf{M}(\xi)$ -t megfelelően választjuk, 14 feltétel marad meg  $\mathbf{g}(\xi)$  és  $\mathbf{g}^*(\xi^*)$  között.

Látjuk tehát, hogy fizikailag hasonló tartományokat 14 paraméter segítségével jellemezhetünk (a terjedési tenzorra felírható 14 feltételnek megfelelően). Továbbá, hasonló tartományok egymáshoz viszonyított helyzetét egy négydimenziós forgatással jellemezzük; az  $\mathfrak{R}$  és  $\mathfrak{R}^*$  tartományok relatív orientációját az  $\mathbf{M}(\xi)$  paramétereivel jellemezzük.

## C) AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT LORENTZ-ELV

**341.** A homogén tartományokban érvényes Lorentz-elv fogalmazásánál megállapítottuk, hogy a természettörvények olyan formájúak, hogy ha  $\mathfrak{Q}$  egy lehetséges fizikai rendszer, akkor e rendszer Lorentz-deformált formája

$$\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{L}_q(\mathfrak{Q})$$

szintén egy lehetséges fizikai rendszer. Ehhez az elvhez egy dinamikai részt is csatoltunk, amely kimondja, hogy amennyiben  $\mathfrak{Q}$ -t adiabatikus beavatkozásnak vetjük alá, e beavatkozás hatása alatt  $\mathfrak{Q}$  konfigurációja a  $\mathfrak{Q}^*$  konfigurációba változik át.

Homogén tartományokban az  $\mathfrak{L}_q$  transzformációk egyértelműen definiálhatók. Ahhoz, hogy a Lorentz-elvet inhomogén tartományokra kibővítsük, megpróbálhatjuk az  $\mathfrak{L}_q$  operátorok definícióját kiterjeszteni e tartományokra is.

### I. A LORENTZ-ELV ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA HOMOGÉN TARTOMÁNYOKBAN

**342.** Egy  $\mathfrak{Q}$   $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$  pontokból álló rendszert vizsgálva feltételezhetjük, hogy a deformált  $\mathfrak{Q}^*$  rendszer megfelelő  $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \dots, \mathfrak{P}_n^*$  pontokból áll.  $\mathfrak{Q}$  pontjainak pályáit

$$\mathbf{x}_k(p) = \mathbf{r}_k(p), t_k(p), \quad \dot{t}_k(p) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

négyeskoordinátákkal fejezhetjük ki. A Lorentz-transzformáció egy invertálható transzformációval fejezhető ki:

$$\mathbf{x}^* = \lambda(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \lambda^{-1}(\mathbf{x}^*). \quad (21a)$$

A deformált rendszer pontjainak négyeskoordinátái

$$\mathbf{x}_k^*(p) = \lambda(\mathbf{x}_k(p))$$

szerint adódnak.

**343.** Egy homogén tartományban, ha egyenesvonalú reprezentációt használunk,

$$\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_q \mathbf{x} + \mu, \quad (21b)$$

ahol

$$\tilde{\mathbf{M}}_q \mathbf{g} \mathbf{M}_q = \mathbf{g}.$$

A Lorentz-elvet homogén tartományban görbevonali koordináták segítségével is leírhatjuk. Amennyiben a görbevonali koordinátákban kifejezve

$$K(g) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}\text{-től függ,}$$

akkor

$$\mathbf{x}^* = \lambda(\mathbf{x}) \quad (22)$$

és

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^*(\mathbf{x}^*) \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (23a)$$

ahol

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \circ \overleftarrow{\square} \quad (23b)$$

és

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}^*) = \mathbf{g}(\lambda(\mathbf{x})). \quad (23c)$$

A (23a-b-c) egy  $\lambda(\mathbf{x})$  függvényt definiál, viszont ez az egyenletrendszer matematikailag általában túlhatározott. Homogén tartományokban azonban az egyenletrendszer megoldással rendelkezik, és ebben az esetben a (22) és (23) által definiált Lorentz-transzformáció ekvivalens a (21a) és (21b) által definiált transzformációval.

## 2. INHOMOGÉN TARTOMÁNYRA VONATKOZÓ ÁLTALÁNOSÍTÁS

**344.** Az inhomogén tartományban nem tételezhetjük fel, hogy a (22) és (23) egyenletek definiálják a Lorentz-transzformációt, hiszen ezek az egyenletek az inhomogén tartományban túlhatározott egyenletrendszert alkotnak, és ennek az egyenletrendszernek csak kivételes esetekben van megoldása. Mégis fel kell tételeznünk, hogy a Lorentz-transzformáció a (22) és (23) egyenletekkel valahogy kapcsolatban van.

Vegyünk egy  $\Omega$  fizikai rendszeren áthaladó  $\mathfrak{s}$  fényjelet. A fényjel pályáját  $\mathbf{x}_s(p)$  négyeskoordináta segítségével leírhatjuk:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(p) \mathbf{g}(\mathbf{x}_s(p)) \dot{\mathbf{x}}_s(p) = 0.$$

Ha a  $\Omega$  rendszert deformációnak vetjük alá, egy  $\Omega^*$  rendszert kapunk, amelyen az  $\mathfrak{s}^*$  fényjel halad át. Azt várjuk, hogy  $\mathfrak{s}^*$  pályáját az

$$\mathbf{x}_s^*(p) = \lambda(\mathbf{x}_s(p)) \quad (24)$$

egyenlet adja meg. Minthogy  $\mathfrak{s}^*$  egy fényjel, azt várjuk, hogy pályájának koordinátái a

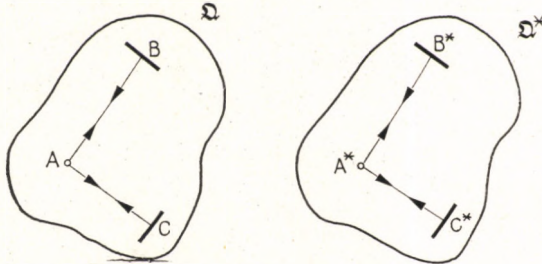
$$\dot{\mathbf{x}}_s^*(p) \mathbf{g}(\mathbf{x}_s^*(p)) \dot{\mathbf{x}}_s^*(p) = 0 \quad (25)$$

összefüggést kielégítsék. Ha mind a (24), mind pedig a (25) érvényes,  $\lambda(\mathbf{x})$ -nek a (23) összefüggést ki kell elégítenie.

A  $\Omega$ -n áthaladó  $\mathfrak{s}$  fényjel deformáció folytán egy  $\mathfrak{s}^*$ , a  $\Omega^*$ -on áthaladó fényjellé változik át. Abból a hipotézisből kiindulva, hogy e deformációt egy koordináta-transzformáció jellegű  $\lambda$  függvénnyel lehet kifejezni, a (23) feltételhez jutunk. Minthogy a (23) feltétel túlhatározott, arra a következtetésre jutunk, hogy a fenti hipotézis nem lehet teljesen helytálló.

a) Egy fizikai példa

345. A fenti hipotézis fizikai jelentésének jobb megértése céljából vizsgáljunk egy *Michelson*-interferométerhez hasonló  $\mathcal{D}$  rendszert. Tételezzük fel, hogy  $\mathcal{D}$  egy szilárd test, amelyre  $A$  pontban fényforrást,  $B$  és  $C$  pontokban pedig tükröket helyeztünk el. A tükröket úgy állítjuk be, hogy az  $A$ -ból kiinduló fényjel a tükrök által  $A$ -ba verődjön vissza. A fényforrás és a tükrök közötti távolságot állítsuk be úgy, hogy az  $A$ -ból  $B$ , illetve  $C$  felé kiinduló jelek egy időben érkezzenek vissza, vagyis az  $A-B-A$  és az  $A-C-A$  utakon történő repülési idők egyformák legyenek (28. ábra).



28. ábra. Interferométer sémája

A  $\mathcal{D}^*$  deformált rendszer  $A^*$  fényforrást,  $B^*$  és  $C^*$  tükröket tartalmazza. Az előző pontban feltételezett hipotézis alapján azt várnánk, hogy az  $A^*-B^*-A^*$  és  $A^*-C^*-A^*$  repülési idők szintén egyformák lesznek.

A  $\mathcal{D}^*$  deformált rendszer az eredeti  $\mathcal{D}$  interferométert eltolás és esetleg elforgatás utáni helyzetben jelenti (az elforgatás alatt négydimenzionált elforgatást értünk).

346. Egy interferométert egyik helyzetből a másikba áttolva megváltoztatjuk az interferométer gravitációs környezetét. A 341. pontban feltételezett hipotézis szerint ebben az esetben azt kellene várni, hogy az egyik helyzetben beállított interferométer a másik, megváltozott gravitációs mezőben levő helyzetben is megőrzi az eredeti beállítását.

A fenti feltételezés azonban nem fogadható el. A gravitációs mező mechanikai feszültségeket okoz a rendszerben, és ennek folytán a rendszer deformációkat szenved. Semmi okunk nincs feltételezni, hogy a megváltozott gravitációs mező által egy mechanikai rendszerben létrehozott deformációk alkalmasak lennének a fény haladására gyakorolt gravitációs hatás pontos kompenzálására.

Hogy lássuk, milyen tartahatatlan volna az a feltételezés, hogy a gravitációs deformációk a fény terjedési módja változását kompenzálnák, vizsgáljuk meg, hogyan viselkedne egy *Michelson*-féle interferométer, ha karjai függőleges síkban egy vízszintes tengely körül forognának. Az interferométer tengely körüli forogtatását *Lorentz*-deformációnak vehetjük. Világos, hogy az interferométer a forogtatás folytán saját súlya alatt deformálódik, és semmi esetre sem várható, hogy az interferenciakép változatlan marad egy ilyen elforgatás esetében.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy az interferométer saját súlya által szenvedett deformációjának mértéke nagyon erősen függ az interferométer anyagának tulajdonságaitól. Tehát két különböző anyagból épített interferométer különböző módon deformálódik, ha vízszintes tengely körül forgatjuk.

**347.** Egy nagyon kicsi és nagyon kemény anyagból felépített interferométerre gondolva feltételezhetjük, hogy a deformációk elhanyagolhatóan kicsik lesznek, és így az interferométer viselkedése gyakorlatilag a gravitációs feszültségektől függetlenné válik. Így a nagyon kicsi és nagyon erősen összetartó interferométer esetében várhatjuk, hogy a forgatás nem okoz interferencia-eltolódást akkor sem, ha az interferométert egy vízszintes tengely körül forgatjuk.

A fenti kvalitatív megfontolások arra a következtetésre vezetnek, hogy a Lorentz-elv egy inhomogén tartományban csupán elég kicsi és elég erősen összetartó rendszerekre érvényes.

A következőkben megadjuk ennek a kvalitatív eredménynek a matematikai fogalmazását.

### 3. KIS FIZIKAI RENDSZEREKRE ÉRVÉNYES LORENTZ-ELV

**348.** A Lorentz-deformáció első közelítésben egy  $\mu$  négyesvektorral jellemzett adiabatikus eltolódásból és egy négydimenziós elforgatásból áll, amelyet egy  $\Lambda_q$  ortogonális Lorentz-mátrixszal írhatunk le. A deformációt tehát első közelítésben tíz paraméter segítségével — tudniillik  $q$  és  $\mu$  komponenseivel — fejezhetjük ki.

Általában egy rendszer bizonyos mértékben deformálódik, ha az inhomogén tartományban elforgatjuk vagy eltoljuk, hiszen e műveletek a rendszerben fellépő gravitációs feszültségeket megváltoztatják.

#### a) Első közelítés

**349.** Ahhoz, hogy első közelítésben megadjuk, hogy mi történik egy kis és erősen összefüggő  $\mathcal{Q}$  rendszerrel, ha egy  $q, \mu$  eltolásnak vetjük alá, vizsgáljunk egy  $\mathcal{Q}$  rendszert, mely az  $x_0$  négyeskoordinátával rendelkező  $\mathfrak{P}_0$  négyespont közelében helyezkedik el.  $\mathcal{Q}$  pontjai

$$x_k(p) = x_0 + \xi_k(p)$$

koordinátákkal rendelkeznek. Az  $\xi_k(p)$  koordinátákról feltételezzük, hogy kicsik.

Az eltolt  $\mathcal{Q}^*$  rendszer középpontja  $\mathfrak{P}_0^*$ , melynek négyeskoordinátája

$$x_0^* = x_0 + \mu.$$

A deformált rendszer  $\mathfrak{P}_k^*$  pontjainak négyeskoordinátáit

$$x_k^* = x_0^* + \xi_k^*(p)$$

írja le. A  $\lambda(\mathbf{x})$  transzformációs függvényről nem tételezhetjük fel, hogy pontosan kielégíti a (23) egyenletet. Feltételezhetjük azonban, hogy nem túl nagy  $\xi$  értékekre

$$\tilde{\mathbf{M}}(\xi) \mathbf{g}^*(\xi^*) \mathbf{M}(\xi) \approx \mathbf{g}(\xi) \quad (26)$$

érvényes. A fenti egyenletben azt írtuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi) &= \Lambda(\xi) \circ \overline{\square}, \\ \Lambda(\xi) &= \lambda(\mathbf{x}_0 + \xi) - \lambda(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{g}(\xi) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0 + \xi), \quad \mathbf{g}^*(\xi^*) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0 + \mu + \xi^*). \end{aligned}$$

Tehát a  $\lambda(\mathbf{x})$  függvény az  $\mathbf{x}_0$  környékét összeköti az  $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}_0 + \mu$  környékével, és azt várjuk, hogy e két pont megfelelő kis környezetében a (23) egyenlet közelítőleg érvényes.

**350.** Tételezzük fel, hogy a (26) összefüggés a  $\xi = \xi^* = 0$  pontban pontosan érvényes. Ebben az esetben

$$\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{g}^* \mathbf{M} = \mathbf{g}, \quad (27)$$

ahol  $\mathbf{M}$ -et írunk  $\mathbf{M}(0)$  helyett. (27) megoldásai

$$\mathbf{M}_q = \alpha^{-1} \Lambda_q \alpha,$$

ahol  $\Lambda_q$  ortogonális Lorentz-mátrixok,  $\alpha$  és  $\alpha^*$  viszont az I. Függelék 435. pontjában explicite megadott mátrixok.

E közelítésben azt is írhatjuk, hogy

$$\lambda(\mathbf{x}) \approx \lambda_q^{(1)}(\mathbf{x}) = \mu + \mathbf{M}_q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

vagy

$$\Lambda(\xi) \approx \Lambda_q^{(1)}(\xi) = \mathbf{M}_q \xi.$$

Az így definiált transzformációk tíz paramétert tartalmaznak. E paraméterekből négy a  $\mu$ -t, a többi pedig  $\mathbf{q}$ -t, az  $\mathbf{M}_q$  négydimenzionális elforgatás paramétereit határozza meg.

### b) Második közelítés

**351.** A (23) megoldásának jobb közelítéséhez jutunk, ha a (23) első deriváltjaiként felírható összefüggésnek az  $\mathbf{x}_0$  pontban való teljesülését is elvárjuk, tehát azt, hogy

$$[\tilde{\mathbf{M}}(\xi) \mathbf{g}^*(\xi^*) \mathbf{M}(\xi) - \mathbf{g}(\xi)] \circ \overline{\square} = 0, \quad \text{ha } \xi = 0.$$

Ebből az összefüggésből a **339.** pont (19) egyenlete segítségével az következő, hogy

$$\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \left( \mathbf{C} - \overline{\mathbf{C}} \right),$$

ahol  $\overline{\mathbf{C}}$  (19a) szerint van definiálva. Így tehát ebben a közelítésben

$$\Lambda(\xi) \approx \Lambda_q^{(2)}(\xi) = \mathbf{M}_q \xi + \frac{1}{2} \mathbf{M}_q \cdot \left( \mathbf{C} - \overline{\mathbf{C}} \right) \xi^2. \quad (28)$$

**352.** A (28) közelítést már nem lehet lényegesen tovább javítani, hiszen egy olyan követelmény, hogy a (23)-nak az elsónél magasabbrendű deriváltjai  $\mathbf{x}_0$  pontban teljesüljenek, ellentmondásos követelményekre vezet.

A Lorentz-elv ama megfogalmazása, ahol a Lorentz-deformációkat a (28)-cal adjuk meg, még nem tökéletes definíció, és a következő okokból további javításra szorul:

A  $\Lambda^{(2)}(\xi)$  függvény, amelyet (28) által definiáltunk, nem invariáns. Egy nemlineáris transzformáció segítségével

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

egy  $K$  vonatkoztatási rendszerből  $K'$  reprezentációra áttérve az új reprezentációban

$$\Lambda^{(2)'} = \mathbf{f} \Lambda^{(2)} \mathbf{f}^{-1}$$

összefüggést kapjuk, és az így meghatározott  $\Lambda^{(2)'} \mathbf{x}'$ -ben magasabbrendű tagokat tartalmaz még akkor is, ha  $\Lambda^{(2)}$  az  $\mathbf{x}$ -ben nem tartalmaz ilyen tagokat.

Ha  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  erősen különbözik lineáris függvénytől, általában a  $\Lambda^{(2)}$  sorfejtésében a magasabbrendű tagok nagyon lényegessé válnak. Ha minden reprezentációban (28) által definiálnánk a deformációoperátort, akkor erősen a reprezentációtól függő deformációhoz jutnánk. A (28) deformációnak e sokértelműségét azonban csökkenthetjük, ha figyelembe vesszük, hogy (23) a *majdnem egyenes* koordinátareprezentációban teljesül legjobban. Tehát azt követelhetjük, hogy (28) majdnem egyenes reprezentációra legyen érvényes, és görbe reprezentációban (28)-at megfelelő, magasabbrendű tagokkal kell kiegészíteni.

Legjobban a homogén eseten keresztül láthatjuk be, hogy egy ilyen megszorításra valóban szükség van. A homogén tartományban a Lorentz-transzformációt lineáris transzformációként írhatjuk le, ha egyenesvonalú reprezentációt használunk. Görbevonalú reprezentáció esetében azonban a transzformációs függvény nemlineárisává válik, a  $\lambda'(\mathbf{x}')$  sorfejtésben fellépő magasabbrendű tagok éppen a reprezentáció görbületét kompenzálják.

#### 4. A LORENTZ-ELV MEGFOGALMAZÁSÁBAN FELLÉPŐ TÖBBÉRTELMŰSÉG

**353.** Még akkor is fennmarad bizonyos mértékű többértelműség, ha a (28)-at csak majdnem egyenes reprezentációkra tekintjük érvényesnek, hiszen a majdnem egyenes reprezentációk közötti transzformációk nem pontosan lineárisak, és ezért a deformációoperátorok különböző, majdnem egyenes koordináta-rendszerekben más és más magasabbrendű tagokat tartalmaznak. Írhatjuk tehát, hogy

$$\Lambda(\xi) = \mathbf{M}_q \xi + \frac{1}{2} \mathbf{M}_q^{(3)} \xi^2 + \text{magasabb rendű tagok}, \quad (28a)$$

és feltételezzük, hogy a majdnem egyenes reprezentációban a magasabbrendű tagok „kicsik”, vagyis ezek a tagok nem lépik túl az  $\mathbf{R}$ ,  $k = 4, 5, \dots$  invariáns elemek nagyságrendjét.



**354.** Megadunk egy módszert arra, hogy hogyan lehet egy tetszőleges reprezentációban megadni azt a  $\Lambda(\xi)$  transzformációt, amelynek az a tulajdonsága, hogy a majdnem egyenes koordináta-rendszerben a (28) egyenletnek eleget tesz. A **335.** pontban kifejtettekből következik, hogy (23) pontos megoldásának a

$$\mathbf{M}^{(4)}(\xi) = (\mathbf{M}(\xi)) \cdot (\mathbf{C}^{(3)}(\xi) - \overline{\mathbf{C}^{(3)}(\xi)}) \circ \overline{\square}$$

összefüggést kell kielégítenie. Bár a fenti összefüggésből egy  $\mathbf{M}^{(4)}(\xi)$  kiszámítható, azonban ez a mennyiség nem rendelkezik egy második deriváltban fellépő szimmetriákkal.

Az  $\mathbf{M}^{(4)}(\xi)$ -et szimmetrizálva az

$$\langle \mathbf{M}^{(4)}(\xi) \rangle = \frac{1}{3} (\mathbf{1} + (24) + (34)) \mathbf{M}^{(4)}(\xi)$$

összefüggés segítségével egy teljes differenciálhoz jutunk, és

$$\Lambda(\xi) = \mathbf{M} \xi + \frac{1}{2} \mathbf{M}^{(3)} \xi^2 + \frac{1}{6} \int_0^\xi \langle \mathbf{M}^{(4)}(\xi') \rangle (\xi - \xi')^2 d\xi' \quad (29)$$

szerint definiálhatjuk a  $\Lambda(\xi)$  függvényt. (A jobb oldalon fellépő integrál értéke nem függ az integrációs úttól, mivel  $\langle \mathbf{M}^{(4)}(\xi) \rangle$  teljes differenciál.)

A fenti kifejezés majdnem egyenes reprezentációban a lineáris tagokon kívül csak kis tagokat tartalmaz, görbevonalú koordinátákban azonban a (29) kifejezés  $\mathbf{R}^{(4)}(\xi)$  nagyságrendű tagok mellett még olyan tagokat is tartalmaz, melyek a reprezentáció görbületét kompenzálják.

**355.** Gondolhatnánk arra is, hogy a (29) egyenlet „pontos definíciója” az inhomogén tartományban érvényes Lorentz-transzformációnak. Ez a feltételezés azonban nem helytálló. A (29) egyenlet inhomogén tartományban csak majdnem invariáns, és pedig olyan értelemben, hogy a (29) kifejezés különböző vonatkoztatási rendszerekben majdnem egyforma, de nem feltétlenül pontosan egyforma deformációkra vezet. Írjuk, hogy

$$K(\mathcal{L}) = \Lambda(\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad K'(\mathcal{L}) = \Lambda'(\mathbf{x}'),$$

azaz vegyük  $\Lambda(\mathbf{x})$ -et és  $\Lambda'(\mathbf{x}')$ -t mint egy  $\mathcal{L}$  operátor  $K$  és  $K'$  vonatkoztatási rendszerekben való reprezentációit. A részletes számítás azt mutatja hogy (a II. Függelék terminológiája szerint)

$$\Lambda(\mathbf{x}) \approx \overline{\Lambda}(\mathbf{x}).$$

Tehát az  $\mathcal{L}$  operátor majdnem úgy transzformálódik, mint egy tenzor, — de nem pontosan.

Tehát az inhomogén tartományokra vonatkozó Lorentz-elv úgy fogalmazható, hogy a fent megadott — nem egészen egyértelműen meghatározható —  $\mathcal{L}$  transzformációval egy valódi fizikai rendszert leképezünk, akkor (megfelelő közelítésben) egy lehetséges fizikai rendszerhez jutunk.



## AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT LORENTZ-ELV ALKALMAZÁSAI

### A) GEODETIKUS PÁLYÁK

#### 1. DEFINÍCIÓ

**356.** Ahhoz, hogy különböző fizikai törvények inhomogén tartományban érvényes formáját megtaláljuk, érdemes azt a kérdést megvizsgálni, hogyan lehet matematikailag általánosítani a homogén tartományban érvényes törvényeket. Miután megtaláltunk ilyen általánosításokat, mindig kísérletileg kell eldönteni, vajon ezek az általánosítások valódi törvényeket fejeznek ki vagy sem.

A fizikai törvények ilyen hipotetikus felállításához értékes útmutató, hogy a törvények matematikai formája a majdnem egyenes reprezentációban jó közelítésben megegyezik a homogén tartományban érvényes formákkal.

**357.** NEWTON első törvényéből kiindulva vizsgáljunk egy homogén tartományban tartózkodó kis zárt fizikai rendszert. Ez utóbbit részecskének is vehetjük. A rendszer helyzetét  $\mathbf{x}'(p)$  négyeskoordináta segítségével fejezhetjük ki, és egyenes  $K'$  reprezentációban azt írhatjuk, hogy

$$\ddot{\mathbf{x}}'(p) = 0. \quad (1)^*$$

Az (1) összefüggést transzformálhatjuk egy görbevonallú  $K$  reprezentációra az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

transzformáció használatával. A (2) összefüggésbe  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p)$ -t beírva és  $p$  szerint differenciálva azt találjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{x}}'(p) = \mathbf{S}(p) \dot{\mathbf{x}}(p), \quad (3)$$

ahol azt írtuk, hogy

$$\mathbf{S}(p) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \circ \overline{\square})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}.$$

\* Az (1) összefüggés helyett írhatjuk azt is, hogy

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(p), \quad t = t(p). \quad (1a)$$

A fenti egyenlet több megoldást tartalmaz, mint az (1) egyenlet, hiszen az (1) egyenlet  $t$  és  $p$  között lineáris összefüggést tételez fel. Minthogy azonban a leszűkített (1) összefüggés már az összes lehetséges pályákat megadja, nem szükséges az általánosabb (1a) összefüggést használni. (Lásd ezzel kapcsolatban Found. Phys., 1, No. 2, 111, 1970., 1, No. 3, 251, 1971.)

Ha a (3) összefüggést még egyszer  $p$  szerint differenciáljuk, (1)-et is figyelembe véve azt találjuk, hogy

$$0 = \overset{(3)}{\mathbf{S}}(p) \dot{\mathbf{x}}^2(p) + \mathbf{S}(p) \ddot{\mathbf{x}}(p).$$

Balról  $\mathbf{S}^{-1}(p)$ -vel szorozva azt találjuk, hogy

$$\ddot{\mathbf{x}}(p) + \overset{(3)}{\mathcal{C}}(p) \dot{\mathbf{x}}^2(p) = 0$$

ahol (lásd 472. pont)

$$\mathbf{S}^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{S}} = \mathbf{g}^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{C}} = \overset{(3)}{\mathcal{C}}.$$

## 2. A GEODETIKUS PÁLYÁK LORENTZ-INVARIÁNCIÁJA

**358.** A fenti eredményt általánosítva feltételezhetjük, hogy inhomogén tartományban a szabad részecskék mozgásegyenlete

$$\ddot{\mathbf{x}} + \overset{(3)}{\mathcal{C}} \dot{\mathbf{x}}^2 = 0 \quad (4)$$

formában írható fel. A fenti összefüggés Lorentz-invariáns. Ezt a következő módon mutatjuk be.

Az  $\mathbf{x}_0$  pont közelében elhaladó néhány részecskét vizsgálva pályájuk az

$$\ddot{\xi}_k + \overset{(3)}{\mathcal{C}} \dot{\xi}_k^2 = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

mozgásegyenletnek felel meg, ahol

$$\overset{(3)}{\mathcal{C}} = \overset{(3)}{\mathcal{C}}(\xi_k),$$

továbbá

$$\mathbf{x}_k(p) = \mathbf{x}_0 + \xi_k.$$

Ha az  $\mathbf{x}_0$  környékén elhaladó pályákat Lorentz-transzformációnak vetjük alá,

$$\mathbf{x}_k^*(p) = \mathbf{x}_0^* + \xi_k^*$$

koordinátákkal rendelkező deformált pályákat kapunk. A 353. pont (28a) egyenletben megadott Lorentz-transzformáció segítségével azt kapjuk, hogy

$$\xi_k^* = \mathbf{M}_q \left( \xi_k + \frac{1}{2} (\overset{(3)}{\mathcal{C}} - \overline{\overset{(3)}{\mathcal{C}}}) \xi_k^2 \right) + \xi^3\text{-nagyságrendű tagok},$$

ahol

$$\overline{\overset{(3)}{\mathcal{C}}} = \mathbf{g}^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{C}} \quad \text{és} \quad \overline{\overset{(3)}{\mathbf{C}}} = (\mathbf{M}_q \overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*))^{(3)}.$$

Ha most a fenti egyenletet kétszer  $p$  szerint differenciáljuk,

$$\ddot{\xi}^* = \mathbf{M}_q (\ddot{\xi}_k + (\overset{(3)}{\mathcal{C}} - \overline{\overset{(3)}{\mathcal{C}}}) \dot{\xi}_k^2) + \ddot{\xi} \text{ nagyságrendű tagok} \quad (6)$$

A „ $\xi$  nagyságrendű tagok” közé  $\overset{(3)}{\mathcal{C}}\xi_k \dot{\xi}_k$  tagokat is beleszámítottuk. Ezeket a tagokat valóban kicsinek vehetjük, ha összehasonlítjuk azokkal a tagokkal, amelyek  $\xi$ -t nem tartalmaznak, hiszen abból a feltételezésből indulunk ki, hogy a Lorentz-transzformáció csak  $x_0$ -nak kis környezetére érvényes. (A  $\dot{\xi}_k$  sebességmértékeknek és a  $\ddot{\xi}_k$  gyorsulásoknak nem kell kicsiknek lenniük.)

A definícióknak megfelelően azt találjuk, hogy

$$\mathbf{M}_p \overset{(3)}{\mathcal{C}}\xi_k^2 = \overset{(3)}{\mathcal{C}}^* \xi_k^{*2},$$

így (6)-ból következik, hogy

$$\ddot{\xi}_k^* + \overset{(3)}{\mathcal{C}}^* \xi_k^{*2} = \mathbf{M}_q(\ddot{\xi}_k + \overset{(3)}{\mathcal{C}}\xi_k^2),$$

tehát (5) segítségével

$$\ddot{\xi}_k^* + \overset{(3)}{\mathcal{C}}^* \xi_k^{*2} = 0.$$

Ebből látjuk, hogy a 355. pont értelmében a (4) összefüggés Lorentz-invariáns.

### a) Geodetikus pályák és a Lorentz-elv

**359.** A (4) mozgásegyenletnek van még egy más értelmezése. A Lorentz-elv dinamikai részéből következik, hogy  $\mathcal{D}$  rendszer — adiabatikus beavatkozás eredményeként — a Lorentz-deformált  $\mathcal{D}^*$  rendszerbe megy át. Egy  $\mathbf{v}$  kezdeti sebességgel rendelkező részecske  $t$  idő alatt egy  $\mathbf{v}t$  eltolódást szenved, ha semmiféle beavatkozás nincs. Ezt az eltolódást egy „spontán” Lorentz-deformációként értelmezhetjük.

Egy rendszer vándorlása inhomogén tartományban e folyamat analógiájának vehető. A (4) egyenletnek megfelelő mozgást számos kis spontán Lorentz-deformáció összegeződésének is vehetjük. Ily módon egy részecske gravitációs mezőben való mozgása egymásután bekövetkező Lorentz-deformációknak is minősíthető.

## B) GRAVITÁCIÓS MEZŐBEN ÉRVÉNYES MOZGÁSEGYENLETEK

**360.** A következőkben a mozgásegyenletek néhány tulajdonságának vizsgálata során feltételezzük, hogy  $g$  ismert. A  $g$  és a gravitációs mező közötti összefüggést később tárgyaljuk.

A (4) mozgásegyenleteknek egy integrálját állíthatjuk elő. Szorozzuk be balról az (5) egyenletet  $\dot{\xi}(p) \mathbf{g}(p)$ -vel, így egy teljes differenciált kapunk. A Christoffel-szimbólumok explicit kifejezését felhasználva azt találjuk, hogy

$$\dot{\xi}(p) \mathbf{g}(p) \ddot{\xi}(p) + \dot{\xi}(p) \overset{(3)}{\mathcal{C}}(p) \dot{\xi}^2 = \frac{d}{dp} (\dot{\xi}(p) \mathbf{g}(p) \dot{\xi}(p)). \quad (7)$$

Az (5) és (7) egyenleteket összehasonlítva a mozgásegyenletek integráljaként azt kapjuk, hogy

$$\dot{\xi}(p) \mathbf{g}(p) \dot{\xi}(p) = \text{konstans} . \quad (8)$$

Abban a különleges esetben, ha az állandót zérónak vesszük, fényjelek pályáira érvényes összefüggést kapunk. Így feltételezhetjük, hogy a (4) mozgásegyenletek nemcsak szabad részecskékre, hanem fényjelek pályáira is érvényesek.

## 1. VARIÁCIÓS ELVEK

**361.** A (4) egyenlet levezetésében magasabbrendű tagokat elhanyagoltunk. Ennek ellenére a következő értelemben a (4) egyenletet egzaktnak vehetjük.

Pályákat  $\mathbf{x}(p)$  négyeskoordinátákkal írva le, vizsgálhatjuk azokat a pályákat, amelyek a

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \dot{\mathbf{x}}(p) \mathbf{g}(p) \dot{\mathbf{x}}(p) dp = 0 \quad (9)$$

variációs egyenletnek eleget tesznek. A (9) egyenletnek megfelelő *Euler*-féle egyenleteket úgy írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dp} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = 0 , \quad (10)$$

ahol

$$\Theta(p) = \dot{\mathbf{x}}(p) \mathbf{g}(p) \dot{\mathbf{x}}(p) , \quad (11)$$

és amint egyszerű számítással kimutatható, a (10) és (11) egyenletek a (4) egyenletre redukálhatók. Tehát a (4) mozgásegyenleteket a (9) variációs elvvel is helyettesíthetjük. Megjegyezzük, hogy (9) variációs elv invariáns módon határozza meg a pályákat, vagyis (9) egyenlet tartalma független a reprezentációtól. Ezt belátjuk, ha figyelembe vesszük, hogy  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  transzformációit úgy definiáltuk, hogy a (9) kifejezés integrandusa, vagyis  $\Theta(p)$  koordináta-transzformáció esetében változatlan marad. Ebből az következik, hogy a (9) megoldásai — tehát a (4) megoldásai is — a reprezentációtól független pályákat határoznak meg. A (4) vagy (9) különböző reprezentációkban való megoldásai egy és ugyanazon pályák reprezentációit adják.

### a) *Eltérések a geodetikus pályáktól*

**362.** A (4) egyenletből levezetett pályák a fentiek ellenére mégis tartalmaznak határozatlanságot. A (4) segítségével egyértelműen meghatározott geodetikus pályák elég kis és erősen összetartó objektumok pályáit adják meg jó közelítésben.

Egy bolygó mozgását vizsgálva azt találjuk, hogy a geodetikus pálya a bolygó pályájának kitűnő első közelítését adja. Nagyon pontos vizsgálat során azonban azokat a deformációkat is figyelembe kell venni, amelyeket a bolygó azáltal szenved, hogy a pálya mentén gravitációs környékét változtatja, vagyis a bolygóban lefolyó apály—dagály jelenséget is figyelembe kell venni.

Az apály—dagály jelenség a bolygók pályáját bizonyos mértékben zavarja, és ezért a bolygó valódi pályája — ha kis mértékben is— mégis eltér a geodetikus pályától. Az eltérés nagysága a bolygó belső mechanikai tulajdonságaitól függ, mivel ezek határozzák meg, hogy a változó gravitációs mező milyen változásokat hoz létre a bolygó testében.

Ha a bolygó mozgását *Lorentz*-deformációk sorozataként fogjuk fel — miként azt a 359. pontban magyaráztuk —, belátjuk, hogy a *Lorentz*-transzformációban szereplő bizonytalan magasabb rendű tagok felelnek meg azoknak a deformációknak, amelyek a bolygópályát ily módon befolyásolják. A bolygó pályájának a geodetikus pályától várt eltérése a *Lorentz*-transzformáció határozatlan magasabbrendű tagjaival áll összefüggésben.

## 2. A VARIÁCIÓS ELV FIZIKAI TARTALMA

363. A (9) variációs elv fizikai tartalmát jobban megvilágíthatjuk, ha az elvet módosított formában írjuk fel. Vezessük be a

$$\dot{\mathbf{x}}/\dot{x}_4 = \mathbf{w}, 1$$

vektort, ahol  $\mathbf{w}$  a  $\mathcal{Q}$  középpontjának sebessége. Azt írhatjuk, hogy

$$\Theta = ((\mathbf{w} + \mathbf{v}) \mathbf{G}(\mathbf{w} + \mathbf{v}) - c^2) \dot{x}_4^2,$$

ahol

$$c^2 = -g_{44} + \mathbf{v} \mathbf{G} \mathbf{v}$$

és

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{V},$$

és  $\mathbf{V}$  a  $g_{k4}$ ,  $k = 1, 2, 3$  komponensekkel rendelkező vektor.

A (8) összefüggésből következik, hogy

$$\dot{\mathbf{x}} \mathbf{g} \dot{\mathbf{x}} = -A^2 = \text{konstans},$$

azt találjuk tehát, hogy

$$\dot{x}_4 = \frac{A}{\sqrt{c^2 - (\mathbf{w} + \mathbf{v}) \mathbf{G}(\mathbf{w} + \mathbf{v})}}. \quad (12)$$

(Megjegyezzük, hogy  $\mathbf{G} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{v} = 0$  esetében  $\dot{x}_4 = \frac{A}{\sqrt{c^2 - w^2}}$ .)

A értéke  $p$  egységének megválasztásától függ. Ha azt írjuk, hogy  $A = \frac{1}{2} m_0 c$ , ahol  $m_0$  megfelelő egységekben  $\Omega$  nyugalmi tömegét jelenti, és  $p$  egységét ennek megfelelően választjuk, azt találjuk, hogy

$$\Theta dp = (K - U) dt, \quad (13a)$$

ahol

$$K = \frac{1}{2} m(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \mathbf{G}(\mathbf{v} + \mathbf{w}), \quad (13b)^*$$

$$U = \frac{1}{2} mc^2,$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \mathbf{G}(\mathbf{v} + \mathbf{w})/c^2}}. \quad (13c)$$

Ha feltételezzük, hogy  $K$  a kinetikus,  $U$  a potenciális energiát,  $m$  pedig  $\Omega$  tömegét jelenti, akkor azt írhatjuk, hogy  $K - U = L$ , ahol  $L$  a Lagrange-függvény. Így (9) helyett írhatjuk, hogy

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} L dt = 0. \quad (14)$$

Látjuk tehát, hogy a (9) egyenlet egyenértékű a  $\Omega$  középpontjára felírt *Hamilton*-elvvvel.

Megjegyezzük továbbá, hogy a fenti levezetésben a rendszer belső struktúrája nem játszik szerepet, és ebből az következik, hogy bármilyen kicsiny zárt rendszer pályája ugyanannak a mozgástörvénynek tesz eleget. Ez az eredmény a gravitációs és tehetetlen tömeg ekvivalenciáját tükrözi.

**364.** A variációs elvet más formában is felírhatjuk. Felhasználva, hogy  $dp = dt/\dot{x}_4$ , azt kapjuk, hogy  $\mathbf{x}g\mathbf{x} dp = -A^2 dt/\dot{x}_4$ , és így (12) segítségével adódik, hogy

$$\delta \int dt \sqrt{c^2 - (\mathbf{w} + \mathbf{v}) \mathbf{G}(\mathbf{v} + \mathbf{w})} = 0$$

Továbbá, ha azt írjuk, hogy

$$dt \sqrt{c^2 - (\mathbf{w} + \mathbf{v}) \mathbf{G}(\mathbf{w} + \mathbf{v})} = d\tau,$$

akkor

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} d\tau = 0 \quad (15)$$

$\tau$  a rendszer saját idejének minősíthető, és fenti variációs elv az optikában ismert *Fermat*-féle elvnek felel meg. Tehát a  $\Omega$  rendszer pályája mentén a saját idő stacionárius.

\* (13b) egyenletnek egy érdekes vonása, hogy bár az általános relativitáselmélet mozgásegyenletéből adódott, mégis hasonlóságot mutat a nem relativisztikus kifejezéshez. Ha ugyanis  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ -t a részecske éterhez viszonyított sebességeként értelmezzük, akkor a (13b) egyenlet feltűnően hasonlít a nem relativisztikus kinetikai energia kifejezéséhez.



**365.** A (9) egyenlet tehát természetes módon a *Hamilton-* vagy *Fermat-* elvként értelmezhető. Azonban a (9) egyenlet szokásos interpretációja, vagyis az, hogy a rendszer egy „geodetikus vonal” mentén mozog, nagyon mesterkéltnek tűnik. Persze definiálhatjuk a (9) egyenletnek megfelelő pályákat „geodetikus vonalaknak”. Azonban az a benyomásunk, hogy játék a szavakkal, ha azt mondjuk, hogy egy geodetikus vonal „négydimenziós egyenes vonalat” jelent.

A (9)-nek eleget tevő pályák — mint láttuk — különleges variációs tulajdonságokkal rendelkeznek, és különleges pályatípusoknak vehetők. Azonban bármit tételezünk is fel, ezek a pályák biztosan nem „egyenesek”. A későbbiekben látni fogjuk, hogy (9) megoldásai többek között *Kepler*-ellipsziseket is tartalmaznak, amelyek mentén a bolygók mozognak. Ha ezeket a pályákat „egyeneseknek” vesszük, akkor tökéletesen elveszítjük annak értelmét, amit szokás szerint egyenesnek nevezünk.

Szerintünk észszerű annak feltételezése, hogy egy fényjel vákuumban jó közelítésben egyenes vonal mentén mozog, és egy fényjel pályájától erősen eltérő pálya viszont görbe. Fényjelek segítségével konstruálhatunk majdnem egyenes vonatkoztatási rendszereket, és ezekben a rendszerekben a

$$\dot{\mathbf{x}}'(p) = \text{konstans}$$

szerint leírt pályákat majdnem egyenesnek minősíthetjük. Azonban a gravitáció jelenlétében — tehát olyan tartományokban, ahol  $\mathbf{R} \neq 0$  — az egyenes vonal fogalma értelmetlenné válik. Szerencsére azonban a pontos egyenes vonal fogalmára nincs is szükségünk, hiszen amint azt a **334.** pontban megmutattuk, fényjelek segítségével konstruálhatunk majdnem egyenes koordináta-rendszereket anélkül, hogy előzőleg az „egyenesek” vagy a „geodetikus vonal” fogalmát bevezettük volna.

### C) RELATIVISZTIKUS EFFEKTUSOK GRAVITÁCIÓS MEZŐBEN

**366.** Homogén tartományban mind fényjelek, mind szabad testek egyenes vonalon állandó sebességgel haladnak. Gravitációs mező jelenlétében mind fényjelek, mind szabad testek pályáit a (4) összefüggés segítségével  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  ismeretében lehet kiszámítani, és mindkét esetben görbevonallú pályákat kapunk. Mindkét esetben az egyenes pályától való eltérést a tartomány  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  által jellemzett inhomogenitása határozza meg. Ebből arra következtetünk, hogy egy tartomány inhomogenitását a gravitációs mező okozza.

Mint hogy a bolygópályák jól ismertek, a (4) egyenlet arra használható fel, hogy egy ismert gravitációs mezőben  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  terjedési tenzort meghatározzuk. A Nap környékén, egy majdnem egyenes reprezentációt használva, feltelezhetjük, hogy a gravitációs potenciált

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = MG \quad (18)$$

egyenlet adja meg, ahol  $M$  a Nap tömege,  $G$  a gravitációs állandó. A  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  eloszlásnak a Nap közelében olyannak kell lennie, hogy a (4) egyenletbe behelyettesítve — legalábbis jó közelítésben — NEWTON mozgástörvényei adódjanak.

## 1. MOZGÁSEGYENLETEK GRAVITÁCIÓS MEZŐBEN

**367.** Ahhoz, hogy a (4) egyenletet a bolygómozgás törvényeivel összehasonlíthassuk, hasznos a (4) egyenletekből a  $p$  paramétert eliminálnunk, és így  $t = x_4(p)$ -t új változóként bevezetni. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{x}_4,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left( \ddot{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \ddot{x}_4 \right) / \dot{x}_4^2.$$

Ezeknek az egyenleteknek a segítségével a mozgásegyenletet a következő formában írhatjuk fel:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A} + \overset{(2)}{\mathbf{A}\mathbf{v}} + \overset{(3)}{\mathbf{A}\mathbf{v}^2}, \quad (17)$$

ahol  $\mathbf{A}$ ,  $\overset{(2)}{\mathbf{A}}$ ,  $\overset{(3)}{\mathbf{A}}$   $\mathcal{C}$  elemeiből tevődnek össze. Itt a  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$  jelölést használtuk. A következő levezetésben, ugyanúgy, mint a (17) formulában, az eddigittől eltérően ponttal az idő szerinti deriváltat jelöljük.

Visszatérve a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  meghatározásához, feltételezhetjük, hogy

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Ha most a (18) kifejezést a II. Függelék 472. pontjában megadott *Christoffel*-féle zárójel szimbólumba behelyettesítjük, azt találjuk, hogy

$$c^2(\mathbf{r}) \overset{(3)}{\mathcal{C}}_{44k} = \overset{(3)}{\mathcal{C}}_{k44} = \frac{1}{2} \text{grad}_k c^2(\mathbf{r}), \quad k = 1, 2, 3. \quad (19)$$

(19)-et (17)-be behelyettesítve a következő egyenletre jutunk:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{2} \text{grad } c^2(\mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{v} \text{ grad } c^2(\mathbf{r})) \mathbf{v}}{c^2(\mathbf{r})}. \quad (20)$$

A (20) kifejezésben a második tag sokkal kisebb, mint az első, ha  $v \ll c(\mathbf{r})$  sebességekre szorítkozunk. Így tehát ha a  $v^2/c^2$  nagyságrendű tagokat elhanyagoljuk és feltételezzük, hogy

$$c^2(\mathbf{r}) = \text{konstans} + 2\Phi(\mathbf{r}), \quad (21)$$

akkor (20) a *Newton*-féle egyenletbe megy át. Így azt írhatjuk, hogy

$$c^2(\mathbf{r}) = c_0^2 - \frac{2\alpha}{r}, \quad (22)$$

ahol  $c_0$  a fény terjedési sebessége a Naptól nagy távolságokban.

**368.** Ha  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -nek a (18) formát adjuk, és  $c(\mathbf{r})$ -t a (22) formula szerint választjuk, akkor a mozgásegyenlet úgy írható, hogy

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} + \frac{2\alpha(\mathbf{v}\mathbf{r}) \mathbf{v}}{c^2 r^3}, \quad (23)$$

ahol az egyszerűség kedvéért  $c$ -t írtunk  $c(\mathbf{r})$  helyett. A (23) egyenletben a  $v^2/c^2$ -es tagokat elhanyagolva a *Newton*-féle mozgásegyenletekre jutunk, melyeknek megoldása a *Kepler*-pályákat adja.

A  $v^2/c^2$ -es tagokat figyelembe véve korrekciókat kapunk, és ezeket mint relativisztikus perturbációkat vehetjük, — amint ezt a **316.** pontban már kifejtettük.

## 2. A MOZGÁSEGYENLETEK INTEGRÁLJAI

**369.** Figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{v}\mathbf{r} = r\dot{r} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2,$$

(23)-at  $\mathbf{v}$ -vel beszorozhatjuk és integrálhatjuk. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2)}{1 - 2v^2/c^2} = -\frac{\alpha \dot{r}}{r^2}. \quad (24)$$

Amennyiben  $c$ -nek az  $\mathbf{r}$ -től való függését elhanyagoljuk, a fenti egyenlet mindkét oldalát integrálhatjuk, és így azt kapjuk, hogy

$$-\frac{c^2}{4} \ln \left( 1 - \frac{2v^2}{c^2} \right) = A + \frac{\alpha}{r},$$

ahol  $A$  integrációs állandó. Így a relativisztikus energiaintegrált kaptuk meg. Azt is írhatjuk, hogy

$$v^2 = \frac{c^2}{2} \left( 1 - \exp \left\{ -4 \left( A + \frac{\alpha}{r} \right) / c^2 \right\} \right). \quad (25)$$

A  $v^2/c^2$  nagyságrendű tagokat elhanyagolva, a fenti összefüggés a klasszikus összefüggésre redukálódik:

$$v^2 = 2 \left( A + \frac{\alpha}{r} \right). \quad (26)$$

(22)-öt vektoriálisan  $\mathbf{r}$ -rel szorozva pedig

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{2\alpha \dot{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{c^2 r^2}. \quad (27)$$

A fenti egyenletből következik, hogy a

$$\mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (28)$$

vektor nem változtatja irányát, és ezért (27) helyett

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{2\alpha \dot{r}}{c^2 r^2}$$

írható, tehát

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{c^2 r} \right\}, \quad (29)$$

ahol  $\mathbf{a}$  integrációs állandó.

(28)-ből és (29)-ből az következik, hogy a mozgás  $\mathbf{a}$  irányára merőleges síkban folyik le. Ha ebben a síkban fekvő polárkoordinátákat vezetünk be, azt találjuk, hogy

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2, \quad P = r^2 \dot{\varphi}, \quad (30)$$

ahol  $\varphi$  az azimut szög. Minthogy

$$\frac{d\varphi}{dr} = \dot{\varphi} / \dot{r}, \quad (31)$$

(30) segítségével azt is írhatjuk, hogy

$$\varphi(r) = \int_{r_1}^r \frac{(P/r^2) dr}{\sqrt{v^2 - P^2/r^2}}.$$

$P$ -t (29)-ből és  $v^2$ -et (25)-ből beírva, az  $s = 1/r$  új változót vezetve be azt kapjuk, hogy

$$\varphi(r) = - \int_{1/r_1}^{1/r} \frac{a ds}{\sqrt{\frac{c^2}{2} (\exp \{4\alpha s/c^2\} - \exp \{-4A/c^2\}) - a^2 s^2}}.$$

Az exponenciálisokban  $1/c^2$  hatványai szerint sorbafejtve, az integrandusban a gyökjel alatti mennyiség:

$$2A + 2\alpha s - a^2 s^2 + \frac{1}{c^2} \{4\alpha^2 s^2 - 4A^2\} + \text{magasabb rendű tagok}.$$

a) *Perihélium mozgás*

370. Magasabb rendű tagokat elhanyagolva

$$2\pi \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4\alpha^2/c^2}} = 2\pi \left( 1 + \frac{2\alpha^2}{c^2 a^2} \right)$$

periódusú mozgást kapunk, tehát egy körforgásra eső perihélium elmozdulást a

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi\alpha^2}{c^2 a^2}$$

adja meg. Azt is írhatjuk, hogy

$$\alpha = \bar{v}^2 \bar{r}, \quad a = \bar{v} \bar{r},$$

ahol  $\bar{v}$  az átlagsebesség,  $\bar{r}$  a középtávolságot jelenti. Ezzel a jelöléssel azt találjuk, hogy

$$\Delta\varphi = 4\pi \frac{\bar{v}^2}{c^2}. \quad (32)$$

371. Megjegyezzük, hogy ha a *Newton*-féle mozgásegyenleteket a sebességgel való relativisztikus tömegváltozást figyelembe véve adjuk meg, akkor

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\bar{v}^2}{c^2}$$

nagyságú perihélium-mozgásra jutunk.

EINSTEIN az általános relativitáselméletből pedig a perihélium-mozgásra

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{\bar{v}^2}{c^2}. \quad (33)$$

értéket állapított meg. Az *Einstein*-féle érték — úgy látszik — a megfigyelt perihélium-mozgással megegyezik. A (18) és (21) feltételezésekből kiszámított (32) szerinti perihélium-mozgás értéke tehát a perihélium valódi mozgásának nagyságrendileg helyes meghatározására vezet, és legalább kvalitatív módon megadja a klasszikus eredménytől való eltérést.

A perihélium mozgására vonatkozó (33) szerinti kifejezést a fent vázolt megfontolásokból is megkaphatnánk, ha a (22) kifejezést kiegészítjük megfelelő  $v^2/c^2$  nagyságrendű tagokkal. Egy ilyen eljárás azonban teljesen önkényes volna. Arra a következtetésre jutunk, hogy az eddig kifejtett megfontolásokból a perihélium-mozgás nagyságát csupán kvalitatíve tudjuk megállapítani. A pontos eredményt csak úgy kaphatjuk meg, ha a gravitációs mező és a  $g$  közötti pontos összefüggést sikerül megállapítanunk.

b) *Fényelhajlás a Nap közelében*

**372.** Egy a Nap mellett elhaladó fénysugárnak az egyenes vonaltól való  $\Delta\beta$  szög elhajlását (29) és (30) egyenletek segítségével kaphatjuk meg:

$$\pi - \Delta\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{r^2} dt. \quad (34)$$

Feltételezve, hogy a fényjel első közelítésben  $c$  sebességgel egyenes vonal mentén terjed és a Naptól  $b$  távolságban halad el, azt írhatjuk, hogy

$$r^2 = b^2 + c^2 t^2, \quad (35)$$

(28) segítségével

$$P = cb \left( 1 - \frac{2\alpha}{c^2 r} \right). \quad (36)$$

A (35)-öt és (36)-ot (34)-be behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\Delta\beta = \frac{2\alpha}{c^2 b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1 + \tau^2)^{3/2}} = \frac{4\alpha}{c^2 b} \quad (37a)$$

Legyen a Nap mellett elhaladó fénysugár egy távoli csillagból a Föld felé haladó fénysugár. E csillagot a Földről megfigyelve, a Naptól egy

$$\vartheta = b/\bar{r}$$

szögtávolságban látjuk, ahol  $\bar{r}$  a Föld és Nap közötti távolság és  $\alpha = \bar{v}^2 \bar{r}$ , ahol  $\bar{v}$  a Föld átlagsebessége. Így

$$\Delta\beta = 4 \left( \frac{\bar{v}^2}{c^2} \right) / \vartheta. \quad (37b)$$

A fenti összefüggés egy csillagnak a Naptól való  $\vartheta$  szögtávolsága és e szögtávolság a fényelhajlás által létrejött  $\Delta\beta$  változása közötti összefüggést adja meg.

Az általános relativitáselmélet egy, a fenti elhajlással nagyságrendben megegyező

$$\Delta\beta' = 2\Delta\beta = 8 \left( \frac{\bar{v}^2}{c^2} \right) / \vartheta \quad (37c)$$

értékhez vezet. Látjuk tehát, hogy a (18)-ban foglalt egyszerű feltevés  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  formájára a fényelhajlás értékének nagyságrendileg helyes értékére vezet.

c) *A spektrumvonalak vörös eltolódása*

**373.** Vizsgáljuk egy atom adiabatikus eltolását, amelyben az atom  $\mathbf{r}$  pontból egy  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{a}$  helyre kerül. Tételezzük fel, hogy az atom eredeti helyzetében egy  $\omega = 1/T$  frekvenciával oszcillál. Ezt az oszcillációt sematikusán úgy írhatjuk le, hogy feltételezzük, hogy az atom

$$t_k = t + \tau_k, \quad \tau_k = kT$$

időkben fényjeleket bocsát ki. A fényjelek emissziói tehát események, melyeknek relatív négyeskoordinátái

$$\xi_k = 0, 0, 0, kT.$$

Az eltolást úgy végezzük el, hogy az atom a végállapotban újra nyugalomban van, vagyis az új helyzetben a megfelelő koordináták

$$\xi_k^* = 0, 0, 0, \tau_k^*$$

ként adódnak. Egy ilyen eltolódást a **351.** pont (28) egyenletben adott Lorentz-transzformációval írhatunk le. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\xi_k^* = \mathbf{M}_q \left[ \xi_k + \frac{1}{2} (\overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{r}) - \overline{\overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{r}^*)}) \xi_k^2 \right]. \quad (38)$$

A **472.** pontban a *Christoffel*-féle zárójelekre adott explicit kifejezésekből azonban az következik, hogy

$$\overset{(3)}{C}_{444}(\mathbf{r}) = \overline{\overset{(3)}{C}_{444}(\mathbf{r}^*)} = 0.$$

Mint hogy  $\xi_k$  térkomponensei mind nullák, (38) segítségével azt találjuk, hogy

$$\xi_k^*] = \mathbf{M}_q \xi_k.$$

Figyelembe véve, hogy a  $\xi_k^*$  térkomponensei szintén nullák kell, hogy legyenek,  $\mathbf{M}_q$  komponenseit explicit meg tudjuk határozni. A **350.** pont (27) egyenlete alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{c(\mathbf{r})}{c(\mathbf{r}^*)}. \quad (39)$$

Tehát, ha (38) negyedik komponensét vesszük, akkor (39) segítségével azt kapjuk, hogy

$$T^* = T \frac{c(\mathbf{r})}{c(\mathbf{r}^*)}.$$

Amennyiben a frekvenciára térünk át, azt is írhatjuk, hogy

$$\omega : \omega^* = c(\mathbf{r}) : c(\mathbf{r}^*). \quad (39a)$$

Tehát ha egy atomot adiabatikusan elmozgatunk, a mozgás folytán az atom frekvenciája adiabatikusan változik. A változás olyan módon következik be, hogy az oszcilláció frekvenciája és a helyi fénysebesség hányadosa állandó marad. Így ha egy atomot a Föld környezetéből a Nap közelébe hozunk, akkor az atom frekvenciája csökkenni fog, hiszen a fény terjedési sebessége a Nap közelében kisebb mint a Föld közelében.

Az itt leírt effektus a második — a 316. pontban említett — relativisztikus effektus, tudniillik a spektrumvonalak vörös eltolódása.

374. A fenti megfontolásokból nem csupán az következik, hogy egy, a Föld környezetéből a Nap környékére vitt atom frekvenciája csökken. Adott típusú atomok meghatározott frekvenciával rendelkeznek és ezek a frekvenciák a helyi gravitációs potenciálok függvényei. Így tehát ha  $\mathbf{r}$  pont közelében vizsgálunk néhány atomot és  $\mathbf{r}^*$  pont közelében hasonló atomokat, azt találjuk, hogy ezen atomcsoportok frekvenciája  $\omega$ , illetve  $\omega^*$  lesz. Ha az egyik csoport egyik atomját a másik csoportba visszük, akkor útközben ezen atom frekvenciája  $\omega$ -ból  $\omega^*$ -ba változik és mihelyt az  $\mathbf{r}^*$  pont közelébe ér, pontosan úgy viselkedik mint azok az atomok, amelyek mindig  $\mathbf{r}^*$  pont közelében voltak.

E kérdés további megvilágítására megjegyezzük, hogy atomok frekvenciái például a *Schrödinger*-egyenlet segítségével kiszámíthatók. Fel kell tételeznünk, hogy a *Schrödinger*-egyenlet, ha implicit módon is, a gravitációs potenciált tartalmazza, és pedig oly módon, hogy a kiszámított frekvenciák a gravitációs potenciáltól való a (39a) egyenletnek megfelelő függést mutatnak. Tehát, ha egy atomot adiabatikus módon elmozdítunk, a mozgás folytán a változó gravitációs környékhez illeszkedik és ez az illeszkedés a megfigyelt frekvenciaváltozáshoz vezet.

#### D) ÖSSZEFÜGGÉS A GRAVITÁCIÓS FORRÁSOK ÉS A $g$ TERJEDÉSI TENZOR KÖZÖTT

375. Láttuk, hogy a bolygók mozgása és a gravitációs mezőben való fényelhajlás első közelítésben megkapható, feltételezve, hogy

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (40a)$$

és

$$c^2(\mathbf{r}) = c^2(1 + 2\Phi(\mathbf{r})/c^2), \quad (40b)$$

ahol  $\Phi(\mathbf{r})$  a gravitációs potenciált jelenti.

A fenti összefüggés azonban csak egy speciális reprezentációban érvényes. Feltételezhetjük például, hogy (40a), (40b) majdnem egyenes reprezentációban érvényesek akkor, ha a gravitációs mező forrásai e rendszerhez képest nyugalomban vannak. Ahhoz, hogy egy mozgó gravitációs forrásokra érvényes kifejezéshez jussunk, a (40a–b)-t a reprezentációtól független formában kell kifejezni. E probléma különösen fontos abban az esetben,



ha három- vagy többtest problémákat tárgyalunk, ahol a mező forrásai egymáshoz képest mozgásban vannak és így nem lehet olyan majdnem egyenes reprezentációt bevezetni, amelyhez képest a kölcsönható tömegek nyugalomban lennének.

A helyzet hasonló, mint az elektromágneses mező tárgyalásánál. A *Coulomb-törvény* megadja egy inerciális rendszerhez (és egymáshoz) nyugalomban levő elektromos töltések hatását egymásra.

Mozgó töltések esetében az erőhatásokat a *Maxwell-egyenletek* segítségével — tehát az elektromágneses mező *dinamikáját* figyelembe véve — lehet megállapítani. Gravitáció esetében a *Newton-féle* gravitációs törvény a *Coulomb-törvények* megfelelő *statikai* esetét írja le. Mozgó tömegek egymásra való hatását csak a gravitációs mező dinamikai egyenletei segítségével lehet meghatározni, ezeket a dinamikai egyenleteket az *Einstein-féle* gravitációs egyenletek adják meg. Ezen egyenletek megállapítása a következő megfontolások célkitűzése, és azokat a **377.** pont (51) egyenletében adjuk meg.

## 1. EINSTEIN-FÉLE GRAVITÁCIÓS EGYENLETEK

**376.** A *Laplace—Poisson-egyenlet* alapján — amelyet első közelítésben érvényesnek kell vennünk — a (40a—b) egyenletekből következik, hogy

$$\nabla^2 g_{44} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho, \quad (41)$$

ahol  $\rho$  a gravitáló anyag energiasűrűsége,  $G$  a gravitációs konstans, és az  $1/c$  szerinti sorfejtésben adódó magasabbrendű tagokat elhanyagoltuk.

Megkísérhetjük a (41) egyenletet olyan egyenletrendszerrel megközelíteni, amely a reprezentációtól független, azonban majdnem egyenes reprezentációban csak kevéssé tér el a *Laplace—Poisson-egyenlettől*. EINSTEIN elgondolásainak megfelelően fel lehet állítani csak tenzorokat tartalmazó összefüggést, amely jó közelítésben a (41) összefüggést tartalmazza. A következőkben megmutatjuk, hogyan lehet egy ilyen összefüggést felállítani.

A (40a)-ból kiszámított *Christoffel-szimbólum* komponenseit úgy is írhatjuk, hogy

$$C_{4k4}^{(3)} = C_{44k}^{(3)} = -C_{k44}^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_k} = -c \frac{\partial c(\mathbf{r})}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (42)$$

a többi komponensek mind nullák. A *Riemann—Christoffel-tenzor* nullával nem egyenlő elemeit (lásd a **482.** pont (63) egyenletét, úgy írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} R_{44kl}^{(4)} &= -R_{k44l}^{(4)} = R_{kl44}^{(4)} = -R_{4l4k}^{(4)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{1}{4g_{44}} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_k} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_l}. \end{aligned} \quad (43)$$

A  $g_{44}$ -et  $c(\mathbf{r})$  segítségével kifejezve azt kapjuk, hogy

$$R_{44kl}^{(4)} = -c(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 c(\mathbf{r})}{\partial x_k \partial x_l}, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (44)$$

Az  $\mathbf{R}^{(4)}$  kontrakciója) a következő komponensekkel rendelkezik:

$$R_{44}^{(2)} = -c(\mathbf{r}) \nabla^2 c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{44} - \frac{1}{4g_{44}} (\text{grad } g_{44})^2, \quad (45)$$

$$R_{kl}^{(2)} = \frac{1}{c(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 c(\mathbf{r})}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (46)$$

A  $c$ -ben csak a legmagasabb rendű tagokat figyelembe véve a (41) *Laplace–Poisson*-egyenletet helyettesíthetjük

$$R_{44}^{(2)} = -\frac{4\pi G}{c^2(\mathbf{r})} \varrho \quad (47)$$

által. Továbbá, ha azt tételezzük fel, hogy (47) egy kovariáns összefüggésnek 44-es komponense, akkor az anyagot nem tartalmazó tartományra írhatjuk, hogy

$$\mathbf{R}^{(2)} = 0. \quad (48)$$

Ahhoz, hogy (47) kovariáns formáját az anyagot tartalmazó tartományokra is kiterjeszthessük, megjegyezzük, hogy  $\varrho$  a  $\mathbf{T}^{(2)}$  az anyag energia—impulzus-tenzor 44-es komponensének fogható fel. Feltételezhetjük tehát, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}^{(2)} &= -\kappa \mathbf{T}^{(2)}, \\ \kappa &= -\frac{4\pi G}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

A (49) egyenlet a  $\mathbf{T}^{(2)}$  által leírt gravitációs források és a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  terjedési tenzor által leírt gravitációs mező között egy lehetséges összefüggést ad meg.

A  $\mathbf{T}^{(2)}$  tenzorba beleértjük a szokásos anyag energia—impulzusán kívül az elektromágneses és más mezők energia—impulzusát is. Nem számítjuk bele azonban a gravitációs mező energia—impulzusát, amely különleges szerepet játszik (lásd a 390. pontot).

A (49) egyenletet EINSTEIN az 1915-ös első munkájában adta meg, később azonban módosította ezt az egyenletet.

377. A (49) egyenletből következik, hogy

$$\operatorname{Div} \mathbf{T} = -\frac{1}{\kappa} \operatorname{Div} \mathbf{R}, \quad (49a)$$

tehát azokban a tartományokban, ahol  $\operatorname{Div} \mathbf{R} \neq 0$  a  $\mathbf{T}$  energia—impulzus-tenzorral rendelkező fizikai rendszer nem konzervatív. A (49a) egyenlet arra mutat, hogy egy fizikai rendszer és a gravitációs mező között bizonyos energia—impulzus csere lép fel. Ez a kölcsönhatás — amint ezt a későbbiekben látjuk — nem azonos a *Newton*-féle gravitációs hatással.

EINSTEIN azon a véleményen volt, hogy ez a kölcsönhatás nem létezik és ezért (49) a következő egyenlettel helyettesítendő:

$$\mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R = -\kappa \mathbf{T}, \quad (50)$$

ahol az itt bevezetett  $\kappa$  állandó a (49)-ben bevezetett  $\kappa$  kétszerese.

A (49) és (50) kifejezések között az a különbség, hogy az (50) kifejezés bal oldalának  $\operatorname{Div}$ -ja identikusan nulla (lásd II. Függelék, 484. pont) és ezért (50)-ből következik, hogy

$$\operatorname{Div} \mathbf{T} = 0. \quad (50a)$$

Ezt az összefüggést akkor várjuk, ha  $\mathbf{T}$  egy zárt rendszer energia—impulzus-tenzora.

Megjegyezzük, hogy egy olyan tartományból, ahol  $\mathbf{T} = 0$ , (50)-ből következik, hogy

$$R = 0,$$

és ezért (49) és (50) között különbség csak anyagot tartalmazó tartományokban lép fel.

378. Felmerül a kérdés, hogy (50) vajon (41)-nek az egyetlen, (50a)-val összeférő általánosítása-e? EINSTEIN rámutatott arra, hogy (50) bal oldalához egy  $\lambda \mathbf{g}$  hozzáadható anélkül, hogy az (50a) összefüggést megbolygatnánk. Az így felírt egyenletek első közelítésben ugyanahhoz az eredményhez vezetnek, mintha a  $\lambda$ -tagot elhagynánk.

Mi az új tagot inkább a jobb oldalhoz tesszük hozzá, tehát azt írjuk, hogy

$$\mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R = -\kappa \mathbf{T} - \lambda \mathbf{g}. \quad (51)$$

A fenti egyenletet úgy is értelmezhetjük, hogy

$$\frac{\lambda}{\kappa} \mathbf{g} = \mathbf{T}_0 \quad (52)$$

adja meg az éter energia—impulzus-tenzorát és, hogy ez a tenzor az éter feszültségállapotát jellemzi.\*

**379.** Az (51) összefüggés  $\mathbf{g}$  deriváltjait csak másodrendig tartalmazza.

Ha (51)-hez hozzáadunk további tagokat, amelyek az  $\mathbf{R}^{(k+2)}$ ,  $k = 3, 4, \dots$  mennyiségeket tartalmazzák, további kovariáns összefüggéseket kapunk, melyek  $\mathbf{g}$ -nek magasabb rendű deriváltjait is tartalmazzák. Semmi ok nincs feltételezni, hogy a  $\mathbf{g}$  és a források közötti egzakt összefüggések ilyen tagokat nem tartalmaznak. A kísérletileg hozzáférhető körülmények között  $\mathbf{g}$ -nek másodrendűnél magasabb deriváltjaiból megalkotható invariáns kifejezések értékei olyan kicsik, hogy megfigyelhető effektusokhoz aligha vezethetnek. Ezek szerint nagyon valószínű, hogy a  $\mathbf{g}$ -t és a forrásokat összekötő valódi összefüggés (51)-től különbözik, és (51) csupán azt a kifejezést adja meg, amelyhez jutunk, ha az egzakt kifejezést  $\mathbf{g}$  deriváltjai szerint sorbafejtjük és a második tagnál megállunk.

Elképzelhető, hogy a magasabb rendű tagok nagyon érzékelhetővé válnak extrém nagy sűrűséggel rendelkező csillagok szerkezetében. Lehetséges, hogy a jövőben ilyen csillagok tanulmányozása (51) kiegészítéséhez fog vezetni.

Megengedve azonban, hogy (51) csak egy közelítő összefüggést jelent, veszélyel járhat az (51)-ből nyert eredményeket túl nagy távolságokra, vagy túl hosszú időkre extrapolálni. E veszély pontosan olyan, mintha a közelítő formulát  $e^{-x} \sim 1 - x$ , mely kis  $x$  értékekre pontos, nagy  $x$  értékekre alkalmazzuk. Elképzelhető, hogy egyes — az *Einstein*-féle egyenletek megoldásából származó — kozmikus problémákkal kapcsolatos paradoxonok éppen ilyen helytelen extrapláció miatt merülnek fel.

### 3. A GRAVITÁCIÓS EGYENLETEK SCHWARZSCHILD-FÉLE MEGOLDÁSA

**380.** A bolygómozgás általános relativitáselmélet szerinti tárgyalásához szükségünk van az *Einstein*-féle gravitációs egyenletnek olyan megoldására, amely egy pontszerű tömeg gravitációs mezőjét írja le. Szimmetria megfontolásokból feltételezhetjük, hogy — legalább majdnem egyenes reprezentációban — egy kis pontszerű test gravitációs mezője gömbszimmetriával rendelkezik. Ily módon feltehetjük, hogy

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(r), \quad \text{ha } r \gg a,$$

\* A fenti energia—impulzus-tenzor a következő szempontból szokatlan. Ha  $\mathbf{g}$  a (40a) formával rendelkezik, akkor egy gáznak az energia—impulzus-tenzorához hasonlít. Az első három diagonális elem a hidrosztatikus nyomást, a 44-es komponens pedig az energiasűrűséget jelenti. Egy szokásos gázban azt várjuk azonban, hogy az első három diagonális elem összege, tehát  $T_{11} + T_{22} + T_{33}$  értéke kisebb mint  $-T_{44}/c^2$ . Ezzel ellentétben, az éter esetében

$$g_{11} + g_{22} + g_{33} > -g_{44}/c^2.$$

Tehát ezek szerint a hidrosztatikus nyomás nagyobb mint egy szokásos gázban. E körülmény azonban lényegtelen, hiszen semmi ok nincs feltételezni, hogy az éter tulajdonságai ugyanolyanok lennének, mint egy atomokból álló anyagé.

ahol  $a$  egy távolságot jelent, amelynek nagysága a gravitáló test sugarával összemérhető. Ha ez a test nyugalomban van, feltételezhetjük, hogy

$$g_{k4}(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

A legegyszerűbb feltételezés  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  formájára, hogy megfelel a 375. pont (40a)-nak. Azonban kiderül, hogy  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  ilyen egyszerű formája nem elégíti ki az *Einstein*-féle egyenleteket. SCHWARZSCHILD megmutatta, hogy az *Einstein*-féle egyenletek rendelkeznek gömbszimmetrikus  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  megoldással, amely megoldás azonban a fény helyileg anizotrop terjedési módjának felel meg.

381. Ahhoz, hogy a *Schwarzschild*-féle megoldást megkapjuk, fel kell tételni, hogy a fénysebesség radiális irányban különbözik a tangenciális irányban való sebességtől. Egy ilyen terjedési formát  $r, \vartheta, \varphi$  polárkoordinátákban írhatunk le a következő módon:

$$A dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + B dt^2 = 0. \quad (55)$$

Tételezzük fel, hogy  $A$  és  $B$  csak  $r$  függvényei. Feltételezzük tehát, hogy  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix} \quad (56)$$

formát vesz fel. Az  $\mathbf{R}$  komponenseit a fentiekből megkapjuk, ha a 482–484. pontok (63)–(67) egyenleteibe — melyek a II. Függelékben találhatók — behelyettesítjük  $\mathbf{g}$  (56)-ban megadott formáját. Azt találjuk, hogy  $\mathbf{R}$  nem diagonális elemei között csupán  $R_{12}^{(2)}$  tartalmaz zérótól különböző tagokat. Ezeknek a tagoknak összege azonban nulla.  $\mathbf{R}$  diagonális elemei a következőknek adódnak:

$$R_{11}^{(2)} = -\frac{1}{r} \frac{A'}{A} + \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B^2 A} (A'B + AB'), \quad (57a)$$

$$R_{22}^{(2)} = -r \frac{A'}{2A^2} - 1 + \frac{1}{A} + \frac{rB'}{2AB}, \quad (57b)$$

$$R_{33}^{(2)} = \sin^2 \vartheta R_{22}^{(2)}, \quad (57c)$$

$$R_{44}^{(2)} = \frac{B''}{2A} + \frac{1}{r} \frac{B'}{A} - \frac{B'}{4A^2 B} (A'B + AB'). \quad (57d)$$

(51) segítségével azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{R} = -\lambda \mathbf{g}$$

(57a)-ból és (57d)-ből (56) segítségével azt találjuk, hogy

$$BR_{11}^{(2)} - AR_{44}^{(2)} = -\frac{1}{rA} (A'B + AB') = 0,$$

tehát

$$A'B + AB' = 0 \tag{58}$$

vagy

$$A = \gamma/B$$

ahol  $\gamma$  egy integrációs állandó. (58)-at behelyettesítve (57a)-ba és (57d)-be és azt találjuk, hogy

$$\frac{\gamma}{A} = B = \gamma \left( 1 - \frac{2\alpha}{r} - \frac{1}{3} \lambda r^2 \right).$$

A fenti kifejezés (57b)-t (57c)-t is kielégíti, és a *Schwarzschild*-féle megoldásnak felel meg. A  $\gamma$  integrációs állandó a fénysebességgel van összefüggésben. Azt írhatjuk, hogy

$$\gamma = -c^2. \tag{59}$$

Így tehát (55) explicit felírva:

$$-\frac{dr^2}{1 - \frac{2\alpha}{r} - \frac{1}{3} \lambda r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - c^2 \left( 1 - \frac{2\alpha}{r} - \frac{1}{3} \lambda r^2 \right) dt^2 = 0. \tag{60}$$

#### 4. RELATIVISZTIKUS EFFEKTUSOK A SCHWARZSCHILD-MEGOLDÁSNAK MEGFELELŐ MEZŐBEN

##### a) Bolygómozgás

**382.** A *Christoffel*-féle zárójelek az (56) egyenlet segítségével meghatározhatók. Ezek segítségével egy gravitáló test környékén felírhatjuk a bolygók mozgásegyenletét. A gravitáló test  $\mathbf{r} = 0$  pontban helyezkedjen el. Az így adódó mozgásegyenlet

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha}{r^3} \left( 1 - \frac{2\alpha}{rc^2} \right) \mathbf{r} + \frac{2\alpha}{c^2 r^3} (\mathbf{v}\mathbf{r}) \mathbf{v}. \tag{61}$$

(feltételezve, hogy  $\lambda$  elhanyagolható).

A fenti egyenletet a **369.** pontban adott módszernek megfelelően integrálhatjuk és a számítás eredményeként a  $d\varphi$  differenciálra

$$d\varphi = -\frac{ds}{\sqrt{c^2/2a^2 \left[ \exp \{ 4\alpha s/c^2 \} - \exp \left\{ -4/c^2 \left( A - \frac{\alpha^2 s^2}{2c^2} \right) \right\} \right]} - s^2}$$

kifejezést kapjuk. Egy periódusra integrálva — az  $1/c^2$ -nél magasabbrendű tagokat elhanyagolva —

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{\bar{v}^2}{c^2},$$

ahol  $v$  a bolygó átlagsebessége és  $\Delta\varphi$  a perihélium egy körülforgás alatt bekövetkező eltolódása.

A fenti eredmény EINSTEINTŐL származik és összhangban van a Merkúr bolygó megfigyelt mozgásával.

### b) A fényelhajlás

**383.** A **372.** pont számításait úgy ismételtük, hogy a mozgásegyenleteket nem a **368.** pont (23) egyenletének formájában vesszük, hanem az előző pont (61) egyenletéből indulunk ki. Így azt kapjuk, hogy

$$\Delta\beta = \frac{8\alpha}{c^2 b},$$

ahol  $b$  a fény pályájának legkisebb távolsága a Naptól. A fenti egyenletet a **372.** pont (37a) egyenletével összehasonlítva látjuk, hogy a *Schwarzschild*-megoldást felhasználva kétszer akkora szöget kapunk a fény elhajlásra, mint a leegyszerűsített számítás esetében. A kettes faktor onnan származik, hogy a *Schwarzschild*-megoldás szerint az éter olyan állapotban van, amelyben nemcsak a sűrűség változik  $r$ -rel, hanem azonkívül egy radiális feszültség is fellép, amely a fényterjedés anizotropiáját okozza. Ezen anizotropia kettes faktoriall megnöveli a fényelhajlást.

**384.** A spektrumvonalak gravitáló tömegek közelében fellépő vörös eltolódásának értékére ugyanazt az értéket kapjuk, függetlenül attól, hogy  $g$ -t a **367.** pont (18) egyenlete szerinti egyszerű formájában, vagy a **381.** pont (56) egyenletének megfelelő formában adjuk meg. A spektrumvonalak vörös eltolódását tehát nem befolyásolja a fény anizotrop terjedése gravitáló tömeg környékén.

## E) AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐ ÉS A GRAVITÁCIÓ

**385.** Homogén tartományokban az elektromágneses jelenségeket a VIII. és IX. fejezetben részletesen tárgyalt *Maxwell*-egyenletek írják le.

A homogén tartományokban érvényes összefüggéseket inhomogén tartományokra általánosíthatjuk a X. fejezetben tárgyalt módszerek segítségével. A *Maxwell*-egyenletek inhomogén tartományokban érvényes formáját azonban csupán matematikai megfontolások alapján nem lehet egyértelműen meghatározni.

Matematikai megfontolások alapján a *Maxwell*-egyenletek a gravitációs mezőben érvényes formáját illetően bizonyos feltételezésekre juthatunk. Mindig a kísérletekre marad azonban annak eldöntése, hogy az így nyert egyenletek leírják-e a valódi elektromágneses jelenségeket?

Ha a *Maxwell*-egyenleteket inhomogén tartományokra fogalmazzuk, akkor valójában  $g$ -nek az egyenletekben játszott szerepéről teszünk feltevéseket az egyenletekben. Ez végeredményben egy fizikai hipotézis a gravitációs mezőnek az elektromágneses jelenségekre való hatását illetően.

## 1. EGY INVARIÁNS FOGALMAZÁS

**386.** Egy feltételezéshez jutunk a *Maxwell*-egyenleteknek formájára, ha a VIII. fejezet **266.** pontjában négyestenzorok segítségével leírt egyenletekből indulunk ki. Tudniillik, ha a differenciáloperátorokat megfelelő módon definiáljuk, ezek az egyenletek tetszőleges görbe koordinátákban is érvényesek és feltételezhető, hogy az összefüggések inhomogén tartományokban is érvényben maradnak.

Így tehát inhomogén tartományokban a *Maxwell*-egyenleteket felírhatjuk mint

$$\left. \begin{aligned} L\Psi &= -4\pi \mathbf{I}_{\text{eff}}, \\ \text{Div } \Psi &= 0, \\ \text{Div } \mathbf{I}_{\text{eff}} &= 0, \\ \mathbf{I}_{\text{eff}} &= \mathbf{I} + \text{Div } \mathbf{\Pi}, \\ \mathbf{F} &= \text{Rot } \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Ezeket az egyenleteket úgy is írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \text{Div } \mathbf{F} &= 4\pi \mathbf{I}_{\text{eff}}, \\ \text{Div } \tilde{\mathbf{F}} &= 0, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} ((\epsilon \cdot \mathbf{F})), \\ \text{Div } \mathbf{I}_{\text{eff}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

A *Div*, *Rot*, *L* operátorokat a II. Függelékben megadott formában értelmezzük. A fenti egyenletek a *Maxwell*-egyenleteket homogén tartományokban helyesen adják vissza. Inhomogén tartományokban — ha majdnem egyenes koordinátákat használunk — a (62) vagy (63) egyenletek nagyon hasonlítanak a homogén tartományokban érvényes egyenletekre. Az elektromágneses mezőre ható gravitációs effektusokat  $\mathbf{R}$  elemeinek megfelelő nagyságrendű tagok képviselik.

## 2. AZ ÉTER ELEKTROMÁGNES POLARIZÁCIÓJÁNAK KÉRDÉSE

**387.** A (62) vagy (63) egyenletek a *Maxwell*-egyenleteknek nem az egyetlen matematikailag lehetséges általánosításai; példaképpen a négyesáramhoz bármilyen divergenciamentes négyesvektort hozzáadhatunk, amely homogén tartományban eltűnik. Például  $\mathbf{I}_{\text{eff}}$ -t helyettesíthetjük

$$\mathbf{I}'_{\text{eff}} = \mathbf{I}_{\text{eff}} + \lambda' \Psi \cdot \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R \right) \quad (64)$$

egyenlettel.



A (64) második tagját egy, az éter polarizációjából származó négyesáramnak lehetne felfogni. Az, hogy a valóságban ilyen polarizáció fellép-e vagy sem, csak kísérletileg dönthető el. A valóságban azonban egy olyan kísérlet, amelynek célkitűzése e polarizáció megállapítása, azért nehéz, mert az anyagot nem tartalmazó tartományokban

$${}^{(2)}\mathbf{R} = \lambda \mathbf{g}, \quad R = 0,$$

és ebből látjuk, hogy a (64)-ben fellépő polarizációs tag csakis az anyagon keresztülhaladó elektromágneses hullámok esetében ad 0-tól különböző effektust. Viszont a fénynek az anyaggal való kölcsönhatása olyan erős, hogy  $\lambda'$  tagból származó effektusok a nagy háttér folytán túl kicsik ahhoz, hogy a szokásos kísérleti körülmények között megfigyelhetők legyenek.\*

**388.** Elvileg lehetséges lenne a  $\lambda'$  tag megállapítása a fény fényen való szóródásának megfigyelésével. Hiszen egy elektromágneses mezőt tartalmazó

térfogatban az energia—impulzus-tenzor és azzal együtt  ${}^{(2)}\mathbf{R}$  és az  $R$  különbözik a nullától, és így egy ilyen tartományban a  $\lambda'$  tag nagyon nagy energiasűrűséggel rendelkező sugárzásmezőkben esetleg megfigyelhető lesz.

Mint hogy  $\mathbf{g}$  implicite előfordul a *Maxwell*-egyenletekben — ezért függetlenül attól, hogy a  $\lambda'$ -t tartalmazó tag fellép vagy sem — az egyenletekből a fény fényen való szóródása várható. Tehát a  $\lambda'$  tag létezését csak e szóródás mértékéből lehetne elvben meghatározni.

### 3. MEGJEGYZÉS AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐ ÁLTALÁNOS EGYENLETÉNEK ELLENTMONDÁSMENTESSÉGÉRŐL

**389.** A gravitációs jelenségek eddigi tárgyalását összefoglalva emlékezünk vissza, meggondolásaink kezdetére, ti. arra, hogy a vonatkoztatási rendszereket fényjelek segítségével építettünk fel. Most MAXWELL egyenleteit a már fényjelek által meghatározott vonatkoztatási rendszerekben fogalmaztuk meg. Az elmélet ellentmondásmentességét úgy támaszthatjuk alá, ha megmutatjuk, hogy a *Maxwell*-egyenletekből meghatározott fényterjedési törvény azonos azzal a törvénnyel, amelyből tisztán fenomenológiai módon meggondolásainkat megkezdtük.

A koordináta-rendszerek bevezetésekor feltételeztük, hogy a fényjelek pályái kielégítik az

$$\dot{\mathbf{x}}(p) \mathbf{g}(\mathbf{x}(p)) \mathbf{x}(p) = 0$$

egyenleteket. Hogy a *Maxwell*-egyenletekkel ez a feltételezés valóban összefér, a homogén tartományok esetére a VIII. fejezet **272.** pontjában kimutattuk.

\* A  $\lambda'$  tag létezésének kérdése azért is érdekes, mert egy ilyen tag az ekvivalencia elvet megsértené (lásd a **392.** pontot).

Az általánosított *Lorentz*-elvből következik, hogy egy fénysugár geodetikus zéró pályán mozog, mely a

$$\ddot{\mathbf{x}}(p) + \overset{(3)}{\mathcal{C}}(\mathbf{x}(p)) \dot{\mathbf{x}}(p)^2 = 0$$

egyenletnek eleget tesz.

Legmeggyőzőbben úgy bizonyíthatnánk, hogy a fénysugarak valóban eleget tesznek ennek az egyenletnek, ha sikerülne a *Maxwell*-egyenleteket inhomogén tartományokban is retardált potenciálok segítségével kifejezni. Ez a módszer azonban nehézségekbe ütközik, ezért helyette a klasszikus optika ismert módszerét alkalmazzuk. Ha a hullám optikáról áttérünk a geometriai optikára, az *eiconal* segítségével anizotrop közegekben meghatározhatjuk a fénysugarak pályáját.

Az általánosított *Maxwell*-egyenletek formája hasonlít az inhomogén médiumokban érvényes hullámegyenletekhez. Az étert, mint egy sajátos optikai anizotrop közeget tekinthetjük — az optikai tulajdonságokat a  $g$  terjedési tenzor határozza meg —, így a fénysugár pályáját a klasszikus optikából ismert módszerekkel meghatározhatjuk. Ilyen megfontolásokat LAUE\* könyvében találhatunk, és ezek a megfontolások bizonyítják, hogy első közelítésben az általánosított *Maxwell*-egyenletekből leszarmaztatott fénysugarak valóban geodetikus zéró pályák mentén haladnak.

Ezekből a megfontolásokból arra következtetünk, hogy a *Maxwell*-egyenleteknek a 386. pontban adott fogalmazása az általános *Lorentz*-elvvel összhangban van.

Az, hogy léteznek-e az éter polarizációjára visszavezethető nemlineáris effektusok és különösen az, hogy  $\lambda'$  nulla vagy sem, jelenleg kísérletileg nem dönthető el.

## F) A GRAVITÁCIÓS MEZŐ ENERGIA ÉS IMPULZUS TÖRVÉNYEI

390. Az (51) egyenletben adott *Einstein*-féle gravitációs egyenleteket más megvilágításban is tárgyalhatjuk. Legyen

$$\frac{\lambda}{\kappa} \mathbf{g} = \mathbf{T}^{(e)}, \quad (65)$$

ahol  $\mathbf{T}^{(e)}$  az éter energia—impulzus-tenzorának fogható fel. Feltételezhetjük azt is, hogy

$$\frac{1}{\kappa} \left( \overset{(2)}{\mathbf{R}} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R \right) = \mathbf{T}^{(g)} \quad (66)$$

a gravitációs mező energia—impulzus-tenzora, és így (51) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{T}^{(g)} + \mathbf{T}^{(m)} + \mathbf{T}^{(el)} = \mathbf{T}^{(e)}, \quad (68)$$

\* M. VON LAUE: Die Relativitätstheorie, II kötet, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1956. IV. kiadás, 36. & c) pont 83. oldal.

ahol  $\mathbf{T}^{(m)}$  és  $\mathbf{T}^{(el)}$  az anyag és a gravitációs mezőtől különböző mezők energia–impulzus-tenzorai.

(65)-ből következik, hogy (lásd II. Függelék 476. pont, (40) képlet)

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(e)} = 0$$

azonosan fennáll, tehát az összes, az éter által hordozott energia és impulzus pontosan megmarad. Az éterben felhalmozott energia és impulzus így éppen egyenlő a többi mezőkben fellépő energiák és impulzusok összegével.

A  $\mathbf{T}^{(g)}$  a többi energia–impulzus-tenzoroktól abban különbözik, hogy a (66) szerint  $\mathbf{g}$  és deriváltjai segítségével kifejezhető.

Ebből a megfontolásból kifolyólag  $\mathbf{T}^{(g)}$  a potenciális energia és impulzus bizonyos fajtájának tekinthető, vagyis úgy képzelhető el, hogy az összes energiának és impulzusnak azt a részét tartalmazza, amely az éterben áramlás és feszültségek formájában halmozódik fel. A megmaradó része, vagyis  $\mathbf{T}^{(m)} + \mathbf{T}^{(el)}$  az energiának és impulzusnak a különböző mezőkhöz tartozó részét jelenti, és ezt az energiát és impulzust is az éter hordozza.

### 1. A GRAVITÁCIÓS ERŐ

391. Ha (67)-t mint  $\mathbf{T}^{(g)}$  definícióját vesszük, akkor azt kapjuk hogy

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(g)} = \frac{1}{2\kappa} \text{Div } \mathbf{g} R$$

továbbá a II. Függelék szerint

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(g)} = \frac{1}{2} \text{Grad } R = \mathbf{f}^{(g)}.$$

Az utóbbi kifejezést úgy vehetjük, mint egy erősűrűség, amelyet a gravitációs mező az anyagi rendszerre gyakorol – de felfogható úgy is, mint az az energia és impulzus, amely a gravitációs mezőből időegység alatt más mezőbe megy át ( $\mathbf{T}^{(m)}$ -t úgy is vehetjük, mint az anyag hullámok energia–impulzus-tenzorát). Minthogy

$$R = 2\lambda = \text{állandó},$$

ez az interpretáció azokra a tartományokra is fenntartható, ahol

$$\mathbf{T}^{(el)}, \mathbf{T}^{(m)} = 0,$$

vagyis olyan tartományokra, ahol csak gravitációs mezők lépnek fel.

392. A fenti pontban említett  $\mathbf{f}^{(g)}$  erősűrűséget EINSTEIN észrevette, és ezért tért át a gravitációs egyenletek (49)-ben megadott formájáról az (50)-re. Ez a megfontolás feledésbe merült és csak az maradt meg a köztudatban, hogy (49) az ekvivalencia elvet sérti, az (50) pedig az ekvivalencia elvvel összhangban van. Valóban, a fenti megfontolás az ekvivalencia elvnek erős támogatására szolgál. Mint ezt EINSTEIN észrevette, a (49) egyenletből az következne, hogy anyagban egy erős hidrosztatikus nyomás

lépne fel, és arra gondolt, hogy ez a nyomás POINCARÉ elképzelésével összefügg, ti., hogy ez a nyomás a töltött részecskék elektrosztatikus taszítását kompenzálja és így az elemi részeket összetartja.

E feltételezést azonban EINSTEIN később elvetette és az (50) egyenlet bevezetésével megszabadította az elméletet attól, hogy egy ilyen erős hidrosztatikai nyomásra vezessen. TREDER és JÁNOSSY kimutatták, hogy a (49)-ben fellépő nyomás egy hidrogénatomot a 137-ed részre összenyomna, — tehát összeférhetetlen a megfigyelésekkel. Látjuk tehát, hogy az ekvivalencia elvvel összhangban levő (50) egyenlet az, amely az atomokra vonatkozó kísérletekkel összeegyeztethető eredményre vezet.

## 2. A GRAVITÁCIÓS EGYENLETEK MÁS SZEMPONTBÓL NÉZVE

**393.** Ha a (68) egyenletben a  $\mathbf{T}^{(g)}$  és  $\mathbf{T}^{(e)}$  energia—impulzus-tenzorokat  $\mathbf{g}$  és  $\mathbf{g}$  első és második deriváltjaival fejezzük ki (65), illetve (66) segítségével egy egyenletrendszert kapunk, amely rendszert az éter mozgásegyenleteként foghatjuk fel. Egy  $K$  vonatkoztatási rendszerben  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ -et, azaz a szoros értelemben vett anyag energia—impulzusát mint az idő és koordináták függvényét írhatjuk fel. Ha megadjuk

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}, 0),$$

vagyis  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  eloszlását a  $t = 0$  időpontban, a gravitációs egyenletek egy összefüggést adnak  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  időderiváltjainak  $t = 0$  pillanatban való értékei és a  $\mathbf{T}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}, 0)$  időpontban felvett értékei között. Minthogy tíz egyenlettel rendelkezünk, ezért ily módon általában  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  tíz időderiváltját határozhatjuk meg.

**394.** A Riemann—Christoffel-féle tenzor tartalmazza a  $g_{kl44}$ -et,  $k, l = 1, 2, 3$ , vagyis  $g_{kl}$  második időderiváltjait. A tenzor nem tartalmazza azonban a  $g_{4444}$ -et és a  $g_{k444}$ -et, ( $k = 1, 2, 3$ ), tehát  $g_{k4}$  vagy  $g_{44}$  időderiváltjai nem szerepelnek a (66) kifejezésben. Így tehát a (68) egyenletekből  $g_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2, 3$  második időderiváltjait állapíthatjuk meg és a  $g_{4\nu}$  ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) első deriváltjait a  $t = 0$  pillanatban. A  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  tehát meghatározható  $t > 0$  időpontokra egy  $\mathbf{g}_0(\mathbf{r})$  kezdőfeltételből.

## 3. A GRAVITÁCIÓS ERŐ MECHANIZMUSA

**396.** Egy zárt rendszerre ható gravitációs erőt úgy tekinthetünk, mint a rendszer saját magára való erőhatását, melyet a belső erők hoznak létre.

A saját magára hatás lényeges vonásai tisztázhatók például egy elektromos töltéssel, amelyet gravitációs mezőben helyezünk el. A gravitációs erőnek csak azt a részét tárgyaljuk, amely a tömegnek elektrosztatikus energiájából származó részére hat. Tehát a gravitációs erő mechanizmusát a tömeg

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}$$

részére vonatkoztatva tárgyaljuk.

Megjegyezzük, hogy egy majdnem egyenes vonatkoztatási rendszer origójában  $g$  első deriváltjai és így a *Christoffel*-féle zárójelek is nullák. Tehát a mozgásegyenletből következik, hogy egy kezdősebesség nélküli, a majdnem egyenes koordináta-rendszer origójában elhelyezett tömegpont ott is marad. Ebből az következik, hogy az origó egy szabadon eső test pályáján mozog — ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a majdnem egyenes koordináta-rendszer „szabadon esik”.

Vegyük előbb azt az esetet, ahol töltés szabadon esik. A majdnem egyenes vonatkoztatási rendszerben a szabadon eső részecske a koordináta-rendszerhez viszonyítva majdnem nyugalomban van. Ha ebben a vonatkoztatási rendszerben kiszámítjuk az elektromos töltés hatását saját magára, akkor ehhez a számításhoz a homogén tartományban érvényes *Maxwell*-egyenleteket használhatjuk fel és a majdnem egyenes reprezentációban az inhomogenitás által fellépő tagokat elhanyagolhatjuk. Így természetesen arra az eredményre jutunk, hogy az elektromos hatás, amellyel a részecske magára hat, eltűnik. Ha azonban a részecske szabad esését külső erővel megakadályozzuk, a részecske a majdnem egyenes vonatkoztatási rendszerhez képest gyorsuló mozgást mutat és így a gyorsuló részecske saját magára hatást gyakorol, — miként ezt a IX. fejezet 305. pontjában kiszámítottuk.

Az így előálló erő a majdnem egyenes rendszerhez viszonyított gyorsulást csökkenteni igyekszik, tehát a szabad esés állapotát igyekszik előállítani. A saját magára ható elektromos erő éppen a gravitációs erőnek felel meg, amely erő a szabad esés állapotát igyekszik előállítani. Azokban a vonatkoztatási rendszerekben, melyek gyorsulnak a majdnem egyenes rendszerekhez képest, — ez az erő mint a szokásos gravitációs erő jelentkezik.

**397.** E probléma valamivel általánosabb fogalmazásához a következő módon juthatunk. Egy tetszőleges zárt rendszert belső erők tartanak össze, melyekről feltételezhetjük, hogy fénysebességgel terjednek.

Olyan tartományban, ahol nincs gravitációs mező, a belső erők homogén módon terjednek, és így a rendszerben általában nem lép fel a saját magára való hatás. Ha azonban a zárt rendszert egy gravitációs mezőbe visszük, a belső erők terjedése (ugyanúgy, mint a fény terjedésének módja) inhomogénná válik. A belső erők terjedésének módosulása a gravitáció által egész rendszert perturbálja és azt találjuk, hogy az inhomogén módon terjedő erők hatására az akció—reakció elve már érvényét veszíti és így a belső erők eredője nem tűnik el. A belső erők így létrejött eredője a rendszert gyorsítani igyekszik úgy, miként ezt a *Newton*-féle gravitációs erő teszi. Feltételezhetjük, hogy *fenomenológiailag megfigyelt gravitációs erő nem más, mint az az erő, mellyel egy zárt rendszer saját magára hat abban az esetben, ha a belső erők terjedési módja a gravitáció miatt inhomogénná válik.*



## KOZMOLÓGIAI PROBLÉMÁK

## A) A FIZIKAI TÖRVÉNYEK

## INVARIÁNS MEGFOGALMAZÁSÁNAK JELENTŐSÉGE

**398.** Az eddigi fejezetekben különböző fizikai törvényeknek inhomogén tartományokra érvényes megfogalmazásait adtuk. A megfogalmazott összefüggések a homogén tartományban érvényes törvények általánosításai.

Tisztán matematikai szempontból a homogén tartományban érvényes törvényeknek nagyon sokféle általánosítása lehetséges és nem elég a meghatározáshoz az a feltétel, hogy az általánosítás határesetként a homogén tartományban érvényes törvényt tartalmazza. A matematikailag lehetséges általánosítások közül általában azokat szokás tárgyalni, amelyek *invariáns* formában fejezhetőek ki.\*

Azonban az invariáns általánosításokat tekintve is azt találjuk, hogy matematikailag nagyon sok ilyen általánosítás lehetséges és így ezek között is meg kell találni a helyes formát. Ezt a kérdést a *Maxwell*-egyenletekkel kapcsolatosan a XI. fejezet **387.** pontjában tárgyaltuk.

Egy matematikailag egyértelműen megfogalmazható elv az *ekvivalencia elv*. Ez az elv az eddigi tapasztalatokra támaszkodva a formális lehetőségeknek helyes megszorítására vezet. Az ekvivalencia-elvet úgy is meg lehet fogalmazni, hogy egy majdnem egyenes vonatkoztatási rendszerben a speciális relativitáselméletnek megfelelő törvények — gravitációs mező jelenlétében is — érvényben vannak. A **387.** pontban tárgyalt  $\lambda'$  tag ha létezik, ennek az elvnek ellentmondana.

**399.** Minden egyes esetben kísérletekkel dönthető csak el, hogy a törvényeknek melyik fogalmazása írja le a jelenséget helyesen. Kísérletileg kell még azt is eldönteni, *hogy egy adott esetben valódi törvény tényleg invariáns fogalmazást enged-e meg, tehát, hogy négyestenzorok segítségével kifejezhető-e?*

Sokszor azzal a helytelen nézettel találkozunk, hogy a természet törvényeinek invariáns módon való kifejezhetősége triviális tény. E helytelen érvelés abból a helyes megjegyzésből indul ki, hogy a „természtörvények függetlenek a vonatkoztatási rendszertől”. Ezen utóbbi megállapítás nyilván triviális, azonban az a feltételezés, hogy a természet törvények tenzorok segítségével kifejezhetőek, ennél sokkal többet tartalmaz.

\* Invariancia alatt azt értjük, hogy az összefüggés tenzorok közötti összefüggésként adható meg.

## 1. TENZOROK ÉS KITÜNETETT MÉRTÉKEK

**400.** A tenzorok tulajdonságaiból következik, hogy a tenzorok között érvényes lineáris összefüggések automatikusan invariánsak. A tenzorok bizonyos fajta szorzatait definiálhatjuk úgy, hogy a szorzatok maguk szintén tenzorok. Ha fizikai rendszerek mértékeit tenzorok segítségével fejezzük ki, elérjük, hogy e mértékek összege és megfelelően definiált szorzatai szintén invariánsak, és így ezek a mennyiségek is fizikai tartalommal rendelkeznek. Amennyiben fizikai mennyiségeket tenzorok segítségével fejezünk ki, e mértékek számára kitüntetett mértékrendszereket választunk, amely rendszerben a szorzatoknak és összegeknek fizikai jelentésük van. Ez az eljárás nagyon hasonlít a III. fejezetben tárgyalt eljáráshoz, ahol olyan mennyiségek, mint hosszúság, töltés stb., kitüntetett mértékszámait vezettük be.

Hasonlóan a III. fejezetben egyszerűbb mértékek esetében kifejtettekhez, a komplikáltabb mértékeknel is fennáll, hogy *bizonyos mennyiségek — mint energia, impulzus stb. — valóban kifejezhetők tenzorokkal, ez e mennyiségek fizikai tulajdonságait tükrözi.* Például az az állítás, hogy egy részecske energia—impulzusa négyesvektorral kifejezhető, kísérletileg ellenőrizhető.

**401.** Tenzorok invariáns szorzatai (kivéve a direkt szorzatot) csakis a  $g$  segítségével definiálhatók. Tehát egy adott vonatkoztatási rendszerben a  $g$  reprezentációját is meg kell adnunk ahhoz, hogy a tenzorműveleteket végrehajthassuk.

Ezt megelőző megfontolásokban mindig feltételeztük, hogy a terjedési tenzor reprezentációja

$$g(\mathbf{x}) = K(g)$$

meghatározható, ha a fény terjedési módját a  $K$  vonatkoztatási rendszerben érvényes  $\mathbf{x}$  koordináták segítségével fejezzük ki. Látjuk tehát, hogy a fény terjedési módját explicite fel kell használnunk ahhoz, hogy a fizikai törvények invariáns fogalmazásához jussunk.

**402.** Az invariáns fogalmazásokban a fény terjedésének kétféle szerepe van.

Először is — mint ahogy ezt a X. fejezet **325.** pontjában kifejtettük — abból a feltételezésből kell kiindulni, hogy minden  $\mathbf{x}$  négyespont környékében a fény terjedését.

$$\dot{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = 0 \tag{1}$$

segítségével fejezhetjük ki. E feltételezés helyessége kísérletileg közvetlenül ellenőrizhető.

A fenti törvény a fényjelek terjedési törvényére vonatkozik, és nyilvánvalóan a fény hordozójának, vagyis az éternek tulajdonságait tükrözi.\*

Az (1) összefüggés bizonyos analógiában áll azokkal az összefüggésekkel, amelyeket klasszikus módon a *Maxwell*-egyenletekből a fény inhomogén tartományokban való terjedésére levezethetünk. A klasszikus esetben a terjedési tenzor az anyagban fellépő feszültségtől és az anyag áramlásától

\* Lásd *Maxwell*-idézet utolsó bekezdését, amelyet e könyv **55.** pontjában adtunk meg.



függ. Tehát az (1) egyenlet azt a legalább elvben kísérletileg ellenőrizhető tényt fejezi ki, hogy a fény terjedése az éterben bizonyos mértékben hasonlít egy feszültség alatt álló és áramlásokat tartalmazó közegben való terjedési módhoz.

Azonban a törvények invariáns megfogalmazása, amely a  $g$ -t felhasználja, csak olyan tartományokban értelmes, ahol  $g$  létezik, *tehát olyan tartományokban, ahol a fény lokálisan homogén terjedést mutat.*

Látjuk tehát, hogy a törvények invariáns megfogalmazása valóban feltételezi a fény egy fizikai tulajdonságát.

## 2. A $g$ TENZOR FIZIKAI JELENTÉSE

**403.** Egy fizikai rendszert valamely  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$  mennyiségek, valamint  $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots$  négyeskoordináták mértékeinek segítségével írhatunk le. A rendszer fizikai tulajdonságait leírhatjuk úgy, hogy e mértékek között valamilyen invariáns összefüggést adunk meg. Ilyen összefüggések azonban mindenesetre tartalmaznak  $g$  mértékét. Vegyük a legegyszerűbb esetet, vagyis egy szabadon mozgó részecskét. Egy megfelelő reprezentációban

$$\dot{\mathbf{x}}g(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = a, \quad (2)$$

ahol  $a$  egy skalár. Egy általánosabb fizikai törvény esetében a rendszer fizikai tulajdonsága leírható

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, g) = 0 \quad (3)$$

alakú egyenlettel, ahol  $\mathfrak{F}$  egy függvény, vagy egy funkcionál. A  $g$  tenzor reprezentációját az (1) egyenletet használva fényjelek megfigyelésével megállapíthatjuk.  $g$  reprezentációja azonban szabad részecskék pályájának megfigyeléséből is megkapható, (2) segítségével. A  $g$  reprezentációit elvben bármilyen jelenség segítségével meghatározhatjuk, ha a felhasznált jelenségre (3) formájú összefüggést feltételezünk.

Ebből következik az, hogy  $g$  *egy fizikai mezőt ír le, amelynek hatásai a legkülönbözőbb megfigyelt jelenségekben előfordulnak.* A fényterjedés csak egyike az ilyenfajta jelenségeknek.

A  $g$  szokásos interpretációja az, hogy leírja az idő–tér-kontinuum metrikáját. Ezt az interpretációt nem tartjuk szerencsésnek, inkább azt mondjuk, hogy  $g$  *az éternek — a többi mező hordozójának — állapotát írja le.*

E feltételezésből az is tisztázódik, hogy miért tartalmazza a (3) formájú törvények  $g$ -t explicit módon.  $g$  előfordulása az egyenletekben azt mutatja, hogy egy fizikai rendszer tulajdonságait nem csupán az  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$  speciális fizikai mennyiségek és  $\mathfrak{r}_k$  pontok helyzetei határozzák meg, hanem ezenkívül az éter állapota a rendszer által elfoglalt tartományban is szerepet játszik.

**404.** Az a feltételezés, hogy fizikai törvényeket a (3) egyenlet formájában meghatározhatunk, azt a további feltételezést is tartalmazza, hogy a  $g$  tenzormező az éter állapotát *egyértelműen meghatározza.* Elvben elképzelhető volna az is, hogy  $\mathfrak{R}$  tartományban az éter állapotát  $g$  mellett még más

$f$  mezők határozzák meg. Ez utóbbi mezőkről fel lehetne tételteni, hogy nem befolyásolják a fény terjedésének módját és ezért  $f$  nem határozható meg, ha csak a fényterjedés megfigyelésére szorítkozunk.

TREDER\* javasolt egy elméletet, ahol a szimmetrikus  $g$  mátrixmező helyett egy 16 komponenssel rendelkező matrixmező jelenik meg. Ez az elmélet azt tételteni fel, hogy a tenzor összefüggésekben csak a szokásos  $g$  tíz komponense játszik szerepet, azonban a spinormezők törvényszerűségeiben mind a tizenhat elem fellép.

### 3. A TERJEDÉSI TENZOR NORMÁLFORMÁJA

405. Egy tenzor, vagy tenzormező elemeire nagyon különböző számértékeket kapunk, ha különböző reprezentációkat hasonlítunk össze. Ennek folytán olyan véleménnyel is találkozunk, amely szerint az egyik vagy a másik tenzor  $e$  határozatlanság folytán „fizikailag értelmetlen”. A kérdés ilyen felvetésével azonban vigyázni kell. Annak ellenére, hogy egy fizikai mennyiség mértékszámai a különböző reprezentációkban eltérnek egymástól, mégis igazi fizikai mennyiségeket tükröznek.

Példaként tekintsük a  $g$  terjedési tenzort. A  $K$  reprezentációban

$$K(g) = \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$  minden  $\mathbf{x}$  értékre tíz független elemmel rendelkezik. Ha egy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

koordinátatranszformációt alkalmazunk, akkor  $g$ -nek új  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$  reprezentációját kapjuk. Minthogy a transzformáció csak négy függvényt tartalmaz,  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$  tíz eleméből legfeljebb négyet adhatunk meg önkényesen és találhatunk olyan transzformációt, amely  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -et az előírt  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$ -be viszi át. Ha egy  $\mathfrak{R}$  és egy  $\mathfrak{R}'$  tartományban a terjedési tenzort  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ , illetve  $\mathbf{g}'_2(\mathbf{x}')$  reprezentálja, csak kivételes esetben lehet a két függvényt ugyanannak a terjedési tenzornak reprezentációjaként felfogni. Tehát kivételes az az eset, ahol

$$K(g) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad K'(g) = \mathbf{g}'_2(\mathbf{x}').$$

*Tehát  $g$  tenzor  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  reprezentációja  $e$  tenzor különleges vonásait tükrözi oly módon, hogy ezek a vonások  $g$  minden reprezentációjában megtalálhatók, és ezek a reprezentációtól független módon a  $g$  mező objektív fizikai tulajdonságait írják le.*

406. Mindezt a következő megfontolások segítségével világítjuk meg:  $K$  és  $K'$  vonatkoztatási rendszereket összekötő transzformációt írhatjuk mint

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Minthogy  $e$  transzformáció négy önkényes függvényt tartalmaz, *normál reprezentációnak* tekinthetünk olyat, ahol

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = K(g) \quad (5)$$

\* H. J. TREDER: Einstein-Symposium (Berlin, November 1965), Akademie Verlag, Berlin, 1966.

reprezentációra megfelelő előírásokat kötünk ki. Szokásos módon írjuk, hogy

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V} & -C^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Megkövetelhetjük például, hogy

$$\mathbf{V} = 0, \quad \text{Grad } C = 0. \quad (7)$$

**407.** Annak bizonyítására, hogy bármelyik  $g$  eloszláshoz a (7) feltételeket kielégítő reprezentáció található, vizsgáljunk egy  $K$  vonatkoztatási rendszert, amelyben  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  a (6)-nak megfelelő módon van megadva, de anélkül, hogy (7) ki lenne elégítve. Ha most egy új  $K'$  vonatkoztatási rendszerre térünk át, egy megfordítható négyestranszformáció segítségével azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}'(\mathbf{x}') \mathbf{S}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

továbbá írhatjuk, hogy

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \alpha \end{pmatrix}, \quad (9)$$

ahol

$$P_{ik} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad b_k = \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (10a)$$

és

$$a_i = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial t}, \quad \alpha = \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial t}. \quad (10b)$$

(9)-et (10)-be behelyettesítve és feltételezve, hogy

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} \mathbf{G}' & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } c = \text{állandó}, \quad (11)$$

azt találjuk, hogy

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{G}' \mathbf{P} - (\mathbf{b} \circ \mathbf{b}) c^2, \quad (12a)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} \mathbf{G}' \mathbf{P} - \alpha c^2 \mathbf{b}, \quad (12b)$$

$$C^2 = \alpha^2 c^2 - \mathbf{a} \mathbf{G}' \mathbf{a}. \quad (12c)$$

(12a)-ból következik, hogy

$$\mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{P}^{-1} + (\mathbf{b} \mathbf{P}^{-1} \circ \mathbf{b} \mathbf{P}^{-1}) c^2. \quad (13)$$

(12b)-ből azt találjuk, hogy

$$\mathbf{a} = (\mathbf{V} + \alpha c^2 \mathbf{b}) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G}'^{-1}. \quad (14)$$

Ha (13)-at és (14)-et a (12.c)-be behelyettesítjük, akkor  $\mathbf{g}, \mathbf{P}, \mathbf{b}$ , valamint  $\mathbf{G}'$  elemeinek segítségével  $\mathbf{a}$ -t és  $\alpha$ -t a következő módon fejezhetjük ki:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}(\mathbf{P}, \mathbf{b}, c, \mathbf{g}), \\ \alpha &= \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{b}, c, \mathbf{g}). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Ha  $c$  számértékét előírjuk és azonkívül a  $t = 0$  pillanatban feltesszük, hogy

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{r}), \quad (16a)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r}), \quad (16b)$$

akkor  $\mathbf{a}$  és  $\alpha$  értékeit  $t = 0$  pillanatra meg tudjuk állapítani és így az  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  komponenseinek időderiváltjait a  $t = 0$  pillanatra vonatkoztatva megkapjuk.

Az  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  időderiváltjait minden  $\mathbf{r}$  értékre  $t = 0$  pillanatban ismerve lépésről-lépésre meg tudjuk határozni  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  értékeit minden későbbi  $t > 0$  időpontra, vagy az időben visszafelé haladva  $t < 0$  időre.

**408.** Ha tehát a (16) formában kezdőfeltételt írunk elő,  $K'$  vonatkoztatási rendszert konstruálhatunk úgy, hogy

$$K'(\mathbf{g}) = \mathbf{g}'(\mathbf{x}') \text{ és } \mathbf{V}' = 0, C' = c.$$

A  $K'$  rendszer olyan vonatkoztatási rendszernek fogható fel, amely az éterhez képest nyugalomban levőnek tűnik. E számítás eredménye azonban — minthogy önkényes kezdőfeltételt tartalmaz — a  $K'$  vonatkoztatási rendszert nem egyértelműen adja meg.

A homogén esetben — mint már tudjuk — fennáll az egymáshoz képest translációs sebességgel mozgó rendszerek bevezetésének lehetősége úgy, hogy mindegyikben a fény izotrop terjedést mutasson. Az inhomogén esetben egy hasonló többértelműség lép fel. Vizsgáljunk két,  $K$  és  $K'$  vonatkoztatási rendszert, amelyekben érvényes

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' = 0, \quad C = C' = c.$$

A (10) összefüggés segítségével  $K$ -t és  $K'$ -t összekötő transzformáció mátrixának elemeire azt találjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}' &= \tilde{\mathbf{P}}^{-1}(\mathbf{G} + \mathbf{b} \circ \mathbf{b} c^2) \mathbf{P}^{-1}, \\ \alpha &= (1 - \mathbf{b}(\mathbf{G} + (\mathbf{b} \circ \mathbf{b}) c^2)^{-1} \mathbf{b} c^2)^{-1/2}, \\ \mathbf{a} &= c^2 \alpha \mathbf{b}(\mathbf{G} + \mathbf{b} \circ \mathbf{b} c^2)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Fenti egyenletben  $\mathbf{P}$ -t és  $\mathbf{b}$ -t a  $t = 0$  pillanatban tetszőlegesen választhatjuk, és e mennyiségek értékeit lépésről lépésre való integrálás segítségével kiszámíthatjuk a  $t \neq 0$  pillanatban. Minthogy  $-\mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}$  egy  $\mathbf{r}' =$  konstans koordinátával rendelkező pont egy  $\mathbf{r} =$  konstans ponthoz viszonyított sebességet adja, azt látjuk, hogy ezek a normál koordináta-rendszerek egymáshoz képest mozgásban vannak, éppen úgy, mint a különböző Lorentz-rendszerek.

## B) SPECIÁLIS REPREZENTÁCIÓK FIZIKAI TARTALMA

### 1. SPECIÁLIS REPREZENTÁCIÓK

**409.** Megfelelő reprezentációk használatával mindig elérhetjük, hogy  $\mathbf{V} = 0$  és  $\text{grad } c = 0$  legyen. További  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -re vonatkozó feltételek azonban általában már nem teljesíthetők megfelelő vonatkoztatási rendszer választásával.

Példaképpen vizsgálhatunk olyan eloszlásokat, ahol

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

A (18) feltétel a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  reprezentációra tíz független feltételt állít fel. Ha egy tetszőleges  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  reprezentációból indulunk ki, amely a (18)-nak nem tesz eleget, akkor igyekezhetünk olyan  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$  reprezentációt találni, melyben

$$\frac{\partial \mathbf{g}'(\mathbf{x}')}{\partial t'} = 0. \quad (19)$$

Mint ahogy

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \circ \overline{\square}. \quad (20)$$

(19) és (20) együttesen az  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  négy komponensére tíz feltételt ad meg, tehát ez az egyenletrendszer túlhatározott és általában nem rendelkezik megoldással.

Olyan kivételes esetekben, ahol  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  olyan alakú, hogy a (19)-ből és (20)-ból álló egyenletrendszer megoldható, arra kell következtetnünk, hogy nem egyszerű véletlenül állunk szemben, amely a matematikailag túlhatározott egyenletrendszert megoldhatóvá teszi. Ilyen esetben inkább azt kell feltételeznünk, hogy az a körülmény, hogy  $\mathbf{g}$  olyan reprezentációval rendelkezik, amely a (19)-et kielégíti, fizikailag jelentős tény. Így fel lehet tételezni, hogy azok a konfigurációk, amelyek a (19)-et kielégítő reprezentációval rendelkeznek, *stacionárisak*, vagyis az éter stacionáris állapotban van olyan tartományokban, ahol  $\mathbf{g}$  rendelkezik olyan  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$  reprezentációval, melynek elemei  $t'$ -től függetlenek.

Ugyanígy a  $\mathbf{g}$  tenzor megfelelő  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  reprezentációjában mutatkozó más szimmetriákat, vagy különleges vonásokat valódi fizikai tulajdonságoknak minősíthetünk, feltételezve, hogy ezeket a szimmetriákat tetszőleges  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -ből kiindulva koordinátatranszformáció segítségével nem tudjuk előállítani.

### 2. ENERGIA—IMPULZUS-ELOSZLÁS

**410.** Hasonló megfontolást végezhetünk a

$$\mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{x}) = K(\mathfrak{I})$$

az anyag energia—impulzus tenzorával kapcsolatban. Minden esetben lehetséges olyan  $\mathbf{T}$  reprezentációt találni, amelyben

$$T_{4k}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Ez a reprezentáció olyan koordináta-rendszerben érvényes, amelyben anyagi pontok időtől független koordinátavektorokkal rendelkeznek.

Ha azonban az anyagnak az éterhez viszonyított mozgását akarjuk vizsgálni, akkor megvizsgáljuk, hogy létezik-e egy olyan reprezentáció, amelyben

$$T_{4k}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{és} \quad g_{4k}(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (22)$$

összefüggések egyidejűleg érvényesülnek. A (22) összefüggés a reprezentációra hat feltételt ír elő, tehát egy tetszőleges reprezentációból kiindulva általában nem lehetséges megfelelő transzformáció segítségével olyan reprezentációra áttérni, melynek mértékeiben (22) érvényesül. *Azokban azokban a kivételes esetekben, ahol a (22)-öt kielégítő reprezentációt találunk, arra a következtetésre jutunk, hogy az anyag az éterrel együtt mozog.*

Ha az anyagnak az univerzumban való eloszlását nagy vonásokban írjuk le, feltételezhetjük, hogy a csillagok közötti kölcsönhatás főleg gravitációs hatáson alapul. Az univerzumban eloszlott csillagrendszereket egy gáz atomjaival összehasonlítva feltételezhetjük, hogy az univerzumban eloszlott anyag úgy viselkedik, mint egy feszültségektől mentes közeg. Elég nagy térfogatokra átlagolva feltételezhetjük, hogy

$$T_{\nu\mu}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{kivéve} \quad \nu = \mu = 4, \quad (23)$$

$$T_{44}^{(2)}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) > 0.$$

Pontosabban fogalmazva azt tehetjük fel, hogy létezik olyan  $\mathbf{T} = K(\mathfrak{X})$  reprezentáció, amely mértékében (23) kielégül.

Bár a (23) nem invariáns kifejezés, mégis az anyag eloszlásának jellemző vonását fejezi ki.  $\mathfrak{X}, \mathbf{T}(\mathbf{x})$  tetszőleges reprezentációjából kiindulva általában nem lehetséges egy olyan  $\mathbf{T}'(\mathbf{x}')$  reprezentációt találni, amely (23)-at kielégíti. Amennyiben egy megfelelő koordinátatranszformáció segítségével mégis eljutunk egy  $\mathbf{T}'(\mathbf{x}')$  új reprezentációhoz, amely (23)-at kielégíti, ez azt bizonyítja, hogy a  $\mathfrak{X}$  eloszlás különleges tulajdonsággal rendelkezik. Ez esetben feltételezhetjük, hogy  $\mathfrak{X}$  által leírt anyag feszültségmentes állapotban van. Ha a (23) mellett még

$$g_{k4} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

-ra is kielégítő reprezentációt találunk, arra a következtetésre jutunk, hogy az így leírt anyag egyrészt feszültségmentes állapotban van, másrészt az éterrel együtt áramlik.

## C) KOZMOLÓGIAI PROBLÉMÁK

**411.** A következőkben az általános relativitáselmélet néhány kozmológiai eredményét foglaljuk össze nagyon röviden. A kozmológiai elméletek általában az anyag megfigyelt eloszlásának vonásaival foglalkoznak és ezeket az *Einstein-féle* gravitációs egyenletekkel, vagy ezek általánosításával igyekeznek összhangba hozni.

### 1. ASZTRONÓMIAI MEGFIGYELÉSEK EREDMÉNYEI

**412.** Csillagászati megfigyelések mutatják, hogy az univerzum galaxisokból áll, amelyek — amennyiben a megfigyelésekből ezt meg lehet állapítani — a térben egyenletes sűrűséggel oszlanak meg. Az univerzum nagy részeit tekintve az egységtérfogatban foglalt galaxisok számát kb. egyformának vehetjük. Amennyiben ezeket a galaxisokat gázatomokkal hasonlítjuk össze, az univerzumot egy állandó sűrűségű gázként foghatjuk fel.

A galaxisok mozgása olyan, hogy egymás közötti összeütközéseket nagyon ritka eseményeknek kell minősíteni, még kozmikus időskálában is. Ezért a galaxisok közötti kölcsönhatást jó közelítésben gravitációs kölcsönhatásnak vehetjük. Hidrodinamikai analógiát használva: az univerzumot egy saját gravitációs hatása alatt mozgó alacsonyhőmérsékletű gázzal hasonlítjuk össze.

**413.** HUBBLE megfigyelései szerint a távoli galaxisok spektrumai erős vörös eltolódást mutatnak. Megfigyeléseit a

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -kr \quad (24)$$

formula foglalja össze, ahol  $\Delta\nu$  az a különbség, amelyet egy atom spektrumvonalának frekvenciájában találunk, amikor a laboratóriumban észlelt frekvenciát összehasonlítjuk egy ugyanolyan atom távoli galaxisból érkező fényének frekvenciájával.

$$k \approx 10^{-27} \text{ cm}^{-1} \approx 10^{-8} \text{ par sec}^{-1}$$

a *Hubble-féle* állandó; ezen állandó numerikus értékét csak nagyon nagy bizonytalansággal lehet megállapítani hiszen a galaxisok távolságát csak közvetett módon lehet megbecsülni.

Feltételezve, hogy a *Hubble-effektus* *Doppler-effektus* által jön létre, vagyis azt feltételezve, hogy a távoli galaxisok nagy sebességgel távolodnak tőlünk, (24) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$v = ckr, \quad (25)$$

ahol  $v$  az  $r$  távolságban levő objektumok recessziós sebessége.

Rendelkezünk csillagászati tapasztalatokkal, amelyek azt mutatják, hogy az univerzumban rövid hullámú elektromágneses sugárzás is található. E problémakörre itt nem térünk ki.

## 2. A FRIEDMANN-FÉLE MEGOLDÁS

414. A kozmológiai megfontolások között több foglalkozik a

$$\mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R = - \kappa \mathbf{T} - \lambda \mathbf{g} \quad (26)$$

gravitációs egyenletek lehetséges megoldásaival. Amikor kísérletek folytak a gravitációs egyenleteknek az univerzum megfigyelt állapotát megadó megoldásának megtalálására, gyakran feltételezték, hogy az anyag feszültségmentes és a (23) egyenletnek megfelelő formában írható le. A probléma konkretizálása érdekében FRIEDMANN megvizsgálta a kérdést, vajon az *Einstein*-egyenletek rendelkeznek-e olyan megoldással, amelyben megfelelő reprezentáció esetén a  $\mathfrak{T}$  tenzor a (23) formát, míg  $\mathbf{g}$  a

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A^2 \mathbf{B} & 0 \\ 0 & -C^2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

formát veszi fel, ahol még azt is kikötjük, hogy

$$\text{Grad } C = 0 \text{ és } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (28)$$

míg az  $A$  mennyiség pedig  $\mathbf{x}$ -től tetszőleges módon függhet.

A  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -re vonatkozó (27) feltételezés a reprezentációt erősebben köti meg mint a normál reprezentációra jellemző (27) kikötés. Tudniillik (27)-ből következik, hogy

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = A^2(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (29)$$

E feltételezések  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ -et és ennek folytán  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -et is korlátozzák.

415. Amennyiben  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  (27)-nek megfelelő formájú, az  $\mathbf{R}$  <sup>(2)</sup> elemeit meghatározhatjuk. Számításunk eredményeként azt kapjuk, hogy

$$R_{k4}^{(2)} = 2 \frac{\partial^2 \ln A}{\partial x_k \partial t}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (30a)$$

$$R_{44}^{(2)} = \frac{3}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (30b)$$

A (26) gravitációs egyenletekből (23) segítségével az következik, hogy

$$R_{k4}^{(2)} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (31a)$$

$$R_{44}^{(2)} = -\frac{1}{2} \kappa u - \lambda C^2. \quad (31b)$$

Azt találjuk tehát, hogy

$$\frac{\partial^2 \ln A}{\partial x_k \partial t} = 0,$$

ennélfogva

$$A(\mathbf{x}) = \alpha(t) \beta(\mathbf{r}).$$



A  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  formájának további korlátozása nélkül beleolvaszthatjuk a  $\beta(\mathbf{r})$  faktort a  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  mátrixba, és ily módon

$$A(\mathbf{x}) = A(t). \quad (32)$$

Az  $A(t)$  explicit meghatározásához megjegyezzük, hogy

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(2)} = 0$$

és ezért (23) és a II. Függelék 476. pont (37) egyenletének értelmében azt találjuk, hogy

$$u = \frac{\beta'}{A^3}, \quad (33)$$

ahol  $\beta'$  integrációs állandó és

$$\frac{\partial \beta'}{\partial t} = 0.$$

Ha a (33)-at behelyettesítjük (31b)-be és figyelembe vesszük, hogy (32) szerint  $A$  csak  $t$ -től függ, azt találjuk, hogy

$$\frac{3}{A} \frac{d^2 A}{dt^2} = -\frac{\beta}{A^3} - \lambda C^2, \quad (34)$$

ahol  $\beta = \frac{1}{2} \kappa \beta'$  az új integrációs állandó.

(34)-et  $\frac{2}{3} A \frac{dA}{dt}$ -vel megszorozva egy teljes differenciálhoz jutunk. Integrálva azt találjuk, hogy

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 = \frac{2\beta - KA - \lambda C^2 A^3}{3A}, \quad (35)$$

ahol  $K$ -t írunk az integrációs állandóra. A (35)-öt integrálva az  $A$ -ra explicit kifejezéseket kapunk. Ha  $K = 0$  és  $\lambda = 0$  értékeket helyettesítünk be, akkor

$$A(t) = A_0(t + t_0)^{2/3}, \quad (36)$$

vagyis  $A^2(t)$  ebben az esetben idővel növekszik.

Attól függően hogy a  $K$ -ra és a  $\lambda$ -ra milyen értékeket választunk, olyan megoldáshoz jutunk, amelyben  $A(t)$  az idővel vagy növekszik vagy csökken. A (35) egyenlet speciális megoldással is rendelkezik:

$$A = A_0, \text{ ahol } 2\beta - KA_0 - \lambda C^2 A_0^3 = 0.$$

Ez utóbbi megoldás azonban — mint kimutatható — labilis konfigurációnak felel meg, amely a legkisebb zavar hatása folytán átmegegy egy időben változó konfigurációba, amelyben  $A(t)$  időben növekszik vagy csökken.

A fenti megfontolásokból arra a következtetésre jutunk, hogy az *Einstein*-féle egyenletek nem rendelkeznek stacionárius megoldással, amelyben mind az anyag, mind pedig az éter nyugalomban van.

## D) A FRIEDMANN-FÉLE MEGOLDÁS ELEMZÉSE

**416.** Néhány megjegyzéssel megpróbáljuk azon mozgások típusát tisztázni, amelyek a *Friedmann*-megoldásnak megfelelő konfigurációban lépnek fel.

### 1. A GALAXISOK RECESSZIÓJA

**417.** A  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -et a *Friedmann*-féle megoldás szerint kiszámítva <sup>(3)</sup> mindazon komponensei eltűnnek, amelyeknek indexei 4-est tartalmaznak. Ebből az következik, hogy *egy részecske, amelynek a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebessége a  $t = 0$  pillanatban eltűnik, továbbra is nyugalomban marad a vonatkoztatási rendszerhez képest.*

A mozgásegyenletekből tudniillik az következik, hogy

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(p) = 0, \text{ ha } \dot{\mathbf{r}}(p) = 0, \\ \mathbf{r}(p) = \mathbf{r} = \text{konstans} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

és ezért

a mozgásegyenletek megoldása. Ebből azt következtetjük, hogy az anyag saját gravitációs hatása alatt az éterrel együtt mozog.

#### a) Intergalaktikus távolságok mértéke

**418.** Egy fényjel egy állandó  $\mathbf{r}_1$  vektor által rögzített  $P_1$  pontból egy másik állandó  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}$  koordinátavektorral rendelkező  $P_2$  pontba  $\delta t_1$  idő alatt jut el. Ha ez a fényjel  $P_2$ -ből visszaverődik  $P_1$ -be, az oda-vissza futási idő

$$\delta t_{12} = \delta t_1 + \delta t_2 = A(t) (\delta \mathbf{r} \mathbf{B} \delta \mathbf{r})^{1/2}/c \quad (38)$$

(lásd **163.** pont, (31a)).

Az  $A(t)$  faktor azt mutatja, hogy ha egymásutáni fényjelek a  $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$  utat megteszik, az egymást követő jelek az oda-vissza utakat különböző idők alatt teszik meg. Ha a (36) típusú megoldást vizsgáljuk, akkor azt találjuk, hogy a fényjelek futási ideje időben *növekszik*.

Ha a  $P_1, P_2$  pontok távolságmértékeként egy fényjel oda-vissza futási idejét vesszük, e definíció szerint úgy találjuk, hogy a pontok közötti távolság mértéke időben növekszik. A  $P_1$  és  $P_2$  pontok két egymástól távoli égitestet jelenthetnek ebben a megfontolásban.

419. Ha feltételezzük, hogy egy szilárd test struktúrája olyan, hogy az oda-vissza futási idő a test két pontja között időben nem változik, akkor az előző eredményt úgy értelmezhetjük, hogy két szabadon mozgó  $P_1$  és  $P_2$  test közötti távolság növekszik, ha a távolság mértékét szilárd test segítségével mérjük.

A *Friedmann*-megoldás ezen értelmezés szerint azt tartalmazza, hogy az éter — mint egész — expandál és a szabadon mozgó testekből álló anyag vele együtt mozog.

A fenti effektus fizikai tartalmának jobb megértése érdekében vizsgáljuk meg egy szokásos óra ritmusát  $K$  vonatkoztatási rendszerben, ahol  $K(g)$  (27), (28) és (36) szerint van megadva.

Óraként vegyünk akár egy oszcilláló atomot, akár egy szabadon forgó kereket, vagy valami hasonló zárt rendszert. Feltételezhetjük, hogy egy ilyen óra járását — egy majdnem egyenes vonatkoztatási rendszerben — jó közelítésben a klasszikus mozgásegyenletek adják. Ahhoz, hogy egy majdnem egyenes reprezentációt kapjunk, a 335. pontban, illetve a II. Függelék (51a) formula szerinti transzformációt alkalmazzuk.

Megjegyezzük, hogy a használt reprezentációban a  $\overset{(3)}{C}$  és  $\overset{(3)}{C}$  szimbólumok azon elemei, amelyek 4-es indexet is tartalmaznak, csak konstans faktorban különböznek; ezt a további számításokban kihasználjuk. Tehát

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (39)$$

ahol

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \overset{(3)}{C} \mathbf{x}^2 + \dots$$

A (27) és (28)-ből azonban az következik, hogy a  $\overset{(3)}{C}$ -nak az  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0, t_0$  pontban nem eltűnő komponensei

$$\overset{(3)}{C}_{kk4} = -\overset{(3)}{C}_{4kk} = A'(t_0)/A(t_0), \quad k = 1, 2, 3,$$

ahol  $A'$  az  $A$ -nak  $t$  szerinti deriváltját jelöli. (39)-ből az következik, hogy

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \overset{(3)}{C}_{444} + \dots \quad a(t - t_0)^2 \text{ és } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2\text{-rendű tagok.}$$

Mint ahogy  $\overset{(3)}{C}_{444} = 0$ , azt találjuk, hogy

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \text{kis tagok.} \quad (40)$$

Egy fizikai óra ritmusa (kis tagok elhagyásával) a majdnem egyenes reprezentációban állandó lévén, azt várjuk, hogy az óra ritmusa  $t'$  mértékekben kifejezve állandó. A (40) egyenletet figyelembe véve azt látjuk, hogy az eredeti  $t$  mértékben véve szintén állandónak adódik az óra ritmusa.

Így  $P_1$  és  $P_2$  pontok közötti oda-vissza jeleket vizsgálva azt találjuk, hogy a  $P_2$  pont távolodik ha a távolságmértékeket fényjelekkel, az időmértéket a szokásos konstrukciójú fizikai órákkal határozzuk meg.

420. A (39)-ből  $\mathbf{r}$  komponenseinek idő szerinti deriváltjait képezve, azt találjuk, hogy

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t'} \approx \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \approx + \frac{1}{2} (A'(t_0)/A(t_0))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Tehát két,  $K$ -hoz képest nyugvó pont közötti távolság mértéke növekszik, ha ezt a mértéket a majdnem egyenes  $K'$  vonatkoztatási rendszer mértékeiben mérjük.

Mint hogy azonban a majdnem egyenes  $K'$  rendszerben véve egy szilárd test mértékei majdnem állandóak maradnak, az következik, hogy a  $K$ -hoz képest nyugvó  $P_1$  és  $P_2$  pontok távolsága időben növekszik akkor, ha a távolságot egy szilárd test segítségével mérjük meg.

Látjuk tehát, hogy a *Friedmann*-konfigurációban az anyag radiális irányban együtt áramlik az éterrel. A zárt fizikai rendszerek, amelyeket az interstelláris anyag „atomjaiként” foghatunk fel, nem vesznek részt ezen expanzív mozgásban. Az expanziót tehát az intergalaktikus rendszerek közötti távolságok a szilárd testek méreteihez viszonyított növekedésének tekinthetjük.

### b) *Doppler-effektus*

421. Vizsgáljunk egy, a  $P_1$  pontban elhelyezett atomot, mely  $\nu$  frekvenciájú fényt bocsát ki. Hullám frontok tehát a

$$t_n = t_0 + n/\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

időpontokban bocsátódnak ki, ahol az időmértékeket a  $P_1$  környékében levő órán állapítjuk meg.

Ezek a jelek az  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}$  vektorral rendelkező  $P_2$  pontba

$$t_n^* = t_0 + n/\nu + A^2(t_n) (\delta \mathbf{rB} \delta \mathbf{r})^{1/2}/c^2 + \text{magasabb rendű tagok}$$

időpontokban érkeznek meg. Azt találjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{\nu^*} = t_{n+1}^* - t_n^* = \frac{1}{\nu} (1 + 2A^2(t_n)A(t_n)(\delta \mathbf{rB} \delta \mathbf{r})^{1/2}/c^2) + \text{magasabb rendű tagok},$$

és ha a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk,

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = - \frac{2A'A}{c} \delta r,$$

$$\Delta \nu = \nu^* - \nu,$$

$$\delta r = (\delta \mathbf{rB} \delta \mathbf{r})^{1/2}.$$

A  $P_1$  pontban elhelyezett atom sugárzása a  $P_2$  pontot egy  $\nu^* < \nu$  frekvenciával éri el. A fenti formula a galaktikus rendszerek spektrumában fel lépő vörös eltolódását fejezi ki. Így a *Friedmann*-megoldás által leírt konfigurációban a mozgásegyenletek kvalitatíve a *Hubble*-effektushoz vezetnek.

**422.** A fenti érveléseket abban a megállapításban foglaljuk össze, hogy a *Friedmann*-megoldás olyan  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  eloszláshoz vezet, amelynek megfelelően bármely  $\mathbf{x}_0$  négyespont környezetében a reprezentáció majdnem egyenes. Tehát, ha az  $\mathbf{x}_0$  pont (kis) környékét a

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi$$

koordinátákkal írjuk le,  $\xi$  majdnem egyenes reprezentációjú koordináta mértékeként fogható fel.

Lokális folyamatot, mint egy szilárd test mozgását, óra ritmusát stb. nézve jó közelítésben az adott pont kis környékében a homogén tartományban érvényes törvényeket alkalmazhatjuk. Ilyen órákkal és mérőrudakkal ugyanakkor vizsgálhatjuk távoli objektumok távolságait. Ebben az esetben azt találjuk, hogy ezek a távolságok időben növekednek; a lokálisan szabályozott órák segítségével ugyanakkor azt tapasztaljuk, hogy távoli objektumokból kibocsátott fény *Doppler*-eltolódást szenved és ez az eltolódás éppen olyan, mintha az objektumok radiális sebességgel rendelkeznének.

A lényeg tehát az, hogy a *Friedmann*-megoldás automatikusan két skálához vezet, az egyik a rögzített pontok kis környékében, a másik pedig nagy távolságokra érvényes.

## E) A MACH-ELV

**423.** Az általános relativitáselmélet megfogalmazása előtt E. MACH az általános relativitáselmélettel bizonyos összefüggésben álló elvet fogalmazott meg. Eszerint egy forgó  $\mathfrak{A}$  rendszerben fellépő tehetetlenségi erők (vagyis centrifugális erők) az  $\mathfrak{A}$  környezetében elhelyezkedő csillagokhoz viszonyított forgásnak a hatásából eredő erőként foghatók fel. MACH azt is felvetette, hogy „ha az egész univerzumot  $\mathfrak{A}$  körül forgatnánk”, a kölcsönhatás ugyanaz maradna, és az  $\mathfrak{A}$ -t körülvevő csillagok forgásuk által ugyanazokat a centrifugális erőket hoznák létre, mint amelyek akkor lépnek fel, ha  $\mathfrak{A}$ -t a környezetéhez képest forgatjuk.

Tényleges kísérletek során egy forgásba hozott  $\mathfrak{A}$  rendszer viselkedését vizsgálták úgy, hogy egy nagytömegű kereket helyeztek el  $\mathfrak{A}$  körül, és megvizsgálták: vajon e keréknek az  $\mathfrak{A}$  rendszerrel való együttmozgása a centrifugális erők csökkenésére vezet-e vagy sem. A kísérlet nem vezetett megfigyelhető effektushoz.

### a) A *Thirring*-effektus

**424.** H. THIRRING\* megmutatta, hogy EINSTEIN gravitációs egyenletei szerint egy forgó gömbhéj belsejében olyan erők várhatók, amelyek összehasonlíthatók egy forgó rendszerben fellépő tehetetlenségi erőkkel.

\* H. THIRRING: Phys. Zs., 19, 33, 1918. (amihez kisebb kiegészítést fűz még: Phys. Zs., 22, 29, 1921.)

THIRRING és LENSE\* azt is kimutatták, hogy egy forgó gömb alakú test környezetében az *Einstein*-egyenletek szerint a gravitációs mező módosul, és felvetették, hogy a Jupiter és talán a Szaturnusz holdjai mozgásában ezen effektus folytán esetleg megfigyelhető anomáliák várhatók. A megjósolt anomáliák olyan kicsik, hogy a mérési hibák folytán ma még nem dönthető el, hogy az effektus létezik-e a valóságban. A fenti effektust az irodalomban *Thirring-effektusnak* nevezték el.

425. Bár egy forgó rendszer gravitációs mezője különbözik egy hasonló — nem forgó test által létrehozott — mezőtől, a *Mach*-elv mégis ellentmondásban van az általános relativitáselmélettel, — amint ezt TREDER\*\* kimutatta.

A *Mach*-elv interpretációjának problematikája legjobban úgy érthető meg, ha visszaemlékezünk, hogy egy  $\mathfrak{R}$  tartományban a fizikai állapotot a  $g$  tenzor (amely az éter állapotát írja le) és a  $\mathfrak{T}$  tenzor (amely az anyag és a mezők eloszlását írja le) együttesen határozzák meg. Egy  $K$  reprezentáció, amelyben a

$$g_{k4} = 0 \text{ és } T_{k4} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (41)$$

feltételek egyszerre fennállanak, egy olyan állapotot ír le, amelyben az anyag az éterhez képest nyugalomban van. Az anyag egészét forgásba hozva, olyan konfigurációt kapunk, amelyben (az eredeti reprezentációt megtartva)

$$g_{k4}^* = 0, \quad T_{k4}^* \neq 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (42)$$

(\*-gal a két konfiguráció közötti különbséget jelöljük.) Ez utóbbi konfiguráció az előbbtől fizikailag különbözik, amint ezt részletesen a 410. pontban megmutattuk.

Tehát durván kifejezve: ha az anyagot megpörgetjük, viszont az éter eredeti állapotban marad, egy olyan konfigurációhoz jutunk, amely fizikailag különbözik attól a konfigurációtól, ahol az anyag nem forog az éterhez képest.

426. A fenti megfontolásokból a következő kvalitatív eredményre jutunk. Vizsgáljunk egy (41)-nek megfelelő stacionárius megoldást, ahol

$$g_{kl}(\mathbf{x}) = g_{kl}(\mathbf{r}), \quad g_{v4}(\mathbf{x}) = 0.$$

Ha  $T_{k4}$ -et a  $T_{k4}^*$ -gyel helyettesítjük, és feltételezzük, hogy a  $t = 0$  pillanatban

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{g}(\mathbf{r}),$$

$\mathbf{g}^*(\mathbf{x})$  értékeit  $t > 0$  időkből az *Einstein*-féle gravitációs egyenletek segítségével kiszámíthatjuk, amint ezt a 393. pontban már megmutattuk. Megjegyezzük, hogy bár a  $t = 0$  pillanatban  $\mathbf{g} = \mathbf{g}^*$ , mégis a  $\mathbf{T}$  változása következtében a  $g_{kl44}^*$  második, valamint a  $g_{k44}^*$  első időderiváltak a nullától különböznek. Ezekből az következik, hogy — még a  $t = 0$  pillanatban is —

\* J. LENSE és H. THIRRING: Phys. Zs., 19, 156, 1918.

\*\* H. J. TREDER: Einstein Symposium, Berlin, 1965.

<sup>(3)</sup> $C^*$  értékei és a <sup>(3)</sup> $C$  értékei egymástól különböznek, és ezért a mozgásegyenletek a csillaggal jelölt konfigurációban különböznek az eredeti konfigurációban érvényes mozgásegyenletektől.

Ez utóbbi különbség összefügg a *Thirring*-effektussal. Az itt kifejtett megjegyzés és THIRRING számításai között az a különbség, hogy ez utóbbiakban a gravitációs egyenleteknek egy forgó gömb környékében érvényes stacionárius megoldásait keresték meg. Ezeket a megoldásokat összehasonlították azokkal, amelyek egy nyugvó gömb környékén érvényesek.

Mi azonban kvalitatív módon a dinamikai folyamatot tárgyaltuk, tehát azt az effektust, amely egy gravitáló tömeg környékén lép fel, ha a gravitáló tömeget *forgásba hozzuk*. Érdekes volna megvizsgálni, hogy egy gravitációs test környékén a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , miután az eredetileg nyugvó testet forgásba hoztuk, valóban arra a  $\mathbf{g}^*(\mathbf{x})$ -re változik-e át, ami THIRRING számításaiból adódott. Tudomásom szerint ezt a kérdést eddig még nem vizsgálták.





## TENZORANALÍZIS HOMOGÉN TARTOMÁNYOKBAN

427. Ebben a könyvben a szokásostól eltérő jelöléseket és konvenciókat használtunk. Ezeket az eltérő jelöléseket részben azért használtuk, hogy ezek segítségével a matematikai kifejezéseket leegyszerűsítsük, de ugyanakkor olyan jelöléseket kerestünk, amelyek az általunk kifejtett felfogáshoz jól alkalmazkodnak. Ez különösen a Függelék II. részére vonatkozik.

## A) VONATKOZTATÁSI RENDSZER

428. Vizsgáljunk egy vonatkoztatási rendszert, amelynek segítségével eseményeket az

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}, t$$

négyeskoordináták által fejezhetünk ki. Egy részecske pályája a  $K$  vonatkoztatási rendszerhez képest paraméter-reprezentációban fejezhető ki úgy, hogy

$$\mathbf{x}(p) = \mathbf{r}(p), t(p), \quad \dot{t}(p) \neq 0.$$

$p$  különböző értékei az  $\mathbf{r}(p)$  koordinátavektorokat a  $t(p)$  időpontokban adják meg. A pont  $p$  paraméter szerinti differenciálást jelenti.

## 1. A LORENTZ-RENDSZER

429. Egy Lorentz-vonatkoztatási rendszer olyan rendszer, amelyben fényjelek pályáját

$$\dot{\mathbf{x}} \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (1)$$

egyenlet segítségével fejezhetjük ki, ahol

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

$\dot{\mathbf{x}}$ -ot írtunk az  $\dot{\mathbf{x}}(p)$  helyett.

## 2. EGYENES VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK

**430.** Ha egy  $K_0$  Lorentz-rendszer koordinátamértékeit egy invertálható lineáris transzformációnak vetjük alá, egy új  $K'$  koordináta-rendszert kapunk, melynek mértékei

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s}. \quad (2)$$

Vizsgáljunk egy  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p)$ , illetve  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(p)$  által leírt pályát. Ha a (2) egyenletet  $p$  szerint differenciáljuk, azt kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}}. \quad (3)$$

Az (1) és (3) összehasonlításából látható, hogy

$$\dot{\mathbf{x}}' \mathbf{g}' \dot{\mathbf{x}}' = 0, \quad (4)$$

ahol

$$\mathbf{g}' = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{S}^{-1}. \quad (4a)$$

Egy  $K'$  vonatkoztatási rendszert *egyenesnek* nevezzük, ha a fényjelek pályája a rendszer mértékeiben kifejezve a (4) egyenletnek eleget tesz úgy, hogy a  $\mathbf{g}'$  mátrix állandó elemekkel rendelkezik. A definícióhoz hozzátesszük még, hogy  $\mathbf{g}'$ -nek szimmetrikusnak kell lennie, és hogy három pozitív és egy negatív sajátértéke legyen. Ez utóbbi követelményt  $\mathbf{\Gamma}$  mátrix teljesíti. E tulajdonságok a koordinátatranszformáció alatt megmaradnak.

## 3. A $\mathbf{g}$ TERJEDÉSI TENZOR

**431.** A  $\mathbf{g}$  mátrixot, amelynek segítségével fényjelek pályája kifejezhető, terjedési mátrixnak nevezzük.  $K, K', \dots$  vonatkoztatási rendszereket  $\mathbf{g}, \mathbf{g}', \dots$  terjedési mátrixok jellemzik. Ezek fejezik ki a fényterjedés törvényét a különböző vonatkoztatási rendszerek mértékeiben. Írjunk a terjedési tenzorra  $\mathbf{g}$ -t és

$$K(\mathbf{g}) = \mathbf{g}, \quad K'(\mathbf{g}) = \mathbf{g}', \dots \quad (5a)$$

adják meg a tenzor reprezentációit. A  $K_0$  Lorentz-rendszerekben azt találjuk, hogy

$$K_0(\mathbf{g}) = \mathbf{\Gamma}. \quad (5b)$$

Ezeket a rendszereket *inerciarendszereknek* is vehetjük.

**432.** Vizsgáljunk két,  $K$  és  $K'$  egyenes vonatkoztatási rendszert, amelyekben az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{x}'$  koordinátamértékeket egy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s} \quad (6)$$

reverzibilis transzformáció köti össze. A fényterjedés a  $K$  és  $K'$  rendszerekben tehát

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}\mathbf{g}\dot{\mathbf{x}} &= 0, & (a) \\ \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{g}'\dot{\mathbf{x}}' &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

szerint fejezhető ki. (6) egyenletből következik, hogy

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}}.$$

Ha azt kívánjuk, hogy (7)-ben felsorolt (a) és (b) összefüggések egymásból következzenek, fel kell tételeznünk, hogy

$$\mathbf{g} = \Theta \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{g}' \mathbf{S}, \quad \Theta > 0.$$

A következőkben  $\Theta = 1$  választással élünk, és így feltételezzük, hogy  $\mathbf{g}$  a

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{g}' \mathbf{S} \quad (8)$$

egyenlet szerint transzformálódik.

#### 4. A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ

**433.** Egy transzformációt *Lorentz-transzformációnak* nevezünk, ha egy egyenes  $K$  rendszerből, amelyben a terjedési mátrix  $\mathbf{g}$ , egy olyan másik  $K'$  vonatkoztatási rendszerbe vezet, ahol

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g}. \quad (9)$$

(8)-ből és (9)-ből következik, hogy az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{M} \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$$

*Lorentz-transzformáció*, ha  $\mathbf{M}$  az

$$\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{g} \mathbf{M} = \mathbf{g} \quad (10)$$

egyenletnek tesz eleget. A (10) egyenletnek eleget tevő mátrixokat *Lorentz-mátrixoknak* nevezjük. Ha  $K$  és  $K'$  *Lorentz-vonatkoztatási rendszerek*, akkor (10) helyett azt írhatjuk, hogy

$$\tilde{\Lambda} \Gamma \Lambda = \Gamma \quad (11)$$

és  $\Lambda$ -t a *Lorentz-mátrix* ortogonális reprezentációjának nevezjük.

**434.** A *Lorentz-transzformációt* úgy is tekinthetjük, hogy nem koordináta-transzformációt fejez ki, hanem egy fizikai rendszer deformációját. Egy  $\mathcal{Q}$  fizikai rendszer és ennek  $\mathcal{Q}^*$  deformált formája közötti összefüggést szimbolikusan úgy írhatjuk, hogy

$$\mathcal{L}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^*.$$

Feltételezve, hogy a  $\mathcal{Q}$  rendszer  $\mathfrak{P}_k$   $k = 1, 2, \dots, n$  pontokból áll, amelyek pályái a  $K$  reprezentációban  $\mathbf{x}_k(p)$  négyeskoordináták által adódnak, a  $\mathcal{Q}^*$  rendszer megfelelő  $\mathfrak{P}_k^*$  pontjainak négyeskoordinátáit

$$\mathbf{x}_k^* = \mathbf{M} \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\mu}$$

adja meg, ahol az  $\mathbf{M}$  *Lorentz-mátrix*. Hangsúlyozzuk, hogy mind  $\mathbf{x}$ , mind  $\mathbf{x}^*$  ugyanannak a  $K$  vonatkoztatási rendszernek mértékeiben kifejezett négyeskoordináták.

Írhatjuk azt is, hogy

$$K(\mathcal{L}) = \mathbf{M}, \boldsymbol{\mu},$$

vagyis az  $\mathcal{L}$  deformáció az  $\mathbf{M}$  *Lorentz-mátrix* és a  $\boldsymbol{\mu}$  négyesvektor segítségével fejezhető ki.

5. LINEÁRIS KOORDINÁTATRANSZFORMÁCIÓK  
STANDARD FORMÁJA

435. Számos alkalmazás céljából hasznos  $\mathbf{g}$ -t tér- és időkomponensekre szétbontani. A következő jelölést használjuk:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V} & -C^2 \end{pmatrix},$$

ahol  $\mathbf{G}$  szimmetrikus pozitív definit mátrix,  $\mathbf{V}$  vektor és  $C$  skalár,  $\mathbf{g}$  determinánsát úgy írhatjuk, hogy

$$\det \mathbf{g} = -(C^2 + \mathbf{V}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{V}) \det \mathbf{G}.$$

Azt írjuk, hogy

$$c = \sqrt{-\det \mathbf{g}} = \sqrt{(C^2 + \mathbf{V}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{V}) \det \mathbf{G}}.$$

$c$ -t úgy tekinthetjük, mint  $K$ -ban a fény terjedési sebességének egy mértékét.

A  $\mathbf{g}$ -t szorzóakra bonthatjuk szét oly módon, hogy

$$\mathbf{g} = \tilde{\alpha}\mathbf{T}\alpha, \quad (12)$$

A (12) egyenlet nem definiálja egyértelműen  $\alpha$ -t. Azonban ha kikötjük, hogy

$$\alpha_{4k} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

akkor  $\alpha$  egyértelműen meghatározható. Azt találjuk, hogy

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{1/2} & \mathbf{G}^{-1/2}\mathbf{V} \\ 0 & (C^2 + \mathbf{V}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{V})^{1/2}/c_0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

ahol

$$-c_0^2 = \Gamma_{44}.$$

Rövid számítás eredményeként azt kapjuk, hogy

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{-1/2} & -c_0 \mathbf{G}^{-1}\mathbf{V}/(C^2 + \mathbf{V}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{V})^{1/2} \\ 0 & c_0/(C^2 + \mathbf{V}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{V})^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

436. Tételezzük fel, hogy  $\mathfrak{g}$ -nek a  $K$ -ban és  $K'$ -ben érvényes reprezentációi (5a) szerint vannak megadva. Felmerül a kérdés: vajon létezik-e egy (6) formájú lineáris transzformáció, amely a  $K$  vonatkoztatási rendszerből a  $K'$ -be vezet. Ilyen lineáris transzformáció homogén részét olyan  $\mathbf{S}$  mátrix adja meg, amely a (8) egyenletnek eleget tesz. A (8) és a (12) összehasonlításból azt látjuk, hogy a mátrix

$$\mathbf{S} = \alpha'^{-1}\alpha$$

(8)-nak eleget tesz, ahol  $\alpha$  elemei  $\mathbf{g}$  elemeiből (13)-nak megfelelően vannak felépítve, és hasonlóan  $\alpha'^{-1}$  (14) szerint a  $\mathbf{g}'$  elemeiből épül fel. Könnyen kimutatható, hogy az  $\mathbf{S}$  mátrix mellett

$$\mathbf{S}_q = \alpha'^{-1}\mathbf{\Lambda}^{(q)}\alpha \quad (15)$$

mátrixok is eleget tesznek (8)-nak, ahol  $\Lambda^{(g)}$  egy Lorentz-matrix ortogonális-reprezentációja. Így tehát az  $S_g$  transzformációs mátrixoknak hatparaméteres sokasága létezik, amely transzformációk mindegyike  $g$ -t a  $g'$ -be viszi át.

437. Abban a különleges esetben, ahol  $g = g'$ , (15) egy Lorentz-transzformáció mátrixát adja. Így tehát (10) összefüggés szerint azt is írhatjuk, hogy

$$M^{(g)} = \alpha^{-1} \Lambda^{(g)} \alpha. \quad (16)$$

A (16) összefüggés a Lorentz-mátrixok ortogonális és ferde reprezentációi közötti összefüggést adja meg.

## B) VEKTOROK ÉS TENZOROK

438. A gyakorlatban hasznos a mértékeket különleges transzformációs tulajdonságokkal rendelkező mennyiségek segítségével kifejezni. Sok — ha nem is szükségszerűen minden — fizikai mennyiséget tenzorok segítségével fejezünk ki. (A tenzor kifejezést úgy vesszük, hogy az vektorokat és skalárokat is magába foglal.)

A legegyszerűbb tenzormennyiség a skalár. Egy mennyiséget *skalárnak* nevezünk, ha különböző reprezentációkban ugyanazzal a számértékkel rendelkezik. Tehát ha  $a$  egy skalár, akkor

$$K(a) = K'(a) = \dots = a.$$

439. Egy négykomponensű mennyiséget *kontravariáns* vektornak nevezünk, ha a komponensek reprezentációi úgy transzformálódnak, mint a négydimenziós távolság komponensei. Tehát azt írhatjuk, hogy

$$K(a) = \hat{a}, \quad K'(a) = \hat{a}', \dots$$

és

$$\hat{a}' = S \hat{a}, \quad (17)$$

ahol  $S$  a  $K \rightarrow K'$  koordináta-transzformáció homogén része. Az  $a$  és  $a'$  feletti  $\hat{\cdot}$  jel a *kontravariáns* reprezentációt jelöli. E könyvben azonban majdnem kizárólag *kovariáns* reprezentációt használunk. Az  $a$  mennyiség  $a$  és  $a'$  reprezentációját kovariánsnak nevezzük, ha

$$K(a) = a, \quad K'(a) = a', \dots$$

reprezentációk

$$a' = \tilde{S}^{-1} a \quad (18)$$

szerint függnek össze. A (18) kifejezés helyett azt is írhatjuk, hogy

$$a = \tilde{S} a' = a' S. \quad (18a)$$

A (8) kifejezésből következik, hogy

$$S g^{-1} \tilde{S} = g'^{-1}. \quad (19)$$

(18)-at és (19)-et egybevetve azt találjuk, hogy

$$\mathbf{g}'^{-1} \mathbf{a}' = \mathbf{S} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{a}, \quad (20)$$

és (17) és (20) összehasonlításából következik, hogy

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{g}^{-1} \mathbf{a} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{a}}' = \mathbf{g}'^{-1} \mathbf{a}'.$$

Így tehát egy vektor kontravariáns reprezentációját  $\mathbf{g}^{-1}$ -gyel való szorzás segítségével kapjuk meg a kovariáns reprezentációból. A négyestávolság kivételével a kontravariáns reprezentáció használatát el fogjuk kerülni.

### 1. KÉTDIMENZIÓS TENZOROK

**440.** Egy  $\mathfrak{A}$  mennyiséget kétdimenzionálisnak vehetünk, ha reprezentációi

$$K(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}$$

formában adódnak, ahol  $\mathbf{A} A_{\nu\mu}$ ,  $\nu, \mu = 1, 2, 3, 4$  elemekkel rendelkezik. Az  $\mathfrak{A}$  mennyiség a  $K, K'$  vonatkoztatási rendszerekben

$$K(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}, \quad K'(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}', \dots$$

$\mathbf{A}, \mathbf{A}' \dots$  tetszőleges mátrixok segítségével fejezhető ki. Az  $\mathfrak{A}$  mennyiséget *tenzornak* nevezzük, ha reprezentációi úgy transzformálódnak, mint a  $g$  elemei, tehát akkor, ha

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{A}' \mathbf{S}, \quad (21)$$

ahol

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{s}$$

a  $K$ -ből  $K'$ -be vezető transzformációt jelenti.

Ebből a definícióból az is következik, hogy  $g$  kétdimenziós tenzor.

#### a) Invariáns szorzatok

**441.** A

$$\mathbf{g}'^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{g}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}$$

egyenletből következik, hogy

$$\mathbf{a} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{a}' \mathbf{g}'^{-1} \mathbf{b}', \quad (22)$$

ahol az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$  az  $a, b$  vektorok  $K$ , illetve  $K'$  szerinti reprezentációi. Bevezetjük a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{b} \quad (22a)$$

jelölést. Az így definiált szorzat a (22) egyenletnek megfelelően skalár, és a (22a)-ban definiált szorzatot  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  skaláris szorzatának nevezzük.

**442.** Hasonló módon vektor és tenzor közötti invariáns szorzatot is definiálhatunk. Azt írjuk, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{A} = \alpha \quad (23a)$$

és

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{A} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{a} = \beta. \quad (23b)$$

Könnyen belátjuk, hogy a (23a–b) szerint definiált  $\alpha$  és  $\beta$  mennyiségek vektorok.

Végül két tenzor közötti invariáns szorzatot

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (24)$$

szerint definiáljuk. Ha  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  tenzorok, akkor (24) szerint definiált  $\mathbf{C}$  szintén tenzor.

443. Két vektor között direkt szorzatot definiálhatunk, mint

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{A},$$

ahol  $\mathbf{A}$  komponensei

$$A_{\nu\mu} = a_{\nu} b_{\mu}, \quad \nu, \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Továbbá két négyesvektor vektoriális szorzatát a következő módon definiáljuk:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a}.$$

A vektoriális szorzat egy antiszimmetrikus  $\mathbf{A}$  tenzort ad, azaz

$$\tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}.$$

### b) Pszeudoskalár mennyiségek

444. Egy tenzor elemeiből képzett determináns egy egykomponensű mennyiség. Ez utóbbi azonban nem skalár, minthogy a determináns értéke a reprezentációtól függ. Ha a (21) kifejezés mindkét oldalának determinánsát képezzük, azt találjuk, hogy

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}' (\det \mathbf{S})^2. \quad (25)$$

Ha  $\det \mathbf{A} = a^2$  és  $\det \mathbf{A}' = a'^2$ -nek jelöljük, úgy

$$a' = a / \det \mathbf{S}. \quad (26)$$

A (26)-nak megfelelő transzformáció szerint transzformálódó mennyiségeket pszeudoskalárnak nevezzük. Ha  $a$ -val egy pszeudoskalár mennyiséget jelölünk, akkor reprezentációit

$$K(a) = a, \quad K'(a) = a', \quad K''(a) = a'' \dots$$

-nek írhatjuk. Az  $a$  reprezentációi (26)-nak megfelelően transzformálódnak. A (26) egyenlet azonban a (25)-nél több, minthogy az  $a, a', a'' \dots$  stb.  $a$  reprezentációk előjeleit is meghatározzák, amennyiben az előjel egy  $K$  reprezentációban meg van adva.

445. Azt írhatjuk, hogy

$$\sqrt{-\det \mathbf{g}} = c \quad (27)$$

és  $c$ -t vehetjük mint a fénysebesség egy mértékét a  $K$  vonatkoztatási rendszerben.

Egy  $K_0$  Lorentz-rendszerben, ahol  $\mathbf{g} = \mathbf{\Gamma}$ , a (27) egyenlet a fénysebesség értékét a szokásos módon adja. A (27) egyenlet az egyenes vonatkoztatási rendszerekben értelmes definíciókra vezet.

$c$  előjelét úgy rögzíthetjük, hogy  $c > 0$  abban a  $K$  vonatkoztatási rendszerben, amelyben a vonatkoztatási rendszer térrésze jobbsodrású koordináta-rendszer, és az időmértéket úgy választottuk, hogy későbbi időpontoknak nagyobb időmértékek felelnek meg. A (27) definíció szerint  $c$  egy pszeudskalár, és minden más pszeudskalárt úgy írhatunk, hogy

$$a = \alpha c,$$

ahol  $\alpha$  skalár.

### C) MEZŐK

**446.** Tenzormennyiségeket eddig csak egy négyespontra vonatkozóan definiáltunk. Definiálhatunk azonban tenzorokat egy  $\mathfrak{R}$  tartomány négyespontjaira vonatkozóan, s így egy *mezőt* kapunk.\*

A legegyszerűbb mező a skaláris mező. Egy  $a$  skalárt minden  $\mathfrak{r}$  négyespontra definiálva  $K$  reprezentációban azt kapjuk, hogy

$$a(\mathbf{x}) = K(a).$$

A skalármező transzformációja

$$a(\mathbf{x}) = a'(\mathbf{x}') \quad (28)$$

formában írható fel, és ha a négyes koordináták transzformációs tulajdonságát figyelembe vesszük, akkor

$$a(\mathbf{x}) = a'(\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s})$$

és

$$a'(\mathbf{x}') = a(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{s}^+),$$

valamint  $a(\mathbf{x})$  más módon függ  $\mathbf{x}$ -től, mint  $a'(\mathbf{x}')$  az  $\mathbf{x}'$ -től. Azonban egy adott  $\mathfrak{r}$  négyespontban a összes reprezentációi ugyanazzal a számértékkel rendelkeznek.

**447.** A vektor- és tenzormező hasonló módon definiálható:

$$K(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

ahol  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  négyesvektor, amely  $\mathbf{x}$  minden értékére definiálva van. Egy  $K'$  vonatkoztatási rendszerben

$$K'(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}'(\mathbf{x}'),$$

ahol

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}') = \tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

\* A *mező* kifejezést használjuk és nem a magyar irodalomban használatos *tér* kifejezést. A „tér” szót a valódi tér jelölésére használjuk. Ez a más nyelvekben az elfogadott, például angolul: space — field; németül: Raum — Feld; oroszul: пространство — поле

A szokásos magyar szóhasználat — két nagyon különböző fogalomra ugyanazt a kifejezést használva — könnyen félreértésre ad alkalmat.



Azt is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{A}'(\mathbf{x}') = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{A}'(\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s}).$$

Egy kétdimenziós  $\mathfrak{L}$  tenzort a

$$K(\mathfrak{L}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

összefüggéssel definiálhatunk, ahol  $\mathbf{T}$  kétdimenziós mátrix. A reprezentációk közötti transzformációt úgy írhatjuk, mint

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{T}'(\mathbf{x}')\mathbf{S}$$

vagy

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{T}'(\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s})\mathbf{S}.$$

## 1. AZ $\mathfrak{N}$ OPERÁTOR

### a) *A Grad operátor*

**448.** Egy mező értékeinek  $\mathbf{x}$  komponensei szerinti deriváltjai sok megfontolásban szerepet játszanak. Definiálunk egy  $\mathfrak{N}$  operátort, melynek reprezentációi

$$K(\mathfrak{N}) = \square = \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$K'(\mathfrak{N}) = \square' = \frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3}, \frac{\partial}{\partial x'_4}.$$

Az  $\overleftarrow{\square}$  és  $\overleftarrow{\square}'$  jelöléseket is fogjuk használni, ha a differenciálások az operátort megelőző mennyiségre vonatkoznak.

A differenciálás szabályait használva, azt írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu}, \quad \nu = 1, 2, 3, 4. \quad (29)$$

Ha a transzformációs összefüggést:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s}$$

$\mathbf{x}$  komponensei szerint differenciáljuk, azt találjuk, hogy

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = S_{\mu\nu},$$

és így (29) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\square = \tilde{\mathbf{S}}\square' = \square'\mathbf{S}. \quad (30)$$

A (30) összefüggést a (18a)-val összehasonlítva azt találjuk, hogy az  $\mathfrak{N}$  operátor négyesvektorként transzformálódik.

Ha a  $\square$  operátort (28) mindkét oldalára alkalmazzuk, (30) segítségével azt találjuk, hogy

$$\square a(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}} \square' a'(\mathbf{x}'),$$

és ha azt írjuk, hogy

$$\begin{aligned} \square a(\mathbf{x}) &= \text{Grad } a(\mathbf{x}), \\ \square' a'(\mathbf{x}') &= \text{Grad}' a'(\mathbf{x}'), \end{aligned}$$

azt találjuk, hogy

$$\text{Grad } a(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}} \text{Grad}' a'(\mathbf{x}'). \quad (31)$$

Tehát  $\text{Grad } a(\mathbf{x})$  egy négyesvektor reprezentációjának fogható fel. Így a négydimenziós  $\text{Grad}$  operátor skalármezőre alkalmazva vektormezővé hoz létre.

Hasonló módon

$$\square \circ \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{Grad } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}}(\text{Grad}' \mathbf{A}'(\mathbf{x}'))\mathbf{S}.$$

Így tehát azt látjuk, hogy a  $\text{Grad}$  operátor vektormezőre alkalmazva tenzormezővé vezet.

### b) További operátorok

449. További mennyiségeket definiálunk a következő módon:

$$\square \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \square \circ \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}) \circ \overleftarrow{\square} \equiv \text{Rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (32)$$

és

$$\square \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \square \mathbf{g}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \text{Div } \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (33)$$

Könnyen belátható, hogy amennyiben  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  vektormező, akkor a (32) szerint definiált  $\text{Rot } \mathbf{A}(\mathbf{x})$  antiszimmetrikus tenzormező, és a (33) szerint definiált  $\text{Div } \mathbf{A}(\mathbf{x})$  skaláris mező.

Az  $L$  Laplace-operátor a  $\text{Grad}$  és  $\text{Div}$  operátorokból a következőképpen építhető fel:

$$L \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{Div Grad } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \square \cdot (\square \circ \mathbf{A}(\mathbf{x})). \quad (34)$$

Hasonló módon azt találjuk, hogy

$$\text{Grad Div } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \square \circ (\square \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})). \quad (35)$$

A (34) és (35) egyenletek különbségét véve azt találjuk, hogy

$$(\text{Div Grad} - \text{Grad Div})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{Div Rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

továbbá, hogy

$$L \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{Grad Div } \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \text{Div Rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

ahol  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  négyesvektor-mező.

Fenti definíciók csak egyenes reprezentációban érvényesek, hiszen megfontolásainkban feltételeztük, hogy mind  $\mathbf{S}$ , mind pedig  $\mathbf{g}$   $\mathbf{x}$ -től függetlenek.

## TENZOROK INHOMOGEN TARTOMÁNYBAN

## A) TÖBBDIMENZIONÁLIS MÉRTÉKEK

**450.** Eddig olyan mértékeket tárgyaltunk, amelyek dimenzióinak száma legfeljebb kettő volt. Ezek a mértékek elégségesek a speciális relativitás-elméletben fellépő problémák tárgyalásához. Az általános elmélet — tehát a gravitációs jelenségek — tárgyalásához azonban kettőnél több dimenzióval rendelkező mértékekre van szükség.

Amennyiben az előnyös, a mennyiségek komponenseit jelölő alsó és felső indexeket elhagyjuk. Ezenkívül kevés kivételtől eltekintve, a tenzoroknak csak kovariáns reprezentációját fogjuk használni. Ugyanakkor azonban súlyt helyezünk az egyes tenzorok szimmetria-tulajdonságaira, és permutációs operátorokat alkalmazunk.

1.  $k$ -DIMENZIONÁLIS MÉRTÉKEK

**451.** Egy  $\mathfrak{A}$  mennyiséget  $k$ -dimenzionálisnak nevezünk, ha egy  $k$ -dimenzionális mátrixszal írható le. Tehát

$$K(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}^{(k)},$$

ahol  $\mathbf{A}^{(k)}$  elemei a következők:

$$(\mathbf{A}^{(k)})_{v_1 v_2 \dots v_k} = A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{(k)}, \quad v_1, v_2, \dots, v_k = 1, 2, 3, 4.$$

A felső  $(k)$  szimbólum a dimenzió számát jelöli. A  $k = 0$  egy komponenssel rendelkező mennyiségnek felel meg. A felső szimbólumot el fogjuk hagyni, amikor ez lehetséges anélkül, hogy bizonytalanság lépne fel. Mindig el fogjuk hagyni a  $k = 0, 1$  esetekben és egyes esetekben a  $k = 2$ -t sem fogjuk jelölni.

## 2. TÖBBDIMENZIONÁLIS MENNYISÉGEK SZORZÁSA

**452.** Két mátrix  $\mathbf{A}^{(k)}$  és  $\mathbf{B}^{(l)}$  direkt szorzatát úgy definiáljuk, hogy

$$\mathbf{A}^{(k)} \circ \mathbf{B}^{(l)} = \mathbf{C}^{(k+l)},$$

ahol

$$C_{v_1 v_2 \dots v_k \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(k+l)} = A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{(k)} B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(l)}. \quad (1)$$

Egy másfajta szorzatot úgy kapunk, ha az egymás mellé kerülő indexpárra összegezzük, vagyis azt írjuk, hogy

$$\begin{matrix} (k+1) & (l+1) & & (k+l) \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C}, \end{matrix}$$

ahol

$$C_{v_1 v_2 \dots v_k \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(k+l)} = \sum_{\sigma=1}^4 A_{v_1 v_2 \dots v_k \sigma}^{(k+1)} B_{\sigma \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(l+1)} \quad (2)$$

Több mint egy indexpárra való összegezést is fogunk használni. Így például azt írjuk, hogy

$$\left( \left( \begin{matrix} (k+2) & (l+2) \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{matrix} \right) \right) = \mathbf{C},$$

ahol a kettős zárójel azt jelenti, hogy két indexpárra kell összegezni, tehát explicite kiírva

$$C_{v_1 v_2 \dots v_k \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(k+l)} = \sum_{\sigma, \tau} A_{v_1 v_2 \dots v_k \sigma \tau}^{(k+2)} B_{\tau \sigma \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(l+2)}.$$

Hasonló módon olyan szorzatot is definiálhatunk, ahol  $n$  indexpárra történik összegezés. Minthogy sokszoros zárójelek használata kényelmetlen, ezért röviden azt írjuk, hogy

$$\left( \begin{matrix} (k+n) & (l+n) \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{matrix} \right)^{(n)} = \mathbf{C},$$

ahol az  $(n)$  jel a zárójel felett azt jelenti, hogy  $n$  indexpárra kell összegezni. Explicite tehát azt írhatjuk, hogy

$$C_{v_1 v_2 \dots v_k \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(k+l)} = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} A_{v_1 v_2 \dots v_k \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}^{(k+n)} B_{\sigma_n \dots \sigma_2 \sigma_1 \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(l+n)}.$$

Ezenkívül hasznos *invariáns* szorzatokat is bevezetni a következő módon:

$$\begin{matrix} (k+1) & (l+1) & & (k+1) & & (l+1) \\ \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B} & = & \mathbf{A} & \mathbf{g}^{-1} & \mathbf{B}, \end{matrix} \quad (2a)$$

tehát a vastag pont azt jelenti, hogy  $\mathbf{g}^{-1}$  faktort kell a külső faktorok közé tenni ( $\mathbf{g}^{-1}$  a terjedési tenzor reciprokja.)

Hasonló módon bevezetjük a következő műveletet:

$$\left( \begin{matrix} (k+m) & (l+m) \\ \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B} \end{matrix} \right)^{(m)} = \mathbf{C}.$$

A fenti kifejezés röviden a következő operációt írja le:

$$C_{v_1 v_2 \dots v_k \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{(k+l)} = \sum_{\substack{\sigma_1 \dots \sigma_m \\ \tau_1 \dots \tau_m}} A_{v_1 \dots v_k \sigma_1 \dots \sigma_m}^{(k+m)} g_{\sigma_m \tau_m}^+ \dots g_{\sigma_1 \tau_1}^+ B_{\tau_1 \dots \tau_m \mu_1 \dots \mu_l}^{(l+m)}$$

ahol  $g_{\sigma\tau}^+$  a  $\mathbf{g}^{-1}$  mátrix elemei.

Továbbá olyan eljárást is fogunk használni, amely egy  $k + 2$  dimenziós mátrixból egy  $k$ -dimenziósra vezet. Ebből a célból azt írjuk, hogy

$$\left( \begin{matrix} (k+2) \\ \mathbf{R} \mathbf{g}^{-1} \end{matrix} \right) = \begin{matrix} (k) \\ \mathbf{R} \end{matrix}, \quad (3)$$

vagy explicite felírva

$$R_{v_1 \dots v_k}^{(k)} = \sum_{\sigma, \tau}^{(k+2)} R_{v_1 \dots v_k \sigma \tau}^{(k+2)} g_{\sigma \tau}^+.$$

A fenti műveletet általánosíthatjuk oly módon, hogy

$$\mathbf{R} = \left( \begin{matrix} (k) \\ \mathbf{R} \mathbf{g}^{(-m)} \end{matrix} \right)_{(2m)},$$

ahol

$$\mathbf{g}^{(-m)} = \underbrace{\mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{g}^{-1} \dots \circ \mathbf{g}^{-1}}_{m \text{ faktor}}.$$

## B) PERMUTÁCIÓS OPERÁTOROK

**453.** A következőkben az alábbi definíciókat fogjuk használni. Permutációs operátorokat  $P$ -vel jelölünk, és azt írjuk, hogy

$$P \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

tehát a  $P$  operátor  $\mathbf{A}$  mátrixból egy másik,  $\mathbf{B}$  mátrixot hoz létre. A fenti operációt explicite így is írhatjuk:

$$\left( \mathbf{B} \right)_{v_1 v_2 \dots v_k}^{(k)} = \left( P \mathbf{A} \right)_{v_1 v_2 \dots v_k}^{(k)},$$

ahol

$$\left( P \mathbf{A} \right)_{v_1 v_2 \dots v_k}^{(k)} = A_{P(v_1 v_2 \dots v_k)}^{(k)},$$

és

$$P(v_1 v_2 \dots v_k) = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k,$$

ahol  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k$  a  $v_1 v_2 \dots v_k$  elemeknek  $P$  által meghatározott permutációját jelenti.

**454.** A  $P$  és  $Q$  operátorok szorzatát egy új operátornak vehetjük, vagyis

$$PQ = R. \quad (4)$$

$R$ -t úgy definiáljuk, hogy amennyiben

$$Q \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad P \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad (5)$$

akkor az  $R$  operátor hatása definíció szerint:

$$R \mathbf{A} = \mathbf{C}. \quad (6)$$

Azt is írhatjuk, hogy

$$(PQ) \overset{(k)}{\mathbf{A}} = P(\overset{(k)}{Q\mathbf{A}}). \quad (7)$$

A permutációs operátorokat tehát úgy vezetjük be, hogy a (7) egyenlet értelmében asszociatívak.

**455.** A permutációs operátorok egy másik tulajdonságára kívánunk figyelmeztetni. Az (5) egyenletet explicite az elemekre is leírhatjuk. Így azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} (\overset{(k)}{Q\mathbf{A}})_{v_1 v_2 \dots v_k} &= \overset{(k)}{A_{Q(v_1 v_2 \dots v_k)}} = \overset{(k)}{B_{v_1 v_2 \dots v_k}}, \\ (\overset{(k)}{P\mathbf{B}})_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} &= \overset{(k)}{B_{P(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)}} = \overset{(k)}{C_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ha most azt vesszük, hogy

$$P(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k) = v_1 v_2 \dots v_k, \quad (9)$$

akkor (8) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\overset{(k)}{C_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}} = \overset{(k)}{B_{v_1 v_2 \dots v_k}} = \overset{(k)}{A_{Q(v_1 v_2 \dots v_k)}}.$$

Továbbá (9) segítségével

$$\overset{(k)}{C_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}} = \overset{(k)}{A_{Q[P(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)]}}. \quad (10)$$

(4) és (6)-ból következik továbbá, hogy

$$\overset{(k)}{C_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}} = \overset{(k)}{A_{(PQ)(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)}}. \quad (11)$$

(10)-et és (11)-et összehasonlítva azt látjuk, hogy

$$\overset{(k)}{C_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}} = \overset{(k)}{A_{Q[P(\mu_1 \dots \mu_k)]}} = \overset{(k)}{A_{(PQ)(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)}}.$$

Tehát általában

$$\overset{(k)}{A_{Q[P(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)]}} = \overset{(k)}{A_{(PQ)(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)}} \neq \overset{(k)}{A_{(QP)(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)}}.$$

Az asszociatív törvény tehát nem érvényes, ha a permutációs operátorokat nem a mátrixokra magukra, hanem közvetlenül az indexekre alkalmazzuk.

## 1. CIKLIKUS PERMUTÁCIÓ

**456.** Használni fogjuk a ciklikus permutációt, vagyis a

$$c_k = (1, 2, \dots, k)$$

operátort.

A  $c_k$  permutáció  $k$  indexre alkalmazva azt eredményezi, hogy minden index egy lépéssel jobbra mozog, az utolsó index pedig az első helyét veszi fel. Tehát

$$c_k(v_1 v_2 \dots v_k) = v_k v_1 v_2 \dots v_{k-1}.$$

A  $c_k$  operátor hatványait  $c_k^l$ -el jelöljük. Ezen utóbbi operátor az elemeket  $l$  lépéssel jobb felé tolja. Fennáll, hogy

$$c_k^k = 1.$$

Negatív hatványokat is bevezethetünk, ezeket úgy értelmezzük, hogy a  $c_k^{-l}$  operátor az elemeket  $l$  lépéssel balra tolja el. Magától értetődő, hogy

$$c_k^{-l} = c_k^{k-l}.$$

A  $c_k^l$  operátor egy  $n > k$  indexből álló sorozatra is alkalmazható. Ebben az esetben az operációt úgy értelmezzük, hogy a permutáció az első  $k$  indexre vonatkozik, a további indexek pedig megtartják helyüket. Tehát például

$$c_k(v_1 v_2 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n) = v_k v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n.$$

Használni fogjuk a transzpozíciót:

$$P = (lm),$$

amely operátor az  $l$  és  $m$ -edik helyen levő indexek felcserélését jelenti.

## 2. EGY MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA

**457.** A  $k$ -dimenziós mátrix transzponáltját úgy definiálhatjuk, hogy általánosítjuk a szokásos transzponálás műveletét. Számos alkalmazás szempontjából hasznosnak tűnik a következő definíció:

$$\tilde{\mathbf{A}} = c_k \mathbf{A}.$$

Elemekre felírva ez azt jelenti, hogy

$$(c_k \mathbf{A})_{v_1 v_2 \dots v_k} = A_{v_k v_1 v_2 \dots v_{k-1}} = \tilde{A}_{v_1 v_2 \dots v_k}.$$

Két mátrix szorzásakor két egymás mellé kerülő indexre kell összegezni. Előfordulhat azonban az az eset is, hogy két nem egymás mellé eső indexre kell az összegezést elvégezni. Például a következő típusú szorzatra van szükségünk:

$$C_{v_1 v_2 \dots v_k \mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} = \sum_{\sigma} A_{v_1 v_2 \dots v_k \sigma} B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l \sigma},$$

ahol  $\sigma$   $v_s$  és  $v_{s+1}$  közé esik az első faktor esetében, viszont  $\mu_t$  és  $\mu_{t+1}$  közé esik a második szorzóban. Minthogy nem kívánunk erre az esetre érvényes komplikált jelölést bevezetni, megemlítjük, hogy

$$A_{v_1 \dots v_s \sigma v_{s+1} \dots v_k} = (c_{s+1}^{-1} \mathbf{A})_{\sigma v_1 \dots v_k} = (c_{k+1} (c_{s+1}^{-1} \mathbf{A}))_{v_1 \dots v_k \sigma},$$

hasonló módon

$$B_{\mu_1 \dots \mu_t \sigma \mu_{t+1} \dots \mu_l} = (c_{t+1}^{-1} \mathbf{B})_{\sigma \mu_1 \dots \mu_l}.$$

A fentiekből azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{C} = (c_{k+1} (c_{s+1}^{-1} \mathbf{A}^{(k+1)})) (c_{l+1}^{-1} \mathbf{B}^{(l+1)}). \quad (12)$$

Ily módon egyszerűen kifejezhetjük egy szorzat transzponált értékét is. Fenti szabályok segítségével azt találjuk, hogy

$$\widetilde{\mathbf{A}} \mathbf{B} = c_{k+l}^l \left( \widetilde{\mathbf{B}} \mathbf{A} \right)^{(l+1)(k+1)} \quad (13)$$

és

$$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} = c_{k+l}^l \left( \widetilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} \right)^{(l+1)(k+1)}. \quad (14)$$

A  $k = l = 1$  esetben fenti egyenletek a kétdimenziós mátrixok esetében ismert szabályra redukálódnak.

### 3. A $\pi_l$ OPERÁTOROK

458. Egy a gyakorlatban sokszor előforduló operáció a következő:

$$\pi_l = \mathbf{1} - c_l^{-1} + c_l^{-2} - \dots + (-1)^{l-1} c_l^{-(l-1)}.$$

E definícióból azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} (\mathbf{1} + c_l^{-1}) \pi_l = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{ha } l \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } l \text{ páros} \end{cases} \quad (15)$$

Ha például a  $\pi_3$  operátort egy  $\mathbf{g}$  mátrixra alkalmazzuk, azt találjuk, hogy

$$(\pi_3 \mathbf{g})_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\mu\nu} - g_{\mu\nu\lambda} + g_{\nu\lambda\mu}.$$

### C) AZ $\mathfrak{N}$ OPERÁTOR GÖRBE REPRESENTÁCIÓKBAN

459. Az  $\mathfrak{N}$  operátort definiálhatjuk, mint

$$K(\mathfrak{N}) = \square, \\ \square = \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}, x_4 \equiv t.$$

Az  $\mathfrak{N}$  operátor egy  $k$ -dimenziós mennyiségből  $(k+1)$ -dimenziós mennyiséget hoz létre. Egy adott reprezentációban az is írható, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \circ \square = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{(k+1)}.$$



Ez az összefüggés indexek segítségével leírható, mint

$$A_{v_1 \dots v_k \sigma}^{(k+1)} = \frac{\partial A_{v_1 \dots v_k}^{(k)}}{\partial x_\sigma}.$$

A következőkben az egyszerűség kedvéért az  $\mathbf{x}$  változót nem írjuk ki.

**460.** Egyes esetekben az  $\mathfrak{A}$  operátort a mátrixok szorzatára kell alkalmaznunk. Ennek elvégzésére hasznos a következő definíciókból levezethető összefüggéseket felhasználni.

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) \circ \overline{\square} = \mathbf{A} \mathbf{B} + c_{k+l-1} [(c_{k+1}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{B}]. \quad (16)$$

A fenti szabály az  $m$ -szeres összegezésre is kiterjeszthető. Azt találjuk, hogy

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^{(m)} \circ \overline{\square} = (\mathbf{A} \mathbf{B})^{(m)} + c_{k+l+1} [(c_{k+m+1}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{B}]^{(m)}.$$

Ha az  $\mathfrak{A}$  operátort mátrixok invariáns szorzatára alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \circ \overline{\square} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + c_{k+l-1} \{ [c_{k+1}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{g})] \cdot \mathbf{B} \}, \quad (17)$$

ahol

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \circ \overline{\square}.$$

Későbbiekben az  $\mathfrak{A}$  operátort az  $\mathbf{R} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}$  egyenletében bevezetett — mennyiségekre fogjuk alkalmazni. Azt találjuk, hogy

$$((\mathbf{R} \mathbf{g}^{-1}) \circ \overline{\square}) = c_{k+1} (\{ [c_{k+3}^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{g})] \mathbf{g}^{-1} \}).$$

## 1. TÖBBDIMENZIONÁLIS TENZOROK

**461.** Egy  $k$ -dimenzionális  $\mathfrak{A}$  mennyiséget tetszőleges  $k$ -dimenzionális mátrixok segítségével

$$K(\mathfrak{A}) = \mathbf{A} \quad K'(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}', \dots$$

representálhatunk. Az  $\mathfrak{A}$  mennyiséget tenzornak vesszük, ha reprezentációi között speciális összefüggés érvényesül. A **440.** pontban felírt definíciót általánosítva, tenzor esetében a reprezentációk között a következő összefüggés teljesülését követeljük meg:

$$A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{(k)} = \sum_{\mu_1 \dots \mu_k} S_{\mu_1 v_1} S_{\mu_2 v_2} \dots S_{\mu_k v_k} A'_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \quad (18)$$

ahol  $S_{\nu\mu}$  az  $\mathbf{S}$  mátrix elemei, amely a reprezentációk közötti

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{s}$$

koordinátatranszformációt rögzíti. Beláthatjuk, hogy  $k = 1, 2$  esetében a (18) összefüggés az I. Függelék (18a) és (21) formuláira redukálódik.

**462.** Azzal a célkitűzéssel, hogy a fenti összefüggéseket indexek nélkül áttekinthető módon írassuk le, bevezetünk egy  $2k$ -dimenziós mátrixot, amelyet  $\overset{(\mathfrak{f})}{\mathbf{S}}$ -val jelölünk, és amelynek elemei

$$\overset{(\mathfrak{f})}{S}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k \mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} = S_{\mu_1 \nu_1} S_{\mu_2 \nu_2} \dots S_{\mu_k \nu_k}. \quad (19)$$

(Amennyiben  $k$ -nak konkrét értéket adunk, azt római számmal jelöljük.)  
A (18) transzformációt tehát úgy írhatjuk, hogy

$$\overset{(k)}{\mathbf{A}} = (\overset{(\mathfrak{f})}{\mathbf{S}} \overset{(k)}{\mathbf{A}})^{(k)}.$$

Az inverz transzformációt pedig úgy írhatjuk, hogy

$$\overset{(k)}{\mathbf{A}}' = (\overset{(\mathfrak{f})}{\mathbf{S}^+} \overset{(k)}{\mathbf{A}})^{(k)},$$

ahol

$$\overset{(\mathfrak{f})}{S}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k \mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1}^+ = S_{\mu_1 \nu_1}^+ S_{\mu_2 \nu_2}^+ \dots S_{\mu_k \nu_k}^+.$$

**463.** Vizsgáljuk az  $\mathfrak{A}$  mennyiséget, melynek reprezentációi  $k$ -dimenziós mátrixok, tehát

$$K(\mathfrak{A}) = \overset{(k)}{\mathbf{A}}, \quad K'(\mathfrak{A}) = \overset{(k)}{\mathbf{A}}', \dots$$

ahol  $\overset{(k)}{\mathbf{A}}$ -t és  $\overset{(k)}{\mathbf{A}}'$ -t valamilyen módon definiáltuk. Az így kapott  $\mathfrak{A}$  mennyiség általában nem tenzor. Azonban az  $\overset{(k)}{\mathbf{A}}'$  reprezentációból egy

$$\overline{\overset{(k)}{\mathbf{A}}} = (\overset{(\mathfrak{f})}{\mathbf{S}} \overset{(k)}{\mathbf{A}})^{(k)}$$

mennyiséget képezhetünk, és amennyiben  $\overline{\overset{(k)}{\mathbf{A}}} = \overset{(k)}{\mathbf{A}}$ , akkor definíciónk szerint  $\mathfrak{A}$  egy tenzor. A különbség

$$\overline{\overset{(k)}{\mathbf{A}}} - \overset{(k)}{\mathbf{A}}$$

jellemzi az  $\mathfrak{A}$  mennyiség eltérését egy tenzormennyiségtől.

**464.** Két  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  tenzor direkt szorzata, melyet a **452.** pont (1) egyenlete szerint állítunk elő, maga is egy tenzor, mint ez a definícióból következik. Az

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{A}} \overset{(l+1)}{\mathbf{B}} = \overset{(k+l)}{\mathbf{C}}$$

szorzat nem invariáns;  $\overset{(k+l)}{\mathbf{C}}$  — (2) szerint képezve — még akkor sem tenzor,

ha  $\overset{(k+1)}{\mathbf{A}}$  és  $\overset{(l+1)}{\mathbf{B}}$  maguk tenzormennyiségek. Könnyen kimutatható azonban, hogy két tenzor invariáns szorzata — amint (2a)-ból adódik — tenzor, úgyszintén a (3) operáció által nyert  $\overset{(k)}{\mathbf{R}}$  mennyiség is tenzor, ha  $\overset{(k+2)}{\mathbf{R}}$  maga tenzor.

## 2. SZIMMETRIA TULAJDONSÁGOK

**465.** A permutációs operátorok invariáns operátorok abban az értelemben, hogy ha

$$P\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (20)$$

összefüggés egy  $K$  reprezentációban fennáll, akkor az összefüggés bármilyen másik  $K'$  reprezentációban is fennáll. (20) helyett tehát azt is írhatjuk, hogy

$$P\mathfrak{A} = \mathfrak{B}.$$

Ha egy tenzor olyan tulajdonságokkal rendelkezik, hogy egy adott  $P$  permutáció esetében

$$P\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

akkor azt mondhatjuk, hogy  $\mathfrak{A}$   $P$ -re nézve szimmetrikus, és azt írjuk, hogy

$$P \equiv \mathbf{1}, \quad \text{mod } \mathfrak{A},$$

ahol  $\mathbf{1}$  az identikus permutációs operátort jelenti.

Általánosabban azt írjuk, hogy

$$P = Q, \quad \text{mod } \mathfrak{A},$$

ha

$$P\mathfrak{A} = Q\mathfrak{A}.$$

**466.** Léteznek tenzorok, amelyekre bármelyik reprezentációban

$$(lm)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

érvényes. Az ilyen  $\mathbf{A}$  tenzorra azt mondjuk, hogy az  $l$  és  $m$  indexekre antiszimmetrikus. Egy olyan tenzort, amely az indexek bármely párjában antiszimmetrikus, *teljesen antiszimmetrikus* tenzornak nevezzük. Egy fontos példát adunk a következő pontban.

### 3. AZ $\epsilon$ ANTISZIMMETRIKUS TENZOR

**467.** Vizsgáljunk egy négydimenziós  $\epsilon$  mátrixot, melynek elemei

$$\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} c, & \text{ha } \kappa\lambda\mu\nu \text{ az } 1, 2, 3, 4 \text{ páros permutációja,} \\ -c, & \text{ha } \kappa\lambda\mu\nu \text{ az } 1, 2, 3, 4 \text{ páratlan permutációja,} \\ 0 & \text{minden más esetben,} \end{cases} \quad (21)$$

ahol  $c = \sqrt{-\det \mathbf{g}}$ .

Ha most  $\epsilon$ -t négydimenziós tenzorként transzformáljuk, azt kapjuk, hogy

$$\epsilon' = (\mathbf{S}^+ \epsilon). \quad (22)$$

(21)-ből és (22)-ből a  $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{g}'\mathbf{S}$  összefüggést felhasználva azt találjuk, hogy

$$\epsilon' = \epsilon / \det \mathbf{S} = \epsilon c' / c.$$

Ha (21)-ben  $c$ -t  $c'$ -vel helyettesítjük,  $\epsilon'$  komponensei a (21) kifejezésnek megfelelően adódnak.

Ebből látjuk, hogy a (21) egy tenzor elemeinek reprezentációját adja.

**468.** Az

$$\frac{1}{2} ((\epsilon \cdot \mathbf{T})) = \tilde{\mathbf{T}} \quad (23)$$

operáció egy  $\mathbf{T}$  kétdimenzionális tenzorból egy másik  $\tilde{\mathbf{T}}$  tenzort képez.  $\tilde{\mathbf{T}}$  mindig antiszimmetrikus. Ha  $\mathbf{T}$  maga antiszimmetrikus, akkor  $\tilde{\mathbf{T}}$  a  $\mathbf{T}$ -ből úgy kapható, hogy a tér és időkomponenseket megfelelő módon felcseréljük. Erről meggyőződünk, hogyha a (23) egyenletet explicite felírjuk.

Ha ezt az összefüggést az elektromágneses mező tenzorára írjuk fel; azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & cE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & cE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -cB_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -cB_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -cB_3 \\ cB_1 & cB_2 & cB_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

#### D) TENZORMEZŐK

**469.** Egy  $k$ -dimenzionális mezőt egy  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  mátrix segítségével definiálhatunk. E mezőt *tenzormezőnek* nevezzük, ha koordinátatranszformáció esetében elemei megfelelő módon transzformálódnak. Vizsgáljunk tehát egy megfordítható

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

koordinátatranszformációt. Az  $\mathfrak{A}$  mezőt tenzormezőnek nevezzük, ha

$$K(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad K'(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}'(\mathbf{x}'),$$

ahol

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{A}'(\mathbf{x}'))^{(k)},$$

és ahol  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  a

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \circ \overleftarrow{\square}$$

mátrix elemeiből van felépítve olyan módon, amint ezt a **462.** pont (19) egyenletében megadtuk.

470. Bevezetjük általános esetben az

$$\overline{(k)}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left( \overset{(\mathfrak{F})}{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \overset{(k)}{\mathbf{A}'}(\mathbf{x}') \right)^{(k)}$$

mennyiséget, és abban az esetben, ha

$$\overline{(k)}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \overset{(k)}{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$$

fennáll,  $\mathfrak{N}$  egy tenzormező.

Későbbiekben az  $\mathfrak{N}$  operátort az  $\overline{(k)}\mathbf{A}$  mennyiségekre fogjuk alkalmazni. Tehát

$$\overline{(k)}\mathbf{A} \circ \overleftarrow{\square} = \left( \overset{(\mathfrak{F})}{\mathbf{S}} \overset{(k)}{\mathbf{A}'} \right)^{(k)} \circ \overleftarrow{\square} \quad (25)$$

mennyiséget fogjuk vizsgálni. Ahhoz, hogy a (25) egyenlet jobb oldalát kényelmesebb formában kapjuk meg, megjegyezzük, hogy e kifejezés tagokból áll, amelyek mindegyike  $k + 1$  szorzó faktort tartalmaz. A  $\overleftarrow{\square}$  differenciálást egyes tagokra alkalmazva  $k + 1$  tagú kifejezéshez jutunk.

E tagok közül egy az  $\overset{(k)}{\mathbf{A}'} \mathbf{x}$  szerinti deriváltját tartalmazza. Ha a

$$\overleftarrow{\square} = \overleftarrow{\square}' \mathbf{S}$$

szabályt felhasználjuk, azt kapjuk, hogy

$$\overset{(k)}{\mathbf{A}'} \circ \overleftarrow{\square} = \overset{(k+1)}{\mathbf{A}'} \mathbf{S},$$

és ezért arra a tagra, amelyik az  $\overset{(k)}{\mathbf{A}'}$  differenciálhányadosát tartalmazza, azt találjuk, hogy

$$\left( \overset{(\mathfrak{F})}{\mathbf{S}} \left( \overset{(k)}{\mathbf{A}'} \circ \overleftarrow{\square} \right) \right)^{(k)} = \left( \overset{(\mathfrak{F})}{\mathbf{S}} \left( \overset{(k+1)}{\mathbf{A}'} \mathbf{S} \right) \right)^{(k)} = \left( \overset{(\mathfrak{F}+1)}{\mathbf{S}} \overset{(k+1)}{\mathbf{A}'} \right)^{k+1} = \overline{(k+1)}\mathbf{A}.$$

Azok a tagok, amelyek az  $\overset{(\mathfrak{F})}{\mathbf{S}}$  elemeinek differenciálhányadosát tartalmazzák,

$$c_k^{-l} \left[ \left( c_k^l \overset{(k)}{\mathbf{A}} \right) \mathbf{S}^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{S}} \right]$$

hozzájárulásokat adnak. A  $k + 1$  tagot összevéve adódik, hogy

$$\overline{(k)}\mathbf{A} \circ \overleftarrow{\square} = \overline{(k+1)}\mathbf{A} + \sum_{l=1}^k c_k^{-l} \left[ \left( c_k^l \overset{(k)}{\mathbf{A}} \right) \mathbf{S}^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{S}} \right]. \quad (26)$$

A (26) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{A}} - \overline{(k+1)}\mathbf{A} = \left( \overset{(k)}{\mathbf{A}} - \overline{(k)}\mathbf{A} \right) \circ \overleftarrow{\square} + \sum_{l=1}^k c_k^{-l} \left\{ \left( c_k^l \overset{(k)}{\mathbf{A}} \right) \mathbf{S}^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{S}} \right\}. \quad (27)$$

Megjegyezzük, hogy amennyiben  $\mathbf{A}^{(k)}$  egy tenzor, akkor  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(k)} = \overline{\mathbf{A}^{(k)}}$  és ily módon a jobb oldali kifejezés leegyszerűsödik, azonban

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} \circ \overline{\square}$$

általában nem tenzormennyiség, minthogy a (27) jobb oldalán szereplő összeg általában nem tűnik el.

### 1. A CHRISTOFFEL-FÉLE SZIMBÓLUM

**471.** A (27) összefüggést a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  tenzorra alkalmazzuk. Ha figyelembe vesszük, hogy  $(12)\mathbf{g} = \mathbf{g}$ , azt találjuk, hogy

$$\mathbf{g} - \overline{\mathbf{g}} = (1 + (12))(\mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} \overline{\mathbf{S}}). \quad (28)$$

Minthogy  $\overline{\mathbf{S}} = (23)\mathbf{S}$ , azt írhatjuk, hogy  $(12) = (12)(23) = c_3^{-1}$ , és ennélfogva

$$\mathbf{g} - \overline{\mathbf{g}} = (1 + c_3^{-1})(\mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} \overline{\mathbf{S}}). \quad (29)$$

Ha a  $\pi_3/2$  operátort a (29) összefüggés mindkét oldalára alkalmazzuk, a (15) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} \overline{\mathbf{S}} = \mathbf{C} - \overline{\mathbf{C}}, \quad (30)$$

ahol

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \pi_3 \mathbf{g} \quad \text{és} \quad \overline{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \pi_3 \overline{\mathbf{g}}. \quad (31)$$

(31)-ből az inverz összefüggés

$$\mathbf{g} = (1 + c_3^{-1}) \mathbf{C} \quad (32)$$

is megkapható.

(30) helyett azt is írhatjuk, hogy

$$\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{C} - \overline{\mathbf{C}}). \quad (33)$$

**472.** A (31) által definiált háromdimenzionális mátrix  $\mathbf{C}$  az úgynevezett *Christoffel-féle szimbólum*. E szimbólum szokásos jelölése:

$$C_{\kappa\lambda\mu}^{(3)} = \begin{bmatrix} \lambda\mu \\ \kappa \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x_\lambda} \right\}.$$

Az irodalomban használatos ezenkívül a

$$\mathbb{C}_{\kappa\lambda\mu}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

mennyiség, ahol ez utóbbi kifejezés a

$$\mathbb{C}^{(3)} = \mathbf{g}^{-1} \mathbf{C}^{(3)}$$

mátrix elemeit jelöli.

A (31) definícióból az következik, hogy a *Christoffel*-féle szimbólumok a második és harmadik indexben szimmetrikusak. Azt találjuk tehát, hogy

$$(23) \mathbf{C}^{(3)} = \mathbf{C}^{(3)}$$

A *Christoffel*-féle szimbólumok háromdimenziós mezőt reprezentálnak, de — mint ahogy ez könnyen belátható — nem tenzormezőzt.

473. A  $\mathbf{g}$  tenzor és első deriváltjai segítségével nem lehet új független tenzort előállítani. Ha azonban  $\mathbf{g}$  második deriváltjait is felhasználjuk, akkor a *Riemann-Christoffel*-féle tenzort lehet megkapni, amint ezt a következőkben megmutatjuk. Minthogy  $\mathbf{g}$  tenzor, érvényes, hogy

$$\bar{\mathbf{g}} = (\overset{\text{II}}{\mathbf{S}} \mathbf{g}')^{(2)} = \mathbf{g}.$$

Ha a fenti kifejezésre kétszer alkalmazzuk a  $\bar{\square}$  operátort, a már megadott (26) és (16) differenciálási szabályok segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \bar{\mathbf{g}} + \sum_{l=1}^3 c_3^{-l} \{ (c_3^l \bar{\mathbf{g}}) \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{S}} \} + \\ &+ (\mathbf{1} + (12)) c_4 \{ [c_3^{-1} (\bar{\mathbf{g}} - \mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{S}})] \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{S}} \} + (\mathbf{1} + (12)) \mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{S}}. \end{aligned}$$

A fenti kifejezésben (30)-at és (32)-t felhasználva,  $\bar{\mathbf{g}}$ -t és  $\mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{S}}$ -at  $\mathbf{C}$  és  $\bar{\mathbf{C}}$  segítségével lehet kifejezni. Így a szimmetriákat felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \bar{\mathbf{g}} + (\mathbf{1} + (12)) c_4 (\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}}) + \\ &+ (1 + c_4^{-1}) (\mathbf{1} + (c_4 + c_3) (12)) (\bar{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{C} - \bar{\mathbf{C}})) + (1 + c_4^{-1}) \mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{S}}. \end{aligned}$$

Ha most a fenti egyenlet mindkét oldalára a  $\frac{1}{2} \pi_4$  operátort alkalmazzuk, akkor figyelembe véve, hogy

$$\pi_4 (1 + c_4^{-1}) = 0,$$

a kifejezés leegyszerűsödik, és ha a felülvonásos tagokat egy oldalra visszük, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \pi_4 (\bar{\mathbf{g}} + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2} \pi_4 (\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}}).$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \pi_4 \left( \mathbf{g} + \overset{(3)}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}} \right) \quad (33a)$$

négydimenzionális tenzor. Az utóbbi lényegében megfelel — eltekintve a jelölésbeli eltéréstől — az irodalomban használt  $\mathfrak{R}$  Riemann-Christoffel-tenzornak.  $\mathbf{R}$ -et összehasonlítva az irodalomban általában szereplő kifejezéssel, azt találjuk, hogy

$$\mathfrak{R}(\mathbf{x}) = - (23) \mathbf{R}(\mathbf{x}).$$

További szimmetriákat figyelembe véve, (33a) helyett azt is lehet írni, hogy

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \pi_4 \mathbf{g} + (\mathbf{I} - (24)) \left( \overset{(3)}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}} \right). \quad (33b)$$

## 2. KOVARIÁNS DIFFERENCIÁLÁS

474. Az  $\mathfrak{R}$  operátort egy skaláris mezőre alkalmazva vektormezőt kapunk. Az

$$s(\mathbf{x}) = s'(\mathbf{x}')$$

egyenlőség mindkét oldalára a  $\square$  operációt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\square s(\mathbf{x}) = \square s'(\mathbf{x}') = \tilde{\mathfrak{S}}(\mathbf{x})(\square' s'(\mathbf{x}')).$$

Tehát a

$$\square s(\mathbf{x}) = \text{Grad } s(\mathbf{x})$$

jelölést használva látjuk, hogy a  $\text{Grad } s(\mathbf{x})$  vektorként transzformálódik, vagyis

$$\text{Grad } s(\mathbf{x}) = \tilde{\mathfrak{S}}(\mathbf{x}) \text{Grad}' s'(\mathbf{x}').$$

Tehát szimbolikusan azt is írhatjuk, hogy

$$\text{Grad } s = \mathfrak{A}.$$

Ha azonban  $\mathfrak{R}$  operátort vektor- vagy tenzormezőre alkalmazzuk, az eredmény nem tenzor jellegű mező, minthogy a transzformációban az  $\mathbf{S}$  mátrix deriváltjai is fellépnek.

Azt a differenciálási módot, amely invariáns mezőkhöz vezet, a következőkben tárgyaljuk. Ha a (27) egyenletet egy  $\mathfrak{A}$  tenzormezőre írjuk fel, vagyis feltételezzük, hogy  $\overset{(k)}{\mathbf{A}}$  egy  $\overset{(k)}{\mathbf{A}} = \overset{(k)}{\mathbf{A}}$  mennyiséggel reprezentálható; azt kapjuk, hogy

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{A}} - \overset{(k+1)}{\mathbf{A}} = \sum_{l=1}^k c_k^{-l} \left[ (c_k^l \overset{(k)}{\mathbf{A}}) \mathbf{S}^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{S}} \right].$$



Az  $S^{-1} S$  mennyiséget  $\overset{(3)}{\mathbf{C}}$  és  $\overline{\overset{(3)}{\mathbf{C}}}$  Christoffel-szimbólumok segítségével fejezhetjük ki (lásd a (30) egyenletet). Így, ha a felülvonás nélküli kifejezéseket bal oldalra, a felülvonással ellátott kifejezéseket pedig jobb oldalra írjuk, azt kapjuk, hogy

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{A}} - \sum_{l=1}^k c_k^{-l} [(c_k^l \overset{(k)}{\mathbf{A}}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}] = \overline{\overset{(k+1)}{\mathbf{A}}} - \sum_{l=1}^k c_k^{-l} [(c_k^l \overset{(k)}{\mathbf{A}}) \cdot \overline{\overset{(3)}{\mathbf{C}}}] .$$

Vezessük be a Grad operátort a következőképpen:

$$\text{Grad } \overset{(k)}{\mathbf{A}} = \overset{(k)}{\mathbf{A}} \circ \overline{\square} - \sum_{l=1}^k c_k^{-l} [(c_k^l \overset{(k)}{\mathbf{A}}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}] . \quad (34)$$

Azt találjuk, hogy Grad  $\overset{(k)}{\mathbf{A}}$  egy  $k + 1$ -dimenziós tenzor.

A (34) differenciálást egy skalárra alkalmazva a jobb oldali összeg nem tartalmaz tagokat, és ezért a szumma kiesik. Vektor esetében az összegben csak egy tag lép fel, és azt kapjuk, hogy

$$\text{Grad } \overset{(k)}{\mathbf{A}} = \overset{(k)}{\mathbf{A}} \circ \overline{\square} - \overset{(k)}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}} . \quad (35)$$

Hasonló módon adható meg a Rot operátor:

$$\text{Rot } \overset{(k)}{\mathbf{A}} = \square \circ \overset{(k)}{\mathbf{A}} - \overset{(k)}{\mathbf{A}} \circ \overline{\square} + \overset{(k)}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}} - \overset{(3)}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{A}} . \quad (35a)$$

**475.** Ha a Grad operátort egy invariáns szorzatra alkalmazzuk, akkor azt találjuk, hogy

$$\text{Grad } (\overset{(k)}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(l)}{\mathbf{B}}) = \overset{(k)}{\mathbf{A}} \cdot \text{Grad } \overset{(l)}{\mathbf{B}} + c_{k+l-1} \{ (c_{k+1}^{-1} \text{Grad } \overset{(k)}{\mathbf{A}}) \cdot \overset{(l)}{\mathbf{B}} \} .$$

Amennyiben a Grad operátort az  $\overset{(k)}{\mathbf{R}}$ , a **452.** pont (3) egyenletében bevezetett mennyiségekre alkalmazzuk, azt találjuk, hogy

$$\text{Grad } ((\overset{(k+2)}{\mathbf{R}} \mathbf{g}^{-1})) = c_{k+1} (\{ (c_{k+3}^{-1} \text{Grad } \overset{(k+2)}{\mathbf{R}}) \} \mathbf{g}^{-1}) . \quad (36)$$

**476.** A Div operátort is bevezethetjük kovariáns formában:

$$\text{Div } \overset{(k)}{\mathbf{A}} = (\{ \{ \text{Grad } \overset{(k)}{\mathbf{A}} \} \} \mathbf{g}^{-1}) . \quad (37)$$

Hasznosak a következő formulák, amelyek a (36) egyenlet és a definíciók segítségével levezethetők:

$$\text{Div } ((\overset{(k+2)}{\mathbf{R}} \mathbf{g}^{-1})) = ([c_k \{ c_{k+3}^{-1} \text{Grad } \overset{(k+2)}{\mathbf{R}} \}] \mathbf{g}^{(-2)})^{(4)} , \quad (38)$$

vagy

$$\text{Div } ((\overset{(k+2)}{\mathbf{R}} \mathbf{g}^{-1})) = ([c_{k+1} \{ c_{k+3}^{-1} \text{Grad } \overset{(k+2)}{\mathbf{R}} \}] \mathbf{g}^{(-2)})^{(4)} .$$

A Laplace-operátort úgy vezethetjük be, mint

$$L \overset{(k)}{\mathbf{A}} = \text{Div Grad } \overset{(k)}{\mathbf{A}}. \quad (39)$$

Megjegyezzük, hogy  $\mathbf{g}$ -re alkalmazva a (34) definíciót, a (32) összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\text{Grad } \mathbf{g} = \overset{(3)}{\mathbf{g}} - (\mathbf{1} + (12)) \overset{(3)}{\mathbf{g}} \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}} = 0,$$

tehát identikusan fennáll, hogy

$$\text{Grad } \mathbf{g} = 0 \quad \text{és} \quad \text{Div } \mathbf{g} = 0. \quad (40)$$

### E) HOMOGEN TARTOMÁNYOKRA ÉRVÉNYES KRITÉRIUMOK

477.  $\mathfrak{R}$  tartomány akkor homogén, ha  $\mathbf{g}$  olyan reprezentációval rendelkezik, amelyben

$$\mathbf{g}' = K'(\mathbf{g}) = \text{független } \mathbf{x}'\text{-től}. \quad (41)$$

Tételezzük fel, hogy

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = K(\mathbf{g})$$

$\mathbf{g}$ -nek tetszőlegesen felvett  $K$  vonatkoztatási rendszerben érvényes reprezentációja. Amennyiben az  $\mathfrak{R}$  tartomány homogén, akkor létezik egy olyan

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (42)$$

koordinátatranszformáció, amely egy olyan vonatkoztatási rendszerbe visz át, ahol

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}' \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (43)$$

és

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \circ \overleftarrow{\square}. \quad (44)$$

(41)-ből következik, hogy  $\overset{(3)}{\mathbf{C}}'(\mathbf{x}') = 0$ , és ezért  $\overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = 0$ , és így a (33) egyenlet segítségével

$$\overset{(3)}{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}). \quad (45)$$

A (45) összefüggés egy differenciálegyenlet, amelynek felhasználásával  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  és  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  meghatározható, amennyiben  $\mathfrak{R}$  valóban homogén tartomány. A kérdés az, hogy (45) rendelkezik-e megoldással. Ez a következő módon állapítható meg.

Differenciáljuk (45)-öt  $\mathbf{x}$  szerint:

$$\overset{(3)}{\mathbf{S}} \circ \overleftarrow{\square} = \overset{(4)}{\mathbf{S}},$$

ahol az  $\mathbf{x}$  változót nem írtuk le explicit módon. (17) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\overset{(4)}{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cdot \overset{(4)}{\mathbf{C}} + c_4(c_3^{-1}(\overset{(3)}{\mathbf{S}} - \mathbf{S} \cdot \overset{(3)}{\mathbf{g}}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}).$$

Ha most  $\overset{(3)}{\mathbf{S}}$ -at (45)-ből a  $\overset{(3)}{\mathbf{g}}$ -at (32)-ből behelyettesítjük,

$$\overset{(4)}{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cdot \overset{(4)}{\mathbf{C}} - c_4 [c_3^{-1}(\mathbf{S} \cdot c_3^{-1} \overset{(3)}{\mathbf{C}}) \cdot \overset{(3)}{\mathbf{C}}].$$

$\overset{(3)}{\mathbf{C}}$  szimmetriáját felhasználva a második tagot le tudjuk egyszerűsíteni, és rövid számítás eredményeként azt kapjuk, hogy

$$\overset{(4)}{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cdot (\overset{(4)}{\mathbf{C}} - (24) \overset{\tilde{(3)}}{\mathbf{C}} \overset{(3)}{\mathbf{C}}). \quad (46)$$

Amennyiben  $\overset{(4)}{\mathbf{S}}$  egy  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  függvény harmadik deriváltja, akkor a három utolsó indexben szimmetrikusnak kell lennie, tehát

$$(\mathbf{1} - (24)) \overset{(4)}{\mathbf{S}} = 0. \quad (47)$$

Mint hogy (45)-ből következően  $\overset{(4)}{\mathbf{S}}$  a (23) operátorban szimmetrikus, ebből adódik, hogy (34) szimmetria is fennáll, amennyiben (47) teljesül, hiszen

$$(34) = (23) (24) (23).$$

Az  $\overset{(4)}{\mathbf{S}}$  szimmetrikus mindhárom utolsó indexben, amennyiben a (47) teljesül. (46)-ot a (47)-be behelyettesítve azt találjuk, hogy

$$(\mathbf{1} - (24)) (\overset{(4)}{\mathbf{C}} + \overset{\tilde{(3)}}{\mathbf{C}} \overset{(3)}{\mathbf{C}}) = 0. \quad (48)$$

Azt is írhatjuk, hogy

$$(\mathbf{1} - (24)) \overset{(4)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - (24)) \pi_3 \overset{(4)}{\mathbf{g}} = \frac{1}{2} \pi_4 \overset{(4)}{\mathbf{g}}.$$

Így (48)-ból azt a feltételt kapjuk, hogy

$$\overset{(4)}{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathfrak{R}\text{-en belül.} \quad (49)$$

Ez szükséges feltétele annak, hogy az  $\mathfrak{R}$  tartomány homogén legyen, ahol  $\overset{(4)}{\mathbf{R}}$  a (33b) egyenlettel definiált Riemann—Christoffel-féle tenzor. Tudniillik — mint ez a megfontolásainkból kitűnik —, ha (49) nem teljesül, akkor a (45) egyenlet nem rendelkezik megoldással.

**478.** A fenti érvelést meg is lehet fordítani. Ha (45)-öt egymás után  $\mathbf{x}$  szerint differenciáljuk, akkor  $\overset{(2+1)}{\mathbf{S}}$  deriváltakra rekurziós formulát kapunk. Ha most sorbafejtjük  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ -et vagy  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ -et  $\mathbf{x}$  hatványai szerint, ez a sor (43) és (44) megoldását adja, ha (49) teljesül. Mindebből arra következtetünk, hogy (49) szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy  $\mathfrak{R}$  tartomány homogén legyen.

479. Egy inhomogén tartományban a (43) és (44) egyenletrendszernek nincs megoldása; egy ilyen tartományban megkísérélhető majdnem egyenes koordináták bevezetése, vagyis lehetséges egy olyan  $K'$  reprezentációt találni, amelyben  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$  majdnem állandó.

Bármilyen  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ -re felírható a (45) egyenlet, és ha ennek a differenciál-egyenletnek van megoldása, akkor annak segítségével egy (42) transzformációhoz jutunk, amely egyenes koordinátákhoz vezet.

A (45)-öt differenciálva viszont a (46)-hoz jutunk, és amennyiben az  $\mathbf{S}$ -et ismertnek vesszük,  $\mathbf{S}$ -et meg tudjuk határozni. Az így definiált  $\mathbf{S}$  nem szükségszerűen egy négyesfüggvény harmadik deriváltja. Ez csak akkor áll fenn, ha az ily módon kapott  $\mathbf{S}$  az utolsó három indexben szimmetrikus, és ebben az esetben (43) és (44) megoldható.

Az  $\mathbf{S}$  mátrix, amelyet (46) szerint határozunk meg, a (23) permutáció-operációval szemben mindenesetre szimmetrikus. Bevezethetünk egy tenzort, amely mindhárom utolsó indexben szimmetrikus. Legyen

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{3} (\mathbf{1} + (24) + (34)) \mathbf{S}.$$

Homogén tartományban az  $\langle \mathbf{S} \rangle$  az  $\mathbf{S}$ -gyel megegyezik, egy inhomogén tartományban pedig az  $\langle \mathbf{S} \rangle$  (43) és (44) közelítő megoldásként vehető.

A két megoldás közötti különbség

$$\delta \mathbf{S} = \langle \mathbf{S} \rangle - \mathbf{S} = -\frac{1}{3} [(\mathbf{1} - (24)) + (\mathbf{1} - (34))] \mathbf{S},$$

minthogy azonban

$$(\mathbf{1} - (34)) = (23) (\mathbf{1} - (24)) (23) = (23) (\mathbf{1} - (24)),$$

azt is írhatjuk, hogy

$$\delta \mathbf{S} = -\frac{1}{3} (\mathbf{1} + (23)) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}). \quad (50)$$

Az  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle$  függvény, amely egy közelítő megoldáshoz vezet, integrálás segítségével kapható meg. Azt találjuk, hogy

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{S}(0) + \mathbf{S}^{(3)}(0) \mathbf{x} + \int_0^{\mathbf{x}} (\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \circ d\mathbf{x}')^{(2)} \quad (51)$$

vagy

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \mu + \mathbf{S}(0) \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{S}^{(3)}(0) \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\mathbf{x}} (\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 d\mathbf{x}')^{(3)} \quad (51a)$$

(az integrálás 0-tól  $\mathbf{x}$ -ig tetszőleges úton végezhető el); hiszen az integrandus

totális differenciál az így kapott transzformációs függvény  $\mathbf{x} = 0$  környékén közelítőleg kielégíti (43)-at és (44)-et.

480. Legyen

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \mathbf{g}' + \delta \mathbf{g}'(\mathbf{x}')$$

$\mathfrak{g}$ -nek majdnem egyenes vonatkoztatási rendszerben levő reprezentációja. Tehát

$$\langle \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \rangle (\mathbf{g}' + \delta \mathbf{g}'(\mathbf{x}')) \langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (52)$$

Ha (52)-öt  $\mathbf{x}$  szerint differenciáljuk, akkor az  $\mathbf{x} = 0$  helyen

$$\delta \mathbf{g}'(0) = 0. \quad (53)$$

Ha viszont kétszer differenciálunk, akkor (51) és (53) segítségével  $\mathbf{x} = 0$ -ra

$$(\mathbf{1} + (12))(\mathbf{g} \mathbf{S}^{-1} \delta \mathbf{S}) = -\delta \mathbf{g}. \quad (54)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$(\mathbf{1} + (12))(23) \equiv 0, \quad \text{mod } \mathbf{R}, \quad (55)$$

az (52) segítségével azt találjuk, hogy

$$\delta \mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{1} + (12))\mathbf{R}, \quad (56)$$

és ha  $K'$  rendszerre transzformálunk, akkor

$$\delta \mathbf{g}' = \frac{1}{3}(\mathbf{1} + (12))\mathbf{R}', \quad (57)$$

tehát

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \mathbf{g}' + \frac{1}{6}(\mathbf{1} + (12))\mathbf{R}' \mathbf{x}'^2 + \dots \quad (58)$$

A fenti reprezentáció a lehető legegyszerűsebb, minthogy a  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}')$  második deriváltjainak legalább az  $\mathbf{R}'$  elemeinek nagyságrendjében kell lenniök.

## 2. AZ $\mathbf{R}$ TENZOR SZIMMETRIÁI

481. Hogy megmutassuk, hogy a Riemann—Christoffel-féle tenzor milyen szimmetriákkal rendelkezik,  $\mathbf{R}$ -et két különböző, egymással ekvivalens formában írjuk fel:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - (24))(\mathbf{1} - (13))(\mathbf{g} + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}) \quad (59)$$

és

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\pi_4(\mathbf{g} + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}). \quad (60)$$

(59) és (60) ekvivalensek (33b)-vel is, azonban az utóbbi összefüggésekből egyszerű módon leolvashatók az  $\overset{(4)}{\mathbf{R}}$  szimmetriái. (59)-ből látható, hogy

$$(24) \overset{(4)}{\mathbf{R}} = (13) \overset{(4)}{\mathbf{R}} = - \overset{(4)}{\mathbf{R}}, \quad (61a)$$

$$(13) (24) \overset{(4)}{\mathbf{R}} = \overset{(4)}{\mathbf{R}}. \quad (61b)$$

Továbbá, a definícióknak megfelelően

$$c_4 \pi_4 = - \pi_4, \quad c_4 \overset{(4)}{\mathbf{R}} = - \overset{(4)}{\mathbf{R}}. \quad (61c)$$

A (60)-at bal oldalról (12) (34)  $(c_4) = (13)$ -mal megszorozhatjuk és ha (61a)-t és (61c)-t figyelembe vesszük,

$$(12) (34) \overset{(4)}{\mathbf{R}} = \overset{(4)}{\mathbf{R}}, \quad (61d)$$

tehát

$$(12) \equiv (34), \quad \text{mod } \overset{(4)}{\mathbf{R}}.$$

További egyszerű számítás eredményeként

$$(1 + c_3 + c_3^2) \pi_4 = 0, \quad (\text{mod } \overset{(4)}{\mathbf{g}})$$

adódik, tehát

$$(1 + c_3 + c_3^2) \overset{(4)}{\mathbf{R}} = 0. \quad (62)$$

(61a–d)  $\overset{(4)}{\mathbf{R}}$  összes szimmetriáit megadja.

**482.**  $\overset{(4)}{\mathbf{R}}$  szimmetria tulajdonságait figyelembe véve a lineáris független elemek számát meg tudjuk állapítani. Először is megjegyezzük, hogy

(61a)-ből következően  $R_{\nu\mu\kappa\lambda}$  elemei csak akkor különböznek 0-tól, ha

$$\nu \neq \kappa, \quad \mu \neq \lambda. \quad (63)$$

Így tehát az indexeknek 21 olyan konfigurációja létezik, amely a (66)-nak eleget tesz, tehát létezik 21 fajta elem, amely nem tűnik el identikusan. Valóban, 6 olyan indexpár van, melyre  $\nu \neq \kappa$ , így 15 (63)-at kielégítő olyan kvadruplet létezik, ahol  $\nu \neq \mu$  továbbá 6 olyan, ahol  $\nu = \mu$ . Csak azokat a konfigurációkat számoltuk, amelyek az  $R_{\nu\mu\kappa\lambda}$  elemeinek különböző abszolút értékére vezetnek. Az  $\overset{(4)}{\mathbf{R}}$  elemeit tehát 21 csoportra oszthatjuk fel. Minden csoport nullától különböző azonos abszolút értékű elemeket tartalmaz.

A (62) egyenlet lineáris összefüggést ad  $\overset{(4)}{\mathbf{R}}$  három eleme között. Azonban azt látjuk, hogy ezek az összefüggések a (61a) egyenlet alapján identikusan teljesülnek, kivéve azokat az elemeket, amelyek négy különböző indexszel rendelkeznek. Ezen elemek számára a (62) a következő összefüggést adja:

$$\overset{(4)}{R}_{1234} + \overset{(4)}{R}_{3124} + \overset{(4)}{R}_{2314} = 0.$$

Ez az összefüggés (61a)-tól független. Azok az elemek, amelyek ebben az összefüggésben szerepelnek, a fent említett 21 csoportból 3 csoport elemei között egy összefüggést adnak. Ebből azt látjuk, hogy egy megfelelő csoport, másik kettő lineáarkombinációjaként előállítható és ezért a fent leírt 21 csoportból csak 20 csoport tartalmaz független elemeket, tehát a *Riemann-Christoffel-tenzor* 20 nem triviális független elemmel rendelkezik.

### 3. Az $\mathbf{R}^{(4)}$ TENZOR REDUKÁLT FORMÁJA

483. Az  $\mathbf{R}^{(4)}$  *Riemann-Christoffel*-féle tenzort kontrahálhatjuk és így azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{R}^{(2)} = ((\mathbf{R} \mathbf{g}^{-1})^{(4)}) = ((\mathbf{g}^{-1} \mathbf{R})^{(4)}). \quad (64)$$

A kontrakció ugyanahhoz az  $\mathbf{R}^{(2)}$  tenzorhoz vezet, függetlenül attól, hogy balról vagy jobbról szorzunk  $\mathbf{g}^{-1}$ -gyel. Továbbá

$$R = ((\mathbf{g}^{-1} \mathbf{R})^{(2)}) = (\mathbf{g}^{(-2)} \mathbf{R}^{(4)})^{(4)},$$

ahol azt írtuk, hogy  $\mathbf{g}^{(-2)} = \mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{g}^{-1}$ .

A (64)-ből (38) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\text{Div } \mathbf{R}^{(2)} = ((\mathbf{g}^{-1} \text{Grad } \mathbf{R}^{(4)})^{(2)} \mathbf{g}^{-1})^{(2)} = (\mathbf{g}^{(-2)} ((35) \text{Grad } \mathbf{R})^{(4)})^{(4)}. \quad (65)$$

Továbbá azt találjuk, hogy

$$\text{Div } (\mathbf{g} R) = \text{Grad } R = (\mathbf{g}^{(-2)} \text{grad } \mathbf{R}^{(4)})^{(4)}. \quad (66)$$

(66) összefüggést egy egyszerű formára is hozhatjuk. Egyszerű meg gondolás alapján

$$\text{Grad } \mathbf{R}^{(4)} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - (24) - (13) + (13)(24)) \mathbf{\Upsilon}^{(5)}. \quad (67)$$

ahol

$$\mathbf{\Upsilon}^{(5)} = (\mathbf{1} + (34) + (35)) \left\{ \frac{1}{3} \mathbf{g}^{(5)} + \widetilde{\mathbf{C}}^{(3)(4)} \cdot \mathbf{g} - (13) \mathbf{g} \cdot \widetilde{\mathbf{C}}^{(4)} - \mathbf{g} \cdot \widetilde{\mathbf{C}}^{(3)} - \mathbf{g} \cdot \widetilde{\mathbf{C}}^{(4)} - 2 \widetilde{\mathbf{C}}^{(3)(3)} \cdot \widetilde{\mathbf{C}}^{(3)} \right\}.$$

Könnyen beláthatjuk, hogy

$$(12) \equiv (34) \equiv (35) \equiv \mathbf{1}, \text{ mod } \mathbf{\Upsilon}^{(5)}. \quad (68)$$

Az így kapott kifejezést leegyszerűsíthetjük, ha a (67)-et a (66)-ba behelyettesítjük és figyelembe vesszük, hogy  $\mathbf{g}^{(-2)}$  a következő szimmetriával rendelkezik:

$$(12) \equiv (34) \equiv (13)(24) \equiv \mathbf{1}, \text{ mod } \mathbf{g}^{(-2)}. \quad (69)$$

A fenti operációkat a  $\text{Grad } \mathbf{R}^{(4)}$ -re, vagy e kifejezés bármely tagjára alkalmaz-

hatjuk anélkül, hogy az összeg értékét megváltoztatnánk. Tehát, ha a (67)-et (66)-ba behelyettesítjük, négy tagot kapunk. Azt találjuk, hogy az első és a negyedik tag azonosak, minthogy

$$(\mathbf{g}^{(-2)} \boldsymbol{\gamma}^{(5)})^{(4)} = (\mathbf{g}^{(-2)}((13) (24) \boldsymbol{\gamma}^{(5)}))^{(4)}. \quad (70)$$

A második és a harmadik tag szintén egyenlőnek adódik:

$$(\mathbf{g}^{(-2)}((13) \boldsymbol{\gamma}^{(5)}))^{(4)} = (\mathbf{g}^{(-2)}((24) \boldsymbol{\gamma}^{(5)}))^{(4)}$$

tehát (66), (67) és (70) segítségével azt találjuk, hogy

$$\text{Grad } R = 2 (\mathbf{g}^{(-2)}(\mathbf{1} - (24) \boldsymbol{\gamma}^{(5)}))^{(4)}. \quad (71)$$

Hasonló módon, (67)-et (65)-be behelyettesítve és (68)-at felhasználva,

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}^{(-2)}((35) \text{Grad } \mathbf{R}))^{(4)} &= (\mathbf{g}^{(-2)}(\mathbf{1} - (24) \boldsymbol{\gamma}^{(5)}))^{(4)} - \\ &- (\mathbf{g}^{(-2)}((35) (\mathbf{1} - (24)) (13) \boldsymbol{\gamma}^{(5)}))^{(4)}. \end{aligned} \quad (72)$$

A második tag a jobb oldalon eltűnik. Ezt a következő módon láthatjuk be. A zárójel belsejébe fellépő operátort úgy is írhatjuk, hogy

$$(35) (\mathbf{1} - (24)) (13) \equiv (35) (\mathbf{1} - (24)) (13) (35) = (15) - (24) (15) \pmod{\boldsymbol{\gamma}^{(5)}}.$$

Összegezéskor pedig (24)(15) helyettesíthető (13)(15)-tel. Továbbá

$$(13)(15) = (13)(15)(35) = (15).$$

A szumma második tagja az elsőt kompenzálja, így a (72) jobb oldalán a második tagot el lehet hagyni. Így a (71)-et és (72)-őt összehasonlítva azt találjuk, hogy

$$\text{Div } \mathbf{R} = \frac{1}{2} \text{Grad } R,$$

és

$$\text{Div} \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R \right) = 0.$$



## NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

- aberráció 23, 187, 189  
   — csillagfényé 191  
*Abraham*, M. 40, 41  
 additív skálák 74  
 adiabatikus gyorsítás 126  
 alkímisták 66  
 általános relativitáselmélet 15, 209  
*Arago*, F. 25  
 atomi időskála 94  
 avanszált potenciálok 166  
  
 ballisztikus elmélet 45  
*Belepolszky* 33  
 belső feszültség 157  
 biológiai folyamatok 143  
 Biot-Sawart-törvény 178  
 bomlási idő 39  
*Bradley*, J. 193  
  
 Cerenkov-sugárzás 41  
*Champeney*, D. C. 39, 63  
 Christoffel-féle szimbólum 238, 298  
 Ciklikus permutáció 290  
 Coulomb-törvény 19, 70  
   — — ellentmondásmentességének ellen-  
   őrzése 71  
  
 deformáció 84  
 dinamikai elv 122, 59  
*Dingle*, A. 59  
 dipól mezők 182  
 diszperzió 196  
 Div operátor 286  
*Doppler*, Ch. 31  
 Doppler-effektus 31, 116, 187, 267  
   — akusztikai és elektromágneses 37  
   — frekvenciái 188  
   — gravitációs mezőben 272  
   — intenzitások 190  
   — megfigyelése 33  
   — merőleges 34, 121  
  
 egyenes vonal 237  
 egyenesvonalú vonatkoztatási rendszer  
   megalkotása 214  
 eiconal 254  
  
*Einstein*, A. 14, 16, 47, 61, 117, 245, 246,  
   247, 255  
 Einstein-féle gravitációs egyenletek 245  
   — megoldásai 249, 268  
   — stacionárius megoldása 270  
 Einstein-féle relativitás elv 67  
 Einstein-féle sebességösszeadási törvény  
   131, 181  
 ekvivalencia elv 210  
 elektromágneses mező 159  
   — Maxwell-féle elmélete 159  
   — — gravitációs mezőben 251  
 ellentmondásmentes koordináta mérté-  
   kek 81  
 energia áramlássűrűsége 161  
 energia — impulzus-vektor 154  
 energiamegmaradás törvénye 66, 149  
*Eötvös*, L. 210  
 ephemerikus időskála 93  
 (4)  
 $\varepsilon$  antiszimmetrikus tenzor 295  
 erősűrűség 157  
 éter 16, 45, 260  
   — hez viszonyított translációs mozgás  
   51, 117  
   — elektromágneses polarizációja 253  
  
*Faragó*, P. 41  
 fény  
   — diszperziója 196  
   — hordozója 16, 45  
   — sebessége, l. fénysebesség  
   — terjedése  
   — — fénytörő közegben 193  
   — — gömbhullámé 53  
   — — homogén módon 103, 107, 109,  
   120  
   — — izotrop módon 107, 109, 120  
   — — lokálisan homogén módon 261  
 fény terjedése  
   — mozgó koordináta-rendszerhez viszo-  
   nyítva 54  
   — mozgó közegben 30, 133, 200  
 fényelhajlás 209, 214, 242, 251

- fénysebesség  
 – fénytörő anyagokban 25, 26  
 – mérése 20  
 – – aberrációval 23  
 – – fázissebességé 29  
 – – forgótükres módszerrel 25, 26  
 – – Foucault és Fizeau módszerével 23, 24  
 – – Galilei javaslata 21  
 – – mozgó közegben 30  
 – – Römer módszerével 21  
 – mért értéke 20  
 – mozgó közegben 30, 133, 200  
 ferde reprezentáció 77  
 Fermat-elv 236  
 Fitz-Gerald, G. 58, 115  
 Fizeau, H. 23  
 Fizeau-kísérlet 30, 133, 200  
 Fock, A. V. 15, 209  
 Foucault, L. 23  
 Foucault és Fizeau kísérlete 23, 24, 55  
 Foucault-inga 48  
 Friedmann, A. 268  
 Friedmann-féle megoldás 270
- galaxisok recessziója 210  
 Gale, H. G. 50  
 Galilei, G. 21, 23, 51  
 – javaslata a fénysebesség meghatározására 21  
 Galitzin 33  
 Gauss-tétel 179  
 geodetikus pályák 231  
 – és a Lorentz-elv 233  
 – eltérés 235  
 geodetikus vonal 237  
 Grad operátor 285  
 gravitációs effektusok 209  
 – egyenletek 245
- Hamilton-elv 236  
 hasonló tartományok 222  
 hidrosztatikus nyomás 255  
 homogén fényterjedés 103, 107, 109, 120  
 – hullámegyenlet 165  
 – tartományok 212, 218, 302
- hossz skála 74  
 Hubble, E. 267  
 Hubble-effektus 267  
 – féle állandó 267
- idő  
 – kitüntetett mértéke 91, 93  
 időskála  
 – atomi 94  
 – ephemerikus 93  
 – kitüntetett 93  
 – sziderikus 93
- ikerparadoxon 142  
 impulzus megmaradása 148  
 impulzussűrűség 157
- inerciarendszer 93, 278  
 intergalaktikus távolságok 270  
 invariáns fogalmazás 259  
 Isaak, G. R. 39, 63  
 Isaak és munkatársainak kísérlete 39, 63, 116, 121  
 Ives, H. E. 34  
 izotrop fényterjedés 107, 109, 120
- Jánossy L. 39, 74, 138, 162, 166, 179, 192, 210, 215, 256  
 Jupiter holdak segítségével történő fénysebességmérés 21, 141
- Kaufmann, W. 40  
 k-dimenzionális mértékek 287  
 Kennedy, R. J. 57  
 Kennedy–Throndike-kísérlet 157, 108  
 – negatív eredményének értelmezése 58, 59
- Kepler-pályák 239  
 Khan, A. M. 39, 63  
 kitüntetett mértékek 16, 73  
 kóbor hullámok 167  
 Kohlrausch, F. 20  
 Kohlrausch–Weber-féle állandó, I. kritikus sebesség
- kontravariáns  
 – differenciálás 300  
 – reprezentáció 281
- koordinátaértékek megállapítása 78  
 koordináta-rendszer  
 – háromdimenziós 76  
 – majdnem egyenes 219
- kovariáns reprezentáció 281
- Lagrange-függvény 236  
 Laplace-operátor 286  
 Laplace–Poisson-egyenlet 245  
 Laue, M. von 13, 16, 17, 142, 254  
 Lense, J. 274  
 lokálisan homogén fényterjedés 261  
 longitudinális elektromos télerősség 178
- Lorentz, H. A. 40, 58, 61, 115  
 – csoport 99  
 – – valódi 100, 126  
 – deformációk 111, 112  
 – – mechanizmusa 122  
 – -elv 67, 111  
 – – általánosítása inhomogén tartományokra 212, 226  
 – – többértelműsége 228, 235  
 – – dinamikai 122  
 – kontrakció 58, 59  
 – mátrix 98, 279  
 – – paraméterei 100  
 – rendszerek 102  
 – tömegváltozási formula 41  
 – transzformáció 16, 98, 279  
 – vonatkoztatási rendszer 277

- Mach*, E. 273  
 Mach-elv 274  
 majdnem egyenes koordináták 219  
   — — reprezentáció 304  
 mátrix  
   — Lorentz 98  
   — ortogonális 85  
   — transzponáltja 291  
*Maxwell*, C. 19, 20, 45, 56, 141  
 Maxwell  
   — egyenletek 159  
   — — gravitációs mezőben 251  
   — — és a Lorentz-elv 175  
   — elektromágneses elmélete 159  
   — tenzor 161  
 merev testek 75, 88  
 Merkur perihéliummozgása 93, 209  
 mértékszámok 69  
 mértéktranszformáció 164  
 mezők 284  
*Michelson*, A. A. 27, 48  
 Michelson  
   — Gale-kísérlet 50  
   — interferométer 27, 225  
   — Morley-kísérlet 56, 108  
 Mössbauer-effektus 64, 209  
 $\mu$  mezon 39  
 négyes  
   — áramsűrűség 169  
   — — transzformációja 184  
   — potenciál 169  
   — távolság 97  
   — vektor 154  
 „nemeuklideszi” geometria 82  
 Newton első törvénye 92, 145, 231  
 Newton második törvénye 155  
 normál reprezentáció 262  
*Novobátzky*, K. 131  
 óra  
   — lelassulása 139  
   — paradoxon 138  
   — ritmusa 95  
   — standard 95  
 ortogonális  
   — mátrixok 85  
   — — csoporttulajdonságai 86  
   — sajátértékei 87  
   — reprezentáció 77  
   — transzformáció 85  
 paradoxonok 129  
   — óra 138  
   — iker 142  
 perihéliummozgás 93, 209, 241, 251  
 permutációs operátor 289  
 perpetuum mobile 66  
 Pythagoras-tétel 77  
   — kísérleti ellenőrzése 83  
 $\pi$ , operátor 292  
*Pogány* B. 48  
*Poincaré*, H. 256  
 polarizáció 169  
   — éteré 253  
 ponderomotorikus négyeserő 170  
 Poynting-vektor 193  
 pszeudoskalár mennyiségek 283  
 relatív sebesség 130  
 relativisztikus energia 149  
 relaxációs folyamatok 208  
 reprezentáció 69  
   — kitüntetett 73  
   — normál 262  
   — ortogonális 77  
 retardált potenciálok 165, 171  
 Riemann–Christoffel-tenzor 217, 299,  
   303  
   — redukált formája 307  
   — szimmetriái 305  
*Rossi*, B. 40  
 Rot operátor 286  
*Rowland*, H. 20  
*Römer*, O. 21  
   — módszere a fénysebesség mérésére  
   21, 141  
 rugalmas ütközés 146  
 rugalmatlan ütközés 150, 151  
*Sagnac*, G. 48  
 Sagnac-kísérlet 48  
 Schrödinger-egyenlet 211, 244  
*Schwarzschild*, K. 249  
 sebesség-összeadás 129  
 skalár mennyiségek 281  
*Sommerfeld*, A. 196  
 standard óra 95  
*Stark*, J. 33  
*Staub*, H. H. 41, 42  
 Stern–Gerlach-kísérlet 43  
*Stilwell*, G. R. 34  
 sugárzás energiája 153  
 sziderikus időskála 93  
 szilárd testek 75, 88  
*Tapkin*, A. A. 41  
 tenzormezők 296  
 tér  
   — háromdimenziós 83  
 terjedési tenzor 17, 107, 278  
*Thirring*, H. 273, 274  
 Thirring-effektus 273  
*Thorndike*, E. M. 57  
 töltés  
   — mérőszáma 179  
   — sajátmagára hatása 200  
 tömeg függése a sebességtől 40  
   — kísérleti igazolása 41  
 tömegdefektus 203

*Treder*, H. J. 210, 256, 262, 274  
Trouton—Noble-kísérlet 61, 121  
— értelmezése 204  
túlhatározott egyenletrendszer 77

úrutazás 143

ütközés

- rugalmas 146
- rugalmatlan 150, 151
- távoli 152

valódi mennyiségek 69  
variációs elvek 234  
vonatkoztatási rendszer 277  
Vorläufer 197  
vörös eltolódás 209, 243

*Weber*, W. 20

zárt áramkör mezője 185

*Zeeman*, P. 30

*Zreilov*, V. P. 41





*Az Akadémiai Kiadó gondozásában  
jelent meg:*

FODOR JUDIT

**A DETERMINIZMUS-KONCEPCIÓ  
FEJLŐDÉSE ÉS KAPCSOLATAI  
A KVANTUMMECHANIKÁVAL**

247 oldal • Kötve 43,—Ft

A szerző a determinizmus-konceptiók változását kíséri végig a filozófiában. A műben hangsúlyozott szerepet kap a XVIII. századi francia mechanisztikus materializmus determinizmuselmélete és szoros kapcsolata a klasszikus mechanikával. Fodor Judit tanulmányában annak a kialakult nézetnek helyességét kutatja, mely szerint „a kvantummechanika megdöntötte a determinizmust”. Elemzi a kvantummechanika kialakulását, fogalmainak történetét, interpretációit. Kísérletet tesz egy olyan determinizmuselmélet kidolgozására, amely összhangban van a modern fizika és az ahhoz szükséges matematikai apparátus követelményeivel csakúgy, mint a minden materialista filozófia integráns részének tekintett, korszerűen értelmezett teljes meghatározottság elfogadásával. A mű fő eredménye annak igazolása, hogy a kvantummechanika nem akadály, sőt bizonyos tekintetben ösztönzője a dialektikus determinizmus további kidolgozásának.



AKADÉMIAI KIADÓ • BUDAPEST

