Brassi

Euklides

eleme[illegible]

Rer 1865

EUKLIDES ELEMEI.

XV KÖNYV.

FORDÍTOTTA

BRASSAI SÁMUEL

M. TUD. AKADÉMIAI R. TAG.

KIADTA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

PEST,

EGGENBERGER FERDINÁND MAGY. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL.

1865.

Nyomatott Emich Gusztáv, magy. akad. nyomdásznál, Pesten, 18?8.

ELŐSZÓ.

Euklides elemei fordítását midőn ezennel az akadémia pártfogása alatt átnyujtom a kevés közönségnek, melyre tárgyánál s mértani mivelődésünk mostoha körülményeinél fogva igénye lehet, szükségesnek tartom az ügy ismertetése végett egy pár szót bocsátani előre.

Az eredeti munka szerzője személyes viszonyairól mindösszve három kopár adatunk van. Első, hogy az alexandriai muzeum tagja volt; második, hogy mathematikai munkákat írt; harmadik, hogy I. Ptolomaeus (Lagi) egyiptomi király geometriát kezdett vala tanulni tőle. Csak kezdett és akart, mondom, mert a tárgy kivánta figyelem feszítését restellvén, azt követelte mesterétől, hogy könnyítse neki a módszerét, mire Euklides azt felelte volna, hogy „nem vezet királyi út a geometriához!" Az adoma hallgat a további következésről, de nagyon csalna psychologiánk, ha fel nem tehetnők, hogy ama felelet után annyiban fogott maradni a tanulás.

Jobban megfontolva mindazáltal, azt veszem észre, hogy az utóbbi vonást meddőnek méltányosan még sem mondhatni. Söt ha következményekben nem, majmolásokban bizony elég termékeny volt, még pedig két oldalról.

*

Egyfelől, a tanulók részéről, számtalanok vannak, kik kapva azon, hogy a geometria tanulására „királyi" vagy legalább nagyságos és tekintetes úri „út nem vezet", inkább nem is kivánnak, annál kevésbbé iparkodnak a tudományok legtudományabbika, — bocsánat a kifejezésért — a geometria birtokába jutni. Másfelől legio a száma oly tanítóknak, kik meghazudtolni kivánván Euklides nyilatkozatát, országuton vagy éppen vaspályán, a kényelem vánkosos hintajában igérik meghordozni a tanulót a tudomány virágos és gyümölcsös mezején.

Ezek a képzelt könnyítést eszközlő tanítók, főképp tankönyvírók, két csoportra oszlanak. Az elsőbe tartoznak azok, kik az „Elemek"ben rejlő bámulatos és feddhetetlen következetességgel végig szőtt logikai vörösfonalat felfedezni vagy kellően becsülni nem bírván, a részökről hibáztatott módszeren az által akartak javítni s könnyítni, hogy a geometriai tantárgyakat az újabb időben úgynevezett rendszeres, igazabban táblás vagy rovatos sorba állították. Azaz: külön szakaszokban értekeznek a p o n tról, a v o n a lról, a s z e g l e tről, a h á r o m s z e gről, a n é g y s z e gről, a s o k s z e gről, sat., hogy a planimetria határán túl ne lépjek. Erről a törekvésről röviden csak azt mondom, hogy imigy szerkesztett tankönyv, felületesen és tartalom-mutatóját tekintve, igen szépen tűnik szembe, mint egy symmetriás épület. De bizony, közelről és pontosan megvizsgálva, azt kell itélnünk róla Phaedrus rókájával, hogy

„O quanta species! . . . cerebrum non habet".

Ugyanis, a mi az inductio mezején szép és jó lehet, a deductio pályáján megannyi botránykövé válhat. Halomra gyüjtött tapasztalati ismeretek átnézetésére, összes felfogatására és emlékezetben tarthatására a táblás és rovatos előadás nem csak idves, hanem nélkülözhetetlen is, és egyedül vezet czélhoz. De oly tudományban, melyben tanítónak és tanulónak tökélyesen átlátott és átértett, magukban igaz és észjogosan elfogadott egyszerü alaptételekből kell kiindulni, minden követ a szilárd alapra s fokozatonként nyugvó rendíthetetlen falrétegekre kell helyezni, az érintőleg ismertetett systema és tabellarismus a logikai rendet, a szilárd synthesist, az egymásból és egymás után következést minden lépten nyomon megzavarja, és megannyi ὕστερον-πρότερον-nal metszi inát a bizonyítmánynak.

A második csoportot teszik a — rövid s azt hiszem találós jellemzéssel nevezve — realisticus irányu tanítók a tankönyveikkel. Ezek a geometriának csupán gyakorlati alkalmazását tartván végczél gyanánt szemök előtt, a tanmódszer logikai kellékeire keveset hajtanak. Legfeljebb azt tartják róla, a mit egy híres szónokunk a politikáról, midőn úgy értelmezte, hogy az „az expedientiák tudománya". Szóban forgó geometráink is tehát a mértani igazságok megértetésében a legexpeditivusabb eszközökhez folyamodnak. Jelesen pedig a bébizonyításokat teszik a lehetőségig lazákká, és azután a geometriai igazi evidentia helyett egy más valamit csempésztek be, melyet bizvást elnevezhetni pseudoevidentiának.

Mind a két eljárást egy tankönyvből vett példa jobban ki fogja világítni, mintsem elméleties részletes leírás. A bebizonyítandó állítás az, hogy „a csúcsszögek (Scheitelwinkel) egymással egyenlők". A bizonyítás ez:

„Minthogy két egymást valamely pontban metsző egyenes a szelés után is ugyanazon irányt követi, következik, hogy széthajlásuk az átmetsző ponton túl is ugyanaz marad; azaz: „Két csúcsszög egymással egyenlő". Q. E. D.

Rostáljuk meg ezt a bizonyítást.

Elsőben, ha e kifejezésnek „irány" a szokott széles értelmét tulajdonítjuk, az hogy „egymást metsző két egyenes a szelés után" — akarja mondani a szelés pontján túl — „is ugyanazon irányt követi", sem többet, sem kevesebbet nem tesz, hanem hogy egymást szelő két egyenes vonal, (a vonalat egy haladó pontnak képzelve) a szelés pontján túl is egyenesnek marad." Ez aztán mit bizonyít?

De tegyük fel másodszor, hogy bizonyítsa a „csúcsszögek egyenlőségét". Igen de éppen úgy bizonyítja a mellék vagy szomszéd szögek egymással való egyenlőségét is; mert hiszen p. o. ABC és CBD mellékszögeket éppen azonos és irányukat megtartó vonalak alkotják; azaz: Két mellékszög egymással egyenlő; quod est absurdum.

Képtelen következmény származhatik két esetben. Vagy a következtetés helyes, de az előzmény nem igaz; vagy tán igaz az előzmény, hanem az okoskodás rosz. A harmadik esetet, hogy t. i. valótlan előzményből, álokoskodással, képtelen következményt hozzon ki valaki, nem vehetjük számba; mert ilyest csak eszeveszett emberről tehetni fel. És valóban itt is a második eset áll bé. Ugyanis

Harmadszor, az „irány“ szót az idézett bizonyítás szerkesztője kétértelmüleg használja. Az első, a melyet feljebb emlegeténk, csak egy vonalra vonatkozik, mely szerint az egyenes vonalat úgy is értelmezik, hogy az irányát egész végtelen hoszszában megtartja. Úgyde ez a bizonyításban csak annyira vezet, hogy az egymást szelő két vonal a szelés pontján túl is egyenes marad, miből, mint láttuk, semmi sem következik a csúcsszögekre nézve. Hogy hát bizonyíthasson, átcsap az író alattomban az „irány“ második értelmébe, mely szerint azonban két vonal egymáshoz képesti irányáról lehet csak szó, s ebben az értelemben aztán csupán azt fejezi ki, a mit közönségesen szegletnek — (Euklides szerint két egyen egymáshoz való dülése) — nevezünk. Ebben az értelemben pedig az állított bizonyítás nem egyéb, hanem tautologicus circulus, és helyes szavakba öltöztetve csak azt tartja, hogy „egymást szelő két vonal a szelés után is azt a szegletet alkotja egymással, a mit azelőtt.“ Úgyde ez világosan csak a bebizonyítandó állítás maga, és így nem bizonyítás.

Ez igaz hogy kirívó eset; de csak fokban és nem fajtában. Mert ily nemüeket osztályzásunk második csoportjában annyit lelünk, hogy bizvást aláírhatunk Kästner (göttingeni tanár) itéletének, mely szerint egy geometriai tankönyv abban az arányban roszabb, a melyben eltér az Euklidesétől.

Minden félreértés eltávoztatása végett meg kell jegyeznem, hogy maga az expedientia és opportunitas elve ellen még a geometriában is, — kellő helyén és idejében, — legkisebb kifogásom sincs. Sokan lehetnek oly helyzetben. és körülmények közt, hogy a geometria gyakorlati fogásainak sőt elméleti főbb igazságainak is a tudására szükségök lenne, de idejök szük volta, vagy mivelő előkészület hiánya nem engedi a tudomány rendes tanfolyamában részesedniök. Ilyek számára hát expeditivusabb tanmódszerről gondoskodni okvetetlenül szükséges. De nem úgy ám, hogy

— nec pes nec caput uni
reddatur formae ; —

nem úgy, hogy inductiv és deductiv módot összezagyváljunk; nem úgy, hogy syllogismusok helyett paralogismusokkal tanítsunk; s midőn a képzelődéshez és egyszerü józanokossághoz akarunk szólni, eszet fiszamítsunk. A kinek ízlése nem kedveli vagy vagyoni állapotja tiltja, hogy szegfüt vagy fahéjat használjon, borsot vagy paprikát veszen: de a füszerárus, ha hamisított szegfüt, álfahéjat ád, vagy a paprikát téglaporral vesztegeti, pellengérre méltó. Annyi geometriát, a mennyi teszem, bizonyos iparüzletre szükséges, tiszta inductív úton, de világosan s okszerüen, s minden bizonynyal sikeresen megtaníthatni. A „csúcsszögök" esetében például, ha a tanító két egyenes vékony rudacskát középen egy csappal — mint az olló két darabját szokták — összefoglal, s tapasztalatilag kimutatja tanítványának, hogy a mennyire nyitja a két innensö végét, annyira nyílik egyszersmind a két túlsó is, és hogy a saroktól egyenlő távolságra innen és túl eső két-két pont cserélt páronként is egyenlő távolságra esik egymástól, a csúcsszögök elméletét éppen oly világosan megérteti vele, s emlékezetébe éppen oly mélyen bévési, mint Euklides feddhetetlen syllogismusa. Ilyes módszer hát, mint írám, adott körülmények közt tökélyesen czélszerü, nem is okoz kárt; de másfelől nem is észfejtö s okoskodást gyakorló ám; mert úgyszólva, csak az instinctust, és nem az öntudatosan okoskodó, elvekből származtató észtehetséget veszi igénybe. Minthogy pedig a nevelő közintézetek, gymnasiumok és reáliskolák egyformán, lelki gymnastikai intézetek kell hogy legyenek, csak is e czélhoz alkalmazott szoros logikai módszer szerint szabad és kell tanítni bennök.

Ennek a czélnak Euklides feddhetetlen és szeplőtlen módszere tökélyesen megfelel. És ez állításom részletezésére s bebizonyítására kezeseket állítok.

Elsőben is Cardanus, XVI. századbeli olasz mathematicus, kinek nevét az exact tudományokban fényes találmányok halhatatlanítják, Euklides elemeiről szólva következőleg nyilatkozik: „A bennök foglalt állítmányok szilárdsága és tökélye oly végleges, hogy semmi más mivet ahoz jogosan hasonlítni nem lehet és szabad; miből ered, hogy az igazság világa annyira tündöklik benne, hogy csak azokról tehetjük fel, hogy bajos kérdésekben az igazat a hamistól meg bírják választani, kik Euklidesben otthonosak. *)

Lássuk másodszor Petrus Ramusnak a logika egyik nagy mesterének (XVII. sz.) az itéletét: **)

„Ámbár gondosan átfürkésztem az „Elemek“ minden könyvét, semmi álokoskodást, semmi hamis tételt bennök észrevenni nem bírtam; ezt a dicséretet egyedül állónak vallom, és olyannak, a milyet soha sem nyelv-, sem szónoklattanárnak, sem logicusnak nem tulajdoníthattam, hogy illető nyelv-, szónoklattanában, logikájában semmit a mi hamis, ne tanított volna.“

Gregory maga, Euklides ángol kiadója harmadszor, Cardanus idézetét bérekesztvén, imígy vélekedik: ***) „Mindezek

---

*) Quorum inconcussa dogmatum firmitas perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas; quibus fit, ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quaestionibus videantur a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem. Eucl. Opp. ed. Greg. Oxon. 1703.

**) Nullus paralogismus, nulla Ψευδογραφία, in totis Elementis, nobis quanquam severe inquirentibus animadverti potuit: quam laudem esse singularem profiteor, quamque nulli adhuc neque Grammatico, neque Rhetori, neque Logico concedere potui; ut in Grammatica, Rhetorica, Logica nihil falsi docuisset.

***) Quibus non obstantibus, dantur aliqui, qui licet utilitatem propositionum Euclidearum in omni re geometrica, earumque firmitatem ultro agnoscant, methodum tamen desiderant; nempe queruntur illum neglecta methodo — de Lineis, de Angulis, de Figuris planis mixtim agere: nimirum hanc esse optimam verae methodi legem existimavit vir accuratissimus, ut nihil sumatur pro vero, nisi demonstratum, nihil demonstretur, nisi ex antecedentibus. „Quo fit,“ inquit Savilius, „ut ordo quem isti methodistae requirunt ab Euclide, quo nunquam videt hic sol μεθοδικώτερον, servari non potuerit, nisi si quis est daczára vannak. a kik, jóllehet szívesen elismerik Euklides feladatainak hasznos és szilárd voltát, mindazáltal módszer hiányát látják bennök. Sajnálják t. i hogy ő, elhanyagolván a módszert, a vonalakról, szegletekről, lapos képletekről vegyesen értekezik. Ámde az az igen pontos férfiú azt tartotta az igazi módszer legjobb törvényének, hogy csak azt fogadja el az ember igaznak, a mi be van bizonyítva; és megint, hogy mindent csak az előbbiekből bizonyítson. ‚Innen van, azt mondja Savile, hogy ‚azt a rendet, melyet ama módszerészek Euklidestől, — kinél módszeresebb tanító a világon nem volt, — követelnek, megtartani nem lehetett, ha csak nem oly balga valaki, hogy nem tudom minő képzelt díszességet véljen az okoskodás rovására vadászandónak. Akárkit, a ki a geometria elemei tanításának más módszerét szerkesztette, ha bírónak teszünk, az Euklides művét minden másénál a saját magáén kívül elébbvalónak fogja ítélni.

Kezeseink sorából, negyedszer, a nagy Newton sem marad ki. „Pembertontól értesülünk," írja Peyrard, Euklides újabb kiadója, „hogy nem egyszer hallotta Newtontól, mennyire sajnálja, hogy egészen a Descartes és más algebraisták munkáira adta magát, és nem tanulta s fontolgatta előbb Euklides elemeit."

Ötödször Lagrange, a XVIII. század leggenialisabb mathematicusa, ugyancsak Peyrard szerint gyakran mondogatta, hogy „a geometria egy kihalt nyelv, s a ki a geometriát nem Euklidesből tanulja, úgy tesz mint az, a ki görögül és latinul akarván tanulni, e két nyelven írt újabbkori munkákat olvasna csupán."

Ha ezekhez még Kästner feljebb idézett nyilatkozatát is hozzáragasztjuk, azt hiszem, elég tekintélyes sorát állítottam elé az Euklides becse mellett tanuskodó ítéleteknek, s a maga-

---

adeo ineptus, ut nescio cujus imaginariae venustatis rationem habendam putet, neglecta sanitate." Quivis eorum, qui Geometriae Elementa alia methodo tradenda suscepit, inter Euclideum opus alteriusque cujusvis praeter proprium judex constituatur; illico patebit discrimen. (Greg. in Euclide etc.)

mét, mint merőben feleslegest, szivesen elengedi nekem a kegyes olvasó.

Csak azt a körülményt kell még megemlítnem, hogy midőn azok, kik Euklides módszerén javítni akarva, valóban rontottak, legtöbbnyire francziák és németek voltak és ma is azok, az ángolok egyedül híven és állhatatosan megmaradtak Euklides és csonkítatlan, ferdítetlen módszere mellett. Felsőbb és alsóbb iskoláikban csupán autorunk Elemei szolgálnak kézikönyvül, s ángol fordításai s kiadásai száma legio. És merem állítani, hogy e lelki gymnastica nyomát is hagyta az ángol irodalmon. Francziа íróban megengedem hogy több a könnyüség, az elmésség; német íróban a tudományosság (eruditio); de bizony az ángol írót józan, higgadt itéletben és szilárd okoskodásban egyikök sem haladja meg, és kevés éri el.

Most már áttérünk Euklides főbb kiadásai rövid ismertetésére. — Az első egy másod kéztől — arabból — való latin fordítás volt, melyet Velenczében nyomtatott „Erhardus Ratdolt Augustensis" 1482. in fol. goth. betükkel. A legrégiebb nyomtatvány, a melyben math. figurákat lelhetni. — Görögből egyenesen Zamberti és Commandini fordították latinra. Mind a kettő egyaránt hü; de imezét mint szebb deákságut inkább becsülik.

Zamberti forditását kiadta Henr. Stephanus Párisban 1502. fol. — Velenczében nyomtatták, a hol egy pár évvel később újra kiadták. (Impr. Venetiis in aedibus Joa: Tacuini anno M.D.VIII.)

Az eredeti görög szöveg még későbbre ú. m. 1533. látott világot e czim alatt: *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ στοιχείων, βιβλ. ιε' ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων τοῦ Πρόκλου βιβλ. δ'.* Adjecta praefatiuncula, in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil. (Sim. Grynaeus). Bas(ileae) apud J. Hervag mense Septembri 1533. — fol. szöveg közé nyomott figurákkal.

Egész czimet adám, mert egy pár szó benne véleménykülönbséget keltett. „*Ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν*" a szavak szokott értelmében latinul azt teszi: ex Theonis colloquiis. De már miképp magyarázzuk a „colloquiumot? Itt a bökkenő, hol a vélemények ellenkező két oldalra ágaztak. Egy rész azt állította, hogy Euklides csak a propositiókat (fordításunkban a dült betükkel nyomtatott „feladatokat") hagyta írásban, s a bizonyítások, hozzá való készülékek, figurák mind Theontól valók. E vélemény pártolói ahoz képest az „*Ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν*"-t így fordították latinra: „cum expositione Theonis," vagy úgy hogy: „ex commentariis Theonis." Ismét más kiadásokban a bizonyítások sat. „commentaria Theonis"-nak vannak czímezve. A más rész ellenben a bizonyítások kezünkre jött szövegét is eredetileg Euklides által írtnak, de Theon által többé-kevésbé módosítottnak, illetőleg elrontottnak tartja, és az idézett szavakat így latinizálja: „ex recensione Theonis." E véleményen volt jelesen Simson Robert glasgowi tanár, híres mathematicus, a ki az Elemek I—IV, és XI. XII. könyveit nagyjában a Commandini latin fordítása szerint kiadván, törekedett a bizonyításokat a Theon rontásaitól, vesztegetéseitől megtisztítni, az általa valószinüleg kihagyottakat helyrepótolni, szóval Euklides eredeti szövegét, a mennyire csak lehetséges, vissza és helyre állítni. Javításait a tudós világ nagy részben elfogadta, nevezetesen Ángliában az Elemek kiadásai ángol fordításban mindnyájan a Simson recensioját követik; mi több: egy későbben a Vatikánban lelt derék kézirat nem egy helyen igazolja Simson hozzávetéseit.

A mi a két véleményt illeti, az első kiadások korában, ú. m. a XVI. XVII. százakban, az elsőbb vélemény volt az uralkodó, annyira hogy a baseli kiadásban a bizonyításoknak mindenütt a Theon, mint autor, neve van eleikbe téve, a rómaiban (Elementorum libri XV. Graece ed. Aug. Caianus. Romae 1545. II Rész egy kötetben. Kis 8-adr.) pedig csak a propositiók, mint egyedül Euklideséi, vannak kinyomtatva, a bizonyítások és figurák kihagytával. Az újabb kor a második véleményhez szít*), és ily

---

*) „On pense que le commentaire attribué à Théon, et qui porte le titre de Συνουσίαι, est un Ouvrage d' Euclide lui même retouché par l'éditeur dont ils portent le nom." Peyrard, (Les Oeuvres d'Eucl. Prélim.) — Ha szabad szerény itéletemet nyilvánítani, én azt gondolom, hogy a két vélemény közt közepen áll az igazság. Valószinü, hogy írásban eleinte csak a propositiók voltak meg; s hogy

értelemben van szerkesztve az Elemek görög szövegének legújabb kiadása e czím alatt:

Euclidis Elementa, ex optimis libris in usum tyronum graece edita ab E. F. August. Berolini. Trautmann. Vol. I, 1826. Vol. II. 1829. 8-adr. Kőre rajzolt táblákkal. *)

Az Elemeken kivül több munkája is maradt reánk Euklidesnek, részint tán másoknak is az ő neve alatt, és többnyire meglehetős csonkán. Közülök csak kettő geometriai érdekü, ú. m. Data (Δεδομένα) és Porismata. Összes munkáinak két kiadása van; czímeik a következők:

Euclidis quae supersunt omnia (Graece et Lat.) Ex recens. Dav. Gregorii Oxonii e theatro Sheldon 1703. fol. Szöveg közé nyomott figurákkal. — Mind e mai napig becsült kiadás, hagyományosan úgynevezett „edit. opt."

Euklides maga írta, azt soha senki kétségbe nem hozta. De szintoly valószinü, hogy a magyarázatokat, készületeket, bizonyításokat csupán élőszóval s rögtönzött rajzzal adta elé mind maga Euklides, mind más tanárok, kik utána az ő kézikönyvét azaz Propositioit használták vezérfonalul. Valószinü, harmadszor, hogy a tanítás katechetikai, dialogizált, συνουσίαι modorban történt, Theon részéről szintúgy mint Euklideséről. Mert bizony Sokrates sem legelseje, sem legutolsója nem volt a beszélgetve tanítóknak. Mindezek szerint úgy kell vélekednünk, hogy a kérdéses bizonyításokat sem Euklides sem Theon nem írta, hanem hagyománykép mentek a tanárok közt szájról szájra. Majd egykor azután egy vagy más élesb eszü tanítvány emlékezetéből felírta, s egy ily iromány szolgálhatott prototypusául annak a mintegy 30 codexnek, melyek az Elemek nyomtatott kiadásainak részint másolandó kézirat, részint igazítások kútfejeiül szolgáltak és szolgálhatnak ma is. Így és csak így nyerheti teljes magyarázatát az ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν (ex Theonis colloquiis) kifejezés. A további következtetést az értesült olvasóra bízhatom. Sapienti satis.

*) August kiadása csak a XIII első könyvet, mint kifogástalanul Euklidesnek tulajdonítottakat, foglalja magában. Még egy 3-dik kötet is volt igérve, mely igéret maig is teljesítetlen maradt. Egyébiránt teljes és szorosan kritikai kiadás, melynek szövege minden tudvalevő codex és előbbi kiadások, jelesen a baseli, oxfordi és párisi felhasználásával, s ezek s a kéziratok var. lectioival, van szerkesztve.

Euclidis quae supersunt. — Les Oeuvres d'Euclide, en Grec, en Latin et en Français d'après un manuscrit très ancien, qui était resté inconnu jusqu' à nos jours. Par F. Peyrard. Ouvrage approuvé par. l'acad. des sciences. Paris. 1814—18. III. kötet, 4-edr. — Az alapul vett kézirat a Vatikanból került vala hadi zsákmányként Párisba, hibátlanságára, régiségére (a IX. százból valónak itélik), és tekintélyére nézve jórendin mindnyájok közt a legelső. Ezenkivül még 20 egynéhány kéziratot hasonlitott vele össze a kiadó.

Most már csak a van hátra, hogy forditásom történelmi viszonyairól adjak ismertetést egynéhány vonásban. Köztudatos dolog, hogy a M. Tudós Társaság beállitása után nem sokára számos jeles és becses könyvet tüzött és hirdetett ki magyarra forditás és kellő birálat után az akadémia költségén kiadás végett. Ezek között helyet foglaltak Euklides Elemei is. Melléje az az utasitás lőn adva, hogy a forditás alapjául az oxfordi kiadás vétessék. Természetesen, mert a math. osztály akkori tagjai sem philologusok, sem az irodalom történelme ismerői nem levén, nem is tartozván lenni, a hagyományos „ed. opt."-ból indultak ki. Én pedig a forditáshoz akarván fogni, sem köz sem magán könyvtárból a Gregory kiadását megszerezni nem birtam, s merem állitani, hogy nem is találhatni egy pél dányát is magyar földön. Nem véltem hát ellenkezőnek az utasitás belértelmével és szellemével, ha forditásom alapjául August legújabb kiadását veszem, mint a melyben az oxf. kiadás var. lectioi, a hol netalán tőlök eltávozni jónak látta a kiadó, teljesen fel vannak jegyezve, valamint a Peyrardéi is. Ezt én az akadémiával tudatni kötelességemnek tartottam, de az akkori titoknok nem tudom minő nyomatékkal és részletes indokokkal adta elé; elég az, hogy nekem azt adá válaszában tudtomra, hogy az akadémia szilárdul ragaszkodik Gregoryhoz. Erre én forditásomat csakugyan a hogy kezdtem, el is végeztem, s azután utat tettem Bécsbe, hol a cs. könyvtárban kéziratomat az oxfordi editioval még egyszer összehasonlitottam, s ugyanabból az Augustéban hiányzó XIV. és XV. könyvet leforditottam. Egyszersmind a Peyrardéval is összevetettem, s a mennyire csak lehetett, tökélyesitettem fordításomat, hogy a mennyire csak tőlem telt, az akadémia tekintélyéhez méltó munkát terjeszthessek eleibe. Szerencsés levén helybehagyását megnyerni, ezennel, K. O., elődbe is terjesztem azzal az ohajtással, hogy his mecum utere et vale!

Brassai Sámuel,
a m. tud. akad. tagja.

EUKLIDES ELEMEINEK

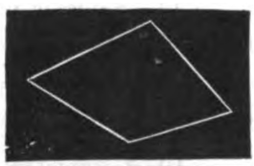
ELSŐ KÖNYVE.

Értelmezések.

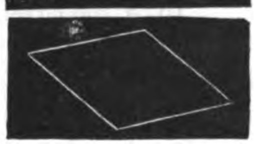
1. *Pont* az, melynek semmi része.
2. A *vonal* szélesség nélküli hossz.
3. A vonal végei *pontok*.

4. *Egyenes vonal* az, mely pontaival egyenesben fekszik.

Jegyz. Ezt röviden ezután *egyen*nek fogjuk nevezni.



5. *Terj* az, melynek csak hossza és szélessége van.
6. A *terj* végszélei *vonalok.*
7. *Lapos terj* az, mely vonalaival egyenesben fekszik.



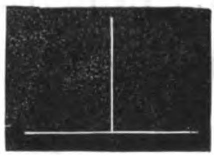
1. *Jegyz.* Ezt *lap*nak fogjuk röviden nevezni.

2. *Jegyz.* *Laposterj* vagy *lap*, az újabbak szerint, az, melynek akármely két pontja közt vont egyen egészen beléje hal.

8. *Lapos szeglet*, a lapon egymást érő két vonal egymáshoz dőlése.

Jegyz. A szegletet alkotó két vonalat az alább következőkben mindig úgy jellemzi Euklides, hogy a szegletet *befogják* (*περιέχονται*). — Az újabbak a szegletet befogó vonalokat a szeglet *szárai*nak, a pontot pedig, a hol találkoznak, a szeglet *hegyé*nek nevezik. — Továbbá, ha a szegletet befogó vonalok egyikétől a másikáig egyen van vonva, ez, Euklides szerint, a szegletet *átfogja*, (*ὑποτείνει*).

9. Midőn a szegletet befoglaló vonalok egyenesek, a szeglet *egyenesvonalu*nak hivatik.



10. Midőn pedig egy egyen, más egyenre állítva, a szomszéd szegleteket egymással egyenlőkké teszi, az egyenlő szegletek mindenike *derék szeglet*, és az állított vonal *függőnek* mondatik arra, a melyikre állítva van.

11. *Buta* szeglet az, mely a deréknél nagyobb.

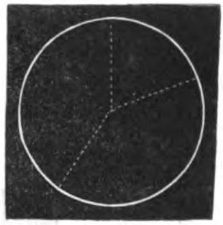
12. *Hegyes* pedig az, mely kisebb a deréknél.

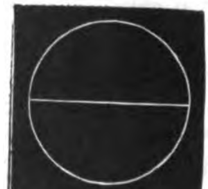
13. A *határ*, valaminek végszéle.

14. *Képlet*, a mi egy, vagy több határtól *körül* van *fogva*.

Jegyz. Figyeltetjük az olvasót, hogy a *befogást*. *át*fogást, és *körül*fogást jól és pontosan különböztesse meg.

15. A *kör*, egyetlenegy vonaltól, mely kerületnek hivatik, és melyre a képlet közepette fekvő egyik pontból húzott minden egyenek egymással egyenlők, körülfogott képlet.



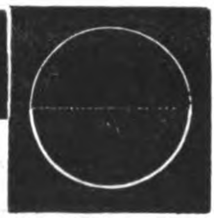


16. A körnek ama pontját *középpontnak* hivják.

17. A kör *átmérője* a középponton átvont, és mindkét

felől a kör kerülete által határzott egyen, (mely ketté is vágja a kört).

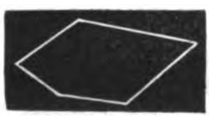
Jegyz. A rekeszbe tett szavak nem az Euklideséi, hanem scholiasta pótlék. Értelmezésbe nem is illenek, mivel állítást foglalnak magukban.

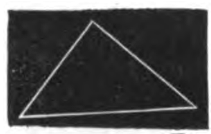


18. *Félkör*, az átmérő és a kerületnek emettől elvágott része közé fogott képlet.

19. A *félkör középpontja* ugyanaz, mely a köré.

Jegyz. E helyett az értelmezés helyett, mely *Proclus*nál, szerzőnk magyarázójánál, maradt meg, a gondatlan scholiasták vagy kiadók a III-dik könyv 6-dik értelmezését ismétlék, de a mely itt tökélyesen hasztalan, mivel az I-ső és II-dik könyvben a körszelet sehol elő nem fordúl.

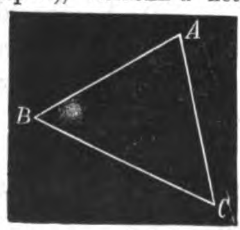




20. *Egyenes vonalu képletek* az egyenes vonaloktól befogottak.

21. *Háromoldaluak* a háromtól.

Jegyz. A háromoldalu képletekben, vagy röviden: háromszegekben (*háromba szegett* vonaltól körülfogott képlet), szerzőnk a két vonalt rendszerint *oldal*nak, a harmadikat *talp*nak nevezi; de nem kell gondolni, mintha ez az utóbbi *mindig* a szemünk előtt tartott képletben legalól eső vonalat tenné, ámbár gyakrabban igenis ezt teszi. — Továbbá a háromszeg egyik szegletére nézve két vonal, vagy oldal, ezt *befogja*, s a harmadik (ha tetszik, a talp) *átfogja*. P. o. az idemellékelt, u. m. ABC-vel jegyzett háromszegben: az ABC alatti szegletet az AB és BC vonalok *befogják*, az AC pedig *átfogja*.

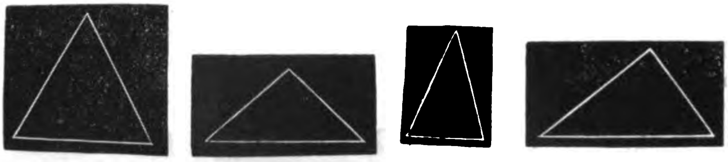


22. *Négyoldaluak* a négytől,

23. *Sokoldaluak* a több mint négy vonaltól befogottak.

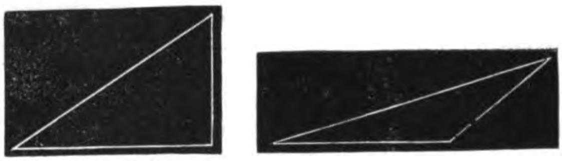
1*

24. A háromoldalu képletek közöl *egyenlő oldalu háromszeg* melynek mind a három oldala egyenlő.



25. *Egyenlőszáru*, melynek csak két oldala egyenlő.

26. *Kajcsas*, melynek egy oldala sem egyenlő a másikkal.



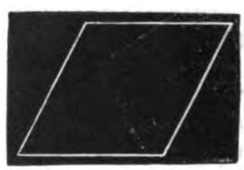
27. Ismét a háromoldalu képletek közöl *derékszegletü háromszeg*, melynek egyik szeglete derék.

28. *Butaszegletü*, melynek egyik szeglete buta,

29. *Hegyes szegletü*, melynek mind a három szeglete hegyes.

30. A négyoldalu képletek közöl *négyszeg* az, mely egyenlő oldalu s derék szegletü.

31. *Felemás* az, mely derék szegletü, de nem egyenlő oldalu.



Jegyz. Felemás = mint a mely oldalainak fele egy, fele más hosszuságu.

32. *Rézsut*, mely egyenlő oldalu, de nem derék szegletü.

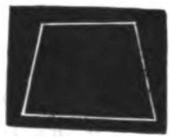
Jegyz. Rézsut = 'Ρομβος = Raute : oldalra dült négyszeg.

33. *Nyultrézsut*, melynek átelleni oldalai s szegletei egyen-

lök, de a mely sem nem egyenlö oldalu, sem nem derék szegletü.

1. *Jegyz.* *Nyultrészut* = *'Ρομβοιδες* : mint mely az előbbitől csak nyúlánkabb alakjával különbözik.

2. *Jegyz.* Simson Robert, Euklides angol kiadójának helyes észrevéte szerint, ez az értelmezés felesleges jelt foglal magában, u. m. azt, hogy az átelleni szegletei egyenlők, mi az elsőnek u. m. az átelleni oldalai egyenlőségének következése. Aztán állítás is ez, melyre bebizonyítás kell. Hihetőkép ezt sem tulajdoníthatni a feddhetlen logikáju Euklidesnek.



34. Ezen kivül minden más négyoldalu *oldalmás*nak neveztessék.

35. *Egyenközü egyenek*, melyek azon egy lapon levén, és mindkétfelé határtalanul kinyújtatván, egyfelé sem érnek össze.

Kivánatok.

1. Kívántassék meg, akármely ponttól akármely pont hoz egyent vonhatni.

2. És egy határzott egyent folyvást egyenesben meg nyújthatni.

3. És minden középponttal és közzel kört írhatni.

4. És hogy minden derék szeglet egyenlö legyen.

Jegyz. Ez a kivánat a köz kiadásokban a közeszmék közt foglal helyet 10-iknek. A vaticani derék codex, mely szerint Peyrard szerzőnket kiadá, ide helyzi.

5. És hogy ha két egyent úgy vág keresztül egy egyen, hogy az azonegyfelöli belsö szegleteket két deréknél kisebbé teszi, a két egyen határtalanul kinyújtva összeérjen affelé, melyről a két deréknél kisebb szegletek vannak.

Jegyz. Ezt is a közeszmék közé igtatják a vulgáták; de a kéziratok legnagyobb része, igen logikailag, a kivánatok sorába teszik, s ugyan a tetszik ki Proclusból is. Ennélfogva Peyrard kiadását követve, mi is ezt látók mind legalkalmasb, mind legtörvényszerűbb helynek. — Közeszmeül 11-iknek számítják.

6. És hogy két egyen ürt ne kerítsen be.

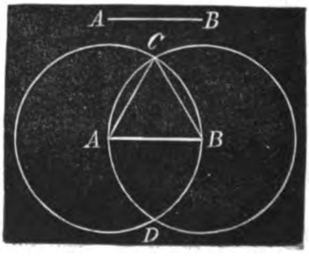
Jegyz. Ez megint a közeszmék sorába van igazítva sok kiadótól, sőt ott találjuk több kéziratokban is. Mi már egyszer a vaticani derék codexnek hiszünk.

Közeszmék.

1. Az azon egygyel egyenlők egymással is egyenlők.
2. És ha egyenlőkhez egyenlők toldatnak, az összegek egyenlők.
3. És ha egyenlőktől egyenlők vétetnek el, a maradékok egyenlők.
4. És ha nem egyenlőkhöz egyenlők tétetnek, az összegek nem egyenlők.
5. És ha nem egyenlőktől egyenlők vétetnek el, a maradékok nem egyenlők.
6. És azon egynek kettőzetei egymással egyenlők.
7. És azon egynek hasonfelei egymással egyenlők.
8. És az egymásra illők egyenlők.
9. És az egész a részénél nagyobb.

Első Feladat:

Adott határzott egyenre egyenlőoldalu háromszeget állítani össze.



Legyen az adott határzott egyen *AB*.

Ezen AB határzott egyenre kell egyenlő oldalu háromszeget állítani össze.

A középponttal *AB* közzel írassék *BCD* kör, és megint *B* középponttal BA közzel írassék ACD kör, és a C ponttól, hol a körök egymást vágják, az A B pontokhoz vonassanak CA CB egyenek.

Minthogy az A pont, BCD körnek középpontja, AC egyenlő AB-vel; ismét mivel B pont ACD körnek középpontja, BC egyenlő BA-val. Meg vala mutatva, hogy CA egyenlő AB-vel, tehát mind CA mind CB egyenlők AB-vel. Ugy de azonegygyel egyenlők egymással is egyenlők, tehát CA egyenlő CB-vel; CA, AB, BC tehát mind hárman egyenlők egymással.

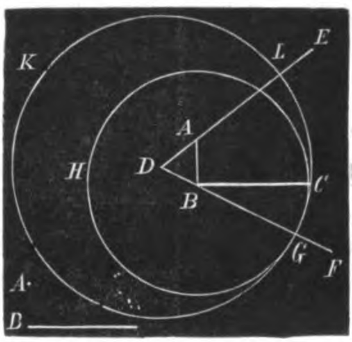
ABC háromszeg tehát egyenlőoldalu, és az adott határzott AB egyenre van összeállítva.

Tehát adott határzott egyenre egyenlőoldalu háromszeg állittatott össze, mit mívelni kelle.

2. Feladat:

Adott pontból adott egyennel egyenlő egyent vonni.

Legyen az adott pont A, az adott egyen pedig BC. Az A pontból kell már az adott BC egyennel egyenlő egyent vonni.



Vonassék A pontból B ponthoz AB egyen, és állíttassék erre DAB egyenlő oldalu háromszeg, és DA-val, DB-vel egyenesben nyújtassanak AE, BF egyenek, aztán B középponttal BC közzel irassék CGH kör, és viszont D középponttal DG közzel irassék GKL kör.

Minthogy már B pont CGH körnek középpontja, BC egyenlő BG-vel. Ismét mivel D pont GKL körnek középpontja, DL egyenlő DG-vel, melyekben DA DB-vel egyenlő, tehát a maradék AL egyenlő a maradék GB-vel. De meg vala mutatva, hogy BC is egyenlő BG-vel, tehát mind AL, mind BC egyenlők BG-vel. Ugy de azonegyhez egyenlők egymással is egyenlők, tehát AL egyenlő BC-vel.

Vonva tehát az adott A pontból az adott BC egyennel egyenlő AL egyen; mit mívelni kelle.

3. Feladat:

Nem egyenlő két egyen adatván, a nagyobbikból a kisebbikkel egyenlő egyent elvágni.

Legyen az adott nem egyenlő két egyen AB és C, melyeknek nagyobbika legyen AB. A nagyobbikból, az AB-ből, a kisebbikkel, a C-vel egyenlő egyent kell elvágni.

Vonassék A pontból C egyennel egyenlő AD, és A középponttal, AD közzel írassék DEF kör.

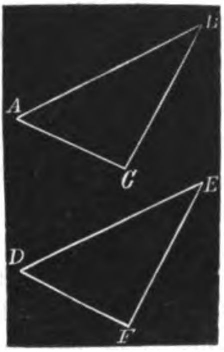
Mivel A pont DEF körnek középpontja, AE egyenlő AD-vel; de C is egyenlő AD-vel. AE és C tehát mindenik egyenlő AD-vel, úgy hogy AE is egyenlő C-vel.

Adva levén tehát AB és C két egyen, a nagyobbikból AB-ből a kisebbikkel C-vel egyenlőt (darabot) vágánk el; mit tenni kelle.

4. Feladat:

Ha két háromszegben egyiknek két oldala egyenlő a másiknak két oldalával különkülön, és az egyenlő egyenek közé foglalt szeglet is egyenlő a másik szeglettel; úgy a talp is egyenlő lesz a talppal, s a háromszeg a háromszeggel, s a többi szegletek is, melyeket az egyenlő oldalak átfognak, különkülön egyenlők lesznek.

Legyen a két háromszeg ABC, DEF, melyekben AB, AC két oldal, a DE, DF más két oldallal különkülön egyenlők, u. m. AB DE-vel, és AC DF-el, s a BAC alatti szeglet is egyenlő az EDF alattival: azt mondom; hogy BC talp is egyenlő EF talppal, és ABC háromszeg egyenlő DEF háromszeggel, s a többi szegletek is, az egyenlő oldalakkal szemben állók, különkülön egyenlők lesznek: u. m. az ABC alatti a DEF alattival, s az ACB alatti a DFE alattival.

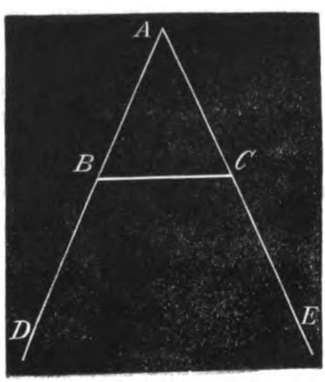


Mert ha az ABC háromszeget a DEF háromszegre illesztjük, s az A pontot a D pontra, AB egyent DE egyenre teszszük, B pont is E pontra fog esni, mivel AB egyenlő DE-vel: ha már AB reá illik DE-re, AC egyen is reá fog illeni DF-re, mivel BAC szeglet egyenlő EDF szeglettel; e szerint C pont is F pontra esik, ismét azért, hogy $AC = DF$-el. De B is reá illett E-re, úgy hogy BC talp reáillik EF talpra. Mert ha B E-re, C pedig F-re esvén, a BC talp nem illenék az EF talpra, két egyen ürt kerítne be, mi lehetlen. Reá illik tehát BC EF-re, és = lesz vele, úgy hogy az egész ABC háromszeg DEF háromszegre fog illeni s ezzel egyenlő lenni, s a többi szegletek is a többi szegletekre fognak illeni s ezekkel egyenlők lenni, u. m. az ABC alatti a DEF alattival s az ACB alatti a DFE alattival.

Tehát ha két háromszegben sat. mint a feladatban. (Mit bizonyítani kelle.)

5. Feladat:

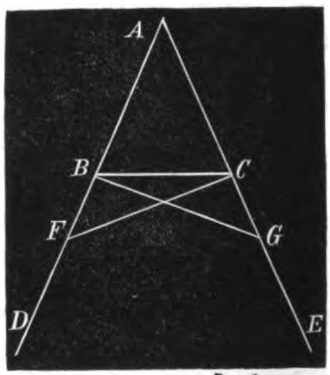
Az egyenlő száru háromszegeknek talpmelletti szegleteik egymással egyenlők, s az egyenlő oldalok megnyújtatván, a talpalatti szegletek is egymással egyenlők lesznek.



Legyen ABC egyenlőszáru háromszeg, melynek AB oldala egyenlő AC oldalával, és nyújtassanak AB-vel AC-vel egyenesben BD, CE egyenek; azt mondom, hogy ABC szeglet egyenlő ACB szeglettel, és CBD szeglet egyenlő BCE szeglettel.

Mert vétessék BD-én akármely F pont, és vágassék el a nagyobb AE-től a kisebb AF-el egyenlő AG, és vonassanak FC, GB egyenek.

Minthogy AF, AG-vel és AB, AC-vel egyenlők, FA, AC két oldal a más kettővel GA-val AB-vel különkülön egyenlők, és a közös szegletet, az FAG alattit, fogják be; tehát FC talp GB talppal egyenlő, s AFC háromszeg AGB háromszeggel egyenlő lesz, s a többi szegletek a többi szegletekkel, azok azokkal, melyeket az egyenlő oldalak fognak át, különkülön egyenlők lesznek, ACF, ABG-vel és AFC, AGB-vel. Aztán minthogy az egész AF az egész AG-vel egyenlő, melyekben AB, AC-vel egyenlő, tehát a maradék BF egyenlő a maradék CG-vel. De meg van mutatva, hogy FC egyenlő GB-vel, így hát BF, FC két egyen CG, GB-vel különkülön egyenlők, és a BFC alatti szeglet a CGB alattival egyenlő, s BC talpuk közös; tehát BFC háromszeg CGB háromszeggel egyenlő lesz, és a többi szegletek, melyeket egyenlő oldalak fognak át, egymással különkülön egyenlők lesznek; tehát az FBC alatti egyenlő a GCB alattival, és a BCF alatti a CBG alattival. Minthogy hát az egész ABG alatti szeglet az egész ACF alatti szeglettel egyenlőnek van megmutatva, melyekből a CBG alatti a BCF alattival egyenlő, tehát a maradék ABC, a maradék ACB-vel egyenlő, és ezek az ABC háromszeg talpánál vannak. Meg van mutatva az is, hogy az FBC alatti a GCB alattival egyenlő, ezek pedig a talp alatt vannak.

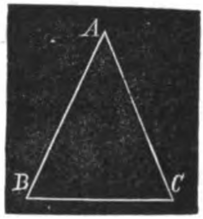


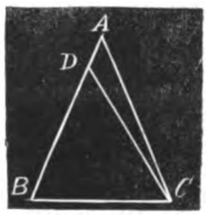
Tehát az egyenlő száru sat.

Tanúság. Tehát az egyenlő oldalu háromszegnek szegletei mind egyenlők egymással. (Simson Róbert.)

6. Feladat:

Ha egy háromszegnek két szeglete egymással egyenlő, az ezen szegleteket átfogó oldalak is egyenlők lesznek.





Legyen ABC az a háromszeg, melynek ABC alatti szeglete egyenlő ACB alatti szegletével; azt mondom, hogy AB oldal is egyenlő AC oldallal.

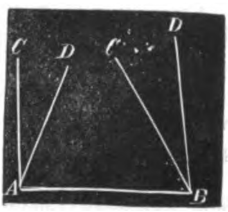
Mert ha AB, AC-vel nem egyenlő: egyikök nagyobb. Legyen nagyobb az AB, és vágassék el a nagyobbból AB-ből a kisebbel AC-vel egyenlő DB és vonassék DC.

Minthogy már DB, AC-vel egyenlő s BC közös, DB, BC két oldal kettővel AC, CB-vel különkülön egyenlők, s a DBC alatti szeglet az ABC alattival egyenlő, tehát DC talp is AB talppal egyenlő, és DBC háromszeg ACB háromszeggel egyenlő lesz, a kisebb a nagyobbal; a mi képtelen. Nem lehet tehát nem egyenlő AB, AC-vel; tehát egyenlő.

Ha tehát háromszegnek két sat.

7. Feladat:

Azon egy egyenen, két egyennel különkülön egyenlő, a két első egyennel ugyanazon végpontokból kiinduló két más egyen nem találkozhatik össze más-más pontokban.



Mert ha lehet, azon egy AB egyenen, AC, CB két egyennel különkülön egyenlő, az első egyenekkel ugyanazon A, B végpontokból kiinduló két más egyen AD, DB találkozzék össze ugyanazon oldalról, a hol a C, D vannak, más-más pontoknál a C-nél és D-nél, úgy, hogy CA az ugyanazon A végpontból kiinduló BA-val, és CB az ugyanazon B végpontból kiinduló DB-vel egyenlő legyen, és vonassék CD.

Minthogy AC AD-vel egyenlő, az ACD alatti szeglet is egyenlő az ADC alatti szeglettel; nagyobb tehát az ADC alatti a DCB alattinál, még sokkal nagyobb tehát a CDB alatti a DCB alattinál. Viszont mivel CB DB-vel egyenlő, a CDB alatti szeglet is egyenlő a DCB alattival. De meg van mutatva, hogy sokkal nagyobb, mi lehetlen.

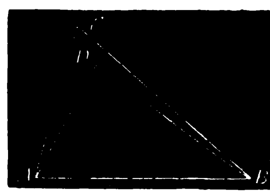
Nem találkozhatik össze tehát sat.

Jegyz. Ez a feladat kissé homályosan van kifejezve, miért némely kezdő nehezen érti; ezen segítendő, Simson R. következőleg változtatá:

Egy talpon, egy oldalról, nem lehet két különböző háromszeget állítni, melyeknek a talp két végeiből kiinduló oldalai egyenlők volnának.

Azaz : AB talpon, azon egy oldalról, nem lehet különböző ABC, ABD háromszegeket állítni, melyeknek a talp A és B végeiből kiinduló oldalai u. m. AC, AD-vel egyenlők lennének.

Mert ha ABC háromszegen kivül még létezhetnék más ettől különböző ABD háromszeg, ennek tetőpontja D az első háromszegen vagy kivül vagy belől esnék. Ha kivül esnék, az elébbi képlet szerint, ez az Euklidestől felvett esetet és képletet ábrázolná, mit nem szükség ismétlenünk. Ha pedig belől esnék, mint a 2-ik képletben, vonassék CD, és nyújtassék meg AC, E-ig, AD, F-ig.



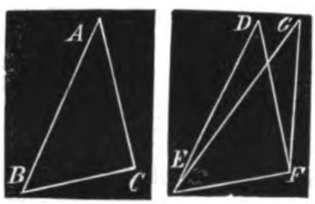
Mivel a feltét szerint, AC egyenlő AD-vel, az ECD alatti szeglet egyenlő az FDC alattival; de az ECD alatti nagyobb mint a BCD alatti, tehát az FDC alatti is nagyobb mint a BCD alatti, annál inkább a BDC alatti nagyobb, mint a BCD alatti. De mivel BC egyenlő BD-vel, a BDC alatti szeglet egyenlő a BCD alattival; már pedig megmutattaték, hogy nagyobb is, mi képtelen.

Hogy ez az eset és bebizonyítás különböznek az elsőtől, világos. De hogy Euclidesnél is valaha meg kellett lenni, kitetszik az 5-ik feladat második részéből, melyet az egész munkában sehol másutt nem használ.

8. Feladat:

Ha két háromszegben az egyiknek két oldala a másiknak két oldalával különkülön egyenlők, s az egyiknek talpa a másikéval egyenlő: úgy az egyenlő oldalok közé fogott szegletek is egyenlők lesznek.

Legyen ABC, DEF két háromszeg, melyekben AB, AC két oldal, DE, DF két oldallal különkülön egyenlők, AB, DE-vel, AC, DF-el, s legyen BC talp is egyenlő EF talppal; azt mondom, hogy BAC szeglet is egyenlő lesz EDF szeglettel.

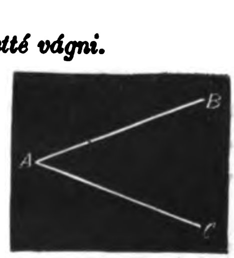


Mert ABC háromszeget DEF háromszegre illesztve, B pontot E pontra, s BC egyent EF egyenre téve, C pont is F-re fog esni, egyenlő levén BC, EF-el; de ha BC, EF-re reá illik, BA, AC is reá fognak illeni ED, DF-re. Mert ha BC talp EF talpra illik, BA, AC oldalok pedig nem illenének CD, DF oldalokra, hanem más irányt vennének, mint EG, GF, úgy azonegy egyenen két egyennel különkülön egyenlő ugyanazon végpontokból kiinduló két más egyen más meg más pontnál találkoznék össze ugyanazon oldalról. De nem találkozhatnak; nem lehet tehát, hogy BC talp EF talpra illvén, BA, AC oldalok ne illjenek ED, DF oldalakra. Tehát egymásra illenek; miszerint a BAC alatti szeglet is reá illik az EDF alatti szegletre s egyenlő lesz vele.

Ha tehát két háromszegben sat.

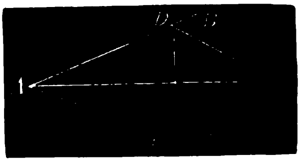
9. Feladat:

Adott egyenes vonalu szegletet ketté vágni.



Legyen az adott egyenes vonalu szeglet a BAC alatti: ezt ketté kell vágni.

Vétessék AB-én akármely D pont, vágassék le AC-ből AD-vel egyenlő AE, s vonassék DE; állíttassék DE-re DEF egyenlő oldalu háromszeg, és vonassék AF: azt mondom, hogy a BAC alatti szegletet AF egyen ketté vágta.



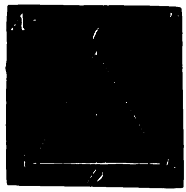
Mivel *AD* egyenlő *AE*-vel, *AF* pedig közös, *DA*, *AF* két oldal *EA*, *AF* két oldallal különkülön egyenlők, s *DF* talp is egyenlő *EF* talppal: tehát a *DAF* alatti szeglet egyenlő az *FAE* alatti szeglettel.

Az adott *BAC* alatti szegletet tehát *AF* egyen kettévágta, mit tenni kelle.

Jegyz. A kettévágás, mint a görög: „διχα τεμνειν", és a latin: „bissecare" két egyenlő részre osztást teszen.

10. Feladat:

Adott határzott egyent ketté vágni.



Legyen az adott határzott egyen *AB*, ezen határzott *AB* egyent ketté kell vágni.

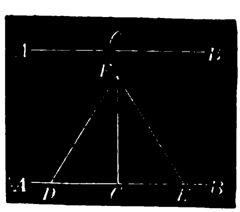
Állíttassék reá *ABC* egyenlő-oldalu háromszeg, és az *ACB* alatti szeglet vágassék ketté *CD* egyennel; azt mondom, hogy *AB* egyen ketté vágatott *D* pontnál.

Mert minthogy *AC* egyenlő *CB*-vel, *CD* pedig közös, *AC*, *CD* két oldal különkülön egyenlő kettővel *CB*, *CD*-vel, és az *ACD* alatti szeglet egyenlő a *BCD* alatti szeglettel; tehát *AD* talp egyenlő *DB* talppal.

Az adott határzott *AB* egyen tehát sat.

11. Feladat:

Egy adott egyenhez egy benne adott pontból derékszegletre egyenes vonalt vonni.



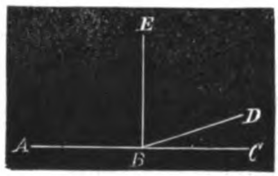
Legyen az adott egyen *AB*, a benne adott pont *C*; ezen *C* pontból kell *AB* egyenhez derék szegletre egyenes vonalt vonni.

Vétessék az *AC*-én akármely *D* pont, tétessék *CE* egyenlővé *CD*-vel, és állíttassék *DE*-re *FDE* egyenlőoldalu háromszeg, és vonassék *FC*: azt mondom, hogy az adott *AB* egyenhez a benne adott C pontból derékszegletre van húzva FC egyenes vonal.

Mert mivel CD egyenlő CE-vel, és CF közös, DC, CF két egyen különkülön egyenlő EC, CF két egyennel, DF talp is egyenlő EF talppal; tehát a DCF alatti szeglet az ECF alattival egyenlők és szomszédok. Midőn pedig egy egyen más egyenre állítva a szomszéd szegleteket egymással egyenlőkké teszi, mindenik egyenlő szeglet derék; tehát DCF és FCE mindenik derékszeglet.

Az adott AB egyenhez tehát sat.

Tanúság. Innen be lehet bizonyítni, hogy *két külön egyennek nem lehet közös darabja.*



Mert legyen, ha lehet, ABD, ABC egyeneknek közös darabjok AB, és állíttassék B pontból AB-hez derékszegletre BE egyen.

Már mivel ABC egyenes vonal, CBE egyenlő EBA-val. Ismét mivel ABD egyenes vonal, DBE egyenlő EBA-val, tehát DBE egyenlő CBE-vel, kisebb a nagyobbal, mi képtelen.

Nem lehet tehát két külön egyennek közös darabjok; m. b. k.

12. Feladat:

Adott határzatlan egyenre adott pontból, mely nincsen benne, függő egyenes vonalt húzni.

Legyen az adott határzatlan egyen AB, az adott pont pedig mely nincs benne, C; ezen adott határzatlan AB egyenre, az adott C pontból, mely nincs benne, függő egyenes vonalt kell húzni.

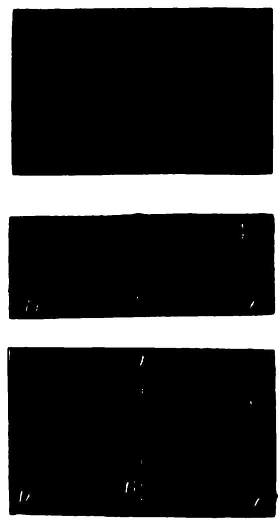
AB egyenen túl vétessék akármely D pont, s C középponttal, CD közzel írassék EFG kör, EG egyen vágassék ketté H-nál, és vonassanak CG CH CE egyenek : azt mondom, hogy az adott határzatlan AB egyenre az adott C pontból, mely nincsen benne, CH függő van húzva.

Mert minthogy *GH*, *HE*-vel egyenlő, *HC* pedig közös, *GH*, *HC* két egyen, *EH*, *HC* két egyennel különkülön egyenlők, s *CG* talp *CE* talppal egyenlő; tehát *GHC* szeglet egyenlő *EHC* szeglettel, és szomszédok. Mikor pedig egy egyen, más egyenre állítva, a szomszéd szegleteket egymással egyenlőkké teszi: az egyenlő szegletek mindenike derékszeglet, és az állított vonal függőnek mondatik arra, a melyikre állítva van.

Tehát adott határzatlan egyenre sat.

13. Feladat:

Midőn egyen egyenen állva szegleteket alkot: vagy két derékszegletet vagy két derékkel egyenlőket alakít.



Ugyanis *AB* egyen *CD* egyenen állva alkossa *CBA* *ABD* szegleteket; azt mondom, hogy *CBA* *ABD* szegletek vagy derékek, vagy két derékkel egyenlők.

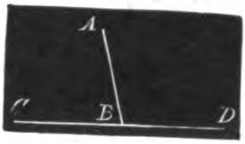
Mert ha a *CBA* alatti szeglet egyenlő az *ABD* alattival, úgy ezek két derékek. Ha pedig nem, huzassék *B* ponttól, *CD* egyenhez derékszeglетre *BE*; tehát a *CBE* *EBD* alattiak két derékek; és minthogy a *CBE* alatti a *CBA* *ABE* alatti két szeglettel egyenlő, tegyük hozzá mindenikhez a közös *EBD* alattit; tehát a *CBE* *EBD* alattiak egyenlők a *CBA* *ABE* *EBD* alatti három szeglettel. Viszont mivel a *DBA* alatti a *DBE* *EBA* alatti kettővel egyenlő, adjuk mindenikhez a közös *ABC* alattit, tehát a *DBA* *ABC* alatti szegletek a *DBE* *EBA* *ABC* alatti hárommal egyenlők. De meg van mutatva, hogy a *CBE*, *EBD* alattiak is egyenlők: már pedig azon egygyel egyenlők egymással is egyenlők; tehát a *CBE* *EBD* alattiak egyenlők a *DBA*, *ABC* alattiakkal; de a *CBE*, *EBD* alattiak, két derékek, és így a *DBA* *ABC* alattiak két derékkel egyenlők.

Midőn tehát egyen egyenen sat.

14. Feladat:

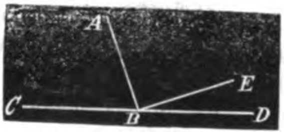
Ha egy egyenen egy benne levő pontnál nem azonegy oldalról álló két egyen a szomszéd szegleteket két derékkel egyenlővé teszi, egyenesben lesz egymással a két egyen.

Ugyanis AB egyenen egy benne levő B pontnál nem egy oldalról álló két egyen BC, BD tegye a szomszéd szegleteket, az ABC, ABD alattiakat, két derékkel egyenlőkké; azt mondom, hogy BD, CB-vel egyenesben fekszik.



Mert ha BC-vel nincs egyenesben BD, legyen egyenesben CB-vel BE.

Minthogy AB | egyen CBE egyenen áll, ABC, ABE szegletek két derékkel egyenlők; de az ABC, ABD alattiak is egyenlök két derékkel; tehát a CBA, ABD alattiak egyenlők a CBA, ABE alattiakkal. Vétessék el a közös ABC alatti, tehát az ABE alatti maradék az ABD alatti maradékkal egyenlő, a kisebb a nagyobbal, mi lehetlen. Nincs egyenesben tehát BE, BC-vel. Hasonlókép bizonyítjuk, hogy más sincs egy is BD-én kivül. Egyenesben van tehát CB, BD-vel.

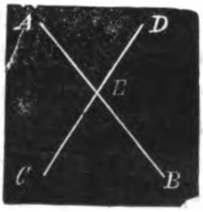


Ha tehát egy egyenre sat.

15. Feladat:

Ha két egyen vágja egymást, a két hegygyel állo szegletet egymással egyenlővé teszi.

AB, CD két egyen vágja egymást E pontnál; azt mondom, hogy az AEC alatti szeglet egyenlö a DEB alattival, s a CEB alatti az AED alattival.



Mert mivel AE egyen CD egyenen a CEA, AED alatti szegleteket alkotva, áll; tehát a CEA, AED alatti szegletek két derékkel egyenlők. Viszont mivel DE egyen AB egyenen, AED, DEB szegleteket alkotva, áll; tehát az AED, DEB alatti szegletek két derékkel egyenlők. De meg van mutatva, hogy CEA, AED is két derékkel egyenlők, tehát a CEA, AED alattiak, az AED, DEB alattiakkal egyenlők. Vétessék el a közös AED, tehát a maradék CEA alatti a maradék DEB alattival egyenlő. Hasonlókép mutattatik meg, hogy a CEB, AED alattiak is egyenlők.

Ha tehát két egyen sat.

Tanúság. Ezekből világos, hogy ha két egyen vágja egymást, a négy szegletet négy derékkel egyenlővé teszi.

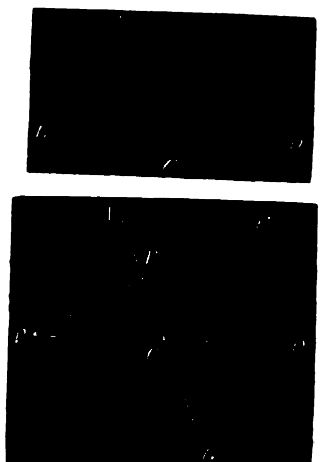
(S ha kettőnél több egyen vágja egymást egy pontban, u. m. három, vagy négy, vagy akárhány, meg van mutatva, hogy a származott szegletek öszvesen négy derékkel egyenlők.)

Jegyzet. A rekeszben tett második tanúság némely kéziratokban nincs meg. Gregory felvette, Peyrard nem. Simson Rob. még egy harmadikkal is toldja, t. i.

„Azon egy pontból kiindúló akárhány vonal összesen négy derékszegletet alakít."

16. Feladat:

Minden háromszegnek ha egy oldala megnyújtatik, a külső szeglet az átelleni belsők akármelyikénél nagyobb.



Legyen ABC háromszeg, s nyújtassék meg ennek egyik oldala BC, D-ig: azt mondom, hogy az ACD alatti külső szeglet nagyobb, mint a CBA, BAC alatti átelleni belső szegleteknek akármelyike.

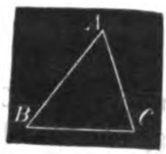
Vágassék ketté AC, E-nél, és BE vonal húzatván, nyújtassék meg F-ig, s EF tétessék egyenlővé BE-vel, vonassék FC, és nyújtassék meg AC, G-ig.

Minthogy AE, EC-vel egyenlő, BE pedig EF-el, AE, BE két egyen EC, EF kettővel külön-külön egyenlők, és az AEB alatti szeglet egyenlő az FEC alattival, mert hegygyel állók; tehát AB talp CF talppal egyenlő, s AEB háromszeg egyenlő FEC háromszeggel, s a többi szegletek is, melyeket egyenlő oldalak fognak át, egymással külön-külön egyenlők; tehát a BAE alatti egyenlő az ECF alattival. De az ECD alatti nagyobb az ECF alattinál, nagyobb tehát az ACD alatti a BAE alattinál. Ha a BC oldalt vágjuk ketté, hasonlólag megmutatjuk, hogy a BCG, azaz: az ACD alatti az ABC alattinál is nagyobb.

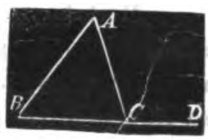
Minden háromszegnek tehát sat.

17. Feladat:

Minden háromszegnek két szeglete, akárhogy is véve, kisebb két deréknél.



Legyen ABC háromszeg; azt mondom, hogy az ABC háromszegnek két szeglete, akárhogy is véve, kisebb két deréknél.

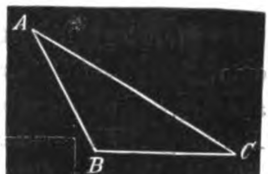


Nyújtassék meg BC, D-ig. Minthogy az ACD alatti szeglet ABC háromszegnek külső szeglete, nagyobb az átelleni belsőnél, az ABC alattinál. Adjuk hozzájok a közös ACB alattit; tehát az ACD, ACB alattiak nagyobbak ABC, ACB alattiaknál. De az ACD, ACB alattiak két derékkel egyenlők, tehát az ABC, ACB alattiak kisebbek két deréknél. Hasonlóképp mutatjuk meg: hogy a BAC, ACB alattiak is kisebbek két deréknél; nemkülönben a CAB, ABC alattiak is.

Minden háromszegnek tehát sat.

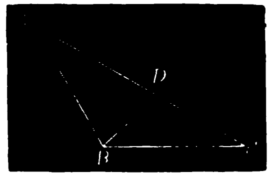
18. Feladat:

Minden háromszegben a nagyobb oldal a nagyobb szegletet fogja át.



Legyen ABC háromszeg, melynek AC oldala nagyobb, mint AB: azt mondom, hogy az ABC alatti szeglet is nagyobb a BCA alattinál.

Mert mivel AC nagyobb AB-nél, vétessék AB-vel egyenlő AD, s vonassék BD.



Minthogy BDC háromszegnek külső szeglete az ADB alatti, ez nagyobb az átelleni belsőnél, a DCB alattinál; de az ADB alatti egyenlő az ABD alattival, mivel AB oldal is egyenlő AD-vel; nagyobb tehát az ABD alatti is az ACB alattinál; még nagyobb tehát az ABC alatti az ACB alattinál.

Tehát minden sat.

19. Feladat:

Minden háromszegben a nagyobb szegletet a nagyobb oldal fogja át.

Legyen ABC háromszeg, melynek ABC alatti szeglete nagyobb a BCA alattinál: azt mondom, hogy AC oldal is nagyobb AB-nél.

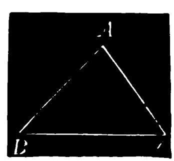
Mert ha nem, úgy AC, AB-vel vagy egyenlő vagy kisebb nálánál: egyenlő AC, AB-vel nem lehet, mert úgy az ABC alatti szeglet is egyenlő volna az ACB alattival, de nem egyenlő, tehát AC nem egyenlő AB-vel. De AC nem is kisebb AB-nél; mert úgy az ABC alatti szeglet is kisebb volna az ACB alattinál; már pedig nem kisebb; tehát AC nem is kisebb AB-nél. De megmutattaték, hogy nem is egyenlő, tehát AC nagyobb AB-nél.

Minden háromszegben tehát sat.

20. Feladat:

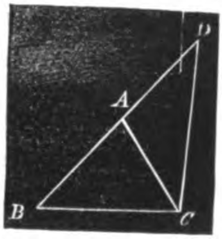
Minden háromszegnek két oldala, akárhogy véve, nagyobb a harmadiknál.

Mert legyen ABC háromszeg: azt mondom, hogy ABC háromszegnek két oldala akárhogy véve nagyobb a harmadiknál, azaz: BA meg AC nagyobb BC-nél, AB meg BC, AC-nél, BC meg CA, AB-nél.



Mert nyújtassék *BA D* pontig, tétessék *AD* egyenlővé *CA*-val, s vonassék *DC*.

Minthogy *DA*, *AC*-vel egyenlő, az *ADC* alatti szeglet egyenlő az *ACD* alattival; de a *BCD* alatti szeglet nagyobb az *ACD* alattinál; tehát a *BCD* alatti nagyobb az *ADC* alattinál : és minthogy *DCB* háromszegnek *BCD* alatti szeglete nagyobb a *BDC* alattinál, a nagyobbik szegletet pedig a nagyobbik oldal fogja át, tehát *DB* vonal nagyobb *BC*-nél. Úgy de *DB* vonal *BA* meg *AC*-vel egyenlő; tehát *BA* meg *AC* nagyobb *BC*-nél. Hasonlókép mutatjuk meg: hogy *AB*, *BC* is nagyobbak *CA*-nál, és *BC*, *CA*, *AB*-nél.

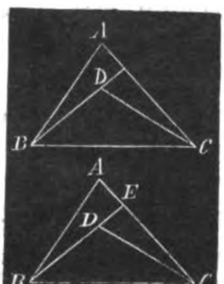


Minden háromszegnek tehát sat.

21. Feladat:

Ha a háromszeg egyik oldalának két végpontjára állított két egyen a háromszegen belöl találkozik, ezek az összeállított egyenek a háromszeg más két oldalánál kisebbek lesznek, de nagyobb szegletet foglalnak be.

Ugyanis *ABC* háromszeg egyik *BC* oldalának *B*, *C*, végpontjaira állított két egyen *BD*, *DC* találkozzanak belöl a háromszegen : azt mondom, hogy *BD*, *DC* a háromszeg más két oldalánál *BA*, *AC*-nél kisebbek, de a *BDC* alatti szeglet, melyet befoglalnak, nagyobb a *BAC* alattinál.



Mert nyújtassék *BD*, *E*-ig.

Már minthogy minden háromszegnek két oldala nagyobb a harmadiknál, tehát *ABE* háromszegnek *AB*, *AE* két oldala is nagyobb *BE*-nél; adassék hozzájok a közös *EC*; *BA* meg *AC* e szerint nagyobb *BE* meg *EC*-nél. Viszont, mivel *CED* háromszegnek két oldala *CE* *ED*, *CD*-nél nagyobb, adjuk hozzájok a közös *DB*-t; tehát

CE, EB nagyobbak *CD, DB*-nél. De megmutattaték, hogy *BE, EC*-nél, *BA, AC* nagyobbak, még annál inkább nagyobbak tehát *BA AC, BD DC*-nél.

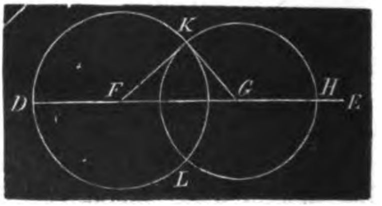
Ismét minthogy minden háromszegnek külső szeglete nagyobb az átelleni belsőnél; *CDE* háromszegnek *BDC* alatti külső szeglete nagyobb a *CED* alattinál. Ugyan azért *ABE* háromszegnek is *CEB* alatti külső szeglete nagyobb a *BAC* alattinál. De megmutattaték, hogy a *BDC* alatti nagyobb a *CEB* alattinál; még annál nagyobb tehát a *BDC* alatti a *BAC* alattinál.

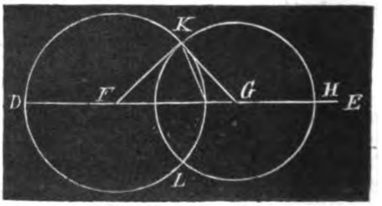
Ha tehát a háromszeg egyik sat.

22. Feladat:

Három egyenből, melyek három adott egyennel egyenlők legyenek, háromszeget állítni össze; de kettőnek, akárhogy véve, a harmadiknál nagyobbnak kell lenni.

Legyen a három adott egyen *A, B, C,* melyeknek ketteje, akárhogy véve, nagyobbak a harmadiknál, u. m. *A* és *B*, *C*-nél, *A* és *C*, *B*-nél, *C* és *B*, *A*-nál: már *A, B, C*-vel egyenlőkből kell háromszeget összeállítani.





Vonassék *D*-nél határzott, *E*-nél pedig határzatlan végű *DE* egyen, és tétessék *DF*, *A*-val egyenlővé, *FG*, *B*-vel, és *GH*, *C*-vel egyenlővé; aztán *F* középponttal *FD* közzel irassék *DKL* kör; ismét *G* középponttal *GH* közzel irassék *KLH* kör; vágják a körök egymást *K*-nál, és vonassanak *KF*, *KG*: azt mondom, hogy *A*-val, *B*-vel, *C*-vel egyenlő három egyenből *KFG* háromszeg állíttatott össze.

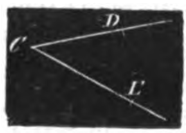
Mert mivel *F* pont, *DKL* kör középpontja; *FD* egyenlő *FK*-val; de *FD*, *A*-val egyenlő, tehát *KF* is egyenlő *A*-val. Ismét mivel *G* pont, *LKH* kör középpontja; *GH* egyenlő *GK*-val; de *GH*, *C*-vel egyenlő; tehát *GK* egyenlő *C*-vel; *FG* is pedig egyenlő *B*-vel; tehát a három egyen *KF*, *FG*, *GK*, *A*-val, *B*-vel, *C*-vel egyenlők.

Három egyenből tehát *KF*-ből, *FG*-ből, *GK*-ból, melyek 3 adott egyennel *A*-val, *B*-vel, *C*-vel egyenlők, *KFG* háromszeg állíttatott össze; m. t. k.

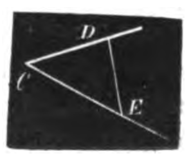
Jegyz. A készületben ezek a szók: „és vágják a körök egymást *K*-nál“ Proclusból pótoltattak ki, mivel szerzőnk kézirataiból, a leírók hanyagsága miatt kimaradt. Proclus azt is igyekszik megmutatni, hogy vágniok kell a köröknek egymást; mit az olvasó maga is megtehet a feladatnak abból a feltételéből, hogy az adott vonalok minden ketteje nagyobb (azaz hosszabb) legyen a harmadiknál.

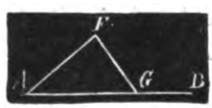
23. Feladat:

Adott egyenre, abban adott ponthoz, adott egyenes vonalu szeglettel egyenlő egyenes-vonalu szegletet állítni.



Legyen az adott egyen *AB*, s abban való pont *A*, az adott egyenes vonalu szeglet a *DCE* alatti: az adott *AB* egyenre, az abban levő *A* ponthoz, kell az adott *DCE* alatti szeglettel egyenlő szegletet állítani.





Vétessenek mind a *CD*-én mind *CE*-n akármely *D*, *E* pontok, és vonassék *DE*: és *CD*, *DE*, *CE*-vel egyenlő három egyenből állíttassék össze *AFG* háromszeg, úgy hogy *CD*, *AF*-el, *EC*, *AG*-vel és *DE*, *FG*-vel legyen egyenlő.

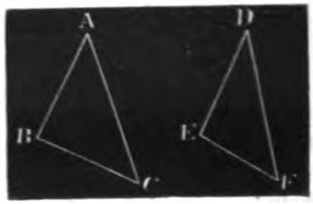
Minthogy a *DC*, *CE* két egyen külön-külön egyenlő *FA*, *AG* két egyennel, s *DE* talp egyenlő *FG* talppal; tehát a *DCE* alatti szeglet egyenlő az *FAG* alatti szeglettel.

Tehát az adott *AB* egyenre sat.

24. Feladat:

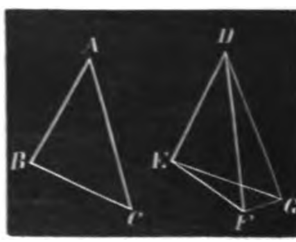
Ha két háromszegben egyiknek két oldala külön-külön egyenlö a másiknak két oldalával, de az egyenlö oldalak közé foglalt szeglete nagyobb a másikénál; a talpa is nagyobb lesz a másikénál.

Legyen a két háromszeg *ABC*, *DEF*, melyekben egyiknek *AB*, *AC* oldalai a másiknak *DE*, *DF* oldalaival különkülön egyenlők, u. m. *AB*, *DE*-vel, *AC*, *DF*-el, a *BAC* alatti szeglet pedig nagyobb legyen az *EDF* alattinál: azt mondom, hogy *BC* talp is nagyobb *EF* talpnál.



Mert mivel a *BAC* alatti szeglet nagyobb az *EDF* alattinál, állíttassék *DE* egyenre az abban lévö *D* ponthoz a *BAC* alatti szeglettel egyenlö *EDG* szeglet, tétessék *DG* akár *AC*-vel, akár *DF*-el egyenlövé, és vonassanak *EG*, *FG*.

Minthogy *AB* *DE*-vel, *AC* pedig *DG*-vel egyenlők, *BA* *AC* két egyen, *ED* *DG* két egyennel külön-külön egyenlők, a *BAC* alatti szeglet is egyenlö az *EDG* alattival, tehát *BC* talp egyenlö *EG* talppal. Ismét mivel *DG* egyenlö *DF*-el, a *DFG* alatti szeglet is egyenlö a *DGF* alattival; nagyobb tehát a *DFG* alatti az *EGF* alattinál, még annál nagyobb tehát az *EFG* alatti az *EGF* alattinál. És minthogy *EFG* háromszegben az *EFG* alatti szeglet nagyobb az *EGF* alattinál, a nagyobb szegletet pedig nagyobb oldal fogja át, tehát *EG* oldal is nagyobb *EF* oldalnál. De *EG* egyenlö *BC*-vel, tehát *BC* is nagyobb *EF*-nél.

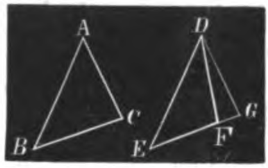


Ha tehát két háromszegben sat.

Jegyz. Ha ennek a feladatnak bebizonyításában különbözö esetekre nem akarunk bukkanni, melyek különbözö megmutatást kivánnának, a készületben kivánt szegletet mindig arról az oldalról alkalmazzuk, mely felöl a hosszabb oldal van. Ez a három eset a következö:

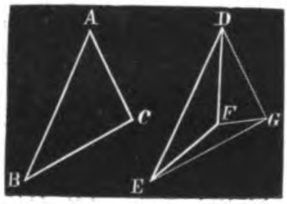
a.) Midőn *EG*, (mely egyenlö *BC*-vel) *EF* felibe esik; ez a mi fennebbi képletünk.

b.) Midőn *EG*, (mely egyenlő *BC*-vel) *EF*-re esik, mint az idemellékelt képletben.



Itt világos, hogy *EG* nagyobb *EF*-nél.

c.) Midőn *EG*, (mely egyenlö *BC*-vel) *EF* alá esik, mint az ide mellékelt képletben.

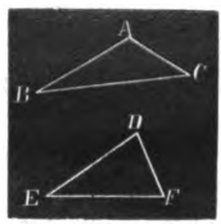


E szerént *EG*, *GD* együtt nagyobb, mint *DF*, *FE* együtt; de *DF* egyenlö *DG*-vel, s ha mindkettöt amazokból kiveszszük, a maradék *EG* nagyobb *EF*-nél.

25. Feladat:

Ha két háromszegben egyiknek két oldala a másiknak két oldalával külön-külön egyenlő, de a talpa nagyobb a másikénál; az egyenlö oldalak közé foglalt szeglete is nagyobb lesz.

Legyen két háromszeg *ABC*, *DEF*, melyekben az egyiknek *AB*, *AC* két oldala, a másiknak *DE*, *DF* két oldalával külön-külön u. m. *AB*, *DE*-vel, *AC*, *DF*-el egyenlő, *BC* talp pedig nagyobb legyen *EF* talpnál; azt mondom, hogy a *BAC* alatti szeglet is nagyobb az *EDF* alattinál.



Mert ha nem, vagy egyenlö azzal, vagy kisebb. Egyenlö nem, mert úgy *BC* talp is egyenlö lenne *EF* talppal, már pedig nem egyenlö. De kisebb sem, mert úgy *BC* talp is kisebb lenne *EF* talpnál, már pedig nem kisebb; tehát a *BAC* alatti szeglet nem kisebb az *EDF* alattinál. De megmutattaték az is, hogy nem egyenlö; tehát nagyobb a *BAC* szeglet az *EDF* alattinál.

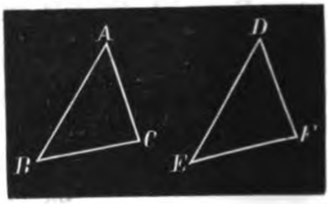
Ha tehát két háromszegben sat.

26. Feladat:

Ha két háromszegben két szeglet két szeglettel külön-külön egyenlö, s még egy oldal is, akár a két szeglet közötti, akár az egyenlö szegletek valamelyikét átfogó, egyenlö; úgy a többi oldal is kü-

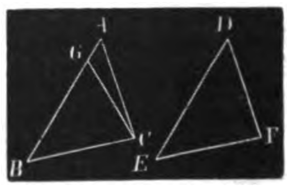
lön-külön egyenlő lesz a többi oldallal, s a harmadik szeglet egyenlő a harmadik szeglettel.

Mert legyen *ABC, DEF* két háromszegben az *ABC, BCA* alatti két szeglet a *DEF, EFD* alatti két szeglettel külön-külön egyenlő, u. m. az *ABC* alatti a *DEF* alattival, és a *BCA* alatti az *EFD* alattival; legyen egy oldal is egyenlő egy oldallal, u. m. előbb is a két szeglet közötti *BC, EF*-el: azt mondom, hogy a többi oldal is külön-külön egyenlő lesz a többi oldallal, u. m. *AB, DE*-vel, *AC, DF*-el, s a harmadik szeglet a harmadik szeglettel, a *BAC* alatti az *EDF* alattival.



Mert ha nem egyenlő *AB DE*-vel, egyik közülök nagyobb. Legyen nagyobb *AB*, s választassék el tőle *DE*-vel egyenlő *BG*, és vonassék *GC*.

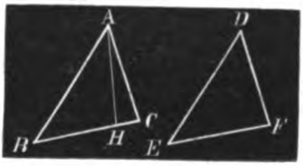
Minthogy már *BG* egyenlő *DE*-vel, és *BC, EF*-el, *BG, BC* két oldal, *DE, EF* két oldallal különkülön egyenlők, s a *GBC* alatti szeglet egyenlő a *DEF* alattival; tehát *GC* talp is egyenlő *DF* talppal, *GBC* háromszeg egyenlő lesz *DEF* háromszeggel, s az egyenlő oldaloktól átfogott többi szegletek a többi szegletekkel egyenlők; tehát *GCB* szeglet *DFE* szeglettel egyenlő. De a *DFE* alattit a *BCA* alattival egyenlőnek vettük fel: tehát a *BCG* alatti egyenlő a *BCA* alattival, a kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. Nem nemegyenlő tehát *AB, DE*-vel, tehát egyenlő. De *BC* is egyenlő *EF*-el, tehát *AB, BC* két oldal *DE, EF* kettővel külön-külön egyenlő, s az *ABC* alatti szeglet egyenlő a *DEF* alattival; tehát *AC* talp egyenlő *DF* talppal, s a harmadik szeglet, a *BAC* alatti, egyenlő a harmadik szeglettel az *EDF* alattival.



De viszont legyenek az egyenlő szegletet átfogó oldalak egyenlők, mint például *AB DE*-vel. Ismét azt mondom, hogy a többi oldalak a többi oldalakkal egyenlők lesznek,

u. m. AC DF-el, BC EF-el, és a BAC alatti harmadik szeglet egyenlő lesz az EDF alatti harmadik szeglettel.

Mert ha nem egyenlő BC EF-el, egyikök nagyobb. Legyen nagyobb, ha lehet, a BC, választassék el belőle EF-el egyenlő BH s vonassék AH.

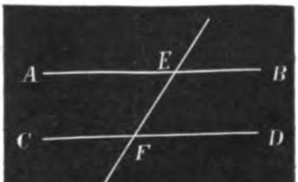


Minthogy BH egyenlő EF-el, AB pedig DE-vel, AB, BH két oldal külön-külön egyenlők DE, EF két oldallal, s egyenlő szegleteket fognak be: tehát AH talp egyenlő DF talppal, és ABH háromszeg egyenlő lesz DEF háromszeggel, s az egyenlő oldaloktól átfogott szegletek egyenlők lesznek a többi hasonló szegletekkel; tehát a BHA alatti szeglet egyenlő lesz az EFD alatti szeglettel. De az EFD alatti egyenlő a BCA alattival; tehát a BHA alatti is egyenlő a BCA alattival, az AHC háromszegnek BHA alatti külső szeglete egyenlő a belső átelleni BCA alattival, mi lehetetlen. Nem nemegyenlő tehát BC, EF-el, tehát egyenlő. De AB is egyenlő DE-vel, e szerint AB, BC két oldal DE, EF két oldallal külön-külön egyenlő, s egyenlő szegleteket fognak be, tehát AC talp egyenlő DF talppal, ABC háromszeg egyenlő DEF háromszeggel, s a BAC alatti harmadik szeglet egyenlő az EDF alatti harmadik szeglettel.

Ha tehát két háromszegben sat.

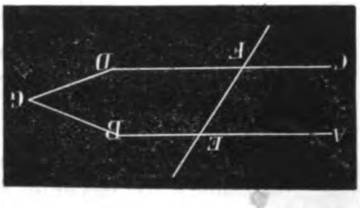
27. Feladat:

Ha két egyent vágó egyen a váltó szegleteket egymással egyenlőkké teszi, a két egyen egymáshoz egyközű lesz.



AB, CD két egyént vágó EF egyen az AEF, EFD alatti váltószegleteket tegye egyenlőkké; azt mondom, hogy AB, CD-hez egyközű.

Mert ha nem, AB, CD megnyújtatván, egybeérendenek vagy B, D felől, vagy A, C felől. Nyújtassanak meg és érjenek össze B, D felől G-nél. E szerint



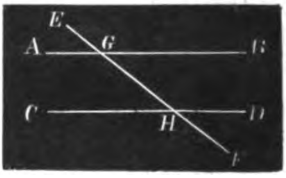
EFG háromszegnek *AEF* alatti külső szeglete egyenlő leend az *EFG* alatti átelleni belsővel, mi lehetetlen; tehát *ABCD* kinyújtva nem fognak összeérni *B, D* felől. Hasonlóképp mutattatik meg, hogy *A, C* felől sem; az oly egyenek pedig, melyek egyfelől sem érnek össze, egyközüek, tehát *AB CD*-hez egyenközü.

Ha tehát két egyent vágó sat.

Jegyz. Az olvasó meg ne ütközzék azon, hogy ehez a feladathoz mellékelt képletben a két vonal nem egyenesen, hanem megtörve hajlik és találkozik össze. Mert ez valóban egy magában lehetetlen környület képletesítése, mit csak úgy kell érteni, hogy ha *AB, CD* nem egyközüek, valahol egy *G* pontnál összetalálkozandanak; de mivel ennek az összetalálkozásnak épen lehetetlenségét akarjuk bebizonyítni, azt ábrázolni sem képes. Lehetne ugyan a szemet megcsalni, ha a képletet jelen magasságában hagyva, a *G* pontot vagy 100 ölnyire távolíthatnók; de így is, mint mondók, csak a szem s nem az értelem lenne rászedve, s a bebizonyítás ereje merőben állana. — Más minden oly bebizonyításokban is, melyek az állítás ellenéből indúlnak ki, szintoly lehetetlen a rosz feltételt szabatosan képletesítni, p. o. a 7-ik feladatnál, akármit csináljunk, az *AB* a *DB*-vel soha sem egyenlő, sem a 14-dik képletben a *CBE* vonal egyen nem leend. Ily esetekben a rajz mindig hamis, és csupán a képzelődés segítésére vázoltatik.

28. Feladat:

Ha két egyent vágó egyen a külső szegletet a belső átellenivel s azonegy oldalról fekvővel egyenlővé, vagy a belső azonegy oldalról fekvőket két derékszeglettel egyenlőkké teszi, a két egyen egymáshoz egyközü leend.



AB, CD egyeneket vágó *EF* egyen tegye az *EGB* alatti külső szegletet a belső átelleni és azon oldalról fekvő *GHD* alattival egyenlővé, vagy a *BGH, GHD* alatti belsőket és azonegy oldalról fekvőket két derékkel egyenlővé: azt mondom, hogy *AB, CD*-hez egyközü.

Mert mivel az EGB alatti szeglet egyenlö a GHD alattival, és az EGB alatti egyenlö az AGH alattival, tehát az AGH alatti is egyenlö a GHD alattival; ezek pedig váltó szegletek; tehát AB egyközü CD-hez.

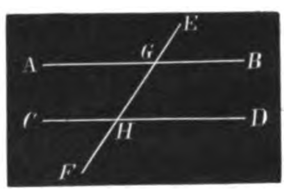
Ismét minthogy a BGH, GHD alattiak két derékkel egyenlök, de az AGH, BGH alattiak is egyenlök két derékkel; tehát a BGH, GHD alattiak az AGH, BGH alattiakkal egyenlök: vétessék el a közös BGH alatti; tehát a maradék AGH alatti egyenlö leend a maradék GHD alattival; ezek pedig váltó szegletek, tehát AB, CD-hez egyközü.

Ha tehát két egyent sat.

29. Feladat:

Az egyközü egyeneket vágó egyen a váltó szegleteket egymással egyenlökké, s a külsöt a belsö átellenivel és azonegy oldalról fekvövel egyenlövé, s a belsö egy oldalról fekvöket két derékkel egyenlökké teszi.

Vágja AB, CD egyközü egyeneket EF egyen: azt mondom, hogy az AGH, GHD alatti váltó szegleteket egyenlökké, az EGB alatti külsö szegletet a belsö, átelleni és azonegy oldalon fekvö GHD alattival egyenlövé, és a belsö azonegy felöl fekvö BGH, GHD alattiakat két derékkel egyenlökké teszi.



Mert ha az AGH alatti nem egyenlö a GHD alattival, egyik közülök nagyobb. Legyen nagyobb az AGH alatti, és mivel az AGH alatti nagyobb a GHD alattinál, adjuk hozzájok a közös BGH alattit; tehát az AGH, BGH alattiak, a BGH, GHD alattiaknál nagyobbak. De az AGH, BGH alattiak két derékkel egyenlök, tehát a BGH, GHD alattiak két deréknél kisebbek. Már pedig két derék szegletnél kisebbekböl kiinduló határzatlanúl nyújtott egyenek összeérendenek; tehát AB, CD határzatlanúl megnyújtva összeérnének; de nem érnek össze, mivel egyközüek; nem nemegyenlö tehát az AGH alatti a GHD alattival; tehát egyenlö.

De az AGH alatti egyenlö az EGB alattival, tehát az EGB alatti egyenlö a GHD alattival.

Adjuk hozzájok a közös BGH alattit; tehát az EGB, BGH alattiak a BGH, GHD alattiakkal egyenlök.

De az EGB, BGH alattiak két derékkel egyenlők; a BGH, GHD alattiak is tehát két derékkel egyenlők.

Tehát az egyközü sat.

30. Feladat:

Ugyanazon egyenhez egyközüek egymáshoz is egyenközüek.

Legyen AB, CD, mindenik, EF-hez egyközü; azt mondom, hogy AB is CD-hez egyközü.

Mert vágja öket KG egyen.

Már minthogy GK egyen, AB, EF egyközü egyeneket vágja, az AGH alatti szeglet egyenlö a GHF alattival. Ismét mivel GK egyen, EF, CD egyközü egyeneket vágja, a GHF alatti egyenlö a HKD alattival. De megmutattaték, hogy az AGH alatti egyenlö a GHF alattival; tehát az AGK alatti a GKD alattival is egyenlö; ezek pedig váltó szegletek; tehát AB, CD-hez egyközü.

Tehát ugyanazon egyenhez sat.

31. Feladat:

Adott ponton át egy adott egyenhez egyközü egyenes vonalt húzni.

Legyen az adott pont A, az adott egyen BC: A ponton át kell BC egyenhez egyközü egyenes vonalt húzni.

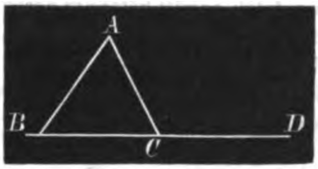
Vétessék BC-én akármely D pont, és vonassék AD; állíttassék DA egyenre a benne levö A ponthoz az ADC alatti szeglettel egyenlö DAE alatti, és nyújtassék EA-val egyenesben AF egyen.

Minthogy BC, EF két egyent vágó AD által az EAD, *ADC* alatti váltó szegletek egyenlőkké tévék; tehát *EF*, *BC*-hez egyközü.

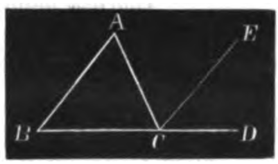
Tehát adott *A* ponton át sat.

32. Feladat:

Minden háromszegnek ha egyik oldala kinyújtatik, a külső szeglet az átelleni belső kettővel egyenlő, s a háromszegen belöli három belső szeglet két derékkel egyenlő.



Legyen *ABC* háromszeg, s nyújtassék ki ennek egyik *BC* oldala *D*-ig: azt mondom, hogy az *ACD* alatti külső szeglet egyenlő az átelleni belső kettővel a *CAB*, *ABC* alattiakkal és a háromszegen belöli három szeglet, az *ABC*, *BCA*, *CAB* alattiak két derékkel egyenlők.

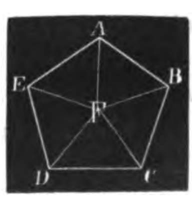


Húzassék *C* ponton át, *AB* egyenhez egyközü *CE* egyen.

Már, minthogy *AB*, *CE*-hez egyközü, s *AC* vágja őket, a *BAC*, *ACE* alatti váltó szegletek egymással egyenlők. Ismét mivel *AB*, *CE*-hez egyközü, és *BD* vágja őket, az *ECD* alatti külső szeglet egyenlő az *ABC* alatti átelleni belsővel. De megmutattaték, hogy az *ACE* alatti egyenlő a *BAC* alattival, tehát az egész külső *ACD* alatti szeglet egyenlő az átelleni belső két szeglettel a *BAC*, *ABC* alattiakkal.

Adjuk hozzájok a közös *ACB* alattit; e szerint *ACD* *ACB* alattiak egyenlők az *ABC*, *BCA*, *CAB* alatti hárommal. De az *ACD*, *ACB* alattiak két derékkel egyenlők, tehát az *ABC*, *BCA*, *CAB* alattiak is két derékkel egyenlők.

Minden háromszegnek tehát sat.



1. *Tanuság.* Minden egyenes vonalu képlet minden belső szegletei összesen négy derék szeglet hijján kétannyi derékszeglettel egyenlők, mint az oldalaik száma.

Mert minden egyenes vonalu képlet, p. o. *ABCDE* annyi háromszegre osztható, a hány oldala van, ha egy belől levő pontból, p. o. *F*-ből a szegleteibe egyeneket vonunk. Mind ezen háromszegek szegletei összesen tehát *kétannyi* derékszegletekkel egyenlők, melyekből az F körüli négy derékszegletet levonva, az $ABCDE$ szegletei maradnak.

2. *Tanuság.* Az egyenes vonalu képletek oldalai egy egyfelé megnyújtatván, külső szegleteik összesen négy derék szeglettel egyenlők.

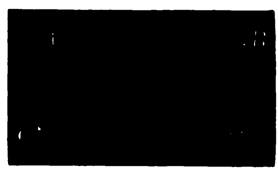
Mert p. o. $ABCD$ oldalmás oldalait E-ig, F-ig, G-ig, H-ig megnyújtva, mindenik külső szeglet a szomszédjával együtt két derékszeglettel egyenlő; tehát a külső és belső szegletek együtt kétannyi derékszegletet tesznek, mint a hány a képlet oldala; mivel pedig a belső szegletek összesen négy derékszeglet hijján tesznek *ugyanannyit*, a külsőknek négy derékszegletet kell tenniök.

33. Feladat:

Az egyenlő és egyközü egyeneket azonegy oldalról összekapcsoló egyenek maguk is egyenlők és egyközüek.

Legyenek AB, CD egyenlők és egyközüek, és kapcsolják őket össze ugyanazon oldalról AC, BD egyenek: azt mondom, hogy AC, BD is egyenlők és egyközüek.

Mert vonassék BC.



Minthogy már AB, CD-hez egyközü s BC vágja őket, az ABC, BCD alatti váltó szegletek egymással egyenlők. És minthogy AB egyenlő CD-vel, BC pedig közös, AB, BC két egyen, CD, BC két egyennel egyenlők, s az ABC alatti szeglet egyenlő a BCD alatti szeglettel: tehát AC talp egyenlő BD talppal, s ABC háromszeg egyenlő BCD háromszeggel, s az egyenlő oldaloktól átfogott többi szegletek is külön-külön egymással egyenlők leendenek; tehát az ACB alatti szeglet egyenlő a CBD alattival. És mivel AC, BD két egyent vágó BC egyen az ACB, CBD alatti váltó szegleteket egyenlőkké teszi, tehát AC egyközü BD-hez; de meg van az is mutatva, hogy egyenlő vele.

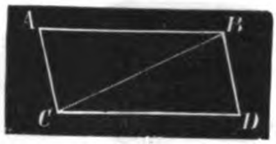
Tehát az egyenlő sat.

34. Feladat:

Az egyközvonalu üreknek átelleni oldalai s szegletei egymással egyenlők, s az átmérő amazokatketté vágja.

Legyen *ACDB* egyközvonalu ür, s ennek átmérője *BC*: azt mondom, hogy *ACDB* egyközvonalu ürnek átelleni oldalai és szegletei egymással egyenlők, és *BC* átmérő ketté vágja az egyközvonalut.

Mert mivel *AB*, *CD*-hez egyközü, és *BC* egyen vágja, az *ABC*, *BCD* alatti váltó szegletek egymással egyenlők. Ismét mivel *AC BD*-hez egyközü és *BC* vágja, *ACB*, *CBD* váltó szegletek egymással egyenlők. De *ABC*, *BCD* két



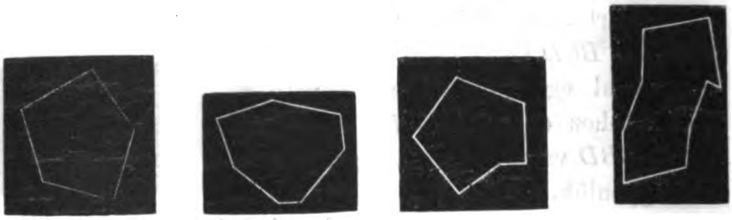
háromszeg, melyekben egyiknek *ABC*, *BCA* alatti két szeglete a másiknak *BCD*, *CBD* alatti két szegletével különkülön egyenlők, és az egyiknek egy oldala a másiknak egy oldalával egyenlő, u. m. az egyenlő szegletek közti közös *BC* oldal; tehát a többi oldalaik is egymással különkülön egyenlők lesznek, s a harmadik szegletök szintúgy; tehát *AB* egyenlő *CD*-vel, *AC*, *BD*-vel, és a *BAC* alatti szeglet a *BDC* alatti szeglettel. És minthogy az *ABC* alatti szeglet egyenlő a *BCD* alattival, s a *CBD* alatti az *ACB* alattival; tehát az egész *ABD* alatti az egész *ACD* alattival egyenlő: hogy pedig *BAC*, *CDB*-vel egyenlő, már meg van mutatva.

Az egyközvonalu üreknek átelleni oldalai és szegletei tehát egymással egyenlők.

De azt is mondom, hogy az átmérő ketté vágja az egyközvonalut. Mert minthogy *AB* egyenlő *CD*-vel, *BC* pedig közös, *AB*, *BC* két egyen *DC*, *CB* két egyennel különkülön egyenlők, s az *ABC* alatti szeglet a *BCD* alatti szeglettel egyenlő; tehát *AC* talp egyenlő *BD* talppal, és *ABC* háromszeg egyenlő *BDC* háromszeggel.

BC átmérő tehát *ACDB* egyközvonalut ketté vágja, mit b. k.

Jegyz. Az eddigi feladatok inkább csak a vonalok különféle helyzetét érdeklék, melyből azonban az egymásra illeszthető képleteknél az oldaloktól körülfogott terjek mekkoraságára s egyenlőségére is következtethetni. De a felebbi 34-diken kezdve épen ez a mekkoraság és a terjek egyenlősége leend a vizsgálat tárgya, oly esetekben is, midőn a képletek egymásra nem illenek, és az ürt körülfogó vonalak különkülön avagy együttvéve nem egyenlők. Hogy két terj egyenlő lehet, ha szinte szélei nem is illenek egymásra, már csak abból is kitetszik, hogy ha egy bizonyos terjet akármily alaku darabokra vagdalunk, ugyancsak az a mekkoraságu s tehát magával egyenlő marad; s ha ezeket az elvagdalt darabokat másmás renddel egymás mellé illesztjük, ismét csak egyenlő, meg egyenlő maradand. P. o.

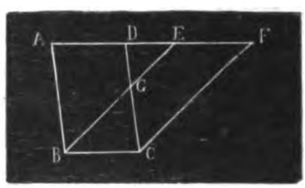


mindezek egymással, s ki tudja még hány mással, egyenlők, mint a melyek mind az első képlet feldarabolásából eredtek. Ha ismeretes az olvasó az úgynevezett chinai játékkal, ebben elég példatársát találandja a jegyzésbelieknek.

Egyközvonalu terjeknek (röviden *egyközényeknek*) Euklides csak a *négy* oldalu képleteket nevezi, azokat t.i. melyeknek átelleni oldalaik egyközüek.

35. Feladat:

Azonegy talpon álló s ugyanazon egyközüek közötti egyközények egymással egyenlők.

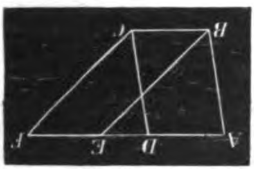


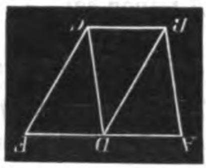
Legyenek *ABCD, EBCF* azonegy *BC* talpon, s ugyanazon *AF, BC* egyközüek közti egyközények: azt mondom, hogy *ABCD* egyközény egyenlő *EBCF*-el.

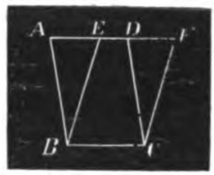
Mert mivel *ABCD* egyközény; *AD* egyenlő *BC*-vel. Ugyanazért *EF* is egyenlő *BC*-vel; úgy, hogy *AD* is egyenlő *EF*-el, *DE* pedig közös; tehát az egész *AE* egyenlő az egész *DF*-el. De *AB* is egyenlő *DC*-vel; tehát az *EA, AB* két oldal *FD, DC* két oldallal különkülön egyenlők, és az *FDC* alatti szeglet egyenlő az *EAB* alattival, a külső a belsővel. Tehát *EB* talp egyenlő *FC* talppal, és *EAB* háromszeg egyenlő *DCF* háromszeggel. Vétessék el a közös DGE, tehát a maradék $ABGD$ oldalmás, a maradék $EGCF$ oldalmással egyenlő: adassék hozzájok a közös GBC háromszeg; tehát az egész $ABCD$ egyközény az egész $EBCF$ egyközénynyel egyenlő.

Jegyz. E feladat bebizonyításában három esetre bukkanhatnánk, melyek közől szerzőnk csupán az egyiket vette fel. T. i. az egyközényeknek a talppal átelleni oldalai *vagy* bizonyos távolságra vannak egymástól, mint AD, EF az 1-ső képletben, *vagy* egymást

1. Képl. 2. Képl. 3. Képl.







érik, mint AD, DF, a 2-ban; *vagy* részint egybeesnek, mint AD, EF a 3-dikban.

Az *első eset* van a felebbi bebizonyításban felvéve.

A 2-dikban az ABD és DCF háromszegek egyenlősége a 8-dik feladat szerint szembetünő, s mindenik az illető egyközénynek fele.

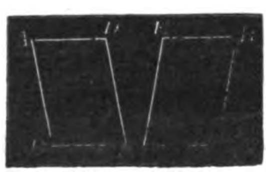
A *harmadikban* AD egyenlő BC-vel (34. Felad.), EF is egyenlő BC-vel, tehát AD egyenlő EF-el. Elvéve a közös ED-t, a maradék AE egyenlő a maradék DF-el; de AB is egyenlő DC-vel, és az EAB alatti szeglet az FDC alattival; miszerént AEB háromszeg egyenlő DFC háromszeggel. Hozzátéve mindenikhez a közös $EBCD$ oldalmást, az egész $ABCD$ egyenlő az egész $EBCF$-el.

Euklides arab fordítmánya mind a három esetet felhozza.

36. Feladat:

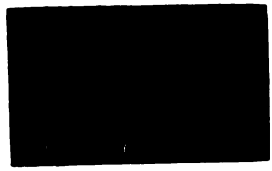
Egyenlő talpokon álló, ugyanazon egyköztiek közti egyközények egymással egyenlők.

Legyenek $ABCD$, $EFGH$, egyenlő BC FG talpokon álló, s ugyanazon AH, BG egyközüek közti egyközények: azt mondom, hogy $ABCD$ egyközény egyenlő $EFGH$-val.



Mert vonassanak BE, CH.

Minthogy BC egyenlő FG-vel, de FG is EH-val, tehát BC egyenlő EH-val. De egyközüek is, és BE, CH



összekapcsolják; de az egyenlő s s egyközü egyeneket azonegy oldalról összekapcsoló (egyenek) egyenlők és egyközüek; tehát BE, CH egyenlők, és egyközüek. Tehát $EBCH$ egyközény is egyenlő $ABCD$-vel, mert azonegy BC a talpuk, s ugyanazon BC, AH egyközüek közt vannak. Ugyanazért $EFGH$ is egyenlő $EBCH$-val: úgy hogy $ABCD$ egyközény is egyenlő $EFGH$-val.

Tehát egyenlő talpon sat.

37. Feladat:

Azonegy talpon álló s ugyanazon egyközüek közti háromszegek egymással egyenlők.

Legyenek ABC, DBC azonegy BC talpon álló, s ugyanazon AD, BC egyközüek közti háromszegek: azt mondom, hogy ABC háromszeg egyenlő DBC háromszeggel.

Nyújtassék AD mind a kétfelől E-ig és F-ig, és B-n által vonassék CA-hoz egyközü BE, és C-n által BD-hez egyközü CF.

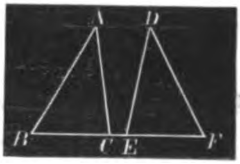
Tehát mind $EBCA$ mind $DBCF$ egyközények, és $EBCA$ egyenlő $DBCF$-el; mert azonegy BC talpon vannak, s ugyanazon BC, EF egyközüek közt; de ABC háromszeg $EBCA$ egyközénynek fele, mivel AC átmérő emezt ketté vágja. Viszont DBC háromszeg $DBCF$ egyközénynek fele, mivel DC átmérő ezt ketté vágja. De az egyenlőknek hasonfelei egymással egyenlők; tehát ABC háromszeg egyenlő DBC háromszeggel.

Tehát ugyanazon talpon sat.

38. Feladat:

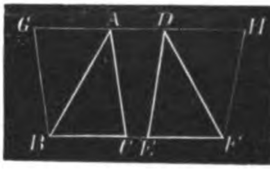
Egyenlő talpokon, s ugyanazon egyközüek közt fekvő háromszegek egymással egyenlők.

Legyenek ABC, DEF egyenlő BC, EF talpokon álló, és



ugyanazon BF, AD egyközüek közt lévö háromszegek : azt mondom, hogy ABC háromszeg egyenlö DEF háromszeggel.

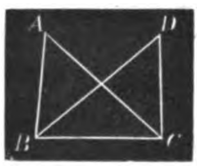
Mert nyújtassék meg AD mindkétfelöl G-ig és H-ig, és B-nél húzassék CA-hoz egyközü BG, F-nél pedig húzassék DE-hez egyközü FH.



Tehát mind $GBCA$ mind $DEFH$ egyközények : és $GBCA$ egyenlö $DEFH$-val, mivel egyenlö BC, EF talpokon és ugyanazon BF, GH egyközüek közt állanak. Már $GBCA$ egyközénynek fele ABC háromszeg, mivel AB átmérö ketté vágja : $DEFH$ egyközénynek ismét fele FED háromszeg, mert DF átmérö ketté vágja. Az egyenlöknek hasonfelei pedig egyenlök egymással; tehát ABC háromszeg egyenlö DEF háromszeggel.

39. Feladat:

Ázonegy talpon s ugyanazon oldalról lévö egyenlö háromszegek, ugyanazon egyközüek közt vannak.



Legyenek ABC, DBC azonegy BC talpon, s ugyanazon oldalról levö egyenlö háromszegek : azt mondom, hogy ugyanazon egyközüek közt is vannak.

Mert vonassék AD : azt mondom, hogy AD, BC-hez egyközü.

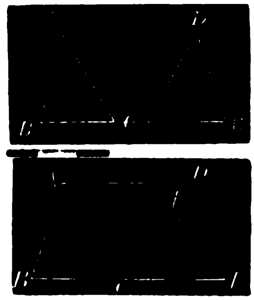
Mert ha nem; húzassék A ponton át BC egyenhez egyközü AE, s vonassék EC.

Tehát ABC háromszeg egyenlö EBC háromszeggel; mert azonegy BC talpon állók, s ugyanazon BC, AE egyközüek köztiek. De ABC háromszeg egyenlö DBC háromszeggel; tehát DBC háromszeg egyenlö EBC háromszeggel, a nagyobb a kisebbel, mi lehetetlen. Tehát AE, BC-hez nem egyközü. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy más sem egy is AD-n kivül; tehát AD, BC-hez egyközü.

Tehát azonegy talpon sat.

40. Feladat:

Egyenlő talpokon s ugyanazon oldalról levő egyenlő háromszegek ugyanazon egyközüek közt vannak.



Legyenek *ABC*, *CDE* egyenlő *BC*, *CE* talpokon s ugyanazon oldalról levő háromszegek : azt mondom, hogy ugyanazon egyközüek közt is vannak.

Mert vonassék *AD* : azt mondom, hogy *AD* egyközü *BE*-hez.

Mert ha nem; húzassék *A*-n által *BE*-hez egyközü *AF* és vonassék *FE*.

Tehát *ABC* háromszeg egyenlő *FCE* háromszeggel; mert egyenlő *BC*, *CE* talpokon és ugyanazon *BE*, *AF* egyközüek közt vannak. De *ABC* háromszeg egyenlő *DEC* háromszeggel, tehát *DCE* háromszeg egyenlő *FCE* háromszeggel, nagyobb a kisebbel, mi lehetlen. Tehát *AF* nem egyközü *BE*-hez. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy más sem egy is *AD*-n kivül; tehát *AD*, *BE*-hez egyközü.

Tehát egyenlő talpokon sat.

41. Feladat:

Ha egy egyközénynek egy háromszeggel azonegy a talpa, s ugyanazon egyközüek köztiek, az egyközény két akkora, mint a háromszeg.

Mert legyen *ABCD* egyközénynek *EBC* háromszeggel azonegy *BC* talpa, s legyenek ugyanazon *BC*, *AE* egyközüek közt : azt mondom, hogy *ABCD* egyközény két akkora, mint *EBC* háromszeg.

Mert vonassék *AC*.

ABC háromszeg egyenlő *EBC* háromszeggel; mert azonegy *BC* talpon s ugyanazon *BC*, *AE* egyközüek között vannak. De *ABCD* egyközény két akkora mint *ABC* háromszeg; mert AC átmérö kettė vágja; miszerint $ABCD$ egyközény két akkora, mint EBC háromszeg.

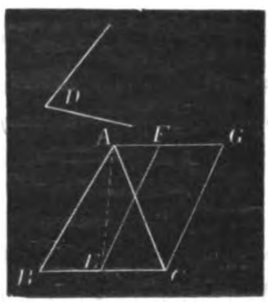
Ha tehát egy sat.

42. Feladat:

Adott háromszeggel egyenlö egyközényt szerkeztetni oly szegletben, mely egy adott egyenes vonalu szeglettel egyenlö legyen.

Legyen az adott háromszeg ABC, az adott egyenes vonalu szeglet D: már ABC háromszeggel egyenlö egyközényt kell szerkeztetni oly szegletben, mely D szeglettel egyenlö legyen.

BC vágassék kettė E-nél és vonassék AE, és állittassék EC egyenre, az abban levö E ponthoz D szeglettel egyenlö CEF alatti szeglet, és A-n által húzassék EC-hez egyközü AG, C-n által pedig húzassék EF-hez egyközü CG: e szerint $FECG$ egyközény.



Mert mivel BE egyenlö CE-vel, ABE háromszeg is egyenlö AEC háromszeggel; mert BE, EC talpokon s ugyanazon BC, AG egyközüek közt vannak, tehát ABC háromszeg két akkora, mint AEC háromszeg. De $FECG$ egyközény is két akkora mint AEC háromszeg, mert azonegy talpon s ugyanazon egyközüek közt vannak; tehát $FECG$ egyközény egyenlö ABC háromszeggel, s az FEC alatti szeglet egyenlö az adott D szeglettel.

Tehát adott ABC háromszeggel sat.

43. Feladat:

Minden egyközényben az átmérö körüli egyközények pótlékai egymással egyenlök.

Legyen $ABCD$ egyközény, és ennek átmérője AC; AC körül legyenek EH, FG egyközények, és BK, KD úgy nevezett pótlékok : azt mondom, hogy *BK* pótlék egyenlö *KD* pótlékkal.

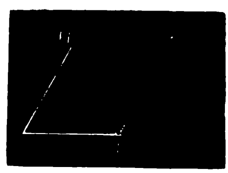
Mert minthogy *ABCD*, egyközény, s *AC* az átméröje; *ABC* háromszeg egyenlö *ACD* háromszeggel; ismét mivel *EKHA*, egyközény, és *AK* az átméröje, *AEK* háromszeg egyenlö *AHK* háromszeggel. Ugyan azért *KGC* háromszeg is egyenlö *KFC* háromszeggel. Mivel már *AEK* háromszeg *AHK* háromszeggel, *KGC* háromszeg pedig *KFC* háromszeggel egyenlök; *AEK* háromszeg *KGC* háromszeggel együtt egyenlök *AHK* háromszeggel *KFC* háromszeggel együtt; de az egész *ABC* háromszeg is egyenlö az egész *ADC* háromszeggel, tehát a maradék *BK* pótlék a maradék *KD* pótlékkal egyenlö.

Tehát minden sat.

44. Feladat:

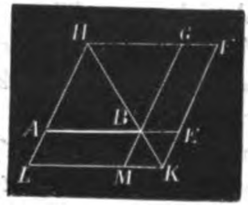
Adott egyenhez adott háromszeggel egyenlö egyközényt szabni, oly szegeletben, mely egy adott egyenesvonalu szeglettel egyenlö legyen.

Legyen az adott egyen *AB*, az adott háromszeg *C*, az adott egyenes vonalu szeglet pedig *D*. Már az adott *AB* egyenhez kell az adott *C* háromszeggel egyenlö egyközényt a *D*-hez egyenlö szegletben szabni.



Szerkeztessék *C* háromszeggel egyenlö *BEFG* egyközény *EBG* alatti, *D*-vel egyenlö, szegletben, és úgy fektessék, hogy *BE* legyen egyenesben *AB*-vel; *FG* nyújtassék *H*-ig, és *A*-n keresztül vonassék akár *BG*-hez akár *EF*-hez egyközü *AH*, és vonassék *HB*.

Minthogy *AH*, *EF* egyközüeket *HF* egyen vágja, az *AHF*, *HFE* alatti szegletek két derékkel egyenlök; tehát a



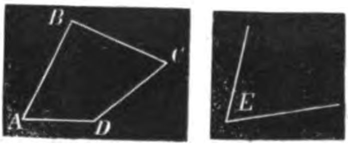
BHG, *GFE* alattiak két deréknél kisebbek; de a két deréknél kisebb szegletekből induló egyenek határzatlanúl nyújtva összeérendenek; *HB*, *FE* tehát kinyújtva összeérnek. Nyújtassanak ki és érjenek össze *K*-nál és *K* ponton át vonassék akár *EA*-hoz akár *FH*-hoz egyközü *KL*, és nyújtassanak ki *HA*, *GB* az *L* és *M* pontokig.

HLKF tehát egyközény, és *HK* ennek átmérője; *HK* átmérő körül vannak *AG*, *ME* egyközények, és ezeknek úgynevezett pótlékai *LB*, *BF*; *LB* tehát egyenlő *BF*-el. De *BF* egyenlő *C* háromszeggel, tehát *LB* is egyenlő *C* háromszeggel. Egyenlő az *ABM* alatti szeglet is a *GBE* alattival, de a *GBE* alatti egyenlő a *D*-vel, tehát az *ABM* alatti egyenlő *D* szeglettel.

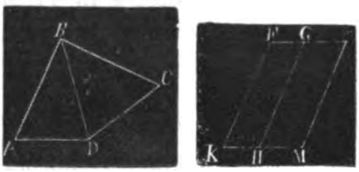
Tehát adott *AB* egyenre sat.

45. Feladat:

Adott egyenesvonalu képlettel egyenlő egyközényt szerkeztetni adott egyenesvonalu szegletben.

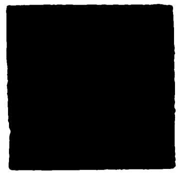


Legyen az adott egyenesvonalu képlet *ABCD*, és az adott egyenesvonalu szeglet *E*: *ABCD* egyenesoldalu képlettel egyenlő egyközényt kell szerkeztetni az adott *E* szegletben.



Vonassék *DB*, és állittassék *ABD* háromszeggel egyenlő *FH* egyközény az *E*-vel egyenlő *HKF* alatti szegletben, és szabassék *HG* egyenhez az *E*-vel egyenlő *GHM* szegletre *BDC* háromszeggel egyenlő *GM* egyközény.

Már mivel *E* szeglet mind a *HKF* mind a *GHM* alattival egyenlő; tehát a *HKF* alatti egyenlő a *GHM* alattival. Adassék hozzájok a közös *KHG* alatti; tehát az *FKH*, *KHG* alattiak egyenlők a KHG, GHM alattiakkal; de az FKH, KHG alattiak két derékkel egyenlők, tehát a KHG, GHM alattiak is két derékkel egyenlők. Úgy de valamely GH egyenre a benne levő H pontnál nem ugyanazon oldalról álló HK, HM két egyen a szomszéd szegleteket két derékkel egyenlőkké teszi; tehát KH, HM-el egyenesben van; és minthogy KM, FG egyközüeket HG egyen vágja, az MHG, HGF alatti váltó szegletek egymással egyenlők. Adjuk hozzájok a közös HGL alattit, tehát az MHG, HGL alattiak egyenlök a HGF, HGL alattiakkal. De az MHG, HGL alattiak két derékkel egyenlők; a HGF, HGL alattiak is hát két derékkel egyenlők; tehát FG, GL-el egyenesben van. És mivel KF, HG-vel egyenlő és egyközü, de HG is ML-el; tehát KF, ML-el egyenlő és egyközü hozzája: és KM, FL egyenek kapcsolják össze őket, minél fogva KM, FL egyenlők és egyközüek; tehát $KFLM$, egyközény. És minthogy ABD háromszeg FH egyközénynyel, DBC pedig GM-el egyenlők, az egész $ABCD$ egyenesoldalu tür egyenlő az egész $KFLM$ egyközénynyel.



Tehát adott egyenesoldalu sat.

Tanúság. A közelebbi feladatok nyomán eleget lehet tenni a következőnek is:

Adott egyenre, adott egyenesvonalu képlettel egyenlő egyközényt, adott szegletben szerkesztetni.

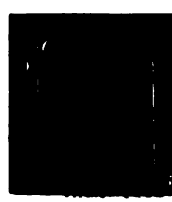
E végre az adott képlet első háromszegével egyenlő egyközényt kell szabni az adott egyenhez, s ehhez alkalmazni aztán sorban a többi egyközényeket, a 45. Feladat utasítása szerint.

Commandini.

46. Feladat:

Adott egyenre négyszeget írni.

Legyen az adott egyen AB; AB egyenre kell négyszeget írni.

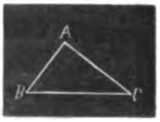


AB egyenhez a benne levő A pontból derékszegletre vonassék AC, tétessék AD, AB-vel egyenlővé, és D ponton át vonassék AB-hez egyközü DE, B ponton át pedig vonassék *AD*-hez egyközti *BE*. E szerint *ADBE*, egyközény; tehát *AB DE*-vel, *AD BE*-vel egyenlők. De *AB* is egyenlő *AD*-vel; *BA*, *AD*, *DE*, *EB* négy egyen tehát egymással egyenlők, miszerint *ADEB* egyközény egyenlő oldalu. De azt mondom, hogy derékszegletü is. Mert mivel *AB DE* egyközüeket vágja *AD* egyen, tehát a *BAD*, *ADE* alatti szegletek két derékkel egyenlők; a *BAD* alatti pedig derék, tehát az *ADE* alatti is derék. De az egyközoldalu üreknek átelleni oldalai és szegletei egymással egyenlők, tehát mind az *ABE*, mind a *BED* alatti átelleni szegletek derékek, ennélfogva *ADEB*, derékszegletü. Megmutattaték az is, hogy egyenlő oldalu.

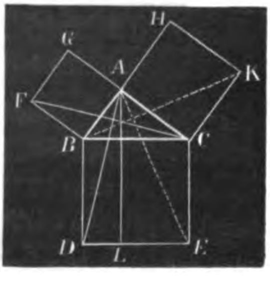
Tehát *ADEB* négyszeg, és *AB* egyenre van irva, mit tenni kelle.

*47. Feladat:

A derékszegletü háromszegekben a derékszegletet átfogó oldal négyszege egyenlő a derékszegletet befogó oldalak négyszegeivel.



Legyen *ABC* derékszegletü háromszeg, melynek *BAC* alatti szeglete derék: azt mondom, hogy a *BC* négyszege egyenlő a *BA AC* négyszegeikkel.



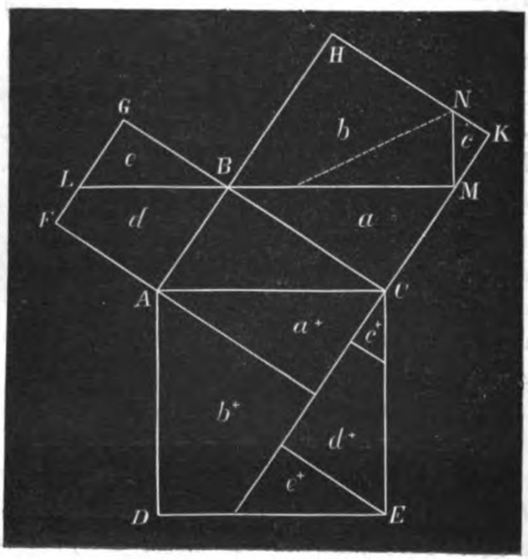
Mert írassék *BC*-re *BDEC* négyszeg: *BA*-ra *AC*-re pedig *GB*, *HC* négyszegek, és vonassék *A*-n által akár *BD*-hez, akár *CE*-hez egyközü *AL*, és vonassanak *AD*, *FC*.

És minthogy mind a *BAC* mind a *BAG* alatti szegletek derékek, de ezekét a szomszéd szegleteket a *BA* egyenre az abban levő *A* pontnál nem ugyanazon oldalról álló *AC*, *AG* két egyen teszi két derékkel egyenlővé; tehát *CA AG*-vel egyenesben van. Ugyanazért *BA* is *AH*-val egyenesben van. És minthogy a *DBC* alatti szeglet az *FBA* alattival egyenlő, mivel mindkettő derék: adassék hozzájok a közös *ABC* alatti; e szerint az egész *DBA* alatti szeglet egyenlő az egész *FBC* alattival. És mivel *DB*, *BC* vel, *FB*,

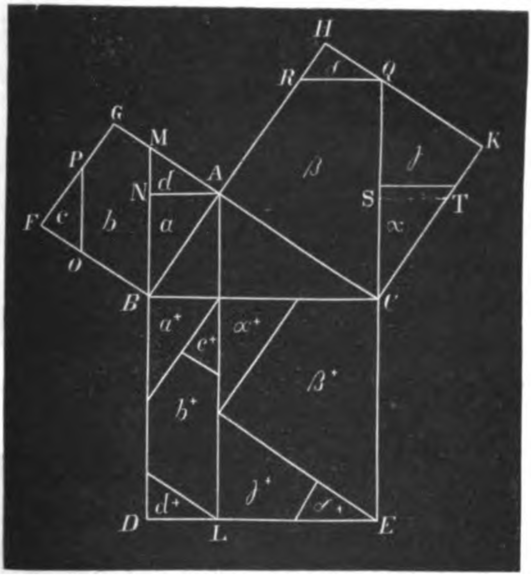
BA-val egyenlök, ennélfogva DB, BA két oldal CB, BF két oldallal különkülön egyenlök, s a DBA alatti szeglet egyenlö az FBC alatti szeglettel; tehát AD talp egyenlö FC talppal, és ADB háromszeg egyenlö FBC háromszeggel; de BL egyközény két akkora, mint ABD háromszeg, mert azonegy BD talpuk van, s ugyanazon BD, AL egyközüek közt vannak: BG négyszeg pedig két akkora, mint FBC háromszeg, ismét mivel azonegy FB, GC egyközüek közt vannak. Már pedig az egyenlök kettőzetei egyenlök egymással; tehát BL egyközény egyenlö GB négyszeggel. Vonatván AE, BK egyenek, hasonlókép mutattatik meg, hogy CL egyközény egyenlö HC négyszeggel; tehát az egész $BDEC$ négyszeg egyenlö GB, HC két négyszegekkel. De $BDEC$ négyszeg BC-re van írva, GB és HC pedig BA-ra és AC-re; tehát a BC oldal négyszege egyenlö a BA, AC oldalak négyszegeivel.

A derékszegletü háromszegekben tehát sat.

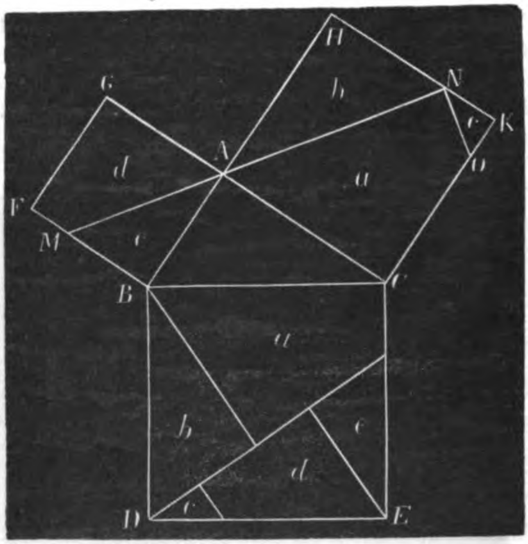
Jegyz. Az ürtani nézet (Anschauung) kifejtésére igen alkalmas mód, az egyenlö terjüeknek állított képleteket, mikor lehet, úgy elvagdalni és alkalmas renddel újra összerakni, hogy egymásra is illesztethessenek. Ez a módszer különösen hasznos a jelen feladatnak, mit Pythagoras theoremájának neveznek, tiszta képzeltetésére. Erre szolgáljanak a következö képletek:



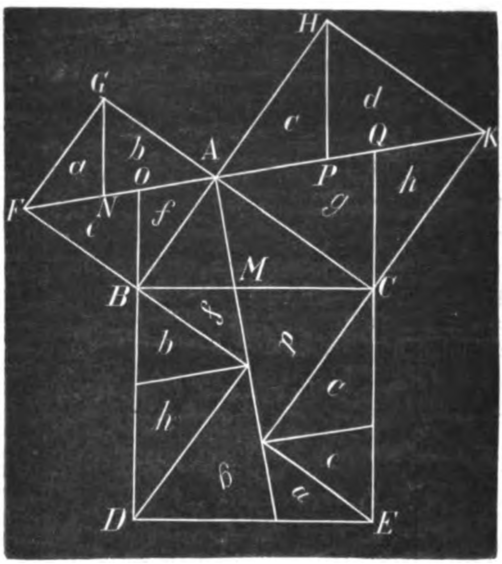
Utasítás. A nagy betűk *K*-ig azokat jelelik, a miket a feladatnál. *LM*-et vond *B*-n át *AC*-hez egyközüleg; *MN*-et *LM*-hez, *M* pontban derékszegletre. *ABGF* és *BCKH* négyszegeket vagdald az *LB BM MN* egyenek nyomán *a, b, c, d, e* darabokra, s ezekből mint láthatni, kirakhatod az átfogó négyszegét *ACED*-t.



Utasítás. A feladatbeli betűk itt ugyan azokat jelelik, miket ott. Továbbá *MB*, a *DB* oldal egyenesbe való kinyújtása. *AN*, *A*-ból *MB*-re bocsátott függő. *BO* *AM*-el egyenlő, és *PO*, *O* ponton át *MB*-hez egyközüleg vont egyen. — *ACKH* négyszegben pedig : *CQ* *CE*-vel egyenesben van nyújtva; *QR* *QC*-re *Q* pontba állított függő. *CT* *AR*-rel egyenlő és *TS* *CQ*-ra *T* pontból vont függő. A többi teendő az előbbiből tudva van.



Utasítás. *HN* egyenlő *FG*-vel; *NM* *N*-től *A* ponton át huzott egyen; *NO* *MN*-re függő, *N* végpontból húzva.



Utasítás. A *BAC* alatti szegletet vágd ketté *AM* egyennel. Vond *FAK* egyent, *NA*-t *AP*-t tedd *AM*-el egyenlőkké. Vond *NG*-t *PH*-t. *BD*-t *CE*-t nyújtsd egyenesben *O*-ig, *Q*-ig. A többit a képlet nyomán ki fogja találni a figyelmes olvasó.

48. Feladat:

Ha egy háromszeg oldalai egyikének a négyszege a háromszeg más két oldala négyszegeivel egyenlő; a háromszeg más két ol-oldalától befogott szeglet derékszeglet.

Ugyanis *ABC* háromszeg egyik *BC* oldalának négyszege legyen egyenlő a *BA*, *AC* oldalok négyszegeivel: azt mondom, hogy a *BAC* alatti szeglet derék szeglet.

Mert *A* pontból vonassék *AC* egyenhez derékszegletre *AD*, és tétessék *AD*, *BA*-val egyenlővé, és vonassék *DC*.

Már mivel *DA* egyenlő *AB*-vel, a *DA* négyszege is egyenlő az *AB* négyszegével; adjuk mindenikhez az *AC* négyszegét; tehát a *DA*, *AC* négyszegei egyenlők a *BA*, *AC* négyszegeivel. De a *DA*, *AC* négyszegeikkel egyenlő a *DC*-é, mert a *DAC* alatti szeglet derékszeglet : a *BA AC* négyszegeikkel pedig egyenlő a *BC*-é, mert úgy van felvéve; tehát a *DC* négyszege egyenlő a *BC* négyszegével, úgy hogy *DC* oldal is egyenlő *BC*-vel : és minthogy *AD* egyenlő *AB*-vel, *AC* pedig közös, tehát *DA AC* két oldal egyenlő *BA*, *AC* két oldallal, és *DC* talp egyenlő *BC* talppal; tehát a *DAC* alatti szeglet egyenlő a *BAC* alattival. De a *DAC* alatti derékszeglet, tehát a *BAC* alatti is derékszeglet.

Ha tehát egy háromszegnek sat.

EUKLIDES ELEMEINEK

MÁSODIK KÖNYVE.

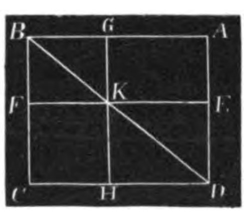
Értelmezések.

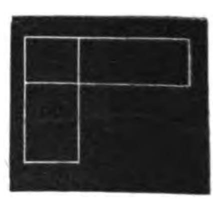
1. Minden derékszegletü egyközény a derékszegletet *befogni* mondatik.

1. *Jegyz.* P. o. *ABCD* derékszegletü egyközényt, (melyet ezentúl a háromszeg, négyszeg sat. példájára, röviden *derékszeg*nek fogunk nevezni), *AB* és *BC* egyenek fogják be. — Megfordítva: *AB* és *BC* egyenek derékszege, az *AB* és *BC*-től *befogott ABCD* derékszeg.

2. *Jegyz.* Mivel, a mint látszik, Euklides vagy kiadói, az 1-ső könyv 31-dik értelmezésében adott nevet, a felemást (*ἑτερόμηκες*), mintegy elfeledve, a 2-dik s azontúli könyvekben derékszegletü (*ὀρθογώνιον*) névvel cserélik fel; fordítói hűségünk hasonlót kiván, s legyen elég, ezennel az olvasót a két képlet ugyanazonságára figyeltetni.

2. Minden egyközoldalu terjben az átmérő körüli *egyik*, akármelyik egyközény két pótlékaival együtt: *gnomon*nak neveztessék.





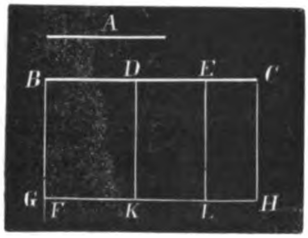
1. *Jegyz.* P. o. *ABCD* derékszegben: *EH* derékszeg, *AK* és *KC* pótlékokkal; akár *GF* derékszeg *AK* és *KC* pótlékokkal, *gnomonok.*

2. *Jegyz.* *Gnomon*nak a görögök a *szegletmérőt* nevezték, s ennek a szerszámnak a feljebbi

terjalakkal való hasonlatától kapá a derékszeg kijelelt része ama nevet. Magyarúl nevezhetnők *térdalak*nak. De talán jobb lesz meghagyni; úgy is használata nem igen terjed az űrtan elemein kivül.

1. Feladat:

Ha van két egyen, s egyikök akármely részekre vágatik: a két egyentől befogott derékszeg egyenlő a vágatlan egyen s mindenik szelettől befogott derékszegekkel.



Legyen *A*, *BC* két egyen, s vágassék *BC* akárhol *D* és *E* pontoknál: azt mondom, hogy az *A* és *BC*-től befogott derékszeg egyenlő az *A* és *BD*-től, meg az *A* és *DE*-től és még az *A* és *EC*-től befogott derékszegekkel.

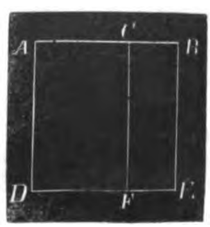
Mert vonassék *B*-nél *BC*-hez derékszegre *BF*, tétessék *BG* *A*-val egyenlővé, és *G*-n át vonassék *BC*-hez egyközü *GH*, aztán *D*-n *E*-n *C*-n át húzassanak *BG*-hez *DK*, *EL*, *CH* egyközüek.

Már *BH* egyenlő *BK*, *DL*, *EH* derékszegekkel. De *BH* az *A* és *BC* közti, mert *GB*, *BC* fogják be; *BG* pedig *A*-val egyenlő; *BK*, az *A* és *BD* közti, mert *GB* és *BD* fogják be; *BG* pedig *A*-val egyenlő: *DL* az *A DE* közti, mert *DK* azaz *BG* egyenlő *A*-val. Hasonlókép *EH* az *A* és *EC* közti; tehát az *A* és *BC*-től befogott derékszeg egyenlő az *A* és *BD*, meg az *A* és *DE*, meg az *A* és *EC* köztiekkel.

Ha tehát van két egyen sat.

2. Feladat:

Ha egy egyenes vonal akárhol elvágatik, az egész és mindenik szelettől befogott derékszegek egyenlők az egésznek négyszegével.



Mert *AB* egyen vágassék akárhol, *C* pontnál; azt mondom, hogy az *AB*, és *BC*-től befogott derékszeg a *BA* és *AC*-től befogott derékszeggel együtt egyenlő az *AB* négyszegével.

Mert irassék *AB*-re *ADEB* négyszeg, és vonassék C-n által akár AD-hez, akár BE-hez egyközü CF.

E szerint AE egyenlö AF, meg CE-vel. De AE az AB négyszege; AF pedig a BA, AC-töl befogott derékszeg; mert DA, AC fogják be; AD pedig egyenlö AB-vel: EC megint az AB, BC közti, mert BE egyenlö AB-vel. Tehát a BA AC közti derékszeg az AB, BC köztivel együtt, egyenlö az AB négyszegével.

Ha tehát egy egyenes sat.

3. Feladat:

Ha egy egyenes vonal vágatik akárhol: az egésztöl és az egyik vágott résztöl befogott derékszeg egyenlö a szeletektöl befogott derékszeggel, meg az elöbb mondott szelet négyszegével.

Mert vágassék AB egyen akárhol C pontnál; azt mondom, hogy az AB, BC-töl befogott derékszeg egyenlö az AC, CB-töl befogott derékszeggel, meg a BC négyszegével.

Mert irassék CB-re $CDEB$ négyszeg, ED nyújtassék F-ig, és A-n által húzassék akár CD-hez, akár BE-hez egyközü AF.

AE e szerint egyenlö AD meg CE-vel: de AE az AB és BC-töl befogott derékszeg, mert AB és BE fogják be; BE pedig egyenlö BC-vel: AD megint az AC és CB közti, mert CD egyenlö CB-vel; végre DB a CB négyszege; tehát az AB BC-töl befogott derékszeg egyenlö az AC CB-töl befogott derékszeggel, meg a CB négyszegével.

Ha tehát egy egyenes sat.

4. Feladat:

Ha egy egyenesvonal akárhol vágatik, az egésznek négyszege egyenlö a szeletek négyszegeivel, meg a szeletektöl befogott, kétszer vett derékszeggel.

Mert AB egyenes vonal vágassék akárhol C-nél: azt mondom, hogy az AB négyszege egyenlö az AC, CB négyszegeikkel, meg az AC, CB-töl befogott, kétszeri derékszeggel.

Mert irassék AB-re $ADEB$ négyszeg, vonassék BD; és C-n át huzassék akár AD-hez akár BE-hez egyközü CGF; G-n át pedig vonassék akár AB-hez akár DE-hez egyközü HK.

Már mivel CF egyközü AD-hez, és vágja BD; a CGB alatti külsö szeglet egyenlö a belsö átelleni ADB alattival. De az ADB alatti egyenlö az ABD alattival, minthogy BA oldal is egyenlö AD oldallal; a CGB alatti szeglet is tehát egyenlö a GBC alatti szeglettel; úgy hogy BC oldal egyenlö CG-vel; de CB is egyenlö GK-val, CG pedig BK-val; tehát GK egyenlö BK-val; tehát $CGKB$ egyenlö oldalu. De azt is mondom, hogy derékszegletü. Mert mivel CG, BK-hoz egyközü, és CB vágja: tehát a KBC, BCG alatti szegletek két derékkel egyenlök. De a KBC alatti derékszeglet, tehát a BCG alatti is az: úgy hogy a CGK GKB alatti átelleni szegletek is derékek. Tehát $CGKB$ derékszegletü. De megmutattaték az is, hogy egyenlö oldalu; tehát négyszeg, még pedig a CB egyené. Ugyan azért HF is négyszeg, még pedig a HG-re azaz AC-re állitott négyszeg; tehát HF, CK négyszegek az AC, CB négyszegei. És mivel AG, GE-vel egyenlö, és AG az AC, CB közti derékszeg, GC egyenlö levén CB-vel; tehát GE is egyenlö az AC, CB közti derékszeggel; tehát AG, GE egyenlök az AC, CB közti kétszer vett derékszeggel. De HF, CK négyszegek AC és CB-re vannak állítva, HF, CK, AG, GE tehát négyen, egyenlök az AC, CB négyszegeikkel, és az AC, CB-töl befogott kétszeri derékszeggel. De HF, CK, AG, GE négyen teszik az egész $ADEB$-t, azaz: az AB négyszegét; tehát az AB négyszege egyenlö az AC, CB négyszegeivel, meg az AC, CB-töl befogott, kétszeri derékszeggel.

Ha tehát sat.

Más bizonyítás.

Azt mondom, hogy az AB négyszege egyenlö az AC, CB négyszegeikkel, és az AC, CB közti kétszeri derékszeggel.

Mert, ugyanazon rajz szerint, minthogy BA egyenlö AD-vel, az ABD alatti szeglet is egyenlö az ADB alattival;

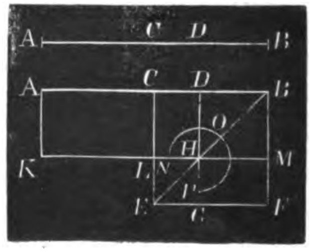
4*

és mivel minden háromszeg három szegletei egyenlők két derékkel; *ABD* háromszeg *ABD, ADB, BAD* alatti három szegletei egyenlők két derékkel. De a *BAD* alatti derék, tehát a többiek *ABD, ADB* egy derékkel egyenlők; egymással is egyenlők; tehát mind *ABD*, mind *ADB* külön félderéket tesznek. Derékszeglet a *BCG* alatti is, mert egyenlő az *A*-nál levő átelleni belsővel; tehát a másik, a *CGB* alatti, félderék; e szerint a *CGB* alatti szeglet egyenlő a *CBG* alattival: úgy hogy *BC* oldal is egyenlő *CG*-vel. De *CB*, *GK*-val egyenlő, *CG* pedig *BK*-val, tehát *CK* egyenlő oldalu. Aztán a *CBK* alatti szegletc derék; tehát *CK*, négyszeg, még pedig a *CB*-é. Ugyanaz okért *HF* is négyszeg, és az *AC*-é; *CK, HF* tehát négyszegek, és az *AC, CB*-éivel egyenlők. És mivel *AG, GE*-vel egyenlő, és *AG* az *AC, CB* közti (derékszeg), mert *CG* *CB*-vel egyenlő; és *EG* is egyenlő az *AC, CB* köztivel; tehát *AG, GE* egyenlők az *AC, CB* közti kétszeri derékszeggel. *CK, HF* is egyenlők az *AC, CB* négyszegeikkel; *CK, HF, AG, GE* tehát egyenlők az *AC, CB* négyszegeikkel, s az *AC, CB* közti kétszeri derékszeggel. Igen, de *CK, HF* és *AG, GE* teszik az egész *AE*-t, mely az *AB* négyszege, ennélfogva az *AB* négyszege egyenlő az *AC, CB* négyszegeikkel, s az *AC, CB* közti kétszeri derékszeggel.

Tanúság. Ebből világos, hogy a négyszeg terjekben az átmérő körüli egyközények négyszegek.

5. Feladat:

Ha egy egyenes vonal egyenlő, és nem egyenlő szeletekre vágatik: az egésznek nem egyenlő szeleteitől befogott derékszeg, a vágások közötti szelet négyszegével együtt, egyenlő a hasonfél négyszegével.



Mert vágassék *AB* egyen *C*-nél egyenlő, *D*-nél nem egyenlő szeletekre: azt mondom, hogy az *AD, DB*-től befogott derékszeg a *CD* négyszegével együtt egyenlő a *CB* négyszegével.

Mert irassék *CB*-re *CEFB*

négyszeg, és vonassék BE, és D-n által húzassék akár CE-hez akár BF-hez egyközü DHG, H-n által vonassék akár AB-hez akár EF-hez egyközü KLM, és ismét A-n által vonassék akár CL-hez akár BM-hez egyközü AK.

És mivel CH pótlék egyenlö HF pótlékkal, adassék hozzájok a közös DM, tehát CM öszveg DF öszveggel egyenlö. De CM egyenlö AL-el, minthogy AC, CB-vel egyenlö; tehát AL egyenlö DF-el. Adassék hozzájok a közös CH, tehát az egész AH öszveg egyenlö NOP gnomonnal. De AH az AD, DB-töl befogott derékszeg, mivel DH, DB-vel egyenlö; tehát NOP gnomon egyenlö az AD, DB közötti derékszeggel. Adjuk hozzájok a közös LG-t, mely egyenlö a CD négyszegével; tehát NOP gnomon és LG együtt egyenlök az AD, DB-töl befogott derékszeggel, meg a CD négyszegével. De NOP gnomon és az LG az egész $CEFB$ négyszeget teszik, mely CB-re van állítva; tehát az AD, DB-töl befogott derékszeg a CD négyszegével együtt egyenlö a CB négyszegével.

Ha tehát sat. m. k. b.

Tanuság. Ebből a feladatból kitetszik, hogy egy nagyobbik egyen négyszege más kisebbik egyen négyszegénél, a két vonal öszvegétől és különbségétől (mekkorával t. i. egyik hosszabb a másiknál) befogott derékszeggel nagyobb.

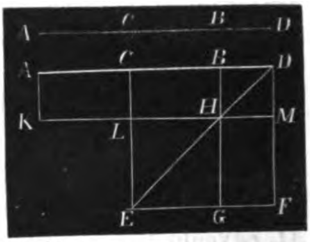
A képletben ugyanis, a CB és CD öszvegök az AD; a CB, ismét DB-vel nagyobb CD-nél, tehát a CB és CD közti különbség a DB; már pedig a CB négyszege a CD négyszegénél az AD, DB-től befogott derékszeggel nagyobb.

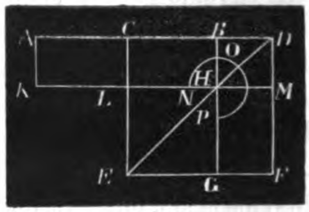
Más szóval : Két egyén öszvegétől és különbségétől befogott derékszeg egyenlő a két egyen négyszegei különbségével.

6. Feladat:

Ha egy egyenes vonal ketté vágatik, s egy más egyen egyenesben hozzá toldatik : az egész, meg a hozzátett, és a hozzátett egyentöl befogott derékszeg, a hasonfél négyszegével együtt, egyenlö a hasonfélböl és a hozzátett egyenböl álló egyen négyszegével.

Mert AB egyen vágassék ketté C pontnál, és toldassék hozzá egyenesben egy más BD egyen : azt mondom, hogy AD, DB-töl befogott derékszeg a CB négyszegével együtt egyenlö a CD négyszegével.





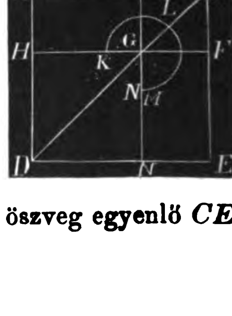
Mert irassék *CD*-re *CEFD* négyszeg, és vonassék *DE*, és *B* ponton át vonassák akár *CE*-hez akár *DF*-hez egyközü *BHG*, *H* ponton át pedig vonassék akár *AD*- akár *EF*-hez egyközü *KLM*, megint *A*-nál vonassék akár *CL*- akár *DM*-hez egyközü *AK*.

Már minthogy *AC* egyenlö *CB*-vel, *AL* is egyenlö *CH*-val. De *CH*, *HF*-el is egyenlö; tehát *LA* egyenlö *HF*-el. Adassék hozzájok a közös *CM*, tehát az egész *AM* egyenlö *NOP* gnomonnal. De *AM* az *AD*, *DB*-töl befogott derékszeg, mert *DM* egyenlö *DB*-vel tehát *NOP* gnomon egyenlö az *AD*, *DB* töl befogott derékszeggel. Adassék hozzájok a közös *LG*, mely egyenlö a *CB* négyszegével, tehát az *AD*, *DB*-töl befogott derékszeg a *CB* négyszegével együtt egyenlö *NOP* gnomonnal, meg *LG*-vel; De *NOP* gnomon, meg *LG* az egész *CEFD* négyszeget teszik. mely *CD*-re van állítva, tehát az *AD*, *DB*-töl befogott derékszeg a *CB* négyszegével együtt egyenlö a *CD* négyszegével.

Ha tehát sat.

7. Feladat:

Ha egy egyenes vonal vágatik akárhol : az egésznek és a szeletek egyikének együvé vett négyszegei, egyenlök az egész egyen és a mondott szelettöl befogott kétszeri derékszeggel, meg a másik szelet négyszegével.



Ugyanis *AB* egyen vágassék akárhol *C* pontnál : azt mondom, hogy az *AB*, *BC* négyszegei egyenlök az *AB*, *BC*-töl befogott kétszer vett derékszeggel, meg a *CA* négyszegével.

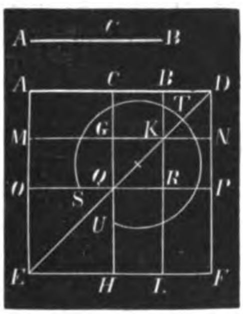
Mert irassék *AB*-re *ADEB* négyszeg, és készíttessék el a képlet.

Minthogy *AG* egyenlö *GE*-vel, adassék hozzájok a közös *CF*, tehát *AF* öszveg egyenlö *CE*, öszveggel, tehát *AF, CE* együtt két akkorák, mint *AF*. De *AF*, meg *CE, KLM* gnomont és *CF* négyszeget teszik; tehát *KLM* gnomon és *CF* négyszeg együtt két akkora mint *AF*. De az *AB, BC*-től befogott kétszeri derékszeg is két akkora mint *AF*, mert *BF, BC*-vel egyenlő; tehát *KLM* gnomon meg *CF* négyszeg egyenlő az *AB, BC*-től befogott kétszeri derékszeggel. Adassék hozzájok a közös *HN*, mely az *AC* négyszege; tehát *KLM* gnomon és *CF, HN* négyszegek egyenlők az *AB, BC*-től befogott kétszeri derékszeggel, meg az *AC* négyszegével. De *KLM* gnomom, meg *CF, HN* négyszegek teszik az egész *ADEB*-t meg *CF*-et, melyek az *AB, BC* négyszegei; tehát az *AB, BC* negyszegei egyenlők az *AB, BC*-től befogott kétszeri derékszeggel, meg az *AC* uégyszegével.

Ha tehát sat.

8. Feladat:

Ha egy egyenes vonal akárhol vágatik, az egésztől s az egyik darabtól befogott négyszer vett derékszeg, a másik darab négyszegével együtt, egyenlő az egészre, meg az előbb mondott darabra, mint egy merő vonalra, írott négyszeggel.



Mert valamely *AB* egyen vágassék akárhol *C* pontnál: azt mondom, hogy az *AB, BC*-től befogott derékszeg az *AC* négyszegével együtt egyenlő az *AB* meg *BC*-re mint egy merő egyenre irott négyszeggel.

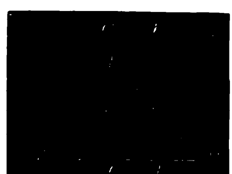
Mert nyújtassék *AB* egyenhez egyenesben *BD*, s legyen *BD, BC*-vel egyenlő, irassék *AD*-re *AEFD* négyszeg, és készíttessék el kettős képlet.

Minthogy *BC* egyenlő *BD*-vel, de *CB* egyenlő *GK*-val, s *BD, KN*-el, tehát *GK* is egyenlő *KN*-el. Ugyanazért QR is egyenlő *RP*-vel. És mivel *CB* egyenlő *BD*-vel s *GK, KN*-el; tehát *CK* egyenlő *BN*-el és *GR, RN*-el. De *CK* egyenlő *RN*-nel, mert *CP* egyközény pótlékai, tehát *BN* is egyenlő *GR*-el tehát *CK, KD, GR, RN* mind a négyen egymással egyenlők, tehát a négy együtt négy akkora mint *CK*. Ismét minthogy *CB* egyenlő *BD*-vel, de *BD, BK*-val azaz *CG*-vel egyenlő, s CB, GK-val azaz GQ-val egyenlö; tehát CG egyenlö GQ-val. És minthogy CG, GQ-val, QR, RP-vel egyenlök; AG is MQ-val s QL, RF-el egyenlök. De MQ egyenlö QL-el, mert ML egyközény pótlékai; tehát AG egyenlö RF-el; tehát AG, MQ, QL, RF mind a négyen egymással egyenlök; tehát a négy együtt négyakkora, mint AG. De megmutattaték, hogy a négy, CK, KD, GR, RN együtt négyakkora mint CK; tehát a nyolcz egyközény, mely az STU gnomont teszi, együtt négyakkora mint AK. És minthogy AK az AB, BC-töl befogott derékszeg, KB egyenlö levén BC-vel; tehát az AB, BC-töl befogott, négyszer vett derékszeg négyakkora mint AK. De megmutattaték, hogy STU gnomon is négyakkora mint AK, tehát az AB, BC közötti négyszer vett derékszeg egyenlö STU gnomonnal. Adassék hozzájok a közös OH, mely egyenlö az AC négyszegével; tehát az AB, BC-töl befogott négyszer vett derékszeg az AC négyszegével együtt egyenlö STU gnomonnal, meg OH-val. De STU gnomon meg OH az egész $AEFD$ négyszeget teszik, mely AD-re van állítva; tehát az AB, BC-töl befogott négyszer vett derékszeg az AC négyszegével együtt egyenlö az AD-re, azaz: az AB meg BC-re, mint egy merö egyenre irott négyszeggel.

Ha tehát sat.

9. Feladat:

Ha egy egyenes vonal egyenlö és nemegyenlö darabokra vágatik az egész egyen nemegyenlö darabjainak négyszegei kétakkorák, mint a hasonfél és a vágások közötti darab négyszegei.



Mert némi AB egyen vágassék egyenlö darabokra C-nél, és nemegyenlökre D-nél: azt mondom, hogy az AD, DB négyszegeik kétakkorák, mint az AC, CD négyszegei.

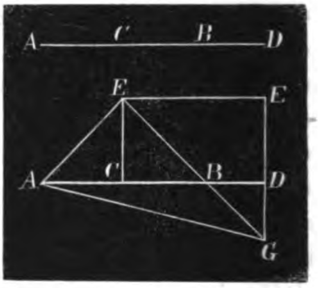
Mert vonassék C-böl AB-hez derékszegletre CE, és tétessék egyenlövé akár AC-vel akár CB-vel, vonassanak AE, EB, és D-n át vonassék EC-hez egyközü DF, F-en át pedig húzassék AB-hez egyközü FG, és vonassék AF.

Már minthogy AC egyenlő CE-vel, az EAC alatti szeglet is egyenlő az AEC alattival. És mivel a C-nél levő szeglet derékszeglet, a többi EAC, és AEC alattiak egy derékkel egyenlők; de együtt is egyenlők, tehát a CEA, CAE alattiak közül mindenik egy derékkszegletnek fele. Ugyanazért a CEB, EBC alattiak közül mindenik egy derékszegletnek fele, tehát az egész AEB alatti, derékszeglet. És mivel a GEF alatti egy derékszegletnek fele, az EGF alatti pedig derékszeglet, egyenlő levén az ECB alatti átelleni belsővel; tehát az EFG alatti harmadik, egy derékszegletnek fele; tehát a GEF alatti szeglet egyenlő az EFG alattival; ugy hogy EG oldal is egyenlő GF oldallal.— Ismét mivel a B-nél levő szeglet fél derékszeglet, az FDB alatti pedig derékszeglet, mivel az ECB alatti átelleni belsővel egyenlő; tehát a DFB alatti harmadik is fél derékszeglet; tehát a B-nél levő szeglet egyenlő a DFB alattival, ugy hogy FD oldal is egyenlő DB-vel. És minthogy AC egyenlő CE-vel, az AC négyszege is egyenlő a CE-jével, tehát az AC, CE négyszegeik kétakkorát tesznek, mint az AC négyszege. De az AC, CE négyszegeikkel egyenlő az AE négyszege, mert az ACE alatti szeglet derékszeglet; tehát az AE négyszege kétakkora mint az AC-é. Ismét minthogy EG egyenlő GF-el, a GE négyszege is egyenlő a GF-ével; tehát az EG, GF négyszegeik kétakkorát tesznek mint a GF négyszege. De az EG, GF négyszegeikkel egyenlő az EF-é, tehát az EF négyszege kétakkor mint az FG-é. Ugy de GF egyenlő CD-vel; tehát az EF négyszege kétakkora mint a CD-é. De az EA négyszege is kétakkora mint az AC-é, tehát az AE, EF négyszegeik kétakkorák mint az AC, CD négyszegeik. De az AE, EF négyszegeikkel egyenlő az AF-é; mert az AEF alatti, derékszeglet; tehát az AF négyszege kétakkora mint az AC, CD négyszegeik. Az AF-ével pedig egyenlők az AD, DF négyszegeik; mert a D-nél levő szeglet derékszeglet; tehát az AD, DF négyszegeik kétakkorák, mint az AC, CD négyszegeik. De DF egyenlő DB-vel, tehát az AD, DB négyszegeik kétakkorák, mint az AC, CD négyszegeik.

Ha tehát sat.

10. Feladat:

Ha egy egyenes vonal ketté vágatik, s ahhoz más egyen egyenesben hozzá toldatik: az egésznek a hozzátettel együtt és a hozzátettnek négyszegei kétakkorák, mint a hasonfélnek, és a hasonfélből s hozzátettből álló egyennek négyszegei.



Mert *AB* egyen vágassék ketté *C*-nél, és toldassék hozzá egyenesben valamely *BD* egyen: azt mondom, hogy az *AD*, *DB* négyszegeik együtt kétakkorát tesznek, mint az *AC*, *CD* négyszegeik.

Mert *C* ponton át vonassék *AB*-hez derékszegletre *CE*, és tétessék egyenlővé akár *AC*-vel akár *CB*-vel, és vonassék *EA*, *EB*: *E*-n át húzassék *AD*-hez egyenközü *EF*, *D*-n át pedig húzassék *CE*-hez egyközü *FD*. Már mivel *EC*, *FD* egyközü egyeneket *EF* egyen vágja, tehát *CEF*, *EFD*, két derékszeglettel egyenlők; tehát *FEB*, *EFD* két deréknél kisebbek; de a két derékszegletnél kisebbekből kiinduló egyenek kinyujtatván öszvetalálkoznak; *EB*, *FD* egyenek tehát *B* és *D* felől megnyújtatván, öszve fognak érni. Nyújtassanak meg, és érjenek öszve *G*-nél, s vonassék *AG*.

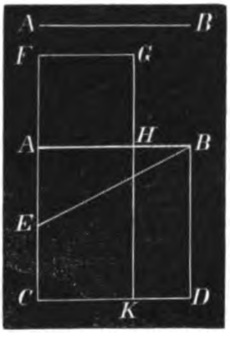
Minthogy *AC* egyenlő *CE*-vel, az *AEC* alatti szeglet is egyenlő az *EAC* alattival, a *C*-nél való pedig derékszeglet; tehát az *EAC*, *AEC* alattiak közül mindenik egy derékszegletnek fele. Ugyanazért *CEB*, *EBC*-nek mindenike egy deréknek fele; tehát az *AEB* alatti, derékszeglet. Továbbá mivel az *EBC* alatti, félderékszeglet, a *DBG* alatti is félderékszeglet. De a *BDG* alatti, derékszeglet; mert egyenlő az *DCE* alattival, váltó szegletek levén; tehát a hátralevő *DGB* alatti egyenlő a *DBG* alattival, úgy hogy *BD* oldal is egyenlő *DG* oldallal. Ismét minthogy az *EGF* alatti egy derékszegletnek fele, az *F*-nél levő szeglet pedig egyenlő levén a *C*-nél levő átellenivel, derék; tehát a hátralevő *FEG* alatti, egy derékszegletnek fele, tehát az *EGF* alatti szeglet az *FEG* alattival egyenlő; úgy hogy *GF* oldal is *FE* oldallal egyenlő. És minthogy *EC* egyenlő

CA-val, az EC négyszege is egyenlő a CA négyszegével; tehát az EC, AC négyszegeik két akkorák mint a CA négyszege. De az EC, CA négyszegeikkel egyenlő az AE-é; tehát az EA négyszege kétakkora mint az AC négyszege. Ismét minthogy FG, FE-vel egyenlő, a GF négyszege is egyenlő az FE-ével; tehát a GF, FE négyszegeik kétakkorák, mint az EF-é. De a GF, FE négyszegeikkel egyenlő az EG-é, tehát az EG-é kétakkora mint az EF-é. De EF egyenlő CD-vel, tehát az EG négyszege kétakkora mint a CD-é. De megmutattaték, hogy az EA négyszege kétakkora mint az AC-é, tehát az AE, EG négyszegeik kétakkorák, mint az AC, CD négyszegeik. Úgy de az AE, EG négyszegeikkel egyenlő az AG négyszege; tehát az AG-é kétakkora mint az AC, CD négyszegeik. Az AG-vel pedig az AD, DG négyszegeik egyenlők, tehát az AD, DG négyszegeik kétakkorák mint az AC, CD-éik. De DG egyenlő DB-vel, tehát az AD, DB négyszegeik kétakkorák mint az AC, CD négyszegeik.

Ha tehát sat.

11. Feladat:

Adott egyent úgy vágni, hogy az egésztől és az egyik darabtól befogott derékszeg egyenlő legyen a másik darab négyszegével.



Legyen az adott egyen AB: már AB-t úgy kell vágni, hogy az egésztől és az egyik darabtól befogott derékszeg egyenlő legyen a másik darab négyszegével.

Irassék AB-re $ABDC$ négyszeg, és AC vágassék ketté E pontnál, vonassék EB, nyújtassék CA, F-ig, úgy hogy EF, EB-vel egyenlő legyen; írassék AF-re FH négyszeg, és GH nyújtassék K-ig: azt mondom, hogy az AB, BH-tól befogott derékszeg egyenlő az AH négyszegével.

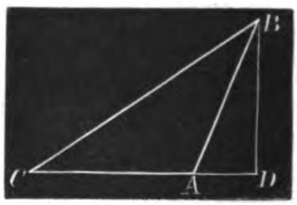
Mert minthogy AC egyen ketté van vágva E-nél s hozzá van toldva AF; tehát a CF, FA-tól befogott derékszeg az AE négyszegével együtt egyenlő az EF négyszegével. Már EF

egyenlő *EB*-vel, tehát a *CF*, *FA*-tól befogott derékszeg az *AE* négyszegével együtt egyenlő az *EB* négyszegével. De az *EB* négyszege egyenlő a *BA*, *AE* négyszegeikkel, mert az *A*-nál levő szeglet derékszeglet, miszerint a *CF*, *FA* közötti derékszeg az *AE* négyszegével együtt egyenlők a *BA*, *AE* négyszegeikkel. Vétessék el az *AE* közös négyszege, tehát a megmaradt *CF*, *FA* közötti derékszeg egyenlő az *AB* négyszegével. De a *CF*, *FA* közötti derékszeg az *FK*, mivel *AF* egyenlő *FG*-vel; az *AB* négyszege pedig *AD*; tehát *FK* egyenlő *AD*-vel. Vétessék el a közös *AK*; a maradék *FH* tehát egyenlő *HD*-vel. Úgy de *HD* az *AB*, *BH* közötti derékszeg, *AB*, *BD*-vel egyenlő levén; az *FH* megint az *AH* négyszege, tehát az *AB*, *BH*-tól befogott derékszeg egyenlő a *HA* négyszegével.

Az adott *AB* egyen tehát úgy van elvágva *H*-nál, hogy az *AB*, *BH* közé sat.

12. Feladat:

A tompa szegletü háromszegekben a tompa szegletet átfogó oldal négyszege, a tompa szegletet befogó egyik oldaltól, melyre, ha kinyújtatik, a függő esik, és a függő által a tompa szegleten kivül hozzávágott darabtól befogott kétszer vett derékszeggel nagyobb, a tompa szegletet befogó oldalak négyszegeinél.



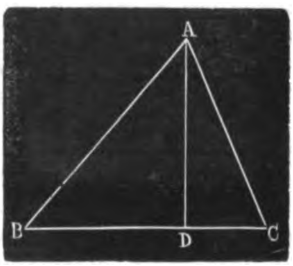
Legyen *ABC* tompa szegletü háromszeg, és annak tompa szegszeglete a *BAC* alatti: vonassék *B* pontból a megnyújtott *CA*-ra *BD* függő: azt mondom, hogy a *BC* négyszege a *CA*, *AD*-től befogott kétszeri derékszeggel nagyobb, a *BA*, *AC* négyszegeiknél.

Mert minthogy *CD* egyen vágva van valahol *A* pontnál; a *CD* négyszege egyenlő a *CA*, *AD* négyszegeikkel, meg a *CA*, *AD*-től befogott kétszer vett derékszeggel. Adassék mindkettőhöz a *BD* négyszege, tehát a *CD*, *DB* négyszegeik egyenlők a *CA*, *AD*, *DB* négyszegeikkel, meg kétszer a *CA*, *AD*-től befogott kétszer vett derékszeggel. De a *CD*, *DB* négyszegeikkel egyenlő a *CB*-é, a *D*-nél való szeglet derék levén az AD, DB négyszegeikkel megint egyenlö az AB-é; a CB négyszege tehát egyenlö a CA, AB négyszegeikkel, meg a CA, AD-től befogott kétszeri derékszeggel; úgy hogy a CB négyszege a CA, AB négyszegeiknél a CA, AD-töl befogott kétszer vett derékszeggel nagyobb.

A tompa szegletü háromszegekben tehát sat.

13. Feladat:

A hegyes szegletü háromszegekben a hegyes szegletet átfogó oldal négyszege a hegyes szegletet befogó egyik oldaltól, melyre a függö esik, és a függö által a hegyes szeglet mellé belöl oda vágott darabtól befogott derékszeggel kisebb, a hegyes szegletet befogó oldalak négyszegeinél.

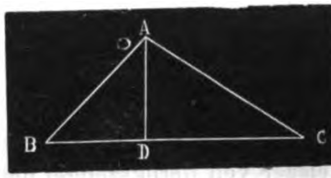


Legyen ABC hegyes szegletü háromszeg, és ennek hegyes szeglete a B-nél levö; és vonassék A pontból BC-re AD függö: azt mondom, hogy az AC négyszege kétszer a CB, BD-töl befogott derékszeggel kisebb a CB, BA négyszegeinél.

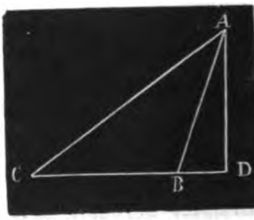
Mert minthogy CB egyen vágva van valahol D-nél; tehát a CB, BD négyszegei egyenlök a CB, BD-től befogott kétszeri derékszeggel, meg a DC négyszegével. Adassék mindenikökhöz a DA négyszege; e szerint a CB, BD, DA négyszegei egyenlök a CB, BD-től befogott kétszeri derékszeggel, és az AD, DC négyszegeikkel. De a BD, DA négyszegeikkel egyenlö az AB-é, derékszeglet levén a D-nél levö: az AD, DC négyszegeikkel megint egyenlö az AC-é; tehát a CB, BA négyszegeik egyenlök az AC-ével és a CB, BD közti kétszeri derékszeggel; azaz: az AC négyszege magára kisebb a CB, BA négyszegeiknél, a CB, BD-töl befogott kétszeri derékszeggel.

A hegyes szegletü háromszegekben tehát sat.

Jegyz. Ugyan ez az állítás igaz a tompa, és derékszegletü háromszegekröl is; de az alkalmazásban *három* esetet különböztetünk meg; a függö t. i. vagy belöl vagy kivül esik a háromszegen, vagy egyik oldalával ugyanaz.

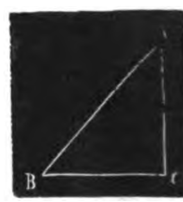


Elsö eset : *ABC* háromszegben, melynek *A*-nál levő szeglete tompa, a *C*-nél levő szegletet átfogó *AB* oldal négyszege az ugyanazon szegletet befogó *AC*, *CB* oldalok négyszegeinél a *BC*, *CD* egyenektől befogott kétszeri derékszeggel kisebb. — Bebizonyítása épen mint felebb.



Második eset : *ABC* tompa szegletü háromszegben a *C*-nél levő hegyes szegletet átfogó *AB* oldal négyszege, az *AC*, *CB* négyszegeiknél a hegyes szegletet befogó azon oldaltól, melyre, ha kinyújtatik, a függő *AD* esik, és a felőle a függő által elvágott darabtól befogott kétszeri derékszeggel kisebb.

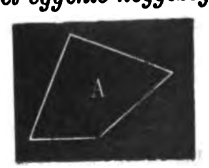
Mert mivel a *D*-nél való szeglet derékszeglet, az *ABC* alatti nagyobb egy deréknél, tehát az *AC* négyszege egyenlő az *AB* és *BC* négyszegeikkel, meg a *BC*, *BD*-től befogott kétszeri derékszeggel. Adassék mindenikhez a *BC* négyszege; miszerint az *AC*, *BC* négyszegeik egyenlők az *AB* négyszegével, meg a *BC* kétszer vett négyszegével, meg a *BC*, *BD* közti kétszeri derékszeggel. Továbbá mivel a *DC* akárhol van vágva *B*-nél, a *CD*, *BC* közti derékszeg egyenlő a *DB*, *BC* közti derékszeggel, meg a *BC* négyszegével; tehát a *CD*, *BC* közti kétszer vett derékszeg egyenlő a *DB*, *BC* közti kétszeri derékszeggel, meg a *BC* kétszer vett négyszegével; ennélfogva az *AC*, *BC* négyszegeik egyenlők az *AB* négyszegével, meg a *BC*, *BD* közti kétszeri derékszeggel; vagy más szóval, az *AB* négyszege az *AC*, *BC* négyszegeiknél a *BC*, *BD* közti kétszeri derékszeggel kisebb.

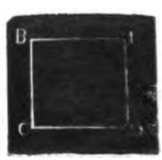


Harmadik eset : Csak a derékszegletü háromszegekben fordulhat elő, és semmi újabbat nem mond, csak a mit az I. 47. F. Ugyanis, az *AC* négyszege az *AB*, *BC* négyszegeiknél a *BC* és *BC* közti kétszer vettt derékszeggel, azaz a *BC* kétszeri négyszegével kisebb; vagyis az *AC* négyszege a *BC* négyszegével kisebb az *AB* négyszegénél.

14. Feladat:

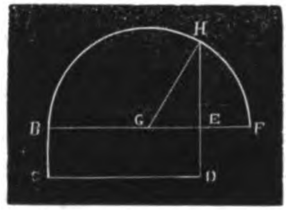
Adott egyenes vonalu képlettel egyenlő négyszegét alkotni.





Legyen *A* az adott egyenes vonalu képlet; *A* egyenes vonaluval egyenlő négyszeget kell alkotni.

Alkottassék *A* egyenes vonaluval egyenlö *BD* derékszegletü egyközény: ha ebben *BE* egyenlö *CD*-vel, teljesítve leend a feladat.



Mert *A* egyenes vonaluval egyenlö *BD* négyszeg lenne alkotva; ha pedig nem, *BE* vagy *ED* nagyobb. Legyen nagyobb *BE*, és nyújtassék *F*-ig, tétessék *EF*, *ED*-vel egyenlövé, azután *BF* ketté vágatván *G*-nél, *G* középponttal, s *GB* vagy *GF* közzel irassék *BHF* félkör, *DE* nyújtassék *H*-ig, és vonassék *GH*.

Már minthogy *BF* egyen *G*-nél egyenlö, *E*-nél nem egyenlö darabokra van vágva; tehát a *BE*, *EF*-töl befogott derékszeg a *GE* négyszegével együtt egyenlö a *GF* négyszegével. Már pedig *GF* egyenlö *GH*-val, tehát a *BE*, *EF*-töl befogott derékszeg a *GE* négyszegével együtt egyenlö a *GH* négyszegével. De a *GH*-éval egyenlök a *HE*, *EG* négyszegeik; tehát a *BE*, *EF* közti derékszeg, a *GE* négyszegével együtt, egyenlö a *HE*, *EG* négyszegeikkel. Vétessék el mindeniktöl a *GE* négyszege, tehát a megmaradt, *BE*, *EF*-töl befogott derékszeg egyenlö az *EH* négyszegével. Úgy de a *BE*, *EF* közti derékszeg a *BD*, mivel *FE* egyonlö *ED*-vel; *BD* egyközény tehát egyenlö a *HE* négyszegével. Már pedig *BD* egyenlö *A* egyenesvonaluval, tehát *A* egyenesvonalu egyenlö az *EH*-ra írt négyszeggel.

Alkotva van tehát *A* egyenesvonaluval egyenlö *EH*-ra irott négyszeg; mit tenni kelle.

Pótlék jegyzés a 7. és 8. feladathoz.

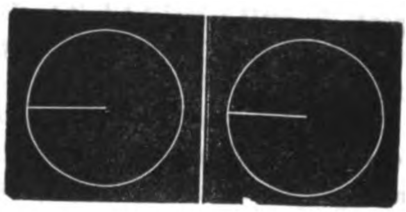
A *képletet elkészíteni* (καταγραφεῖν τὸ σχῆμα) azt teszi, hogy a szóban forgó egyközénybe egy átmérőt húzzunk, s az egyközény valamelyik oldalán kijegyzett ponton át, a másik oldalához egyközü egyent vonván, azon ponton át, melyben ez az átmérővel találkozik, újra az egyközény másik oldalával vonjunk egyközü egyent; röviden mondva jeleljünk ki két átmérő körüli egyközényt és két pótlékot. — *Kettös* képletet készítünk el, midőn az elébbi módon elkészített képlet átmérő körüli egyik egyközényében újolag pótlékokat és átmérö körüli kisebb egyközényeket jelelünk ki.

EUKLIDES ELEMEINEK

HARMADIK KÖNYVE.

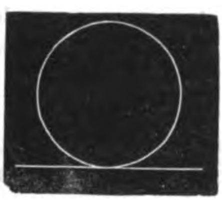
Értelmezések.

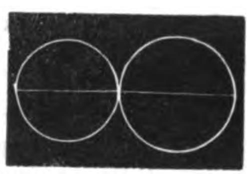
1. *Egyenlő körök* azok, melyeknek átmérői egyenlők, vagy: melyekben a középponti egyenek egyenlők.



Jegyz. A *középponti* (középpontból a kerületig vont) *egyenek*et a mai írtan *sugarak*nak (radius), vagy *félmérők*nek (Halbmesser) nevezi.

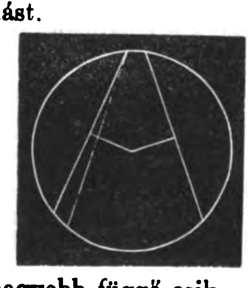
2. *Egyen a kört érinteni* mondatik, midőn a kört érve vagy illetve és tovább nyújtva nem szeli a kört.



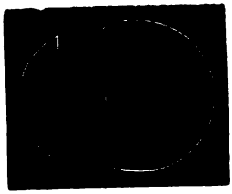


3. *Körök egymást érinteni* mondatnak, mikor egymást illetve nem szelik egymást.

4. Körben a *középponttól egyenlő távolságra lenni* mondatnak azok az *egyenek*, melyekre a középponttól vont függők egyenlők.



5. *Távulabb* lenni az mondatik, melyre a nagyobb függő esik.



6. *Körszelet*, egy egyen s a kör kerülete által körülfogott képlet.

Jegyz. A *kerületet* mint egészet, és az *ívet*, mint annak részét, Euklides nem különbözteti meg, s a *kerület* szó használatában e két eszméből több-kevesebb mindig annyira öszve van olvadva, hogy elkülönözésöket Euklides *fordítója* sikeretlenül próbálná. A német sem bántotta; nincs is miért.

7. A szelet *szeglete*, melyet az egyen s a kör kerülete fog be.

8. *Szeletbeli szeglet* — mikor a szelet kerületében vétetik némi pont, és attól a szelet talpát tevő egyen két végére egyenek vonatnak — a vont egyenek közé fogott szeglet.

9. A mennyiben a szegletet befogó egyenek egy darabot a kerületből kivágnak, a szeglet azon a *kerületen állónak* mondatik.

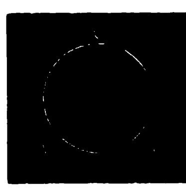
10. A *kör czikkje*, a kör középpontjához állított szegletet befogó egyenek, és ezek közé vágott kerület által körülfogott képlet.

Jegyz. A *czikk* (sector) nevet magyar ember előtt nem igazoljuk, a ki jól tudja, milyen alakja van egy czikk-almának.

11. *Hasonló szeletek*, melyekbe egyenlő szegletek férnek, vagy: a melyekbeli szegletek egymással egyenlők.

1. Feladat:

Adott kör középpontját meglelni.



Legyen az adott kör *ABC*: *ABC* kör középpontját kell meglelni.

Vonassék belé akármely *AB* egyen és vágassék ketté *D* pontnál, és *D*-től *AB*-hez derékszegletre vonassék *DC*, nyújtassék *E*-ig; *CE* pedig vágassék ketté F-nél : azt mondom, hogy F a középpontja ABC körnek.

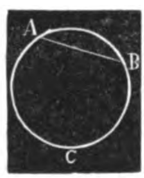
Mert, ha nem, legyen G az, ha lehet, és vonassanak GA, GD, GB. Már mivel AD egyenlő BD-vel, DG pedig közös, AD, DG két egyen, DB, GD két egyennel külön-külön egyenlők, GA talp is egyenlő GB talppal, mert középpontiak ; tehát az ADG alatti szeglet egyenlő a GDB alatti szeglettel. Mikor pedig más egyenre álló egyen a szomszéd szegleteket egymással egyenlőkké teszi, a szomszéd szegletek mindenike derék ; tehát a GDB alatti, derékszeglet. De derékszeglet az FDB alatti is ; tehát az FDB alatti egyenlő a GDB alattival, kisebb a nagyobbal, mi lehetlen. G tehát nem középpontja ABC körnek. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy más sem egy is F-en kivül.

Tehát F pont, középpontja ABC körnek : mit kelle tenni.

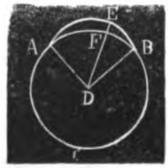
Tanuság : Ebből világos, hogy ha a körben egy egyen más egyent ketté és derékszegletre vág, a kör középpontja a vágó egyenben van.

2. Feladat:

Ha egy kör kerületében akárhol két pont vétetik : a pontokat öszvekötő egyen a körön belől esend.



Legyen ABC kör, és ennek kerületén vétessék akárhol két pont A és B : azt mondom, hogy az A-tól B-hez vont egyen belöl esend a körön.



Mert, ha nem, essék kivül, ha lehet, mint például AEB : kerestessék meg az ABC kör középpontja, legyen ez D ; vonassanak DA és DB, és nyújtassék DFE.

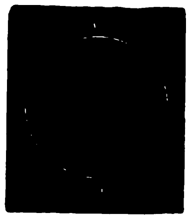
Minthogy már DA egyenlő DB-vel, a DAE alatti szeglet is a DBE alattival egyenlő; és mivel AEB egyen DAE háromszegnek kinyújtott egyik oldala ; tehát a DEB alatti szeglet nagyobb a DAE alattinál. De a DAE alatti szeglet egyenlő a DBE alattival ; tehát a DEB alatti nagyobb a DBE alattinál. De a nagyobbik szegletet a nagyobbik oldal fogja át, tehát *DB* nagyobb *DE*-nél. Már pedig *DB* egyenlö *DF*-el, tehát *DF* nagyobb a *DE*-nél, kisebb a nagyobbnál, mi lehetetlen. Tehát az *A*-tól *B*-hez vont egyen nem esend kivül a körön. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy a kerületre sem; tehát belől esend.

Ha tehát egy kör kerületében sat.

Jegyz. Itt megint az I. könyv 27. feladatánál tett figyeltetésünkre utasítjuk az olvasót, ki az ott mondottakat eszében nem tartva, a felebbi feladat képleténél méltán megbotránkozhatnék, mikép kivánjuk tőle, hogy az *AEB* vonalt egyenesnek vegye; már pedig eszmében annak kell vennie.

3. Feladat:

Ha a körben a középponton átvont egyen nem a középponton átvont egyent vág ketté, derékszegletre vágja, és ha derékszegletre vágja, ketté is vágja.



Legyen *ABC* kör, és ebben a középponton átvont *CD* egyen nem a középponton átmenő *AB* egyent vágjon ketté *F* pontnál: azt mondom, hogy derékszegletre is vágja.

Mert vétessék *ABC* kör középpontja, legyen ez *E*, és vonassanak *EA, EB*.

Minthogy *AF* egyenlö *FB*-vel, *FE* pedig közös, két oldal egyenlö kettővel, s *EA* talp egyenlö *EB* talppal; tehát az *AFE* alatti szeglet egyenlö az *EFB* alatti szeglettel. Mikor pedig egy egyenen álló más egyen a szomszéd szegleteket egymással egyenlökké teszi, a szomszéd szegletek mindenike derék; tehát mind *AFE* mind *BFE* derékszegletek. A középponton átmenő *CD* egyen tehát a nem a középponton átvont *AB* egyent ketté vágva, derékszegletre is vágja.

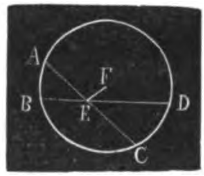
De vágja *CD AB*-t derékszegletre: azt mondom, hogy ketté is vágja.

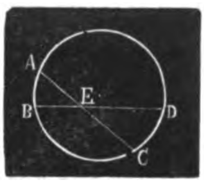
Mert ugyanazon készületeket téve, minthogy *EA* egyenlö *EB*-vel, az *EAF* alatti szeglet is egyenlö az *EBF* alattival. Az *AFE* alatti derékszeglet is egyenlö a *BFE* alatti derékkel, tehát EAF és EFB két háromszegben két szeglet egyenlő két szeglettel, egyenlő a közös EF oldaluk is, mely az egyenlő szegletek egyikét átfogja; tehát a többi oldalok is külön-külön egyenlők lesznek; tehát AF egyenlö BF-el.

Ha tehát sat.

4. Feladat:

Ha a körben nem a középponton átvont két egyen egymást vágja, egymást nem vágják ketté.





Legyen $ABCD$ kör, és abban AC, BD, nem a középponton átvont két egyen, vágja egymást E pontnál: azt mondom, hogy egymást nem vágják ketté.

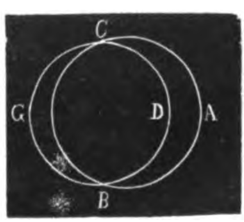
Mert, ha lehetséges, vágják ketté egymást, úgy hogy AE legyen egyenlő EC-vel, BE, ED-vel; vétessék az $ABCD$ kör középpontja, legyen az F, és vonassék FE.

Minthogy a középponton átmenő FE egyen a nem a középponton átvont AC egyent ketté vágja, derékszegletre vágja; tehát az FEA alatti szeglet derék. Ismét mivel FE egyen a nem a középponton átmenö BD egyent ketté vágja, tehát az FEB alatti szeglet derék. De meg van mutatva, hogy az FEA alatti is derék, tehát az FEA alatti egyenlő az FEB alattival, kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. AC, BD tehát egymást nem vágják ketté.

Ha tehát a körben sat.

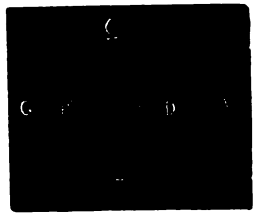
5. Feladat:

Ha két kör szeli egymást, középpontjok nem lesz azonegy.



Mert ABC, CDG két kör vágja egymást B C pontnál: azt mondom, hogy nem lesz azonegy középpontjok.

Mert, ha lehet, legyen az E: köttessék öszve EC, és húzassék EFG akármelyfelé.



Már mivel E, ABC kör középpontja; EC egyenlö EF-el. Ismét mivel E pont középpontja CDG körnek; CE egyenlö EG-vel: de megmutatták, hogy EC egyenlö EF-el is; tehát EF egyenlö EG-vel, kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. E tehát nem középpontja ABC, CDG köröknek.

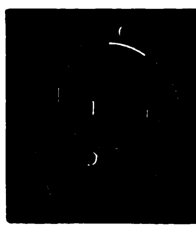
Ha tehát két kör sat.

6. Feladat:

Ha két kör egymást érinti, nem lesz azonegy középpontjok.

Mert ABC, CDE két kör érintse egymást C pontban: azt mondom, hogy nem lesz azonegy középpontjuk.

Mert, ha lehet, legyen az F: köttessék öszve FC, és vonassék akármerre FEB.



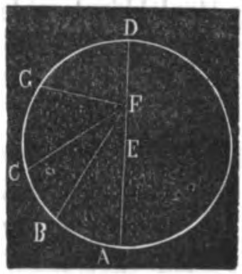
Minthogy már F, ABC körnek középpontja; FC egyenlö BF-el. Ismét mivel F, CDE kör középpontja, FC egyenlö FE-vel. De megmutattaték, hogy FC, FB-vel is egyenlö; tehát FE egyenlö FB-vel, kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. F tehát nem középpontja ABC, CDE köröknek.

Ha tehát két kör sat.

7. Feladat:

Ha a kör átméröjén vétetik egy pont, mely ne legyen a kör középpontja, s ezen pontból a körre egyenek vonatnak: legnagyobb az, mely a középponton megy által, legkisebb ennek maradéka: a többiek közül mindig a középponthoz közelebbi nagyobb a távolabbinál: és csak két egyenlö egyent vonhatni azonegy pontból a körre a legkisebbiktöl kétfelé.

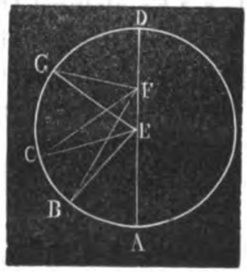
Legyen $ABCD$ kör, és annak átméröje AD: AD-n vétessék F pont, mely nem középpontja a körnek, a kör középpontja pedig legyen E, és F-töl $ABCD$ körre vonassanak



FB, FC, FG egyenek: azt mondom, hogy a legnagyobbik *FA*, a legkisebbik *FD*: a többiek közül pedig *FB* nagyobb mint *FC* és *FC* mint *FG*.

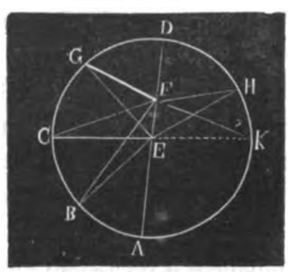
Mert vonassanak *EB, EC, EG*.

És minthogy minden háromszegnek két oldala nagyobb a harmadiknál; tehát *EB, EF* nagyobb *BF*-nél. *AE* pedig egyenlö *BE*-vel; *BE, EF* tehát egyenlők *AF*-el; *AF* tehát nagyobb *BF*-nél. Ismét mivel *BE* egyenlö *CE*-vel, *FE* pedig közös; *BE, EF* két oldal egyenlö *CE, EF* két oldallal. De a *BEF* alatti szeglet nagyobb a *CEF* alattinál; tehát *BF* talp nagyobb *CF* talpnál. Ugyanazért *CF* is nagyobb *FG*-nél.



Ismét mivel *GF, FE* nagyobbak *EG*-nél, *EG* pedig egyenlö *ED*-vel, tehát *GF, FE* nagyobbak *ED*-nél. Vétessék el a közös *EF*; ennélfogva a maradék *GF* nagyobb a maradék *FD*-nél. Legnagyobb ennélfogva az *FA*, legkisebb az *FD*: *FB* továbbá nagyobb *FC*-nél, és *FC, FG*-nél.

Még azt is mondom, hogy *F* pontból csak két egyenlö egyent vonhatni *ABCD* körre a legkisebbtöl *FD*-töl kétfelé. Mert állíttassék *EF* egyenhez a benne levö *E* pontnál a *GEF* alatti szeglettel egyenlö *FEH* alatti, és vonassék *FH*. Már mivel *GE* egyenlö *EH*-val, *EF* pedig közös, a *GE, EF* két oldal *HE, EF* két oldallal egyenlök, és a *GEF* alatti szeglet egyenlö a *HEF* alatti szeglettel; tehát *FG* talp egyenlö *FH* talppal. Azt mondom továbbá, hogy *FG*-vel egyenlö más egyen nem vonathatik *F* pontból a körre. Mert, ha lehet, vonassék *FK*. Mivel *FK* egyenlö *FG*-vel, de *FH* is *FG*-vel, tehát *FK* egyenlö *FH*-val, a középponton átmenö egyenhez közelebbi



a távulabbival, mi lehetetlen. F pontból tehát nem vonhatni a körre FG-vel egyenlö más egyent, tehát csak azt az egyet.

Ha tehát egykörben sat.

Jegyz. Némely kéziratban e bizonyítmány utolsó része, ezen szók után : „*és vonassék* FK“ a következő módon van változtatva :

Avagy máskép : Vonassék EK is.

És minthogy GE egyenlö EK-val, EF pedig közös, és FG talp egyenlö FK talppal; tehát a GEF alatti szeglet egyenlö a KEF alattival. De a GEF alatti az FEH alattival egyenlő, tehát az FEH alatti is az FEK alattival egyenlö; kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. Nem vonhatni tehát F pontból a körre GF-el egyenlö más egyent, tehát csak egyet.

Ha tehát sat.

8. Feladat:

Ha a körön kivül vétetik pont, s ezen pontból a körre egyenek vonatnak, még pedig egy közülök a középponton át, a többiek akárhol : legnagyobb a középponton átvont, legkisebb a pont és átmérő közötti : ismét a többiek u. m. a kerület öblire vontak közül a középponton átvonthoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál : a kerület domborusdgára esök közül ellenben a legkisebbikhez közelebbi mindig kisebb a távulabbinál. És csak két egyenlö egyen vonathatik azonegy pontból a körre, a legkisebbiktöl kétfelé.

Legyen ABC kör, s ABC körön kivül vétessék D pont : ettöl vonassanak a körre DA, DE, DF, DC egyenek, és DA menjen a középponton át : azt mondom, hogy legnagyobb egyen a középponton átmenö DA, legkisebb a pont és AG átmérő közötti DG : a többiek u. m. a kerület $AEFC$ öblire vont egyenek közül pedig a középponton átmenöhöz közelebbi mindig nagyobb a távulabbinál, u. m. DE, DF-nél, DF, DC-nél : a kerület $HLKG$ domboruságára vont egyenek közül ellenben a legkisebbikhez DG-hez közelebbi mindig kisebb a ávulabbinál, u. m. DK, DL-nél, DL, DH-nál.

Mert vétessék ABC körnek középpontja, legyen ez M, és vonassanak ME, MF, MC, MK, ML, MH.

Minthogy AM egyenlő EM-el, adassék hozzájok a közös MD; tehát AD egyenlő EM meg MD-vel. De EM, MD nagyobbak ED-nél; tehát AD nagyobb ED-nél. Ismét mivel EM egyenlő FM-el, adassék hozzájok a közös MD, tehát EM, MD egyenlők FM, MD-vel, és az EMD alatti szeglet nagyobb az FMD alattinál. Tehát ED talp nagyobb FD-nél. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy FD is nagyobb CD-nél; AD tehát legnagyobb, aztán DE nagyobb DF-nél, és DF, DC-nél.

És minthogy MK, KD nagyobbak MD nél, MG pedig egyenlő MK-val, tehát a maradék KD nagyobb a maradék GD-nél; és így DG kisebb DK-nál. És minthogy MLD háromszegben ennek egyik MD oldalára MK, KD két egyen belöl öszveállíttatott, tehát MK meg KD kisebb mint ML meg LD; melyekből MK ML el egyenlő; tehát a maradék DK kisebb a maradék DL-nél. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy DL is kisebb DH-nál; legkisebb tehát DG, és DK, DL-nél, DL, DH-nál kisebbek.

Azt is mondom, hogy D pontból csak két egyenlő egyent vonhatni a körre a legkisebbiktől DG-től kétfelé.

Mert MD egyenre a benne levő M pontnál állíttassék a KMD alatti szeglettel egyenlő DMB alatti szeglet, és vonassék DB. És mivel MK MB-vel egyenlő, MD pedig közös, a KM, MD két egyen BM, MD két egyennel különkülön egyenlők, és a KMD alatti szeglet egyenlő a BMD alattival; tehát DK talp egyenlő DB talppal. De azt mondom, hogy D pontból DK egyennel egyenlő más egyen nem vonathatik a körre. Mert ha lehet, vonassék és legyen az DN. Már mivel DK, DN-el egyenlő; de DK, DB-vel is egyenlő; tehát DB egyenlő

DN-el, a legkisebbikhez közelebbi a távulabbival, mi lehetetlen. Nem vonhatni hát D pontból kettőnél több egyenlő egyent ABC körre a legkisebbiktől DG-től kétfelé.

Ha tehát egy körön kivül sat.

1. *Jegyz.* Ezen bizonyítmány utolsó részéhez is létez egy változtatási pótlék, e szók utánra : „*és legyen az* DN.“

Vagy másképp : és vonassék MN. Minthogy KM egyenlő MN-el, MD pedig közös, és DK talp DN talppal egyenlő; tehát a KMD alatti szeglet is egyenlő az NMD alattival. De a KMD alatti a BMD alattival egyenlő; tehát a BMD alatti is az NMD alattival egyenlő, kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. Nem vonhatni tehát D pontból két egyenlő egyennél többet ABC körre DG-től a legrövidebbtől kétfelé.

Ha tehát sat.

2. *Jegyz.* Az oxfordi kiadó ezt a 8-dik feladatot, melyen rontó kezek nyomai erösen látszanak, következöleg szerkeszté :

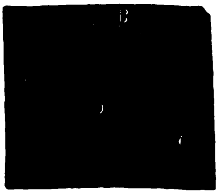
Ha egy körön kivül vétetik pont, s ezen pontból a körre egyenek vonatnak, még pedig egy közülök a középponton át, a többiek akárhol : a kör öblére vont egyenek között legnagyobb a középponton átmenő : a többiek közöl pedig mindig a középponton átmenőhöz közelebbi nagyobb a távulabbinál : a kerület domboruságára vontak között legkisebb a pont és átmérö közötti, a többiek közöl pedig mindig a legkisebbhez közelebbi kisebb a távulabbinál; sat.

Az alkalmazásban is ahhozképest így :

Legyen ABC kör, és ABC körön kivül vétessék D pont : ettől vonassanak a körre DA, DE, DF, DC egyenek, és DA menjen a középponton át : azt mondom, hogy a kör $AEFC$ öblire vont egyenek közt legnagyobb a középponton átmenő DA ; és DE nagyobb DF-nél, DF DC-nél ; sat.

9. Feladat:

Ha a körön belől vétetik pont, és ezen pontból a körre két egyenlő egyennél többet vonhatni : a vett pont a körnek középpontja.



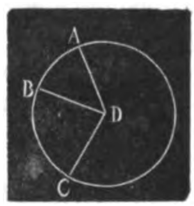
Legyen ABC kör, abban D pont, és a D től ABC körre lehessen két egyenlő egyennél többet, u. m. DA-t, DB-t, DC-t vonni : azt mondom, hogy D pont ABC körnek középpontja.

Mert vonassanak *AB, BC,* vágassanak ketté *E F* pontoknál, és *ED, FD* öszveköttetvén nyújtassanak ki *G K H L* pontokig.

Már mivel *AE* egyenlő *EB*-vel, és *ED* közös : *AE, ED* két oldal egyenlő *EB, ED* két oldallal : *DA* talp is egyenlő *DB* talppal; tehát az *AED* alatti szeglet a *BED* alatti szeglettel egyenlő; derékszeglet tehát mind az *AED* mind a *BED* alatti, *GK* tehát ketté, és derékszegletre vágja *AB*-t. És minthogy ha a körben egy egyen más egyent ketté és derékszegletre vág, a kör középpontja a vágó egyenben van; tehát az *ABC* kör középpontja *GK*-ban van. Ugyan azért *HL*-ben is van a kör középpontja. De *GK, HL*-ben semmi sem közös, csak *D* pont; *D* tehát középpontja *ABC* körnek.

Ha tehát a körnek sat.

Más bizonyítmány.



Ugyanis *ABC* körön belöl vétessék némi *D* pont, és *D* pontból essék *ABC* körre több mint két egyenlő egyen, u. m. *AD, DB, DC* : azt mondom, hogy a vett pont *ABC* kör középpontja.

Mert ha nem, legyen ha lehet *E* az, köttessék össze *ED* és nyújtassék *F G* pontokig, *FG* tehát *ABG* körnek átmérője. Már mivel *ABC* körben *FG* átmérőn vétetett némi *D* pont, mely nem a kör középpontja, *DG* legnagyobb leend, *DC* nagyobb *DB*-nél, és *DB, DA*-nál. De egyenlők is, mi lehetlen; *E* tehát nem középpontja *ABC* körnek. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy más sem egy is *D*-n kivül; *D* pont tehát *ABC* körnek középpontja.

Jegyz. Az előbbinél sokkal elegansabb bizonyítmány, s hajlandók vagyunk hinni, hogy e volt az eredeti euklidesi, mint mely a közelebbi 7-dik feladaton alapúl.

10. Feladat:

Kör kört nem vág két pontnál többen.

Mert, ha lehet, *ABC* kör *DEF* kört vágja két pontnál többen, u. m. *B*-ben, *G*-ben, *F*-ben, *H*-han, és vonatván *BH*, *BG*, vágassanak ketté *K L* pontoknál; aztán *K*-tól *L*-töl *BH*-hoz *BG*-hez derékszegletre húzatván *KC LM* egyenek, nyújtassanak ki *A E* pontokig.

Minthogy *ABC* körben *AC* egyen más *BH* egyent ketté és derékszegletre vág, tehát az *ABC* kör középpontja *AC*-ben van. Ismét mivel ugyanazon *ABC* körben *NO* egyen más *BG* egyent kettó és derékszegletre vág, tehát az *ABC* kör középpontja *NO* ban van. De megmutattaték, hogy ugyan az *AC*-ben is van; már pedig sehol sem érnek öszve *AC* és *NO* egyenek csak *O*-nál; tehát *O* pont, *ABC* körnek középpontja. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *DEF* körnek is *O* a középpontja; tehát *ABC, DEF* két egymást vágó körnek azonegy *O* a középpontja, mi lehetetlen.

Nem vág tehát kör kört sat.

Más bizonyítmány.

Mert vágja *ABC* kör *DEF* kört több mint két pontban, u. m. *B*-ben, *G* ben, *F*-ben, és vétessék *ABC* körnek *K* középpontja, és vonassanak *KB, KF, KG*.

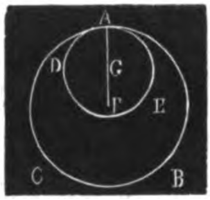
Már mivel *DEF* körön belöl vétetett némi *K* pont, és *K*-ból *DEF* körre több mint két egyenlő egyen *KB KF KG* vonattak; tehát *K* pont *DEF* körnek középpontja. De *ABC* körnek is középpontja *K*: egymást vágó két egyennek tehá ugyanazon *K* a középpontjuk, mi lehetetlen.

Kör tehát kört nem vág, sat.

Jegyz. Simson Rob. csak ezt a bizonyítmányt vette fel fordításában; és mi is ennek adnók az elsöséget. Továbbá Simson azt is kiköti, hogy a vágáson csak a kerületek egymást vágását kell érteni. Ám legyen; de a 6 első könyvben mindenütt csakis vonalak vágják egymást; lapok sehol sem.

11. Feladat:

Ha két kör egymást belölről érinti s középpontjaik vétetnek : a középpontjaikat összekötő egyen kinyújtva a körök öszveérintésire esik.



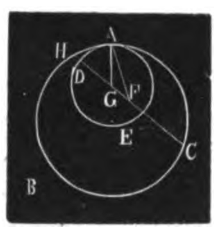
Mert két kör *ABC*, *ADE* érintsék egymást belőlről *A* pontnál, és vétessék *ABC*-nek *F* középpontja, *ADE*-nek pedig *G* : azt mondom, hogy az *F*-től *G*-hez vont egyen kinyújtva *A* pontra esik.

Mert ha nem, essék, ha lehet, ugy mint *FGDH*, és vonassanak *AF*, *AG*.

Minthogy *AG*, *GF*, *FA*-nál azaz *FH*-nál nagyobbak, vétessék el a közös *FG*; tehát a maradék *AG* a maradék *GH*-nál nagyobb. De *AG* egyenlő *GD*-vel ; tehát *GD* nagyobb *GH*-nál, kisebb a nagyobbnál, mi lehetetlen. Az *F*-et *G*-vel öszvekötő (megnyújtott) egyen tehát nem esik kivül *A* érintő ponton, tehát az érintő pontra *A*-ra esik.

Ha tehát két kör sat.

Más bizonyítmány :



Mert ha nem, essék úgy, mint *GFC*, és nyújtassék *GFC* egyen *H* pontig, és vonassanak *AG*, *AF*.

Már mivel *AG*, *GF* nagyobbak mint *AF*; de *FA* egyenlő *FC*-vel azaz *FH*-val, vétessék el a közös *FG*; tehát a maradék *AG* a maradék *GH*-nál azaz a *GD* a *GH*-nál nagyobb, kisebb a nagyobbnál, mi lehetetlen. Hasonlókép mutatjuk ki ugyanazon képtelenséget, ha a kisebbik kör középpontja kivül van a nagyobbikén.

12. Feladat:

Ha két kör egymást kivülről érinti : a középpontjaikat öszve kötő egyen az érintő ponton vonul át.

Mert két kör *ABC*, *ADE* érintsék egymást kivülről *A* pontnál, és vétessék *ABC* körnek *F* középpontja, *ADE* nek pedig *G* : azt mondom, hogy az *F*-től *G*-hez vont egyen az *A*-nál levő érintő ponton vonul át.

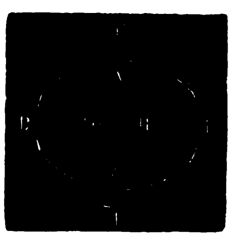
Mert ha nem, menjen úgy, ha lehet, mint *FCDG*, és vonassanak *AF*, *AG*.

Minthogy *F* pont *ABC* körnek középpontja, *FA* egyenlő *FC*-vel. Ismét mivel *G* pont *ADE* körnek középpontja, *AG* egyenlő *GD*-vel. Megmutattaték az is, hogy *FA* egyenlő *FC*-vel; tehát *FA*, *AG* egyenlők *FC*, *DG*-vel: úgy hogy az egész *FG* nagyobb *FA* meg *AG*-nél. De kisebb is, mi lehetetlen. Nem lehet tehát, hogy az *F*-től *G*-hez vont egyen *A* érintő ponton ne vonuljon át, ennélfogva azon megyen át.

Ha tehát két kör sat.

13. Feladat:

Kör kört nem érint többen egy pontnál, akár kivül akár belől érintse.

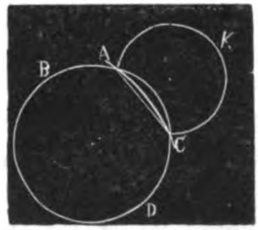


Mert, ha lehet, *ABCD* kör *EBFD* kört érintse elébb belől egy pontnál többen *B*-ben *D*-ben.

Vétessék *ABCD* körnek *G* középpontja : *EBFD*-nek pedig *H*.

Tehát a *G*-t *H*-val öszvekötö egyen *B* és *D*-re esik. Essék úgy, mint *BGHD*. És minthogy *G* pont *ABCD* kör középpontja, *BG* egyenlő *GD*-vel, *BG* tehát nagyobb *HD*-nél, még annál nagyobb tehát *BH*, *HD*-nél. Ismét mivel *H* pont *EBFD* kör középpontja, *BH* egyenlő *HD*-vel. De megmutattaték, hogy sokkal nagyobb ennél, mi lehetetlen ; tehát kör kört nem érint többen egy pontnál belőlről.

De azt mondom, hogy kivülről sem.

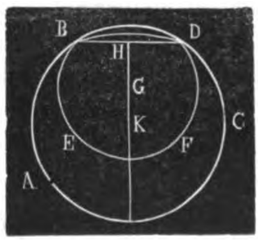


Mert, ha lehet, ACK kör $ABDC$ kört érintse kivülről egy pontnál többen, A-ban C-ben, és vonassék AC.

Minthogy mind $ABDC$ mind ACK köröknek kerületén vétetett akárhol $A\ C$ két pont, tehát ezt a két pontot öszvekötő egyen mindenik (körön) belöl esend. De $ABDC$-én belöl esik, ACK-n pedig kivül, mi képtelen; tehát kör kört nem érint kivülről többen egy pontnál. Meg van mutatva az is, hogy belölről sem.

Kör kört tehát sat.

Jegyzet. Az aráb fordítás egy más esetet is veszen fel, és így a *bizonyítmánynak második részt* ád, u. m. a következőt:

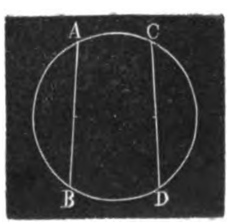


Ha lehet, érintse EBF kör ABC kört belölről két pontban, u. m. B-ben D-ben. Húzassék BD, és ketté vágatván, állíttassék a vágáspontra GH függő.

Már minthogy $B\ D$ pontok mindkét kerületben vannak, BD mindkét körön belől esik. És mivel GH egyen BD-t derékszegletben ketté vágja; tehát mindkét kör középpontján átmegy. Menjen és legyenek ezen pontok $G\ K$. De midőn kör kört akár belől akár kivül érint, a körök középpontjait egybekötő egyen az érintő ponton megy át; ott kell tehát GH-nak is átmenni. Már pedig nem mehet; mert úgy vagy $GH\ DB$ két egyen űrt kerítne be, vagy ama két egyennek akár HD akár HB közös darabja lenne, mi mindenik lehetetlen. Hasonlókép mutatjuk meg annak is, hogy ABC és DEF köröknek BD kerületeik egymásra essenek, lehetetlenségét. Kör tehát kört nem érint sat.

14. Feladat:

A körben egyenlő egyenek egyenlő távolságra vannak a középponttól, és a középponttól egyenlő távolságra levők egyenlők egymással.



Legyen $ABDC$ kör és abban legyenek AB, CD egyenlő egyenek: azt mondom, hogy AB, CD egyenlő távolságra vannak a középponttól.

Mert vétessék $ABDC$ körnek középpontja és legyen ez E, E-től $AB\ CD$

egyenekre húzassanak *EF*, *EG* függők, és vonassanak *AE*, *CE*.

Már minthogy a középponton átmenő *EF* egyen, nem a középponton átvont *AB* egyent derékszegletre vág, ketté is vágja. *AF* tehát egyenlő *FB*-vel; tehát *AB* kétakkora mint *AF*. Ugyan azért *CD* is kétakkora mint *CG*, s *AB*, *CD*-vel egyenlő levén, *AF* is egyenlő *CG*-vel. És minthogy *AE* egyenlő *EC*-vel, az *AE* négyszege is egyenlő az *EC* négyszegével. De az *AE*-ével egyenlők az *AF*, *FE* négyszegei, mert az *F*-nél való szeglet derék : az *EC*-ével megint egyenlők az *EG*, *GC* négyszegei, mert a *G*-nél való szeglet derék; tehát az *AF*, *FE* négyszegei egyenlők a *CG*, *GE* négyszegeivel, melyekből az *AF*-é egyenlő a *CG*-ével, mert *AF* egyenlő *CG*-vel; tehát a maradék *FE*-é a maradék *EG*-ével egyenlő; ennélfogva *FE* egyenlő *EG*-vel. Már pedig a körben az egyenek a középponttól egyenlő távolságra lenni mondatnak, midőn a középpontból reájok vont függők egyenlők; *AB*, *CD* tehát a középponttól egyenlő távolságuak.

De legyenek *AB*, *CD* egyenlő távolságra a középonttól, azaz *EF* legyen egyenlő *EG*-vel, azt mondom, hogy *AB* egyenlő *CD*-vel.

Mert ugyanazon készületeket téve, hasonlókép megmutatjuk, hogy *AB* kétakkora mint *AF*, és *CD* mint *CG* : és minthogy *AE*, *EC*-vel egyenlő, az *AE* négyszege is egyenlő a *CE*-ével; de az *AE*-ével egyenlők az *EF*, *FA* négyszegei, a *CE*-ével pedig egyenlők az *EG*, *GC* négyszegei; tehát az *EF*, *FA*-éi egyenlők a *EG*, *GC*-éivel, melyekből az *FE*-é egyenlő az *EG*-ével, mivel *EF* egyenlő *EG*-vel; tehát a maradék *AF* négyszege a maradék *CG* négyszegével egyenlő; tehát *AF* egyenlő *CG*-vel, és *AF*-nek kettőzete *AB*, *CG*-nek kettőzete pedig *CD* levén, tehát *AB* egyenlő *CD*-vel.

A körben tehát sat.

15. Feladat:

A körben legnagyobb az átmérő : a többi egyenek közül pedig a középponthoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál.

Legyen *ABCD* kör, annak átmérője *AD*, és középpontja *E*, és *BC* legyen a középponthoz közelebb, *FG* tőle távulabb: azt mondom, hogy *AD* legnagyobb, és *CB* nagyobb mint *FG*.

Mert vonassanak *E* középponttól *BC*-re és *FG*-re *EH*, *EK* függők. Már mivel *BC* a középponthoz közelebb, *FG* távulabb van, tehát *EK* nagyobb *EH*-nál. Választassék el *EK*-ból *EH*-val egyenlő *EL*, és *L*-nél *EK*-hoz derékszegletre húzatva *LM* nyújtassék *N*-ig, és köttessenek öszve *EM*, *EN*, *EF*, *EG*. Már mivel *EH* egyenlő *EL*-lel, *BC* is egyenlő *MN*-nel. Ismét mivel *AE* egyenlő *EM*-mel, *ED* pedig *EN*-nel, tehát *AD* egyenlő *ME* meg *EN*-nel. De *ME* meg *EN* nagyobb *MN*-nél, tehát *AD* is nagyobb *MN*-nél. *MN* pedig *BC*-vel egyenlő; tehát *AD* nagyobb *BC*-nél. És minthogy *ME*, *EN* két egyen egyenlő *FE*, *EG* két egyennel, és az *MEN* alatti szeglet nagyobb az *FEG* alatti szegletnél; tehát *MN* talp nagyobb *FG* talpnál. De megmutattaték, hogy *MN* egyenlő *BC*-vel, tehát *BC* nagyobb *FG*-nél. Legnagyobb tehát *AD* átmérő, és *BC* nagyobb *FG*-nél.

A körben tehát sat.

Jegyz. Simson Rob. hiányosnak találja ezen feladatot, minthogy a megfordított állítmány nincs benne, holott az előbbiekben mindig ott van; ez okból imigy szerkeszti és bizonyítja meg:

„A körben az átmérő legnagyobb egyen; a többiek közül pedig a középponthoz közelebbi mindig nagyobb a távulabbinál; *s minden nagyobb egyen közelebb van a középponthoz, mint a kisebb.*

Legyen *ABCD* kör és ebben *AD* átmérő, és *BC*, *FG* egyenek. Azt mondom, hogy *AD* legnagyobb, és a középponthoz közelebbi, *BC*, nagyobb, mint a távulabbi *FG*.

Bocsátassanak *E* középpontból *BC*-re *FG*-re *EH*, *EK* függők, és vonassanak *EB*, *EC*, *EF*.

Mivel *AE* egyenlő *EB*-vel, *ED* pedig *EC*-vel; tehát *AD*, *EB* meg *EC*-vel egyenlő.

De EB meg EC nagyobbak mint BC; miszerint AD is nagyobb mint BC.

Továbbá minthogy BC közelébb van E középponthoz mint FG, tehát EK nagyobb, mint EH; e szerint az EK négyszege is nagyobb az EH-énál. De az EK meg KF négyszegeik egyenlők az EH meg BH négyszegeikkel; tehát a BH négyszege nagyobb a KF-énél,*) ugy hogy BH is nagyobb KF-nél, és BC FG-nél.

De még azt is mondom, hogy ha BC nagyobb FG-nél, EH kisebb leend mint EK.

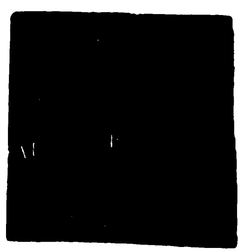
Mert mivel BC nagyobb FG-nél, BH is nagyobb FK-nál. De a BH meg EH négyszegeik egyenlők az EK meg FK négyszegeikkel, e szerint a BH négyszege nagyobb levén az FK-énál, az EH-é kisebb az EK-énál. Tehát EH is kisebb EK-nál, azaz: BC a középponthoz közelebb van FG-nél.

16. Feladat:

A kör átmérőjére végtől derékszegletre vont egyen kivül esend a körön, és az egyen és kerület közötti helyre más egyen nem eshetik, és a félkör szeglete minden egyenesvonalu hegyes szegletnél nagyobb, a maradéka pedig kisebb.

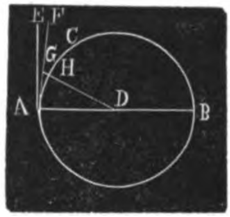
Legyen ABC kör, D középpont és AB átmérő körül: azt mondom, hogy A-tól AB-re végtől derékszegletre vont egyen a körön kivül esik.

Mert ha nem, essék belől ha lehet mint AC, és vonassék DC.



Minthogy DA egyenlő DC-vel, a DAC alatti szeglet is egyenlő az ACD alattival. De a DAC alatti derékszeglet, tehát az ACD alatti is derék; tehát ACD háromszegnek DAC, ACD alatti két szeglete két derékkel egyenlő, mi lehetetlen. Nem esend tehát belől a körön az A pontból BA-hoz derékszegletre vont egyen. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy a kerületbe sem esik, tehát kivül.

*) Ez ámbár magában igaz; de szerzőnk elemeiben sehol ki nem mondott tételen épülvén, módszer ellen hibázik. Helytelenül feddi tehát Simson atyánkfia Euklides kiadóit, hogy MN segéd egyent vettek fel a bizonyitmányban.



Essék ugy mint AE: azt mondom, hogy AE egyen és CHA kerület közé nem eshetik más egyen.

Mert ha lehet, essék mint FA, és D pontból húzassék FA-ra DG függö.

Már mivel az AGD alatti szeglet, derékszeglet, a DAG alatti pedig derékszegletnél kisebb; tehát AD nagyobb DG-nél. Már pedig AD egyenlö DH-val, tehát DH nagyobb DG-nél, kisebb a nagyobbnál, mi lehetetlen. Nem eshetik tehát az egyen és a kerület közötti helyre más egyen.

Még azt mondom, hogy a félkör szeglete, u. m. a BA egyen és CHA kerület közé foglalt szeglet, minden egyenesvonalu hegyes szegletnél nagyobb; a CHA kerület és AE egyen közé fogott maradék szeglet pedig minden egyenesvonalu hegyes szegletnél kisebb.

Mert ha van a BA egyen és CHA kerület közé fogottnál nagyobb, és a CHA kerület és AE egyen közé fogottnál kisebb szeglet, a CHA kerület és AE egyen közötti helyre esend egy egyen, mely BA egyen és CHA kerület közé fogottnál nagyobb, és CHA kerület s BE egyen közé fogottnál kisebb egyenesvonàlu szegletet csináljon. Már pedig nem esik. Nem leend tehát a BA egyen és CHA kerület közé fogott szegletnél más egyenesvonalu hegyes szeglet nagyobb, sem a CAH kerület és AE egyen közé fogottnál kisebb : mit bizonyítni kelle.

Tanuság : Ebböl világos, hogy a kör átméröjéhez végtöl derékszegletre vont egyen érinti a kört; és hogy ez egyen a kört csak egyetlenegy pontban érinti; mivel meg van mutatva, hogy a vele két pontban találkozó egyen belöl esik rajta.

Jegyz. A felebbi feladatot Simsonnal, talán sokakra nézve értelmesebben is, igy fejezhetjük ki :

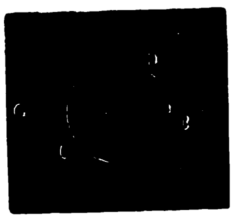
„A kör átméröjére a végponthoz állított függö kivül esik a körön, és a függö s kerület közé más egyen nem esik, vagy is : akármily nagy hegyes szegletet állítsunk az átméröre ennek végpontjához, a kerület ezen szeglet másik szára és a függö közt megy el; ismét más szóval : bármily kicsiny hegyes szegletet állítunk is a mondott pontnál a függöhez, a kerület ezen szeglet hegyébe bele vág.“

Ez egy kis előízlete a mértan felsőbb részeiben uralkodó eszmének a végtelen kicsinyről, mely abban áll, hogy akármely adott kicsinynél, oly nemü kisebbet tudunk kimutatni.

Egyébaránt ennek a feladatnak vitatása nem kis bajt okozott sok mértanárnak, mint Clavius, Peletarius, Tacquet, Vieta, Wallis sat.

17. Feladat:

Adott pontból egy adott kört érintő egyenes vonalt vonni.



Legyen az adott pont *A*, az adott kör pedig *BCD*: *A* pontból, egy *BCD* kört érintő egyenes vonalt kell vonni.

Mert vétessék a kör középpontja *E*, vonassék *AE*, és *E* középponttal *EA* közzel irassék *AFG* kör, és *A*-tól *EA*-hoz derékszegletre huzatván *DF*, vonassanak *EBF* *AB* egyenek : azt mondom, hogy *A* pontból vonva van a *BCD* kört érintő *AB* egyen.

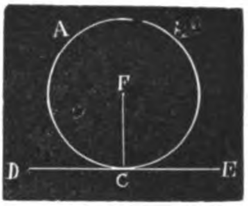
Mert mivel *E*, a *BCD*, *AFG* körök középpontja, *EA* *EF*-fel, és *ED* *EB*-vel egyenlők ; e szerint *AE* *EB* két egyen *FE* *ED* két egyennel egyenlő, és *E*-nél közös szegletet fognak be ; tehát *DF* talp egyenlő *AB* talppal, és *EDF* háromszeg egyenlő *EBA* háromszeggel s a többi szegletek a többi szegletekkel ; tehát az *EDF* alatti egyenlő az *EBA* alattival. De az *EDF* alatti, derékszeglet, tehát az *EBA* alatti is derék. Továbbá *EB* középponti egyen : a kör átmérőjére végtől derékszegletre vont egyen pedig érinti a kört ; tehát *AB* érinti *BCD* kört.

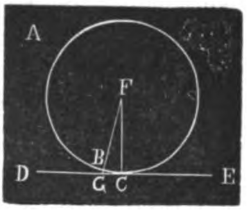
Tehát az adott pontból vonva van az adott *BCD* kört érintő *AB* egyenesvonal : m. t. k.

Jegyz. Kérdhetné valaki : miért nincs útasitás, mikép kelljen egy, a kerületen adott pontból érintőt huzni ? de ez befoglaltan meg van az előbbi feladatot kisérő tanuságban, s nem szükség, Simsonnal e feladat másik esetévé tenni.

18. Feladat:

Ha kört egyen érint, s a középpontból az érintő pontra egyen vonatik, a vont egyen az érintőre függő leend.





Mert *ABC* kört érintse *DE* egyen *C* pontnál; vétessék *ABC* körnek középpontja *F*, és *F*-től *C*-hez vonassék *FC*: azt mondom, hogy *FC* függő *DE*-re.

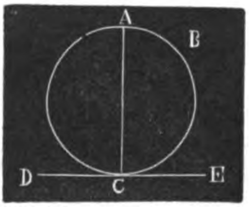
Mert ha nem, húzassék *F*-től *DE*-re más *FG* függő.

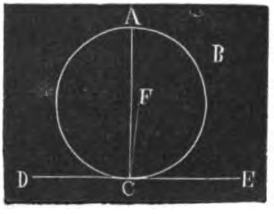
Minthogy az *FGC* alatti szeglet derék, tehát az *FCG* alatti hegyes: nagyobb szegletet nagyobb oldal fog át, tehát *FC* nagyobb *FG*-nél. De *FC* egyenlő *FB*-vel, tehát *FB* is nagyobb *FG*-nél, kisebb a nagyobbnál, mi lehetetlen. *FG* tehát nem függő *DE*-re. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy más sem egy is *FC*-t kivéve, tehát *FC DE*-re függő.

Ha tehát kört egyen sat.

19. Feladat:

Ha kört egyen érint, s az érintő pontból az érintő (egyenhez) derékszegletre egyenes vonal húzatik: a kör középpontja a húzott egyenben leend.





Mert *ABC* kört érintse *DE* egyen *C* pontnál, és *C*-től *DE*-hez derékszegletre húzassék *CA*: azt mondom, hogy a kör középpontja *AC*-ben van.

Mert, ha nem, legyen *F* az, és vonassék *CF*.

Már minthogy *ABC* kört érint *DE* egyen, s a középpontból az érintő pontra vonatott *FC*, tehát *FC* függő *DE*-re; az *FCE* alatti szeglet tehát derék. De az *ACE* alatti is derék; tehát az *FCE* alatti egyenlő az

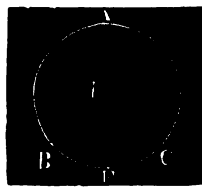
ACE alattival, kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. *F* tehát nem középpontja *ABC* körnek. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy más sem egy is *AC*-n kivül.

Ha tehát sat.

20. Feladat:

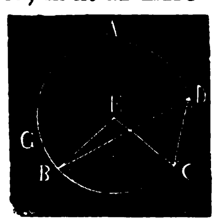
A körben a középpontnál levő szeglet két akkora mint a kerületnél levő, ha a két szeglet azonegy kerületen áll.

Legyen *ABC* kör, és ennek középpontjánál legyen a *BEC* alatti szeglet, kerületénél pedig a *BAC* alatti, s álljanak azon egy *BC* kerületen: azt mondom, hogy a *BEC* alatti szeglet kétakkora, mint a *BAC* alatti.



Mert vonatván *AE*, nyújtassék *F*-ig.

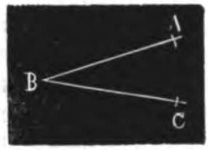
Minthogy *EA* egyenlő *EB*-vel, az *EAB* alatti szeglet is egyenlő az *EBA* alattival; az *EAB* meg *EBA* alatti szegletek tehát két akkorát tesznek, mint az *EAB* alatti. De a *BEF* alatti egyenlő az *EAB* *EBA* alattiakkal; tehát a *BEF* alatti kétakkora mint az *EAB* alatti. Ugyan azért az *FEC* alatti is kétakkora, mint az *EAC* alatti; tehát az egész *BEC* alatti kétakkora, mint az egész *BAC* alatti.



Szegessék meg ujra egy egyen, s legyen más *BDC* szeglet, és vonatván *DE*, nyújtassék *G*-ig. Hasonlókép megmutatjuk, hogy a *GEC* alatti szeglet kétakkora, mint az *EDC* alatti, mellyből a *GEB* alatti kétakkora, mint az *EDB* alatti; tehát a maradék *BEC* alatti kétakkora, mint a maradék *BDC* alatti.

A körben tehát sat.

Jegyzet. A bizonyitmány második részét kezdő ezen szók: „Κεκλάσθω δὴ πάλιν" Gregorynál roszul vannak fordítva: „rursus inclinetur;" mivel ama másutt is előforduló szók egyszerűen azt teszik: „*töressék* (szegessék) egy *egyen*, bizonyos pontok közé; azaz irassék egy szeglet, mellynek hegye egy adott pontban levén, szárai más két adott ponton menjenek át. P. o.



ABC vonal, *A B* és *C* pontok közé töretett, vagy szegetett.

Gregory azt vélte, hogy a kerületi szegletnek a középponttitól félredűlése, mint a második képletben látható, van értve; de más helyekben Euklidesnél, Appolloniusnál ennek semmi nyoma.

21. Feladat:

A körben azonegy szeletbeli szegletek egyenlők.

Legyen *ABCD* kör, és azonegy *BAED* szeletben legyenek a *BAD BED* alatti szegletek : azt mondom, hogy a *BAD BED* alatti szegletek egymással egyenlők.

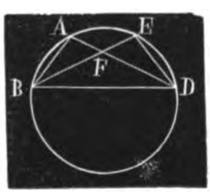
Mert vétessék *ABCD* körnek középpontja, legyen az *F*, és vonassanak *BF FD*.

Minthogy a *BFD* alatti szeglet a középpontnál van, a *BAD* alatti pedig a kerületnél, és azonegy *BCD* kerület az alapjok; tehát a *BFD* alatti szeglet kétakkora, mint a *BAD* alatti. Ugyanazért kettőzete a *BFD* alatti a *BED* alattinak is; tehát a *BAD* alatti egyenlő a *BED* alattival.

Tehát a körben sat.

Jegyz. Szerzőnk nem terjede ki arra az esetre, midőn a kerületi szegletek félkör- vagy ennél kisebb körszeletbeliek. *Commandini* ezt a hiányt következőleg pótlá :

Legyenek félkörnél nem nagyobb *AEDB* körszeletben *BAD BED* szegletek; azt mondom, hogy *BAD* egyenlő *BED*-vel.



Mert vonassék *AE*; hát *EDBA* félkörnél nagyobb körszelet. Már mivel az *ABE ADE* alatti szegletek félkörnél nagyobb, ugyanazon körszeletbeliek, tehát az *ABE* alatti egyenlő az

ADE alattival. De az *AFB* alatti is egyenlő az *EFD* alattival, tehát *BAD EFD* háromszegekben, melyeknek három szegletei két derékkel egyenlők levén, egymással egyenlők, a *BAF* azaz a *BAD* alatti harmadik szeglet is egyenlő az *FED* azaz *BED* alatti szeglettel. Tehát sat.

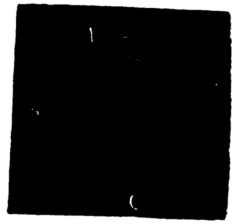
Simson bizonyitmánya:

Legyen egy félkörnél nem nagyobb *BAED* körszelet: azt mondom, hogy a benne levő *BAD BED* alatti szegletek egymással egyenlők.

Vonassék *AFC* átmérő, és *CB CD CE* egyenek. Már mivel *BAEC* körszelet a félkörnél nagyobb, tehát a *BAC* alatti szeglet egyenlő a *BEC* alattival. Ugyanazért a *CAD* alatti is egyenlő a *CED* alattival; tehát a *BAC CAD* alattiak együtt egyenlők az együvé vett *BEC CED* alattiakkal. De a *BAC CAD* alattiak a *BAD* alattival, a *BEC CED* alattiak megint a *BED* alattival egyenlők; tehát a *BAD* alatti szeglet egyenlő a *BED* alattival.

22. Feladat:

A körbe irt négyoldaluaknak átelleni szegletei két derékkel egyenlők.



Legyen *ABCD* kör és abban írva *ABCD* négyoldalu: azt mondom, hogy ennek átelleni szegletei két derékkel egyenlők.

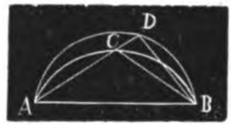
Mert vonassanak *AC BD*.

És minthogy minden háromszegnek három szeglete két derékkel egyenlő, tehát *ABC* háromszegnek *CAB ABC BCA* alatti három szeglete egyenlő két derékkel. De a *CAB* alatti a *BDC* alattival egyenlő, mivel azon egy *BADC* szeletben vannak; az *ACB* alatti meg az *ADB* alattival egyenlő, mivel azonegy *ADCB* szeletben vannak; az egész *ADC* alatti tehát egyenlő a *BAC ACB* alattiakkal. Adjuk hozzájuk a közös *ABC* alattit; tehát az *ABC BAC ACB* alattiak egyenlők az *ABC ADC* alattiakkal. Már pedig az *ABC BAC ACB* alattiak két derékkel egyenlők; az *ABC ADC* alattiak is tehát két derékkel egyenlők.

A körben írt négyoldaluaknak sat.

23. Feladat:

Azonegy egyenre azonegy felöl nem állítathatik két hasonló de nem egyenlő körszelet.



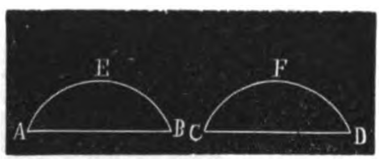
Mert, ha lehet, állítassék azonegy *AB* egyenre azonegy felöl két hasonló *ACB ADB* körszelet, vonassék *ACD*, és köttessenek öszve *CB DB*.

Minthogy *ACB* szelet hasonló *ADB* szelethez, hasonló szeletek pedig azok, mellyek egyenlö szegleteket fognak be; tehát az *ACB* alatti szeglet egyenlö az *ADB* alattival, külsö a belsövel, mi lehetlen.

Nem állítathatik tehát sat.

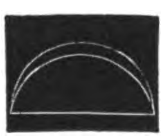
24. Feladat:

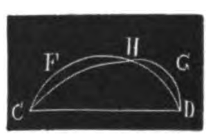
Egyenlö egyeneken álló hasonló körszeletek egyenlők egymással.



Mert álljanak egyenlö *AB CD* egyeneken *AEB CFD* hasonló körszeletek: azt mondom, hogy *AEB* szelet egyenlö *CFD* szelettel.

Mert *AEB* szeletet *CFD*-re illesztvén, s *A* pontot *C*-re. *AB* egyent *CD*-re tevén, *B* pont is *D*-re esend, mivel *AB* egyenlö *CD*-vel. Mint hogy pedig *AB CD*-re illik, *AEB* szelet is *CFD*-re fog illeni. Mert ha *AB* egye n *CD*-re illik, s *AEB* szelet nem illik *CFD*-re vagy belöl esend imezen, vagy kivül, (mi lehetlen, mert ugy azonegy egyenre azonegyfelöl két hasonló és nem egyenlö körszelet állítatnék) vagy átvágja, mint *CHGD*; de kör kört nem szel több mint két pontban, *CHGD* pedig *CFD*-t több mint két pontban u. m. *C*-ben *G*-ben *H*-ban szeli, mi megint





lehetetlen. Nem lehet tehát, hogy AB egyen CD-re illvén, AEB szelet is ne illjék CFD-re; tehát egymásra illenek, s egymással egyenlők leendenek.

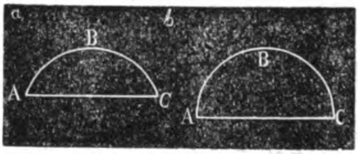
Egyenlő egyeneken sat.

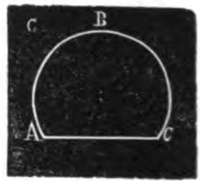
Jegyzés. Simson R. a 23-dik és 24-dik Feladatok bizonyítmányait a kiadók által egybezavartaknak véli; mert, úgymond azt, hogy egyik körszelet kerülete a másikét át nem vágja, már a 23 dik Feladatban meg kellendett bizonyítani, mivel azon esetet ott is fel lehetne, per positum sed non concessum, tenni. Ezt ő át is helyezte a 23-dikba, miszerint a 24-diké igen egyszerűen és minden esetek megkülönböztetése nélkül foly amazéból, s csak is arra épült.

25. Feladat:

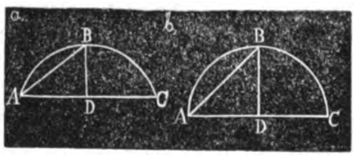
Adott körszelethez a kört, melynek szelete, hozzáírni

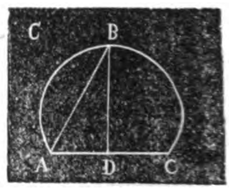
Legyen az adott körszelet ABC: ABC szelethez a kört, melynek szeletje, hozzá kell írni.



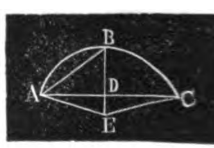


Mert vágassék AC ketté D-nél, és huzassék D pontból AC-hez derékszegletre DB és vonassék AB: már az ABD alatti szeglet a BAD alattinál vagy nagyobb, vagy egyenlö vele, vagy kisebb.

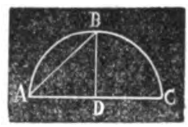




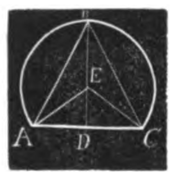
Legyen elöbb is nagyobb, és állítassék BA egyenhez az ebben levö A pontnál az ABD alatti szeglettel egyenlő BAE alatti szeglet, és DB nyújtatván, vonassék EC. Minthogy az ABE alatti szeglet egyenlö a BAE alattival, tehát BE egyen is egyenlő EA-val. És minthogy AD egyenlö DC-vel, DE pedig közös, az AD DE két egyen, CD DE két egyennel külön-külön egyenlők, s az ADE alatti szeglet is-



egyenlö a CDE alattival, mert mindenik derékszeglet; tehát AE talp egyenlö CE talppal. De megmutattaték, hogy AE egyenlö BE-vel, BE is tehát egyenlö CE-vel; tehát AE EB EC hárman egymással egyenlök; az E középponttal s AE EB EC közül akármelyik közzel írandó kör tehát a többi pontokon is átmenend, és hozzájok lesz írva. Adott körszelethez tehát hozzá van írva a kör. És nyilvánvaló, hogy ABC szelet kisebb félkörnél, mivel E középpont kivül esik rajta.



Hasonlókép, ha az ABD alatti szeglet egyenlö a BAD alattival; AD egyenlö levén mind BD-vel mind DC-vel, tehát DA DB DC egymással egyenlök leendenek, és D a hozzá pótlandó körnek középpontja lesz; és világos, hogy ABC félkör.

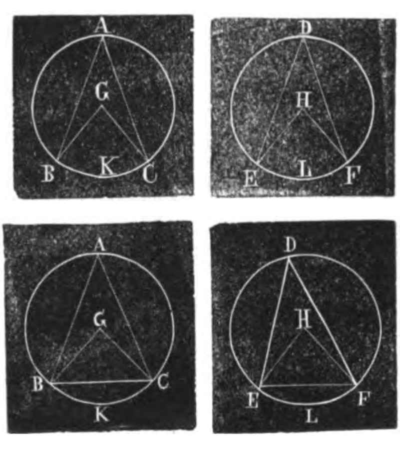


Ha pedig az ABD alatti kisebb a BAD alattinál, és BA egyenhez a benne levö A pontn[illegible] ABD alattival egyenlö szegletet állít[illegible] középpont DB-ben a szeleten belöl esend, u. m. E-re, és ABC szelet nyilván nagyobb leend félkörnél.

Adott körszelethez tehát sat.

26. Feladat:

Egyenlö körökben egyenlö szegletek egyenlö kerületeken állanak, akár középpontiak akár kerületiek legyenek.



Mert legyenek ABC DEF egyenlö körök, és legyenek ezekben középponti szegletek a BGC EHF alattiak, kerületiek pedig BAC EDF alattiak: azt mondom, hogy BKC kerület egyenlö ELF kerülettel.

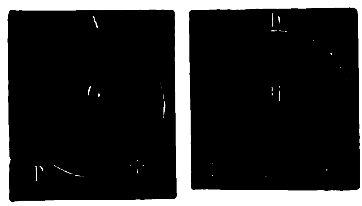
Mert vonassanak BC EF.

És minthogy ABC DEF körök egyenlök, középponti egyeneik is egyenlők; *BG GC* két egyen tehát egyenlő *EH HF* két egyennel, a *G*-nél való szeglet is egyenlő a *H*-nál valóval; tehát *BC* talp egyenlő *EF* talppal. És minthogy az *A*-nál való szeglet egyenlő a *D*-nél valóval, tehát *BAC* szelet hasonló *EDF* szelethez, és egyenlő egyeneken a *BC*-n *EF*-en állanak; már pedig egyenlő egyeneken álló hasonló szeletek egymással egyenlők; tehát *BAC* szelet egyenlő *EDF* szelettel. De az egész *ABC* kör is egyenlő az egész *DEF* körrel; a maradék *BKC* kerület tehát egyenlő a maradék *ELF* kerülettel.

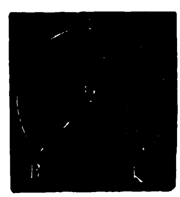
Egyenlő körökben tehát sat.

27. Feladat:

Egyenlő körökben az egyenlő kerületeken álló szegletek egyenlők egymással, akár középpontiak akár kerületiek legyenek.



Mert *ABC DEF* egyenlő körökben egyenlő *BC EF* kerületeken álljanak a *G H* középpontoknál *BGC EHF* alatti szegletek, a kerületeknél pedig a *BAC EDF* alattiak: azt mondom, hogy a *BGC* alatti szeglet egyenlő az *EHF* alattival, és a *BAC* alatti az *EDF* alattival.

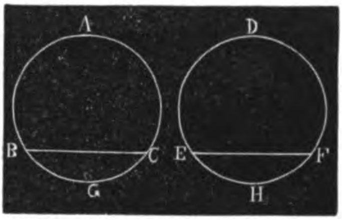


Mert ha nem egyenlő a *BGC* alatti az *EHF* alattival, egyik közülök nagyobb leend. Legyen nagyobb a *BGC* alatti, és állíttassék *BG* egyenhez a benne levő *G* pontnál az *EHF* alatti szeglettel egyenlő *BGK* alatti: már egyenlő szegletek, ha középpontiak, egyenlő kerületeken állanak, tehát *BK* kerület egyenlő *EF* kerülettel. De *EF* egyenlő *BC*-vel; tehát *BK* is egyenlő *BC*-vel; tehát *BK* is egyenlő *BC*-vel, kisebb a nagyobbal, mi lehetetlen. Nem nem egyenlő tehát a *BGC* alatti szeglet az *EHF* alattival; tehát egyenlő. És mivel a *BGC* alattinak hasonfele az *A*-nál levő, az *EHF* alattinak hasonfele pedig a *D*-nél levő, tehát az *A*-nál levő szeglet is egyenlő a *D*-nél levővel.

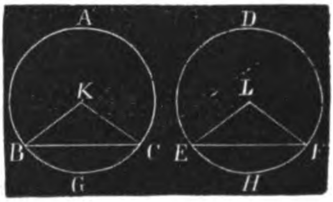
Egyenlő körökben tehát sat.

28. Feladat:

Egyenlő körökben egyenlő egyenek egyenlő kerületeket, nagyobbat nagyobbal, kisebbet kisebbel egyenlőket, szelnek el.



Legyenek *ABC DEF* egyenlő körök, és legyenek bennök *BC EF* egyenlő egyenek, melyek *BAC EDF* nagyobb, és *BGC EHF* kisebb kerületeket szeljék el: azt mondom, hogy *BAC* nagyobb kerület egyenlő *EDF* nagyobb kerülettel, *BGC* kisebb kerület pedig egyenlő *EHF* kisebb kerülettel.



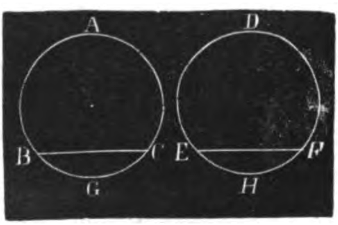
Mert vétessenek a körök középpontjai *K*, *L*, és vonassanak *BK KC EL LF*.

És minthogy a körök egyenlők, a középpontból vont egyenek is egyenlők: ennél fogva *BK KC* két egyen *EL LF* két egyennel egyenlő, s *BC* talp egyenlő *EF* talppal. De egyenlő szegletek, ha középpontiak, egyenlő kerületeken állanak; tehát *BGC* kerület egyenlő *EHF* kerülettel. Az egész *ABC* kör is egyenlő az egész *DEF* körrel; tehát a maradék *BAC* kerület egyenlő a maradék *EDF* kerülettel.

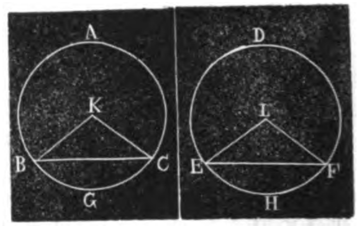
Egyenlő körökben tehát sat.

29. Feladat:

Egyenlő körökben egyenlő kerületeket egyenlő egyenek fognak át



Legyenek *ABC DEF* egyenlő körök, és azokban szelessenek el *BGC EHF* egyenlő kerületek és vonassanak *BC EF* egyenek: azt mondom, hogy *BC* egyen egyenlő *EF*-el.



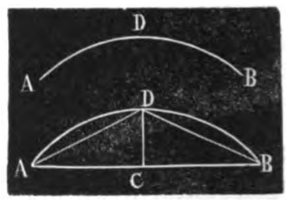
Mert vétessenek a körök középpontjai K L, és vonassanak KB KC LE LF.

Minthogy BGC kerület egyenlő EHF kerülettel, a BKC alatti szeglet is egyenlő az ELF alattival. És minthogy ABC DEF körök egyenlők, középponti egyeneik is egyenlők; tehát BK KC két egyen EL LF két egyennel egyenlő, és egyenlő szegleteket fognak be; tehát BC talp egyenlő EF talppal.

Egyenlő körökben tehát sat.

30. Feladat:

Adott kerületet ketté vágni.



Legyen az adott kerület ADB: ADB kerületet ketté kell vágni.

Vonassék AB, vágassék ketté C pontnál, C ponttól AB egyenhez derékszegletre húzassék CD, és köttessenek öszve AD BD.

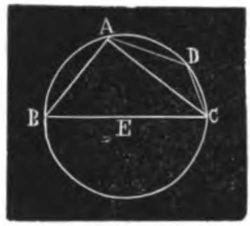
És mivel AC egyenlő CB-vel, CD pedig közös, AC CD két oldal egyenlő BC CD két oldallal. s az ACD alatti szeglet egyenlő a BCD alatti szeglettel, mert mindenik derék; tehát AD talp egyenlő CD talppal. Már pedig egyenlő egyenek egyenlő kerületeket, nagyobbat nagyobbal, kisebbet kisebbel egyenlőket, fognak át, és mind AD mind DB kerület félkörnél kisebb; tehát AD kerület egyenlő DB kerülettel.

Az adott kerület tehát ketté van vágva D pontnál; m. t. k.

31. Feladat:

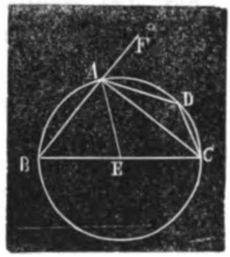
A körben a félkörbeli szeglet derék, a nagyobb szeletbeli a deréknél kisebb; a kisebb szeletbeli pedig a deréknél nagyobb: megint a nagyobb szelet szeglete a deréknél nagyobb, a kisebb szelet szeglete pedig a deréknél kisebb.

Legyen $ABCD$ kör, ennek átmérője BC, középpontja E, és vonassanak BA AC AD DC egyenek: azt mondom, hogy



a *BAC* félkörbeli *BAC* alatti szeglet derék, a félkörnél nagyobb *ABC* kerületbeli *ABC* alatti szeglet deréknél kisebb, a félkörnél kisebb *ADC* kerületbeli *ADC* alatti szeglet pedig deréknél nagyobb.

Vonassék *AE*, és nyújtassék *BA* *F*-ig.



Minthogy *BE* egyenlő *EA*-val, az *EAB* alatti szeglet is egyenlő az *EBA* alattival. Ismét minthogy *EA* egyenlő *EC*-vel, az *ACE* alatti szeglet is egyenlő a *CAE* alattival, tehát az egész *BAC* alatti egyenlő az *ABC ACB* alatti két szeglettel. De az *ABC* háromszegnek *FAC* alatti külső szeglete is egyenlő az *ABC ACB* alatti kettővel; tehát a *BAC* alatti szeglet egyenlő az *FAC* alattival; tehát mindenik derék; tehát a *BAC* félkörbeli szeglet derék.

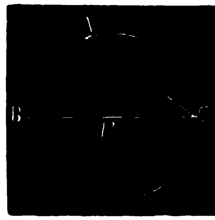
És minthogy *ABC* háromszegnek *ABC BAC* alatti két szegletei két deréknél kisebbek, és a *BAC* alatti derék, tehát az *ABC* alatti szeglet kisebb egy deréknél; már pedig *ABC* szeletben van, mely nagyobb a félkörnél.

És minthogy *ABCD* négy oldalu képlet körben van, és a körbe írt négyoldaluaknak átelleni szegletei két derékkel egyenlők: tehát az *ABC ADC* alattiak egyenlők két derékkel Már pedig az *ABC* alatti kisebb egy deréknél; a maradék *ADC* alatti szeglet tehát egy deréknél nagyobb, és a félkörnél kisebb *ADC* szeletben van.

Még azt mondom, hogy a nagyobb szelet szeglete u. m. az *ABC* kerület és *AC* egyen közé fogott szeglet deréknél nagyobb: a kisebb szelet szeglete pedig, u. m. az *ADC* kerület és *AC* egyen közé fogott szeglet deréknél kisebb. E világos ugyan abból. Mert minthogy a *BA AC* egyenek közé fogott szeglet derék, tehát az *ABC* kerület és *AC* egyen közé fogott szeglet deréknél nagyobb. Ismét minthogy az *AC AF* egyenek közé fogott szeglet derék; tehát a *CA* egyen és *ADC* kerület közé fogott szeglet deréknél kisebb.

A körben tehát sat.

Jegyz. Ennek a feladatnak az első részére van még más bizonyítmány a kéziratokban, imígy:



„Mivel az *AEC* alatti szeglet kétakkora, mint a *BAE* alatti, t. i. egyenlő a két belső átellenivel; de az *AEB* alatti is kétakkora, mint az *EAC* alatti; tehát az *AEB AEC* alattiak kétakkorák, mint a *BAC* alatti. Már pedig az *AEB AEC* alattiak két derékkel egyenlők, tehát a *BAC* alatti szeglet derék; m. b. k.“

Simson a 16. feladatnál mondottakkal öszvehangzólag, a kezünk alattinak utolsó részét következőkép fejezi ki:

„A nagyobbik körszelet kerülete a derékszegleten kivűl, a kisebbiké a derékszegleten belől esik.“

32. Feladat:

Ha kört egyen érint, és az érintő pontból a körre egy a kört szelő egyen húzatik; a mely szegleteket emez az érintővel alkot, egyenlők lesznek a kör túlfelőli szeleteiben levő szegletekkel.

Mert érintse *ABCD* kört valamely *EF* egyen *B* pontnál, és *B* pontból *ABCD* körre vonassék *BD* egyen: azt mondom, hogy a mely szegleteket *BD* egyen *EF* érintővel csinál, egyenlők lesznek a kör túlfelőli szeleteiben levő szegletekkel, azaz: hogy az *FBD* alatti szeglet egyenlő a *DAB* szeletbe állított szeglettel, az *EBD* alatti szeglet viszont egyenlő az *ACB* szeletbe állított szeglettel.

Mert húzassék *B*-től *EF*-hez derékszegletre *BA*, és *BD* kerületen akármely *C* pont vétetvén, vonassanak *AD DC CB*.

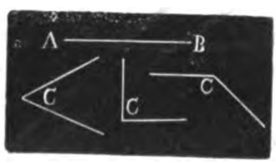
Minthogy *ABCD* kört *EF* egyen érinti *B* pontnál, és *B* érintő ponttól az érintő egyenhez derékszegletre

BA húzatott; tehát *ABCD* középpontja *BA*-n van, *BA* tehát *ABCD* kör átmérője; ennélfogva a félkörbeli *ADB* alatti szeglet derék; miszerént a *BAD ABD* alatti többi szegletek egy derékkel egyenlők. De az *ABF* alatti is derék; tehát az *ABF* alatti egyenlő a *BAD ABD* alattiakkal. Vétessék el a közös *ABD* alatti szeglet: tehát *DBF* maradék-szeglet egyenlő a kör tulfelöli szeletében levő *BAD* alattival. És minthogy *ABCD* négyoldalu képlet körbe van irva, átelleni szegletei két derékkel egyenlők. De a *DBF DBE* alattiak is két derékkel egyenlők, tehát a *DBF DBE* alattiak egyenlők a *BAD BCD* alattiakkal, melyekből a *BAD* alatti a *DBF*-fel egyenlőnek van megmutatva; tehát a maradék *DBE* egyenlő a tulfelöli *DCB* körszeletben levő *DCB* alatti szeglettel.

Ha tehát stb.

33. Feladat:

Adott egyenre oly körszeletet irni, melybe egy adott egyenes vonalu szeglettel egyenlő szeglet férjen.

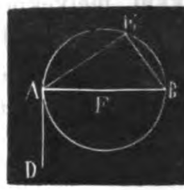


Legyen az adott egyen *AB*, az adott egyenvonalu szeglet a *C*-nél való: *AB* adott egyenre oly körszeletet kell írni, melybe a *C*-nél való szeglettel egyenlő szeglet férjen.

A *C*-nél való szeglet vagy hegyes, vagy derék, vagy tompa. Legyen előbb hegyes, mint az első rajzon, és állitassék *AB* egyenre *A* pontnál a C-nél való szeglettel egyenlő *BAD* alatti; tehát a *BAD* alatti hegyes. Azután huzassék *A* pontból *AD*-hez derékszegletre *AE*, *AB* vágassék ketté *F*-nél, *F* ponttól *AB*-hez derék szegletre huzassék *FG*, és köttessék öszve *GB*.

És minthogy *AF* egyenlő *FB*-vel, *FG* pedig közös, *AF FG* két egyen egyenlő *FB FG* két egyennel, az *AFG* alatti szeglet is egyenlő a *BFG* alatti szeglettel; tehát *AG* talp egyenlő *BG* talppal. A G középponttal GA közzel irandó kör tehát B-n is átmegyen. Irassék és legyen az ABE, és vonassék BE. Már minthogy AE átmérő végénél AE-hez derékszegletre A-tól AD van vonva, tehát AD érinti a kört, és minthogy ABE kört érinti AD egyen, és A érintő ponttól ABE körre AB egyen vonatott; tehát a DAB alatti szeglet egyenlő a túlsó körszeletbeli AEB alatti szeglettel. Ugyde a DAB alatti egyenlő a C-nél valóval, tehát a C-nél való szeglet egyenlő az AEB alattival.

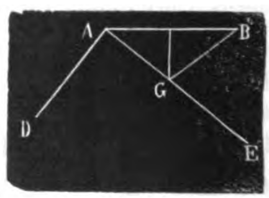
Tehát az adott AB egyenre AEB körszelet iratott, melybe az adott C-nél való szeglettel egyenlő AEB alatti szeglet fér.



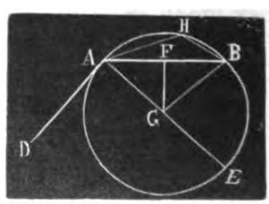
De legyen a C-nél való szeglet derék, és kelljen ismét AB-re oly körszeletet irni, melybe a C-nél való derékszeglettel egyenlő szeglet férjen. Állitassék ismét a C-nél való derékszeglettel egyenlő BAD alatti szeglet, mint a második rajzban van; vágassék ketté AB F-nél, és F középponttal s akár FA akár FB közzel irassék AEB kör.

Tehát AD egyen érinti ABE kört, mert az A-nál való szeglet derék. Már a BAD alatti szeglet egyenlő az AEB szeletbelivel, mert ez is, félkörbeli szeglet levén, derék. De a BAD alatti a C-nél valóval egyenlő. Tehát az AEB szeletbeli is egyenlő a C-nél valóval.

Tehát AB egyenre megint iratott AEB körszelet, melybe a C-nél valóval egyenlő szeglet fér.



De legyen a C-nél való szeglet tompa. Állítassék AB egyenre A pontnál azzal egyenlő BAD szeglet, mint a harmadik rajzban van, és húzassék AD-hez derékszegletre AE: ismét vágassék ketté AB F-nél, és AB-hez derékszegletre vonatván FG, köttessék öszve GB.



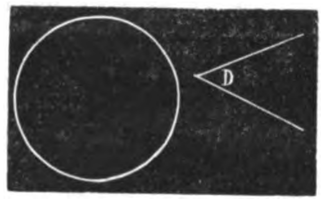
És viszont minthogy AF egyenlő FB-vel és FG közös, AF FG két oldal egyenlő BF FG két oldallal, az AFG alatti szeglet is egyenlő a BFG alattival, tehát AG talp egyenlő BG talppal. A G középponttal

GA közzel irandó kör tehát *B*-n is átmegyen. Menjen ugy, mint *AEB*. És minthogy *AE* átmérőre végtől derékszegletre *AD* vonatott, tehát *AD* érinti *AEB* kört. Már pedig *A* érintő ponttól van huzva *AB*; tehát a *BAD* alatti szeglet egyenlő a tulsó körszeletbe *AHB*-be állított szeglettel. De *BAD* szeglet egyenlő a *C*-nél valóval; az *AHB* szeletbeli szeglet is tehát egyenlő a *C*-nél valóval.

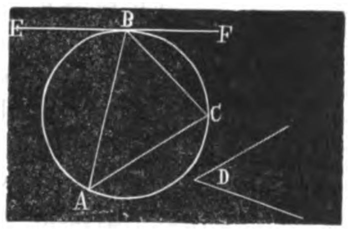
Iratott tehát adott *AB* egyenre *AHB* körszelet, melybe a *C*-nél valóval egyenlő szeglet fér: m. t. k.

34. Feladat:

Adott körből elvágni oly szeletet, melybe egy adott egyenes vonalu szeglettel egyenlő szeglet férjen.



Legyen az adott kör *ABC*, az adott egyenesvonalu szeglet pedig a *D*-nél való: *ABC* körből el kell vágni oly körszeletet, melybe a *D*-nél adott egyenesvonalu szeglettel egyenlő szeglet férjen.



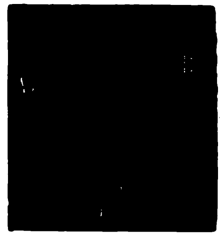
Vonassék *ABC* kört *B* pontnál érintő *EF* egyen, és állítassék *EF* egyenhez a benne levő *B* pontnál a *D*-nél való szeglettel egyenlő *FBC* alatti szeglet.

Minthogy *ABC* kört érinti *EF* egyen, és *B* érintő ponttól *BC* vonatott, tehát az *FBC* alatti szeglet egyenlő a *BAC* tulsó szeletbe állított szeglettel. De az *FBC* alatti egyenlő a *D*-nél valóval; tehát a *BAC* szeletbeli szeglet is egyenlő a *D*-nél adott szeglettel.

Elvágatott tehát adott *ABC* körből *BAC* szelet, melybe a *D*-nél adott egyenes vonalu szeglettel egyenlő szeglet fér: m. t. k.

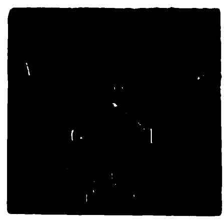
35. Feladat:

Ha a körben két egyen vágja egymást, az egyiknek szeletei közé fogott derékszeg egyenlö a másiknak szeletei közé fogott derékszeggel.



Mert $ABCD$ körben AC BD két egyen vágja egymást E pontnál: azt mondom, hogy az AE EC egyenek közé fogott derékszeg egyenlö a DE EB közé fogott derékszeggel.

Ha már AC BD a középponton mennek át, ugy hogy E legyen a kör középpontja; világos, hogy AE EC-vel DE EB-vel egyenlök levén, az AE EC közé fogott derékszeg is egyenlö a DE EB közé fogott derékszeggel.



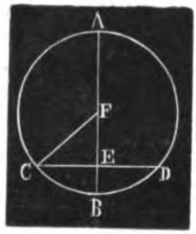
De ne menjenek AC BD a középponton által, és vétessék $ABCD$ körnek középpontja, legyen az F, és F-töl AC DB egyenekre FG FH függök húzatván, köttessenek öszve FB FC FE

És minthogy a középponton átmenö FG egyen nem a középponton átvont AC egyent derékszegletre vágja, ketté is vágja; tehát AG egyenlö GC-vel. Már mivel AC egyen G-nél egyenlö, E-nél pedig nem egyenlö szeletekre van vágva, tehát az AE EC közé fogott derékszeg a GE négyszegével együtt, egyenlö a GC négyszegével: adassék hozzájok a közös GF négyszege, tehát az AE EC közti derékszeg az FG GE négyszegeivel együtt egyenlök a CG GF négyszegeivel. De az EG GF négyszegeivel egyenlö az FE-é, a CG GF-éivel pedig egyenlö az FC-é; tehát az AE EC közé fogott derékszeg az FE négyszegével együtt egyenlö az FC négyszegével; FC pedig egyenlö FB-vel; tehát az AE EC közti derékszeg az EF négyszegével együtt egyenlö az FB négyszegével. Ugyanazért a DE EB közti derékszeg is az FE négyszegével együtt egyenlö az FB négyszegével. De megmutattaték, hogy az AE EC közti derékszeg is az FE négyszegével együtt az FB-ével egyenlö; tehát az AE EC közti derékszeg, meg az *EF* négyszege egyenlő a *DE EB* közti derékszeggel, meg az *FE* négyszegével. Vétessék el a közös *FE*; tehát a maradék *AE EC* közti derékszeg egyenlő a maradék *DE EB* közti derékszeggel.

Ha tehát a körben sat.

Jegyz. Ennek a feladatnak bebizonyitásában az aráb forditmány négy esetet különböztet meg, melyek közül a görög kiadásokban csak az első és utolsó maradt meg. Nem tartjuk szükségtelennek, a kihagyottakat Simson szerint utánpótolni, mi a megmaradt utolsó esetnek is némikép változtatott bizonyitmányát húzza maga után.

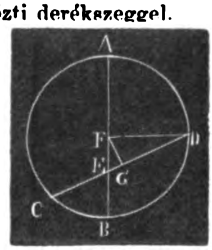
Második eset: Ha *ACBD* körben a középponton átmenő *AB* egyen *CD*-t, mely nem a középponton megy át, derékszegletre vágja: azt mondom, hogy az *AE EB* közti derékszeg egyenlő a *CE ED* köztivel.



Vágassék ketté *AB F*-nél; *F* a kör középpontja leend, és vonassék *FC*.

Minthogy *AB* egyen *F*-nél két egyenlő és *E*-nél két nem egyenlő szeletekre vágatott, az *AE EB* közti derékszeg az *FE* négyszegével együtt egyenlő az *FA* akár *CF* négyszegével. De az *FC* négyszege az *FE EC* négyszegeíkkel egyenlő, tehát az *AE EB* közti derékszeg az *FE* négyszegével együtt egyenlő az *FE FC* négyszegeikkel. Vétessék el mindenikből az *FE* négyszege; miszerint az *AE EB* közti derékszeg egyenlő az *EC* négyszegével. De az *EC* négyszege a *CE ED* közti derékszeg, mivel *EC* egyenlő *ED*-vel, ennél fogva az *AE EB* közti derékszeg egyenlő a *CE ED* köztivel. Tehát sat.

Harmadik eset: *ACBD* körben *AB* a középponton menjen át, és ne vágja derékszegletre a középponton kivüli *CD*-t: azt mondom, hogy az *AE EB* közti derékszeg egyenlő a *CE ED* közti derékszeggel.

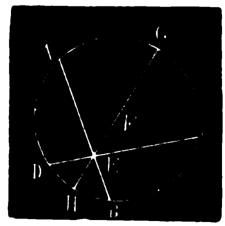


Mert vágassék ketté ismét *AB F*-nél, és *F* középpontból bocsátassék *CD*-re *FG* függő, és vonassék *FD*.

Már mivel *AB* két egyenlő és két nem egyenlő szeletre van vágva, tehát az *AE EB* közti derékszeg az *EF* négyszegével együtt egyenlő az *AF* akár az *FD* négyszegével. De az *FE* négyszege az *EG GF* négyszegeivel s az *FD* négyszege az *FG GD* négyszegeivel egyenlők; tehát az *AE EB* közti derékszeg az *EG GF* négyszegeikkel együtt egyenlő az *FG GD* négyszegeikkel. Vétessék ki a közös *FG* négyszege; tehát az *AE EB* közti derékszeg az *EG* négyszegével együtt egyenlő a *GD* négyszegével. És mivel *CD* egyen *G*-nél egyenlő, és E-nél nem egyenlő darabokra van vágva, tehát a *CE ED* közti derékszeg is az *EG* négyszegével együtt egyenlő a *GD* négyszegével; ennélfogva az *AE EB* közti derékszeg az *EG* négyszegével együtt egyenlő a *CE ED* közti derékszeggel az *EG* négyszegével együtt, és elvétetvén a közös *EG* négyszege, az *AE EB* közti derékszeg egyenlő a *CE ED* köztivel.

A harmadik eset ilyetén bizonyitmánya a *negyedikét* nagyon egyszerűvé teszi.

Ugyan is *ACBD* körben *AB CD* egyenek, melyek közül egyik sem megy át a középponton, vágják egymást *E* pontban: ismét azt mondom, hogy az *AE EB* közti derékszeg egyenlő a *CE ED* köztivel.

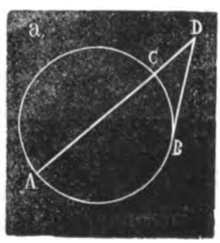


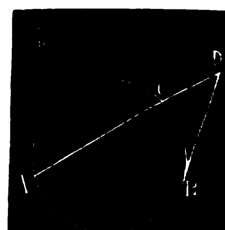
Mert vétessék *ACBD* körnek *F* középpontja, és vonatván, *EF*, nyujtassék mind kétfelől *G* és *H* pontokig.

Már a mondottak szerint, a középponton átmenő *GH* egyen akár derék akár nem derék szegletre vágja *AB* egyent, a *GE EH* közti derékszeg egyenlő az *AE EB* köztivel. Ugyanazért a *GE EH* közti a *CE EB* köztivel is egyenlő, ugy hogy az *AE EB* közti derékszeg is egyenlő a *CE ED* köztivel.

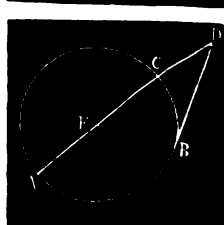
36. Feladat:

Ha egy körön kivül vétetik pont, és attól a körre vonatik két egyen, és az egyik közülök szeli a kört a másik pedig érinti, az egész egyen és a vett pont s domboru kerület közé a körön kivül esö darabja által befogott derékszeg egyenlö az érintö négyszegével.

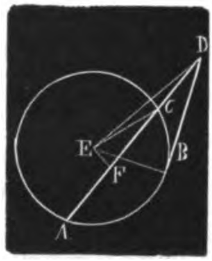




Mert *ABC* körön kivül vétessék *D* pont, és *D*-től *ABC* körre vonassék két egyen *DCA* és *DB*, még pedig *DCA* vágja *ABC* kört, és *DB* érintse: azt mondom, az *AD DC* közé fogott derékszeg egyenlő a *DB* négyszegével.



Mert *DCA* vagy a középponton megyen át, vagy nem. Menjen előbbis a középponton, legyen a középpont *F*, és vonassék *FB*; tehát az *FBD* alatti szeglet derék. És minthogy *AC* egyen ketté van vágva *F*-nél s hozzáragasztva *CD*; tehát az *AD DC* közti derékszeg az *FC* négyszegével együtt egyenlö az *FD* négyszegével, De *FC* egyenlö *FB*-vel: tehát az *AD DC* közti derékszeg az *FB* négyszegével együtt együtt egyenlö az *FD*-ével. Az *FD* négyszegével megint egyenlök az *FB BD* négyszegei, mert az *FBD* alatti szeglet derék, tehát az *AD DC* közti derékszeg az *FB* négyszegével együtt egyenlö az *FB BD* négyszegeivel. Vétessék el a közös *FB* négyszege, tehét a maradék *AD DC* közti derékszeg a *DB* érintö négyszegével egyenlö.



De ne legyen *DCA* az *ABC* kör középpontján átvonva; vétessék *E* középpont, és *E*-töl *AC*-re *EF* függö húzatván, vonassanak *EB EC ED*; tehát az *EFD* alatti szeglet derék. És mivel a középponton átvont *EF* egyen nem a középponton átmenö *AC* egyent derékszegletre vágja, ketté is vágja; tehát *AF FC*-vel egyenlö. És minthogy *AC* egyen *F* pontnál ketté van vágva, s *CD* hozá van ragasztva; tehát az *AD DC* közti derékszeg az *FC* négyszegével együtt egyenlö az *FD*-ével. Adjuk hozzájok a közös *FE*-ét; tehát az *AD DC* közti derékszeg a *CF FE* négyszegeivel együtt egyenlö a *DF FE* négyszegeivel. Ugyde a *CF FE*-éivel egyenlö az *EC*-é, mert az *EFC* alatti szeglet derék; a *DF FE* négyszegeivel megint egyenlö az *ED*-é, az *AD DC* közti derékszeg tehát az *EC* négyszegével együtt egyenlö az *ED*-ével. Már *EC* egyenlö *EB*-vel, tehát az *AD DC* közti derékszeg az *EB* négyszegével együtt egyenlö az *ED*-ével. De az *ED* négyszegével az *EB BD*-éi egyenlök, mert az *EBD* alatti szeglet derék; tehát az *AD DC* közti derékszeg az *EB* négyszegével együtt egyenlö az *EB BD* négyszegeivel. Vétessék el a közös *EB*-é, tehát a maradék *AD DC* közti derékszeg egyenlö a *DB* négyszegével.

Ha tehát egy körön kivül sat.

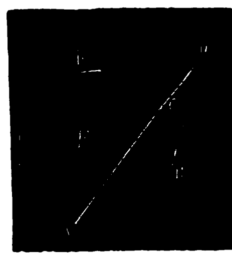
Tanuság: Ha tehát egy a körön kivül vett pontból a kört szelö egyenek vonatnak, az egész egyenek és ezeknek a körön kivül esö részei közé fogott derékszegek külön-külön egyenlők a felvett pontból a körre vont érintö négyszegével, és e szerint egymással is egyenlők.

37. Feladat:

Ha a körön kivül vétetik pont, s ettől a ponttól a körre két egyen, melyeknek egyike a kört szelje, másika találkozzék vele, vétetik, és az egész szelő és a pont és domboru kerület közé a körön kivül vágott egyen közti derékszeg az egyen négyszegével egyenlö; a találkozó érintendi a kört.

Mert *ABC* körön kivül vétessék *D* pont, és *D*-től *ABC* körre vonassék két egyen *DCA DB*, és *DCA* szelje a kört, *AB* pedig találkozzék vele; aztán legyen az *AD DC* közti derékszeg egyenlő a *DB* négyszegével: azt mondom, hogy *DB* érinti *ACB* kört.

Mert húzassék *ABC* kört érintö *DE* egyen, és vétessék *ABC* körnek középpontja, legyen az *F*, és vonassanak *FE FB FD*.



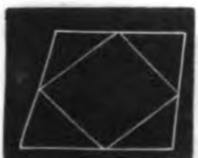
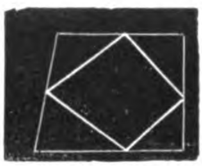
Az *FED* alatti szeglet tehát derék: és minthogy *DE* érinti a kört, *DCA* pedig szeli; tehát *AD DC* közti derékszeg egyenlö a *DE* négyszegével. De fel van téve, hogy az *AD DC* közti derékszeg a *DB* négyszegével is egyenlö; a *DE* négyszege tehát egyenlö a *DB*-ével; tehát *DE* egyenlö *DB*-vel. *FE* is egyenlö *FB*-vel, és igy *DE EF* két oldal *DB BF* két oldallal egyenlök, a talpuk *FD* közös; tehát a *DEF* alatti szeglet egyenlö a *DBF* alatti szeglettel. Már a *DEF* alatti derék, és igy a *DBF* alatti is derék. Ugy de *BF* megnyujtva átmérö; a kör átméröjére végtől húzott egyen pedig érinti a kört; *DB* tehát érinti *ABC* kört. (Hasonlólag megmutattatik ugyanaz, ha a középpont *AC*-ben esik is.)

Ha tehát a körön kivül sat.

EUKLIDES ELEMEINEK

NEGYEDIK KÖNYVE.

Értelmezések:


1. Egyenes vonalu képlet *egyenes vonalu képletbe irottnak* mondatik, midőn a beirott képlet mindenik szeglete éri annak, a melyikbe iratik, mindenik oldalát.

2. Hasonlólag képlet *képletre körülirottnak* mondatik, midőn a körülirandónak mindenik oldala éri annak, a melyikre körüliratik, mindenik szegletét.

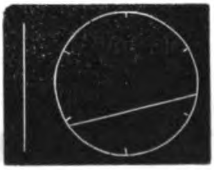
3. Egyenes vonalu képlet *körbeirottnak* mondatik, midőn a beirandónak mindenik szeglete éri a kör kerületét.



4. Egyenvonalu képlet *körre körülirottnak* mondatik, midőn a körülirandónak mindenik oldala éri a kör kerületét.

5. Hasonlólag a *kör képletbe irottnak* mondatik, midőn a kör kerülete, annak, a melyikbe iratik, mindenik oldalát éri.

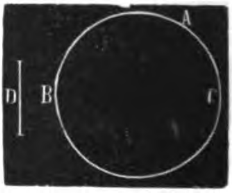
6. *Kör képletre körülirottnak* mondatik, midön a kör kerülete, annak, a melyikre körüliratik, mindenik szegletét éri.



7. *Egyen körbe illesztettnek* mondatik, midön végpontjai a kör kerületében vannak.

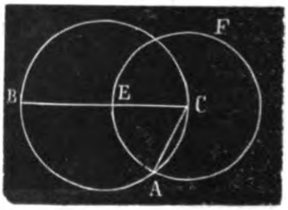
1. Feladat:

Adott körbe a kör átméröjénél nem nagyobb adott egyennel egyenlö egyent illeszteni.



Legyen az adott kör ABC, a kör átméröjénél nem nagyobb adott egyen D: ABC körbe D egyennel egyenlö egyent kell illeszteni.

Vonassék ABC kör átméröje BC. Már ha BC D-vel egyenlö, megleendett a kivánt dolog; mert bele van illesztve ABC körbe D egyennel egyenlö BC. Ha pedig nem: BC nagyobb D-nél, és választassék el belöle D-vel egyenlö CE, és C középponttal EC közzel irassék EAF kör, s vonassék CA.



Minthogy C pont AEF kör középpontja, CA egyenlö EC-vel. De EC D-vel egyenlö, tehát CA egyenlö D-vel.

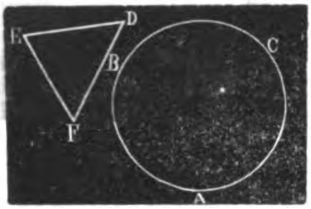
Adott ABC körbe tehát a kör átméröjénél nem nagyobb adott egyennel egyenlö CA illesztetett: m. t. k.

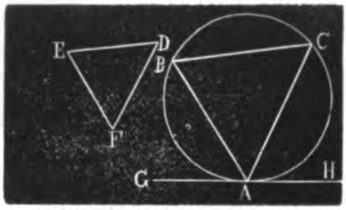
2. Feladat:

Adott körbe adott háromszeggel egyenlö szegletü háromszeget irni.

Legyen az adott kör ABC, az adott háromszeg DEF:

ABC körbe *DEF* háromszeggel egyenlö szegletü háromszeget kell irni.





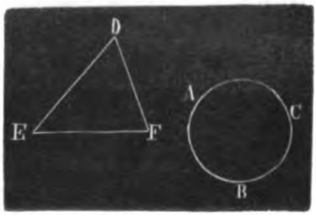
Húzassék *ABC* kört *A*-nál érintö *GAH* egyen, és *AH* egyenhez a benne levö *A* pontnál állítassék a *DEF* alatti szeglettel egyenlö *HAC* alatti: ismét *GA* egyenhez a benne levö *A* pontnál az *FDE* alatti szeglettel egyenlö *GAB* alatti, és vonassék *BC*.

Minthogy *ABC* kört *GAH* egyen érinti, s az érintö ponttól a körre más *AC* egyen vonatott; tehát a *HAC* alatti szeglet egyenlö az *ABC* alatti tulsó körszeletbelivel. De a *HAC* alatti a *DEF* alattival egyenlö, tehát az *ABC* alatti szeglet is egyenlö a *DEF* alattival. Ugyanazért az *ACB* alatti is egyenlö az *FDE* alattival; a maradék *BAC* szeglet tehát egyenlö a maradék *EFD* alattival; *ABC* háromszeg tehát egyenlö szegletü *DEF* háromszeggel, és *ABC* körbe van irva.

Adott körbe tehát sat.

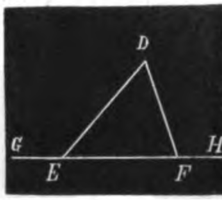
3. Feladat:

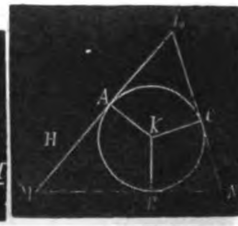
Adott körre adott háromszeggel egyenlö szegletü háromszeget körülirni.



Legyen az adott kör *ABC* az adott háromszeg pedig *DEF*: *ABC* körre *DEF* háromszeggel egyenlö-szegletü háromszeget kell körülirni.

Nyujtassék meg *EF* mind a kétfelöl *G H* pontokig, vétessék *ABC* körnek középpontja *K*, és vonassék akármely *KB* egyen, azután állitassék *KB* egyenhez a benne levö *K* pontról a *DEG* alatti szeglettel egyenlő *BKA* alatti; megint a *DFH* alattival egyenlő *BKC* alatti, és *A B C* pontokon át húzassanak *ABC* kört érintő *LAM*, *MBN*, *NCL*, egyenek.

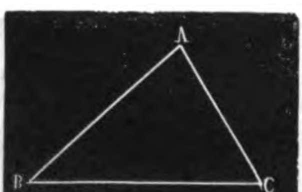


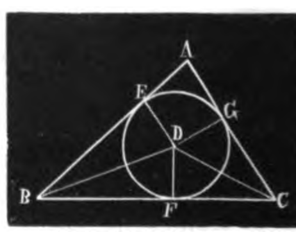


Minthogy *ABC* kört *LM MN NL* egyenek *A B C* pontoknál érintik, *KA KB KC* egyenek pedig a *K* középpontbúl *A B C* pontokra húzvák: tehát az *A B C* pontoknál lévő szegletek derékek. És minthogy *AMBK* négyoldalunak négyszeglete négy derékkel egyenlő (mivel *AMBK* négy oldalu két háromszegre oszlik) melyekből az *MAK KBM* alatti szegletek két deréket tesznek; tehát a maradék *AKB AMB* alattiak két derékkel egyenlők. Ugyde a *DEG DEF* alattiak is két derékkel egyenlők: tehát az *AKB AMB* alattiak egyenlők a *DEG DEF* alattiakkal, melyekből; az *AKB* alatti a *DEG* alattival egyenlő; a maradék *AMB* alatti tehát egyenlö a maradék *DEF* alattival. Hasonlólag mutattatik meg: hogy az *LNM* alatti is egyenlő a *DFE* alattival; tehát a maradék *MLN* alatti egyenlő a maradék *EDF* alattival. *LMN* háromszeg tehát *DEF* háromszeggel egyenlő szegletü, s *ABC* körre van körülirva.

4. Feladat:

Adott háromszegbe kört irni.





Legyen az adott háromszeg *ABC*: *ABC* háromszegbe kört kell irni.

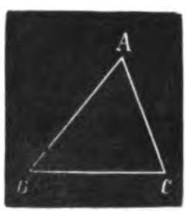
Vágassanak ketté az *ABC ACB* alatti szegletek *BD CD* egyenek által, és BD CD találkozzanak D pontnál; húzassanak D-től AB, BC, CA egyenekre DE, DF, DG függők.

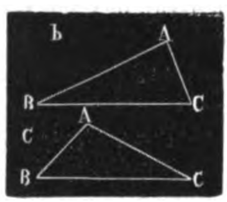
És minthogy az ABD alatti szeglet egyenlő a DBC alattival, mert ABC ketté vágatott; de a BED alatti derékszeglet is egyenlő a BFD alatti derékkel, miszerint EBD BDF két háromszegben két szeglet egyenlő két szeglettel, és egyik oldal egyenlő egyik oldallal, u. m. az egyik egyenlő szegletet átfogó mind két háromszeggel közös BD; ennélfogva a többi oldalok is egyenlők leendenek a többi oldalokkal; tehát DE egyenlő DF-fel. Ugyanazért DG is egyenlő DF-fel. DE DF DG három egyen tehát egyenlők egymással; a D középponttal s a DE DF DG közül akármelyik közzel irt kör tehát a többi pontokon is átmenend és érintendi AB BC CA egyeneket az E F G-nél levő szegletek derékek levén. Mert ha vágná; a kör átmérőjére végtől derékszegletre vont egyen belől esnék a körön, mi képtelennek van megmutatva; tehát a D középponttal és DE DF DG közül akármelyik közzel irt kör nem vágja AB BC CA egyeneket, érinti tehát és ABC háromszegbe irt kör leend. Irassék belé mint FEG.

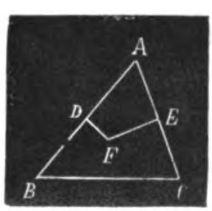
Adott ABC háromszegbe tehát EFG kör iratott: m. t. k.

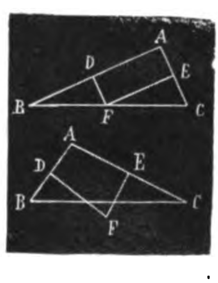
5. Feladat:

Adott háromszegre kört körülirni.



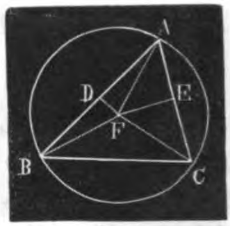




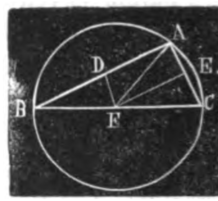


Legyen az adott háromszeg ABC: adott ABC háromszegre kört kell körül irni.

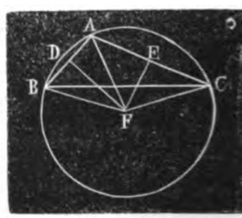
AB AC egyenek vágassanak ketté D E pontoknál, és D E pontokból AB AC-hez derékszegletre vonassanak DF EF: ezek találkozni fognak vagy ABC háromszegen *belől*, vagy BC egyenben, vagy BC-n (túl, a háromszegen) *kivül*.



Találkozzanak elöbb is *belöl* F-nél, és vonassanak FB FC FA. Már minthogy AD egyenlö BD-vel, DF pedig közös és derékszegletre van, tehát AF talp egyenlö FB talppal. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy FC is egyenlö AF-fel, ugy hogy FB is egyenlö FC-vel; FA FB FC három egyen tehát egyenlök egymással. Tehát F középponttal és FA FB FC közül valamelyik közzel irt kör a többi pontokon is átmenend, és ABC háromszegre körülirott kör leend. Irassék körül, mint ABC.



De találkozzanak DF és EF, BC egyenben F pontnál, mint a 2-ik rajzon, és vonassék AF. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy F pont, középpontja az ABC háromszeg körül irandó körnek.



De találkozzanak ABC háromszegen kivül ismét F-nél, mint a 3-ik rajzon, és vonassanak AF BF CF. És ismét AD egyenlö DB-vel, DF pedig közös és derékszegletre van vonva. AF talp tehát egyenlö FB talppal. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy FC egyenlö FA-val, ugy hogy FB is egyenlö FC-vel; tehát ismét F középponttal és FA FB FC közül akármelyik közzel irandó kör a többi pontokon is átmenend, és ABC háromszegre körül irott kör leend. Irassék mint ABC.

Adott háromszegre tehát kör iratott körül: m. t. k.

Tanuság. És világos, hogy mikor a kör középpontja a háromszegen belöl esik, a BAC alatti szeglet, félkörnél nagyobb szeletbeli levén, egy deréknél kisebb: mikor BC egyenbe esik a középpont, a BAC alatti szeglet félkörbeli levén, derékszeglet; mikor pedig a kör középpontja a háromszegen kivül esik, a BAC alatti szeglet, félkörnél kisebb szeletbeli levén, deréknél nagyobb. (Ugyhogy mikor a BAC alatti szeglet deréknél kisebb, DF EF a háromszegen belöl találkoznak: mikor derék, a BC-ben; mikor pedig deréknél nagyobb, BC-n kivül.)

6. Feladat:

Adott körbe négyszeget irni.

Legyen az adott kör *ABCD*: *ABCD* körbe négyszeget kell irni:

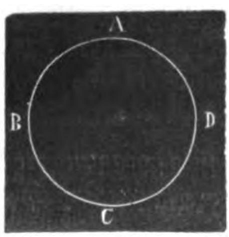
Húzassék egymáshoz derék szegletre *ABCD* körnek *AC BD* két átmérője, köttessenek öszve *AB BC CD DA*.

Minthogy *BE* egyenlő *ED*-vel, mert *E* a középpont, *EA* pedig közös és derékszegletre van vonva; tehát *AB* talp egyenlő *AD* talppal. Ugyanazért *BC CD* közül mindenik egyenlö *BA AD* közül mindenikkel; egyenlő oldalu tehát az *ABCD* négyoldalu képlet. De azt mondom, hogy derékszegletü is. Mert mivel *BD* egyen *ABCD* kör átmérője, tehát *BAD* félkör, tehát a *BAD* alatti szeglet derék. Ugyanazért az *ABC BCD CDA* alatti szegletek is mind derékek; derék szegletü tehát az *ABCD* négyoldalu képlet. De megmutattaték, hogy egyenlő oldalu is; tehát négyszeg. És *ABCD* körbe van irva.

Tehát adott *ABCD* körbe *ABCD* négyszeg van irva m. t. k.

7. Feladat:

Adott körre négyszeget körülirni.



Legyen az adott kör *ABCD*; *ABCD* körre négyszeget kell körülirni.

Húzassék *AB D* körnek *AC BD* két átmérője egymáshoz derék szegletre, és *A B C D* ponton át vonassanak *ABCD* kört érintő *FG GH HK KF* egyenek.

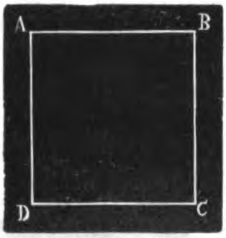
Minthogy *FG* érinti *ABCD* kört, és *E* középponttól *A* érintő ponthoz van húzva *EA*: tehát az *A*-nál levő szegletek derékek.

Ugyanazért a *B C D* pontoknál levö szegletek is derékek. És minthogy az *AEB* alatti szeglet derék, és az *EBG* alatti is derék; tehát *GH AC*-hez egyközü. Ugyanazért *AC FK*-hoz is egyközü. Miszerént *GH* is *FK*-hoz egyközü. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *GF HK* egyeneknek is mindenike egyközü *BD*-hez. Tehát *GK GC AK FB BK* mind egyközények; tehát *GF* egyenlö *HK*-val, *GH FK*-val. És minthogy *AC* egyenlö *BD*-vel, de *AC* mind *GH*-val mind pedig *FK*-val egyenlő, valamint *BD* is mind *GF*-fel mind *HK*-val egyenlö; tehát *FGHK* négyoldalu képlet egyenlö oldalu. De azt mondom, hogy derékszegletü is. Mert minthogy *GBEA*, egyközény, és az *AEB* alatti szeglet derék, tehát az *AGB* alatti is derék. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy a *H*, *K*, *F*-nél levő szegletek is derékek. Tehát *FGHK* négyoldalu képlet derékszegletü; de megmutattaték, hogy egyenlö oldalu is; tehát négyszeg; és *ABCD* körre körül van irva.

Adott körre tehát sat.

8. Feladat:

Adott négyszegbe kört irni.



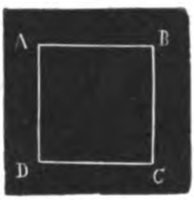
Legyen az adott négyszeg *ABCD*: *ABCD* négyszegbe kell kört irni.

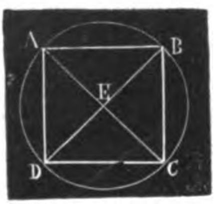
Vágassanak ketté mind *AB* mind *AD* *F* és *E* pontoknál, és *E*-nél húzassék akár *AB*-hez akár *CD*-hez egyközü *EH*; *F*-nél megint húzassék akár *AD*-hez akár *BC*-hez egyközü *FK*: tehát *AK KB AH HD AG GC BG GD* mind egyközények, és átelleni oldalaik nyilván egyenlök. És minthogy *AD* egyenlö *AB*-vel, de *AD*-nek hasonfele *AE*, *AB*-nek pedig hasonfele *AF*, tehát *AE* is egyenlö *AF*-fel; ugy hogy a velök átelleni oldalak is egyenlök; tehát *FG GE*-vel egyenlö. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *GH GK* közül is mindenik egyenlö *FG GE* közül mindenikkel. *GE GF GH GK* mind a négyen tehát egymással egyenlök. A *G* középponttal és *GE GF GH GK* közül akármelyik közzel irandó kör a többi pontokon is átmegyen, és érintendi *AB BC CD DA* egyeneket, mert az *E F H K*-náli szegletek derékek; ha tehát a kör *AB BC CD DA* egyeneket vágná, a kör átmérőjére végtől derékszegletre húzott egyen belől esnék a körön, mi képtelennek van megmutatva. A *G* középponttal és *GE GF GH GK* közök egyikével írt kör tehát nem vágandja *AB BC CD DA* egyeneket. Érintendi tehát őket, és *ABCD* a négyszegbe írott kör leend.

Adott négyszegbe tehát sat.

9. Feladat:

Adott négyszegre kört körülírni.





Legyen az adott négyszeg *ABCD*. *ABCD* négyszegre kört kell körülírni.

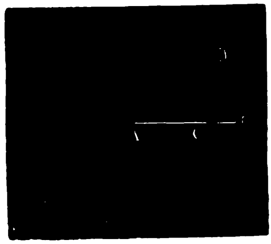
AC BD egyenek vonatván, vágják egymást *E*-nél.

És minthogy *DA* egyenlö *AB*-vel, *AC* pedig közös, *DA AC* két oldal *BA AC* két oldallal egyenlő; *DC* talp is egyenlő *BC* talppal: tehát a *DAC* alatti szeglet egyenlő a *BAC* alatti szeglettel; a *DAB* alatti tehát ketté van vágva *AC* által. Hasonlólag megmutatjuk, hogy az *ABC BCD CDA* alatti szegletek közül mindenik ketté van vágva *AC BD* egyenek által. És minthogy a *DAB* alatti szeglet egyenlő az *ABC* alattival, s a *DAB* alattinak hasonfele az *EAB* alatti, az *ABC* alattinak pedig fele az *EBA* alatti: tehát az *EAB* alatti is egyenlő az *EBA* alattival; úgy hogy *EA* oldal is egyenlő *EB* oldallal. Hasonlókép megmutatjuk, hogy *EA EB* egyenek mindenike egyenlö *EC ED* egyenek mindenikével. *EA EB EC ED* négy egyen tehá egymással egyenlők. Az *E* középponttal s *EA EB EC ED* közül egyik közzel írt kör e szerint a többi pontokon is átmenend, és *ABCD* négyszegre lesz körülírva. Irassék mint *ABCD*

Adott négyszegre tehát sat.

10. Feladat:

Oly egyenlő száru háromszeget állítni össze, melynek talpánáli mindenik szeglete kétakkora legyen, mint a harmadik szeglete.



Vétessék AB egyen, és vágassék el C pontnál, úgy hogy az AB BC közé fogott derékszeg egyenlő legyen a CA négyszegével; A középponttal AB közzel írassék BDE kör, és BDE körbe illesztessék a BDE kör átmérőjénél nem nagyobb AC gyennel egyenlő BD egyen: vonassanak AD CD, és ACD eháromszegre írassék körül ACD kör.

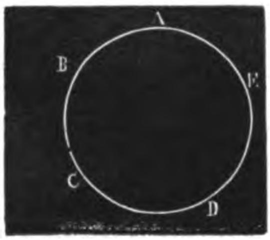
És mivel az AB BC közti derékszeg egyenlő az AC négyszegével, AC pedig egyenlő BD-vel; tehát az AB BC közti derékszeg egyenlő a BD négyszegével. És minthogy ACD körön kivül vétetett némi B pont, és B-től ACD körre BA BD két egyen van vonva, melyeknek egyike szeli a kört, másika találkozik vele, és az AB BC közti derékszeg egyenlő a BD négyszegével: tehát BD érinti ACD kört. Minthogy már BD érint, és D érintő pontból van DC vonva; tehát a BDC alatti szeglet egyenlő a tulsó körszeletbeli DAC alatti szeglettel. E szerint, mivel a BDC alatti egyenlő a DAC alattival, adassék hozzájok a közös CDA alatti; tehát az egész BDA alatti egyenlő a CDA DAC alatti két szeglettel. De a CDA DAC alattiakkal a BCD alatti külső szeglet egyenlő; a BDA alatti tehát egyenlő a BCD alattival. De a BDA alatti a CBD alattival egyenlő, minthogy DA oldal is egyenlő AB-vel; úgy hogy a DBA alatti szeglet is egyenlő a BCD alattival. A BDA DBA BCD alattiak hárman tehát egyenlők egymással. És mivel a DBC alatti szeglet egyenlő a BCD alattival, BD oldal is egyenlő DC-vel. De BD egyenlőnek van téve CA-val; tehát AC is egyenlő CD-vel; úgy hogy a CDA alatti szeglet is egyenlő a DAC alatti szeglettel. Tehát a CDA DAC alattiak együtt kétakkorák, mint a DAC alatti; a BCD alatti is tehát kétakkora, mint a DAC alatti. Már pedig a BCD alatti a BDA DBA

alattiak közül mindenikkel egyenlő, és így a *BDA DBA* alattiak közül mindenik kétakkora, mint a *BAD* alatti.

Állíttatott tehát *ADB* egyenlőszáru háromszeg, melynek *BD* talpnál való mindenik szeglete kétakkora, mint a harmadik. m. t. k.

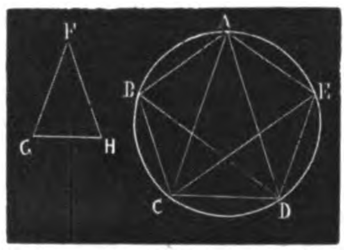
11. Feladat:

Adott körbe egyenlő-oldalu és egyenlő-szegletü ötszeget írni.



Legyen az adott kör *ABCDE*: *ABCDE* körbe egyenlő oldalu és egyenlő szegletü ötszeget kell írni.

Legyen alkotva *FGH* egyenlőszáru háromszeg, melynek mind *G*-nél való mind *H*-nál való szeglete külön-külön kétakkora legyen mint az *F*-nél való, és irassék *ABCDE* körbe *FGH* háromszeggel egyenlő szegletü *ACD* háromszeg, úgy hogy az *F*-néli szeglettel a *CAD* alatti egyenlő legyen, s az *ACD CDA* alattiak mindenike egyenlő legyen a *G* és *H*-nál levők mindenikével, és így mind az *ACD* mind a *CDA* alatti külön-külön kétakkora, mint a *CAD* alatti. Vágassék ketté mindenike az *ACD CDA* alattiaknak *CE DB* egyenek által, és vonassanak *AB BC DE EA*.

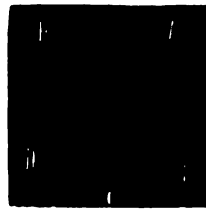


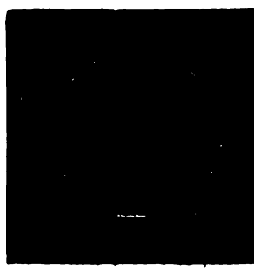
Minthogy az *ACD CDA* alatti szegleteknek mindenike kétakkora mint a *CAD* alatti, és *CE DB* egyenek ketté vágják: tehát a *DAC ACE ECD CDB BDA* öt szeglet egymással egyenlő. De egyenlő szegletek egyenlő kerületeken állanak; *AB BC CD DE EA* öt kerület tehát egymással egyenlő. Egyenlő kerületeket megint egyenlő egyenek feszítnek; tehát *AB BC CD DE EA* öt egyen egymással egyenlő. *ABCDE* ötszeg tehát egyenlő oldalu. De azt mondom, hogy egyenlő szegletü is. Mert minthogy *AB* kerület egyenlő *DE* kerülettel, adassék hozzájok a közös *BCD*; tehát az egész *ABCD* kerület egyenlő az egész *EDCB* kerülettel; már pedig *ABCD* kerületen az AED alatti szeglet áll, $EDCB$ kerületen pedig a BAE alatti szeglet; tehát a BAE alatti szeglet egyenlő az AED alattival. Ugyanazért az ABC BCD CDE alatti szegletek mindenike is egyenlő a BAE AED alattiak mindenikével; tehát $ABCD$ ötszeg egyenlő szegletü. Meg van mutatva az is, hogy egyenlő oldalu.

Adott körbe tehát sat.

12. Feladat:

Adott körre egyenlő-oldalu és egyenlő-szegletü ötszeget körülírni.





Legyen az adott kör $ABCDE$: $ABCDE$ körre egyenlő oldalu és egyenlő szegletü ötszeget kell körülírni.

Képzeltessenek oda a beírt ötszeg szegleteinek A B C D E pontjai, úgy hogy AB BC CD DE EA kerületek egyenlők legyenek; és $ABCDE$ pontokon át vonassanak a kört érintő GH HK KL LM MG egyenek: vétessék a kör középpontja F, és vonassanak FB FK FC FL FD.

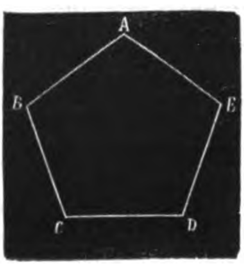
Minthogy KL egyen érinti $ABCDE$ kört C-nél, FC pedig F középpontból C érintő pontra van húzva: tehát FC KL-re függő, tehát a C-néli szegletek mindegyike derék. Ugyanazért a B D pontoknáli szegletek is derékek. És minthogy az FCK alatti szeglet derék, tehát az FK négyszege egyenlő az FC CK négyszegeivel. Ugyanazért az FB BK négyszegeivel is egyenlő az FK-é: úgy hogy az FC CK-éi egyenlők az FB BK-éival, melyekből az FC-é az FB-ével egyenlő; tehát a maradék CK-é egyenlő a maradék BK-éval; CK tehát egyenlő BK-val. És mivel FB egyenlő FC-vel, FK pedig közös; BF FK két oldal egyenlő CF FK két oldallal, és BK talp egyenlő CK talppal; a BFK alatti szeglet is tehát a KFC alattival egyenlő, valamint a BKF alatti az FKC alattival; a BFC alatti tehát kétakkora mint a KFC alatti, és a BKC alatti mint az FKC alatti. Ugyanazért a CFD alatti is kétakkora mint a CFL alatti, és a CLD alatti mint a CLF alatti. És minthogy

BC kerület egyenlö *CD*-vel, a *BFC* alatti szeglet is egyenlö a *CFD* alattival. Már pedig a *BFC* alatti kétakkora mint a *KFC* alatti, a *DFC* alatti megint kétakkora mint az *LFC* alatti; egyenlö tehát a *KFC* alatti is az *LFC* alattival: de az *FCK* alatti szeglet is egyenlö az *FCL* alattival. E szerint *FKC FLC* két háromszegben két szeglet két szeglettel különkülön egyenlö, és egyik oldal egyik oldallal egyenlő, úgymint a kettöjökkel közös *FC*; a többi oldalak is tehát a többi oldalakkal egyenlök lesznek, s a maradék-szeglet a maradék-szeglettel; egyenlö tehát *KC* egyen *CL*-el és az *FKC* alatti szeglet az *FLC* alattival. És mivel *KC* egyenlö *CL*-el, tehát *KL* kétakkora mint *KC*. Ugyanezek által megmutattatik az is, hogy *HK* kétakkora mint *BK*. És minthogy megmutattaték, hogy *BK* egyenlö *KC*-vel, s *KL* kétakkora mint *KC*, *HK* pedig kétakkora mint *BK*: tehát *HK* egyenlö *KL*-el. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *HG GM ML* közül is mindenik egyenlö *HK KL* közül mindenikkel: ennélfogva *GHKLM* ötszeg egyenlö oldalu. Azt mondom, hogy egyenlö szegletü is. Mert mivel az *FKC* alatti szeglet egyenlö az *FLC* alattival, és meg van mutatva, hogy a *HKL* alatti kétakkora mint az *FKC* alatti, a *KLM* alatti pedig kétakkora mint az *FLC* alatti: tehát a *HKL* alatti is egyenlö a *KLM* alattival. Hasonlólag mutattatik meg az is, hogy a *KHG HGM GML* alattiak mindenike egyenlö a *HKL KLM* alattiak mindenikével; tehát *GHK HKL KLM LMG MGH* öt szeglet egymással mind egyenlö. *GHKLM* ötszeg tehát egyenlö szegletü. De megmutattaték, hogy egyenlö oldalu és *ABCDE* körre van körülirva.

Adott körre tehát sat.

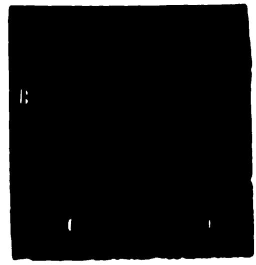
13. Feladat:

Adott ötszegbe, mely egyenlö oldalu és egyenlö szegletü, kört írni.

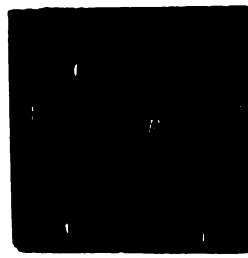


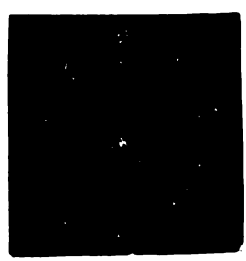
Legyen az adott ötszeg, mely egyenlö oldalu és egyenlö szegletü, *ABCDE*: *ABCDE* ötszegbe kört kell írni.

Vágassékketté mind a *BCD* mind a *CDE* alatti szeglet különkülön *CF DF* egyenekkel: és *F* pontból,



melynél CF DF egyenek öszvetalálkoznak, vonassanak FB FA FE egyenek. És minthogy BC egyenlö CD-vel, CF pedig közös, BC, CF két oldal egyenlö DC CF két oldallal, és a BCF alatti szeglet egyenlö a DCF alatti szeglettel; BF talp tehát egyenlö DF talppal, BFC háromszög egyenlö DFC háromszeggel, s a többi szegletek egyenlök lesznek a többi szegletekkel, azokkal, melyeket egyenlö-oldalok fognak át; a CBF alatti szeglet tehát egyenlö a CDF alattival. És minthogy a CDE alatti kétakkora mint a CDF alatti, de a CDE alatti egyenlö az ABC alattival, a CDF alatti pedig a CBF alattival; tehát a CBA alatti két akkora mint a CBF alatti; az ABF alatti szeglet tehát egyenlö az FBC alattival; tehát az ABC alatti szeglet ketté van vágra BF egyennel. Hasonlólag mutattatik meg, hogy a BAE AED alattiak is külön-külön ketté vannak vágra FA és FE egyenekkel. Húzassanak F pontból AB BC CD DE EA egyenekre FG FH FK FL FM függők. Már mivel a HCF alatti szeglet egyenlö a KCF alattival, de az FHC alatti derékszeglet is egyenlö az FKC alatti derékkel, FHC FKC két háromszegben két szeglet egyenlö két szeglettel, s egy oldal egyenlö egy oldallal, úgymint a kettöjökkel közös FC mely az egyenlö szegletek egyikét fogja át; tehát a többi oldalok is egyenlök lesznek a többi oldalokkal; tehát FH függö egyenlö FK függövel. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy FL FM FG közül is mindenik egyenlö FH FK függök mindenikével; FG FH FK FL FM öt egyen tehát egymással mind egyenlö. Az F középpontal és FG FH FK FL FM közök egyikével irott kör tehát a többi pontokon is átmenend, és AB BC CD DE EA egyeneket érintendi, mivel a G H K L M pontoknáli szegletek deréke k. Mert ha nem



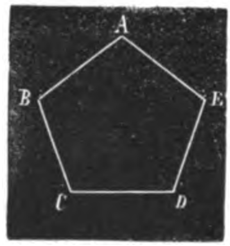


érintené, hanem vágná öket, a történnék, hogy a kör átméröjére végtöl derékszegletre vont egyen belöl esnék a körön, mi képtelennek van megmutatva. Az *F* középponttal, és *FG FH FK FL FM* közök egyikével irt kör tehát nem vágandja *AB BC CD DE EA* egyeneket, tehát érintendi azokat. Irassék mint *GHKLM*.

Adott ötszegbe tehát sat.

14. Feladat:

Adott ötszegre, mely egyenlö oldalu és egyenlö szegletü, kört körülirni.



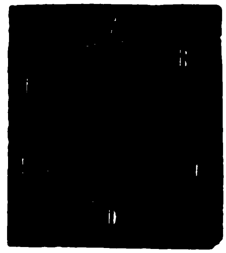
Legyen az adott egyenlö oldalu és egyenlö szegletü ötszeg *ABCDE*: *ABCDE* ötszegre kört kell körülírni.

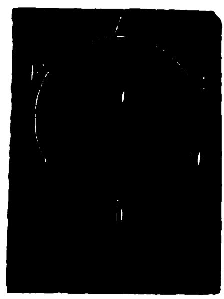
Vágassék ketté mind a *BCD* mind a *CDE* alatti szeglet külön-külön *CF* és *DF* egyenek által, és *F* pontból, hol az egyenek öszvetalálkoznak, *B A E* pontokhoz vonassanak *FB FA FE* egyenek. Már az elöbbiekkel hasonlólag mutattatik meg, hogy a *CBA BAE AED* alatti szegletek mindenike különkülön *BF AF EF* egyenekkel ketté van vágva. És mivel a *BCD* alatti szeglet egyenlö a *CDE* alattival, és a *BCD* alattinak hasonfele az *FCD* alatti, a *CDE* alattinak megint hasonfele a *CDF* alatti; tehát az *FCD* alatti is egyenlö a *CDF* alattival: úgy hogy *FC* oldal is egyenlö *FD* oldallal. Hasonlókép muttattatik meg, hogy *FB FA FE* egyeneknek is mindenike egyenlö *FC FD* közül mindenikkel; *FA FB FC FD FE* öt egyen tehát egymással egyenlö. Az *F* középponttal s *FA FB FC FD FE* közök egyikével irt kör tehát a többi pontokon is átmenend, és körül leend irva. Irassék mint *ABCDE*.

Adott négyszegre tehát sat.

15. Feladat:

Adott körbe egyenlö-oldalu s egyenlő-szegletü hatszeget írni.





Legyen az adott kör *ABCDEF*: *ABCDEF* körbe egyenlö-oldalu s egyenlö-szegletü hatszeget kell írni.

Húzassék *ABCDEF* körnek átméröje *AD*, vétessék a kör középpontja *G*, és *D* középponttal, *DG* közzel irassék *EGCH* kör, azután *EG CG* egyenek vonatván, nyujtassanak meg *B F* pontokig, és vonassanak *AB BC CD DE EF FA*: azt mondom, hogy *ABCDEF* hatszeg egyenlő oldalu és szegletü.

Mert minthogy *G* pont *ABCDEF* kör középpontja, *GE* egyenlö *GD*-vel; ismét mivel *D* pont *EGCH* kör középpontja, *DE* egyenlő *DC*-vel. De megmutattaték, hogy *GD* egyenlö *GE*-vel, tehát *GE* is egyenlö *DE*-vel; *EGD* háromszeg tehát egyenlő oldalu, és annak *EGD GDE DEG* alatti három szegletei egymással egyenlők, minthogy az egyenlöszáru háromszegeknek talpnáli szegletei egymással egyenlők. Úgyde a háromszeg három szegletei két derékkel egyenlők, az *EGD* alatti szeglet tehát két deréknek harmada. Hasonlólag mutattatik meg, hogy a *DGC* alatti szeglet is két deréknek harmada. És minthogy *CG* egyen *EB*-re állítva, az *EGC CGB* alatti két szomszéd szegletet együtt két derékkel egyenlövé teszi, tehát a harmadik *CGB* alatti is harmada két deréknek; az *EGD DGC CGB* alatti szegletek tehát egymással egyenlők; úgy hogy a hozzájok hegygyel álló *BGA AGF FGE* alattiak is egyenlök egymással. Az *EGD DGC CGB BGA AGF FGE* alatti hat szeglet tehát egymással egyenlö. De egyenlő szegletek egyenlö kerületeken állanak; *AB BC CD DE EF FA* hat kerület tehát egymással mind egyenlö. Egyenlő kerületeket pedig egyenlö egyenek fognak át, *AB BC CD DE EF FA* hat egyen tehát egymással egyenlő;

ABCDEF hatszeg tehát egyenlő oldalu: azt mondom, egyenlő szegletü is. Mert mivel *FA* kerület *ED* kerülettel egyenlő adjuk hozzájok a közös *ABCD* kerületet, tehát az egész *FABCD* kerület egyenlő az egész *EDCBA* kerülettel; már pedig *FABCD* kerületen az *FED* alatti szeglet áll, az *EDCBA* kerületen megint az *AFE* alatti; egyenlő tehát az *AFE* alatti szeglet az *FED* alattival. Hasonlólag mutattatik meg, hogy *ABCDEF* hatszegnek többi szegletei is egyenként egyenlők az *AFE FED* alatti szegletek mindenikével; tehát *ABCDEF* hatszeg egyenlőszegletü. De meg van mutatva hogy egyenlőoldalu is, és *ABCDEF* körbe van irva.

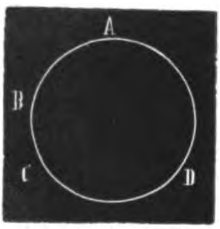
Adott körbe tehát sat.

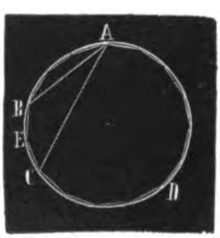
Tanuság. Ebből tehát világos, hogy a hatszeg oldala egyenlő a kör középpontja egyenével.

(És ha *A B C D E F* pontokon át a kört érintő egyeneket húzunk, egyenlő-oldalu és egyenlő-szegletü hatszeg lesz irva a szerint, a mi ötszegről mondatott. És megint az öt szegről mondotthoz hasonló móddal irandunk kört adott hatszegbe, és körüle).

16. Feladat:

Adott körbe egyenlő-oldalu és egyenlő-szegletü tizenötszeget írni.





Legyen az adott kör *ABCD*: *ABCD* körbe egyenlő-oldalu és egyenlő-szegletü tizenötszeget kell írni.

Illessék az *ABCD* körbe irható egyenlőoldalu háromszegnek *AC* oldala, megint az egyenlőoldalu ötszegnek *AB* oldala: tehát a mekkora tizenöt egyenlő szeletekből áll *ABCD* kör, akkora ötből álland *ABC* kerület, harmada levén a körnek, és háromból *AB*, ötöde levén a körnek; a maradék *BC* tehát két egyenlőből áll. Vágassék ketté *BC E* pontnál; tehát *BE EC* kerületek mindenike *ABCD* körnek tizenötöde leend.

Ha tehát BE EC egyeneket vonva, azokkal egyenlöket illesztünk folyvást $ABCD$ körbe, egyenlö-oldalu és egyenlö-szegletü tizenötszeg lesz abba írva. m. t. k.

(Ha az ötszegről mondottakhoz hasonló módokon a kör osztályain által a kört érintő egyeneket húzunk, egyenlö-oldalu és egyenlö-szegletü tizenötszeg lesz a körre körülírva. Ugyancsak az ötszegről mondottak szerint adott tizenötszegbe és körüle köröket írhatunk).

EUKLIDES ELEMEINEK
ÖTÖDIK KÖNYVE.

Értelmezések:

1. *Mekkoraság* mekkoraságnak, kisebb a nagyobbnak, része, ha felméri a nagyobbat.

2. *Szorzata* nagyobb a kisebbnek, ha a kisebb felméri.

3. (*Arány* két egynemü mekkoraságnak nagyságra nézve egymáshozi létmódja).

Jegyz. Ezen értelmezést, a kézirathozi tiszteletből, minden kiadó megtartotta ugyan, de minden, ki nem csak criticus philologus, hanem criticus mértanár is vala, halálra itélte. Méltánylására ez értelmezés védőjének, Barrownak (a nagy Newton mesterének), szavait idézzük:

„Ezen értelmezést metaphysicainak nevezzük: mert tulajdonkép nem mértani, minthogy a mértanban semmit belőle nem következtetnek; de belátásom szerint nem is lehet semmit belőle következtetni. — Az utána-való, sokkal megfoghatóbb és igazi mértani értelmezésen alapúl ellenben az arányokról való egész tanítmány, a mértan lelke."

Nagyon hihető, hogy az egészen mértani, mindig csak olyat mondó Euklides, miből valamit ki is hoz, ily fogalomhagyta értelmezést nem ada. Ezért mások példájára rekeszbe tettük.

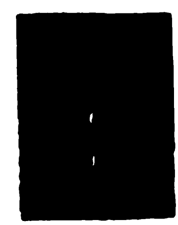
4. *Arányban lenni* mondatnak egymáshoz azon mekkoraságok, melyek szorzatva egymást meghaladhatják.

Jegyz. Innen láthatni, hogy nem minden lehet egymással, mértanilag értve, arányban. Vonal lappal t. i. nem lehet, mivel a vonal, akármennyiszer tétessék, lapot nem tess, és igy a lapnál *nagyobb* sem lehet. — Igen jó volna, a mértani „*Verhältniss*“-t a philosophiaitól megkülönböztetni szóval is, és amazt csupán *aránynak*, ezt csupán *viszonynak* nevezni. Német szomszédaink ezt a *mértan*ban használják is, és az elsőt *Verhältniss*-nek, a másodikat *Relation*-nak nevezik. De mi kétkép vagyunk szerencsésbek, egyfelől, hogy mind két eszmét tiszta magyar szóval fejezhetjük ki; másodszor, mivel az *arány* szót az élet és philosophia nem tette annyira magáévá, mint a németeknél a *Verhältniss*-t, melyet a mértan kiváló sajátává többé nem foglalhat. Mi még, ha eszméink tisztaságát akarjuk, tehetjük.

5. *Ugyanazon arányban* lenni mondatnak mekkoraságok első a másodikhoz, s harmadik a negyedikhez, ha az elsőnek és harmadiknak egyenlő szorzatai, a másodiknak és negyediknek egyenlő szorzatainál, akármely szorzás szerint, páronkint véve, vagy egyszersmind nagyobbak, vagy egyszersmind velök egyenlők, vagy egyszersmind kisebbek.

Jegyz. Az *egyarányuságnak* (proportio) ezen egyedül átalános, minden esetet magában foglaló, mégis tökélyesen tiszta és határzott eszméjét, melyet az újabb időkben felvett számvetési értelmezés nagyon méltatlanul, s a mértani magasztalt „evidentia“ nagy kárával csaknem kiküszöbölt, különösen ajánljuk olvasóink figyelmébe. Világosításul álljon a következő példa:

Legyen négy vonal, ú. m. $A\ B\ C\ D$,



és vétessenek az elsőnek és harmadiknak akárminő egyenlő szorzatai, magukat egyszerüen véve is ki nem rekesztvén, ú. m. $A.\ C.\ 2A\ 2C$, $3A\ 3C$, $5A\ 5C$, $12A\ 12C$, $60A\ 60C$, $100A\ 100C$, sat. sat. Ismét vétessenek a másodiknak és negyediknek akárminő, akár amazokkal egyenlő, akár azoktól különböző, de egymásra nézve egyenlő szorzataik, t. i. $B.\ D.\ 2B\ 2D$, $4B\ 4D$, $7B\ 7D$, $10B\ 10D$, $45B\ 45D$, $80B\ 80D$, sat.

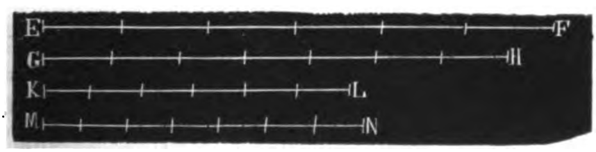
Ha már ezek és más egyenlő szorzatok, vagy sokasok, akármikép öszveillesztve, és az adott négy vonal szerint elrendezve, p. o. $A\ 2B\ C\ 2D$, $2A\ 2B\ 2C\ 2D$, $3A\ 2B\ 3C\ 2D$, $3A\ 3B\ 3C\ 3D$, $3A\ 10B\ 3C\ 10D$, $100A\ 45B\ 100C\ 45D$, oly viszonyban és kölcsönös függésben vannak, hogy az első sorban: ha A nagyobb $2B$-nél, C is nagyobb $2D$-nél, ha A egyenlő $2B$-vel, C is egyenlő $2D$-vel, ha A kisebb $2B$-nél, C is kisebb $2D$-nél; vagy a második sorban: ha $2A$ nagyobb $2B$-nél, $2C$ is nagyobb $2D$-nél, ha $2A$ egyenlő $2B$-vel, $2C$ is egyenlő $2D$-vel, s ha $2A$ kisebb $2B$-nél, $2C$ is kisebb $2D$-nél, s így tovább minden lehető szorzatokra és öszveillesztésekre nézve igaz: akkor azt mondjuk, hogy *A* úgy van *B*-hez mint *C* *D*-hez, vagyis: *A* *B*-hez és *C* *D*-hez azonegy arányban vannak.

Az olvasó ezeket képletesítse magának a felebbi és más önkényesen választott vonalok sőt számoknak is különféle módoni sokasításával, ezen és más betüknek az általunk adott minta szerénti elrakásával, s több efféle módokkal, melyeket a tanulni szeretés sugalland nékie.

6. Ha pedig az egyenlő szorzatok közül az elsőnek szorzata nagyobb a második szorzatánál; a harmadik szorzata pedig nem nagyobb a ‚negyedik' szorzatánál: akkor az első a másodikhoz *nagyobb arányban* van, mint a második a negyedikhez.

Jegyz. Például vegyük fel a következő négy vonalt:

és vegyük az elsőnek és harmadiknak *EF* *KL*, a második és negyediknek *GH* *MN* egyenlő szorzatait:



A képletből világosan kitetszik, hogy az elsőnek szorzata (*EF*) *nagyobb* a másodiknak szorzatánál (*GH*-nál), a harmadiknak szorzata (*KL*) ellenben *nem nagyobb* a negyediknek szorzatánál (*MN*-nél); tehát az első (*A*) nagyobb arányban van a másodikhoz (*B*-hez), mint a harmadik (*C*) a negyedikhez (*D*-hez).

7. Egymáshoz ugyanazon arányban levő mekkoraságok *egyarányuak*nak mondatnak.

8. (*Egyarányuság*, az arányok ugyanazonsága).

Jegyz. Ez az értelmezés vagy az előbbeninek viszhangja, s így valamely becsúszott glossema: vagy ha egyebet akar tenni, valamelyik kiadó metaphysicai szemlélődése, s ekkor a harmadikkal egy húron pendül. Mindenkép gyanus, és nélkülözhető.

9. Egyarányuság legalább is *három* tag között van.

Jegyz. Midőn *három* mekkoraság van egyarányban, az első úgy van a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz. Mikor pedig *négy* mekkoraság egyarányu, kétkép lehet venni: vagy csak az első a másodikhoz s a harmadik a negyedikhez van egyarányban; vagy ezeken kivül a második is a harmadikhoz. Az utóbbi esetben a négy mekkoraság folyvást egyarányunak mondatik, mivel mind a két arány egy-egy közös tag által öszve van kapcsolva, s az arányok mintegy egymásból látszanak folyni. P. o. jelentsenek *A B C D* négy folyvást egyarányu mekkoraságot; ezt tehát így kell kimondani: mint *A* van *B*-hez, úgy van *B C*-hez és *C D* hez. *Három* mekkoraság mindig csak folyvást egyarányu lehet, kivéve ha kettő köztük egyenlő. — Majd elfeledők mondani, hogy akár az arányt, akár az egyarányt képző mekkoraságok egyenkint *tagok*nak neveztetnek.

10. Mikor három mekkoraság egyarányu, az első a hardikhoz *kétszeres* arányban lenni mondatik, mint a másodikhoz.

11. Mikor pedig négy mekkoraság (folyvást) egyarányu, az első a negyedikhez *háromszoros* arányban lenni mondatik, mint a másodikhoz; és így sorban mindig egygyel többszörösben, mig tart az egyarányuság.

Jegyz. A *kétszeres* és *háromszoros* arányoknál a világért sem kell az arányt képző mekkoraságok két vagy háromakkoraságáról gondolkodni, mivel ama kifejezéseknek ezzel semmi köze, s gyakran épen nem is úgy van. A *kétszeres* szó csak azt teszi, miszerént *két*, még pedig folyvásti, aránynak kell létezni, hogy oly arány támadhasson, melyet kétszeresnek nevezünk. P. o. hogy *C A*-hoz kétszeres arányban lehessen, szükség, hogy legyen egy oly, *B*, mekkoraság, miszerént *A* úgy van *B*-hez, mint *B C*-hez; s hol ez a feltét nem teljesíthető, ott kétszeres arány sem lehet. Hasonlólag van a dolog a *háromszoros* aránynyal is, mely három folyvásti egyarányt teszen fel. Tehát, hogy *D A*-hoz háromszoros arányban lehessen, szükség, hogy legyen két, *B C*, mekkoraság, miszerént a mint *A B*-hez, úgy legyen *B C*-hez és *C D*-hez.

Tovább is folyhat az arányok szorzása; ha t. i. a mint *A B*-hez, úgy van *B C*-hez, *C D*-hez és *D E*-hez; tehát *A E*-hez *négyszeres* arányban van mint *A B*-hez, mivel *A*-tól *E*-ig négy folvásti arány van.

Még egy igazlással tartozunk. Minthogy négy mekkoraság *folyvást* és *nemfolyvást* is lehet egyarányban, a 11-ik értelmezés pedig csak az elsőbb esetben áll: ezen szót *folyvást* rekeszben odatenni szükség vala.

12. *Hasonnevű* mekkoraságoknak mondatnak az előtagok az előtagokkal s utótagok az utótagokkal.

Jegyz. Az arányokban azt a mekkoraságot, melynek nevét a kimondásban első ejtésben hagyjuk, *előtag*nak nevezzük, mivel elől szokás írni és mondani; a melyikét pedig a másik után *hoz*, *hez* raggal mondjuk ki, *utótag*nak. Eleinte mindig vagy önkényünktől vagy czélunktól függ, hogy az arányt alakító két mekkoraság közül melyiket tegyük elő- vagy utótagnak; de miután megtettük, annál kell maradnunk; vagy ha a dolog természete változtatást parancsol, arról az olvasót vagy tanulót mindenkor értesítnünk. Ezen változtatások s az ezeket jelelő szók a következő értelmezések tárgyai.

13. Az *arány cserélése*, az előtagnak előtaghoz, és utótagnak utótaghoz vétele.

Jegyz. Az előbbi jegyzésünkben említett hely és név-változtatásoknak első neme a *cserélés*, mely csak 4 tagból álló egyarányban eshetik meg. Nevét onnan kapta, hogy a két arány egymás közt tagot *cserél*: t. i. az első arány átadja *utó*tagját a masodiknak *elő*tagul, s a második arány *elő*tagját az elsőnek *utó*tagul. P. o. a mint *A B*-hez, úgy *C D*-hez, cserélve: a mint *A C*-hez, úgy *B D*-hez.

14. *Visszált* arány, az utótagnak mint előtagnak, az előtaghoz mint utótaghoz vétele.

Jegyz. Visszálni két mekkoraságot is lehet; p. o. ez: *A B*-hez, visszálva: *B A*-hoz. Ha pedig több mekkoraság van egyarányban, minden arányt különkülön visszálni kell, ú. m. a mint *C D* hez úgy *E* F-hez, visszálva:

a mint *D C*-hez úgy *F E*-hez. Ismét:

a mint *G H*-hoz, úgy *K L*-hez és *M N*-hez, visszálva:

a mint *H G*-hez, úgy *L K*-hoz és *N M*-hez.

Ugyanezt kell tudnunk a következő változtatásokról is.

15. Az *arány öszvetétele*, az előtagnak és utótagnak együtt mint egy mekkoraságnak az utótaghoz vétele.

Jegyz. Az arány öszvetételét gondosan meg kell különböztetni az arányok öszveállásától, melyről a 6-ik könyv 5-ik értelmezésében leend szó. *Öszvetesszük* az arányt úgy, hogy elő- és utótagját öszvezvén, ezen öszveget teszszük előtagnak, s a volt utótagot meghagyjuk utótagnak. P. o. A B-hez;

öszvetéve : A meg B, B-hez. Más : a mint C D-hez úgy E F-hez; öszvetéve: a mint C meg D D-hez, úgy E meg F F-hez.

16. Az arány *felbontása*, a felüléknek, melylyel az előtag az utótagot meghaladja, az utótaghoz vétele.

Jegyz. *Felbontjuk* az arányt, midőn azt a mivel az előtag nagyobb az utótagnál, új előtagnak teszszük, s a volt utótagot meghagyjuk. Az említett *felüléket* természetesen úgy kapjuk, ha az utótagot az előtagból lehúzzuk, miszerént: A B-hez;

felbontva: A, B hijján, B-hez. Példavonalokban:

AB BE-hez.

felbontva : AB, BE hijján, (azaz AE), BE-hez.

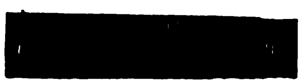
Egy arányt következőleg bontunk fel:

a mint A B-hez, úgy C D-hez, felbontva: a mint A, B hijján, B-hez, úgy C, D hijján, D-hez.

17. Az arány *átfordítása*, az előtagnak vétele a felülékhez, melylyel az előtag az utótagot meghaladja.

Jegyz. *Átfordítjuk* az arányt, midőn az *előtagot* hagyjuk meg. s azt, a mivel az előtag nagyobb az utótagnál, teszszük új utótagnak. P. o. az előbbi szerint: A B-hez,

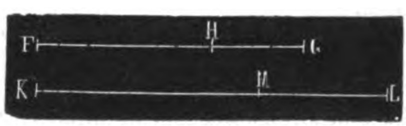
átfordítva: A, (A, B hijján)-hoz. Vonalokkal:



CD DE-hez,

átfordítva: CD CE-hez. (Mert CD, DE hijján, CE-vel egyenlő).

Egyarány átfordítva:



A mint FG GH-hoz, úgy KL LM-hez, átfordítva: a mint FG FH-hoz, úgy KL KM-hez. (Mert: a mivel FG nagyobb GH-nál, az FH; s a mivel KL nagyobb LM-nél, az KM).

A következő három értelmezés közös jellcme, hogy mindenikben két sor mekkoraság vétetik fel, úgy hogy a hány tagból áll az első sor, annyiból álljon a második is.

18. *Egyközös* arány, midőn több mekkoraságok, és megint mások, azokkal egyenlő számuak és kettőnként egyarányuak levén, a mint az első rendbeli mekkoraságokban az első az utolsóhoz, úgy van a második rendbeli mekkoraságokban az első az utolsóhoz. (A szélsök egymáshoz vétele a közbülsök kihagytával).

Jeygz. Legyen egyenlő számu tagokból álló két sor mekkoraság, p. o.

$$\begin{matrix} A & B & C & D & E \\ F & G & H & K & L \end{matrix}$$

és a mint A F-hez, úgy B G-hez, C H-hoz, D K-hoz, és E L-hez. Ha már az első sorból A-t s a másodikból F-et előtagokul teszszük, s az elsőből E-t választjuk az A mellé utótagnak, mely az A-tól ötödik, a második sorból is az F mellé az ötödiket, ú. m. az L-et kell utótagul tennünk. *Egyközösen*, mert a hány tag van A és E közt, annyi van F és L közt is. Hasonlókép lesznek ezekből:

A mint M N-hez, úgy O P-hez és Q R-hez;

ezek : $\left.\begin{matrix} M\ Q\text{-hoz} \\ \text{és } N\ R\text{-hez;} \end{matrix}\right\}$ mert : $\left\{\begin{matrix} M & O & Q \\ N & P & R. \end{matrix}\right.$

ezekből :

a mint A E-hez, úgy B F-hez, C G-hez, D H-hoz ;

ezek : $\left.\begin{matrix} A\ D\text{-hez} \\ \text{és } E\ H\text{-hoz;} \end{matrix}\right\}$ mert : $\left\{\begin{matrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H. \end{matrix}\right.$

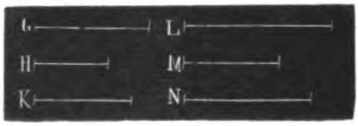
19. *Rendezett* az egyarányuság, midőn (levén három mekkoraság és mások azokkal egyenlő számuak), a mint az előtag az utótaghoz, úgy van az előtag az utótaghoz, és a mint van az utótag valami máshoz, úgy van az utótag valami máshoz.

Jegyz. A rekeszben tett szavak szintoly szükségkép oda tartoznak ebbe az értelmezésbe, mint a következőbe, s gyaníthatólag a leirók vétségéből maradtak ki. — Egyébaránt például szolgáljanak a következők :

Legyenek : $\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F; \end{matrix}$

ha már a mint A B-hez, úgy van D E-hez, és a mint B C-hez, úgy E F-hez, ekkor A B C, D E F rendben egyarányuak.

Legyenek megint :



és legyen a mint *G H*-hoz, úgy *L M*-hez; s a mint *H K*-hoz, úgy *M N*-hez; e szerint *G H K*, *L M N* rendezett egyarányban vannak.

20. *Zavart* az egyarányuság, midőn, levén három mekkoraság, és megint mások azokkal egyenlő számuak: a mint az első rendbeli mekkoraságokban az előtag az utótaghoz, úgy van a második rendbeli mekkoraságokban az előtag az utótaghoz: de a mint van az első rendbeli mekkoraságokban az utótag valami máshoz, úgy van a második rendbeli mekkoraságokban valami más az előtaghoz.

Jegyz. Ha a mint *E U*-hoz, úgy van *e u*-hoz, s a mint *U M*-hez, úgy *m e*-hez; akkor *E U M*, és *m e u* zavart egyarányban vannak. — Más példa:

Legyenek *A B C*
D E F,

és legyen a mint *A B*-hez, úgy *E F*-hez, s a mint *B C*-hez, úgy *D E*-hez; e szerint a felebbi három mekkoraság zavart egyarányban van. — Hasonlókép a következő vonalok:

zavart arányban vannak; mivel a mint *G H*-hoz, úgy *M N*-hez, s a mint *H K*-hoz, úgy *L M*-hez.

Mind rendbeszedett, mind zavart egyarány három-három tagnál többől álló sorok közt is létezhetik; míről hogy egy kis képzetet adjunk, vegyük fel a következő két sort:

A B C D E F G,
H K L M N O P.

Már ha: a mint *A B*-hez, úgy van *H K*-hoz,
a mint *B C*-hez, úgy *K L*-hez,
„ „ *C D*-hez, „ „ *L M*-hez,
„ „ *D E*-hez, „ „ *M N*-hez,
„ „ *E F*-hez, „ „ *N O*-hoz,
„ „ *F G*-hez, „ „ *O P*-hez,
a jelelt mekkoraságok rendezett egyarányban vannak.
Ha pedig: a mint *A B*-hez, úgy *O P*-hez,
„ „ *B C*-hez, „ *N O*-hoz,

a mint CD-hez, úgy M N-hez,
„ „ DE-hez, „ L M-hez,
„ „ EF-hez, „ K L-hez,
„ „ FG hez, „ H K-hoz,
ekkor zavart egyarányban.

Ebben a könyvben Euklides némi elveket használ bizonyítmányaiban, melyek magukban ugyan elég világosok; de mivel az első könyv elején szintolyakat szükségesnek tartott „Közeszmék" czíme alatt előadni, ezekről sem fogott elfelejtkezni. A módszernek hódolva tehát Claviussal és Simsonnal nekik szánunk nehány sort:

Közeszmék:

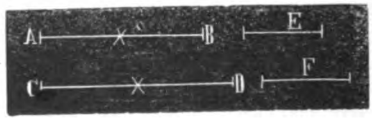
1. Ugyanazon vagy egyenlő mekkoraságok egyenlő szorzata egyenlők.
2. Azok a mekkoraságok, melyeknek egyenlő szorzatai egyenlők, egyenlők.
3. Nagyobb mekkoraságnak szorzata nagyobb, mint a kisebbnek ugyanazon szorzata.
4. Az a mekkoraság, melynek szorzata nagyobb, mint egy másiknak egyenlő szorzata, maga is nagyobb emennél.

A tudós Barrow (Lect. Mathemat.) azt mondja: „Az Elemek egész munkájában semmi sincs oly jeles észéllel találva, oly szigoru következetességgel bebizonyítva, s oly tökélyes pontossággal fejtegetve, mint az egyarányokról való tanítmány." Mi azt teszszük hozzá, hogy ebben a tárgyban maig is annál okszerübb, következetesb, és termékenyebb értekezést nem irtak. — De elvontabb tartalma nehezebb értésüvé is tette a többieknél, s azért leginkább megrongálva is érkezett kezünkhöz. Simson Robert érdemeit e könyv hiányainak kiegészitésében csak úgy méltányolhatjuk, ha fordítmányunkat az ő munkájával tökélyesbítni, s szerzőnket közhasznuabbá tenni igyekszünk.

---

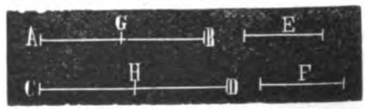
1. Feladat:

Ha akárhány mekkoraság vele egyenlő számu akárhány mekkoraságnak külön-külön egyenlő szorzata: a hány szorzata egy mekkoraság egynek, annyi szorzata öszvesen minden mekkoraság mindennek.



Legyen akárhány AB DC mekkoraság ugyanannyi számu akárhány E F mekkoraságnak külön-külön egyenlö szorzata: azt mondom, hogy a hány-szorzata AB E-nek, annyi-szorzata leend AB meg CD együtt E meg F-nek

Mert mivel AB egyenlö szorzata E-nek, CD pedig F-nek, a mennyi E-vel egyenlö mekkoraság van AB-ben, annyi van F-el egyenlö CD-ben is.

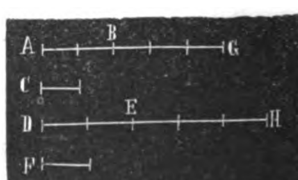


Osztassék AB Evel egyenlö AG GB mekkoraságokra, CD megint F-el egyenlö CH HD mekkoraságokra: az AG GB osztályok száma egyenlö leend a CH HD osztályok számával. És minthogy AG egyenlö E-vel, CH F-fel; tehát AG meg CH egyenlök E meg F-fel. Ugyanazért, GB egyenlö E-vel és HD F-fel: tehát GB meg HD egyenlök E meg F-fel: a hány E-vel egyenlö mekkoraság van tehát AB-ben, annyi E meg F-fel egyenlö van AB meg CD-ben; tehát a hány szorzata AB E-nek, annyi szorzatai AB meg CD is E meg F-nek.

Ha tehát akárhány sat.

2. Feladat:

Ha az elsö a másodiknak, és a harmadik a negyediknek egyenlö szorzata, és ha az ötödik is a másodiknak s a hatodik a negyediknek egyenlö szorzata: az elsö és ötödik együttvéve is a másodiknak, s a harmadik és hatodik a negyediknek egyenlö szorzata leend.



Mert legyen az elsö, AB, a másodiknak, C-nek, s a harmadik, DE, a negyediknek F-nek egyenlö szorzata; megint legyen az ötödik, BG, a másodiknak C-nek, s a hatodik, EH, a negyediknek F-nek egyenlö szorzata: azt mondom, hogy az elsö és ötödik együtt véve, *AG*, a másodiknak *C*-nek, s a harmadik és hatodik, *DH*, a negyediknek *F*-nek egyenlö szorzata leend.

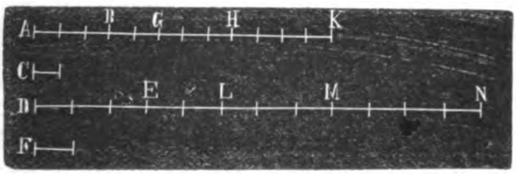
Mert mivel *AB C*-nek s *DE F*-nek egyenlő szorzataik, a hány *C*-vel egyenlö mekkoraság van *AB*-ben, annyi *F*-fel egyenlö van *DE* ben is. Ugyanazért a hány *C*-vel egyenlö van *BG*-ben, annyi *F*-fel egyenlő van *EH*-ban is; tehát a hány *C*-vel egyenlö van az egész *AG*-ben, annyi *F*-vel egyenlö van az egész *DH*-ban is.

Az elsöből és ötödikből öszvetett *AG* tehát a másodiknak *C*-nek, és a harmadikból s hatodikból álló *DH* a negyediknek *F*-nek, egyenlö egyenlö szorzataik.

Ha tehát sat.

***Tanuság*:**

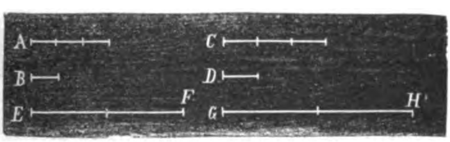
Ha tehát kettőnél több mekkoraság



AB BG GH HK C-nek, és ugyanannyi számu más *DE EL LM MN* mekkoraság *F*-nek, külön-külön egyenlö szorzataik: úgy az elsök öszvege is *AK*, *C*-nek, és a másikok öszvege *DN*, *F*-nek egyenlő szorzataik.

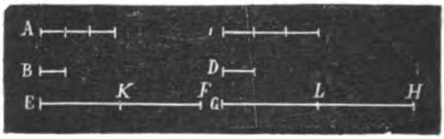
3. Feladat:

Ha az elsö a másodiknak s a harmadik a negyediknek egyenlö szorzataik, s az elsönek és harmadiknak egyenlö szorzatai vétetnek: egyközösen is a vettek mindenike a másodiknak és negyediknek külön-külön egyenlö szorzata leend..



Mert az elsö *A*, a másodiknak *B*-nek, és a harmadik, *C* a negyediknek *D*-nek legyenek egyenlö szorzatai, és vétessenek A-nak C-nek EF GH egyenlő szorzataik: azt mondom, hogy EF B-nek és GH D-nek egyenlő szorzataik.

Mert mivel EF A-nak, GH C-nek egyenlő szorzata, a hány A-val egyenlő van EF-ben, annyi C-vel egyenlő van GH-ban. Osztassék EF A-val egyenlő EK KF mekkorasá-



gokra, GH pedig C-vel egyenlő GL LH mekoraságokra: az EK KF osztályok száma egyenlő lesz a GL LH osztályok számával. És minthogy A B-nek, s C D-nek egyenlő szorzata, EK pedig egyenlő A-val, s GL C-vel: tehát EK B-nek, s GL D-nek egyenlő szorzataik. Ugyanazért KF B-nek és LH D-nek egyenlő szorzataik. Már mivel az első EK a másodiknak B-nek, s a harmadik GL a negyediknek D-nek egyenlő szorzataik, de az ötödik is KF a másodiknak B-nek s a hatodik LH a negyediknek D-nek egyenlő szorzataik: tehát együttvéve az elsőből és ötödikből összetett EF a másodiknak B-nek, s a harmadikból meg hatodikból való GH a negyediknek D-nek egyenlő szorzataik.

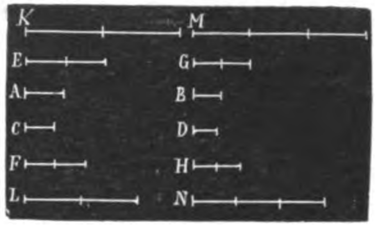
Ha tehát sat.

4. Feladat:

Ha az első a másodikhoz s a harmadik a negyedikhez ugyanazon arányban vannak: az elsőnek és harmadiknak egyenlő szorzataik is a másodiknak és negyediknek egyenlő szorzataikhoz ugyanazon arányban lesznek.

Mert az első A, a másodikhoz B-hez, s a harmadik C, a negyedikhez D-hez legyenek ugyanazon arányban, és vétessenek A-nak C-nek akármely E F egyenlő szorzataik, s B-nek D-nek akármely G H egyenlő szorzataik: azt mondom, hogy a mint E G-hez, úgy van F H-hoz.

Mert vétessenek E-nek F-nek akármely K L egyenlő szorzataik, s G-nek H-nak akármely MN egyenlő szorzataik.



És minthogy E A-nak s F C-nek egyenlő szorzataik s E-nek F-nek K L egyenlő szorzataik vétettek: tehát K A-nak L C-nek egyenlő szorzataik. Ugyanazért M is B-nek és N D-nek egyenlő szorzataik. És minthogy a mint A B-hez, úgy van C D-hez, és A-nak C-nek akármely K L egyenlő szorzataik, B-nek D-nek pedig más akármely M N egyenlő szorzataik vétettek: tehát ha K nagyobb M-nél, L is nagyobb N-nél; ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb. Már pedig K L E-nek F-nek egyenlő szorzataik, M N pedig G-nek H-nak egyenlő akármely szorzataik; tehát a mint van E G-hez, úgy van F H-hoz.

Ha tehát sat.

Jegyz. Egy *tanuság* bódorog ide s tova a kéziratokban és kiadásokban, melyet a baseli és oxfordi a negyedik feladat után helyez ily alakban:

„Miután tehát meg van mutatva, hogy ha K nagyobb M-nél, L is nagyobb N-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb: világos, hogy ha M nagyobb K-nál, N is nagyobb L-nél; ha egyenlő, egyenlő; és ha kisebb, kisebb: s ennélfogva a mint G E-hez, úgy leend H is F-hez. Ebből nyilvános, hogy ha négy mekkoraság egyarányu, visszálva is egyarányu leend."

Simson mutatá ki előbb, észtani bizonyítmánynyal, hogy ez az igazság nem a negyedik feladattól, vagy ennek bizonyítmányától kiválólag függ. A dolog természetéből vett ime gyanítást az azután felfedezett Vaticani Codex igazlá, mely a szóban forgó tanuságot a 7-ik feladat után helyzi. Simson más tanuságot teszen ide, mely valóban a 4-ik feladatból foly, s a mely mind egyébaránt hasznos, mind pedig a 18-ik feladat bebizonyítására szükséges; t. i.

Tanuság: Ha az első mekkoraság a másodikhoz, és a harmadik a negyedikhez ugyanazon arányban van; az elsőnek és harmadiknak akármely egyenlő szorzataikat véve, a mint az elsőnek szorzata a másodikhoz, úgy leend a harmadiké a negyedikhez; megint a másodiknak és negyediknek vétetvén egyenlő szorzataik: a mint az első a másodiknak szorzatához, úgy a harmadik a negyediknek szorzatához.

Mert legyen A B C D négy mekkoraság, a mint A B-hez, úgy C D-hez, és vétessenek A-nak C-nek akármely egyenlő szorzatai E F: azt mondom, hogy a mint E B-hez, úgy van F D-hez.

Ugyanis vétessenek E-nek F-nek akármely K L egyenlő szorzataik, és B-nek D-nek más akármely G H egyenlő szorzataik; az előbbi bizonyítmányból világos, hogy K A-nak és L C-nek egyenlő szorzataik. Már mivel a mint A B-hez, úgy C D-hez, és A-nak C-nek K L egyenlő szorzataik, B-nek D-nek G H egyenlő szorzataik vétettek: ha K nagyobb G-nél, L is nagyobb H-nál; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. Már pedig K L, E-nek, F-nek G H B-nek D-nek egyenlő szorzataik; miszerént a mint E B hez, úgy van F D-hez.

De azt is mondom, hogy ha B-nek D-nek akármely M N egyenlő szorzataik vétetnek; a mint A M-hez, úgy van C N-hez; mit is az előbbihez hasonló módon bizonyíthatni meg.

5. Feladat:

Ha egy mekkoraság más mekkoraságnak annyi szorzata, mennyi az elsőből elvett darab a másikból elvett darabnak: a maradék is a maradéknak annyi szorzata leend, a hány szorzata az egész az egésznek.

Mert legyen AB mekkoraság CD mekkoraságnak annyi szorzata, mennyi AE elvett darab CF elvett darabnak: azt mondom, hogy a maradék EB is a maradék FD-nek annyi szorzata, a hány szorzata az egész AB az egész CD-nek.

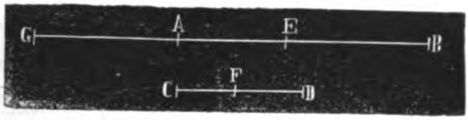
Mert a hány szorzata AE CF-nek, annyi szorzata legyen EB is CG-nek.

És minthogy AE CF-nek és EB és GC-nek egyenlő szorzataik, tehát AE CF-nek és AB GF-nek egyenlő szorzataik: de fel van téve, hogy AE CF-nek s AB CD-nek egyenlő szorzataik; AB tehát mind GF-nek mind CD-nek külön-külön egyenlő szorzatuk; tehát GF egyenlő CD-vel: vétessék el a közös CF; tehát a maradék GC egyenlő a maradék DF-fel. És minthogy AE CF-nek és EB GC-nek egyenlő szorozataik, GC pedig egyenlő DF-fel: tehát AE CF-nek és EB FD-nek egyenlő szorzataik. De fel van téve, hogy AE CF-nek és AB CD-nek egyenlő szorzataik; tehát EB FD-nek s AB CD-nek egyenlő szorzataik; ennélfogva a maradék EB a maradék FD-nek annyi szorzata, a hány szorzata az egész AB az egész CD-nek.

Ha tehát sat.

Jegyz. Ezen bizonyítmányban, szerzője valami olyat kiván tétetni, mint az előbbiekben nem tanított, söt ezután még késöre a 6-ik könyvben fog tanítni. Ily módszer elleni vétséget Euklidestöl, ki maga a testesült észtan, nem várhatni; nincs is másutt sehol példa reá; azért a más helyesb megmutatást, mely az arab fordítmányokban maradt meg, s a melyet Euklides minden latin fordítói is felvették, ide helyezni kötelességünknek tartjuk:

„Vétessék *FD*-nek az a szorzata *AG*, a mi *CF*-nek *AE*, tehát *EG*



öszveg is *CD* öszvegnek az a szorzata, a mi *AE CF*-nek. De fel van téve, hogy *AB* is *CD*-nek az a szorzata, a mi *AE CF*-nek; e szerint *AB* és *EG*, *CD*-nek egyenlö szorzataik; tehát *AB* egyenlö *EG*-vel. Elvéve belölök a közös *AE*-t, *AG* egyenlö leend *EB*-vel. De *AE CF*-nek és *AG FD*-nek egyenlö szorzataik; tehát *AG EB*-vel egyenlö levén, *EB* is *FD*-nek azon szorzata, a mi *AE CF*-nek. Már pedig *AE CF*-nek és *AB CD*-nek egyenlö szorzataik, miszerént *EB FD*-nek az a szorzata, a mi *AB CD*-nek.

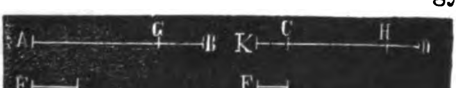
6. Feladat:

Ha két mekkoraság két mekkoraságnak egyenlő szorzata, s amazokból elvett darabok emezeknek ugyancsak egyenlő szorzatai a maradékok is emezekkel vagy egyenlők, vagy ezeknek egyenlő szorzataik.

AB CD két mekkoraság legyen, *E F* két mekkoraságnak egyenlö szorzata; és *AG CH* elvett darabok ugyanazon

E-nek *F*-nek egyenlö szorzataik: azt mondom, hogy *GB HD* maradékok is *E F*-fel vagy egyenlök, vagy ezeknek egyenlö szorzataik.

Mert legyen elöbb *GB* egyenlö *E*-vel: azt mondom, hogy *HD* is egyenlö *F*-fel. Mert tétessék *CK F*-fel egyenlövé. És



minthogy *AG E*-nek s *CH F*-nek egyenlö szorzataik, *GB* pa-dig E-vel KC F-fel egyenlők: tehát AB E-nek és KH F-nek egyenlő szorzataik. De fel van téve, hogy AB E-nek s CD F-nek egyenlő szorzataik; tehát KH F-nek és CD F-nek egyenlő szorzataik. És minthogy mind KH mind CD F-nek egyenlő szorzataik: tehát KH egyenlö CD vel. Vétessék el a közös CH; tehát a maradék KC a maradék HD-vel egyenlö. De KC F-fel egyenlő, tehát HD is egyenlö F-fel. Úgy hogy ha GB egyenlö E-vel, HD is egyenlö F-fel.

Hasonlólag mutatjuk meg, hogy ha GB, szorzata E-nek, HD is annyi szorzata F-nek.

Ha tehát sat.

Jegyz. **A második eset bebizonyítását következőleg pótolják a ordítók, (oda számítva az arábot is):**

Legyen GB E-nek szorzata: azt mondom, HD ugyanazon szorzata F-nek.

Vétessék F-nek az a szorzata, CK, a mi GB E-nek. Már mivel AG E-nek, és CH F-nek egyenlö szorzataik; de GB is E-nek és KC F-nek egyenlő szorzataik: tehát AB is E-nek és KH F-nek egyenlö szorzataik. De a feltét szerint AB E-nek és CD F-nek egyenlő szorzataik: tehát KH CD, F-nek, egyenlő szorzataik, miszerint KH egyenlö CD-vel, és elvétetvén a közös CH, KC egyenlö DH-val. Már pedig a mi szorzata GB E-nek, az a szorzata KC is F-nek; de KC egyenlö HD-vel; tehát HD is az a szorzata F-nek, a mi GB E-nek: m. b. k.

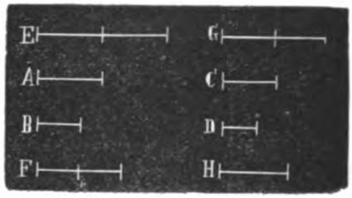
Ide helyez Simson Robert némi pótlék-feladatokat, melyeknek, vagy velök egyértelmüeknek, a textusban meg kelle lenni, mivel közeszméknek nem vehetjük; tudásukat pedig a hátrább következő bizonyítmányok felteszik. Hogy az eredeti feladatok sorát meg ne zavarjuk, betükkel jelelendjük a potlékokat:

A. Feladat:

Ha négy mekkoraság kettőnként véve egyarányban van, s az első nagyobb a másodiknál: a harmadik is nagyobb leend a negyediknél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb.

Legyen A, B, C, D, négy mekkoraság, a mint A B-hez, úgy C D-hez: azt mondom, hogy ha A nagyobb B-nél, C is nagyobb D-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb.

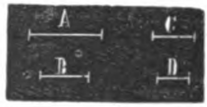
Vétessenek A B C D mekkoraság oknak külön-külön egyenlő szorzatai E F, G H. Már mivel A B C D egyarányuak, s az elsőnek és harmadiknak, a másodiknak és negyediknek E F G H egyenlő szorzatai vétettek, ha E nagyobb



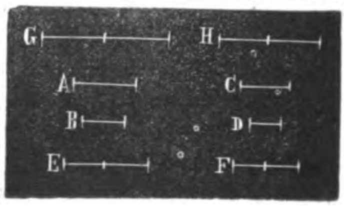
F-nél, G is nagyobb leend H-nál; de E A-nak, F B-nek, G C-nek és H D-nek egyenlő szorzatai; tehát ha A B-nél nagyobb, E is nagyobb F-nél, úgy hogy G is nagyobb H-nál; tehát C is D-nél. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb.

B. Feladat:

Ha négy mekkoraság egyarányu, visszálva is egyarányu leend



Legyen A B C D négy mekkoraság, a mint A B-hez, úgy C D-hez; azt mondom, hogy visszálva is, a mint B A-hoz, úgy D C-hez.

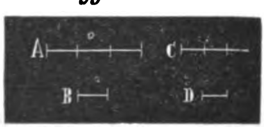


Vétessenek B-nek D-nek E F egyenlő szorzataik, és A-nak C-nek más akármely G H egyenlő szorzataik. Már E vagy nagyobb G-nél, vagy egyenlő vele, vagy kisebb. Legyen előbb E G-nél nagyobb. Tehát G E-nél kisebb. De mivel A B C D egyarányuak, A-nak C-nek G H egyenlő szorzataik, B-nek D-nek más E F egyenlő szorzataik vétettek, és G kisebb E-nél; tehát H is kisebb F-nél, miszerént F nagyobb H-nál. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy ha E egyenlő G-vel, F is egyenlő H-val, s ha E nagyobb mint G, F is nagyobb leend mint H. Már pedig E F B-nek D-nek, és G H A-nak C-nek egyenlő szorzataik; tehát a mint B A-hoz, úgy D C-hez.

Ez a feladat nélkülözhetővé teszi a 4-ik feladat után tett, úgynevezett: Tanuságot.

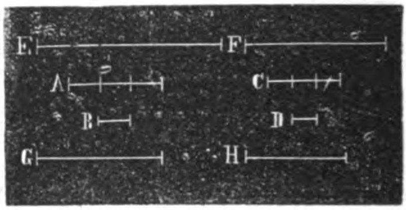
C. Feladat:

Ha az első az a szorzata vagy az a része a másodiknak, a mi szorzata vagy része a harmadik a negyediknek: a mint az első a másodikhoz, úgy leend a harmadik a negyedikhez.



Legyen A, B, C, D négy mekkoraság, és A B-nek, C D-nek legyenek egyenlő szorzataik; azt mondom, hogy a mint A B hez, úgy van C D-hez.

Mert vétessenek A-nak C-nek E, F, egyenlő szorzataik, és B-nek D-nek más akármely G H egyenlő szorzataik. Már mivel A B-nek C D-nek egyenlő szorzataik; de E is A-nak, F C-nek egyenlő szorzataik: tehát E B-nek és F D-nek egyenlő szorzataik. De G is B-nek és H D-nek egyenlő szorzataik; úgy hogy ha E és G B-vel, F és H D-vel egyenlő részekre osztatnak, és E-ben több B-vel egyenlő rész van mint G-ben, F-ben több leend, mint H-ban; miszerint ha E G-nél nagyobb, F is nagyobb leend H-nál. Hasonlókép mutatjuk meg,



hogy ha E egyenlő G-vel, F is egyenlő H-val; s ha kisebb, kisebb. De E és F A-nak C-nek, G H B-nek D-nek akármely egyenlő szorzataik; tehát a mint A B-hez, úgy van C D-hez.

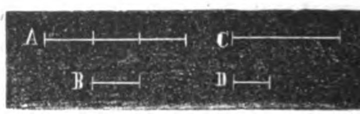
De legyen A B-nek az a része, a mi C D-nek; azt mondom, hogy a mint A B hez, úgy van C D hez.

Mert mivel A az a része B-nek, a mi C D-nek, tehát B az a szorzata A-nak, a mi D C-nek; miszerént az előbb megmutattakhoz képest, a mint B A-hoz, úgy van D C-hez, és visszálva, a mint A B-hez, úgy C D-hez.

D. Feladat:

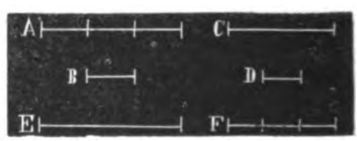
Ha a mint az első a másodikhoz, úgy van a harmadik a negyedikhez, s az első a másodiknak vagy szorzata vagy része: a harmadik is a negyediknek ugyanazon szorzata, vagy ugyanazon része.

Legyen A B C D négy mekkoraság egyarányban, a mint A B hez, úgy C D-hez, és A B-nek legyen valami szorzata; azt mondom, hogy a mi szorzata A B-nek, az a szorzata C is D-nek.



Mert vétessék A-val egyenlő E, és D-nek az a szorzata F, a mi A B-nek.

Már mivel a mint A B-hez, úgy van C D-hez, és a másodiknak B-nek E, és a negyediknek D-nek F egyenlő szorzataik; tehát a mint A E-hez, úgy van C F-hez; de A egyenlő E-vel, tehát C is egyenlő F-fel. Már pedig F D-nek, és E vagy A B nek egyenlő szorzataik, tehát C is az a szorzata D-nek, a mi A B nek.



De legyen A B-nek valami része, ismét azt mondom, hogy C is D-nek az a része, a mi A B-nek.

Mert mivel a mint A B-hez, úgy C D-hez, tehát visszálva, a mint B A-hoz, úgy D C-hez. És minthogy A B-nek része, tehát B A-nak szorzata; már pedig megmutattaték, hogy a mint *B A*-hoz, úgy *D C*-hez; miszerint *D C*-nek az a szorzata, a mi *B A*-nak; ennélfogva *C D*-nek az a része, a mi *A B*-nek.

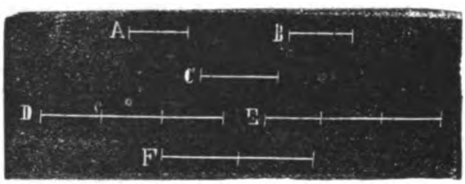
Mindezen feladatok a következőkben idéztetnek: nevezetesen az *A Feladat* V. 25. VI. 31. XI. 34. XII. 15, a *B Feladat* V. 20. 24, a *C Feladat* X. 5. 6, a *D Feladat* VI. 9.

7. Feladat:

Egyenlők egyarányuak azon egyhez, azonegy is egyarányu egyenlőkhez.

A B legyenek egyenlő mekkoraságok, és *C* más akármely mekkoság: azt mondom, hogy mind *A* mind *B* azonegy arányban vannak *C*-hez, és *C* is mind *A*-hoz mind *B*-hez.

Mert vétessenek *A*-nak *B*-nek *D*, *E*, egyenlő - szorzataik, és *C*-nek más akármely *F* szorzata.



Minthogy *D A*-nak s *E B*-nek egyenlő szorzataik, *A* pedig egyenlő *B*-vel, tehát *D* is egyenlő *E*-vel. *F* pedig *C*-nek más akármely szorzata: ha tehát *D* nagyobb *F*-nél, *E* is nagyobb *F*-nél; ha egyenlő vele, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. De *D E A*-nak *B*-nek egyenlő szorzataik, *F* pedig *C*-nek akármely szorzata; tehát a mint *A C*-hez, úgy van *B C*-hez.

Még azt mondom, hogy *C* mind *A*-hoz mind *B*-hez ugyanazon arányban van.

Mert ugyanazon készületeket téve, hasonlólag mutatjuk meg, hogy *D* egyenlő *E*-vel; *F* pedig más akármely szorzata: ha tehát *F* nagyobb *D*-nél, *E*-nél is nagyobb; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. Már pedig *F* a *C* szorzata, *D* és *E* megint *A*-nak és *B*-nek akármely egyenlő szorzataik; tehát a mint *C A*-hoz, úgy van *C B*-hez.

Egyenlők tehát sat.

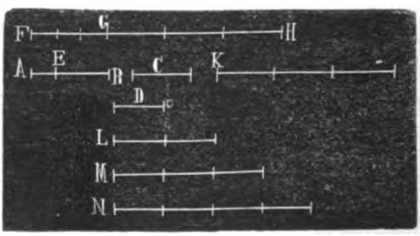
Tanuság. Ebből világos: hogy ha valamely mekkoraságok egyarányuak, visszáson is egyarányuak.

Jegyzés. E tanuság gyanus voltáról, és bizonytalan helyzetéről már felebb a IV. Felad. után tett jegyzésünkben szólánk.

8. Feladat:

Nem egyenlő mekkoraságok közül a nagyobbik nagyobb arányban van azonegyhez, mint a kisebbik; és azonegy a kisebbikhez nagyobb arányban van, mint a nagyobbikhoz.

Legyenek *AB C* nem egyenlő mekkoraságok, s *AB* legyen *C*-nél nagyobb, és más akármely mekkoraság legyen *D*: azt mondom, hogy *AB D*-hez nagyobb arányban van, mint *C D*-hez, és *D C*-hez nagyobb arányban van, mint *AB*-hez.



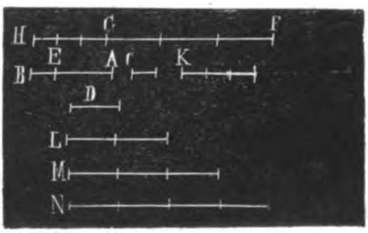
Mert mivel *AB C*-nél nagyobb, tétessék *BE C*-vel egyenlővé: már *AE EB* közül a kisebbik szoroztatván, valamikor nagyobb lesz *D*-nél. Legyen előbb *AE EB*-nél kisebb, és szorzassék *AE* addig, mig származata nagyobb lesz *D*-nél, és legyen a szorzata *FG*, *D*-nél nagyobb, s a hány-szorzata *FG AE*-nek, annyi-szorzatai legyenek *GH EB*-nek, és *K C*-nek: továbbá vétessék *D*-nek *L* kettőzete, *M* háromszorzata, s így tovább, mig *D*-nek a vett szorzata legelsőben leend nagyobb *K*-nál. Vétessék és legyen *D*-nek *N* négyszerezete legelsőben nagyobb *K*-nál.

Már minthogy *K* legelsőben kisebb *N*-nél, tehát *K M*-nél nem kisebb. És mivel *FG AE*-nek és *GH EB*-nek egyenlő szorzataik, tehát *FG AE*-nek és *FH AB*-nek egyenlő szorzataik. De *FG AE*-nek és *K C*-nek egyenlő szorzataik, tehát *FH AB*-nek és *K C*-nek egyenlő szorzataik; *FH* és *K* tehát *AB*-nek és *C*-nek egyenlő szorzataik. Ismét minthogy *GH*

EB-nek és *K C*-nek egyenlő szorzataik, *EB* pedig egyenlő *C*-vel; tehát *GH* is egyenlő *K*-val. De *K M*-nél nem kisebb, tehát *GH* sem kisebb *M*-nél. *FG* pedig nagyobb *D*-nél, tehát az egész *FH* nagyobb mint az együvé vett *D* meg *M*. De *D* meg *M* együtt *N*-nel egyenlők; mivel *M D*-nek háromszorzata, és így *D* meg *M* együtt *D*-nek négyszerzete; *N* is *D*-nek négyszerzete; ennélfogva *M* meg *D* együtt *N*-nel egyenlők. Úgyde *FH* nagyobb, mint *D* meg *M* együtt; *FH* tehát *N*-net meghaladja, *K* pedig *N*-net nem haladja meg. Már pedig *FH* és *K AB*-nek és *C*-nek egyenlő szorzataik, *N* pedig *D*-nek akármely más szorzata; *AB* tehát nagyobb arányban van *D*-hez, mint *C D*-hez.

Még azt mondom, hogy *D* is *C*-hez nagyobb arányban van, mint *D AB*-hez.

Mert ugyanazon készületeket téve, hasonlólag mutatjuk meg, hogy *N K*-nál nagyobb, de *FH*-nál nem nagyobb. Már pedig *N D*-nek a szorzata és *FH K AB*-nek *C*-nek akármely egyenlő szorzataik; tehát *D C*-hez nagyobb arányban van, mint *D AB*-hez.

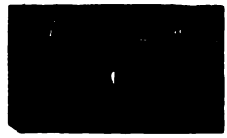


De legyen *AE* nagyobb *BE*-nél: a kisebbik *EB* szorzatván, valamikor nagyobb lesz *D*-nél. Szorzassék és legyen *GH EB*-nek szorzata és *D*-nél nagyobb: és a hány szorzata *GH EB*-nek, annyi-szorzatává tétessék *FG* is *AE*-nek, valamint *K* is *C*-nek. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy *FH* és *K AB*-nek és *C*-nek egyenlő szorzatai. És vétessék hasonlókép *D*-nek *FG*-nél legelsőben nagyobb *N* szorzata: úgy hogy ismét *FG M*-nél nem kisebb, *GH* pedig *D*-nél nagyobb; tehát az egész *FH D*-t meg *M*-met együtt, azaz *N*-et meghaladja, *K* pedig *N*-et nem haladja meg, minthogy még *FG*, mely *GH*-nál azaz *K*-nál nagyobb, sem haladja meg *N*-net: és így követve a fennebbieket, végrehajtjuk a megmutatást.

Nem-egyenlő mekkoraságok tehát sat.

9. Feladat:

Azonegyhez egyarányuak egymással egyenlők: és a melyekhez azonegy egyarányu, azok egymással egyenlők.



Mert legyenek mind A, mind B C-hez egyarányuak: azt mondom, hogy A egyenlő B-vel.

Mert ha nem, nem volna mind A mind B C-hez egyarányu: de egyarányu; tehát A egyenlő B-vel.

De legyen ismét C mind A-hoz mind B-hez egyarányu azt mondom, hogy A egyenlő B-vel.

Mert ha nem, nem volna C mind A-hoz mind B-hez egyarányu; de egyarányu; tehát A egyenlő B-vel.

Azonegyhez tehát sat.

10. Feladat:

Azonegyhez arányban levők közül a nagyobb arányu nagyobb. A melyikhez pedig azonegy nagyobb arányban van, az kisebb

Mert legyen A C-hez nagyobb arányban, mint B C-hez: azt mondom, hogy A nagyobb B-nél.

Mert ha nem, A B-vel vagy egyenlő, vagy kisebb nálánál. Már pedig A B-vel nem egyenlő; mert úgy mind A mind B egyarányuak volnának C-hez. Nem is kisebb A B-nél; mert úgy A C-hez kisebb arányban volna, mint B C-hez. De nincs kisebben; nem kisebb tehát AB-nél. Megmutattaték, hogy nem is egyenlő; tehát A B-nél nagyobb.

De ismét legyen C B-hez nagyobb arányban, mint C A-hoz: azt mondom, hogy B kisebb A-nál.

Mert ha nem, vagy egyenlő, vagy kisebb. Már pedig B A-val nem egyenlő: mert úgy C mind A-hoz mind B-hez egyarányu volna. De nem egyarányu; nem egyenlő tehát A B-vel. B nem is nagyobb A-nál; mert úgy C kisebb arányban volna B-hez, mint A-hoz. De nincs kisebben, tehát nem kisebb A-nál. Megmutattaték, hogy nem is egyenlő; B tehát A-nál kisebb.

Simson bizonyítmánya:

Legyen *A C*-hez nagyobb arányban, mint *B C*-hez: azt mondom, hogy *A* nagyobb mint *B*.

Mert mivel *A C*-hez nagyobb arányban van mint *B C*-hez, vehetni *A*-nak *B*-nek oly *D E* egyenlő szorzataikat és *C*-nek oly *F* szorzatát, hogy az *A* szorzata *D*, nagyobb lesz a *C*-nél *F*-nél, a *B*-é pedig *E*, nem nagyobb *F*-nél; tehát *D* nagyobb *E*-nél; e szerint minthogy *D E A* nak *B*-nek egyenlő szorzataik. *A* is nagyobb *B* nél.

De legyen *C B*-hez nagyobb arányu mint *A*-hoz: azt mondom, hogy *B* kisebb *A*-nál.

Mert mivel *C* nagyobb arányu *B*-hez mint *A*-hoz, vehetni *C*-nek oly *F* szorzatát, és *B*-nek *A*-nak oly *D E* egyenlő szorzataikat, hogy *F D*-nél nagyobb leend, de *E*-nél nem nagyobb; tehát *D* kisebb *E*-nél; úgy hogy *D E B*-nek *A*-nak egyenlő szorzataik levén, *B* is kisebb *A*-nál.

11. Feladat:

Azonegy aránynyal ugyanazok egymással is ugyanazok.

Mert legyenek a mint *A B*-hez, úgy *C D*-hez, s a mint *C D*-hez, úgy *E F*-hez: azt mondom, hogy a mint *A B*-hez, ugy *E F*-hez.

Mert vétessenek *A*-nak *C*-nek *E*-nek *G H K* egyenlő szorzataik, *B*-nek *D*-nek *F*-nek pedig más akármely (L M N) egyenlő szorzataik.

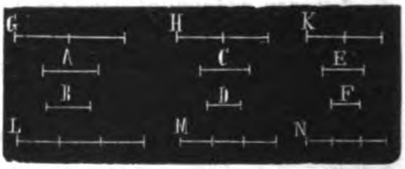
És minthogy a mint *A B*-hez, úgy *C D*-hez, és *A*-nak *C*-nek vétettek *G H* egyenlő szorzataik, *B*-nek *D*-nek pedig más akármely *L M* egyenlő szorzataik; tehát ha *G* nagyobb *L*-nél, *H* is nagyobb *M*-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. Ismét mivel a mint *C D*-hez, úgy *E F*-hez, és vétettek *C*-nek *E*-nek *H K* egyenlő szorzataik, *D*-nek *F*-nek pedig más akármely *M N* egyenlő szorzataik; tehát ha *H* nagyobb *M*-nél, *K* is nagyobb *N*-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. De ha *H* nagyobb *M*-nél, *G* is nagyobb *L*-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb; úgy hogy ha *G* nagyobb L-nél, K is nagyobb N-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. Már pedig G K A-nak E-nek egyenlő szorzataik, L és N pedig B-nek F-nek más akármely egyenlő szorzataik; tehát a mint A B-hez, úgy van E F-hez.

Tehát azonegy sat.

12. Feladat:

Ha akárhány mekkoraság egyarányban van: a mint egy előtag egy utótaghoz, úgy van minden előtag öszvege minden utótag öszvegéhez.

Legyen akárhány A B C D E F mekkoraság egyarányban, azaz: a mint A B-hez, úgy legyen C D-hez és E F-hez: azt mondom, hogy a mint A B-hez, úgy A C E öszvesen B D F-hez.



Mert vétessenek A-nak C-nek E-nek G H K egyenlő szorzataik, és B-nek D-nek F-nek más akármely L M N egyenlő szorzataik.

És mivel a mint A B-hez, úgy C D-hez, és E F-hez, és mivel A-nak C-nek E-nek G H K egyenlő szorzataik, B-nek D-nek F-nek pedig más akármely L M N egyenlő szorzataik vétettek; tehát ha G nagyobb L-nél, H is nagyobb M-nél, és K N-nél; ha egyenlő, egyenlők; s ha kisebb, kisebbek; miszerént ha G nagyobb L-nél, G H K együtt is nagyobbak L M N-nél együtt; ha egyenlő, egyenlők; s ha kisebb, kisebbek. Már pedig G és G H K A-nak és A C E-nek egyenlő szorzataik; minthogy ha akárhány mekkoraság akárhány ugyanannyi számu mekkoraságnak külön-külön egyenlő szorzata, a hány szorzata egyik mekkoraság egyiknek, annyi szorzata mindenik öszvesen mindeniknek. Ugyanazért L is és L M N B-nek és B D F-nek egyenlő szorzataik; tehát a mint A B-hez, úgy van A C E is B D F-hez.

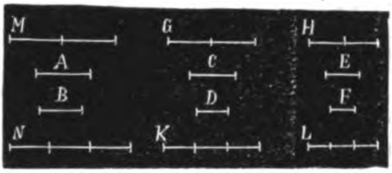
Ha tehát sat.

13. Feladat:

Ha az első a másodikhoz, és a harmadik a negyedikhez ugyanazon arányban vannak, de a harmadik a negyedikhez nagyobb arányban van, mint az ötödik a hatodikhoz: az első is a másodikhoz nagyobb arányban leend, mint az ötödik a hatodikhoz.

Mert legyen az első A a másodikhoz B-hez, s a harmadik C a negyedikhez D-hez ugyanazon arányban, a harmadik pedig C a negyedikhez D-hez legyen nagyobb arányban, mint az ötödik E a hatodikhoz F-hez: azt mondom, hogy az első is A a másodikhoz B-hez nagyobb arányban leend, mint az ötödik E a hatodikhoz F-hez.

Mert minthogy C D-hez nagyobb arányu mint E F-hez vannak C-nek E-nek egyenlő szorzataik, D-nek F-nek más akármely egyenlő szorzataik: és a C szorzata a D szorzatánál nagyobb, az E szorzata pedig az F szorzatánál nem nagyobb



Vétessenek és legyenek C-nek E-nek egyenlő szorzataik G H, D-nek F-nek pedig más akármely egyenlő szorzataik K L, miszerint G K-t meghaladja, de H L-et nem haladja meg: továbbá a hány szorzata G C-nek, annyi szorzata legyen M A-nak, s a hány szorzata K D-nek, annyi szorzata legyen N B-nek. — Már minthogy a mint A B-hez, úgy C D-hez, és A-nak C-nek vétettek M G egyenlő szorzataik, B-nek D-nek megint más akármely N K egyenlő szorzataik; tehát ha M meghaladja N-et, G is meghaladja K-t; és ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb. G meghaladja ugyan K-t, M is tehát meghaladja N-et. De H nem haladja meg N-et; már pedig M H A-nak E-nek egyenlő szorzataik, N L megint B-nek F-nek más akármely egyenlő szorzataik; tehát A B-hez nagyobb arányu, mint E F-hez.

Ha tehát sat.

Tanuság: Hasonlókép mutathatni meg: hogy ha az első a másodikhoz nagyobb arányban van, mint a harmadik a negyedikhez; a harmadik pedig a negyedikhez azon arányban van, miben az ötödik a hatodikhoz; úgy az első is a másodikhoz nagyobb arányban van, mint az ötödik a hatodikhoz.

(Simson Rob.)

14. Feladat:

Ha az első a másodikhoz, s a harmadik a negyedikhez ugyanazon arányuak, és az első nagyobb a harmadiknál: a második is nagyobb leend a negyediknél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb.

Mert az első A a másodikhoz B-hez, és a harmadik C, a negyedikhez D-hez legyenek egyarányuak, és legyen A nagyobb C-nél: azt mondom, hogy B is nagyobb D-nél.

Mert mivel A nagyobb C-nél, B pedig egy más akármely mekkoraság, tehát A B-hez nagyobb arányban van, mint C B-hez. De a mint A B-hez, úgy C D-hez, tehát C D-hez nagyobb arányu mint C B-hez, már pedig a mihez azonegy nagyobb arányban van, az kisebb : miszerint D kisebb B-nél, úgy hogy B nagyobb D-nél.

Hasonlólag mutatjuk meg azt is, hogy ha A egyenlő C-vel, B is egyenlő D-vel; és ha A kisebb C-nél, B is kisebb D-nél.

Ha tehát sat.

Jegyzés. Simson a második és harmadik eset bizonyítmányát is kifejtette a következőkben:

„De legyen, másodszor, A C-vel egyenlő: azt mondom, hogy B is D-vel egyenlő leend.

Mert mivel A egyenlő C-vel, és B más mekkoraság, tehát a mint A B-hez, úgy van C B-hez; de a mint A B-hez, úgy C D-hez; e szerint a mint C B-hez, úgy C D-hez. Már pedig a mikhez azonegy egyarányban van, azok egyenlők; tehát B egyenlő D-vel.

Ismét legyen A kisebb C-nél: azt mondom, hogy B is kisebb D-nél.

Mert mivel A kisebb C-nél, C nagyobb A-nál, és fel van téve, hogy a mint C D-hez úgy A B-hez. De megmutattaték, hogy ha az első nagyobb a harmadiknál, a második is nagyobb a negyediknél; tehát D nagyobb B-nél, azaz: B kisebb D-nél.

15. Feladat:

A részek hasonszorzataikkal, páronkint vétetve, egyarányuak.

Ugyanis legyenek AB C-nek, s DE F-nek egyenlő szorzataik: azt mondom, hogy a mint C F-hez, úgy AB DE-hez.

Mert mivel AB C-nek s DE F-nek egyenlő szorzatai: a hány C-vel egyenlő rész van AB-ben, annyi F-fel egyenlő van DE-ben.

Osztassék el AB C-vel egyenlö AG GH HB mekkoraságokra, DE pedig F-fel egyenlö DK KL LE mekkoraságokra; miszerént AG GH HB részek száma egyenlö a DK KL LE részek számával. És minthogy AG GH HB egymással egyenlök, de DK KL LE is egyenlök egymással; tehát a mint AG DK-hoz, úgy vannak GH KL-hez, és HB LE-hez; tehát a mint az előtagok egyike az utótagok egyikéhez, úgy leend minden előtag öszvege minden utótag öszvegéhez; tehát a mint AG DK-hoz, úgy van AB DE-hez. De AG C-vel, DK pedig F-fel egyenlö; tehát a mint C F-hez, úgy AB DE-hez.

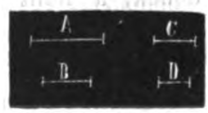
A részek tehát sat.

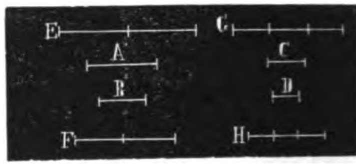
Jegyzés. Ezen feladatbeli állítmány egész általánosságában csak úgy igaz, ha C és F arányban lehető mekkoraságok. Ha t. i. C, lap volna, F pedig egyen, mivel sem a lap az egyent, sem emez azt akárhogy is szorozva felül nem haladhatja, mint ezt az V. K. 4. értelmezése okvetlenül megkivánja, tehát arányban nem lehetnek; következöleg egyenlő szorzataikkal egyarányban sem. Ez ugyan a feladat szemléleti érvényességét nem csökkenti; hanem csak alkalmaztatását szorítja meg.

16. Feladat:

Ha négy mekkoraság egyarányu, cserélve is egyarányu leend.

Legyen A B C D négy mekkoraság egyarányban, s a mint A B-hez, úgy C D-hez: azt mondom, hogy cserélve is egyarányban leend, a mint A C-hez, ugy B D-hez.





Mert vétessenek A-nak B-nek E F egyenlő szorzataik, C-nek D-nek pedig más akármely G H egyenlő szorzataik. Már minthogy E A-nak s F B-nek egyenlő szorzataik, és a részek hasonszorzataikkal, páronkint véve, egyarányuak, tehát a mint A B-hez, ugy E F-hez. De a mint A B-hez, úgy van C D-hez; tehát a mint C D-hez, úgy E F-hez. Ismét mivel G H C-nek D-nek egyenlő szorzataik, tehát a mint C D-hez, úgy G H-hoz, tehát a mint E F-hez, úgy G H-hoz. De ha négy mekkoraság egyarányu s az első nagyobb a harmadiknál, a második is nagyobb leend a negyediknél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. Ha tehát E G-nél nagyobb, F is nagyobb H-nál; és ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb. Már pedig E F A-nak B-nek egyenlő szorzataik, G H pedig C-nek D-nek más akármely egyenlő szorzataik; tehát a mint A C-hez, úgy van B D-hez.

Ha tehát sat.

Jegyz. E feladat megint az elébbeninél kifejtett megszorítást szenvedi; mert ha A és B, egyenek, C és D lapok volnának, — és a mint A B-hez, úgy C D-hez, (mint ez a VI. könyvben lehetőnek lesz megmutatva), ezen esetben még sem lehetne megcserélni s azt mondani, hogy a mint A C-hez, úgy B D-hez. Ennek megfontolása tette azt is szükségessé, hogy a 6. feladatot követő A. feladatot, melyet a 14-diknek és 16-diknak öszveillesztéséből itt könnyen meg lehetne mutatni, ott emezektől függetlenül bizonyítottuk be.

17. Feladat:

Ha öszvetett mekkoraságok egyarányuak, felbontva is egyarányuak.

Legyenek AB BE CD DF öszvetett mekkoraságok egyarányban, a mint AB BE-hez, úgy CD DF-hez: azt mondom, hogy felbontva is egyarányuak leendenek, a mint AE EB-hez, úgy CF FD-hez.

Vétessenek AE-nek EB-nek CF-nek FD-nek GH HK

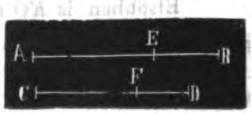
LM MN egyenlö szorzataik, *EB*-nek *FD*-nek megint más akármely *KO NP* egyenlő szorzataik.

És minthogy *GH AE*-nek s *HK EB*-nek egyenlö szorzataik; tehát *GH AE*-nek s *GK AB*-nek egyenlő szorzataik. De *GH AE*-nek s *LM CF*-nek egyenlö szorzataik; tehát *GK AB*-nek s *LMCF*-nek egyenlö szorzataik. Ismét minthogy *LM CF*-nek és *MN FD*-nek egyenlö szorzataik, tehát *LM CF*-nek és *LN CD*-nek egyenlő szorzataik; ennélfogva *GK LN AB*-nek *CD*-nek egyenlö szorzataik. Ismét mivel *HK EB*-nek és *MN FD*-nek egyenlö szorzataik, de *KO* is *EB*-nek és *NP FD*-nek egyenlő szorzataik, tehát az öszvetett *HO* is *EB*-nek, és *MP FD*-nek egyenlö szorzataik. És minthogy a mint *AB BE*-hez, úgy *CD DF*-hez, és *AB*-nek *CD*-nek *GK LN* egyenlő szorzataik, *EB FD*-nek pedig más akármely *HO MP* egyenlő szorzataik vétettek; tehát ha *GK* nagyobb *HO*-nál, *LN* is nagyobb *MP*-nél; ha egyenlö, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. Legyen *GK HO*-nál nagyobb, e szerént ha a közös *HK* elvétetik, *GH* is nagyobb leend *KO*-nál. De ha *GK* nagyobb *HO*-nál, *LN* is nagyobb *MP*-nél; tehát nagyobb levén *LN MP*-nél, s elvétetvén a közös *MN*, *LM* is nagyobb *NP*-nél; úgy hogy ha *GH* nagyobb *KO*-nál, úgy *LM* is nagyobb *NP*-nél. Hasonlólag mutatjuk meg azt is, hogy ha *GH* egyenlö *KO*-val, *LM* is egyenlö *NP*-vel; s ha kisebb, kisebb. Már pedig *GH LM AE*-nek *CF*-nek egyenlö szorzataik, *KO NP* pedig *EB*-nek *FD*-nek más akármely egyenlő szorzataik; tehát a mint *AE EB*-hez, úgy van *CF FD*-hez.

Ha tehát sat.

18. Feladat:

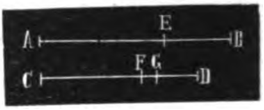
Ha elválasztatott mekkoraságok egyarányuak, öszvetéve is egyarányuak.



Legyenek *AE EB CF FD* elválasztott mekkoraságok egyarányban, a mint *AE EB*-hez, ugy *CF FD*-hez: azt mondom, hogy öszvetéve is egyarányban leendenek, a mint *AB BE*-hez úgy *CD FD*-hez.

Mert ha nem leend a mint *AB BE*-hez, úgy *CD FD*-

hez, a mint *AB BE*-hez, úgy lesz *CD* valami *DF*-nél vagy kisebbhez, vagy nagyobbhoz.



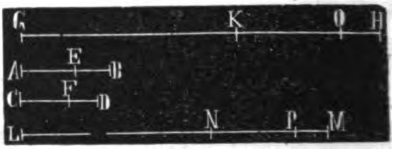
Legyen elöbb valami kisebbhez *DG*-hez. És minthogy a mint *AB BE*-hez, úgy van *CD DG*-hez; de ha öszvetett mekkoraságok egyarányuak, elválasztva is egyarányuak, tehát a mint *AE EB*-hez, úgy *CG GD*-hez. De fel van téve az is, hogy a mint *AE EB*-hez, úgy *CF FD*-hez, tehát a mint *CG GD*-hez, úgy *CF FD*-hez. De az elsö *CG* a harmadiknál *CF*-nél nagyobb, tehát a második is *GD* nagyobb a negyediknél *FD*-nél. De kisebb is; mi lehetetlen; tehát a mint *AB BE*-hez, nincs úgy *CD* valami *FD*-nél kisebbhez. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy valami nagyobbhoz sincs úgy; tehát csak hozzája.

Ha tehát sat.

Jegyz. Ezen feladat bizonyítmányában elv-orzás van; ugyanis ezen szók: „Mert ha nem leend a mint *AB BE*-hez, úgy *CD FD*-hez: a mint *AB BE*-hez, úgy lesz *CD* valami *DF*-nél vagy nagyobbhoz vagy kisebbhez" azt teszik fel, hogy *AB BE CD* mekkoraságokhoz szükségkép lennie kell egy negyedik egyarányunak, mi sehol megmutatva nincs. E szarvas hibát Euklidesnek tulajdonítni nem képes, hanem az itt *lehetett* hosszadalmasb bizonyítmányt valamelyik kiadója felcserélte e kényelmesb de törékeny alapon állóval. Simson következöleg pótlá:

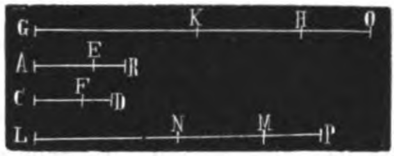
Vétessenek *AB*-nek *BE*-nek *CD*-nek *DF*-nek *GH HK LM MN* egyenlö szorzataik; és *EB*-nek *FD*-nek ismét más *KO NP* egyenlö szorzataik.

Már mivel *KO NP EB*-nek és *FD*-nek, *HK MN* megint ugyanazoknak egyenlö szorzataik; tehát ha *KO* nagyobb *HK*-nál, *NP* is nagyobb *MN*-nél; ha egyenlö, egyenlö; ha kisebb, kisebb.



Elsöbben is *KO* ne legyen nagyobb *HK*nál; tehát *NP* sem leend nagyobb *MN*-nél. Minthogy *GH HK AB BE*-nek egyenlö szorzataik, s *AB BE*-nél nagyobb, *GH* is nagyobb *HK*-nál. De *KO* nem nagyobb *HK*-nál, tehát *GH KO*-nál is nagyobb. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *LM* is nagyobb *NP*-

nél. Valahányszor tehát *KO* nem nagyobb *KH*-nál, *GH* is, azaz: az *AB* szorzata, nagyobb leend *KO*-nál, a *BE* szorzatánál, s egyszersmind *LM* is a *CD* szorzata, nagyobb *NP*-nél, a *DF* szorzatánál.



De legyen másodszor *KO HK* nál nagyobb, úgy *NP* is nagyobb leend *NM* nél. Már mivel *GH AB*-nek az a szorzata, a mi a *GH*-ból elvett *HK* az *AB*-ből elvett *BE*-nek; tehát a maradék *GK* is a maradék *AE* nek az a szorzata, a mi *GH AB*-nek, akár *LM CD*-nek. Ugyanazért *LN* is *CF*-nek az a szorzata, a mi *LM CD*-nek. Már pedig megmutattaték, hogy *GK AE*-nek és *LM CD*-nek egyenlő szorzataik, tehát *GK AE*-nek és *LN CF*-nek egyenlő szorzataik. Ismét *KO NP EB*-nek *FD*-nek egyenlő szorzataik, s elvétettek belőlök *EB*-nek *FD*-nek *KH NM* egyenlő szorzataik; tehát a *HO MP* maradékok *EB*-vel *FD*-vel vagy egyenlők, vagy azoknak egyenlő szorzataik.

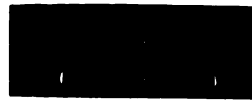
Legyen előbb *HO* egyenlő *BE*-vel és *MP* egyenlő *DF*-fel. Mivel a mint *AE EB*-hez, úgy van *CF FD*-hez, és *AE*-nek *CF*-nek *GK LN* egyenlő szorzataik vétettek; tehát a mint *GK EB*-hez, úgy van *LN FD*-hez; de *HO BE*-vel, *MP FD*-vel egyenlők; minélfogva a mint *GK HO*-hoz, úgy van *LN MP*-hez. Tehát ha *GK* nagyobb *HO*-nál, *LN* is nagyobb *MP*-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb.

De legyenek másodszor *HO MP EB*-nek *FD*-nek egyenlő szorzataik. Mivel a mint *AE EB*-hez, úgy *CF FD*-hez, és *AE*-nek *CF*-nek *GK LN* egyenlő szorzataik, *EB*-nek *FD*-nek megint más *HO MP* egyenlő szorzataik vétettek; ha *GK* nagyobb *HO*-nál, *LN* is nagyobb *MP*-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb, kisebb. De ha *GH* nagyobb *KO*-nál s a közös *KH*-t elveszszük, *GK* is nagyobb leend *HO*-nál, úgy hogy *LN* is nagyobb *MP*-nél, s az *NM*-et mind kettőjökhöz adva *LM* nagyobb lesz *NP*-nél. Tehát ha *GH KO*-nál nagyobb, *LM* is *NP*-nél nagyobb leend. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy ha *GH* egyenlő *KO* val. *LM* is egyenlő leend *NP*-vel; s ha kisebb, kisebb. Ha tehát *KO* nagyobb mint *HK*, *GH* nagyobb *KO*-nál, s *LM* is *NP*-nél. De megmutattuk, hogy úgy is, ha *KO HK*-nál nem nagyobb: már pedig *GH LM AB*-nek *CD*-nek, *KO NP BE*-nek *FD*-nek egyenlő szorzataik; tehát a mint *AB BE*-hez, úgy *CD DF*-hez."

19. Feladat:

Ha a mint az egész az egészhez, úgy az elvett az elvetthez: a maradék is úgy lesz a maradékhoz, mint az egész az egészhez.

Mert a mint az egész *AB* az egész *CD*-hez, legyen úgy



az elvett AE az elvett CF-hez: azt mondom, hogy a maradék EB is úgy lesz a maradék FD-hez, mint az egész AB az egész CD-hez.

Mert minthogy a mint AB CD-hez, úgy AE CF-hez; tehát cserélve is a mint BA AE-hez, úgy van DC CF-hez. És minthogy ezen mekkoraságok öszvetéve egyarányuak, elválasztva is egyarányuak leendenek; tehát a mint BE EA-hoz, úgy DF FC-hez, és cserélve a mint BE DF-hez, úgy EA FC-hez. De fel van téve, hogy a mint AB CD-hez, úgy AE FC-hez; tehát a maradék BE is úgy leend a maradék DF-hez, mint az egész AB az egész CD-hez.

Tanuság: Innen világos, hogy ha a mint az egész az egészhez, úgy van az elvett az elvetthez, a maradék is úgy leend a maradékhoz, mint az elvett az elvetthez. (Simson).

E. Feladat:

Ha négy mekkoraság egyarányban van: átfordítva is egyarányban leend.

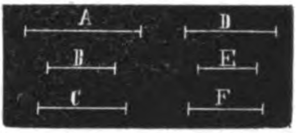
Legyenek AB BE CD DF mekkoraságok egyarányban, a mint AB BE-hez, úgy CD DF-hez: azt mondom, hogy átfordítva is egyarányban leendenek, a mint AB AE-hez, ugy CD CF-hez.

Mert mivel a mint AB BE-hez, úgy van CD DF-hez; tehát elválasztva, a mint AE EB-hez, úgy CF FD-hez. De ha négy mekkoraság egyarányu, viszálva is egyarányu leend; tehát a mint BE EA-hoz, úgy DF FC-hez. Ismét ha elválasztott mekkoraságok egyarányuak, öszvetéve is egyarányuak leendenek; ennélfogva a mint BA AE-hez, úgy van DC CF-hez. Már pedig BA DC az elötagok, AE CF pedig az azon felülékek, melyekkel az elötagok az utótagokat meghaladják; tehát ha négy mekkoraság egyarányu, átfordítva is egyarányu leend.

20. Feladat:

Ha van három mekkoraság, és megint mások azokkal egyenlö számuak, és ha kettönkint véve egyarányuak, az elsö nagyobb a harmadiknál: egyközösen a negyedik is nagyobb leend a hatodiknál; ha eggenlö, egyenlö; ha kisebb, kisebb.

Legyen három mekkoraság A B C, és megint mások



kazokal egyenlö számuak D E F, és kettőnként véve legyenek egyarányban, a mint A B-hez, úgy D E-hez, s a mint B C-hez, úgy E F-hez; és A legyen nagyobb C-nél : azt mondom, hogy egyközösön D is nagyobb leend F-nél; s ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb.

Mert mivel A nagyobb C-nél, B pedig más valami, s a nagyobbik azonegyhez nagyobb arányban van mint a kisebbik; tehát A B-hez nagyobb arányu, mint C B-hez. De a mint A B-hez, úgy D E-hez, és viszálva a mint C B-hez, úgy F E-hez; tehát D E-hez nagyobb arányu, mint F E-hez. De az azonegyhez arányban lévők közül a nagyobb arányu nagyobb, D tehát nagyobb F-nél. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy ha A egyenlö C-vel, D is egyenlö leend F-fel; és ha kisebb, kisebb.

Ha tehát sat.

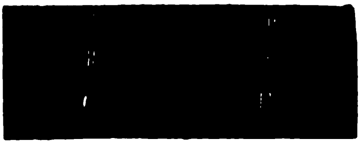
(T. i. Legyen A C-vel egyenlő: azt mondom, hogy D is egyenlő F-fel. Mert ha A egyenlö C-vel; a mint A B-hez, úgy van C B-hez. De fel van téve, hogy a mint A B-hez, úgy D E-hez; tehát a mint C B-hez úgy D E-hez. De az is fel van téve, hogy a mint B C-hez, úgy E F-hez; tehát viszálva a mint C B-hez, úgy F E-hez. Már pedig megmutattuk, hogy a mint C B-hez, úgy D E-hez; miszerént a mint D E-hez, úgy F E-hez; azaz D egyenlő F-fel.

Legyen A C nél kisebb: azt mondom, hogy D is kisebb F-nél. Mert mivel A C-nél kisebb: C A-nál nagyobb; és mivel a mint B C-hez, úgy E F-hez; tehát viszálva a mint C B-hez, úgy F E-hez; de a mint A B-hez, úgy D E-hez, és C A-nál nagyobb levén, nagyobb arányban van B-hez, mint A; miszerént F is E-hez nagyobb arányban van, mint D E-hez ; tehát F nagyobb D-nél: azaz: D kisebb F-nél).

21. Feladat:

Ha van három mekkoraság s megint mások azokkal egyenlö számuak, és ha kettőnkint véve egyarányuak, de zavart egyarányuságban, és az első nagyobb a harmadiknál: egyközösön a negyedik is nagyobb leend a hatodiknál; és ha egyenlö, egyenlö; ha kisebb kisebb.

Legyen három mekkoraság A B C, és megint mások



azokkal egyenlő számuak D E F kettőnként véve egyarányuak, és egyarányuságuk legyen zavart, a mint A B-hez úgy E F-hez, s a mint B C-hez, úgy D E-hez, A pedig legyen C-nél nagyobb: azt mondom, hogy egyközösen D is nagyobb F-nél: s ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb.

Mert minthogy A nagyobb C-nél, B pedig más valami, tehát A B-hez nagyobb arányu, mint C B-hez. De a mint A B-hez, úgy E F-hez, és viszáson a mint C B-hez, úgy E D-hez, E tehát nagyobb arányu F-hez, mint E D-hez. De a mihez azonegy nagyobb arányban van, az kisebb; tehát F D-nél kisebb; tehát D nagyobb F-nél. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy ha A egyenlő C-vel, D is egyenlő leend F-fel; s ha kisebb, kisebb.

(A két más esetbeli bizonyítmányok:

Legyen A egyenlő C-vel: azt mondom, hogy D is egyenlő F-fel. Mert mivel A egyenlő C-vel, A B-vel és C B-vel egyarányuak. De fel van téve, hogy a mint B C-hez, úgy D E-hez; tehát viszálva a mint C B-hez, úgy E D-hez; fel van téve az is, hogy a mint A B-hez, úgy E F-hez; tehát a mint E D-hez, úgy E F-hez; már pedig a mihez azonegy egyarányban van, az egyenlő; tehát D F-fel egyenlő.

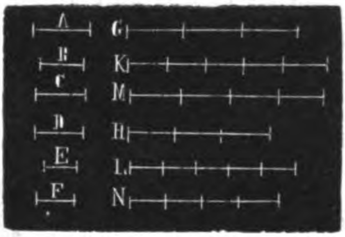
Legyen A C-nél kisebb: azt mondom, hogy D is kisebb F-nél. Mert ha A C-nél kisebb, C A-nál nagyobb. Mert a feltét szerént a mint B C-hez, úgy D E-hez; tehát viszálva a mint C B-hez, úgy E D-hez; és megint a feltét szerént, a mint A B-hez, úgy E F-hez: már pedig C A-nál nagyobb, tehát C B-hez nagyobb arányu mint A B-hez; miszerént E is D-hez nagyobb arányu, mint E F-hez; de a melyikhez azonegy nagyobb arányu, az kisebb; tehát D F-nél kisebb. m. b. k.)

22. Feladat:

Ha van akárhány mekkoraság, és mások azokkal egyenlő számuak, és kettőnként véve egyarányuak: egyközösen is egyarányuak leendenek.

Legyen akárhány mekkoraság A B C, és mások azokkal egyenlő számuak D E F, kettőnként véve egyarányuak, a mint A B-hez, úgy D E-hez, s a mint B C-hez, úgy E

F-hez: azt mondom, hogy egyközösen is egyarányuak, a mint A C-hez, úgy D F-hez.



Mert vétessenek A-nak D-nek G H egyenlő szorzataik, és B-nek E-nek más akármely K L egyenlő szorzataik, és megint C-nek F-nek más akármely M N egyenlő szorzataik.

És minthogy a mint A B-hez, úgy van D E-hez, és mivel A-nak D-nek G H egyenlő szorzataik, B-nek E-nek pedig más akármely K L egyenlő szorzataik vétettek; tehát a mint G K-hoz, úgy van H L-hez. Ugyanazért a mint K M-hez, úgy L N-hez. Minthogy e szerént van G K M három mekkoraság, és H L N mások azokkal egyenlő számuak, és kettőnként véve egyarányuak; tehát egyközösen, ha G meghaladja M-et, H is meghaladja N-et; ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb; Már pedig G H A-nak D-nek egyenlő szorzataik, M N C-nek F-nek akármely egyenlő szorzataik; tehát a mint A C-hez, úgy van D F-hez.

Ha tehát sat.

Jegyz. E feladatbeli állítmányt, háromnál több mekkoraságra is kiterjeszthetni, p. o. négyre, imígy:

Legyen A B C D négy mekkoraság, és más négy E F G H amazokkal rendezett egyarányban: egyközösen is a mint A D-hez, úgy E H-hoz.

Mert mivel A B C három mekkoraság más hárommal E F G-vel rendezett egyarányu; tehát a mint A C-hez, úgy E G-hez; de a mint C D-hez, úgy G H-hoz; tehát egyközösen a mint A D-hez, úgy E H-hoz.

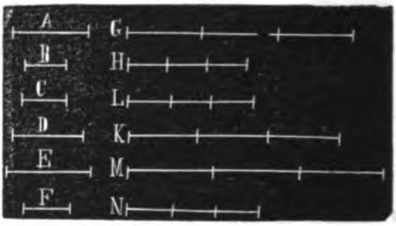
23. Feladat:

Ha van három mekkoraság, és megint mások velök egyenlő számuak, kettőnként véve egyarányuak, és egyarányuságuk zavart: egyközösen is egyarányuak leendenek.

Legyen három mekkoraság A B C, s mások azokkal egyenlő számuak D E F, kettőnként véve egyarányuak, és egyarányuságuk legyen zavart, a mint A B-hez, úgy E F-hez,

és a mint B C-hez, úgy D E-hez: azt mondom, hogy a mint A C-hez, úgy van D F-hez.

Mert vétessenek A-nak B-nek D-nek G H K egyenlő szorzataik, és C-nek E-nek F-nek más L M N akármely egyenlő szorz ataik.



És minthogy G H A-nak B-nek egyenlő szorzataik, a részek pedig abban az arányban vannak, melyben az egyenlő szorzatok; tehát a mint A B-hez, úgy van G H-hoz. Ugyanazért a mint E F-hez, úgy M N-hez: és mivel a mint A B-hez úgy E F-hez, tehát a mint G H-hoz, úgy van M N-hez. Továbbá minthogy a mint B C-hez, úgy van D E-hez, tehát cserélve is a mint B D-hez, úgy C E-hez. És mivel H K B-nek D-nek egyenlő szorzataik, a részek pedig abban az arányban vannak, melyben az egyenlő szorzatok; tehát a mint B D-hez, úgy H K-hoz: de a mint B D-hez, úgy C E-hez; tehát a mint H K-hoz, úgy C E-hez. Ismét minthogy L M C-nek E-nek egyenlő szorzataik, tehát a mint C E-hez, úgy L M-hez. De a mint C E-hez, úgy H K-hoz; tehát a mint L M-hez, úgy H K-hoz, és cserélve, a mint H L-hez, úgy K M-hez. Már pedig megmutattaték, hogy a mint G H-hoz, úgy van M N-hez: ennélfogva minthogy van három mekkoraság G H L és mások azokkal egyenlő számuak K M N, kettőnkint véve egyarányuak, s egyarányuságuk zavart; tehát egyközösen ha G nagyobb L-nél, K is nagyobb N-nél; ha egyenlő, egyenlő; s ha kisebb kisebb. Már pedig G K A-nak D-nek egyenlő szorzataik, L N pedig C-nek F-nek; tehát a mint A C-hez, úgy van D F-hez.

Ha tehát sat.

Jegyz. Ezt is ki lehet több mekkoraságra is terjeszteni t. i.

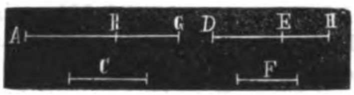
Legyen A B C D négy mekkoraság, és más négy E F G H zavart egyarányban, a mint A B-hez, úgy G H-hoz, a mint B C-hez, úgy F G-hez, s a mint C D-hez, úgy E F-hez: azt mondom, hogy egyközösen a mint A D-hez, úgy E H-hoz.

Mert mivel A B C három mekkoraság más hárommal F-fel G-vel H-val zavart egyarányban van; tehát egyközösen a mint A C-hez, úgy van F H-hoz; de a mint C D-hez, úgy E F-hez; tehát ismét egyközösen a mint A D-hez, úgy E H-hoz; m. b. k.

Így foly a bizonyítmány több mekkoraságra nézve is.

24. Feladat:

Ha az első a másodikhoz, s a harmadik a negyedikhez egyarányuak, de az ötödik is a másodikhoz, s a hatodik a negyedikhez egyarányuak: öszvetéve is az első meg az ötödik a másodikhoz, s a harmadik meg hatodik a negyedikhez egyarányuak leendenek.



Mert az első AB a másodikhoz C-hez s a harmadik DE a negyedikhez F-hez legyenek egyarányuak: megint az ötödik BG, a másodikhoz C-hez, s a hatodik EH a negyedikhez F-hez legyenek egyarányuak: azt mondom, hogy öszvetéve is az első meg ötödik AG a másodikhoz C-hez, s a harmadik meg hatodik DH a negyedikhez F-hez egyarányuak leendenek.

Mert mivel a mint BG C-hez, úgy van EH F-hez; tehát viszálva is a mint C BG-hez, úgy F EH-hoz. Már minthogy a mint AB C-hez, úgy DE F-hez, s a mint C BG-hez, úgy F EH-hoz; tehát egyközösen a mint AB BG-hez, úgy DE EH-hoz. És mivel ha a mekkoraságok elválasztva egyarányuak, öszvetéve is egyarányuak, tehát a mint AG BG-hez, úgy DH HE-hez. De a mint BG C-hez, úgy EH F-hez, tehát egyközösen a mint AG C-hez, úgy van DH F-hez.

Ha tehát sat.

1. *Tanuság.* Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy ha az első a másodikhoz azon arányban van, miben a harmadik a negyedikhez, s az ötödik is a másodikhoz azon arányban van, miben a hatodik a negyedikhez; elválasztva is az a felülék, a mivel az első az ötödiket meghaladja, a másodikhoz, s az, a mivel a harmadik a hatodikat meghaladja, a negyedikhez egyarányban leendenek. T. i.

Ha a mint AB a C-hez, úgy DE az F-hez, s a mint BG C-hez, úgy HE F-hez: azt mondom, hogy a mint AG C-hez, úgy van DH F-hez.

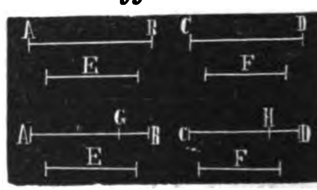
2. *Tanuság*. Ha van akárhány mekkoraság, és mások azokkal egyenlő számuak, s az első rendbeliek közül sorban mindenik abban az arányban van egy külön mekkorasághoz, miben a második rendbeliek közül sorban mindenik egy más külön mekkorasághoz: úgy az első rendbeliek öszvege is úgy leend ama külön mekkorasághoz, mint a második rendbeliek öszvege a más különhöz.

Ugyanis, legyen a mint *AB* *M*-hez, úgy *FG* *N*-hez, a mint *BC* *M*-hez, úgy *GH* *N*-hez, a mint *CD* *M*-hez, úgy *HK* *N*-hez, a mint *DE* *M*-hez, úgy *KL* *N*-hez: azt mondom, hogy a mint *AE* *M*-hez, úgy *FL* *N*-hez.

Mert a mint *AB* *M*-hez, úgy van *FG* *N*-hez, s a mint *BC* *M*-hez, úgy *GH* *N*-hez; tehát a mint *AC* *M*-hez, úgy *FH* *N*-hez. Ismét a mint *AC* *M*-hez, úgy *FH* *N*-hez, s a mint *CD* *M*-hez, úgy *HK* *N*-hez; ennélfogva a mint *AD* *M*-hez, úgy *FK* *N*-hez. Hasonlókép mutatjuk meg a következőket is.

25. Feladat:

Ha négy mekkoraság ugyanazon arányban van: a legnagyobbik és legkisebbik a más kettőnél nagyobbak.



Legyen négy mekkoraság *AB CD E F* ugyanazon arányban, a mint *AB* *CD*-hez, úgy *E* *F*-hez, s legyen közöttük a legnagyobbik *AB*, a legkisebbik *F*: azt mondom, hogy *AB* meg *F* nagyobb, mint *CD* meg *E*.

Mert tétessenek *AG* *E*-vel, *CH* pedig *F*-fel egyenlőkké.

Mivel a mint *AB* *CD*-hez, úgy *E* *F*-hez, de *E* *AG*-vel, *F* *CH*-val egyenlők: tehát a mint *AB* *CD*-hez, úgy *AG* *CH*-hoz. És minthogy a mint az egész *AB* az egész *CD*-hez, úgy az elvett *AG* az elvett *CH*-hoz; tehát a maradék *GB* is úgy lesz a maradék *HD*-hez, mint az egész *AB* az egész *CD*-hez. De *AB* nagyobb *CD*-nél, tehát *GB* is nagyobb *HD*-nél. És mivel *AG* *E*-vel, *CH* *F*-fel egyenlők; tehát *AG* meg *F* akkora mint *CH* meg *E*. És ha a nem egyenlőkhöz egyenlők tétetnek, az egészek nem egyenlők lesznek. Ha tehát, *GB* *HD* nem egyenlők és *GB* a nagyobbik levén, *GB*-hez *AG* meg *F*, *HD*-hez pedig *CH* meg *E* tétetik, a következik, hogy *AB* meg *F* nagyobb mint *CD* meg *E*.

Ha tehát sat.

EUKLIDES ELEMEINEK

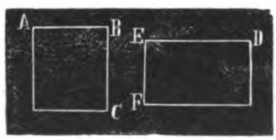
HATODIK KÖNYVE.

Értelmezések:

1. *Hasonló egyenesvonalu képletek* azok, melyeknek szegletei egyenkint egyenlők, és az egyenlő szegletek körüli oldalaik egyarányuak.

2. *Ellenarányuak* a képletek, midőn a képletek mindenikében vannak az arányoknak elő és utótagjai.

Jegyz. Legyenek *AC DF* képletek: és legyen a mint *AB DE*-hez úgy *EF BC*-hez: ezek ellenarányu képletek; ugyanis az 1-ső képletben van az első arány előtagja az *AB*, s a második arány utótagja a *BC*; a 2-ik képletben van ellenben a második arány előtagja az *EF*, s az első arány utótagja a *DE*; vagy rövidebben, mindenik képlet mindenik arányban és mindenik tagban osztozik.



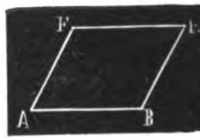
Meg kell azonban vallani, hogy a 6-ik könyv feladataiban ez a kifejezés: „ellenarányu képlet" nem találtatik; hanem a képleteknek csak *ellenarányu oldalaik*ról van szó. Ehhez képest a fellebbi értelmezés így állhatna:

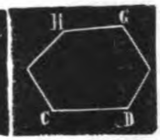
Egy képlet két oldala más képlet két oldalához ellenarányu, midőn az *első* képlet *egyik* oldala, (*AB*), úgy van a *második* képlet *egyik* oldalához (*DE*), mint a *második* képlet *másik* oldala (*EF*) az *első* képlet *másik* oldalához (*BC*).

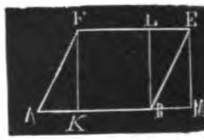
3. *Végső s középső arányban vágott*nak mondatik az egyen, midőn mint az egész a nagyobbik darabjához, úgy van a nagyobbik a kisebbikhez.

4. *Magassága* minden képletnek, a tetejétől talpára vont függő.

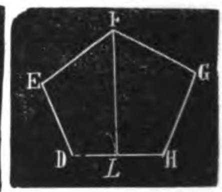
Jegyz. Ha a szóban forgó képlet talpául vett oldalával átelleni oldal amahoz egyközü, mint *AB CD* talpakhoz *FE HG* oldalak, akkor imez utóbbiakat nevezik a képlet tetejeinek. E szerint *FB* képlet magassága *FK LB EM* függők akármelyike.







Ha pedig a felvett talppal átelleni oldal ahhoz nem egyközü, vagy a képlet nem egyközény : a teteje az a szeglet, melyből a leghoszabb függőt bocsáthatni a talpra. P. o. *ABC* háromszegben a *B*, *DEFGH* ötszegben az *F*. Az elsőnek magassága *BK*, a másiké *FL*.



(5. Arány arányokból *szerkesztett*nek mondatik, mikor az arányok mennyiségei egymással szorzatva csinálnak arányt).

Jegyz. Ez ismét valami nem űrtani szellemü scholiasta pótléka; hihetőleg Theoné, ki más helyen is használja, egyszersmind oly vallomást téve, hogy „csak a számviszonyokra alkalmazható.“ Mire tehát az űrtanban oly értelmezés, melyből itt semmit meg nem érthetni, és valóban sehol sem is említtetik ? Előjön ellenben a számvetési könyvekben (8-ik könyv 5. Felad.); de itt már mint feladat, melyet annak rendi szerint bebizonyít szerzőnk, ki bizonyosan azt az észtani (logicai) bakot nem lőtte : hogy egy későbbre *bébizonyítandó* állítást előre értelmezésnek oda vessen.

A szerkesztett arányokról való értelmezésnek, az 5. k. 10-ik értelmezését megelőzőleg vagy követőleg kell vala állania, hanem valami hebehurgya kiadó gyaníthatókép kihányá, s vevén észre, hogy a 6-ik k. 23-ik feladatában előjön, ennek értelmezései közé más és itt egészen helytelen kifejezésekkel befurta. Vonalt vonallal szorozni *űrtanban* képtelen eszme.

A szerkesztett arány legegyszerűbb fogalma az 5-ik k. 10-ik értelmezésével egyezőleg ez :

Ha van három mekkoraság egymáshoz akármely arányban; az első a harmadikhoz, az elsőnek a másodikhoz s a másodiknak a harmadikhoz való arányaiból szerkesztett arányban van.

P. o. legyen *A B C* egymáshoz arányban lehető három mekkoraság: azt mondom, hogy *A C*-hez, az *A*-nak *B*-hez, s a *B*-nek *C*-hez való arányaikból szerkesztett arányban van.

De itt az a kérdés áll elé: mikép lehet a következő arányokból: *A B*-hez és *C D*-hez, szerkesztett arányt felfogni?

Erre könnyü a felelet:

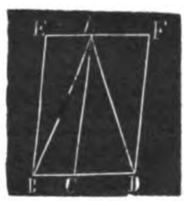
Lehet kapni két mekkoraságot abban az arányban egymáshoz, mint *A B*-hez. Legyen tehát a mint *A B*-hez, úgy *L M*-hez. *C D M*-hez megint lehet negyedik egyarányut találni, miszerint legyen a mint *C D*-hez úgy *M N*-hez. Van hát *L M N* három mekkoraság, melyekben *L*-nek *N*-hez való aránya az *L*-nek *M*-hez (azaz *A*-nak *B*-hez) és *M*-nek *N*-hez (vagyis *C*-nek *D*-hez) való arányaikból szerkesztődött.

Mind ezeket azonban csak előleges világosításul vegye az olvasó, mivel lehetségök csak a kezünk alatti 6-ik k-beli 11. 12. 23-ik feladatok által bizonyosodik meg.

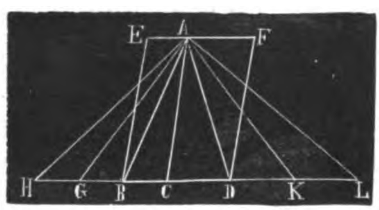
Végül intjük a tanulót, hogy az 5-ik könyv 15-ik értelmezése szerinti *öszvetételt* és a jelennen szóban forgó *szerkesztést*, mint egészen különböző fogalmakat, egybe ne vétse, vagy egymással fejében felcserélődni ne engedje.

1. Feladat:

Ugyanazon magasságu háromszegek és egyközények úgy vannak egymáshoz, mint talpaik.



Legyenek *ABC ACD* háromszegek, és *EC CF* egyközények azonegy magasságuak: azt mondom, hogy a mint *BC* talp *CD* talphoz, úgy van *ABC* háromszeg *ACD* háromszeghez, és *EC* egyközény *CF* egyközényhez.

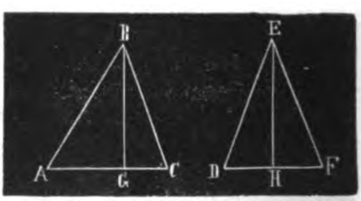


Mert nyujtassék meg *BD* mind a két felől *H L* pontok felé, és tétessenek *BC* talppal egyenlővé akárhány *BG GH* egyenek, *CD* talppal egyenlővé pedig akárhány *DK KL* egyenek, és vonassanak *AG AH AK AL*.

Már minthogy *CB BG GH* egymással egyenlők, *AHG AGB ABC* háromszegek is egyenlők egymással; tehát a hány szorzata *HC* talp *BC* talpnak, annyi szorzata *AHC* háromszeg

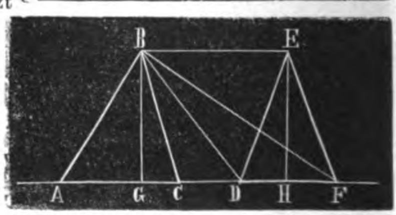
ABC háromszegnek. Ugyanazért a hány szorzata *CL* talp *CD* talpnak, annyi szorzata *ALC* háromszeg *ACD* háromszegnek; és ha *HC* talp egyenlő *CL* talppal, *AHC* háromszeg is egyenlő *ALC* háromszeggel, ha *HC* talp nagyobb *CL* talpnál, *AHC* háromszeg is nagyobb *ALC* háromszegnél; s ha kisebb, kisebb. Négy mekkoraság levén tehát, két talp *BC CD*, és két háromszeg *ABC ACD*, és *BC* talpnak s *ABC* háromszegnek *HC* talp és *AHC* háromszeg egyenlő szorzataik, *CD* talpnak s *ACD* háromszegnek pedig *CL* talp és *ALC* háromszeg más akármely egyenlő-szorzataik vétettek, és megmutattatott, hogy ha *HC* talp nagyobb *LC* talpnál, *AHC* háromszeg is nagyobb *ALC* háromszegnél; ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb; tehát a mint *BC* talp *CD* talphoz, úgy van *ABC* háromszeg *ACD* háromszeghez.

És minthogy *ABC* háromszegnek kettőzete *EC* egyközény, *ACD* háromszegnek pedig kettőzete *FC* egyközény; a részek pedig abban az arányban vannak, melyben az egyenlő-szorzataik; tehát a mint *ABC* háromszeg *ACD* háromszeghez, úgy van *EC* egyközény *FC* egyközényhez. Mivel pedig megmutattaték, hogy a mint *BC* talp *CD* talphoz, úgy van *ABC* háromszeg *ACD* háromszeghez, és a mint *ABC* háromszeg *ACD* háromszeghez, úgy *EC* egyközény *FC* egyközényhez; tehát a mint *BC* talp *CD* talphoz, úgy *EC* egyközény *FC* egyközényhez.



Tanuság: A felebbiből világos, hogy *egyenlő* magasságu háromszegek és egyközények úgy vannak egymáshoz mint talpaik.

Mert legyen *ABC DEF* két háromszeg egyenlő magasságu, azaz: *BG EH*-val egyenlő; azt mondom, hogy a mint *AC* talp *DF* talphoz, úgy van *ABC* háromszeg *DEF* háromszeghez.



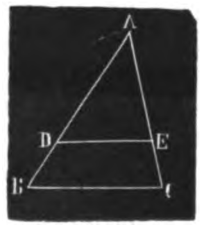
Mert *ABC DEF* háromszegek helyzessenek úgy, hogy talpaik *AC DF* legyenek egy egyenes *ACDF* vonalban, és vonassanak *BD BF BE*.

Már mivel *BG EH*-val egyenlő, és mindkettő *AF*-re függő levén, egymáshoz egyközüek, *BE* is egyközü *AF*-hez. De *BDF DEF* háromszegek *BE AF* egyközüek közt vannak, talpuk is ugyanazonegy *DF*; tehát *DBF* egyenlő *DEF*-el. Már pedig *ABC DBF* azonegy, *BG*, magasságuak; tehát a mint *AC DF*-hez, úgy *ABC DBF*-hez. De a mint *ABC DBF*-hez, úgy *ABC DEF*-hez, mivel *DBF DEF*-el egyenlő, s azon egy, egyenlőkhez egyarányu; tehát a mint *AC DF*-hez, úgy *ABC DEF*-hez.

Hasonlókép mutatjuk meg azt is: hogy egyenlő magasságu egyközények talpaikkal egyarányuak.

2. Feladat:

Ha egy háromszegnek egyik oldalához egyközü vonatik, egyarányban vágandja a háromszeg másik oldalát; és ha a háromszeg két oldala egyarányban vágatik, a vágásokat öszvekötö egyen egyközü leend a háromszeg harmadik oldalához.



Mert *ABC* háromszegnek egyik *BC* oldalához húzassék *DE* egyközü: azt mondom, hogy a mint *BD DA*-hoz, úgy van *CE EA*-hoz.

Mert vonassanak *BE CD*.

BDE háromszeg egyenlő *CDE* háromszeggel; mert azonegy *DE* talpon, s ugyanazon *DE BC* egyközüek közt vannak: *ADE* háromszeg megint egy más mekkoraság. Az egyenlők pedig azonegyhez egyarányuak Tehát a mint *BDE* háromszeg *ADE* háromszeghez, úgy van *CDE* háromszeg *ADE* háromszeghez. De a mint *BDE* háromszeg *ADE*-hez, úgy *BD DA*-hoz; mert az azonegy ú. m. az *E* töl *AB*-re vont függő magasságuak úgy vannak egymáshoz, mint talpaik. Ugyanazért a mint *CDE* háromszeg *ADE* háromszeghez, úgy van *CE EA*-hoz; tehát a mint *BD DA*-hoz, úgy *CE EA*-hoz.

De vágassék *ABC* háromszegnek *AB AC* két oldala *D E* pontoknál egyarányban: a mint *BD DA*-hoz, úgy *CE EA*-hoz, és vonassék *DE*: azt mondom, *DE* egyközü *BC*-hez.

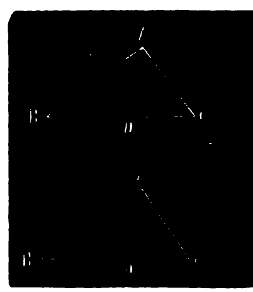
Mert ugyanazon készületeket téve, mivel a mint *BD* *DA*-hoz, úgy *CE* *EA*-hoz, de a mint *BD* *DA*-hoz, úgy *BDE* háromszeg *ADE*-hez, s a mint *CE* *EA*-hoz, úgy *CDE* háromszeg *ADE*-hez; tehát a mint *BDE* háromszeg *ADE*-hez, úgy van *CDE* háromszeg *ADE*-hez. Tehát *BDE* *CDE* háromszegek mindenike azonegy arányban van *ADE*-hez. *BDE* tehát *CDE* háromszeggel egyenlő, s azonegy *DE* talpon állanak. Már pedig egyenlő s azonegy talpon álló háromszegek ugyanazon egyközüek közt vannak. *DE* *BC*-hez tehát egyközü.

Ha tehát sat.

Jegyz. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy ha a háromszeg két oldalát megnyujtjuk, s a nyujtott egyenek közé a talpához egyközüt vonunk, ez a háromszeg két oldalával egyarányu darabokat vágand el; valamint megfordítva; ha egyarányu darabokat vág el, egyközü leend.

3. Feladat:

Ha egy háromszeg szeglete ketté vágatik, s a szegletet vágó eggen a talpat is vágja: a talp darabjai egyarányban leendenek a háromszeg többi oldalaival; és ha a talp darabjai a háromszeg többi oldalaival egyarányuak: a háromszeg tetejéből a vágáspontra húzott vonal a háromszeg szegletét kettévágja.



Legyen *ABC* háromszeg, és a *BAC* alatti szeglet vágassék ketté *AD* egyen által: azt mondom, hogy a mint *BD* *DC*-hez, úgy van *BA* *AC*-hez.

Mert vitessék *C*-n által *DA*-hoz egyközü *CE* és *BA* megnyujtatván, találkozék vele *E*-nél.

És minthogy *AC* egyen *AD* *EC* egyközüeket vágja, tehát az *ACE* alatti szeglet egyenlő a *CAD* alattival. De fel van téve, hogy a *CAD* alatti egyenlő a *BAD* alattival; a *BAD* alatti is tehát egyenlő az *ACE* alattival. Ismét minthogy *AD* *EC* egyközüeket vágja *BAE* egyen; a külső *BAD* alatti szeglet az *AEC* alatti belső átellenivel egyenlő. Megmutattaték pedig, hogy az *ACE* alatti is egyenlő a *BAD* alattival; tehát az *ACE* alatti szeglet az *AEC* alattival egyenlő; úgy hogy *AE* oldal is egyenlő *AC* oldallal. És mivel *BCE* háromszeg egyik *EC* oldalához *AD* egyközü van vonva; tehát egyarányban a mint *BD* *DC*-hez, úgy van *BA* *AE*-hez. De *AE* egyenlő *AC*-vel; tehát a mint *BD* *DC*-hez, úgy van *BA* *AC*-hez.

De legyen a mint *BD* *DC*-hez, úgy *BA* *AC*-hez, és vonassék *AD*: azt mondom, hogy a *BAC* alatti szeglet *AD* egyennel ketté van vágva.

Mert ugyanazon készületeket téve; mivel a mint *BD* *DC*-hez, úgy *BA* *AC*-hez; de a mint *BD* *DC*-hez, úgy *BA* *AE*-hez, mert *BCE* háromszeg egyik *EC* oldalához egyközüleg van vonva *AD*; és e szerint a mint *BA* *AC*-hez, úgy *BA* *AE*-hez; tehát *AC* egyenlő *AE*-vel; úgy hogy az *AEC* alatti szeglet is egyenlő az *ACE* alattival. De az *AEC* alatti a külső *BAD* alattival egyenlő; de egyenlő az *ACE* alatti is a *CAD* alatti váltó szeglettel; tehát a *BAD* alatti egyenlő a *CAD* alattival. A *BAC* alatti szeglet tehát *AD* egyennel ketté van vágva.

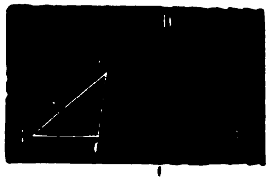
Ha tehát sat.

Jegyz. Simson Robert ide szúr be egy hasonló feladatot, melyet Proclus mint elemit idéz, s mely az előbbivel egyenlő fontosságu.

A. Feladat:

Ha a háromszeg egyik oldala megnyujtatik, s a külső szeglet egy egyennel ketté vágatik: a háromszeg talpából s ennek megnyujtásából ama ketté vágó egyen által elvágott darabból álló egyen ugyanezen elvágott darabhoz abban az arányban van, miben a háromszeg oldala, melynek megnyujtásából a külső szeglet származott, a másik oldalához; és ha a háromszeg külső szegletét vágó egyen a megnyujtott talpat a háromszeg oldalaival egyarányban vágja, azon egyen a külső szegletet ketté vágja.

Legyen *ABC* háromszeg, és ennek *AB* oldala megnyujtatván *DAC* külső szeglet vágassék ketté *AE* egyennel, és *AE* vágja a háromszeg megnyujtott *BC* talpát *E*-nél: azt mondom, hogy a mint *BE* *EC*-hez, úgy van *AB* *AC*-hez.



Mert C-n át vonassék AE-hez egyközü CF.

Már mivel FC AE-hez egyközü; tehát a DAE alatti külső szeglet egyenlő az AFC alatti belsővel; ugyanazért az EAC alatti szeglet is egyenlő az ACF alatti váltó szeglettel. De a DAE alatti az EAC alattival egyenlő, mivel a DAC alattit AE ketté vágja; tehát az AFC alatti is egyenlő az ACF alattival, miszerint AF is egyenlő AC-vel. Ismét mivel ABE háromszeg egyik AE oldalához CF egyközü van húzva, tehát a mint BC CE-hez, úgy BF FA-hoz; e szerint összetéve a mint BE EC-hez, úgy BA AF-hez. De AC AF-fel egyenlő, tehát a mint BA AF-hez, úgy BA AC-hez; úgy hogy a mint BE EC-hez, úgy BA AC-hez;: m. b. k.

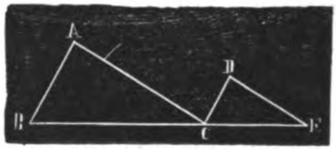
De az ABC alatti külső szegletet vágó AE egyen vágja a háromszeg megnyujtott talpát EB-t, úgy hogy AB AC BE EC egyarányban legyenek: azt mondom, hogy AE egyen a DAC szegletet ketté vágja, azaz: a DAE alatti szeglet az EAC alattival egyenlő.

Mert ugyanazon készületeket téve, mivel a mint BE EC-hez, úgy AB AC-hez; de a mint BE CE-hez, úgy BF FA-hoz, miszerint öszvetéve a mint BE EC-hez, úgy AB AF-hez; tehát a mint AB AC-hez, úgy AB AF-hez. Már pedig azonegyhez egyarányuak egyenlők, tehát AF AC-vel egyenlő; úgy hogy az ACF alatti szeglet is egyenlő az AFC alattival. De az AFC alatti a DAE alattival s az ACF alatti az EAC alattival egyenlők; tehát a DAE alatti egyenlő az EAC alattival.

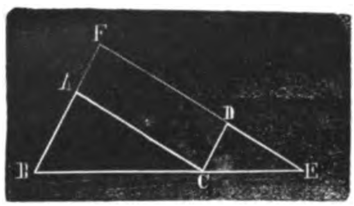
Szükséges tudatni a tanulóval, hogy midőn AB oldal AC oldallal egyenlő, a külső szegletet ketté vágó AE egyen BC-hez egyközü leend; és így ezt sehol sem vághatván, az egyarányról szó sem lehet. Ha pedig AC nagyobb mint AB, mint az ide mellékelt képletben: akkor a DAC alatti szegletet ketté vágó egyen AE csak a szeglet hegyén (A-n) túl megnyujtva vágandja a megnyujtott BC talpot, G-nél. Ekkor a mint a talp nyujtásából vágott darab (GB) van a talp és megnyujtott darabja öszvegéhez (GC-hez), úgy van a háromszegnek az az oldala, melynek megnyujtásából származik a külső szeglet, (AB), a másik oldalhoz (AC-hez). Bebizonyítása egészen hasonló az előbbi esetéhez.

4. Feladat:

Egyenlö szegletü háromszegeknek egyenlö szegleteik körüli oldalai egyarányuak, s az egyenlö szegleteket átfogó oldalak azonnevüek.



Legyenek *ABC DCE* háromszegekben a *BAC* alatti szeglet a *CDE* alattival, az *ACB* alatti a *DEC* alattival, és az *ABC* alatti a *DCE* alattival egyenlők: azt mondom, hogy *ABC DCE* háromszegeknek egyenlö szegleteik körüli oldalaik egyarányuak, s az egyenlö szegleteiket átfogók azonnevüek.



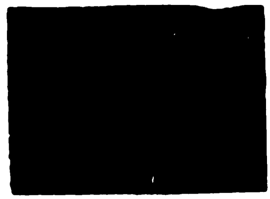
Mert helyeztessék *BC CE*-vel egyenesben. Már minthogy az *ABC ACB* alatti szegletek két deréknél kisebbek az *ACB* alatti pedig a *DEC* alattival egyenlö; tehát az *ABC DEC* alattiak is két deréknél kisebbek, *BA ED* tehát kinyujtatva öszvetalálkoznak. Nyujtassanak ki és találkozzanak *F*-nél.

És minthogy a *DCE* alatti szeglet az *ABC* alattival egyenlö, tehát *BF CD*-hez egyközü. Ismét minthogy az *ACB* alatti egyenlö a *DEC* alattival, *AC* egyközü *FE*-hez. *FACD* tehát egyközény; tehát *FA DC*-vel, *AC FD*-vel egyenlök. És minthogy *FBE* háromszeg egyik oldalához *FE*-hez, *AC* egyközüleg van húzva; tehát a mint *BA AF*-hez, úgy van *BC CE*-hez. De *AF* egyenlö *CD*-vel; tehát a mint *BA CD*-hez, úgy *BC CE*-hez; és cserélve a mint *AB BC*-hez, úgy van *DC CE*-hez. Ismét mivel *CD BF*-hez egyközü, tehát a mint *BC CE*-hez, úgy *FD DE*-hez. De *FD* egyenlö *AC*-vel; tehát a mint *BC CE*-hez, úgy *AC ED*-hez, és cserélve a mint *BC CA*-hoz, úgy *CE ED*-hez. És mivel megmutattaték, hogy a mint *AB BC*-hez, úgy *DC CE*-hez, s a mint *BC CA*-hoz, úgy *CE ED*-hez: tehát egyközösen is a mint *BA AC*-hez, úgy van *CD DE*-hez.

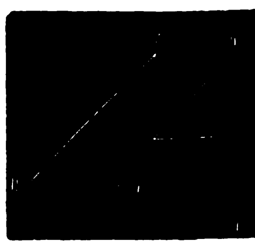
Tehát egyenlö szegletü háromszegeknek sat.

5. Feladat:

Ha két háromszeg oldalai egyarányuak: azok a háromszegek egyenlő szegletűek leendenek, s az azonnevü oldalaikkal átelleni szegleteik egyenlők.



Legyen ABC DEF két háromszeg, melyeknek oldalai egyarányban legyenek, a mint AB BC-hez, úgy DE EF-hez, a mint BC CA-hoz, úgy EF FD-hez, s végre a mint BA AC-hez, úgy ED DF-hez: azt mondom, hogy ABC háromszeg DEF háromszeggel egyenlőszegletü leend, s az azonnevü oldalakkal átelleni szegleteik egyenlők lesznek, ú. m. az ABC alatti a DEF alattival, a BCA alatti az EFD alattival, a BAC alatti az EDF alattival.



Mert állíttassék EF egyenhez, ennek E F pontjainál, az ABC alatti szeglettel egyenlő FEG alatti, s a BCA alattival egyenlő EFG alatti; tehát a harmadik BAC alatti egyenlő a harmadik EGF alattival.

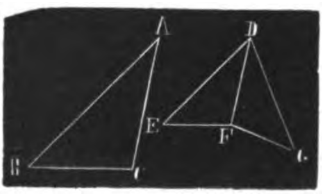
Tehát ABC háromszeg EGF háromszeggel egyenlő szegletü; ennélfogva ABC EGF háromszegeknek egyenlő szegletek körüli oldalaik egyarányuak, s az egyenlő szegletekkel átelleniek azonnevüek, tehát a mint AB BC-hez, úgy GE EF-hez. De a mint AB BC-hez, úgy van a feltétel szerint DE EF-hez, tehát a mint DE EF-hez, úgy GE EF-hez; tehát DE-nek GE-nek mindenike EF-hez egyarányu; DE tehát GE-vel egyenlő. Ugyanazért DF is egyenlő GF-fel. Már minthogy DE egyenlő GE-vel, EF pedig közös, DE EF két egyen GE EF két egyennel egyenlők, s FD talp egyenlő FG talppal; tehát a DEF alatti szeglet egyenlő a GEF alatti szeglettel, s DEF háromszeg egyenlő GEF háromszeggel, s a többi szegletek az egyenlő oldalakat átfogó többi szegletekkel; egyenlő tehát a DFE alatti szeglet a GFE alattival, s az EDF alatti az EGF alattival. És mivel az FED alatti egyenlő az FEG alattival, de a *GEF* alatti az *ABC* alattival egyenlö; tehát az *ABC* alatti szeglet egyenlö a *DEF* alattival. Ugyanazért az *ACB* alatti is egyenlö a *DFE* alattival, s végre az *A*-nál való a *D*-nél valóval; *ABC* háromszeg tehát *DEF* háromszeggel egyenlö szegletü.

Ha tehát sat.

6. Feladat:

Ha két háromszegben egyik szeglet egyenlö egyik szeglettel, s az egyenlö szegletek körüli oldalak egyarányuak: azok a háromszegek egyenlö szegletüek, s az azonnevü oldalakkal szemben levö szegletek egyenlök lesznek.

Legyen *ABC DEF* két háromszeg, melyekben a *BAC* alatti egyik szeglet az *EDF* alatti egyik szeglettel egyenlö, s az egyenlö szegletek körüli oldalok egyarányuak legyenek, a mint *BA AC*-hez, úgy *ED DF*-hez: azt mondom, hogy *ABC* háromszeg *DEF* háromszeggel egyenlö szegletü, s az *ABC* alatti szeglete egyenlö lesz ennek *DEF* alatti szegletével, és az *ACB* alatti a *DFE* alattival,



Mert állíttassanak *DF* egyenhez, ennek *D F* pontjainál akár a *BAC* alatti, akár az *EDF* alatti szeglettel egyenlö *FDG* alatti, és az *ACB* alattival egyenlö *DFG* alatti; tehát a harmadik is a *B*-nél való a harmadikkal a *G*-nél valóval egyenlö.

ABC háromszeg tehát *DGF* háromszeggel egyenlöszegletü; tehát egyarányban a mint *BA AC*-hez, úgy van *GD DF*-hez. De fel van téve, hogy a mint *BA AC*-hez, úgy *ED DF*-hez; tehát a mint *ED DF*-hez, úgy *GD DF*-hez, tehát *ED DG*-vel egyenlö és *DF* közös; e szerint *ED DF* két egyen *GD DF* két egyennel egyenlö, s az *EDF* alatti szeglet egyenlö a *GDF* alatti szeglettel; tehát *EF* talp egyenlö *GF* talppal, és *DEF* háromszeg *DGF* háromszeggel egyenlö, s a többi szegletek külön-külön egyenlök a többi szegletekkel, melyeket az egyenlö oldalak fognak át; *DFG* tehát egyenlö

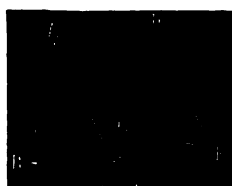
DFE-vel s *DGF DEF*-fel. De a *DFG* alatti az *ACB* alattival egyenlő, tehát a *DFE* alatti is egyenlő az *ACB* alattival. De fel van téve, hogy a *BAC* alatti is egyenlő az *EDF* alattival, tehát a harmadik a *B*-nél való egyenlő a harmadikkal az *E*-nél valóval; tehát *ABC* háromszeg *DEF* háromszeggel egyenlő szeglet ü.

Ha tehát sat.

7. Feladat:

Ha két háromszegben egyik szeglet egyenlő egyik szeglettel, a másik szegletek körüli oldalak pedig egyarányuak, s a harmadik szegletek mindenike egy deréknél egyszersmind vagy kisebb vagy nem kisebb: azok a háromszegek egyenlő szegletüek, s az egyarányu oldalak közé fogott szegleteik egyenlők lesznek.

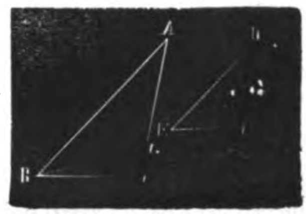
Legyen *ABC DEF* két háromszeg, melyekben egyik szeglet egyik szeglettel egyenlő, ú. m. a *BAC* alatti az *EDF* alattival, s a másik szegletek, ú. m. az *ABC DEF* alattiak körüli oldalok egyarányuak legyenek, a mint *AB BC*-hez, úgy *DE EF*-hez, és a harmadik *C*-nél és *F*-nél levő szegletek mindenike egy deréknél egyszersmind kisebb: azt mondom, hogy *ABC* háromszeg egyenlő szegletü lesz *DEF* háromszeggel, az *ABC* alatti szeglet a *DEF* alattival, s így a harmadik is, úgymint a *C*-nél való, a harmadikkal az *F*-nél levővel.



Mert ha az *ABC* alatti szeglet a *DEF* alattival nem egyenlő, egyikök nagyobb. Legyen nagyobb az *ABC* alatti, és állíttassék *AB* egyenhez, a benne levő *B* pontnál, a *DEF* alatti szeglettel egyenlő *ABG* alatti.

És minthogy *A* szeglet egyenlő *D* szeglettel, s az *ABG* alatti a *DEF* alattival, tehát az *AGB* alatti harmadik egyenlő a *DFE* alattival; *ABG* háromszeg tehát *DEF* háromszeggel egyenlő szegletü; tehát a mint *AB*

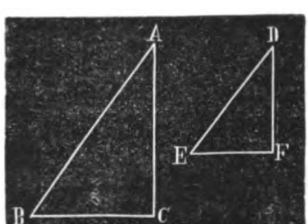
BG-hez, úgy van *DE EF*-hez. De fel van téve, hogy a mint *DE EF*-hez, úgy *AB BC*-hez; és hát a mint *AB BC*-hez, úgy *AB BG*-hez, *AB* tehát *BC BG* közül mindenikhez egyarányu; tehát *BC* egyenlő *BG*-vel, úgy hogy a *C*-nél levő szeglet is egyenlő a *BGC* alattival. De a feltétel szerint a *C*-nél levő egy deréknél kisebb; a *BGC* alatti is tehát kisebb egy deréknél; miszerint a vele szomszéd *AGB* alatti szeglet egy deréknél nagyobb. De megmutattaték, hogy egyenlő az *F*-nél levővel, tehát a *C*-nél levő is nagyobb egy deréknél. De a feltét szerint kisebb is egy deréknél; mi képtelen. Nem nemegyenlő tehát az *ABC* alatti szeglet a *DEF* alattival, tehát egyenlő. Mivel pedig az *A*-nál levő is egyenlő a *D*-nél levővel, tehát a harmadik a *C*-nél is egyenlő a harmadikkal az *F*-nél levővel; *ABC* háromszeg tehát *DEF* háromszeggel egyenlő szegletü.



De viszont tétessék fel, hogy a *C F*-nél valók mindenike egy deréknél nem kisebb: ismét azt mondom, hogy így is *ABC* háromszeg *DEF* háromszeggel egyenlő szegletü.

Mert ugyanazon készületeket téve, hasonlóképp mutatjuk meg, hogy *BC* egyenlő *BG*-vel, úgy hogy a *C*-nél való szeglet is egyenlő a *BGC* alattival. De a *C*-nél való egy deréknél nem kisebb; tehát a *BGC* alatti sem kisebb egy deréknél, *BGC* háromszegnek tehát két szeglete nem kisebb két deréknél; mi lehetetlen; nem nemegyenlő tehát ismét az *ABC* alatti szeglet a *DEF* alattival; tehát egyenlő. De az *A*-nál levő is egyenlő a *D*-nél levővel; tehát a harmadik a *C*-nél egyenlő az *F*-nél való harmadikkal; *ABC* háromszeg tehát *DEF* háromszeggel egyenlő szegletü.

Ha tehát sat.



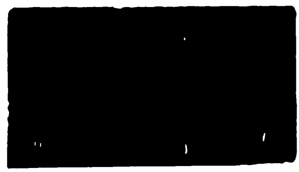
Jegyzés. Ha vagy a *C*-nél vagy az *F*-nél való harmadik szeglet egy derékkel egyenlő: azt mondom, hogy ekkor is egyenlő az *ABC* alatti szeglet a *DEF* alattival.

Mert ha az *ABC* alatti szeglet a *DEF* alattival nem egyenlő, valamelyikök nagyobb. Hasonlókész üle-

teket téve, szintúgy megmutatjuk, hogy *BG* egyenlő *BC*-vel, és a *BCG* alatti szeglet a *BGC* alattival. Már pedig a *BCG* alatti derék, tehát a *BGC* alatti is derék; úgy hogy *BGC* háromszegnek két szeglete két deréknél nem kisebb; mi képtelen.

8. Feladat:

Ha a derékszegletü háromszegben a derékszegletből a talpra függő vonatik: a függő melletti háromszegek az egészhez és egymáshoz hasonlók.



Legyen *ABC* derékszegletü háromszeg, melynek *BAC* alatti szeglete derék, és *A*-tól *BC*-re vonassék *AD* függő: azt mondom, hogy *ABD ADC* háromszegek mindenike hasonló az egész *ABC*-hez és egymáshoz.

Mert, minthogy a *BAC* alatti szeglet egyenlő az *ADB* alattival, mindenikök derék levén, és a *B*-nél való mind a két háromszegnek az *ABC*-nek és *ABD*-nek közös szeglete; tehát az *ACB* alatti harmadik is egyenlő a *BAD* alatti harmadikkal; *ABC* háromszeg tehát *ABD* háromszeggel egyenlő szegletü. Tehát a mint az *ABC* háromszeg derékszegletét átfogó *BC* az *ABD* háromszeg derékszegletét átfogó *BA*-hoz, úgy van az *ABC* háromszeg *C*-nél levő szegletét átfogó ugyanazon *AB*, az *ABD* háromszeg *BAD* alatti szegletét, mely a *C*-nél levővel egyenlő, átfogó *BD*-hez, s megint *AC* a két háromszeg *B*-nél levő közös szegletét átfogó *AD*-hez; tehát *ABC* háromszeg *ABD* háromszeggel egyenlőszegletü, s az egyenlő szegletek körüli oldalaik egyarányuak; *ABC* háromszeg tehát *ABD* háromszeghez hasonló. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *ABC* háromszeg *ADC* háromszeghez is hasonló; tehát *ABD ADC* háromszegek mindenike hasonló az egész *ABC* háromszeghez.

De azt mondom, hogy *ABD ADC* háromszegek egymáshoz is hasonlók.

Mert minthogy a *BDA* alatti derékszeglet egyenlő az

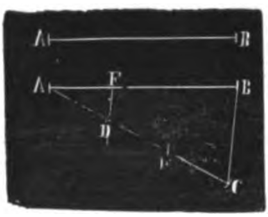
ADC alatti derékkel; de megmutattaték az is, hogy a *BAD* alatti egyenlő a *C*-nél levővel; tehát a harmadik a *B*-nél is egyenlő a harmadikkal a *DAC* alattival; *ABD* háromszeg tehát *ADC* háromszeggel egyenlőszegletü. Tehát a mint az *ABD* háromszeg *BAD* alatti szegletét átfogó *BD*, az *ACD* háromszegnek a *BAD* alattival egyenlő *C*-nél való szegletét átfogó *DA*-hoz, úgy van az *ABD* háromszeg *B*-nél való szegletét átfogó *AD*, az *ADC* háromszegnek *B*-nél levővel egyenlő *DAC* alatti szegletét átfogó *DC*-hez, s megint az *ADB* alatti derékszegletet átfogó *BA* az *ADC* alatti derékszegletet átfogó *AC*-hez; *ABD* háromszeg tehát hasonló *ADC* háromszeghez.

Ha tehát sat.

Tanuság: Ebből világos, hogy ha a derékszegletü háromszegben a derékszegletből a talpra függő húzatik, a húzott egyen a talp darabjai közt közép egyarányu: s megint a talp és az egyik akármelyik darab között a darab felőli oldal közép egyarányu.

9. Feladat:

Adott egyennek kivánt részét elvágni.



Legyen az adott egyen *AB*; *AB*-nek kivánt részét el kell vágni.

Kivántassék a harmada, és vonassék *A*-ból valamely *AC* egyen, mely *AB*-vel akármely szegletet fogjon be; vétessék *AC*-n akármely *D* pont, és *DE* *EC* tétessenek egyenlőkké *AD*-vel; vonassék *BC*, és *D*-n át ehhez egyközüleg húzassék *DF*.

Minthogy *ABC* háromszegnek egyik *BC* oldalához egyközüleg van vonva *FD*: egyarányban a mint *CD* *DA*-hoz, úgy van *BF* *FA*-hoz. De *CD* kétakkora mint *DA*; *BF* is tehát kétakkora mint *FA*; tehát *BA* háromakkora mint *AF*.

AB adott egyennek tehát a kivánt harmada *AF*, el van vágva: m. t. k.

Jegyz. Ennek a feladatnak átalánosabb bizonyítmánya óhajtható. A felebbiben még az a hiány is van, hogy oly állítmányra hivatkozik, mely az 5-ik könyv kezünkre jött szövegében nem létez, t. i.

hogy ha van négy egyarányu mekkoraság, s a második az elsőnek valami része, a harmadik is az a része a negyediknek. Ez a hiány mutatja ki az 5-ik könyvbe a 6-ik feladat után szúrt D.) feladat szükséges voltát. *Simson* átalános bizonyítmánya következő:

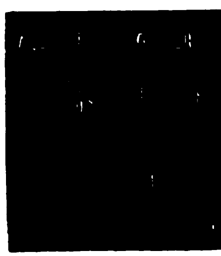
Vonassék *A* pontból *AC* egyen, mely *AB*-vel akármely szegletet fogjon be. Vétessék *AC*-ben akármely *D* pont, és tétessék *AC AD*-nek azon szorzatává, a mi szorzata *AB* a kivánt résznek. Vonassék *BC*, és *D*-n át *BC*-hez egyközü *DE*.

Már mivel *ABC* háromszegben *DE* egyen *BC* oldalhoz egyközü: tehát a mint *CD DA*-hoz, úgy van *BE EA*-hoz; miszerint öszvetéve a mint *AC AD*-hez, úgy *AB AE*-hez. De *AD AC*-nek bizonyos része, tehát *AE* is *AB*-nek ugyanaz a része; m. b. k.

10. Feladat:

Adott vágatlan egyent más adott vagdalt egyennel egyarányban vagdalni.

Legyen *AB* az adott vágatlan egyen, *AC* pedig *D E* pontoknál vagdalt egyen: a vágatlan *AB*-t kell a vagdalt *AC*-vel egyarányban vagdalni.



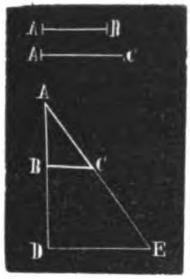
Helyzessenek úgy, hogy akármely szegletet fogjanak be, s vonassék *CB*, és *D*-n *E* n által húzassanak *BC*-hez *DF EG* egyközűek, *D*-n által megint húzassék *AB*-hez *DHK* egyközü.

Egyközény tehát mind *FH* mind *HB*, tehát *DH FG*-vel, *HK GB*-vel egyenlők. És minthogy *DKC* háromszegnek egyik *KC* oldalához egyközüleg van vonva *HE*; tehát egyarányban a mint *CE ED*-hez, úgy van *KH HD*-hez. De *KH BG*-vel, *HD GF*-fel egyenlő; tehát a mint *CE ED*-hez, úgy van *BG GF*-hez. Ismét mivel *AGE* háromszegnek egyik *EG* oldalához egyközüleg van vonva *FD*; tehát egyarányban a mint *ED DA*-hoz, úgy *GF FA*-hoz. Megmutattuk pedig, hogy a mint *CE ED*-hez, úgy *BG GF*-hez; tehát a mint *CE ED*-hez, úgy *BG GF*-hez, s a mint *ED DA*-hoz, úgy *GF FA*-hoz.

AB adott vágatlan egyen tehát sat.

11. Feladat:

Két adott egyenhez harmadik egyarányut találni.



Legyen a két egyen AB AC: AB AC két egyenhez harmadik egyarányut kell találni.

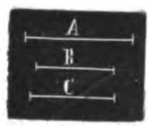
Helyzessenek AB AC úgy, hogy akármely szegletet fogjanak be, és nyujtassanak ki D E pontokig, és tétessék BD AC-vel egyenlővé; vonassék BC, és D-n át, húzassék hozzája DE egyközü.

Minthogy ADE háromszeg egyik DE oldalához van húzva BC egyenközü; egyarányban a mint AB BD-hez, úgy van AC CE-hez. De BD egyenlő AC-vel, tehát a mint AB AC-hez, úgy van AC CE-hez.

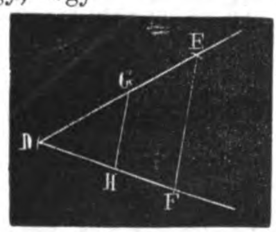
AB AC adott két egyenhez tehát CE harmadik egyarányut találtunk; m. t. k.

12. Feladat:

Három adott egyenhez negyedik egyarányut találni.



Legyen a három adott egyen A B C: A B C három egyenhez negyedik egyarányut kell találni.



Vonassék DE DF két egyen, úgy, hogy akármely EDF alatti szegletet fogjanak be: tétessék A-val egyenlővé DG, B-vel egyenlővé GE, és C-vel egyenlővé DH, és vonatván GH, húzassék hozzája E-n át EF egyközü.

Minthogy DEF háromszegnek egyik EF oldalához van vonva GH egyközü; tehát a mint DG GE-hez, úgy van DH HF-hez. De DG A-val, GE B-vel, s DH C-vel egyenlő; tehát a mint A B-hez, úgy van C HF-hez.

ABC három adott egyenhez tehát negyedik egyarányu HF van találva: m. t. k.

13. Feladat:

Két adott egyenhez középegyarányut találni.

Legyen a két adott egyen *AB BC*: *AB BC*-hez közép egyarányut kell találni.

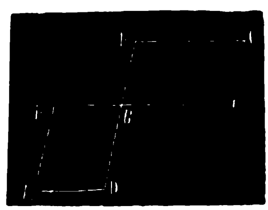
Helyzessenek egyenesbe egymással, és irassék *AC*-re *ADC* félkör; *B* pontból vonassék *AC*-hez derékszegletre *BD* és vonassanak *AD DC*.

Már minthogy *ADC* szeglet a félkörben van, derék. És minthogy *ADC* derékszegletü háromszegben a derékszegletből a talpra *DB* függő van húzva: tehát *DB* a talp *AB BC* darabjai közt közép egyarányu.

AB BC két adott egyenhez tehát *BD* közép egyarányu van találva: m. t. k.

14. Feladat:

Egyenlő és egyenlő szegletü egyközényeknek egyenlő szeglet körüli oldalai ellenarányuak: s a mely egyenlő szegletü egyközényeknek egyenlő szeglet körüli oldalai ellenarányuak, azok egyenlők.



Legyenek *AB BC* egyenlő és egyenlőszegletü egyközények, melyeknek *B*-nél való szegletei egyenlők: azt mondom, hogy *AB BC*-nek egyenlő szeglet körüli oldalai ellenarányuak, azaz: a mint *DB BE*-hez, úgy van *GB BF*-hez.

Helyzessék *DB BE*-vel egyenesbe, tehát *FB* is egyenesben van *BG*-vel; és egészíttessék ki *FE* egyközény.

Már minthogy *AB* egyközény *BC* egyközénynyel egyenlő, *FE* pedig egy más; tehát a mint *AB FE*-hez, úgy van *BC FE*-hez. De a mint *AB*

FE-hez, úgy van *DB BE*-hez, s a mint *BC FE*-hez, úgy van *GB BF*-hez; tehát a mint *DB BE*-hez, úgy van *GB BF*-hez, *AB BC* egyközényeknek tehát egyenlő szegletek körüli oldalaik ellenarányuak.

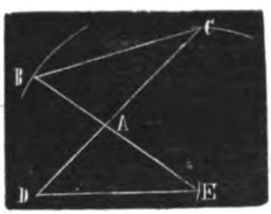
De legyenek az egyenlő szegletek körüli oldalok ellenarányuak, és legyen a mint *DB BE*-hez, úgy *GB BF*-hez: azt mondom, hogy *AB* egyközény *BC* egyközénynyel egyenlő.

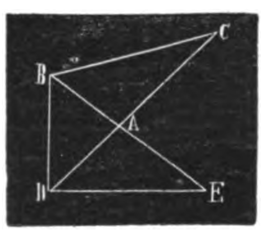
Mert a mint *DB BE*-hez, úgy van *GB BF*-hez, de a mint *DB BE*-hez, úgy van *AB* egyközény *FE* egyközényhez, s a mint *GB BF*-hez, úgy *BC* egyközény *FE* egyközényhez, tehát a mint *AB FE*-hez, úgy van *BC FE*-hez; *AB* egyközény tehát *BC* egyközénynyel egyenlő.

Tehát az egyenlő sat.

15. Feladat:

Egyenlő háromszegeknek, melyekben egyik szeglet egyik szeglettel egyenlő, az egyenlő szegletek körüli oldalaik ellenarányuak; és a mely háromszegekben egyik szeglet egyik szeglettel egyenlő, s az egyenlő szegletek körüli oldalaik ellenarányuak; azok a háromszegek egyenlők.





Legyenek *ABC ADE* egyenlő háromszegek, melyekben a *BAC* alatti egyik szeglet a *DAE* alatti egyikkel egyenlő: azt mondom, hogy *ABC ADE* háromszegeknek egyenlő szegletek körüli oldalaik ellenarányuak, azaz: a mint *CA AD*-hez, úgy van *EA AB*-hez.

Mert helyzessék *CA AD*-vel egyenesben; tehát *EA* is egyenesben leend *AB*-vel, és vonassék *BD*.

Minthogy *ABC* háromszeg *ADE* háromszeggel egyenlő, *ABD* pedig egy más; tehát a mint *CAB* háromszeg *BAD* háromszeghez, úgy van *ADE* háromszeg *BAD* háromszeghez. De a mint *CAB BAD*-hez, úgy van *CA AD*-hez, s a mint *EAD BAD*.

hez, úgy EA AB-hez; ABC ADE háromszegeknek egyenlő szegletek körüli oldalaik tehát ellenarányuak.

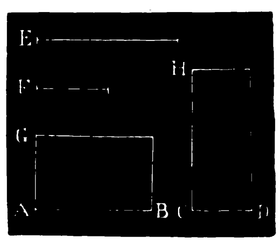
De legyenek ABC ADE háromszegek oldalai ellenarányuak, s a mint CA AD-hez, úgy legyen EA AB-hez: azt mondom, hogy ABC háromszeg ADE háromszeggel egyenlő.

Mert ismét BD vonatván, mivel a mint CA AD-hez, úgy van EA AB-hez; de a mint CA AD-hez, úgy ABC háromszeg BAD háromszeghez, s a mint EA AB-hez, úgy EAD háromszeg BAD háromszeghez; tehát a mint ABC háromszeg BAD háromszeghez, úgy van EAD háromszeg BAD háromszeghez; ABC ADE közül tehát mindenik ugyanazon arányban van BAD-hez; tehát BAC háromszeg egyenlő EAD háromszeggel.

Tehát sat.

16. Feladat:

Ha négy egyen egyarányu, a szélsők közé fogott derékszeg egyenlő a közbülsők közé fogott derékszeggel; és ha a szélsők közé fogott derékszeg egyenlő a közbülsők közé fogott derékszeggel, a négy egyen egyarányu.



Legyen AB CD E F négy egyarányu egyen, a mint AB CD-hez, úgy E F-hez: azt mondom, hogy az AB s F közé fogott derékszeg egyenlő a CD s E közé fogott derékszeggel.

Mert húzassanak A C pontokból AB CD egyenekhez derékszegletre AG CH, és tétessék AG F-fel, CH E-vel egyenlővé, és egészíttessenek ki BG DH egyközények.

Már mivel a mint AB CD-hez, úgy van E F-hez, E pedig CH-val s F AG-vel egyenlő; tehát a mint AB CD-hez, úgy van CH AG-hez, tehát BD DH egyközényeknek egyenlő szeglet körüli oldalai ellenarányuak. Már pedig a mely egyenlő szegletü egyközényeknek egyenlő szeglet körüli oldalai ellenarányuak, azok egyenlők; tehát BG egyközény DH egyközénynyel egyenlő. De *BG*, az *AB* és *F* közötti derékszeg, mert *AG* egyenlő *F*-fel; *DH* megint a *CD* és *E* közötti, mert *CH* egyenlő *E*-vel; tehát az *AB F* közé fogott derékszeg egyenlő a *CD E* közé fogott derékszeggel.

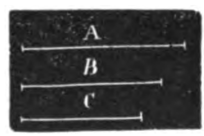
De legyen az *AB F* közé fogott derékszeg egyenlő a *CD E* közé fogott derékszeggel: azt mondom, hogy a négy egyen egyarányban leend, a mint *AB CD*-hez, úgy *E F*-hez.

Mert ugyanazon készületeket téve, minthogy az *AB F* közötti egyközény egyenlő a *CD E* közöttivel, s az *AB F* közötti a *BG*, mert *AG* egyenlő *F*-fel; a *CD E* közötti pedig a *DH*, mert *CH* egyenlő *E*-vel: tehát *BG* egyenlő *DH*-val, s egyenlőszegletüek is. Már pedig az egyenlő s egyenlőszegletü egyközényeknek egyenlőszeglet körüli oldalaik ellenarányuak; tehát a mint *AB CD*-hez, úgy *CH AG*-hez; de *CH E*-vel, *AG* pedig *F*-fel egyenlők; tehát a mint *AB CD*-hez, úgy *E F*-hez

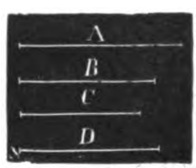
Ha tehát sat.

17. Feladat:

Ha három egyen egyarányu, a szélsők közé fogott derékszeg egyenlő a közbülső négyszegével; és ha a szélsők közé fogott derékszeg egyenlő a közbülső négyszegével, a három egyen egyarányu lesz.



Legyen *A B C* három egyen azonegy arányban, a mint *A B*-hez, úgy *B C*-hez: azt mondom, hogy az *A C* közé fogott derékszeg a *B* négyszegével egyenlő.



Mert vétessék *B*-vel egyenlő *D* egyen.

És minthogy a mint *A B*-hez, úgy van *B C*-hez; *B* pedig egyenlő *D*-vel; tehát a mint *A B* hez, úgy *D C*-hez. Már pedig ha négy egyen egyarányu, a szélsők közé fogott derékszeg egyenlő a közbülsők közé fogott derékszeggel; az *A* és *C* közötti tehát egyenlő a *B* és *D* közöttivel. De a *B* és *D* közötti derékszeg a *B* négyszege, mert *B* egyenlő *D*-vel; tehát az *A* és *C* közé fogott derékszeg egyenlő a *B* négyszegével.

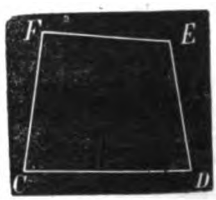
De legyen az A és C közötti a B négyszegével egyenlő: azt mondom, hogy a mint A B-hez, úgy van B C-hez.

Mert ugyanazon készületeket téve, minthogy az A és C közötti derékszeg a B négyszegével egyenlő; de a B négyszege a B és D közötti derékszeg, mert B egyenlő D-vel; tehát az A és C közötti egyenlő a B és D közöttivel. De ha a szélsők közti derékszeg a közbülsök közöttivel egyenlő, a négy egyen egyarányu; tehát a mint A B-hez, úgy van D C-hez. De B egyenlő D-vel, tehát a mint A B-hez, úgy B C-hez.

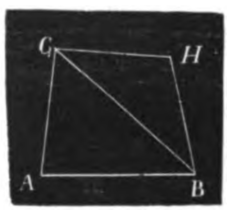
Ha tehát sat.

18. Feladat:

Adott egyenre adott egyenesvonalu képletekhez hasonló s hasonlókép fekvő egyenesvonalu képletet írni.



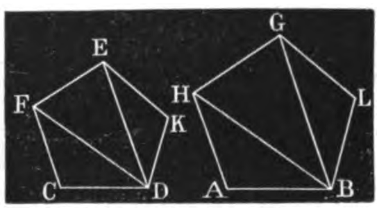
Legyen az adott egyen AB, az adott egyenesvonalu képlet pedig EC: AB egyenre CE egyenesvonaluhoz hasonló s hasonlókép fekvő egyenesvonalu képletet kell írni.



Vonassék DF, és állítassanak AB egyenhez ennek A B pontainál a C-nél való szeglettel egyenlő AB alatti, s a CDF alattival egyenlő ABG alatti; tehát a harmadik CFD alatti az AGB alattival egyenlő; ennélfogva FCD háromszeg GAB háromszeggel egyenlőszegletü; tehát egyarányban a mint FD GB-hez, úgy van FC GA-hoz, és CD AB-hez. Ismét állítassanak BG egyenhez ennek B G pontainál a DFE alatti szeglettel egyenlő BGH alatti, s az FDE alattival egyenlő GBH alatti; a harmadik tehát az E-nél levő a harmadikkal a H-nál valóval egyenlő; ennél fogva FDE háromszeg egyenlő szegletü GBH háromszeggel; tehát egyarányban a mint DF GB-hez, úgy van FE GH-hoz és ED HB-hez. De megmutattaték az is, hogy a mint FD GB-hez, úgy FC GA-hoz, és CD AB-hez; tehát a mint FC AG-hez, úgy van CD AB-hez, FE GH-hoz és ED HB-hez. És minthogy a CFD alatti szeglet az AGB alattival, a DFE alatti pedig a BGH alattival egyenlők: tehát az egész CFE alatti egyenlö az egész AGH alattival. Ugyanazért a CDE alatti is egyenlö az ABH alattival; de a C-nél való is egyenlö az A-nál valóval, s az E-nél való a H-nál valóval; AH tehát CE-vel egyenlöszegletü, s az egyenlö szegletek körüli oldalaik egyarányuak; tehát AH egyenesvonalu képlet CE egyenesvonaluhoz hasonló.

Adott AB egyenre tehát CE egyenesvonaluhoz hasonló s hasonlólag fekvö AH egyenesvonalu íratott: m. t. k.

Jegyz. Simson két hiányt lát e feladat bizonyítmányában; *elsöben*: hogy csak négyoldalu képletekre van szorítva; *másodszor*: hogy a két hasonlószegletü háromszeg oldalainak egyarányában az elötagok mind az egyikből, az utótagok mind a másikból vétettek; mi az eddigi feladatokból *csak cserélés utján* következik. Ezen utóbbi hiány kipótlását a tanulóra bízzuk; hanem a feladatnak több, p. o. ötoldalu képletre alkalmazását ide tenni szükségesnek véltük:



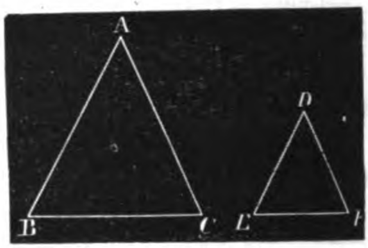
Legyen az adott egyenesvonalu $CDKEF$ képlet ötoldalu.

Vonassanak DF DE; és irassék AB-re $CDEF$ négyoldalu képlethez hasonló és hasonlókép fekvö $ABGH$ képlet; állítassanak BG egyenhez, annak B G pontainál, az EDK alatti szeglettel egyenlö GBL alatti, és a DEK alattival egyenlö BGL alatti; tehát az L-nél levö harmadik szeglet egyenlö leend a K-nál levö harmadikkal. De mivel $AHGB$ $CDEF$-hez hasonlónak íratott, a HGB alatti szeglet egyenlö az FED alattival, a BGL alatti is egyenlö a DEK alattival; tehát a HGL alatti is az FEK alattival egyenlö. Ugyanazért az ABL alatti is egyenlö a CDK alattival; úgy hogy az egész $ABLGH$ ötoldalu képlet az egész $CDKEF$ ötoldalu képlettel egyenlöszegletü. Ismét mivel $ABGH$ $CDEF$-hez hasonló, a mint HG GB-hez, úgy van FE ED-hez; de BGL DEK háromszegek egyenlöszegletüek levén a mint GB GL-hez, úgy ED EK-hoz; tehát egyközüleg a mint HG GL-hez, úgy FE EK-hoz. Ugyanazért a mint AB BL-hez, úgy van CD DK-hoz. De ugyancsak a BGL DEK háromszegek egyenlöszegletüségiért, a mint GL LB-hez, úgy EK KD-hez. Tehát $ABLGH$ $CDKEF$ ötszegek egyenlöszegletüek, és egyenlö szegleteiket befogó oldalaik egyarányuak; tehát hasonlók.

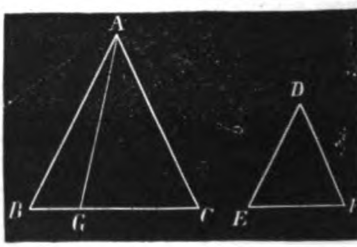
Hasonlóképp folytatva lehet több oldalu adott képletekhez hasonló képleteket is adott egyenre írni.

19. Feladat:

A hasonló háromszegek kétszeres arányban vannak egymáshoz, mint az azonnevü oldalaik.



Legyenek *ABC DEF* hasonló háromszegek, mellyekben a *B*-nél levő szeglet egyenlő az *E*-nél levővel, s a mint *AB BC*-hez, úgy legyen *DE EF*-hez; úgy hogy *BC EF* azonnevüek legyenek: azt mondom, hogy *ABC* háromszeg *DEF* háromszeghez kétszeres arányban van, mint *BC EF*-hez.



Mert vétessék *BC EF*-hez harmadik egyarányu *BG*, úgy, hogy a mint *BC EF*-hez, úgy legyen *EF BG*-hez, és vonassék *GA*.

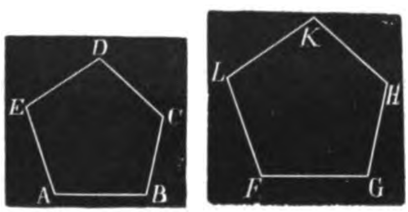
Minthogy a mint *AB BC*-hez, úgy *DE EF*-hez; tehát cserélve a mint *AB DE*-hez, úgy van *BC EF*-hez. De a mint *BC EF*-hez, úgy *EF BG*-hez; a mint tehát *AB DE*-hez, úgy *EF BG*-hez; *ABG DEF* háromszegek oldalai tehát ellenarányuak. Már pedig a mely háromszegekben egyik szeglet egyenlő egyik szeglettel s az egyenlő szegletek körüli oldalak ellenarányuak, azok a háromszegek egyenlők; tehát *ABG* háromszeg egyenlő *DEF* háromszeggel. És minthogy a mint *BC EF*-hez, úgy *EF BG*-hez, ha pedig három egyen egyarányu, az első a harmadikhoz kétszeres arányban lenni mondatik mint a másodikhoz: tehát *BC BG*-hez kétszeres arányban van, mint *BC EF*-hez. De a mint *BC BG*-hez, úgy van *ABC* háromszeg *ABG* háromszeghez; tehát *ABC* háromszeg kétszeres arányban *ABG* háromszeghez, mint *BC EF*-hez. *ABG* háromszeg pedig egyenlő *DEF* háromszeggel; *ABC* háromszeg tehát *DEF* háromszeghez is kétszeres arányban van, mint *BC EF*-hez.

A hasonló sat.

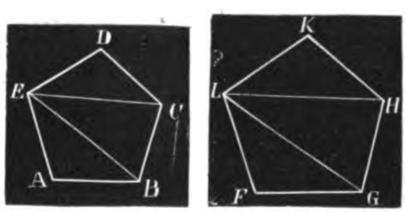
Tanuság: Ebből világos, hogy, ha három egyen egyarányban van, a mint az első a harmadikhoz, úgy van az elsőre írt háromszeg a harmadikra hasonlókép írt és hasonló háromszeghez. (Mivel megmutattaték, hogy a mint *CB BG*-hez, úgy van *ABC* háromszeg *ABG* háromszeghez, azaz: *DEF*-hez).

20. Feladat:

Hasonló sokszegeket egyenlő számu s az egészekkel azonnevü hasonló háromszegekre szelhetni: és a sokszeg a sokszeghez kétszeres arányban van, mint az azonnevü oldal az azonnevü oldalhoz.



Legyenek *ABCDE FGHKL* hasonló sokszegek, s *AB* legyen azonnevü *FG*-vel: aztmondom, hogy *ABCDE FGHKL* sokszegeket egyenlő számu s az egészekkel azonnevü hasonló háromszegekre szelhetni: és hogy *ABCDE* sokszeg *FGHKL* sokszeghez kétszeres arányban van, mint *AB FG*-hez.



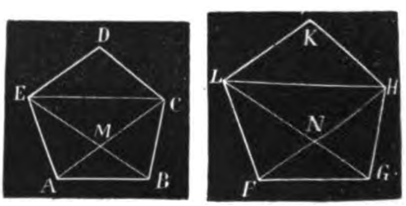
Mert vonassanak *BE EC GL LH*.

És minthogy *ABCDE* sokszeg *FGHKL* sokszeghez hasonló, a *BAE* alatti szeglet egyenlő a *GFL* alattival; és a mint *BA AE*-hez, úgy van *FG FL*-hez. És mivel *ABE FGL* háromszegekben egyik szeglet egyenlő egyik szeglettel s az egyenlő egyik szegletek körüli oldalok egyarányuak: tehát *ABE* háromszeg egyenlő szegletü *FGL* háromszeggel, és így hasonló is hozzája;

tehát az ABE alatti szeglet egyenlő az FGL alattival. De az egész ABC alatti is egyenlő az egész FGH alattival, hasonlók levén a sokszegek; tehát a maradék EBC szeglet egyenlő a maradék LGH szeglettel. És minthogy az ABE FGL háromszegek hasonlóságánál fogva a mint EB BA-hoz, úgy van LG GF-hez, de megint a sokszegek hasonlóságánál fogva a mint AB BC-hez, úgy FG GH-hoz, tehát egyközösön a mint EB BC-hez, úgy van LG GH-hoz; e szerint az EBC LGH egyenlő szegletek körüli oldalok egyarányuak; tehát EBC háromszeg egyenlő szegletü LGH háromszeggel, úgy hogy EBC háromszeg is hasonló LGH háromszeghez. Ugyanaz oknál fogva ECD háromszeg is hasonló LHK háromszeghez; tehát $ABCDE$ $FGHKL$ sokszegek hasonló háromszegekre és egyenlő számuakra osztvák.

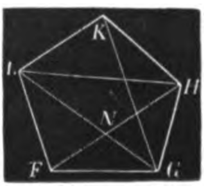
Még azt mondom, hogy azonegy nevüekre is az egészekkel, azaz: úgy hogy a háromszegek egyarányuak, még pedig ABE EBC ECD elötagok, és FGL LGH LHK az utótagjaik; és hogy $ABCDE$ sokszeg $FGHKL$ sokszeghez kétszeres arányban van, mint az azonnevü oldal az azonnevü oldalhoz, azaz: AB FG-hez.

Mert vonassanak AC FH.



És minthogy a sokszegek hasonlóságánál fogva az ABC alatti szeglet egyenlő az FGH alattival, s a mint AB BC-hez, úgy van FG GH-hoz: ABC háromszeg egyenlő szegletü FGH háromszeggel; tehát a BAC alatti szeglet egyenlő a GFH alattival; a BCA alatti pedig a GHF alattival. És mivel a BAM alatti szeglet egyenlő a GFN alattival, az ABM alatti pedig megmutattaték, hogy egyenlő az FGN alattival; tehát a harmadik AMB alatti is egyenlő a maradék FNG alattival. ABM háromszeg tehát FGN háromszeggel egyenlőszegletü. Hasonlólag mutatjuk meg azt is, hogy BMC háromszeg hasonló GNH háromszeghez; egyarányban tehát a mint AM MB-hez, úgy van FN NG-hez, s a mint BM MC-hez, úgy

GN NH-hoz, úgy hogy egyközösön is a mint *AM MC*-hez, úgy van *FN NH*-hoz. De a mint *AM MC*-hez, úgy van *ABM* háromszeg *MBC*-hez, s *AME EMC*-hez, mert úgy vannak egymáshoz mint a talpaik; s tehát a mint egyik elötag egyik utótaghoz, úgy minden elötag minden utótaghoz; tehát a mint *ABM* háromszeg *BMC*-hez, úgy *ABE CBE* hez. De a mint *AMB BMC*-hez, úgy van *AM MC*-hez; és tehát a mint *AM MC*-hez úgy *ABE* háromszeg *EBC* háromszeghez. Ugyanazért a mint *FN NH*-hoz, úgy *FGL* háromszeg *GLH* háromszeghez. Már pedig a mint *AM MC*-hez, úgy van *FN NH*-hoz; tehát a mint *ABE* háromszeg *BEC* háromszeghez, úgy *FGL* háromszeg *GHL* háromszeghez, és cserélve a mint *ABE* háromszeg *FGL* háromszeghez, úgy *BEC* háromszeg *GLH* háromszeghez. Hasonlóképp mutatjuk meg, *BD GK* egyeneket vonva, hogy a mint *BEC* háromszeg *GLH* háromszeghez, úgy van *ECD* háromszeg *LHK* háromszeghez. És minthogy a mint *ABE* háromszeg *FGL* háromszeghez, úgy van *EBC LGH*-hoz, s megint *ECD LHK*-hoz; s tehát a mint egyik elötag egyik utótaghoz, úgy vannak minden elötagok minden utótagokhoz; tehát a mint *ABE* háromszeg *FGL* háromszeghez, úgy van *ABCDE* sokszeg *FGHKL* sokszeghez. De *ABE* háromszeg *FGL* háromszeghez kétszeres arányban van, mint *AB* azonnevü oldal *FG* azonnevü oldalhoz; mert a hasonló háromszegek kétszeres arányban vannak, mint az azonnevü oldalaik; *ABCDE* sokszeg is tehát kétszeres arányban van *FGHKL* sokszeghez, mint *AB* azonnevü oldal *FG* azonnevü oldalhoz.



A hasonló sat.

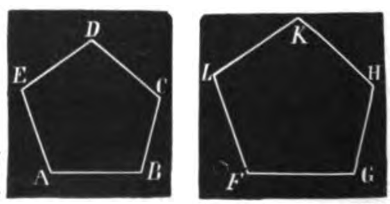
Más bizonyítmány: Még másképp, rövidebben, így bizonyitjuk meg a háromszegek azonnevüségét:

Vétessenek megint *ABCDE FGHKL* sokszegek, és vonassanak *BE EC GL LH*: azt mondom, hogy a mint *ABE* háromszeg *FGL* háromszeghez, úgy van *EBC LGH*-hoz, és *CDE HKL*-hez.

Mert mivel *ABE* háromszeg *FGL* háromszeghez hasonló, *ABE* háromszeg kétszeres arányban van *FGL* háromszeghez, mint *BE GL*-hez. Ugyanazért *BEC* háromszeg is kétszeres arányban van *GLH*-hoz, mint *BE GL*-hez; tehát a mint *ABE* háromszeg *FGL* háromszeghez, úgy van *BEC GLH*-hoz. Ismét mivel *EBC* háromszeg *LGH* háromszeghez hasonló, tehát *EBC LGH*-hoz kétszeres arányban van, mint *CE* egyen *HL*-hez. Ugyanazért *ECD* háromszeg is *LHK* háromszeghez kétszeres arányban van, mint *CE HL*-hez; tehát a mint *EBC* háromszeg *LGH*-hoz, úgy van *ECD LHK*-hoz. De megmutattaték, hogy a mint *EBC LGH*-hoz, úgy *ABE FGL*-hez; tehát a mint *ABE FGL*-hez, úgy *BEC GHL*-hez, és *ECD LHK*-hoz: m. b. k.

1. *Tanuság*: Így mutattatik meg a hasonló négyoldaluakról is, hogy kétszeres arányban vannak, mint az azonnevü oldalaik. Meg van mutatva pedig a háromszegekről is; úgy hogy átaljában a hasonló egyenesvonalu képletek kétszeres arányban vannak egymáshoz, mint az azonnevü oldalaik.

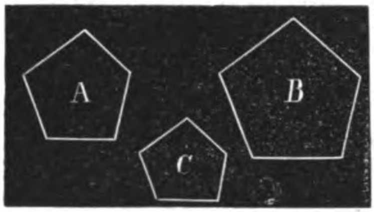
2. *Tanuság*: És ha *AB FG* egyenekhez *O* harmadik egyarányut veszszük: *AB O*-hoz kétszeres arányu, mint *AB FG*-hez. De a



sokszeg is a sokszeghez s a négyoldalu a négyoldaluhoz kétszeres arányu mint az azonnevü oldal az azonnevü oldalhoz, azaz: *AB FG*-hez, és ez a háromszegekről is meg van mutatva: úgy hogy átaljában világos, hogy ha három egyen egyarányu, a mint az első a harmadikhoz, úgy van az elsőre írt kép a másodikra hasonlólag írt és hasonló képhez.

21. Feladat:

Azonegy egyenesvonaluhoz hasonlók egymáshoz is hasonlók.



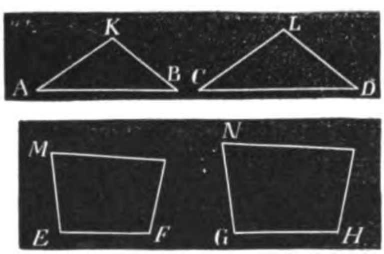
Mert legyen A B egyenesvonaluk mindenike C-hez hasonló: azt mondom, hogy A B-hez is hasonló.

Mert minthogy A hasonló C-hez, egyenlőszegletü vele; s az egyenlő szegletek körüli oldalaik egyarányuak. Ismét mivel B hasonló C-hez, tehát egyenlőszegletü vele, s az egyenlő szegletek körüli oldalaik egyarányuak. A-nak és B-nek mindenike tehát egyenlőszegletü C-vel s az egyenlőszegletek körüli oldalaik egyarányuak, úgyhogy A is B-vel egyenlőszegletü, és az egyenlőszegletek körüli oldalaik egyarányuak; A tehát B-hez hasonló.

Azonegy sat.

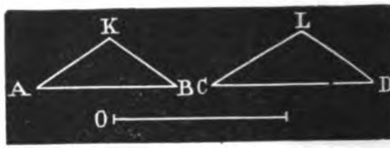
22. Feladat:

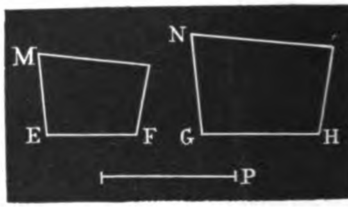
Ha négy egyen egyarányu: a reájok írott hasonló és hasonlóan alkotott egyenesvonalu képletek is egyarányuak; és ha a reájok írt hasonlóan alkotott egyenesvonaluak egyarányuak: magok az egyenek is egyarányuak.



Legyenek AB CD EF GH négy egyarányu egyenek, mint AB CD hez, úgy EF GH-hoz; és írassanak AB-re CD-re KAB és LCD hasonló és hasonlóan alkotott egyenesvonaluak; EF-re GH-ra pedig MF NH hasonló és hasonlóan alkotott egyenesvonaluak: azt mondom, hogy a mint KAB LCD-hez, úgy van MF NH-hoz.

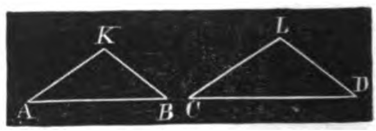
Mert vétessék AB CD-hez harmadik egyarányu O, EF

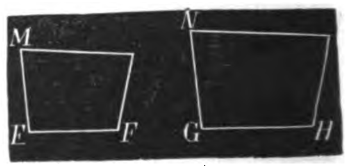




GH-hoz megint harmadik egyarányu P. És minthogy a mint AB CD-hez, úgy EF GH-hoz, s a mint CD O-hoz, úgy GH P-hez; egyközösön tehát a mint AB O-hoz, úgy EF P-hez. De a mint AB O-hoz, úgy KAB LCD-hez, és a mint EF P-hez, úgy MF NH-hoz; tehát a mint KAB LCD-hez, úgy van MF NH-hoz.

De legyen a mint KAB LCD-hez úgy MF NH-hoz: azt mondom, hogy a mint AB CD-hez, úgy van EF GH-hoz.





Mert a mint AB CD-hez, úgy legyen EF QR-hez, és írassék QR-re akár MF-hez, akár NH-hoz hasonló és hasonlóan fekvő SR egyenesvonalu képlet.

Minthogy a mint AB CD-hez, úgy EF QR-hez, és AB CD-re hasonló és hasonlóan fekvő KAB LCD egyenesvonaluak, EF QR-re megint hasonló és hasonlóan fekvő MF SR egyenesvonaluak irvák; tehát a mint KAB LCD-hez, úgy van MF SR-hez. De a feltét szerint a mint KAB LCD-hez, úgy van MF NH-hoz; tehát a mint MF SR-hez, úgy MF NH-hoz; MF tehát mind NH-hoz mind SR-hez azonegy arányban van; NH tehát SR-rel egyenlö. De hasonló is hozzá és hasonlóan fekvő; tehát GH egyenlö QR-rel. És mivel a mint AB CD-hez, úgy EF QR-hez; QR pedig egyenlö GH-val; tehát a mint AB CD-hez, úgy van EF GH-hoz.

Ha tehát sat.

Felvétel. (Pótlás.)

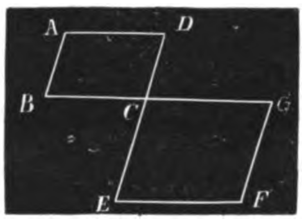
(Hogy pedig, ha az egyenesvonaluak egyenlők és hasonlók, az oldalaik egyenlők egymással, így mutatjuk meg:

Legyenek NH SR egyenlő egyenesvonaluak, s a mint HG GN-hez, úgy legyen QR QS-hez: azt mondom, RQ egyenlő HG-vel.

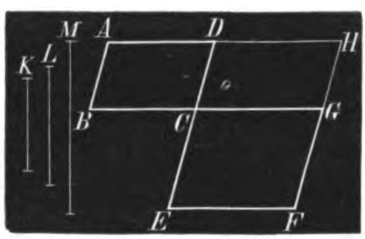
Mert ha nem egyenlők, egyik közülök nagyobb. Legyen QR HG-nél nagyobb. Már minthogy a mint RQ QS-hez, úgy van GH GN-hez; cserélve is a mint QR GH-hoz, úgy QS GN-hez. QR nagyobb HG-nél, tehát QS is nagyobb GN-nél, úgy hogy RS is nagyobb HN-nél; de egyenlő is; mi lehetetlen. Nem nemegyenlő tehát QR GH-val; tehát egyenlő : m. b. k.)

23. Feladat:

Egyenlőszegletü egyközények az oldalaikéiből szerkesztett arányban vannak.



Legyenek AC CF egyenlőszegletü egyközények, melyekben a BCD alatti szeglet legyen egyenlő az ECG alatti alatti szeglettel: azt mondom, hogy AC egyközény CF egyközényhez az oldalaikéból szerkesztett arányban van, azaz: abból, a melyben van BC CG-hez, és abból a melyben van DC CE-hez.



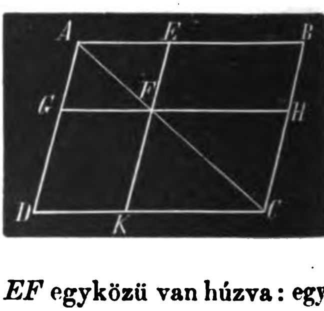
Mert helyzessenek úgy, hogy BC egyenesben legyen CG vel; tehát egyenesben van DC is CE-vel; és egészíttessék ki DG egyközény: azután vétessék valamely K egyen, s a mint BC van CG-hez, úgy legyen K L-hez, s a mint a mint DC CE-hez úgy legyen L M-hez.

Tehát K L-hez és L M-hez ugyanazon arányban vannak, melyben az oldalak ú. m. BC CG-hez és DC CE-hez. De a K-nak M-hez való aránya, a K-nak L-hez s az L-nek M-hez való arányaiból van szerkesztve, úgyhogy K M-hez az oldalaikéiből szerkesztett arányban van. És mivel a mint BC CG-hez úgy van *AC* egyközény *CH*-hoz; de a mint *BC CG*-hez, úgy van *K L*-hez; tehát a mint *K L*-hez, úgy van *AC CH*-hoz. Ismét, minthogy a mint *DC CE*-hez, úgy *CH* egyközény *CF*-hez; de a mint *DC CE*-hez, úgy *L M*-hez; a mint tehát *L M*-hez, úgy van *CH* egyközény *CF*-hez. Minthogy már megmutattaték, hogy a mint *K L*-hez, úgy *AC* egyközény *CH* egyközényhez, s a mint *L M*-hez, úgy *CH* egyközény *CF* egyközényhez; tehát egyközösön a mint *K M*-hez, úgy *AC* egyközény *CF* egyközényhez. Már pedig *K M*-hez az oldalakéiból szerkesztett arányban van; *AC* is tehát *CF*-hez az oldalaikéiból szerkesztett arányban van.

Egyenlőszeglettü sat.

24. Feladat:

Minden egyközényben az átmérő körüli egyközények egymáshoz, és az egészhez hasonlók.



Legyen *ABCD* egyközény, és annak átmérője *AC*, *AC* körül pedig legyenek *EG HK* egyközények: azt mondom, *EG HK* egyközények mindenike az egész *ABCD*-hez és egymáshoz hasonlók.

Mert minthogy *ABC* háromszegnek egyik *BC* oldalához *EF* egyközü van húzva: egyarányban a mint *BE EA*-hoz, úgy van *CF FA*-hoz. Ismét minthogy *ACD* háromszegnek egyik *CD* oldalához van húzva *FG* egyközü: egyarányban a mint *CF FA*-haz, úgy *DG GA*-hoz. De megmutattaték, hogy a mint *CF FA*-hoz, úgy van *BE* is *EA*-hoz; tehát a mint *BE EA*-hoz, úgy van *DG GA*-hoz, és öszvetéve a mint *BA AE*-hez, úgy *DA AG*-hez, és cserélve a mint *BA AD*-hez, úgy van *EA AG*-hez; *ABCD* és *EG* egyközényeknek tehát a *BAD* alatti közös szeglet körüli oldalai egyarányuak. És minthogy *GF DC*-hez egyközü: az *AGF* alatti szeglet egyenlő az *ADC* alattival, és a *GFA* alatti a *DCA* alattival, a *DAC* alatti szeglet pedig *ADC AGF* két háromszegnek közös szeglete;

ADC háromszeg *AGF* háromszeggel tehát egyenlőszegletü. Ugyanazért *ACB* háromszeg is egyenlőszegletü *AFE* háromszeggel, és az egész *ABCD* egyközény *EG* egyközénynyel egyenlőszegletü. Egyarányulag tehát a mint *AD DC*-hez, úgy *AG GF*-hez; a mint *DC CA*-hoz, úgy *GF FA*-hoz; a mint *AC CB*-hez, úgy *AF FE* hez; s meg a mint *CB BA*-hoz, úgy van *FE EA*-hoz. És mivel megmutattaték, hogy a mint *DC CA*-hoz, úgy van *GF FA*-hoz, s a mint *AC CB*-hez, úgy *AF FE*-hez; tehát egyközösen a mint *DC BC*-hez, úgy van *GF FE*-hez; *ABCD* és *EG* egyközényeknek tehát egyenlőszegletek körüli oldalai egyarányuak; *ABCD* egyközény tehát *EG* egyközényhez hasonló. Ugyanazért *ABCD* egyközény *HK* egyközényhez is hasonló; tehát *EG HK* egyközények mindenike hesonló *ABCD* egyközényhez. Már pedig ugyanazon egyenesvonaluhoz hasonlók egymáshoz is hasonlók : *EG* egyközény tehát hasonló *HK* egyközényhez.

Minden egyközényben tehát sat.

Jegyz. Ezen szükség felett hoszadalmas és hihetőkép megrontott bizonyítmány helyett Simson Robert a következőt teszi:

Minthogy *DC GF*-hez egyenközü; tehát az *ADC* alatti szeglet egyenlő az *AGF* alattival, és mivel *BC EF*-hez egyenközü, az *ABC* alatti szeglet egyenlő az *AEF* alattival. Ismét mivel az egyközények átelleni szegleteik egyenlők, a *BCD EFG* alatti szegletek egyenlők a *GAE* alattival, miszerint *ABCD AEFG* egyközények egyenlő szegletüek.

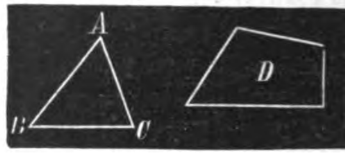
De még azt mondom, hogy oldalaik egyarányuak.

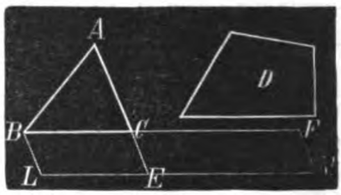
Mert mivel *ABC AEF* háromszegek egyenlőszegletüek, tehát a mint *AB BC*-hez, úgy van *AE EF*-hez. De az egyközények átelleni oldalaik egyenlők; tehát a mint *AB AD*-hez, úgy van *AE AG*-hez; s a mint *DC CB*-hez, úgy *GF FE*-hez, és még a mint *CD DA*-hoz úgy *FG GA*-hoz. Tehát *ABCD AEFG* egyközények egyenlő szegletek körüli oldalaik egyarányuak; és annál fogva *ABCD* egyközény *AEFG* egyközényhez hasonló. Ugyanazért *FHCK* egyközényhez is hasonló *ABCD*. Mind *GE* mind *KH* tehát hasonló *DB*-hez. De azon egyhez hasonlók, egymáshoz is hasonlók; *GE* egyközény tehát hasonló *KH*-hoz.

25. Feladat:

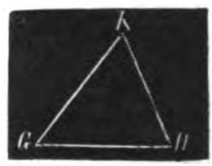
Adott egyenesvonalu képlethez hasonló és egy más adottal egyenlő egyenesvonalut alkotni.

Legyen az adott egyenesvonalu képlet, melyhez hasonlót kell alkotni, *ABC*, a melylyel pedig egyenlőt, *D*: alkotni kell *ABC*-hez hasonló és *D*-vel egyenlő képletet.





Irassék *BC*-re *ABC* háromszeggel egyenlő *BE* egyközény, *CE*-re pedig a *CBL* alatti szeglettel egyenlő *FCE* alatti szegletben, *D*-vel egyenlő *CM* egyközény; e szerint *BC CF*-fel és *LE EM*-mel egyenesben vannak. Vétessék *BC CF*-hez *GH* középegyarányu, és irassék *GH*ra *ABC*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *KGH* háromszeg.



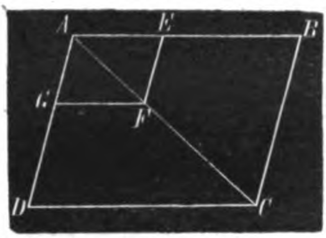
És minthogy a mint *BC GH*-hoz, úgy van *GH CF*-hez; ha pedig három egyen egyarányu, a mint az első a harmadikhoz, úgy van az elsőre írt kép a másodikra hasonlóan irt és hasonló képhez: tehát a mint *BC CF*-hez, úgy van *ABC* háromszeg *KGH* háromszeghez. De a mint *BC CF*-hez, úgy van *BE* egyközény is *EF* egyközényhez; tehát a mint *ABC* háromszeg *KGH* háromszeghez, úgy *BE* egyközény *EF* egyközényhez; (cserélve tehát a mint *ABC* háromszeg *BE* egyközényhez, úgy *KGH* háromszeg *EF* egyközényhez). Már pedig *ABC* háromszeg egyenlő *BE* egyközénynyel; tehát *KGH* háromszeg is egyenlő *EF* egyközénynyel. De *EF* egyközény *D*-vel egyenlő, *KGH* is tehát egyenlő *D*-vel. Hasonló is pedig *KGH ABC*-hez.

Tehát *ABC* egyenesvonalu képlethez hasonló és más adottal, *D*-vel, egyenlő *KGH* képlet van alkotva: m. t. k.

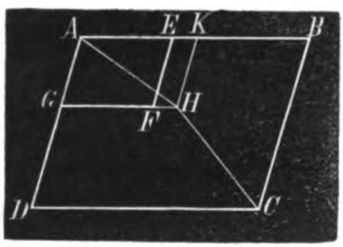
Jegyz. A bizonyítmányban rekeszbe tett czikk nagyon hihetőkép egy hivatlan igazító rosz pótléka. Mert, ha, a mint *ABC* háromszeg *KGH* háromszeghez, úgy van *BE* egyközény *EF* egyközényhez, és *ABC* háromszeg *BE* egyközénynyel egyenlő; abból igenis következik, hogy tehát *KGH* háromszeg is egyenlő *EF* egyközénynyel, az 5. k. 14 feladata szerint. Nem volt hát miért cserélés által mutatni meg; mert azt a tételt, hogy az egyarányuakban ha a második az elsővel egyenlő, a negyedik is egyenlő leend a harmadikkal, az egyarányuak értelmezéséből ugyan megbizonyíthatni, de az elemek textusában, úgy a mint az kezünkre jött, sehol említve nincs.

26. Feladat:

Ha az egyközényből az egészhez hasonló és hasonlóan fekvő egyközény, melynek egyik szeglete amazzal közös, vétetik el: ez az egészzel azonegy átmérő körül leend.



Mert *ABCD* egyközényből vétessék el *ABCD*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *AEFG* egyközény, melynek *DAB* alatti egyik szeglete amazzal közös legyen: azt mondom, hogy *ABCD AEFG*-vel azonegy átmérő körül van.

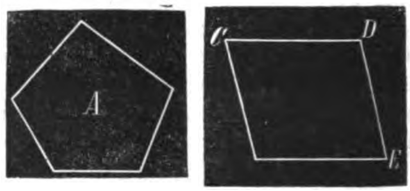


Mert ha nem, legyen amannak átmérője, ha lehet, *AHC* és megnyujtatván *GF*, vonassék *H*-ig, és *H*-n által akár *AD*-hez akár *BC*-hez egyközüleg húzassék *HK*.

Már minthogy *ABCD* *KG*-vel azonegy átmérő körül van; tehát *ABCD* *KG*-hez hasonló; tehát a mint *DA AB*-hez, úgy van *GA AK*-hoz. De az *ABCD* és *EG* hasonlóságoknál fogva a mint *DA AB*-hez, úgy van *GA AE*-hez; tehát a mint *GA AK*-hoz, úgy *GA AE*-hez; *GA* tehát *AK AE* egyenek mindenikéhez egyarányu; *AE* tehát *AK*-val, kisebb a nagyobbal, egyenlő; mi lehetetlen; nem képes tehát, hogy ne legyen *ABCD EG*-vel azonegy átmérő körül, tehát *ABCD* egyközény *AEFG* egyközénynyel azonegy átmérő körül van.

Ha tehát sat.

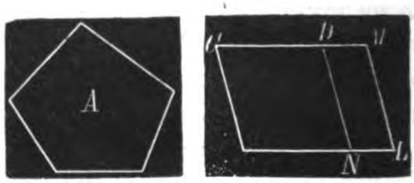
Jegyz. A következők megértésére tegye előre jól magáévá a tanúló a következő kifejezéseket:



a.) *Egyközényt egyenhez szabni*, mondatunk, midőn adott nagyságú képletet oly vele egyenlő egyközénynyé alakítunk át, melynek egyik oldala adott határzott egyenesvonal legyen. P. o. *A* ötszeg *CD* egyenhez van szabva, ha *CE* képlet egyközény, és *A*-val egyenlő.

b.) *Egyközényt egyenhez, egyközény hijjával, szabnánk*, ha a p. o. *B*-vel egyenlő *CE* egyközényt úgy alkotnók, hogy a *CD*-n fekvő *CF* oldala a *CD*-nél rövidebb legyen, úgy mint az ide mellékelt *CFGH* képletben. Egyközény-kép hijával mondatik *szabott*-nak; mert ha *CD* egyközényét kiegészítnök, *CK* egyközény *B* képletnél *FK*-val nagyobb, és *CK* csak *FK* hijával lenne egyenlő *B*-hez.

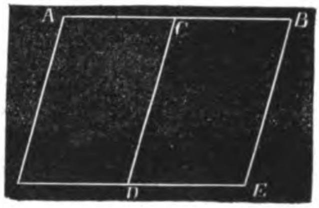
Ezen egyszerü és könnyü feladatot azzal teszik határozottabbá, hogy a pótlék *FK*-t bizonyos adott egyközényhez hasonlónak és hasonlóan fekvőnek kivánják.



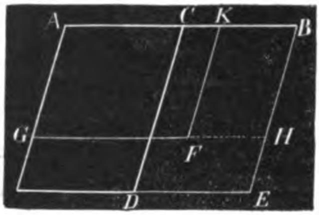
c.) *Egyközényt egyenhez úgy szabni, hogy az egyenen túl nyuljék*, az előbbinek ellentétele. Ha t. i. *A* képlettel egyenlö *CL*-et alkotnak, melynek az adott *CD*-re fekvö *CM* oldala *CD*nél hoszabb legyen; látnivaló, hogy a *CD*-re irott *CN* egyközényen s magán a *CD* végpontján is túl-ér. — Ezzel is rendszerint azt a felételt kötik öszve, hogy *DL* bizonyos egyközényhez hasonló, és hasonlóan fekvő legyen.

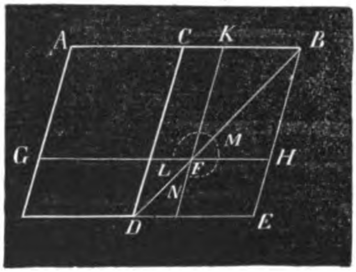
27. Feladat:

Minden az egyen felére írt egyközényhez hasonló és hasonlóan fekvő egyközvonalu kép hijával azon egyenhez szabott egyközények közt legnagyobb a hasonfélhez és hijányához hasonló egyközény.



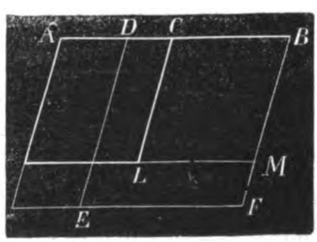
Legyen *AB* egyen, mely vágassék kettè *C*-nél, és szabassék *AB* egyenhez, az *AB* felére azaz *CB*-re írthoz hasonló és hasonlóan fekvő *CE* egyközvonalu kép hijával *AD* egyközény: azt mondom, hogy mindazon egyközények között, melyek *CE*-hez hasonló és hasonlóan fekvő egyközvonalu képek hijával szabottak *AB*-hez, *AD* a legnagyobb. Ugyanis szabassék *AB* egyenhez *AF* egyközény, *CE*-hez hasonló és hasonlóan fekvő *KH* egyközény hijával: azt mondom, hogy *AD* *AF*-nél nagyobb.





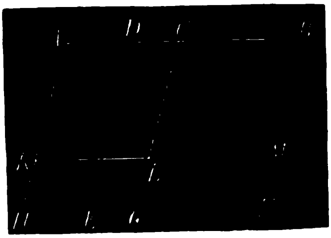
Mert minthogy *CE* egyközény *KH* egyközényhez hasonló, azonegy átmérő körül vannak. Húzassék *DB* átmérőjök, s készítessék el a képlet.

Már mivel *CF* egyenlő *FE*-vel, adassék hozájok a közös *KH*, tehát az egész *CH* egyenlő az egész *KE*-vel. De *CH* *CG*-vel is egyenlő, minthogy *AC* egyenlő *CB*-vel; tehát; *GC* is egyenlő *EK*-val. Adassék hozájok a közös *CF*; tehát *AF* *LMN* gnomonnal egyenlő; miszerint *CE* egyközény azaz *AD*, *AF* egyközénynél nagyobb.



Legyen ismét *AB* *C*-nél kettè vágva, s *AL* egyközény *CM* hijával hozzá szabva, és szabassék ismét *AB*-hez *AE* egyközény az *AB* felére írthoz *CM*-hez hasonló *DF* hijával: azt mondom, hogy a hasonfélhez szabott *AL* *AE*-nél nagyobb.

Mert minthogy *DF* *CM*-hez hasonló, azonegy átmérő körül vannak. Legyen az átmérőjök EB, s készíttessék el a képlet.



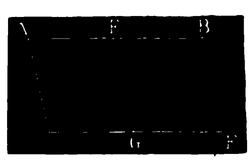
És minthogy LF egyenlő LH-val, minthogy FG is egyenlő GH-val; tehát LF KE-nél nagyobb. De LF egyenlő DL-lel; DL is tehát EK-nál nagyobb. Adassék hozzájok a közös KD; tehát az egész AL az egész AE-nél nagyobb

Tehát minden sat.

28. Feladat:

Adott egyenhez adott egyenesvonaluval egyenlő egyközényt szabni, egy más adotthoz hasonló egyközvonalu kép hijával; de az adott egyenesvonalunak, melyhez egyenlőt kell szabni, nem szabad nagyobbnak lenni a hasonfélre írottnál; hasonlók levén a hiányhoz mind a hasonfélre írott, mind az, a melyhez hasonlót kell kihagyni.

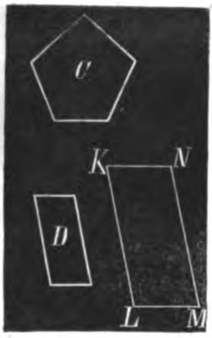
Legyen az adott egyen AB, az adott egyenesvonalu képlet, melyhez egyenlőt kell AB-hez szabni, de a mely az AC felére a hiányhoz hasonlóan szabottnál nem nagyobb, C; az pedig, a melyhez hasonlót kell kihagyni, legyen D: az adott AB egyenhez az adott C egyenesvonaluval egyenlő egyközényt, a D-hez hasonló egyközvonalu kép hijával kell szabni.

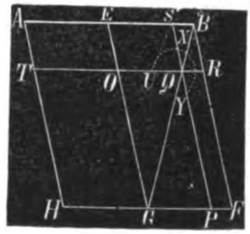


Vágassék ketté AB E pontnál, írassék EB-re D-hez hasonló, és hasonlóan fekvő $EBFG$, s egészíttessék ki AG egyközény.

Ha már AG egyenlő C-vel, azonnal meg van a kivánt mivelet; mert az adott AB egyenhez az adott C egyenesvonaluval egyenlő AG egy-közény a D-hez hasonló EF egyközvonalu kép hiával van szabva.

Ha pedig nem: *HE* *C*-nél nagyobb. De *HE* *GB*-vel egyenlő; tehát *GB* *C*-nél nagyobb. A mekkorával *GB* nagyobb *C*-nél, állítassék azzal a felülékkel egyenlő, *D*-hez pedig hasonló és hasonlóan fekvő *KLMN* egyközény.





Úgy de *D* hasonló *GB*-hez, *KM* is tehát hasonló *GB*-hez. Legyenek *KL* *GE*-vel, *LM* *GF*-fel azonnevüek. És minthogy *GB* *C*-vel meg *KM*-mel egyenlő; tehát *GB* *KM*-nél nagyobb, *GE* is tehát *KL*-nél s *GF* *LM*-nél nagyobbak. Tétessenek *KL*-lel *GO*, *LM*-mel pedig *GP* egyenlőkké, és egészítessék ki *OGPQ* egyközény; *GQ* tehát *KM*-mel egyenlő és hozzá hasonló. De *KM* hasonló *GB*-hez; *GQ* is tehát hasonló *GB*-hez; tehát *GQ* *GB*-vel azonegy átmérő körül van. Legyen az átmérőjök *GQB*, s készítessék el a képlet.

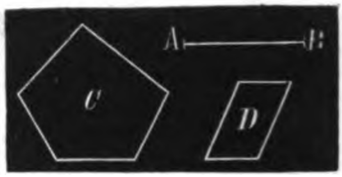
Minthogy *BG* *C*-vel meg *KM*-mel egyenlő, melyekből *GQ* *KM*-mel egyenlő; tehát a maradék *UXY* gnomon egyenlő *C*-vel. És mivel *PR* egyenlő *OS*-sel, adassék hozzájok a közös *QB*; tehát az egész *BP* az egész *OB*-vel egyenlő. De *OB* egyenlő *TE*-vel, minthogy *AE* oldal is egyenlő *EB* oldallal; tehát *TE* *BP*-vel egyenlő. Adassék hozzájok a közös *OS*, tehát az egész *TS* egyenlő *UXY* gnomonnal. De megmutattaték hogy *UXY* gnomon *C*-vel egyenlő; *ST* is tehát *C*-vel egyenlő.

Adott *AB* egyenhez tehát *C* egyenesvonaluval egyenlő *ST* egyközény van *D*-hez hasonló *QB* egyközény hiával szabva, (minthogy *QB* *GQ*-hoz hasonló): m. t. k.

29. Feladat:

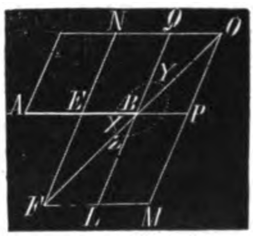
Adott egyen mellé adott egyenesvonalu képlettel egyenlő, egy más adott egyközvonalu képlethez pedig hasonlóval túlnyúló, egyközényt szabni.

Legyen az adott egyen AB, s az adott egyenesvonalu képlet, melylyel egyenlőt kell AB-hez szabni, C; a melyhez hasonlóval pedig túlnyuljék, D: AB egyenhez C egyenesvonaluval



egyenlő, D-hez pedig hasonló egyközvonalu képpel túlnyúló egyközényt kell szabni.

Vágassék AB ketté E-nél, és írassék EB-re D-hez hasonló s hasonlóan fekvő BF egyközény, és alkottassék BF-fel meg C-vel öszvesen egyenlő, D-hez pedig hasonló s hasonlóan fekvő GH egyközény. GH tehát EL-hez hasonló. Legyenek KH FL-lel és KG FE-vel azonnevüek. És minthogy GH nagyobb FB-nél, KH is nagyobb FL-nél, és KG FE-nél. Nyujtassanak ki FL FE, és tétessenek KH-val FLM, KG-vel megint FEN egyenlőkké, és egészíttessék ki MN; MN tehát GH-val egyenlő és hozzá hasonló. De GH EL-hez hasonló; MN is tehát hasonló EL-hez; tehát EL MN-nel azonegy átmérő körül vannak. Húzassék FO átmérőjök, és készíttessék el a képlet.

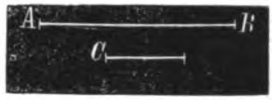


Már minthogy GH EL-lel meg C-vel öszvesen egyenlő, de GH MN-nel is egyenlő: tehát MN egyenlő EL-lel meg C-vel. Vétessék el a közös EL; tehát a maradék XYZ gnomon egyenlő C-vel. És mivel AE egyenlő EB-vel, AN is egyenlő NB-vel, azaz LP-vel. Adassék hozzájok a közös EO; tehát az egész AO egyenlő XYZ gnomonnal. De XYZ gnomon C-vel egyenlő; tehát AO is egyenlő C-vel.

Adott AB egyenhez tehát adott C egyenesvonalu képlettel egyenlő, és D-hez (mivel EL is hasonló QP-hez) hasonló QP egyközvonalu képpel túlnyúló AO egyközény van szabva: m. t. k.

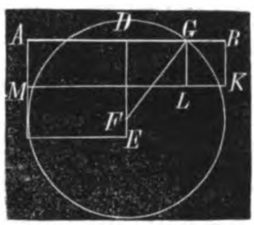
Jegyz. A 28-ik és 29-ik feladatot a hajdani mértanárok gyakran használák sok oly kérdés megfejtésére, melyekkel ma, a betűnyelv (algebra) segédével, sokkal könnyebben bírunk. Azért Euklides némely fordítói e két feladatot el is hagyták. De mi, mivel a 10-ik könyvben reájok szükségünk leend, még egy-két ide tartozó pótlékkel szaporítni kivánjuk.

1. *Adott határozott egyenhez, adott négyszeggel egyenlő derékszeget, négyszegkép hijával, szabni.*



Legyen az adott határozott egyen *AB*, az adott négyszeg a *C*-é. *AB* egyenhez a *C* négyszegével egyenlő derékszeget kell, négyszegkép hijával szabni.

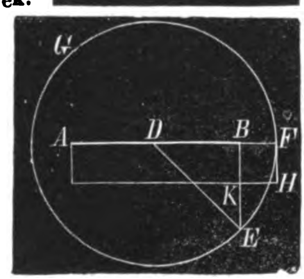
Vágassék *AB* ketté *D*-nél, és irassék *AD*-re *AE* négyszeg. Ha már *AE* a *C* négyszegével egyenlő, meg van a kivánt mivelet. De ha *AE* nagyobb leend, (a 6-ik könyv 25-ik feladata szerint), úgy hogy *DE* is nagyobb mint *C*, akkor vágassék el *DE* ből *C*-vel egyenlő *DF*, irassék *F* középponttal és *AD* közzel egy kör, mely *BD*-t vágja *G*-nél, irassék *GB*-re *GBKL* négyszeg, egészítessék ki *GLMA* derékszeg, és vonassék *FG*.



Mivel *AB* egyen *D*-nél két egyenlő, *G*-nél két nem-egyenlő részre vágatott: az *AG GB* közti derékszeg a *DG* négyszegével együtt egyenlő az *AD* négyszegével. De *AD FG*-vel egyenlő; tehát az *AG GB* közti derékszeg is a *DG* négyszegével együtt egyenlő az *FG* négyszegével. Ismét mivel *DFG* háromszeg derékszegletü, az *FG* négyszege az *FD DG* négyszegeikkel öszvesen egyenlő; úgy hogy az *AG GB* közti derékszeg is a *DG* négyszegével együtt, egyenlő az *FD DG* négyszegeik öszvegével. Vétessék el a *DG* közös négyszege, tehát az *AG GB* közti derékszeg az *FD*, azaz *C* négyszegével egyenlő.

2. *Adott egyenhez, adott négyszeggel egyenlő derékszeget szabni, úgy hogy ez az egyenen négyszegképpel nyuljék túl.*

Legyen az adott egyen *AB*, az adott négyszeg a *C*-é; a *C* négyszegével egyenlő derékszeget kell *AB*-hez szabni, úgy hogy *AB*-n négyszegképpel túlnyuljék.



Vágassék *AB* ketté *D*-nél, állíttassék *AB*-hez a benne levő *B* pontnál derékszegletre *BE* egyen, és legyen *BE* *C*-vel egyenlő; *D* középpontal *DE* közzel irassék *EFG* kör, és nyujtassék *ABF*-ig. Irassék *BF*-re *BH* négyszeg és egészítessék ki *AK* derékszeg.

Mivel *AB* ketté vágatott *D*-nél s hozzá adatott egy más *BF* egyen:

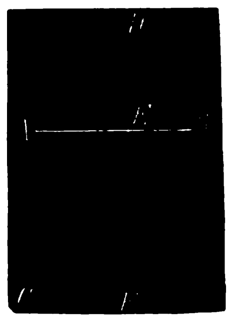
tehát az *AF FB* közti derékszeg a *BD* négyszegével együtt egyenlők a *DF* négyszegével. De *DF DE*-vel, *DE* négyszeg pedig a *DB BE* négyszegeikkel egyenlő; miszerint a *DF* négyszege is a *DB BE* négyszegeikkel egyenlő. Ennélfogva az *AF FB* közti derékszeg a *DB* négyszegével együtt egyenlő a *DB BE* négyszegeik öszvegével, s elvevén a *DB* közös négyszegét, az *AF FB* közti derékszeg, azaz *AH*, egyenlő a *BE* azaz *C* négyszegével.

Ha az előbbi két feladatban a *C* négyszege helyett, más akármely adott egyenesvonalu képletet veszünk fel, azt előbb (a 2-ik könyv 14-ik feladata szerint) négyszegképre kell venni, s úgy tovább folytatni a miveletet.

30. Feladat:

Adott határzott egyent szélső és középső arányban vágni.

Legyen az adott határzott egyen *AB*: *AB* egyent szélső és középső arányban kell elvágni.

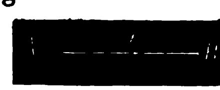


Irassék *AB*-re *BC* négyszeg, s szabassék *AC*-hez *BC*-vel egyenlő, és *BC*-hez hasonló *AD* képpel túlnyúló *CD* egyközény.

Mert *BC*, négyszeg; tehát *AD* is négyszeg. És mivel *BC* egyenlő *CD*-vel, vétessék el a közös *CE*, tehát a maradék *BF* egyenlő a maradék *AD*-vel.De egyenlőszegletü is vele : *BF*-nek és *AD*-nek tehát egyenlőszeglet körüli oldalai ellenarányuak; tehát a mint *FE ED*-hez, úgy van *AE EB*-hez Már pedig *FE AC*-vel azaz *AB*-vel, s *ED AE*-vel egyenlők; tehát a mint *AB AE*-hez, úgy *AE EB*-hez; *BA* pedig nagyobb *AE*-nél, tehát *AE* is nagyobb *EB*-nél.

AB egyen tehát szélső és középső arányban van vágva *E*-nél, s *AE* a nagyobbik darabja: m. t. k.

Más bizonyítmány: Legyen az adott egyen *AB*: *AB* egyent szélső és középső arányban kell vágni.



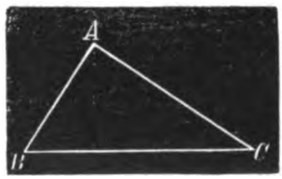
Vágassék *AB C*-nél úgy, hogy az *AB BC* közti derékszeg legyen egyenlő az *AC* négyszegével (2-ik k. 14 fel.).

Mert mivel az AB BC közti derékszeg az AC négyszegével egyenlő; tehát a mint AB AC-hez, úgy van AC BC-hez, AB tehát szélső és középső arányban van vágva C-nél; m. t. k.

31. Feladat:

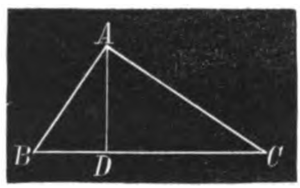
A derékszegletü háromszegekben a derékszegletet átfogó oldalra írott kép egyenlő a derékszeglet körüli oldalakra hasonlóan írt és hasonló képekkel.

Legyen ABC derékszegletü háromszeg, melynek a BAC alatti szeglete derék: azt mondom, hogy a BC-re írt kép egyenlő a BA AC-re írt hasonló és hasonlóan alkotott képekkel.



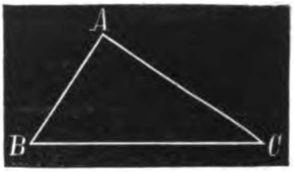
Mert húzassék AD függő.

Minthogy ABC derékszegletü háromszegben az A-nál való derékszegletből BC talpra van húzva AD függő, tehát a függő melletti ABD és ADC háromszegek az egész ABC-hez és egymáshoz hasonlók. És minthogy ABC ABD-hez hasonló, a mint CB BA-hoz, úgy van AB BD-hez. És mivel három egyen egyarányban van, a mint az első a harmadikhoz, úgy van az elsőre írt kép a másodikra hasonlólag írt hasonló képhez; tehát a mint CB BD-hez úgy van a CB-re írt kép a BA-ra hasonlóan írt hasonló képhez. Ugyanazért a mint BC CD-hez úgy van a BC-re írt kép a CA-ra írthoz: úgy hogy a mint BC BD-hez meg DC-hez, úgy van a BC-re írt kép a BA-ra meg AC-re hasonlóan írttakhoz és hasonlókhoz. De BC egyenlő BD meg DC-vel; egyenlő tehát a BC-re írt kép a BA-ra s AC-re hasonlóan írtakkal és hasonlókkal.



Jegyz. A következő varians lectiót csak úgy teszszük ide, mint a scholiastai ostobaság kitünő jelét, s világos tanúbizonyságát, micsoda szentségtelen kezeken forgott az Elemek textusa. Az olvasó a logikai bakokat könnyen át fogja látni kis gondolkodásra.

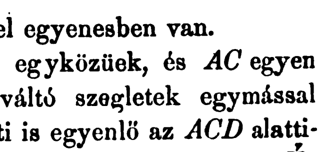
Más bizonyítmány:



Minthogy hasonló képletek kétszeres arányban vannak egymáshoz, mint az azonnevü oldalaik: tehát a BC-re írott kép is a BA-ra írott képhez kétszeres arányban van mint BC BA-hoz. De a BC négyszege is a BA négyszegéhez kétszeres arányban van, mint CB BA-hoz; tehát a mint a CB-re írott kép az AB-re írotthoz, úgy van a CB négyszege is az AB négyszegéhez. Ugyanazért a mint a BC-re írott kép a CA-ra írott képhez, úgy van a BC négyszege is a CA négyszegéhez; úgy hogy a mint a BC-re írott kép a BA AC-re írott képekhez, úgy van a BC négyszege a BA AC négyszegeikhez. De a BC négyszege a BA AC négyszegeikkel egyenlő, tehát a BC-re írott kép is egyenlő a BA AC-re hasonlóan írott és hasonló képekkel: m. b. k.

32. Feladat:

Ha két háromszegben két oldal két oldallal egyarányu, s egyik-egyik szegletöknél úgy helyzetnek egymáshoz, hogy az azonnevü oldalaik egyköziiek legyenek: azon háromszegek többi oldalai egyenesben leendenek.



Legyen ABC DCE két háromszeg, melyekben BA AC két oldal CD DE két oldallal egyarányu legyen: a mint AB AC-hez úgy DC DE-hez, s AB legyen egyközü DC-hez, AC pedig DE-hez: azt mondom, hogy BC CE-vel egyenesben van.

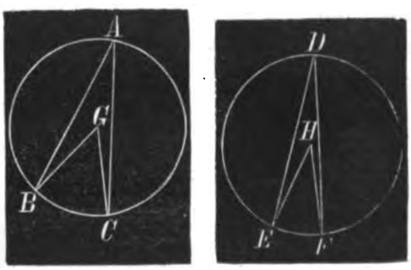
Mert minthogy AB DC-hez egyközüek, és AC egyen vágja őket, a BAC ACD alatti váltó szegletek egymással egyenlők. Ugyanazért a CDE alatti is egyenlő az ACD alattival: úgy hogy a BAC alatti is a CDE alattival egyenlő. És minthogy ABC DCE két háromszegben az egyik A-nál való szeglet egyenlő az egyik D-nél való szeglettel, s az egyenlő szegletek körüli oldalak egyarányuak, a mint *BA AC*-hez, úgy van *CD DE*-hez; tehát *ABC* háromszeg *DCE* háromszeggel egyenlőszegletü és az *ABC* alatti szeglet egyenlő a *DCE* alattival. De megmutattaték, hogy az *ACD* alatti is egyenlő a *BAC* alattival. Az egész *ACE* alatti tehát egyenlő az *ABC BAC* alatti két szeglettel. Adassék hozzájok a közös *ACB* alatti; tehát az *ACE ACB* alattiak egyenlők a *BAC ABC ACB* alattiakkal. De a *BAC ABC ACB* alattiak két derékkel egyenlők, tehát az *ACE ACB* alattiak is két derékkel egyenlők. *AC* egyenből tehát és a benne levő *C* pontból nem egyfelé kiinduló *BC CE* két egyen az *ACE ACB* alatti szegleteket két derékkel egyenlővé teszi; *BC* tehát *CE*-vel egyenesben van.

Ha tehát sat.

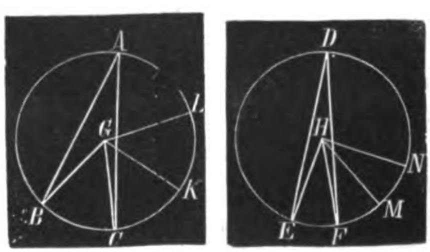
33. Feladat:

Az egyenlő körökben a szegletek azon arányban vannak a melyben a kerületek, akár középpontiak akár kerületiek legyenek; (megint a középpontnál való czikkek is).

Legyenek *ABC DEF* egyenlő körök, és ezeknek *G H* középpontainál legyenek a *BGC EHF* alatti szegletek, kerületeiknél pedig a *BAC EDF* alattiak: azt mondom, hogy a mint *BC* kerület *EF* kerülethez, úgy van a *BGC* alatti szeglet az *EHF* alattihoz, s a *BAC* alatti is az *EDF* alattihoz; (megint *GBC* is *HEF* czikkhez).



Mert vétessenek sorban *BC* kerülettel egyenlő akárhány *CK KL* darabok és *EF*-fel egyenlő akárhány *FM MN* darabok, és vonasnak *GK GL HM HN*.



Minthogy *BC CK*

KL kerületek egymással egyenlők, a *BGC CGK KGL* alatti szegletek is egyenlők egymással; a hányszorzata tehát *BL* kerület *BC*-nek, annyiszorzata a *BGL* alatti szeglet is a *BGC* alattinak. Ugyanazért a hányszorzata *EN* kerület *EF*-nek, annyiszorzata az *EHN* alatti szeglet is az *EHF* alattiak. De ha *BL* kerület egyenlö *EN* kerülettel, a *BGL* alatti szeglet is egyenlő az *EHN* alattival: ha *BL* kerület *EN* kerületnél nagyobb, a *BGL* alatti szeglet is nagyobb az *EHN* alattinál; és ha kisebb, kisebb. E szerint levén négy mekkoraság ú. m. *BC EF* két kerület és a *BGC* és *EHF* alatti két szeglet: vétettek *BC* kerületnek és a *BGC* alatti szegletnek *BL* kerület és a *BGL* alatti szeglet egyenlő szorzataik: *FE* kerületnek és az *EHF* alatti szegletnek *EN* kerület és az *EHN* alatti szeglet egyenlö szorzataik: és megmutattatott, hogy ha *BL* kerület *EN* kerületnél nagyobb, a *BGL* alatti szeglet is nagyobb, az *EHN* alattinál: ha egyenlő, egyenlő: s ha kisebb, kisebb; tehát a mint *BC* kerület *EF* kerülethez, úgy van e *BGC* alatti szeglet az *EHF* alattihoz, és a *BAC* alatti is az *EDF* alattihoz; mert egyikök a másikuknak kettőzetei; tehát a mint *BC* kerület *EF* kerülethez, úgy van a *BGC* alatti szeglet az *EHF* alattihoz, s megint a *BAC* alatti az *EDF* alattihoz.

Az egyenlö körökben tehát sat. m. b. k.

(Azt mondom, hogy a mint *BC* kerület *E F* kerülethez, úgy van *GBC* czikk, *HEF* czikkhez.

Mert vonassanak *BC CK*, és *BC CK* kerületben *O P* pontok vétetvén, vonassanak *BO OC CP PK*.

És minthogy *BG GC* két egyen *CG GK* két egyennel egyenlö, és egyenlö szegleteket fognak be, s *BC* talp egyenlö *CK* talppal; tehát *BGC* háromszeg is egyenlö *GCK* háromszeggel. És mivel *BC* kerület egyenlö *CK* kerülettel, az egész körmaradék-kerülete is egyenlö az egész körmaradék kerületével; úgy hogy a *BOC* alatti szeglet is egyenlő a *CPK* alatti szeglettel; *BOC* szelet tehát *CPK* szelethez hasonló; és *BC* *CK* egyenlő egyeneken állanak. Már pedig egyenlő egyeneken álló hasonló körszeletek egyenlők egymással; tehát *BOC* szelet egyenlő *CPK* szelettel. De *BGC* háromszeg is egyenlő *GCK* háromszeggel; tehát az egész *GBC* czikk egyenlő az egész *GCK* czikkel. Ugyanazért *GKL* czikk is mind *GKC*-vel mind *GCB*-vel külön-külön egyenlő; *GBC GCK GKL* három czikk tehát egymással egyenlő. Ugyanazért *HEF HFM HMN* czikkek is egyenlők egymással; a hányszorzata tehát *BL* kerület *BC* kerületnek, annyiszorzata *BGL* czikk *GBC* czikknek. Ugyanazért a hányszorzata *EN* kerület *EF* kerületnek, annyiszorzata *HEN* czikk *HEF* czikknek. Már pedig ha *BL* kerület *EN* kerülettel egyenlő, *GBL* czikk is egyenlő *HEN* czikkel: ha *BL* kerület *EN* kerületnél nagyobb, *GBL* czikk is nagyobb *HEN* czikknél; s ha kisebb, kisebb. Levén pedig négy mekkoraság, *BC EF* kerület, és *GBL HEN* két czikk; vétettek *BC* kerületnek és *GBC* czikknek *BL* kerület és *GBL* czikk, egyenlő-szorzataik, *EF* kerületnek, és *HEF* czikknek pedig *EN* kerület és *HEN* egyenlő szorzataik: és megmutattatott, hogy ha *BL* kerület *EN* kerületnél nagyobb, *GBL* czikk is nagyobb *HEN* czikknél: ha egyenlő, egyenlő; és ha kisebb, kisebb; a mint tehát *BC* kerület *EF* kerülethez, úgy van *GBC* czikk is *HEF* czikkhez).

(*Tanuság*: És nyilvánvaló, hogy a mint a czikk a czikkhez, úgy van a szeglet a szeglethez).

1. *Jegyz.* A feladat és bizonyítmány második része és a tanuság, a vaticani codexbe idegen kézzel, mint későbbi pótlék, iratott, tehát eredetisége gyanus. Azért rekeszbe tettük; mi által azonban sem helyes sem hasznos volta felől legkisebb kifogásunkat sem akarjuk jelenteni.

2. *Jegyz.* Az utóbbi, 33-ik feladaton nyugszik a gyakorlati űrtan jobb keze, a szegleteknek a kerület részei általi mérése. Minden szegletet ugyanis azonegy vagy egyenlő körbe írott középpontinak, és a kör egész kerületét 360 egyenlő részre, műszóval: fokokra (gradus) osztottnak képzelvén, a megmutattakból világos, hogy ha egyik

szeglet szárai p. o. 15 fokot, a másikéi 45 fokot fognak a kerületből be, az egyik szeglet úgy van a másikhoz, mint a 15 foknyi kerület a 45 foknyihoz, s a fokok egyenlőséginél fogva, a mint a 15 a 45-hez, akár egy a háromhoz. Ezt a felosztást tovább is vitték, s minden fokot 60 minutumra, minden minutát 60 secundumra osztottak. E szerint a kör 21,600 minutumoknak nevezett, és ismét 1,296,000 secundum nevü egyenlő részekből áll.

Az újabb időben közönséges használatba van véve a minutumnak „*percz*“, és a (minutum) secundumnak „*másodpercz*“ által való magyarítása. Euklides könyvében sem egyik sem másik nem fordul elé; azért hát legyen csak tudásul.

A frankok a náluk bevett tizedes felosztást a körre is alkalmazák, és az egész kerület negyedét 100 egyenlő részre osztták, miszerint az egész kör kerülete 400 fok, minden fok 100 minutum, és minden minutum 100 secundum.

Ezeknek további tárgyalása abba a könyvbe tartozik, melyben e sorok írója az elemi űrtan Euklides óta tanált igazságai közül a legfontosabbakat egybeszedni s az Elemek kiegészítésére közre bocsátani szándékszik.

EUKLIDES ELEMEINEK

HETEDIK KÖNYVE.

Értelmezések:

1. *Egység* az, miszerint akármi, a mi létez, egynek mondatik.

2. A *szám*, egységekből álló mennyiség.

3. *Része* egyik szám a másiknak, kisebb a nagyobbnak, mikor méri a nagyobbat.

4. *Részei* pedig, mikor nem méri.

5. *Szorzata* a nagyobb a kisebbnek, midőn a kisebb méri a nagyobbat.

6. *Páros szám* a ketté választható.

Jegyz. A ketté választás itt megint abban az értelemben vétetik, miben felebb a ketté vágás. (Lásd I. K. 9. F.) Továbbá a *választás*, számrészekre különzést teszen.

7. *Páratlan*, melyet nem választhatni ketté, vagy mely a párostól egységgel különbözik.

8. *Párosszor páros*, melyet párosszám párosszám szerint mér.

9. *Párosszor páratlan*, melyet párosszám páratlan szám szerint mér.

(9a. *Páratlanszor páros*, melyet páratlan szám párosszám szerint mér).

Jegyz. Ez az értelmezés a vaticani czdexből toldatott ide. Egynek látszik ugyan az előbbivel, de azonságuk csupán e könyv 16-ik feladatának bébizonyításával álland; azért itt mint értelmezést, melynek állítni nem szabad, az elébbi 9-től különbözőnek vehetjük.

10. *Páratlanszor páratlan*, melyet páratlan szám páratlan szám szerint mér.

11. *Egyszerü szám*, melyet csak egység mér.

12. *Egymáshoz egyszerü számok*, melyeket közös mértékül csak az egység mér.

13. *Szerkesztett szám*, melyet valamely szám mér.

14. *Egymáshoz szerkesztett számok*, melyeket közös mértékül valamely szám mér.

15. Szám *számot szorozni* mondatik, midőn a hány egység van benne, annyiszor rakatik a szorzandó, és így származik szám.

16. Midőn két egymást szorozó szám alkot valamely mást, a lett szám *lap-számnak* hivatik, s az egymást szorzó számok az *oldalainak*.

17. Midőn három egymást szorzó szám alkot valamely mást, a lett szám *telj-számnak* hivatik, s az egymást szorzó számok az *oldalainak*.

18. *Négyszeg* szám, az egyenlőször egyenlő, vagyis: melyet két egyenlő szám fog bé.

19. *Köbszám*, az egyenlőször egyenlőször egyenlő, vagy: a melyet három egyenlő szám fog bé.

Jegyz. Euklides itt azt teszi, mit a számvetés minden józan tanítójának kell tennie, t. i. a számok viszonyait szemtől felfogható képekké alakítja. Háromnak és négynek szorzata p. o. szerinte ez : ⁝⁝⁝⁝ mely egy derékszeget képez, és, a . . . és . . . . ennek a II. K. 1 értelmezésében kifejtett névadó oldalait. A szorozó és szorzandó tehát méltán viselik az *oldal* nevet, s mi is ezt mind szembetüntető minőségiért, mind fordítói hűségből meghagyni jónak találtuk. Könnyü innen az alkalmazás a négyszegszámra. A teljszámot és köböt rajz segédével magyaráznunk nem lehet, hanem készítessen az olvasó mintegy hüvelyknyi ormóju koczkákat, s ezekkel próbáljon lapegyközény-alakra kirakni ilynemü szorzatokat : kétszer háromszor öt, — négyszer hatszor három; valamint koczkákat is, melyeknek oldalai mind egyenlők ú. m. háromszor háromszor három ; négyszer négyszer négy sat. legyenek.

20. Számok *egyarányban* vannak, mikor az első a másodiknak, és a harmadik a negyediknek egyenlő szorzata vagy ugyanazon része, vagy ugyanazon részei.

Jegyz. Kérdhetné valaki: miért ad itt Euklides az V. könyvbelitől különböző értelmezést az egyarányról? De előbb vizsgálja meg: vajjon valóban különböző-e? Tegyünk fel A, B, C, D négy számot, és legyen B egyenlő $3A$-val, D egyenlő $3C$-vel; világos, hogy ha az elsőnek és harmadiknak hárommal való szorzataikat, a másodiknak és negyediknek egy-egyel való szorzataikat veszszük, akkor az első sokas a másodikkal, a harmadik a negyedikkel egyszerre egyenlők leendenek; t. i. $3A$ egyenlő B-vel, (azaz $3A$-val) és $3C$ egyenlő D-vel (azaz $3C$-vel). Akármivel szorozzuk már B-t és D-t, egyszerre feljül fogják haladni $3A$-t és $3C$-t, annál inkább $2A$ t és $2C$-t, vagy A-t és C-t; vagy ha, miután az egyenlőségre hoztuk, az elsőnek és harmadiknak feljebbi szorzataikat veszszük, ezek ismét egyszerre fogják feljülhaladni a másodikat és negyediket. Így megy ez örökké.

Legyen, megfordítva, B egyenlő egyharmad A-val, és D egyenlő egyharmad C-vel. Ez azt teszi, hogy A egyenlő $3B$-vel, és C egyenlő $3D$-vel; mivel pedig A úgy B-hez, mint C D-hez, visszáson is: B úgy A-hoz, mint D C-hez; s így az iménti esetre jutánk.

De végre legyen B A-nak, és D C-nek ugyanazon részei: világos, hogy ha B kevesebb részekből áll mint az A, D is kevesebbekből álland mint C; ezen esetben tehát mind a két utótag kisebb leend az előtagjánál. Ha ellenben B több részekből áll mint A, úgy lesz D-vel is C-re nézve, s ekkor mindkét utótag nagyobb leend illető előtagjánál. Már e kétrendbeli viszony valamelyike az elsőnek és harmadiknak; megint a másodiknak és negyediknek egyszerre tett szorzásaikkor ujra még ujra eléjő, s mindig az előtagok utótagaiknál egyszerre kisebbek vagy egyszerre nagyobbak leendenek. Egyenlők is lehetnek, ha az előtagok részei valami szorzás által épen annyira szaporodnának, mint az utótagokéi, midőn ismét egyenlőkké lesznek az előtagok utótagaikkal.

Szóval ez az értelmezés az V. könyvbeli geometriainak *szám*okra alkalmazott megszükítése. Ezekre elég is, mert egészekből és törtekből álló egyarány minden eseteinek megfelel. „Irrationalis" vagy „incommensurabilis" számokat pedig Euklides nem ismer. De igen is ismer ilyes vonalakat, s ezek kedviért szükséges az V. könyvbeli értelmezés, mint szintén szükséges lenne a mai számtanra nézve.

21. *Hasonló* lap- vagy telj-számok, melyeknek oldalai egyarányuak.

22. *Tökélyes szám*, mely a részeivel egyenlő.

Jegyz. Ilyen tökélyes szám p. o. 6, melynek részei: 1, 2, 3; mert mindenik méri a hatot, s más része nincsen is. Amazok öszvege pedig hatot teszen. Ilyen 28 is, melynek részei: 1, 2, 4, 7, 14, öszvesen 28.

1. Feladat:

Levén két nemegyenlő szám, ha a kisebbet a nagyobból váltogatva untalan lemérjük, s a maradék egyszer sem méri az előttevalót, míg az egység nem marad : a felvett számok egymáshoz egyszerüek.

Mert *AB*, *CD*, két nemegyenlő számok közül a kisebbik vonassék le váltogatva untalan a nagyobbikból, s a maradék egyszer se mérje az előttevalót, míg az egység nem marad : azt mondom, hogy *AB CD* egyszerüek egymáshoz, azaz : hogy *AB*-t *CD*-t csak az egység méri.

A . . . . B
C . . . . D

Mert ha *AB CD* nem egyszerüek egymáshoz, méri őket valamely szám. Mérje és legyen ez *E* : és *CD AB*-t mérve hagyja meg a magánál kisebb *FA*-t, *FA DC*-t mérve hagyja meg a magánál kisebb *GC*-t, *GC* pedig *FA*-t mérve hagyja meg az egységet *HA*-t.

A . H . . . . F . . . . B
C . . G . . . . . D
E —

Minthogy *E* méri *CD*-t, *CD* pedig méri *FB*-t, tehát *E* is méri *FB*-t : de méri az egész *AB*-t is; tehát a maradék *AF*-et is mérendi. De *AF* méri *DG*-t; *E* is méri tehát *DG*-t : méri pedig az egész *CD*-t is; tehát a maradék *CG*-t is mérendi. De *CG* méri *FH*-t, *E* is tehát méri *FH*-t : méri pedig az egész *FA*-t; tehát a maradék *AH* egységet is mérendi, szám létire, mi lehetetlen; nem méri tehát *AB*, *CD* számokat semmi szám; *AB CD* tehát egymáshoz egyszerüek : m. b. k.

2. Feladat:

Két egymáshoz nem egyszerü szám adatván, a legnagyobb közös mértéköket megtalálni.

Legyen az egymáshoz nemegyszerü adott két szám *AB*, *CD*, s legyen a kisebbik *CD* : *AB*-nek *CD*-nek legnagyobb közös mértékét kell megtalálni.

A . . . . B
C . . . . D

Már ha CD méri AB-t, magamagát is méri: CD tehát AB-nek CD-nek közös mértéke. És világos, hogy a legnagyobb is; mert CD-t CD-nél semmi nagyobb nem mérheti.

A . . . . . . E . . . . B
C . . F . . . . . . D

Ha pedig nem méri CD AB-t, AB CD közül a kisebbik untalan méretvén le a nagyobbikból, maradand valamely szám, mely méri az előttevalót. Mert egység nem maradand: vagy ha marad, AB CD egyszerüek egymáshoz, mi nem úgy van feltéve. Maradand tehát valamely szám, mely mérni fogja az előttevalót. És CD AB-t mérvén hagyja meg a magánál kisebb EA-t: EA DC-t mérvén, hagyja meg a magánál kisebb FC-t: FC pedig mérje EA-t. Minthogy hát CF méri AE-t, AE méri DF-t; tehát CF is mérendi DF-et: méri magát is; tehát az egész CD-t is mérendi. De CD méri BE-t; CF is tehát méri BE-t: méri EA-t is; tehát az egész BA-t mérendi: méri pedig CD-t is; tehát CF mind AB-t mind CD-t méri; CF tehát AB-nek CD-nek közös mértékök. Azt mondom, hogy a legnagyobb is. Mert ha CF nem legnagyobb közös mértéke AB-nek CD-nek, mérendi valamely CF-nél nagyobb szám AB CD számokat. Mérje és legyen az G. És minthogy G CD-t méri, CD pedig BE-t méri: tehát G is méri BE-t; de méri az egész AB-t is; tehát a maradék AE-t is mérendi. De AE méri DF-t; tehát G is mérni fogja DF-t: mérni az egész DC-t is; tehát a maradék CF-t is mérendi, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen; AB CD számokat tehát nem méri CF-nél nagyobb szám; CF tehát AB-nek CD-nek legnagyobb közös mértéke, m. b. k.

A . . . . . . E . . . . B
C . . F . . . . . . D
G —

Tanuság. Ebből világos: hogy ha egy szám két számot mér, ezeknek közös mértékét is méri.

3. Feladat:

Három egymáshoz nem egyszerü szám adatván: a legnagyobb közös mértéköket megtalálni.

Legyen a 3 egymáshoz nemegyszerü szám *A*, *B*, *C*: *A*, *B*, *C*-nek legnagyobb közös mértékét kell megtalálni.

a) A, 36. B, 30. C, 12.
b) A, 36. B, 30. C, 15.

Vétessék kettőnek *A*-nak *B*-nek legnagyobb közös mértéke *D*: már *D* vagy méri *C*-t, vagy nem méri. Előbb is mérje; de *A*-t *B*-t is méri; tehát *D* méri *A*-t *B*-t *C*-t; *D* tehát *A*-nak *B*-nek *C*-nek közös mértéke. Azt mondom, hogy a legnagyobb is. Mert ha nem legnagyobb közös mértéke *D* *A*-nak *B*-nek *C*-nek: *A*, *B*, *C* számokat mérendi valami, *D*-nél nagyobb szám. Mérje és legyen az *E*. Minthogy már *E* méri *A* *B* *C*-t; tehát *A*-t *B*-t is mérve, a legnagyobb közös mértéköket is mérni fogja. De *A*-nak *B*-nek *D* a legnagyobb közös mértéke; *E* tehát méri *D*-t, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen; *A*-t *B*-t *C*-t tehát nem méri *D*-nél nagyobb szám; *D* tehát legnagyobb közös mértéke *A*, *B*, *C*-nek.

A, 36. B, 30. C, 12.
D, 6. E, —

De ne mérje *D*, *C*-t: előbb is azt mondom, hogy *D*, *C* nem egyszerüek egymáshoz. Mert minthogy *A*, *B*, *C* egymáshoz nem egyszerüek; mérendi őket valamely szám: az *A*-t *B*-t *C*-t mérőszám pedig *A*-t *B*-t is mérendi, s az *A*, *B* legnagyobb közös mértékét *D*-t is; de méri *C*-t is, *D*-t *C*-t tehát méri valamely szám; *D*, *C* tehát nem egyszerüek egymáshoz. Vétessék a legnagyobb közös mértékök *E*. És minthogy *E* méri *D*-t, *D* pedig méri *A*-t, *B*-t; tehát *E* is méri *A*-t *B*-t: de méri *C*-t is; *E* tehát *A*-t *B*-t *C*-t méri; tehát *E* *A*-nak *B*-nek *C*-nek közös mértéke. Azt mondom, hogy a legnagyobb is. Mert ha *E* nem legnagyobb közös mértéke *A*-nak *B*-nek *C*-nek, mérendi *A*, *B*, *C* számokat valami. *E*-nél nagyobb szám. Mérje és legyen az *F*. És minthogy *F* méri *A*-t, *B*-t *C*-t, méri *A*-t *B*-t is, és *A*-nak *B*-nek legnagyobb közös mértékét is mérendi. *A*-nak *B*-nek legnagyobb közös mértéke *D*; *F* tehát méri *D*-t; de méri *C*-t is; tehát *F* méri *D*-t *C*-t; tehát *D*-nek *C*-nek legnagyobb közös mértékét is mérendi. Már pedig *D*-nek *C*-nek legnagyobb közös mértéke *E*; *F* tehát méri

A, 36. B, 30. C, 15.
D, 6. E, 3.

A, 36. B, 30. C, 15.
D, 6. E, 3. F, —

E-t, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen; A-t B-t C-t tehát nem mérendi E-nél nagyobb szám; tehát E A-nak, B-nek, C-nek legnagyobb közös mértéke: m. b. k.

(*Tanuság.* Ezekből világos, hogy ha valamely szám 3 számot mér, a legnagyobb közös mértéköket is méri.

Ezzel a móddal több adott számok legnagyobb közös mértékét is megtaláljuk).

4. Feladat:

Akármely szám akármely számnak vagy része vagy részei.

Legyen A, BC két szám, és BC legyen kisebb: azt mondom, hogy BC A-nak vagy része vagy részei.

a) A ....
B C
b) A ....
B ... C

Mert A, BC vagy egyszerüek egymáshoz vagy nem. Elöbb is legyenek egymáshoz egyszerüek. Már BC az egységeire oszlattatván; BC-nek mindenik egysége, A-nak része, úgy hogy BC, A-nak részei.

c) A ....
B C
a) A ....
B C

Megint ne legyenek A BC egyszerüek egymáshoz: ennélfogva BC vagy méri A-t, vagy nem méri. Ha felméri BC A-t: része A-nak. Ha pedig nem: vétessék A-nak BC-nek legnagyobb közös mértékök D, és osztassék BC D-vel egyenlö BE, EF, FC számokra. És mivel D méri A-t, része D, A-nak és BE EF FC közül mindenikkel egyenlő, tehát BE EF FC közül mindenik, része A-nak: úgy hogy BC részei A-nak.

b) A ....
B ... C
c) A ....
B ... E ... F ... C
D ...

Akármely szám tehát sat.

5. Feladat:

Ha egy szám egy számnak része, s más számnak ugyanaz a része: mindkettő együtt mindkettőnek együtt ugyanaz a része, a mi egyik egyiknek.

Mert A szám legyen BC számnak része, és más D, másnak EF-nek ugyanaz a része,

A . . . D . . . .
B . . . . . . C E . . . . F

a mi A BC-nek : azt mondom, hogy a kettő A, D együtt a kettőnek BC, EF-nek együtt az a része, a mi A BC-nek.

Mert mivel A BC-nek része, és D is EF-nek ugyan az a része; tehát a hány A-val egyenlő szám

A . . . D . . . .
B . . . G . . . C E . . . . H . . . . F

van BC-ben, annyi D-vel egyenlő szám van EF-ben is. Osztassék BC A-val egyenlő BG GC számokra; EF pedig D-vel egyenlő EH HF számokra; e szerint BG GC számok menynyisége EH HF számok mennyiségével egyenlő. És mivel BG, A-val, EH D-vel egyenlők; tehát BG meg EH is egyenlők A meg D-vel. Ugyanazért GC meg HF is egyenlők A meg D-vel; a hányan tehát A-val egyenlők vannak BC-ben, annyin vannak A meg D-vel egyenlők BC meg EF-ben is; tehát a hányszorozata BC A-nak, annyiszorozata a kettő is BC EF együtt, a kettőnek A-nak meg D-nek; tehát a mi része A, BC-nek, ugyanaz a része a kettő is A meg D a kettőnek BC meg EF-nek : m. b. k.

Jegyz. Ugyanaz a része A B-nek, a mi C D-nek; ha A annyiszor méri B-t, a hányszor C D-t; vagy szerzőnk szokott kifejezésével, ha A B-t azon szám szerint méri, mely szerint C, D-t. P. o. 6 24-et méri a 4 szerint, 5 is 20-at a 4 szerint; tehát 6 azon része 24-nek, a mi 5, 20-nak. Mai módon szólva : egy negyede.

6. Feladat:

Ha egy szám egy számnak részei, s más másnak ugyanazon részei : mindkettő is mindkettőnek ugyanazon részei leendenek, a mik az egyik az egyiknek.

Mert legyen AB szám C számnak részei, s a másik DE a másiknak F-nek ugyanazon részei : azt mondom, hogy mindkettő AB DE mindkettőnek C-nek F-nek ugyanazon részei, a mi AB, C-nek.

A . . . . B D . . . . . . E
C . . . . F . . . .

Mert mivel a mi ré- A . . . . G . . . . B D . . . H . . . E
szei *AB* *C*-nek, ugyanazon C . . . . F . . . .
részei *DE* is *F*-nek : tehát
a hány része van *C*-nek *AB*-ben, annyi része van *F*-nek is *DE*-ben. Osztassék *AB* *C*-nek *AB* *GB* részeire, *DE* pedig *F*-nek *DH* *HE* részeire; e szerint *AG* *GB* annyian lesznek a hányan *DH* *HE*. És minthogy a mi része *AG* *C*-nek, ugyanaz a része *DH* is *F*-nek; tehát a mi része *AG*, *C*-nek, ugyanaz a része mindkettő is az *AG* *DH*, mindkettőnek *C*-nek *F*-nek. Ugyanazért a mi része *GB*, *C*-nek, ugyanaz a része mindkettő *GB* *HE* mindkettőnek *C*-nek *F*-nek; a mily részei tehát *AB* *C*-nek, ugyanazon részei mindkettő *AB* *DE*, mindkettőnek *C*-nek, *F*-nek.

Jegyz. Midőn van *A* szám, mely *B* számot *C* szerint méri, *D*-t *E* szerint méri; és *F* szám, mely *G*-t ugyancsak *C* szerint méri, *H*-t *E* szerint méri : azt mondja Euklides, hogy *B* azon részei *D*-nek, a mik *G*, *H*-nak. P. o. van 3, mely 12-őt a 4 szerint méri, 21-et a 7 szerint méri; ismét 5, a mely 20-at a 4 szerint méri és 35-öt a 7 szerint méri; tehát 12 azon részei 21-nek, a mik 20, 35-nek : azaz, mai módon mondva, $^4/_7$-ede.

7. Feladat:

Ha egy szám más számnak az a része, a mi az elvett az elvettnek : a maradék is a maradéknak az a része leend, a mi az egész az egésznek.

Legyen *AB* szám *CD* szám- A . . . E . . B
nak az a része, a mi az elvett *AE* C . . . . F . . . . . . D
az elvett *CF*-nek : azt mondom,
hogy a maradék *EB* is az a része a maradék *FD*-nek, a mi az egész *AB* az egész *CD*-nek.

Mert a mi része
AE *CF*-nek, ugyanaz A . . . E . . B
a része legyen *EB* is G . . . . . . C . . . . F . . . . . . D
CG-nek. És minthogy
a mi része *AE*, *CF*-nek, ugyanaz a része *AB* *GF*-nek : de a mi része *AE* *CF*-nek, ugyanazon részeül van felvéve *AB* *CD*-

nek; tehát a mi része *AB* *GF*-nek ugyanaz a része *AB* *CD*-nek; *AB* tehát mind *GF*-nek mind *CD*-nek ugyanazon része; egyenlő tehát *GF* *CD*-vel. Vétessék el a közös *CF*; tehát a maradék *GC* egyenlő a maradék *FD*-vel. És mivel a mi része *AE* *CF*-nek, ugyanaz a része *EB* *GC*-nek, *GC* pedig egyenlő *FD*-vel; tehát a mi része *AE* *CF*-nek, ugyanaz a része *EB* *FD*-nek. De a mi része *AE* *CF*-nek, ugyanaz a része *AB* is *CD*-nek; tehát a mi része *EB* *FD*-nek, ugyanaz a része *AB* *CD*-nek; az a része tehát a maradék *EB* a maradék *FD*-nek a mi az egész *AB* az egész *CD*-nek. m. b. k.

8. Feladat:

Ha egy szám más számnak ugyanazon részei, a mik az elvett az elvettnek; a maradék is a maradéknak ugyanazon részei leend, a mik az egész az egésznek.

Mert legyen *AB* szám *CD* számnak ugyanazon részei, a mik az elvett *AE* az elvett *CF*-

A . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . . D

nek: azt mondom, hogy a maradék *EB* is a maradék *FD*-nek ugyanazon részei, a mik az egész *AB* az egész *CD*-nek.

Vétessék fel *AB*-vel egyenlő *GH* szám; a mi részei ennél fogva *GH*, *CD*-nek, ugyan-

A . . . . . . L . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . . D
G . . . . . . M . . K . . . . . . N . . H

azok a részei *AE*, *CF*-nek. — Osztassék *GH* a *CD*-nek *GK* *KH* részeire, *AE* pedig *CF*-nek *AL*, *LE* részeire; *GK*, *KH* tehát annyian lesznek a hányan *AL*, *LE*. És minthogy a mi része *GK* *CD*-nek, ugyanaz a része *AL* *CF*-nek, de *CD* nagyobb *CF*-nél; tehát *GK* is nagyobb *AL*-nél. Tétessék *GM* *AL*-lel egyenlővé; tehát a mi része *GK* *CD*-nek, ugyanaz a része *GM* *CF*-nek; a maradék *MK* is tehát a maradék *FD*-nek ugyanaz a része, a mi az egész *GK* az egész *CD*-nek. Ismét, minthogy a mi része *KH* *CD*-nek, ugyanaz a része *LE* *CF*-nek, de *CD* nagyobb *CF*-nél; tehát *KH* is nagyobb *LE*-nél. Tétessék *KN* *LE*-vel egyenlővé; tehát a mi része *KH* *CD*-nek, ugyanaz a része KN CF-nek; a maradék NH is tehát a maradék FD-nek ugyanaz a része, a mi az egész KH az egész CD-nek. De megmutattaték, hogy a maradék MK is a maradék FD-nek az a része, a mi az egész KG az egész DC-nek; tehát az MK meg NH két szám DF-nek ugyanazon részei, a mik az egész HG az egész DC-nek. Már pedig MK meg NH két szám egyenlő EB-vel, HG pedig BA-val; a maradék EB is tehát a maradék FD-nek ugyanazon részei, a mik az egész AB az egész CD-nek; m. b. k.

9. Feladat:

Ha egy szám egy számnak része, és más szám más számnak ugyanazon része: cserélve is a mi része vagy részei az első a harmadiknak, ugyanazon része vagy részei leend a második is a negyediknek.

A . . . D . . . .
B . . . . . . C E . . . . F

Legyen A szám BC számnak része, s egy más D egy másnak EF-nek ugyanaz a része a mi A, BC-nek: azt mondom, hogy cserélve is a mi része vagy részei A, D-nek, ugyanazon része vagy részei BC, EF-nek.

A . . . D . . . .
B . . . G . . . C E . . . . H . . . . F

Mert mivel a mi része A, BC-nek, ugyanaz a része D EF-nek; tehát a hány A-val egyenlő szám van BC-ben, annyi D-vel egyenlő van EFben is. Osztassék BC A-val, egyenlő BG, GC számokra, EF pedig D-vel egyenlő EH-ra HF-re: tehát egyenlő leend a BG, GC számok mennyisége az EH HF mennyiségökkel.

És minthogy BG GC számok egymással egyenlők, de EH HF számok is egyenlők egymással, és BG GC annyian vannak, a hányan EH HF; tehát a mi része vagy részei BG, EH-nak, ugyanazon része vagy részei GC is HF-nek; úgy hogy a mi része vagy részei BG, EH-nak, ugyan az a része vagy részei BC két szám EF két számnak; már pedig BG

A-val, EH D-vel egyenlők; a mi része vagy részei tehát A, D-nek, ugyanaz a része vagy részei BC is EF-nek : m. b. k.

Jegyz. Valahányszor ez a szó : *mennyiség* (πλῆθος) az Euklides számvetést tárgyazó könyveiben előfordul, az állítmányul, bizonyítványul vagy például felvett *számok számát* jelenti. P. o. 5. 7. 8. 36 négy szám, 15. 9. 9. 44. megint 4 szám, tehát az 5. 7. 8. 36 számok (de nem a bennök foglalt egyek) mennyisége egyenlő a 15. 9. 9. 34 számok mennyiségével; azaz : 5. 7. 8. 36, mint számok (értékökre nem ügyelve) annyian vannak, mint 15. 9. 9. 44, hasonló tekintetben véve.

10. Feladat:

Ha egy szám egy számnak részei, s más másnak ugyanazon részei: cserélve is, a mi részei vagy része az első a harmadiknak, ugyanazon részei vagy része a második is a negyediknek.

A . . . . . . B D . . . . E

C . . . . F . . . .

Legyen AB szám C-nek részei, s egy más DE, másnak F-nek ugyanazon részei : azt mondom, hogy cserélve is a mi részei vagy része AB, DE-nek ugyanazon részei vagy része C is F-nek.

Mert minthogy a mi részei AB, C-nek, ugyanazon részei DE is F-nek, tehát a hány része van AB-ben C-nek, annyi része van DE-ben is F-nek.

A . . . G . . . B D . . . . H . . . . E

C . . . . F . . . .

Osztassék AB C-nek AG GB részeire, DE pedig F-nek DH HE részeire; e szerint az AG, GB számok mennyisége egyenlő leend a DH HE számok mennyiségével. És minthogy a mi része AG C-nek, ugyan az a része DH F-nek, cserélve is a mi része vagy részei AG, DH-nak, ugyanaz a része vagy részei C is F-nek. Ugyanazért : a mi része vagy részei GB HE-nek, ugyanazon része vagy részei C is F-nek; úgy hogy a mi része vagy részei AG HD-nek, ugyanazon része vagy részei GB HE-nek: tehát a mi része vagy részei AG, DH-nak, ugyanazon része vagy részei AB, DE-nek. De megmutattaték, hogy a mi része vagy részei AG DH-nak, ugyanaz a része vagy részei C is F-nek, tehát a mi része vagy részei AB DE-nek, ugyanaz a része vagy részei C is F-nek. m. b. k.

11. Feladat:

Ha a mint az egész az egészhez, úgy az elvett az elvetthez : a maradék is úgy leend a maradékhoz, mint az egész az egészhez.

Legyen, a mint az egész AB az egész CD-hez, úgy az elvett AE az elvett CF-hez : azt mondom,

A . . . . E . . . B
C . . . . F . . D

hogy a maradék EB is úgy van a maradék FD-hez, mint az egész AB az egész CD-hez.

Mert minthogy a mint AB CD-hez, úgy AE CF-hez, tehát a mi része vagy részei AB, CD-nek, ugyanaz a része vagy részei AE is FC-nek; a maradék EB is tehát a maradék FD-nek ugyanazon része vagy részei, a mi AB, CD-nek. A mint tehát EB FD-hez, úgy van AB, CD-hez : m. k. b.

12. Feladat:

Ha akárhány szám egyarányban van; a mint az elötagok egyike az utótagok egyikéhez, úgy leend minden elötagok öszvege minden utótagok öszvegéhez.

Legyen akárhány A. B. C. D szám egyarányban, a mint A, B-hez, úgy C, D-hez : azt mondom, hogy a mint A, B-hez, úgy vannak A meg C, B meg D-hez.

A, 3. (9.) B, 12
C, 5. (15.) D, 20

Mert minthogy a mint A, B-hez, úgy van C, D-hez; tehát a mi része vagy részei A, B-nek, azon része vagy részei C is D-nek; tehát A meg C is öszvesen B-nek meg D-nek ugyanazon része vagy azon részei, a mi A, B-nek. Tehát a mint A B-hez, úgy van A meg C, B meg D-hez; m. b. k.

13. Feladat:

Ha négy szám egyarányban van: cserélve is egyarányban leendenek.

Legyen A, B, C, D, négy szám egyarányban, a mint A, B-hez, úgy C, D-hez:

a) A, 3. B, 15. C, 7. D, 35.
b) A, 12. B, 15. C, 28. D, 35.

azt mondom, hogy cserélve is egyarányuak leendenek, a mint A, C-hez, úgy B, D hez.

Mert, mivel a mint A, B-hez, úgy C, D-hez; tehát a mi része vagy részei A, B nek, ugyanaz a része vagy részei C is D-nek; cserélve tehát, a mi része vagy részei A, C-nek, ugyanaz a része vagy azon részei B is D-nek. A mint tehát A, C-hez, úgy van B, D-hez. m. b. k.

14. Feladat:

Ha van akárhány szám, és mások ezekkel egyenlő mennyiségüek, és kettőnként véve egyarányuak: egyközösön is egyarányuak leendenek.

Legyen akárhány A, B, C szám, és megint mások velök egyenlő mennyiségüek, és kettőnként véve egyarányuak, D, E, F; a mint A, B-hez, úgy D, E-hez. s mint B, C-hez, úgy E, F-hez: azt mondom, hogy egyközösön is a mint A, C-hez, úgy van D, F-hez.

A, 15. B, 24. C, 21.
D, 20. E, 32. F, 28.

Mert mivel a mint A, B-hez, úgy D, E-hez; tehát cserélve a mint A, D-hez, úgy B, E-hez. Ismét mivel a mint B, C-hez, úgy E,F-hez, tehát cserélve a mint B E-hez, úgy C, F-hez. De a mint B E-hez, úgy van A, D-hez: tehát a mint A, D-hez, úgy C, F-hez: cserélve tehát a mint A, C-hez, úgy van D, F-hez: m. b. k.

15. Feladat:

Ha az egység mér valamely számot, és más szám más valamely számot ugyanannyiszor mér: cserélve is egyenlőszer méri az egység a harmadikat, s a második a negyediket.

Mérje A egység BC számot, s egy másik D szám mérjen ugyanannyiszor más valamely EF számot: azt mondom, hogy cserélve is egyenlőszer méri A egység D számot, és BC, EF-fet.

A . B . . . C
D . . E . . . . . . F

Mert minthogy A egység BC számot és D, EF-et egyenlőszer mérik; tehát a hány egység van BC-ben, annyi D-vel egyenlő szám van EF-ben. Osztassék BC az egységeire, BG, GH, HC-re, EF pedig D-vel egyenlő EK, KL, LF számokra. Így BG, GH, HC egységek mennyisége egyenlő leend EK, KL, LF számok mennyiségével. És mivel BG, GH, HC egységek egyenlők egymással, megint EK, KL, LF számok is egyenlők egymással, és a BG, GH, HC egységek mennyisége egyenlő az EK, KL, LF számok mennyiségével; tehát a mint BG egység EK számhoz, úgy van GH egység KL számhoz és HC egység LF számhoz. Már pedig a mint egyik előtag egyik utótaghoz, úgy leendenek minden előtagok minden utótagokhoz; tehát a mint BG egység EK számhoz, úgy BC EF-hez. De BG egység egyenlő A egységgel, EK szám pedig D számmal, tehát a mint A egység D számhoz, úgy van BC, EF-hez. A egység tehát D számot, és BC, EF-fet egyenlőszer mérik: m. b. k.

A . B . G . H . C
D . . E . . K . . L . . F

16. Feladat:

Ha két szám egymást szorozva csinál számokat: a származatok egymással egyenlők leendenek.

Legyen két szám A, B és A B-t szorozva csinálja C-t, B megint A-t szorozva csinálja D-t: azt mondom, hogy C egyenlő D-vel.

A, 7. B, 3.
C, 21. D. 21.

Mert minthogy A, B-t szorozva csinálta C-t; tehát B, C-t az A-beli egységek szerint méri; de E egység is A-t a benne levő egységek szerint méri, egyenlőszer méri tehát E egység A számot és B C-t; cserélve is tehát E egység B számot, és A C-t egyenlőszer méri. Ismét minthogy B A-t szorozva csinálta D-t; tehát A D-t a B-beli egységek szerint méri. De E egység is B-t a benne levő egységek szerint méri; egyenlőszer méri tehát E egység B számot és A, D-t. Már pedig egyenlőszer méri E egység B számot és A, C-t; tehát A egyenlőszer méri mind C-t mind D-t; egyenlő tehát C, D-vel; m. b. k.

A, 7. B, 3.
C, 21. D, 21.
E. 1.

17. Feladat:

Ha egy szám két számot szorozva csinál számokat: a származatok egy arányban leendenek a szorzottakkal.

Ugyanis A szám B, C két számot szorozva cszinálja D-t és E-t: azt mondom, hogy a mint B, C-hez, úgy D, E-hez.

A, 3.
B, 7. C, 9.
D, 21. E, 27.

Mert minthogy B, A-t szorozva csinálta D-t; tehát B D-t az A-beli egységek szerint méri. F egység is A-t a benne foglalt egységek szerint méri; egyenlőszer méri tehát F egység A számot és B D-t; tehát a mint F egység A számhoz, úgy van B D-hez. Ugyanazért a mint F egység A számhoz, úgy van C, E-hez, tehát a mint B, D-hez, úgy van C, E-hez; cserélve tehát a mint B, C-hez, úgy D, E-hez; m. b. k.

F, 1. A, 3
B, 7. C, 9.
D, 21. E, 27.

18. Feladat:

Ha két szám valamely számot szorozva csinál számokat: a származottak egyarányuak leendenek a szorzókkal.

Ugyanis A, B két szám valamely C számot szorozva csinálják D-t és E-t: azt mondom, hogy a mint A, B-hez, úgy D, E-hez.

A. 7. B, 4.
C, 5.
D, 35. E, 20.

Mert minthogy A, C-t szorozva csinálta D-t; tehát C is A-t szorozva csinálta D-t. Ugyanazért C is B-t szorozva csinálta E-t. Ennélfogva C szám A, B, két számot szorozva csinálta D-t és E-t; tehát a mint A, B-hez úgy van D, E-hez: m. k. m.

19. Feladat:

Ha négy szám egyarányban van, az elsőből és negyedikből származott szám egyenlő leend a másodikból és harmadikból származott számmal: és ha az elsőből és negyedikből származott szám egyenlő a másodikból és harmadikból származottal, a négy szám egyarányu leend.

A, 9. B, 6. C, 24. D, 16
E, 144. F, 144.

Legyen A, B, C, D négy szám egyarányban, a mint A, B-hez úgy C, D-hez, és A, D-t szorozva csinálja E-t, B pedig C-t szorozva csinálja F-fet: azt mondom, hogy E egyenlő F-fel.

A, 9. B, 6. C, 24. D, 16.
E, 144. F, 144.
G, 216.

Mert A, C-t szorozva csinálja G-t. Már minthogy A, C-t szorozva G-t csinálta: tehát A szám C D két számot szorozva csinálta G, E számokat; a mint tehát C, D-hez, úgy van G E-hez; de a mint C, D-hez, úgy van A, B-hez; a mint tehát A, B-hez, úgy van G, E-hez. Ismét minthogy A, C-t szorozva G-t csinálta, és B is C-t szorozva F-fet csinálta; A, B két szám valamely F számot szorozva csinálták G-t F-fet; tehát a mint A, B-hez, úgy G, F-hez. De a mint A B-hez, úgy G, E-hez; tehát amint G E-hez, úgy van G, F-hez; G tehát mind E-hez mind F-hez ugyanazon arányban van: egyenlő tehát E, F-fel.

Legyen viszont E egyenlő F-fel: azt mondom, hogy a mint A, B-hez, úgy C, D-hez.

Mert ugyanazon készületeket téve, minthogy A, C-t, D-t szorozva csinálta G-t E-t; tehát a mint C D-hez, úgy G, E-hez. De E egyenlő F-fel; tehát a mint G, E-hez, úgy G F-hez. De a mint G, E-hez, úgy C, D-hez; tehát a mint C D-hez, úgy

G F-hez. Hasonlókép a mint *G*, *F*-hez, úgy *A*, *B*-hez; tehát a mint *A*, *B*-hez, úgy van *C*, *D*-hez; m. b. k.

20. Feladat:

Ha három szám egyarányu, a szélsők közti lapszám egyenlő leend a közbelső négyszegével: s ha a szélsők közti lapszám egyenlő a közbelső négyszegével, a három szám egyarányu leend.

A, 4.	B. 6.	C, 9.

Legyen *A*, *B*, *C* három szám egyarányban, a mint *A*, *B*-hez, úgy *B*, *C*-hez: azt mondom, hogy az *A*, *C* közötti lapszám egyenlő a *B* négyszegével.

A, 4.	B, 6.	C, 9.
	D, 6.	

Mert vétessék *B*-vel egyenlő *D*; tehát a mint *A*, *B*-hez, úgy *D*, *C*-hez; az *A*, *C*-ből való származat tehát egyenlő a *B D*-ből való származattal. Már pedig a *B*, *D*-ből való származat egyenlő a *B* négyszegével; mert *B* egyenlő *D*-vel; az *A*, *C*-ből való származat tehát egyenlő a *B* négyszegével.

De legyen az *A C*-ből való származat egyenlő a *B* négyszegével: azt mondom, hogy a mint *A*, *B*-hez, úgy van *B*, *C*-hez.

Mert minthogy az *A*, *C* származatuk egyenlő a *B* négyszegével, a *B* négyszege pedig egyenlő a *B*, *D* közti lapszámmal; tehát a mint *A*, *B*-hez, úgy *D*, *C*-hez. De *B* egyenlő *D*-vel; tehát a mint *A*, *B*-hez, úgy van *B*, *C*-hez: m. k. m.

21. Feladat:

Egyarányu számok között a legkisebbek egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, nagyobb a nagyobbat, s kisebb a kisebbet.

A . . . . B . . . .

C . . . . D   E . . . F

Legyenek *A* és *B*-vel egyarányu, s hozzájok képest legkisebb *CD*, *EF* számok: azt mondom, hogy *CD A*-t, és *EF B*-t egyenlőszer mérik.

Ugyanis *CD*, *A*-nak nem részei. Mert ha lehet, legyen: *EF* tehát *B*-nek ugyanazon részei, a mik *CD A*-nak; tehát

A . . . . B . . . .
C . . G . . D E . H . . F

CD-nek a hány része van *A*-ban, *EF*-nek is ugyanannyi része van *B*-ben. Osztassék *CD* *A*-nak *CG GD* részeire, *EF* pedig *B*-nek *EH HE* részeire: tehát a *CG GD* számok mennyisége egyenlö leend az *EH HF* számok mennyiségével. És minthogy *CG GD* egymással egyenlők, *EH HF* is egymással egyenlők, és *CG*, *GD* annyian vannak, a hányan *EH*, *HF*; tehát a mint *CG* *EH*-hoz úgy van *GD* *HF*-hez; már pedig a mint egyik elötag egyik utótaghoz, úgy leendenek minden elötagok minden utótaghoz; tehát a mint *CG* *EH*-hoz, úgy *CD* *EF*-hez; *CG* *EH* tehát *CD* *EF*-hez egyarányban vannak, és ezeknél kisebbek; mi lehetetlen; mert a feltétel szerint *CD*, *EF* a velök egyarányuak közt legkisebbek; nem részei tehát *CD* *A*-nak; tehát része: és *EF* *D*-nek az a része, a mi *CD* *A*-nak; egyenlöszer méri tehát *CD* *A*-t, és *EF* *B*-t; m. b. k.

22. Feladat:

Ha van három szám, s megint mások azokkal egyenlő mennyiségüek, s kettőnként véve egyarányuak, és ha arányuk zavart: egyközösen is egyarányuak leendenek.

A, 12. B, 8. C. 6
D, 28, E. 21. F, 14

Legyenek *A*, *B*, *C* három szám, s *D*, *E*, *F* mások azokkal egyenlő mennyiségüek, s kettőnként véve egyarányuak, s legyenek zavart arányban, a mint *A*, *B*-hez, úgy *E*, *F*-hez, s a mint *B*, *C*-hez, úgy *D*, *E*-hez: azt mondom, hogy egyközösen is a mint *A*, *C*-hez, úgy *D*, *F*-hez.

Mert mivel a mint *A*, *B*-hez, úgy *E*, *F*-hez; tehát az *A* *F* származatuk egyenlő a *B*, *E* származatukkal. Ismét, mivel a mint *B*, *C*-hez, úgy *D*, *E*-hez; tehát a *C*, *D* származatuk egyenlő a *B* *E* származatukkal. De megmutattatott, hogy az *A*, *F* származatuk is egyenlő a *B*, *E* származatukkal, tehát az *A*, *F* származatuk egyenlő a *C*, *D* származatukkal; a mint tehát *A*, *C*-hez, úgy van *D*, *F*-hez; m. b. k.

23. Feladat:

Az egymáshoz egyszerü számok, a velök egyarányuak között, legkisebbek.

Legyenek A, B egymáshoz egyszerü számok: azt mondom, hogy A, B minden velök egyarányuak közt legkisebbek.

A, 12. B, 17

Mert ha A B, nem legkisebbek a velök egyarányuak között: leendenek A-nál B-nél kisebb A, B-vel egyarányu számok.

Legyenek ezek D, C.

Minthogy az egyarányuak között legkisebb számok egyenlöszer mérik a velök egyarányuakat, nagyobb a nagyobbat, kisebb a kisebbet, azaz: az elötag az elötagot, s az utótag az utótagot, tehát egyenlöszer méri, C, A-t, és D, B-t. Már a hányszor méri C, A-t, annyi egység legyen E-ben, D is tehát B-t az E-beli egységek szerint méri; és minthogy C A-t az E-beli egységek szerint méri, tehát E is A-t a C-beli egységek szerint méri, ugyanazért E is B-t a D-beli egységek szerint méri; E tehát mind A-t mind B-t méri holott egyszerüek egymáshoz, mi lehetetlen. Nem leendenek tehát A B-nél kisebb számok, A B-vel egyarányuak. A B tehát legkisebbek a velök egyarányuak között: m. b. k.

A, 12. B, 17
C,— D,—
E,—

24. Feladat:

A velök egyarányuak között legkisebb számok egymáshoz egyszerüek.

Legyenek A, B a velök egyarányuak között legkisebb számok: azt mondom, hogy A, B, egymáshoz egyszerüek.

A, 15. B, 28.

Mert ha A, B-egymáshoz nem egyszerüek, mérendi öket valamely szám. Mérje és legyen az C. És a hányszor méri C A-t, annyi egység legyen D-ben, a hányszor méri pedig C B-t, annyi egység legyen E-ben.

A, 15. B, 28
C,—
D,— E,—

És minthogy C méri A-t a D-beli egységek szerint, tehát C D-t szorozva csinálta A-t; ugyanazért C E-t szorozva csinálta B-t; ennélfogva C a két számot D-t E-t szorozva csinálta A-t, B-t; tehát a mint D, E-hez, úgy van A, B-hez; D, E tehát A-val B-vel egyarányuak, kisebbek levén ezeknél, mi lehetetlen. Nem mérendi tehát A, B számokat semmi más szám. A B tehát egymáshoz egyszerüek: m. b. k.

25. Feladat:

Ha két szám egymáshoz egyszerü; az egyiköket mérő szám a másikhoz egyszerü leend.

Legyenek A, B, egymáshoz egyszerü két szám; és A-t mérje valamely C szám: azt mondom, hogy B, C, egymáshoz egyszerüek.

A, 24. B, 35
C, 6.

Mert ha B, C egymáshoz nem egyszerüek, mérendi őket valamely szám. Mérje és legyen az D. És minthogy D méri C-t, C pedig méri A-t, tehát D is méri At. De B-t is méri, D tehát méri mind A-t mind B-t, holott egymáshoz egyszerüek, mi lehetetlen. Nem méri tehát C, B számokat semmi szám. C B tehát egyszerüek egymáshoz: m. b. k.

A, 24. B, 35.
C, 6. D—

26. Feladat:

Ha két szám valamely máshoz egyszerü; származatuk is ugyanahhoz egyszerü leend.

A, B két szám legyen egyszerü valamely C számhoz, és A B-t szorozva csinálja D-t: azt mondom, hogy C D is egymáshoz egyszerüek.

A, 21. B, 35.
C,16
D, 735

Mert ha C D egymáshoz nem egyszerüek, mérendi őket valamely szám. Mérje és legyen az E. És mivel C A egyszerüek, C-t pedig méri valamely E szám; tehát E A egymáshoz egyszerüek. Már a hányszor E méri D-t, annyi egység legyen F-ben; tehát F, D-t az E-beli

A, 21. B, 35
C. 16.
E,— D, 735. F,—

egységek szerint méri; tehát EF-t szorozva A, 21. B, 35.
csinálta D-t, de A is B-t szorozva D-t csi- C, 16
nálta; az E, F származatuk tehát egyen- E,—D,735. F,—
lők az A, B származatukkal. De ha a szélsők származata egyenlő a közbelsők származatával, a négy szám egyarányu; tehát a mint E A-hoz, úgy van B F-hez. De A, E egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek; a velök egyarányuak között legkisebb számok pedig egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, nagyobb a nagyobbat, kisebb a kisebbet, azaz: az előtag az előtagot, s az utótag az utótagot; E tehát méri B-t. De C-t is méri; E tehát méri B, C számokat, holott egymáshoz egyszerüek; mi lehetetlen. Nem mérendi tehát C D számokat semmi szám. C, D tehát egymáshoz egyszerüek; m. b. k.

27. Feladat:

Ha két szám egymáshoz egyszerü, az egy ikök származata a másikhoz egyszerü leend.

Legyen A, B egymáshoz egyszerü két A, 6. B, 35.
szám, és A magát szorozva csinálja C-t: azt C, 36.
mondom, hogy C, B egymáshoz egyszerüek.

Mert vétessék A-val egyenlö D. És mint- A, 6. B, 35.
hogy A, B egymáshoz egyszerüek, A pedig D- C, 36. D, 6.
vel egyenlö; tehát D, B is egyszerüek egymáshoz; tehát mind D, mind A szám B-hez egyszerüek ennélfogva a D, A származatuk is egyszerü B-hez. De az A, D származatuk C. Tehát C, B egymáshoz egyszerüek: m. b. k.

28. Feladat:

Ha két szám két számhoz külön-külön egyszerü: származataik is egyszerüek leendenek egymáshoz.

Legyen A, B két szám C, D, két szám- A, 7. B, 16.
hoz külön-külön egyszerü, és A, B-t szorozva C, 15. D, 13.
csinálja E-t; C, pedig D-t szorozva csinálja E, 112. F, 195.
F-t: azt mondom, hogy E, F egymáshoz egyszerüek.

Mert mivel mind A mind B egyszerüek C-hez, az A, B származatuk is egyszerü leend C-hez. Az A, B származatuk pedig E; E, C tehát egyszerüek egymáshoz. Ugyanazért E, D is egyszerüek egymáshoz; mind C, mind D tehát egyszerüek E-hez; tehát C, D származatuk is E-hez egyszerü leend. De a C, D származatuk F; E, F tehát egymáshoz egyszerüek: m. b. k.

29. Feladat:

Ha két szám egymáshoz egyszerü, s mindenik magát szorozva csinál számot, származataik eyymáshoz egyszerüek leendenek, s ha az eredeti számok származataikat szorozva csinálnak másokat, ezek is egyszerüek lesznek egymáshoz: és a végsökre nézve mindig ugyanaz a viszony leend.

Legyen A, B egymáshoz egyszerü két szám, és A magát szorozva csinálja C-t, megint C-t szorozva csinálja E-t; B pedig magát szorozva csinálja D-t, megint D-t szorozva csinálja F-fet: azt mondom, hogy C, D és E, F egymáshoz egyszerüek.

A, 4.	B, 7.
C, 16.	D, 49.
E, 64.	F, 343

Mert mivel A, B egymáshoz egyszerüek; és A magát szorozva csinálta C-t, tehát C, B egyszerüek egymáshoz. Minthogy már C, B, egymáshoz egyszerüek, és B magát szorozva csinálta D-t; tehát C, D egyszerüek egymáshoz. Ismét, mivel A, B egymáshoz egyszerüek, és B magát szorozva csinálta D-t; tehát A, D egyszerüek egymáshoz. Minthogy hát A, C két szám B, D, két számhoz különkülön egyszerü; tehát A, C származatuk is egyszerü a B, D származatukhoz. Már pedig az A, C származatuk E, s a B, D származatuk F, E, F tehát egyszerüek egymáshoz: m. b. k.

30. Feladat:

Ha két szám egymáshoz egyszerü, kettőjök együtt is egyszerü lesz mindenikökhöz, és ha kettőjök együtt egyikökhöz egyszerü, az eredeti számok is egyszerüek lesznek egymáshoz.

A . . . . B C

Vétessék AB, BC egymáshoz egyszerü két szám: azt mondom, hogy kettőjök is együtt AC, mind AB-hez mind BC-hez egyszerü.

Mert ha CA, AB nem egyszerüek, egymáshoz, mérni fogja őket valamely szám. Mérje és legyen az D. Minthogy D, CA-t AB-t méri; tehát a maradék BC-t is mérendi. Méri pedig BA-t is; tehát D mind AB-t mind BC-t méri : az egymáshoz egyszerüeket; mi lehetetlen; nem mérendi tehát CA, AB számokat semmi szám; tehát CA, AB egyszerüek egymáshoz. Ugyanazért AC, CB is egyszerüek egymáshoz; CA tehát mind AB-hez mind BC-hez egyszerü.

A . . . . B C

D—

Legyenek ismét CA AB egymáshoz egyszerüek: azt mondom, hogy AB, BC is egyszerüek egymáshoz.

Mert ha AB, BC nem egyszerüek egymáshoz, mérendi őket valamely szám. Mérje és legyen az D. És mivel D mind AB-t mind BC-t méri, tehát az egész CA-t is mérni fogja. De méri AB-t is; tehát D méri mind CA-t, mind AB-t, melyek egyszerüek egymáshoz; mi lehetetlen. Nem méri tehát AB, BC számokat semmi szám. AB, BC számok tehát egyszerüek egymáshoz: m. b. k.

31. Feladat:

Minden egyszerü szám minden számhoz, melyet nem mér, egyszerü.

A, 7. B, 24.

Legyen A egyszerü szám, és ne mérje B-t: azt mondom, hogy B A egymáshoz egyszerüek.

Mert ha B, A egymáshoz nem egyszerüek, mérendi őket

valamely szám. Mérje és legyen az C. És mint- A, 7. B, 24.
hogy C méri B-t, A pedig nem méri B-t; tehát C,—
C A-val nem azonegy. És mivel C mind B-t, mind A-t méri: tehát méri A-t is, az egyszerüt, mi lehetetlen; B-t A-t tehát nem méri semmi szám, A, B tehát egymáshoz egyszerüek.

Jegyz. Lehetne ezt a bizonyítmányt még így egyszerüsítni:

Ha A, B egymáshoz nem egyszerüek, mérendi A, 13. B, 35.
őket valamely szám. Ez a szám vagy A, vagy valami más. A nem lehet, mivel a feltét szerint nem méri B-t. Más sem lehet, mivel A-t, mint egyszerüt, semmi más szám nem méri. Tehát sat.

Még ennél is egyszerüebben ezt lehetne mondani:

Minthogy A egyszerü, nincs mértéke; s ha *mértéke* nincs, *közös* mértéke sem lehet.

Átaljában e feladat tiszta felfogására meg kell gondolni, hogy két szám egymáshoz egyszerü lehet, holott különkülön és magában egyik sem egyszerü; ilyenek p. o. 8. és 15.

32. Feladat:

Ha két szám egymást szorozva csinál számot, és származatukat valamely egyszerü szám méri, az eredetiek egyikét is mérendi.

Mert A B két szám egymást szorozva A, 12. B, 10.
csinálják C-t, C-t pedig mérje valamely egy- C, 120.
szerü szám D: azt mondom, hogy D méri vagy D, 5. E, 24
A-t vagy B-t.

Mert A-t ne mérje, D pedig egyszerü; tehát A, D egyszerüek egymáshoz: és a hányszor méri D, C-t, annyi egység legyen E-ben. Minthogy már D, C-t az E-beli egységek szerint méri; tehát D, E-t szorozva csinálta C-t. De A is B-t szorozva C-t csinálta; tehát a D, E származatuk egyenlő az A, B származatukkal; tehát a mint D A-hoz, úgy van B, E-hez. Már pedig D, A egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek is, a legkisebbek egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, nagyobb a nagyobbat, s kisebb a kisebbet, azaz: az előtag az előtagot, az utótag az utótagot; D tehát méri B-t. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy ha D B-t nem méri, A-t mérni fogja. Méri tehát D vagy A-t, vagy B-t: m. b. k.

33. Feladat:

Minden szerkesztett számot mér valamely egyszerü szám.

Legyen A szerkesztett szám: azt mondom, A, 24.
hogy A-t méri valamely egyszerü szám.

Mert mivel A szerkesztett szám, méri valamely A, 24.
szám. Mérje és legyen az B. Már ha B egyszerü szám, B, 3.
világos a feladat: ha szerkesztett, méri B-t is valamely
szám. Mérje és legyen az C. És minthogy C méri B-t, A, 24.
B pedig méri A-t, tehát C is méri A-t. És ha C egysze- B, 6.
rü szám, világos a feladat állitása: ha pedig szerkesz- C, 2.
tett, mérendi valamely egyszerü szám. Hasonló szemlé-
lődést folytatva, végre csak találtatik valamely egysze- A, 24.
rü szám, mely mérendi az előtte valót, a mely A-t is mé- B, 8.
rendi. Mert ha nem fogna találtatni, A számot véget- C, 4.
len sok szám mérendi, melyeknek egyike mind kisebb
a másikánál, mi számokban lehetetlen. Fog tehát találtatni valamely egyszerü szám, mely méri az előtte-valót s a mely A-t is mérendi: m. b. k.

Más bizonyítmány.

Legyen A szerkesztett szám: azt mondom, hogy A, 24
méri valamely egyszerü szám.

Mert mivel A szerkesztett, mérendi A-t némi A, 24
szám, s a mérői legkisebbike legyen B: azt mondom, B, 2.
hogy B egyszerü. Mert ha nem, szerkesztett; tehát B-t C,—
is méri valamely C szám; C ennélfogva kisebb leend
B-nél. És mivel C méri B-t, de B is méri A-t; tehát C is méri At, holott kisebb B-nél a legkisebb mérőnél, mi képtelen; B tehát nem szerkesztett szám; és így egyszerü: m. b. k.

34. Feladat:

Minden szám, vagy egyszerü, vagy méri valamely egyszerü szám.

Legyen A szám: azt mondom, hogy A vagy a) A, 5.
egyszerü, vagy méri valami egyszerü szám b) A, 18.

Már ha A egyszerü szám, meg van, a mit kerestünk; ha pedig szerkesztett, méri valamely egyszerü szám.

Minden szám tehát vagy egyszerü, vagy méri valamely egyszerü szám: m. b. k.

35. Feladat:

Akárhány szám adatván, a velök eggarányuak között meglelni a legkisebbeket.

Legyen akárhány *A*, *B*, *C* adott szám: az *A*, *B*, *C* számokkal egyarányuak között meg kell lelni a legkisebbeket.

a) A, 4. B, 7. C, 9.
b) A, 24. B, 84. C, 60.

A, *B*, *C* vagy egyszerüek egymáshoz vagy nem. Ha *A*, *B*, *C* egyszerüek egymáshoz, legkisebbek minden velök egyarányuak közt.

A, 4. B, 7. C, 9.

Ha pedig nem: Vétessék *A*-nak *B*-nek *C*-nek legnagyobb közös mértékök *D*, és a hányszor méri *D* mind *A*-t mint *B*-t mind *C*-t, annyi egységek legyenek *E*-ben *F*-ben *G*-ben; tehát *E*, *F*, *G* számok *A*, *B*, *C* számokat külön-külön a *D* egységei szerint mérik; *E*, *F G* tehát *A*-t *B*-t *C*-t egyenlőszer mérik; tehát *E F G*, *A*-val *B*-vel *C*-vel egyarányuak.

A, 24. B, 84. C. 60.
D, 12.
E, 2. F, 7. G, 5.

De azt mondom, hogy legkisebbek is. Mert ha *E*, *F*, *G* az *A*, *B*, *C*-vel egyarányuak között nem legkisebbek, leendenek *E F G*-nél kisebb *A*, *B*, *C*-vel egyarányu számok. Legyenek ezek *H*, *K*, *L*: egyenlőszer méri tehát *H A*-t, *K B*-t, és *L C*-t. A hányszor méri pedig *H A*-t, annyi egység legyen *M*-ben: tehát *K L* számok *B*, *C* számokat külön-külön az *M*-beli egységek szerint mérik. És minthogy *H A*-t az *M*-beli egységek szerint mérik; tehát *M* is *A*-t a *H*-beli egységek szerint méri. Ugyanazért *M*, *B C* számok mindenikét is a *K*, *L*-beli egységek szerint méri; *M* tehát méri *A*-t *B*-t *C*-t. És minthogy *H A*-t az *M*-beli egységek szerint méri, tehát *H*, *M*-met szorozva csinálta *A*-t. Ugyanazért *E* is *D*-t szorozva csinálta *A*t; az *E D* származatuk tehát egyenlő a *H*, *M*

A, 24. B, 84. C, 60.
D, 12.
E, 2. F, 7. G, 5.
H,— K,— L,—
M,—

származatukkal; tehát a mint E, H-hoz, úgy van M, D-hez. De E nagyobb H-nál, tehát M is nagyobb D-nél, és méri A-t B-t C-t: mi lehetetlen; mert a feltétel szerint D az A, B, C számok legnagyobb közös mértéke; nem leendenek tehát E, F, G-nél kisebb, A, B, C-vel egyarányu számok. E, F, G tehát az A, B, C-vel egyarányu számok között a legkisebbek: m. b. k.

36. Feladat:

Két szám adatván, meglelni a legkisebb számot, melyet mérnek.

Legyen az adott két szám A, B: meg kell lelni a legkisebb számot, melyet mérnek.

a) A, 7. B, 12.
b) A, 12 B, 16.

A, B vagy egyszerüek egymáshoz, vagy nem. Legyenek, A, B számok egyszerüek egymáshoz, és A B-t szorozva csinálja C-t; B is tehát A-t szorozva C-t csinálja; tehát A, B mérik C-t. Azt mondom, hogy C a legkisebb szám is, melyet mérnek. Mert ha nem: mérendenek A B számok valamely C-nél kisebb számot. Mérjék D-t. És a hányszor A méri D-t, annyi egység legyen E-ben; a hányszor megint B méri D-t, annyi egység legyen F-ben: tehát A, E-t szorozva csinálta D-t, B pedig F-fet szorozva csinálta D-t; egyenlő tehát az A, E származatuk a B F származatukkal; a mint tehát A, B-hez, úgy F, E-hez. De A B egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek is, a legkisebbek pedig a velök egyarányuakat egyenlőszer mérik, nagyobb a nagyobbat, s kisebb a kisebbet; B tehát méri E-t, mint utótag utótagot. És minthogy A, B-t és E-t szorozva csinálta C, D számokat; tehát a mint B, E-hez, úgy van C, D-hez; de B méri E-t, tehát C is méri D-t, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen. A, B tehát nem mérendenek C-nél kisebb számot (mikor A, B egyszerüek egymáshoz); C tehát a legkisebb, a mit A, B mérnek.

A, 7. B, 12.
C, 84.

A, 7. B, 12.
C, 84.
D,—
E,— F,—

De ne legyenek A, B egymáshoz egyszerüek, és vétessenek az A B-vel egyarányuak között legkisebb F, E számok; tehát az A, E származatuk egyenlő a B, F származatukkal.

A, 12. B, 16.
F, 3. E, 4.
C, 48.

És A E-t szorozva csinálja C-t; tehát B is F-fet szorozva C-t csinálta; A, B tehát mérik C-t. Mert ha nem: A B számok mérendenek valamely C-nél kisebb számot. Mérjék D-t. És a hányszor A méri D-t, annyi egység legyen Gben; a hányszor pedig B méri D-t, annyi egység legyen H-ban; tehát A G-t szorozva csinálta D-t, B pedig H-t szorozva csinálta D-t; egyenlő tehát az A, G származatuk a B H származatukkal; tehát a mint A, B-hez úgy van H, G-hez. Már pedig a mint A, B-hez, úgy van F, E-hez; tehát a mint F, E-hez, úgy van H, G-hez. De F, E legkisebbek, a legkisebbek pedig a velök egyarányuakat egyenlőszer mérik, nagyobb a nagyobbat, kisebb a kisebbet; E tehát méri G-t. És minthogy A, E-t és G-t szorozva csinálta C-t, D-t; tehát a mint E, G-hez, úgy van C, Dhez. De E méri G-t; tehát C is méri D-t, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen; nem mérnek tehát A, B valamely C-nél kisebb számot, C tehát a legkisebb, mit A, B mérnek: m. b. k.

A, 12. B, 16.
F, 3. E, 4.
C, 48.
D,—
G,— H,—

37. Feladat:

Ha két szám valamely számot mér: az általuk mért legkisebb is mérendi ugyanazon számot.

A, B két szám mérjen valamely CD számot, s a legkisebb, mit mérnek, legyen E: azt mondom, hogy E méri CD-t.

A . . . B . .
C . . . . D
E . . . . . .

Mert ha E nem méri CD-t, E FD-t mérve, hagyja meg a magánál kisebb CF-fet. És minthogy A, B mérik E-t, E pedig méri DF-fet, tehát A, B is mérik DF-fet. De mérik az egész CD-t is; tehát a maradék CF-fet is mérendik, holott CF kisebb E-nél, mi lehetetlen. Nem lehet tehát, hogy ne mérje E CD-t; tehát méri: m. b. k.

A . . . B . .
C . . F . . . . D
E . . . . . .

38. Feladat:

Három szám adatván, meglelni a legkisebb számot, melyet mérnek.

a) A, 6. B, 14. C, 21.
b) A, 6. B, 14. C, 15.

Legyenek az adott számok A, B, C: meg kell lelni a legkisebb számot, melyet mérnek.

A, 6. B, 14. C, 21.
D, 42.
E,—

Mert vétessék kettővel, A-val B-vel, mért legkisebb D szám. Már C, D-t vagy méri vagy nem méri. Elébb is mérje. De A, B is mérik D-t; A, B, C tehát mérik D-t. Azt mondom: hogy D a legkisebb is, a mit mérnek. Mert ha nem: mérendenek A, B, C, számok D-nél kisebb valamely számot. Mérjék E-t. Minthogy hát A, B, C mérik E-t A, B is mérik E-t; tehát az A-val B-vel mért legkisebb szám is mérendi E-t. De az A-val B-vel mért legkisebb szám D; D tehát méri E-t nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen. A, B, C tehát nem mérendenek D-nél kisebb számot. D tehát a legkisebb szám, mit A, B, C mérnek.

A, 6. B, 14. C, 15
D, 42.
E, 210.
F,—

Ismét ne mérje C D-t és vétessék a C-vel D-vel mért legkisebb szám E. Minthogy már A, B mérik D-t, D pedig méri E-t; tehát A, is B is mérik Et. De C is méri E-t, A, B, C tehát mérik E-t. Azt mondom, hogy E a legkisebb, melyet mérnek. Mert ha nem; mérendenek A, B, C E-nél kisebb valamely számot. Mérjék F-fet. És minthogy A, B, C mérik F-fet, tehát A B is mérik F-fet; tehát az A-val B-vel mért legkisebb szám is méri F-fet. Már pedig az A-val B-vel mért legkisebb szám D; D tehát méri F-fet. De C is méri F-fet; tehát D C mérik F-fet: úgy hogy a D, C-től mért legkisebb szám is méri F-fet. Már pedig a D, C-től mért legkisebb szám E; E tehát méri F-fet, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen, A, B, C tehát nem mérnek E-nél kisebb számot; E tehát a legkisebb szám melyet A, B, C mérnek: m. b. k.

39. Feladat:

Ha egy szám más számot mér, a mértnek lenni fog a mérőről nevezett része.

A számot mérje valamely *B* szám: azt mondom, hogy *A*-nak lenni fog *B*-röl nevezett része.

A, 48. B, 12.

Mert a hányszor méri *B* *A*-t, annyi egység legyen *C*-ben; és minthogy *B* *A*-t a *C*-beli egységek szerint méri; de *D* egység is *C*-t az ebbeli egységek szerint méri; tehát *D* egység *C* számot és *B* *A*-t egyenlőszer mérik; cserélve tehát egyenlőszer méri *D* egység *B* számot és *C* *A*-t; a mi része tehát *D* egység *B* számnak, az a része *C* is *A*-nak. Már pedig *D* egység *B* számnak *B*-röl nevezett része, *C* is tehát *A* számnak *B*-röl nevezett része. Úgy hogy *A*nak vagyon *B*-röl nevezett *C* része: m. b. k.

A, 48. B, 12.
C, 4. D, 1.

Jegyz. A rész arról a számról kap nevet, a melyik szerint méri azt a számot, melynek része. Ezt a nevet magyarul *—ad—od—ed* vagy *—öd* ragok melléklésivel alakítjuk. (A görög e czélra —τον raggal él). E szerint 4, 12-nek harmada, mert 12-öt a három szerint méri. — Ez eddig csak értelmezés volna; de az utóbbi feladat azt mondja, hogy ha 12-nek 4 része, úgy 12-nek negyed része is leend. Megfordítva, mivel 3, 12-nek része, 12-nek háromról nevezett, azaz: harmad része is leend. — Azt a számot, melyről valamely rész nevet kapott, azzal a részszel *hasonnevü* számnak nevezzük. Így p. o. 3, harmad részszel, és 4, negyeddel hasonnevü számok, görögül: ὁμώνυμον.

40. Feladat:

Ha egy számnak akárminő része van a részről nevezett szám méri azon számot.

Mert legyen *A*-nak akárminő *B* része, s legyen egy *B* részről nevezett *C* szám: azt mondom, hogy *C* méri *A*-t.

A, 48. B, 12.
C, 4.

Mert minthogy *B*, *A*-nak *C*-ről nevezett része, *D* egység is pedig *C*-nek emerről nevezett része; tehát a mi része *D* egység *C* számnak, ugyanaz a része *B* is *A*-nak; ennélfogva	A, 48. B. 12. C, 4. D, 1.

D egység *C* számot, és *B* *A*-t egyenlőszer méri; cserélve is tehát egyenlőszer méri *D* egység *B* számot, és *C*, *A*-t; *C* tehát méri *A*-t: m. b. k.

41. Feladat:

Oly számot találni, mely az adott részüek között legkisebb legyen.

Legyenek az adott részek: *A*, *B*,	A, (kettőd).	B, (harmad).	C, (negyed).

C: oly számot találni, mely az *A*, *B*, *C* részüek között legkisebb legyen.

Legyenek *A*, *B*, *C* részekkel hasonnevü *D*, *E* *F* számok, és vétessék a *D*, *E* *F*-től mért legkisebb szám, *G*.	A, (kettőd).	B, (harmad).	C, (negyed).
	D, 2.	E, 3.	F, 4.
		G. 12.	

Minthogy *G*-t *D*, *E*, *F* mérik, tehát *G*-nek lesznek *D*, *E*, *E*-ről nevezett részei. De a *D* *E* *F*-ről nevezett részek *A*, *B*, *C*; *G*-nek tehát *A* *B* *C* nevü részei vannak. Azt mondom, hogy az ilyenek közt *G* a legkisebb. Mert ha *G* nem legkisebb az *A*, *B*, *C* részüek között, lesz *G*-nél kisebb valamely szám, melynek *A*, *B*, *C* részei leendenek. Legyen az *H*: és mivel *H*-nak

A, *B*, *C* részei vannak; tehát *H*-t *A*, *B*, *C* részekkel hasonnevü számok mérni fogják. Az *A*, *B*. *C*	A, (kettőd).	B, (harmad).	C, (negyed)
	D, 2.	E, 3.	F, 4
		G, 12.	
		H,—	

részekkel hasonnevü számok pedig *D*, *E*, *F*; tehát *H*-t *D*, *E*, *F* számok mérik, holott kisebb *G*-nél; mi lehetetlen. Nem leend tehát *G*-nél kisebb szám, melynek *A* *B* *C* részei lennének: m. b. k.

EUKLIDES ELEMEINEK

NYOLCZADIK KÖNYVE.

---

1. Feladat:

Ha akárhány folyvást egyarányu szám van, s a szélsők egymáshoz egyszerüek; azon számok, a velök egyarányuak közt legkisebbek.

Legyen A, B, C, D, akárhány folyvást egyarányu szám, s a szélsőik A, D legyenek egymáshoz egyszerüek: azt mondom, hogy A, B, C, D, a velök egyarányuak közt legkisebbek.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.

Mert ha nem: legyenek A, B, C, D-nél kisebbek ezek a velök egyarányuak: E, F, G, H.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, — F, — G. — H, —

És minthogy A, B, C, D, azon arányban vannak, miben E, F, G, H, és az A, B, C, D számok mennyisége egyenlő az E, F, G, H számok mennyiségével; tehát egyközösen a mint A, D-hez, úgy E, H-hoz. De A, D egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, nagyobbik a nagyobbikat, kisebbik a kisebbiket, azaz: az előtag az előtagot, s utótag az utótagot; méri tehát A, E-t, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen; tehát E, F, G, H kisebb létökre nem egyarányuak A, B, C, D-vel; A, B, C, D tehát legkisebbek a velök egyarányuak között: m. b. k.

Jegyz. A baseli és ezt követő oxfordi kiadásban hibáznak e szók : „nagyobb a nagyobbat, kisebb a kisebbet, azaz :" megvannak ellenben a Vatic.-ban; s átalában Euclides midőn idéz, híven idéz-

2. Feladat:

Adott arányban akárhány kivánt, folyvást egyarányu legkisebb számot találni.

Legyen az adott arány legkisebb számok- A, 2. B, 3. ban az A-é B-hez; már az A-nak B-hez való arányában kell akárhány folyvást egyarányu számot találni.

Kivántassék négy szám, és A magát szorozva csinálja C-t, B-t pedig szorozva csinálja D-t; B megint magát szorozva csinálja E-t; ismét A, C-t, D-t, E-t szorozva csinálja F, G, H számokat, és B, E-t szorozva csinálja K-t.

	A, 2.	B, 3.	
	C, 4.	D, 6.	E, 9.
F, 8.	G, 12.	H, 18.	K, 27.

Már minthogy A magát szorozva C-t csinálta, B-t szorozva pedig D-t csinálta, e szerint A szám A, B két számot szorozva csinálta C, D számokat; tehát a mint A, B-hez, úgy C, D-hez. Ismét mivel A B-t szorozva csinálta D-t, B pedig magát szorozva csinálta E-t; tehát mind A mind B, B-t szorozva csinálták D-t és E-t; tehát a mint A, B-hez, úgy D, E-hez. De a mint A, B-hez, úgy C, D-hez; a mint tehát C, D-hez, úgy van D, E-hez. És minthogy A, C-t D-t szorozva csinálta F, G számokat, tehát a mint C, D-hez, úgy F, G-hez. De a mint C, D-hez, úgy A, B-hez; a mint tehát A, B-hez, úgy van F, G-hez. Ismét mivel A, D-t E-t szorozva csinálta G, H számokat, tehát a mint D, E-hez, úgy G, H-hoz. De a mint D, E-hez, úgy A, B-hez; a mint tehát A, B-hez, úgy G, H-hoz. És mivel A B számok E-t szorozva csinálták H, K számokat; tehát a mint A, B-hez, úgy H, K-hoz. De a mint A, B-hez, úgy F, G-hez, és G, H-hoz; tehát a mint F, G-hez, úgy G is H-hoz, és H, K-hoz; tehát C, D, E és F, G, H, K egyarányuak az A-nak B-hez való arányában. De azt mondom, legkisebbek is. Mert minthogy A, B legkisebbek a velök egyarányuak között, a velök egyarányuak között legkisebbek pedig egymáshoz egyszerüek, tehát *A*, *B* egyszerüek egymáshoz. És mind *A*, mind *B* magukat szorozva csinálták *C*-t, *E*-t, és *C*-t és *E*-t szorozva csinálták *F*-et *K*-t; tehát *C*, *E* és *F*, *K* egymáshoz egyszerüek. De ha akárhány egyvégtiben egyarányu szám van, és szélsőik egymáshoz egyszerüek, azon számok a velök egyarányuak közt legkisebbek; *C*, *D*, *E* tehát és *F*, *G*, *H*, *K* legkisebbek az *A*, *B*-vel egyarányu számok között; m. b. k.

Tanuság. Ebből világos, hogy ha három folyvást egyarányu szám legkisebb a velök egyarányuak közt: a szélsőik négyszeg számok; ha pedig négyen vannak, köbök.

3. Feladat:

Ha akárhány folyvást egyarányu szám a velök egyarányuak közt legkisebb: szélsőik egymáshoz egyszerüek.

Legyen *A*, *B*, *C*, *D* a velök egyarányuak közt legkisebb, folyvást egyarányu akárhány szám: azt mondom, hogy a szélsőik, *A*, *D*, egymáshoz egyszerüek.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.

Mert vétessék két legkisebb *E*, *F* szám az *A*, *B*, *C*, *D* arányukban, mások megint *G*, *H*, *K*, és mindig egygyel többen, mig a vettek annyian leendenek, a hányan *A B C D* vannak. Vétessenek és legyenek ezek: *L*, *M*, *N*, *O*.

A, 8. B, 12. C, 18. D. 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. K, 9.
L, 8. M, 12. N, 18. O, 27.

Már minthogy *E*, *F* a velök egyarányuak között legkisebbek; egyszerüek egymáshoz. És minthogy mind *E* mind *F* magukat szorozva csinálták *G*-t és *K*-t, és *G*-t *K*-t külön-külön szorozva csinálták *L*-et és *O*-t; tehát *G*, *K* és *L*, *O* egymáshoz egyszerüek. És minthogy *A B C D* a velök egyarányuak közt legkisebbek, de *L M N O* is az *A B C D* számokkal egyarányuak között legkisebbek, és *A B C D* annyian vannak, a hányan *L M N O*; tehát *A B C D* számok külön-külön egyenlők *L M N O* számokkal; egyenlő tehát *A*, *L*-el, és *D*

O-val. És minthogy L, O egyszerüek egymáshoz, L pedig A-val és O, D-vel egyenlők, tehát A D is egymáshoz egyszerüek: m. b. k.

Jegyz. A készület végén, ezek után: L M N O, a B. és O. oda toldják: „Ezeknek tehát szélsöi L O egyszerüek. Mert mivel EF egyszerüek, és mindeniket magát szorozva csinálta G-t és K-t." Szükségtelen és félszeg glossema.

4. Feladat:

Akárhány arány legkisebb számokban adatván: az adott arányokban folyvást egyarányu legkisebb számokat találni.

Legyenek a legkisebb számokban adott arányok, az A-é B-hez, a C-é D-hez, és az E-é F-hez: találni kell, folyvást azon arányban, miben vannak A B-hez, C D-hez, és E F-hez, legkisebb számokat.

a) A, 2. B, 5. C, 3. D, 4. E, 5. F, 6.
b) A, 4. B, 5. C, 2. D, 3, E, 4. F, 3.

Vétessék a B-től és C-től mért legkisebb G szám. És a hányszor B méri G-t, mérje annyiszor A is H-t; a hányszor méri pedig C, G-t, annyiszor mérje D is K-t: már E vagy méri K-t vagy nem. Elébb mérje.

A, 2. B, 5. C, 3. D, 4. E, 5. F, 6.
H, 6. G, 15. K, 20. L, 24.

És a hányszor E méri K-t, F is annyiszor mérje L-let. És mivel A, H-t és B, G-t egyenlőszer mérik; tehát a mint A B-hez, úgy van H G-hez. Ugyanazért a mint C D-hez, úgy G K-hoz, és a mint E, F-hez, úgy van K, L-hez; H G K L tehát folyvást azon arányban vannak, miben A, B-hez, C, D-hez, és E F-hez. Azt mondom, hogy legkisebbek is. Mert ha H, G, K, L nem legkisebbek folyvást az A-nak B-hez, C-nek D-hez, és E-nek F-hez való arányában: lesznek H G K L számoknál kisebbek azon arányban, miben A van B-hez, C, D-hez, és E, F-hez. Legyenek ezek N O M P. És minthogy a mint A, B-hez, úgy N; O-hoz, A B számok

A, 2. B, 5. C, 3. D, 4. E, 5. F, 6.
H, 6. G, 15. K, 20. L. 24.
N,— O,— M,—P,—

pedig legkisebbek, a legkisebbek pedig mérik a velök egyarányuakat egyenlöszer, nagyobb a nagyobbat, kisebb a kisebbet, azaz: elötag az elötagot, utótag az utótagot, tehát B méri O-t. Ugyanazért C is méri O-t, B C tehát mérik O-t; tehát a B-től C-től mért legkisebb szám is mérendi O-t. Már pedig a B-től C-től mért legkisebb szám G; G tehát méri O-t, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen; nem leendenek tehát H G K L-nél kisebb, folyvást azon arányu számok, miben A van B-hez, C, D-hez, és E, F-hez.

A, 4.	B, 5.	C, 2.	D, 3.	E, 4.	F, 3.
	H, 8.	G, 10.	K, 15.		
	N, 32.	O, 40.	M, 60.	P, 45.	
	Q,—	R,—	S,—	T,—	

De ne mérje E, K-t. És vétessék az E K számoktól mért legkisebb szám M. És a hányszor K M-met méri, annyiszor mérjék H és G, N-net, és O-t, és a hányszor E méri M-met, annyiszor mérje F is P-t. És minthogy H, N-net és G, O-t egyenlöszer mérik; tehát a mint H, G-hez, úgy van N, O-hoz. De a mint H, G-hez, úgy A, B-hez; tehát a a mint A, B-hez, úgy van N, O-hoz. Ugyanazért a mint C, D-hez, úgy van O M-hez. Ismét, minthogy E M-met, és F P-t egyenlöszer mérik, tehát a mint E F-hez, úgy van M P-hez; tehát N O M P folyvást azon arányuak, miben A van B-hez, C D-hez és E F-hez, Azt mondom, hogy legkisebbek is. Mert ha N O M P egyvégtiben nem legkisebbek az A B, C D, E F számok arányaiban: leendenek N O M P számoknál kisebbek folyvást az A B, C D, E F számok arányaiban. Legyenek ezek: Q R S T. És minthogy a mint Q R-hez, úgy A B-hez; de A B legkisebbek, a legkisebbek pedig mérik a velök egyarányuakat egyenlöszer, azaz: elötag elötagot, utótag utótagot; tehát B méri R-ret. Ugyanazért C is méri R-ret; B C tehát mérik R-ret; tehát a B-től C-től mért legkisebb szám is mérendi R-ret. Már pedig a B-től C-től mért legkisebb szám G; G tehát méri R-ret. És a mint G, R-hez, úgy van K, S-hez, tehát K méri S-set. De E is méri S-et; E és K tehát mérik S-et; tehát az E-től K-tól mért legkisebb szám is mérendi S-set. Az E-től K-tól mért legkisebb szám pedig M; M tehát méri S-set, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen;

nem leendenek tehát *N O M P* számoknál kisebb folyvást azon arányu számok, miben *A* van *B*-hez, *C D*-hez és *E F*-hez; *N O M P* tehát legkisebbek az *A B, C D, E F*, arányaikban: m. b. k.

5. Feladat:

A lapszámok egymáshoz az oldalaikéiből szerkesztett arányban vannak.

Legyenek *A*, *B* lapszámok, és *A*-nak oldalai *C D* számok, *B*-nek pedig *E F*: azt mondom, hogy *A*, *B*-hez az oldalaikéiből szerkesztett arányban van.

A, 6. B, 20.
C, 2. D, 3. E, 4. F, 5.

Mert adatván azok az arányok, miben vannak *C*, *E*-hez, és *D*, *F*-hez, vétessenek *G H K* legkisebb számok folyvást a *C E*, *D F* arányaiban, úgy hogy a mint *C E*-hez úgy legyen *G H*-hoz, és a mint *D F*-hez, úgy legyen *H K*-hoz. És *D*, *E*-t szorozván csinálja *L*-let.

A, 6. B, 20.
C, 2. D, 3, E, 4. F, 5.
G, 3. H 6. K 10.
L, 12.

G H K tehát az oldalak arányaiban vannak egymáshoz. De *G*-nek a *K*-hoz való aránya, a *G*-nek *H*-hoz és a *H*-nak *K*-hoz való arányából van szerkesztve; *G* tehát *K*-hoz az oldalakéiből szerkesztett arányban van. És minthogy *D*, *C*-t szorozva *A*-t és *E*-t szorozva *L*-let csinálta; tehát a mint *C E*-hez, úgy van *A L*-hez. De a mint *C*, *E*-hez, úgy van *G H*-hoz; tehát a mint *G H*-hoz úgy van *A*, *L*-hez. Ismét, minthogy *E*, *D*-t szorozva *L*-let csinálta, de *F*-fet is szorozva *B*-t csinálta; tehát a mint *D F*-hez, úgy *L B*-hez. De a mint *D F*-hez, úgy *H K*-hoz; a mint tehát *H K*-hoz, úgy van *L B*-hez. De megmutattaték az is, hogy a mint *G H*-hoz, úgy van *A L*-hez; tehát egyközösen a mint *G K*-hoz, úgy van *A B*-hez. Már pedig *G K*-hoz az oldalakéiből szerkesztett arányban van; *A* is tehát *B*-hez az oldalakéiből szerkesztett arányban van: m. k. m.

6. Feladat:

Ha akárhány szám folyvást egyarányu s az első a másodikat nem méri: a többi sem méri egyik is egyiket is.

Legyen *A B C D E* akárhány folyvást egyarányu szám, s *A* ne mérje *B*-t: azt mondom, hogy a többi sem méri egyik is egyiket is.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

Hogy *A B C D E* egymást sorban nem mérik, világos, mert *A* sem méri *B*-t. De azt mondom, hogy más sem méri egyik is egyiket is. Mert, ha lehet, mérje *A*, *C*-t, és a hányan vannak *A B C* számok, vétessenek *A B C*-vel egyarányu ugyanannyi legkisebb *F G H* számok. És mivel *F G H* egyarányuak *A B C* számokkal, és *A B C* annyian vannak, a hányan *F G H*; tehát egyközösen a mint *A C*-hez, úgy van *F H*-hoz. És mivel a mint *A B*-hez, úgy *F G*-hez, de *A* nem méri *B*-t, tehát *F* sem méri *G*-t; tehát *F* nem egység, mert az egység minden számot mér, és *F H* egymáshoz egyszerüek, tehát *F* nem méri *H*-t. És a mint *F H*-hoz, úgy van *A C*-hez; *A* sem méri tehát *C*-t. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy más sem méri egyik is egyiket is: m. b. k.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

Jegyz. A bizonyítmány kezdetét a baseli és oxfordi kihagyták. Mi a kéziratok és Peyrard hitelére, s a bizonyítmány kereksége kedviért felvettük.

7. Feladat:

Ha akárhány szám folyvást egyarányu, s az első az utólsót méri: a másodikat is mérendi.

Legyen akárhány *A*, *B*, *C*, *D* szám folyvást egyarányban, és *A* mérje *D*-t: azt mondom, hogy *A*, *B*-t is mérendi.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

Mert ha *A* nem méri *B*-t, a többiek közül sem méri egyik is egyiket is, mi képtelen; mert fel van téve, hogy *A* méri *D*-t: méri tehát *A*, *B*-t is: m. b. k.

8. Feladat:

Ha két szám közé folyvást egyarányban esnek számok: a hány szám esik közéjük folyvást egyarányban, annyian esendenek a velök ugyanazon arányban levők közé is folyvást egyarányban.

A, 2.	C, 4.	D, 8.	B, 16.
E, 3.			F, 24.

Mert essenek *A B* két szám közé folyvást egyarányban *C, D* számok, és tétessék a mint *A B*-hez, úgy *E F*-hez: azt mondom, hogy a hány szám esik *A B* közé folyvást egyarányban, annyian esendenek *E F* közé is folyvást egyarányban.

A, 2.	C, 3.	D, 8.	B, 16.
E, 3.	M, 6.	N, 12.	F, 24.
G, 1.	H, 2.	K, 4.	L, 8.

Mert a hányan vannak szám szerint *A, C, D, B*, annyian vétessenek az *A, C, D, B* számokkal egyarányuak közül *G H K L* legkisebb számok: ezeknek szélsői tehát *G L* egy-egymáshoz egyszerüek. És minthogy *A C D B*, és *G H K L* ugyanazon arányban vannak, s az *A C D B* számok mennyisége egyenlő a *G H K L* számok mennyiségével; tehát egyközösen a mint *A B*-hez, úgy van *G L*-hez. De a mint *A B*-hez, úgy *E F*-hez; ennélfogva a mint *G L*-hez, úgy van *E F*-hez. De *G L* egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebb számok pedig egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, nagyobb a nagyobbat, kisebb a kisebbet, azaz: az előtag az előtagot, s az utótag az utótagot; egyenlőszer méri tehát *G E*-t és *L F*-fet: már a hányszor méri *G E*-t annyiszor mérjék *H* és *K*, *M*-met és *N*-net; *G H K L* tehát *E*-t *M*-met *N*-net *F*-fet egyenlőszer mérik; *G H K L* tehát *E M N F* számokkal ugyanazon arányban vannak. De *G H K L* számok, *A C D B* számokkal ugyanazon arányban vannak; *A C D B* is tehát *E M N F* számokkal ugyanazon arányban vannak. Már pedig *A C D B* folyvást egyarányuak; *E M N F* is tehát folyvást egyarányuak: a hány szám tehát *AB* közé folyvást egyarányban esett, annyi szám esend $E\ F$ közt is folyvást egyarányban: m. b. k.

9. Feladat:

Ha két szám egymáshoz egyszerü s közikbe folyvást egyarányban esnek számok: a hány szám esik közikbe folyvást egyarányban, annyi szám esend folyvást egyarányban mindenikök és az egység közé is.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 1.

Mert legyen két egymáshoz egyszerü szám $A\ B$, s essenek közikbe folyvást egyarányban $C\ D$; és vétessék E egység: azt mondom, hogy a hány szám esett $A\ B$ közé folyvást egyarányban, annyi szám esend mind A mind B és az egység közé is folyvást egyarányban.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 1.
F, 2, G, 3.
H, 4, K, 6. L, 9.
M, 8, N, 12. O, 18. P, 27.

Mert vétessék A, C, D, B számokkal ugyanazon arányu két legkisebb $F\ G$ szám, azután három $H\ K\ L$, és így mindig egygyel több, míg a vett számok mennyisége egyenlő leend az $A\ C\ D\ B$ számok mennyiségével. Vétessenek és legyenek azok $M\ N\ O\ P$. Világos, hogy F magát szorozva csinálta H-t, és H-t szorozva csinálta M-met, és megint G magát szorozva csinálta L-let, és L-let szorozva csinálta P-t. És minthogy $M\ N\ O\ P$ legkisebbek az $F\ G$ számokkal egyarányuak között, de $A\ C\ D\ B$ is legkisebbek az $F\ G$-vel egyarányuak között, és $M\ N\ O\ P$ annyian vannak, a hányan $A\ C\ D\ B$; tehát $M\ N\ O\ P$ számok egyenkint egyenlők $A\ C\ D\ B$ számokkal; egyenlők tehát M, A-val, és P, B-vel. És mivel F magát szorozva csinálta H-t, tehát $F\ H$-t az F-beli egységek szerint méri. De E egység is F-fet a benne levő egységek szerint méri; egyenlőszer méri tehát E egység F számot, és $F\ H$-t; a mint tehát E egység F számhoz, úgy van $F\ H$-hoz. Ismét minthogy $F\ H$-t szorozva csinálta M-met, tehát H, M-met az F-beli egységek szerint méri. De E egység is F számot a benne levő egységek szerint méri, egyenlőszer méri tehát *E* egység *F* számot és *H M*-met; a mint tehát *E* egység *F* számhoz, úgy van *H M*-hez. De megmutattaték, hogy a mint *E* egység *F* számhoz, úgy *F*, *H*-hoz, tehát a mint *E* egység *F* számhoz, úgy *F H*-hoz és *H M* hez. De *M* egyenlő *A*-val; a mint tehát *E* egység *F* számhoz, úgy *F*, *H*-hoz, és *H*, *A*-hoz. Ugyanazon okból a mint *E* egység *G* számhoz, úgy van *G*, *L*-hez és *L*, *B*-hez; a hány szám esett tehát folyvást egyarányban *A B* közé, annyi szám esend folyvást egyarányban *A B* számok mindenike és *E* egység közé is; m. b. k.

10. Feladat:

Ha két szám és az egység közé folyvást egyarányban számok esnek: a hány szám esik folyvást egyarányban mindenikök és az egység közé, annyi esik folyvást egyarányban a két szám közé is.

D, 2. E, 4. A, 8.
C, 1.
F, 3. G, 9. B, 27.

Mert két szám *A B* és az egység *C* közé essenek folyvást egyarányban *D E* és *F G* számok: azt mondom, hogy a hány szám esett folyvást egyarányban *A B* számok és *C* egység közé, annyi szám esik folyvást egyarányban *A B* közé is.

D, 2. E, 4. A, 8.
K, 12.
C, 1. H, 6.
L, 18.
F, 3. G. 9. B, 27.

Mert *D*, *F*-fet szorozva csinálja *H*-t, és *D F* számok különkülön *H*-t szorozva csinálják *K L* számokat.

És minthogy a mint *C* egység *D* számhoz, úgy van *D E*-hez, tehát *C* egység *D* számot és *D E*-t egyenlőszer mérik, *C* egység pedig *D* számot a *D*-beli egységek szerint méri; *D* szám is tehát *E*-t a *D*-beliek szerint méri; *D* tehát magát szorozva csinálta *E*-t. Ismét mivel a mint *C* egység *D* számhoz, úgy van *E A*-hoz, tehát egyenlőszer méri *C* egység *D* számot, és *E*, *A*-t. De *C* egység *D* számot a *D*-beli egységek szerint méri; *E* is tehát *A*-t a *D*-beli egységek szerint méri; *D* tehát

E-t szorozva csinálta *A*-t. Ugyanazért *F* magát szorozva csinálta *G*-t, és *G*-t szorozva csinálta *B*-t. És minthogy *D* magát szorozva *E*-t csinálta, és *F*-fet szorozva *H*-t csinálta; tehát a mint *D*, *F*-hez, úgy *E* *H*-hoz. Ugyanazért a mint *D*, *F*-hez, úgy van *H*, *G*-hez; a mint *E* *H*-hoz, úgy *H* *G*-hez. Ismét mivel *D*, *E* *H*-t külön-külön szorozva csinálta *A*-t és *K*-t, tehát a mint *E*, *H*-hoz, úgy *A* *K*-hoz. De a mint *E* *H*-hoz, úgy van *D* *F*-hez; tehát a mint *D* *F*-hez, úgy *A* *K*-hoz. Ismét mivel *D* *F* számok mindenike *H*-t külön-külön szorozva csinálták *K*-t és *L*-let; tehát a mint *D* *F*-hez, úgy van *K* *L*-hez. De a mint *D* *F*-hez, úgy *A* *K*-hoz, a mint tehát *A* *K*-hoz, úgy *K* *L*-hez. Megint mivel *F* *H*-t és *G*-t szorozva csinálták *L*-let és *B*-t; tehát a mint *H* *G*-hez, úgy van *L*, *B*-hez. Már pedig a mint *H* *G*-hez, úgy van *D* *F*-hez; a mint tehát *D* *F*-hez, úgy *L* *B*-hez. De megmutattaték, hogy a mint *D* *F*-hez, úgy *A* *K*-hoz, és *K* is *L* hez; tehát a mint *A* *K*-hoz és *K* *L* hez, úgy van *L* is *B*-hez; *A* *K* *L* *B* tehát folyvást egyarányuak; tehát a hány szám mind *A* mind *B* számok és *C* egység közé folyvást egyarányban esik, annyi esik *A* *B* közé is folyvást egyarányban: m. b. k.

11. Feladat:

Két négyszegszám közt van egy közép egyarányu szám, s a négyszegszám a négyszegszámhoz kétszeres arányban van, mint az oldal az oldalhoz.

Legyenek *A* *B* négyszegszámok, s *A*-nak az oldala legyen *C*, *B* nek *D*: azt mondom, hogy *A* *B* számokhoz középarányu szám egy van, és *A* *B*-hez kétszeres arányban van, mint *C* *D*-hez.

A, 4. B, 9.
C, 2. D, 3.

Mert *C*, *D*-t szorozva csinálja *E* t. És minthogy *A*, négyszegszám, és az oldala *C*; tehát *C* magát szorozva csinálta *A*-t. Ugyanazért *D* is magát szorozva csinálta *B*-t. Mivel már *C* *C* t és *D* t külön-külön szorozva csinálta *A*-t és *E*-t; tehát a mint *C*, *D*-hez, úgy van *A* *E*-hez. Ismét *C*, *D*-t szorozva csinálta *E*-t, s *D* magát szorozva csinálta *B*-t: ennélfogva *C* *D* két szám azonegy *D* számot szorozva csinálták *E* *B*

A, 4. B, 9.
C, 2. D, 3.
E, 6.

számokat; tehát a mint C D-hez, úgy van E B hez. De a mint C D-hez úgy van A E-hez; tehát a mint A E-hez, úgy E B-hez. A B számokhoz tehát van egyközéparányu E szám.

Még azt mondom, hogy A B-hez kétszeres arányban van mint C D-hez. Mert minthogy A E B három szám egyarányban van; tehát A B-hez kétszeres arányu mint A E-hez. Már pedig a mint A E-hez, úgy van C D-hez; A tehát kétszeres arányban van B-hez, mint C oldal D oldalhoz: m. b. k.

12. Feladat:

Két köbszámhoz van két közép-egyarányu szám, s a köb a köbhez háromszoros arányban van, mint az oldal az oldalhoz.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

Legyenek A B köbszámok, és A-nak az oldala legyen C, B-nek D: azt mondom, hogy A és B közt van két középegyarányu szám, és A B-hez háromszoros arányban van, mint C D-hez.

A, 8. H, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
C, 2. D, 3.

Mert C magát szorozva csinálja E-t, D-t szorozva pedig csinálja F-fet, D megint magát szorozva csinálja G-t, és C és D különkülön F-fet szorozva csinálják H és K számokat.

És minthogy A köb, s az oldala C magát szorozva csinálta E-t; tehát C magát szorozva E-t csinálta, E-t pedig szorozva A-t csinálta. Ugyanazért D is magát szorozva G-t csinálta, s G-t szorozva B-t csinálta. És minthogy C C-t és D-t külön-külön szorozva csinálta E-t és F-fet; tehát a mint C D-hez, úgy E F-hez. Ugyanazért, a mint C D-hez, úgy van F G-hez. Ismét minthogy C E-t és F-fet egyenkint szorozva csinálta A-t és H-t; tehát a mint E F-hez, úgy A H-hoz. Már pedig a mint E, F-hez, úgy van C D-hez; tehát a mint C D-hez, úgy van A, H-hoz. Ismét mivel C D számok F-fet külön-külön szorozva csinálták H-t és K-t; tehát a mint C D-hez, úgy van H K-hoz. Ismét minthogy D F-fet és G-t különkülön szorozva csinálta K és B számokat; tehát a mint F G-hez, úgy K B-hez. De a mint F G-hez, úgy C D-hez; a mint tehát C, D-hez úgy van K B-hez. De megmutattaték, hogy a mint C D-hez, úgy van A H-hoz, és H is K-hoz; tehát a mint A H-hoz, úgy H K-hoz és K B-hez; A B számokhoz van tehát két középegyarányu szám H és K.

De még azt mondom, hogy A, B-hez háromszoros arányban van, mint C D-hez. Mert mivel A H K B négyszám egyarányban van; tehát A B-hez háromszoros arányban van, mint A H-hoz. Már pedig a mint A H-hoz, úgy van C D-hez; tehát A B-hez, háromszoros arányban van, mint C D-hez: m. b. k.

13. Feladat:

Ha akárhány szám folyvást egyarányu, és mindenik magát szorozva valamely számot csinál, a belőlök származottak egyarányban leendenek: és ha az eredetiek a származottakat szorozva csinálnak számokat, ezek is egyarányban leendenek, és így tovább az utolsókkal mindig ugyanaz történik.

A, 2.	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	K, 512.

Legyenek akárhány A, B, C számok folyvást egyarányban, a mint A B-hez, úgy BC-hez, és A B C magukat szorozva megint csinálják D E F számokat; D-t E-t F-et szorozva megint csinálják G H K számokat: azt mondom, hogy D E F és G H K folyvást egyarányuak.

Mert A, B-t szorozva csinálja L-let; A B számok pedig

A, 2. B. 4. C, 8,
D, 4. L, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. M, 16. N, 32. H, 64. P, 128. Q, 256. K, 512.

különkülön L-let szorozva csinálják M-met és N-net. És ismét B, C-t szorozva csinálja O-t, és B C különkülön O-t szorozva csinálják P Q számokat.

A feljebbiekkel hasonlólag mutatjuk meg, hogy D L E és G M N H folyvást egyarányuak az A-nak B-hez való arányában, és hogy E O F és H P Q K is egyarányuak a B-nek C-hez való arányában. Már pedig a mint A B-hez, úgy B C-hez; D L E számok tehát E O F számokkal egyarányuak, és G M N H is H P Q K számokkal. És minthogy a D L E számok menynyisége egyenlö az *E O F* számok mennyiségével, s a *G M N H* számoké is a *H P Q K* számokéval; tehát egyközösen a mint *D E*-hez, úgy van *E F*-hez, és a mint *G H*-hoz, úgy van *H K*-hoz: m. b. k.

14. Feladat:

Ha négyszegszám négyszegszámot mér, az oldal is mérendi az oldalt; s ha az oldal az oldalt méri, a négyszeg is méri a négyszeget.

Legyenek *A*, *B* négyszegszámok, és azoknak oldalai: *C D*, és *A* mérje *B*-t: azt mondom, hogy *C* is méri *D*-t.

A, 4. B, 16.
C, 2. D, 4.

Mert *C D*-t szorozva csinálja *E*-t; tehát *A E B* folyvást egyarányuak a *C*-nek *D*-hez való arányában. És minthogy *A E B* folyvást egyarányuak, és *A* méri *B*-t; tehát *A* méri *E*-t is. Már pedig a mint *A E*-hez, úgy van *C D*-hez; *C* is tehát méri *D*-t.

A, 4. E, 8. B, 16.
C, 2. D. 4.

Ismét mérje *C*, *D*-t: azt mondom, hogy *A* is méri *B*-t.

Mert ugyanazon készületeket téve, hasonlólag mutatjuk meg, hogy *A E B* folyvást egyarányuak a *C*-nek *D*-hez való arányában. És minthogy a mint *C D*-hez, úgy *A E*-hez, de *C* méri *D*-t, tehát *A* is méri *E*-t, *A E B* pedig folyvást egyarányuak, tehát *A B*-t is méri: m. b. k.

15. Feladat:

Ha köbszám köbszámot mér, az oldal is mérendi az oldalt; s ha az oldal mérendi az oldalt, a köb is mérendi a köböt.

Mert *A* köbszám mérje *B* köbszámot s *A*-nak oldala legyen *C*, *B*-nek pedig *D*: azt mondom, hogy *C* méri *D*-t.

A, 8. B, 64.
C, 2. D, 4.

Mert *C* magát szorozva csinálja *E*-t, *D* magát szorozva csinálja *G*-t, s azután *C*, *D*-t szorozva

A, 8. H, 16. K, 32. B, 64.
E, 4. F, 8, G, 16
C, 2. D, 4.

csinálja *F*-fet, *C* és *E* pedig különkülön *F*-fet szorozva csinálják *H* és *K* számokat. Világos, hogy *E F G* és *A H K B* számok folyvást egyarányuak a *C*-nek *D*-hez való arányában: és mivel *A H K B* folyvást egyarányuak, s *A* méri *B*-t, tehát *H*-t is méri. De a mint *A*, *H*-hoz, úgy van *C D*-hez; méri tehát *C* is *D*-t.

De mérje *C D*-t: azt mondom, hogy *A* is mérendi *B*-t.

Mert ugyanazon készületeket téve, hasonlólag mutatjuk meg, hogy *A H K B* folyvást egyarányuak a *C*-nek *D*-hez való arányában. És minthogy *C D*-t méri, s a mint *C D*-hez, úgy *A H*-hoz; tehát *A* is méri *H*-t: úgy hogy *A B*-t is méri: m. b. k.

16. Feladat:

Ha négyszegszám négyszegszámot nem mér, az oldal sem mérendi az oldalt; s ha az oldal az oldalt nem méri, a négyszeg sem mérendi a négyszeget.

Legyenek *A B* négyszegszámok, s az oldalaik legyenek *C D*, és *A* ne mérje *B*-t: azt mondom, hogy *C* sem méri *D*-t.

A, 9. B, 16
C, 3. D, 4.

Mert ha *C* méri *D*-t, *A* is mérendi *B*-t; de *A* nem méri *B*-t, tehát *C* sem méri *D*-t.

Ne mérje ismét *C D*-t: azt mondom, hogy *A* sem méri *B*-t.

Mert ha méri *A*, *B*-t, *C* is mérendi *D*-t, de *C* nem méri *D*-t, tehát *A* sem méri *B*-t: m. b. k.

17. Feladat:

Ha köbszám köbszámot nem mér, az oldal sem mérendi az oldalt: s ha az oldal az oldalt nem méri, a köb sem mérendi a köböt.

Mert *A* köbszám ne mérje *B* köbszámot, s *A*-nak az oldala legyen *C*, *B*-nek *D*: azt mondom, hogy *C* sem mérendi *D*-t.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

Mert ha C méri D-t, A is mérendi B-t. De A nem méri B-t, tehát C sem méri D-t.

De ne mérje C, D-t: azt mondom, hogy A sem méri B-t.

Mert ha A méri B-t, C is mérendi D-t. De C nem méri D-t, tehát A sem mérendi B-t: m. b. k.

18. Feladat:

Két hasonló lapszám közé esik egy középegyarányu szám: és a lap a laphoz kétszeres arányban van, mint a hasonnevü oldal a hasonnevü oldalhoz.

A, 6. B, 24.
C, 2. D, 3. E, 4. F, 6.

Legyen A, B hasonló két lapszám, és az A oldalai legyenek C D, a B-nek pedig E F. És minthogy hasonló lapok azok, melyeknek oldalai egyarányuak; tehát a mint C D-hez, úgy E F-hez. Már azt mondom, hogy A és B közé esik egy középarányu szám, és A B-hez kétszeres arányban van, mint a hasonnevü oldal C a hasonnevü oldalhoz, E-hez, vagy mint D F-hez.

A, 6. G, 12. B, 24.
C, 2. D, 3 E, 4. F, 6.

Mert mivel a mint C D hez, úgy E F-hez; tehát cserélve a mint C E-hez, úgy D F-hez. És minthogy A, lapszám, s az oldalai C s D; tehát D C-t szorozva csinálta A-t. Ugyanazért E is F-fet szorozva csinálta B-t, D pedig E-t szorozva csinálja G-t. És mivel D C-t szorozva A-t, és E-t szorozva G-t csinálta; tehát a mint C E-hez, úgy van A G-hez. De a mint C E-hez, úgy D F-hez; tehát a mint D F-hez úgy A G-hez. Ismét, minthogy E D-t szorozva G-t csinálta, F-fet szorozva pedig B-t csinálta; tehát a mint D F-hez, úgy van G B-hez. De megmutattaték, hogy a mint D F-hez, úgy van A G-hez; tehát a mint A G-hez, úgy G B-hez; A G B tehát folyvást egyarányuak: A B közé tehát esik egy középegyarányu szám.

Még azt mondom, hogy A B-hez kétszeres arányban van, mint a hasonnevü oldal a hasonnevü oldalhoz, azaz: mint C E-hez, vagy D F-hez. Mert minthogy A G B folyvást egyarányuak: A B-hez kétszeres arányban van, mint G-hez. Már pedig a mint A G-hez, úgy van C E-hez és D F-hez; tehát A B-hez kétszeres arányban van, mint C E-hez vagy D F-hez: m. b. k.

19. Feladat:

Két hasonló teljszám közé esik két középegyarányu szám, és a telj a hasonló teljhez háromszoros arányban van, mint a hasonnevü oldal a hasonnevü oldalhoz.

A, 30.			B, 240.		
C, 2.	D, 3.	E, 5.	F, 4.	G, 6.	H, 10.

Legyen A, B két hasonló teljszám, és az A oldalai legyenek C D E, a B-éi pedig F G H. És minthogy hasonló teljszámok azok, melyeknek oldalai egyarányuak; tehát a mint C D-hez, úgy van F G-hez, s a mint D E-hez, úgy G H-hoz. Azt mondom, hogy A B közé esik két középegyarányu szám, és A, B-hez háromszoros arányban van, mint C F-hez, vagy D G-hez, vagy E H-hoz.

A, 30.		N, 60.	O, 120.		B, 240.
K, 6.		M, 12.	L, 24.		
C, 2.	D, 3.	E, 5.	F, 4.	G, 6.	H, 10.

Mert C D-t szorozva csinálja K-t, F pedig G-t szorozva csinálja L-let. És minthogy C D számok F G számokkal azon arányuak, s C D számokból lett K; F G számokból pedig L; tehát K L hasonló lapszámok; K L közé tehát esik egy középegyarányu szám. Legyen ez M; M tehát D F számokból lett, mint az előbbi elméletben megmutattaték. És minthogy D, C-t szorozva K-t csinálta, F-fet szorozva megint M-met csinálta; tehát a mint C F-hez, úgy van K M-hez. De a mint K M-hez, úgy M L-hez; K M L tehát folyvást egyarányuak, a C-nek F-hez való arányában. És mivel a mint C D-hez úgy F G-hez; tehát cserélve a mint C F-hez, úgy D G-hez. Ismét, mivel a mint D E-hez, úgy van G H-hoz; tehát cserélve a mint D G-hez, úgy E H-hoz; K M L tehát folyvást egyarányuak abban az arányban, melyben C van F-hez, D G-hez és még E H-hoz. Már

E és *H* *M*-met külön-külön szorozva csinálják *N O* számokat. És minthogy *A*, teljszám, s az oldalai *C D E*; tehát *E* a *C D* számok származatát szorozva csinálta *A*-t: De a *C D* származatuk *K*; *E* tehát *K*-t szorozva csinálta *A*-t. Ugyanazért *H* is az *F G* származatát, az *L*-let szorozva csinálta *B*-t. És minthogy *E*, *K*-t szorozva csinálta *A*-t, *M*-met pedig szorozva csinálta *N*-net; tehát a mint *K* *M*-hez, úgy van *A* *N*-hez. Már pedig a mint *K* *M*-hez, úgy van *C* *F*-hez, és *D* *G*-hez, megint *E* *H*-hoz; tehát a mint *C* *F*-hez *D*, *G*-hez, és *E* *H*-hoz, úgy van *A* *N*-hez. Ismét mivel *E* *H* számok *M*-met külön-külön szorozva csinálták *N O* számokat; tehát a mint *E* *H*-hoz, úgy *N* *O*-hoz. De a mint *E* van *H*-hoz, úgy *C* *F*-hez és *D* *G*-hez; tehát a mint *C* *F*-hez, *D* *G*-hez, és *E* *H*-hoz, úgy van *A* *N*-hez, és *N* *O*-hoz. Ismét mivel *H* *M*-met szorozva *O*-t csinálta, de *L*-let is szorozva *B*-t csinálta; tehát a mint *M* *L*-hez, úgy van *O* *B*-hez. De a mint *M* *L*-hez, úgy *C* *F*-hez, *D* *G*-hez, és *E* *H*-hoz; tehát a mint *C* *F*-hez, *D* *G*-hez, és *E* *H*-hoz, úgy van nem csak *O* *B*-hez, hanem *A* is *N*-hez, és *N* *O*-hoz; *A N O B* tehát folyvást egyarányuak az oldalak mondott arányaiban.

Még azt mondom, hogy *A*, *B*-hez háromszoros arányban van, mint a hasonnevü oldal a hasonnevü oldalhoz, azaz: mint *C* szám *F*-hez, vagy *D* *G*-hez, vagy *E* *H*-hoz. Mert mivel *A N O B* négy szám folyvást egyarányban van; tehát *A* *B*-hez háromszoros arányban van, mint *A* *N*-hez. De meg van mutatva, hogy a mint *A* *N*-hez, úgy *C* *F*-hez, *D* *G*-hez, és *E* *H*-hoz; *A* is tehát *B*-hez háromszoros arányban van, mint a hasonnevü oldal a hasonnevü oldalhoz, azaz: *C* szám *F*-hez, *D* *G*,hez, és *E* *H*-hoz: m. b. k.

Jegyz. A bizonyítmány 9-dik sorában e szók után: „mint az előbbi elméletben megmutattaték“ a baseli és oxfordi ezt ragasztják: „Tehát a mint *K* *M*-hez, úgy van *M* *L*-hez.“ A vaticani kéziratban nem létező szükségtelen említés, és világos glossema. Alább, a hol szükség van reá, előfordúl.

20. Feladat:

Ha két szám közé egy középarányu szám esik: azok a számok hasonló lapszámok lesznek.

A, 8. C, 12. B, 18.

Mert A B két szám közé essék C közép egyarányu szám: azt mondom, hogy A, B hasonló lapszámok.

A, 8. C, 12. B, 18.
D, 2. E, 3. F, 4. G, 6.

Mert vétessenek D E legkisebb számok abban az arányban, miben A C vannak; tehát a mint D E-hez, úgy A C-hez; egyenlőszer méri tehát D A-t és E C-t. Már a hányszor méri D A-t, annyi egység legyen F-ben; F tehát D-t szorozva A-t csinálta, és E-t szorozva C-t csinálta: úgy hogy A, lapszám, s az oldalai D F. Ismét minthogy D E legkisebbek az A C azaz a C B számokkal egyarányuak között, mert a mint A C-hez, úgy van C B-hez; tehát egyenlőszer méri D C-t, és E B-t. Már a hányszor méri D, C-t, annyi egység legyen G-ben; E is tehát B-t a G-beli egységek szerint méri; tehát G E-t szorozva csinálta B-t; B tehát lapszám, s az oldalai E G; tehát A B lapszámok.

Azt mondom, hogy hasonlók is. Mert mivel F G számok E-t külön-külön szorozva csinálták C-t és B-t; tehát a mint F G-hez, úgy van C B-hez. Már pedig a mint C B-hez úgy D E-hez; a mint tehát D E-hez, úgy F G-hez. És cserélve a mint D F-hez, úgy E G-hez; A B tehát hasonló lapszámok, mert oldalaik egyarányuak: m. b. k.

Jegyz. Az előbbihez hasonló foltozás a bizonyítmány 4-dik sorában e szók után: „és E C-t" a baseli és oxfordiban: „A mint A C-hez, úgy C B-hez." Alább a maga helyén megvan; itt a vatican nem tud semmit róla.

21. Feladat:

Ha két szám közé két középegyarányu szám esik: azok a számok hasonló teljszámok lesznek.

A, 24. C, 72. D. 216. B, 648.

Mert A, B két szám közé essék C D két középarányu szám: azt mondom, hogy A, B hasonló teljszámok.

Mert vétessenek az A C D számokkal egyarányuak közül a legkisebb E F G számok;

A, 24.	C, 72.	D, 216.	B, 648.
E, 1.	F, 3.	G, 9.	
H, 1	K, 1.	L, 3.	M, 3.

tehát ezeknek szélsői, E G, egymáshoz egyszerüek. És minthogy E G számok közé egy középarányu szám F esett; tehát E G hasonló lapszámok. Legyenek már E-nek az oldalai H K, G-nek L M; világos e szerint az ezelőttiekből, hogy E F G folyvást egyarányuak a H-nak L-hez és a K-nak M-hez való arányában. És minthogy E F G legkisebbek az A C D számokkal egyarányuak között, és az E F G számok mennyisége egyenlő az A C D mennyiségökkel; tehát egyközösen a mint E G-hez, úgy van A D-hez. De E G egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, nagyobb a nagyobbat, kisebb a kisebbet, azaz; előtag az előtagot, s utótag az utótagot; egyenlőszer méri tehát E A-t és G D-t.

A, 24.	C, 72.	D, 216.	B, 648.
E, 1.	F, 3.	G, 9.	
H, 1.	K, 1.	L, 3.	M, 3.
N, 24.	O, 72.		

A hányszor pedig E méri A-t, annyi egység legyen N-ben; tehát N E-t szorozva csinálta A-t. De E a H K származatuk; N tehát a H K származatukat szorozva csinálta A-t; A tehát teljszám, s az oldalai: H K N. Ismét mivel E F G legkisebbek a C D B számokkal egyarányuak között; tehát egyenlőszer méri E C-t és G B-t. Már a hányszor méri E C-t, annyi egység legyen O-ban; G is tehát B-t az O-beli egységek szerint méri; tehát O G-t szorozva csinálta B-t. De G az L M származatuk; O tehát az L M származatukat szorozva csinálta B-t, (E-t pedig szorozva C-t csinálta); tehát B teljszám, s oldalai : L M O; A B tehát teljszámok.

Azt mondom, hogy hasonlók is. Mert minthogy N O, E-t szorozva csinálták A C számokat; tehát a mint N O-hoz, úgy van A C-hez, azaz: E F-hez. De a mint E F-hez, úgy van H L-hez és K M-hez; a mint tehát H L-hez, úgy van K M-hez, és N O-hoz. Már pedig H K N az A oldalai; O L M pedig a B oldalai; tehát A B hasonló teljszámok: m. b. k.

Jegyz. A bizonyítmány első részének a végén, a rekeszbeli szókat az oxfordi kiadó szükségteleneknek tartja. Ford. is.

22. Feladat:

Ha három szám folyvást egyarányban van, s az első négyszeg: a harmadik is négyszeg lesz.

Legyen $A\ B\ C$ három szám folyvást egyarányban, s az első, A, legyen négyszeg: azt mondom, hogy a harmadik is, C, négyszeg lesz.

A, 4. B, 6. C, 9.

Mert, minthogy $A\ C$ között egy középegyarányu, B szám van, tehát $A\ C$ hasonló lapszámok. De A négyszeg; tehát C is négyszeg; m. b. k.

23. Feladat:

Ha négy szám folyvást egyarányu, s az első köb: a negyedik is köb lesz.

Legyen $A\ B\ C$ négyszám folyvást egyarányban, s A legyen köb: azt mondom, hogy D is köb.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.

Mert mivel $A\ D$ között két középegyarányu szám van, B, C: tehát $A\ D$ hasonló teljszámok. De A köb; tehát D is köb: m. b. k.

24. Feladat:

Ha két szám egymáshoz abban az arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz, s az első négyszeg: a második is négyszeg lesz.

Legyen $A\ B$ két szám egymáshoz abban az arányban, miben C négyszegszám van, D négyszegszámhoz, és A legyen négyszeg: azt mondom, hogy B is négyszeg.

A, 4. B, 9.
C, 16. D, 36.

Mert mivel $C\ D$ négyszegek, tehát $C\ D$ hasonló lapszámok; $C\ D$ közé tehát egy középegyarányu esik. Már pedig a mint C D-hez, úgy A B-hez; $A\ B$ közé is tehát egy középegyarányu szám esik. De A négyszeg; tehát B is négyszeg: m. b. k.

25. Feladat:

Ha két szám egymáshoz abban az arányban van, a miben köbszám köbszámhoz, s az első köb: a második is köb lesz.

Mert legyen A B két szám egymáshoz abban az arányban, a miben C köbszám D köbszámhoz, A pedig legyen köb: azt mondom, hogy B is köb.

A, 8. B, 27.
C, 64, D 216.

Mert mivel C D köbök, tehát C D hasonló teljszámok: C D közé tehát két középegyarányu szám esik. De a hány folyvást egyarányu szám esik C D számok közé, annyi esik a velök egyarányuak közé is; úgy hogy A B közé is két középegyarányu szám esik. Essenek E F. Minthogy már A E F B négyszám folyvást egyarányu, és A köb; tehát B is köb: m. b. k.

A, 8. E, 12. F, 18. B, 27.
C. 64. D, 216.

26. Feladat:

Hasonló lapszámok abban az arányban vannak egymáshoz, a miben négyszegszám négyszegszámhoz.

Legyenek A B hasonló lapszámok: azt mondom., hogy A B-hez abban az arányban van, a miben négyszegszám négyszegszámhoz.

A, 6. B, 24.

Mert minthogy A B, lapszámok: tehát A B közé egy középegyarányu szám esik. Essék és legyen az C, és vétessenek az A B C számokkal egyarányu számok közül legkisebbek D E F; tehát emezeknek szélsői D F négyszegek. És minthogy a mint D F-hez, úgy van A B-hez, D F pedig négyszegek; tehát A B-hez abban az arányban van, a miben négyszegszám négyszegszámhoz: m. b. k.

A, 6. C, 12. B, 24.
D, 1. E, 2. F, 4.

27. Feladat:

Hasonló teljszámok abban az arányban vannak egymáshoz, a miben köbszám köbszámhoz.

Legyenek A B hasonló teljszámok; azt mondom, hogy A B-hez abban az arányban van, a miben köbszám köbszámhoz.

A, 16. B, 54.

Mert mivel A B hasonló teljszámok; tehát A B közé két középegyarányu szám esik.

A, 16. C, 24. D, 36. B, 54.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

Essenek C, D, és vétessenek az A C D B számokkal egyarányuak közül legkisebb, és velök egyenlö mennyiségü E F G H számok; emezeknek szélsöi E H tehát köbök. Már pedig a mint E H-hoz, úgy A B-hez; A tehát B-hez abban az arányban van, a miben köbszám köbszámhoz; m. b. k.

EUKLIDES ELEMEINEK

KILENCZEDIK KÖNYVE.

---

1. Feladat:

Ha két hasonló lapszám egymást szorozva csinál számot: a származott szám négyszeg lesz.

Legyen A, B két hasonló lapszám, és A, B-t szorozva csinálja C-t: azt mondom, hogy C négyszegszám. A, 6. B, 54. C, 324.

Mert A magát szorozva csinálja D-t; D tehát négyszegszám. És minthogy A magát szorozva D-t csinálta, és B-t szorozva C-t csinálta; tehát a mint A B-hez, úgy van D C-hez. És minthogy A B, hasonló lapszámok; tehát A és B közé egy középegyarányu szám esik. De ha két szám közé folyvást egyarányban esnek számok, a hányan közikbe esnek, annyian esnek a velök egyarányuak közé is: úgy hogy D C számok közé is egy középegyarányu szám esik. Már pedig D négyszeg szám; tehát C is négyszegszám: m. b. k. A, 6. B, 54. D, 36. C, 324.

2. Feladat:

Ha két szám egymást szorozva négyszeget csinál: azon számok hasonló lapszámok.

Legyen A B két szám, és A B-t szorozva csinálja C négyszeget: azt mondom, hogy A B hasonló lapszámok. A, 3. B, 12. C, 36.

Mert *A* magát szorozva csinálja *D*-t; tehát D négyszegszám. És minthogy *A* magát szorozva *D*-t csinálta és *B*-t szorozva *C*-t csinálta; tehát a mint *A B*-hez, úgy *D C*-hez. És minthogy *D* négyszeg, de *C* is négyszeg: tehát *D C* hasonló lapszámok; *D C* közé tehát egy középegyarányu szám esik. És a mint *D C* hez, úgy *A B*-hez; *A B* közé is tehát egy középegyarányu szám esik. De ha két szám közé egy középegyarányu szám esik, azok a számok hasonló lapszámok; *A B* tehát hasonló lapszámok: m. b. k.

A, 3. B, 12.
D, 9. C, 36.

3. Feladat:

Ha köbszám magát szorozva csinál számot: a származat köb leend.

Mert csinálja *A* köbszám magát szorozva *B*-t: azt mondom, hogy *B* köbszám.

A. 8. B, 64.

Mert vétessék *A*-nak az oldala *C*, és *C* magát szorozva csinálja *D*-t, világos, hogy *C D*-t szorozva csinálta *A*-t. És mivel *C* magát szorozva csinálta *D*-t; tehát *C D*-t a magában levő egységek szerint méri. De az egység is *C*-t az ebbeli egységek szerint méri; tehát a mint az egység *C*-hez, úgy van *C D*-hez. Ismét minthogy *C D*-t szorozva csinálta *A*-t; tehát *D A*-t a *C*-beli egységek szerint méri. De az egység is *C*-t az ebbeli egységek szerint méri; tehát a mint az egység *C*-hez, úgy *D A*-hoz. Igen de a mint az egység *C*-hez, úgy *C D*-hez; a mint tehát az egység *C*-hez, úgy *C D*-hez és *D* is *A*-hoz; tehát az egység és *A* szám közé két szám, *C* és *D*, esik folyvást egyarányban. Ismét, mivel *A* magát szorozva csinálta *B*-t; tehát *A B*-t a magabeli egységek szerint méri. De az egység is *A*-t a benne levő egységek szerint méri; tehát a mint az egység *A*-hoz, úgy van *A B*-hez. De az egység és *A* közé két középegyarányu szám esett; *A* és *B* közé is tehát két középegyarányu szám esik. Már pedig ha két szám közé két középegyarányu esik s az első köb; a második is köb leend. *A* pedig köb; tehát *B* is köb: m. b. k.

A, 8. B, 64.
C, 2 D, 4.

4. Feladat:

Ha köbszám köbszámot szorozva csinál számot: a származat köb lesz.

Ugyanis *A* köbszám *B* köbszámot szorozva csinálja *C*-t: azt mondom, hogy *C*, köb. A, 8. B, 27.

Mert *A* magát szorozva csinálja *D*-t; *D* tehát köb. És minthogy *A* magát szorozva *D*-t csinálta, *B*-t szorozva pedig *C*-t csinálta; tehát a mint *A B*-hez úgy van *D C*-hez. És minthogy *A B*, köbök, *A B* hasonló teljszámok; tehát *A B* közé két középegyarányu szám esik: úgy hogy *D C* közé is két középegyarányu szám fog esni. Már pedig *D*, köb; tehát *C* is köb: m. b. k. A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

5. Feladat:

Ha köbszám valamely számot szorozva köböt csinál: a szorzott szám is köb lesz.

Mert *A* köb valamely *B* számot szorozva csinálja *C* köböt: azt mondom, hogy *B*, köb. A, 8. B, 27. C, 216.

Mert *A* magát szorozva csinálja *D*-t; D ennélfogva köb. És mivel *A* magát szorozva *D*-t csinálta, s *B*-t szorozva *C*-t csinálta; tehát a mint *A B*-hez, úgy van *D C*-hez. És minthogy *D C* köbök, hasonló teljszámok; *D C* közé tehát két középegyarányu szám esik. Már pedig a mint *D C*-hez, úgy *A B*-hez; tehát *A B* közé is két középegyarányu szám esik. De *A* köb; köb tehát *B* is: m. b. k. A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

6. Feladat:

Ha egy szám magát szorozva köböt csinál: maga is köb lesz.

Mert *A* szám magát szorozva csinálja *B* köböt: azt mondom, hogy *A* köbszám. A, 8. B, 64.

Mert *A B*-t szorozva csinálja *C*-t. Már minthogy *A* magát szorozva *B*-t csinálta; *B*-t szorozva pedig *C*-t csinálta; tehát *C* köb. És minthogy *A* magát szorozva *B*-t csinálta, és *B*-t szorozva *C*-t A, 8. B, 64. C, 512.

csinálta; tehát a mint A B-hez, úgy B C-hez. És minthogy B C köbök, hasonló teljszámok: B C közé tehát két középegyarányu szám esik. De a mint B C-hez, úgy van A B-hez; tehát A B közé is két középegyarányu szám esik, B pedig köb; tehát A is köb: m. b. k.

7. Feladat:

Ha szerkesztett szám némi számot szorozva csinál számot: a származat teljszám lesz.

Ugyanis A szerkesztett szám, valamely B számot szorozva csinálja C-t: azt mondom: hogy C teljszám.

A, 6. B, 7.
C, 42.

Mert minthogy A szerkesztett szám, mérendi valami szám. Mérje D; és a hányszor méri D A-t, annyi egység legyen E-ben. És mivel D A-t az E-beli egységek szerint méri; E D-t szorozva csinálta A-t. És minthogy A B-t szorozva csinálta C-t, A pedig a D E származatuk; tehát a D E származatuk B-t szorozva csinálta C-t; tehát B is a D E származatukat szorozva csinálta C-t; C tehát teljszám, s az oldalai D E B: m. b. k.

A, 6. B; 7. D, 3.
C, 42. E, 2.

8. Feladat:

Ha az egységen kezdve akárhány szám folyvást egyarányu: a harmadik az egységtől, s a többiek is egyet egyet átszökve mind négyszegek, a negyedik s a többiek is kettőt kettőt átszökve mind köbök, a hetedik pedig s a többiek is ötöt ötöt átszökve mind egyszersmind köbök és négyszegek lesznek.

Legyen az egységen kezdve akárhány A B C D E F szám folyvást egyarányban: azt mondom, hogy az egységtől harmadik, B, s a többiek is egyet egyet átszökve mind négyszeg számok, a negyedik, C, s a többiek is kettőt kettőt átszökve mind köbök, a hetedik pedig, F, s a többiek is ötöt ötöt átszökve mind köbök és négyszegek egyszersmind.

1. A, 3. B, 9. C, 27.
D, 81. E, 243. F, 729.

Mert minthogy a mint az egység A-hoz, úgy A B-hez; tehát egyenlőszer méri az egység A számot és A, B-t. De az egység A-t az ebben levő egységek szerint méri; A is tehát B-t az A-beli egységek szerint méri; tehát A magát szorozva csinálta B-t; miszerint B négyszegszám. És minthogy B C D folyvást egyarányuak, B pedig négyszeg; tehát D is négyszeg. Ugyanazért F is négyszeg. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy egyet egyet elszökve mindenik négyszeg. Már azt mondom, hogy az egységtől negyedik, C, köb, s kettőt kettőt átszökve mindenik az. Mert mivel mint az egység A-hoz, úgy B C-hez: tehát egyenlőszer méri az egység A számot, és B, C-t. De az egység A számot az ebben levő egységek szerint méri; B is tehát C-t az A-beli egységek szerint méri; A tehát B-t szorozva csinálta C-t. Minthogy már A magát szorozva csinálta B-t, és B-t szorozva csinálta C-t; tehát C, köbszám. És minthogy C D E F folyvást egyarányuak, C pedig köb: tehát F is köb. (Hasonlólag mutatjuk meg, hogy kettőt kettőt átszökve mindenik köb. Még azt is mondom, hogy) az egységtől hetedik, (F, s ötöt ötöt átszökve mindenik egyszersmind köb és négyszeg. Mert mivel F köb,) de megmutattaték, hogy négyszeg is; tehát F köb és négyszeg egyszersmind. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy ötöt ötöt átszökve mindenik köb is, négyszeg is: m. b. k.

Jegyz. A bizonyítmány vége felé rekeszben látható szókat, a bizonyítmány kereksége kedviért adtuk hozzá *August-tal.* A kiadásokbeli textus imigy van: „De megmutattaték, hogy négyszeg is: az egységtől hetedik, F, tehát egyszerre köb és négyszeg. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy az ötöt ötöt átszökők mind köbök és négyszegek is: m. b. k.“

9. Feladat:

Ha az egységen kezdve akárhány szám folyvást egyarányu, s az egység utáni szám négyszeg: a többiek is mind négyszegek lesznek. És ha az egység utáni szám köb; a többiek is mind köbök lesznek.

Legyen az egységen kezdve akárhány egyarányu A B

[1. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.]

C D E F szám, s az egység utáni A legyen négyszeg: azt mondom, hogy a többiek is mind négyszegek.

Hogy az egységtől harmadik, *B*, s egyet egyet átszökve mindenik négyszeg, meg van mutatva: de azt mondom, hogy a többiek is mind négyszegek. Már mivel *A B C* folyvást egyarányuak, és *A* négyszeg; tehát *C* is négyszeg. Ismét, minthogy *B C D* folyvást egyarányuak és *B* négyszeg: tehát *D* is négyszeg. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy a többiek is mind négyszegek.

De legyen *A* köb: azt mondom, hogy a többiek is mind

1\. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

köbök.

Hogy az egységtől negyedik, *C*, köb, s kettőt kettőt átszökve, mindenik az, meg van mutatva: de azt mondom, hogy a többiek is mind köbök. Mert, mivel a mint az egység *A*-hoz, úgy van *A B*-hez; egyenlőszer méri tehát az egység *A*-t, és *A B*-t. Már pedig az egység *A*-t az ebben levő egységek szerint méri: *A* is tehát *B*-t az *A*-beli egységek szerint méri; tehát *A* magát szorozva csinálta *B*-t, és *A* köb. Ha pedig köbszám magát szorozva csinál számot, a származat köb; *B* tehát köb. És minthogy *A B C D* négy szám folyvást egyarányban van és *A* köb; tehát *D* is köb. Ugyanazért *E* is köb; és hasonlókép a többiek is mind köbök.

10. Feladat:

Ha az egységen kezdve akárhány szám folyvást egyarányu, s az egység utáni szám nem négyszeg: a többi sem lesz négyszeg egy is, kivéve az egységtől harmadikat és az egyet egyet átszökőket mind. És ha az egység utáni nem köb: a többi sem lesz egy is köb, kivéve az egységtől negyediket, s a kettőt kettőt átszökőket mind.

Legyen az egységen kezdve egyarányu akárhány *A B C D E F* szám, s az egység utáni *A* ne legyen

1\. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

négyszeg: azt mondom, hogy a többi sem lesz egy is négyszeg, kivéve az egységtől harmadikat s az egyet egyet átszököket mind.

Mert, ha lehet, legyen *C* négyszeg. De *B* is négyszeg;

B C tehát egymáshoz abban az arányban vannak miben négyszegszám négyszegszámhoz. Már pedig a mint *B C*-hez, úgy van *A B*-hez; *A B* tehát egymáshoz azon arányban vannak, miben négyszegszám négyszegszámhoz: úgy hogy *A B* hasonló lapszámok. De *B* négyszeg; tehát *A* is négyszeg; mi nem igaz a feltétel szerint; *C* tehát nem négyszeg. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy más sem egy is, kivéve az egységtől harmadikat, s az egyet egyet átszököket mind.

De A ne legyen köb: az mondom, hogy a többi sem köb egy is, kivéve az egységtől negyediket s a kettőt kettőt átszököket mind.

Mert ha lehet, legyen *D* köbszám. De *C* is köb, mert az egységtől negyedik; és a mint *C D*-hez, úgy van *B C*-hez; *B* tehát *C*-hez azon arányban van, miben köb köbhez. Már pedig *C* köb, tehát *B* is köb. És mivel a mint az egység *A*-hoz, úgy van *A B*-hez, az egység pedig *A*-t az ebben levő egységek szerint méri; tehát *A* is *B*-t az *A*-beli egységek szerint méri; *A* tehát magát szorozva csinálta *B* köböt. De ha szám magát szorozva köböt csinál, maga is köb; köb tehát *A* is; mi nem igaz a feltétel szerint; tehát *D* nem köb. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy más sem köb egy is, kivéve az egységtől negyediket, s a kettőt kettőt átszököket mind: m. b. k.

11. Feladat:

Ha az egységen kezdve akárhány folyvást egyarányu szám van: a kisebb a nagyobbat az egyarányu számok valamelyike szerint méri.

Legyen *A* egységen A, 1. B, 3. C, 9. D, 27. E, 81. kezdve akárhány *B C D E* folyvást egyarányu szám. azt mondom, hogy *B C D E* számok közül a kisebb *B*, a nagyobbat *E*-t *C D* közül valamelyik szerint méri.

Mert mivel a mint *A* egység *B* számhoz, úgy van *D E*-hez; tehát *A* egység *B* számot, és *D E*-t egyenlőszer mérik; tehát cserélve is *A* egység *D* számot és *B E*-t egyenlőszer mérik. De *A* egység *D* számot az emebben levő egységek szerint méri; tehát B is E-t a D-beli egységek szerint méri: úgy hogy a kisebb, B, a nagyobbat, E-t, az egyarányu számok valamelyike szerint méri: m. b. k.

Jegyz. A vaticani codexben e feladatot egy *tanuság* követi, melynek szavai:

„És világos, hogy a hányadik (sorban az egységtől) a mérő szám, annyidik az a mely szerint mér, a mérettől visszafelé számítva." — Szép és megjegyzendő észrevétel.

12. Feladat:

Ha az egységen kezdve akárhány szám folyvást egyarányu: a mely egyszerü számok az utolsót mérik, azok az egység mellettit is mérik.

1. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256.

Legyen akárhány A B C D szám az egységen kezdve egyarányu: azt mondom, hogy a mely egyszerü számok D-t mérik, azok A-t is mérik.

1. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256.
E, 2. H, 8. G, 32. F, 128.

Mert mérje D-t valamely egyszerü szám, E: azt mondom, hogy E A-t is méri.
Mert ne mérje E A-t: de E egyszerü szám; minden egyszerü szám pedig minden számhoz, melyet nem mér, egyszerü; E A tehát egyszerüek egymáshoz. És minthogy E méri D-t, mérje F szerint; E tehát F-fet szorozva csinálta D-t. Ismét minthogy A D-t a C-beli egységek szerint méri; tehát A C-t szorozva csinálta D-t. De E is F-fet szorozva D-t csinálta; az A C származatuk tehát egyenlő az E F származatukkal; tehát a mint A E-hez, úgy van F C-hez. De A E egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, előtag előtagot, s utótag utótagot; méri tehát E C-t. Mérje G szerint; E tehát G-t szorozva csinálta C-t De az ezelőtti feladatnál fogva A is B-t szorozva C-t csinálta; az A B származatuk tehát egyenlő az E G származatukkal; tehát a mint A E-hez úgy G B-hez. Már pedig A E egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, előtag előtagot, utótag utótagot;

tehát *E* méri *B*-t. Mérje *H* szerint; tehát *E* *H*-t szorozva csinálta *B*-t. De *A* is magát szorozva *B*-t csinálta; a *H E* származatuk tehát egyenlő az *A* négyszegével; tehát a mint *E A*-hoz, úgy van *A H*-hoz. De *A E* egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig egyenlőszer mérik a velök egyarányuakat, a nagyobb a nagyobbat, a kisebb a kisebbet, azaz: előtag előtagot, utótag utótagot; tehát *E* méri *A*-t. De nem is méri; mi lehetetlen; *A E* tehát egymáshoz nem egyszerüek, tehát szerkeztettek. De a szerkeztetteket méri valamely szám; *A*-t *E*-t is tehát méri valamely szám. És minthogy *E* a feltét szerint egyszerü szám, az egyszerü számot pedig nem méri más csak maga; tehát *A E* számokat *E* méri: úgy hogy *E* méri *A*-t. De *D*-t is méri; tehát *E* méri *A D* számokat. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy a mely egyszerü számok *D*-t mérik, ugyanazok *A*-t is mérik: m. b. k.

13. Feladat:

Ha az egységen kezdve akárhány szám egyarányu, s az egység utáni szám egyszerü: a legnagyobbikat semmi más szám az egyarányu számok közül valókon kivül nem méri.

1. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E,— F,—

Legyen az egységen kezdve egyarányu akárhány *A B C D* szám, és az egység utáni, *A*, legyen egyszerü szám: azt mondom, hogy a legnagyobbikat közöttük, *D*-t, semmi más szám, *A B C* számokon kivül, nem méri.

Mert, ha lehet, mérje *E*; és *E*, *A B C* számok egyikével se legyen azonegy. Világos, hogy *E* nem egyszerü szám. Mert ha *E* egyszerü, és méri *D*-t, *A*-t is méri, holott *A* egyszerü, és *E A*-val nem azonegy, mi lehetetlen; nem egyszerü tehát *E*, tehát szerkesztett. De minden szerkesztett számot mér valamely egyszerü szám; *E*-t tehát méri valamely egyszerü szám. Azt mondom, hogy semmi más egyszerü nem méri csak *A*. Mert ha *E*-t más méri, *E* pedig méri *D*-t, tehát amaz is méri *D*-t: úgy hogy *A*-t is méri egyszerü létire, nem levén vele azonegy; mi lehetetlen; *A* tehát méri *E*-t. És minthogy *E* méri *D*-t, mérje *F* szerint. Azt mondom,hogy F, A B C számok egyikével sem azonegy. Mert ha F az A B C számok valamelyikével azonegy, és D-t E szerint méri; tehát A B C számok valamelyike is méri D-t E szerint. De A B C számok egyike D-t az A B C számok egyike szerint méri; tehát E is A-nak B-nek C-nek egyikével azonegy, mi nem úgy van a feltét szerint; F tehát A-nak B-nek C-nek egyikével sem azonegy. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy F-fet A méri, ismét megmutatván, hogy F nem egyszerü. (Mert ha egyszerü, és D-t méri, A-t is az egyszerüt, mérendi, nem levén vele azonegy, mi lehetetlen ; F tehát nem egyszerü ; tehát szerkesztett. De minden szerkesztett számot mér valamely egyszerü szám; F-fet tehát méri valamely egyszerü szám.Már azt mondom,hogy nem méri más egyszerü, csak A. Mert ha más egyszerü szám méri F-fet, F pedig méri D-t, tehát amaz is méri D-t: úgy hogy A-t is, az egyszerüt, méri, nem levén vele azonegy, mi lehetetlen; A tehát méri F-fet). És minthogy E, D-t F szerint méri, tehát E F-fet

1. A,	5. B,	25. C,	125. D,	625.
	E,—	F,—	G,—	H,—

szorozva csinálta D-t. De A is C-t szorozva D-t csinálta ; az A, C származatuk tehát egyenlö az E F származatukkal: egyarányban van tehát a mint A E-hez, úgy F C-hez. De A E-t méri ; tehát F is méri C-t. Mérje G szerint. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy G az A B számoknak egyikével sem azonegy, és hogy A méri G-t. És minthogy F C-t G szerint méri : tehát F G-t szorozva csinálta C-t. De A is B-t szorozva C-t csinálta. Az A B származatuk tehát egyenlö az F G származatukkal ; tehát egyarányban van a mint A F-hez, úgy G B-hez. De A méri F-fet, tehát G is méri B-t. Mérje H szerint. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy H A-val nem egy. És mivel G B-t H szerint méri ; tehát G H-t szorozva csinálta B-t. De A is magát szorozva B-t csinálta ; a H G származatuk tehát egyenlö az A négyszegével ; tehát a mint H A-hoz, úgy van A G hez. De A méri G-t; méri tehát H is A-t, az egyszerüt, nem levén vele azonegy, mi képtelen, nem méri tehát a legnagyobbikat, D-t, A-n B-n C-n kivül más szám : m. b. k.

14. Feladat:

Bizonyos egyszerü számok által mért legkisebb számot, amazokon kivül semmi más egyszerü szám nem méri.

Ugyanis *B*, *C*, *D* egyszerü számok mérjék *A* legkisebb számot: azt mondom hogy *A*-t *B*-n *C*-n *D*-n kivül semmi más egyszerü szám nem méri.

A; 30.
B, 2. C, 3. D, 5.

Mert, ha lehet, mérje *E* egyszerü szám, és *E* *B*-nek *C*-nek *D*-nek egyikével se legyen azonegy. Már minthogy *E* méri *A*-t, mérje *F* szerint, *E* tehát *F*-fet szorozva csinálta *A*-t. De *A*-t *B C D* egyszerü számok is mérik. Ha pedig két szám egymást szorozva csinál számot és származatukat méri valamely szám: a szorzók egyikét is méri; *B C D* tehát mérik *E F* számok egyikét. *E*-t ugyan nem mérik, mert *E* egyszerü, és *B C D* számok egyikével sem azonegy; tehát *F*-fet mérik, holott kisebb *A*-nál, mi lehetetlen; mert *A*, a feltét szerint, a *B C D* számok által mérttek közül legkisebb; *A*-t tehát *B*-n *C*-n *D*-n kivül más egyszerü szám nem méri: m. b. k.

A, 30.
B, 2. C, 3. D, 5.
E,— F,—

15. Feladat:

Ha folyvást egyarányu három szám a velök egyarányuak között legkisebb: kettejök akárhogy együttvéve a harmadikhoz egyszerü leend.

Legyen folyvást egyarányu s a velök egyarányuak közt legkisebb *A B C* három szám: azt mondom, hogy *A B C* számok ketteje akárhogy öszvevéve egyszerü leend a harmadikhoz, azaz: *A B*, *C*-hez, *B C*, *A*-hoz, és *C A*, *B*-hez.

A, 9. B, 12. C, 16.

Mert vétessék *A B C* számokkal ugyanazon arányban két legkisebb szám: *DE EF*. Világos, hogy *DE* magát szorozva *A*-t csinálta, *EF*-et szorozva *B*-t csinálta, *EF*

A, 9. B, 12. C, 16.
D...E....F

megint magát szorozva C-t csinálta. És minthogy DE EF legkisebbek, egymáshoz egyszerüek. Ha pedig két szám egymáshoz egyszerü, kettejök együtt is mindeniknökhöz egyszerü; tehát DF mind DE-hez mind EF-hez egyszerü. De DE is egyszerü EF-hez; DF DE tehát egyszerüek EF-hez. Ha pedig két szám valamely számhoz egyszerü, származatuk is egyszerü a harmadikhoz; tehát az FD DE származatuk EF-hez egyszerü: úgy hogy az FD DE származatuk az EF négyszegéhez is egyszerü. Mert ha két szám egymáshoz egyszerü, egyiköknek a négyszege is egyszerü a másikhoz *). De az FD DE származatuk a DE négyszege a DE EF származatukkal együtt; a DE négyszege tehát a DE EF származatukkal együtt egyszerü az EF négyszegéhez. Már pedig a DE négyszege A; a DE EF származatuk B; az EF négyszege pedig C; A, B tehát együttvéve C-hez egyszerüek. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy B meg C is egyszerü A-hoz. Még azt mondom, hogy A meg C is egyszerü B-hez. Mert mivel DF mind DE-hez mind EF-hez egyszerü; a DF négyszege is egyszerü a DE EF származatukhoz. De a DF négyszegével egyenlők a DE EF négyszegei, a DE EF kétszeri származatukkal együtt; a DE EF négyszegei is tehát, meg a DE EF származatuk kétszervéve, a DE EF származatukhoz egyszerü. Elválasztva tehát a DE EF négyszegei meg a DE EF származatuk egyszervéve egyszerü a DE EF származatukhoz: s megint elválasztva a DE EF négyszegei egyszerüek a DE EF származatukhoz. Már pedig a DE négyszege A, DE EF származatuk B, s az EF négyszege C; A meg C tehát együttvéve B-hez egyszerü: m. b. k.

Jegyz. A bizonyítmányban a *)-gal jegyzett helyen a kiadások még egyszer ismétlik e szókat: „úgy hogy az FD DE származatuk egyszerü az EF négyszegéhez." — Nagyon felesleges szószaporítás.

16. Feladat:

Ha két szám egymáshoz egyszerü, a mint az első a másodikhoz, a második nem lesz úgy semmi máshoz.

Mert *A B* két szám legyen egyszerü egymáshoz: azt mondom, hogy a mint *A B*-hez, *B* nem lesz úgy semmi máshoz. A, 5. B, 8.

Mert, ha lehet, a mint *A B*-hez úgy legyen *B C*-hez. De *A B* egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig mérik a velök egyarányuakat egyenlőszer, elötag elötagot, utótag utótagot; tehát *A* méri *B*-t; de méri magát is; *A* tehát méri mind *A*-t mind *B*-t, az egymáshoz egyszerüeket, mi képtelen; nem lesz tehát a mint *A B*-hez, úgy *B C*-hez: m. b. k. A, 5. B, 8. C,—

17. Feladat:

Ha akárhány szám folyvást egyarányu s a szélsök egymáshoz egyszerüek: a mint az első tag a másodikhoz, nem lesz úgy a végső semmi máshoz.

Legyen akárhány, *A B C D* szám folyvást egyarányban és szélsőik *A D* legyenek egyszerüek egymáshoz: azt mondom hogy a mint *A B*-hez, *D* nem lesz úgy semmi máshoz. A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.

Mert, ha lehet, legyen a mint *A B*-hez, úgy *D E*-hez; cserélve tehát a mint *A D*-hez, úgy van *B E*-hez. De *A D* egyszerüek, az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig a velök egyarányuakat egyenlöszer mérik, elötag elötagot, s utótag utótagot; méri tehát *A B*-t. És a mint *A B*-hez, úgy van *B C*-hez; *B* is tehát méri *C*-t, úgy hogy *A* is méri *C*-t. És mivel a mint *B C*-hez, úgy van *C D*-hez, *B* pedig méri *C*-t: tehát *C* is méri *D*-t. De *A* méri *C*-t: úgy hogy *D*-t is méri. Méri magát is; tehát *A* méri *A D* számokat, egymáshoz egyszerü létökre; mi lehetetlen; nem lesz tehát a mint *A B*-hez, úgy *D* valami máshoz: m. b. k. A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E,—

18. F e l a d a t :

Két szám adatván, megvizsgálni: lehet-e hozzájok harmadik egyarányut lelni.

Legyen a két adott szám *A B*; és kelljen megvizsgálni: lehet-e hozzájok harmadik egyarányut lelni.

a) A, 4. B, 7.
b) A, 4. B, 6.
c) A, 6. B, 4.

A B vagy egyszerüek egymáshoz, vagy nem. Már ha egymáshoz egyszerüek, meg van mutatva, hogy lehetetlen hozzájuk harmadik egyarányut lelni.

A, 4. B, 7.

De *A B* ne legyenek egymáshoz egyszerüek, és *B* magát szorozva csinálja *C*-t. Már *A* *C*-t vagy méri vagy nem méri. Mérje elöbb *D* szerint; *A* tehát *D*-t szorozva csinálta *C*-t. De *B* is magát szorozva *C*-t csinálta: az *A D* származatuk tehát egyenlö a *B* négyszegével; tehát a mint *A B*-hez, úgy van *B D*-hez; leletett tehát *A B* számokhoz harmadik egyarányu szám, *D*.

A, 4. B, 6.
D, 9. C, 36.

De ne mérje *A C*-t: azt mondom, hogy lehetetlen *A B* számokhoz harmadik egyarányu számot lelni. Mert ha lehet, lelessék *D*; tehát az *A D* származatuk egyenlö a *B* négyszegével, a *B* négyszege pedig *C*; az *A D* származatuk tehát egyenlö *C*-vel: úgy hogy *A D*-t szorozva csinálta *C*-t; *A* tehát méri *C*-t *D* szerint. De azt tevök fel, hogy nem méri, mi képtelen; nem lehet tehát *A B* számokhoz harmadik egyarányut lelni, ha *A C*-t nem méri: m. b. k.

A, 6. B, 4.
D,— C, 16.

19. F e l a d a t :

Három szám adatván, megvizsgálni: lehet-e hozzájuk negyedik egyarányut lelni.

Legyen a három adott szám *A BC*; és azt kelljen megvizsgálni: lehet-e hozzájok negyedik egyarányut lelni.

a) A, 4. B, 6. C, 9.
b) A, 8. B, 12. C, 18.
c) A, 4. B, 6. C, 5.

A B C vagy folyvást egyarányuak, s szélsöik *A C* egymáshoz vagy egyszerüek, vagy nem.

A, 4. B, 6. C, 9.

Ha már *A B C* folyvást egyarányuak s szélsöik *A C* egymáshoz egyszerüek, meg van mutatva, hogy lehetetlen hozzájuk negyedik egyarányu számot lelni.

Ha pedig nem, *B C*-t szorozva csinálja *D*-t: már *A D*-t vagy méri, vagy nem méri.

A, 8. B, 12. C. 18. E, 27.
D, 216

Mérje elöbb *E* szerint; *A* tehát *E*-t szorozva *D*-t csinálta. De *B* is *C*-t szorozva *D*-t csinálta: az *A E* származatuk tehát egyenlö a *B C* származatukkal; tehát egyarányban a mint *A* *B*-hez, úgy van *C* *E*-hez; leletett tehát *A B C* számokhoz negyedik egyarányu, *E*.

De ne mérje *A D*-t: azt mondom, hogy *A B C* számokhoz negyedik egyarányu számot lelni lehetetlen. Mert ha lehet: lelessék *E*; az *A E* származatuk tehát egyenlö a *B C* származatukkal. De *B C* származatuk *D*; tehát az *A E* származatuk is egyenlö *D*-vel; *A* tehát *E*-t szorozva *D*-t csinálta; tehát *A* méri *D*-t *E* szerint; úgy hogy *A* méri *D*-t. De nem is méri, mi képtelen; nem lehet tehát *A B C* számokhoz negyedik egyarányut lelni, midőn *A* nem méri *D*-t: m. b. k.

A, 4. B, 6. C, 5. E,—
D, 30.

Jegyz. Ez Euklidesnek a kézirati kiadók és leirók által leginkább megrontott feladatai egyike. — A baseli kiadó, kéziratát hijánosnak vélve, Zamberti latin fordításából fordított vissza görögre némi potlékokat. Ezek a potlékok ugyan a vaticani kéziratban az eredeti görög nyelven is megtaláltattak; de sem egyik sem másik a logika elött meg nem állhat. Az oxfordi kiadó megrótta ugyan a hibát; de elégnek tartá rekeszbe tenni a több mint gyanus helyet. Mi a fordítói hüséget inkább szelleminek, mint betüinek tartjuk; s ehhez csak ott ragaszkodunk, hol amaz sérelmet nem szenved. Ennélfogva Euklides szeplötlen bizonyításait ama mocsokkal illettetni nem engedhetök.

20. Feladat:

Egyszerü szám, minden felvett egyszerü számok mennyiségénél több van.

Legyenek a felvett egyszerü szá- a) A, 2. B, 3. C, 5.
mok A B C: azt mondom, hogy A B b) A, 5. B, 3. C, 7.
C-nél több egyszerü szám létez.

Mert vétessék az A B C számok ál- A, 2. B, 3. C, 5.
tal mért legkisebb szám, és legyen az DE, E..30. D.F
és adassék DE-hez DF egység: már EF
vagy egyszerü, vagy nem. Ha egyszerü, úgy találtatott A B C számoknál több egyszerü szám: A B C EF.

De ne legyen EF egyszerü; tehát A, 5. B, 3. C, 7.
méri valamely egyszerü szám. Mérje G E..105..D.F
egyszerü szám: azt mondom, hogy G az G, 53.
A B C számok egyikével sem ugyanaz.
Mert ha G az A B C számok valamelyikével ugyanaz, A B C pedig DE-t mérik, tehát G is méri DE-t. De EF-fet is méri; tehát a maradék DF egységet is méri G, szám létire, mi képtelen. Már pedig fel van téve, hogy egyszerü: találtatott tehát a felvett A B C számoknál több egyszerü szám: A B C G: m. b. k.

21. Feladat:

Ha akárhány párosszám öszvetétetik: az öszveg páros lesz.

Legyen öszve- A....B......C..D........E
téve akárhány pá-
ros AB BC CD DE szám: azt mondom, hogy az öszveg AE páros.

Mert minthogy AB BC CD DE számok közül mindenik páros, van hasonfele, úgy hogy az egésznek, AE-nek is van hasonfele. Páros szám pedig az, melyketté osztható; AE tehát páros: m. b. k.

22. Feladat:

Ha páratlan számok akárhányan öszvetétetnek, és mennyiségök páros: az öszveg páros lesz.

Legyenek akárhány páratlan AB BC CD DE számok páros mennyiségben öszvetéve: azt mondom, hogy az öszveg AE páros.

A . . . B . . . . . C . . . . D . . . . F

Mert mivel AB BC CD DE számok mindenike páratlan, ha mindenikből egységet veszünk el, a maradékok mindenike páros leend: úgy hogy a belőlök álló egész is páros. De az egységek mennyisége is páros; tehát az öszveg AE páros: m. b. k.

23. Feladat:

Ha páratlan számok akárhányan öszvetétetnek, és mennyiségök páratlan; az öszveg is páratlan lesz.

Legyenek akárhány páratlan AB BC CD számok páratlan mennyiségben öszvetéve: azt mondom, hogy az öszveg, AD, páratlan.

A . . . . . B . . . . C . . . . D

Mert vétessék el CD-ből DE egység; tehát a maradék CE, páros. De CA is páros; tehát az egész AE páros. És DE egység hozzá; tehát AD páratlan: m. b. k.

A . . . . . B . . . . C . . . . E . D

24. Feladat:

Ha páros számtól páros vétetik el, a maradék is páros lesz.

Mert AB páros számtól vétessék el BC páros szám; azt mondom, hogy a maradék, CA, páros.

A . . . . . . C . . . . B

Mert minthogy AB páros, van hasonfele; ugyanazért

BC-nek is van hasonfele; tehát a maradék *CA*-nak is van fele, *AC* tehát páros: m. b. k.

25. Feladat:

Ha páros számtól páratlan vétetik el: a maradék páratlan lesz.

Ugyanis *AB* páros számtól vétessék el *BC* páratlan szám: azt mondom, hogy a maradék *CA* páratlan.

A . . . . C . . . . . B

Mert vétessék el *BC*-től *CD* egység; tehát *BD* páros. De *AB* is páros; tehát a maradék *AD* is páros. Tehát *CD* egységet elvéve, *AC* páratlan: m. b. k.

A . . . . C . D . . . . B

26. Feladat:

Ha páratlan számtól páratlan vétetik el: a maradék páros lesz.

Ugyan is *AB* páratlan számtól vétessék el a páratlan *BC*: azt mondom, hogy a maradék *AC* páros.

A . . . . C . . . . B

Mert minthogy *AB* páratlan, vétessék el tőle *BD* egység; tehát a maradék *AD* páros. Ugyanazért *CD* is páros, úgy hogy a maradék *AC* is páros: m. b. k.

A . . . . C . . . . . . D . B

27. Feladat:

Ha páratlan számtól páros vétetik el, a maradék páratlan lesz.

AB páratlan számtól vétessék el a páros *BC*: azt mondom, hogy a maradék *AC* páratlan.

A . . . . . C . . . . B

Mert vétessék el *AD* egység; *DB* tehát páros. De *BC* is páros; tehát a maradék *CD* is páros. De *AD* egység is ott van; tehát *CA* páratlan: m. b. k.

A . D . . . . C . . . . B

28. Feladat:

Ha páratlan szám párost szorozva csinál számot : a származat páros lesz.

A páratlan szám a páros B-t szorozva csinálja C-t: azt mondom, hogy C páros. A, 3. B, 4. C, 12.

Mert minthogy A B-t szorozva csinálta C-t; tehát C annyi, B-vel egyenlő számból áll, a hány egység van A-ban. De B páros; C tehát párosokból áll. Már pedig a páros számok akárhányan öszvetétetnek, az öszveg páros lesz; C tehát páros: m. b. k.

29. Feladat:

Ha páratlan szám páratlant szorozva csinál számot: a származat páratlan lesz.

Mert A páratlan szám a páratlan B-t szorozva csinálja C-t: azt mondom, hogy C páratlan. A, 3. B, 5.

Mert mivel A B-t szorozva csinálta C-t; tehát C annyi, B-vel egyenlő számból áll, a hány egység van A-ban. Már pedig mind A mind B páratlanok; C tehát páratlan számokból áll, melyeknek mennyisége is páratlan; úgy hogy C páratlan: m. b. k.

30. Feladat:

Ha páratlan szám páros számot mér, hasonfelét is méri.

Ugyanis A páratlan szám mérje a páros B-t: azt mondom, hogy hasonfelét is méRendi. A, 3. B, 12. C, 4.

Mert mivel A méri B-t; mérje C szerint: azt mondom, hogy C nem páratlan. Mert ha lehet, legyen. És minthogy A B-t C szerint méri; tehát A C-t szorozva csinálta B-t; B tehát áll páratlan számokból, melyeknek mennyisége páratlan; tehát B páratlan, mi képtelen, mert a feltét szerint páros; nem páratlan tehát C: tehát C páros; úgy hogy A B-t párosszor méri, és ugyanazért hasonfelét is mérendi: m. b. k.

31. Feladat:

Ha páratlan szám valamely számhoz egyszerü: ennek kettőzetéhez is egyszerü lesz.

A páratlan szám legyen valamely B számhoz egyszerü, B-nek kettőzete pedig legyen C: azt mondom, hogy A C-hez is egyszerü leend.

A, 3. B, 5. C, 10.

Mert ha A C nem egyszerüek, méрendi őket valamely szám. Mérje és legyen az D. A pedig páratlan; tehát D is páratlan. És minthogy D páratlan létire méri C-t, C pedig páros; tehát C-nek hasonfelét is mérendi D. De a C hasonfele B; D tehát méri B-t. De méri A-t is; úgyhogy D mind A-t mind B-t méri, holott egyszerüek egymáshoz: mi lehetetlen; nem nemegyszerü tehát A C-hez; A C tehát egyszerüek egymáshoz: m. b. k.

A, 3. B, 5. C, 10.
D,—

32. Feladat:

A kettős számon kezdve kettőzött számok mindenike csak párosszor páros.

Mert A kettős számon kezdve kettőztessék akárhány B C D szám: azt mondom, hogy B C D csupán csak párosszor párosok.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16

Hogy B C D számok mindenike párosszor páros, világos; mert a kettőn kezdve kettőztettek. De azt mondom, hogy csupáncsak is. Mert vétessék fel E egység. Minthogy az egységen kezdve akárhány szám folyvást egyarányu, az egység utáni A pedig egyszerü szám, az A B C D számok legnagyobbikát más szám kivéve A-t B-t C-t nem méri. Már pedig A B C közül mindenik páros; D tehát csupáncsak párosszor páros. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy B C közül mindenik csak párosszor páros: m. b. k.

E, 1. A, B, 4. C, 8. D, 16.

33. Feladat:

Ha égy számnak hasonfele páratlan, az a szám csak párosszor páratlan.

Mert A számnak legyen páratlan a hasonfele: azt mondom, hogy A csak párosszor páratlan.

A . . . .

Hogy párosszor páratlan, világos, minthogy hasonfele páratlan levén párosszor méri. De azt mondom, hogy csak-is. Mert ha A párosszor páros is, mérni fogja valamely páros szám, páros szám szerint: úgy hogy hasonfelét is, páratlan létire, méri egy páros szám; mi képtelen; A tehát csak párosszor páratlan: m. b. k.

34. Feladat:

Ha valamely páros szám, sem nem a kettős szám kettőzetei közül való, sem a hasonfele nem páratlan; az a szám párosszor páros, is, párosszor páratlan is.

Mert A szám se ne legyen a kettős szám kettőzetei közül, se a hasonfele ne legyen páratlan: azt mondom, hogy A párosszor páros is, párosszor páratlan is.

A . . . .

Hogy A párosszor páros, világos; mert a hasonfele nem páratlan. De azt mondom, hogy párosszor páratlan is. Mert ha A-t ketté vágjuk, s hasonfelét is ketté, s mind ezt míveljük, végre valamely páratlan számra találunk, mely A-t páros szám szerint méri. Mert ha nem; a kettőre találunk, és így az A a kettős szám kettőzetei közül leend; mi nem úgy van feltéve; úgy hogy A párosszor páratlan. De megmutattaték, hogy párosszor páros is: A tehát párosszor páros, és párosszor páratlan: m. b. k.

35. Feladat:

Ha akárhány szám folyvást egyarányban van, s a másodiktól és végsőtől elvétetik az elsővel egyenlő: a mint a másodiknak feleslege az elsőhöz, úgy lesz a végsőnek feleslege az előtte-valókhoz öszvesen.

Legyen akárhány A BC D EF szám A-n a legkisebbenkezdve folyvást egyarányban, és vétessenek el külön-külön BC-től s EF-től A-val egyenlö GC FH számok: azt mondom, hogy a mint BG A-hoz, úgy van EH az A BC D számok öszvegéhez.

A........

B....G........C

D..................

E....................H........F

Mert vétessék fel BC-vel egyenlö FK, és D-vel egyenlö FL És minthogy FK egyenlö, BC-vel, melyből FH GC-vel egyenlö; tehát a maradék HK, a maradék GB-vel egyenlö. És minthogy a mint EF D-hez, úgy D BC-hez és BC A-hoz, de D FL-lel, BC FK-val és A FH-val egyenlök; tehát a mint EF LF-hez, úgy van LF FK-hoz és FK FH-hoz; elválasztva pedig a mint EL LF-hez, úgy van LK FK-hoz és KH FH-hoz. Már pedig a mint az elötagok egyike az utótagok egyikéhez, úgy van minden elötag öszvege minden utótag öszvegéhez; tehát a mint KH FH-hoz, úgy vannak EL LK KH ezekhez: LF KF HF. De KH BG-vel, FH A-val, LF KF HF pedig D BC A számokkal egyenlök; tehát a mint BG A-hoz, úgy van EH ezekhez: D BC A: a mint tehát a másodiknak feleslege az elsöhöz, úgy van a végsönek feleslege minden elötte-valókhoz: m. b. k.

A........

B....G........C

D..................

E.........L......K....H........F.

36. Feladat:

Ha az egységen kezdve akárhány szám folyvást kettőzött egyarányban vétetik, míg mind öszvetéve egyszerü számot tesznek, s az öszveg a végsővel szoroztatik: a származat tökélyes szám lesz.

Mert az egységen kezdve legyen akárhány *A B C D* szám kettőzött egyarányban véve, mig öszvetéve egyszerü számot tesz-	1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 31. F . . 496 . . G

nek, és az öszvetett egészszel legyen egyenlő *E*, s *E D*-t szorozva csinálja *FG*-t: azt mondom, hogy *FG* tökélyes szám.

Mert a hányan vannak *A B C D* számok, annyian vétessenek *E*-n kezdve kettőzött egyarányban *E HK L M*: te-	1. A, 2. B, 4. C, 8. D. 16. E, 31. H . . 62. . K. L, 124. M, 248. F . . 496 . . G

hát egyközösen a mint *A D*-hez, úgy van *E M*-hez; az *E D* származatuk tehát egyenlő az *A M* származatukkal. De az *E D* származatuk *FG*; tehát az *A M* származatuk is *FG*; *A* tehát *M*-met szorozva csinálta *FG*-t; tehát *M* méri *FG*-t az *A*-beli egységek szerint. De *A* a kettős szám, *FG* tehát a kettőzete *M*-nek. De *M L HK E* is folyvást kettőzetei egymásnak; *E HK L M FG* tehát folyvást egyarányuak kettőzött egyarányban.

Vétessenek el a második-tól *HK*-tól, és a végsőtől	1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 31. H . . 31 . . N . . 31. K L, 124. M, 428. F . . 31 . . O . . 465 . . G

FG-től külön-külön az elsővel *E*-vel egyenlő *HN FO* számok; tehát a mint a második szám feleslege az elsőhöz, úgy van a végső szám feleslege az elötte-valók öszvegéhez: tehát a mint *NK E* hez, úgy *OG*, az *M L HK E* számok öszvegéhez. De *NK* egyenlő *E*-vel; *OG* is tehát egyenlő *M, L HK E* számokkal, *OF* is pedig egyenlő *E*-vel, *E* megint egyenlő *A B C D* számokkal meg az egységgel; az egész *FG* tehát egyenlő *E HK L M* és *A B C D* számokkal meg az egységgel, és ezek mérik. Még azt mondom, hogy nem is méri *A B C DEHKLM* számokat és

1. A, 2.	B, 4	C, 8.	D, 16.	
E, 31.	H..31..	N..31..	K L, 124.	M, 248.
F..31..	O..465..	G		
P,—	Q,—			

az egységet kivéve, semmi más. Mert, ha lehet, mérje *FG*-t valamely *P* szám, és *P* egyikével is *A B C D E HK L M* számoknak ne legyen azonegy. És a hányszor *P* méri *FG*-t annyi egység legyen *Q*-ban; *Q* tehát *P*-t szorozva csinálta *FG*-t. De *E* is *D*-t szorozva *FG*-t csinálta; tehát a mint *E Q*-hoz, úgy *P D*-hez. És minthogy *A B C D* az egységen kezdve folyvást egyarányuak, az egység utáni pedig, *A*, egyszerü szám; tehát *D*-t *A*-n *B*-n *C*-n kivül semmi más szám nem méri; már pedig *P* a feltét szerint *A B C* számok egyikével sem azonegy; tehát *P* nem mérendi *D*-t. De a mint *P D*-hez, úgy van *E Q*-hoz, tehát *E* sem méri *Q*-t.Már pedig *E* egyszerü szám: és minden egyszerü szám minden számhoz, melyet nem mér, egyszerü; *E Q* tehát egymáshoz egyszerüek. De az egyszerüek legkisebbek, a legkisebbek pedig mérik egyenlőször a velök egyarányuakat, előtag előtagot,utótag utótagot, és a mint *E Q*-hoz, úgy van *P D*-hez; egyenlőször méri tehát *E P*-t és *Q D*-t. Már *D*-t semmi más szám *A*-n *B*-n *C*-n kivül nem méri; *Q* tehát *A B C* számok egyikével azonegy. Legyen *B*-vel egy. És a hányan vannak *B C D*, annyi szám vétessék *E*-n kezdve: *E HK L*: Már *E HK L* a *B C D* számokkal egyarányuak; egyközösen tehát a mint *B D*-hez, úgy van *E L*-hez; tehát a *B L* származatuk egyenlő a *D E* származatukkal. De a *D E* származatuk egyenlő a *Q P* számokéval; a *Q P* származatuk is egyenlő tehát a *B L* számokéval; tehát a mint *Q B*-hez, úgy *L P*-hez, *Q* pedig *B*-vel azonegy; *L* is tehát *P*-vel azonegy; mi lehetetlen; mert a feltét szerint *P* egyikével is a kitett számoknak nem azonegy; nem méri tehát *FG*-t semmi szám, *A B C D E HK L M* számokon és az egységen kivül. Az is megmutattaték, hogy *FG* ime számokkal *A B C D E HK L M* meg az egységgel egyenlö; már pedig tökélyes szám az, mely a részei öszvegével egyenlö, *FG* tehát tökélyes szám: m. b. k.

EUKLIDES ELEMEINEK

TIZEDIK KÖNYVE.

Értelmezések:

1. Egymáshoz *mérhető* mekkoraságoknak az ugyanazon mértékkel mérettek mondatnak.

Jegyz. Olykor *összemérhetőknek*, meg *egymértéküek*nek is fogjuk nevezni. A görögnek σύμμετρος; latinnak: commensurabilis; a németnek nincs *bévett* honi szava reá.

2. Egymáshoz *szertelenek* pedig azok, melyeknek semmi közös mértékét nem találhatni.

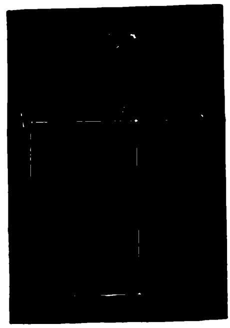
Jegyz. *Szertelen*, = ἀσύμμετρος = incommensurabilis. Midőn egyik mekkoraságnak nincs oly kicsiny része, mely valamennyi*szer* téve a másik mekkoraságot hiány vagy maradék nélkül eléállithatná. A közbeszédben szokott pleonasticai kifejezésre: „szertelen nagy, szertelen sok“ satb. könnyü az alkalmazás.

3. Egyenek egymáshoz *emeletben* mérhetők, midőn négyszegeiket azon egy lappal mérhetni.

Jegyz. Adott vonal *emeletének* mond könyvünk akarminő alaku lapot, mely ama vonal négyszegével egyenlő P. o. $ABCD$ négyszeg, és az ezzel egyenlő EF derékszeg, $GHKL$ egyközény, és MGN háromszeg az

AB vonal emeletei. Viszontagoson *AB* egyen, akár *AC*, akár *EF*, akár *GHKL*, akár *MGN* lapokra *emelhető*nek vagy *GHKL* satb. lap *emeletü*nek mondatik.

4. *Szertelenek* ellenben, midőn négyszegeik közös mértékéül semmi lapot nem lelhetni.



Jegyz. Legyen, *ABDC* négyszeg, és irassék *AB*-re *AEB*, félkör; vágassék *AB* egymáshoz szertelen *AF FB* darabokra *F*-nél; állitassék *F*-ben *AB*-re *FG* függő, és nyujtassék egyfelől a félkőr kerületéig, másfelől a négyszeg átelleni oldaláig, és vonassanak *AE BE*.

Már mivel az *AE* négyszege *AFGC* derékszeggel, a *BE*-é *FBDG* derékszeggel egyenlők; de a mint *AF FB*-hez, úgy van *AFGC FBDG*-hez; tehát a mint *AF FB*-hez, úgy van az *AE* négyszege, a *BE* négyszegéhez. Már pedig *AF FB*-nek nincs semmi közös mértékök, tehát az *AE BE* négyszegeiknek sem leend semmi közös mértékök. A nevezett négyszegek tehát egymáshoz szertelenek, vagyis *AE BE* egyenek egymáshoz *emeletben szertelenek.*

5. Ezeket feltévén, megmutatjuk, hogy egy felvett egyenhez végtelen sokaságu részint hoszban, részint csak emeletben mérhető és szertelen egyenek vannak: hivjuk hát a felvett egyent *neves*nek.

6. S az ehhez akár hoszban és emeletben akár csak emeletben mérhetőket *neveseknek*.

Jegyz. A *neves*séget itt abban az értelemben kell venni, melyet a 7. 8. s 9-ik könyvünkben adtunk, s a miért ma is a törtek alsóit *nevezők*nek mondják. Egy akármely adott vonal magában véve mindig neves, mert minden adható számu *részekre* vághatni. Ha már ezzel egy más felvett egyent összehasonlítunk, és ezt az elsőnek valami nevü ú. m. kettőd, harmad, negyed . . . , milliód része felméri: akkor eme második is neves, mert lehet őt az elsőnek egy, két, három, sat. kettődjének; egy, két, három, négy öt, hét sat. harmadának; egy — száz — 200,000 sat. milliódjának nevezni. Ha pedig *AB*-nek nincs oly vonal-része mely *CD*-t felmérné, vagyis *AB CD*-hez *hosszban szertelen* volna, így is lehet *CD*-t *AB*-ről nevezni; mert lehet az *AB* négyszegének oly laprésze, mely a *CD* négyszegét felméri, s ekkor *AB CD*-hez csak *emeletben mérhető*. Ha p. o. a *AB* négyszegének század része ötvenhétszer véve tenné a *CD* négyszegét, *CD* a felvett neves (ú. m.

100 lapra emelhető) AB-hez képest maga is neves, úgymint 57 lapra emelhető. Szembetüntető például: FG vonal legyen hét részre osztva, reá egyfelől FHG félkör, másfelől $FGKL$ négyszeg irva, és a negyedik osztálypontnál HMN vonal FG-hez derékszegletre húzva; vonjuk végre az osztálypontoknál HM-hez OT PU QX RY SZ egyközüeket.

Már a 10-ik könyv folytában meg lesz mutatva, hogy FH HG-hez hosszban szertelen; de az FH négyszege FN derékszeggel, a HG-é MK derékszeggel egyenlők; NK pedig FM-nek háromnegyede; tehát HG egyen FH-hoz hasonlítva *neves*, mert a HG négyszege az FH négyszegének háromnegyede.

7. Az ugyanehhez szerteleneket pedig *nevetlenek*nek.

Jegyz. A *nevességet*, valamint *nevetlenséget* csak *számi* nevekre érti szerzőnk, miszerint ha két, hoszban s emeletben szertelen egyen van adva, egyiket a másiknak, avagy csak egyiknek négyszegét a másik négyszegének részeiben kifejezni lehetetlen. Ez a *számi* nevetlenség s a ma divatozó betünyelvi (algebrai) jegyek hiánya kénszeríté a régieket, a nevetlen egyeneket egymáshoz és felvett nevesekhez való viszonyaikból merített *tulajdonsági* nevekkel megkülönböztetni, s arra, a minek tiszta felfogása ma egy-két vonásba kerül, terjedelmes feladatokat és fárasztó bizonyítmányokat fordítni.

8. És a felvett egyen négyszegét *neves*nek.

9. És az ehhez mérhető négyszegeket *nevesek*nek.

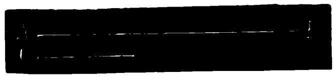
10. Az ehhez szerteleneket pedig *nevetlenek*nek.

Jegyz. Mint látjuk, a lapok vagy tulajdonkép a velök egyenlő négyszegek neves volta szűkebb korlátok közé van szorítva, mint a vonaloké, mert ezeket nemcsak maguk, hanem emeleteik számviszonyairól is egész számban vagy törtben megnevezhetni. Tehát neves egyenhez hoszban szertelen vonal lehet neves, de a neves laphoszszertelen lap mindig nevetlen is. Itt tehát a *nevesség* és *összemérhetőség*, *nevetlenség* és *szertelenség* azont jelentik.

11. És az ezekre emelt egyeneket, még pedig ha négyszegek, magukat az oldalaikat, ha pedig más valamely egyenes vonalu képletek, az ezekkel egyenlő négyszegeket alkotó egyeneket, *nevetlenek*nek.

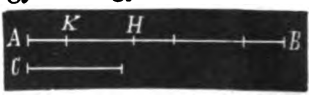
1. Feladat:

Két nem egyenlő mekkoraságot felvevén, ha a nagyobbikból felénél nagyobbat vagy felét, a maradékból megint felét elveszszük, és mind ugyanazt miveljük: marad végre oly mekkoraság, mely a felvett kisebbik mekkoraságnál kisebb lesz.



Legyen AB és C két nem egyenlő mekkoraság, melyeknek nagyobbika AB legyen: azt mondom hogy ha AB-ből felénél nagyobbat vagy felét, a maradékból megint felénél nagyobbat, vagy felét elveszszük és mind ugyanazt miveljük, végre marad oly mekkoraság, mely C mekkoraságnál kisebb lesz.

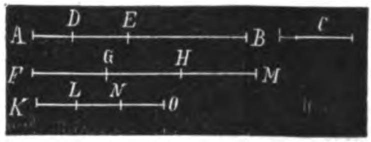
Mert C folyvást szorozva egykor nagyobb lesz AB-nél. Szorozzuk, és legyen DE a C szorzata, és AB-nél nagyobb; oszszuk DE-t C-vel egyenlő DF FG GE részekre, és vegyünk el AB-ből felénél nagyobbat, vagy felét, BH-t, AH-ból pedig felénél nagyobbat, vagy felét HK-t, és mind ezt míveljük, mig az AB osztályai egyenlő mennyiségüek lesznek a DE osztályaival.



Legyenek már AK KH HB osztályok DF FG GE osztályokkal egyenlő mennyiségüek: minthogy DE nagyobb AB-nél, s DE-ből felénél kisebb EG, AB-ből pedig felénél nagyobb vagy a fele BH van elvéve; tehát GD maradék nagyobb HA maradéknál. És minthogy GD nagyobb HA-nál, és GD-ből a fele GF, HA-ból pedig felénél nagyobb vagy a fele HK van elvéve; tehát DF maradék nagyobb AK maradéknál. Már pedig DF egyenlő C-vel; tehát C is nagyobb AK-nál, AK tehát kisebb C-nél.

Maradott tehát AB mekkoraságból a felvett kisebbik C mekkoraságnál kisebb AK mekkoraság: m. b. k.

Más bizonyítmány: Vegyük fel nem egyenlő AB C két mekkoraságot, és legyen C a kisebbik; és mivel C kisebb, szorozva valamikor nagyobb leend AB mekkoraságnál. Le-



gyen akkora mint FM, és vagdaljuk FM-et C-vel egyenlő darabokra; legyenek ezek MH HG GF, és vegyünk el AB-böl felénél nagyobbat BE-t, és AE-ből felénél nagyobbat ED-t, és ez mind addig folyjon, mig az AB választékai (számszerint) egyenlők lesznek az FM választékaival. Legyenek ezek BE ED DA, és KL-nek LN-nek NO-nak mindenike legyen egyenlő DA-val, mig a KO választékai (számszerint) egyenlők leendenek az FM-éivel.

Már mivel BE nagyobb mint AB-nek fele; BE EA-nál nagyobb; tehát DA-nál még sokkal nagyobb. De DA ON-nel egyenlő; BE tehát NO-nál nagyobb. Ismét minthogy ED nagyobb mint EA-nak fele, DA-nál nagyobb. De AD NL-el egyenlő, ED tehát NLnél nagyobb. Az egész BD tehát OL-nél nagyobb, De DA LK-val egyenlő; tehát az egész BA nagyobb az egész OK-nál. De az MF BA-nál nagyobb; még sokkal nagyobb tehát MF OK-nál. És minthogy ON NL LK egymással egyenlők; de MH HG GF is egyenlők egymással, és az MF-beli darabok mennyisége egyenlő az OK-beliek mennyiségével; tehát a mint KL FG-hez, úgy van OK FM-hez; de FM nagyobb OK-nál, tehát FG is nagyobb LK-nál. Már pedig FG C-vel, LK AD-vel egyenlők; C tehát AD-nél nagyobb: m. b. k.

2. Feladat:

Felvétetvén két nemegyenlő mekkoraság, ha untalan mérjük le váltogatva a kisebbet a nagyobból, s a maradék egyszer sem méri az előtte valót: az a két mekkoraság egymáshoz szertelen leend.

Felvétetvén két egyenlő AB CD mekkoraság, melyek közül AB a kisebbik; mérjük le untalan váltogatva a kisebbet a nagyobból, s a maradék egyszer se mérje az előtte valót: azt mondom hogy AB mekkoraság CD-hez szertelen.

Mert ha összemérhetők, méri őket valami mekkoraság. Mérje, ha lehet, és legyen az E: és AB DF-et mérvén, hagyja meg a magánál kisebb CF-et,

CF megint BG-t mérvén, hagyja meg a magánál kissebb AG-t; és mind e történjék, mig egy E-nél kisebb mekkoraság marad. Legyen meg, és maradjon E-nél kisebb mekkoraság AG. Minthogy már E méri AB-t, de AB méri DF-et, tehát E is mérendi DF-et. Méri az egész CD-et is, tehát a maradék CF-et is méri. De CF méri BG-t, E is tehát méri BG-t. Méri az egész AB-t is, tehát AG maradékot is méri, nagyobb a kisebbet, mi lehetetlen. Nem méri tehát AB CD mekkoraságokat semmi mekkoraság; AB és CD mekkoraságok e szerint szertelenek: m. b. k.

Tehát felvétetvén két nem egyenlö mekkoraság satb.

3. Feladat:

Összemérhető két mekkoraság adatván: legnagyobb közös mértéköket megtalálni.

Legyen az egymáshoz mérhető két mekkoraság

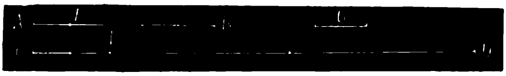
AB CD, melyek közül a kisebbik AB: AB-nek és CD-nek legnagyobb közös mértéköket kell megtalálni.

Már AB mekkoraság vagy méri CD-t vagy nem. Ha ugyan méri AB CD-t, magát is méri; tehát AB AB-nek CD-nek közös mértékök, és világos, hogy a legnagyobb is, mert AB-nél nagyobb mekkoraság AB-t nem méri.

De ne mérje AB CD t; tehát szüntelen mérve le váltogatva kisebbet a nagyobból, a maradék valamikor mérni fogja az előtte valót, mivelhogy AB CD nem szertelenek; még pedig AB ED-t mérve hagyja meg a magánál kisebb

EC-t, EC megint FB-t mérve hagyja meg a magánál kisebb AF-et, és AF mérje EC-t.

Minthogy hát AF méri CE-t, de CE méri FB-t; tehát AF is mérendi FB-t, méri magát is; tehát AF az egész AB-t mérendi. De AB méri DE-t; AF is tehát mérendi DE-t. Méri CE-t is, tehát az egész CD-t méri; AF tehát mind AB-t mind CD-t méri; tehát AF AB-nek CD-nek közös mértékök. Azt mondom, hogy a legnagyobb is. Mert ha nem: lesz AF-nél nagyobb valamely mekkoraság, mely AB-t CD-t méri. Mérje és legyen az G. Minthogy hát G méri AB-t,



de AB méri ED-t: tehát G is méri ED-t. Méri az egész CD-t is; tehát G a maradék CE-t is mérendi. De C méri FB-t G is tehát méri fogja FB-t. Méri az egész AB-t is; tehát AF maradékot is méri, nagyobb a kisebbet; mi lehetetlen; nem méri tehát AB CD mekkoraságokat AF-nél nagyobb mekkoraság; AF tehát AB-nek CD-nek legnagyobb közös mértékök.

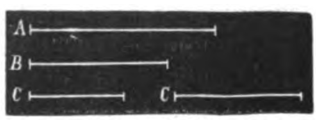
Tehát egymáshoz mérhető két mekkoraság AB CD adatván, meg van találva legnagyobb közös mértékök AF: m. t. k.

Tanuság: Ebből világos: hogy ha egy mekkoraság két mekkoraságot mér, emezeknek legnagyobb közös mértékét is méri.

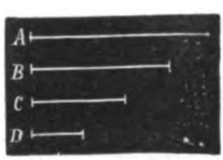
4. Feladat:

Egymáshoz mérhető három mekkoraság adatván: legnagyobb közös mértéköket megtalálni:

Legyen az összemérhető három adott mekkoraság A B C: A-nak B-nek C-nek közös mértéköket kell megtalálni.

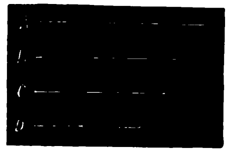


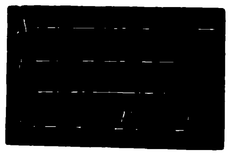
Vétessék kettőnek A-nak B-nek legnagyobb közös mértéke, s legyen az D: DC-t vagy méri, vagy nem méri. Előbb hadd mérje. Minthogy D C-t méri, de A-t B-t is méri: tehát D méri A-t B-t C-t; D tehát A-nak B-nak C-nek közös mértéke. És



világos, hogy a legnagyobb, mert A B mekkoraságokat D-nél nagyobb nem méri.

Megint ne mérje D C-t. Előbb azt mondom, hogy C D-vel egymértékü. Mert mivel A B C egymáshoz mérhetők, mérendi őket valami mekkoraság, mely nyilván A-t B-t is mérendi, úgy hogy az A B legnagyobb mértéköket D-t is mérendi. Méri pedig C-t is úgy hogy a mondott mekkoraság mérendi mind C-t mind D-t, C tehát D vel egymértékü. Vétessék ezeknek legnagyobb közös mértéke, és legyen az E. Minthogy tehát E méri D-t, de D méri A-t B-t; tehát E is mérendi A-t B-t. Méri C-t is; E tehát mind A-t mind B-t mind C-t méri; E tehát A-nak B-nek C-nek közös mértékök. Azt mondom, hogy a legnagyobb is. Mert ha lehet legyen E-nél nagyobb F mekkoraság, mely mérje A-t Bt- C-t; és minthogy F A-t B-t C-t méri, A-t B-t is mérendi; tehát az A B legnagyobb közös mértéköket is mérendi. A-nak B-nek legnagyobb közös mértékök D; F tehát méri D-t. Méri C-t is; tehát F méri mind C-t mind D-t; F tehát méri Cnek D-nek legnagyobb közös mértékét is. Már pedig C-nek D-nek legnagyobb közös mértékök E; tehát F mérendi E-t, nagyobb a kisebbet; mi lehetetlen; nem méri tehát E mekkoraságnál nagyobb mekkoraság A B C mekkoraságokat; E tehát A-nak B-nek C-nek legnagyobb közös mértékök.





Tehát A B C egymáshoz mérhető három mekkoraság adatván, legnagyobb közös mértékök E megtaláltatott: m t. k.

Tanuság: Ebből világos, hogy ha egy mekkoraság három mekkoraságot mér, a legnagyobb közös mértéköket is mérendi.

(Hasonlólag vétetik több mekkoraságoknak is legnagyobb mértéke, s a tanuság ebben az esetben is erőt ér.)

5. Feladat:

Az egymáshoz mérhető mekkoraságok azon arányban vannak egymáshoz, miben szám számhoz.

Legyenek A B egymáshoz mérhető mekkoraságok: azt mondom, hogy A B-hez azon arányban van, miben szám számhoz.

D... E..

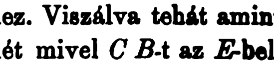
Mert mivel A B-hez mérhető, mérendi őket valami mekkoraság. Mérje és legyen az C. És a hányszor C A-t méri, annyi egység legyen D számban; a hányszor pedig C B-t méri, annyi egység legyen E-ben.

Minthogy C A-t a D-beli egységek szerint méri; de az egység is D-t a bennelevő egységek szerint méri; tehát egyenlőszer méri az egység D számot, C mekkoraság A-t: tehát a mint C A-hoz, úgy van az egység D-hez. Viszálva tehát amint A C-hez, úgy D az egységhez. Ismét mivel C B-t az E-beli egységek szerint méri, de az egység is E-t a bennelevő egységek szerint méri; tehát egyenlőszer méri az egység E-t és C B-t; tehát a mint C B-hez, úgy van az egység E-hez. Megmutattaték pedig az is, hogy a mint A C-hez, úgy van D az egységhez; egyközösen tehát a mint A B-hez, úgy van D szám E-hez.

A B összemérhető mekkoraságok tehát azon arányban vannak egymáshoz, miben D szám E számhoz: m. b. k.

6. Feladat:

Ha két mekkoraság azon arányban van egymáshoz, miben szám számhoz: az a két mekkoraság összemérhető.



D.... E...

Legyen A B két mekkoraság egymáshoz azon arányban, miben D szám E számhoz: azt mondom, hogy A mekkoraság B-vel összemérhető.

Mert a hány egység van D-ben, annyi egyenlő részre osztassék A, s ezeknek egyikével legyen egyenlő C: és a hány egység van E-ben, annyi C-vel egyenlő mekkoraságból állitassék öszve F egyen.

[redacted]

D.... E... [redacted]

Minthogy a hány egység van D-ben, annyi C-vel egyenlő mekkoraság van A-ban: tehát a mi része az egység D-nek, ugyan az a része C is A-nak; tehát a mint C A-hoz, úgy van az egység D-hez. De az egység méri D számot; méri tehát C is A-t. És mivel a mint C A-hoz, úgy az egység is D számhoz: tehát viszálva, a mint A C-hez, úgy van D szám ez egységhez. Ismét, minthogy a hány egység van E-ben, annyi C-vel egyenlő mekkoraság van F-ben; tehát a mint C F-hez, úgy van az egység E számhoz. Már pedig megmutattaték az is, hogy a mint A C-hez, úgy van D az egységhez; tehát egyközösön a mint A F-hez, úgy D E-hez. De a mint D E-hez, úgy van A B-hez; és ennélfogva a mint A B-hez, úgy A F-hez; A tehát mind B-hez mind F-hez azon egy arányban van; B tehát F-fel egyenlő. De C méri F-et, méri tehát B-t is, úgy de A-t is; C tehát méri A B mekkoraságokat; tehát B A-val összemérhető

Ha tehát satb.

Más bizonyítmány: Mert legyen A B két mekkoraság egymáshoz azon arányban, miben C szám D számhoz: azt mondom, hogy azok a mekkoraságok összemérhetők.

Mert a hány egység van C-ben, vágassék A annyi egyenlő darabra, s egyikök legyen az E; tehát a mint az egység C számhoz, úgy van E A-hoz. De a mint C D-hez, úgy A B-hez; tehát egyközüleg a mint az egység D-hez, úgy van E B-hez. Már pedig az egység felméri D-t, tehát E is felméri B-t. De E A-t is felméri, mivel az egység is felméri C-t; E tehát mind A-t mind B-t felméri; ennélfogva A B összemérhetők, és E a közös mértékök: m. b. k.

[redacted]

C.... D....

(*Tanuság:* Ebből világos, hogy ha van két szám, ú. m. *D E*, és egy egyen ú. m. *A*, meg lehet tenni, hogy a mint *D* szám *E* számhoz, úgy legyen egyen egyenhez. Már ha *A*-hoz *F*-hez középegyarányu vétetik ú. m. *G*, a mint *A F*-hez, úgy leend az *A* négyszege a *G* négyszegéhez, azaz: a mint az első a harmadikhoz, úgy az elsőnek képlete a másodiknak hasonló és hasonlólag irt képletéhez. De a mint *A F*-hez, úgy van *D* szám *E* számhoz; tehát a mint *D* szám *E* számhoz, úgy van az *A* négyszege a *G* négyszegéhez.)

7. Feladat:

Az egymáshoz szertelen mekkoraságok nincsenek egymáshoz azon arányban, miben szám számhoz.

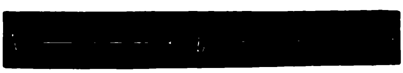
Legyenek *A B* egymáshoz szertelen mekkoraságok: azt mondom hogy *A B*-hez nincs azon arányban, miben szám számhoz.

Mert ha *A B*-hez azon arányban van, miben szám számhoz, *A B*-hez mérhető. De nem az. Tehát *A B*-hez nincs azon arányban, miben szám számhoz.

Tehát egymáshoz szertelen mekkoraságok nincsenek egymáshoz sat.

8. Feladat:

Ha két mekkoraság nincs egymáshoz azon arányban, miben szám számhoz: azok a mekkoraságok egymáshoz szertelenek.



A B két mekkoraság ne legyen egymáshoz azon arányban, miben szám számhoz; azt mondom, hogy *A* mekkoraság *B*-hez szertelen.

Mert ha összemérhetők, *A B*-hez azon arányban van, miben szám számhoz; de nincs abban; tehát *A* mekkoraság *B*-hez szertelen.

Ha tehát két mekkoraság stb.

9. Feladat:

A hoszban egymáshoz mérhető egyenek négyszegei egymáshoz azon arányban vannak, miben négyszegszám négyszegszámhoz; és a mely négyszegek azon arányban vannak egymáshoz, miben négyszegszám négyszegszámhoz; azoknak oldalai is hoszban összemérhetők; a hoszban egymáshoz szertelen egyenek négyszegei pedig egymáshoz nincsenek azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; és a mely négyszegek nincsenek azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, azoknak oldalai hoszban szertelenek egymáshoz.

Legyen A B-vel hoszban összemérhető: [redacted] azt mondom, hogy az A négyszege a B négyszegéhez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz.

Mert minthogy A B-vel hoszban összemérhető, tehát A B-hez azon arányban van, miben szám számhoz. Legyen a miben C D-hez.

[redacted] C (5) D (4)

Minthogy hát, a mint A B-hez, úgy C szám D számhoz; de az A négyszegének a B négyszegéhez kétszeres az aránya, mint az A-é B-hez; mert a hasonló képletek kétszeres arányban vannak, mint a hasonnevü oldalaik; a C négyszegének a D négyszegéhez megint kétszeres az aránya, mint a C-é D-hez, mert két négyszegszám közé esik egy középarányu szám, és négyszegszám négyszegszámhoz kétszeres arányban van, mint az oldal az oldalhoz; tehát a mint az A négyszege a B négyszegéhez, úgy van a C négyszege a D négyszegéhez.

De legyen a mint az A négyszege a B négyszegéhez, úgy a C négyszege a D négyszegéhez: azt mondom, hogy A B-vel hoszban összemérhető; mert mivel a mint az A négyszege a B-éhez, úgy van a C négyszege a D-éhez; de az A négyszegének a B-éhez való aránya kétszeres, mint az A-é B-hez, s a

C négyszegének a D-éhez való aránya kétszeres, mint a C-é a D-hez; tehát a mint A B-hez, úgy van C D-hez; A tehát B-hez azon arányban van, miben C szám D számhoz; A tehát B-vel hoszban összemérhető.

De legyen A B-hez hoszban szertelen: azt mondom, hogy az A négyszege a B-éhez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz.

Mert ha az A négyszege a B-éhez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz, A B-vel hoszban összemérhető leend. De nem az; nincs tehát az A négyszege a B-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz.

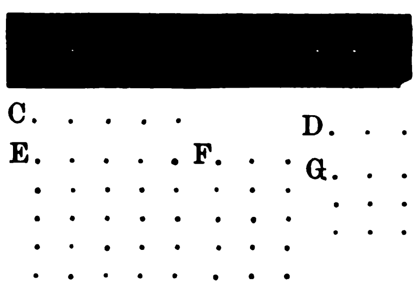
Ismét, ne legyen az A négyszege a B-éhez azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz: azt mondom, hogy A B-hez hoszban szertelen.

Mert ha A B-vel hoszban egymértékü, az A négyszege a B-éhez azon arányban leend, miben négyszegszám négyszegszámhoz. De nincsen abban; tehát A B-vel hoszban nem egymértékü.

Tehát a hoszban satb.

Más bizonyítmány: Mert minthogy A B-vel hoszban összemérhető, azon arányban van hozzá, miben szám számhoz.

Legyen, a miben C van D-hez, és C magát szorozva csinálja E-t, C megint D-t szorozva csinálja F-t és D magát szorozva csinálja G-t. Már mivel C magát szorozva E-t csinálta, és D-t szorozva F-et csinálta; tehát a mint C D-hez, azaz: a mint A B-hez, úgy van E F-hez. De a mint A B-hez úgy van az A négyszege az A B közti derékszeghez; tehát a mint az A négyszege az A B közti derékszeghez, úgy van E F-hez. Ismét mivel D magát szorozva G-t csinálta, D C-t szorozva pedig F-et csinálta; tehát a mint C D-hez, azaz: a mint A B-hez, úgy van F G-hez.



De a mint *A B*-hez, úgy van az *A B* közti derékszeg a *B* négyszegéhez; tehát a mint az *A B* közti derékszeg a *B* négyszegéhez, úgy van *F G*-hez. De a mint az *A* négyszege az *A B* közti derékszeghez, úgy van *E F*-hez; egyközösön tehát a mint az *A* négyszege a *B*-éhez, úgy van *E G*-hez. De mind *E* mind *G* négyszegszámok; mert *E* a *C* négyszege, *G* pedig a *D* négyszege; tehát az *A* négyszege a *B*-éhez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz.

De legyen az *A* négyszege a *B*-éhez azon arányban, miben *E* négyszegszám *G* négyszegszámhoz: azt mondom, hogy *A B*-vel hoszban összemérhető.

Mert legyen az *E* oldala *C*, a *G*-é pedig *D*, és *C D*-t szorozva csinálja *F*-et; *E F G* tehát a *C*-nek *D*-hez való arányában folyvást egyarányuak. És minthogy az *A B* közti derékszeg az *A B* négyszegeikhez, és *F E*-hez *G*-hez közép egyarányuak; tehát a mint az *A* négyszege az *A B* közti derékszeghez, úgy van *E F*-hez. De a mint az *A B* közti derékszeg a *B* négyszegéhez, úgy van *F G*-hez; már pedig a mint az *A* négyszege az *A B* közti derékszeghez, úgy van *A B*-hez; ennél fogva *A B* összemérhetők; mert azon arányban vannak, miben *E* szám *F* számhoz, azaz: a mint *C D*-hez, úgy van *E F*-hez; mert *C* magát szorozva *E*-t csinálta, *D*-t szorozva pedig *F*-et csinálta; tehát a mint *C D*-hez, úgy van *E F*-hez: m. b. k.

Tanuság: A megmutattakból világos, hogy az egymáshoz hoszban mérhetők átalában emeletben is azok, de az emeletben mérhetők nem mindazok hoszban is, és hogy hoszban szertelenek nem mind szertelenek emeletben is, hanem az emeletben szertelenek hoszban is mind azok.

Bizonyítmány: Mert mivel a hoszban összemérhető egyenek négyszegei azon arányban vannak, miben négyszegszám négyszegszámhoz, a melyek pedig úgy vannak egymáshoz, mint szám számhoz, azok összemérhetők: tehát a hoszban összemérhető egyenek nem csak hoszban hanem emeletben is összemérhetők.

Ismét, mivel megmutattuk, hogy azok az egyenek, melyeknek négyszegei azon arányban vannak, miben négyszegszám négyszegszámhoz, hoszban összemérhetők, és hogy emeletben egymértéküek azzal, hogy négyszegeik azon arányban vannak, miben szám számhoz: tehát a mely négyszegek nincsenek azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, hanem csupán csak a miben szám számhoz, azok a négyszegek emeletben (azaz: mint lapok) ugyan egymértéküek leendenek, de nem hoszban is (azaz: a reájok emelhető egyenek); úgy hogy a hoszban egymértéküek átalánosan emeletben is, de az emeletben egymértéküek nem átalánosan hoszban is azok, hanem ha azon arányban leendenek, miben négyszegszám négyszegszámhoz.

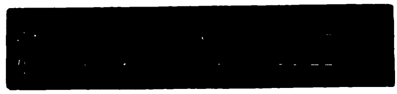
De azt mondom, hogy a hoszban szertelen egyenek nem mind azok emeletben is. Mert az emeletben összemérhetők meg lehet hogy nincsenek (hoszban) azon arányban, miben szám számhoz, és ennélfogva emeletben összemérhető létökre hoszban szertelenek; miszerint a hoszban szertelenek nem mind emeletben is azok; hanem a hoszban szertelenek lehetnek emeletben öszemérhetők is, szertelenek is.

Az emeletben szertelenek pedig hoszban is átalánoson szertelenek; mert a hoszban összemérhetők emeletben is összemérhetők leendenek. De a feltét szerint szertelenek is, mi képtelen; az emeletben szertelenek tehát hoszban is mindazok.

(Felvétel. A számvetési könyvekben meg van mutatva, hogy hasonló lapszámok azon arányban vannak egymáshoz, miben négyszegszám négyszegszámhoz; és midőn két szám egymáshoz azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz, azok a számok hasonló lapszámok. És ezekből nyilvános, hogy a nem hasonló lapszámok, azaz: melyeknek oldalai nem egyarányuak, nincsenek egymáshoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz. Mert ha abban leendenek, hasonló lapszámok lesznek; mi nem úgy van feltéve; a nemhasonló lapszámok tehát nincsenek egymáshoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz.)

10. Feladat:

Ha négy mekkoraság egyarányban van, s az első a másodikkal összemérhető, a harmadik is összemérhető a negyedikkel: s ha az első a másodikhoz szertelen, a harmadik is szertelen a negyedikhez.



Legyen négy egyarányu mekkoraság: A B C D, a mint A B-hez, úgy C D-hez, és A legyen összemérhető B-vel: azt mondom, hogy C is összemérhető D-vel.

Mert mivel A összemérhető B-vel: tehát A B-vel azon arányban van, miben szám számhoz. Már pedig a mint A B-hez, úgy van C D-hez; tehát C is D-hez azon arányban van, miben szám számhoz; C tehát D-hez mérhető.

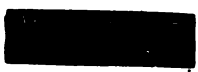
De legyen A B-hez szertelen: azt mondom, hogy C is D-hez szertelen. Mert mivel A B-hez szertelen; tehát A B-hez nincs azon arányban, miben szám számhoz. Már pedig a mint A B-hez, úgy van C D-hez; tehát C sincs D-hez azon arány ban miben szám számhoz; C tehát D-hez szertelen.

Ha tehát négy mekkoraság sat: m. b. k.

11. Feladat:

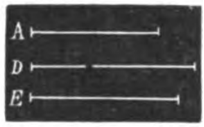
Feladott egyenhez szertelen két egyent találni, egyiket csak hoszban, másikat emeletben is szertelent.

Legyen a feladott egyen A: A-hoz kell két egyent találni, egyiket csak hoszban, másikat emeletben is szertelent.



B (3)
C (5)

Vétessék fel B C két szám, melyek egymáshoz ne legyenek azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, azaz: nem hasonló lapszámok; és a mint B C-hez, tétessék úgy az A négyszege a D-éhez; (mit tudunk); az A négyszege tehát összemérhető a D-ével. És minthogy B C-hez nincs azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az A négyszege sincs a D-éhez azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz; A tehát D-hez hoszban szertelen. Vétessék A D egyenekhez középegyarányu E egyen; tehát a mint A D hez, úgy van az A négy szege az E-éhez. Már pedig A D-hez hoszban szertelen; tehát az A négyszege is szertelen az E-éhez; A tehát E-hez emeletben szertelen.



B (3)
C (5)

Feladott A egyenhez tehát találtatott szertelen D E két egyen; még pedig D csak hoszban, és E hoszban is, emeletben is szertelen; m. t. k.

Jegyz. A 10. és 11-dik feladat a kéziratokban és a baseli kiadásban meg vannak cserélve, *Gregory* és *Peyrard* az általunk is megtartott sorba tevék. Igen helyesen, mert a 11-dik feladat bizonyítmánya megkivánja a 10-két, mint a figyelmes olvasó legott észreveendi.

12. Feladat:

Azonegy mekkoraságoz mérhetők egymáshoz is mérhetők.

Legyenek mind A mind B, C-hez mérhetők: azt mondom, hogy A is mérhető B-hez.

Mert mivel A C-hez mérhető;

D... E.... F..... G......
H (15) K (20) L (24)

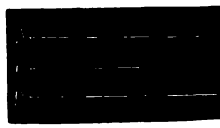
tehát A C-hez abban az arányban van, miben szám számhoz. Legyen abban, miben D E-hez. Ismét mivel B C-hez mérhető, tehát C B-hez abban az arányban van, miben szám számhoz. Legyen abban, miben F G-hez. Adva levén tehát mind a D aránya E-hez, mind az F-é G-hez, vétessék H K L három szám folyvást az adott arányokban, úgy, hogy a mint D E-hez, úgy legyen H K-hoz, s a mint F G-hez, úgy legyen K L-hez.

Már mivel a mint A C-hez, úgy van D E-hez; de a mint D E-hez, úgy H K-hoz, tehát a mint A C-hez, úgy van H K-hoz. Ismét mivel a mint C B-hez, úgy van F G-hez, de a mint $F\,G$-hez, úgy $K\,L$-hez; tehát a mint $C\,B$-hez, úgy van $K\,L$-hez. De a mint $A\,C$-hez, úgy van H is K-hoz; tehát egyközösön a mint $A\,B$-hez, úgy van $H\,L$-hez; A tehát B-hez abban arányban van, miben H szám L számhoz. A tehát B-hez mérhető.

Tehát azonegy sat.

13. Feladat:

Ha van két mekkoraság, s azon egyhez az egyik mérhető a másik szertelen, az a két mekkoraság egymáshoz szertelen leend.

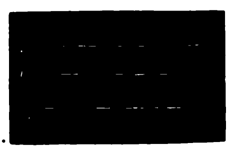


Legyen $A\ B$ két mekkoraság, és egy más C; s A C-hez legyen mérhető. B pedig C-hez szertelen: azt mondom, hogy A is B-hez szertelen.

Mert ha $A\,B$-hez mérhető; úgy B is mérhető C-hez; mi nem úgy van feltéve.

14. Feladat:

Ha két mekkoraság egymáshoz mérhető, s egyik közülök valami mekkorasághoz szertelen, a másik is szertelen leend ehhez.



Legyen $A\,B$ egymáshoz mérhető két mekkoraság, s egyikök A valamely máshoz C-hez legyen szertelen: azt mondom, hogy a másik is, B, C-hez szertelen.

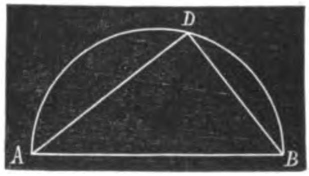
Mert ha B C-hez mérhető, de A is B-hez mérhető; tehát A C-hez is mérhető. De szertelen is; mi lehetetlen; nem mérhető tehát B C-hez, tehát szertelen.

Ha tehát sat.

(*Felvétel.* Két nem egyenlő egyen adatván: kikeresni mekkorával nagyobb a nagyobbiknak emelete a kisebbikénél.

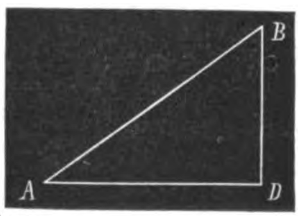
Legyen az adott két nem-egyenlő egyen *AB C*, és ezeknek nagyobbika *AB*: ki kell keresni: mekkorával nagyobb az *AB* emelete a *C*-énél.

Irassék *AB*-re *BD* félkör, és ebbe illessék belé *C*-vel egyenlő *AD*, s vonassék *BD*. Világos, hogy az *ADB* alatti szeglet derék, és hogy az *AB* emelete az *AD*-énél, azaz, a *C*-énél a *DB* emeletével nagyobb.



Hasonlólag két egyen adatván, az emeleteikkel egyenlő emeletü egyen megtaláltatik imígy:

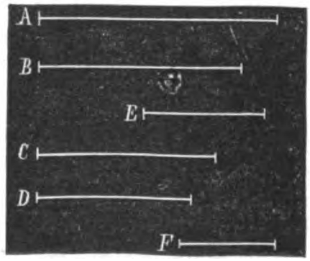
Legyen az adott két egyen *AD DB*; és kelljen megtalálni az emeleteikkel egyenlö lapot. Helyzessenek úgy, hogy az *ADB* derék szegletet fogják be, és vonassék *AB*. Ismét világos, hogy *AB AD* és *DB*-vel egyenlö emeletü.)



15. **Feladat:**

Ha négy egyen egyarányban van, s az első, hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a másodiknál: a harmadik is, hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a negyediknél. És ha az első hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a másodiknál: a harmadik is, hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a negyediknél.

Legyen *A B C D* négy egyen egy arányban, a mint *A B*-hez, úgy *C D*-hez, és *A* legyen *B*-nél nagyobb emeletü az *E* négyszegével, *C* pedig *D*-nél nagyobb emeletü az *F* négyszegével: azt mondom, hogy ha *A*



E-hez mérhető, *C* is mérhető, *F*-hez; ha pedig *A* szertelen *E*-hez, *C* is szertelen *F*-hez.

Mert mivel a mint *A B*-hez, úgy *C D*-hez; tehát a mint az *A* négyszege a *B*-éhez, úgy van a *C* négyszege a *D*-éhez. De az *A* négyszegével egyenlők az *E B* négyszegeik, a *C*-ével megint egyenlők az *F D* négyszegeik; tehát a mint az *E B* négyszegeik a *B*-éhez, úgy az *F D* négyszegeik is a *D*-éhez; felbontva tehát, a mint az *E* négyszege a *B*-éhez, úgy van az *F*-é a *D*-éhez; tehát a mint *E B*-hez, úgy van *F D*-hez; viszálva tehát a mint *B E*-hez, úgy *D F*-hez. De a mint *A B*-hez, úgy *C D*-hez; tehát egyközösön a mint *A E*-hez, úgy van *C F*-hez; ha hát *A* mérhető *E*-hez, *C* is mérhető *F*-hez; ha pedig *A* szertelen *E*-hez, *C* is szertelen *F*-hez.

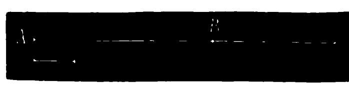
Ha tehát sat.

16. Feladat:

Ha egymáshoz mérhető két mekkoraság összetétetik, az összeg is mindenikhez mérhető leend; s ha az egész öszveg valamelyikökhez mérhető, az eredeti két mekkoraság is egymáshoz mérhető leend.

Legyen *AB BC* egymáshoz mérhető két mekkoraság összetéve: azt mondom, hogy az egész *CA* is mind *AB*-hez, mind *BC*-hez mérhető.

Mert minthogy *AB BC* egymáshoz mérhetők, méri őket valami mekkoraság. Mérje és legyen az *D*. Már mivel *D* méri *AB*-t *BC*-t, az egész *AC*-t is mérendi. De méri *AB*-t és *BC*-t is; tehát *D* méri *AB BC* és *AC* mekkoraságokat; mérhető tehát *AC* mind *AB*-hez mind *BC*-hez.



De legyen *AC* az *AB BC* mekkoraságok egyikéhez mérhető: legyen *AB*-hez: azt mondom, hogy *AB BC* összemérhetők.

Mert mivel *AC AB*-hez mérhető, méri őket valami mekkoraság. Mérje és legyen az D. Minthogy D CA-t AB-t méri, tehát BC maradékot is mérendi. De méri AB-t is; tehát D méri mind AB-t mind BC-t; AB BC tehát egymáshoz mérhetők.

Ha tehát sat.

17. Feladat:

Ha egymáshoz szertelen két mekkoraság összetétetik, az öszveg is mindenikhez szertelen; és ha az öszveg egyikhez szertelen, az eleinti két mekkoraság is szertelen egymáshoz.

Legyen összetéve AB BC egymáshoz szertelen két mekkoraság: azt mondom, hogy AC öszveg mind AB-hez mind BC-hez szertelen leend.

Mert ha CA AB-hez nem szertelen, méri őket valami mekkoraság. Mérje ha lehet és legyen az D. Már mivel D CA-t AB-t méri, a maradék BC-t is mérendi. De méri AB-t is; D tehát mind AB-t mind BC-t méri; AB BC tehát egymáshoz mérhetők; de a feltét szerént szertelenek is; mi lehetetlen; nem méri tehát CA-t AB-t semmi mekkoraság; tehát CA AB-hez szertelen. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy AC CB-hez is szertelen; AC tehát mind AB-hez mind BC-hez szertelen.

De legyen AC AB-nek BC-nek egyikéhez szertelen, s előbb is AB-hez: azt mondom, hogy AB BC egymáshoz szertelenek. Mert ha összemérhetők, méri őket valami mekkoraság. Mérje, és legyen az D. Már mivel D méri AB-t BC-t, tehát méri az egész AC-t is. De méri AB-t is, tehát D méri mind CA-t mind AB-t; CA tehát AB-hez mérhető. De feltettük, hogy szertelenek is; mi lehetetlen; nem méri tehát AB-t BC-t semmi mekkoraság; tehát AB BC egymáshoz szertelenek. Hasonlólag mutatjuk meg azt is, hogy ha AC a másikhoz BC-hez szertelen, AB BC is egymáshoz szertelenek.

Ha tehát sat.

Felvétel: Ha egy egyenhez egyközény szabatik négyszeg-kép hiával, a szabott egyközény az egyennek a hozzászabás által származott darabjai közzé béfogott egyközénynyel egyenlő.

Valamely AB egyenhez szabassék AC egyközény, DB négyszegkép hiával: azt mondom, hogy AD egyenlő az AC CB közti egyközénynyel.

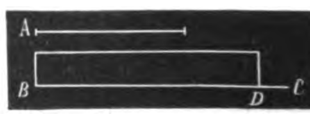
Ezt mindjárt láthatni; mert mivel DB, négyszeg, DC egyenlő CB-vel; AD pedig az AC CD közti, azaz: az AC CB közti egyközény.

Ha tehát sat.

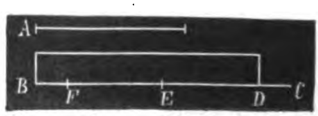
18. Feladat:

Ha van két nem egyenlő egyen, s a nagyobbikhoz a kisebbik négyszegének negyedrészével egyenlő egyközény, négyszeg-kép hiával, szabatik, s az egyközény az egyent hoszban összemérhető darabokra vágja: a nagyobbik egy hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével leend nagyobb emeletű a kisebbiknél. És ha a nagyobbik, hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletű a kisebbiknél, és a kisebbik négyszegének negyedével egyenlő egyközény négyszeg-kép hiával szabatik a nagyobbikhoz: emezt hosszban összemérhető darabokra osztandja.

Legyen A BC két nem egyenlő egyen, és szabassék BC-hez a kisebbik, A négyszegének negyed-részével, azaz: az A felének négyszegével egyenlő egyközény négyszeg-kép hiával, és legyen az a BD DC közötti, BD pedig DC-hez legyen hoszban mérhető: azt mondom, hogy BC, hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü A-nál.



Mert vágassék BC ketté E pontnál, és tétessék EF DE-vel egyenlővé; tehát a maradék DC is egyenlő BF-fel. És minthogy BC egyen E-nél egyenlő, D-nél pedig nem egyenlő ré-



szekre vágatott, tehát a BD DC közé fogott derékszeg az ED négyszegével együtt egyenlő az EC négyszegével; egyenlők a négyezeteik is; tehát négyszer a BD DC közti derékszeg a DE négyszege négyezetével együtt egyenlő négyszer az EC négyszegével. De a BD DC közötti derékszeg négyezetével az A négyszege, a DE négyszege négyezetével pedig a DF négyszege egyenlők; mert FD két akkora mint DE: az EC négyszege négyezetével megint egyenlő a BC négyszege, mert BC hasonlókép kétakkora mint EC: az A DF négyszegeik tehát egyenlők a BC négyszegével, úgy hogy a BC négyszege az A-énál a DF négyszegével nagyobb; BC tehát az FD négyszegével nagyobb emeletü A-nál. Még meg kell mutatni, hogy BC FD-hez mérhető. Mert minthogy BD DC-vel hoszban összemérhető, tehát BC is mérhető hoszban CD-hez. De CD hoszban mérhető a CD BF egyenekhez, mert CD egyenlő BF-fel; BC is tehát CD BF egyenekhez hoszban mérhető. úgy hogy a maradék FD is hoszban mérhető BC-hez; BC tehát hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü A-nál.

De legyen BC, hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü A-nál, és szabassék BC-hez négyszeg-kép hiával az A négyszege negyedével egyenlő egyközény, és legyen az a BD DC közötti. Meg kell mutatni, hogy BD hoszban összemérhető DC-vel.

Mert ugyanazon készületeket téve, hasonlókép megmutatjuk, hogy BC A-nál az FD négyszegével nagyobb emeletü. De BC hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü A-nál; tehát BC FD-vel hoszban összemérhető; úgy hogy BC, az együvé vett BF DC maradékhoz is mérhető hoszban. De az együvé vett BF és DC DC-hez hoszban mérhető, mert BF egyenlő DC-vel; úgy hogy BC is hoszban mérhető DC-hez; felbontva is tehát BD DC-hez hoszban mérhető.

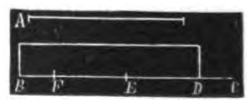
Ha tehát sat.

19. Feladat:

Ha van két nem egyenlő egyen, s a kisebbik négyszegének negyedrészével egyenlő egyközény négyszeg-kép hiával szabatik a nagyobbikhoz, és az ezt egymáshoz hoszban szertelen darabokra vágja: a nagyobbik, hozzája szertelen egyen négyszegével leend nagyobb emeletü a kisebbiknél. És ha a nagyobbik, hozája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a kisebbiknél, s a kisebbik négyszegének negyedével egyenlő egyközény négyszeg-kép hiával szabatik a nagyobbikhoz: az emezt hoszban szertelen darabokra vágja.

Legyen A BC nem egyenlő két egyen, melyeknek nagyobbika legyen BC, s a kisebbik, ú. m. A négyszegének negyedrészével egyenlő egyközény szabassék négyszeg-kép hiával BC-hez, legyen az a BD DC közötti, és legyen BD DC-hez hoszban szertelen: azt mondom, hogy BC, hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü A-nál.

Mert miután azon készületeket teszszük, a miket az előbb, hasonlólag megmutatjuk, hogy BC A-nál az FD négyszegével nagyobb emeletü. Már meg kell mutatni, hogy BC DF-hez hoszban szertelen. Mert minthogy BD DC-hez hoszban szertelen, tehát BC is DC-hez hoszban szertelen. De DC az együvé vett BF DC egyenekkel összemérhető; tehát BC az együvé vett BF DC egyenekhez szertelen; úgy hogy BC a maradék FD-hez is hoszban szertelen; már pedig BC A-nál az FD négyszegével nagyobb emeletü, tehát BC, hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü A-nál.



Legyen ismét BC hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü A-nál, és szabassék BC-hez az A négyszege negyedével egyenlő egyközény négyszeg-kép hiával, és legyen az a BD BC közötti. Megkell mutatni, hogy BD DC-hez hoszban szertelen.

Mert ugyanazon készületeket téve hasonlókép megmutatjuk, hogy *BC* az *FD* négyszegével nagyobb emeletü *A*-nál. De *BC* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *A*-nál, tehát *BC* *FD*-hez hoszban szertelen; úgy hogy *BC* az együvé vett *BF* *DC* maradékhoz is szertelen. De a *BF* *DC* öszvegök *DC*-vel hoszban összemérhető; tehát *BC* is *DC*-hez hoszban szertelen; úgy hogy felbontva is *BD* *DC*-hez hoszban szertelen.

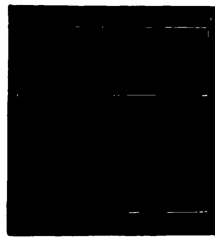
Ha tehát sat.

Scholion (világositás). Mivel meg van mutatva, hogy a hoszban összemérhetők emeletben is mind egymértéküek,az emeletben azok pedig nem mind hoszban is, hanem lehetnek hoszban összemérhetők is, szertelenek is: világos, hogy ha a felvett neves egyenhez némi más egyen hoszban mérhető, nevesnek és amahhoz nemcsak hoszban hanem emeletben is mérhetőnek mondatik, minthogy a hoszban mérhetők emeletben is mind azok. Ha pedig a felvett neveshez némi más egyen emeletben mérhető: ha már hoszban is az, úgy is nevesnek és amahhoz hoszban és emeletben mérhetőnek mondatik. Ha pedig ismét a felvett neves egyenhez emeletben mérhető némi egyen ahhoz hoszban szertelen, úgy is csak emeletben mérhető neves egyennek mondatik.

2. *Scholion* (*a Proclusé*). Mert nevesnek nevezi a felvett neves egyenhez akár hoszban és emeletben, akár-csak emeletben mérhetőket. Vannak többen is egyenek, melyek hoszban a felvett neves egyenhez szertelenek és csak emeletben mérhetők, s ezért ezek is neveseknek hivatnak, és egymással annyiban a mennyiben nevesek, összemérhetők, de megkülönböztetve, hogy vagy hoszban és emeletben, vagy csak emeletben mérhetők. S ha hoszban, úgy is mondhatni hoszban összemérhető neves egyeneknek, oda értve, hogy emeletben is azok; ha pedig egymáshoz csak emeletben mérhetők, úgy csak emeletben mérhető neves egyeneknek mondatnak. Hogy pedig a neves egyenek összemérhetők, onnan világlik ki: hogy a neves egyenek a felvett neveshez mérhetők; már pedig azon egyhez mérhetők, egymáshoz is mérhetők; a neves egyenek tehát egymással mindnyájan összemérhetők.

20. Feladat:

Az egymáshoz hoszban mérhető neves egyenek közzé fogott derékszeg neves.



Ugyanis legyen a hoszban mérhető neves *AB BC* egyenek közzé *AC* derékszeg béfogva: azt mondom, hogy *AC* neves.

Mert irassék *AB*-re *AD* négyszeg; tehát *AD* neves. És minthogy *AB BC*-hez hoszban mérhető, *AB* pedig *BD*-vel egyenlő; tehát *BD BC*-hez hoszban mérhető. És a mint *BD BC*-hez, úgy van *DA AC*-hez; de *BD* mérhető *BC*-hez, tehát *DA* is mérhető *AC*-hez. Már pedig *DA* neves, tehát *AC* is neves.

Tehát sat.

21. Feladat:

Ha neves lap neves egyenhez szabatik: neves és ahoz az egyenhez melyhez szabva van, hoszban mérhető szélességet alkot.

Ugyanis szabassék *AB* neves egyenhez *AC* neves lap, és alkossa *BC* szélességet: azt mondom, hogy *BC* neves, és *AB*-hez hoszban mérhető.

Mert irassék *AB*-re *AD* négyszeg; tehát *AD* neves. De *AC* is neves; tehát *DA AC*-hez mérhető. És a mint *DA AC*-hez, úgy van *DB BC*-hez; tehát *DB* mérhető *BC*-hez. *DB* pedig egyenlő *AB*-vel, tehát *AB* is mérhető *BC*-hez. De *AB* neves, tehát *BC* is neves, és *AB*-hez hoszban mérhető.

Ha tehát sat.

Felvétel. Nevetlen lapra emelhető egyen nevetlen.

Legyen *A* vonal nevetlen lapra emelhető; azaz: az *A* négyszege legyen nevetlen lappal egyenlő: azt mondom, hogy *A*, nevetlen egyen.

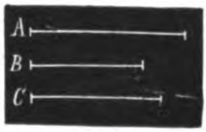
Mert ha A neves, négyszege is neves leend; mert igy van az értelmezésekben. De nem az; A tehát nevetlen; m. b. k.

Felvétel:

(Bévezetésül a következő feladathoz. — A baseli és oxfordi kiadások „Scholion"nak czímezik. Tulajdonkép sem egyik sem másik, hanem csak másik bizonyítmánya a 22. Feladatnak.)

Közép nevetlen egyen az, a mely csak emeletben mérhető neves egyenek közzé fogott lapra emelhető.

Mert legyen egy lap csak emeletben mérhető A B egyenek közzé fogva. Meg kell mutatni, hogy az ily lap nevetlen.



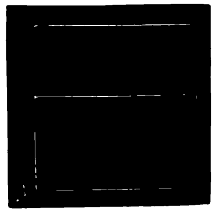
Vétessék ugyanis A-hoz B-hez közép egyarányu C; az A B közti derékszeg tehát egyenlő a C négyszegével; miszerint C az A B közti lapra emelhető. De a mint A B-hez, úgy van az A négyszege a C-éhez; mert a mint az első a harmadikhoz, úgy van az első négyszege a második négyszegéhez; (mert e meg van mutatva az Elemek 6-ik könyve 19-ik feladatához tartozó tanuságban). De A B-hez hoszban szertelen, tehát az A négyszege is szertelen a C-éhez. De az A-é neves; tehát az A B közti derékszeg nevetlen; tehát C is nevetlen.

*Közép*nek hivatott pedig, minthogy nevetlen létére két [csak emeletben mérhető] neves egyenhez középegyarányu.

22. Feladat:

Egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek közzé fogott derékszeg nevetlen, s az erre emelhető egyen is nevetlen. Hivassék középnek.

Ugyanis egymáshoz csak emeletben mérhető AB BC egyenek fogják bé AC derékszeget: azt mondom, hogy AC nevetlen, és a reá emelhető egyen is nevetlen.

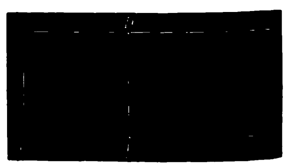


Mert irassék AB egyenre AD négyszeg, miszerint AD neves. És minthogy AB BC-hez hoszban szertelen, mert a feltét szerint csak emeletben mérhetők; AB pedig egyenlö BD-vel, tehát BD is BC-hez hoszban szertelen. Már pedig a mint BD BC-hez, úgy van AD AC-hez; DA tehát AC-hez szertelen. De DA neves, AC tehát nevetlen; úgy hogy az AC-re emelhető egyen is, azaz melyre AC-vel egyenlő négyszeget irhatni, nevetlen.

(Az egymáshoz csak emeletben mérhető egyenek közzé fogott derékszeg tehát nevetlen, s a reá emelhető egyen is nevetlen;) és hivassék *közép egyennek.*

Felvétel. Ha van két egyen; a mint az első a második-hoz, úgy van az első négyszege az első s második közti derékszeghez.

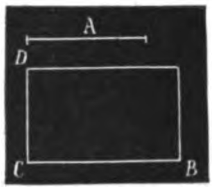
Mert legyen FE EG két egyen: azt mondom, hogy a mint FE EG-hez, úgy van az FE négyszege az FE EG közti derékszeghez.



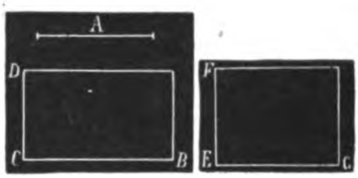
Mert irassék FE-re DF négyszeg, és egészíttessék ki GD. Már mivel a mint FE EG-hez, úgy FD DG-hez; de FD az FE négyszege, DG pedig a DE EG azaz, az FE EG közti derékszeg; tehát a mint FE EG-hez, úgy az FEnégyszege az FE EG közti derékszeghez. Hasonlókép, amint a GE EF közti derékszeg az EF négyszegéhez, azaz: a mint GD FD-hez, úgy van GE EF-hez : m. b. k.

23. Feladat:

A közép egyen lapja neves egyenhez szabva, ahhoz az egyenhez, melyhez szabatott, hoszban szertelen neves szélességet alkot.



Ugyanis legyen *A* közép, *CB* pedig neves egyen, és *BC*-hez szabassék az *A* négyszegével egyenlő, *CD* szélességet alkotó *BD* derékszegletü lap: azt mondom, hogy *CD* neves, és *CB*-hez hoszban szertelen.



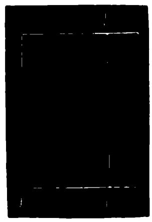
Mert minthogy *A* közép egyen; csak emeletben mérhető neves egyenek közzé fogott derékszeg az emelete. Legyen *GF* az emelete. De *DB* is emelete; tehát *DB* egyenlő *GF*-fel. De egyenlő szegletü is vele, az egyenlő és egyenlőszegletü egyközények egyenlő szegleteit béfogó oldalak pedig viszálók; tehát egyarányban a mint *BC EG*-hez, úgy van *EF CD*-hez; tehát a mint a *BC* négyszege az *EG*-éhez, úgy van az *EF* négyszege a *CD*-éhez; de a *CB* négyszege az *EG*-éhez mérhető, mert mindenik egyen neves; az *EF* négyszege is tehát mérhető a *CD*-éhez. Már pedig az *EF*-é neves; tehát a *CD*-é is neves; tehát *CD* neves egyen. És minthogy *EF EG*-hez hoszban szertelen, mert csak emeletben mérhetők; és a mint *EF EG*-hez, úgy van az *EF* négyszege, az *FE EG* közé fogott derékszeghez: tehát az *EF* négyszege szertelen az *FE EG* közti derékszeghez. De az *EF* négyszege mérhető a *CD*-éhez, mert *EF CD* emeletben nevesek, az *EF EG* közti derékszeg pedig mérhető a *DC CB* közöttihez, mert az *A* négyszegével egyenlők; tehát a *CD* négyszege is szertelen a *DC CB* közé fogotthoz. Már pedig a mint a *CD* négyszege a *DC CB* közti derékszeghez, úgy van *DC CB*-hez; tehát *DC CB*-hez hoszban szertelen; *CD* tehát neves és *CB*-hez hoszban szertelen: m. b. k.

24. Feladat:

A közép egyenhez mérhető egyen maga is közép.

Legyen A közép egyen, és B legyen A-hoz mérhető : azt mondom, hogy B is közép egyen.

Mert vétessék fel CD neves egyen, és szabassék CD-hez az A négyszegével egyenlő, ED szélességet alkotó CE derékszegletű lap; miszerint ED neves és CD-hez hoszban szertelen. Megint szabassék CD-hez a B négyszegével egyenlő, FD szélességet alkotó CF derékszegletű lap. Már minthogy A B-hez mérhető, az A négyszege is mérhető a B-éhez. De az A négyszegével EC egyenlő, s a B négyszegével CF egyenlő; EC tehát mérhető CF-hez. És a mint EC CF-hez, úgy van ED DF-hez; ED tehát hoszban mérhető DF-hez. De ED neves, és DC-hez hoszban szertelen; neves tehát DF is és DC-hez hoszban szertelen; CD DF tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. Már pedig a csak emeletben mérhető neves egyenek közé fogott derékszeg nevetlen, és a reá emelhető egyen is nevetlen: hivatik pedig középnek; tehát CD DF közti derékszegre emelhető egyen közép; B pedig a CD DF köztire emelhető; tehát B közép.



Tanuság: Ebből világos, hogy a középlaphoz mérhető lap közép. Mert az ily lapokra emelhető egyenek emeletben összemérhetők; de közülök egyik, közép, miszerint a másik is közép.

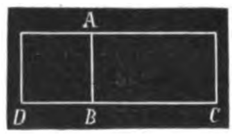
(A nevesekről mondottakból következik a középekre nézve is, hogy a középhez mérhetőt középnek, és ahhoz nemcsak hoszban, hanem emeletben is mérhetőnek mondjuk, miszerint átalában a hoszban mérhetők emeletben is mind azok. Ha pedig némi egyen egy középhez emeletben mérhető, ha hoszban is az : hoszban és emeletben mérhető közép egyeneknek mondatnak. Ha pedig csak emeletben az, csak emeletben mérhető közép egyeneknek mondatnak.)

25. Feladat:

Az egymáshoz hoszban mérhető közép egyenek közzé fogott derékszeg, közép lap.

Ugyanis *AB BC* hoszban mérhető közép egyenek közé legyen *AC* derékszeg bé fogva; azt mondom, hogy *AC* közép lap.

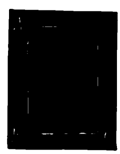
Mert irassék *AB*-re *AD* négyszeg; tehát *AD* középlap. És minthogy *AB BC*-hez hoszban mérhető, és *AB* egyenlö *BD*-vel; tehát *DB* is *BC*-hez hoszban mérhető, úgy hogy *DA* is mérhető *AC*-hez. De *DA* közép lap, *AC* is tehát közép lap: m. b. k.



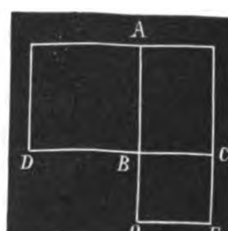
26. Feladat:

Az egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek közzé fogott derékszeg vagy neves vagy közép lap.

Csak emeletben mérhető *AB BC* közép egyenek közzé legyen *AC* derékszeg béfogva: azt mondom, hogy *AC* vagy neves, vagy közép lap.



Mert irassanak *AB*-re *BC*-re *AD BE* négyszegek, tehát mind *AD* mind *BE* középlapok. Vétessék fel *FG* neves egyen, és szabassék *FG*-hez *AD*-vel egyenlö *GH* derékszegletü egyközény, mely *FH* szélességet csinálja, *HM*-hez megint szabassék *AC*-vel egyenlö *MK* egyközény, mely *HK* szélességet csinálja, és még *KN*-re is hasonlókép állíttassék



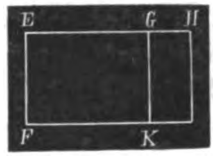
BE-vel egyenlő *NL* egyközény, mely *KL* szélességet csinálja; *FH HK KL* tehát egyenesben vannak. Minthogy már mind *AD* mind *BE* középlap, és *AD GH*-val, *BE* pedig *NL*-el egyenlők; tehát *GH NL* közül is mindenik közép lap, és *FG* neves egyenhez van szabva, tehát *FH KL* egyeneknek is mindenike neves, és *FG*-hez hoszban szertelen. És minthogy *AD BE*-hez mérhető, tehát *GH* is *NL*-hez mérhető. És a mint *GH NL*-hez, úgy van *FH KL*-hez; *FH* tehát *KL*-hez hoszban mérhető; tehát *FH KL* hoszban mérhető neves egyenek; tehát az *FH KL* közé fogott derékszeg neves. És minthogy *BD BA*-val, *OB* pedig *BC*-vel egyenlők; tehát a mint *DB BC*-hez, úgy van *AB BO*-hoz. De a mint *DB BC*-hez, úgy van *DA AC*-hez, és a mint *AB BO* hoz, úgy van *AC CO*-hoz; tehát a mint *DA AC*-hez, úgy *AC CO*-hoz. Már pedig *AD* egyenlő *GH*-val, *AC MK*-val, és *CO NL*-lel; tehát a mint *GH MK*-hoz úgy van *MK NL*-hez; tehát a mint *FH HK*-hoz, úgy *HK KL*-hez; az *FH KL* közti derékszeg tehát egyenlő a *HK* négyszegével. De az *FH KL* közti derékszeg neves, tehát a *HK* négyszege is neves; neves tehát *HK* is. Ha már *HK HM*-hez, azaz *FG*-hez hoszban mérhető, úgy *HN* neves; ha pedig *FG*-hez hoszban szertelen, úgy *KH HM* csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *HN* közép lap; *HN* tehát vagy neves, vagy közép lap. De *HN AC*-vel egyenlő; *AC* tehát vagy neves vagy közép lap.

Tehát sat.

27. Feladat:

Közép lap közép lapot nem halad neves lappal meg.

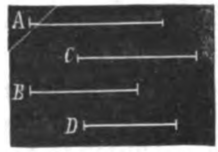
Mert, ha lehet, *AB* közép lap haladjon meg *AC* közép lapot *DB* neves lappal; és *EF* neves egyen vétetvén fel, *EF*-hez szabassék *AB*-vel egyenlő *FH* derékszegü egyközény, mely *EH* szélességet alkossa, és vétessék el belőle



AC-vel egyenlő *FG*; tehát *DB* maradék egyenlő *KH* maradékkal. Már mivel mind *AB* mind *AC* középlapok, és *AB* *FH*-val *AC* *FG*-vel egyenlő; tehát mind *FH*, mind *FG* közép lapok, és *EF* neves egyenhez vannak szabva: tehát mind *EH* mind *EG* nevesek, és *EF*-hez hoszban szertelenek. És minthogy *DB* neves, és *KH*-val egyenlő; tehát *KH* is neves, és *EF* neves egyenhez van szabva; tehát *GH* neves és *EF*-fel hoszban öszszemérhető. De *EG* is neves, és *EF*-hez hoszban szertelen; *EG* tehát *GH*-hoz hoszban szertelen. És a mint *EG* *GH*-hoz, úgy van az *EG* négyszege az *EG* *GH* közti derékszeghez; tehát az *EG* négyszege szertelen az *EG* *GH* közti derékszeghez. De az *EG* négyszegével az *EG* *GH* négyszegei összemérhetők, mert mind a ketten nevesek, az *EG* *GH* közti derékszeggel pedig összemérhető az *EG* *GH* közti kétszervett derékszeg, mert ez kettőzete annak; tehát az *EG* *GH* négyszegei szertelenek az *EG* *GH* közti kétszervett derékszeghez; tehát együttvéve is az *EG* *GH* négyszegei meg az *EG* *GH* közti kétszervett derékszeg, azaz az *EH* négyszege, szertelen az *EG* *GH* négyszegeihez. De az *EG* *GH* négyszegei nevesek; az *EH* négyszege tehát nevetlen; ennél fogva *EH* is nevetlen; de neves is; mi lehetetlen. — Közép lap tehát közép lapot nem halad neves lappal meg.

28. Feladat:

Neves derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyeneket találni.



Legyen feltéve egymáshoz csak emeletben mérhető *A* *B* két neves egyen, és vétessék *A* *B* egyenekhez *C* középegyarányu, és tétessék a mint *A* *B*-hez, úgy *C* *D*-hez.

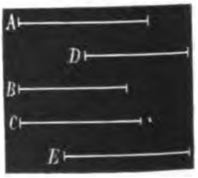
És minthogy *A* *B* csak emeletben összemérhető neves egyenek, tehát az *A* *B* közti derékszeg, azaz a *C* négyszege, közép lap, tehát *C* közép egyen És minthogy a mint *A* *B*-hez, úgy *C* *D*-hez, *A* *B*-hez pedig csak emeletben mérhető, tehát

C is *D*-hez csak emeletben mérhető. És *C* közép egyen, tehát *D* is közép egyen; *C D* tehát csak emeletben összemérhető közép egyenek. Azt is mondom, hogy neves derékszeget fognak be. Mert mivel a mint *A B*-hez, úgy van *C D*-hez, tehát cserélve a mint *A C*-hez, úgy *B D*-hez. De a mint *A C*-hez, úgy van *C B*-hez, tehát a mint *C B*-hez, úgy *B D*-hez; a *C D* közti derékszeg tehát egyenlő a *B* négyszegével. Már pedig a *B* négyszege neves, tehát a *C D* közti derékszeg is neves.

Találtattak tehát neves derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek: m. t. k.

29. Feladat:

Közép derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyeneket találni.



Legyen felvéve egymáshoz csak emeletben mérhető három neves egyen *A B C*, és vétessék *A B* egyenekhez *D* középegyarányu, és tétessék a mint *B C*-hez, úgy *D E*-hez.

Minthogy *A B* csak emeletben összemérhető neves egyenek, tehát az *A B* közti derékszeg azaz: a *D* négyszege közép; *D* tehát közép egyen. És minthogy *B C*-hez csak emeletben mérhető, és a mint *B C*-hez úgy van *D E*-hez, tehát *D E* csak emeletben összemérhető egyenek; *D* pedig közép egyen, tehát *E* is közép; *D E* tehát csak emeletben összemérhető közép egyenek. Azt is mondom, hogy közép derékszeget fognak be. Mert mivel a mint *B C*-hez, úgy van *D E*-hez: tehát cserélve, a mint *B D*-hez, úgy *C E*-hez. De a mint *B D*-hez, úgy *D A*-hoz, tehát a mint *D A*-hoz, úgy van *C E*-hez; az *A C* közötti derékszeg tehát egyenlő a *D E* köztivel. Már pedig az *A C* közti közép lap, tehát a *D E* közti is közép lap.

Találtattak tehát sat. m. t. k.

Felvétel. (A baseli kiadásból).

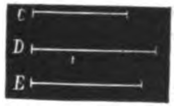
Adva levén két szám és egy legyen, azt kell mívelni, hogy a mint szám számhoz, úgy legyen az egyen négyszege valami más egyen négyszegéhez.

Legyen az adott két szám *A B*, az adott egyen pedig *C*; és kelljen mívelni az elő-adottat.

A . . .
B . . . .

Tétessék a mint *A B*-hez, úgy *C* egyen valami más *D* egyenhez, és vétessék *C*-hez *D*-hez középegyarányu *E*.

A . . .
B . . . .



Már mivel a mint *A B*-hez, úgy van *C* egyen *D* egyenhez; de a mint *C D*-hez, úgy van a *C* négyszege az *E*-éhez. Tehát a mint *A B*-hez, úgy a *C* négyszege az *E*-éhez.

1. Felvétel.

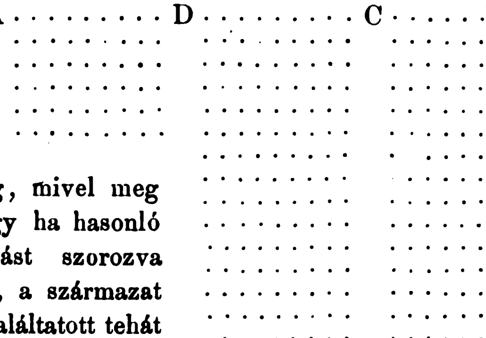
Két olyan négyszegszámot találni, hogy a belőlök öszvetett szám is négyszeg legyen.

Vétessék fel két szám *AB BC*, és legyenek vagy párosok vagy páratlanok.

A . . . . C . . . . . . B

És minthogy, akár ha a párosból páros, akár a páratlanból páratlan elvétetik, a maradék páros; tehát *AC* maradék páros. Vágassék ketté *AC* *D*-nél. Legyenek pedig *AB BC* vagy hasonló lapszámok vagy négyszegek, melyek magok is hasonló lapszámok, tehát az *AB BC* származatuk a *CD* négyszegével együtt egyenlő a *DB* négyszegével.

A . . . . D . . . . C . . . . . B



Már pedig az *AB BC* származatuk négyszeg, mivel meg van mutatva, hogy ha hasonló lapszámok egymást szorozva csinálnak számot, a származat négyszegszám. Találtatott tehát két négyszegszám, ú. m. az *AB BC* származatuk, és a *CD* négyszege, melyek öszvetéve a *BD* négyszegét alkotják: m. t. k.

Tanuság. És világos, hogy leletett más két négyszeg, a *BD*-é és *CD* é, melyeknek különbsége, ú. m. az *AB BC* közti lapszám, négyszeg, ha *AB BC* hasonló lapszámok. Ha pedig, nem hasonló lapszámok, olyan két négyszegszám, a *BD*-é és *CD*-é találtatott, melyeknek különbsége, ú. m. az *AB BC* közti lapszám, nem négyszeg.

2. Felvétel.

Két olyan négyszegszámot találni, hogy a belőlök összevetett szám ne legyen négyszeg.

A . . . . D . . . . C . . . . . . B

A . . . . D . E . . . . C . . . . . . B

Mert legyen az *AB BC* származatuk, a mint mondtuk, négyszeg, és *CA* páros, és *CA* vágassék ketté *D*-nél; világos, hogy az *AB BC* származatuk a *CD* négyszegével együtt egyenlő a *BD* négyszegével. Vétessék el *DE* egység; tehát az *AB BC* származatuk a *CE* négyszegével együtt kisebb a *BD* négyszegénél. Már azt mondom, hogy az *AB BC* származatuk a *CE* négyszegével együtt nem leend négyszeg.

A . . G . . . . D . E . . . . C . . . . . . B

Mert ha négyszeg, vagy egyenlő a *BE* négyszegével vagy kisebb annál, de nagyobb semmikép nem, mert különben az egység elvágatnék, vagy az *AB BC* származatuk a *CD* négyszegével együtt, mely a *BD* négyszege, egyenlő lenne az *AB BC* származatukkal a *CE* négyszegével együtt. Legyen hát, ha lehet, előbb is az *AB BC* származatuk a *CE* négyszegével együtt egyenlő a *BE* négyszegével, és legyen *GA* két akkora, mint *DE* egység. Minthogy az egész *AC* két akkora mint az egész *CD*, miből *AG* két akkora mint *DE*; tehát a maradék *GC* is két akkora mint a maradék *EC*; *GC* tehát *E*-nél ketté van vágva; tehát a *GB BC* származatuk a *CE* négyszegével együtt egyenlő a

BE négyszegével. De az *AB BC* származatuk is a *CE* négyszegével együtt egyenlőnek van feltéve a *BE* négyszegével; tehát a *GB BC* származatuk meg a *CE* négyszege együtt egyenlő az *AB BC* származatukkal meg a *CE* négyszegével.

A . . G . . . . D . E . . . . D . . . . . . B

A . . G . . H . . . . D . E . F . . . . C . . . . . B

És elvétetvén a *CE* közös négyszege, az jő ki, hogy *AB* egyenlő *GB*-vel; mi képtelen; tehát az *AB BC* származatuk, meg a *CE* négyszege együtt nem egyenlő a *BE* négyszegével. Azt mondom, hogy nem is kisebb nálánál. Mert, ha lehet, legyen egyenlő a *BF* négyszegével, és tétessék *HA* két akkorának mint *DF*. És ismét az jő ki, hogy *HC* két akkora mint *CF*, úgy hogy *CH* is ketté van vágva *F*-nél, és azért a *HB BC* származatuk meg az *FC* négyszege együtt egyenlő a *BF* négyszegével. De feltettük, hogy az *AB BC* származatuk is a *CE* négyszegével együtt egyenlő az *FB* négyszegével; úgy hogy a *HB BC* származatuk meg a *CF* négyszege egyenlő lenne az *AB BC* származatukkal meg a *CE* négyszegével; mi képtelen; az *AB BC* származatuk tehát a *CE* négyszegével együtt nem egyenlő a *BE* négyszegénél kisebbel. De megmutattaték, hogy *BE* négyszegével vagy annál nagyobbal sem egyenlő; az *AB BC* származatuk tehát a *CE* négyszegével együtt nem négyszeg. [Lehetvén még többféleképp is megmutatni a mondottat, legyen elég a mit mondottunk, nehogy már is hosszura húzódván a dolog, még tovább nyujtsuk.]

30. Feladat:

Egymáshoz csak emeletben mérhető két oly neves egyent találni hogy a nagyobbik hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü a kisebbiknél.

C.....E....D

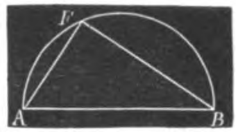
Vétessék fel némi neves egyen AB, és két olyan négyszegszám, CD DE, melyeknek különbsége CE ne legyen négyszeg. Irassék AB-re AFB félkör, és legyen úgy a BA négyszege az AF négyszegéhez, mint DC CE-hez, és vonassék FB.

Minthogy a mint a BA négyszege az AF négyszegéhez, úgy van DC CE-hez, tehát a BA négyszege az AF-éhez azon arányban van, miben DC szám CE számhoz, a BA négyszege tehát összemérhető az AF-ével. Már pedig az AB négyszege neves; tehát neves az AF-é is, ennélfogva AF egyen is neves. És minthogy DC CE-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát a BA négyszege sincs az AF-éhez azon azányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; BA tehát AF-hez hoszban szertelen; BA AF tehát csak emeletben összemérhető neves egyenek. És minthogy a mint DC CE-hez, úgy van a BA négyszege az AF négyszegéhez, tehát átfordítva a mint CD DE-hez, úgy van az AB négyszege a BF-éhez. De CD DE-hez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az AB négyszege is a BF-éhez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; AB BF-hez tehát hoszban mérhető. És az AB négyszege egyenlö az AF FB négyszegeikkel; AB tehát a vele hoszban összemérhető BF négyszegével nagyobb emeletü AF-nél.

Találtatott tehát egymáshoz csak emeletben mérhető két neves egyen BA AF, melyek közül a nagyobbik AB a hozzája hoszban mérhető BE négyszegével nagyobb emeletü a kisebbiknel AF-nél, m. t. k.

31. Feladat:

Egymáshoz csak emeletben mérhető oly két neves egyent találni, hogy a nagyobbik hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü a kisebbiknél.



C....E.........D

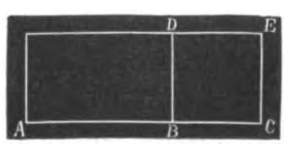
Vétessék fel AB neves egyen, és két olyan négyszegszám CE ED, hogy a belölök öszvetett szám CD ne legyen négyszeg. Irassék AB-re AFB félkör, és legyen úgy az AB négyszege az AF-éhez, mint CD CE-hez, és vonassék BF.

Hasonlókép mutatjuk meg, mint az elébbiben, hogy BA AF csak emeletben összemérhető neves egyenek. És mivel a mint DC CE-hez, úgy van a BA négyszege az AF-éhez: tehát átfordítva is, a mint CD DE-hez, úgy van az AB négyszege a BF-éhez. Már pedig CD DE-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az AB négyszege sincs a BF-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; AB tehát BF-hez hoszban szertelen. És így AB a vele szertelen BF egyen négyszegével nagyobb emeletü AF-nél.

AB AF tehát egymáshoz csak emeletben mérhetők, és AB a hozzája szertelen BF négyszegével nagyobb emeletü AF-nél.

(*Felvétel.* Ha két egyen némi arányban van, a mint az egyen az egyenhez, úgy van a kettő közti derékszeg a kisebbik négyszegéhez.

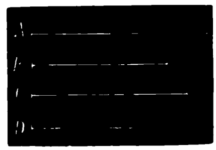
Ugyanis AB BC vonalok legyenek némi arányban; azt mondom, hogy a mint AB BC-hez, úgy van az AB BC közti derékszeg a BC négyszegéhez.



Mert írassék BC-re $BDEC$ négyszeg, és egészíttessék ki AD egyközény. Világos, hogy a mint AB BC-hez, úgy van AD egyközény BE egyközényhez. Már pedig AD az AB BC közti derékszeg, mert BC BD-vel egyenlő; BE pedig a BC négyszege; tehát a mint AB BC-hez, úgy van az AB BC közti derékszeg a BC négyszegéhez, m. b. k.)

32. Feladat:

Neves derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető két oly közép egyent találni: hogy a nagyobbik hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü a kisebbiknél



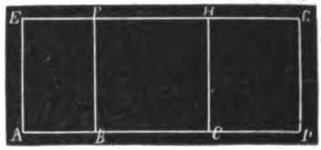
Vétessék fel egymáshoz csak emeletben mérhető két oly egyen *A B*, hogy a nagyobbik *A* hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü a kisebbiknél *B*-nél. És legyen az *A B* közti derékszeggel egyenlő a *C* négyszege. Már az *A B* közti derékszeg közép lap, tehát a *C* négyszege is közép lap; közép tehát *C* egyen is. Legyen egyenlő a *B* négyszegével a *C D* közti derékszeg, de a *B* négyszege neves; tehát a *C D* közti derékszeg is neves. És mivel a mint *A B*-hez, úgy az *A B* közti derékszeg a *B* négyszegéhez; de az *AB* közti derékszeggel egyenlő a *C* négyszege, a *B* négyszegével pedig egyenlő a *C D* közti derékszeg; tehát a mint *A B*-hez, úgy a *C* négyszege a *C D* közti derékszeghez. De a mint a *C* négyszege a *C D* közti derékszeghez, úgy van *C D*-hez; tehát a mint *A B*-hez, úgy van *C D*-hez. Már pedig *A B*-hez csak emeletben mérhető. Tehát *C* is *D*-hez csak emeletben mérhető. És *C* közép egyen; tehát *D* is közép egyen. És mivel a mint *A B*-hez, úgy van *C D*-hez, de *A* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *B*-nél; tehát *C* is hozzája mérhető egyen négyszegével leend nagyobb emeletü *D* nél.

Találtatott tehát neves derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető két egyen *C D*, és *C* hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *D*-nél. m. t. k.

(Tanuság.) Hasonlókép mutattatik meg, hogy ha *A* hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *B*-nél, (*C* is ugyanazzal leend nagyobb emeletü *D*-nél.)

Felvétel. Ha van három egyen némi arányban: a mint az első a harmadikhoz, úgy van az első és középső közti derékszeg a középső és legkisebb köztihez.

Legyen *AB BC CD* három egyen némi arányban : azt mondom, hogy a mint *AB CD*-hez ; úgy van az *AB BC* közti derékszeg a *BC CD* köztihez.



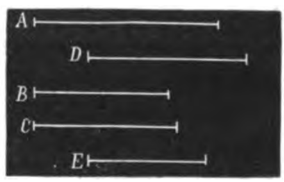
Mert vonassék *A* ponttól *AB*-hez derékszegletre *AE*, és tétessék *AE BC*-vel egyenlővé, és *E* ponton át vonassék *AD* egyenhez egyközü *EG*, *B C D* pontokon át pedig vonassanak *AE*-hez *FB HC GD* egyközüek.

Már mivel a mint *AB BC*-hez, úgy *AF* egyközény *BH* egyközényhez, de a mint *BC CD*-hez, úgy *BH CG*-hez ; tehát egyközösen a mint *AB CD*-hez, úgy *AF* egyközény *CG* egyközényhez. Már pedig *AF* az *AB BC* közti derékszeg, mivel *AE BC*-vel egyenlő ; *CG* megint a *BC CD* közti derékszeg, mert *BC* egyenlő *CH*-val.

Ha tehát van 3 egyen sat.

33. Feladat :

Közép derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető két oly közép egyent találni : hogy a nagyobbik hozzája mérhető egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü a kisebbiknél.

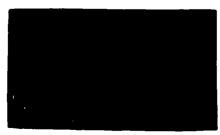


Vétessék fel egymáshoz csak emeletben mérhető három oly neves egyen *A B C*, hogy *A* hozzája mérhető egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü *C*-nél : és legyen az *A B* közti derékszeggel egyenlő a *D* négyszege. De az *A B* közti derékszeg közép lap ; közép tehát a *D* négyszege is ; tehát *D* közép egyen. Legyen a *B C* közti derékszeggel egyenlő a *D E* közti derékszeg. És mivel a mint az *A B* közti derékszeg a *B C* köztihez, úgy van *A C*-hez ; de az *A B* közti derékszeggel egyenlő a *D* négyszege, a *B C* köztivel pedig egyenlő a *D E* közti ; tehát a mint *A C*-hez, úgy van a *D* négyszege a *D E* közti derékszeghez. De a mint a *D* négyszege a *D E* közti derékszeghez, úgy van *D E*-hez ; tehát a mint *A C*-hez, úgy *D E*-hez. Már pedig *A C*-hez csak emeletben mérhető ; *D* is tehát *E*-hez csak emeletben mérhető. D pedig közép egyen; tehát E is közép. És minthogy a mint A C-hez, úgy D E-hez, A pedig hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü C-nél; tehát D is hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü E-nél. Még azt is mondom, hogy a D E közti derékszeg közép lap. Mert minthogy a B C közti derékszeg egyenlő a D E köztivel, a B C közti pedig közép lap, B C csak emeletben összemérhető neves egyenek levén; tehát a D E közti derékszeg is közép lap.

Találtatott tehát közép derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető két oly közép egyen, D E, hogy a nagyobbik hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a kisebbiknél: m. t. k.

Tanuság. Ismét hasonlókép mutattatik meg, hogy ha A hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü C-nél, [D is ugyanolyannal leend nagyobb emeletü E-nél.]

Felvétel.



Legyen ABC derékszegletü háromszeg, melynek BAC alatti szeglete derék, és vonassék AD függő: azt mondom, hogy a CB BD közti derékszeg egyenlő a BA négyszegével, a BC CD közti egyenlő a CA négyszegével, a BD DC közti pedig egyenlő az AD négyszegével, és még a BC AD közti derékszeg a BA AC köztivel.

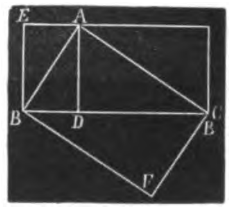
Elsőben is hogy a CB BD közti derékszeg egyenlő a BA négyszegével.

Mert minthogy a derékszegletü háromszegben a derékszegletből a talpra AD függő van vonva, tehát ABD ADC háromszegek hasonlók az egész ABC-hez és egymáshoz. És mivel ABC háromszeg ABD háromszeghez hasonló; tehát a mint CB BA-hoz, úgy van AB BD-hez; a CB BD közti derékszeg tehát egyenlő az AB négyszegével.

Azon okból a BC CD közti derékszeg is egyenlő az AC négyszegével.

És minthogy, ha a derékszegletü háromszegben a derékszeglettől a talpra függő vonatik, a vont egyen a talp vágásai közt közép egyarányu; tehát a mint BD AD-hez, úgy van AD DC-hez; a BD DC közti derékszeg tehát egyenlő az AD négyszegével.

Még azt mondom, hogy a BC AD közti derékszeg egyenlő a BA AC köztivel. Mert minthogy, a mint mondtuk, ABC hasonló ACD-hez, tehát a mint BC CA-hoz, úgy van BA AD-hez. Már pedig ha négy egyen egyarányban van, a szélsők közti derékszeg egyenlő a közbülsők közöttivel; tehát a BC AD közti egyenlő a BA AC köztivel.

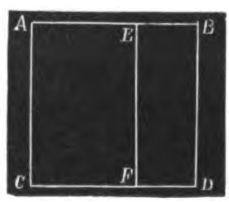


(Vagyis, hogy ha EC derékszegletü egyközényt írjuk, és AF-et kiegészítjük, EC egyenlő leend AF-fel; mert mindenikök két akkora, mint ABC háromszeg: már pedig EC a BC AD közötti derékszeg, AF megint a BA AC közötti; a BC AD közti tehát egyenlő a BA AC köztivel.)

2. Felvétel.

Ha némi egyen nem egyenlő darabokra vágatik: a mint az egyen az egyenhez, úgy van az egész és nagyobbik darabja közti derékszeg, az egész és kisebbik darabja közti derékszeghez.

Mert némi AB egyen vágassék nem egyenlő darabokra E-nél azt mondom, hogy a mint AE EB-hez, úgy van a BA AE közti derékszeg az AB BE köztihez.



Mert irassék AB-re $ACDB$ négyszeg, és E ponton át vonassék akár AC hez, akár BD hez EF egyközü. Világos, hogy a mint AE EB-hez, úgy van AF egyközény FB egyközényhez. De AF a BA AE közti derékszeg, mert AC AB-vel egyenlő; FB pedig az AB BE közti, mert DB AB-vel egyenlő; tehát a mint AE EB-hez, úgy van a BA AE közti derékszeg az AB BE köztihez.

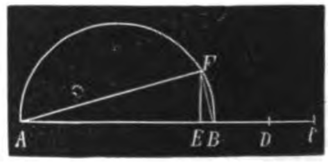
Jegyz. A vaticani kézirat következőkép fejezi ki e felvételt:

Ha van két egyen: a mint egyik a másikhoz, úgy leend a kettőjök öszvege s az egyik közti derékszeg, a kettőjök öszvege és a másik közti derékszeghez.

Bébizonyítása egyez az előbbivel,

34. Feladat:

Egymáshoz emeletben szertelen két oly egyent találni: hogy a négyszegeikből szerkesztett lap neves, a közéjök fogott derékszeg pedig közép lap legyen.



Vétessék fel egymáshoz csak emeletben mérhető két oly neves egyen *AB BC*, hogy a nagyobbik *AB*, hozzája szertelen egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü a kisebbiknél *BC*-nél: vágassék ketté *BC* *D*-nél, és szabassék *AB*-hez akár a *BD* akár a *DC* négyszegével egyenlő egyközény, négyszegkép hiával, és legyen az, az *AE EB* közti: *AB*-re irassék *AFB* félkör, és vonassék *AB*-hez derékszegletre *EF* egyen, és vonassanak *AF FB*.

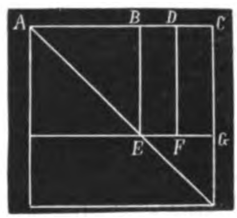
És minthogy van két nem egyenlő egyen *AB BC*, s *AB* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *BC*-nél, *AB*-hez pedig a *BC* négyszegének negyedrészével, azaz, a *BC* felének négyszegével egyenlő egyközény, négyszegkép hijával van szabva, mely az *AE EB* köztit teszi; tehát *AE EB*-hez szertelen. És minthogy a mint *AE EB*-hez, úgy van a *BA AE* közti derékszeg az *AB BE* köztihez; de a *BA AE* közti egyenlő az *AF* négyszegével, az *AB BE* közti pedig a *BF* négyszegével: tehát az *AF* négyszege az *FB* négyszegéhez szertelen; *AF FB* tehát egymáshoz emeletben szertelenek. És minthogy *AB* neves, tehát az *AB* négyszege is neves; úgy hogy az *AF FB* négyszegeikből szerkeszthető lap is neves. És ismét mivel az *AE EB* közti derékszeg egyenlő az *EF* négyszegével; de a a feltétel szerint az *AE EB* közti derékszeg a *BD* négyszegével egyenlő: tehát *FE* egyenlő *BD*-vel; *BC* tehát két akkora mint *EF*; úgy hogy az *AB BC* közti derékszeg is két akkora, mint az *AB EF* közötti; ennélfogva ezzel összemérhető. Már pedig az *AB BC* közti derékszeg közép lap; tehát az *AB EF* közti is közép lap. De az *AB EF* közti egyenlő az *AF FB* köztivel; tehát az *AF FB* közti is közép lap. Megmutattaték az is, hogy a négyszegeikből öszvetett lap neves.

Találtatott tehát egymáshoz emeletben szertelen két egyen *AF FB*, melyeknek négyszegeiből öszvetett lap neves, a köztök való derékszeg pedig közép lap : m. t. k.

3. F e l v é t e l. (A baseli kiadásból.)

Ha van két nem egyenlő egyen, s a kisebbik egyenlő darabokra vágatik : a két egyen közti derékszeg két akkora, mint a nagyobbik és a kisebbiknek hasonfele közti derékszeg.

Legyen *AB BC* két egyen, melyek közzül *AB* a nagyobbik, és *BC* vágassék ketté *D*-nél; azt mondom, hogy az *AB BC* közti derékszeg két akkora mint az *AB BD* közti.

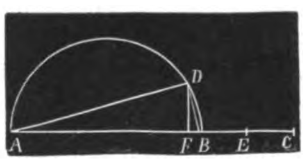


Mert vonassék *B* ponttól *BC*-hez derékszegletre *BE*, és tétessék *BE BA*-val egyenlővé, s készíttessék el a képlet.

Már mivel a mint *DB DC*-hez, úgy van *BF DG*-hez : tehát öszvetéve a mint *BC DC* hez, úgy *BG DG*-hez; de *BC* két akkora mint *DC*, tehát *BG* is két akkora mint *DG*; már pedig *BG* az *AB BC* közti derékszeg, mert *AB BE*-vel egyenlő; *DG* pedig az *AB BD* közti, mivel *BD*-vel *DC*, *AB*-vel *DF* egyenlők : m. b. k.

35. F e l a d a t:

Egymáshoz emeletben szertelen két oly egyent találni, hogy a négyszegeikből szerkesztett lap közép, a köztök való derékszeg pedig neves legyen.



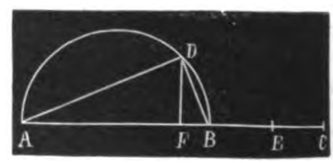
Vétessék fel csak emeletben összemérhető két közép egyen *AB BC*, melyek neves derékszeget fogjanak bé, úgy hogy *AB* hozzája szertelen egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü *BC*-nél; irassék *AB*-re *ADB* félkör; vágassék ketté *BC E*-nél, és szabassék *AB*-hez a *BE* négyszegével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával, ú. m. az *AF FB* közötti; tehát *AF FB*-hez hoszban szertelen; és vonassék *F*-től *AB*-hez derékszegletre *FD*, és vonassanak *AD DB*.

Minthogy *AF FB*-hez szertelen: tehát a *BA AF* közti derékszeg is szertelen az *AB BF* köztihez. De a *BA AF* közti egyenlő az *AD* négyszegével, az *AB BF* közti pedig a *DB* négyszegével; szertelen tehát az *AD* négyszege is a *BD*-éhez; *AD DB* egyenek tehát emeletben szertelenek. És minthogy az *AB* négyszege közép lap, tehát az *AD DB* négyszegeikből szerkesztett lap is közép. És mivel *BC* két akkora mint *DF*: tehát az *AB BC* közti derékszeg is két akkora mint az *AB FD* közti, ennélfogva ezzel összemérhető. Már pedig az *AB BC* közti neves; neves tehát az *AB FD* közti is. De az *AB FD* közti egyenlő az *AD DB* köztivel, úgy hogy az *AD DB* közti is neves.

Találtatott tehát emeletben egymáshoz szertelen két oly egyen *AD DB*, hogy a négyszegeikből szerkesztett lap közép, a közükbe fogott derékszeg pedig neves.

36. Feladat:

Egymáshoz emeletben szertelen két oly egyent találni, hogy a négyszegeikből szerkesztett lap közép, a közükbe fogott derékszeg is közép lap, továbbá, hogy a négyszegeikből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen legyen.



Vétessék fel egymáshoz csak emeletben mérhető két oly közép egyen *AB BC*, melyek közép derékszeget fogjanak bé, és *AB* hozzája szertelen egyen négyszegével legyen nagyobb emeletü *BC*-nél; és *AB*-re *ADB* félkör iratván, a többi a feljebbiekhez hasonló módon vitessék véghez.

És minthogy *AF FB*-hez hoszban szertelen, tehát *AD* is *DB*-hez emeletben szertelen. És mivel az *AB* négyszege közép lap, tehát az *AD DB* négyszegeikből álló lap is közép. És minthogy az *AF FB* közti derékszeg egyenlő akár a *BE* akár a *DF* négyszegével, tehát *BE* egyenlő *DF*-fel: *BC* tehát kétakkora mint *FD*, úgy hogy az *AB BC* közti derékszeg is kétakkora mint az *AB FD* közti. De az *AB BC* közti közép lap, az *AB FD* közti is tehát közép lap, és egyenlő az *AD DB* köztivel; tehát az *AD DB* közti is közép lap. És minthogy *AB BC*-hez hoszban szertelen, *CB* pedig *BE*-hez mérhető; tehát *AB BE*-hez is hoszban is szertelen, úgy hogy az *AB* négyszege is szertelen az *AB BE* közti derékszeghez. De az *AB* négyszegével egyenlők az *AD DB* négyszegei; az *AB BE* közti derékszeggel pedig egyenlö az *AB FD* közti, azaz az *AD DB* közötti; tehát az *AD DB* négyszegeikből álló lap szertelen az *AD DB* közti derékszeghez

Táláltatott tehát egymáshoz emeletben mérhető két oly egyen *AD DB*, hogy a négyszegeikből szerkesztetett lap közép, a közükbe fogott derékszeg is közép lap; továbbá hogy a négyszegeikből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen: m. t. k.

Az öszvezés által származó hat nevetlen egyenről.

37. Feladat:

Ha egymáshoz csak emeletben mérhető két egyen öszvetételetik, az öszveg nevetlen: és hivassék *nevetlen pár*nak.

Legyen összetéve egymáshoz csak emeletben mérhető két neves egyen *AB BC*: azt mondom, hogy az egész *AC* nevetlen.

Mert minthogy *AB BC*-hez hoszban szertelen, csak emeletben levén összemérhetők, és a mint *AB BC*-hez, úgy van az *AB BC* közti derékszeg a *BC* négyszegéhez: tehát az *AB BC* közti derékszeg a *BC* négyszegéhez szertelen. De az *AB BC* közti derékszeggel összemérhető az *AB BC* közti kétszervett derékszeg; a *BC* négyszegével pedig összemérhetők az *AB BC* négyszegeik; mert *AB BC* csak emeletben összemérhető neves egyenek; tehát az *AB BC* közti kétszervett derékszeg is szertelen az *AB BC* négyszegeikhez, és összetéve, az *AB BC* közti kétszervett derékszeg az *AB BC* négyszegeikkel együtt, azaz az *AC* négyszege, szertelen az *AB BC* négyszegeikből álló laphoz. Már pedig az AB BC négyszegeikből álló lap neves; az AC négyszege nevetlen; úgy hogy AC is nevetlen: és hivassék *nevetlen párnak.*

38. Feladat:

Ha neves derékszeget béfogó, egymáshoz mérhető két közép egyen összetétetik: az öszveg nevetlen: hivassék pedig *első középpárnak.*

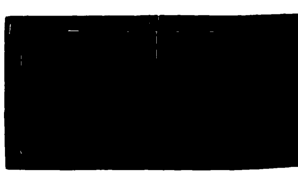
Legyen összetéve csak emeletben mérhető két közép egyen AB BC, melyek neves derékszeget fogjanak be: azt mondom, hogy AC nevetlen.

Mert minthogy AB BC-hez hoszban szertelen, tehát az AB BC négyszegei is szertelenek az AB BC közti kétszervett derékszeghez, és összetéve, az AB BC négyszegeik az AB BC közti kétszervett derékszeggel együtt, mi az AC négyszegét teszi, szertelen az AB BC közti derékszeghez. De az AB BC közti neves, mert AB BC a feltét szerint neves derékszeget fognak be; tehát az AC négyszege nevetlen; tehát AC is nevetlen, és hivassék *első középpárnak.*

39. Feladat:

Ha közép derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető két közép egyen összetétetik: az öszveg nevetlen: hivassék pedig *második középpárnak.*

Legyen öszvetéve egymáshoz csak emeletben mérhető két közép egyen AB BC, melyek közép derékszeget fogjanak be: azt mondom, hogy AC nevetlen,



Mert vétessék fel DE neves egyen, és szabassék DE-hez az AC négyszegével egyenlő DF derékszeg, mely DG szélességet csinálja. És minthogy az AC négyszege az AB BC négyszegeikkel, meg az AB BC közti kétszer vett derékszeggel egyenlő, szabassék *DE*-hez az *AB BC* négyszegeikkel egyenlő, *EH* derékszeg; tehát a maradék *FH* egyenlő az *AB BC* közti kétszer vett derékszeggel. És minthogy mind *AB* mind *BC*közép egyen, tehát az *AB BC* négyszegeik is közép lapok. De a feltét szerint az *AB BC* közti kétszer vett derékszeg is közép lap, és az *AB BC* négyszegeikkel *EH* egyenlő, az *AB BC* közti kétszer vett derékszeggel pedig *FH* egyenlő; tehát mind *EH* mind *HF* közép lapok és *DE* neves egyenhez szabvák; tehát mind *DH* mind *HG* nevesek és *DE*-hez hoszban szertelenek. Már minthogy *AB BC*-hez hoszban szertelen, és a mint *AB BC*-hez, úgy van az *AB* négyszege az *AB BC* közti derékszeghez; tehát az *AB* négyszege szertelen az *AB BC* közti derékszeghez. De az *AB* négyszegével összemérhető az *AB BC* négyszegeikből álló lap, az *AB BC* közti derékszeggel pedig összemérhető az *AB BC* közti kétszer vett derékszeg; tehát az *AB BC* négyszegeikből álló lap szertelen az *AB BC* közti kétszer vett derékszeghez. De az *AB BC* négyszegeikkel *EH* egyenlő, az *AB BC* közti kétszeri derékszeggel pedig *HF* egyenlő; *EH* tehát *HF*-hez szertelen; úgy hogy *DH* is *HG*-hez hoszban szertelen. Már pedig megmutattaték, hogy nevesek; tehát *DH HG* egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; úgy hogy *DG* nevetlen. De *DE* neves; nevetlen és neves egyenek közé fogott derékszeg pedig nevetlen; *DF* lap tehát nevetlen, s a reá emelhető egyen nevetlen. A *DF*-re emelhető egyen pedig *AC*; tehát *AC* nevetlen, és hivassék *második középpár*nak.

Scholion. (Világosítás). Második középpárnak hivá azért, hogy középlapot és nem nevest fognak be, s a közép a nevesnél hátrább áll. Hogy pedig neves és nevetlen egyenek közzé fogott lap nevetlen, nyilvánvaló. Mert ha neves volna, neveshez levén szabva, a második oldala is neves lenne. De nevetlen is, mi képtelen; neves és nevetlen közti derékszeg tehát nevetlen.

40. Feladat:

Ha egymáshoz emeletben szertelen két oly egyen, melyeknek négyszegeikből álló lap neves, a közükbe fogott derékszeg pedig közép lap összetétetik: az egész egyen nevetlen leend; és hivassék *nagyobbik*nak.

[redacted]

Legyen összetéve egymáshoz emeletben szertelen két egyen AB BC, melyek a mondott lapokat alkossák,: azt mondom, hogy AC nevetlen.

Mert minthogy az AB BC közti derékszeg középlap, tehát az AB BC közti kétszer vett derékszeg is közép. De az AB BC négyszegeikből álló lap neves; tehát az AB BC közti derékszeg az AB BC négyszegeikből álló laphoz szertelen; úgy hogy az AB BC négyszegeik, meg az AB BC közti két szer vett derékszeg, mik az AC négyszegét teszik, az AB BC négyszegeikből álló laphoz szertelenek. De az AB BC négyszegeikből álló lap neves; az AC négyszege tehát nevetlen; úgy hogy AC is nevetlen; és hivassék *nagyobbiknak*.

Scholion. Nagyobbiknak hivá, mivel az AB BC neves négyszegeik nagyobbak az AB BC közti kétszeri nevetlen derékszegnél, s az elnevezést a nevesek sajátságáról kell venni. — Hogy pedig AB BC négyszegeik az AB BC közti kétszeri derékszegnél nagyobbak, így kell megmutatni.

Világos hogy AB BC nem egyenlők. Mert ha egyenlők volnának, AB-nek BC-nek a négyszegeik is egyenlők lennének az AB BC közti kétszeri derékszeggel, s az AB BC közti lap neves lenne, mi nem úgy van feltéve; AB BC tehát nem egyenlők. Tegyük fel hogy AB a nagyobbik, és tétessék BD BC-vel egyenlővé; e szerint az AB BD négyszegeik egyenlők az AB BD közti kétszeri derékszeggel, meg az AD négyszegével; de DB BC-vel egyenlő; tehát AB BC négyszegeik egyenlők az AB BC közti kétszeri derékszeggel, meg az AD négyszegével; úgy hogy az AB BC négyszegeik az AD négyszegével nagyobbak az AB BC közti kétszeri derékszegnél: m. b. k.

[redacted]

41. Feladat:

Ha egymáshoz emeletben szertelen két egyen, melyeknek négyszegeiből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg pedig neves, összetétetik: az öszveg nevetlen leend; neveztessék pedig *neves és közép lapra emelhető*nek.

Legyen öszvetéve egymáshoz emeletben szertelen két egyen *AB BC*, melyek a mondott lapokat alkossák: azt mondom, hogy *BC* nevetlen.

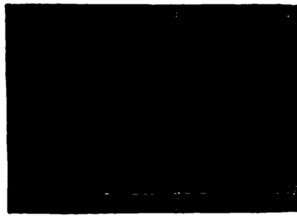
Mert minthogy az *AB BC* négyszegeikből álló lap közép, az *AB BC* közti kétszer vett derékszeg pedig neves: tehát az *AB BC* négyszegeikből álló lap az *AB BC* közti kétszer vett derékszeghez szertelen; úgy hogy összvetéve is az *AC* négyszege szertelen az *AB BC* közti kétszer vett derékszeghez. De az *AB BC* közti kétszer vett derékszeg neves; tehát az *AC* négyszege nevetlen; *AC* is tehát nevetlen; és hivassék *neves és közép lapra emelhetőnek.*

Scholion. Neves és közép lapra emelhetőnek hivá, mivel négyszege egyenlő két oly lap öszvegével, melyek egyike neves, másika közép. És mivel a neves elébbvaló a nevetlennél, előbb mondja a nevest.

42. Feladat:

Ha egymáshoz emeletben szertelen két egyen, melyeknek négyszegeiből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg is közép lap, és a négyszegeikből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen, összetétetik; az egész egyen nevetlen leend: hivassék pedig *két közép lapra emelhető*nek.

Vétessék fel emeletben szertelen két oly egyen, *AB BC*, hogy az *AB BC* négyszegeikből álló lap közép, az *AB BC* közti derékszeg is közép, és az *AB BC* négyszegeiből összetett lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen legyen; azt mondom, hogy *AC* nevetlen.



Vétessék DE neves egyen, és szabassanak DE-hez az AB BC négyszegeikkel egyenlő DF, és az AB BC közti kétszer vett derékszeggel egyenlő GH derékszegek; az egész DH tehát egyenlő az AC négyszegével. És minthogy az AB BC négyszegeikből álló lap közép és egyenlő DF-fel; tehát DF is közép lap, és neves egyenhez DE-hez van szabva; tehát DG neves és DE-hez hoszban szertelen. Ugyanazért GK is neves és GF-hez azaz DE-hez hoszban szertelen. És minthogy az AB BC négyszegei az AB BC közti kétszer vett derékszeghez szertelenek, tehát DF GH-hoz szertelen, úgy hogy DG egyen is szertelen GK egyenhez. Már pedig mind a ketten nevesek; DG GK tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; DK tehát nevetlen párnak hivatott nevetlen egyen. De DE neves; tehát DH nevetlen, és a reá emelhető egyen is nevetlen. Már pedig a DH-ra emelhető egyen AC; tehát AC nevetlen; és hivassék *két közép lapra emelhető*nek.

(*Scholion.* Két közép lapra emelhetőnek hivja, mivel négyszege, két közép lapnak ú. m. az AB BC négyszegeiknek s az AB BC közti kétszeri derékszegnek öszvegével egyenlő.)

(*Felvétel.* Vétessék AB egyen és vágassék nem egyenlő részekre mind C nél mind D-nél, és tétessék fel, hogy AC nagyobb DB-nél: azt mondom, hogy az AC CB négyszegei együtt véve nagyobbak az AD DB négyszegeinél együtt véve.

Mert vágassék ketté AB E-nél. És minthogy AC nagyobb DB-nél, vétessék el a közös DC, tehát a maradék AD nagyobb a maradék CB-nél. De AE egyenlő EB-vel: tehát DE kisebb EC-nél; C D pontok tehát nem egyenlő tavulságra vannak a ketté osztó ponttól. És minthogy az AC CB közti derékszeg az EC négyszegével együtt egyenlö az EB négyszegével, de az AD DB közti derékszeg is a DE négyszegével együtt egyenlő az EB négyszegével; tehát az AC CB közti derékszeg az EC négyszegével együtt egyenlö az AD DB közti derékszeggel a DE négyszegével együtt; melyek közzül a DE négyszege kisebb az EC-énél; tehát a maradék AC CB közti derékszeg is kisebb az AD DB köztinél; úgy hogy AC CB közti kétszeri derékszeg is kisebb az AD DB közti kétszeri derékszegnél. És [elvétetvén mindenik az AB négyszegéből] tehát a maradék AC CB négyszegeikből álló lap nagyobb az AD DB négyszegeikből állónál: m. b. k.)

43. Feladat:

A nevetlen párt csak egy pontnál választhatni a tagjaira.

Legyen AB nevetlen pár a tagjaira választva C-nél; AC CB tehát csak emeletben összemérhető neves egyenek. Azt mondom, hogy AB-t nem választhatni semmi más pontnál egymáshogy csak emeletben mérhetö két neves egyenre.

Mert, ha lehet, választassék el D-nél; úgy hogy AD DB egymáshoz emeletben mérhető neves egyenek legyenek Világos hogy AC DB-vel nem azon egy. Mert ha lehet, legyen: úgy aztán AD is azon egy lesz CB-vel; és a mint AC CB-hez úgy lesz BD DA-hoz; és AB e szerint C-nél csak is azon osztályokra lesz választva, mikre D-nél, mi nem úgy van feltéve; AC tehát DB-vel nem azon egy; ennélfogva C D pontok nem egyenlö távulságra vannak a kettévágó ponttól; tehát a mekkorával különböznek az AC CB négyszegeik az AD DB négyszegeiktől, akkorával különbözik kétszer az AD DB közti derékszeg is az AC CB közti kétszeritől; minthogy az AC CB négyszegeik az AC CB közti kétszervett derékszeggel együtt, de az AD DB négyszegeik is az AD DB közti kétszeri derékszeggel együtt egyenlők az AB négyszegével. De az AC CB négyszegeik az AD DB négyszegeiktől neves lappal különböznek, mert mind a ketten nevesek, tehát az AD DB közti derékszeg is az AC CB köztitől neves lappal különbözik, közép létökre; mi képtelen; mert közép lap közép lapnál nem lehet neves lappal nagyobb.

A nevetlen párt tehát nem választhatni a tagjaira más meg más pontoknál; tehát csak egynél: m. b. k.

44. Feladat:

Az első közép párt csak egy pontnál válaszhatni külön.

Legyen AB első középpár különválasztva C-nél, úgy hogy AC CB egyenek, neves derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek legyenek: azt mondom, hogy AB-t nem választhatni külön más pontnál.

Mert, ha lehet, választassék külön D-nél, úgy hogy AD DB egyenek, neves derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben összemérhető közép egyenek legyenek. Már minthogy a mivel különbözik az AD DB közti kétszeri derékszeg az AC CB közti kétszeritől, azzal különböznek az AD DB négyszegeik is az AC CB négyszegeiktől; de kétszer az AD DB közti derékszeg neves lappal különbözik az AC CB közti kétszeritől, mivel mind ketten nevesek; tehát az AC CB négyszegeik is neves lappal különböznek az AD DB négyszegeiktől, közép létökre, mi képtelen.

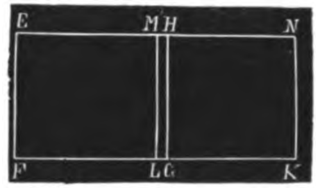
Az első középpárt tehát nem választhatni külön más meg más pontoknál; tehát csak egynél: m. b. k.

45. Feladat:

A második közép párt csak egy pontnál választhatni külön.

Legyen AB második középpár különválasztva C-nél, úgy hogy AC CB egyenek, közép derékszeget béfogó, egymáshoz csak emeletben mérhető közép vonalok legyenek: világos, hogy C nincs a ketté vágó pontnál, minthogy az osztályok hosszban össze nem mérhetők: azt mondom, hogy AB-t más pontnál nem választhatni külön.

Mert, ha lehet, választassék el D-nél, úgy hogy AC DB vel ne legyen azon egy, hanem AC a feltét szerint nagyobb, (tudnivaló az is, hogy az AD DB négyszegeik kisebbek az AC CB négyszegeiknél, a mint fennebb megmutatók), és AD DB legyenek közép derékszeget béfogó, egymással csak emeletben mérhető közép egyenek. Továbbá vétessék fel EF neves egyen, és szabassék EF-hez az AB négyszegével egyenlő derékszegletű egyköz-zény EK, ebből pedig vétessék el az AC CB négyszegeikkel egyenlő EG derékszeg; tehát a maradék HK egyenlő az AC CB közti kétszeri derékszeggel. Ismét vétessék el az AD DB négyszegeikkel (melyek az AC CB négyszegeiknél kisebbeknek vannak megmutatva) egyenlő EL derékszeg is, tehát a maradék MK egyenlő az AD DB közti kétszeri derékszeggel. És minthogy az AC CB négyszegeik közép lapok, tehát EG is közép, és EF neves egyenhez van szabva; tehát EH neves, és EF-hez hoszban szertelen. Ugyanazért HN is neves, és EF-hez hoszban szertelen. És mivel AC CB egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek, tehát AC CB-hez hoszban szertelen. Már pedig a mint AC CB-hez, úgy van az AC négyszege az AC CB közti derékszeghez; tehát az AC négyszege az AC CB közti derékszeghez szertelen. De az AC négyszegével az AC CB négyszegeik összemérhetők, mert AC CB emeletben összemérhetők és az AC CB közti derékszeggel kétszer az AC CB közti összemérhető; tehát az AC CB négyszegeik is szertelenek az AC CB közti kétszeri derékszeghez. De az AC CB négyszegeikkel EG derékszeg egyenlő, az AC CB közti kétszeri derékszeggel megint HK egyenlő; tehát EG HK-hoz szertelen; úgy hogy EH is hoszban szertelen HN-hez; de nevesek; tehát EH HN egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. Már pedig ha két neves csak emeletben mérhető egyen összetétetik, az egész nevetlen, és mondatik nevetlen párnak; EN tehát nevetlen pár és H-nál van külön választva. — Éppen úgy mutattatik meg az is, hogy EM MN



egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és *EN* más meg más pontoknál ú. m. *H*-nál és *M*-nél különválasztott nevetlen pár, és *EH MN* nem azon egy egyen lesz, minthogy az *AC CB* négyszegeik nagyobbak az *AD DB* négyszegeiknél. De az *AD DB* négyszegeik nagyobbak az *AD DB* közti kétszeri derékszegnél, annyival inkább nagyobbak az *AC CB* négyszegeik, azaz *EG*, az *AD DB* közti kétszeri derékszegnél, azaz *MK*-nál; úgy hogy *EH* is nagyobb *MN*-nél; *EH* tehát *MN*-nel nem azon egy. (*EN* nevetlen pár tehát más meg más pontoknál van külön választva; mi lehetetlen; tehát a középpárt sem választhatni külön más meg más pontoknál, tehát csak egynél.) m. b. k.

46. Feladat:

A nagyobbik nevetlen egyent csak egy pontnál választhatni külön.

[redacted]

Legyen *AB* nagyobbik nevetlen egyen különválasztva *C*-nél, úgy hogy *AC CB* egymáshoz emeletben szertelenek legyenek, és az *AC CB* négyszegeikből álló lap neves, az *AC CB* közti derékszeg pedig közép lap legyen: azt mondom, hogy *AB*-t más pontnál nem választhatni külön.

[redacted]

Mert, ha lehet, választassék külön *D*-nél, úgy hogy *AD DB* legyenek egymáshoz emeletben szertelenek, az *AB BD* négyszegeikből álló lap neves és a közükbe fogott derékszeg közép lap. És minthogy a mivel különböznek az *AC CB* négyszegeik az *AD DB* négyszegeiktől, azzal különbözik az *AD DB* közti kétszeri derékszeg is az *AC CB* közti kétszeritől; de az *AC CB* négyszegeik az *AD DB* négyszegeiket neves lappal haladják felül, mert mind a ketten nevesek; tehát az *AD DB* közti kétszeri derékszeg is az *AC CB* közti kétszerit neves lappal haladja felül, holott mind kettő közép lap, mi lehetetlen; nem választhatni külön tehát a nagyobbik nevetlent más meg más pontoknál; tehát csak azon egynél választhatni külön: m. b. k.

47. Feladat:

A neves és közép lapra emelhető egyent csak egy pontnál választhatni külön.

[redacted]

Legyen neves és közép lapra emelhető AB egyen külön választva C-nél, úgy hogy AC CB egymáshoz emeletben szertelenek legyenek, és az AC CB négyszegeikből álló lap közép, az AC CB közti derékszeg pedig neves legyen: azt mondom, hogy AB-t nem lehet más pontnál külön választani.

[redacted]

Mert, ha lehet, választassék külön D-nél, úgy hogy AD DB legyenek egymáshoz emeletben szertelenek, és az AD DB négyszegeikből álló lap közép, az AD DB közti derékszeg pedig neves. Minthogy már a mivel különbözik az AD DB közti kétszeri derékszeg az AC CB közti kétszeritől, azzal különböznek az AC CB négyszegeik is, az AD DB négyszegeiktől; de az AD DB közti kétszeri derékszeg az AC CB közti kétszerit neves lappal haladja meg; tehát az AC CB négyszegeik is az AD DB négyszegeiket neves lappal haladják meg, holott közép lapok; mi lehetetlen; nem választhatni külön tehát a neves és közép lapra emelhető egyent más meg más pontoknál; tehát csak egynél választhatni külön: m. b. k.

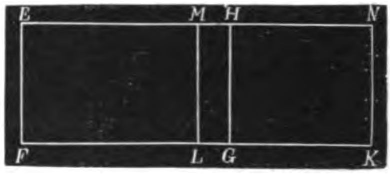
48. Feladat:

A két közép lapra emelhető egyent csak egy pontnál választhatni külön.

[redacted]

Legyen két közép lapra emelhető AB egyen külön választva C-nél, úgy hogy AC CB legyenek emeletben szertelenek egymáshoz, és az AC CB négyszegeikből álló lap közép, az AC CB közti derékszeg is közép, és a négyszegeikből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen: azt mondom, hogy AB-t más pontnál nem választhatni külön úgy, hogy a mondottak igazak maradjanak.

Mert, ha lehet, választassék külön *D*-nél, úgy hogy ismét a mint tudni való, *AC DB*-vel ne legyen azon egy, hanem a feltét szerint *AC* nagyobb, és vétessék fel *EF* neves egyen, és szabassék *EF*-hez az *AC CB* négyszegeikkel egyenlő *EG*, s az *AC CB* közti kétszeri de-



rékszeggel egyenlő *HK*, tehát az egész *EK* egyenlő az *AB* négyszegével. Ismét szabassék *EF*-hez az *AD DB* négyszegeikkel egyenlő *EL*, tehát a maradék *AD DB* közti kétszeri derékszeg a maradék *MK*-val egyenlő. És minthogy az *AC CB* négyszegeikkel egyenlő lap, a feltét szerint közép, tehát *EG* is közép lap, és *EF* neves egyenhez van szabva, tehát *HE* neves és *EF*-hez hoszban szertelen. Ugyanazért *HN* is neves, és *EF*-hez hoszban szertelen. És minthogy az *AC CB* négyszegeikből álló lap az *AC CB* közti kétszeri derékszeghez szertelen, tehát *EG* is szertelen *HK*-hoz, úgy hogy *EH* egyen is szertelen *HN* egyenhez. Már pedig nevesek; *EH HN* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *EN* nevetlen pár és külön van választva *H*-nál. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy *M*-nél is külön van választva, és *EH MN*-nel nem azon egy egyen, a nevetlen pár tehát két különböző pontnál van külön választva, mi képtelen; nem választhatni külön tehát a két közép lapra emelhető egyent más meg más pontoknál; tehát csak egy pontnál választhatni külön: m. b. k.

Második izbeli értelmezések.

1. Vétessék fel egy neves egyen, s egy a tagjaira oszlott nevetlen pár, melynek nagyobbik tagja hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a kisebbiknél: ha már

a nagyobbik tagot mérhetni hoszban a felvett neves egyenhez: az *egész nevetlen pár* mondassék *első*nek.

2. Ha a feltett egyenhez hoszban a kisebbik tag mérhető: a *nevetlen pár* mondassék *második*nak.

3. Ha pedig egyik tagot sem mérhetni hoszban a felvett neves egyenhez: a *nevetlen pár* mondassék *harmadik*nak.

4. Legyen ismét a nagyobbik tag hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a kisebbiknél: ha már a felvett neves egyenhez a nagyobbik tagot mérhetni hoszban, mondassék a *nevetlen pár negyedik*nek.

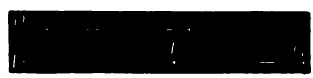
5. Ha a kisebbiket: *ötödik*nek.

6. Ha pedig egyiket sem: *hatodik*nak.

49. Feladat:

Az első nevetlen párt megtalálni.

A............C....B

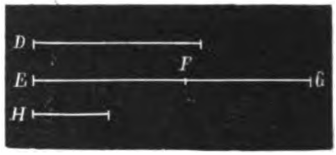


Vétessék AC CB két oly szám, hogy az öszvegök AB BC-hez azon arányban legyen, miben négyszegszám négyszegszámhoz, CA-hoz pedig ne legyen azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz; vétessék D neves egyen is, és D-hez legyen EF hoszban mérhető; tehát EF egyen is neves. És tétessék a mint BA szám AC-hez, úgy az EF négyszege az FG négyszegéhez. De AB AC-hez azon arányban van, miben szám számhoz, tehát az EF négyszege is az FG-éhez azon arányban van, miben szám számhoz, úgy hogy az EF négyszege az FG-éhez mérhető. És EF neves; tehát FG is neves. És minthogy BA AC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az EF négyszege sincs az FG-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; EF egyen tehát FG egyenhez hoszban szertelen; EF FG tehát csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát EG nevetlen pár.

Azt mondom, hogy *első* is.

Mert mivel a mint BA szám AC számhoz, úgy van az EF négyszege az FG négyszegéhez; de BA nagyobb AC-nél, tehát az EF négyszege is nagyobb az FG-énél. Legyenek az EF négyszegével egyenlők az FG H négyszegeik. És minthogy a mint BA AC-hez, úgy van az EF négyszege az FG-éhez; tehát átfordítva a mint AB BC-hez, úgy az EF négyszege a H-éhoz. De AB BC-hez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát az EF négyszege is a H-éhoz azon arányban van, miben négyszám négyszegszámhoz; tehát EF egyen H-val hoszban összemérhető; EF tehát vele hoszban összemérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü FG-nél. E szerint EF FG neves egyenek, és EF D-hez hoszban mérhető.

A............C....B



EG tehát első nevetlen pár: m. b. k.

50. Feladat:

A második nevetlen párt megtalálni.

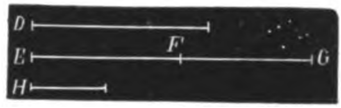
Vétessék fel két olyan szám AC CB, hogy öszvegök AB azon arányban legyen BC-hez, miben négyszegszám négyszegszámhoz, AC-hez pedig ne legyen azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; vétessék D neves egyen is, és FG legyen D-vel hoszban összemérhető; tehát FG neves. Azután tétessék a mint CA szám AB-hez, úgy a GF négyszege az FE-éhez, tehát a GF négyszege összemérhető az FE-ével; tehát FE is neves. És minthogy CA szám AB számhoz nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát a GF négyszege sincs az FE-éhez azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz: tehát GF FE-hez hoszban szertelen; EF FG tehát csak emeletben összemérhető nevés egyenek; EG tehát nevetlen pár.

A............C....B

Meg kell mutatni, hogy *második*,

Mert minthogy visszáson a mint AB szám AC-hez, úgy van az EF négyszege az FG-éhez; de BA nagyobb AC-nél, tehát az EF négyszege is nagyobb az FG-énél. Legyenek az EF-ével egyenlők az FG H négyszegeik; tehát átfordítva, a mint AB BC-hez, úgy van az EF négyszege a H-éhoz. De AB BC-hez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát az EF négyszege is a H-éhoz azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát EF egyen H-hoz hoszban mérhető; úgy hogy EF hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü FG-nél. Már pedig EF FG egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és FG kisebb tag hoszban mérhető a felvett D egyenhez.

A............C....B



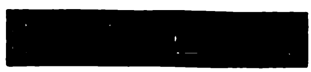
EG tehát második nevetlen pár: m. b. k.

51. Feladat:

A harmadik nevetlen párt megtalálni.

Vétessék AC CB két oly szám, hogy összegök AB azon arányban legyen BC-hez, miben négyszegszám négyszegszámhoz, AC-hez pedig ne legyen azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; vétessék más nem négyszegszám is D, mely se BA-hoz se AC-hez ne legyen azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; vétessék végre E neves egyen, és tétessék a mint D AB-hez, úgy az E négyszege az FG-éhez; az E négyszege tehát az FG-ével összemérhető. De E neves egyen; tehát FG is neves. És minthogy D AB-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, az E négyszege sincs az FG-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát E FG-hez hoszban szertelen. Tétessék ismét a mint BA szám AC-hez, úgy az FG négyszege a GH-éhoz; tehát az FG négyszege összemérhető a GH-éval. De FG neves, tehát GH is neves. És

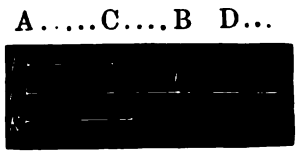
A.....C....B D...



minthogy *AB AC*-hez nincs azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát az *FG* négyszege sincs a *GH*-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát *FG EH*-hoz hoszban szertelen; *FH GH* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *FH* tehát nevetlen pár.

Azt mondom, hogy a ***harmadik*** is.

Mert minthogy a mint *D AB*-hez, úgy van az *E* négyszege az *FG*-éhez, s a mint *AB AC*-hez, úgy az *FG* négyszege a *GH*-éhoz; tehát egyközösen a mint *D AC*-hez, úgy van az *E* négyszege a *GH*-éhoz. De *D AC*-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, az *E* négyszege sincs tehát a *GH*-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát *E* egyen *GH*-hoz hoszban szertelen. És mivel a mint *BA AC*-hez, úgy van az *FG* négyszege a *GH*-éhoz, tehát az *FG* négyszege nagyobb a *GH*-énál. Legyenek az *FG*-ével a *GH K* négyszegeik egyenlők; átfordítva tehát a mint *AB BC*-hez, úgy van az *FG* négyszege a *K*-éhoz. Már pedig *AB BC*-hez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az *FG* négyszege is a *K*-éhoz azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; *FG* tehát *K*-hoz hoszban mérhető; tehát *FG* hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *GH*-nál. És *FG GH* egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és *E* egyenhez hoszban egyiköket sem mérhetni.

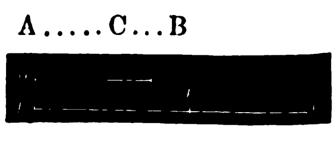


FH egyen tehát harmadik nevetlen pár: m. b. k.

52. Feladat:

A negyedik nevetlen párt megtalálni.

Vétessék *AC CB* két olyan szám, hogy *AB* se *BC*-hez, se *AC*-hez ne legyen azon arányban, miben négyszeg-

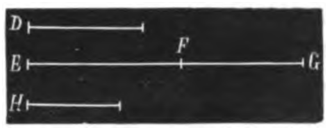


szám négyszegszámhoz; vétessék D neves egyen is, és legyen D-hez hoszban mérhető EF egyen; tehát EF is neves. És tétessék a mint BA szám AC-hez, úgy az EF négyszege az FG-éhez; tehát az EF-é az FG-ével összemérhető; FG tehát neves egyen. És minthogy BA AC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, az EF négyszege sincs az FG-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát EF FG-hez hoszban szertelen; EF FG tehát egymáshoz csak emeletben mérhető. neves egyenek; miszerint EG nevetlen pár.

Azt mondom, hogy *negyedik* is.

Mert mivel a mint BA AC-hez, úgy van az EF négyszege az FG-éhez; de BA nagyobb AC-nél; tehát az EF négyszege is nagyobb az FG-énél. Legyenek az EF-ével egyenlők az FG H négyszegeik; átfordítva tehát a mint AB szám BC-hez, úgy van az EF négyszege a H-éhoz. De AB BC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az EF négyszege sincs a H-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; EF egyen tehát H-hoz hoszban szertelen; tehát EF hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü FG-nél. Már pedig EF FG egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és EF D-vel hoszban összemérhető.

A.....C...B



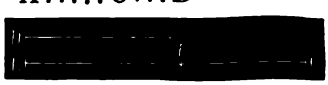
EG tehát negyedik nevetlen pár: m. b. k.

53. Feladat:

Az ötödik nevetlen párt megtalálni.

Vétessék AC CB két olyan szám, hogy AB egyikökhez se legyen azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; vétessék D neves egyen is, és D-vel legyen GF egyen hoszban összemérhető, GF tehát neves. És tétessék

A.....C...B



a mint CA AB-hez, úgy a GF négyszege az FE-éhez; tehát FE neves egyen. És minthogy CA AB-hez nincs azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát a GF négyszege sincs az FE-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; EF FG tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát EG nevetlen pár.

Azt mondom, hogy *ötödik* is.

Mert mivel a mint CA AB-hez, úgy van az FG négyszege az FE-hez, tehát visszáson, a mint BA AC-hez, úgy van az EF négyszege az FG-éhez. Tehát az EF-é nagyobb az FG-énél.

A.....C...B

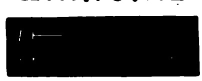
Legyenek az EF-ével egyenlők az FG H négyszegeik; tehát átfordítva, a mint AB szám BC-hez, úgy van az EF négyszege a H-éhoz. De AB BC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az EF négyszege sincs a H-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; EF egyen tehát H-hoz hoszban szertelen; miszerint EF hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü FG-nél. Már pedig EF FG egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és a kisebbik tag FG a felvett D egyennel hoszban összemérhető.

EG tehát ötödik nevetlen pár: m. b. k.

54. Feladat:

A hatodik nevetlen párt megtalálni.

A.....C...B D...



Vétessék AC CB két oly szám, hogy AB egyikökhez se legyen azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz: legyen más D szám is, mely se négyszeg, se BA-nak AC-nek egyikéhez se legyen azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; és vétessék E neves egyen; s tétessék a mint D AB-hez, úgy az E négyszege az FG-éhez;

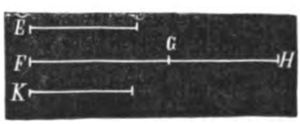
tehát az E négyszege az FG-ével összemérhető. De E neves egyen; tehát FG is neves. És minthogy D AB-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát az E négyszege sincs az FG-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz: E egyen tehát hoszban szertelen FG-hez. Tétessék ismét a mint BA van AC-hez, úgy az FG négyszege a GH-éhoz. Az FG négyszege tehát összemérhető a GH-éval. De az FG négyszege neves; tehát a GH-é is neves; tehát GH egyen is neves. És minthogy BA AC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az FG négyszege sincs a GH-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; FG egyen tehát GH-hoz hoszban szertelen; tehát FG GH egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; ennélfogva FH nevetlen pár.

A.....C...B D...

Azt mondom, hogy hatodik is.

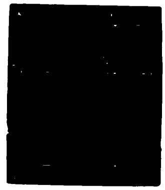
Mert mivel a mint D AB-hez, úgy van az E négyszege az FG-éhez, s a mint BA AC-hez, úgy az FG négyszege a GH-éhoz; tehát egyközösen a mint D AC-hez, úgy van az E négyszege a GH-éhoz. De D AC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; az E négyszege sincs tehát a GH-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz. E egyen tehát GH-hoz hoszban szertelen. Megmutattaték pedig, hogy FG-hez is szertelen; mind FG mind GH tehát E-hez hoszban szertelenek. És minthogy a mint BA AC-hez, úgy van az FG négyszege a GH-éhoz: tehát az FG négyszege nagyobb a GH-énál.

A.....C...B D...



Legyenek az FG ével a GH K négyszegei egyenlők; átfordítva tehát a mint AB BC-hez, úgy van az FG négyszege a K-éhoz. De AB BC-hez nincs azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz, miszerint az FG négyszege sincs a K-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; FG egyen tehát K-hoz hoszban szertelen; FG tehát hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emelotü GH-nál. Már pedig FG GH egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, s a felvett E egyennel hoszban egyikök sem összemérhető.

FH tehát hatodik nevetlen pár: m. b. k.



(*Felvétel.* Legyen AB BC két négyszeg úgy helyezve, hogy DB BE-vel egyenesben legyen; egyenesben van tehát FB is BG-vel. Egészíttessék ki AC egyközény: és azt mondom, hogy AC négyszeg, és hogy DG AB-hez BC-hez középegyarányu, DC pedig dig AC-hez CB-hez középegyarányu.

Mert mivel DB egyenlö BF-fel és BE BG-vel; tehát az egész DE egyenlö az egész FG-vel. De DE egyenlö akár AH-val akár KC-vel; FG pedig egyenlö akár AK-val akár HC-vel; tehát AH-nak KC-nek mindenike egyenlö AK-nak HC-nek akármelyikével; AC egyközény tehát egyenlö oldalu; de derékszegletü is; tehát AC négyszeg.

És minthogy a mint FB BG-hez, úgy van DB BE-hez; de a mint FB BG-hez, úgy van AB DG-hez, s a mint DB BE-hez, úgy DG BC-hez; tehát a mint AB DG-hez, úgy van DG BC-hez; DG tehát AB BC között középegyarányu.

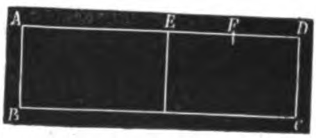
Még azt mondom, hogy DC AC-hez CB-hez középegyarányu.

Mert mivel a mint AD DK-hoz, úgy van KG GC-hez, különkülön egyenlök levén. Öszvetéve is a mint AK KD-hez, úgy van KC CG-hez. De a mint AK KD-hez úgy van AC CD-hez, és a mint KC CG-hez, úgy DC CB-hez; tehát a mint AC DC-hez, úgy van DC BC-hez; AC CB között tehát DC közép egyarányu: m. b. k.)

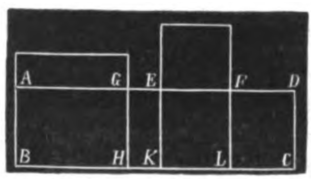
55. Feladat:

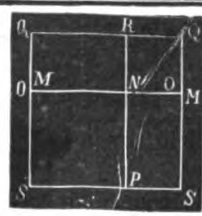
Ha némi lapot egy neves egyen és egy első nevetlen pár fognak bé, az azon lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely nevetlen párnak mondatik.

Ugyanis $ABCD$ lap legyen AB neves egyen és AD első nevetlen pár közzé fogva: azt mondom, hogy az AC lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely nevetlen párnak mondatik.



Mert minthogy AD egyen első nevetlen pár, választassék el tagjaira E-nél, és a nagyobbik tagja legyen AE. Világos, hogy AE ED egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és AE hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletű ED-nél, és hogy AE a felvett AB neves egyennel hoszban összemérhető. Vágassék ketté ED F pontnál. Már minthogy AE hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü ED-él; tehát ha a kisebbik egyen négyszegének negyedrészével, azaz az EF négyszegével egyenlő derékszeg, négyszegkép hiával szabatik AE-hez, az ezt egymáshoz mérhető részekre osztja. Szabassék AE-hez az EF négyszegével egyenlő AG GE közti derékszeg; tehát AG EG-vel hoszban összemérhető. És vonassanak G E F pontoktól akár AB-hez akár CD-hez egyközü GH EK FL egyenek, és állíttassanak össze AH egyközénynyel egyenlő SN, GK-val pedig egyenlő NQ négyszegek, és helyzessenek úgy, hogy MN legyen NO-val egyenesben; egyenesben van tehát NR is NP-vel. És egészíttessék ki SQ egyközény; miszerint SQ





négyszeg. És minthogy az *AG GE* közti derékszeg egyenlő az *EF* négyszegével; tehát a mint *AG EF*-hez, úgy van *EF EG*-hez; a mint tehát *AH EL*-hez, úgy *EL KG*-hez; *EL* tehát középegyarányu *AH GK* között. De *AH* egyenlő *SN*-nel, *GK* pedig egyenlő *NQ*-val; tehát *EL* középegyarányu *SN NQ* között. Már pedig *MR* is középegyarányu ugyanazon *SN* és *NQ* között; *MR* tehát egyenlő *EL*-lel. De *MR PO*-val, *EL* pedig *FC*-vel egyenlők, tehát az egész *EC* egyenlő *MR* meg *PO*-val; *AH GK* is pedig egyenlők *SN* meg *NQ*-val; tehát az egész *AC* egyenlő az egész *SQ*-val, azaz: az *MO* négyszegével; *AC* tehát egyenlő az *MO* emeletével.

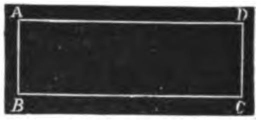
Azt mondom hogy *MO* nevetlen pár.

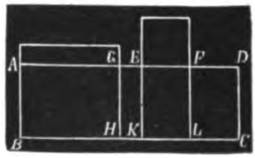
Mert minthogy *AG GE*-vel összemérhető; tehát *AE* mind *AG*-vel mind *GE*-vel összemérhető. De a feltét szerint *AE*-t *AB*-hez is mérhetni hoszban; tehát *AG GE AB*-vel összemérhetők. És *AB* neves; tehát *AG GE* is külön-külön nevesek; tehát *AH GK* is külön-külön nevesek; úgy hogy *AH GK*-val összemérhető. De *AH* egyenlő *SN*-nel, *GK* pedig *NQ*-val; tehát *SN NQ* is, azaz: az *MN NO* négyszegeik nevesek és összemérhetők. És minthogy *AE ED*-hez hoszban szertelen, de *AE AG*-vel összemérhető, *DE* megint *EF*-hez mérhető; tehát *AG EF*-hez hoszban szertelen, úgy hogy *AH* is *EL*-hez szertelen. De *AH SN*-nel egyenlő, *EL* pedig *MR*-rel; *SN* is tehát *MR*-hez szertelen. De a mint *SN MR*-hez, úgy van *PN NR*-hez; *PN* tehát *NR*-hez szertelen. Már pedig *PN NM*-mel, *NR* pedig *NO*-val egyenlők; tehát *MN* szertelen *NO*-hoz. De az *MN* négyszege összemérhető az *NO* négyszegével, és mindenik neves; *MN NO* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek.

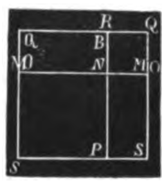
MO tehát nevetlen pár és *AC*-re emelhető: m. b. k.

56. Feladat:

Ha némi lapot egy neves egyen és egy második nevetlen pár fognak be: az azon lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely első középpárnak mondatik.







Ugyanis *ABCD* lapot fogjon bé *AB* neves egyen és *AD* második nevetlen pár: azt mondom, hogy az *AC* lapra emelhető egyen első középpár.

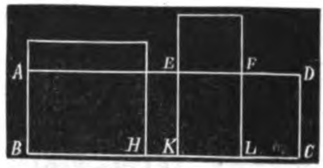
Mert minthogy *AD* második nevetlen pár, választassék a tagjaira *E*-nél, úgy hogy a nagyobbik tagja *AE* legyen; *AE ED* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és *AE* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *ED*-nél, s a kisebbik tag *ED AB*-vel hoszban öszszemérhető. Vágassék ketté *ED F*-nél, és szabassék *AE*-hez az *EF* négyszegével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával, úgymint az *AG GE* közti; *AG* tehát *GE*-vel hoszban összemérhető. Továbbá *G*-n *E*-n *F*-en át vonassanak *AB*-hez vagy *DC*-hez egyközü *GH EK FL* egyenek, és állíttassék össze *AH* egyközénynyel egyenlő *SN* négyszeg és *GK*-val egyenlő *NQ* négyszeg, és helyzessenek úgy, hogy *MN NO*-val egyenesben legyen; tehát *RN* is *NP*-vel egyenesben van. Egészíttessék ki *SQ* négyszeg: világos az eddig megmutattakból. hogy *MR* középegyarányu *SN NQ* között, és egyenlő *EL*-lel, és hogy *MO* egyen *AC* lapra emelhető. — Már meg kell mutatni, hogy *MO* első középpár. Minthogy *AE ED*-hez hoszban szertelen, *ED* pedig *AB*-vel összemérhető, tehát *AE AB*-hez hoszban szertelen. És mivel *AG GE*-vel összemérhető, tehát *AE* mind *AG*-hez mind *GE*-hez mérhető. *AE* pedig neves, tehát *AG GE* is mind ketten nevesek. És minthogy *AE AB*-hez szertelen, *AE* pedig mind *AG*-hez mind *GE*-hez mérhető: tehát *AG GE* egyenek *AB*-hez hoszban szertelenek; *BA AG GE* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, úgy hogy AH GK lapok mindenike közép lap, ennélfogva SN NQ négyszegek is mind ketten közép lapok; MN NO is tehát közép egyenek. És minthogy AG GE-vel hoszban összemérhető, AH is mérhető GK-hoz, azaz SN NQ-hoz, azaz az MN négyszege az NO-éhoz, úgy hogy MN NO emeletben összemérhetők. És minthogy AE ED-hez hoszban szertelen, de AE összemérhető AG-vel, DE pedig EF-fel; tehát AG EF-hez szertelen, úgy hogy AH is szertelen EL-hez, azaz: SN MR-hez, úgy hogy PN NR-hez, azaz MN NO-hoz hoszban szertelen. Megmutattaték pedig, hogy MN NO közép egyenek, és egymáshoz emeletben mérhetők: MN NO tehát csak emeletben mérhető közép egyenek. Azt mondom, hogy neves derékszeget is fognak bé. Mert minthogy a feltét szerint DE mind AB-hez mind EF-hez mérhető; tehát FE is mérhető EK-hoz. Már pedig mindeggyikök neves, tehát EL is, azaz MR, neves; MR pedig az MN NO közti derékszeg. Már pedig ha egymáshoz csak emeletben mérhető neves derékszeget béfogó két közép egyen összetétetik, az öszveg nevetlen és mondatik első középpárnak.

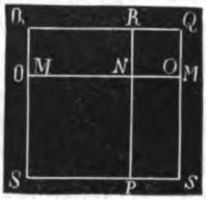
MO tehát első középpár: m. b. k.

57. Feladat:

Ha némi lapot egy neves egyen és egy harmadik nevetlen pár fog bé: az azon lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely második középpárnak mondatik.

Ugyanis $ABCD$ lapot fogják bé AB neves egyen és AD harmadik nevetlen pár. Legyen AD E-nél tagjaira választva, és ezeknek nagyobbika AE: Azt mondom, hogy az AC lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely második középpárnak mondatik.





Készittessenek el ugyanazok, mik az előbbiekben. És minthogy AD harmadik nevetlen pár: tehát AE ED egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és AE hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü ED-nél, és sem AE sem ED AB-hez hoszban nem mérhető. Továbbá az előbb megmutattakhoz hasonlólag mutatjuk meg, hogy MO egyen AC lapra emelhető, és MN NO egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek, úgy hogy MO középpár.

Meg kell mutatni, hogy második is.

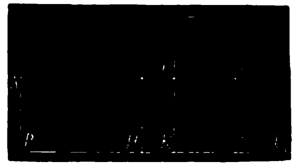
Már minthogy DE AB-hez azaz EK-hoz hoszban szertelen; DE pedig EF-fel összemérhető; tehát EF EK-hoz hoszban szertelen. De nevesek; FE EK tehát csak emeletben mérhető neves egyenek; EL tehát, azaz MR, közép lap, és MN NO egyenek fogják bé. Az MN NO közti derékszeg tehát közép lap.

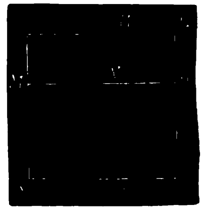
Tehát MO második középpár: m. b. k.

58. Feladat:

Ha némi lapot egy neves egyen és egy negyedik nevetlen pár fognak bé: az ezen lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely nagyobbik nevetlennek mondatik.

Ugyanis AC lapot fogják bé AB neves egyen, és AD negyedik nevetlen pár. Legyen AD E-nél a tagjaira választva, melyeknek nagyobbika AE: azt mondom, hogy az AC lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely nagyobbik nevetlennek mondatik.





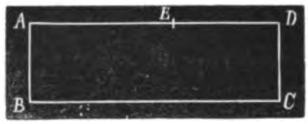
Mert minthogy AD negyedik nevetlen pár, tehát AE ED egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és AE hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü ED-nél, és AE AB-hez hoszban mérhető. Vágassék ketté DE F-nél, és szabassék AE-hez az EF négyszegével egyenlő AG GE közti egyközény; AG tehát GE-hez hoszban szertelen. Vonassanak AB-hez egyközü GH EK FL egyenek, s egyéb is minden úgy készíttessék el, mint az előbbiekben: világos, hogy az AC lapra, emelhető egyen MO. Meg kell már mutatni, hogy MO olyféle nevetlen egyen, mely nagyobbik nevetlennek mondatik. Mert minthogy AG GE-hez hoszban szertelen, AH is GK-hoz, azaz SN NQ-hoz szertelen; MN NO tehát emeletben szertelenek. És minthogy AE AB-vel hoszban összemérhető, AK neves lap és egyenlő az MN NO négyszegeikkel; tehát az MN NO négyszegeikből álló lap is neves. És minthogy DE AB-hez, azaz EK-hoz, hoszban szertelen, de DE összemérhető EF-fel; tehát EF EK-hoz hoszban szertelen; KE EF tehát csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát LE, azaz MR közép lap, és MN NO fogják be; közép lap tehát az MN NO közti derékszeg is, az MN NO négyszegeikből álló lap pedig neves, és MN NO emeletben szertelenek. Már pedig ha emeletben szertelen két egyen, melyeknek négyszegeikből álló lap neves, a közükbe fogott derékszeg pedig közép lap, öszszetétetik: az egész egyen olyféle nevetlen, mely nagyobbik nevetlennek mondatik.

MO tehát úgy nevezett nagyobbik nevetlen és AC lapra emelhető: m. b. k.

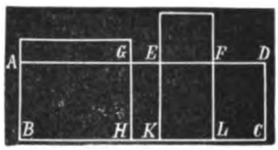
59. Feladat:

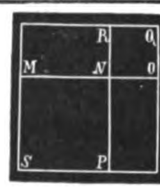
Ha némi lapot egy neves egyen és egy ötödik nevetlen pár fognak bé: az ezen lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely neves és közép lap emeletűnek mondatik.

Ugyanis AC lapot fogják bé AB neves egyen, és AD ötödik nevetlen pár, mely legyen E-nél a tagjaira választva, úgy hogy a nagyobbik tag AE legyen; azt mondom, hogy az AC lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely neves és közép lapra emelhetőnek mondatik.



Mert készíttessenek el ugyanazok, mik az előbb megmutatottakban: világos, hogy MO az AC lapra emelhető egyen. Már meg kell mutatni, hogy MO neves és közép lapra emelhető egyen. Mert minthogy AG GE-hez szertelen; tehát AH is HE-hez, azaz az MN négyszege, az NO négyszegéhez, szertelen; MN NO tehát emeletben szertelenek. És mivel AD ötödik nevetlen pár s a kisebbik tagja ED, tehát ED AB-hez hoszban mérhető. De AE ED-hez hoszban szertelen, AB is tehát AE-hez hoszban szertelen; tehát BA AE egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; AK tehát, azaz az MN NO négyszegeikből álló lap, közép. És minthogy DE AB-hez azaz EK-hoz hoszban mérhető, de DE összemérhető EF-fel; tehát EF is EK-val összemérhető. Már pedig EK neves egyen, neves tehát EL is, azaz: MR, azaz: az MN NO közti derékszeg; tehát MN NO emeletben szertelenek, és a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg pedig neves.



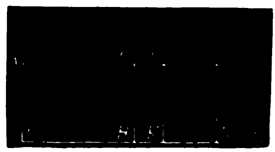


MO tehát neves és közép lap emeletű, és AC lapra emelhető: m. b. k.

60. Feladat:

Ha némi lapot egy neves egyen és hatodik nevetlen pár fognak bé: az ezen lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely két közép lap emeletünek mondatik.

Ugyanis $ABCD$ lapot fogják be AB neves egyen, és AD hatodik nevetlen pár, mely legyen E-nél a tagjaira választva, úgy hogy a nagyobbik tag AE legyen: azt mondom, hogy az AC lapra emelhető egyen olyféle nevetlen, mely két közép lap emeletünek mondatik.



Mert készíttessenek el ugyanazok, mik az előbb megmutattakban. Világos, hogy az AC-re emelhető egyen MO, és hogy MN NO-hoz emeletben szertelen. És mivel EA AB-hez hoszban szertelen; tehát EA AB csak emeletben mérhető neves egyenek; AK tehát, azaz az MN NO négyszegeikből álló lap, közép. Ismét, minthogy ED AB-hez hoszban szertelen, tehát EF is EK-hoz szertelen; FE EK tehát csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát EL, azaz MR, azaz az MN NO közti derékszeg, közép lap. És minthogy AE EF-hez szertelen, tehát AK is EL-hez szertelen. De AK az MN NO négyszegeikből álló lap, EL pedig az MN NO közti derékszeg; tehát az MN NO négyszegeikből álló lap az MN NO közti derékszeghez szertelen, és mindakettő közép egyen, és MN NO egymáshoz emeletben szertelenek.

MO tehát két közép lap emeletü és AC-re emelhető: m. b. k.

Felvétel. Ha egyenes vonal nem egyenlő darabokra vágatik, az osztáyok négyszegei nagyobbak a közükbe fogott kétszervett derékszegnél.

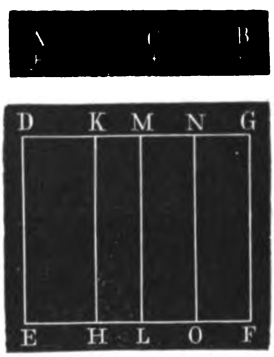
Legyen AB egyen, és választassék nem egyenlő darabokra C-nél, s a nagyobbik legyen AC: azt mondom, hogy az AC CB négyszegeik nagyobbak az AC CB közti kétszervett derék szegnél.

Mert vágassékketté AB D-nél.

Minthogy egy egyenes vonal D-nél egyenlő, C-nél pedig nem egyenlő darabokra van vágva, tehát az AC CB közti derékszeg a DC négyszegével együtt egyenlő az AD négyszegével; úgy hogy az AC CB közti derékszeg kisebb az AD négyszegénél; az AC CB közti kétszeri derékszeg tehát kisebb az AD négyszege kettőzeténél. De az AC CB négyszegeik két akkorák mint az AD DC négyszegeik; tehát az AC CB négyszegeik nagyobbak az AC CB közti kétszeri derékszegnél; m.b. k.

61. Feladat:

A nevetlen pár négyszege, neves egyenhez szabatván, a szélessége első nevetlen pár lesz.



Legyen AB nevetlen pár C-nél a tagjaira választva, úgy hogy a nagyobbik tagja AC legyen. Vétessék DE neves egyen, és szabassék DE-hez az AB négyszegével egyenlő $DEFG$ derékszeg, mely DG szélességet csinálja: azt mondom, hogy DG egyen első nevetlen pár.

Mert szabassék DE-hez az AC négyszegével egyenlő DH, és a BC négyszegével egyenlő KL; tehát a maradék, úgymint az AC CB közti derékszeg kettőzete egyenlő MF-fel. Vágassék MG ketté N-nél, és vonassék akár ML-hez akár GF-hez egyközü NO: MO-nak NF-nek akármelyike tehát az AC CB közti egy derékszeggel egyenlő. És minthogy AB nevetlen pár C-nél a tagjaira van választva; tehát AC CB egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; az AC CB négyszegeik tehát nevesek és egymáshoz mérhetők, úgy hogy az AC CB négyszegeikből álló lap is az AC CB négyszegeikhez mérhető; az AC CB négyszegeikből álló lap tehát neves. És egyenlő DL-lel, tehát DL neves derékszeg, és DE neves egyenhez van szabva; tehát DM neves egyen és DE-vel hoszban összemérhető. Ismét, minthogy AC CB csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát az AC CB közti kétszeri derékszeg, azaz MF, közép lap. És ML neves egyenhez van szabva; tehát MG is neves, és ML-hez, azaz DE-hez, hoszban szertelen. De MD is neves, és DE-vel hoszban összemérhető; tehát DM MG-hez hoszban szertelen. Nevesek is; DM MG tehát csak emeletben mérhető neves egyenek; DG tehát nevetlen pár.

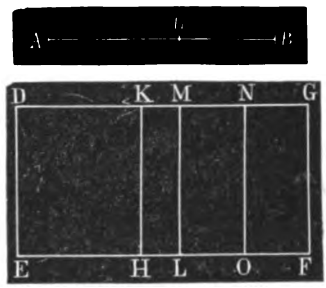
Meg kell mutatni azt is, hogy első.

Mert minthogy az AC CB közti derékszeg az AC CB négyszegeik között középegyarányu; tehát MO is közép egyarányu DH KL között; e szerint a mint DH MO hoz, úgy van MO KL-hez, azaz: a mint DK MN-hez, úgy MN MK-hoz; a DK KM közti derékszeg tehát egyenlő az MN négyszegével. És minthogy az AC négyszege mérhető a CB-éhez, DH is mérhető KL-hez; úgy hogy DK is KM-hez hoszban mérhető. És minthogy az AC CB négyszegei az AC CB közti kétszeri derékszegnél nagyobbak: tehát DL nagyobb MF-nél; úgy hogy DM is nagyobb MG-nél. És a DK KM közti derékszeg egyenlő az MN négyszegével, azaz az MG négyszege negyedrészével, és DK KM-mel hoszban összemérhető. Már pedig ha van két nem egyenlő egyen, s a nagyobbikhoz a kisebbik négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával szabatik s egymáshoz mérhető darabokra vágja: a nagyobbik hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a kisebbiknél; tehát DM hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü MG-nél. Már pedig DM MG nevesek, s DM a nagyobbik tag a felvett DE neves egyennel hoszban összemérhető.

DG tehát első nevetlen pár: m. b. k.

62. Feladat:

Az első középpár négyszege neves egyenhez szabatván, a szélessége második nevetlen pár lesz.



Legyen *AB* első középpár *C*-nél közép egyenekre választva, úgy hogy a nagyobbik tagja *AC* legyen, és vétessék *DE* neves egyen, és szabassék *DE*-hez az *AB* négyszegével egyenlő *DF* egyközény, mely *DG* szélességet csinálja: azt mondom, hogy *DG* második nevetlen pár.

Mert készíttessenek el ugyanazok, mik az előbbeniben. És minthogy *AB* első középpár, és *C*-nél el van választva; tehát *AC CB* egymáshoz csak emeletben mérhető neves derékszeget béfogó közép egyenek, úgy hogy az *AC CB* négyszegeik is közép lapok; *DL* tehát közép lap, és neves egyenhez, *DE*-hez, van szabva; tehát *MD* neves és *DE*-hez hoszban szertelen. Ismét, mivel az *AC CB* közti kétszeri derékszeg neves, neves *MF* is, és *ML* neves egyenhez van szabva; tehát *MG* is neves, és *ML*-hez, azaz *DE*-hez, hoszban mérhető; tehát *DM MG*-hez hoszban szertelen. Már pedig nevesek; *DM MG* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *DG* nevetlen pár.

Meg kell mutatni hogy második.

Mert minthogy az *AC CB* négyszegeik az *AC CB* közti kétszeri derékszegnél nagyobbak, tehát *DL* is *MF*-nél nagyobb, miszerint *DM* is nagyobb *MG*-nél. És minthogy az *AC* négyszege a *CB* négyszegéhez mérhető, tehát *DH* is mérhető *KL*-hez, úgy hogy *DK* is mérhető *KM*-hez. De a *DK KM* közti derékszeg egyenlő az *MN* négyszegével; *DM* tehát hozzá mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *MG*-nél. Már pedig *MG DE*-hez hoszban mérhető. — *DG* tehát második nevetlen pár m. b. k.

63. Feladat:

A második középpár négyszege, neves egyenhez szabva, harmadik nevetlen pár szélességet csinál.

Legyen AB második középpár C-nél két közép egyenre választva, úgy hogy a nagyobbik darab AC legyen. Vétessék DE neves egyen, s szabassék DE-hez az AB négyszegével egyenlő DF egyközény, mely DG szélességet csinálja: azt mondom, hogy DG harmadik nevetlen pár.

Mert készíttessenek el ugyanazok, mik az előbbi megmutatásokban. Már minthogy AB második középpár C-nél el van választva, tehát AC CB egymáshoz csak emeletben mérhető, közép lapot béfogó közép egyenek, úgy hogy az AC CB négyszegeikből álló lap is közép. És egyenlő DL-lel; tehát DL is közép lap, és DE neves egyenhez van szabva; tehát DM neves és DE-hez hoszban szertelen. Ugyanazért MG is neves, és ML-hez, azaz DE-hez, hoszban szertelen; tehát mind DM mind MG nevesek és DE-hez hoszban szertelenek. És minthogy AC CB-hez hoszban szertelen; de a mint AC CB-hez, úgy van az AC négyszege az AC CB közti derékszeghez: tehát az AC négyszege is szertelen az AC CB közti derékszeghez, úgy hogy az AC CB négyszegeikből álló lap is szertelen az AC CB közti kétszeri derékszeghez, azaz: DL MF-hez, úgy hogy DM is MG-hez szertelen. De nevesek; tehát MG nevetlen pár.

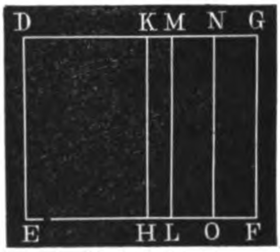
Meg kell mutatni, hogy harmadik is.

Hasonlólag hozzuk ki az előbbiekkel, hogy DM nagyobb MG-nél, és hogy DK KM-hez mérhető. Már pedig a DK KM közti derékszeg egyenlő az MN négyszegével; DM tehát hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletű MG-nél. És sem DM sem MG DE-hez hoszban nem mérhető. — DG tehát harmadik nevetlen pár: m. b. k.

64. Feladat:

A nagyobbik nevetlen négyszege, neves egyenhez szabva, negyedik nevetlen pár szélességet csinál.

[redacted]



Legyen AB nagyobbik nevetlen C-nél elválasztva, úgy hogy AC nagyobb legyen CB-nél. Vétessék DE neves egyen, és szabassék DE-hez az AB négyszegével egyenlő DF egyközény, mely DG szélességet csinálja: azt mondom, hogy DG negyedik nevetlen pár.

Mert készíttessenek el ugyanazok, mik az előbbiekben. És minthogy AB nagyobbik nevetlen egyen el van választva C-nél, AC CB emeletben szertelenek, s a négyszegeikből álló lap neves, a közükbe fogott derékszeg pedig közép lap. Már minthogy az AC CB négyszegeikből álló lap neves, tehát DL neves; DM egyen is tehát neves, és DE-hez hoszban mérhető. Ismét, minthogy az AC CB közti kétszeri derékszeg, azaz MF, közép lap, és ML neves egyenhez van szabva; tehát MG neves, és DE hez hoszban szertelen; DM tehát MG-hez hoszban szertelen; ennélfogva DM MG egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; DG tehát nevetlen pár.

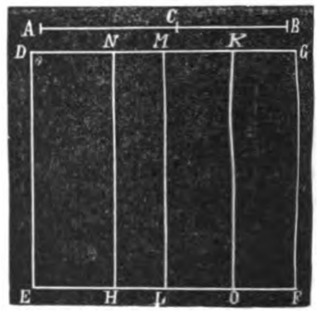
Meg kell mutatni hogy negyedik.

Az előbbiekkel hasonlólag következtetjük, hogy DM nagyobb MG-nél, és hogy a DK KM közti derékszeg az MN négyszegével egyenlő. Már minthogy az AC négyszege a CB-éhez szertelen, tehát DH is szertelen KL-hez, úgy hogy DK is szertelen KM-hez. Már pedig ha van két nem egyenlő egyen, és a nagyobbikhoz a kisebbik négyszegének negyedrészével egyenlő egyközény, négyszegkép hiával szabatik, mely a nagyobbikat hoszban szertelen részekre osztja: a nagyobbik hozzá szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a kisebbiknél; DM tehát hozzá szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü MG-nél. De DM MG egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, melyek közzül *DM* a felvett neves *DE*-hez mérhető.

DG tehát negyedik nevetlen pár: m. b. k.

65. Feladat:

A neves és közép lap emeletü egyen négyszege, neves egyenhez szabva, ötödik nevetlen pár szélességet csinál.



Legyen neves és középlap emeletü *AB* egyen a tagjaira valasztva *C*-nél, úgy hogy *AC* legyen a nagyobbik, és vétetvén *DE* neves egyen, szabassék *DE*-hez az *AB* négyszegével egyenlő *DF* egyközény, mely *DF* szélességet csinálja: azt mondom, hogy *DG* ötödik nevetlen pár.

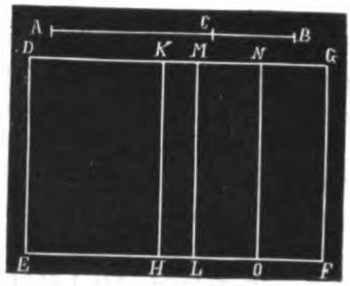
Mert készíttessenek el ugyanazok, mik az előbbiekben. Minthogy *AB* neves és közép lap emeletü egyen el van választva *C*-nél; tehát *AC CB* emeletben szertelenek, és a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg pedig neves. Mivel már az *AC CB* négyszegeikből álló lap közép, tehát *DL* is közép; úgy hogy *DM* neves és *DE*-hez hoszban szertelen. Ismét, mivel az *AC CB* közti kétszeri derékszeg, azaz *MF*, neves; tehát *MG* neves, és *DE*-hez hoszban mérhető; tehát *DM MG*-hez szertelen; *DM MG* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *DG* nevetlen pár.

Azt mondom, hogy ötödik.

Mert hasonlókép mutattatik meg, hogy a *DK KM* közti derékszeg az *MN* négyszegével egyenlő, *DK* pedig *KM*-hez hoszban szertelen; *DM* tehát hozzá szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *MG*-nél. Már pedig *DM MG* egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, s *MG* a kisebbik *DE*-hez hoszban mérhető. — *DG* tehát ötödik nevetlen pár: m. b. k.

66. Feladat:

A két közép lap emeletü egyen négyszege neves egyenhez szabva, hatodik nevetlen pár szélességet csinál.



Legyen AB két közép lap emeletü egyen elválasztva C-nél, DE pedig legyen neves egyen, és DE-hez szabassék az AB négyszegével egyenlő DF derékszeg, mely DG szélességet csinálja: azt mondom, hogy DG hatodik nevetlen pár.

Készíttessenek el ugyanazok, mik az előbbiekben. És minthogy AB két közép lap emeletü, és el van választva C-nél, tehát AC CB emeletben szertelenek, és a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg is közép, és még a négyszegeikből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen; úgy hogy az előbb is megmutattak szerint mind DL mind MF középlapok és DE neves egyenhez szabvák; tehát mind DM mind MG nevesek, és DE-hez hoszban szertelenek. És minthogy az AC CB négyszegeikből álló lap az AC CB közti kétszeri derékszeghez szertelen, tehát DL MF-hez szertelen; ennélfogva DM is szertelen MG-hez; DM MG tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; DG tehát nevetlen pár.

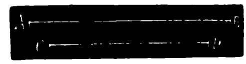
Azt mondom, hogy a hatodik.

Ismét az előbbiekkel hasonlólag mutatjuk meg, hogy a DK KM közti derékszeg egyenlő az MN négyszegével, és hogy DK KM-hez hoszban szertelen; és ugyanazért DM hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü MG-nél. Már pedig DM-nek MG-nek egyike is a felvett DE-hez hoszban nem mérhető.

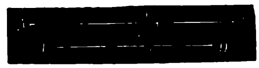
DG tehát hatodik nevetlen pár: m. b. k.

67. Feladat:

A nevetlen párhoz hoszban mérhető egyen maga is nevetlen pár, még pedig azon rendü.



Legyen AB nevetlen pár,, és legyen AB-vel hoszban összemérhető CD egyen: aztmondom, hogy CD nevetlen pár, és AB-vel azon rendü.



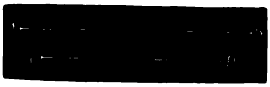
Mert minthogy AB nevetlen pár, választassék a tagjaira E-nél, s legyen AE a nagyobbik tag; tehát AE EB egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. Tétessék a mint AB CD-hez, úgy AE CF-hez; tehát a maradéh EB is úgy van a maradék FD-hez, mint AB CD-hez. De AB CD-hez hoszban mérhető; mérhető tehát AE is CF-hez, és EB FD-hez. Már pedig AE EB neves egyenek, tehát CF FD is nevesek. És mivel a mint AE CF-hez, úgy EB FD-hez; tehát cserélve a mínt AE EB-hez, úgy van CF FD-hez; de AE EB egymáshoz csak emeletben mérhetők, tehát CF-et FD-t is csak emeletben mérhetni egymáshoz. Nevesek is; tehát CD nevetlen pár.

Azt mondom, hogy AB-vel azon rendü is.

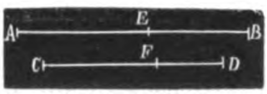
Mert AE vagy hozzá mérhető, vagy hozzá szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü EB-nél. Már ha AE hozzá mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü EB-nél, CF is hozzá mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü FD-nél. És ha AE a felvett neves egyenhez mérhető, CF is mérhető lesz ugyanahhoz; ennélfogva mind AB mind CD első nevetlen párok, azaz: azon rendüek. Ha EB a felvett neves egyenhez mérhető, FD is mérhető ugyanahhoz, s ennélfogva ismét azon rendü leend AB-vel, mert mindenikök 2-dik nevetlen pár. Ha pedig sem AE sem EB a felvett neves egyenhez nem mérhetők, CF-nek FD-nek sem lesz egyike is ahhoz mérhető, és így mindakettő harmadik. Ismét, ha AE hozzá szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü EB-nél, CF is hozzá szertelen egyen négyszegével lesz nagyobb emeletü FD-nél. És ha AE összemérhető a felvett egyennel, *CF* is összemérhető lesz vele, és mind a kettö negyedik. Ha *EB* az, *FD* is a lesz, és így mind a kettő ötödik. Ha pedig *AE EB* közzül egyik sem az, *CF*-nek *FD*-nek sem lesz egyike is összemérhető a felvett neves egyennel, és e szerint mind a kettő hatodik, úgy hogy ha sat. m. b. k.

68. Feladat:

A középpárhoz hoszban mérhető egyen maga is középpár, még pedig azon rendü.



Legyen *AB* középpár, és *CD* legyen *AB*-hez hoszban mérhető: az mondom, hogy *CD* középpár, és *AB*-vel azon rendü.



Mert mivel *AB* középpár, választassék közép egyenekre *E*-nél, *AE EB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek. És tétessék a mint *AB CD*-hez, úgy *AE CF*-hez; tehát a maradék *EB* is a maradék *FD*-hez úgy van, mint *AB CD*-hez. De *AB CD*-hez hoszban mérhető; tehát *AE EB* is mindenik összemérhető mind *CF*-fel mind *FD*-vel; *AE EB* pedig közép egyenek, *CF FD* is tehát középek. És mivel a mint *AE EB*-hez, úgy *CF FD*-hez *AE EB* pedig egymáshoz csak emeletben mérhetők, tehát *CF FD* is egymáshoz csak emeletben mérhetők. Megmutatták az is, hogy középek; tehát *CD* középpár.

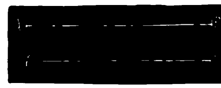
Azt mondom, hogy *AB*-vel azon rendü is.

Mert mivel a mint *AE EB*-hez, úgy van *CF FD*-hez, tehát a mint az *AE* négyszege az *AE EB* közti derékszeghez, úgy van a *CF* négyszege a *CF FD* közti derékszeghez; cserélve tehát a mint az *AE* négyszege a *CF*-éhez, úgy van az *AE EB* közti derékszeg a *CF FD* köztihez. De az *AE* négyszege a *CF*-éhez mérhető; tehát az *AE EB* közti derékszeg is mérhető a *CF FD* köztihez. Már ha az *AE EB* közti derékszeg neves, a *CF FD* közti is neves leend, s ekkor mind a két egyen első középpár. Ha pedig az *AE EB* közti derékszeg közép lap, a *CF FD* közti is közép leend; és így mind a kettő második középpár.

És ezért *CD AB*-vel azon rendű lesz: m. b. k.

69. Feladat:

A nagyobbik nevetlenhez mérhető egyen maga is nagyobbik nevetlen.



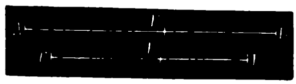
Legyen *AB* nagyobbik nevetlen, *CD* pedig *AB*-hez mérhető: azt mondom, hogy *CD* is nagyobbik nevetlen.

Válasszassék el *AB E*-nél; tehát *AE EB* emeletben szertelenek, és a négyszegeikből álló lap neves, a közükbe fogott derékszeg pedig közép lap; és miveltessék az, a mi az előbbeniekben. És mivel a mint *AB CD*-hez, úgy van *AE CF*-hez és *EB FD*-hez: ennélfogva a mint *AE CF*-hez, úgy van *EB FD*-hez. De *AB CD*-hez mérhető, tehát *AE EB* is külön-külön mérhetők *CF*-hez *FD*-hez. És mivel a mint *AE CF*-hez, úgy *EB FD*-hez; cserélve is a mint *AE EB*-hez, úgy *CF FD*-hez: összetéve tehát a mint *AB BE*-hez, úgy van *CD DF*-hez, és tehát a mint az *AB* négyszege a *BE*-éhez, úgy van a *CD*-é a *DF*-éhez. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy a mint az *AB* négyszege az *AE*-éhez, úgy van a *CD*-é a *CF*-éhez; s tehát a mint az *AB* négyszege az *AE EB* négyszegeikhez, úgy van a *CD*-é a *CF FD* négyszegeikhez; tehát cserélve a mint az *AB* négyszege a *CD*-éhez, úgy vannak az *AE EB* négyszegeik a *CF FD* négyszegeikhez. Már pedig az *AB* négyszege a *CD*-éhez mérhető; az *AE EB* négyszegeik is tehát mérhetők a *CF FD* négyszegeikhez. De az *AE EB* négyszegeikből álló lap neves, tehát a *CF FD* négyszegeikből álló lap is neves. Hasonlóképp az *AE EB* közti kétszeri derékszeg is mérhető a *CF FD* közötti kétszerihez Már pedig az *AE EB* közti kétszeri derékszeg közép lap, tehát a *CF FD* közti kétszeri derékszeg is közép; *CF FD* tehát emeletben szertelenek s a négyszegeikből álló lap neves, a közükbe fogott derékszeg pedig közép lap; tehát az egész *CD* oly nevetlen, mely nagyobbik nevetlennek hivatik. — Tehát sat. — m. b. k.

70. Feladat:

A neves és közép lapra emelhető egyenhez mérhető egyen, maga is neves, és közép lapra emelhető.

Legyen *AB* neves és közép lapra emelhető egyen, s legyen *AB*-hez *CD* mérhető: meg kell mutatni, hogy *CD* is neves, és közép lapra emelhető.

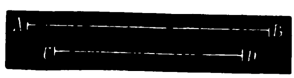


Választassék *AB* a tagjaira *E*-nél; *AE EB* tehát emeletben szertelen egyenek, s a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg pedig neves; és készíttessenek el ugyanazok, mik az előbbiekben. Hasonlóképen mutatjuk meg, hogy *CF FD* is emeletben szertelenek; és hogy az *AE EB* négyszegeikből álló lap a *CF FD* négyszegeikből állóhoz mérhető, az *AE EB* közti derékszeg pedig mérhető a *CF FD* köztihez; úgy hogy a *CF FD* négyszegeikből álló lap közép, s a *CF FD* közti derékszeg neves.

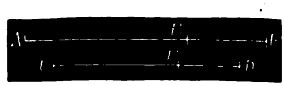
CD tehát neves, és közép lapra emelhető: m. b. k.

71. Feladat:

A két közép lap emeletü egyenhez mérhető egyen maga is két közép lap emeletü.



Legyen *AB* két közép lap emeletü egyen, s legyen *CD AB*-hez mérhető: meg kell mutatni, hogy *CD* is két közép lap emeletü.

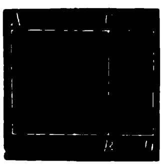


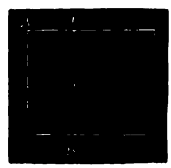
Mert minthogy *AB* két közép lap emeletü, választassék a tagjaira *E*-nél; *AE EB* tehát emeletben szertelenek, és a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg is közép, és még az *AE EB* négyszegeikből álló lap az *AE EB* közti derékszeghez szertelen: és készíttessenek el azok, mik elöbb. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy *CF, FD* is emeletben szertelenek, és hogy az *AE EB* négyszegeikből álló lap a *CF FD* négyszegeikből állóhoz mérhető, az *AE EB* közti derékszeg pedig a *CF FD* köztihez mérhetö; úgy hogy a *CF FD* négyszegeikből álló lap is közép, s a *CF FD* közti derékszeg is közép lap, és a *CF FD* négyszegeikből álló lap a *CF FD* közti derékszeghez szertelen.

CD tehát két közép lap emeletü egyen: m. b. k.

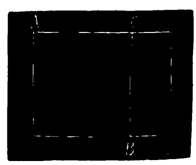
72. Feladat:

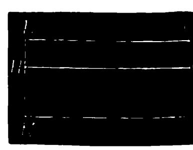
Egy neves és egy közép lap összetétetvén négy nevetlen egyen származik, úgymint: vagy nevetlen pár, vagy első középpár, vagy nagyobbik nevetlen, vagy neves és közép lap emeletü.





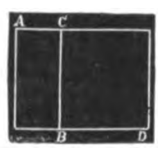
Legyen *AB* neves, és *CD* közép lap: azt mondom, hogy az *AD* lapra emelhető egyen vagy nevetlen pár, vagy elsö középpár, vagy nagyobbik nevetlen, vagy neves és közép lap emeletü.



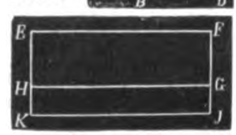


Mert *AB CD*-nél vagy nagyobb, vagy kisebb. Legyen elöbb nagyobb, és vétessék *EF* neves egyen, és szabassék *EF*-hez *AB*-vel egyenlő *EG*, mely *EH* szélességet csináljon; *HG*-hez pedig, azaz *EF*-hez, szabassék *CD*-vel egyenlö *HJ* derékszeg, mely *HK* szélességet csináljon. És minthogy *AB* neves és *EG*-vel egyenlő, tehát *EG* is neves és *EF* neves egyenhez szabva csinál *EH* szélességet; tehát *EH* neves, és *EF*-hez hoszban mérhető. Ismét minthogy *CD* közép lap és egyenlö *HJ*-vel, tehát *HJ* is közép, és *HG*, azaz *EF* neves egyenhez szabatva csinál *HK* szélességet; tehát *HK* neves, és *EF*-hez hoszban szertelen. És minthogy *CD* közép, *AB* pedig neves lap, tehát *AB CD*-hez szertelen; úgy hogy

EG is szertelen *HJ*-hez. De a mint *EG* *HJ*-hez, úgy van *EH* *HK*-hoz; *EH* tehát *HK*-hoz hoszban szertelen; már pedig mindaketten nevesek; *EH HK* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *EK* nevetlen pár, és *H*-nál el van választva. És minthogy *AB* *CD*-nél nagyobb, de *AB* *EG*-vel, *CD* pedig *HJ*-vel egyenlők, tehát *EG* is nagyobb *HJ*-nél; ennélfogva *EH* is nagyobb *HK*-nál. Már *EH* hozzája hoszban vagy mérhető vagy szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *HK*-nál. Legyen előbb hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü; de a nagyobbik, *HE*, a felvett *EF* neves egyenhez mérhető, *EK* tehát első nevetlen pár: *EF* pedig neves; már pedig ha egy lap egy neves és egy első nevetlen pár közzé van fogva, az ezen lapra emelhető egyen nevetlen pár, az *EJ* lapra emelhető egyen tehát nevetlen pár, úgy hogy az *AD*-re emelhető egyen is nevetlen pár. De legyen *EH* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *HK*-nál, és a nagyobbik *EH*, a felvett *EF* neves egyenhez hoszban mérhető: tehát *EK* negyedik nevetlen pár, *EF* pedig neves; már pedig ha egy lap, egy neves egyen és egy negyedik nevetlen pár közzé van fogva, az ezen lapra emelhető egyen oly nevetlen, mely nagyobbik nevetlennek mondatik; az *EJ* lapra emelhető egyen tehát nagyobbik nevetlen; úgyhogy az *AD* lapra emelhető egyen is nevetlen.



De legyen *AB* kisebb *CD*-nél; tehát *EG* is kisebb *HJ*-nél, úgyhogy *EH* is kisebb *HK*-nál: *HK* pedig hozzája vagy mérhető vagy szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *EH*-nál. Legyen előbb hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü; tehát a kisebbik, *EH*, hoszban mérhető levén a felvett neves egyenhez, *EF*-hez, tehát *EK* második nevetlen pár; *EF* pedig neves: már ha egy lap egy neves egyen és egy második nevetlen pár közzé fogatik bé, az ezen lapra emelhető egyen első középpár; tehát az *EJ*-re emelhető egyen is első középpár, úgyhogy az *AD* lapra emelhető egyen is első középpár. De legyen *KH* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *EH*-nál, tehát

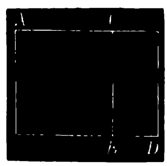
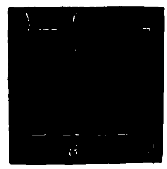


a kisebbik, EH mérhető levén a felvett EF neves egyenhez, EK ötödik nevetlen pár, EF pedig neves egyen; már pedig ha egy lap, egy neves egyen s egy ötödik nevetlen pár közzé van fogva, az ezen lapra emelhető egyen neves és közép lap emeletü; az EJ-re emelhető egyen tehát neves és közép lap emeletü, úgy hogy az AD-re emelhető is neves és közép lap emeletü.

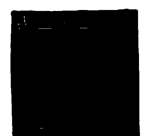
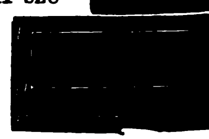
Tehát egy sat. m. b. k.

73. Feladat:

Egymáshoz szertelen két közép lap összetétetvén: a más két nevetlen egyen származik, úgymint: vagy a második középpár, vagy a két közép lap emeletü.

Legyen AB CD egymáshoz szertelen két közép lap összetéve: azt mondom, hogy az AD-re emelhető egyen vagy második középpár, vagy két közép lap emeletü.

Mert AB CD-nél vagy nagyobb vagy kisebb. Legyen előbb AB CD-nél nagyobb, és EF neves egyen vétetvén, szabassék EF-hez AB-vel egyenlő EG derékszeg, mely EH szélességet csináljon, és CD-vel egyenlő HJ, mely HK szélességet csináljon. És minthogy mind AB mind CD közép lap, tehát EG HJ is mindenik közép lap, és EF neves egyenhez levén szabva, EH HK szélessegeket csinálnak; tehát mind EH mind HK nevesek, és EF-hez hoszban szertelenek. És minthogy AB CD-hez szertelen, és AB EG-vel, CD pedig HJ-vel egyenlők, tehát EG is HJ-hez szertelen. De a mint EG HJ-hez, úgy van EH HK-hoz; tehát EH HK-hoz hoszban szertelen; EH HK tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát EK nevetlen pár. Már EH hozzá hoszban vagy mérhető vagy szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü HK-nál. Legyen előbb hozzája mérhető egyenével nagyobb emeletü; már sem EH sem HK nem levén a felvett EF neves egyenhez hoszban mérhető; tehát EK harmadik nevetlen pár és EF neves egyen. Már ha egy lap, egy neves egyen s egy harmadik nevetlen pár közzé van fogva, az ezen lapra emelhető egyen második középpár; tehát az EJ-re azaz AD-re emelhető egyen második középpár. De legyen EH hozzá hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü HK-nál, tehát mivel mind EH mind HK EF-hez hoszban szertelen, EK hatodik nevetlen pár. Már pedig ha egy lap, egy neves és egy hatodik nevetlen pár közzé van fogva, az ezen lapra emelhető egyen két közép lap emeletü; úgy hogy az AD lapra emelhető egyen két közép lap emeletü.

Hasonlókép mutatjuk meg, hogy ha AB kisebb is CD-nél, az AD lapra emelhető egyen vagy második közép pár, vagy két közép lap emeletü.

Tehát két sat. m. b. k.

Tanuság. A nevetlen pár s ezt követő nevetlenek sem a közép egyennel sem egymással nem azonosok; mert a közép egyen négyszege, neves egyenhez szabva, neves, és ahhoz, a melyhez szabva van, szertelen szélességet csinál. A nevetlen pár négyszege pedig, neveshez szabva, első nevetlen pár szélességet csinál. Az első közép pár négyszege pedig, neveshez szabva, második nevetlen pár szélességet csinál. A második közép pár négyszege pedig, neveshez szabva, harmadik nevetlen pár szélességet csinál. A nagyobbik négyszege pedig neveshez szabva, negyedik nevetlen pár szélességet csinál. A neves és közép lap emeletü négyszege pedig, neveshez szabva, ötödik nevetlen pár szélességet csinál. A két közép lap emeletü négyszege pedig neveshez szabva, hatodik nevetlen pár szélességet csinál. Az előszámlált szélességek mind az elsőtől mind egymástól különböznek: az elsőtől igen, mert ez neves; egymástól is igen, mert más-más rendüek; miszerint maguk a nevetlenek is különböznek egymástól.

Scholion. Az összetétellel származott nevetlen egyeneket két hatos csoportban számlálá elé: az elsőben kimutatá származásukat; a másodikban elválasztásukat, hogy csak egy pontban választathatnak tagjaikra; harmadikban a nevetlen párok meglelését, az elsőét, másodikét, harmadikét, negyedikét, ötödikét hatodikét, miután a negyedik hatosban a nevetlenek különbözést mutatá ki, hogy miben különböznek egymástól; mert felvevén segédül a nevetlen párt, megmutatja a hat nevetlen egyen különbözését. Ötödiket és hatodikat is adott, megmutatván az ötödikben, hogy a nevetlenek négyszegei, neveshez szabva, minő nevetleneket csinálnak a szabott lapok szélességéül, a hatodikban pedig azt, hogy a nevetlenekhez mérhetők, velök hasonlóképüek is. A hetedikben megint a nevetlenek különbözését fejti ki tisztán.

Jegyz. Ezt a Scholiont még tovább is folytatja Euklides világosítója; de mivel oly dolgokról beszél, úgymint a számvetési egyarányról (proportio arithmetica) melyről az clemeknek sem ürtani sem számvetési könyveiben egy szó sem volt említve, feleslegesnek tartottuk, ide mint egy „deus ex machinát,“ belé zavarni.

Az elvétellel származó hat nevetlen egyenről.

74. Feladat:

Ha neves egyenből az egészhez csak emeletben mérhető neves egyen elvétetik: a maradék nevetlen. Hivassék pedig *vágacs*nak.

Mert AB neves egyenből vétessék el az egész AB-hez csak emeletben mérhető BC: azt mondom, hogy a maradék AC nevetlen.

Mert minthogy AB BC-hez hoszban szertelen, és a mint AB BC-hez, úgy van az AB négyszege az AB BC közti derékszeghez, tehát az AB négyszege szertelen az AB BC közti derékszeghez. De az AB négyszegével az AB BC négyszegeik összemérhetők, s az AB BC közti derékszeggel összemérhető az AB BC közti kétszeri derékszeg; tehát az AB BC négyszegeik az AB BC közti kétszeri derékszeghez szertelenek; tehát az AB BC négyszegeik a maradék AC négyszegéhez is szertelenek, (minthogy az AB BC négyszegeik az AB BC közti kétszeri derékszeggel, meg az AC négyszegével egyenlők). Már pedig az AB BC négyszegeik nevesek; tehát AC nevetlen. Hivassék *vágacsnak.*

75. Feladat:

Ha közép egyenből az egészhez csak emeletben mérhető oly közép egyen, mely az egészszel neves lapot fog bé, elvétetik: a maradék nevetlen. Hivassék a *közép egyen első vágacsá*nak.

Ugyanis AB közép egyenből vétessék el az egész AB-hez csak emeletben mérhető BC közép egyen, mely AB-vel az AB BC közti neves derékszeget fogja be: azt mondom, hogy a maradék AC nevetlen.

Mert minthogy AB BC közép egyenek, az AB BC négyszegeik is középek. Az AB BC közti kétszeri derékszeg pedig neves; tehát az AB BC négyszegeik az AB BC közti kétszeri derékszeghez szertelenek; tehát a maradék AC négyszegéhez is szertelen az AB BC közti kétszeri derékszeg; mert ha az egész az egyikhez szertelen, az eleinti mekkoraságok is szertelenek leendenek. De az AB BC közti kétszeri derékszeg neves; tehát az AC négyszege nevetlen; tehát AC maga is nevetlen: és hivassék a közép egyen *első vágacsá*nak.

76. Feladat:

Ha közép egyenből az egészhez csak emeletben mérhető közép egyen, mely az egészszel közép derékszeget fog bé, vágatik el: a maradék egyen nevetlen. Hivassék pedig a közép egyen *második vágacsá*nak.

Ugyanis AB közép egyenből vétessék el az egész AB-hez csak emeletben mérhető BC közép egyen, mely az egész AB-vel az AB BC közti közép derékszeget fogja bé: azt mondom, hogy a maradék AC egyen nevetlen.

Mert vétessék fel *DJ* neves egyen, és szabassék *DJ*-hez az *AB BC* négyszegeikkel egyenlő *DE* derék szeg, mely *DG* szélességet csináljon; szabassék további *DJ*-hez az *AB BC* közti kétszeri derékszeggel egyenlő *DH*, mely *DF* szélességet csináljon; tehát a maradék *FE* egyenlő leend az *AC* négyszegével. És minthogy az *AB BC* négyszegeik közép lapok, tehát *DE* is közép lap. És *DJ* neves egyenhez levén szabva, *DG* szélességet csinál; tehát *DG* neves, és *DJ*-hez hoszban szertelen. Ismét minthogy az *AB BC* közti derékszeg közép lap, tehát az *AB BC* közti kétszeri derékszeg is közép. És *DH*-val egyenlő; tehát *DH* is közép lap, és *DJ* neves egyenhez szabva, *DF* szélességet csinál; *DF* tehát neves, és *DJ*-hez hoszban szertelen. És mivel *AB BC* egyenek egymáshoz csak emeletben mérhetők, tehát *AB BC*-hez hoszban szertelen; az *AB* négyszege is tehát szertelen az *AB BC* közti derékszeghez. De az *AB* négyszegével az *AB BC* négyszegei összemérhetők; az *AB BC* közti derékszeggel megint összemérhető az *AB BC* közti kétszeri derékszeg; tehát kétszer az *AB BC* közti derékszeg az *AB BC* négyszegeikhez szertelen. Már az *AB BC* négyszegeikkel *DE* egyenlő, az *AB BC* közti kétszeri derékszeggel pedig *DH*; tehát *DE DH*-hoz szertelen. De a mint *DE DH*-hoz, úgy van *GD DF*-hez; *GD* tehát *DF*-hez hoszban szertelen. Már pedig mind ketten nevesek; *GD DF* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *FG* vágacs. De *DJ* neves; egy neves s egy nevetlen egyen közzé fogott derékszeg nevetlen és a reá emelhető egyen is nevetlen. *FE* tehát nevetlen, *FE*-re pedig *AC* emelhető; tehát *AC* nevetlen. Hivassék *a közép egyen második vágacsának*.

77. Feladat:

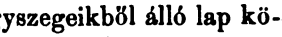
Ha egy egyenből az egészhez emeletben szertelen egyen úgy vétetik el, hogy az egésznek és az elvett egyennek négyszegeiből álló lap neves, és a közükbe fogott derékszeg közép lap legyen: a maradék egyen nevetlen. Hivassék *kisebbik nevetlen*nek.

Ugyanis AB egyenből vétessék el egy az egészhez emeletben szertelen BC egyen, úgy hogy az egész AB-nek s az elvett BC-nek négyszegeiből álló lap neves, a közükbe fogott kétszeri derékszeg pedig közép lap legyen: azt mondom, hogy a maradék AC egyen nevetlen.

Mert minthogy az AB BC négyszegeikből álló lap neves, s az AB BC közti kétszeri derékszeg közép lap, tehát az AB BC négyszegeik az AB BC közti kétszeri derékszeghez szertelenek; és átfordítva az AB BC négyszegeik a maradék AC négyszegéhez szertelenek. De az AB BC négyszegeik nevesek, tehát az AC-é nevetlen; tehát AC maga is nevetlen. Hivassék *kisebbik nevetlen*nek.

78. Feladat:

Ha egy egyenből az egészhez emeletben szertelen egyen úgy vétetik el, hogy az egésznek és imez egyennek négyszegeiből álló lap közép, a közükbe fogott kétszeri derékszeg pedig neves legyen: a maradék nevetlen. Hivassék a *nevessel közép egészet alkotó*nak.



Vétessék el AB egyenből az egész AB-hez emeletben szertelen BC egyen, úgy hogy az AB BC négyszegeikből álló lap közép, az AB BC közti kétszeri derékszeg pedig neves legyen: azt mondom, hogy a maradék AC nevetlen.

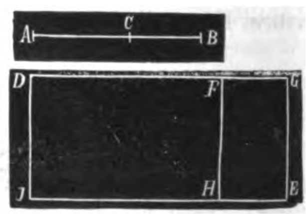
Mert minthogy az AB BC négyszegeikből álló lap közép, az AB BC közti kétszeri derékszeg pedig neves; tehát az AB BC négyszegeikből álló lap szertelen az AB BC közti kétszeri derékszeghez; a maradék AC négyszege is tehát az

AB BC közti kétszeri derékszeghez szertelen. Már pedig az *AB BC* közti kétszeri derékszeg neves; tehát az *AC* négyszege nevetlen; nevetlen tehát *AC* egyen is. Hivassék a *nevessel közép egészet alkotó*nak.

79. Feladat:

Ha egy egyenből az egészhez emeletben szertelen egyen úgy vétetik el, hogy az egész és az elvett egyen négyszegeiből álló lap közép, a köztükbe fogott kétszeri derékszeg is közép legyen, és még a négyszegeik a köztükbe fogott kétszeri derékszeghez szertelenek legyenek: a maradék nevetlen. Hivassék a *középpel közép egészet alkotó*nak.

Vétessék el *AB* egyenből az egész *AB* vel emeletben szertelen *BC* egyen, úgy hogy az *AB BC* négyszegeikből álló lap közép, az *AB BC* közti kétszeri derékszeg is közép, és az *AB BC* négyszegeik az *AB BC* közti kétszeri derékszeghez szertelenek legyenek: azt mondom, hogy a maradék *AC* nevetlen.



Mert vétessék fel *DJ* neves egyen, és szabassék *DJ*-hez az *AB BC* négyszegeikkel egyenlő *DE* derékszeg, mely *DG* szélességet csináljon, és vétessék el ebből a derékszegből az *AB BC* közti kétszeri derékszeggel egyenlő *DH*, mely *DF* szélességet csináljon; a maradék *FE* tehát egyenlő az *AC* négyszegével, úgy hogy *AC FE*-re emelhető. És minthogy az *AB BC* négyszegeikből álló lap közép és *DE*-vel egyenlő, tehát *DE* is közép lap és *DJ* neves egyenhez szabva *DG* szélességet csinál; *DG* tehát neves és *DJ*-hez hoszban szertelen. Ismét, minthogy az *AB BC* közti kétszeri derékszeg közép lap, és *DH*-val egyenlő; tehát *DH* közép lap és *DJ* neves egyenhez szabva *DF* szélességet csinál; *DF* tehát neves és *DJ*-hez hoszban szertelen. És minthogy az *AB BC* négyszegei az *AB BC* közti kétszeri derékszeghez szertelenek, tehát *DE* is szertelen *DH*-hoz. A mint pedig *DE*

DH-hoz, úgy van *DG DF*-hez, tehát *DG DF*-hez szertelen. És mind ketten nevesek; *GD DF* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *FG* tehát vágacs, és *FH* neves. De egy neves egyen és egy vágacs közzé fogott derékszeg nevetlen, s a reá emelhető egyen is nevetlen; *FE* tehát nevetlen, *FE*-re pedig *AC* emelhető; tehát *AC* nevetlen. Hivassék *a középpel közép egészet alkotó*nak.

80. Feladat:

A vágacshoz csak egy neves egyen illik, mely az egészhez csak emeletben mérhető legyen.

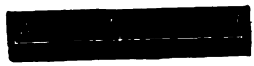
Legyen *AB* vágacs, és hozzája illő *BC* egyen; *AC CB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető nevesek: azt mondom, hogy *AB*-hez nem illik más oly egyen, mely az egészhez csak emeletben mérhető legyen.

Mert ha lehet, illjék *BD*; *AD DB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. És minthogy a mekkorával haladják meg az *AD DB* négyszegeik az *AD DB* közti kétszeri derékszeget, akkorával haladják meg *AC CB* négyszegeik is az *AC CB* közti kétszeri derékszeget; mert mind ketten az *AB* négyszegével haladják meg: tehát cserélve a mekkorával nagyobbak az *AD DB* négyszegeik az *AC CB* négyszegeiknél, akkorával nagyobb az *AD DB* közti kétszeri derékszeg is az *AC CB* közti kétszerinél. De az *AD DB* négyszegeik az *AC CB* négyszegeiknél neves lappal nagyobbak, mert mind a ketten nevesek; tehát az *AD DB* közti kétszeri derékszeg is az *AC CB* közti kétszerinél neves lappal nagyobb; mi lehetetlen; mert mind a ketten közép lapok, s közép közepet nem halad nevessel meg; *AB*-hez tehát nem illik más oly neves egyen, mely az egészhez csak emeletben mérhető legyen.

Tehát sat.

81. Feladat:

A közép egyen első vágacsához csupán egy oly közép egyen illik, mely az egészhez csak emeletben mérhető legyen, és az egészszel neves lapot fogjon bé.



Legyen ugyanis AB a közép egyen első vágacsa, és illjék AB-hez BC egyen; AC CB tehát egymáshoz csak emeletben mérhető, és az AC CB közti neves derékszeget béfogó közép egyenek: azt mondom, hogy AB-hez nem illik más oly közép egyen, mely az egészhez csak emeletben legyen mérhető, és az egészszel neves lapot fogjon be.

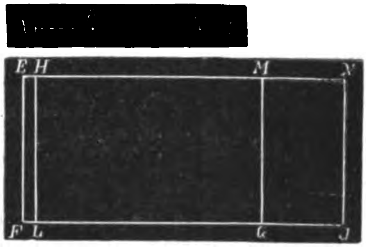
Mert ha lehet, illjék DB: AD DB tehát egymáshoz csak emeletben mérhető, és AD DB közti neves derékszeget béfogó közép egyenek. És minthogy a mekkorával nagyobbak az AD DB négyszegeik az AD DB közti kétszeri derékszegnél, akkorával nagyobbak az AC CB négyszegeik is az AC CB közti kétszeri derékszegnél; mert mind ketten az AB négyszegével nagyobbak: tehát cserélve a mivel az AD DB négyszegeik nagyobbak az AC CB négyszegeiknél, azzal nagyobb az AD DB közti kétszeri derékszeg is az AC CB közti kétszerinél. De az AD DB közti kétszeri derékszeg az AC CB közti kétszerinél neves lappal nagyobb, mert mind ketten nevesek; tehát az AD DB négyszegeik is az AC CB négyszegeiknél nevessel nagyobbak; mi lehetetlen; mert mind a ketten közép lapok, és közép közepet nem halad neves lappal meg.

Tehát sat.

82. Feladat:

A közép egyen második vágacsához csupán egy oly közép egyen illik, mely az egészhez csak emeletben mérhető legyen, s az egészszel közép lapot fogjon bé.

Legyen AB második közép vágacs, és az AB-hez illő BC; AC CB tehát egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek, s az *AC CB* közti közép derékszeget fogják bé: azt mondom, hogy *AB*-hez nem illik más közép egyen, mely az egészhez csak emeletben mérhető legyen s az egészszel közép lapot fogjon be.



Mert ha lehet, illjék *BD*; *AD DB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető, és az *AD DB* közti közép derékszeget béfogó közép egyenek. Vétessék *EF* neves egyen, és szabassék *EF*-hez az *AC CB* négyszegeikkel egyenlő *EG*, mely *EM* szélességet csináljon; *EG*-ből pedig vétessék el az *AC CB* közti kétszeri derékszeggel egyenlő *HG* lap, mely *HM* szélességet csinálja; tehát a maradék *EL* egyenlő az *AB* négyszegével, és *AB* *EL*-re emelhető. Ismét szabassék *EF*-hez az *AD DB* négyszegeikkel egyenlő *EJ* lap, mely *EN* szélességet csináljon; de *EL* az *AB* négyszegével egyenlő; tehát a maradék *HJ* egyenlő az *AD DB* közti kétszeri derékszeggel. És minthogy *AC CB* közép egyenek, tehát az *AC CB* négyszegeik is közép lapok. Egyenlők is *EG*-vel; tehát *EG* is közép lap, és *EF* neves egyenhez szabva *EM* szélességet csinál; *EM* tehát neves, és *EF*-hez hoszban szertelen. Ismét, minthogy az *AC CB* közti derékszeg közép, tehát az *AC CB* közti kétszeri is közép. És egyenlő *HG*-vel; *HG* is tehát közép lap, és *EF* neves egyenhez szabva *HM* szélességet csinál; tehát *HM* is neves, és *EF*-hez hoszban szertelen. És minthogy *AC CB* egymáshoz csak emeletben mérhetők, tehát *AC CB*-hez hoszban szertelen. Már a mint *AC CB*-hez, úgy van az *AC* négyszege az *AC CB* közti derékszeghez; az *AC* négyszege tehát szertelen az *AC CB* közti derékszeghez. De az *AC* négyszegével az *AC CB* négyszegeik összemérhetők, az *AC CB* közti derékszeggel pedig összemérhető az *AC CB* közti kétszeri derékszeg; tehát az *AC CB* négyszegeik az *AC CB* közti kétszeri derékszeghez szertelenek. Már pedig az *AC CB* négyszegeikkel *EG* lap egyenlő, és az *AC CB* közti kétszeri derékszeggel *HG* lap egyenlő; *EG* tehát *HG*-hez szertelen. De a mint *EG HG*-hez, úgy van *EM HM*-hez; *EM* tehát *HM*-hez hoszban szertelen. Mind ketten pedig nevesek; *EM HM* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *EH* vágacs, és *HM* hozzája van illesztve. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *HN* is ugyanahhoz van illesztve; *EH* vágacshoz tehát más meg más az egészhez csak emeletben mérhető egyen illik; mi lehetetlen.

A második közép vágacsához tehát sat.

83. Feladat:

A kisebbik nevetlenhez csak egy, az egészhez emeletben szertelen egyen illik, úgy hogy az egésznek s a ragaszték egyennek négyszegeikből álló lap neves, a köziikbe fogott kétszeri derékszeg pedig közép lap legyen.

Legyen *AB* kisebbik nevetlen, s *AB*-hez illő legyen *BC*; *AC CB* tehát emeletben szertelenek, s a négyszegeikből álló lap neves a köziikbe fogott kétszeri derékszeg pedig közép lap: azt mondom, hogy *AB*-hez nem illik más egyen, mely ugyan azokat tenné.

Mert ha lehet illjék *BD*; *AD DB* tehát emeletben szertelenek, úgy hogy az *AD DB* négyszegeikből álló lap neves, s az *AD DB* közti kétszeri derékszeg közép lap. És minthogy a mekkorával nagyobbak az *AD DB* négyszegeik az *AC CB* négyszegeiknél, akkorával nagyobb az *AD DB* közti kétszeri derékszeg is az *AC CB* közti kétszeri derékszegnél; de az *AD DB* négyszegeik az *AC CB* négyszegeiknél neves lappal nagyobbak, mivel mind ketten nevesek: tehát az *AD DB* közti kétszeri derékszeg is neves lappal nagyobb az *AC CB* köztinél; mi lehetetlen, mert mind a ketten közép lapok.

A kisebbik sat.

84. F e l a d a t :

A nevessel közép egészet alkotó eggenhez csak egy, az egészhez-emeletben szertelen, egyen illik, úgy hogy az egésznek s a ragasztéknak négyszegeikből álló lap közép, s a közükbe fogott kétszeri derékszeg neves legyen.

Ugyanis legyen AB nevessel közép egészet alkotó egyen, s a hozzája illő BC; AC CB tehát emeletben szertelenek, s az AC CB négyszegeikből álló lap közép lap, az AC CB közti kétszeri derékszeg pedig neves: azt mondom, hogy AB-hez nem illik más egyen, mely ugyanazokat mivelje.

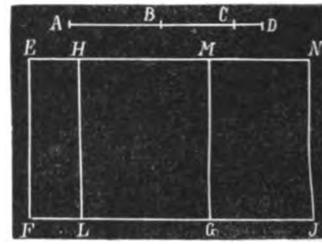
Mert ha lehet, legyen BD; AD DB tehát emeletben szertelenek, az AD DB négyszegeikből álló lap közép, s az AD DB közti kétszeri derékszeg neves. Már minthogy a mekkorával nagyobbak az AD DB négyszegeik az AC CB négyszegeiknél, akkorával nagyobb az AD DB közti kétszeri derékszeg is az AC CB közti kétszeri derékszegnél; de az AD DB közti kétszeri derékszeg az AC CB közti kétszeri derékszegnél neves lappal nagyobb, mert mind a kettő neves; tehát az AD DB négyszegeik is az AC CB négyszegeiknél nevessel nagyobbak; mi lehetetlen; mert mind a ketten középek; tehát AB-hez nem illik más egyen.

Tehát sat.

85. F e l a d a t :

A közép egyennel közép egészet alkotó egyenhez csupán egy az egészhez szertelen egyen illik, úgy hogy az egésznek s a ragasztéknak négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott kétszeri derékszeg is közép lap, s a négyszegekből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen legyen.

Legyen közép egyennel közép egészet alkotó egyen AB, s hozzá illő legyen BC; AC CB tehát emeletben szertelenek, s a négyszegeikből álló lap közép, az AC CB közti kétszeri derékszeg is közép lap, és még az AC CB négyszegeik az AC CB közti derékszeghez szertelenek: azt mondom, hogy AB-hez nem illik más az egészhez emeletben szertelen egyen, mely az egészszel együtt a mondottakat tegye.



Mert ha lehet illjék BD; úgy hogy AD DB emeletben szertelenek, az AD DB négyszegeikből álló lap közép, az AD DB közti kétszeri derékszeg is közép lap, és még hogy az AD DB négyszegeik az AD DB közti kétszeri derékszeghez szertelenek legyenek; és vétetvén EF neves egyen, szabassék EF-hez az AC CB négyszegeikkel egyenlő EG, mely EM szélességet csináljon; EG-ből pedig vétessék el az AC CB közti kétszeri derékszeggel egyenlő HG, mely HM szélességet csináljon; a maradék AB négyszege tehát egyenlő EL-lel; AB tehát EL re emelhető. Ismét, szabassék EF-hez az AD DB négyszegeikkel egyenlő EJ, mely EN szélességet csináljon. De az AB négyszege egyenlő EL-lel, tehát a maradék AD DB közti kétszeri derékszeg HJ-vel egyenlő. És minthogy az AC CB négyszegeikből álló lap közép, s EG-vel egyenlő; tehát EG is közép lap, s EF neves egyenhez szabva EM szélességet csinál: EM tehát neves, és EF-hez hoszban szertelen. Ismét, mivel az AC CB közti kétszeri derékszeg közép lap, és HG-vel egyenlő; tehát HG is közép, s EF neves egyenhez szabva HM szélességet csinál: tehát HM neves és EF-hez hoszban szertelen. És minthogy az AC CB négyszegeik az AC CB közti kétszeri derékszeghez szertelenek; tehát EG is HG-hez szertelen; EM is tehát MH-hoz hoszban szertelen. Már pedig mind ketten nevesek; EM MH tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; EH tehát vágacs, és HM hozzája illesztett egyen. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy EH vágacs, és HN hozzá illesztett egyen; a vágacshoz tehát más meg más, az egészhez csak emeletben mérhető egyen illik; mi lehetetlenek van megmutatva. Nem illik tehát AB-hez más egyen.

AB-hez tehát csak egy az egészhez emeletben szertelen egyen illik, úgy hogy az egésznek sat.

Harmadik rendbeli értelmezések.

1. Felvéve egy neves egyent s egy vágacsot, ha az egész hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a ragasztéknál, és az egész a felvett nevessel hoszban összemérhető: hivassék *első vágacs*nak.

2. Ha a ragasztékot mérhetni hoszban a felvett neves egyenhez, s az egész hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a ragasztéknál: hivassék *második vágacs*nak.

3. Ha pedig hoszban egyiket sem mérhetni a felvett neves egyenhez, s az egész hozzája mérhető egyen négysszegével nagyobb emeletü a ragasztéknál: hivassék *harmadik vágacs*nak.

4. Ismét, ha az egész hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a ragasztéknál, s az egészet összemérhetni a felvett neves egyennel: hivassék *negyedik vágacs*nak.

5. Ha a ragasztékot, *ötödik*nek.

6. Ha egyiket sem *hatodik*nak.

86. Feladat:

Első vágacsot találni.

D.....F....E

Vétessék *A* neves egyen és legyen *BG* *A*-hoz hoszban mérhető; tehát *BG* is neves. Vétessék megint két négyszegszám *DE EF*, melyeknek különbsége *FD* ne legyen négyszegszám; *ED* sincs tehát *DF*-hez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz. És tétessék a mint *ED DF*-hez, úgy a *BG* négyszege a *GC*-éhez, a *BG* négyszege tehát a *GC*-ével összemérhető. De a BG négyszege neves, tehát a GC-é is neves, tehát GC egyen is neves. És minthogy ED DF-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát a BG négyszege sincs a GC-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; BG tehát GC-hez hoszban szertelen. Már pedig mind ketten nevesek; BG GC tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. BC tehát vágacs.

Azt mondom, a hogy elsö is.

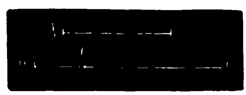
D . . . . . F . . . . E

Mert a mivel a BG négyszege nagyobb a GC-énél, legyen az a H négyszege. És minthogy a mint DE FD-hez, úgy van a BG négyszege a GC-éhez: tehát átfordítva is a mint DE EF-hez, úgy van a GB négyszege a H-éhoz. De DE azon arányban van EF-hez, miben négyszegszám négyszegszámhoz, mert mindenik négyszeg; a GB négyszege is tehát a H-éhoz azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; GB tehát H-hoz hoszban mérhetö. De BG GC-nél a H négyszegével nagyobb emeletü; BG tehát hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü GC-nél. És az egész BG a felvett neves A egyenhez hoszban mérhetö: BC tehát elsö vágacs.

Találva van tehát BC elsö vágacs: m. t. k.

87. Feladat:

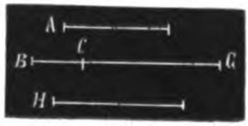
Második vágacsot találni.



D . . . . . F . . . . E

Vétessék fel A neves egyen, s legyen GC A-hoz hoszban mérhetö; tehát GC is neves. Vétessék továbbá két négyszegszám DE EF, melyeknek különbsége DF ne legyen négyszeg. És tétessék a mint FD DE-hez, úgy a CG négyszege a GB-éhez; tehát a CG négyszege mérhetö a GB-éhez. De a CG-é neves, tehát a GB-é is neves; neves tehát maga GB is. És minthogy a CG négyszege a GB-éhez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz: tehát CG GB-hez hoszban szertelen. Nevesek is mind ketten; CG GB tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; BC tehát vágacs.

Azt mondom, hogy második is.



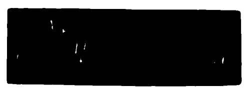
D.....F....E

Mert a mekkorával nagyobb a BG négyszege a GC-énél, legyen az a H négyszege. Már a mint a BG négyszege a GC-éhez, úgy van ED szám DF számhoz; átfordítva tehát a mint a BG négyszege a H-éhoz. úgy van DE EF-hez. Már pedig DE-nek EF-nek mindenike négyszegszám, tehát a BG négyszege a H-éhoz azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; BG tehát H-hoz hoszban mérhető. De BG GC-nél a H négyszegével nagyobb emeletü; tehát BG hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü GC-nél. Aztán GC ragaszték a felvett neves A egyenhez mérhető; BC tehát második vágacs.

Találva van tehát BC második vágacs: m. b. k.

88. Feladat:

Harmadik vágacsot találni.

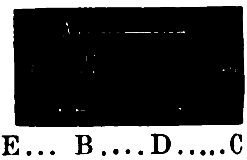


E... B....D.....C

Vétessék A neves egyen, és legyen feltéve E BC CD három szám, melyek ne legyenek egymáshoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; de CB BD-hez legyen azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, és tétessék a mint E BC-hez, úgy az A négyszege az FG-éhez, s a mint BC CD-hez, úgy az FG négyszege az GH-éhoz. Minthogy már a mint E BC-hez, úgy van az A négyszege az GF-éh ez: tehát az A négy szege az FG-éhez mérhető. De az A-é neves, tehát neves az FG-é is, és így FG is neves. És minthogy E BC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az A négyszege sincs az FG-éhez azon arány ban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; A tehát FG-hez hoszban szertelen. Ismét, minthogy a mint BC CD-hez, úgy van az FG négyszege a GH-éhoz; tehát az FG négyszege mérhető a GH-éhoz. De az

FG-é neves, tehát a *GH*-é is neves; tehát *GH* maga is neves. És mivel *BC CD*-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az *FG* négyszege sincs a *GH*-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz: *FG* tehát *GH*-hoz hoszban szertelen. Már pedig mind ketten nevesek; *FG GH* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *FH* vágacs.

Azt mondom, harmadik is.



Mert mivel a mint *E BC*-hez, úgy van az *A* négyszege az *FG*-éhez, s a mint *BC CD*-hez, úgy az *FG*-é a *GH*-éhoz: tehát egyközösen a mint *E CD*-hez, úgy van az *A* négyszege a *GH*-éhoz; de *E CD*-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az *A* négyszege sincs a *GH*-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; *A* tehát *GH*-hoz hoszban szertelen; tehát sem *FG*-t sem *GH*-t nem mérhetni hoszban a felvett neves *A* egyenhez. Legyen már a *K* négyszege az, a mekkorával az *FG* négyszege nagyobb a *GH*-énál. Minthogy a mint *BC CD*-hez, úgy van az *FG* négyszege a *GH*-éhoz: tehát át fordítva a mint *CB BD*-hez, úgy van az *FG* négyszege a *K*-éhoz. De *CB BD*-hez azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; az *FG* négyszege is tehát a *K*-éhoz azon arányban van, miben négyszegszám négyszegszámhoz; *FG* tehát *K*-val hoszban összemérhető. Már pedig *FG GH*-nál a *K* négyszegével nagyobb emeletü; *FG* tehát hozzá mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *GH*-nál. És *FG*-nek *GH*-nak egyike sem mérhető a felvett neves *A* egyenhez; *FH* tehát harmadik vágacs.

Találva van tehát *FH* harmadik vágacs: m. t. k.

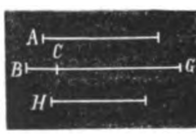
89. Feladat:

Negyedik vágacsot találni.

D.....F...E

Vétessék A neves egyen, s A-hoz hoszban mérhető BG; neves egyen tehát BG is. Vétessék továbbá DF FE két oly szám, hogy az egész DE se DF-hez se FE-hez ne legyen azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz. És tétessék a mint DE EF-hez, úgy a BG négyszege a GC-éhez; a BG négyszege tehát mérhető a GC-éhez. De a BG-é neves, neves tehát a GC-é is, és így GC maga is neves. Es minthogy DE EF-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát a BG négyszege sincs a GC-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz: BG egyen tehát GC-hez hoszban szertelen. De mindketten nevesek; BG GC tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát BC vágacs.

Azt mondom, hogy negyedik is.



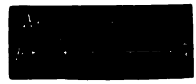
D.....F...E

Mert legyen a H négyszege az, a a mekkorával nagyobb a BG négyszege a GC-énél. Már mivel a mint DE EF-hez, úgy van a BG négyszege a GC-éhez: tehát, átfordítva a mint ED DF-hez, úgy van a BG négyszege a H-éhoz. De ED DF-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, a BG négyszege sincs tehát a H-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; BG tehát H-hoz hoszban szertelen, és BG, GC-nél a H négyszegével nagyobb emeletü; tehát BG hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü GC nél. És az egész BG hoszban a felvett neves egyennel A-val összemérhető; tehát BC negyedik vágacs.

Találva van tehát BC negyedik vágacs: m. t. k.

90. Feladat:

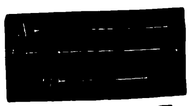
Ötödik vágacsot találni.



D.....F...E

Vétessék A neves egyen, és A-val hoszban összemérhető CG; CG tehát neves. Azután vétessék DF FE két oly szám, hogy DE ismét se DF hez, se FE-hez ne legyen azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; és tétessék a mint FE ED-hez, úgy a CG négyszege a GB-éhez; a CG négyszege tehát a GB-ével összemérhető, De a CG-é neves, tehát a GB-é is neves; ennélfogva maga BG is neves. És minthogy a mint DE EF-hez, úgy van a BG négyszege a GC-éhez, DE pedig EF-hez nincs azon arányban miben négyszegszám négyszegszámhoz: tehát a BG négyszege sincs a GC-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; BG tehát GC-hez hoszban szertelen. Már pedig mind ketten nevesek; BG GC tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát BC vágacs.

Azt mondom, hogy ötödik is.



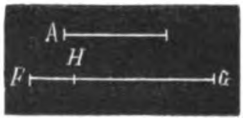
D.....F...E

Mert legyen a H négyszege az, a mekkorával a BG négyszege nagyobb a GC-énél. Már mivel a mint a BG négyszege a GC-éhez, úgy DE EF-hez; tehát átfordítva a mint ED DF-hez, úgy a BG négyszege a H-éhoz. De ED DF-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; a BG négyszege sincs tehát a H-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; BG tehát H-hoz hoszban szertelen. Már pedig BG GC-nél a H négyszegével nagyobb emeletü; BG tehát hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü GC nél. És a ragaszték CG-t összemérhetni hoszban a felvett neves egyennel A-val; tehát BC ötödik vágacs.

Találva van tehát BC ötödik vágacs: m. t. k.

91. Feladat:

Hatodik vágacsot találni.

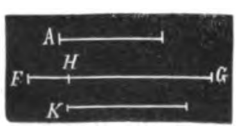


E.. B...D....C

Vétessék A neves egyen, és E BC CD három szám, melyek ne legyenek egymáshoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, s még CB se legyen BD-hez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; és tétessék a mint E BC-hez, úgy az A négyszege az FG-éhez, s a mint BC CD-hez, úgy az FG négyszege a GH-éhoz.

Már mivel a mint E BC-hez, úgy van az A négyszege az FG-éhez, tehát az A négyszege az FG-éhez mérhető. De az A-é neves, tehát neves az FG-é is; ennélfogva FG maga is neves. És minthogy E BC-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát az A négyszege sincs az FG-éhez azon arányban, miben négyszegszám négyszegszegszámhoz; A tehát FG-hez hoszban szertelen. Ismét, mivel a mint BC CD-hez, úgy van az FG négyszege a GH-éhoz: tehát az FG-é a GH-éhoz mérhető. De az FG-é neves, tehát a GH-é is neves; ennélfogva maga GH is neves. És minthogy BC CD-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az FG négyszege sincs a GH-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz: tehát FG GH-hoz hoszban szertelen. De mind ketten nevesek; FG GH tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; FH tehát vágacs.

Azt mondom, hogy hatodik is.



E.. B...D....C

Mert mivel a mint E BC-hez, úgy van az A négyszege az FG-éhez, s a mint BC CD-hez, úgy van az FG négyszege a GH-éhoz: tehát egyközösön a mint E CD-hez, úgy van az A négyszege a GH-éhoz. De E CD-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; az A négyszege sincs tehát a GH-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; A tehát GH-hoz hoszban szertelen; tehát sem FG sem GH a felvett neves egyenhez A-hoz hoszban nem mérhetők. Legyen a K négyszege az, a mekkorával az FG négyszege nagyobbb a GH-énál. Már mivel a mint BC CD-hez, úgy van az FG négyszege a GH-éhoz: tehát átfordítva a mint CB BD-hez, úgy van az FG négyszege a K-éhoz. De CB BD-hez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; tehát az FG négyszege sincs a K-éhoz azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; FG tehát K-hoz hoszban szertelen. Már pedig FG GH-nál a K négyszegével nagyobb emeletü; FG tehát hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü GH-nál. FG-nek GH-nak egyike sem is mérhető a felvett neves egyenhez A-hoz; tehát FH hatodik vágacs.

Találva tehát FH hatodik vágacs: m. t. k.

Scholion. Még rövidebb úton is kimutathatni az elészámlált hat vágacs meglelését. Ugyanis legyen feladva az első.

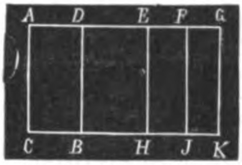
Vétessék AC első nevetlen pár, melynek nagyobbik tagja AB, és vétessék BC-vel egyenlő BD: tehát AB BC, azaz AB BD egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és AB hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü BC-nél, azaz BD-nél. És AB egy felvett neves egyennel hoszban összemérhető; AD tehát első vágacs. — Hasonlókép találjuk meg a többi vágacsokat is, felvéve a megfelelő számokkal jegyzett nevetlen párokat.

92. Feladat:

Ha egy lap, neves egyen s első vágacs közzé van fogva: az arra a lapra emelhető egyen, vágacs.

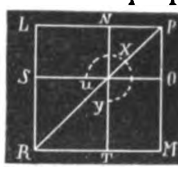
Ugyanis fogassék AB lap, AC neves egyen és AD első vágacs közzé: azt mondom, hogy az AB lapra emelhető egyen vágacs.

Mert minthogy AD első vágacs, legyen hozzá illesztve DG egyen; AG GD tehát egymáshoz csak



emeletben mérhető neves egyenek. Már az egész *AG* a felvett *AC* neves egyennel összemérhető, és *AG* hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *GD*-nél: ha tehát a *DG* négyszegének negyed részével egyenlő egyközény, négyszegkép hiával szabatik *AG*-hez, az ezt összemérhető részekre vágja. Vágassék ketté *DG* *E*-nél, és szabassék *AG*-hez az *EG* négyszegével egyenlő egyközény négyszegkép hiával, és legyen az, az *AF FG* közti; *AF* tehát *FG*-hez mérhető. És vonassanak *AC*-hez *E F G* pontokon át *EH FJ GK* egyközüek.

És minthogy *AF FG*-vel hoszban összemérhető, tehát *AG* is hoszban mind *AF*-hez mind *FG*-hez mérhető. De *AG* összemérhető *AC*-vel tehát *AF*-nek *FG*-nek is mindenikét mérhetni hoszban *AC*-hez. De *AC* neves egyen, tehát *AF*-nek *FG*-nek is mindenike neves, úgy hogy *AJ FK* derékszegeknek is mindenike neves. És minthogy *DE EG*-hez hoszban mérhető, tehát *DG* is hoszban mind *DE*-hez mind *EG*-hez mérhető. Már pedig *DG* neves egyen, és *AC*-hez hoszban szertelen; tehát *DE*-nek *EG*-nek mindenike szertelen hoszban *AC*-hez; tehát *DH EK* derékszegeknek mindenike középlap.



Alkottassék *AJ*-vel egyenlő *LM* négyszeg, és vétessék el ebből *FK*-val egyenlő *NO* négyszeg, melynek egyik szeglete, az *LPM* alatti, az *LM*-ével közös legyen; tehát *LM NO* négyszegek azonegy átmérő körül vannak. Legyen az átmérőjök *PR*, és készíttessék el a képlet. Minthogy már az *AF FG* közzé fogott derékszeg egyenlő az *EG* négyszegével, tehát a mint *AF EG*-hez, úgy van *EG FG*-hez. De a mint *AF EG*-hez, úgy van *AJ EK*-hoz, s a mint *EG FG*-hez, úgy van *EK KF*-hez; *EK* tehát *AJ KF* közt középegyarányu. Már pedig *LM NO* között is *MN* középegyarányu, (mint a fennebbiekben meg van mutatva), és *AJ LM* négyszeggel, *FK* pedig *NO*-val egyenlők; *MN* tehát egyenlő *EK*-val. De *EK DH*-val egyenlő, *MN* pedig *LO*-val; *DK* tehát egyenlő *UXY* gnomonnal meg *NO*-val. *AK* is pedig egyenlő *LM NO* négyszegekkel; tehát a maradék *AB ST*-vel egyenlő; *ST* pedig az *LN* négyszege, tehát az *LN* négyszege egyenlő *AB*-vel; *LN* teh át *AB*-re emelhető egyen.

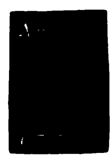
Azt mondom, hogy *LN* vágacs.

Mert minthogy mind *AJ* mind *FK* nevesek, és *LM*-mel, *NO*-val egyenlők; tehát *LM NO* négyszegeknek is, azaz az *LP PN* egyenek négyszegeinek mindenike neves; ennélfogva *LP PN* egyenek is mind a ketten nevesek Ismét, minthogy *DH* közép lap és *LO*-val egyenlő; tehát *LO* is közép lap. Már mivel *LO* közép, *NO* pedig neves lap, tehát *LO* *NO*-hoz szertelen; de a mint *LO* *NO*-hoz, úgy van *LP PN*-hez; *LP PN* tehát hoszban szertelenek. És mind a ketten nevesek; *LP PN* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *LN* vágacs, és *AB* lapra emelhető; az *AB* lapra emelhető egyen tehát vágacs.

Ha tehát sat.

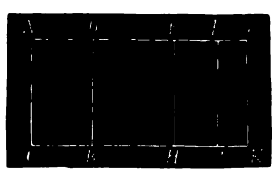
93. Feladat:

Ha egy lap, neves egyen és második vágacs közé van fogva: az arra a lapra emelhető egyen közép egyen első vágacsa.



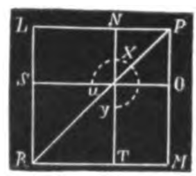
Ugyanis *AB* lapot fogja be *AC* neves egyen, és *AD* második vágacs: azt mondom, hogy az *AB* lapra emelhető egyen közép egyen első vágacsa.

Mert legyen *AD* hez illesztve *DG*; *AG GD* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és *DG* ragaszték a felvett *AC* neves egyenhez mérhető, az egész *AG* pedig hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *GD* ragaszténál. Már minthogy *AG* hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *GD*-nél, tehát ha a *GD* négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hijával szabatik *AG*-hez, az emezt öszszemérhető részekre vágja. Vágassék hát ketté *DG* *E*-nél, és szabassék *AG*-hez az *EG* négyszegével egyenlő derékszeg



négyszegkép hiával, és legyen az a *DF FG* közti; *FA* tehát *FG*-hez hoszban mérhető. És vonassanak *E F G* pontokon át *AC*-hez *EH FJ GK* egyközüek. Már minthogy *AF FG*-hez hoszban mérhető, tehát *AG* hoszban mind *AF*-hez mind *FG*-hez mérhető. De *AG* neves, és *AC*-hez hoszban szertelen; tehát *AF*-nek *FG*-nek is mindenike neves, és *AC*-hez hoszban szertelen; tehát *AJ FK* derékszegek közép lapok. Ismét, mivel *DE EG*-hez mérhető, tehát *DG* is mind *DE*-hez mind *EG*-hez mérhető. De *DG AC*-hez hoszban mérhető; *DE*-nek *EG*-nek is tehát mindenike neves, és *AC*-hez hoszban mérhető; ennélfogva *DH EK* derékszegek mindenike neves.

Alkottassék *AJ*-vel egyenlő *LM* négyszeg, és ebből vétessék el *FK*-val egyenlő *NO* négyszeg, melynek *LPM* alatti szeglete azon egy legyen az *LM*-ével; *LM NO* négyszegek tehát azonegy átmérő körül vannak. Legyen az átmérőjök *PR*, és készíttessék el a képlet.



Már minthogy *AJ FK* közép lapok, és egymáshoz mérhetők, és az *LP PN* négyszegeikkel egyenlők; tehát az *LP PN* négyszegeik is közép lapok; *LP PN* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek. És minthogy az *AF FG* közti derékszeg egyenlő az *EG* négyszegével, tehát a mint *AF EG*-hez, úgy van *EG FG*-hez; de a mint *AF EG*-hez, úgy van *AJ EK*-hoz, s a mint *EG FG*-hez, úgy *EK FK*-hoz; tehát *AJ FK* közt *EK* középegyarányu. De *LM NO* négyszegek közt is középegyarányu *MN*, és *AJ*-vel *LM* egyenlő, *FK*-val pedig *NO*; tehát *MN* egyenlő *EK*-val. De *EK* egyenlő *DH*val, *MN* pedig egyenlő *LO*-val; tehát az egész *DK* egyenlő *UXY* gnomonnal meg *NO*-val. Már minthogy az egész *AK* egyenlő *LM NO* négyszegekkel, melyekből *DK UXY* gnomonnal meg *NO* négyszeggel egyenlő: tehát a maradék *AB* egyenlő *ST*-vel, azaz az *LN* négyszegével; az *LN* négyszege tehát *AB* lappal egyenlő; *LN* egyen tehát *AB* lapra emelhető.

Azt mondom, hogy *LN* közép egyen első vágacsa.

Mert minthogy *EK* neves és *MN*-nel azaz *LO*-val egyenlő: tehát LO, azaz az LP PN közti derékszeg is neves. De NO-ról meg van mutatva, hogy közép lap; LO tehát NO-hoz szertelen; már pedig a mint LO NO-hoz, úgy van LP PN-hez; LP PN tehát hoszban szertelenek; LP PN tehát neves lapot befogó egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek; tehát LN közép egyen első vágacsa, és AB lapra emelhető

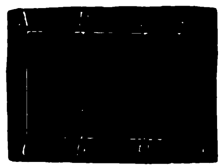
Az AB lapra emelhető egyen tehát sat.

94. Feladat:

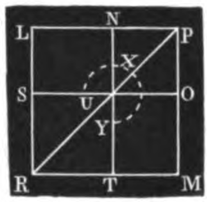
Ha egy lap, neves egyen és harmadik vágacs közé van fogva: az ezen lapra emelhető egyen közép egyen második vágacsa.

Mert fogják bé AB lapot AC neves egyen s AD harmadik vágacs: azt mondom, hogy az AB lapra emelhető egyen közép egyen második vágacsa.

Mert legyen AD-hez illesztve DG egyen; AG GD tehát egymáshoz csak emeletben mérhető nevesek, és sem AG sem GD hoszban nem mérhető a felvett neves egyenhez AC-hez, az egész AG pedig hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü a hozzá ragasztott DG-nél. Már minthogy AG hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü DG-nél: tehát ha a DG négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával szabatik AG-hez, az emezt összemérhető részekre vágandja. Vágassék hát ketté DG E-nél, és szabassék AG-hez az EG négyszegével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával, és legyen ez az AF FG közti. Vonassanak E F G pontokon át AC-hez EH FJ GK egyközüek; tehát AF FG összemérhetők; AJ is tehát FK-hoz mérhető. És minthogy AF FG hoszban összemérhetők, tehát AG is hoszban mind AF-hez mind FG-hez mérhető. De AG neves, és AC-hez hoszban szertelen; AF-nek FG-nek is tehát mindenike neves és AC-hez hoszban szertelen; tehát mind AJ mind FK közép lapok. Ismét minthogy DE EG-hez hoszban mérhető, tehát DG hoszban mind DE-hez mind EG-hez mérhető. De DG neves és AC-hez hoszban szertelen; DE-nek EG-nek



is tehát mindenike neves, és *AC*-hez hoszban szertelen; tehát *DH EK* is mind a ketten közép lapok. És minthogy *AG GD* egymáshoz csak emeletben mérhetők, tehát *AG GD*-hez hoszban szertelen. De *AG AF*-hez hoszban mérhető, valamint *DG* is *GE*-hez; *AF* tehát *EG*-hez hoszban szertelen. A mint pedig *AF EG*-hez, úgy van *AJ EK*-hoz; *AJ* tehát *EK*-hoz szertelen.



Alkottassék tehát *AJ*-vel egyenlő *LM* négyszeg, s ebből vétessék el *FK*-val egyenlő *NO* négyszeg, melynek *LM*-mel közös *LPM* alatti szeglete legyen; *LM NO* tehát azon egy átmérő körül vannak. Legyen az átmérőjök *PR* és készittessék el a képlet. Már minthogy az *AF FG* közti derékszeg egyenlő az *EG* négyszegével; tehát a mint *AF EG*-hez, úgy van *EG FG*-hez. De a mint *AF EG*-hez, úgy van *AJ EK*-hoz, s a mint *EG FG*-hez, úgy *EK FK*-hoz; tehát a mint *AJ EK*-hoz, úgy *EK FK*-hoz; *EK* tehát középegyarányu *AJ FK* közt. *LM NO* négyszegekhez is középegyarányu *MN* derékszeg, és *AJ LM*-mel, *FK* pedig *NO*-val egyenlő; tehát *EK* egyenlő *MN*-nel. De *MN* egyenlő *LO*-val, *EK* pedig *DH*-val; az egész *DK* tehát egyenlő *UXY* gnomonnal meg *NO*-val; *AK* is egyenlő *LM* meg *NO* négyszegekkel; a maradék *AB* tehát *ST*-vel azaz az *LN* négyszegével egyenlő; *LN* tehát *AB* lapra emelhető.

Azt mondom, hogy *LN* egy közép egyen második vágacsa.

Mert mivel megmutattaték, hogy *AJ FK* közép lapok és az *LP PN* négyszegeikkel egyenlők, tehát az *LP PN* négyszegeik is mind a ketten közép lapok; ennélfogva *LP PN* is mind a ketten közép egyenek. És minthogy *AJ FK*-hoz mérhető: tehát az *LP* négyszege is mérhető a *PN*-éhez. Ismét, mivel megmutattaték, hogy *AJ EK*-hoz szertelen, tehát *LM* is *MN*-hez azaz: az *LP* négyszege az *LP PN* közti derékszeghez szertelen, úgy hogy *LP* is szertelen hoszban *PN*-hez; *LP PN* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek.

Még azt mondom, hogy közép lapot fognak be.

Mert mivel *EK* közép lapnak van megmutatva, és egyenlő az LP PN közti derékszeggel; tehát az LP PN közti derékszeg is közép lap, úgy hogy LP PN középlapot béfogó egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek; LN tehát közép egyen második vágacsa, és AB lapra emelhető.

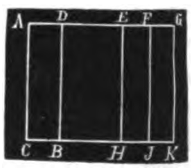
Az AB lapra emelhető egyen tehát közép egyen második vágacsa: m. b. k.

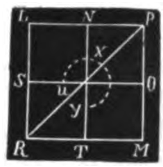
95. Feladat:

Ha egy lap egy neves egyen és negyedik vágacs közzé van fogva, az arra a lapra emelhető egyen kisebbik nevetlen.

Ugyanis fogják be AB lapot AC neves egyen és AD negyedik vágacs: azt mondom, hogy az AB lapra emelhető egyen kisebbik nevetlen.

Mert legyen AD-hez illesztve DG egyen; AG GD tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, AG a felvett AC neves egyenhez hoszban mérhető, s az egész AG hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a ragaszték GD-nél. Minthogy AG hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü GD-nél; tehát ha a GD négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával szabatik AG-hez, az emezt szertelen darabokra vágja. Vágassék át DGketté E-nél, szabassék AG-hez az EG négyszegével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával, és legyen az, az AF FG közti; tehát AF FG-hez hoszban szertelen. Vonassanak E F G pontokon át AC-hez BD-hez EH FJ GK egyközüek. Már mivel AG neves, és AC-hez hoszban mérhető tehát az egész AK neves. Ismét minthogy DG AC-hez hoszban szertelen, és mind a ketten nevesek; tehát DK közép lap. Ismét minthogy AF FG-hez hoszban szertelen, tehát AJ is szertelen FK-hoz.





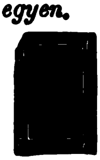
Alkottassék *AJ*-val egyenlő *LM* négyszeg, és ebből vétessék el *FK*-val egyenlő *NO* négyszeg, melynek az *LPM* alatti szeglete közös legyen az *LM*-mével; *LM NO* négyszegek tehát azon átmérő körül vannak. Legyen az átmerőjök *PR*, és készíttessék el a képlet. Már mivel az *AF FG* közti derékszeg egyenlő az *EG* négyszegével, tehát egyarányban a mint *AF EG*-hez, úgy van *EG GF*-hez. De a mint *AF EG*-hez, úgy van *AJ EK*-hoz, s a mint *EG FG*-hez, úgy *EK FK*-hoz; *AJ FK* közt tehát *EK* középegyarányu. De *LM NO* négyszegek közt is *MN* derékszeg középegyarányu, s *AJ LM*-mel, *FK* pedig *NO*-val egyenlők: *EK* is tehát egyenlő *MN*-nel. De *EK* egyenlő *DH*-val, *MN* pedig *LO*-val; tehát az egész *DK* egyenlő *UXY* gnomonnal, meg *NO* négyszeggel. És minthogy az egész *AK* egyenlő *LM NO* négyszegekkel, miből *DK* egyenlő *UXY* gnomonnal meg *NO* négyszeggel, tehát a maradék *AB* egyenlő *ST*-vel azaz az *LN* négyszegével; *LN* tehát *AB* lapra emelhető.

Azt mondom, hogy *LN* oly nevetlen egyen, mely kisebbik nevetlennek mondatik.

Mert mivel *AK* neves, és az *LP PN* négyszegeikkel egyenlő, tehát az *LP PN* négyszegeikből álló lap neves. Ismét mivel *DK* közép lap, és *DK* az *LP PN* közti kétszeri derékszeggel egyenlő: tehát az *LP PN* közti kétszeri derékszeg közép lap. És minthogy, a mint megmutattaték, *AJ FK*-hoz szertelen, tehát az *LP* négyszege a *PN*-éhez szertelen; *LP PN* tehát emeletben szertelenek, s a négyszegeikből álló lap neves, a közükbe fogott kétszeri derékszeg pedig közép lap: *LN* tehát oly nevetlen, mely kisebbiknek mondatik és *AB* lapra emelhető.

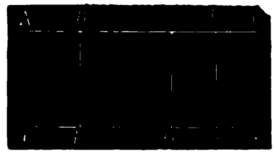
96. Feladat:

Ha egy lap neves egyen s ötödik vágacs közzé fogatik, az arra a lapra emelhető egyen nevessel közép egészet alkotó egyen.

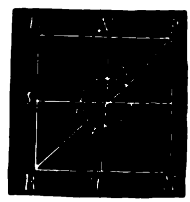


Fogják be *AB* lapot *AC* neves egyen, és *AD* ötödik vágacs: azt mondom, hogy az *AB* lapra emelhető egyen nevessel közép egészet alkotó egyen.

Mert legyen *AD*-hez illesztve *DG*; *AG GD* tehát



egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, és a ragaszték DG hoszban a felvett AC neves egyenhez mérhető, az egész AG pedig hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü DG-nél. Már mivel AG hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü GD-nél: tehát ha a DG négyszege negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával szabatik AG-hez, az emezt szertelen darabokra vágja. Vágassék hát DG ketté E pontnál, s szabassék AG-hez az EG négyszegével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával, és legyen az, az AF FG közti; AF tehát FG-hez hoszban szertelen. Vonassanak E F G pontokon át AC-hez EH FJ GK egyközüek. És minthogy AG AC-hez hoszban szertelen és mind a ketten nevesek, tehát AK közép lap. Ismét, minthogy DG neves, és AC-hez hoszban mérhető, tehát DK is neves. — Alkottassék hát AJ-vel egyenlő LM négyszeg, és ebből vétessék el FK-val egyenlő NO négyszeg, melynek az LM-mével közös LPM alatti szeglete legyen; LM NO négyszegek tehát azon átmérő körül vannak. Legyen az átmérőjök PR, és készíttessék el a képlet. Hasonlóképmutatjuk meg, hogy LN egyen AB lapra emelhető.



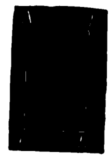
Azt mondom, hogy LN egyen nevessel közép lapot alkotó egyen.

Mert mivel, a mint megmutattaték, AK közép lap és az LP PN négyszegeikkel egyenlő; tehát az LP PN négyszegeikből álló lap közép. Ismét, minthogy DK neves lap, s az LP PN közti kétszeri derékszeggel egyenlő; tehát az LP PN közti kétszeri derékszeg is neves. És minthogy AJ FK-hoz szertelen: tehát az LP négyszege is szertelen a PN-éhez; LP PN tehát emeletben szertelenek, s a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott kétszeri derékszeg pedig neves; a maradék LN tehát oly nevetlen, mely nevessel közép egészet alkotónak mondatik, és AB lapra emelhető.

Az AB lapra emelhető sat.

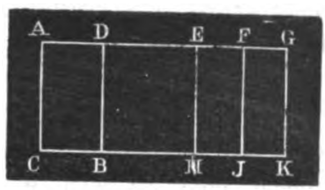
97. Feladat:

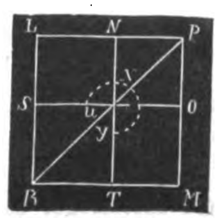
Ha egy lap neves egyen és hatodik vágács közzé fogatik: az arra a lapra emelhető egyen középpel közép egészet alkotó lesz.



Fogják be AB lapot AC neves egyen, s AD hatodik vágacs: azt mondom, hogy az AB lapra emelhető egyen középpel közép egészet alkotó.

Mert legyen AD-hez illesztve DG; AG GD tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, s hoszban egyikök sem mérhető a felvett AC neves egyenhez, az egész AG pedig hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü a ragaszték DG-nél. Minthogy hát AG hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü DG-nél: tehát ha a DG négyszege negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával szabatik AG-hez, az emezt egymáshoz szertelen darabokra vágja. Vágassék hát DG ketté E pontnál, és szabassék AG-hez az EG négyszegével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával, és legyen az, az AF FG közti; AF tehát FG-hez hoszban szertelen. A mint pedig AF FG-hez, úgy van AJ FK-hoz; AJ tehát FK-hoz szertelen. És minthogy AG AC egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, tehát AK közép lap. Ismét, mivel AC DG neves egyenek és egymáshoz hoszban szertelenek: tehát DK is közép lap. Már minthogy AG GD egymáshoz csak emeletben mérhetők: tehát AG GD-hez hoszban szertelen. De a mint AG GD-hez, úgy van AK KD-hez; AK tehát KD-hez szertelen. Állítassék AJ-vel egyenlő LM négyszeg, és vétessék el ebből FK-val egyenlő NO négyszeg, melynek egyik szeglete az LM-ével közös legyen; LM NO négyszegek tehát azon átmérő körül





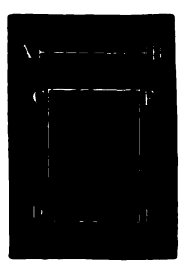
vannak. Legyen az átmérőjök *PR*, és készítessék el a képlet. A fölebbiekkel hasonlólag mutatjuk meg, hogy *LN* *AB* lapra emelhető.

Azt mondom, hogy *LN* középpel közép egészet alkotó legyen.

Mert minthogy *AK* közép lapnak van megmutatva, és egyenlő az *LP PN* négyszegeikkel: tehát az *LP PN* négyszegeikből álló lap közép. Ismét mivel a mint megmutattaték, *DK* közép lap, és az *LP PN* közti kétszeri derékszeggel egyenlő, tehát az *LP PN* közti kétszeri derékszeg is közép lap. És mivel meg van mutatva, hogy *AK* *DK*-hoz szertelen, tehát az *LP PN* négyszegeik szertelenek az *LP PN* közti kétszeri derékszeghez. És minthogy *AJ* *FK*-hoz szertelen, tehát az *LP* négyszege is szertelen a *PN*-éhez. *LP PN* tehát emeletben szertelenek, oly móddal, hogy a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott kétszeri derékszeg is közép lap, és még a négyszegeik a közükbe fogott derékszeghez szertelenek; *LN* tehát oly nevetlen egyen, mely középpel közép egészet alkotónak mondatik, és *AB* lapra emelhető.

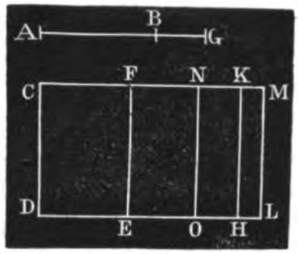
98. Feladat:

A vágacs négyszege, neves egyenhez szabva, első vágacs szélességet csinál.



Legyen *AB* vágacs, és *CD* neves egyen, és szabassék *CD*-hez az *AB* négyszegével egyenlő *CE* derékszeg, mely *CF* szélességet csináljon: az mondom, hogy *CF* első vágacs.

Mert legyen *AB*-hez illesztve *BG*: *AG* *GB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhetők. Szabassék *CD*-hez az *AG* négyszegével egyenlő *CH* derékszeg, mely *CK* szélességet csináljon, s megint a *BG* négyszegével egyenlő *KL* derékszeg, mely *KM* szélességet csináljon; az egész *CL* tehát egyenlő az *AG*



GB négyszegeikkel; miből *CE* az *AB* négyszegével egyenlő; tehát a maradék *FL* egyenlő az *AG GB* közti kétszeri derékszeggel. Vágassék ketté *FM N* pontnál, és vonassék *N*-en át *CD*-hez egyközü *NO*; tehát *FO*-nak *LN*-nek mindenike egyenlő az *AG GB* közti derékszeggel. És minthogy az *AG GB* négyszegeik nevesek, és *DM* egyenlő az *AG GB* négyszegeikkel: tehát *DM* is neves, és *CD*-hez szabva *CM* szélességet csinál; *CM* tehát neves és *CD*-hez hoszban mérhető. Ismét mivel az *AG GB* közti kétszeri derékszeg közép lap, és az *AG GB* közti kétszeri derékszeg *LF*-fel egyenlő: tehát *LF* is közép lap. És *CD* neves egyenhez szabva *FM* szélességet csinál; tehát *FM* neves és *CD*-hez hoszban szertelen. És minthogy az *AG GB* négyszegeik nevesek, az *AG GB* közti kétszeri derékszeg pedig közép lap: tehát az *AG GB* négyszegeik szertelenek az *AG GB* közti kétszeri derékszeghez. Már pedig az *AG GB* négyszegeikkel *CL* egyenlő, és az *AG GB* közti kétszeri derékszeggel *FL* egyenlő; tehát *CL FL*-hez szertelen. De a mint *CL FL*-hez, úgy van *CM MF*-hez; *CM* tehát *MF*-hez hoszban szertelen. És mind a ketten nevesek; *CM MF* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *CF* vágacs.

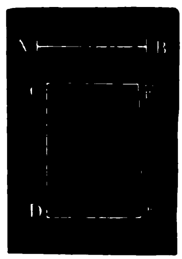
Azt mondom első.

Mert minthogy az *AG GB* négyszegeikhez az *AG GB* közti derékszeg középegyarányu, és az *AG* négyszegével *CH* derékszeg, a *BG* négyszegével *KL*, az *AG GB* közti derékszeggel pedig *NL* egyenlők: tehát *CH KL* közt is *NL* középegyarányu; tehát a mint *CH NL*-hez, úgy van *NL KL*-hez. De a mint *CH NL*-hez, úgy van *CK NM*-hez, s a mint *NL KL*-hez, úgy *NM KM*-hez; tehát a mint *CK NM*-hez úgy *NM KM*-hez; a *CK KM* közti derékszeg tehát egyenlő az *MN* négyszegével, azaz: az *FM* négyszegének negyedrészével. És minthogy az *AG* négyszege a *GB*-éhez mérhető, tehát *CH* is mérhető *KL*-hez. A mint pedig *CH KL* hez, úgy van *CK KM*-hez; *CK* tehát *KM*-hez mérhető. Minthogy hát van két nem egyenlő *CM MF* egyen, s az *FM* négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg, a *CK KM* közti, négyszegkép hiával szabatott *CM*-hez, és *CK KM*-hez mérhető: tehát *CM* hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *MF*-nél. És *CM* hoszban a felvett neves egyenhez *CD*-hez mérhető; *CF* tehát első vágacs.

Tehát sat.

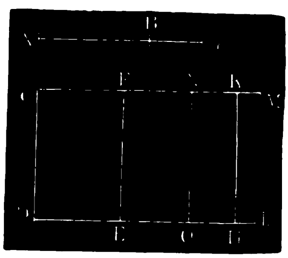
99. Feladat:

Közép egyen első vágacsa négyszege neves egyenhez szabva második vágacs szélességet csinál.



Legyen *AB* közép egyen első vágacsa, *CD* pedig neves egyen, és az *AB* négyszegével egyenlő *CE* derékszeg *CD*-hez szabva csináljon *CF* szélességet: azt mondom, hogy *CF* második vágacs.

Mert legyen *AB*-hez illesztve *BG*; *AG GB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető, neves lapot béfogó egyenek. Szabassék *CD*-hez az *AG* négyszegével egyenlő *CH* derékszeg, mely *CK* szélességet csináljon, s a *GB* négyszegével egyenlö *KL*, mely *KM* szélességet csináljon; az egész *CL* tehát egyenlő az *AG GB* közép négyszegeikkel; tehát *CL* is közép lap. És *CD* neves egyenhez szabva *CM* szélességet csinál; neves tehát *CM* is, és *CD*-hez hoszban szertelen. És minthogy *CL* egyenlő az *AG GB* négyszegeikkel, miből az *AB* négyszege *CE*-vel egyenlő: tehát a maradék, ú. m. az *AG GB* közti kétszeri derékszeg, egyenlő *FL*-lel. De az *AG GB* közti kétszeri derékszeg neves, *FL* is tehát neves, és *FE* neves egyenhez szabva csinál *FM* szélességet; tehát *FM* is neves, és *CD*-hez hoszban mérhető. Minthogy hát az *AG GB* négyszegeik, azaz



CL, közép lap, az *AG GB* közti kétszeri derékszeg pedig azaz *FL* neves : tehát *CL FL*-hez szertelen. De a mint *CL FL*-hez, úgy van *CM FM*-hez ; *CM* tehát *MF*-hez hoszban szertelen. Már pedig mind a ketten nevesek ; *CM MF* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek ; *CF* tehát vágacs.

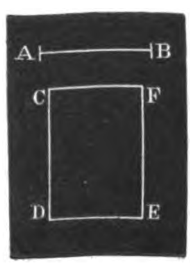
Azt mondom, második.

Mert vágassék *FM* ketté *N*-nél, s vonassék *N*-en által *CL*-hez egyközü *NO*; tehát *FO*-nak *NL*-nek mindenike egyenlö az *AG GB* közti derékszeggel. És minthogy az *AG GB* négyszegeik közt az *AG GB* közti derékszeg középegyarányu, és az *AG* négyszege *CH*-val, az *AG GB* közti derékszeg *NL*-lel, a *GB* négyszege pedig *KL*-lel egyenlők : tehát *NL* is *CH*-hoz *KL*-hez középegyarányu ; a mint tehát *CH NL*-hez, úgy van *NL KL*-hez. De a mint *CH NL*-hez, úgy *CK NM*-hez, s a mint *NL KL*-hez, úgy *NM KM*-hez ; tehát a mint *CK NM*-hez, úgy van *NM KM*-hez; a *CK KM* közti derékszeg tehát egyenlö az *NM* négyszegével, azaz: az *FM* négyszegének negyedrészével. És minthogy az *AG* négyszege a *GB*-éhez mérhető : tehát *CH* is mérhető *KL*-hez, azaz : *CK KM*-hez. Már mivel van két nem egyenlö *CM MF* egyen, és az *MF* négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg, úgymint a *CK KM* közti, négyszegkép hiával van a nagyobb egyenhez, *CM*-hez, szabva, és ezt egymáshoz mérhető darabokra vágja : tehát *CM* hozzája hoszban mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *MF*-nél. Már pedig a ragaszték *FM* hoszban mérhető a felvett neves egyenhez, *CD*-hez ; *CF* tehát második vágacs.

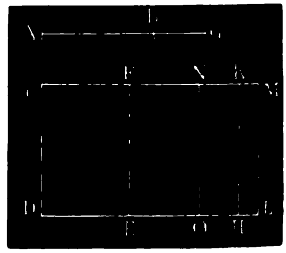
Tehát közép egyen első vágacsa sat.

100. Feladat:

Közép egyen második vágacsa négyszege, neves egyenhez szabva harmadik vágacs szélességet csinál.



Legyen *AB* egy közép egyen második vágacsa, *CD* pedig neves egyen, és szabassék *CD*-hez az *AB* négyszegével egyenlő CE derékszeg, mely CF szélességet csináljon azt mondom, hogy CF harmadik vágacs.



Mert legyen AB-hez illesztve BG; AG GB tehát egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek, melyek közép lapot fognak bé. Szabassék CD-hez az AG négyszegével egyenlő CH derékszeg, mely CK szélességet csináljon, és szabassék KH-hoz a BG négyszegével egyenlő KL, mely KM szélességet csináljon az egész CL tehát az AG GB négyszegeikkel egyenlö. Már az AG GB négyszegeik közép lapok, tehát CL is közép lap, és CD-hez szabva CM szélességet csinál: tehát CM neves, és CD-hez hoszban szertelen. És minthogy az egész CL egyenlő az AG GB négyszegeikkel, miből CE az AB négyszegével egyenlő, tehát a maradék FL egyenlő az AG GB közti kétszeri derékszeggel. Vágassék kettő FM N pontnál, és vonassék CD-hez egyközü NO; tehát FO-nak NL-nek mindenike egyenlö az AG GB közti derékszeggel. De az AG GB közti derékszeg közép lap, tehát FL is közép lap, és EF neves egyenhez szabva FM szélességet csinál; FM is tehát neves és CD-hez hoszban szertelen. És minthogy AG GB egymáshoz csak emeletben mérhetők, tehát AG GB-hez hoszban szertelen; az AG négyszege is tehát szertelen az AG GB közti derékszeghez, De az AG négyszegével az AG GB négyszegeik összemérhetők, megint az AG GB közti derékszeggel összemérhető az AG GB közti kétszeri derékszeg; tehát az AG GB négyszegeikhez az AG GB közti kétszeri derékszeg szertelen. De az AG GB négyszegeikkel CL egyenlő, az AG GB közti kétszeri derékszeggel pedig FL egyenlő; CL tehát FL-hez szertelen. Már pedig a mint CL FL-hez, úgy van CM FM-hez; CM tehát FM-hez hoszban szertelen. És mind a ketten nevesek; CM FM tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; CF tehát vágacs.

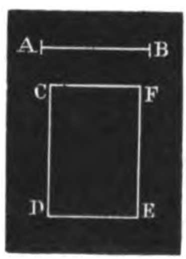
Azt mondom, harmadik.

Mert minthogy az AG négyszege a GB-éhez mérhető, tehát CH is mérhető KL-hez; ennélfogva CK is KM-hez. És minthogy az AG GB négyszegeikhez az AG GB közti derékszeg középegyarányu, s az AG négyszegével CH egyenlő, a GB-ével KL egyenlő, az AG GB közti derékszeggel pedig NL egyenlő; tehát CH KL derékszeghez is NL középegyarányu; tehát a mint CH NL-hez, úgy NL KL-hez. De a mint CH NL-hez, úgy CK NM-hez, s a mint NL KL-hez, úgy NM KM-hez; a mint tehát CK NM-hez, úgy NM KM-hez; a CK KM közti derékszeg tehát egyenlő az NM négyszegével, azaz: az FM négyszegének negyedrészével. Mivel tehát van két nem egyenlő CM MF egyen, s az FM négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával szabatott CM-hez, és ezt egymáshoz mérhető darabokra vágja: tehát CM hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü MF-nél. És sem CM sem MF nem mérhetők a felvett neves egyenhez CD-hez; tehát CF harmadik vágacs.

Tehát sat.

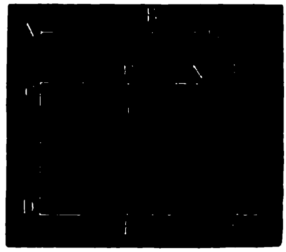
101. Feladat:

A kisebbik nevetlen négyszege, neves egyenhez szabva, negyedik vágacs szélességet csinál.



Legyen AB kisebbik nevetlen, és CD neves egyen; és szabassék CD-hez az AB négyszegével egyenlő CE derékszeg, mely CF szélességet csináljon: azt mondom, hogy CF negyedik vágacs.

Mert legyen AB-hez illesztve BG; AG GB tehát emeletben szertelenek, az AG GB négyszegeikből álló lap neves, az AG GB közti kétszeri derékszeg pedig közép lap. Szabassék CD-hez az AG négyszegével egyenlő CH derékszeg, mely CK szélességet csináljon; és KH-hoz szabassék megint a BG négyszegével egyenlő KL, mely KM szélességet csináljon; tehát az egész CL az AG GB négyszegeikkel egyenlő. Már az AG GB négyszegeikből álló lap neves; tehát CL is neves,



és *CD* neves egyenhez szabva *CM* szélességet csinál; neves tehát *CM* is, és *CD*-hez hoszban mérhető. És minthogy az egész *CL* egyenlő az *AG GB* négyszegeikkel, miből *CE* az *AB* négyszegével egyenlő; tehát a maradék *FL* egyenlő az *AG GB* közti kétszeri derékszeggel. Vágassék *FM* ketté *N* pontnál, és vonassék *N*-en át akár *CD*-hez akár *ML*-hez egyközü *NO*; tehát *FO*-nak *NL*-nek mindenike egyenlő az *AG GB* közti derékszeggel. És minthogy az *AG GB* közti kétszeri derékszeg közép lap és *FL*-lel egyenlö; tehát *FL* is közép lap, és *FE* neves egyenhez szabva csinál *FM* szélességet; *FM* tehát neves, és *CD*-hez hoszban szertelen. És mivel az *AG GB* négyszegeikből álló lap neves, az *AG GB* közti kétszeri derékszeg pedig közép lap; tehát az *AG GB* négyszegeik az *AG GB* közti kétszeri derékszeghez szertelenek. Már pedig *CL* egyenlö az *AG GB* négyszegeikkel, az *AG GB* közti kétszeri derékszeggel megint *FL* egyenlö; tehát *CL FL*-hez szertelen. De a mint *CL FL*-hez, úgy van *CM FM*-hez; *CM* tehát *FM*-hez hoszban szertelen. És mind a ketten nevesek; *CM MF* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *CF* tehát vágacs.

Azt mondom, negyedik.

Mert minthogy *AG GB* egyenek emeletben szertelenek, tehát az *AG* négyszege is szertelen a *GB*-éhez. De az *AG* négyszegével egyenlö *CH*, a *GB*-ével pedig *KL*; *CH* tehát *KL*-hez szertelen. És a mint *CH KL*-hez, úgy van *CK KM*-hez; *CK* tehát *KM*-hez hoszban szertelen. És minthogy az *AG GB* négyszegeikhez középegyarányu az *AG GB* közti derékszeg, az *AG* négyszegével pedig egyenlö *CH*, a *GB*-ével *KL*, és az *AG GB* közti derékszeggel *NL*; tehát *NL* középegyarányu *CH* és *KL* között; tehát a mint *CH NL*-hez, úgy van *NL KL*-hez. De a mint *CH NL*-hez, úgy van *CK NM*-hez, s a mint *NL KL*-hez, úgy *NM KM*-hez; tehát a mint *CK NM*-hez, úgy *NM KM*-hez; a *CK KM* közti derékszeg tehát egyenlö az *NM* négyszegével, azaz: az *FM* négyszegének negyedrészével. Már minthogy van két nem egyenlő *CM MF* egyen, és az *MF* négyszegének negyedrészével egyenlő úgymint *CK KM* közti derékszeg négyszegkép hiával szabva *CM*-hez, ezt egymáshoz szertelen darabokra vágja, tehát *CM* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *MF*-nél. Már pedig az egész *CM* hoszban mérhető a felvett neves egyenhez *CD*-hez; tehát *CF* negyedik vágacs.

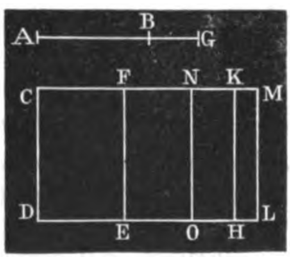
A kisebbik nevetlen sat.

102. Feladat:

Neves egyennel közép egészet alkotó egyen négyszege neves egyenhez szabva ötödik vágacs szélességet csinál.

Legyen *AB* nevessel közép egészet alkotó, és *CD* neves egyen, és szabassék *CD*-hez az *AB* négyszegével egyenlő *CE* derékszeg, mely *CF* szélességet csináljon: azt mondom, hogy *CF* ötödik vágacs.

Mert legyen *AB*-hez illesztve *BG*; *AG GB* tehát emeletben szertelenek, s a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott kétszeri derékkszeg pedig neves. Szabassék *CD*-hez az *AG* négyszegével egyenlő *CH* derékszeg, s a *GB* négyszegével egyenlő *KL* derékszeg, az egész *CL* tehát egyenlő az *AG GB* négyszegeikkel. Már pedig az *AG GB* négyszegeikből álló lap közép; közép lap tehát *CL* is, és *CD* neves egyenhez szabva *CM* szélességet csinál; *CM* tehát neves egyen, és *CD*-hez hoszban szertelen. És minthogy az egész *CL* egyenlő az *AG GB* négyszegeikkel, miből *CE* az *AB* négyszegével egyenlő; tehát a maradék *FL* egyenlő az *AG GB* közti kétszeri derékszeggel. Vágassék ketté *FM N*-nél, és vonassék *N*-en át akár *CD*-hez akár *ML*-hez egyközü *NO*; *FO NL* derékszegeknek tehát mindenike egyenlő az *AG GB* közti derékszeggel. És minthogy az *AG*



GB közti kétszeri derékszeg neves, és *FL*-lel egyenlő, tehát *FL* neves. És *EF* neves egyenhez szabva csinál *FM* szélességet; tehát *FM* neves, és *CD*-hez hoszban szertelen. És minthogy *CL* közép lap, *FL* pedig neves; tehát *CL* *FL*-hez szertelen. De a mint *CL* *FL*-hez, úgy van *CM* *MF*-hez; *CM* tehát *MF*-hez hoszban szertelen. Már pedig mind ketten nevesek; *CM* *MF* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *CF* tehát vágacs.

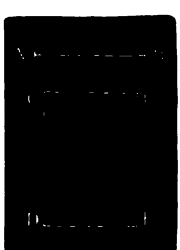
Azt mondom, ötödik.

Mert hasonlókép mutatjuk meg, hogy a *CK* *KM* közti derékszeg egyenlő az *NM* négyszegével, azaz az *FM* négyszegének negyedrészével. És minthogy az *AG* négyszege a *GB*-éhez szertelen, s az *AG* négyszege *CH*-val, a *GB*-é pedig *KL*-lel egyenlők; tehát *CH* szertelen *KL*-hez. De a mint *CH* *KL*-hez, úgy van *CK* *KM*-hez; *CK* tehát *KM*-hez hoszban szertelen. Már mivel van két nem egyenlő *CM* *MF* egyen, és az *FM* négyszegének negyedrészével egyenlő derékszeg négyszegkép hiával szabva *CM*-hez, ezt szertelen darabokra vágja; tehát *CM* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *MF*-nél. És a ragaszték *FM* a felvett neves egyennel *CD*-vel összemérhető; *CF* tehát ötödik vágacs.

Tehát sat.

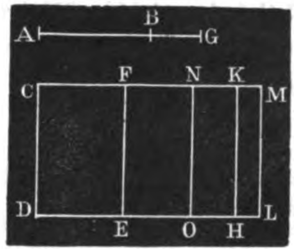
103. Feladat:

A középpel közép egészet alkotó egyen négyszege, neves egyenhez szabva, hatodik vágacs szélességet csinál.



Legyen *AB* középpel közép egészet alkotó, *CD* pedig neves egyen, és szabassék *CD*-hez az *AB* négyszegével egyenlő *CE* derékszeg, mely *CF* szélességet csináljon: azt mondom, hogy *CF* hatodik vágacs.

Mert legyen *AB*-hez illesztve *BG*; *AG* *GB* tehát emeletben szertelenek, a négyszegeikből álló lap közép, az *AG* *GB* közti kétszeri derékszeg is közép lap, és még az *AG* *GB* négysze-



geik az AG GB közti kétszeri derékszeghez szertelenek. Szabassék hát CD-hez az AG négyszegével egyenlő CH derékszeg, mely CK szélességet csináljon, s megint a BG négyszegével egyenlő KL derékszeg; az egész CL tehát egyenlő az AG GB négyszegeikkel; CL tehát közép lap. És CD-hez szabva csinál CM szélességet; CM tehát neves, és CD-hez hoszban szertelen. Már mivel CL egyenlő az AG GB négyszegeikkel, miből CE az AB négyszegével egyenlő; tehát a maradék FL egyenlő az AG GB közti kétszeri derékszeggel. De az AG GB közti kétszeri derékszeg közép lap, FL is tehát közép lap. És FE neves egyenhez szabva csinál FM szélességet; tehát FM neves és CD-hez hoszban szertelen. És minthogy az AG GB négyszegeik az AG GB közti kétszeri derékszeghez szertelenek, és az AG GB négyszegeikkel CL derékszeg, az AG GB közti kétszeri derékszeggel FL egyenlők; tehát CL FL-hez szertelen. Már pedig a mint CF FL-hez, úgy van CM MF-hez; CM tehát MF-hez hoszban szertelen. És mind ketten nevesek; CM MF tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát CF vágacs.

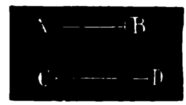
Azt mondom, hatodik.

Mert mivel FL az AG GB közti kétszeri derékszeggel egyenlő, vágassék ketté FM N-nél és vonassék N-en át CD-hez egyközü NO; tehát FO-nak NL-nek mindenike egyenlő az AG GB közti derékszeggel. És minthogy AG GB emeletben szertelenek; tehát az AG négyszege szertelen a GB-éhez. De az AG négyszegével egyenlő CH, a GB négyszegével pedig egyenlő KL; CH tehát KL-hez szertelen. Már pedig a mint CH KL-hez, úgy CK KM-hez; tehát CK KM-hez szertelen. És minthogy az AG GB négyszegeikhez középegyarányu az AG GB közti derékszeg, s az AG négyszegével CH egyenlő, a GB-ével KL egyenlő, az AG GB közti derékszeggel megint NL egyenlő; tehát CH-hoz KL-hez is NL középegyarányu; a mint tehát CH NL-hez, úgy van NL KL-hez. És így azon okból (mint elébb) *CM* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *MF*-nél. És egyikök sem mérhető a felvett neves egyenhez *CD*-hez; *CF* tehát hatodik vágacs.

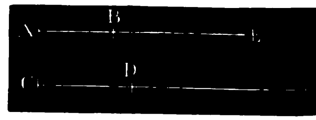
Tehát sat.

104. Feladat:

A vágacshoz hoszban mérhető egyen maga is vágacs, még pedig vele azon rendü.



Legyen *AB* vágacs, s az *AB*-hez hoszban mérhető egyen *CD*: azt mondom, hogy *CD* vágacs, s *AC*-vel azon rendü.



Mert minthogy *AB* vágacs, legyen hozzája illesztve *BE*; *AE EB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. És tétessék a mint *AB* van *CD*-hez, úgy *BE DF*-hez; már a mint egy egyhez, úgy van mindnyája mindnyájához; a mint tehát az egész *AE* az egész *CF*-hez, úgy van *AB CD*-hez. De *AB CD*-vel hoszban összemérhető, tehát *AE* is *CF*-hez, és *BE DF*-hez mérhetők; de *AE EB* egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *CF FD* is tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *CD* vágacs.

Azt mondom, hogy azon rendü is *AB*-vel.

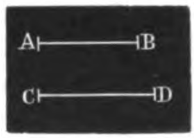
Mert mivel a mint *AE CF*-hez, úgy van *BE FD*-hez; tehát cserélve, a mint *AE EB*-hez, úgy van *CF FD*-hez. Már *AE* vagy hozzája mérhető, vagy hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *EB*-nél. Ha *AE* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *EB*-nél, *CF* is hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *FD*-nél. És ha *AE* a felvett neves egyenhez hoszban mérhető, *CF* is az. Ha *EB* az, *DF* is az. És ha *AE EB* közzül egyik sem, *CF FD* közzül sem az egyik is. Ismét ha *AE* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *EB*-nél, *CF* is hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *FD*-nél. S ha *AE* a felvett neves egyenhez mérhető, *CF* is az. Ha

BE az, *FD* is az. Ha sem *AE*, sem *EB* nem az, úgy *CF*-nek *FD*-nek is egyike sem mérhető a felvett neves egyenhez.

CD tehát vágacs, s *AB*-vel azon rendü: m. b. k.

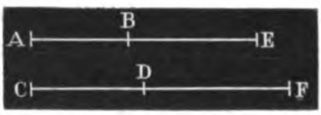
105. Feladat:

A közép egyen vágacsához mérhető egyen maga is közép vágacs, még pedig azon rendü.



Legyen *AB* közép egyen vágacsa, és *AB*-hez hoszban mérhető legyen *CD*: azt mondom, hogy *CD* is közép egyen vágacsa, még pedig *AB*-vel azon rendü.

Mert minthogy *AB* vágacs, legyen hozzá illesztve *BE*; *AE EB* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek. És tétessék a mint *AB CD*-hez úgy *BE DF*-hez; tehát *BE DF*-hez, és *AE CF*-hez mérhetők; de *AE EB* egymáshoz csak emeletben mérhető közép egyenek; *CD* tehát közép egyen vágacsa.



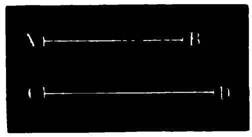
Még azt mondom, hogy *AB*-vel azon rendü is.

Mert mivel a mint *AE EB*-hez, úgy van *CF FD*-hez de a mint *AE EB*-hez, úgy van az *AE* négyszege az *AE EB* közti derékszeghez, s a mint *CF FD*-hez, úgy a *CF* négyszege a *CF FD* közti derékszeghez; tehát a mint az *AE* négyszege az *AE EB* közti derékszeghez, úgy van a *CF* négyszege a *CF FD* közti derékszeghez; tehát cserélve a mint az *AE* négyszege a *CF*-éhez, úgy az *AE EB* közti derékszeg a *CF FD* köztihez. De az *AE* négyszege összemérhető a *CF*-ével; az *AE EB* közti derékszeg is tehát összemérhető a *CF FD* köztivel. Már ha az *AE EB* közti derékszeg neves, a *CF FD* közti is neves leend; ha pedig az *AE EB* közti derékszeg közép lap, a *CF FD* közti is közép lap.

CD tehát közép egyen vágacsa, és *AB*-vel azon rendü: m. b. k.

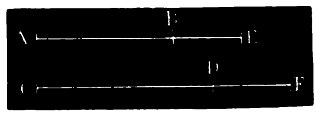
106. Feladat:

A kisebbik nevetlenhez mérhető egyen maga is kisebbik nevetlen.



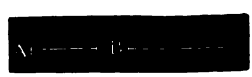
Legyen AB kisebbik nevetlen, s AB-hez mérhető CD: azt mondom, hogy CD is kisebbik nevetlen.

Miveltessenek ugyanazok a mik elöbb. És minthogy AE EB emeletben szertelenek, tehát CF FD is emeletben szertelenek. Már mivel a mint AE EB-hez, úgy van CF FD-hez; tehát a mint az AE négyszege az EB-éhez, úgy a CF-é az FD-éhez: öszszetéve tehát a mint az AE EB négyszegeik az EB-éhez, úgy vannak a CF FD négyszegeik az FD-éhez, és cserélve is. De a BE négyszege összemérhető a DF-ével, tehát az AE EB négyszegeikből álló lap is összemérhető a CF FD négyszegeikből állóval. Már pedig az AE EB négyszegeikből álló lap neves, tehát a CF FD négyszegeikből álló is neves. Ismét, mivel a mint az AE négyszege az AE EB közti derékszeghez, úgy van a CF négyszege a CF FD közti derékszeghez; és cserélve is; de az AE négyszege összemérhető a CF-ével: tehát az AE EB közti derékszeg is összemérhető a CF FD köztivel. Már pedig az AE EB közti közép lap; közép lap tehát a CF FD közti is; CF FD tehát emeletben szertelenek, a négyszegeikből álló lap neves, a közükbe fogott derékszeg pedig közép lap.

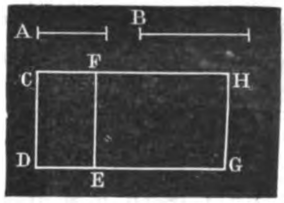


CD tehát kisebbik nevetlen: m. b. k.

Más bizonyítmány.



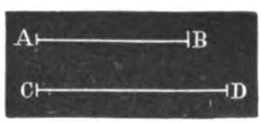
Legyen A kisebbik nevetlen és A-hoz mérhető B: azt mondom, hogy B kisebbik nevetlen.



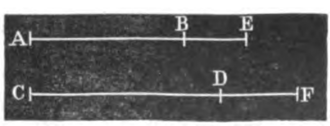
Mert vétessék *CD* neves egyen, és szabassék *CD*-hez az *A* négyszegével egyenlő *CE*, mely *CF* szélességet csináljon, *CF* tehát negyedik vágacs. *FE*-hez pedig szabassék a *B* négyszegével egyenlő *FG* mely *FH* szélességet csináljon. Már minthogy *A* *B*-hez mérhető; tehát az *A* négyszege is mérhető a *B*-éhez. De az *A* négyszegével egyenlő *CE*, a *B*-ével pedig egyenlő *FG*; tehát *CE* *FG*-vel összemérhető. De a mint *CE* *FG*-hez úgy van *CF* *FH*-hoz; *CF* tehát *FH*-val hoszban összemérhető. Már pedig *CF* negyedik vágacs; tehát *FH* is negyedik vágacs; *FG* tehát egy neves egyen és negyedik vágacs közzé van fogva. De ha egy lapot neves egyen és negyedik vágacs fognak bé, az azon lapra emelhető egyen kisebbik nevetlen. Már *FG*-re *B* emelhető; *B* tehát kisebbik nevetlen: m. b. k.

107. Feladat:

A neves egyennel közép egészet alkotóhoz mérhető egyen, maga is nevessel közép egészet alkotó.



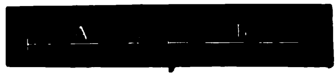
Legyen *AB* egy nevessel közép egészet alkotó egyen, s *AB*-hez mérhető legyen *CD*: azt mondom, hogy *CD* is nevessel közép egészet alkotó egyen.



Mert legyen *AB*-hez illesztve *BE*; *AE* *EB* tehát emeletben szertelenek, az *AE* *EB* négyszegeikből álló lap közép lap, a közükbe fogott derékszeg pedig neves. Készítessenek el ugyanazok, és az előbbiekkel hasonlólag mutatjuk meg, hogy *CF* *FD* abban az arányban vannak, miben *AE* *EB*, és hogy az *AE* *EB* négyszegeikből álló lap összemérhető a *CF* *FD* négyszegeikből állóval, az *AE* *EB* közti derékszeg pedig a *CF* *FD* közti derékszeggel, úgy hogy *CF* *FD* is emeletben szertelenek, a CF FD négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg pedig neves.

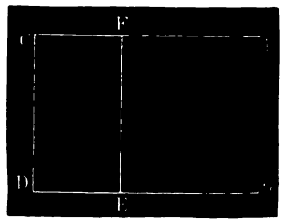
CD tehát nevessel közép egészet alkotó egyen, m. b. k.

Más bizonyitmány.



Legyen a nevessel közép egészet alkotó A egyen, s ehhez mérhető B: azt mondom, hogy B egyen nevessel közép egészet alkotó.

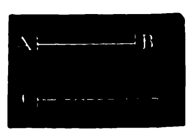
Vétessék CD neves egyen, és szabassék CD-hez az A négyszegével egyenlő CE derékszeg, mely CF szélességet csináljon; CF tehát ötödik vágacs. FE-hez megint szabassék a B négyszegével egyenlő FG, mely FH szélességet csináljon. Már mivel A B-vel összemérhető, az A négyszege is összemérhető a B-ével.



De az A-éval CE egyenlő, a B-ével pedig FG egyenlő; CE tehát FG-hez mérhető; tehát CF is FH-hoz hoszban mérhető. Már pedig CF ötödik vágacs; FH is e szerint ötödik vágacs, és FE neves. Már ha egy lapot neves egyen és ötödik vágacs fognak bé, az azon lapra emelhető egyen nevessel közép egészet alkotó: FH-ra pedig B emelhető; B tehát nevessel közép egészet alkotó egyen, m. b. k.

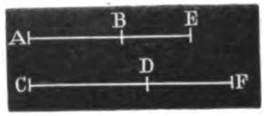
108. Feladat:

A középpel közép egészet alkotó egyenhez mérhető egyen maga is középpel közép egészet alkotó.



Legyen AB középpel közép egészet alkotó egyen, s AB-hez mérhető legyen CD: azt mondom, hogy CD is középpel közép egészet alkotó egyen.

Mert legyen AB-hez illesztve BE, s ugyanazok készíttessenek el; AE EB tehát emeletben szertelenek, a négysze-

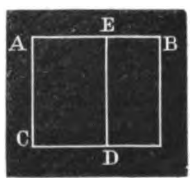


geikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg is közép lap, és a négyszegeikből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen. Már, a mint megmutattaték, *AE EB CF*-hez *FD*-hez mérhetők, az *AE EB* négyszegeikből álló lap mérhető a *CF FD* négyszegeikből állóhoz, s az *AE EB* közti derékszeg mérhető a *CF FD* köztihez; tehát *CF FD* is emeletben szertelenek, a négyszegeikből álló lap közép, a közükbe fogott derékszeg is közép, és a négyszegeikből álló lap a közükbe fogott derékszeghez szertelen.

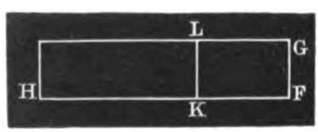
CD tehát középpel közép egészet alkotó egyen: m. b. k.

109. Feladat:

Neves lapból közép lapot véve el, a maradék lapra emelhető egyen a két nevetlennek valamelyike leend: vagy vágacs, vagy kisebbik nevetlen.



BC neves lapból vétessék el *BD* közép lap: azt mondom, hogy a maradék *EC* lapra emelhető egyen a két nevetlennek valamelyike; vagy vágacs, vagy kisebbik nevetlen.



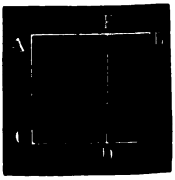
Vétessék *FG* neves egyen, és szabassék *FG*-hez *BC*-vel egyenlő *GH* derékszegletü egyközény, és ebből vétessék el *BD*-vel egyenlő *GK* derékszeg; a maradék *EC* tehát egyenlő *LH*-val. Már minthogy *BC* neves, *BD* pedig közép lap, de *BC GH*-val, *BD GK*-val egyenlők; tehát *GH* neves, és *GK* közép lap, és *FG* neves egyenhez szabvák; tehát *FH* neves és *FG*-hez hoszban mérhető, *FK* pedig neves és *FG*-hez hoszban szertelen; tehát *FH FK*-hoz hoszban szertelen; *FH FK* egyenek tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát *KH* vágacs és *KF* hozzá van illesztve. Már *HF* vagy hozzája mérhető, vagy hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü FK-nál.

Legyen elöbb hozzája mérhető egyenével nagyobb emeletü. De az egész HF a felvett neves egyenhez FG-hez hoszban mérhető; KH tehát elsö vágacs. De neves egyen és elsö vágacs közzé fogott lapra emelhető egyen vágacs. Tehát az LH-ra azaz EC-re emelhető egyen, vágacs.

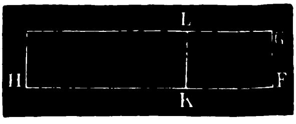
Ha pedig FH hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü FK-nál; de az egész FH a felvett neves egyenhez FG-hez hoszban mérhető; tehát KH negyedik vágacs. Már pedig neves egyen és negyedik vágacs közzé fogott lapra emelhető egyen, kisebbik nevetlen. Tehát az LH-ra azaz EC-re emelhető egyen kisebbik nevetlen: m. b. k.

110. Feladat:

Közép lapból nevest elvéve, más két nevetlen egyen: vagy közép egyen elsö vágacsa, vagy nevessel közép egészet alkotó egyen származik.



Ugyanis BC közép lapból vétessék el BD neves lap: azt mondom, hogy a maradék EC lapra emelhető egyen a két nevetlen egyen egyike: vagy közép egyen vágacsa, vagy nevessel közép egészet alkotó.



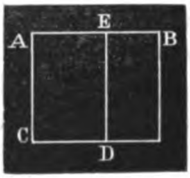
Mert vétessék fel FG neves egyen, s mint fölebb, szabassanak hozzá a lapok; következésképp FH neves és FG-hez hoszban szertelen; FK pedig neves, és FG-hez hoszban mérhető; HF FK tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; tehát KH vágacs, és FK hozzá illesztett egyen. Már HF vagy hozzája mérhető, vagy hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü FK-nál.

Ha HF hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü FK-nál, de a ragaszték FK hoszban mérhető a felvett neves *FG*-hez: úgy *KH* második vágacs. *FG* pedig neves egyen; úgy hogy az *LH*-ra azaz az *EC*-re emelhető egyen közép egyen első vágacsa.

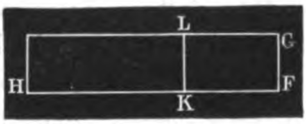
Ha megint *HF* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *FK*-nál, de a ragaszték *FK* hoszban a felvett neves *FG*-hez mérhető: úgy *KH* ötödik vágacs; úgy hogy az *EC* lapra emelhető egyen, nevessel közép lapot alkotó: m. b. k.

111. Feladat:

Közép lapból az egészhez szertelen közép lapot véve el, a hátralevő két nevetlen egyen: vagy a közép egyen második vágacsa, vagy középpel közép egészet alkotó egyen származik.



Mert vétessék el, mint az előbbi rajzokban, *BC* közép lapból az egészhez szertelen *BD* közép lap: azt mondom, hogy az *EC* lapra emelhető egyen két nevetlennek egyike: vagy közép egyen második vágacsa, vagy középpel közép egészet alkotó.



Mert minthogy *BC BD* lapok mindenike közép, következöleg *FH FK* egyenek mindenike *FG*-hez hoszban szertelen. És minthogy *BC BD*-hez, azaz *GH GK*-hoz szertelen, tehát *HF* is szertelen *FK*-hoz: *HF FK* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *HK* tehát vágacs, és *FK* hozzája van ragasztva. Már *HF* vagy hozzája mérhető, vagy hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *FK*-nál.

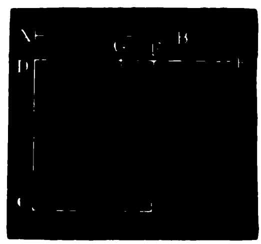
Ha *HF* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *FK*-nál, de sem *HF* sem *FK* nem mérhetök hoszban a felvett neves egyenhez *FG*-hez, úgy *HK* harmadik vágacs. Már pedig *KL* neves, és neves egyen s harmadik vágacs közzé fogott derékszeg nevetlen, s a reá emelhető egyen is nevetlen; mondatik pedig közép egyen második vágacsának; úgy hogy az *LH*-ra azaz *EC*-re emelhető egyen közép egyen második vágacsa.

Ha pedig *HF* hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *FK*-nál, de sem *HF* sem *FK* nem mérhető hoszban a felvett neveshez *FG*-hez; úgy *HK* hatodik vágacs. Már pedig neves egyen és hatodik vágacs közzé fogott lapra emelhető egyen közép lappal közép egészet alkotó; tehát az *LH*-ra, azaz *EC*-re emelhető egyen közép lappal közép egészet alkotó: m. b. k.

112. Feladat:

A vágacs nem azon egy a nevetlen párral.

Legyen *AB* vágacs: azt mondom, hogy *AB* nem azon egy a nevetlen párral.



Mert, ha lehet, legyen, és vétessék fel *DC* neves egyen, és szabassék *DC* neves egyenhez az *AB* négyszegével egyenlő *CE* derékszeg, mely *DE* szélességet csináljon. Már minthogy *AB* vágacs; *DE* első vágacs. Illesztessék hozzája *EF*; *DF FE* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, *DF* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *FE*-nél, és *DF* a felvett egyenhez *DC*-hez hoszban mérhető. Ismét mivel *AB* nevetlen pár; tehát *DE* első nevetlen pár. Választassék a tagjaira *G*-nél, s legyen a nagyobbik tagja *DG*; *DG GE* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek, *DG* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *GE*-nél, s a nagyobbik *DG* a felvett neves egyenhez *DC*-hez hoszban mérhető. *DF* tehát *DG*-hez hoszban mérhető; tehát a maradék *FG* is összemérhető *DF*-fel. Mivel már *DF FG*-hez mérhető, *DF* pedig neves, tehát *FG* is neves. De minthogy *DF FG*-hez hoszban mérhető, és *DF FE*-hez hoszban szertelen, tehát *FG FE*-hez hoszban szertelen. Már pedig nevesek; *GF*

FE tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *GE* tehát vágacs. De neves is; mi lehetetlen.

A vágacs tehát sat.

Tanuság: A vágacs és az ezt követő nevetlen egyenek sem a közép egyennel sem egymással nem azonosok.

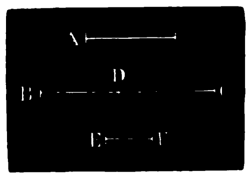
Mert a közép egyen négyszege neves egyenhez szabva neves, és ahoz az egyenhez, melyhez szabva van, hoszban szertelen szélességet csinál; a vágacs négyszege neves egyenhez szabva, első vágacs-szélességet csinál; a közép egyen első középvágacsáé neves egyenhez szabva, második vágacs-szélességet csinál; a közép egyen második vágacsáé neves egyenhez szabva, harmadik vágacs-szélességet csinál; a kisebbik nevetlené neves egyenhez szabva, negyedik vágacs-szélességet csinál; a nevessel közép egészet alkotóé neves egyenhez szabva, ötödik vágacs szélességet csinál; s a középpel közép egészet alkotóé neves egyenhez szabva, hatodik vágacs-szélességet csinál. Minthogy hát a mondott szélességek különböznek mind az elsőtől, mind egymástól; az elsőtől abban, hogy az neves; egymástól abban, hogy más-más rendüek: világos, hogy magok a nevetlenek is különböznek egymástól. És mivel meg van mutatva, hogy a vágacs nem egy a nevetlen párral, s a vágacs és az ezt követők négyszegei, neves egyenhez szabva, mindenik a maga rendi szerint, vágacsokat, — a nevetlen párt követők pedig, mindenik a maga rendi szerint, nevetlen párokat csinálnak: tehát mások a vágacsot követők, mások megint a nevetlen párt követők, úgy hogy mind a 13 nevetlen egyen rendiben imez:

1. Közép egyen.
2. Nevetlen pár.
3. Első középpár.
4. Második középpár.
5. Nagyobbik nevetlen.
6. Neves és közép lapra emelhető.
7. Két közép lapra emelhető.
8. Vágacs.
9. Közép egyen első vágacsa.

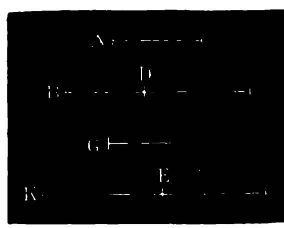
10. Közép egyen második vágacsa.
11. Kisebbik nevetlen.
12. Nevessel közép egészet alkotó.
13. Középpel közép egészet alkotó.

113. Feladat:

A neves egyen négyszege nevetlen párhoz szabva oly vágacsszélességet csinál, melynek tagjai a nevetlen pár tagjaival összemérhetök és velök egyarányuak; és még a származott vágacs a nevetlen párral azon rendü.



Legyen A neves egyen, és BC nevetlen pár, melynek nagyobbik tagja CD, és az A négyszegével legyen egyenlö a BC EF közti derékszeg: azt mondom, hogy EF oly vágacs, melynek tagjai CD DB tagokhoz mérhetők és velök egyarányuak, és EF BC-vel azon rendü.



Mert ismét legyen az A négyszegével a BD G közti derékszeg egyenlö. Már minthogy a BC EF közti derékszeg egyenlö a BD G köztivel: tehát a mint CB BD-hez, úgy van G EF-hez. De CB nagyobb BD-nél, tehát G is nagyobb EF-nél. Legyen G-vel egyenlö EH; tehát a mint CB BD-hez, úgy van HE EF-hez. Felbontva tehát a mint CD BD-hez, úgy van HF FE-hez. Tétessék a mint HF FE-hez, úgy FK KE-hez; az egész HK is tehát úgy van az egész FK-hoz, mint FK KE-hez; mert a mint az elötagok egyike az utótagok egyikéhez, úgy van minden elötag öszvege minden utótag öszvegéhez. De a mint FK KE-hez, úgy van CD DB-hez; tehát a mint HK KF-hez, úgy CD DB-hez. Már pedig a CD négyszege összemérhetö a DB-ével, tehát a HK négyszege is összemérhető a KF-ével. De a mint a HK négyszege a KF-éhez, úgy van HK KE-hez, mivel HK KF KE

három egyen egyarányban vannak; *HK* tehát *KE*-hez hoszban mérhető, úgy hogy *HE* is *EK*-hoz hoszban mérhető. És minthogy az *A* négyszege egyenlő a *HE BD* közti derékszeggel, de az *A* négyszege neves: tehát a *HE BD* közti derékszeg is neves. És *BD* neves egyenhez van szabva. *EH* tehát neves, és *BD*-hez hoszban mérhető, úgy hogy a hozzája mérhető *EK* is neves és *BD*-hez hoszban mérhető. Már mivel a mint *CD DB*-hez, úgy *FK KE*-hez, *CD DB* pedig egymáshoz csak emeletben mérhetők: tehát *FK KE* is egymáshoz csak emeletben mérhetők. De *KE* neves és *BD*-hez hoszban mérhető, neves tehát *FK* is és *CD*-hez hoszban mérhető; *FK KE* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek: *EF* tehát vágacs.

Már *CD* hozzája vagy mérhető vagy szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *DB*-nél.

Ha *CD* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *DB*-nél, *FK* is hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *KE*-nél. És ha *CD* a felvett neves egyenhez hoszban mérhető, *FK* is az; ha *BD* az, *KE* is az; ha pedig sem *CD* sem *DB* nem mérhetők, úgy *FK*-nak *KE*-nek sem az egyike is.

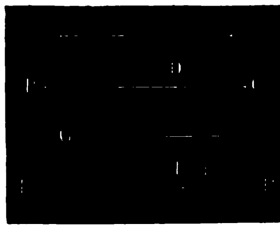
Ha pedig *CD* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *DB*-nél, *FK* is hozzája szertelen egyen négyszegével lesz nagyobb emeletü *KE*nél. És ha *CD* a felvett neves egyenhez hoszban mérhető, *FK* is az; ha *BD* az, *KE* is; ha pedig sem *CD* sem *BD* nem mérhető, *FK*-nak *KE*-nek sem az egyike is; úgy hogy *FE* olyan vágacs, melynek tagjai *FK KE* a nevetlen pár tagjaihoz *CD*-hez *DB*-hez mérhetők és velök egyarányuak, és *FE* azon rendü is *BC*-vel: m. b. k.

114. Feladat:

Neves egyen négyszege vágacshoz szabva oly nevetlen pár-szélességet csinál, melynek tagjai a vágacs tagjaihoz mérhetők és velök egyarányuak: és a származott nevetlen pár a vágacscsal azon rendü.

Legyen *A* neves egyen, és *BD* vágacs; és legyen az *A* négyszegével egyenlő a *BD KH* közti derékszeg; mi szerint

a neves *A* négyszege, *BD* vágacshoz szabva, *KH* szélességet csináljon: azt mondom, hogy *KH* oly nevetlen pár, melynek tagjai a vágacs tagjaihoz mérhetők és velök egyarányuak, és *KH BD*-vel azon rendü.



Mert legyen *BD*-hez illesztve *DC*; *BC CD* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. És legyen az *A* négyszege egyenlő a *BC G* közti dérékszeggel. De az *A* négyszege neves: tehát a *BC G* közti dérékszeg is neves. És *BC* neves egyenhez van szabva; *G* tehát neves, és *BC*-hez hoszban mérhető. Már minthogy a *BC G* közti derékszeg egyenlő a *BD KH* köztivel; tehát egyarányban a mint *CB BD*-hez, úgy van *KH G*-hez; de *CB* nagyobb *BD*-nél; *KH* is tehát nagyobb *G*-nél. Tétessék *KE G*-vel egyenlövé; tehát *KE BC*-hez hoszban mérhető. És mivel a mint *CB BD*-hez, úgy van *HK KE*-hez: tehát átfordítva a mint *BC CD*-hez, úgy *KH HE*-hez. Tétessék a mint *KH HE*-hez, úgy *HF FE*-hez; tehát a maradék *KF* is úgy van *FH*-hoz, mint *KH HE*-hez, azaz: mint *BC CD*-hez. De *BC CD* egymáshoz csak emeletben mérhetők; ennélfogva *KF FH* is csak emeletben mérhetők egymáshoz. És mivel a mint *KH HE*-hez, úgy van *KF FH*-hoz, de a mint *KH HE*-hez, úgy *HF FE*-hez; és tehát a mint *KF FH*-hoz, úgy van *HF FE*-hez; úgy hogy a mint az első a harmadikhoz, úgy van az első négyszege a másodikéhoz; a mint tehát *KF FE*-hez, úgy van a *KF* négyszege az *FH*-éhoz. Már pedig a *KF* négyszege az *FH*-éhoz mérhető, mert *KF FH* emeletben mérhetők egymáshoz; *KF FE*-hez tehát hoszban mérhető, úgy hogy *FK KE*-hez is mérhető hoszban. De *KE* neves, és *BC*-hez hoszban mérhető; *KF* is tehát neves, és *BC*-hez hoszban mérhető. És minthogy a mint *BC CD*-hez, úgy van *KF FH*-hoz; tehát cserélve a mint *BC KF*-hez, úgy van *DC FH*-hoz. Már pedig *BC KF*-hez mérhető; *CD* is tehát *FH*-hoz hoszban mérhető. De *BC CD* egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek; *KF FH* is tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. *KH* tehát nevetlen pár.

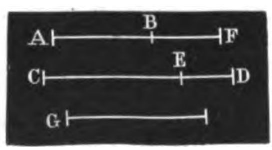
Ha már *BC* hozzája mérhető egyen négyszegével nagyobb emeletü *CD*-nél, *KF* is hozzája mérhető egyenével nagyobb emeletü *FH*-nál. És ha *BC* a felvett neveshez hoszban mérhető, *KF* is mérhető. Ha *CD* mérhető hoszban a felvett neves egyenhez, *FH* is az. Ha pedig sem *BC* sem *CD* nem azok, *KF*-nek *FH*-nak sem mérhető egyike is.

Ha megint *BC* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *CD*-nél, *KF* is hozzája szertelen egyenével nagyobb emeletü *FH*-nál. S ha *BC* a felvett neves egyenhez hoszban mérhető, *KF* is az. Ha *CD* az, *FH* is az. Ha pedig sem *BC* sem *CD* nem azok, *KF*-nek *FH*-nak sem az egyike is.

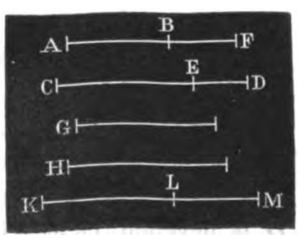
KH tehát nevetlen pár, melynek tagjai *KF FH* a vágacs tagjaihoz *BC*-hez *CD*-hez mérhetők és velök egyarányuak; és *KH* azon rendü, mint *BC*: m. b. k.

115. Feladat:

Ha egy lap, vágacs és oly nevetlen pár közzé van fogva, melynek tagjai a vágacs tagjaihoz mérhetők, és velök egyarányuak: az azon lapra emelhető egyen neves.



Mert fogják be az *AB CD* közti lapot *AB* vágacs, és *CD* oly nevetlen pár, melynek nagyobbik tagja *CE*, és a nevetlen pár *CE ED* tagjai a vágacs tagjaihoz *AF*-hez *FB*-hez legyenek mérhetők és velök egyarányuak; és legyen az *AB CD* közti lapra emelhető egyen *G*: azt mondom hogy *G* neves egyen.



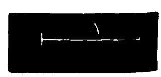
Mert vétessék *H* neves egyen, és szabassék *CD*-hez a *H* négyszegével egyenlő derékszeg mely *KL* szélességet csináljon; *KL* tehát vágacs, melynek tagjai *KM ML* a nevetlen pár tagjaihoz *CE*-hez *ED*-hez mérhetők és velök egyarányuak. De *CE ED AF*-hez *FB*-hez mérhetők és velök egyarányuak; tehát a mint *AF FB*-hez, úgy van *KM ML*-hez; cserélve tehát a mint *AF KM*-hez, úgy *FB LM*-hez; tehát a maradék *AB* is úgy van a maradék *KL*-hez, mint *AF KM*-hez. De *AF KM*-hez mérhető; *AB* is tehát mérhető *KL*-hez. És a mint *AB KL*-hez, úgy van a *CD AB* közti derékszeg a *CD KL* köztihez; tehát a *CD AB* közti derékszeg a *CD KL* köztihez mérhető. Már pedig a *CD KL* közti derékszeg egyenlő a *H* négyszegével; tehát a *CD AB* közti derékszeg mérhető a *H* négyszegéhez. De a *CD AB* közti derék szeg egyenlő a *G* négyszegével; mérhető tehát a *G* négyszege is a *H*-éhoz. A *H*-é pedig neves; tehát a *G*-é is neves; ennélfogva *G* egyen is neves, és a *CD AB* közti lapra emelhető.

Ha tehát sat.

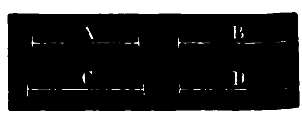
Tanuság: És ebből világos lőn előttünk, hogy nevetlen egyenek foghatnak-bé neves lapot.

116. Feladat:

A középegyentől számtalan nevetlen egyenek származnak, melyek az előbbiek egyikével sem azonosok.

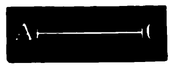


Legyen *A* középegyen; azt mondom, hogy *A*-tól számtalan nevetlen egyenek származnak, melyek az előbbiek egyikével sem azonosok.

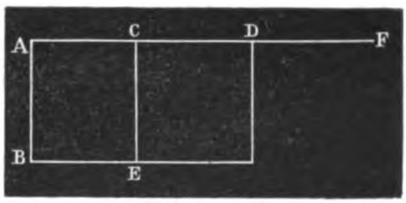


Vétessék fel *B* neves egyen, és legyen az *A B* közti derék szeggel egyenlő a *C* négyszege; *C* tehát nevetlen; mert nevetlen s neves egyen közzé fogott lap nevetlen. És az előbbi egyeneknek egyikével sem azonos; mert az előbbiek közzül egyiknek négyszege sem ád, neves egyenhez szabva, középegyen szélességet. Ismét legyen a *B C* közti derékszeggel egyenlő a *D* négyszege; a *D* négyszege tehát nevetlen; ennélfogva *D* is nevetlen; és az előbbenieknek egyikével sem azon egy, mert az előbbiek közzül egyiknek is négyszege, neves egyenhez szabva, nem csinál C szélességet. Hasonlólag ily renddel végetlenül folytatva, világos: hogy a közép egyentől számtalan nevetlen egyenek származnak, melyek az előbbiek egyikével sem azonosok: m. b. k.

Más bizonyítmány.



Legyen AC közép egyen: azt mondom, hogy AC-től számtalan nevetlenek származnak, és egyik is egyikkel is az előbbiek közzül nem azon egy.



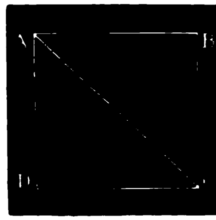
Mert vonassék AC-hez derékszegletre AB, és AB legyen neves, és egészítessék ki BC egyközény; e szerint BC nevetlen, s a reá emelhető egyen is nevetlen. Legyen CD a reá emelhető; CD tehát nevetlen, s az előbbiek egyikével sem azon egy; mert neveshez szabva, az előbbiek közzül egyiknek négyszege sem csinál közép egyen szélességet. Ismét egészítessék ki ED; tehát ED nevetlen, s a reá emelhető egyen is nevetlen. Legyen ez DF; tehát DF nevetlen, s az előbbiek egyikével sem azon egy; mert az előbbiek közzül egyiknek négyszege sem csinál CD szélességet.

A közép egyentől tehát sat.

Jeegyz. A kiadásokban még a következő feladat szokott ragasztatni a 10-ik könyvhez, s mi sem mellőzzük el, ámbár szembetűnőleg idegen potlék, mit már a feladat — Euklidesnél egészen szokatlan — stylusa is valószinűvé teszen; de fontosabb belső bizonyság az, hogy a négyszeg átmérője szertelensége az oldalához, mint a melyeknek négyszegei nincsenek úgy egymáshoz, mint négyszegszám négyszegszámhoz, már korábban (X-ik k. 9-dik felad.) bé van bizonyítva.

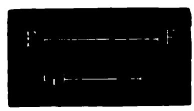
(117.) Feladat:

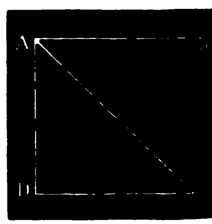
Legyen feladva, megmutatnunk: hogy a négyszeg képletekben az átmérő az oldalhoz hoszban szertelen.

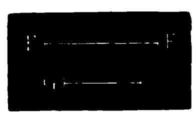


Legyen $ABCD$ négyszeg, s ennek átmérője AC: azt mondom, hogy AC AB-hez hoszban szertelen.

Mert ha lehet, legyen hozzá mérhető: azt mondom, hogy annál fogva azon egy számnak egyszerre párosnak és páratlannak kell lenni; ugyanis világos, hogy az AC négyszege két akkora mint az AB-é. És mivel AC AB-hez mérhető; tehát AC AB-hez azon arányban van, miben szám számhoz. Legyen a miben EF van G-hez, és EF G legyenek az azon aránybeliek közt legkisebbek; EF tehát nem egység. Mert ha EF egység és G-hez azon arányban van, miben AC AB-hez, és AC nagyobb mint AB; tehát EF egység is nagyobb mint G szám; mi képtelen; EF tehát nem egység; ennélfogva szám. És minthogy a mint CA AB-hez, úgy van EF G-hez; tehát a mint a CA négyszege az AB-éhez, úgy van az EF-é a G-éhez*). De a CA-é két akkora mint az AB-é; tehát az EF-é is két akkora mint a G-é; az EF négyszege tehát páros szám; miszerint EF maga is páros. Mert ha páratlan volna, négyszege is páratlan volna, mivel a páratlan számok akárhogy összetétessenek és mennyiségök páratlan, az öszveg páratlan leend; EF tehát páros. Vágassék ketté H-nál. És minthogy EF G számok a velök egyarányuak közt legkisebbek, egymáshoz egyszerüek. De EF páros, tehát G páratlan. Mert ha G páros volna, EF-et G-t mérné a kettő, holott egymáshoz egyszerüek; mi lehetetlen; G tehát nem páros; tehát páratlan. És minthogy EF két akkora mint EH, az EF négyszege négy-





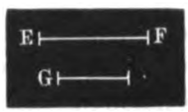


akkora mint az EH-é, de az EF-é két akkora mint a G-é; a G-é kétakkora mint az EH-é; a G négyszege tehát páros; tehát a mondottak szerint G is páros. De páratlan is; mi lehetetlen; AD tehát AB-hez hoszban nem mérhető; tehát szertelen: m. b. k.

Máskép. Mutassuk meg másképp is, hogy a négyszeg átmérője az oldalához szertelen.

Mert képezze az átmérőt A egyen, az oldalt pedig B: azt mondom, hogy A B-hez hoszban szertelen.

Mert ha lehet, legyen hozzá mérhető, és ismét a mint A B-hez, úgy legyen EF szám G-hez, és EF G legyenek a velök egyarányuak közt legkisebbek; EF G tehát egymáshoz egyszerüek. Elsőben azt mondom, hogy G nem egység. Mert ha lehet, legyen egység. És mivel a mint A B-hez, úgy van EF G-hez: tehát a mint az A négyszege a B-éhez, úgy van az EF-é is a G-éhez*). De az A négyszege két akkora mint a B-é, tehát az EF-é is két akkora mint a G-é. Már pedig G egység; az EF négyszege tehát a kettő; mi lehetetlen; G tehát nem egység; ennélfogva szám. És mivel a mint az A négyszege a B-éhez, úgy van az EF-é a G-éhez: visszáson is a mint a B-é az A-éhoz, úgy van a G-é az EF-éhez. De a B négyszege felméri az A-ét; tehát a G-é is felméri az EF-ét; miszerint az oldala G is felméri EF-et. De G magát is felméri; G tehát mind EF-et mind G-t felméri, holott egymáshoz egyszerüek; mi lehetetlen; A tehát B-hez nem mérhető; tehát szertelen: m. b. k.



Jegyz. Még egy Scholiont látunk a 10-ik könyv berekesztéseül a kiadásokban, mely a lapok és telyek szertelenségét emlegeti. De mivel ezután megmutatandó igazságokra hivatkozik, s haszna is majd semmi, nagyon is nélkülözhetőnek tartjuk.

---

*) Mind két megjegyzett helyen figyelmeztetjük az olvasót az ür- és szám-négyszegek módszertelen egybezavarására, mi az egész bizonyítmányt erőtlenné teszi.

ALGEBRAI VILÁGOSÍTÁSOK

Euklides X. könyvéhez.

„Euklides müvei", azt irja *Meier Hirsch*, „nem csak dús tartalmuknál, hanem egyszersmind és főképp alaposságuknál fogva az első rangot foglalják már 2000 év óta mindazon müvek közt, melyeket a kezdők számára valaha irtak. Az újabbak az eléadást csinosabbá és kevésbé alapos elmék felfogására alkalmasbá tették"; de, ragaszszuk hozzá, éppen az alaposság rovására.. Kästner állítá, hogy „minden geometria, mint tankönyv, annyival rosszabb, a mennyivel távozik módszere az Euklidesétől." Mind ezek daczára eltávoztak biz attól, s az eltérések különböző nemei közt még legkevesebbet árt az, a mely az algebrai symbolumoknak a geometriai eléadásokra alkalmazásában áll. Igaz hogy a symbolumokkal foglalkodás a tárgyba való mélyebb bélátást, hogy úgy mondjam, fátyolozza; de a viszonyoknak legalább külszines felfogását igen is, olykor nagyon, könnyíti, és így a tudományt nagyobb mértékben képes terjeszteni, mint a beljebb mélyedő módszer. Több és gyengébb tehetségek vehetnek részt benne, s annál fogva többen is haszálhatják, s fordíthatják, a mint mondani szokás, az életre.

Minthogy hát a bévett módszerek következtében a mai mathematicusoknak, — kezdőknek és mestereknek, — inkább algebrai mint geometriai (a szó hajdanias értelmében) képződésök van: czélszerünek véltem a X-dik könyvet az eredetinek hü fordítása után, legalább részben, a mai algebrai nyelven is ismertetni. Mert ez a könyv, ha egyfelől,

— az idézett Meier Hirsch szerint — „a legelmésebb és teli a legmélyebbre ható vizsgálódásokkal“, úgy másfelől, az antik geometriai modorhoz szokatlanoknak mindenik közt a legbajosabb felfogású is. Szolgáljon hát könnyítésére a divatos és ismeretesebb, algebrai nyelv.

A. *Az értelmezések.*

1. Két mekkoraság — vonal vagy lap — *összemérhető*, ha az egyiknek ($=A$) van oly, egész számmal kifejezhető, része $\left(\frac{A}{n}\right)$, mely valamennyiszer (m-szer) téve a másikkal (B), hoszban vagy terjedelemben egyenlő. Tehát összemérhető két mekkoraság algebrai kifejezése:

$$m\frac{A}{n}=B\text{; vagy is: } mA=nB\text{;}$$

$$\text{akár: } A=\frac{nB}{m}\text{; akár végre: } \frac{A}{n}=\frac{B}{m}$$

$\frac{A}{n}=\frac{B}{m}$ a két mekkoraság *közös mértéke;* mert

$$n\text{-szer } \frac{A}{n}=A \text{ és } m\text{-szer } \frac{B}{m}=B$$

Jegyz. A közös mértéket a következőkben a kis ábécze első betüivel: a, b, c sat. fejezzük ki; holott m, n, s következő betük egész (és rendszerint nem négyszeg-) számokat jelentenek. E szerint:

$$\text{feltéve hogy } \frac{A}{n}=\frac{B}{m}=a\text{;}$$
$$A=an\text{; } B=am.$$

2. Ha adott két mekkoraságnak *nincs* közös mértéke, úgy egymáshoz *szertelenek* (incommensurabiles). Lehető t. i. az az eset, hogy A-nak nincs oly n-ed része, (n alatt minden lehető egész számot értve a végetlenig), a mely akárhányszor téve, azaz összeadva, $=B$ legyen; hanem ha p. o. m-szer teszszük: $\frac{mA}{n}<B$; ha pedig $(m+1)$szer: $\left(\frac{m+1}{n}\right)A>B$.

Úgy de az értelmező értelmezése iránt felelős: azaz, mihelyt felszólítják, tartozik az értelmezésben feltett eset lehetőségét kimutatni. Kérdhetné valaki, lehet-e p. o. két oly vonal, melynek közös mértéke ne legyen?

Igen is lehet! Mert az 1. értelmezés alatti formulákból következik, hogy

$$A : B = n : m$$

azaz, hogy egy vonal úgy legyen a másikhoz, mint *egész szám egész számhoz*, (a mai mód szerint mondva, Euklides szerint pedig csak „mint szám számhoz", mert ő csak az egész számokat nevezi számoknak.) Sőt értelmezésnek is jó volna azt mondani, hogy: két vonal *összemérhető*, ha úgy van egyik a másikhoz, mint szám számhoz. Ha hát két vonal nincs úgy egymáshoz mint szám számhoz, úgy az a két vonal egymáshoz mérhetetlen, vagy a mi műszavunkkal: szertelen. Igen de ilyes vonalpár számtalan van. Pl. egy két hüvelyknyi és egy három hüvelyknyi hosszu vonal összemérhetők, és közös mértékök egy hüvelyk. No már a geometria megtanít (Elem. VI. k. 12. f.) két —A és B— vonalhoz egy közép egyarányut —C-t— lelni. Ha A a 2 hüvelykes és B a 3 h. vonal, C hossza kétségkivül közbe eső lesz: t. i. hosszabb 2, és rövidebb 3 hüvelyknyinél, és az azt kifejező szám szintúgy közép egyarányu a 2 és 3 közt, mint C a maga nemében A és B közt. Már 2 és 3 közt a közép egyarányu:

$$\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}. \text{ Tehát}$$

$$A : C = 2 : \sqrt{6} \text{ és}$$

$$B : C = 3 : \sqrt{6}$$

Úgy de $\sqrt{6}$, mint a melyet az egység nem mér, Euklidesnek nem *szám*; tehát 2 nincs úgy a $\sqrt{6}$-hoz, következőleg A nincs úgy C-hez mint szám számhoz; tehát összemérhetetlenek — vagy „egymáshoz szertelenek." Ma ugyan számnak nevezzük a $\sqrt{6}$-ot s hasonlókat; de „irrationalis„ (aránytalan) számnak, azaz a melynek az arányát az *egy*-hez semmi — (mai értelemben vett) — szám ki nem fejezi, bár ha vég nélkül közeledtünk is kifejezéséhez. $\sqrt{6}$ ugyanis egy végetlen hosszu farku tizedes tört, melynek kezdete 2·44949.... az egyhez azon arányban van, miben 100000: 244949. Ámde az utólsó szám igen kicsiny; holott egygyel megtoldva ú. m. 244950 már igen nagy lenne; s ez az eset áll bé minden további tizedessel melyet hozzá ragaszthatnánk, valamint az előbbiekkel is. Ha hát azt állítnók. hogy:

$A : C = 20 : 24$; a 24 igen kevés,
ellenben $A : C = 20 : 25$; a 25 igen sok volna.
Éppen így: $A : C = 200 : > 244$
és $A : C = 200 : < 245.$
Továbbá: $A : C = 2000 : > 2449 = 2000 : < 2450$
Mégis : $A : C = 20000 : > 24494 = 2000 : < 24495$ sat.

Így mehetni tovább a végetlenig, mi által hát a kivánt lehetőség ki van mutatva. Ki az is, hogy oly *közös mérték*, mely mind A-t, mind C-t *fel*mérje, azaz, a mértéknél kisebb maradék nélkül mérje, nem létez. Ez a tényállás a szertelenség algebrai jelelésében egy kis bajt okoz. Az összemérhetők jelelésében (am és an) ugyanis az egyik tényező a közös mérték levén, hogyan fejezzük ki azt a mi *nincs?*

Segíthetni ezen is. A-nak és C-nek a megmondott szoros értelmü közös mértéke ugyan nincs: de van ám az A-nak oly mértéke, melynek bizonyos és hovátovább közelíthető kisebb részei C-t *fel* nem, de mérik ám, hovátovább és véghetetlenül kisebbedő — mint nevezni szoktuk: *elenyésző* — maradékkal, s ezt a mérést kifejezi a $2 \cdot 44949 \ldots$ vagy rövidebben: $\sqrt{6}$. Így *tágított* értelmü közös mértéknek hát felvehetni a például vett esetben a hüvelyket $= a$, mely szerint:

$$A = 2 \times a; \; C = 2 \cdot 44949 \ldots \times a = \sqrt{6} \times a; \; B = 3 \times a.$$

Vagy betükkel, ha $2 = m$, $3 = n$, és $6 = p$

$$A = am; \; C = a\sqrt{p}; \; B = an.$$

És így, feltéve, hogy p nem négyszegszám, $a\sqrt{p}$ mindig am-mel, an-nel, ap-vel öszemérhetetlen, vagy hozzájok szertelen vonalat jelent. De $a\sqrt{m}$, $a\sqrt{n}$ és $a\sqrt{p}$ is egymáshoz szertelen vonalok, ha m, n, p egymástól különböző és nem négyszegszámok.

3. Azokat a vonalakat, melyeknek négyszegei egymáshoz mérhetők, *emeletben összemérhetőknek* nevezi Euklides.

$a\sqrt{m}$ vonal négyszege az algebrai bévett jelelés szerint: a^2m; an-é : a^2n^2. a^2m és a^2n^2 összemérhetők; mert a^2 négyszeg a közös mértékök, m és n^2 pedig egész számok, Emeletben összemérhetők $a\sqrt{m}$ és $a\sqrt{p}$ is, ámbár hoszban nem; mert a négyszegeik a^2m és a^2p levén, $a^2m : a^2p = m : p$.

4. Emeletben szertelenek p. o. $a\sqrt[4]{5}$ és $a\sqrt[4]{8}$; mert a négyszegeik: $a^2\sqrt{5}$ és $a^2\sqrt{8}$, melyek úgy vannak egymáshoz, mint $\sqrt{5} : \sqrt{8}$; vagy $\sqrt{5} : 2\sqrt{2}$; azaz, nincsenek úgy, mint egész szám egész számhoz. Általában $a\sqrt[4]{m}$, ha m nem 4-ed rangu szám, emeletben összemérhetetlen akár an-mel, akár $a\sqrt{p}$-vel, akár végre $a\sqrt{q}$-val.

5. Imez értelmezés bévezetése algebrai nyelven azt teszi, hogy

$$\text{I. } am, \text{ II. } an, \text{ III. } a\sqrt{p}, \text{ IV. } a\sqrt[4]{q}$$

formulákban az m, n, p, q minden kitelhető egész számokat jelenthetnek*). Párjával véve I. és II. hoszban (és emeletben is) összemérhető, I. és III. egymáshoz csak emeletben mérhető hoszban pedig szertelen, I. és IV. mindenkép szertelen egyeneket jelelnek. Már mivel $A=am$ azt teszi, hogy egy felvett egyen m számu egyenlö a részekből áll: ez által az az egyen mintegy meg van nevezve, s azért nevezi Euklides *neves* egyennek.

6. Ha $A=am$, $B=an$: ez azt teszi, hogy B hossza az A m-ed része n-szer téve, vagyis $B=\frac{n}{m}A$. B hát A-ról van elnevezve, s így B is neves. — Ha $A=am$, $B=a\sqrt{p}$: úgy $A^2=a^2m^2$, $B^2=a^2p$, és azt teszi, hogy B négyszege területe, az A négyszegének m^2-d része p-szer téve; mit megint meg lehet egész számokban mondani, és így B megint el van A-ról nevezve és nem különben *neves*.

7. Ha $A=am$, $D=a\sqrt[4]{q}$; úgy $A^2=a^2m^2$, $D^2=a^2\sqrt{q}$. Minthogy $\sqrt{q}$-t számban kimondani nem lehet: azt sem mondhatni, hogy az A négyszegének m^2-ed része *hányszor* téve

---

*) Meg kell jegyeznünk még, hogy négyszeg vagy azonfeljül való rangu számokat csak akkor, midőn világosan megmondjuk vagy fel kell tennünk róluk.

egyenlő a D négyszegével; tehát D-t A-ról elnevezni nem lehet; miszerint D *nevetlen.*

8. Ha $A=am$, úgy $A^2=a^2m^2$; tehát A^2-t számokban meg nevezhetni, és így a felvett egyen négyzete *neves.*

9. Ha $A^2=a^2m$, $B^2=a^2n$: a két négyszeg összemérhető, s a B négyszegét az A-éról el lehetvén nevezni, B *neves.*

10. Ha $A^2=a^2m$, $C^2=a^2\sqrt{n}$: a C négyszegét az A négyszege részeivel nem mérhetni; tehát el se nevezhetni; ennélfogva C^2 *nevetlen.*

11. Ha már C^2-t nem lehet elnevezni: C-t magát sem lehet; mert $C=a\sqrt[4]{n}$; tehát C is *nevetlen.*

1. *Jegyz.* A ma szokott „irrationalis" névvel Euklides ἄλογος-át akarták kifejezni az ő latin fordítói. Pedig eszébe sem ötlött geometránknak, hogy ime műszavát a λόγος=ratio-tól származtassa; hanem oratio-t, szóbeli — ez úttal számbeli — kifejezést jelent az emlegetett szóban a λόγος. Az ἄλογος ellenkezője autorunknál nem is pl. λογικός. hanem a félreérthetetlen ῥητὸς, mely bizony nem tesz „rationalis"-t, bár ha oda modernizálták is a mai lexicographusok. De biz azt helytelenül és járatlanul; mert a *rationalis* és *irrationalis* közt más a határvonal mint a ῥητὸς és ἄλογος közt; és így az illető fogalmak nem fedik egymást. Kiviláglik az mind a feljebbi értelmezésekből, mind most egy példából. $\sqrt{5}$ a mostaniaknak „irrationalis" mennyiség, holott Euklides ῥητός-nak mondaná. Ezekből az okokból vettem fel én a görög műszóknak tökéletesen megfelelő *neves* és *nevetlen* kifejezéseket, és ha ime világosításomban a rationalis (arányos) és irrationalis (aránytalan) szókat is használom, ezeket szorosan a mostani értelmökben veszem: miszerint a *nevetlen* mindig *irrationalis* is, de az *irrationalis* nem mindig *nevetlen* (p. o. $\sqrt{m}$, $\sqrt{p}$ sat). Ellenben a *rationalis* mindig *neves* is, de a *neves* nem mindig *rationalis.* Meg kell azonban jegyezni, hogy a különbség csak a vonalakra nézve áll; mert p. o $ab\sqrt{m}$ vagy $a^2\sqrt{n}$ „aránytalan" is, „nevetlen" is, abból az egyszerü okból, hogy *lap*nak nincs négyszege.

2. *Jegyz.* Az analytico-geometriai jelelések ismeretét átalában felteszszük az olvasónál, különben nem volna jogunk „felvilágosítás" czímet adni következő észrevételeinknek. Egyetlen egy különbség a bévett jelelések és a miénkek közt az, hogy amazokban minden betü vonalat jelel, s a jelben a vonal és szám elemeket nem szokták megkülönböztetni; holott a következőkben a két elemet a betük nemei szorosan megkülönbözteti, a mint az 5: értelm. alkalmával

megjegyeztük. Ez az eljárás szükséges volt a végett, hogy a rationalis vagy irationalis vonalat (p. o. am és $a\sqrt{n}$) egyszerre meg lehessen ismerni, a mi Euklidesnél fő czél, holott az analytica geometriában, átalán véve, nem az. Nálunk hát a, am, $a\sqrt{n}$, ap^2, $a\sqrt{mn}$, $a\sqrt{p^2-q^2}$, $a\sqrt{r^2+s^2}$, $n\sqrt{ab}$, $\sqrt{m}\sqrt{ab}$, $\sqrt{mn}\sqrt{ab}$ $m\sqrt{a^2+b^2}$ sat. mind egyeneket, ab, mab, $ab\sqrt{n}$ a^2, ma^2, $a^2\sqrt{n}$, $a^2(m^2+n^2)$ sat. lapokat jelelnek.

Euklidesnek hát e gyakori kifejezéseit, p. o. 1. „*A* egyen négyszege;“ 2. *A* és *B* egyenek közötti derékszeg; 3. *A* lapot *B* egyenhez szabni, mely *C* szélességet csinál; 4. *A* lapot *B* egyenhez szabni négyszegkép hijával; 5. *A* egyen *B* egyent *C* négyszegével haladja meg, vagy *A* egyen a *C* egyen négyszegével nagyobb emeletü *B*-nél, imez algebrai képek jelelik:

1. $(ma)^2 = m^2a^2$; $(a\sqrt{n})^2 = a^2n$ sat.
2. $ma \times nb = mnab$; $ma \times b\sqrt{n} = m\sqrt{n}b = bm\sqrt{n}$ sat.
3. $\dfrac{mab}{nc} = pd$
4. $\dfrac{a^2m}{nb-pc} = pc$, vagy $ma^2 = (nb-pc)pc$
5. $m^2a^2 - n^2b^2 = p^2c^2$.

1. *Feladat*. Midőn egy vonalból (a) felét, a maradéknak ismét felét, s így tovább veszszük el: a maradékokat ily sor képezi:

$$\frac{a}{2},\ \frac{a}{2^2},\ \frac{a}{2^3},\ \frac{a}{2^4},\ \cdots\cdots\ \frac{a}{2^n}$$

A másik kisebb (b) vonal annyiszor szorozva, a hányszor elvétel történt, fog tenni nb-t, és a feladat végrehajtásánál fogva

$$(n-1)b < a;\ nb > a,$$

Tehát: $b > \frac{a}{n} > \frac{a}{2^n}$; akármennyit tegyen is az n.

2. *Feladat*. A bizonyítmány éppen úgy foly, mint a hogy két szám legnagyobb közös mértéke keresésekor szokták bizonyítani, hogy a lelt osztó az illető legnagyobb. Csakhogy számoknál az egység megállítja a mütételt, holott a vonalokban végetlenül mehet. Hasonló természetüek a 3. és 4. feladatok is.

5—9. *Feladat*. Ezekben csak a van elmondva, a mit az értelmezések alkalmával fejtegettünk.

10. *Feladat.* Az első esetre a formula:

$$am : an = bm : bn.$$

A másodikra

$$am : a\sqrt{n} = bm : b\sqrt{n}.$$

s a feladat igazsága az első pillantásra kitünik.

A 11—14. *Feladatokra* nézve megint csak az értelmemezések világosítására útalunk.

15. *Feladat.* A bizonyítmány menetét könnyen béláthatni imígy:

Ha $a : b = c : d : \ldots\ldots (1)$

Tehát $a^2 : b^2 = c^2 : d^2 \ldots\ldots (2)$

Következőleg: $a^2 - b^2 : b^2 = c^2 - d^2 : d^2$ (3)

Megfordítva: $b^2 : a^2 - b^2 = d^2 : c^2 - d^2$ (4).

A (2) és (4) kapcsolatban adják: $a^2 : a^2 - b^2 = c^2 : c^2 - d^2$

És végre $a : \sqrt{a^2 - b^2} = c : \sqrt{c^2 - d^2}$

Ez a 2. Feladat erején bébizonyítja a kérdéses állítást.

16. *Feladat.* Ha $a = cm$ és $b = cn$; $a + b = c(m + n)$, és világos hogy mind cm, mind cn összemérhetők $c(m + n)$-nel.

17. *Feladat.* Ha $a = cm$ és $b = c\sqrt{n}$; $a + b = c(m + \sqrt{n})$; tehát mind cm, mind $c\sqrt{n}$ szertelenek $c(m + \sqrt{n})$-hez. Mert mind $\frac{m + \sqrt{n}}{m}$, mind $\frac{m + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ irrationalis számok.

Mind a két elébbi feladat megfordítása azon a két elven nyugszik, hogy egy rationalis és egy irrationalis szám összege nem lehet rationalis; és hogy két különböző irrationalis szám egymáshoz szertelen.

18. *Feladat.* Ha $a < b$, és $\frac{a^2}{4} = (b - c)c$ és $b - c = dm$;

$c = dn$;

úgy $b^2 = d^2(m + n)^2$; $\frac{a^2}{4} = d^2mn$; $a^2 = 4d^2mn$;

tehát $b^2 - a^2 = d^2(m + n)^2 - 4d^2mn = d^2(m^2 - 2mn + n^2) =$

$= d^2(m - n)^2.$

és így $\sqrt{b^2 - a^2} = d(m - n)$, $b = d(m + n)$;

azaz $\sqrt{b^2 - a^2}$ és b összemérhetők.

A megfordítás bizonyítmánya algebrai alakban. Legyen ismét $b>a$, és $b=cm=x+y$ .... (1)

A feltét szerint $b^2-a^2=c^2n^2$ és $\frac{a^2}{4}=xy$.

Már $a^2=b^2-c^2n^2=c^2m^2-c^2n^2=4xy$.
Minthogy $c^2m^2=(x+y)^2$:
tehát $c^2m^2-(c^2m^2-c^2n^2)=(x+y)^2-4xy$
azaz $c^2n^2=(x-y)^2$ és $cn=x-y$ .... (2)

A (1) és (2) összevetéséből: $x=\frac{c(m+n)}{2}$; $y=\frac{c(m-n)}{2}$.

A b egyen x és y darabjai tehát összemérhetők.

19. *F.* — Ha az elébbi bizonyítmányban n helyett $\sqrt{p}$-t teszünk: a fog kijöni, hogy
$\sqrt{b^2-a^2}=d(m-\sqrt{p})$, $b=d(m+\sqrt{p})$.

De $m-\sqrt{p}$ és $m+\sqrt{p}$ egymáshoz szertelenek. Mert ha összemérhetők volnának, az öszvegök is mindenikökhöz mérhető lenne. Már pedig az öszvegök $=2m$, mely mind $m-\sqrt{p}$-hez, mind $m+\sqrt{p}$-hez szertelen.

A feladat második részében hasonló helyettesítéssel
$x=\frac{c(m+\sqrt{p})}{2}$, $y=\frac{c(m-\sqrt{p})}{2}$
melyek egymáshoz szertelenek.

20. *Feladat.* Legyen az egyik egyen képe: am, a hozzámérhetőé: an. Derékszegök: a^2mn, neves lap képe.

21. *Feladat.* Legyen b^2pq neves lap; bm neves egyen. A derékszeg másik oldalának $\frac{b^2pq}{bm}=b\frac{pq}{m}$ a képe, és bm $b\frac{pq}{m}$-mel összemérhető.

22. *Feladat.* $a\sqrt{m}\times a\sqrt{n}=a^2\sqrt{mn}$, mely kép nevetlen lapot jelel meg. Nem különben $bp\times b\sqrt{q}=b^2p\sqrt{q}$ is azt, és a reájok emelhető egyenek, illetőleg $a\sqrt[4]{mn}$, és $b\sqrt{p\sqrt{q}}$ megint nevetlenek. Szövegünk *közép* egyennek nevezi, mert egymáshoz csak emeletben mérhető egyenek közt közép egyarányuak:

$$a\sqrt{m} : a\sqrt[4]{mn} = a\sqrt[4]{mn} : a\sqrt{n}; \text{ és}$$
$$bp : b\sqrt{p\sqrt{q}} = b\sqrt{p\sqrt{q}} : b\sqrt{q}.$$

A közép egyenek algebrai képei tehát: $a\sqrt[4]{mn}$, vagy $b\sqrt{p\sqrt{q}}$ vagy, mivel $b\sqrt{p\sqrt{q}} = b\sqrt[4]{p^2q}$, ha reáfogjuk hogy: $mn = r$ és $p^2q = s$ legyen, így egyszerüsítve $a\sqrt[4]{r}$, $b\sqrt[4]{s}$ formákat öltenek a közép egyen képei. — A *közép* lap jelképe $a^2\sqrt{mn}$, egyszerüsítve: $a^2\sqrt{p}$.

23. *Feladat.* $(a\sqrt[4]{m})^2 = a^2\sqrt{m}$ és $\frac{a^2\sqrt{m}}{ap} = a\frac{\sqrt{m}}{p}$, mely utóbbi *ap*-hoz hoszban szertelen neves egyent jelel.

24. *Feladat.* Legyen az egyik egyen képe: $a\sqrt[4]{m}$, a vele összemérhetőé $= x$. Ennek az értéke úgy van az elébbihez, mint szám számhoz; tehát:

$$a\sqrt[4]{m} : x = p : q$$

azaz: $x = a\frac{q}{p}\sqrt[4]{m}$, közép egyen képe.

25. *Feladat.* Hoszban összemérhető két közép egyen képei: $ap\sqrt[4]{m}$ és $aq\sqrt[4]{m}$. Derékszegöket $ap\sqrt[4]{m} \times aq\sqrt[4]{m} = a^2pq\sqrt{m}$ jeleli ki közép lapnak.

26. *Feladat.* Egymáshoz csak emeletben mérhető két közép egyen: $a\sqrt{p\sqrt{n}}$ és $a\sqrt{q\sqrt{n}}$. Szorzatuk: $a^2\sqrt{pqn}$ jelelhet akár közép, akár neves lapot. Amazt, ha pqn nem négyszegszám; imezt, ha az. Lehet pedig négyszegszám, ha p. o. $pq = n$ volna.

27. *Feladat.* $a^2\sqrt{m} - a^2\sqrt{n} = a^2(\sqrt{m} - \sqrt{n})$, nevetlen lapot jelel; feltéve természetesen, hogy m és n különbözök.

28. *Feladat.* A megfejtés algebrai képe:

$$a\sqrt{m} : x = x : a\sqrt{n}; \text{ tehát } x = a\sqrt[4]{mn}.$$
$$a\sqrt{m} : a\sqrt{n} = a\sqrt[4]{mn} : y;\ y = a\frac{\sqrt{n\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{m}}$$

És $xy = a^2 n$, mi neves lapot jelel.

Analysis útján a 26. F. megfejtését visszafelé nyomozva, tegyük hogy $a^2 m$-ben, $m^2 = npq$ és $np = q$; ennél fogva:

$$a^2 m = a^2 \sqrt{npq} = a^2 \sqrt{n} \sqrt{p} \sqrt[4]{q} \sqrt[4]{q} = a\sqrt{n\sqrt{q}} \times a\sqrt{p\sqrt{q}}$$

29. *Feladat.* A szövegbeli megfejtés algebrai képe:

$$a\sqrt{m} : x = x : a\sqrt{n}; \text{ tehát } x = a\sqrt[4]{mn}$$

$$a\sqrt{n} : a\sqrt{p} = x : y = a\sqrt{p}\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$$

És $xy = a^2\sqrt{mp}$.

Megint a 26. F. szerint, ha ebben:

$a\sqrt{m\sqrt{p}} \times a\sqrt{n\sqrt{p}} = a^2\sqrt{mnp}$, sem az hogy: $mn = p$, sem: $mp = n$, sem végre: $m = np$ nem igaz; a jelelt két vona közti derékszeg közép lap.

1. *Felvétel.* — Analyticai úton következöleg jutunk a megfejtéshez: Legyen $x^2 + y^2 = z^2$. Ebből

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y).$$

x^2-nek hát két szám szorzatának kell lenni.

Fogjuk reá, hogy $x + y = m$; $z - y = n$; így $x^2 \times mn$.

De ugyan azért: $z^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$, és $z^2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$,

e szerint:

$$mn + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$$

És ez az egyenlet az Euklides szabályát adja, s a szövegbeli feltételeket is kiolvashatni belőle. Mert hogy x, y, z egész számok lehessenek, szükséges, hogy:

1-ben, mn négyszegszám legyen, mi csak úgy lehet ha m és n mind a ketten négyszegszámok, vagy ha $m = p^2 rs$ és $n = q^2 rs$, a milyeket Euklides hasonló lapszámoknak nevez.

2-szor, $(m - n)$-nek páros számnak kell lenni: azaz, hogy m és n vagy mindenik páros, vagy mindenik páratlan legyen.

Ha akármelyik feltétel nem teljesül, úgy a 2. feltétel feladatának lesz elég téve. Szintúgy, ha egyik sem.

30. *Feladat.* — A kivántj két vonal képei: am és $\sqrt{n}$,

úgy hogy (m^2-n) négyszegszám legyen: Vagy pedig: $a\sqrt{m}$ és $a\sqrt{n}$, azzal a feltétellel, hogy $m-n=p^2$.

31. *Feladat.* A képek: am és $a\sqrt{n}$; m^2-n nem levén négyszegszám. Vagy $a\sqrt{m}$ és $a\sqrt{n}$; úgy hogy $m-n$ nem négyszegszám.

32. *Feladat.* Két ily középp egyen $a\sqrt{p\sqrt{n}}$ és $a\sqrt{q\sqrt{n}}$ melyekre nézve az első feltét teljesülve van (a 26. F. nyomán), ha p. o. $pq=n$, miszerint $q=\frac{n}{p}$. Ezt a második egyen képében helyettesítve lesz:

$a\frac{\sqrt{n\sqrt{n}}}{\sqrt{y}}$, miszerint $a\sqrt{p\sqrt{n}}\times a\frac{\sqrt{n\sqrt{n}}}{\sqrt{p}}=a^2n$. A második feltét azt tartja, hogy,

$$a^2p\sqrt{n}:a^2p\sqrt{n}-a^2\frac{n\sqrt{n}}{p}=p^2:p^2-n=r^2:s^2$$

azaz, mint négyszegszám négyszegszámhoz, és teljesítésére csak a kell, hogy p^2-n négyszegszám legyen. Euklides syntheticai megfejtése is éppen hasonló képekre vezet. Ha p^2-n nem négyszegszám, a „tanuság"beli eset áll elé.

33. *Feladat.* A kellő két középp egyen lehet $ap\sqrt[4]{n}$ és $\sqrt{q\sqrt{n}}$; melyeknek szorzata $a^2p\sqrt{q\sqrt{n}}$ nevetlen lapot jelel. És feltéve hogy: $p^2-q=s^2$,

$$a^2p^2\sqrt{n}:a^2\sqrt{n}(p^2-q)=p^2:s^2.$$

34. *Feladat.* Legyen a keresett két egyen $a\sqrt[4]{x}$ és $a\sqrt[4]{y}$. A x és y értekeit következőleg fejtjük ki:

A feltétek szerint: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=m$, és $\sqrt[4]{xy}=\sqrt{n}$.
Négyszegre emelve:
$x+2\sqrt{xy}+y=m^2$, és $\sqrt{xy}=n$.
Az elsőből $4\sqrt{xy}=4n$-et levonva, lesz:
$x-2\sqrt{xy}+y=m^2-4n$, és $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{m^2-4n}$

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}=\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{2}$$

$$\sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}=\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}$$

$$a\sqrt[4]{x}=a\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{2}};\ a\sqrt[4]{y}=a\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}}$$

melyeknek négyszegeik öszvegét $=a^2m$; a közükbe fogott derékszeget $a^2\sqrt{n}$ jelelik.

35. *Feladat.* Jeleljék a két egyent $a\sqrt[4]{x}$ és $a\sqrt[4]{y}$. Négyszegeik öszvege a feltét szerint: $a^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{m}$; a közükbe fogott derékszeg képe: $a^2\sqrt[4]{x}+\sqrt{xy}=n$. Az ismeretleneket az iménti fogással kiszabadítva, lesz:

$$a\sqrt{x}=\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-4n^2}}{2}};\ a\sqrt[4]{y}=\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{m-4n^2}}{2}}$$

Melyek kellő számítással, a feljebbi $\sqrt{m}$-et és n-et kiadják.

36. *Feladat.* A feltét szerint: $a^2\sqrt{x}+a^2\sqrt{y}=\sqrt{m}$, és $\sqrt{xy}=\sqrt{n}$, melyekből az előbbiekhez hasonló módon kijő, hogy

$$a\sqrt[4]{x}=a\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-4n}}{2}},\ a\sqrt[4]{y}=a\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{m-4n}}{2}}.$$

37. *Feladat.* Feltéve, hogy n nem $=p^2m$-mel, $a\sqrt{m}$ és $a\sqrt{n}$ egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyeneket jelelnek. Világos, hogy az öszvegök sem az előbbiek valamelyikéhez, sem neves vonalhoz hoszban nem mérhető. Emeletben sem, mert

$$[a(\sqrt{m}+\sqrt{n})]^2=a^2(m+2\sqrt{mn}+n),$$

mely sem a^2q^2-hez, sem a^2q-hoz nincs úgy, mint szám számhoz. A nevetlen pár átalános algebrai képe tehát: $a(\sqrt{m}+\sqrt{n})$.

Más alakba is ölthetni. Ugyanis

$$\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{m+n+2\sqrt{mn}}.$$

Ha hát teszszük hogy: $m+n=p$, $2\sqrt{mn}=\sqrt{q}$, a nevetlen pár második képe $a\sqrt{p+\sqrt{q}}$ lesz.

38. *Feladat.* Ily két egyen a 32. F. nyomán: $a\sqrt{p\sqrt{n}}$ és $a\sqrt{q\sqrt{n}}$, feltéve hogy pqn négyszegszám. E szerint

$a(\sqrt{p\sqrt{n}}+\sqrt{p\sqrt{n}})$ lenne az első *középpár* képe. Azonban egyszerüsíthetni következőképpen:

$$(\sqrt{p\sqrt{n}}+\sqrt{q\sqrt{n}})^2=2\sqrt{pqn}+(p+q)\sqrt{n}.$$

minthogy pqn négyszegszám, tehetjük hogy $2\sqrt{pqn}=r$, meg hogy a gyökjeles $(p+q)\sqrt{n}=\sqrt{s}$ legyen; miszerint az első középpár négyszegét $a^2(r+\sqrt{s})$, magát az egyent $a\sqrt{r+\sqrt{s}}$ jeleli.

39 *Feladat.* A *második középpár* képe: $a(\sqrt{p\sqrt{n}}+\sqrt{q\sqrt{n}})$, feltéve, hogy pqn nem négyszegszám. Ismét az előbbi fogással élve.

$$(\sqrt{p\sqrt{n}}+\sqrt{q\sqrt{n}})=2\sqrt{pqn}+(p+q)\sqrt{n},$$

és $2\sqrt{pqn}=\sqrt{r}$, $(p+q)\sqrt{n}=\sqrt{s}$ lehetvén, az egyszerüsített kép $a\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{s}}$ lesz.

40. *Feladat.* A *nagyobbik nevetlen* képe a 34. F. szerint:

$$a\left[\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{2}}+\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}}\right].$$

Minthogy a rekeszbeli két tag négyszegei öszvege $=a^2m$, kétszeres szorzatuk $=2a^2\sqrt{n}$: az egész egyen négyszegét $a^2(m+2\sqrt{n})$, magát az egyent $a\sqrt{m+2\sqrt{n}}$ jelelhetik.

41. *Feladat.* A neves és közép lapra emelhető egyen képe a 35. F. nyomán:

$$\left[\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-4n^2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{m-4n^2}}{2}}\right].$$

Egyszerüsített képe az iméntihez hasonló fogással: $a(\sqrt{\sqrt{m}+2n})$, minthogy a tagok négyszegei öszvege $=a^2\sqrt{m}$, a kétszeri derékszeg $=2a^8n$.

Jegyz. A legközelebbről tárgyalt két vonal különbsége képeikről ugyan meglehetősen szembetünő, de egy kis magyarázat még sem árt. Minden két tagu mennyiség, akár mekkoraság négyszegében a tagok négyszegei öszvege nagyobb, mint a kétszeri szorzatuk. P. $(p-q)^2=p^2-2pq+q^2$. Minden négyszeg lényegesen szaporító (positiv), mi a felhozott példa nem lehetne, ha (p^2+q^2), *nagyobb* nem volna mint $2pq$.

No már a „nagyobbik nevetlen“ egyen négyszegében a tagok négyszegei öszvegét a^2m arányos (rationalis) mennyiség, a kétszeri derékszegét $2a^2\sqrt{n}$ aránytalan (irrationalis) mennyiség jeleli. A „neves és közép lapra emelhető“ egyen négyszegében a tagok négyszegei öszvege $=a^2\sqrt{m}$, a kétszeri derékszeg $=2a^2n$. Az elsőben hát a rationalis rész nagyobb, az irrationalis kisebb; a másodikban az irrationalis rész nagyobb, a rationalis kisebb. Onnan vette a nevét is a „neves és közép lapra emelhető“ egyen, hogy emelete, azaz négyszege, két részből ú. m. egy neves (a^2n) és egy közép lapból ($a^2\sqrt{m}$) áll.

43. *Feladat.* A „*két közép lapra emelhető*“ egyen képe:

$$a\left[\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-4n}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{m-4n}}{2}}\right],$$

melyben a tagok négyszegei öszvegét $a^2\sqrt{m}$, a kétszeri derékszeget $2a^2\sqrt{n}$ jelelik. Az egész egyen négyszegének hát $a^2(\sqrt{m}+2\sqrt{n})$, magának az egyennek $a\sqrt{\sqrt{m}+2\sqrt{m}}$, az egyszerüsített képe. Négyszegének mind a két része közép lapot ábrázol, s innen a neve.

43. *Feladat.* Ha a nevetlen párt más meg másképpen lehetne, azon feltételek alatt, tagokra osztani, úgy

$$a(\sqrt{m}+\sqrt{n})=a(\sqrt{x}+\sqrt{y}),\text{ azaz: }\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

lenne.

Négyszegekre emelve az egyenlet mind két felét:

$$m+2\sqrt{mn}+n=x+2\sqrt{xy}+y.$$

Az arányos tagokat az arányosokkal, az aránytalanokat megint a magukfélével egyenlítve, lesz:

$$m+n=x+y,\text{ és }2\sqrt{mn}=2\sqrt{xy}$$

Tehát: $m^2+2mn+n^2=x^2+2xy+y^2$, és $4mn=4xy$.

Az utóbbit az előbbiből kivonva:

$$m^2-2mn+n^2=x^2-2xy+y^2,\text{ és }m-n=x-y.$$

Minthogy hát $m+n=x+y$ és $m-n=x-y$:
önként következik, hogy $m=x$, $n=y$; azaz: az újaknak vélt tagok a régiekkel egyenlők.

44. *Feladat.* Az első középpár nétalán másképp szabott részeinek x és y elemeit véve, lenne:

$$a\sqrt{r+\sqrt{s}}=a\sqrt{x+\sqrt{y}},\text{ vagy is }\sqrt{r+\sqrt{s}}=\sqrt{x+\sqrt{y}}.$$

Tehát $r+\sqrt{s}=x+\sqrt{y}$, azaz: $r=x$ és $s=y$.

45. *Feladat* — A második közép párt ha más meg másképp lehetne választani, lenne:

$$a\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{s}}=a\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}},\text{ vagyis:}$$
$$\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{s}}=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Négyszegekre emelve: $\sqrt{r}+\sqrt{s}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; melyet megint négyszegítve s a 43. F.-nál használt fogást alkalmazva, kijő, hogy $r=x$ és $s=y$.

46. *Feladat.* Feltéve hogy $a\sqrt{m+2\sqrt{n}}=a\sqrt{x+2\sqrt{y}}$, lesz:

$$m+2\sqrt{n}=x+2\sqrt{y}\text{; tehát } m=x \text{ és } n=y.$$

47. *Feladat.* Ismét ha $a\sqrt{\sqrt{m}+2n}=a\sqrt{\sqrt{x}+2y}$, lesz:

$$\sqrt{m}+2n=\sqrt{x}+2y\text{; miszerint } m=x,\ n=y.$$

48. *Feladat.* Tegyük, hogy

$$a\sqrt{\sqrt{m}+2\sqrt{n}}=a\sqrt{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}\text{; tehát } \sqrt{m}+2\sqrt{n}=$$
$$=\sqrt{x}+2\sqrt{y};$$

melyet négyszegítve s ismét a 43. F.-beli fogást alkalmazva, következik, hogy $m=x$, és $n=y$.

Másod rendbeli értelmezések.

A nevetlen pár nemei megkülönböztetése két felosztó elven alapúl. Elsöben azon, hogy az elötag (x) vagy *hoszban hozzája mérhető* egyen négyszegével nagyobb emeletü az utótagnál (y), vagy *hoszban hozzá szertelenével.* Az első esetnek megfelel, ha teszszük, hogy $x=m$, $y=\sqrt{n}$, és hogy m^2-n négyszegszám. Mert így $a(m+\sqrt{n})$ a nevetlen pár képe, melyben am és $a\sqrt{n}$ egymáshoz hoszban szertelenek és a^2m^2 úgy van $a^2(m^2-n)$-hez, mint négyszegszám négyszegszámhoz. — A második esetre elég, ha akár x^2, akár x^2-y^2 nem négyszegszegszámok, vagy is x és $\sqrt{x^2-y^2}$ egymáshoz nem mérhetők. Ennek megfelel ez a kép: $a(\sqrt{m}+\sqrt{n})$, melyben $a\sqrt{m}$ $a\sqrt{m-n}$-hez hoszban szertelen.

A második osztó elv a nevetlen pár tagjai összemérhetösége egy felvett neves (ap, vagy $a\sqrt{q}$) egyennel. Ebből a viszonyból három aleset keletkezik. Feltéve természetesen, hogy az elötag mindig nagyobb az utótagnál, vagy az elötag mérhető s az utótag szertelen a felvett neves egyenhez. Vagy az utótag mérhető s az elötag szertelen; vagy mind a kettö szertelen a felvett egyenhez.

49. *Feladat.* Az első eset elsö alesete adja az 1. nevetlen párt, melynek képe hát $a(m+\sqrt{n})$, a segédvonalat ap jelelvén. Önként érthető, hogy m^2-n négyszegszám.

50. *Feladat.* A 2. nevetlen párt az elsö eset második alesete jellemzi. Ezt hát az 1-sötől csak a segédvonal különbözteti, melynek képe $ap\sqrt{n}$ legyen.

51. *Feladat.* Az elsö eset harmadik alesete a 3. nevetlen párt kellökép jellemzi, ha a segédvonalat $a\sqrt{q}$-val jeleljük. Mert $a\sqrt{q}$ mind am-hez, mind $a\sqrt{n}$-hez szertelen.

52. A 4. nevetlen pár képe $a(p\sqrt{m}+\sqrt{n})$ s a segéd vonaláé $aq\sqrt{m}$. Itt béáll a második eset első alesete; mert $p\sqrt{m}$ és $\sqrt{p^2-n}$ egymáshoz szertelenek; $ap\sqrt{m}$ pedig $aq\sqrt{m}$-hez hoszban mérhető. Megteszik a szolgálatot $a(m+\sqrt{n})$ és ap is, feltéve, hogy m^2-n nem négyszegszám.

53. *Feladat.* Az 5. nevetlen párt jelelik: $a(\sqrt{m}+p\sqrt{n})$ és $aq\sqrt{n}$, mi által a második eset második alesete teljesül.

54. *Feladat.* A második eset harmadik alesetének a 6. nevetlen pár és segédvonala, $a(\sqrt{m}+\sqrt{n})$ és $a\sqrt{p}$ képei felelnek meg.

55. *Feladat.* A feladott derékszeg képe a 49. F. nyomán : $ap\times a(m+\sqrt{n})=a^2(pm+p\sqrt{n})$, s a reá emelhető egyené: $a\sqrt{pm+p\sqrt{n}}$, melyet a 37. feladatbeli második képpel összehasonlítván, kitünik hogy nevetlen párt jelel.

De reá lehet vinni az első képre is, mert tegyük hogy $\sqrt{pm+p\sqrt{n}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, tehát $pm+p\sqrt{n}=x+2\sqrt{xy}+y$, ennél fogva

$$x+y=pm, \text{ és } 2\sqrt{xy}=p\sqrt{n}.$$

A már többször használt fogással kijö, hogy

$x-y=p\sqrt{m^2-n}$; következőleg $x=\frac{pm+p\sqrt{m^2-n}}{2}$ és $y=\frac{pm-p\sqrt{m^2-n}}{2}$. Mind a kettő arányos szám, mert m^2-n az 1. nevetlen párban négyszegszám; tehát $a(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ nevetlen pár.

56. *Feladat.* A kérdéses derékszeg képe az 50. F. szerint: $ap\sqrt{n}\times a(m+\sqrt{n})=a^2(pm\sqrt{n}+pn)$, és a reá emelhető egyen $=a\sqrt{pm\sqrt{n}+pn}$.

Hogy a nevét kitanulhassuk, ismét a szokott fogást veszszük elé, mi által kijő, hogy

$$a\sqrt{pm\sqrt{n}+pn}=a\left(\sqrt{\frac{pm\sqrt{n}+p\sqrt{n}\sqrt{(m^2-n)}}{2}}+\sqrt{\frac{pm\sqrt{n}-p\sqrt{n}\sqrt{(m^2-n)}}{2}}\right);$$

tehát két közép egyen öszvege, melyeknek derékszegét $\frac{apn}{2}$ jeleli. A két tag derékszege tehát neves és az egyen első középpár.

57. *Feladat.* — A származott derékszeget az 51. F. nyomán $a\sqrt{q}\times a(m+\sqrt{n})=a^2(m\sqrt{q}+\sqrt{nq})$ jeleli. A reá emelhető egyen képe $a\sqrt{m\sqrt{q}+\sqrt{nq}}$. Ez a forma a 39. feladatbeli kép $(a\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{s}})$ nyomán második középpárnak bélyegzi a kérdéses egyent.

58. *Feladat.* — A 4. nevetlen pár és segédvonala derékszegét az 52. F. szerint: $ap\times a(m+\sqrt{n})=a^2(pm+p\sqrt{n})$ jeleli, a reá emelhető egyent pedig $a\sqrt{pm+p\sqrt{n}}$. Ezt $a(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ formára vevén, az eredmény:

$$a\sqrt{pm+p\sqrt{n}}=$$

$$a\left[\sqrt{\frac{pm+p\sqrt{m^2-n}}{2}}-\sqrt{\frac{pm-p\sqrt{m^2-n}}{2}}\right]$$

az illető egyént a 40. F. nyomán nagyobbik nevetlennek bélyegzi.

59. *Feladat.* Az itt származott derékszeg képe az 53. F. szerint: $aq\sqrt{n}\times a(\sqrt{m}+p\sqrt{n})=a^2q(\sqrt{mn}+pn)$, és az ily lapra emelhető egyené: $a\sqrt{q}\sqrt{\sqrt{mn}+pn}$, mely a 41. F.-beli egyszerüsített képhez $(a\sqrt{\sqrt{m}+2n})$ hasonlítva, neves és közép lapra emelhető egyent jelel. Ha pedig ezt is $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ formára veszszük, az eredmény:

$$a\sqrt{q}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{mn}+\sqrt{mn-p^2n^2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{mn}-\sqrt{mn-p^2n^2}}{2}}\right)$$

az idézett helybeli első képhez hasonlítva, azon nevezetre vezet.

60. *Feladat.* A 6. nevetlen pár képe a segédvonaláéval szorozva adja: $a\sqrt{p}\times a(\sqrt{m}+\sqrt{n})=a^2(\sqrt{pm}+\sqrt{pn})$, a mely képpel jelelt derékszegre emelhető egyen képe:

$a\sqrt{\sqrt{pm}+\sqrt{pn}}$, s ez az egyen a 42. F. tanusága szerint két közép lapra emelhető.

61. *Feladat.* Nevetlen pár képe: $a(m+\sqrt{n})$, ennek négyszege: $a^2(m+\sqrt{n})^2$, melyet ap neves egyenhez kell szabni, azaz ezzel elosztani, hogy a hányados kiadja a keresett „szélesség"et. E szerint:

$$\frac{a^2(m^2+2m\sqrt{n}+n)}{ap}=a\left(\frac{m^2+n}{p}+\frac{2m\sqrt{n}}{p}\right);$$

s az utóbbi világosan nevetlen párt jelel. De elsőt is, mert

$$\left(\frac{m^2+n}{p}\right)^2-\left(\frac{2m\sqrt{n}}{p}\right)^2=\left(\frac{m^2-n}{p}\right)^2$$

és így az előtag, $a\left(\frac{m^2+n}{p}\right)$, egyfelől hoszban összszemérhető a felvett neves egyennel; másfelől az elő- és utótag négyszegei közti különbség négyszeg, még pedig az előtaghoz mérhető egyen ú. m. $a\left(\frac{m^2-n}{p}\right)$ négyszege.

62. *Feladat* Az első középpár képe:

$a(\sqrt{p\sqrt{n}}+\sqrt{q\sqrt{n}})$, azzal a feltéttel, hogy pqn négyszegszám; ar meg neves egyent jelel. E szerint:

$$\frac{a^2(\sqrt{p\sqrt{n}}+\sqrt{q\sqrt{n}})^2}{ar}=a\left(\left[\frac{p+q}{r}\right]\sqrt{n}+\frac{2\sqrt{pqn}}{r}\right)$$

A hányados 2-dik nevetlen párt jelel. Mert a felvett ar egyen hoszban az utótaghoz mérhető, és

$$a^2\left(\frac{p+q}{r}\right)^2 n - a^2\frac{4pqn}{r^2} = a^2\left(\frac{p-q}{r}\right)^2 n$$

levén, az előtag hozzája hoszban mérhető egyen, $a\left(\frac{p-q}{r}\right)\sqrt{n}$, négyszegével nagyobb emeletü az utótagnál.

63. *Feladat.* Ennek a tárgyalása csak abban különbözik az előbbitől, hogy pqn nem négyszegszám, $\sqrt{pqn}$ tehát aránytalan levén, az illető hányados 3-dik nevetlen párt jelel.

64. *Feladat.* $\frac{a^2(m+2\sqrt{n})}{ar} = a\left(\frac{m}{r} + \frac{2}{r}\sqrt{n}\right)$. A hányados 4-dik nevetlen pár képe, mit az illető értelmezés öszszevetésével könnyen kipuhatolhatni.

65. *Feladat.* $\frac{a^2(\sqrt{m}+2n)}{ap} = a\left(\frac{1}{p}\sqrt{m} + \frac{2n}{p}\right)$, s az utóbbi forma 5-dik nevetlen pár képe.

66. *Feladat.* $\frac{a^2(\sqrt{m}+2\sqrt{n})}{ap} = a\left(\frac{\sqrt{m}}{p} + \frac{2\sqrt{n}}{p}\right)$, mely utóbbi kép 5-dik nevetlen párt jelel.

67. *Feladat.* $a(m+\sqrt{n})$-hez hoszban mérhető csak $a\frac{p}{q}(m+\sqrt{n}) = a\left(\frac{mp}{q} + \frac{p}{q}\sqrt{n}\right)$ lehet, mely utóbbi kép nevetlen párt jelel; még pedig azon rendüt az eredetivel. Mert mind a kettőben az előtag arányos, az utótag aránytalan, s a melyikhez a felvett neves egyen az egyikben mérhető vagy szertelen, a másikban is az. Továbbá ha $a^2(m^2-n)$ négyszegszám, $a^2\frac{p^2}{q^2}(m^2-n)$ is az; ha az első nem az, a második sem az.

Hasonló bizonyítást adhatni, ha a második formából, $a(\sqrt{m}+\sqrt{n})$, indulunk ki.

68. *Feladat.* $a(\sqrt{p\sqrt{n}} + \sqrt{q\sqrt{n}})$-hez $a\frac{r}{s}\left(\sqrt{p\sqrt{n}} + \sqrt{q\sqrt{n}}\right)$-t mérhetni hoszban. Az utóbbi

$=a\left(\sqrt{\frac{r^2}{s^2}p\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{r^2}{s^2}q\sqrt{n}}\right.$ világosan közép egyen képe. Azon rendü is az eredetivel; mert ha pqn négyszegszám, $\frac{r^4}{s^4}pqn$ is az; ha egyik nem, a másik sem az.

69. *Feladat.* $a\sqrt{m+2\sqrt{n}}$ és $a\frac{p}{q}\sqrt{m+2\sqrt{n}}$

$=a\sqrt{\frac{mp^2}{q^2}+2\sqrt{\frac{np^4}{q^4}}}$, mind a ketten nagyobbik nevetlent jelelnek.

70. *Feladat.* $a\sqrt{\sqrt{m}+2n}$ és $a\frac{p}{q}\sqrt{\sqrt{m}+2n}$

$=a\sqrt{\sqrt{\frac{mp^4}{q^4}}+2\frac{np^2}{q}}$ mind a ketten neves és közép lapra emelhetők.

71. *Feladat.* $a\sqrt{\sqrt{m}+2\sqrt{n}}$ és $a\sqrt{\sqrt{m}2+\sqrt{n}}$

$=a\sqrt{\sqrt{\frac{mp^4}{q^4}}+2\sqrt{\frac{np^4}{q^4}}}$ mind a ketten két közép lapra emelhető egyenek.

72. *Feladat.* Legyen a neves lap képe: a^2r, a közép lapé $a^2\sqrt{s}$. A kettöjök öszvege: $a^2(r+\sqrt{s})$, mit négyszeg képének véve, az oldalát $a\sqrt{r+\sqrt{s}}$ jeleli.

Már

$$a\sqrt{r+\sqrt{s}}=a\sqrt{\frac{r+\sqrt{r^2-s}}{2}}+a\sqrt{\frac{r-\sqrt{r^2-s}}{2}},$$

melyeknek szorzata: $\frac{a^2-s}{2}$; a négyszegeik öszvege: $\frac{a^4r}{2}$.

Tegyük előbb: $\sqrt{r+\sqrt{s}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, miszerint

$$a\sqrt{r+\sqrt{s}}=a\sqrt{\frac{r+\sqrt{r^2-s}}{2}}+a\sqrt{\frac{r-\sqrt{r^2-s}}{2}}$$

No már, ha (r^2-s) négyszegszám, mind x, mind y, arányos számok, azaz a $\sqrt{x}$ és $a\sqrt{y}$ emeletben összemérhetők; tehát $a\sqrt{r+\sqrt{s}}=a(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ *nevetlen pár.* — Ha pedig r^2-s nem négyszegszám, úgy $x=\sqrt{z}, y=\sqrt{w}$; $\sqrt{x}=\sqrt[4]{z}$, $\sqrt{y}=\sqrt[4]{w}$; a kérdéses egyen tagjai tehát közép egyenek. Igen de $\sqrt{xy}=\frac{\sqrt{s}}{2}$, $x+y=r$; azaz, a tagok közti derékszeg közép lap, négyszegeik öszvege neves, mik a 40. F. szerint a *nagyobbik nevetlen* egyen jegyei.

De tehetni másodszor $\sqrt{r+\sqrt{s}}=\sqrt{x\sqrt{z}}+\sqrt{y\sqrt{z}}$; miszerint négyszegítve: $r+\sqrt{s}=2\sqrt{xyz}++(x+y)\sqrt{z}$ És ha ebben xyz négyszegszám, a 38. F. nyomán *első középpár* képét viseli $a\sqrt{r+\sqrt{s}}$.

Tegyük végre hogy: $a\sqrt{r+\sqrt{s}}=a(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$, miből a már sokszor használt számítással lesz:

$$a\sqrt{r+\sqrt{s}}=a\left[\sqrt{\frac{\sqrt{s}+\sqrt{s-r^2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{s}-\sqrt{s-r^2}}{2}}\right].$$

És mivel a két tag mindenike közép egyen, és négyszegeik összegét $a^2\sqrt{s}$, a közükbe fogott derékszeget pedig $a^2\frac{r}{s}$ jeleli: a 41. F. szerint az ily két egyen öszvegét *neves* és *közép lapra emelhető* egyennek nevezzük.

73. *Feladat.* A Feladat feltételei szerint $a\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{s}}$ vagy *második középpárt*, vagy *két közép lapra emelhető* egyent jelel.

Fogjuk rá előbb, hogy $\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{s}}=x\sqrt[4]{p}+\sqrt{y}\sqrt[4]{p}$, mit bátran tehetünk, mert e szerint $\sqrt{r}=(x^2+y)\sqrt{p}$, és $\sqrt{s}=2x\sqrt{y}\sqrt{p}$, s az x és y értéköket r, s, és p függvényei által kifejezhetni. Úgy de $ax\sqrt[4]{p}$ és $a\sqrt{y}\sqrt[4]{p}$ emeletben öszszemérhető közép egyenek, melyeknek derékszege $(a^2x\sqrt{pq})$ közép lap, és így a meghatározandó egyen a 39. F. szerint *második középpár.*

Fogjuk rá másodszor, hogy $\sqrt{\sqrt{r}=\sqrt{s}}=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}$, minél fogva:

$$a\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{\ }}=a\left[\sqrt{\frac{\sqrt{r}-\sqrt{r-s}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{r}-\sqrt{r-s}}{2}}\right];$$

tehát a két tag emeletben szertelen egymáshoz; a négyszegeik öszvege $(a^2\sqrt{r})$ közép lap; a közükbe fogott derékszeg $\left(\frac{a^2\sqrt{s}}{2}\right)$ is közép lap, és a két lap szertelen egymáshoz. Mind ezek össze véve a *két közép lapra emelhető egyent* jelelik.

74. *Feladat.* am és $a\sqrt{n}$ egymáshoz csak emeletben mérhető egyenek képei. De ilyenek $a\sqrt{p}$, $a\sqrt{q}$, is.

Tehát akár $a(m-\sqrt{n})$, akár $a(\sqrt{p}-\sqrt{q})$ a *vágacs*(Apotome) képe. A nevetlen párétól csak abban különbözik, hogy a $+$ jegy $-$ jegyre van cserélve.

75. *Feladat.* A *közép egyen első vágacsa* képe a 38. F. nyomán: $a(\sqrt{p\sqrt{n}}-\sqrt{q\sqrt{n}})$, egyszerüsítve: $\sqrt{r-\sqrt{s}}$. Ez is csak jegyben különbözik az első középpárétól.

76. *Feladat.* A *közép egyen második vágacsa* képe megint: $a(\sqrt{p\sqrt{n}}-\sqrt{q\sqrt{n}})$, azzal a feltéttel, hogy pqn nem négyszegszám. Egyszerüsített képe tehát: $a\sqrt{\sqrt{r}+\sqrt{s}}$.

77. *Feladat.* A *kisebbik nevetlen* a nagyobbik nevetlennek (40. F.) felel meg, jegyváltoztatással.

Tehát képei:

$$a\left[\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{2}}-\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}}\right],$$

és $a\sqrt{m+2\sqrt{n}}$.

78. *Feladat.* A *nevessel közép egészet alkotó* egyen képe a 41. F. nyomán:

$$a\left[\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-4n^2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{m-4n^2}}{2}}\right],$$

és egyszerüsítve: $a\sqrt{\sqrt{m}-2n}$; minél fogva a neves és közép lapra emelhető egyennek felel meg.

79. *Feladat.* A *középpel közép egészet alkotó* egyen képe:

$$a\left[\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-4n}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{m-4n}}{2}}\right],$$

egyszerüsítve $a\sqrt{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$, e szerint a két közép lapra emelhető egyenének felel meg, kellő jegyváltoztatással.

Jegyzet. A megfelelés e könnyü viszonya feleslegessé teszi, hogy világosításainkat a 80—111 Feladatokra egyenként kiterjeszszük. Azok ugyanis a 43—73 Feladatokat kísérők másai lennének, azzal az egy különbséggel, hogy a közelebbi (74—79) Feladatok alkalmával kijelelt helyeken a + jegyet — jegyre kell változtatni. Könnyítés végett az egymásnak megfelelő Feladatok számainak íme a teljes sora :

A 80.	megfelel	a 43-nak	A 95.	megfelel	az 58-nak
81.	„	44.	96.	„	59.
82.	„	45.	97.	„	60.
83.	„	46.	98.	„	61.
84.	„	47.	99.	„	62.
85.	„	48.	100.	„	63.
86.	„	49.	101.	„	64.
87.	„	50.	102.	„	65.
88.	„	51.	103.	„	66.
89.	„	52.	104.	„	67.
90.	„	53.	105.	„	68.
91.	„	54.	106.	„	69.
92.	„	55.	107.	„	70.
93.	„	56.	108.	„	71.
94.	„	57.	109. }	„	{ 72.
			110. }	„	{ 73.
			111. }	„	

112. *Feladat.* A vágacs nem egy a nevetlen párral. Azaz, a vágacsot nem lehet oly két részre osztani, hogy egymáshoz oly viszonyban legyenek, a miben a nevetlen pár tagjai egymáshoz. Legyen $a(\sqrt{m}-\sqrt{n})$ a vágacs képe. Ha már a felvett viszony lehetséges volna, tehetnők :

$$\sqrt{m}-\sqrt{n}=\sqrt{x}+\sqrt{y};$$

négyszegítve :

$$m+n-2\sqrt{mn}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

Az arányos és aránytalan mennyiségeket külön egyenlítve lenne:

$$m+n=x+y, \text{ és } -2\sqrt{mn}=2\sqrt{xy}.$$

Az utóbbit tekintve hát szaporító mennyiség egyenlő volna apasztó mennyiséggel, mi lehetetlen.

113. *Feladat.* Algebrai nyelven adva elé:

$\frac{(ar)^2}{a(\sqrt{m}+\sqrt{n})}$ ily képet ád: $a(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, melyben $\sqrt{x}:\sqrt{y}=\sqrt{m}:\sqrt{n}$. Ugyanis

$$\frac{(ar)^2\cdot(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{a(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=a\frac{r^2}{m-n}(\sqrt{m}-\sqrt{n}):$$

és reáfogva hogy $\frac{r^2}{m-n}=s$, a keresett vonal képe lesz: $a(s\sqrt{m}-s\sqrt{n})=a(\sqrt{s^2m}-\sqrt{s^2n})$, mely vágacs képét viseli, és $s\sqrt{m}:s\sqrt{n}=\sqrt{m}:\sqrt{n}$.

A bizonyítás menete s ereje ugyanaz marad akármit tegyenek m és n (csakhogy $m>n$ legyen), pl. $m=\sqrt{p}$ és $n=\sqrt{q}$. Ennélfogva a származott vágacs minden esetben azon rendü és nemü a nevetlen párral.

114. *Feladat.*

$$\frac{(ar)^2}{a(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=\frac{a^2r^2\cdot(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{a(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}=a\frac{r^2}{m-n}(\sqrt{m}+\sqrt{n});$$

és ha $\frac{r^3}{m-n}=s$; $\frac{(ar)^2}{a(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=a(\sqrt{s^2m}+\sqrt{s^2n})$.

115. *Feladat.* A kivánt nevetlen pár és vágacs képei

$$a(p\sqrt{m}+p\sqrt{n}) \text{ és } a(q\sqrt{m}-q\sqrt{n}).$$

Derékszegöket $a^2p^2q^2(m-n)$ fogja jelelni, mi világosan neves.

116. *Feladat.* Vegyünk fel egy közép egyent, melynek képe: $a\sqrt[4]{n}$, és egy neves egyent, melyet jeleljen am. Derékszegök képe: $a^2m\sqrt[4]{n}$, s ennek mint négyszegnek az oldaláé: $a\sqrt{m}\sqrt[8]{n}$. És ez oly egyent jelel, a milyen eddig még nem fordúlt elé. Továbbá $am\times a\sqrt{m}\sqrt[8]{n}=a^2\sqrt{m^3}\sqrt[8]{n}$, egy új

derékszeg képe, melynek, mint négyszegnek, az oldaláé $a\sqrt[4]{m^3}\sqrt[16]{n}$, s ez az oldal merőben új nemű egyen. Így folytathatni végetlenül.

117. *Feladat.* Legyen a négyszeg oldala képe: *am*, az átlójáé hát $\sqrt{a^2m^2+a^2m^2}=\sqrt{2a^2m^2}=am\sqrt{2}$, mi világosan szertelen *am*-hez: mert $am:am\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$. Már pedig 1 és $\sqrt{2}$ egymáshoz csak emeletben mérhető számok.

EUKLIDES ELEMEINEK
TIZENEGYEDIK KÖNYVE.

Értelmezések:

1. *Tely* az, minek hossza, széle és mélysége van.

2. *A tely határa* a külszin.

3. *Egyen a lapra függő*, midőn minden hozzá érő és a felvett lapon fekvő egyenekkel derék szegleteket csinál.

4. *Lap lapra függő*, midőn a lapok egyikében a lapok közös szeletéhez derék szegletre vont egyenek a másik lapra függők.

5. *Egyen dülése a laphoz*, — midőn az egyen felső végétől a lapra függő bocsáttatik, s a származott ponttól az egyennek a lapbeli végéhez egyen vonatik, — a vont és az álló egyen közzé fogott hegyes szeglet.

6. *Lap dülése laphoz* mindenik lapon a közös szelet azon egy pontjához derékszegletre vont egyenek közzé fogott hegyes szeglet.

7. *Lap laphoz*, s *egy más máshoz, hasonlóan dült*nek mondatik, midőn a leirt dülő szegletek egymással egyenlők.

8. *Egyközü lapok* az öszve nem tartók.

9. *Hasonló telyképletek*, melyeket egyenlő számu hasonló lapok fognak bé.

10. *Egyenlő és hasonló telyképletek*, melyeket egyenlő számu és nagyságu hasonló lapok fognak bé.

Jegyz. Az utóbbi két értelmezésben az a hiba, hogy állítmányok, melyeket nem csak amúgy eleállítani, hanem bebizonyítni is kell. Gyanusok hát; annál inkább, minthogy a telyszegletekről hasonló értelmezések nem léteznek könyvünkben.

11. *Telyszeglet* az mely kettőnél több nem azon egy lapban levő, egy pontban öszveállított szegletlap közzé van béfogva.

12. A *gúla*, lapoktól körül fogott telyképlet, mely egyik lapjától (indulva) egy pontba fut öszve.

13. A *gerend*, oly lapoktól körül fogott telyképlet, melyek közzül a két átelleniek egyenlők, hasonlók, és egyközüek; a többiek pedig egyközények.

14. *Teke* — midőn a félkőr átmérője helytmaradva, a keringetett félkör újra oda, a honnan elindult visszakerül, — az így béfogott képlet.

15. A *teke tengelye*, a helytmaradó átmérő, mely körül a félkör fordúl.

16. A *teke központja* az, mely a félköré.

17. A *teke átmérője*, a közép ponton átvont és kétfelől a a teke külszinén végződő egyen.

18. *Kúp*, — midőn a derékszegletü háromszegnek a derékszeglet melletti egyik oldala helytmaradva, a körülforduló háromszeg újra oda, honnan elindult, visszakerül — az így béfogott képlet. S ha a helytmaradó egyen, a derékszeglet melletti másikkal, a fordulóval, egyenlő, a kúp *derékszegletü* lesz: ha kisebb *tompa szegletü*; ha nagyobb, *hegyesszegletü*.

19. A *kúp tengelye* a helytmaradó egyen, mely körül fordul a háromszeg.

20. *Talpa*, az a kör, melyet a körül forduló egyen ír.

21. *Görü* — midőn a derékszegletü egyközény egyik oldala helytmaradva, a körülfordított egyközény megint oda, honnan elindult, visszakerül — az így béfogott képlet.

22. *Görü tengelye*, az a helytmaradó egyen, mely körül fordul az egyközény.

23. *Talpai* azok a körök, melyeket a körülforduló két átelleni oldal ír.

24. *Hasonló kúpok* és *görvek* azok, melyeknek tengelyei a talpaik átméröihez egyarányuak.

25. A *köb*, hat egyenlő négyszeg közzé fogott telyképlet.

26. A *négylapu*, négy egyenlö és egyenlöoldalu háromszeg közzé fogott telyképlet.

27. A *nyolczlapu*, nyolcz egyenlő és egyenlöoldalu háromszeg közzé fogott telyképlet.

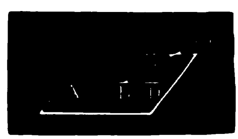
28. A *tizenkétlapu*, tizenkét egyenlö és egyenlőoldalu ötszeg közzé fogott telyképlet.

29. A *húszlapu*, húsz egyenlö és egyenlőoldalu háromszeg közzé fogott telyképlet.

---

1. Feladat:

Egyenes vonalnak nincs egy része a felvett lapban, más része pedig kiemelkedettben.



Mert ha lehet, ABC egyenes vonalnak AB része legyen a felvett lapban, BC része pedig egy kiemelkedettben.

Lesz valamely egyen AB-vel szakadatlan egyenesben a felvett lapban. Legyen az BD. Adatván tehát ABC ABD két egyen, a közös vágásuk AB, mi lehetetlen; mert egyen egyennel nem találkozik egynél több pontban, (mert különben egymásra illenének az egyenek.)

Egyenes vonalnak tehát sat.

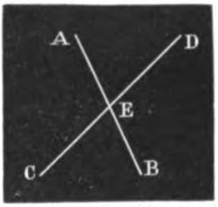
Más bizonyítmány Simson szerint:

Mert ha lehet, legyen ABC egyen AB darabja a lapban, és BC darabja a lapon kivül. Már minthogy AB a lapban van, ugyanabban meg lehet nyujtani. Nyujtassék D-ig. Vétessék AD-n át egy lap, és AD mint tengely körül fordíttassék addig. mig C-n is átmegy. Ekkor tehát B C pontok egy lapban levén, BC egyen is ugyanabban van, ABC ABD két egyen tehát egy lapban vannak, és AB darabjok közös; mi lehetetlen.

Jegyzet. Az eredeti bizonyítmányban nincs megmutatva, hogy ABC ABD azon egy lapban lehetnek, vagy kell lenniök. mi a jelen könyv 2-dik feladatában bizonyíttatik. Továbbá ez a bizonyítmány mutatja az I: k. 11-dik feladatához adott tanuság nélkülözhetetlen voltát.

2. Feladat:

Ha két egyen egymást vágja: azon egy lapban vannak, és akármely háromszeg azon egy lapban van.

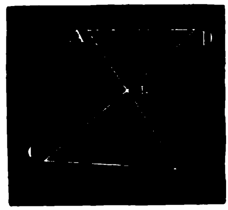


Ugyanis AB CD két egyen vágja egymást E pontnál: azt mondom, hogy AB CD azon egy lapban vannak, és akármely háromszeg azon egy lapban van.

Mert vétessenek EC-n EB-n akárhol F G pontok, köttessenek öszve CB FG és vonassanak FH GK. Azt mondom elsőben, hogy ECB háromszeg egy lapban van. Mert ha ECB háromszegnek akár FCH akár GBK része a felvett lapban van, a többi pedig másban, úgy EC EB egyeneknek is egy részök a felvett lapban, a más másban leend. Ha pedig ECB háromszegnek $FCBG$ része van a felvett lapban, s a többi másban, úgy EC EB egyenek mind kettejének egy része a felvett lapban, a többi másban leend; mi képtelennek mutattatott meg; ECB háromszeg tehát egy lapban van. De a melyben ECB háromszeg van, abban van EC-nek EB-nek is mindenike, s a melyben EC-nek EB-nek mindenike, abban vannak AB CD is; AB CD egyenek tehát egy lapban vannak, és ECB háromszeg is egy lapban van.

Ha tehát két egyen sat. m. b. k.

Simson bizonyítmánya:

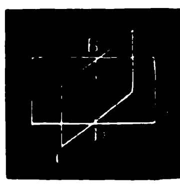


Vitessék EB-n át egy lap és fordítassék EB mint tengely körül addig, mig C-n is átmegy. Már minthogy E C pontok azon egy lapban vannak, EC egyen is abban lesz. Ugyanazért BC is abban van. De a felvett lap BE-n vitetett át; tehát EB is benne van. EC CB EB egyenek tehát azon egy lapbeliek. Ismét a mely lapban EC EB vannak, abban AE ED is, mert különben azon egyennek egy darabja a felvett lapban, más pedig kivüle volna; mi lehetetlen.

Ha két egyen tehát sat.

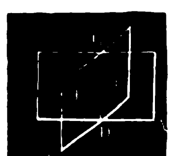
3. Feladat:

Ha két egyen vágja egymást: a közös szeletök egyen.



Mert vágja egymást AB BC két lap, s a közös szeletök legyen DB vonal: azt mondom, hogy DB vonal egyenes.

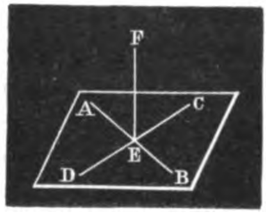
Mert, ha nem, vonassék D-töl B-hez AB lapban DEB egyen, BC lapban pedig DFB egyen; már DEB DFB két egyennek azon végei lesznek, és így lapot fognak be, mi képtelen; DEB DFB tehát nem egyenek. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy D-től B-hez húzandó más vonal sem egyen egyik is, az AB BC lapok közös szeletén kivül.

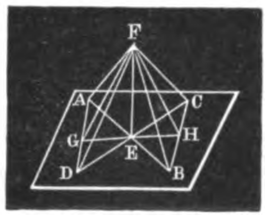


Ha tehát két lap satb. m. b. k.

4. Feladat:

Ha egy egyen két egymást vágó egyen közös vágó pontjához, derékszegletre áll, az ezeken átmenő laphoz is derékszegletre lesz.





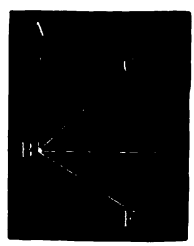
Ugyanis EF egyen álljon AB CD egymást E pontnál vágó két egyenhez derékszegletre E-nél: azt mondom, hogy EF az AB-n CD-n átmenő laphoz is derékszegletre lesz.

Vétessenek AE EB CE ED egymással egyenlő darabok, és vonassék E-n át akárhogy GEH egyen, húzassanak AD CB, és akármely F pontból vonassanak FA FG FD FC FH FB egyenek. Már minthogy AE ED két oldal CE EB két oldallal egyenlők, és egyenlő szegleteket fognak be: tehát AD talp egyenlő CB talppal, és AED háromszeg egyenlő lesz CEB háromszeggel: úgyhogy a DAE alatti szeglet is egyenlő az EBC alattival. De az AEG alatti szeglet is egyenlő a BEH alattival: AGE BEH tehát két háromszeg, melyeknek két-két szegletei különkülön egyenlők, s az egyenlő szegletek melletti egyik egyik oldaluk is, AE EB, egyenlők; ennél fogva a többi oldalaik is egyenlők lesznek; GE tehát egyenlő EH val, s AG BH-val. És mivel AE egyenlő EB-vel, FE pedig közös, és függő, tehát FA talp egyenlő FB talppal. Ugyanazért FC is FD-vel egyenlő. És minthogy AD egyenlő CB-vel, de FA is egyenlő FB-vel; FA AD két oldal, FB BC két oldallal külön-külön egyenlő, és FD talp FC-vel egyenlőnek van megmutatva: tehát az FAD alatti szeglet is egyenlő az FBC alattival. És ismét, mivel meg van mutatva, hogy AG egyenlő BH-val, de FA is egyenlő FB-vel: e szerint FA AG két oldal FB BH két oldallal egyenlők. Az FAG alatti szeglet is egyenlőnek van megmutatva az FBH alattival; FG talp tehát FH talppal egyenlö. És ismét, mivel megmutattaték, hogy GE EH-val egyenlö, EF pedig közös; ennélfogva GE EF két oldal egyenlö HE EF két oldallal, FG talp is egyenlö FH talppal: tehát a GEF alatti szeglet egyenlö a HEF alattival; a GEF HEF alatti szegleteknek tehát mindenike derék; FE tehát az E-n át akárhogy húzott GH-ra függö. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy FE minden hozzá érő s a felvett lapban levő egyenekkel derékszegletet csinál. Már pedig egyen laphoz derékszegletre van, ha minden hozzá érő s a felvett lapban fekvő egyenekkel derékszegletet csinál; FE tehát a felvett laphoz derékszegletre van. De a felvett lap AB CD egyeneken megy át; FE tehát az AB-n CD-n átmenő laphoz derékszegletre áll.

Ha tehát sat.

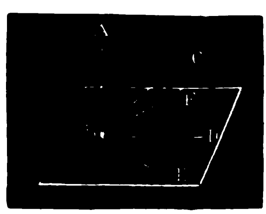
5. Feladat:

Ha egyen egymást vágó három egyen közös pontjára függöleg áll: a három egyen azon egy lapban van.



Ugyanis valamely AB egyen álljon BC BD BE egyenekre B pontnál, a hol találkoznak, függöleg: azt mondom, hogy BC BD BE azonegy lapban vannak.

Mert ha nem, legyenek, ha lehet, BD BE a felvett lapban, BC pedig egy kiemelkedettben, és nyujtassék meg az AB-n BC-n átmenö lap; ennek a felvett lappal közös szelete egyen lesz. Legyen az BF. Egy lapban ú. m. az AB-n BC-n átvittben vannak tehát AB BC BF egyenek mind a hárman. És minthogy AB mind BD-hez mind BE-hez függö, tehát AB a BD-n BE-n átmenö laphoz is függö.



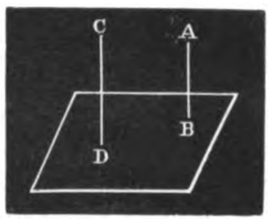
De a BD-n BE-n átmenő lap a felvett lap; AB tehát a felvett lapra függö; úgy hogy AB minden hozzá érő, s a felvett lapban levő egyenekkel derékszegletet csinál. Már pedig BF

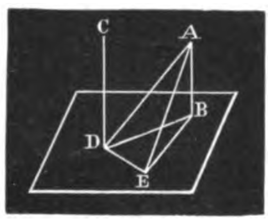
éri AB-t, és a felvett lapban van; az ABF alatti szeglet tehát derék. De a felvétel szerint az ABC alatti is derék; az ABF alatti szeglet tehát egyenlő az ABC alattival, holott egy lapban vannak; mi lehetetlen; BC egyen tehát nincs egy kiemelkedett lapban; BC BD BE három egyen tehát azon egy lapban vannak.

Ha tehát sat.

6. Feladat:

Ha két egyen azon egy lapra függő, az a két egyen egyközü lesz.





Legyen AB CD két egyen a felvett lapra függő: azt mondom, hogy AB CD-hez egyközü.

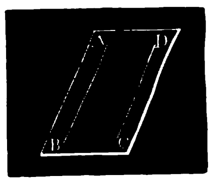
Mert találkozzanak a felvett lappal B D pontoknál, vonassék BD egyen, húzassék a felvett lapban BD-hez derékszegletre DE, tétessék DE AB-vel egyenlővé, és vonassanak BE AE AD.

Már minthogy AB a felvett lapra függő, tehát minden hozzá érő és a felvett lapban levő egyenekkel derékszegletet csinál. De mind BD mind BE a felvett lapban levén, hozzá érnek AB-hez; az ABD ABE alatti szegleteknek tehát mindenike derék. Ugyanazért a CDB CDE alattiaknak is mindenike derék. És minthogy AB egyenlő DE-vel, de BD közös; AB BD két oldal ED DB két oldallal egyenlők, és derékszegleteket fognak be; tehát AD talp BE talppal egyenlő. Már mivel AB egyenlő DE-vel, de AD is BE-vel, tehát AB BE két oldal egyenlő ED DA két oldallal, s a talpuk, AE közös: az ABE alatti szeglet tehát egyenlő az EDA alattival. De az ABE alatti derék; tehát az EDA alatti is az; ED tehát DA-ra függő, de BD-re DC-re is mindenikre függő; ED tehát BD DA DC három egyenre azon a ponton, a hol találkoznak, függő; *BD DA DC* három egyen tehát egy lapban vannak. De a melyben *DB DA*, abban van *AB* is, mert minden háromszeg egy lapban van; *AB BD DC* egyenek tehát egy lapban vannak. És az *ABD CDB* alatti szegletek mindenike derék; tehát *AB CD*-hez egyközü.

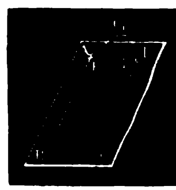
Ha tehát sat.

7. Feladat:

Ha két egyen egyközü, s mindeniken valahol pontok vétetnek, a pontokat öszvekötő egyen az egyközüekkel azon egy lapban van.



Legyen *AB CD* egyközü két egyen, s vétessenek mindeniken valahol *E F* pontok: azt mondom, hogy az *E F* pontokon átvont egyen az egyközüekkel azon egy lapban van.

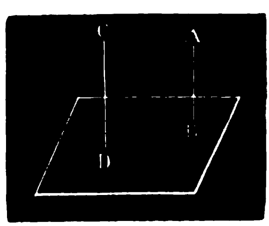


Mert ha nem, legyen, ha lehet, a kiemelkedett *EGF*-ben, és vitessék *EGF*-en át némi lap: ez a lap a felvett lappal egyen szeletet fog csinálni. Csinálja *EF*-et; *EGF EF* egyenek tehát lapot fognak bé; mi lehetetlen; az *E*-től *F*-hez vont egyen tehát az *AB CD* egyközüeken átmenő lapban van.

Ha tehát sat.

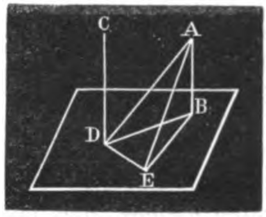
8. Feladat:

Ha van két egyközü egyen, és egyik közzülök valamely lapra függő: a másik is függő lesz azon lapra.



Legyen *AB CD* két egyközü, és az egyikök *AB* legyen a felvett lapra függő; azt mondom, hogy a másik, *CD*, is függő azon lapra.

Mert találkozzanak *AB CD* a felvett lappal *B D* pontoknál, és vo-

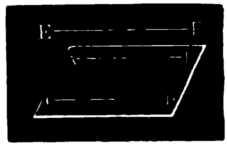


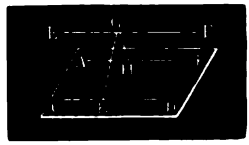
nassék *BD*; *AB CD BD* tehát egy lapban vannak. Vonassék a felvett lapban *BD*-hez derékszegletre *DE*, tétessék *DE AB*-vel egyenlövé, és vonassanak *BE AE AD*. És minthogy *AB* a felvett lapra függő, tehát *AB* minden hozzá érő s a felvett lapban levő egyenekre is függő; az *ABD ABE* alatti szegleteknek tehát mindenike derék. És minthogy *AB CD* egyközüeket *BD* vágja, az *ABD CDB* alatti szegletek két derékkel egyenlők. De az *ABD* alatti derék; derék tehát a *CDB* alatti is; *CD* tehát *BD*-re függő. És minthogy *AB* egyenlő *DE*-vel, *BD* pedig közös; *AB BD* két oldal egyenlő *ED DB* két oldallal, az *ABD* alatti szeglet is egyenlő az *EDB* alattival, mert mindenik derék; *AD* talp tehát *BE* talppal egyenlő. És mivel *AB* egyenlő *DE*-vel, *BE* pedig *AD*-vel; *AB BE* két oldal *ED DA* két oldallal külön-külön egyenlők, a talpuk, *AE*, közös; az *ABE* alatti szeglet tehát egyenlő az *EDA* alattival. Már pedig az *ABE* alatti derék; derék tehát az *EDA* alatti is; *ED* tehát *AD*-re függő. De függő *DB*-re is; *ED* tehát a *BD*-n *DA*-n átmenő lapra is függő; ennélfogva *ED* minden hozzá érő s az *AD*-n *DB*-n átmenő lapon levő egyenekkel derékszegletet alkot. De *DC* a *BD*-n *DA*-n átmenő lapban van, minthogy *AB BD* a *BD*-n *DA*-n átmenő lapban vannak. Már pedig a melyben *AB BD* vannak, abban van *DC* is. *ED* tehát *DC*-re függő, úgy hogy *CD* is *DE*-re függő; De *CD BD*-re is függő; *CD* tehát *DE DB* két egymást vágó egyenhez *D* vágó pontnál derékszegletre áll; úgy, hogy *CD* a *DE*-n *DB*-n átmenő lapra is függő; de a *DE*-n *DB*-n átmenő lap a felvett lap; *CD* tehát a felvett lapra, függő.

Ha tehát sat.

9. Feladat:

Azon egyenhez egyközü, de vele nem azon lapban levő egyenek, egymáshoz is egyközüek.





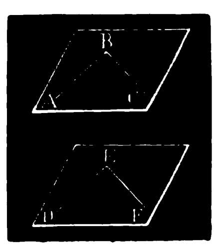
Legyen AB-nek CD-nek mindenike EF-hez, nem levén vele azon egy lapban, egyközü: azt mondom, hogy AB CD-hez egyközü.

Mert vétessék EF-en akármely G pont, és húzassék ettől az EF-en AB-n átmenő lapban EF-hez derékszegletre GH egyen; az FE-n CD-n átmenő lapban pedig EF-hez derékszegletre GK. És minthogy EF mind GH-ra mind GK-ra függő, tehát EF a GH-n GK-n átmenő lapra is függő. De EF AB-hez egyközü; AB is tehát függő a HG-n GK-n átmenő lapra. Ugyanazért CD is függő a HG-n GK-n átmenő lapra; AB-nek CD-nek tehát mindenike függő a HG-n GK-n átmenő lapra. Már ha két egyen azon lapra függő, az a két egyen egyközü; AB tehát CD hez egyközü.

Tehát azonegy sat.

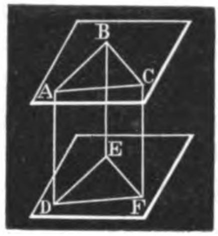
10. Feladat:

Ha egymással találkozó két egyen, egymással taládkozó két más egyenhez, nem azon lapban, egyközü: egyenlő szegleteket fognak be.



Ugyanis AB BC egymással találkozó két egyen legyen az egymással találkozó DE EF két egyenhez, nem azon lapban, egyközü: azt mondom, hogy az ABC alatti szeglet egyenlő a DEF alattival.

Vágassanak el BA BC ED EF egyenlő darabok, és vonassanak AD CF

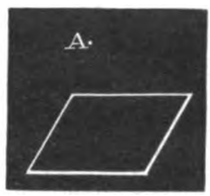


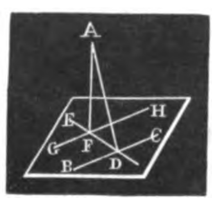
BE AC DF. Már mivel *BA ED*-vel egyenlő és egyközü, *AD* is *BE*-vel egyenlő és egyközü, Ugyanazért *CF* is *BE*-vel egyenlő és egyközü; *AD*-nek *CF*nek tehát mindenike *BE*-vel egyenlő és hozzája egyközü. De azon egyenhez egyközü, vele nem egy lapbeli egyenek, egymáshoz is egyközüek; *AD* tehát *CF*-hez egyközü és vele egyenlő. De ezeket *AC DF* kötik öszve; *AC* is tehát *DF*-fel egyenlő és egyközü. Már mivel *AB BC* két oldal egyenlő *DE EF* két oldallal, *AC* talp is egyenlő *DF* talppal; tehát az *ABC* alatti szeglet egyenlő a *DEF* alattival.

Ha tehát sat.

11. Feladat:

Adott fennsö pontból adott lapra függő egyenes vonalat húzni.





Legyen az adott fensö pont *A*, az adott lap pedig a felvett: *A* pontból a felvett lapra függő egyenes vonalat kell húzni.

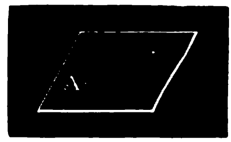
Mert vonassék a felvett lapban akármely *BC* egyen, és vonassék *A* ponttól *BC*-re *AD* függő. Ha már *AD* a felvett lapra függö, meg van a kivánt dolog. Ha pedig nem, vonassék a felvett lapban *D*-től *BC*-hez derékszegletre *DE* egyen; bocsátassék *A*-tól *DE*-re *AF* függő, és húzassék *F* ponton át *BC*-hez *GH* egyközü.

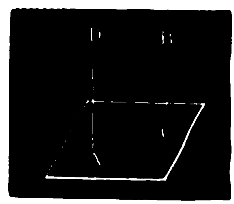
Már mivel *BC* mind *DA*-ra mind *DE*-re függő, tehát *BC* az *ED*-n *DA*-n átmenö lapra is függő, és *GH* hozzája egyközü. Már ha van két egyközü egyen, s egyik közzülök valamely lapra függő, a másik is függő lesz azon lapra; *GH* tehát az *ED*-n *DA*-n átmenő lapra függő; tehát *GH* minden hozzá érő és az *ED*-n *DA*-n átmenő lapban levő egyenekre is függő. Már pedig *GH*-t *AF* éri, és az *ED*-n *DA*-n átmenő lapban van; *GH* tehát *FA*-ra függő; úgy hogy *FA* is függő *GH*-ra. De *AF DE*-re is függő; *AF* tehát *GH*-nak *DE*-nek mindenikére függő. Már ha egy egyen két egymást vágó egyen vágó pontjára függő, az ezeken átmenő lapra is függő: *FA* tehát az *ED*-n *GH*-n átmenő lapra függő. De az *ED*-n *GH*-n átmenő lap a felvett lap: *AF* tehát a felvett lapra függő.

Az adott sat. m. b. k.

12. Feladat:

Adott lapra, a benne adott ponton függő egyenes vonalt állítani





Legyen az adott lap a felvett, s a benne való pont *A*; *A* ponton a felvett lapra függőt kell állítani.

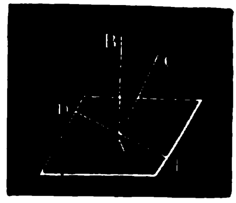
Képzeltessék *B* fennső pont és húzassék *B* pontból, a felvett lapra *BC* függő, és *A* ponton át vonassék *BC* hez egyközü *AD*.

Minthogy *AD CB* két egyközü egyen, s az egyik közzülök *BC* a felvett lapra függő: tehát a másik, *AD*, is függő a felvett lapra.

Adott lapra tehát sat. m. h. k.

13. Feladat:

Azon pontban azon lapra függő két egyent azon egy felöl nem állíthatni.

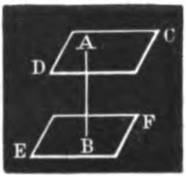


Mert ha lehet, állítassék azon *A* pontban a felvett lapra azon egy felöl két függő egyen *AB AC*, és vitessék *BA*-n *AC*-n át egy lap; ez a felvett lapot az *A*-n átvont egyenben fogja vágni. Legyen a vágásvonal *DAE*; *AB AC DAE* egyenek tehát egy lapban vannak. És minthogy *CA* a felvett lapra függő, minden hozzá érő s a felvett lapban levő egyenekkel derékszegleteket csinál. Már pedig a felvett lapban levő DAE egyen éri CA-t; a CAE alatti szeglet tehát derék. Ugyanazért a BAE alatti is derék; a CAE alatti tehát egyenlö a BAE alattival; s egy lapban vannak; mi lehetetlen.

Tehát azon egy sat.

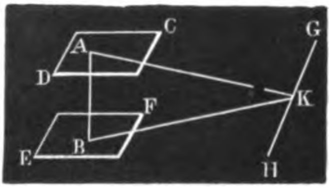
14. Feladat:

A mely lapokra azon egyen függő, azok a lapok egyközüek.



Legyen AB egyen mind CD mind EF lapra függő: azt mondom, hogy ezek a lapok egyközüek.

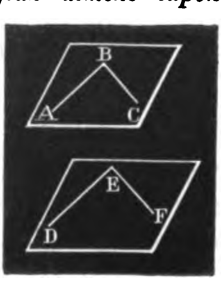
Mert ha nem, kinyujtva találkozni fognak. Találkozzanak, és a közös szeletök egyen lesz. Legyen az GH; és vétessék GH-n akármely K pont és vonassanak AK BK. Már minthogy AB egyen EF lapra függő, tehát a megnyujtott EF lapban levő BK egyenre is függő; az ABK alatti szeglet tehát derék. Ugyanazért a BAK alatti is derék. E szerint ABK háromszegnek ABK BAK alatti két szeglete két derékkel egyenlők; mi lehetetlen; CD EF lapok tehát megnyujtva nem találkozhatnak; tehát CD EF lapok egyközüek.



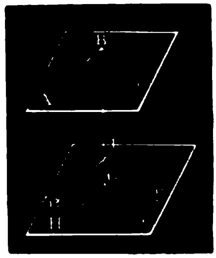
A mely lapokra tehát sat.

15. Feladat:

Ha két találkozó egyen más két találkozó egyenhez, nem levén ezekkel azonegy lapban, egyközü: a rajtuk átmenő lapok egyközüek.



Ugyanis AB BC két összetalálkozó egyen legyen DE EF összetalálkozó egyenekhez, nem levén ezekkel azon egy lapban, egyközü: azt mondom, hogy az AB BC-n meg a DE EF-en átmenő lapok megnyujtva nem fognak összeérni.

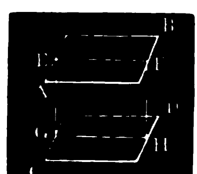


Mert húzassék *B* ponttól a *DE* n *EF*-en átmenö lapra *BG* függő, és találkozzék a lappal *G* pontban, és *G*-n át vonassanak *ED*-hez *GH*, *EF*-hez *GK* egyközüek. Már minthogy *BG* a *DE*-n *EF*-n átmenő lapra függő, tehát minden hozzá érő és a *DE*-n *EF*-en átmenő lapban levő egyenekkel derékszegletet csinál. De érik *BG* t mind *GH* mind *GK*, és a *DE*-n *EF*-en átmenő lapban vannak; a *BGH BGK* alatti szegleteknek tehát mindenike derék. És minthogy *BA GH*-hoz egyközü, [mert *DE*-hez' mind ketten egyközüek], tehát a *GBA BGH* alatti szegletek két derékkel egyenlők. De a *BGH* alatti derék, tehát derék a *GBA* alatti is; *GB* tehát *BA*-ra függő. Ugyan azért *BG* *BC*-re is függő. Már mivel *BG* egyen *BA* *BC* egymást vágó két egyenhez derékszegletben áll; tehát *BG* a *BA*-n *BC*-n átmenö lapra függö. Ugyan azért *BG* a *GH*-n *GK*-n átmenö lapra is függö. De a *GH*-n *GK*-n átmenö lap a *DE* n *EF*-en átvitt: *BG* tehát függő a *DE*-n *EF*-en átmenö lapra. Meg van pedig mutatva, hogy *GB* az *AB*-n *BC*-n átmenő lapra is függő; de függő a *DE*-n *EF*-en átmenö lapra is; *BG* tehát az *AB*-n *BC*-n meg a *DE*-n *EF*-en átmenö lapok mindenikére függö. Már pedig a mely lapokra azon egyen függő, azok a lapok egyközüek; az *AB*-n *BC*-n átmenö lap tehát egyközü a *DE*-n *EF*-en átmenőhez.

Jegyz. A rekeszbe tett szókat, mint itt szükséges idézetet, Simsonnal bészúrni, szükségesnek tartottuk.

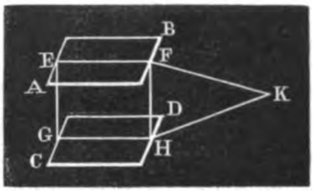
16. Feladat:

Ha két egyközü lapot egy más lap vág, közös vágásaik egyközüek lesznek.



Ugyanis *AB CD* egyközü két lapot vágja *EFGH* lap, és közös vágásaik legyenek *EF GH*: azt mondom, hogy *EF* *GH*-hoz egyközü.

Mert ha nem, *EFGH* egyenek akár *F H* felől, akár *E G* felől megnyujtva összeérnek. Nyujtassanak ki előbb *F H* felől; és érjenek össze *K*-nál. Már minthogy *EFK AB* lapban van, tehát az *EFK*-beli minden pontok *AB* lapban vannak. De *K* az *EFK*-beli pontok egyike, *K* tehát *AB* lapban van. Ugyanazért *K CD* lapban is van; *AB CD* lapok tehát megnyujtva öszszeérnek. De nem érhetnek öszsze; mert a feltétel szerint egyközüek; *EF GH* egyenek tehát *F H* felől megnyujtva nem érnek össze. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *EF GH* egyenek *E G* felől megnyujtva sem érnek össze. Már pedig az [azon lapon] egyfelé sem találkozó egyenek egyközüek; *EF* tehát *GH*-hoz egyközü.

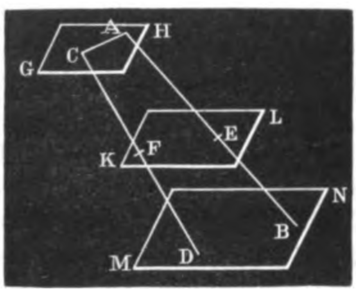


Ha tehát sat.

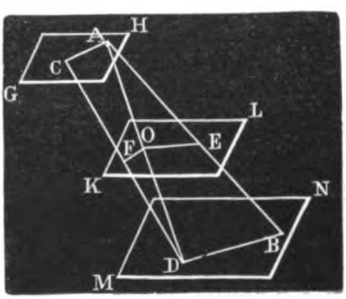
17. Feladat:

Ha két egyent egyközü lapok vágnak át: egyarányban vágják.

AB CD két egyent vágják *GH KL MN* egyközü lapok *A*, *E*, *B*, *C*, *F*, *D* pontokban: azt mondom, hogy a mint *AE* egyen *EB* hez, úgy van *CF FD*-hez.



Mert vonassanak *ACBD AD* egyenek, *AD* találkozzék *KL* lappal *O* pontban, és vonassanak *EO OF*. Már minthogy *KL MN* két egyközü lapot *EBDO* lap szeli: *EO BD* közös szeleteik egyközüek. Ugyanazért mivel a *GH KL* két lapot *AOFC* lap szeli, *AC OF* közös szeleteik egyközüek. És minthogy *ABD* háromszeg egyik *BD* oldalához

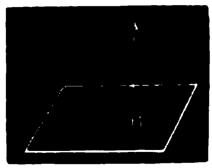


EO egyközü van vonva: tehát egyarányban a mint *AE EB*-hez, úgy van *AO OD*-hez. Ismét, mivel *ADC* háromszegnek egyik *AC* oldalához *OF* egyközü van vonva, tehát egyarányban a mint *AO OD*-hez, úgy van *CF FD*-hez. Megmutattaték pedig, hogy a mint *AO OD*-hez, úgy van *AE EB*-hez; tehát a mint *AE EB*-hez, úgy *CF FD*-hez.

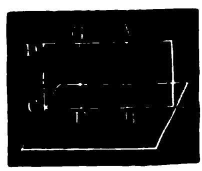
Ha tehát sat.

18. Feladat:

Ha egy egyen valamely lapra függő: minden rajta átmenő lapok függők lesznek a mondott lapra.



Mert *AB* egyen legyen függő a felvett lapra: azt mondom, hogy az *AB*-n átmenő lapok mind függők a felvett lapra.

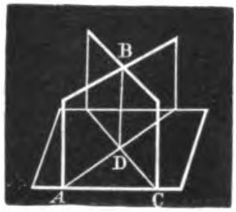


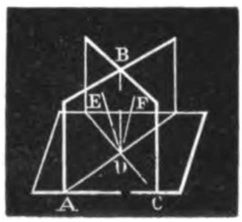
Mert nyujtassék *AB*-n át *DE* lap, és legyen *DE* lapnak és a felvettnek közös szelete *CE*; vétessék *CE*-n akármely *F* pont, és vonassék *F*-ből *DE* lapban *CE*-hez derékszegletre *FG* egyen. Már minthogy *AB* a felvett lapra függő, tehát *AB* minden hozzá érő és a felvett lapban levő egyenekre is függő; úgy hogy *CE*-re is függő; az *ABF* alatti szeglet tehát derék. De a *GFB* alatt is derék; *AB* tehát *FG*-hez egyközü. De *AB* a felvett lapra függő; tehát *GF* is függő a felvett lapra. De lap lapra függői midőn a lapok egyikében a lapok közös szeletéhez derékszegletre vont egyenek a másik lapra függők. Már pedig megmutattaték, hogy a lapok egyikében *DE*-ben a lapok közös szeletéhez *CE*-hez derékszegletre vont *FG* egyen a felvett lapra függő. *DE* lap tehát függő a felvett lapra. Hasonlókép mutattatik meg más minden, *AB*-n átmenő, lapokról is, hogy függők a felvett lapra.

Ha tehát sat.

19. Feladat:

Ha két egymást szelő lap valamely lapra függő: közös szeletök is azon lapra függő.





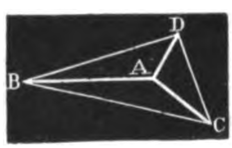
Legyen *AB BC* két lap függő a felvett lapra, s közös szeletök legyen *BD*: azt mondom, hogy *BD* a felvett lapra függő.

Mert ha nem: vonassanak *D* pontból *AB* lapban *AD* egyenhez derékszegletre *DE*, *BC* lapban pedig *CD*-hez derékszegletre *DF* egyenek. És minthogy *AB* lap a felvettre függő, és *AB* lapban a közös szeletökhöz *AD*-hez *DE* egyen derékszegletre vonatott: tehát *DE* függő a felvett lapra. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy *DF* is függő a felvett lapra; azonegy *D* pontból tehát azon lapra azonegy felől két függő egyen van állítva; mi lehetetlen; nem állíttatik tehát a felvett lapra *D* pontban más függő egyen *DB*-n, az *AB BC* lapok közös szeletén kivül.

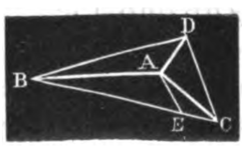
Ha tehát sat.

20. Feladat:

Ha telyszegletet három szegletlap fog bé, közzülök akármelyik kettő akárhogy véve a harmadiknál nagyobb.



Mert az *A*-nál levő telyszegletet fogja be a *BAC CAD DAB* alatti három szegletlap: azt mondom, hogy a *BAC CAD DAB* alatti szegletek közzül akármely kettő, akárhogy véve, nagyobb a harmadiknál.



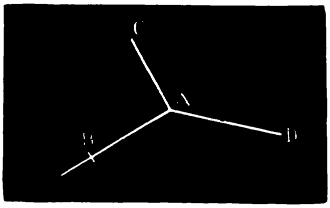
Ha már a *BAC CAD DAB* alatti szegletek egymással egyenlők, világos, hogy akármely kettő, akárhogy véve, nagyobb a harmadiknál. Ha pedig nem:

legyen nagyobb a *BAC* alatti, és állítassék *AB* egyenhez és a benne való *A* ponthoz, a *BA*-n *CA*-n átmenő lapban, a *DAB* alatti szeglettel egyenlő *BAE* alatti, és tétessék *AE* *AD*-vel egyenlővé, és az *E* ponton átvont *BEC* egyen vágja *AB* *AC* egyeneket *B* *C* pontokban, és vonassanak *DB* *DC*. És minthogy *DA* egyenlő *AE*-vel, *AB* pedig közös; e szerint *DA* *AB* két oldal *AE* *AB* két oldallal egyenlő, és a *DAB* alatti szeglet egyenlő a *BAE* alattival; *DB* talp tehát egyenlő *BE* talppal. És minthogy *DB* *DC* két egyen *BC*-nél nagyobb, s közzülök *DB* *BE*-vel egyenlőnek mutattaték meg, tehát a maradék *DC* a maradék *EC*-nél nagyobb. És minthogy *DA* egyenlő *AE*-vel, *AC* közös, *DC* talp pedig nagyobb *EC* talpnál; tehát a *DAC* alatti szeglet nagyobb az *EAC* alattinál. De megmutattaték az is, hogy a *DAB* alatti egyenlő a *BAE* alattival: a *DAB* *DAC* alattiak tehát nagyobbak a *BAC* alattinál. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy, a többiek is kettőnként véve nagyobbak a harmadiknál.

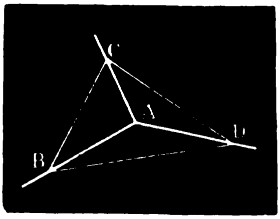
Ha tehát sat.

21. Feladat:

Minden telyszegletet négy deréknál kisebb szegletlap fog bé.



Kerítsék az *A*-nál levő telyszegletet a *BAC* *CAD* *DAB* alatti szegletlapok: azt mondom, hogy a *BAC* *CAD* *DAB* alatti szegletek négy deréknál kisebbek.

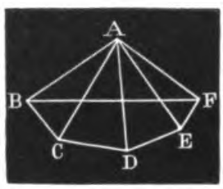


Mert vétessenek *AB*-nek *AC*-nek *AD*-nek mindenikén akármely *B* *C* *D* pontok, és vonassanak *BC* *CD* *DB* egyenek. És minthogy a *B*-nél való telyszegletet a *CBA* *ABD* *CBD* alatti szegletek kerítik, akármelyik kettő közzülök a harmadiknál nagyobb; a *CBA* *ABD* alattiak tehát nagyobbak a *CBD* alattinál. Ugyanazért a *BCA*

ACD alattiak is nagyobbak a *BCD* alattinál, s a *CDA ADB* alattiak is nagyobbak a *CDB* alattinál. A *CBA ABD BCA ACD CDA ADB* alatti hat szeglet tehát nagyobb a *CBD BCD CDB* alatti három szegletnél. De a *CBD BCD CDB* alatti három szeglet két derékkel egyenlő; a *CBA ABD BCA ACD CDA ADB* alatti hat szeglet tehát két deréknél nagyobb. És minthogy az *ABC ACD ADB* alatti háromszeg mindenikének három szeglete két derékkel egyenlő, tehát a három háromszegnek *CBA ACB BAC-ACD DAC CDA-ADB DBA BAD* alatti kilencz szeglete hat derékkel egyenlő, melyekből az *ABC BCA-ACD CDA-ADB DBA* alatti hat szeglet két deréknél nagyobb tehát a telyszegletet kerítő *BAC CAD DAB* alatti három szeglet négy deréknél kisebb.

Minden telyszegletet tehát sat.

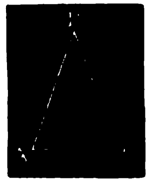
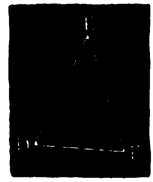
Jegyz. Az előbbi bizonyítmány csak három szegletlaptól béfogott telyszegletről szólván, a többektől befogottra következőleg alkalmazandó: Fogják bé az *A*-nál való telyszegletet *BAC CAD DAE EAF FAB* szeglet lapok akárhányan: azt mondom, hogy *BAC CAD DAE EAF FAB* öszvesen négy deréknél kisebbek.



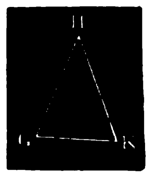
Vitessék minden szeglet lapján át egy lap mely azokat *BC CD DE EF FB* egyenekben vágja. Már minthogy a *B*-nél való telyszegletet *CBA ABF FBC* szeglet lapok fogják bé, tehát *CBA* meg *ABF* öszvesen *FBC*-nél nagyobbak. Ugyanazért a *BCDEF* sokszeg akármelyik szegleténél összefutó két szegletlap együtt nagyobb a sokszeg megfelelő szegleténél. *ABC ACD ADE AEF AFB* háromszegek *BC CD DE EF FB* talpaiknál való szegletek tehát öszszesen nagyobbak, mint a sokszeg szegletei öszszesen. Már pedig mind e háromszegek minden szegletei összesen két annyi derékszeggel egyenlők, mint a hány a háromszeg: azaz a hány oldala van a sokszegnek. De a sokszeg szegletei öszszesen négy derékszeg hián két annyi derékszeggel egyenlők, a mint a hány oldala van a derékszegnek; úgy hogy a háromszegek minden szegletei öszszesen a sokszeg minden szegleteivel, meg négy derékkel egyenlők. De megmutattaték, hogy a háromszegek talp szegletei öszszesen a sokszeg szegleteinél nagyobbak; tehát az *A*-nál való maradék: azaz a telyszegletet befogó szegletek a maradék négy derékszegletnél kisebbek.

22. Feladat:

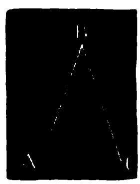
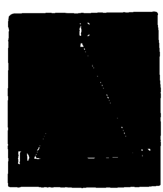
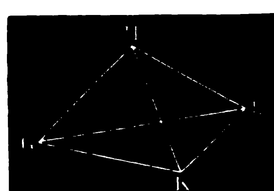
Ha van három szegletlap, melynek ketteje, akármiképp véve, nagyobb a harmadiknál, s a szegleteket egyenlö egyenek fogják bé: lehet az egyenlö egyeneket öszszekötö egyenekböl háromszeget állítani öszsze.

Legyen *ABC DEF GHK* alatti három szegletlap, melyeknek ketteje, akármiképp véve, nagyobb legyen a harmadiknál, ú. m. az *ABC DEF* alattiak nagyobbak a *GHK* alattinál, a *DEF GHK* alattiak az *ABC* alattinál; s még a *GHK ABC* alattiak is a *DEF* alattinál: s legyenek *AB BC*, *DE EF*, *GH HK* egyenek egyenlök; és vonassanak *AC DF GK*: azt mondom, hogy lehet az *AC*-vel *DF*-fel *GK*-val egyenlö egyenekböl háromszeget állítni össze: azaz hogy *AC DF GK* egyenek közzül akármelyik kettö, akármiképp véve, a harmadiknál nagyobb.



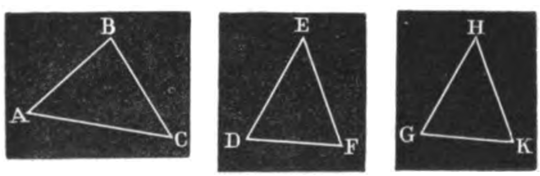
Már ha az *ABC DEF GHK* alatti szegletek egyenlök, világos: hogy *AC DF GK* is egyenlök levén, lehet az *AC*-vel *DF*-fel *GK*-val egyenlö egyenekböl háromszeget öszszeállítni. Ha pedig nem, ne legyenek egyenlök, és állítassék *HK* egyenhez a benne levö *H* pontnál [a *GH*-n *HK*-n átmenö lapban] az *ABC* alatti szeglettel egyenlö *KHL* alatti, és tétessék *HL* egyen *AB BC DE EF*, *GH HK* egyenek valamelyi kével egyenlövé, és vonassanak *KL GL*. Már mivel *AB BC* két oldal egyenlö *KH HL* két oldallal, s a *B*-nél levö szeglet egyenlö a *KHL* alattival; tehát *AC* talp

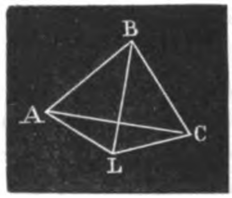
KL talppal egyenlő. És minthogy az ABC GHK alatti szegletek a DEF alattinál nagyobbak, de az ABC alatti egyenlő a KHL alattival; tehát a GHL alatti nagyobb a DEF alattinál. És minthogy GH HL két oldal, DE EF két oldallal egyenlő, s a GHL alatti szeglet nagyobb a DEF alatti szegletnél; tehát GL talp nagyobb DF talpnál. De GK KL nagyobbak GL-nél; tehát GK KL még annálinkább nagyobbak DF-nél. Már pedig KL AC-vel egyenlő; AC GK tehát nagyobbak a harmadiknál DF-nél. — Hasonlókép mutatjuk meg, hogy AC DF is nagyobbak GK-nál, és DF GK, AC-nél. Lehet hát az AC-vel DF-fel GK-val egyenlő egyenekből háromszeget összeállítni.

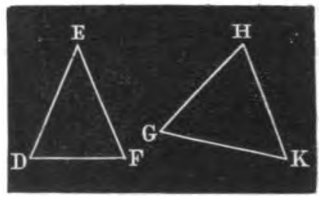
Ha tehát sat.

Más bizonyítmány:



Legyen a három szegletlap az ABC DEF GHK alatti, melyeknek ketteje, akárhogy véve, a harmadiknál nagyobb legyen; és fogják bé AB BC, DE EF, GH HK egyenlő egyenek, és vonassanak AC DF GK: azt mondom, hogy AC-vel DF-fel GK-val egyenlő egyenekből lehet háromszeget összeállítni azaz: hogy kettőjök, akárhogy véve, a harmadiknál nagyobb. Mert ismét ha a B E H pontoknál levő szegletek egymással egyenlők, AC DF GK is egyenlők lesznek, s kettőjök a harmadiknál nagyobb. Ha pedig nem, legyenek a B E H pontoknál való szegletek nem egyenlők, és a B-nél való legyen mind az E-nél mind a H-nál valónál nagyobb; tehát AC egyen is mind DF-nél mind GK-nál nagyobb lesz. És így világos: hogy AC akár DF-fel akár GK-val együtt a harmadiknál nagyobb. De azt mondom, hogy DF GK is együtt nagyobbak AC-nél.

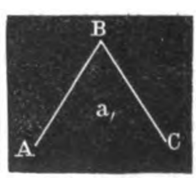


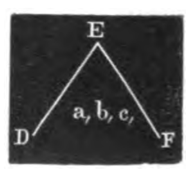


Mert állíttassék *AB* egyenhez, *B* pontjánál a *GHK* alatti szeglettel egyenlő *ABL*, és *BL* tétessék *AB BC*, *DE EF*, *GH HK* egyenek akármelyikével egyenlővé, és vonassanak *AL LC*. Már mivel *AB BL* két oldal, *GH HK* két oldallal külön-külön egyenlők, és egyenlő szegleteket fognak bé: tehát *AL* talp *GK* talppal egyenlő. És minthogy az *E H* pontoknál levő szegletek együtt az *ABC* alattinál nagyobbak, melyekből a *GHK* alatti az *ABL* alattival egyenlő: tehát az *E*-nél való maradék szeglet az *LBC* alattinál nagyobb. És minthogy *LB BC* két oldal, *DE EF* két oldallal külön-külön egyenlők, és a *DEF* alatti szeglet az *LBC* alattinál nagyobb, tehát *DF* talp nagyobb *LC* talpnál. Megmutattaték pedig, hogy *GK* egyenlő *AL*-lel; *DF GK* tehát együtt nagyobbak mint *AL LC* együtt. De *AL LC* együtt nagyobbak mint *AC*; még annálinkább nagyobbak tehát *DF GK* mint *AC*. *AC DF GK* egyeneknek tehát akárhogy véve kettejök nagyobb a harmadiknál; *AC DF GK* egyenekkel egyenlő vonalakból tehát háromszeget lehet alkotni: m. b. k.

23. Feladat:

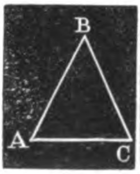
Három szegletlapból, melynek ketteje akármiképp véve nagyobb a harmadiknál, telyszegletet szerkeszteni; de a három szegletnek együtt négy deréknél kisebbnek kell lenni.

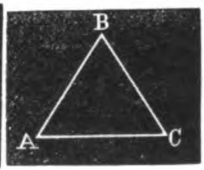




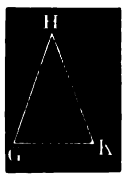
Legyen a három adott szegletlap az *ABC DEF GHK* alatti,

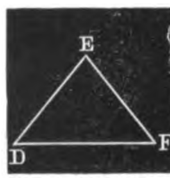
melyeknek ketteje akármi képp véve a harmadiknál nagyobb, és a három szeglet együtt négy deréknél kisebb legyen: az *ABC DEF GHK* alattiakkal egyenlő szegletekből telyszegletet kell összeállítni.

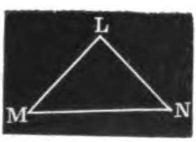


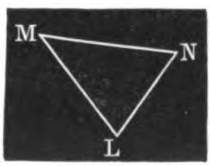


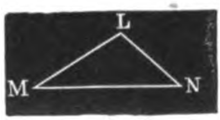
Vágassanak *AB BC DE EF, GH HK* egyenlökké, és vonassanak *AC DF GK*; tehát *AC*-vel *DF*-fel *GK*-val egyenlő egyenekből lehet háromszeget alkotni. Alkottassék *LMN*, úgy hogy *AC LM*-mel, *DF MN*-nel, és *GK LN*-nel legyenek egyenlök, és *LMN*





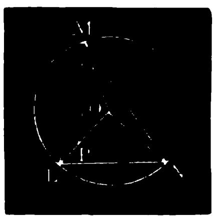




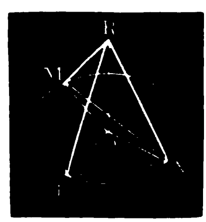


háromszeg körül írassék *LMN* kör, és vetessék ennek középpontja: már ez a háromszegen vagy belöl, vagy egyik oldalába, vagy rajta kivül fog esni.

Legyen elöbb belöl, és legyen az *O*, és vonassanak *LO MO NO*: azt mondom, hogy *AB* nagyobb mint *LO*. Mert ha nem, *AB* vagy egyenlö *LO*-val, vagy kisebb nála. Legyen elöbb egyenlö. És minthogy *AB* egyenlö *LO*-val, de *AB BC*-vel, *LO OM*-mel egyenlök, e szerint *AB BC* két oldal, *LO OM* két oldallal külön-külön egyenlők, *AC* talp is a feltét szerint egyenlö *LM* talppal; az *ABC* alatti szeglet tehát egyenlö az *LOM* alattival. Ugyanazért a *DEF* alatti is egyenlö az *MON* alattival, s a *GHK* az *NOL* alattival; az *ABC DEF*, *GHK* alatti három szeglet tehát az *LON MON NOL* alatti hárommal egyenlö. De az *LOM MON NOL* alatti három szeglet négy derékkel egyenlö; az *ABC DEF GHK* alatti három szeglet is tehát egyenlö négy derékkel. De a feltét szerint kisebb is négy deréknél; mi képtelen. *AB* tehát *LO*-val nem egyenlö. De azt mondom, hogy nem is kisebb *AB* *LO*-nál. Mert ha lehet, legyen; és vétessék *AB*-vel egyenlö *OP*, és *BC*-vel egyenlö *OQ* darab, és vonassék *PQ*. Már minthogy *AB* egyenlö *BC*-vel, *OP* is egyenlö *OQ*-val, úgy hogy a maradék *LP* is egyenlö a maradék *QM*-mel. [Tehát a mint *LP PO*-hoz, úgy van *MQ QO*-hoz:] *LM* tehát *PQ*-hoz egyközü, és *LMO PQO*-val egyenlö szegletü; a mint tehát *OL LM*-hez, úgy van *OP PQ*-hoz; cserélve tehát a mint *LO OP*-hez, úgy *LM PQ*-hoz. Már *LO* nagyobb *OP*-nél; *LM* is tehát nagyobb *PQ*-nál. De *LM* a felvétel szerint egyenlö *AC*-vel; *AC* is tehát nagyobb *PQ*-nál. Minthogy hát *AB BC* két oldal *PO OQ* két oldallal egyenlö, és *AC* talp nagyobb *PQ* talpnál: annál fogva az *ABC* alatti szeglet nagyobb a *POQ* alattinál. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy a *DEF* alatti is nagyobb az *MON* alattinál, s a *GHK* alatti az *NOL* alattinál; az *ABC DEF GHK* alatti három szeglet tehát nagyobb az *LOM MON NOL* alatti három szegletnél. De az *ABC DEF GHK* alatti szegletek a feltét szerint négy deréknél kisebbek, annálinkább kisebbek tehát az *LOM MON NOL* alattiak négy deréknél. De egyenlök is, mi képtelen. *AB* tehát *LO*-nál nem kisebb. Megmutattaték, hogy nem is egyenlö; *AB* tehát *LO*-nál nagyobb.

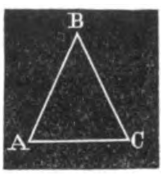


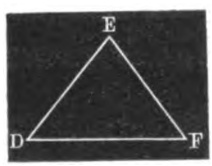
Állítassék *O* pontban az *LMN* kör lapjára *OR* függö; s a mekkorával nagyobbb az *AB* négyszege az *LO*-énál, azzal egyenlö legyen az *OR*-é; és vonassanak *RL RM RN* egyenek. És minthogy *OR* az *LMN* kör lapjára függö, tehát *LO*-nak *MO*-nak *NO*-nak is mindenikére függö lesz *RO*. És mivel *LO* egyenlö *OM*-mel, *OR* pedig közös és függö; tehát *RL* talp egyenlö *RM* talppal. Ugyanazért *RN*



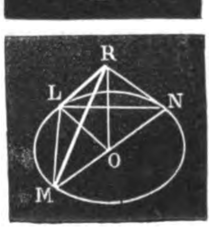
is egyenlő mind *RL*-lel mind *RM*-mel; *RL RM RN* három egyen tehát egymással egyenlők. És minthogy a mekkorával nagyobb az *AB* négyszege az *LO*-énál, akkora, a feltét szerint, az *OR*-é: tehát az *AB* négyszege az *LO OR* négyszegeikkel egyenlő. Az *LO OR* négyszegikkel pedig egyenlő az *LR*-é, mert az *LOR* alatti szeglet derék; az *AB* négyszege tehát egyenlő az *LR*-ével; *AB* tehát egyenlő *RL*-lel. De *AB*-vel egyenlő *BC DE EF GH HK* egyeneknek mindenike, *RL*-lel megint egyenlő *RM*-nek *RN*-nek mindenike; *AB BC DE EF GH HK* egyenek közzül tehát mindenik, *RL RM RN* egyenek mindenikével egyenlő. És minthogy *LR RM* két oldal egyenlő *AB BC* két oldallal, s *LM* talp, a feltét szerint, egyenlő *AC* talppal; tehát az *LRM* alatti szeglet egyenlő az *ABC* alattival. Ugyanazért az *MRN* alatti szeglet is egyenlő a *DEF* alattival, s az *LRN* alatti a *GHK* alattival.

Az *LRM MRN LRN* alatti három szegletlapból, mely az *ABC DEF GHK* alatti adott hárommal egyenlő, össze van állítva *R*-nél az *LRM MRN LRN* alatti szegletektől kerített telyszeglet: m. t. k.



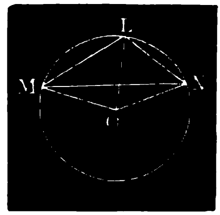


De legyen a kör középpontja a háromszeg egyik oldalában, *MN*-ben, legyen az *O*, és vonassék *OL*: ismét azt mondom, hogy *AB LO*-nál nagyobb. Mert ha nem, *AB* vagy egyenlő *LO*-val, vagy kisebb ennél. Legyen előbb egyenlő. E szerint *AB BC*, azaz *DE EF* két oldal egyenlő *MO OL* két oldallal, azaz *MN*-nel. De *MN* a feltét szerint egyenlő *DF*-fel; *DE EF* is tehát egyenlők *DF*-fel: mi lehetetlen, *AB* tehát nem egyenlő *LO*-val. Hasonlóképp nem is kisebb, mert e még annál nagyobb lehetetlenség; *AB* tehát *LO*-nál nagyobb. És hasonlóképp, ha a mekkorával

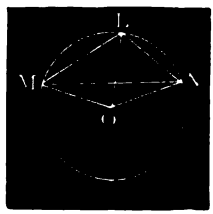


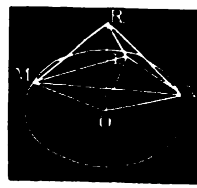
nagyobb az *AB* négyszege az *LO*-énál, azzal egyenlőre emelhető egyent állitunk a kör lapjához derékszegletre ú. m. *OR*-et, teljesítjük vele a mi előnkbe vala szabva.

De legyen a kör középpontja *LMN* háromszegen kivül; legyen az *O*, és vonassanak *LO MO NO*: azt mondom, hogy gy is *AB* nagyobb *LO*-nál. Mert ha nem, vagy egyenlő, vagy kisebb. Legyen előbb egyenlő; így *AB BC* két oldal, *MO OL* két oldallal külön-külön egyenlő, és *AC* talp egyenlő *ML* talppal; az *ABC* alatti szeglet tehát egyenlő az *MOL* alattival.

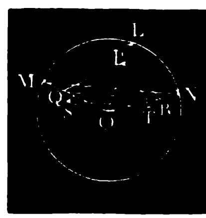


Ugyanazért a *GHK* alatti is egyenlő az *LON* alattival; az egész *MON* alatti tehát egyenlő az *ABC GHK* alatti két szeglettel. De az *ABC GHK* alattiak a *DEF* alattinál nagyobbak, az *MON* alatti is tehát nagyobb a *DEF* alattinál. És minthogy *DE EF* két oldal, *MO ON* két oldallal egyenlő, s *DF* talp egyenlő *MN* talppal; tehát az *MON* alatti szeglet egyenlő a *DEF* alattival. Már pedig megmutattaték, hogy nagyobb is; mi képtelen; *AB* tehát nem egyenlő *LO*-val. Tüstént megmutatjuk, hogy nem is kisebb; tehát nagyobb. És ha ismét a kör lapjához derékszegletre állítjuk *OR* egyent, s felteszszük, hogy azzal a mivel az *AB* négyszege az *LO*-énál nagyobb, egyenlőre emelhető, teljesítve lesz, a mi elénkbe van szabva.



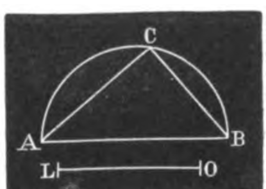


Most már azt mondom, hogy nem is kisebb *AB LO*-nál. Mert ha lehet, legyen; és tétessék *OP AB*-vel egyenlővé, *OQ* pedig *BC*-vel egyenlővé, és vonassék *PQ*. Már minthogy *AB* egyenlő *BC*-vel, *OP* is egyenlő *OQ*-val; úgy hogy a maradék *PL* is egyenlő a maradék *QM*-mel; *LM* tehát *OP*-hez egyközü, és *LMO* háromszeg *QOP* három-



szeggel egyenlő szegletü. Tehát a mint *OL LM*-hez, úgy van *OP PQ*-hoz, és cserélve a mint *LO OP*-hez, úgy van *LM PQ*-hoz; *LO* pedig nagyobb *OP*-nél; *LM* is tehát nagyobb *PQ*nál; de *LM AC*-vel egyenlő; *CA* tehát nagyobb *PQ*-nál. Minthogy hát *AB BC* két oldal egyenlő *PO OQ* két oldallal, s *AC* talp *PQ* talpnál nagyobb; tehát az *ABC* alatti szeglet nagyobb á *POQ* alattinál. Hasonlólag ha *OR* darabot akár *OP*-vel akár *OQ*-val egyenlőre vágjuk, s *PR* egyent vonjuk, megmutatjuk, hogy a *GHK* alatti szeglet is nagyobb a *POR* alattinál. Állítassék *LO* egyenhez, ennek *O* pontjánál, az *ABC* alatti szeglettel egyenlő *LOS* alatti, s a *GHK* alattival egyenlö *LOT* alatti, és legyen mind *OS* mind *OT PO*-val egyenlő, és vonassanak *PS PT ST*. Már mivel *AB BC* két oldal egyenlő *PO OS* két oldallal, s az *ABC* alatti szeglet egyenlő a *POS* alatti szeglettel, tehát *AC* talp, azaz: *LM*, *PS* talpnál nagyobb. Ugyanazért *LN* is nagyobb *PT*-nél. És minthogy *ML LN* két oldal *SP PT* két oldallal egyenlő, s az *MLN* alatti szeglet nagyobb az *SPT* alattinál: tehát *MN* talp *ST* talpnál nagyobb. De *MN DF*-fel egyenlő; *DF* tehát nagyobb *ST*-nél. Minthogy pedig *DE EF* két oldal *SO OT* két oldallal egyenlő, s *DF* talp *ST* talpnál nagyobb, tehát a *DEF* alatti szeglet nagyobb az *SOT* alattinál. Már az *SOT* alatti egyenlő az *ABC GHK* alattiakkal; a *DEF* alatti tehát nagyobb az *ABC GHK* alattiaknál. De kisebb is: mi lehetetlen.

Felvétel: Mi módon kelljen pedig *OR*-nek azzal, a mivel az *AB* négyszege az *LO*-énál nagyobb, egyenlő négyszegét venni? imígy mutatjuk meg.



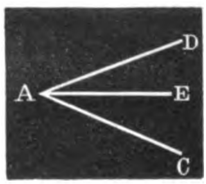
Vétessenek fel *AB LO* egyenek, és a nagyobbik legyen *AB*, és irassék erre *ABC* félkör, és *ABC* félkörbe illesztessék az *AB* átmérőnél nem nagyobb *LO*-val egyenlő *AC* egyen, és vonassék *BC*.

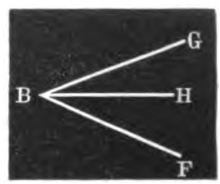
Már mivel az *ACB* alatti szeglet *ABC* félkörben van, az ACB alatti szeglet derék; az AB négyszege tehát az AC CB négyszegeikkel egyenlő, miszerint az AB négyszege az AC-énél a BC-ével nagyobb. AC pedig LO-val egyenlő, úgy hogy az AB négyszege az LO-énál a CB-ével nagyobb. Ha hát BC egyennel egyenlő OR-et veszünk, az AB négyszege az OL-énél az OR-ével lesz nagyobb m. t. k.

Jegyz. A következő (A. B. C.) három feladatot Simson R. nyomán férkeztettük ide.

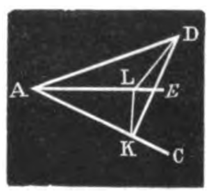
A. Feladat:

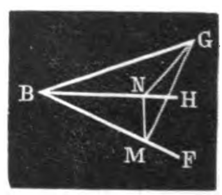
Ha két telyszegletet külön-külön egyenlő három-három szegletlap fog bé: az egyenlő szegletü lapok hasonlóan lesznek egymáshoz dülve.





Fogják be az A-nál és B-nél való két telyszegletet három három egyenlö szegletlap, úgy hogy CAD FBG-vel, CAE FBH-val, EAD HBG-vel legyenek egyenlők: azt mondom: CAD lap DAE-hez, és FBG GBH hoz, megint DAE EAC-hez, és GBH HBF-hez, és ismét EAC CAD-hez, és HBF FBG-hez hasonlóan vannak dülve.





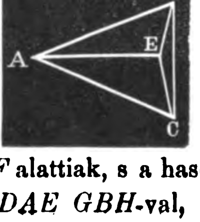
Mert vétessék AC egyenben akármely K pont, és állítassék ebben CA egyenhez az CAD lapban KD függö, CAE lapban pedig KL függö. Már DAC lapnak CAE laphoz dülése, a CA közös szeletök K pontjához derékszegletre vont KD KL egyenek közzé fogott DKL szeglet. Vágassék el BF-ből AK-val egyenlő BM, és állítassanak BF-re az ebbeni M pontnál MG MN függök, MG függö a CAD-vel egyenlö szegletü FBG lapban, MN függö a CAE-vel egyenlö szegletü

FBH lapban; tehát *GMN* szeglet az *FBG FBH* lapok egymáshoz való dülése. Vonassanak *DL GN.*

Már minthogy a *KAD* alatti szeglet egyenlő az *MBG* alattival, s az *AKD* alatti derékszeglet egyenlő a *BMG* alattival, de *AK* oldal is egyenlő *BM* oldallal: tehát *KAD MBG* háromszegekben két szeglet két szeglettel, s a két szeglet közti oldal a két szeglet közti oldallal egyenlők; miszerint a többi oldalok is *KD MG*-vel és *AD BG*-vel egyenlők lesznek. Ugyanazért *KAL MBN* háromszegekben is *KL MN*-nel és *AL BN*-nel egyenlők. De megmutattaték, hogy *AD* is *GB*-vel egyenlő. *DAL GBN* háromszegekben tehát *DA AL* két oldal *GB BN* két oldallal külön-külön egyenlők, a közükbe fogott *DAE* alatti szeglet is egyenlő a *GBH* alattival; miszerint a harmadik *DL* oldal is a harmadik *GN* oldallal egyenlő. Meg vala pedig mutatva, hogy *KL* is *MN*-nel és *KD MG*-vel egyenlők; *KDL MGN* két háromszegben tehát *DK KL* két oldal *GM MN* két oldallal külön-külön egyenlők; *DL* talp is egyenlő *GN* talppal, úgy hogy a talppal átelleni *DKL* alatti szeglet is egyenlő a másik talppal átelleni *GMN* alattival; már pedig a *DKL* alatti szeglet a *CAD CAE* lapok dülése; a *GMN* alatti pedig *FBG FBH* lapok dülése egymáshoz; tehát *CAD CAE*-hez, és *FBG FBH*-hoz hasonlóan dülvék. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy *CAE EAD*-hez és *FBH HBG*-hez, és ismét *EAD DAC*-hez, és *HBG GBF*-hez hasonlóan dülvék.

B. Feladat:

Ha két szegletet három-három szegletlap fog bé, s a hasonfektü lapszegletek külön-külön egyenlők: a két szeglet egyenlő leend.

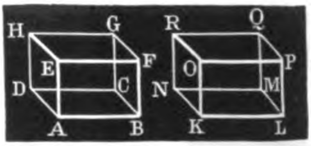


Fogják bé az *A*-nál való telyszegletet a *CAD*, *DAE*, *EAC* alatti szegletlapok, a *B*-nél való telyszegletet az *FBG GBH HBF* alattiak, s a hasonfektü szegletlapok ú. m. *CAD FBG*-vel, *DAE GBH*-val, *EAC HBF*-fel legyenek egyenlők; azt mondom hogy, az *A*-nál való telyszeglet a *B*-nél valóval egyenlő.

Fektessék az *A*-nál való telyszeglet a *B*-nél valóba úgy, hogy *A* pont *B* pontba, a *CAD* alatti szegletlap az *FBG* alattira, és *AC* vonal *BF*-re essék; tehát a *CAD* alatti szeglet az *FBG* alattival egyenlő levén, *AD* is *BG*-re esik. De ha két telyszegletet három-három egyenlő lapszeglet fog bé, az egyenlő szegletü lapok egymáshoz hasonlóan dűlvék; tehát *CAE* lap *CAD*-hez, és *FBH* *FBG*-hez hasonlóan van dűlve; miszerint *CAE* *FBH*-ra esik, mivel *CAD* *FBG*-re esett. És minthogy a *CAE* alatti szeglet egyenlő az *FBH* alattival, *AE* oldal *BH*-ra esik. De megmutattaték, hogy *AD* is *BG*-re esik, és *BH* *BG* egy lapban vannak; tehát *DAE* lap is *GBH* lapra fog esni. E szerint az *A*-nál és *B*-nél való telyszegletek egymásra illenek, és egyenlők.

C. Feladat:

Egyenlő számu, egyenlő, hasonló és hasonfektü laptól körülfogott két tely, melynek mindenik telyszegletét csak három szegletlap fogja bé, egymással egyenlő és egymáshoz hasonló.

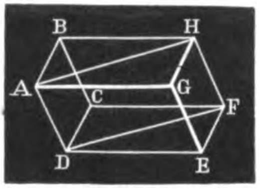


Legyen *AG* *KQ* két tely, melyeknek egyikét *AC* *CF*, *BE* *ED*, *DG* *GE* lapok, másikát amazokkal azon rendben külön-különn egyenlő és hozzájok hasonló *KM* *MP*, *LO* *ON*, *NQ* *QO* lapok fogják körül, s a melyeknek mindenik tely-szegletét csak három-három szegletlap fogja bé: azt mondom, hogy *AG* tely *KQ* telylyel egyenlő, és hozzája hasonló.

Mert mivel az *A*-nál való telyszegletet béfogó *BAD* *BAE* *EAD* három szegletlap a *K*-nál való telyszegletet béfogó hasonfektü *LKN* *LKO* *OKN* három szegletlappal különkülön egyenlő, tehát az *A*-nál való telyszeglet egyenlő a *K*-nál levővel. Ugyanazért a *B* *F* *G* *C* *D* *H* *E*-nél való telyszegletek is külön-külön az L P Q M N R O-nál valókkal egyenlők. Ha tehát AG telyet KQ telybe belé és AC-t KM-re úgy fektetjük, hogy AB egyen KL-re essék; AC és KM egymásra esnek; e szerint AD KN-re, DC NM-re, CB ML-re, A pont K-ra, D N-re C M-re, B L-re fognak esni. De az A-nál való telyszeglet a K-nál valóval egyenlő levén, AF és AH lapok AC-hez és KP KR KM-hez hasonlóan dülvék; tehát AF lap KP-re, AH KR-re esik. Már pedig AF képlet KP-vel, AH KR-rel egyenlők és hozzájok hasonlók; úgy hogy AE egyen is KO-ra, EF OP-re, EH OR-re, HD RN-re, és F pont P-re, E O-ra, H R-re fognak esni. Hasonlókép mutatjuk meg a B-nél való telyszegletnek az L-nél valóval egyenlő voltából, hogy G pont is Q-ra esend. AG KQ telyeknek tehát minden csúcspontjai, tehát minden ezekközti egyenek, következőleg, minden lapjaik egymásra esnek; tehát azonegy ürt fogják körül; AG KQ telyek tehát egymással egyenlők, és egymáshoz hasonlók.

24. Feladat:

Ha telyet [hat] egyközü lap fog körül: az átelleni lapok egyenlők, [hasonlók], és egyközények.



Ugyanis $CDHG$ telyet kerítsék AC GF AH DF BF AE egyközü lapok: azt mondom, hogy átelleni lapjai egyenlők és egyközények.

Mert minthogy BG CE két egyközü lapot AC lap szeli, közös szeleteik egyközüek; AB tehát DC-hez egyközü. Ismét minthogy BF AE két egyközü lapot AC lap szeli, közös szeleteik egyközüek; BC tehát AD-hez egyközü. De megmutattaték, hogy AB is egyközü DC-hez; AC tehát egyközény. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy DF FG GB BF AE is mind egyközények.

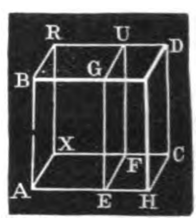
Vonassanak AH DF. És minthogy AB DC-hez, BH pedig CF-hez egyközü, ennélfogva AB BH egymást érő két egyen DC CF egymást érő két egyenhez, nem levén velök azon lapban, egyközü; tehát egyenlő szegleteket fognak be; az *ABH* alatti szeglet tehát egyenlő a *DCF* alattival. És mivel *AB BH* két egyen, *DC CF* két egyennel egyenlő, s az *ABH* alatti szeglet egyenlő a *DCF* alattival: tehát *AH* talp egyenlő *DF* talppal, és *ABH* háromszeg egyenlő *DCF* hászeggel. Már az *ABH* kettözete *BG* egyközény, a *DCF* kettözete pedig *CE* egyközény; *BG* egyközény tehát *CE* egyközénynyel egyenlő. — Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *AC* is egyenlők *GF*-fel, és *AE BF*-fel.

Ha tehát sat.

Jegyz. A feladat kimondásába szúrt „hat" szükséges, hogy a feladat kifogástól ment igazságu legyen. A „hasonlók" pedig, hogy a következő 25-dik feladat jobbított bizonyítmányának alapul szolgáljon; a bizonyítmányt interpolálni nem tartottuk szükségesnek, mivel a hasonlatosság a mondottakból kitetszik.

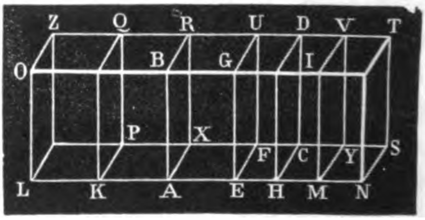
25. Feladat:

Ha egyközlapu telyet az átelleni lapjaihoz egyközü lap szel: a mint a talp a talphoz, úgy leend a tely a telyhez.



Ugyanis *ABCD* egyközlapu telyet szelje *RA DH* átelleni lapokhoz egyközü *FG* lap: azt mondom, hogy a mint *AEFX* talp *EHCF* talphoz, úgy van *ABFU* tely *EGCD* telyhez.

Mert nyujtassék meg *AH* mind a két felől, és tétessenek *AE*-vel egyenlővé akárhány *AK KL* darabok, *EH*-val pedig egyenlővé akárhány *HM MN* darabok; és egészítessenek ki *LP KX HY MS* egyközények, és *LQ KR DM MT* telyek. És minthogy *LK KA AE* egyenek egymással egyenlők, *LP KX AF* egyközények is egyenlők egymással, *KO KB AG* is egymással; és még *LZ KQ AR* is egymás-



sal, mert átelleniek. Ugyanazért *EC HY MS* egyközények is egyenlők egymással, *HG HI IN* is egymással, s még *DH MV NT* is; *LQ KR AU* telyeknek három lapja tehát három lappal egyenlő. De ez a három más három átellenivel egyenlő; *LQ KR AU* három tely tehát egymással egyenlő. Ugyanazért *ED DM MT* három tely is egyenlő egymással; a hányszorzata tehát *LF* talp *AF* talpnak, annyiszorzata *LU* tely is *AU* telynek. Ugyanazért a hányszorzata *NF* talp *FH* talpnak, annyiszorzata *NU* tely is *HU* telynek. És ha *LF* talp egyenlő *NF* talppal, *LU* tely is egyenlő *NU* telylyel; s ha *LF* talp nagyobb *NF* talpnál, *LU* tely is nagyobb *NU* telynél: s ha kisebb, kisebb. Levén már négy mekkoraság, két talp *AF FH*, és két tely *AU UH*, *AF* talpnak és *AU* telynek *LF* talp és *LU* tely egyenlő szorzatai vétettek, *HF* talpnak és *HU* telynek pedig *NF* talp és *NU* tely; és megmutattatott, hogy ha *LF* talp nagyobb *NF* talpnál, *LU* tely is nagyobb *NU* telynél; ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb; tehát a mint *AF* talp *FH* talphoz, úgy van *AU* tely *UH* telyhez.

Más bizonyítmány, nem a 11-dik könyvbeli 10-dik értelmezés jegére építve:

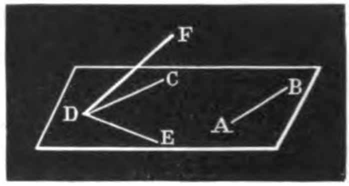
Nyujtassék meg *AH* mind kétfelé, és tétessenek *AE*-vel akárhány *AK KL* darabok, és ismét *EH*-val akárhány *HM MN* darabok egyenlőkké. Egészítessenek ki *LP KX HY MS* egyközények és *LQ KR DM MT* telyek.

Már minthogy *LK KA AE* egyenek egymással egyenlők, *LP KX AF* egyközények is egyenlők egymással. Hasonló okból *ZP PR XU* egyközények is egyenlők, és *LZ KQ AR* is mint átelleni lapok egymással egyenlők. Ugyanazért *EC HY MS* egyközények, *FD CV YT* egyközények, és *HD MV NT* egyközények is egyenlők.

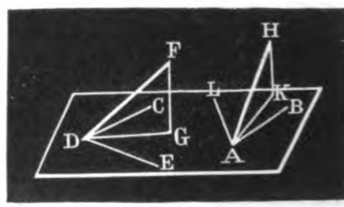
LQ telynek tehát három lapja *KR* telynek három lapjával, és ismét *AU* telynek három lapjával egyenlő és hozzájok hasonló. De az ezekkel átelleni lapok is egyenlők és hasonlók egymáshoz, és mindenik telyszegletöket csak háromhárom szegletlap fogja be; miszerint *LQ KR AU* telyek egyenlők. Ugyanazért *ED, HV MT* telyek is egyenlők egymással. *LU* tely tehát *AU* telynek annyiszorzata, a hányszorzata *LF* talp *AF* talpnak. Ugyanazért *ET* tely is *ED* telynek az a szorzata, a mi *ES* talp *FC* talpnak. Már pedig ha *LF* talp *ES* talpnál nagyobb, *LU* tely is nagyobb leend *ET* telynél; ha egyenlő, egyenlő; ha kisebb, kisebb. Tehát a mint *AF* lap *EC* laphoz, úgy van *AU* tely *ED* telyhez: m. b. k.

26. Feladat:

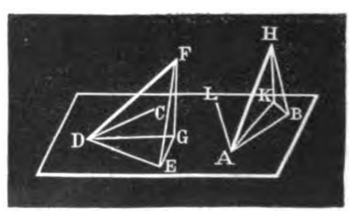
Adott egyenhez s abban levő ponthoz, adott telyszeglettel egyenlő telyszeglett állítni.



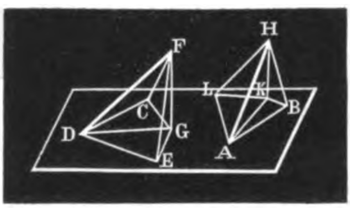
Legyen az adott egyen *AB*, s a benne levő pont *A*, az adott telyszeglet pedig a *D*-nél való, az *EDC EDF FDC* alatti szegletlapoktól kerített: már *AB* egyenhez s abbeli *A* ponthoz kell a *D*-nél való telyszeglettel egyenlő telyszegletet állítni.



Vétessék *DF*-en akármely *F* pont, és vonassék *F*-en át az *ED*-n *DC*-n átmenő lapra *FG* függő, ez találkozzék a lappal *G*-nél, vonassék *DG*, és állíttassék *AB* egyenhez s az ebbeli *A* ponthoz az *EDC* alatti szeglettel egyenlő *BAL* alatti, s az *EDG* alattival egyenlő *BAK* alatti, és tétessék *AK* *DG*-vel egyenlővé, és állítassék *K* pontban a *BA*-n *AL*-n átmenő laphoz derékszegletre *KH* egyen, tétessék *KH* *GF*-fel egyenlővé, és vonassék *HA*: azt mondom, hogy az *A*-nál *BAL BAH HAL* alatti szegletektől kerített telyszeglet egyenlő a *D*-nél *EDC EDF FDC* szegletektől kerített telyszeglettel.



Mert vágassanak el *AB DE* egyenlő darabok, és vonassanak *HB KB FE GE*. És minthogy *FG* a felvett lapra függő, tehát minden hozzá érő s a felvett lapban levő egyenekkel is derékszegletet csinál; az *FGD FGE* alatti szegleteknek tehát mindenike derék. Ugyanazért a *HKA HKB* alattiaknak is derék mindenike. Már mivel *KA AB* két oldal *GD DE* két oldallal külön-külön egyenlő, s egyenlő szegleteket fognak bé: tehát *KB* talp *EG* talppal egyenlő. De *KH* is egyenlő *GF*-fel, és derékszegleteket fognak bé; *HB* tehát *FE*-vel egyenlő. Ismét, minthogy *AK KH* két oldal *DG GF* két oldallal egyenlő, és derékszegleteket fognak bé; tehát *AH* talp egyenlő *DF* talppal. De *AB* is egyenlő *DE*-vel; e szerint *HA AB* két oldal egyenlő *DF DE* két oldallal, *HB* talp is egyenlő *FE* talppal; a *BAH* alatti szeglet tehát egyenlő az *EDF* alatti szeglettel. Ugyanazért a *HAL* alatti is egyenlő az *FDC* alattival; — (minthogy ha *AL DC* egyenlő darabokat elvágjuk, és *KL HL GC FC* egyeneket vonjuk, mivel az egész *BAL* alatti szeglet egyenlő az egész *EDC* alattival, miből a *BAK* alatti, a feltét szerint az *EDG* alattival egyenlő; tehát a maradék *KAL* alatti is egyenlő a maradék *GDC* alattival. És minthogy *KA AL* két oldal *GD DC* két oldallal egyenlő, s egyenlő szegleteket fognak bé: tehát *KL* talp egyenlő *GC* talppal. De *KH* is egyenlő *GF*-fel; ennélfogva *LK KH* két oldal *CG GF* két oldallal egyenlő, és derékszegleteket fognak bé; *HL* talp tehát *FC* talppal egyenlő. És minthogy *HA AL* két oldal egyenlő *FD DC* két oldallal, s *HL* talp egyenlő *FC* talppal; tehát a *HAL* alatti szeglet egyenlő az *FDC* alatti szeglettel.) De a *BAL* alatti is egyenlő az *EDC* alattival.



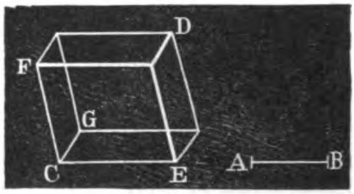
Jegyz. Ezt a bizonyítmányt módszeres kiegészítése végett még a következőkkel pótoljuk:

Minthogy tehát a *BAL BAH HAL* alatti szegletlapok, melyek az *A*-nál való telyszegletet fogják bé, a *D*-nél való telyszegletet béfogó *EDC EDF FDC* alatti hasonfektü szegletlapokkal külön-külön egyenlők: az *A*-nál való telyszeglet egyenlő a *D*-nél valóval.

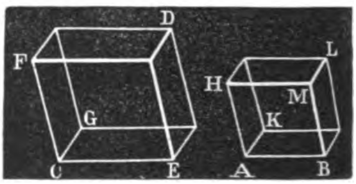
AB adott egyenhez tehát sat. m. t. k.

27. Feladat:

Adott egyenre, adott egyközlapu telyhez hasonló, és hasonlólag fekvő, egyközlapu telyet írni.



Legyen az adott egyen- AB, az adott egyközlapu tely DC: az adott AB egyenre az adott CD egyközlapu telyhez hasonló, s hasonlólag fekvő egyközlaput kell írni.



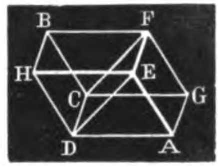
Állíttassék AB egyenhez az ebbeli A pontnál a a C-nél való telyszeglettel egyenlő, a BAH HAK KAB alatti szegletlapoktól béfogott telyszeglet, úgy hogy a BAH alatti szeglet az ECF alattival, a BAK alatti az ECG alattival, s a KAH alatti a GCF alattival legyen egyenlő; és tétessék a mint EC CG-hez, úgy BA AK-hoz, a mint GC CF-hez, úgy KA AH-hoz; tehát egyközösen a mint CE FC-hez, úgy van BA AH-hoz. Egészítessék ki BH egyközény, és AL tely.

Már minthogy a mint EC CG-hez, úgy van BA AK-hoz, és az ECG BAK alatti egyenlő szegleteket béfogó egyenek egyarányuak: tehát GE egyközény KB egyközényhez hasonló. Ugyanazért KH egyközény is hasonló GF egyközényhez, valamint FE is HB-hez. CD telynek három egyközénye tehát AL telynek három egyközényéhez hasonló. De ama három a szembelevő hárommal egyenlő és hozzája hasonló, s ez a három megint a szembenlevő hárommal egyenlő és hasonló; az egész CD tely tehát az egész AL telyhez hasonló. [Minthogy a hasonfektü telyszegleteket is ugyanazon renddel béfogó szegletlapok külön-külön egyenlők].

Adott AB egyenre tehát egyközlapu CD telyhez hasonló és hasonlólag fekvő AL iratott: m. t. k.

28. Feladat:

Ha egyközlapu telyet átelleni lapjai átmérői mentében szel némi lap; ez a lap a telyet ketté vágja.



Ugyanis szelje *AB* egyközlapu telyet *CDEF* lap az átelleni lapok átmérői *CF DE* mentében: azt mondom, hogy *CDEF* lap *AB* telyet ketté vágja.

Mert minthogy *CGF* háromszeg *CFB* háromszeggel, *ADE* pedig *DEH*-val egyenlők, de *CA* egyközény is egyenlő *EB*-vel, mert átelleniek, és *GE CH*-val: tehát a *CGF ADE* két háromszegtől, és *GE AC CE* három egyközénytől kerített gerend is egyenlő a *CFB DEH* két háromszegtől és *CH BE CE* három egyközénytől kerített gerenddel, mert mind számban mind mekkoraságban egyenlő lapok kerítik; úgy hogy az egész *AB* telyet *CDEF* lap ketté vágja.

[Ha tehát egyközlapu sat.] m. b. k.

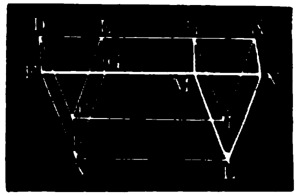
Jegyz. Ebben a bizonyítmányban nincs megmutatva, hogy *ED FC* átmérők azon egy lapban vannak. A hiányt *Clavius* így pótolja:

„Minthogy *CD EF* a velök nem azon egy lapbeli *AG*-hez egyközüek, tehát egymáshoz is egyközüek. De az egyközü egyeneket összekötő egyenek amazokkal egy lapban vannak; *ED FC* átmérők tehát *EF DC*-vel egy lapban vannak; és *EC* lap *AH GB* egyközü lapokat vágja; miszerint *ED FC* közös vágásaik egyközüek."

Továbbá a következő feladatban ezt a kifejezést: „álló egyeneik legyenek azon egyenekben" úgy kell érteni, hogy a két-két oldal lapjait körülfogó vonalok legyenek azon lapokban; és ezt: „azon egy tető alatt" így: egyközü lapok közt; vagyis, hogy a tető lapjairól a közös talpukra vagy ennek kinyujtására bocsátott függők egyenlők.

29. Feladat:

Azon egy talpon álló s azon egy tető alatti egyközlapu telyek, melyeknek álló egyeneik azon egyeneken vannak, egymással egyenlők.



Legyenek azon egy AB talpon álló, és azon tető alatti CM CN egyközlapu telyek, melyeknek AF AG, LM LN, CD CE, BH BK álló egyenei legyenek azon FN DK egyenekben: azt mondom, hogy CM tely CN telylyel egyenlő.

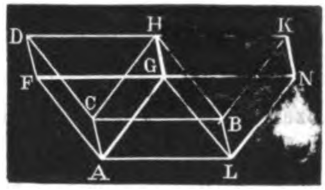
Mert mivel mind CH mind CK egyközények, CB egyenlő mind DH-val mind EK-val, úgy hogy DH is egyenlő EK-val. Vétessék el a közös EH, tehát a maradék DE a maradék HK-val egyenlő, úgy hogy DEC háromszeg is egyenlő HKB háromszeggel, és DG egyközény HN egyközénynyel. Ugyanazért FAG háromszeg is egyenlő MLN háromszeggel. De CF egyközény is egyenlő BM egyközénynyel, és CG BN-nel, mert átelleniek; tehát az AFG CDE két háromszeg, és AD DG GC három egyközény által kerített gerend egyenlő az MLN HBK két háromszeg és BM HN NB három egyközény által kerített gerenddel. Adjuk hozzájok a közös telyet, melynek talpa AB egyközény, és szemben álló lapja $GEHM$; tehát az egész CM egyközlapu tely egyenlő az egész CN egyközlapu telylyel.

Tehát azonegy talpon sat.

Jegyz. Simson Róbert még két esetet különböztet meg e feladat bizonyítmányában, melyeket elsőnek és másodiknak teszen, szintúgy mint az azon egyközüek közti egyközényekről szóló feladatokban az 5-dik könyvben.

Első eset:

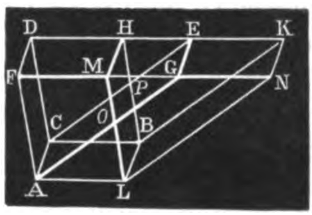
Legyenek azon egy AB talpon álló, és azon tető alatti AH AK egyközlapu telyek, melyeknek AF AG LG LN álló egyeneik legyenek azon egy $FALN$ lapban, és CD CH



BH BK álló egyeneik, ugyanazon *CBKD* lapban. És még *DG HN* tetőlapjaik érjék egymást *HG* közös oldalban.

Már mivel *AH* telyet *LF BD* átelleni lapjai átmérőinek, *AG*-nek *CH*-nak mentében szeli *AGHC* lap: tehát *AH* telyet ketté vágja; miszerint *AH* tely *ALBCHG* gerendnek a kettőzete. Ugyanazért *AK* tely is kettőzete *ALBCHG* gerendnek. Azon egynek kettőzetei pedig egyenlők; *AH* tehát *AK*-val egyenlők.

Második eset:



AH AK telyeknek *AF AG LM LN* álló egyenei legyenek azon egy lapban, *CD CE BH BK* megint azon egy lapban, és *DM EN* tetőlapok legyenek egymástól eltávolítva.

Vonassanak *HE*, *MG*.

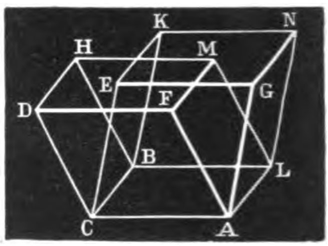
Már mivel mind *DH* mind *EK CB*-vel egyenlők, tehát *DH* egyenlő *EK*-val; adassék hozzájok a közös *HE*, e szerint *DE HK*-val egyenlő; *CDE BHK* háromszegek tehát egyenlő *DE HK* talpokon, s azon egyközüek közt levén, egymással egyenlők. Ugyanazért *AFG* háromszeg is egyenlő *LMN* háromszeggel. Ismét *FH* egyközény egyenlő *GK* egyközénynyel, mert mind ketten *AB*-vel egyenlők; és hozzájok adatván a közös *HEGM*, *FE KM*-mel egyenlő leend De *FC* is egyenlő *BM*-mel és *CG BN*-nel. *FDEGAC* és *MHKNLB* telyeket tehát egyenlő és hasonló és hasonfektü lapok fogják körül, s mindenik telyszegletöket csak három szegletlap fogja bé; úgy hogy *FDEGAC* gerend *MHKNLB* gerenddel egyenlő. Vétessék el belőlök a közös *MHEGOP* gerend; tehát a maradék *AOPMDC* tely a maradék *LOPGKB* telylyel egyenlő. Adassék hozzájok a közös *ALBCOP* gerend; tehát *AH* egyenlő *AK*-val: m. b. k.

Harmadik eset:

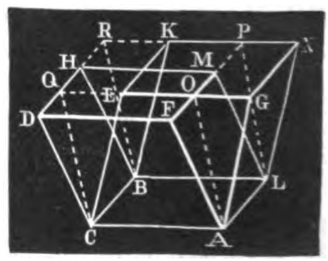
Midőn az egyközlapu telyek tetőlapjainak $GMHE$ egyközény a közös darabjok. Ez eset bizonyítmánya az eredeti.

30. Feladat:

Azonegy talpon levő s azon tető alatti egyközlapu telyek, melyeknek álló egyenei nincsenek azon egyenekben, egymással egyenlők.



Legyenek CM CN azon egy AB talpon álló s azon tető alatti telyek, melyeknek álló egyenei AF AG LM LN CD CE BH BK ne legyenek azon egyenekben: azt mondom, hogy CM tely CN telylyel egyenlő.

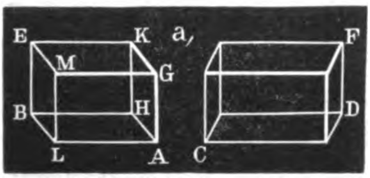


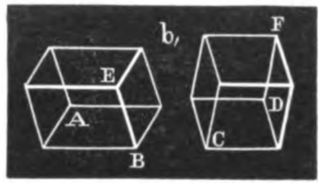
Mert nyujtassanak ki NK DH egyenek, és találkozzanak R pontnál, nyujtassanak még FM GE is P Q pontokig, és vonassanak AO LP CQ BR. Már CM tely, melynek talpa $ACBL$ egyközény s átelleni lapja $FDHM$, egyenlő CP telylyel, melynek talpa $ACBL$ egyközény, átelleni lapja pedig $OQRP$; mert azonegy $ACBL$ talpon állanak [s azon tető alattiak], és AF AO LM LP CD CQ BH BR álló egyeneik azon FP DR egyenekben vannak. De CP tely, melynek talpa $ACBL$ egyközény, átelleni lapja $OQRP$, egyenlő CN telylyel, melynek talpa $ACBL$ egyközény, átelleni lapja pedig $GEKN$; mert ismét azonegy $ACBL$ talpon vannak s azon tető alattiak, és AG AO CE CQ LN LP BK BR álló egyeneik azon GQ NR egyenekben vannak; úgy hogy CM tely is CN telylyel egyenlő.

Azonegy sat.

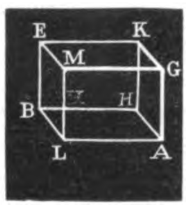
31. Feladat:

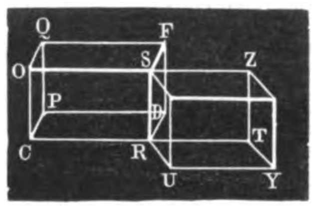
Egyenlő talpu s azonegy tető alatti egyközlapu telyek egymással egyenlők.



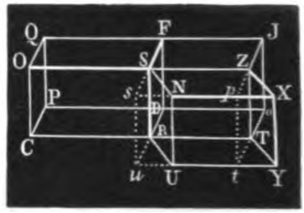


Legyenek AE CF egyközlapu telyek, AB CD egyenlő talpokon, és azonegy tető alatt: azt mondom hogy AE tely CF telylyel egyenlő.

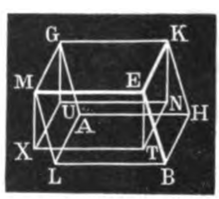


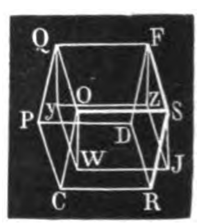


Legyenek előbb HK BE AG LM PQ DF CO RS álló egyenek AB CD talpokra függők, és nyujtassék CR egyennel egyenesbe RT, és állíttassék RT egyenhez, és ennek R pontjához, az ALB alatti szeglettel egyenlő TRU alatti szeglet; tétessék AL-lel egyenlővé RT, LB-vel pedig egyenlővé RU, és egészítessék ki RY talp és ZU tely. Már minthogy TR RU két oldal egyenlő AL LB két oldallal, és egyenlő szegleteket fognak bé: tehát RY egyközény HL egyközénynyel egyenlő s hozzája hasonló. És ismét, minthogy AL egyenlő RT-vel, LM RS-sel, és derékszegleteket fognak bé: tehát RZ egyközény egyenlő és hasonló AM egyközényhez. Ugyanazért LE is SU-val egyenlő és hozzája hasonló; AE telynek tehát három egyközénye egyenlő és hasonló ZU telynek három egyközényéhez. De eme három a három átelleniével egyenlő és hasonló, ama három megint a három átelleniével; az egész AE egyközlapu tely tehát egyenlő az egész ZU egyközlapu telylyel. Nyujtassanak meg DR YU egyenek, és találkozzanak u-nál, és vonassék T-n át Du-hoz Tt egy-



közü, és kinyujtatván *Tt* s *PD* egyenek érjenek öszsze *a*-nál; s egészítessenek ki *uZ RJ* telyek. Már *Zu* tely, melynek talpa *RZ* egyközény, átelleni lapja pedig *up*, *ZU* telylyel, melynek talpa *RZ* egyközény, átelleni lapja pedig *UX*, egyenlő; mert azon egy *RZ* talpon állanak, ugyanazon magasságuak, és *Ru RU Tt TY Ss SN Zp Zx* álló egyeneik ugyanazon *uY sX* egyenekben vannak. De *ZU* tely egyenlő *AE* telylyel; *Zu* tely is tehát egyenlő *AE* telylyel. És minthogy *RUYT* egyközény *uT* egyközénynyel egyenlő, mert azon egy *RT* talpon, s ugyanazon *RT uY* egyközüek közt vannak; de *RUYT CD*-vel egyenlő, minthogy *AB*-vel is az: tehát *RUYT* egyenlő *CD*-vel, minthogy *AB*-vel is az; *uT* egyközény is tehát egyenlő *CD*-vel. *DT* egy más egyközény; tehát a mint *CD* talp *DT*-hez, úgy van *uT DT*-hez. És minthogy *CJ* egyközlapu telyet az átelleni lapjaihoz egyközü *RF* lap szeli: a mint *CD* talp *DT* talphoz, úgy van *CF* tely *RJ* telyhez. Ugyanazért mivel *uJ* egyközlapu telyet az átelleni lapjaihoz egyközü *RZ* lap szeli; a mint *uT* talp *DT* talphoz, úgy van *uZ* tely *RJ* telyhez. De a mint *CD* talp *DT*-hez, úgy van *uT* talp *DT*-hez; tehát a mint *CF* tely *RJ* telyhez, úgy van *uZ* tely is *RJ* telyhez; tehát mind *CF* mind *uZ* telyek ugyanazon arányban vannak *RJ*-hez; *CF* tely tehát *uZ* telylyel egyenlő. De megmutattaték, hogy *uZ* egyenlő *AE*-vel, tehát *AE* is egyenlő *CF*-fel.





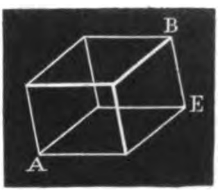
Már most *AG HK BE LM CO PQ DF RS* álló egyenek ne legyenek függők *AB CD* talpakra; ismét azt mondom, hogy *AE* tely *CF* telylyel egyenlő. Mert *K E G M Q F O S* pontokból bocsátassanak a felvett lapra *KN ET GU MX QY FZ OW SJ* függők, találkozzanak ezek a lappal *N T U X Y Z W J* pontokban, és vonassanak *NT UX NU TX YZ YW WJ ZJ*. Már *KX* tely egyenlö *QJ* telylyel; mert egyenlö *KM QS* talpakon vannak, és azon tető alattiak, és álló egyeneik a talpaikra függők. De *KX* tely *AE* telylyel egyenlő, *QJ* pedig *CF*-fel, mert azonegy talpon vannak, és azon tető alattiak, (melyeknek álló egyenei nincsenek azon egyenekben); *AE* tely is tehát *CF* telylyel egyenlő.

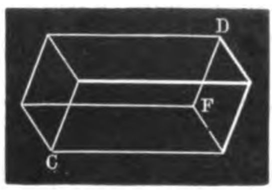
Tehát sat.

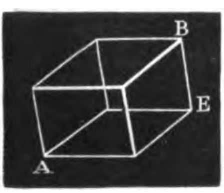
32. Feladat:

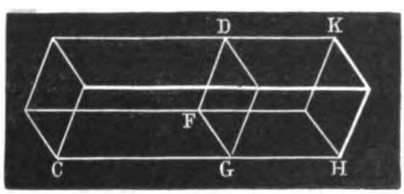
Azon tető alatti egyközlapu telyek úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik.

Legyenek *AB CD* azon tető alatti egyközlapu telyek: azt mondom, hogy *AB CD* egyközlapu telyek úgy vannak egymáshoz mint a talpaik, azaz: a mint *AE* talp *CF* talphoz, úgy van *AB* tely *CD* telyhez.









Mert szabassék *FG* egyenhez *AE*-vel egyenlö *FH* egyközény, és *FH* talpra s a *CD* magasságára egészítessék ki *GK* egyközlapu tely; e szerint *AB* tely *GK* telylyel egyenlő, mert *AE FH* egyenlő talpokon s azon egy tető alatt vannak. És minthogy *CK* egyközlapu telyet az átelleni lapjaihoz egyközü *DG* lap szeli: tehát a mint *HF* talp *CF* talphoz, úgy van *HD* tely *DC* telyhez. De *FH* talp egyenlő *AE* talppal, s *GK* tely *AB* telylyel; a mint tehát *AE* talp *CF* talphoz, úgy van *AB* tely *CD* telyhez.

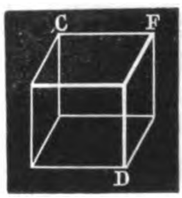
Tanuság: Ebből világos: hogy háromszeg-talpu és egyenlő magasságu gerendek, úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik.

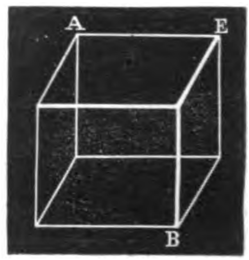
Mert ha a talpaik egyközényekké kiegészítetvén, ezeknek oldalain át lapok vitetnek, mindenik gerendből kétakkora egyközlapu tely válik, melyek úgy lesznek egymáshoz, mint a talpaik; miszerint feleik is ú. m. a gerendek úgy vannak egymáshoz, mint a fél talpaik, ú. m. a háromszegek. (Simson.)

33. Feladat:

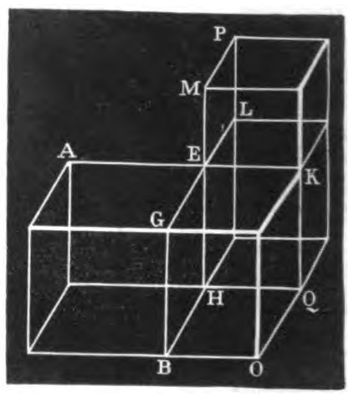
Hasonló egyközlapu telyek egymáshoz háromszoros arányban vannak, mint a hasonfektü oldalaik.

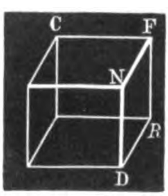
Legyenek *AB CD* hasonló egyközlapu telyek, s *AE* legyen *CF* fel hasonfektü: azt mondom, hogy *AB* tely *CD* telyhez háromszoros arányban van, mint *AE CF*-hez.





Mert nyujtassanak *AE GE HE* egyenekkel egyenesben *EK EL EM*, és tétessék *CF*-fel *EK* egyenlővé, *FN*-nel *EL*, *FR*-rel *EM*, és egészíttessék ki *KL* egyközény és *KP* tely.





És minthogy *KE EL* két oldal *CF FN* két oldallal egyenlő, de a *KEL* alatti szeglet is egyenlő a *CFN* alattival, (mivelhogy az *AEG* alatti is egyenlő a *CFN* alattival, az *AB CD* telyek hasonlóságánál fogva): tehát *KL* egyközény

CN egyközénynyel egyenlö és hozzája hasonló. Ugyanazért *KM* egyközény is egyenlő és hasonló *CR* egyközényhez, s megint *EP DF*-hez. *KP* telynek három egyközénye tehát *CD* telynek három egyközényével egyenlő és hozzájok hasonló. De ez á három egyenlö és hasonló a három átellenié-vel, ama három pedig egyenlő és hasonló a három átellenié-vel; az egész *KP* tely tehát az egész *CD* telylyel egyenlö és hozzá hasonló. Egészítessék ki *GK* egyközény, és *GK KL* talpakra s az *AB* [tely] magasságára egészítessenek ki *EO LQ* telyek.

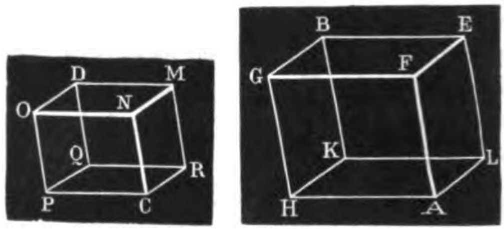
Már minthogy az *AB CD* telyek hasonlóságánál fogva a mint *AE CF*-hez, úgy van *EG FN*-hez és *EH FR*-hez; már pedig *FC EK*-val, *FN EL*-lel, és *FR EM*-mel egyenlök: tehát a mint *AE EK*-hoz úgy van *GE EL*-hez, és *HE EM*-hez. De a mint *AE EK*-hoz, úgy van *AG* egyközény *GK* egyközényhez; a mint *GE EL*-hez, úgy *GK KL*-hez; s a mint *HE EM*-hez, úgy *QE KM*-hez: a mint tehát *AG* egyközény *GK*-hoz, úgy van *GK KL*-hez, és *QE* is *KM*-hez. De a mint *AG GK*-hoz, úgy *AB* tely *EO* telyhez; a mint *GK KL*-hez, úgy *OE* tely *QL* telyhez; s a mint *QE KM*-hez, úgy *QL* tely *KP* telyhez: tehát a mint *AB* tely *EO*-hoz, úgy *EO QL*-hez, és *QL* is *KP*-hez. Ha pedig négy mekkoraság folyvást egyarányu, az első a negyedikhez háromszoros arányban van, mint a másodikhoz; *AB* tely tehát *KP*-hez háromszoros arányban van, mint *AB EO*-hoz. De a mint *AB EO*-hoz, úgy van *AG* egyközény *GK*-hoz, és *AE* egyen *EK*-hoz; úgy hogy *AB* tely *KP*-hez háromszoros arányban van, mint *AE EK*-hoz. Már pedig *KP* tely egyenlö *CD* telylyel, és *EK* egyen *CF*-fel; tehát *AB* tely *CD* telyhez is háromszoros arányban van, mint a hasonfektü *AE* oldal a hasonfektü *CF* oldalhoz.

Hasonló egyközlapu telyek tehát sat.

Tanuság: Ebből világos: hogy ha négy egyen [folyvást] egyarányban van: a mint az első a negyedikhez, úgy lesz az elsőre irt egyközlapu tely a másodikra hasonlóan irt hasonló telyhez; (minthogy az első is a negyedikhez háromszoros arányban van, mint a másodikhoz).

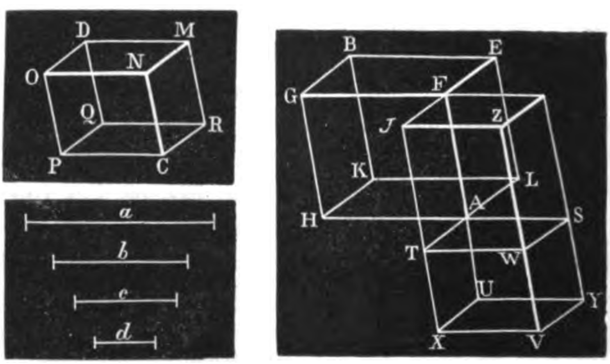
D. Feladat:

Egyenlö telyszegletü egyközlapu telyek az oldalaikéiból szerkesztett arányban vannak.



Legyenek *AB CD* egyenlő telyszegletü egyközlapu telyek, úgy hogy az *A H G F E B K L* pontoknál levő szegletek külön a *C P O N M D Q R* pontoknál levő hasonfektü szegletekkel egyenlök, azaz: egyenlő hasonfektü lapszegletektől béfogottak legyenek: azt mondom, hogy *AB CD* telyek az oldalaikéiból, azaz *AH*-nak *CP*-hez, *AF*-nek *CN* hez, és *AL*-nek *CR*-hez való arányaikból szerkesztett arányban vannak egymáshoz.

Mert nyujtassanak *HA LA FA* oldalak *S T U* pontok



felé, és tétessenek *AS MD*-vel, *AT DO*-val, *AU DQ*-val egyenlőkké. Egészitessék ki *AV* egyközlapu tely, melynek *AW AX AY* lapjai, *CD* telynek *CQ CM CO* lapjaival egyenlő és hozzájok hasonló hasonfektü egyközények. Egyenlők tehát a velök átelleniek is; és minthogy *AV CD* telyeket egyenlő számu, egyenlő, hasonló és hasonfektü lapok fogják körül, és mindenik szegletöket csak három szegletlap fogja bé: tehát

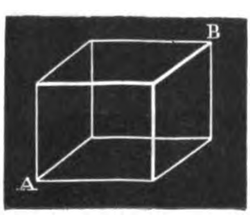
AV CD-vel egyenlö. Egészítessék ki AZ tely is, melynek talpa AW s egyik álló egyene AF legyen. Vétessék a egyen, és tétessenek a mint HA AS-hez, úgy a b-hez, a mint LA AT-hez, úgy b c-hez, és a mint FA AU-hoz, úgy c d-hez.

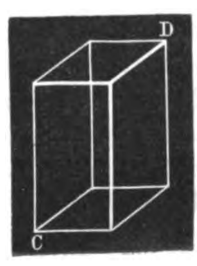
Már minthogy AK egyközény AW egyközénynyel egyenlő szegletü, s az egyenlő szegletü egyközények az oldalaikéiból szerkesztett arányban vannak: tehát a mint AK AW-hez, úgy a c-hez. De AB AZ azon tető alatti egyközlapu telyek levén, a mint AK AW-hez, úgy AB AZ-hez; megmutattaték az is, hogy a mint AK AW-hez úgy a c-hez: tehát a mint AB AZ-hez, úgy a c-hez. Ismét, a mint FA AU-hoz, úgy AZ AV-hez; mert ha egyközlapu telyet átelleni lapjaihoz egyközü lap szeli, a mint a talp a talphoz, úgy van a tely a telyhez; de AJ talp úgy van AX talphoz, mint FA AU-hoz, és fel volt téve, hogy a mint FA AU-hoz, úgy c d-hez; tehát a mint AZ AV-hez, úgy c d-hez; egyközösen tehát a mint AB AV-hez, úgy a d-hez. Már pedig az a aránya d-hez az a-nak b-hez, b-nek c-hez, és c-nek d-hez való arányaiból, azaz: HA-nak AS-hez akár MD-hez, LA-nak AT-hez akár DO-hoz, és FA-nak AU-hoz vagy DQ-hoz való arányaiból van szerkesztve; AV pedig CD-vel egyenlö; AB tehát AV-hez akár CD-hez az oldalaikéiból szerkesztett arányban van.

34. Feladat:

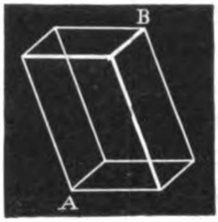
Egyenlö egyközlapu telyeknek talpai a magasságaikkal ellenarányuak: s a mely egyközlapu telyeknek talpai a magasságaikkal ellenarányuak, azok egyenlök.

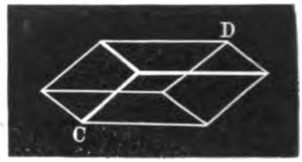
Legyenek AB CD egyenlő a) egyközlapu telyek: azt mondom, hogy AB CD egyközlapu telyeknek a talpai



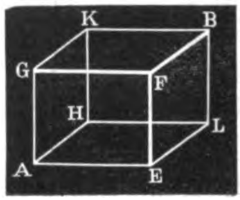


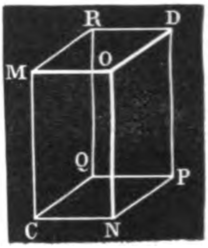
b)





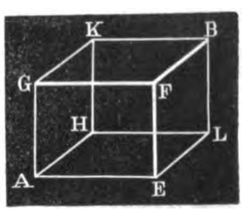
ellenarányuak a magasságaikkal, s a mint EH talp NQ talphoz, úgy van CD tely magassága AB tely magasságához.

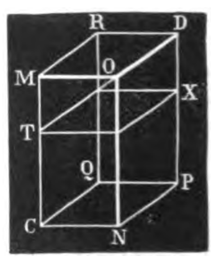




Mert legyenek elöbb AG EF LB HK CM NO PD QR álló egyenek függők a talpaikra: azt mondom, hogy a mint EH talp NQ talphoz, úgy van CM AG-hez.

Már ha EH talp NQ talppal egyenlő, s AB tely is CD telylyel egyenlő, CM is egyenlő lesz AG-vel. Mert ha EH NQ talpak egyenlők levén, AG CM magasságok nem lennének egyenlők: AB tely sem volna egyenlő CD-vel. De feltét szerint egyenlő; CM magasság tehát nem nem egyenlő AG magassággal; tehát egyenlő; és a mint EH talp NQ-hoz, úgy CM AG-hez; és világos, hogy AB CD egyközlapu telyeknél a talpak ellenarányuak a magasságokkal.





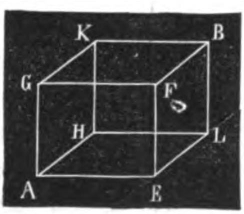
De ne legyen EH talp NQ talppal egyenlő, és EH legyen nagyobb. De AB tely egyenlő CD telylyel; tehát CM is nagyobb AG-nél. Mert ha nem; ismét nem lesznek AB CD is egyenlők; már pedig feltét szerint egyenlők. Legyen tehát AG-vel egyenlő CT; és egészítessék ki NQ talpra, CT magasságra XC egyközlapu tely. És minthogy AB tely egyenlő CD telylyel, CX megint egy más, egyenlők pedig azon egyhez azon arányban vannak: tehát a mint

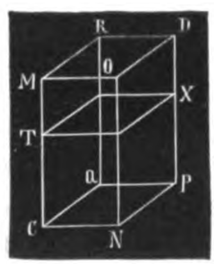
AB tely *CX* telyhez, úgy van *CD* tely *CX* telyhez. De a mint *AB* tely *CX* telyhez, úgy van *EH* talp *NQ* talphoz, mert *AB CX* telyek egyenlő magasságuak; a mint pedig *CD* tely *CX* telyhez, úgy van *MQ* talp *QT* talphoz, és *MC* is *CT*-hez; a mint tehát *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van *MC CT*-hez. De *CT AG*-vel egyenlő; tehát a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy *MC AG* hez is. *AG CD* egyközlapu telyeknek tehát a talpai a magasságaikkal ellenarányuak.

Ismét, legyenek *AB CD* telyek talpai, magasságaikkal ellenarányuak, és legyen a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy *CD* tely magassága az *AB* tely magasságához: azt mondom, hogy *AB* tely *CD* telylyel egyenlő.

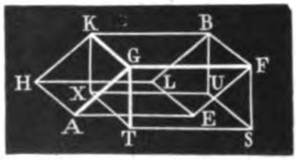
Mert legyenek ismét az álló egyenek a talpakra függők. Már ha *EH* talp egyenlő *NQ* talppal, s a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van a *CD* tely magassága az *AB* tely magasságához, tehát a *CD* tely magassága is egyenlő az *AB* tely magasságával. De az egyenlő talpakon levő s azon magasságu egyközlapu telyek egyenlők egymással; *AB* tely tehát *CD* telylyel egyenlő.

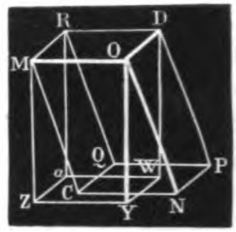
De ne legyen *EH* talp *NQ* talppal egyenlő, hanem legyen *EH* nagyobb; tehát a *CD* tely magassága is nagyobb az *AB* tely magasságánál, azaz *CM AG*-nél. Legyen ismét *AG*-vel egyenlő *CT*, és egészíttessék ki hasonlólag *CX* tely. Minthogy hát a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van *CM AG*-hez, *AG* pedig *CT*-vel egyenlő: tehát a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van *MC CT*-hez. De a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van *AB* tely *CX* telyhez, mert *AB CX* telyek egyenlő magasságuak; s a mint *MC CT*-hez, úgy van *MQ* talp *QT* talphoz, és *CD* tely is *CX* telyhez: tehát a mint *AB* tely *CX*-hez, úgy *CD* tely *CX* telyhez; mind *AB* mind *CD* tehát *CX*-hez azon arányuak; *AB* tely tehát *CD* telylyel egyenlő.





Megint ne legyenek *FE BL GA KH ON DP MC RQ* álló egyenek a talpaikhoz derékszegletre, és *F G B K O M*





D R pontok ból bocsátas-sanak az *EH NQ* talpakra függők, találkozzanak a lapokkal *S T U X Y Z a W* pontokban, és egészitessenek ki *FX Oa* telyek: azt mondom, hogy így is *AB CD* telyek egyenlők levén, a talpaik a magasságaikkal ellenarányuak, és a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van a *CD* tely magassága az *AB* tely magasságához.

Mert minthogy *AB* tely *CD* telylyel egyenlő, de *AB*-vel *BT* egyenlő, mert azon egy *FK* talpon vannak s azon magasságuak, (álló egyeneik nem levén azon egyenekben); *CD* tely pedig *DZ*-vel egyenlő, mert ismét azonegy *RO*-talpon vannak és azon magasságuak, (álló egyeneik nem levén azon egyenekben): tehát *BT* tely is egyenlő *DZ* telylyel. Már pedig az egyközlapu telyeknek, melyeknek álló egyenei a talpaikra függők, talpaik a magasságaikkal ellenarányuak; a mint tehát *FK* talp *OR* talphoz, úgy van a *DZ* tely magassága a *BT* tely magasságához. De *FK* talp egyenlő *EH* talppal, *OR* talp pedig *NQ* talppal; tehát a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van a *DZ* tely magassága a *BT* tely magasságához. De *DZ BT* és megint *DC BA* telyek azon magasságuak; tehát a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van a *DC* tely magassága az *AB* tely magasságához; *AB CD* telyeknek tehát a talpai a magasságaikkal ellenarányuak.

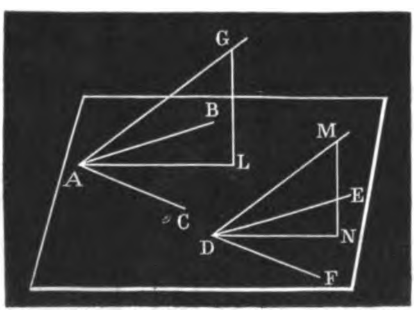
Ismét legyenek *AB CD* egyközlapu telyek talpai, magasságaikkal ellenarányuak, és a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy legyen a *CD* tely magassága az *AB* tely magasságához: azt mondom, hogy *AB* tely *CD* telylyel egyenlő.

Mert megint azon készületek tétetvén, mivel a mint *EH* talp *NQ* talphoz, úgy van a *CD* tely magassága az *AB* tely magasságához; de *EH* talp *FK* talppal, és *NQ OR*-rel egyenlő: tehát a mint *FK* talp *OR* talphoz, úgy a *CD* tely magassága az *AB* tely magasságához. De *AB CD* és *BT DZ* telyek azon magasságuak; tehát a mint *FK* talp *OR* talphoz, úgy van DZ tely magassága a BT tely magasságához; BT DZ egyközlapu telyeknek tehát a talpai a magasságaikkal ellenarányuak. Már pedig a mely egyközlapu telyeknek álló egyenei a talpaikra függők, s a talpaik a magasságaikkal ellenarányuak, azok egyenlők; BT tely tehát DZ telylyel egyenlő. De BT AB-vel egyenlő; mert azon egy FK talpon vannak, s azon magasságuak, (álló egyeneik nem levén azon egyenekben); DZ tely pedig DC telylyel egyenlő, mert ismét azon egy OR talpon vannak, s azon magosságuak, (álló egyeneik nem levén ugyanazon egyenekben): AB tely tehát CD telylyel egyenlő.

Egyenlő egyközlapu stb.

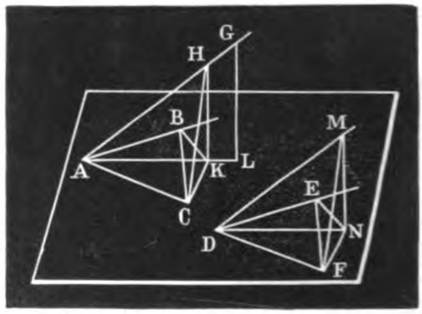
35. Feladat:

Ha van két egyenlő szegletlap, s a hegyeikre az eleinti egyenekkel különkülön egyenlő szegleteket alkotó, kiemelt egyenek állítatnak; a kiemelt egyeneken pedig akármely pontok vétetnek; ezekből a lapokra, melyekben az eleinti szegletek vannak, függők bocsátatnak, s a származott pontokból ama lapokban az eleinti szegletekre egyenek vonatnak: ezek a kiemelt egyenekkel egyenlő szegleteket alkotnak.

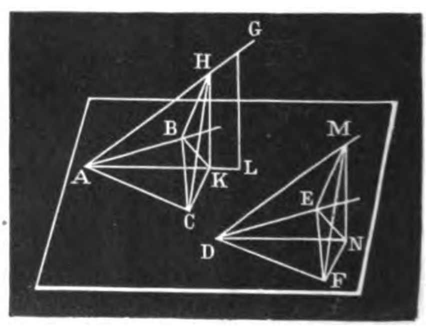


Legyen a BAC EDF alatti két egyenlő egyenes vonalu szeglet, és A D pontokra állítassanak az eleinti egyenekkel különkülön szegleteket alkotó AG DM kiemelt egyenek, úgy hogy az MDE alatti, a GAB alattival, az MDF alatti a GAC alattival legyenek egyenlők; vétessenek AG-n DM-en akármely G M pontok, és bocsátassanak G M pontokból a BAC-n EDF-en átmenő lapokra GL MN függők, találkozzanak ezek a talpokkal L-nél, N-nél, és vonassanak LA

ND: azt mondom, hogy a *GAL* alatti szeglet egyenlő az *MDN* alatti szeglettel.



Mert tétessék *DM*-mel egyenlővé *AH* és vonassék *H* ponton át *GL*-hez egyközü *HK*. De *GL* függő a *BA*-n *AC*-n átmenő lapra, *HK* is tehát függő a *BA*-n *AC*-n átmenő lapra. Vonassanak *K N* pontokból *AB AC DF DE* egyenekre *KB KC NF NE* függők, és húzassanak *HC CB MF FE*. És minthogy a *HA* négyszege egyenlő a *HK KA* négyszegeikkel, a *KA*-éval pedig a *KC CA* négyszegeik egyenlők: tehát a *HA*-é is a *HK CK CA* négyszegeikkel egyenlő. De a *HK KC* négyszegeikkel a *HC*-é egyenlő; a *HA*-é tehát egyenlő a *HC CA* négyszegeikkel; a *HCA* alatti szeglet tehát derék. Ugyanazért a *DFM* alatti szeglet is derék; az *ACH* alatti szeglet tehát a *DFM* alattival egyenlő. De a *HAC* alatti is egyenlő az *MDF* alattival: e szerint *MDF HAC* két háromszegletben egyiknek két szeglete a másiknak két szegletével különkülön egyenlő, s az egyenlő szegletek egyikét átfogó egy oldal is egyenlő egy oldallal, *AH DM*-mel; a többi oldalak is tehát a többi oldalakkal külön-külön egyenlők lesznek; tehát *AC* egyenlő *DF*-fel. Hasonlóképp, mutatjuk meg, hogy *AB* is egyenlő *DE*-vel: (imígy:



Vonassanak *HB ME*. És minthogy az *AH* négyszege az *AK KH* négyszegeikkel egyenlő, de az *AK*-éval egyenlők az *AB BK* négyszegeik; tehát az *AB BK KH* négyszegeik egyenlők az *AH*-

ával. De a *BK KH* négyszegeikkel a *BH*-é egyenlő, mert a *HKB* alatti szeglet derék, mivel *HK* függő a felvett lapra; az *AH* négyszege tehát egyenlő az *AB BH* négyszegeikkel; az *ABH* alatti szeglet tehát derék. Ugyanazért a *DEM* alatti szeglet is derék. De a *BAH* alatti szeglet is egyenlő az *EDM* alattival, mert úgy van feltéve, és *AH* egyenlő *DM*-mel; egyenlő tehát *AB* is *DE*-vel.)

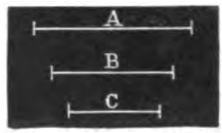
Már minthogy *AC DF*-fel, *AB DE*-vel egyenlők, *CA AB* két oldal egyenlő *FD DE* két oldallal. De a *CAB* alatti szeglet is egyenlő az *FDE* alattival; tehát *BC* talp egyenlő *EF* talppal, s a háromszeg a háromszeggel, és a többi szegletek a többi szegletekkel; egyenlő tehát az *ACB* alatti szeglet a *DFE* alattival. De az *ACK* alatti derékszeg is egyenlő a *DFN* alatti derékkel; tehát a maradék *BCK* alatti is egyenlő a maradék *EFN* alattival. Ugyanazért a *CBK* alatti is egyenlő az *FEN* alattival. E szerint *CBK FEN* két háromszegben két szeglet egyenlő két szeglettel külön-külön, s az egyenlő szegletek melletti egyik oldal egyenlő egyik oldallal, *BC EF*-fel a többi oldalak is tehát egyenlők lesznek a többi oldalakkal; tehát *CK* egyenlő *FN*-nel. De *AC* is egyenlő *DF*-fel; *AC CK* két oldal tehát egyenlő *DF FN* két oldallal, és derékszegleteket fognak be; *AK* talp tehát *DN* talppal egyenlő. És minthogy *AH* egyenlő *DM*-mel, az *AH* négyszege is egyenlő a *DM*-ével. De az *AH*-éval az *AK KH* négyszegeik egyenlők, mert az *AKH* alatti szeglet derék; a *DM*-ével pedig a *DN NM* négyszegeik egyenlők, mert a *DNM* alatti szeglet derék; az *AK KH* négyszegeik tehát egyenlők a *DN NM*-éikkel, melyek közzül az *AK*-é egyenlő a *DN*-ével; tehát a maradék *KH*-é az *NM*-ével egyenlő; *HK* tehát egyenlő *MN*-mel. És minthogy *HA AK* két oldal *MD DN* két oldallal külön-külön egyenlő, és *HK* talp is *NM* talppal egyenlőnek mutattaték meg; tehát a *HAK* alatti szeglet az *NDN* alattival egyenlő.

Ha tehát sat.

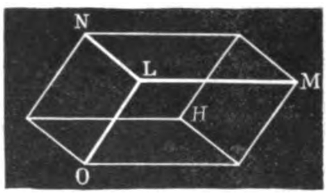
Tanuság: Ebből világos: hogy ha van két egyenlő egyenes vonalu szeglet, s ezekre az eleinti egyenekkel külön-külön egyenlő szegletet alkotó kiemelt egyenlő egyenek állíttatnak : az ezektől a lapokra, melyekben az eleinti szegletek vannak, bocsátott függők egymással egyenlők.

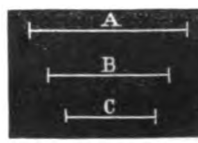
36. Feladat:

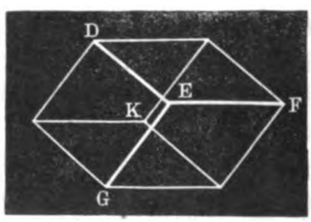
Ha három egyen egyarányu: a háromból alkotott egyközlapu tely, a középsőre alkotott egyenlő oldalu s az előbb mondottal egyenlő szegletü egyközlapu telylyel egyenlő.



Legyen *A B C* három egyen egy arányban, a mint *A B*-hez, úgy *B C*-hez: azt mondom, hogy az *A B C* egyenekből alkotott egyközlapu tely egyenlő a *B*-re alkotott egyenlő oldalu s az előbbivel egyenlő szegletü egyközlapu telylyel.





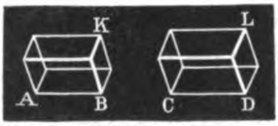


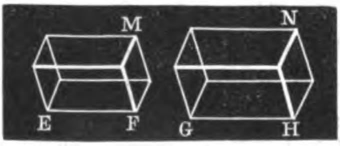
Vétessék az *E*-nél való, a *DEG GEF FED* alatti szegletlapoktól kerített telyszeglet, és tétessék mind *DE* mind *GE* mind *EF B*-vel egyenlővé, és egészíttessék ki *EK* egyközlapu tely; *A*-val pedig tétessék egyenlővé *LM*, és állíttassék *LM* egyenhez s ennek *L* pontjához az *E*-nél valóval egyenlő, az *NLO OLM MLN* alatti szegletektől kerített telyszeglet, s tétessenek *LO B*-vel, *LN* pedig *C*-vel egyenlőkké. Már minthogy a mint *A B*-hez, úgy van *B C*-hez; de *A LM*-mel, *B LO*-nak *EF*-nek *EG*-nek *ED*-nek mindenikével, és *C LN*-nel egyenlők: tehát a mint *LM EF*-hez, úgy van *DE LN*-hez. E szerint az *MLN DEF* alatti egyenlő szegleteket béfogó oldalak ellenarányuak; *MN* egyközény tehát egyenlő *DF* egyközénynyel. És minthogy *DEF NLM*, két egyenes vonalu szeglet egyenlő, s rajtuk *LO EG* egyenlő, s az eleinti egyenekkel külön-külön egyenlő szegleteket béfogó kiemelt egyenek állanak; tehát a *G O* pontokból az *NLM*-en *DEF*-en átmenő lapokra bocsátott függők egymással egyenlők; úgy hogy *LH EK* telyek azon magasságuak. De az egyenlő talpokon álló s egyenlő magasságu egyközlapu telyek egymással egyenlők; *HL* tely tehát *EK* telylyel egyenlő. Már pedig *HL* az *A B C* egyenekből alkotott tely, *EK* pedig a *B*-re állított tely; az *A BC* egyenekből alkotott tely tehát a *B* re alkotott egyenlő oldalu s az előbb mondottéival egyenlő szegletü telylyel egyenlő.

Ha tehát sat.

37. Feladat:

Ha négy egyen egyarányu: a reájok alkotott hasonló és hasonlólag irott egyközlapu telyek is egyarányuak lesznek; s ha a reájok alkotott hasonló s hasonlólag irott egyközlapu telyek egyarányuak: magok az egyenek is egyarányuak lesznek.





Legyen *AB CD EF GH* négy egyen egyarányban, a mint *AB CD*-hez, úgy *EF GH*-hoz, és irassanak *AB*-re *CD*-re *EF*-re *GH*-ra hasonló és hasonlólag fekvő *KA LC ME NG* egyközlapu telyek: azt mondom, hogy a mint *KA LC*-hez, úgy van *ME NG*-hez.

Mert minthogy *KA* egyközlapu tely *LC*-hez hasonló, tehát *KA LC*-hez háromszoros arányban van, mint *AB CD*-hez. Ugyanazért *ME* is *NG*-hez háromszoros arányban van, mint *EF GH*-hoz. Már pedig a mint *AB CD*-hez, úgy van *EF GH*-hoz; tehát a mint *AK LC*-hez, úgy *ME NG*-hez.

De legyen a mint *AK* tely *LC* telyhez, úgy *ME* tely

NG-hez: azt mondom, hogy a mint AB egyen CD-hez, úgy van EF GH-hoz.

Mert ismét minthogy KA LC-hez háromszoros arányu, mint AB CD-hez, ME pedig NG-hez háromszoros arányu mint EF GH-hoz, és a mint KA LC-hez, úgy van ME NG-hez; tehát a mint AB CD-hez, úgy van EF GH-hoz.

Ha tehát sat.

38. Feladat:

Ha lap laphoz derékszegletre áll, s egyik lapnak valamely pontjából a másik lapra függő vonatik: a vont függő a lapok közös szeletére esik.

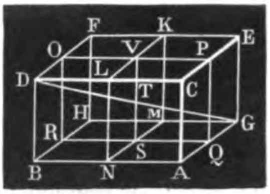
Ugyanis CD lap legyen AB laphoz derékszegletre, s a közös szeletök legyen AD, és vétessék CD lapban akármely E pont: azt mondom, hogy az E pontból AB lapra vont függő DA-ra esik.

Mert ha nem, essék ha lehet kivül rajta, mint EF, és találkozzék AB lappal F pontban, és vonassék F-től DA-ra AB lapban FG függő, mely CD lapra is függő, és vonassék EG. Már minthogy FG egyen CD lapra függő, és a CD lapbeli EG egyen hozzá ér, tehát az FGE alatti szeglet derék. De EF is függő AB lapra; tehát az EFG alatti szeglet derék. E szerint EFG háromszegnek két szeglete két derékkel egyenlő; mi lehetetlen: nem esik tehát az E-ből AB lapra húzott függő DA-n kivül; tehát DA-ra esik.

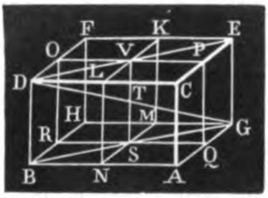
Ha tehát sat.

39. Feladat:

Ha egyközlapu tely átelleni lapjai oldalai ketté vágatnak, s a szeleteken által lapok vitetnek; a lapok közös szelete s az egyközlapu tely átmérője egymást ketté vágják.



Ugyanis *AF* egyközlapu tely átelleni lapjainak *CF*-nek *AH*-nak vágassanak ketté az oldalai *K L M N O Q P R* pontoknál, s a vágó pontokon át vitessenek *KN OQ*, legyen e lapok közös szelete *VS*, az *AF* egyközlapu tely átlója pedig *DG*: azt mondom, hogy *VS DG* egymást ketté vágják, (azaz hogy *VT TS*-sel, *DT TG*-vel egyenlők.)



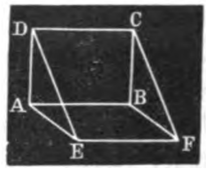
Mert vonassanak *DV VE BS SG*. És minthogy *DO PE*-hez egyközü: tehát a *DOV VPE* alatti váltó szegletek egymással egyenlők. És minthogy *DO PE*-vel egyenlő, *OV* pedig *VP*-vel, és egyenlő szegleteket fognak be: tehát *DV* talp egyenlő *VE*-vel, és *DOV* háromszeg *PVE* háromszeggel egyenlő, s a többi szegletek egyenlők a többi szegletekkel; az *OVD* alatti szeglet tehát egyenlő a *PVE* alattival; ennélfogva *DVE*, egyen; és *DV* egyenlő *VE*-vel. Ugyanazért *BSG* is, egyen és *BS* egyenlő *SG*-vel. És minthogy *CA DB*-vel egyenlő és egyközü hozzája, de *CA EG*-vel is egyenlő és egyközü hozzá: tehát *DB* is *EG*-vel egyenlő és hozzája egyközü. És *DE GB* egyenek öszvekötik őket; tehát *DE* is *BG*-hez egyközü. Vétettek pedig bennök akármely *D V G S* pontok, s ezeket öszvekötik *DG VS* egyenek; *DG VS* egyenek tehát egy lapban vannak. És minthogy *DE BG*-hez egyközü: tehát az *EDT* alatti szeglet egyenlő a *BGT* alattival, mert váltók. De a *DTV* alatti is egyenlő a *GTS* alattival. E szerint *DTV GTS* háromszegekben két szeglet két szeglettel egyenlő, s s az egyenlő szegletek egyikét átfogó egy oldal egy oldallal, *DV GS*-sel, egyenlö, mert *DE BG* egyenek hasonfelei; a többi oldal is tehát egyenlö lesz a többi oldallal; *DT* tehát egyenlö *TG*-vel és *VT TS*-sel.

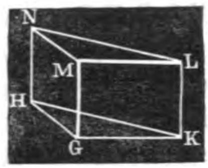
Ha tehát sat.

40. Feladat:

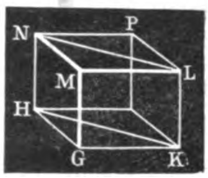
Ha van egyenlö magasságu két gerend, s ennek a talpa egyközény, amazé háromszeg, az egyközény pedig két akkora, mint a háromszeg: a gerendek egyenlök lesznek.

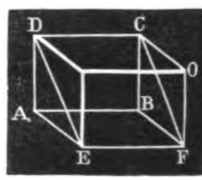
Legyenek *ABCDEF* és *GHKLMN* egyen'ö magasságu gerendek, s amannak a talpa legyen *AF* egyközény, ezé *GHK* háromszeg; legyen pedig *AF* egyközény két akkora mint *GHK* háromszeg: azt mondom, hogy *ABCDEF* gerend egyenlö *GHKLMN* gerenddel.





Mert egészitessenek ki *AO GP* egyközlapu telyek. És minthogy *AF* egyközény két akkora mint *GHK* háromszeg, de *HK* egyközény is két akkora mint *GHK* háromszeg: tehát *AF* egyközény egyenlö *HK* egyközénynyel. De az egyenlö talpokon levö, és egyenlö magasságu egyközlapu telyek egymással egyenlök; *AO* tely tehát egyenlö *GP* telylyel. Már pedig *AO* telynek hasonfele az *ABCDEF* gerend, *GP* telynek megint hasonfele a *GHKLMN* gerend; tehát *ABCDEF* gerend *GHKLMN* gerenddel egyenlö.





Ha tehát sat.

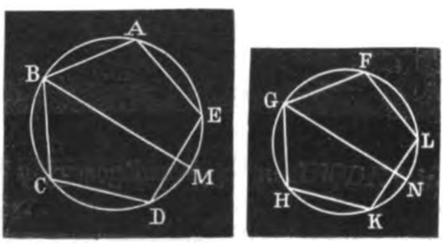
Jegyz. Itt az egyik gerend a háromszeg lapjai egyikére van *állitva*, és ez vétetik talpául; a másik pedig egyik egyközény-lapjára van *fektetve*, és ez szolgál talpul. Ezt az újabb tankönyvekért jegyezzük meg, mint a melyekben az egyközény-lapokat mindig *oldal*-lapoknak, s a két véglapot *fenék*- vagy *talp*-lapoknak szokták venni, s ahoz képest állítani a képletet.

EUKLIDES ELEMEINEK

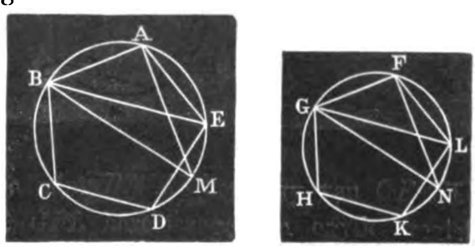
TIZENKETTEDIK KÖNYVE.

1. Feladat:

Körbe írt hasonló sokszegek úgy vannak egymáshoz, mint az átmérőik négyszegei.



Legyenek *ABCDE FGHKL* körök, s ezekben legyenek *ABCDE FGHKL* hasonló sokszegek, a körök átmérői pedig legyenek *BM GN*: azt mondom, hogy a mint a *BM* négyszege a *GN* négyszegéhez, úgy van *ABCDE* sokszeg *FGHKL* sokszeghez.

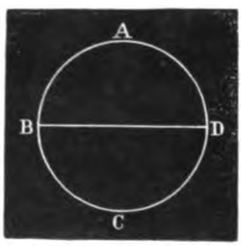


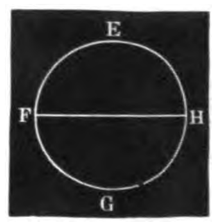
Mert vonassanak *BE AM GL FN*. És minthogy *ABCDE* sokszeg *FGHKL* sokszeghez hasonló: mind a *DAE* alatti szeglet egyenlő a *GFL* alattival, mind pedig a mint *BA AE*-hez, úgy van *GF FL*-hez; e szerint *BAE GFL* háromszegekben egyik szeglet egyenlő egyik szeglettel, ú. m. a *BAE* alatti a *GFL* alattival, s az egyenlö szegletek körüli oldalok egyarányuak; ABE háromszeg tehát FGL háromszeggel egyenlö szegletü; az AEB alatti szeglet tehát egyenlö az FLG alattival. De az AEB alatti az AMB alattival egyenlő, mert azon kerületen állanak, az FLG alatti pedig az FNG alattival; tehát az AMB alatti is egyenlö az FNG alattival; a BAM alatti derékszeglet is egyenlö a GFN alatti derékkel; tehát a harmadik is egyenlö a harmadikkal; ABM háromszeg tehát egyenlö szegletü FGN háromszeggel; egyarányban tehát a mint BM GN-hez, úgy van BA GF-hez. De a BM aránya GN-hez kétszerezve az, a mi a BM négyszegié a GN négyszegiéhez, s a BA aránya GF-hez kétszerezve az, a mi $ABCDE$ sokszegé $FGHKL$ sokszegéhez; a mint tehát a BM négyszege a GN-éhez, úgy van $ABCDE$ sokszeg $FGHKL$ sokszeghez.

Körbe írt sokszegek tehát sat. m. b. k.

2. Feladat:

A körök úgy vannak egymáshoz, mint az átmérök négyszegei.

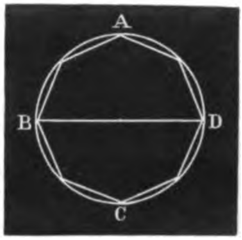




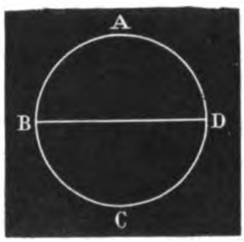
Legyenek $ABCD$, $EFGH$ körök, ezeknek átméröi pedig legyenek BD FH: azt mondom, hogy a mint a BD négyszege az FH-éhoz, úgy van $ABCD$ kör $EFGH$ körhöz.

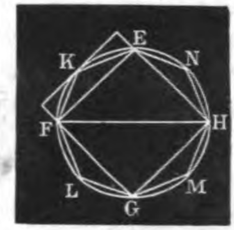
Mert ha $ABCD$ kör $EFGH$ körhöz nincs úgy, mint a BD négyszege az FH-éhoz: a mint BD négyszege az FH-éhoz, úgy leend $ABCD$ kör $EFGH$ körnél vagy nagyobb, vagy kisebb laphoz.

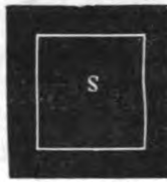
Legyen elöbb kisebbhez, S-hez. És irassék $EFGH$ körbe $EFGH$ négyszeg; a beírt négyszeg nagyobb leend, mint $EFGH$ körnek fele; mivelhogy ha E F G H pontokon át a



kört érintő egyeneket vonunk: *EFGH* négyszeg a kör körül irott négyszegnek a fele. A körülírt négyszegnél pedig kisebb a kör; miszerint *EFGH* beirott négyszeg az *EFGH* kör felénél nagyobb. Vágassanak ketté *EF FG GH HE* kerületek *K L M N* pontoknál, és vonassanak *EK KF FL LG GM MH HN NE* egyenek; tehát *EKF FLG GMH HNE* háromszegek mindenike nagyobb mint a hozzátartozó körszeletnek fele; mivelhogy ha *K L M N* pontokon át a körhöz érintőket vonunk, és *EF FG GH HE* egyenekre az egyközényeket kiegészítjük, *EKF FLG GMH HNE* háromszegeknek mindenike a hozzátartozó egyközényck fele lesz. De a hozzátartozó szelet kisebb az egyközénynél; úgy hogy *EKF FLG GMH HNE* háromszegeknek mindenike nagyobb a hozzátartozó körszelet felénél: már a fenhagyott kerületeket ketté vágván, s egyeneket vonván, és mindig ezt mivelvén, maradnak végre oly körszeletek, melyek kisebbek lesznek, mint a felülék, melylyel *EFGH* kör *S* lapot meghaladja. (Mert meg van mutatva a 10-dik könyv 1. feladatában, hogy két nem egyenlö mekkoraságot felvevén, ha a nagyobbikból felénél nagyobbat vagy felét, a maradékból megint felénél nagyobbat vagy felét elveszszük, és mind ugyanazt míveljük, marad végre oly mekkoraság, mely a felvett kisebbik mekkoraságnál kisebb lesz).







Maradjon hát, és legyenek az *EFGH* kör *EK KF FL LG GM MH HN NE* egyeneken álló szeletei kisebbek a felüléknél, a melylyel *EFGH* kör felülhaladja *S* lapot, a maradék *EKFLGMHN* sokszeg tehát *S* lapnál nagyobb. Irassék *ABCD* körbe is *EKFLGMHN* sokszeghez hasonló *AOBPCQDR* sokszeg; tehát a mint a *BD* négyszege az *FH*-éhoz, úgy van *AOBPCQDR* sokszeg *EKFLGMHN* sokszeghez. De a mint a *BD* négyszege az *FH*-éhoz, úgy van *ABCD* kör is *S* laphoz; és tehát a mint *ABCD* kör *S* laphoz, úgy *AOBPCQDR* sokszeg *EKFLGMHN* sokszeghez; cserélve tehát a mint *ABCD* kör a beléje foglalt sokszeghez, úgy *S* lap *EKFLGMHN* sokszeghez. Már pedig *ABCD* kör nagyobb a beírt sokszegnél; nagyobb tehát *S* lap is *EKFLGMHN* sokszegnél. De kisebb is; mi lehetetlen; nincsen tehát a mint a *BD* négyszege az *FH*-éhoz, úgy *ABCD* kör *EFGH* körnél kisebb valamely laphoz. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy *EFGH* kör sincs úgy *ABCD* körnél kisebb valamely laphoz, mint az *FH* négyszege a *BD*-éhez.

Már azt mondom, hogy a mint a *BD* négyszege az *FH*-éhoz, nincs úgy *ABCD* kör *EFGH* körnél nagyobb valamely laphoz.

Mert ha lehet, legyen úgy nagyobbhoz, *S*-hez; visszálva tehát a mint az *FH* négyszege a *BD*-éhez, úgy van *S* lap *ABCD* körhez; de a mint *S* lap *ABCD* körhez, úgy van *EFGH* kör *ABCD* körnél kisebb valamely laphoz; tehát a mint az *FH* négyszege a *BD*-éhez, úgy van az *EFGH* kör *ABCD* körnél kisebb valamely laphoz; mi lehetetlennek mutattaték meg; tehát a mint a *BD* négyszege az *FH*-éhoz, *ABCD* kör nincsen úgy *EFGH* körnél nagyobb valamely laphoz. Megmutattaték pedig, hogy nincs úgy kisebbhez is;

tehát a mint a *BD* négyszege az *FH* négyszegéhez, úgy van *ABCD* kör *EFGH* körhez.

A körök tehát sat.

(F e l v é t e l:

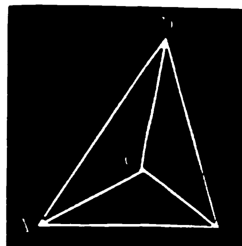
Azt mondom, hogy *S* lap nagyobb levén *EFGH* körnél, a mint *S* lap *ABCD* körhöz, úgy van *EFGH* kör *ABCD* körnél kisebb valamely laphoz.

Mert tétessék a mint *S* lap *ABCD* körhöz, úgy *EFGH* kör T laphoz: azt mondom, hogy *T* lap kisebb *ABCD* körnél. Mert mivel a mint *S* lap *ABCD* körhöz, úgy van *EFGH* kör *T* laphoz: tehát cserélve, a mint *S* lap *EFGH* körhöz, úgy van *ABCD* kör *T* laphoz. Már pedig *S* lap *EFGH* körnél nagyobb; tehát *ABCD* kör is nagyobb *T* lapnál; úgy hogy a mint *S* lap *ABCD* körhöz, úgy van *EFGH* kör *ABCD* körnél kisebb valamely laphoz: m. b. k.)

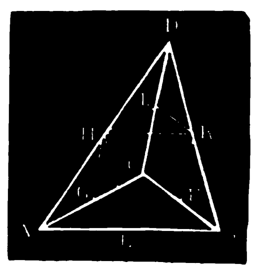
Jegyzet. A 2. 5. 11. 12 18-dik feladatok bizonyítmányai azon az elven épülnek, hogy három mekkoraságboz, melyek közzül az első és második bizonyos arányban vannak, lehet találni negyediket, a harmadikhoz azon arányut, miben a második van az elsőhöz Ezt azonban csupa szemléletileg előre állítni nem lehet, hanem minden külön esetben t. i. az említett harmadiknak saját minőségéhez képest kell bébizonyítni. Jelen esetben amaz állítmány így jelenik meg *a B D és FH négyszegeikhez és ABCD körhöz lenni kell egy negyedik egyarányunak.* Ez a lapképletek közzül csak azokra nézve van a 6-dik könyvben megmutatva, melyeknek oldalai egyenek; de a körökre, vagy inkább lapjaikra nézve, az eddig tanítottakból még azt sem tudhatjuk: lehetnek-e az 5-dik könyv 4-dik értelmezése szerint arányban egymáshoz, és éppen a jelenleg vitatás alatti feladat következtében fogunk két három, négy sat. akkora körökről, azaz a körlapok szorzásáról csak szolhatni is. Kérdés hát: nem petitio principii van-é e bizonyítmányban? Felelet: nincs; mert Euklides negyedik egyarányunak nem kört, hanem egy akármily alaku, tehát egyenvonalu képletet teszen fel; de ezáltal egyszersmind azt is, hogy *ABCD* kör lapja valami egyenektől körülfogott képlet lapjával *egyenlő*. Ez az a híres feladat, melynek lehetőségét, szintúgy mint az 1-ső könyv 5-dik kivánatáét, vagy mások szerint 11 dik közeszméiét elfogadjuk, vagy elfogadni kéntelenek vagyunk; de bébizonyítása, ámbár egészen lehetetlennek kimutatva nincs, még senkinek sem sikerült. Ez az a híres „quadratura circuli" feladata, melylyel sokan, s azok közt magyarok számosban, mint a mértan körüli egyébiránti érdemeik arányához illett volna, maguknak nevetséges hírt szereztek. Az elvnek azonban, mint a mely a 12-dik könyvbeli feladatok nagy részének alapul szolgál, megemlítése az „Elemek" kezünkre jött szövegében hiányzik, és gyanítható, hogy a gondos Euklides nem fogta elhagyni, hanem kiadói s javítói (!!) elhanyagolták. Talán a 2-dik feladatot követő haszontalan „Felvétel" helyett valami olyas volt.

3. Feladat:

Minden háromszegtalpu gúla, háromszegtalpu, egymással egyenlő és hasonló és az egészhez hasonló két gúlára, és két egyenlő gerendre oszlik: és a két gerend nagyobb, mint az egész gúlának a fele.

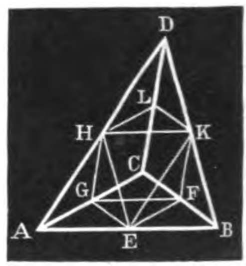


Legyen egy gúla, melynek a talpa *ABC* háromszeg, hegye pedig *D* pont: azt mondom, hogy *ABCD* gúla, háromszegtalpu, egymással egyenlő, s egymáshoz és az egészhez hasonló két gúlára, és két egyenlő gerendre oszlik: és a két gerend az egész gúla felénél nagyobb.



Mert vágassanak ketté *AB BC CA AD DB DC* egyenek *E F G H K L* pontoknál, és vonassanak *EH EG GH HK KL LH KF FG* egyenek. És minthogy *AE EB*-vel, *AH HD*-vel egyenlők; tehát *EH DB*-hez egyközü. Ugyanazért *HK* is egyközü *AB*-

hez; $HEBK$ tehát egyközény; HK tehát EB-vel egyenlő. De EB EA-val egyenlő; EA is tehát egyenlő HK-val. AH is pedig egyenlő HD-vel; e szerint EA AH két oldal KH HD két oldallal külön-külön egyenlők, s az EAH alatti szeglet egyenlő a KHD alattival; tehát EH talp egyenlő KD talppal; AEH háromszeg tehát HKD háromszeggel egyenlő és hozzája hasonló. Ugyanazért AHG háromszeg is egyenlő HLD háromszeggel és hozzája hasonló. És minthogy EH HG egymást érő két egyen KD DL egymást érő két egyenhez egyközü, nem levn azon egy lapban, egyenlő szegleteket fognak be. Az EHG alatti szeglet tehát egyenlő a KDL alatti szeglettel. És minthogy EH HG két egyen KD DL két egyennel külön-külön egyenlő, és az EHG alatti szeglet egyenlő a KDL alattival: tehát EG talp egyenlő KL talppal; tehát EHG háromszeg KDL háromszeggel egyenlő és hozzája hasonló. Ugyanazért AEG háromszeg is HKL háromszeggel egyenlő és hozzá hasonló; az a gúla tehát, melynek talpa AEG háromszeg hegye pedig H pont, egyenlő és hasonló ahhoz a gúlához, melynek talpa HKL háromszeg és hegye D pont. És mivel ADB háromszegnek egyik AB oldalához HK egyközü van vonva, ADB háromszeg DHK háromszeggel egyenlőszegletü, s oldalaik egyarányuak; ADB háromszeg tehát DHK háromszeghez hasonló. Ugyanazért DBC háromszeg is hasonló DKL háromszeghez, és ADC DLH-hoz. És minthogy BA AC két egymást érő egyen KH HL két egymást érő egyenhez egyközü, nem azon egy lapban levén, egyenlő szeleteket fognak be. A BAC alatti szeglet tehát egyenlő a KHL alattival. És a mint BA AC-hez, úgy van KH LH-hoz; ABC háromszeg tehát HKL háromszeghez hasonló; az a gúla is tehát, melynek talpa ABC háromszeg, hegye pedig D pont, hasonló ahhoz a gúlához, melynek talpa HKL háromszeg és hegye D pont. De az a gúla, melynek talpa HKL háromszeg, hegye D pont, hasonlónak mutattaték meg ahoz a gúlához, melynek talpa AEG háromszeg, hegye H pont; miszerint az a gúla is, melynek talpa ABC háromszeg, hegye D pont, hasonló ahhoz a gúlához, melynek talpa AEG háromszeg, hegye H pont; $AEGH$ $HKLD$ gúláknak tehát mindenike $ABCD$ gúlához hasonló. És minthogy *BF FC*-vel egyenlő, *EBFG* egyközény két akkora mint *GFC* háromszeg. Már pedig ha van két egyenlő magasságu gerend, s emennek talpa egyközény, amazé háromszeg, az egyközény pedig két akkora mint a háromszeg: azok a gerendek egyenlők; a *BKF EHG* két háromszegtől s *EBFG EBKH HKFG* három egyközénytől körülfogott gerend tehát a *GFC HKL* két háromszegtől és *KFCL LCGH HKFG* három egyközénytől körülfogott gerenddel egyenlő. És világos, hogy mindenik gerend, t. i. az, a melynek talpa *EBFG* egyközény, szembese *) pedig *HK* egyen, és az, a melynek talpa *GFC* háromszeg és szembese *KLH* háromszeg, mindenik gúlánál, melyeknek talpai *AEG HKL* háromszegek, és hegyei *H D* pontok, nagyobb; mivelhogy ha *EF EK* egyeneket vonjuk, az a gerend, melynek talpa *EBFG* egyközény, szembese pedig *HK* egyen, annál a gúlánál, melynek talpa *EBF* háromszeg, hegye pedig *K* pont, nagyobb



De az a gúla, melynek talpa *EBF* háromszeg, hegye *K* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek talpa *AEG* háromszeg, hegye *H* pont; mert egyenlő és hasonló lapok fogják körül; miszerint az a gerend, melynek talpa *EBFG* egyközény, szembese *HK* egyen, nagyobb annál a gúlánál, melynek talpa *AEG* háromszeg, hegye pedig *H* pont. Már az a gerend, melynek talpa *EBFG* egyközény, szembese pedig *HK* egyen, egyenlő azzal a gerenddel, melynek talpa *GFC* háromszeg, szembese *HKL* háromszeg: az a gúla pedig, melynek talpa *AEG* háromszeg, hegye *H* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek talpa *HKL* háromszeg hegye *D* pont; a mondott két gerend tehát nagyobb a mondott két gúlánál, melynek talpai *AEG HKL* háromszegek, hegyei pedig *H D* pontok.

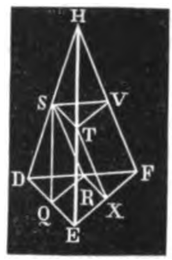
Az egész gúla tehát, melynek talpa *ABC* háromszeg, hegye *D* pont, fel van osztva két egymással egyenlő, egymás-

*) Azaz: átelleni határa.

hoz és az egészhez hasonló gúlára és két egyenlő gerendre, s a két gerend nagyobb, mint az egész gúlának a fele: m. b. k.

4. Feladat:

Ha van azon tető alatti, háromszegtalpu két gúla, s mindenik közzülök felosztatik két egymással egyenlő, s az egészhez hasonló gúlára s két egyenlő gerendre, s a származott gúláknak mindenike megint úgy, s mind ez miveltetik: a mint az egyik gúla talpa a másik gúla talpához, úgy lesz az egyik gúlabeli minden gerend a másik gúlabeli ugyanannyi számu minden gerendhez.



Legyen azon tető alatti két gúla, melyeknek talpai *ABC DEF* háromszegek, és hegyei *G H* pontok, és osztassék mindenik két egymással egyenlő s az egészhez hasonló gúlára s két egyenlő gerendre, s a származott gúlák mindenike azon móddal képzeltessék elosztva, és mind ez miveltessék: azt mondom, hogy a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van az *ABCG* gúlabeli minden gerend a *DEFH* gúlabeli ugyanannyi számu minden gerendhez.

Mert minthogy *BO OC*-vel egyenlő, *AL* pedig *LC*-vel: tehát *OL AB*-hez egyközü, és *ABC* háromszeg *LOC* háromszeghez hasonló. Ugyanazért *DEF* háromszeg is hasonló *RXF* háromszeghez. És minthogy *BC* két akkora mint *CO*, és *EF* mint *FX*: tehát a mint *BC CO*-hoz, úgy van *EF FX*-hez. Már *BC*-re *CO*-ra hasonló és hasonlólag fekvő *ABC LOC* egyenes oldalu képletek írvák, *EF FX*-re pedig *DEF RXF* hasonló és hasonlólag fekvő egyenes oldaluak; tehát a mint *ABC* háromszeg *LOC* háromszeghez, úgy van *DEF* háromszeg *RXF* háromszeghez; cserélve tehát a mint *ABC* háromszeg *DEF* háromszeghez, úgy *LOC RXF*-hez. De a mint *LOC* háromszeg *RXF* háromszeghez, úgy van az a gerend, melynek talpa *LOC* háromszeg, szembese PMN, ahhoz a gerendhez, melynek talpa RXF háromszeg, szembese pedig STV; tehát a mint ABC háromszeg DEF háromszeghez, úgy van az a gerend, melynek talpa LOC háromszeg, szembese pedig PMN, ahhoz a gerendhez, melynek talpa RXF háromszeg és szembese STV. És minthogy $ABCG$ gúlában két gerend egymással egyenlő de a $DEFH$ gúlabeli gerendek is egyenlők egymással: tehát a mint az a gerend, melynek talpa $KLOB$ egyközény, és szembese MP egyen, ahhoz a gerendhez, melynek talpa LOC háromszeg, szembese pedig PMN, úgy van az a gerend, melynek talpa $EQRX$ egyközény és szembese ST egyen, ahoz a gerendhez, melynek talpa RXF háromszeg, szembese pedig STV; öszvezve tehát a mint $KBOLPM$ $LOCNMP$ gerendek $LOCNMP$ gerendhez, úgy vannak $QEXRST$ $RXFVST$ gerendek $RXFVST$ gerendhez; cserélve tehát a mint $KBOLPM$ $LOCNMP$ gerendek $QEXRST$ $RXFVST$ gerendekhez, úgy van $LOCNMP$ gerend $RXFVST$ gerendhez; de a mint $LOCNMP$ gerend $RXFVST$ gerendhez, azon aránynak van megmutatva LOC talp RXF talphoz, és ABC talp is DEF talphoz; tehát a mint ABC háromszeg DEF háromszeghez, úgy van az $ABCG$ gúlabeli két gerend a $DEFH$ gúlabeli két gerendhez. Hasonlólag ha a származott gúlákat, úgy mint $PMNG$-t $STVH$-t is, azon módon felosztjuk: a mint PMN talp STV talphoz, úgy leend a $PMNG$-beli két gerend az $STVH$-beli két gerendhez. De a mint PMN talp STV talphoz, úgy van ABC talp DEF talphoz; mert PMN STV háromszegek mindenike LOC RXF háromszegek mindenikével különkülön egyenlő: tehát a mint ABC talp DEF talphoz, úgy van az $ABCG$ gúlabeli két gerend a $DEFH$ gúlabeli két gerendhez, s a $PMNG$-beli két gerend az $STVH$ gúlabeli két gerendhez, s a négy gerend a négyhez. — Ugyan ezeket mutatjuk meg az $AKLP$ és $DQRS$ gúlák felosztásából származó gerendekről is, és átaljában minden egyenlő számuakról: m. b. k.

Felvétel: **Hogy pedig a mint LOC háromszeg RXF háromszeghez, úgy van az a gerend, melynek a talpa LOC há-**

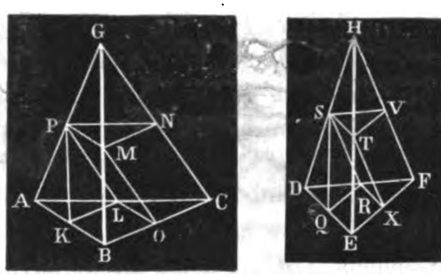
romszeg, szembese PMN, ahhoz a gerendhez, melynek talpa RXF háromszeg, szembese pedig STV, így kell megmutatni:

Mert azon rajzban képzeltessenek G H pontokból ABC DEF lapokra függők, melyek tudnivaló, hogy egyenlök lesznek, mivel a gúlák feltét szerint egyenlő magasságuak. És minthogy két egyent GC-t és a G-ből vont függőt ABC PMN egyközü lapok vágják, azon arányban vágják. Már pedig GC egyent PMN lap N pontnál ketté vágja, tehát a G-ből ABC lapra vont függőt is ketté vágja PMN lap. Ugyanazért a H-ból DEF lapra vont függőt is ketté vágja STV lap. Már a G H pontokból ABC DEF lapokra vont függők egyenlök; tehát a PMN STV háromszegektől ABC-re DEF-re vont függők is azok; a gerendek tehát, melyeknek talpai LOC RXF háromszegek, szembeseik pedig PMN STV, egyenlő magasságuak, úgy hogy a mondott gerendekre irott egyközlapu telyek is, egyenlő magosságuak levén, úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik: s a hasonfeleik is. Tehát a mint LOC talp RXF talphoz, úgy vannak a mondott gerendek egymáshoz: m. b. k.

Jegyz. Simson R. is szükségesnek látja megmutatni, hogy a két gúlabeli $LOCNPM$ és $RXFVST$ gerendek egyenlő magasságuak; mit abból hoz, ki, hogy a G H hegyekből ABC DEF talpakra bocsátott függők egyenlők levén, PMN STV lapok, melyek ABC DEF lapokhoz egyközüek, mindeniket ketté vágják, minthogy AG DH egyeneket is ketté vágják, (11-ik könyv 17-ik feladat); miszerint a mondott függők hasonfelei is egyenlők és egyszersmind $LOCNPM$ és $RXFVST$ gerendek magasságai; tehát stb.

5. Feladat:

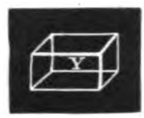
Azon tető alatti és háromszegtalpu gúlák, úgy vannak egymáshoz mint a talpaik.



Legyenek azon tető alatti gúlák, melyeknek talpai ABC

DEF háromszegek, hegyei *G H* pontok: azt mondom, hogy a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van *ABCG* gúla *DEFH* gúlához.

Mert ha a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, nem úgy van *ABCG* gúla *DEFH* gúlához, tehát a mint *ABC* talp *DEF* taphoz, úgy lesz *ABCG* gúla *DEFH* gúlánál vagy kisebb vagy nagyobb némi más telyhez.



Legyen előbb kisebbhez, *Y*-hoz, és osztassék fel *DEFH* gúla két egymással egyenlő és az egészhez hasonló gúlára és két egyenlő gerendre; már a két gerend nagyobb mint az egész gúlának fele. És ismét osztassanak fel hasonlókép az osztásból származott gúlák; és mind ez miveltessék, a mig *DEFH* gúlából oly gúlák maradnak fenn, melyek kisebbek annál a felüléknél, melylyel *DEFH* gúla *Y* telyet meghaladja. Maradjanak és legyenek ezek például *DQRS* és *STVH*; a *DEFH* gúlabeli többi gerendek összesen tehát *Y* telynél nagyobbak. Osztassék fel az *ABCG* gúla is hasonlólag és egyenlő számra mint *DEFH* gúla; tehát a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy vannak az *ABCG* gúlabeli gerendek a *DEFH* gúlabeli gerendekhez. De a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van *ABCG* gúla *Y* telyhez; tehát a mint *ABCG* gúla *Y* telyhez, úgy vannak az *ABCG* gúlabeli gerendek a *DEFH* gúlabeli gerendekhez; cserélve tehát a mint *ABCG* gúla a beléje foglalt gerendekhez, úgy van *Y* tely a *DEFH* gúlabeli gerendekhez. Már *ABCG* gúla nagyobb a beléje foglalt gerendeknél; nagyobb tehát *Y* tely is a *DEFH* gúlabeli gerendeknél. De kisebb is; mi lehetetlen; nincsen tehát a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy *ABCG* gúla *DEFH* gúlánál kisebb bármely telyhez. — Hasonlólag mutatjuk meg, hogy nincs is a mint *DEF* talp *ABC* talphoz, úgy *DEFH* gúla valamely *ABCG* gúlánál kisebb telyhez.

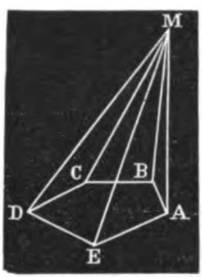
Még azt mondom, hogy nincs is a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy *ABCG* gúla valamely *DEFH* gúlánál nagyobb telyhez.

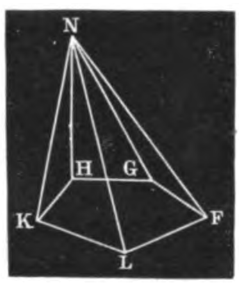
Mert ha lehet, legyen úgy nagyobbhoz, *Y*-hoz; viszálva tehát a mint *DEF* talp *ABC* talphoz, úgy van *Y* tely *ABCG* gúlához. A mint pedig *Y* tely *ABCG* gúlához, úgy van *DEFH* gúla *ABCG*-nél kisebb valamely telyhez, a mint fölebb megmutattuk; tehát a mint *DEF* talp is *ABC* talphoz, úgy *DEFH* gúla *ABCG* gúlánál kisebb valamihez; mi képtelennek van megmutatva; nincsen tehát mint a *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy *ABCG* gúla *DEFH* gúlánál nagyobb valamely telyhez. Megmutattuk pedig, hogy nincs úgy kisebbhez is; a mint ehát *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van *ABCG* gúla *DEFH* gúlához.

Tehát azon tető alatti sat.

6. Feladat:

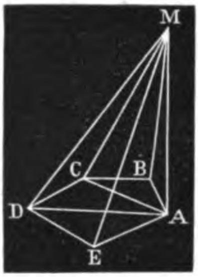
Azon tető alatti sokszegtalpu gúlák úgy vannak egymáshoz mint a talpaik.





Legyenek azon tető alatti gúlák, melyeknek talpai *ABCDE FGHKL* sokszegek, hegyei *M N* pontok: azt mondom, hogy a mint *ABCDE* talp *FGHKL* talphoz, úgy van *ABCDEM* gúla *FGHKLN* gúlához.

Mert vonassanak *AC AD FH FK*. Már minthogy *ABCM ACDM* háromszegtalpu és azon tető alatti két gúla úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik, tehát a mint *ABC* talp *ACD* talphoz, úgy van *ABCM* gúla *ACDM* gúlához, és öszvetéve a mint *ABCD* talp *ACD* talphoz, úgy van *ABCDM* gúla *ACDM* gúlához. De a mint *ACD* talp *ADE* talphoz, úgy van *ACDM* gúla is *ADEM* gúlához; egyközösön tehát a mint *ABCD* talp *ADE* talphoz, úgy van *ABCDM* gúla *ADEM* gúlához. És ismét összetéve a mint *ABCDE* talp *ADE*-hez, úgy *ABCDEM* gúla *ADEM* gúlához. — Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy a mint *FGHKL* talp *FKL* talphoz,

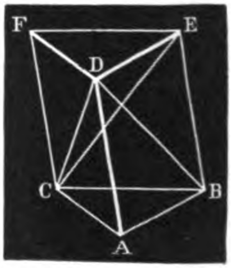


úgy van *FGHKLN* gúla is *FKLN* gúlához. És minthogy *ADEM* *FKLN* két gúla háromszegtalpuak és azon tető alattiak: tehát a mint *ADE* talp *FKL* talphoz, úgy van *ADEM* gúla *FKLN* gúlához. Már mivel a mint *ABCDE* talp *ADE* talphoz, úgy van *ABCDEM* gúla *ADEM* gúlához; a mint pedig *ADE* talp *FKL* talphoz, úgy *ADEM* gúla *FKLN* gúlához: tehát egyközösen a mint *ABCDE* talp *FKL* talphoz, úgy van *ABCDEM* gúla *FKLN* gúlához. De a mint *FKL* talp *FGHKL* talphoz, úgy van *FKLN* gúla *FGHKLN* gúlához; tehát ismét egyközösön a mint *ABCDE* talp *FGHKL* talphoz, úgy van *ABCDEM* gúla *FGHKLN* gúlához.

Azon sat.

Jegyz. A fölebbi bizonyítmány eleje a vaticani codexből vétetett. A baseliben és oxfordiban következőleg áll:

Mert oszlattassék *ABCDE* talp *ABC* *ACD* *ADE* háromszegekre; *FGHKL* talp megint *FGH* *FHK* *FKL* háromszegekre; és mindenikre képzeltessenek az eredeti gúlákkal egyenlő magasságu gúlák. És mivel a mint *ABC* háromszeg *ACD* háromszeghez, úgy van *ABCM* gúla *ACDM* gúlához, és összetéve, a mint *ABCD* oldalmás *ACD* háromszeghez, úgy van *ABCDM* gúla *ACDM* gúlához. De a mint *ACD* háromszeg *ADE* háromszeghez, úgy *ACDM* gúla *ADEM* gúlához; tehát egyközüleg sat.



7. Feladat:

Minden háromszegtalpu gerend, három egymással egyenlő, háromszegtalpu gúlára oszlik.

Legyen gerend, melynek talpa *ABC* háromszeg, szembese pedig *DEF*:

azt mondom, hogy *ABCFDE* gerend három, egymással egyenlő, háromszegtalpu gúlára oszlik.

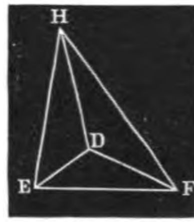
Vonassanak *BD EC CD*. Már minthogy *ABED*, egyközény, s az átméröje *BD*: tehát *ABD* háromszeg egyenlö *EDB* háromszeggel; az a gúla is tehát, melynek talpa *ABD* háromszeg, s a hegye *C* pont, egyenlö azzal a gúlával, melynek talpa *EDB* háromszeg, hegye *C* pont. De az a gúla, melynek talpa *EDB* háromszeg, hegye *C* pont, egy azzal a gúlával, melynek talpa *EBC* háromszeg, hegye pedig *D* pont, mert azon lapok fogják körül; az a gúla tehát, melynek talpa *ABD* háromszeg, hegye *C* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek talpa *EBC*, háromszeg, hegye pedig *D* pont. Ismét minthogy *FCBE*, egyközény, s az átméröje *CE*: *ECF* háromszeg *CBE* háromszeggel egyenlö; az a gúla is tehát, melynek talpa *BEC* háromszeg, hegye *D* pont, egyenlö azzal a gúlával, melynek talpa *ECF* háromszeg, hegye *D* pont. De az a gúla, melynek talpa *BCE* háromszeg, hegye *D* pont, egyenlönek mutattaték meg azzal a gúlával, melynek talpa *ABD* háromszeg, hegye *C* pont; tehát az a gúla is, melynek talpa *CEF* háromszeg, hegye *D* pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek talpa *ABD* háromszeg, hegye pedig *C* pont; fel van osztva tehát *ABCFDE* gerend három, egymással egyenlő, háromszegtalpu gúlára: m. b. k.

Tanuság: És minthogy az a gúla, melynek talpa *ABD* háromszeg, hegye pedig *C* pont, egy azzal a gúlával, melynek talpa *CAB* háromszeg, hegye *D* pont, mert azon lapok fogják körül; az a gúla pedig, melynek talpa *ABD* háromszeg, hegye *C* pont, harmadának mutattaték meg annak a gerendnek, melynek talpa *ABC* háromszeg és szembese *DEF*: tehát az a gúla is, melynek talpa *ABC* háromszeg, hegye *D* pont, harmada annak a gerendnek, melynek talpa azon *ABC* háromszeg, szembese pedig *DEF*. Ebből tehát világos, hogy minden gúla harmadrésze a gerendnek, melynek vele azon egy talpa s egyenlő magassága vagyon; (mivelhogy ha a gerend talpa és szembese más egyenes vonalu képlet lesz is, feloszlik háromszegtalpu és tetöü gerendekre, s a mint az egész talp mindenik talphoz . . . . . [sat.] . . .)

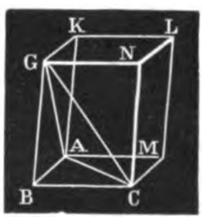
2. *Tanuság:* Egyenlő magasssságu gerendek egymáshoz azon arányban vannak, miben a talpaik; mivel a harmadrészeik, ú. m. a gúlák, úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik, melyek egyszersmind a gerendek talpai. (Simson R.)

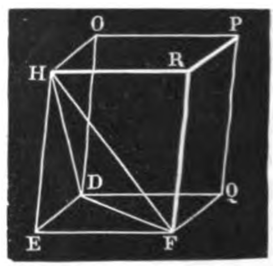
8. Feladat:

Hasonló, háromszegtalpu gúlák háromszoros arányban vannak egymáshoz, mint a hasonfektü oldalaik.



Legyenek hasonló, és hasonlóan fekvő gúlák, melyeknek talpai *ABC DEF* háromszegek, hegyei *G H* pontok: azt mondom, hogy *ABCG* gúla *DEFH* gúlához háromszoros arányban van mint *BC* oldal *EF*-hez.





Mert egészítessenek ki *BGML EHQP* egyközlapu telyek. És minthogy *ABCG* gúla *DEFH* gúlához hasonló, tehát az *ABC* alatti szeglet egyenlö a *DEF* alattival, a *GBC* alatti szeglet a *HEF* alattival, s az *ABG* alatti a *DEH* alattival, és a mint *AB DE*-hez, úgy van *BC EF*-hez, és *BG EH*-hoz. És mivel a mint *AB DE*-hez, úgy van *BC EF*-hez, s az egyenlö szegletek körüli oldalak egyarányuak: tehát *BM* egyközény *EQ* egyközényhez hasonló. Ugyanazért *BN* is hasonló *ER*-hez, és *BK EO*-hoz; *MB BK BN* három egyközény tehát *EQ EO ER* három egyközényhez hasonló. De *MB BK BN* három egyközény a három átellenivel egyenlö és hasonló, *EQ EO ER* három egy közény pedig a három átellenivel egyenlö és hozájok hasonló. *BGML EHQP* telyeket tehát egyenlö számu hasonló lapok fogják körül. *BGML* tely tehát *EHQP* telyhez hasonló. Már pedig hasonló egyközlapu telyek háromszoros arányban vannak egymáshoz mint a hasonnevü oldalaik; *BGML* tely tehát *EHQP* telyhez háromszoros arányban van, mint a hasonnevü *BC* oldal a hasonnevü *EF* oldalhoz. De a mint *BGML* tely *EHQP* telyhez, úgy van *ABCG* gúla *DEFH* gúlához, mivelhogy a gúla a telynek hatodrésze, mert az a gerend, mely az egyközlapu telynek fele, a gúlának háromszorzata.

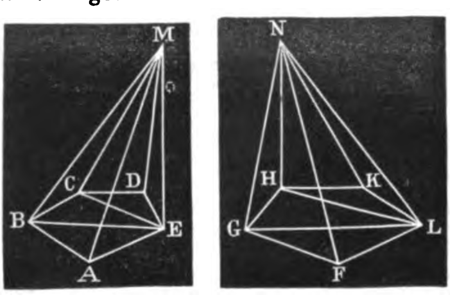
ABCG gúla is tehát *DEFH* gúlához háromszoros arányban van, mint *BC* *EF*-hez: m. b. k.

Tanuság.

Ebből világos, hogy a sokszegtalpu hasonló gúlák is háromszoros arányban vannak egymáshoz mint a hasonnevü oldalaik. Mert felosztván a belölök telő háromszegtalpu gúlákra, miáltal a talpaik hasonló sokszegei is hasonló és egyenlő számu s az egészekkel hasonnevü háromszegekre oszolnak: a mint az egyikbeli háromszegtalpu egy gúla a másikbeli háromszegtalpu egy gúlához, úgy van az egyikbeli háromszegtalpu minden gúla összesen a másikbeli háromszegtalpu minden gúlához összesen, azaz: maga a sokszegtalpu gúla a sokszegtalpu gúlához. De a háromszegtalpu gúla a háromszegtalpu gúlához háromszoros arányban van, mint a hasonnevü oldalaik; tehát a sokszegtalpu gúla is a sokszegtalpu hasonló gúlához háromszoros arányban van, mint a hasonnevü oldalaik.

Jegyzet. A tanuság bizonyítmánya hiányos, mert abból, hogy két gúla talpai hasonlók, még teljességgel nem következik, hogy a gúlák is hasonlók, s ezt előbb meg kell mutatni, s ez ilynemü esetben másutt nincs is elmúlatva. Kiegészítésül:

Legyenek *ABCDEM* és *FGHKLN* sokszegtalpu, hasonló, és hasonfektü gúlák: azt mondom, hogy az a gúla, melynek talpa *ABCDE* sokszeg, hegye *M*, ahhoz, melynek talpa *FGHKL* sokszeg, hegye *N* pont, háromszo-

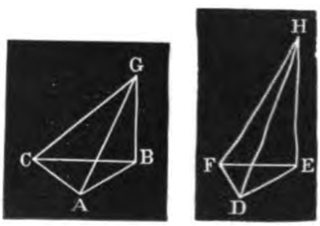


ros arányban van, mint *AB* oldal a hasonfektü *FG* oldalhoz.

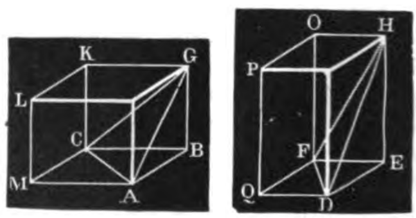
Mert oszlattassék *ABCDE* sokszeg *ABE EBC ECD* háromszegekre, *FGHKL* sokszeg pedig amazokhoz külön-külön hasonló *FGL LGH LHK* háromszegekre. Már mivel a sokszegtalpu gúlák egymáshoz hasonlók, tehát *ABM* háromszeg *FGN* háromszeghez, és *AEM FLN*-hez külön-külön hasonlók, ennélfogva a mint *ME EA*-hoz, úgy *NL LF* hez. De mivel *ABE* háromszeg *FGL*-lel egyenlő, tehát a mint *EA EB* hez, úgy *FL LG*-hez: egyközüleg tehát a mint *ME EB*-hez, úgy *NL LG*-hez. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy a mint *EB BM*-hez, úgy *LG GN*-hez; minélfogva ismét egyközüleg a mint *EM MB*-hez, úgy *LN NG*-hez; miszerint *EMB LNG* háromszegek hasonfektü oldalai egyarányuak, és a háromszegek hasonlók. De megmutattaték, hogy *ABM* háromszeg *FGN*-hez, *AEM FLN*-hez, és *ABE GFL*-hez hasonlók; tehát azoknak a gúláknak, melyeknek talpai *ABE FGL* háromszegek, hegyei *M N* pontok, a telyszegletei egyenlők, az azokat körülfogó lapok hasonlók, miszerint maguk a gúlák is egymáshoz hasonlók. Így mutatjuk meg azt is, hogy *EBCM* gúla *LGHN* gúlához, *ECDM* gúla *LHKN* gúlához hasonlók.

9. Feladat:

Háromszegtalpu és egyenlő gúlák talpai a magasságaikkal ellenarányuak: s a mely háromszegtalpu gúlák talpai a magasságaikkal ellenarányuak, azok egyenlők.



Legyenek egyenlő gúlák, melyeknek talpai *ABC DEF* háromszegek, hegyei *G H* pontok: azt mondom, hogy *ABCG DEFH* gúlák talpai a magasságaikkal ellenarányuak, s a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához.



Mert egészítessenek ki *BGML EHQP* egyközlapu telyek.

És minthogy *ABCG* gúla *DEFH* gúlával egyenlő, s *ABCG* gúlának hatszorzata *BGML* tely, *DEFH* gúlának pedig hatszorzata *EHQP* tely: tehát *BGML* tely egyenlő *EHQP* telylyel. Már pedig egyenlő egyközlapu telyeknek a talpai a magasságaikkal ellenarányuak; tehát a mint *BM* talp *EQ* talphoz, úgy van az *EHQP* tely magassága a *BGML* tely magasságához. De a mint *BM* talp *EQ* talphoz, úgy van *ABC* háromszeg *DEF* háromszeghez; tehát a mint *ABC* háromszeg *DEF* háromszeghez, úgy az *EHQP* tely magassága a *BGML* tely magasságához. De az *EHQP* tely magassága egy a *DEFH* gúla magasságával, a *BGML* tely magassága egy az *ABCG* gúla magasságával; tehát a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához; *ABCG DEFH* gúlák talpai tehát a magasságaikkal ellenarányuak.

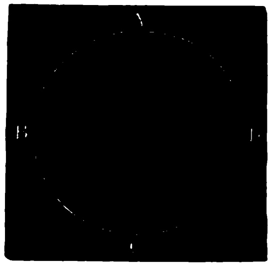
De legyenek *ABDG DEFH* gúlák talpai a magasságaikkal ellenarányuak, és legyen a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához; azt mondom, hogy *ABCG* gúla *DEFH* gúlával egyenlő.

Mert azon készületeket téve, mivel a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van a *DEFH* gúla magassága az *ABCG* gúla magasságához; de a mint *ABC* talp *DEF* talphoz, úgy van *BM* egyközény *EQ* egyközényhez: tehát a mint *BM* egyközény is *EQ* egyközényhez, úgy van a *DEFH* gúla magasgassága az *ABCG* gúla magasságához. De a *DEFH* gúla magassága egy az *EHQP* egyközlapu tely magasságával, s az *ABCG* gúla magassága egy a *BGML* egyközlapu tely magasságával; tehát a mint *BM* talp *EQ* talphoz, úgy van az *EHQP* egyközlapu tely magassága a *BGML* egyközlapu tely magasságához. Már pedig a mely egyközlapu telyek talpai a magasságaikkal ellenarányuak, azok egyenlők; tehát *BGML* egyközlapu tely *EHQP* egyközlapu telylyel egyenlő. De *BGML*-nek hatodrésze *ABCG* gúla, *EHQP*-nek hatodrésze pedig *DEFH* gúla; tehát *ABCG* gúla *DEFH* gúlával egyenlő.

Háromszegtalpu sat.

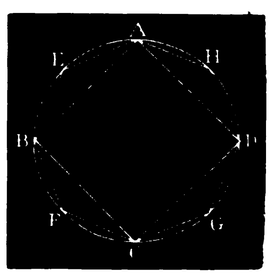
10. Feladat:

Minden kúp egy azon talpu s vele egyenlő magasságu görünek harmadrésze.



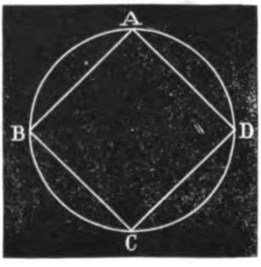
Legyen egy kúpnak a görüvel azonegy *ABCD* talpa, és egyenlő magassága; azt mondom, hogy a kúp a görünek harmadrésze, azaz a görü három akkora mint a kúp.

Mert ha a görü nem három akkora mint a kúp, a görü vagy nagyobb leend három akkoránál mint a kúp vagy kisebb három akkoránál. Legyen elöbb háromakkoránál nagyobb, és irassék *ABCD* körbe *ABCD* négyszeg; e szerint *ABCD* négyszeg *ABCD* kör felénél nagyobb. Állítassék *ABCD* négyszegre a görüvel egyenlő magasságu gerend: ez a gerend nagyobb lesz a görü felénél, mivelhogy ha *ABCD* kör körül is négyszeget irunk, az *ABCD* körbe irt négyszeg fele a körülirtnak: és a reájok állított gerendek egyenlő magasságu egyközlapu telyek; de az ugyanazon magasságu egyközlapu telyek úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik; ezek a gerendek is tehát úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik, és az *ABCD* négyszegre állított gerend az *ABCD* kör körül irott négyszegre állított gerendnek hasonfele; már a görü kisebb az *ABCD* kör körül irott négyszegre állított gerendnél; tehát az *ABCD* négyszegre állított s a görüvel egyenlő magasságu gerend nagyobb a görü hasonfelénél. Vágasssanak kettè *AB BC CD DA* kerületek *E F G H* pontoknál, és vonassanak *AE EB*, *BF FC*, *CG GD*, *DH HA*; tehát *AEB BFC CGD DHA* háromszegeknek mindenike nagyobb a hozzátartozó



körszelet felénél, a mint fölebb meg volt mutatva. Állítassanak *AEB BFC CGD DHA* háromszegek mindenikére a görüvel egyenlő magasságu gerendek; már az állított gerendek mindenike nagyobb a görünek hozája tartozó hasábjánál, mivelhogy ha *E F G H* pontokon át *AB BC CD DA* egyenekhez egyközüeket vonunk, s az *AB*-re *BC*-re *CD*-re *DA*-ra való egyközényeket kiegészítjük, s a görüvel egyenlő magasságu egyközlapu telyeket állítunk reájok, az állított telyek mindenikének hasonfelei lesznek az *AEB BFC CGD DHA* háromszegeken álló gerendek; már pedig a görü hasábjai kisebbek az állított egyközlapu telyeknél, úgy hogy az *AEB BFC CGD DHA* háromszegeken álló gerendek nagyobbak, mint a görü hozzájok tartozó hasábjainak hasonfelei; a fennmaradt kerületeket megint ketté vágva, egyeneket vonva, s a háromszegek mindenikére a görüvel egyenlő magasságu gerendeket állítva, és mind ezt mivelve, egyszer csak hagyunk fenn oly görü-hasábokat, melyek kisebbek lesznek a felüléknél, melylyel a görü a kúp háromszorzatát meghaladja. Maradjanak és legyenek ezek *AE EB BF FC CG GD DH HA:* tehát a maradék gerend, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, s magossága az a mi a görvé, nagyobb mint a kúp háromszorzata. De az a gerend, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, magassága az a mi a görvé, háromakkora, mint az a gúla, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, hegye pedig egy a kúpéval; az a gúla is tehát, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, hegye pedig egy a kúpéval, nagyobb annál a kúpnál, melynek *ABCD* kör a talpa. De kisebb is, mert belé van foglalva; mi lehetetlen; nem nagyobb tehát a görü háromakkoránál mint a kúp.

Azt mondom, hogy nem is kisebb a görü háromakkoránál mint a kúp.



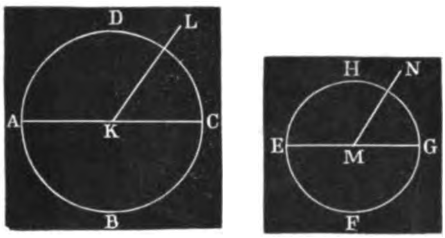
Mert ha lehet, legyen a görü kisebb háromakkoránál mint a kúp; viszszálva tehát a kúp nagyobb mint a görü harmadrésze. Irassék *ABCD* körbe *ABCD* négyszeg; *ABCD* négyszeg tehát nagyobb mint *ABCD* körnek a fele.

Már állítassék *ABCD* négyszegre gúla, melynek a kúpéval azon egy hegye legyen; tehát az állított gúla nagyobb lesz a kúp felénél, mivelhogy a mint fölebb megmutatók, ha a körre négyszeget irunk, *ABCD* négyszeg a körreirt négyszegnek fele; és ha a négyszegekre egyközlapu telyeket, melyek gerendeknek is hivatnak, állítunk, az *ABCD* négyszegre állított tely félakkora lesz, mint a körre írt négyszegre állított; mert úgy vannak egymáshoz mint a talpaik; de úgy a harmadaik is; az a gúla is tehát, melynek talpa *ABCD* négyszeg, félakkora, mint a körre irt négyszegre állított gúla. Már pedig a kör körüli négyszegre állított gúla nagyobb a kúpnál, mert ezt magában foglalja; az a gúla tehát, melynek talpa *ABCD* négyszeg, hegye a kúpéval azon egy, nagyobb mint a kúp fele. Vágassanak ketté *AB BC CD DA* kerületek *E F G H* pontoknál, és vonassanak *AE EB BF FC CG GD DH HA*; tehát *AEB BFC CGD DHA* háromszegeknek mindenike nagyobb az *ABCD* kör hozzája tartozó szeletei fele-részeinél. És állítassanak *AEB BFC CGD DHA* háromszegek mindenikére a kúpéval azonegy hegyü gúlák; tehát ime gúláknak is mindenike éppen úgy nagyobb lesz, mint a kúp hozzá tartozó hasábjának fele. Már a megmaradt kerületeket ketté vágva és egyeneket vonva, s mindenik háromszegre a kúpéval azon hegyü gúlákat állítva, s mind ezt mivelve, egyszer csak fogunk fennhagyni oly kúphasábokat, melyek kisebbek lesznek a felüléknél, melylyel a kúp a görü harmadrészét meghaladja. Maradjanak és legyenek ezek az *AE EB BF FC CG GD DH HA* körszeleteken állók; tehát a maradék gúla, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, hegye pedig egy a kúpéval, nagyobb mint a görü harmadrésze. De az a gúla, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, hegye pedig egy a kúpéval, harmada a gerendnek, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, és magassága egy a görüével; az a gerend tehát, melynek talpa *AEBFCGDH* sokszeg, magassága pedig egy a görvével, nagyobb annál a görünél, melynek talpa *ABCD* kör. De kisebb is, mert beléje van foglalva; mi lehetetlen; nem kisebb tehát a görü három akkoránál mint a kúp. De megmutattuk, hogy nem is nagyobb három akkoránál; a görü tehát három akkora mint a kúp, úgyhogy a kúp a görünek harmadrésze.

Minden kúp tehát sat.

11. Feladat:

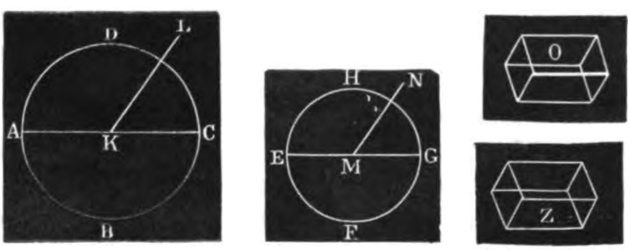
Azon magasságu kúpok és görvek úgy vannak egymáshoz mint a talpaik.



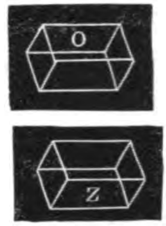
Legyenek azon magasságu kúpok és görvek, melyeknek talpai *ABCD EFGH* körök, tengelyei *KL MN*, és a talpaik átmérői *AC EG* egyenek: azt mondom, hogy a mint *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy van *AL* kúp *EN* kúphoz.

Mert ha nem; a mint *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy lesz *AL* kúp *EN* kúpnál vagy nagyobb vagy kisebb valamely telyhez.

Legyen előbb kisebbhez *O*-hoz.



És a mivel *O* tely kisebb *EN* kúpnál, azzal egyenlő legyen *Z* tely; *EN* kúp tehát *O Z* telyekkel egyenlő. Irassék *EFGH* körbe *EFGH* négyszeg; ez a négyszeg tehát nagyobb a kör felénél. Állítassék *EFGH* négyszegre a kúppal egyenlö magasságu gúla; az állított gúla tehát nagyobb mint a kúpnak fele; mivelhogy ha a körre négyszeget irunk, és arra a kúppal egyenlő magasságu gúlát állítunk, a beléje írt gúla fele a körülírtnak; mert úgy vannak egymáshoz mint a talpaik. A kúp pedig kisebb a körülirt gúlánál; az a gúla tehát, melynek talpa *EFGH* négyszeg s hegye a kúpéval azon egy, nagyobb mint a kúpnak fele. Vágassanak ketté *EF FG GH HE* kerületek



P Q R S pontoknál, és vonassanak *HP PE EQ QF FR RG GS SH* egyenek; tehát *HPE EQF FRG GSH* háromszegeknek mindenike nagyobb, mint a hozzá tartozó körszelet fele. Állítassék *HPE EQF FRG GSH* háromszegeknek mindenikére, a kúppal egyenlő magasságu gúla; tehát ezeknek az állított gúláknak is mindenike nagyobb a kúp hozzátartozó hasábjának felerészénél; ketté vágván tehát a maradék kerületeket, és egyeneket vonván, s a háromszegek mindenikére a kúpéval egyenlő magasságu gúlákat állítván, és mindezt mivelvén, egyszer csak hagyunk fenn oly kúphasábokat, melyek *Z* telynél kisebbek lesznek. Maradjanak és legyenek ezek a *HP PE EQ QF FR RG GS SH* körszeleteken állók; a maradék gúla tehát, melynek talpa *HPEQFRGS* sokszeg, hegye pedig egy a kúpéval, *O* telynél nagyobb. Irassék *ABCD* körbe is *HPEQFRGS* sokszeghez hasonló és hasonlólag fekvő *DTAVBXCY* sokszeg, és állítassék reá az *AL* kúpéval egyenlő magasságu gúla. Már mivel a mint az *AC* négyszege az *EG*-éhez, úgy van *DTAVBXCY* sokszeg *HPEQFRGS* sokszeghez; de a mint az *AC* négyszege az *EG*-éhez, úgy van *ABCD* kör *EFGH* körhez: tehát a mint *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy van *DTAVBXCY* sokszeg *HPEQFRGS* sokszeghez. A mint pedig *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy van *AL* kúp *O* telyhez; de a mint *DTAVBXCY* sokszeg *HPEQFRGS* sokszeghez, úgy az a gúla, melynek talpa *DTAVBXCY* sokszeg s hegye *L* pont, ahoz a gúlához, melynek talpa *HPEQFRGS* sokszeg, hegye pedig *N* pont; tehát a mint *AL* kúp *O* telyhez, úgy van az a gúla, melynek talpa *DTAVBXCY* sokszeg, s a hegye *L* pont, ahhoz a gúlához, melynek talpa *HPEQFRGS* sokszeg a hegye pedig *N* pont; cserélve tehát a mint *AL* kúp a beléje foglalt gúlához, úgy van *O* tely az *EN* kúpbeli gúlához. Már pedig *AL* kúp nagyobb a beléfoglalt gúlánál; nagyobb tehát *O* tely is az *EN* kúpbeli gúlánál. De kisebb is; mi képtelen; nincsen tehát a mint *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy *AL* kúp *EN* kúpnál kisebbb bármely telyhez. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy nincsen is, a mint *EFGH* kör *ABCD* körhez, úgy *EN* kúp *AL* kúpnál kisebb valamely telyhez.

Még azt mondom, hogy nincsen is a mint *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy *AL* kúp *EN* kúpnál nagyobb némi telyhez.

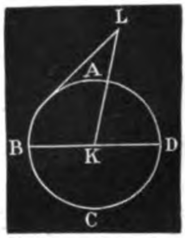
Mert ha lehet, legyen úgy egy nagyobbhoz, *O*-hoz; visszálva tehát a mint *EFGH* kör *ABCD* körhöz, úgy van *O* tely *AL* kúphoz. De a mint *O* tely *AL* kúphoz, úgy van *EN* kúp *AL*-nél kisebb valamely telyhez; tehát a mint *EFGH* kör *ABCD* körhöz, úgy van *EN* kúp *AL* kúpnál kisebb valamely telyhez; mi lehetetlennek van megmutatva; nincs tehát a mint *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy *AL* kúp *EN* kúpnál nagyobb bármely telyhez. Meg van pedig mutatva, hogy nincs kisebbhez is; a mint tehát *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy van *AL* kúp *EN* kúphoz.

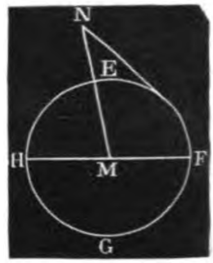
De a mint a kúp a kúphoz, úgy van a görü a görühez, mert mindenik mindeniknek háromszorzata; tehát a mint *ABCD* kör *EFGH* körhöz, úgy vannak a rajtok álló kúpokkal egyenlő magasságá görvek egymáshoz.

Tehát sat.

12. Feladat:

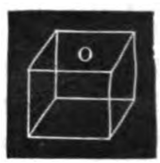
Hasonló kúpok és görvek háromszoros arányban vannak egymáshoz, mint a talpaik átmérői.





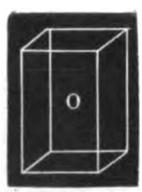
Legyenek hasonló kúpok és görvek, melyeknek talpai *ABCD EFGH* körök, talpaik átmérői *BD FH*, a kúpok és görvek tengelyei pedig *KL MN*; azt mondom, hogy az a kúp, melynek talpa *ABCD* kör, hegye *L* pont, ahhoz a kúphoz, melynek talpa *EFGH* kör, hegye *N* pont, háromszoros arányban van mint *BD FH*-hoz.

Mert ha nincs *ABCDL* kúp *EFGHN* kúphoz háromszoros arányban, mint *BD FH*-hoz, *ABCDL* kúp *EFGHN* kúpnál kisebb vagy nagyobb valamely telyhez lesz háromszoros arányban, mint *BD FH*-hoz. Legyen elöbb kisebbhez



O-hoz, és irassék *EFGH* körbe *EFGH* négyszeg; tehát *EFGH* négyszeg nagyobb az *EFGH* kör felénél. Állítassék *EFGH* négyszegre a kúpéval azon hegyü gúla; tehát az állított gúla nagyobb mint a kúpnak felerésze. Vágassanak ketté *EF FG GH HE* kerületek *P Q R S* pontoknál, és vonassanak *EP PF FQ QG GR RH HS SE*; tehát *EPF FQG GRH HSE* háromszegeknek is mindenike nagyobb, mint az *EFGH* kör hozzá tartozó szeletének fele része. Állítassék *EPF FQG GRH HSE* háromszegek mindenikére a kúpéval azon hegyü gúla; tehát az állított gúláknak is mindenike nagyobb, mint a hozzá tartozó kúphasábnak felerésze. Már a maradék kerületeket ketté vágva, és egyeneket vonva, s a háromszegek mindenikére a kúpéval azon hegyü gúlákat állítva, és mindig ezt mivelve, egyszer csak hagyunk fenn oly kúphasábokat, melyek kisebbek lesznek annál a felüléknél, melylyel *EFGHN* kúp *O* telyet meghaladja. Maradjanak és legyenek azok az *EP PF FQ QG GR RH HS SE* szeleteken állók; maradék gúla tehát, melynek talpa *EPFQGRHS* sokszeg, hegye pedig *N* pont, *O* telynél nagyobb. Irassék *ABCD* körbe is *EPFQGRHS* sok-

szeghez hasonló és hasonlóan fekvö *ATBVCXDY* sokszeg, és állíttassék *ATBVCXDY* sokszegre a kúpéval azon hegyü gúla; és az azt a gúlát, mellynek talpa *ATBVCXDY* sokszeg, hegye *L* pont, körülfogó háromszegek egyike legyen *LBT*; az azt a gúlát, melynek talpa *EPFQGRHS* sokszeg, hegye *N* pont, körülfogó háromszegek egyike pedig legyen *NPF*, és vonassanak *KT MP*. Már minthogy *ABCDL* kúp *EFGHN* kúphoz hasonló, a mint *BD FH*-hoz, úgy van *KL* tengely *MN* tengelyhez. De a mint *BD FH*-hoz, úgy van *BK FM*-hez; tehát a mint *BK FM*-hez, úgy van *KL MN*-hez; és cserélve a mint *BK KL*-hez, úgy *FM MN*-hez, és a *BKL FMN* alatti szegletek egyenlök, mert mindenik derék, és a *BKL FMN* alatti egyenlö szegletek körüli oldalak egyarányuak; *BKL* háromszeg tehát *FMN* háromszeghez hasonló. Ismét mivel a mint *BK KT*-hez úgy van *FM MP*-hez, és a *BKT FMP* alatti egyenlö szegleteket fogják be, minthogy a mi része a *BKT* alatti szeglet a *K* középpontnál levö négy deréknek, az a része az *FMP* alatti szeglet az *M* középpontnál levö négy deréknek. Mivel hát ez egyenlő szegletek körüli oldalok egyarányuak, tehát *BKT* háromszeg *FMP* háromszeghez hasonló Ismét mivel meg van mutatva, hogy a mint *BK* *KL*-hez, úgy van *FM* *MN*-hez, *BK* pedig *KT*-vel, *FM* *PM*-mel egyenlők: tehát a mint *KT* *KL*-hez, úgy van *PM* *MN*-hez. E szerint a *TKL* *PMN* alatti egyenlő (t. i. derék) szegletek körüli oldalok egyarányuak; *LKT* háromszeg tehát *NMP* háromszeghez hasonló. És minthogy az *LKB* *NMF* háromszegek hasonlóságánál fogva a mint *LB* *BK*-hoz, úgy van *NF* *FM*-hez, a *BKT* *FMP* háromszegek hasonlóságánál fogva pedig a mint *KB* *BT*-hez úgy *MF* *FP*-hez; tehát egyközösen a mint *LB* *BT*-hez, úgy van *NF* *FP*-hez. Ismét mivel az *LTK* *NPM* háromszegek hasonlóságánál fogva a mint *LT* *TK*-hoz, úgy *NP* *PM*-hez, a *KBT* *PMF* háromszegek hasonlóságánál fogva pedig a mint *KT* *TB*-hez úgy *MP* *PF*-hez: tehát egyközüleg a mint *LT* *TB*-hez, úgy *NP* *PF*-hez. De megmutattaték, hogy a mint *TB* *BL*-hez, úgy *PF* *FN*-hez; egyközüleg tehát a mint *TL* *LB*-hez úgy *PN* *NF*-hez; *LTB* *NPF* háromszegeknek tehát az oldalai egyarányuak; *LTB* *NPF* háromszegek tehát egyenlőszegletüek, ennél fogva hasonlók is; az a gúla is tehát, melynek talpa *BKT* háromszeg, hegye *L* pont, hasonló ahhoz a gúlához, melynek talpa *FMP* háromszeg, hegye pedig *N* pont: mert egyenlő számu, hasonló lapok fogják körül. Már pedig háromszegtalpu hasonló gúlák háromszoros arányban vannak egymáshoz, mint a hasonfektü oldalaik; *BKTL* gúla tehát *FMPN* gúlához háromszoros arányu mint *BK* *FM*-hez. Már *A Y D X C V* pontokból *K*-hoz, és *E S H R G Q* pontokból *M*-hez egyeneket vonván, és a háromszegek mindenikére a kúpéval azon egy hegyü gúlákat állítván, hasonlólag mutatjuk meg, hogy mindenik hasonfektü gúla a hasonfektü gúlához háromszoros arányban van, mint *BK* hasonnevü oldal, *FM* hasonnevü oldalhoz, azaz: *BD* *FH*-hoz. De a mint egy előtag egy utótaghoz, úgy van minden előtag öszvesen minden utótaghoz öszvesen; tehát a mint *BKTL* gúla *FMPN* gúlához, úgy az az egész gúla, melynek talpa *ATBVCXDY* sokszeg, hegye *L* pont, ahhoz az egész gúlához, melynek talpa *EPFQGRHS* sokszeg, hegye pedig *N* pont; úgy hogy az a gúla, melynek talpa *ATBVCXDY* sokszeg, hegye *L* pont, ahhoz a gúlához, melynek talpa *EPFQGRHS* sokszeg, hegye *N* pont, háromszoros arányban van, mint *BD FH*-hoz. De a feltét szerint az a kúp, melynek talpa *ABCD* kör, hegye *L* pont, *O* telyhez háromszoros arányban van, mint *BD FH*-hoz; tehát a mint az a kúp, melynek talpa *ABCD* kör, hegye *L* pont, O telyhez, úgy van az a gúla, melynek talpa *ATBVCXDY* sokszeg, hegye *L* pont, ahhoz a gúlához, melynek talpa *EPFQGRHS* sokszeg, hegye pedig *N* pont; cserélve tehát a mint az a kúp, melynek talpa *ABCD* kör, hegye *L* pont, ahhoz a gúlához, melynek talpa *ATBVCXDY* sokszeg, hegye *L* pont, úgy *O* tely ahhoz a gúlához, melynek talpa *EPFQGRHS* sokszeg, hegye *N* pont. Már pedig a mondott kúp nagyobb a benne való gúlánál, mert magába foglalja; nagyobb tehát *O* tely is annál a gúlánál, melynek talpa *EPFQGRHS* sokszeg, és hegye *N* pont. De kisebb is; mi lehetetlen. Nincs tehát az a kúp, melynek talpa *ABCD* kör, hegye *L* pont, annál a kúpnál, melynek talpa *EFGH* kör, hegye *N* pont, kisebb valamely telyhez háromszoros arányban mint *BD FH*-hoz. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy *EFGHN* kúp sincsen *ABCDL* kúpnál kisebb némi telyhez háromszoros arányban, mint *FH BD*-hez.



Azt mondom, hogy *ABCDL* kúp *EFGHN* kúpnál nagyobb valamely telyhez sincs háromszoros arányban, mint *BD FH*-hoz.

Mert ha lehet, legyen nagyobbhoz, *O*-hoz; visszálva tehát, *O* tely *ABCDL* kúphoz háromszoros arányban van, mint *FH BD*-hez. De a mint *O* tely *ABCDL* kúphoz, úgy *EFGHN*

35*

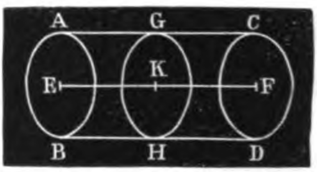
kúp *ABCDL* kúpnál kisebb valamely telyhez; *EFGHN* kúp tehát *ABCDL* kúpnál kisebb valamely telyhez háromszoros arányban van, mint *FH BD*-hez; mi lehetetlennek van megmutatva; nincsen tehát *ABCDL* kúp *EFGHN* kúpnál nagyobb valamely telyhez háromszoros arányban, mint *BD FH*-hoz. Megmutattuk pedig, hogy nincs kisebbhez is; *ABCDL* kúp tehát *EFGHN* kúphoz háromszoros arányban van, mint *BD FH*-hoz.

A mint pedig a kúp a kúphoz, úgy van a görü a görühez; mert a görü háromakkora mint a kúp, ha a kúppal azon talpon áll és vele egyenlő magasságu; a görü is tehát a görühez háromszoros arányban van, mint *BD FH*-hoz.

Hasonló kúpok és görvek tehát satb.

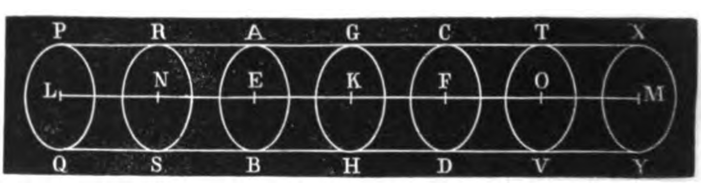
13. Feladat:

Ha görvet az átelleni lapokhoz egyközü lap szél, a mint a görü a görühez, úgy lesz a tengely a tengelyhez.



Mert szelje *AD* görüt az átelleni lapokhoz *AB*-hez *CD*-hez egyközü *GH* lap; és találkozzék *GH* lap *EF* tengelylyel *K* pontnál: azt mondom, hogy a mint *BG* görü *GD* görühez, úgy *EK* tengely *KF* tengelyhez.

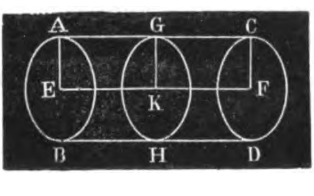
Nyujtassék ki *EF* tengely mind kétfelé *L M* pontokig



és vétessenek *EK* tengelylyel egyenlő akárhány *EN NL* darabok, és *KF* tengelylyel egyenlő akárhány *FO OM* darabok, és képzeltessék *LM* tengelyre *PY* görü melynek talpai *PQ XY* körök; és vitessenek *N O* pontokon át *AB*-hez *CD*-hez s a *PY* görü talpaihoz egyközü lapok, és alkossák ezek *N O* középpontok körül *RS TV* köröket. Már minthogy *LN NE EK* tengelyek egymással egyenlők; tehát *QR RB BG* görvek úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik. Talpaik pedig egyenlők; *QR RB BG* görvek tehát egyenlők egymással. Már minthogy *LN NE EK* tengelyek egymással egyenlők, de *QR RB BG* görvek is egyenlök egymással, és az *LN NE EK* tengelyek száma egyenlő a *QR RB BG* görvek számával: tehát a hányszorzata *LK* tengely *EK* tengelynek, annyiszorzata *QG* görü is *GB* görünek. Ugyanazért a hányszorzata *MK* tengely *KF* tengelynek, annyiszorzata *YG* görü is *GD* görünek. És ha *KL* tengely egyenlő *KM* tengelylyel. *QG* görü is egyenlő leend *GY* görüvel; ha nagyobb a tengely a tengelynél, a görü is nagyobb a görünél; és ha kisebb, kisebb. Levén hát négy mekkoraság, ú. m. *EK KF* tengelyek és *BG GD* görvek, vétettek *EK* tengelynek és *BG* görünek *LK* tengely és *QG* görü *KF* tengelynek és *GD* görünek pedig *KM* tengely és *GY* görü egyenlő szorzataik, és meg van mutatva, hogy ha *KL* tengely meghaladja *KM* tengelyt, *QG* görü is meghaladja *GY* görvet, ha egyenlő vele, egyenlő; és ha kisebb, kisebb.

Tehát a mint *EK* tengely *KF* tengelyhez, úgy van *BG* görü *GD* görühez : m. b. k.

Jegyz. E bizonyítmányban nincs megmutatva, hogy az a vonal, melyben *GH* lap a görü felszinét szeli, kör. Ennek megmutatására gondoljuk meg hogy *AD* görü *AEFC* egyközény *EF* oldala körül fordulása által származott, és legyen *K* az a pont, melyben *GH* lap *EF* tengelylyel találkozik, *GK* pedig az az egyen, melyben *GH* lap a körülforduló *AF* egyközény lapját, egyik akármely helyzetében, szeli. Már minthogy *AB GH* egyközü lapokat *AEKG* lap szeli, tehát *AE GK*-hoz egyközü; *AK* is tehát egyközény, és *GK AE*-vel egyenlő. Ugyanazért *K*-ból *GH* vonalra húzott minden más egyenek is egyenlők az *AB* kör középponti egyeneivel és így egymással is; miszerint *GH* vonal is kör.



14. Feladat:

Egyenlő talpokon álló kúpok és görvek úgy vannak egymáshoz mint a magasságaik.

Mert legyenek egyenlő talpokon, ú. m. *AB CD* körökön álló *EB FD* görvek: azt mondom, hogy a mint *EB* görü *FD* görühez, úgy van *GH* tengely *KL* tengelyhez.

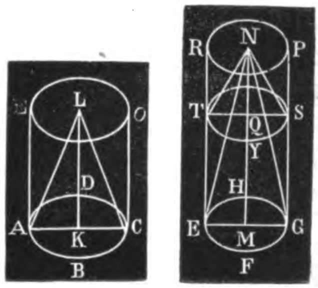
Mert nyújtassék ki *KL* tengely *N* ponthoz, és *LN* tétessék *GH* tengelylyel egyenlővé, és képzeltessék *LN* tengely körül *CM* görü. Már minthogy *EB CM* görvek azon tető alattiak, úgy vannak egymáshoz mint a talpaik. De a talpaik egyenlök egymással, egyenlök tehát *EB CM* görvek is egymással. És minthogy *FM* görvet az átelleni lapjaihoz egyközü *CD* lap szeli, tehát a mint *CM* görü *FD* görühez, úgy van *LN* tengely *KL* tengelyhez. De *CM* görü *EB* görüvel, s *LN* tengely *GH* tengelylyel egyenlök; a mint tehát *EB* görü *FD* görühez. úgy van *GH* tengely *KL* tengelyhez. A mint pedig *EB* görü *FD* görühez, úgy van *ABG* kúp *CDK* kúphoz; mert a görvek három akkorák mint a kúpok; tehát a mint *GH* tengely *KL* tengelyhez, úgy *ABG* kúp *CDK* kúphoz, és *EB* görü *FD* görühez: m. b. k.

15. Feladat:

Egyenlő kúpok és görvek talpai a magasságaikkal ellenarányuak: s a mely kúpok és görvek talpai a magasságaikkal ellenarányuak, azok egyenlök.

Legyenek egyenlő kúpok és görvek, melyeknek talpai *ABCD EFGH* körök, átmérőik

AC EG, tengelyeik pedig, melyek a kúpoknak és görveknek a magasságai is, *KL MN*, és egészítessenek ki *AO EP* görvek: azt mondom, hogy *AO EP* görvek talpai a magasságaikkal ellenarányuak, azaz: a mint *ABCD* talp *EFGH* talphoz, úgy van *MN* magasság *KL* magassághoz.



Mert *KL* magasság *MN* magassággal vagy egyenlő, vagy nem. Legyen előbb egyenlő. De *AO* görü is egyenlő *EP* görüvel. Már pedig azon magasságu kúpok és görvek úgy vannak egymáshoz, mint a talpaik; egyenlő tehát *ABCD* talp is *EFGH* talppal; úgy hogy, ellenarányulag, a mint *ABCD* talp *EFGH* talphoz, úgy van *MN* magasság *KL* magassághoz.

De ne legyen egyenlő *KL* magasság *MN* magassággal, hanem *MN* legyen nagyobb, és vétessék el *MN* magasságból *KL*-lel egyenlő *QM* darab, és *Q* pontnál szelje *EP* görvet *TYS* lap, mely *EFGH RP* körök átelleni lapjaihoz egyközü legyen, és *EFGH* köz talpra s *QM* magasságra képzeltessék *ES* görü. Már mivel *AO* görü *EP* görüvel egyenlő, *ES* pedig egy más görü; tehát a mint *AO* görü *ES* görühez, úgy van *EP* görü *ES* görühez. De a mint *AO* görü *ES* görühez, úgy van *ABCD* talp *EFGH* talphoz, mert *AO ES* görvek azon tető alattiak; a mint pedig *EP* görü *ES* görühez, úgy van *MN* magasság *MQ* magassághoz; mert *EP* görvet az átelleni lapjaihoz egyközü *TYS* lap szeli; tehát a mint *ABCD* alp. *EFGH* talphoz, úgy van *MN* magasság *MQ* magassághoz De *MQ* magasság egyenlő *KL* magassággal; a mint tehát *ABCD* talp *EFGH* talphoz, úgy van *MN* magasság *KL* magassághoz; *AO EP* görvek talpai tehát a magasságaikkal ellen arányuak.

De már legyenek *AO EP* görvek talpai a magasságaikkal ellenarányuak, és legyen a mint *ABCD* talp *EFGH* talphoz, úgy *MN* magasság *KL* magassághoz: azt mondom, hogy *AO* görü egyenlő *EP* görüvel.

Mert megint azon készületeket téve, mivel a mint *ABCD* talp *EFGH* talphoz, úgy van *MN* magasság *KL* magassághoz, *KL* magasság pedig *MQ* magassággal egyenlő: tehát a mint *ABCD* talp *EFGH* talphoz, úgy van *MN* magasság *MQ* magassághoz. De a mint *ABCD* talp *EFGH* talphoz, úgy van *AO* görü *ES* görühez, mert azon tető alattiak; és a mint *MN* magasság *MQ* magassághoz, úgy van *EP* görü *ES* görühez; a mint tehát *AO* görü *ES* görühez, úgy van *EP* görü *ES* görühez; *AO* görü tehát egyenlő *EP* görüvel. — Épen igy van a kúpokkal is.

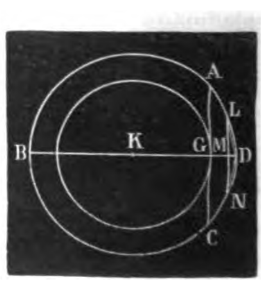
Tehát satb.

16. Feladat:

Azon középpont körüli két kör levén: a nagyobbik körbe oly egyenlő és páros oldalu sokszeget irni, mely ne érintse a kisebbik kört.

Legyen a két adott kör *ABCD EFGH* azon *K* középpont körül: már a nagyobbik körbe, *ABCD*-be, kell oly egyenlő és páros oldalu sokszeget irni, mely ne érintse *EFGH* kört.

Vonassék *K* középponton át *BKD* egyen, és *G* pontból állitassék *BD* egyenre *GA* függő, és nyujtassék *C*-ig; *AC* tehát érinti *EFGH* kört; most már *BAD* kerületet ketté vágva, s ennek felét is ketté, és mind ezt mivelve, egyszer csak hagyunk fenn *AD*-nél kisebb kerületet. Maradjon és legyen ez *LD*, és vonassék *L*-ből *BD*-re *LM* függő, nyujtassék *N*-ig, és vonassanak *LD DN*; *LD* tehát *DN* nel egyenlő. És minthogy *LN AC*-hez egyközü, s *AC EFGH* kört érinti, tehát *LN*, *EFGH* kört nem érinti; annál inkább nem érintik tehát *EFGH* kört *LD DN*. Ha tehát *LD*-vel egyenlő egyeneket illesztünk foly-



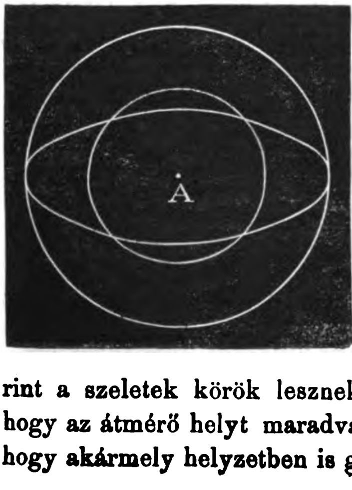
vást *ABCD* körbe, oly egyenlő és páros oldalu sokszeg fog iratni *ABCD* körbe, mely nem érinti *EFGH* kört: m. t. k.

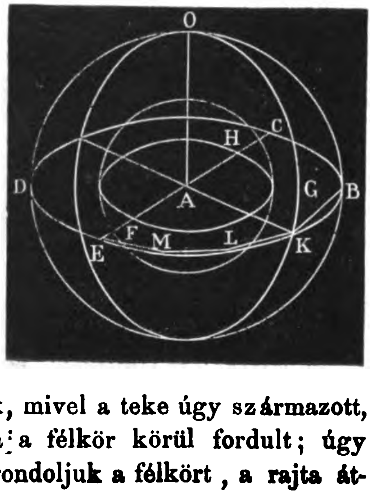
17. F e l a d a t :

Két teke azon középpont körül levén: a nagyobbik tekébe oly soklapu telyet irni, melynek felszine a kisebbik tekét ne érintse.

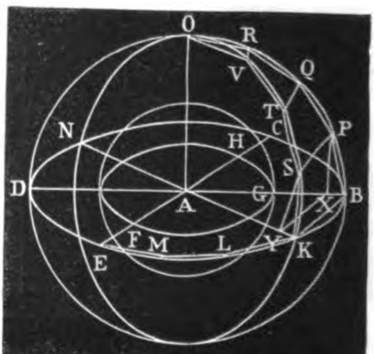
Képzeltessék két teke azon *A* középpont körül: a nagyobbik tekébe oly soklapu telyet kell irni, melynek felszine a kisebbik tekét ne érintse.

Szelje a tekéket egy a középponton átmenő lap; e sze-





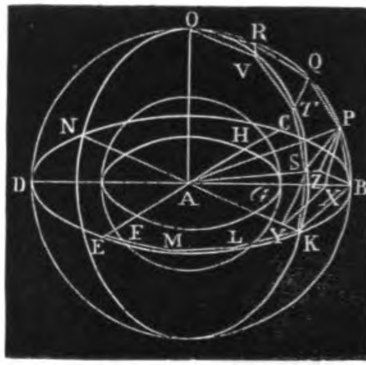
rint a szeletek körök lesznek, mivel a teke úgy származott, hogy az átmérő helyt maradva: a félkör körül fordult; úgy hogy akármely helyzetben is gondoljuk a félkört, a rajta átvitt lap a teke felszinén kört fog alkotni. És világos, hogy a legnagyobbat, mivelhogy a teke átméröje, mely, a mint látni való, a félkörnek és a körnek is átméröje, nagyobb minden más a körön vagy tekén áthúzott egyenecknél. Legyen hát a nagyobbik tekében *BCDE* kör, a kisebbik tekében pedig *FGH* kör, és vonassanak czeknek két átmérői *BD CE* egymáshoz derék szegletre, és levén azon középpont körüli *BCDE FGH* két kör, irassék a nagyobbik körbe *BCDE*-be oly egyenlö és páros oldalu sokszeg, mely a kisebbik kört *FGH*-t ne érintse, s a melynek *BK KL LM ME* oldalai *BE* negyedben legyenek, és vonatván *KA*, nyujtassék *N*-ig, és állitassék *A* pontban a *BCDE* kör lapjához derékszegletre *AO* egyen, mely a teke felszinével *O* pontnál találkozzék, és *AO*-n s *BD KN* egyenek mindenikén át vitessenek lapok: ezek a mondottaknál fogva a teke külszinén legnagyobb köröket fognak csinálni. Csináljanak, és félköreik legyenek *BD KN* átmérökön *BOD KON*. És minthogy *OA* a *BCDE* kör lapjára függö, tehát *OA*-n átmenö minden lap függö a *BCDE* kör lapjára, úgy hogy *BOD KON* félkörök [lapjai] függők a *BCDE* kör lapjára. És minthogy *BED BOD KON* félkörök egyenlök, mert egyenlö *BD KN* átmérökön vannak: tehát *BE BO KO* negyedek is egyenlök egymással; a hány oldala van tehát a sokszegnek *BE* negyedben, annyi van *BO KO* negyedekben is *BK KL LM ME* egyenekkel egyenlö. Irassanak beléjök és legyenek ezek *BP PQ QR RO KS ST TV VO*, vonassanak *SP TQ VR*, és *P*-böl *S*-böl bocsátassanak a *BCDE* kör lapjára függök; ezek a lapok közös szeleteire *BD*-re *KN*-re fognak esni, mivelhogy a *BOD KON* körök lapjai is függők a *BCDE* kör lapjára. Essenek és legyenek azok *PX SY*, és vonassék *XY*. És minthogy *BOD KON* egyenlö félkörökböl *BP KS* egyenlö darabok vágattak el, és



PX SY függők vonattak: tehát *PX* egyenlö *SY*-nal, és *BX KY*-nal. De az egész *BA* is egyenlő az egész *KA*-val, a maradék *XA* tehát egyenlő a maradék *YA*-val; tehát a mint *BX XA*-hoz, úgy van *KY YA*-hoz; *YX* tehát *KB*-hez egyközü. És minthogy mind *PX* mind *SY* a *BCDE* kör lapjára függők, tehát *PX SY*-hoz egyközü. Megmutattaték pedig, hogy egyenlő is vele; *YX SP* is tehát egyenlök és egyközüek. És minthogy *YX SP*-hez egyközü, de *YX KB*-hez egyközü; tehát *SP* is egyközü *KB*-hez. *BP KS* egyenek pedig összvekötik öket; *KBPS* négyoldalu tehát egy lapban van; mivelhogy ha van két egyközü egyen, s mindeniken akármely pontok vétetnek, a pontokat öszvekötö egyen azon lapban van az egyközüekkel. Ugyanazért *SPQT TQRV* négyoldaluak mindenike is egy-egy lapban van. De *VRO* háromszeg is egy lapban van. Már ha *P S Q T R V* pontokból *A*-hoz egyeneket gondolunk húzva, alkottatni fog *BO KO* kerületek közt oly gúlákból álló soklapu telyképlet, melyeknek talpai *KBPS SPQT TQRV* négyoldaluak és *VRO* háromszeg, hegyök pedig *A* pont. Ha pedig *KL LM ME* oldalok mindenikére ugyanazt készítendjük, a mit *KB*-re, úgy a többi három negyedre és még a másik féltekére is: alkottatni fog a tekébe írt és oly gulákból álló képlet, melyeknek talpai a mondott négyoldaluak és *VRO* háromszeg s a hozzájok hasonfektüek, hegyök pedig *A* pont.

Azt mondom, hogy a mondott soklapunak felszíne a kisebbik tekét, mellyen *FGH* kör van, nem érinti.

Vonassék *A* pontból a *KBPS* négyoldalu képlet lapjára *AZ* függő és találkozzék a lappal *Z* pontnál, és vonassanak *BZ ZP* egyenek. És minthogy *AZ* a *KBPS* négyoldalu lapjára függő, tehát minden öt érö és a négyoldalu lapjában levö egyenekre is függö; *AZ* tehát mind *BZ* hez mind *ZP*-hez derékszegletre van. És minthogy *AB AP*-vel egyenlő, tehát az *AB* négyszege is egyenlö az *AP*-ével. Már pedig az *AB* négyszegével az *AZ ZB* négyszegeik egyenlök, mert a *Z*-nél levö szeglet derék, az *AP*-ével megint az *AZ ZP* négyszegeik egyenlök; az *AZ ZB* négyszegeik tehát egyenlök az *AZ ZP* négyszegeikkel. Vétessék el a közös *AZ*-é, tehát a maradék *BZ*-é a maradék *ZP*-ével egyenlö lesz; egyenlö tehát *BZ* is



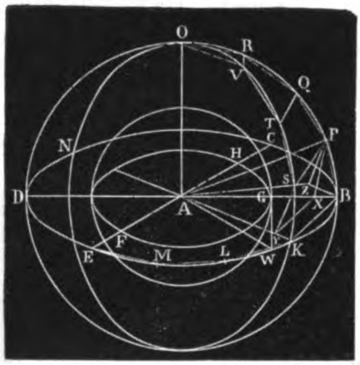
ZP-vel. Hasonlókép mutatjuk meg, hogy a Z-töl K S pontokhoz húzott egyenek is egyenlök mind BZ-vel mind ZP-vel; a Z középponttal és ZB vagy ZP közzel irott kör tehát K-n S-en is átmenend, és $KBPS$ négyoldalu képlet körbe lesz írva.

És minthogy KB YX-nél nagyobb, de YX SP-vel egyenlő; tehát KB nagyobb SP-nél. Már pedig KB KS-nek BP-nek mindenikével egyenlő, tehát mind KS mind BP SP-nél nagyobbak. És minthogy $KBPS$ négyoldalu képlet körbe van írva, és KB BP KS egyenlök, PS pedig kisebb, és BZ a középpontból van a körre húzva, tehát a BP négyszege nagyobb két akkoránál mint a BZ-é. És P-böl BD-re PX függő van húzva. Már minthogy BD kisebb két akkoránál mint DX, és a mint BD DX-hez, úgy van a DB BX közti egyközény a DX XB közti egyközényhez: ennélfogva BX-re négyszeget írva, s XD re az egyközényt kiegészítve, tehát a DB BX közti egyközény is kisebb két akkoránál, mint a DX XB közti. És AP-t vonva, a DB BX közti egyközény egyenlö a BP négyszegével, a DX XB közti pedig a PX négyszegével; a BP négyszege tehát kisebb két akkoránál, mint a PX négyszege. De a BP négyszege nagyobb két akkoránál, mint a BZ-é; tehát a PX négyszege nagyobb a BZ énél. És minthogy BA AP-vel egyenlö, a BA négyszege egyenlő az AP-ével. De a BA-é egyenlö a BZ ZA négyszegeikkel, a PA-é pedig egyenlö a PX XA négyszegeikkel; tehát a BZ ZA négyszegeik egyenlök a PX XA négyszegeikkel, melyekből a PX-é nagyobb a BZ-énél; tehát a maradék XA-é kisebb a ZA-énál. AZ tehát nagyobb AX-nél; annál inkább nagyobb tehát AZ AG-nél. Már pedig AZ a soklapu egyik talpára, és

AG a kisebbik teke felszinére húzott egyen, úgy hogy a soklapu felszine nem érinti a kisebbik tekét.

Két teke levén tehát egy középpont körül, a nagyobbik tekébe oly soklapu tely iratott, melynek felszine nem érinti a kisebbik teke felszinét: m. t. k.

Másképpen.



Meg kell még könnyebb móddal mutatni, hogy *AZ AG*-nél nagyobb. Mert állítassék *G*-nél *AB*-re *GW* függő, és vonassék *AW*. Már *EB* kerületet ketté vágván, s a felét megint ketté, s mind ezt mivelvén, fogunk egykor hagyni akkora kerületet, mely a *BCDE* körnek *GW*-vel egyenlő egyentől átfogott kerületénél kisebb. Vétessék és legyen ez *KB* kerület; *KB* egyen is tehát *GW*-nél kisebb. És minthogy *BKSP* négyoldalu képlet körbe van irva, és *PB BK KS* egyenlők, *PS* pedig kisebb, tehát a *BZP* alatti szeglet tompa; *BP* tehát *BZ*-nél nagyobb. De *BP*-nél *GW* nagyobb; annál inkább nagyobb hát *GW BZ*-nél; tehát a *GW* négyszege is nagyobb a *BZ*-énél. És minthogy *AW AB*-vel egyenlő, tehát az *AW* négyszege is egyenlő az *AB*-ével. De az *AW*-ével egyenlők az *AG GW* négyszegeik, az *AB*-ével pedig egyenlők a *BZ ZA* négyszegeik; tehát az *AG GW* négyszegeik a *BZ ZA* négyszegeikkel egyenlők, melyekből a *BZ*-é kisebb a *GW*-énél; a maradék *ZA*-é tehát nagyobb az *AG*-énál; nagyobb tehát *AZ* is *AG*-nél.

Jegyzet. Az első bizonyítmányban egykissé igen merészen van állítva, hogy a *BP* négyszege nagyobb két akkoránál, mint a *BZ*-é. Bizonyítását Simson következőleg pótolja:

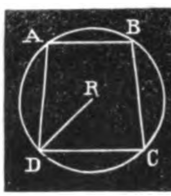
Minthogy *KB* nagyobb mint *PS*, de *KB BP SK* egyenlők: tehát azoknak a kerületeknek, melyeket *PB BK KS* átfognak, akármelyike nagyobb, mint *PS* kerület, miszerint *PBKS* kerület nagyobb az egész *PBKSP* háromnegyedénél, és így *PB* nagyobb egy negyednél: azaz a *BZP* alatti középponti szeglet tompa. Már pedig a tompaszegletü há-

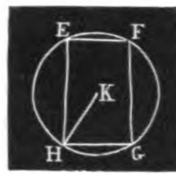
romszegben a tompaszegletet átfogó oldal négyszege nagyobb a tompaszegletet béfogó oldalak négyszegeinél; a *BP* négyszege tehát nagyobb a *BZ ZP* négyszegeinél, azaz a *BZ* kétszeri négyszegénél.

Továbbá nincs megmutatva, hogy a *PSTQ QTVR* oldalmások és *RVO* háromszeg lapjai a belső tekén kivül esnek, és ezt nem érintik. E hiányt Clavius pótlá, ki e végre a következő felvételt bocsátja előre:

Felvétel: Ha két körbeirt oldalmásokban kétkét oldal egyközü, a többi négy oldal egyenlő, s az egyik oldalmás egyközü oldalai külön-külön nagyobbak a másik oldalmás hasonfektü oldalainál: az a kör, melybe a nagyobb oldalu oldalmás van irva, nagyobb a másiknál.

Legyenek *ABCD* körbe *AC* oldalmás, és *EFGH* körbe *EG* oldalmás irvák, és legyenek *AD BC EH FG* egyenlők, *AB* egyközü *DC*-hez, *EF HG*-hez, és *AB* nagyobb *EF*-nél, *DC HG*-nél: azt mondom, hogy *ABCD* kör *EFGH* körnél nagyobb.



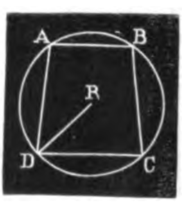


Mert ha nem: *ABCD* kör *EFGH* körrel vagy egyenlő, vagy annál kisebb. Legyen előbb egyenlő.

Már mivel *AD* egyen *EH*-val, *CB GF*-fel egyenlők, és egyenlő körökbe illetvék, tehát egyenlő kerületeket fognak át; miszerint *AD* kerület *EH* kerülettel, *CB GF*-fel egyenlők. Az egész körök is egyenlők; tehát a maradék *AB* meg *DC* kerületek is egyenlők a maradék *EF* meg *HG* kerületekkel. De *AB* nagyobb levén, mint *EF*, nagyobb kerületet is fog át; *DC* is, mint *HG*; *AB* meg *DC* kerületek tehát nagyobbak mint *EF* meg *HG*. Megmutattaték hogy egyenlők is; mi képtelen. Nem egyenlő tehát *ABCD* kör *EFGH* körrel.

De azt mondom, hogy *ABCD* kör nem is kisebb *EFGH* körnél.

Mert ha lehet, legyen; és vétetvén *EFGH* kör középpontja *K*, irassék *K* középpontból *ABCD* körrel egyenlő *LMNO* kör; vonassanak *KE KF KG KH*, s a hol a

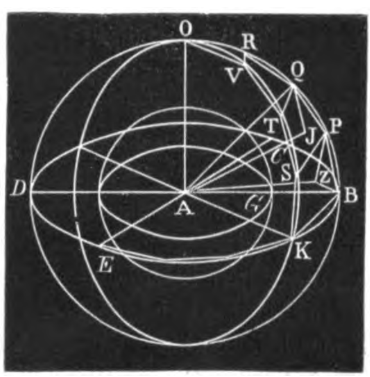


belső kört vágják, azok a pontok köttessenek öszve *LM MN NO OL* egyenekkel. *LM* tehát *FE*-hez egyközü és ennél kisebb, *MN* is *FG*-hez, *NO GH*-hoz, *OL HE*-hez egyközüek és emezeknél külön-külön kisebbek. Már mivel *EH LO*-nál nagyobb, tehát *AD* is nagyobb *LO*-nál; miszerint *AD* kerület is nagyobb *LO* kerületnél. Ugyan azért *BC* kerület is *FG*-nél. Ismét mivel *EF* egyen *LM*-nél nagyobb, de *AB* nagyobb *EF*-nél, tehát még annál inkább nagyobb *AB LM*-nél; miszerint *AB* kerület is nagyobb *EF* kerületnél. Ugyanazért *CD* kerület is nagyobb *NO* kerületnél. Már pedig *AB BC CD DA* kerületek teszik az egész *ABCD* kört, *LM MN NO OL* kerületek pedig az egész *LMNO* kört; és megmutattaték, hogy *AB BC CD DA* kerületek külön-kölön *LM MN NO OL* kerületeknél nagyobbak; tehát *ABCD* kör is nagyobb *LMNO* körnél. De egyenlő is vele; mi lehetetlen. Nem is kisebb ennélfogva *ABCD* kör, mint *EFGH*. De megmutattaték, hogy nem is egyenlő; tehát nagyobb.

Tanuság. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy ha két háromszegre, melyeknek két-két oldala egyenlő, az egyiknek talpa pedig nagyobb, mint a másiké, köröket irunk, a nagyobb talpu háromszegre irott kör nagyobb lesz.

Most már meg bizonyíthatjuk azt is, hogy *SPQT TQRV* oldalmások és *RVO* háromszeg is kivül fognak esni a belső tekén.

Mert vonassék *SPQT* oldalmás lapjára *AJ* függő, és vonassék *JQ*. A fölebbiekkel hasonlóképp mutatjuk meg, hogy *J* az *SPQT*-re irt kör középpontja; *PS QT*-vel egyközü, és *QT*-nél nagyobb. Van tehát két körbe írt két oldalmás, melyeknek két-két oldalai egyközüek, és más négy oldalaik egyenlők, és egyiknek egyközü oldalai külön külön nagyobbak a másiknak hasonfektü oldalainál; miszerint a *BKSP* oldalmásra írt kör na-



gyobb az *SPQT*-re irottnál; tehát *JQ* középponti egyen *ZP*-nél kisebb. Vonassék *AQ* is, mely *AP*-vel egyenlő. És mivel az *AJQ* alatti szeglet derék, tehát *AQ* négyszege az *AJ JQ* négyszegeikkel egyenlő; de megmutattatott, hogy az *AP* négyszege is egyenlő az *AZ ZP* négyszegeikkel; tehát az *AJ JQ* négyszegeik egyenlők az *AZ ZP* négyszegeikkel, melyekből a *JQ* négyszege kisebb a *ZP*-énél, mivel *JQ* is kisebb *ZP*-nél; a maradék *AJ*-é tehát nagyobb a *ZA*-énál, úgy hogy *AJ* is *ZA*-nál nagyobb. Már pedig *AZ* nagyobb *AG*-nél; annálinkább nagyobb tehát *AJ AG*-nél. Hasonlóképp mutatjuk meg a többi oldalmásoknak és *RVO* háromszegnek lapjáról is, hogy *FGH* tekén kivül esnek.

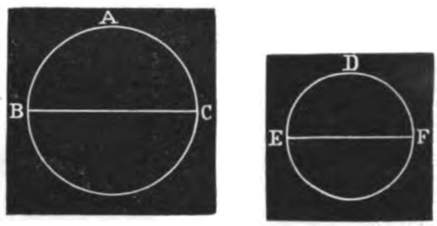
T a n u s á g.

Ha pedig más tekébe irunk a *BCDE* tekebeli soklapu telyhez hasonló soklapu telyet: a *BCDE* tekebeli soklapu tely a másik tekebeli soklapu telyhez háromszoros arányban leend, mint a *BCDE* teke átmérője a másik teke átmérőjéhez. Mert a telyet hasonszámu és hasonfektü gúlákra osztva, a gúlák hasonlók lesznek. A hasonló gúlák pedig háromszoros arányban vannak egymáshoz, mint a hasonnevü oldalaik; az a gúla tehát, melynek talpa *KBPS* négyoldalu, hegye *A* pont, a másik tekebeli hasonfektü gúlához háromszoros arányban lesz, mint a hasonnevü oldal a hasonnevü oldalhoz, azaz: mint az *A* középpont körüli tekébe vont *AB* középponti egyen, a másik tekébe vont középponti egyenhez. Hasonlóképp az *A* középpont körüli tekebeli mindenik gúla a másik tekebeli hasonfektü gúlához háromszoros arányban van, mint *AB* a másik tekebeli középponti egyenhez. De a mint egy előtag egy utótaghoz, úgy van minden előtag öszvesen minden utótaghoz öszvesen, úgy hogy az *A* középpont körüli tekébe irt egész soklapu a másik tekebeli soklapuhoz háromszoros arányban van, mint *AB* egyen a másik teke középponti egyenéhez, azaz: mint *BD* átmérő a másik teke átmérőjéhez.

18. F e l a d a t :

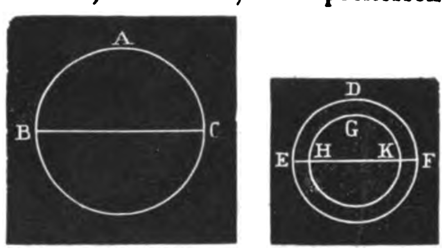
A tekék egymáshoz háromszoros arányban vannak mint a saját átmérőik.

Képzeltessenek *ABC DEF* tekék, és azoknak *BC EF* átmérői: azt mondom, hogy *ABC* teke *DEF* tekéhez háromszoros arányban van, mint *BC EF*-hez.



Mert ha nincsen *ABC* teke *DEF* tekéhez háromszoros arányban mint *BC EF*-hez, tehát *ABC* teke *DEF* tekénél vagy kisebbhez vagy nagyobbhoz lesz háromszoros arányban mint *BC EF*-hez.

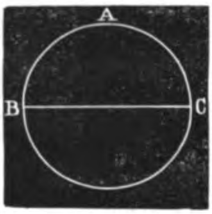
Legyen előbb kisebbhez, *GHK*-hoz, és képzeltessék *DEF* teke *GHK* tekével azon egy középpont körül, és irassék a nagyobbik tekébe *DEF*-be oly soklapu tely, melynek felszine ne érintse *GHK* tekét, irassék *ABC* tekébe is a *DEF* tekebeli soklapu telyhez hasonló soklapu tely; az *ABC*-beli soklapu tely tehát a *DEF*-beli soklapu telyhez háromszoros arányban leend, mint *BC EF*-hez. De *ABC* teke is *GHK* tekéhez háromszoros arányban van, mint *BC EF*-hez; a mint tehát *ABC* teke *GHK* tekéhez, úgy van az *ABC* tekebeli soklapu tely a *DEF* tekebeli soklapu telyhez; cserélve tehát a mint *ABC* teke a beléje foglalt soklapuhoz, úgy van *GHK* teke a *DEF*-beli soklapu telyhez. Már pedig *ABC* teke a beléje foglalt soklapunál nagyobb; tehát *GHK* teke is nagyobb a *DEF* tekebeli soklapunál. De kisebb is, mert beléje van foglalva; mi lehetetlen; nincsen tehát *ABC*

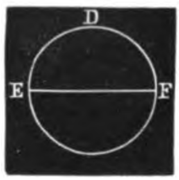


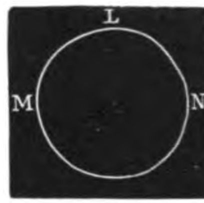
teke DEF tekénél valami kisebbhez háromszoros arányban, mint BC átmérő EF-hez. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy nincsen DEF teke is ABC tekénél valami kisebbhez háromszoros arányban mint EF BC-hez.

Azt mondom még, hogy ABC teke DEF tekénél valami nagyobbhoz sincs háromszoros arányban mint BC EF-hez.

Mert ha lehet, legyen nagyobbhoz, LMN hez: visszálva







tehát LMN teke ABC tekéhez háromszoros arányban van, mint EF átmérő BC átmérőhez. De a mint LMN teke ABC tekéhez, úgy van DEF teke ABC tekénél valami kisebbhez, mint fölebb megmutattatott, mivelhogy LMN nagyobb DEF-nél; DEF teke tehát ABC tekénél kisebb valamihez van háromszoros arányban mint EF BC-hez; mi lehetetlennek van megmutatva; nincsen tehát ABC teke DEF tekénél valamely nagyobbhoz háromszoros arányban, mint BC EF-hez. Megmutattaték pedig, hegy nincs kisebbhez is; ABC teke tehát DEF tekéhez háromszoros arányban van, mint BC EF-hez.

A tekék tehát sat. m. b. k.

EUKLIDES ELEMEINEK

TIZENHARMADIK KÖNYVE.

---

1. Feladat: *)

Ha egy egyenes vonal szélső s középső arányban vágatik: a nagyobbik darab az egésznek felével megtoldva öt akkora emeletü, mint az egésznek fele.

Mert AB egyenes vonal vágassék szélső s középső arányban C pontnál, s legyen a nagyobbik darabja AC, és AD-t AC-vel egyenesbe nyujtván, legyen AD AB-nek felével egyenlő: azt mondom, hogy CD öt akkora emeletü, mint DA.

---

*) **Kutatás, nyomozás.** (Synthesis, Analysis.)

Mi a kutatás, és mi a nyomozás?

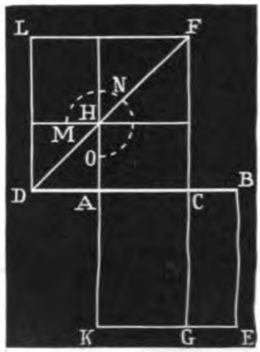
Kutatás a keresettnek elismert igazság gyanánt vétele, mig következtetéseken át valami igazán elismertre jutunk.

Nyomozás egy elismert igazság felvétele, mig következtetéseken át a keresettnek kimondására vagy megfogására jutunk.

Az 1 ső elmélet kutatása.

Mert némi AB egyen vágassék C-nél szélső és középső arányban, s AC legyen a nagyobbik darabja, és vétessék az AB felével egyenlő AD: azt mondom, hogy a CD négyszege öt akkora mint a DA-é.

Mert mivel a CD négyszege öt akkora mint a DA-é, a CD négyszege pedig egyenlő a CA AD négyszegeikkel, meg a CA AD közti kétszeri derékszeggel: tehát a CA AD négyszegeik a CA AD közti kétszeri derékszeggel együtt öt akkorák mint az AD négyszege; felbontva tehát, a CA négyszege a CA AD közti kétszeri derékszeg-



Mert irassanak *AB*-re *DC*-re *AE DF* négyszegek, készíttessék el *DF*-ben a képlet, és *FC* nyujtassék *G*-ig. És minthogy *AB* egyen szélső s középső arányban van vágva *C*-nél; tehát az *AB BC* közti derékszeg egyenlő az *AC* négyszegével. Már az *AB BC* közti derékszeg *CE*, az *AC* négyszege pedig *FH*; *CE* tehát egyenlő *FH*-val. És minthogy *BA* két akkora mint *AD*, *BA* pedig *KA*-val, s *AD AH*-val egyenlők, tehát *KA* is két akkora mint *AH*. A mint pedig *KA AH*-hoz, úgy van *KC CH*-hoz; *KC* tehát két akkora, mint *CH*. De *LH HC* is együtt két akkorák mint *CH*; *KC* tehát egyenlő *LH* meg *HC*-vel. Megmutattaték pedig, hogy *CE* is *FH*-val egyenlő; tehát az egész *AE* négyszeg egyenlő *MNO* gnomonnal. És mivel *BA* két akkora mint *AD*: a *BA* négyszege négy akkora mint az *AD*-é, azaz *AE* mint *DH*. De *AE MNO* gnomonnal egyenlő; *MNO* gnomon tehát négy akkora mint *DH*; az egész *DF* tehát öt akkora, mint *DH*. Már pedig *DF* a *DC* négyszege és *HD* a *DA*-é; a *CD* négyszege tehát öt akkora mint a *DA*-é.

Ha tehát sat. m. b. k.

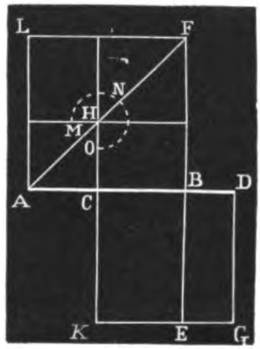
2. Feladat:

Ha egy egyenes vonal öt akkora emeletü mint a darabja: a mondott darab kettőzete szélső és középső arányban vágatván, a nagyobbik darab az eredeti egyen maradék része.

Mert *AB* egyen legyen öt akkora emeletü, mint *AC* darabja, és az *AC* kettőzete legyen *CD*: azt mon-

---

gel együtt négy akkora mint az *AD* négyszege. De a *CA AD* közti kétszeri derékszeggel egyenlő a *BA AC* közti derékszeg, mert *BA* két akkora mint *AD*; az *AC* négyszegével pedig az *AB BC* közti derékszeg egyenlő, mert *AB* szélső és középső arányban van vágva; tehát a *BA AC* közti derékszeg az *AB BC* köztivel együtt négy akkodom, hogy *CD* szélső és középső arányban vágatván, *CB* a nagyobbik darabja.



Mert irassanak mind *AB*-re mind *CD*-re *AF CG* négyszegek, készítessék el *AF*-ben a képlet, és *FB* nyujtassék *E*-ig. Már minthogy a *BA* négyszege öt akkora mint az *AC*-é, tehát *AF* négyszeg öt akkora mint *AH*. *MNO* gnomon tehát négy akkora mint *AH*. És minthogy *DC* két akkora mint *CA*; tehát a *DC* négyszege négy akkora, mint a *CA*-é, azaz: *CG* mint *AH*. Megmutattaték pedig, hogy *MNO* gnomon is négy akkora, mint *AH*; *MNO* gnomon tehát *CG*-vel egyenlő. És minthogy *DC* két akkora mint *CA*; de *DC CK*-val, *AC CH*-val egyenlők; tehát *KC* is két akkora mint *CH*; *KB* tehát *BH*-nak a kettőzete. De *LH* meg *HB* is kettőzete *HB*-nek, *KB* tehát *LH* meg *HB*-vel egyenlő. Megmutattaték pedig, hogy az egész *MNO* gnomon az egész *CG*-vel egyenlő; tehát a maradék *HF* egyenlő a maradék *BG*-vel. Már pedig *BG* a *CD DB* közti derékszeg, mert *CD* egyenlő *DG*-vel, *HF* megint a *BC* négyszege; a *CD DB* közti derékszeg tehát a *CB* négyszegével egyenlő. Tehát a mint *DC CB*-hez, úgy van *CB BD*-hez. De *DC* nagyobb *CB*-nél, *CB* is tehát nagyobb *BD*-nél. *CD* egyent tehát szélső és középső arányban vágván, *BC* a nagyobbik darab.

Ha tehát sat.

---

ra mint az *AD* négyszege. De a *BA AC* közti derékszeg az *AB BC* köztivel együtt az *AB* négyszege; az *AB* négyszege tehát négy akkora mint az *AD*-é. Négy akkora is; mert *BA AD*-nek a kettőzete.

Nyomozás: Mert mivel a *BA* négyszege négy akkora mint az *AD*-é; de az *AB* négyszege a *BA AC* közti derékszeg az *AB BC* köztivel együtt: tehát a *BA AC* közti az *AB BC* köztivel együtt négy akkora mint az *AD* négyszege. De a *BA AC* közti derékszeg a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel egyenlő, az *AB BC* közti pedig az *AC* négyszegével egyenlő; az *AC* négyszege tehát a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel együtt négy akkorák mint az *AD* négyszege; miszerint a *DA AC* négyszegeik a *DA AC* közti kétszeri derékszeg-

Felvétel:

Hogy pedig az *AC* kettőzete *CB*-nél nagyobb, így kell megmutatni.

Mert ha nem; legyen ha lehet, *BC* kétakkora mint *CA*; tehát a *BC* négyszege négy akkora, mint a *CA*-é; a *BC CA* négyszegeik tehát együtt öt akkorák mint a *CA*-é. De feltét szerint a *BA* négyszege is öt akkora, mint a *CA*-é; a *BA*-é tehát egyenlő a *BC CA* négyszegeikkel; mi lehetetlen; nem két akkora tehát *BC* mint *CA*. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy az *AC* kettőzete *BC*-nél nem is kisebb, mert annál nagyobb a képtelenség.

Az *AC* kettőzete tehát *CB*-nél nagyobb: m. b. k.

3. Feladat:

Ha egyenes vonal szélső s középső arányban vágatik: a kisebbik darab, a nagyobbik darab felével megtoldva, öt akkora emeletü, mint a nagyobbik darab felének négyszege.

Mert *AB* egyen vágassék szélső és középső arányban *C* pontnál, és legyen *AC* a nagyobbik darab, és *AC* vágassék ketté *D*-nél: azt mondom, hogy a *BD* négyszege öt akkora mint a DC-é.

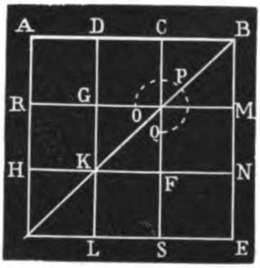
---

gel együtt öt akkorák, mint az *AD* négyszege. A *DA AC* négyszegeik a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel együtt pedig a *CD* négyszege; a *CD* négyszege tehát öt akkora mint a *DA*-é: m. b. k.

A 2-ik elmélet kutatása.

Mert legyen némi *CD* egyen öt akkora emeletü, mint *DA* darabja, és vétessék *DA*-nak *AB* kettőzete: azt mondom, hogy *AB* egyen *C* pontnál szélső és középső arányban van vágva, s *AC*, mely az eredeti egyen maradékrésze, a nagyobbik darab.

Mert mivel *AB* egyen *C*-nél szélső és középső arányban van vágva, s nagyobb darabja *AC*: tehát az *AB BC* közti derékszeg egyenlő az *AC* négyszegével. A *BA AC* közti derékszeg is egyenlő a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel, mert *BA* kétakkora, mint *AD*; az *AB BC* közti derékszeg tehát a *BA AC* köztivel együtt, mi az



Mert irassék *AB*-re *AE* négyszeg, és készítessék el kettős képlet. És minthogy *AC* két akkora mint *CD*, az *AC* négyszege négy akkora mint a *CD*-é, azaz: *RS* mint *FG*. És minthogy az *AB BC* közti derékszeg egyenlő az *AC* négyszegével, s az *AB BC* közti derékszeg *CE*, az *AC* négyszege pedig *RS*: tehát *CE* egyenlő *RS*-sel. De *RS* négy akkora mint *FG*; *CE* is tehát négy akkora mint *FG*. Ismét minthogy *AD* egyenlő *DC*-vel: *HK* is egyenlő *KF*-fel, úgy hogy *GF* négyszeg is egyenlő *HL* négyszeggel; *GK* tehát egyenlő *KL*-lel, azaz: *MN NE*-vel: úgy hogy *MF* is egyenlő *FE*-vel. De *MF CG*-vel egyenlö; *CG* is tehát egyenlő *FE*-vel. Adassék hozzájok a közös *CN*; *OPQ* gnomon tehát *CE*-vel egyenlő. De megmutattaték, hogy *CE* négy akkora mint *GF*; *OPQ* gnomon is tehát négy akkora mint *FG* négyszeg; tehát *OPQ* gnomon meg *FG* négyszeg öszvesen öt akkora mint *FG*. De *OPQ* gnomon meg *FG* négyszeg *DN*-et teszik; *DN* tehát öt akkora, mint *GF* négyszeg. Már pedig *DN* a *DB* négyszege, és *GF* a *DC*-é; a *DB* négyszege tehát öt akkora, mint a *CD*-é: m. b. k.

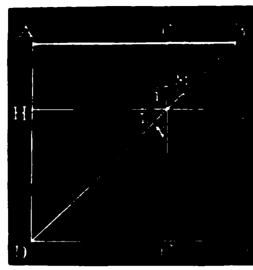
AB négyszege, egyenlő a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel, meg az *AC* négyszegével. De az *AB* négyszege négy akkora mint a *DA*-é; négy akkora tehát a *DA AC* közti kétszeri derékszeg is az *AC* négyszegével együtt, mint az *AD* négyszege; úgy hogy a *DA AC* négyszegeik is a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel, mi a *CD* négyszege, együtt öt akkorát tesznek, mint a *DA* négyszege. Úgy is van.

Nyomozás: Minthogy a *CD* négyszege öt akkora mint a *DA*-é, a *CD*-é pedig a *DA AC* négyszegei a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel együtt: tehát a *DA AC* négyszegei a *DA AC* közti kétszeri derékszeggel együtt öt akkorák, mint a *DA* négyszege; felbontva tehát, a *DA AC* közti kétszeri derékszeg az *AC* négyszegével együtt négy akkora, mint az *AD*-é; de az *AB* négyszege is négy akkora, mint az *AD*-é; tehát a *DA AC* közti kétszeri derékszeg, mi a *BA AC* közti egyszeri, az *AC* négyszegével együtt egyenlő az *AB* négyszegével. De az *AB* négyszege, az *AB BC* közti derékszeg a *BA AC* köztivel együtt; a *BA AC* közti derékszeg tehát az *AB BC* köztivel együtt egyenlő a *BA AC* köztivel, meg az *AC* négyszegével : és a

4. Feladat:

Ha egyenes vonal szélső és középső arányban vágatik: az egésznek s a kisebbik darabjának négyszegei együtt három akkorát tesznek, mint a nagyobbik darab négyszege.

Legyen AB egyen, vágassék szélső és középső arányra C-nél, s legyen a nagyobbik darabja AC: azt mondom, hogy az AB BC négyszegeik három akkorát tesznek, mint a CA-é.



Mert irassék AB-re $ADEB$ négyszeg, és készítessék el a képlet. Már minthogy AB C-nél szélső és középső arányra van vágva, s AC a nagyobbik darabja: tehát az AB BC közti derékszeg egyenlő az AC négyszegével. De az AB BC közti derékszeg AK, az AC négyszege pedig HG; AK tehát HG-vel egyenlő. És

---

BA AC közti közös derékszeget elvevén, tehát a maradék AB BC közti egyenlő az AC négyszegével; a mint tehát BA AC-hez, úgy van AC CB-hez. De BA AC-nél nagyobb; AC is nagyobb tehát CB-nél; AB tehát C-nél szélső és középső arányban van vágva, s AC a nagyobbik darab : m. b. k.

A 3-ik elmélet kutatása.

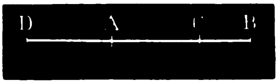
Ugyanis AB egyenes vonal vágassék szélső és középső arányban C pontnál, s a nagyobbik darabja legyen AC, s AC-nek fele CD: azt mondom, hogy a BD négyszege öt akkora, mint CD-é.

Mert mivel a BD négyszege öt akkora mint a CD-é, a DB-é pedig az AB BC közti derékszeg a CD négyszegével együtt; tehát az AB BC közti derékszeg a CD négyszegével együtt öt akkorát teszen, mint a DC négyszege; felbontva tehát, az AB BC közti derékszeg négy akkora, mint a DC négyszege. Az AB BC közti derékszeggel pedig az AC négyszege egyenlő, mert AB C nél szélső és középső arányban van vágva; az AC négyszege tehát négy akkora, mint a CD-é. Úgy is van; mert AC két akkora mint CD.

Nyomozás. Minthogy AC két akkora mint CD, az AC négyszemivel *AF FE*-vel egyenlő, adjuk hozzájok a közös *CK*-t, tehát az egész *AK* az egész *CE*-vel egyenlő; *AK* meg *CE* tehát öszvesen két akkora mint *AK*. De *AK* meg *CE LMN* gnomont meg *CK* négyszeget teszik; tehát *LMN* gnomon meg *CK* négyszeg két akkora mint *AK*. De megmutattaték, hogy *AK HG*-vel egyenlő; *LMN* gnomon tehát meg *CK* négyszeg két akkora mint *HG*; úgy hogy *LMN* gnomon, meg *CK HG* négyszegek együtt három akkorát tesznek mint *HG* négyszeg. És *LMN* gnomon meg *CK HG* négyszegek az egész *AE*-t meg *CK*-t teszik, melyek az *AB BC* négyszegeik, *GH* pedig az *AC* négyszege; az *AB BC* négyszegeik együtt tehát három akkorát tesznek mint az *AC* négyszege m. b. k.

5. Feladat:

Ha egyenes vonal szélső és középső arányban vágatik, s a nagyobbik darabjával egyenlő egyen hozzá toldatik: az egész egyen szélső és középső arányban lesz vágva, s a nagyobbik darab az eredeti egyen.



Mert *AB* egyenes vonal vágassék szélső s középső arányban *C*-nél, és legyen a nagyobbik darab *AC*, s vétessék *AC*-vel egyenlő *AD*: azt mondom hogy *DB* egyen

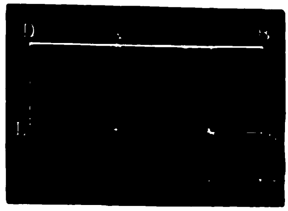
---

ge négy akkora, mint a *DC*-é. De az *AC*-é egyenlő az *AB BC* közti derékszeggel; az *AB BC* közti derékszeg tehát négy akkora, mint a *DC* négyszege; öszvetéve tehát az *AB BC* közti derékszeg a *DC* négyszegével együtt, mi a *DB* négyszege, öt akkora, mint a *DC* négyszege: m. b. k.

A 4-ik elmélet kutatása.

AB egyenes vonal vágassék *C*-nél szélső és középső arányban, s a nagyobbik darabja legyen *AC*: azt mondom, hogy az *AB BC* négyszegeik együtt három akkorát tesznek, mint az *AC*-é.

Mert mivel az *AB BC* négyszegeik együtt három akkorát tesznek, mint az *AC*-é; de az *AB BC* négyszegeiket az *AB BC* közti kétszeri derékszeg az *AC* négyszegével együtt teszi: tehát az *AB BC* közti kétszeri derékszeg az *AC* négyszegével együtt három akkora mint az *AC* négyszege; felbontva tehát, az *AB BC* közti kétszeri derékszeg két akkora mint az *AC* négyszege, úgy hogy az *AB BC* közti szélső és középső arányban van vágva *A*-nál, s a nagyobbik darabja az eleinti *AB* egyen.



Mert irassék *AB*-re *AE* négyszeg, és egészítessék ki a képlet. Már minthogy *AB* *C*-nél szélső és középső arányban van vágva: tehát az *AB BC* közti derékszeg az *AC* négyszegével egyenlő. Már pedig az *AB BC* közti derékszeg *CE*, és az *AC* négyszege *CH*; *CE* tehát *CH*-val egyenlő. De *CE*-vel egyenlő *EH*, *HC*-vel pedig egyenlő *DH*; *DH* is tehát egyenlő *HE*-vel. Adassék hozzájok a közös *HB*; tehát az egész *DK* az egész *AE*-vel egyenlő. De *DK* a *BD DA* közti derékszeg, mert *AD* egyenlő *DL*-lel; *AE* pedig az *AB* négyszege; a *BD DA* közti derékszeg tehát egyenlő az *AB* négyszegével; a mint tehát *DB BA*-hoz, úgy van *BA AD*-hez. *DB* pedig *BA*-nál nagyobb, tehát *BA* is nagyobb *AD*-nél.

DB egyen tehát szélső és középső arányban van vágva *A*-nál, s *AB* a nagyobbik darabja: m. b. k.

---

egyszeri derékszeg az *AC* négyszegeivel egyenlő. Úgy is van; mert *AB* *C*-nél szélső s középső arányban van vágva.

Nyomozás. Már minthogy *AB* *C*-nél szélső s középső arányban van vágva, s *AC* a nagyobbik darabja, tehát az *AB BC* közti derékszeg egyenlő az *AC* négyszegével: az *AB BC* közti kétszeri derékszeg tehát két akkora mint az *AC* négyszege; öszvetéve tehát az *AB BC* közti kétszeri derékszeg, meg az *AC* négyszege három akkora mint az *AC* négyszege; de az *AB BC* közti kétszeri derékszeg, meg az *AC* négyszege, az *AB BC* négyszegeik; az *AB BC* négyszegeik tehát három akkorát tesznek mint az *AC*-é.

Az 5-ik elmélet kutatása.

Némi *AB* egyen vágassék szélső és középső arányban *C*-nél, és a nagyobbik darabja legyen *AC*, és vétessék *AC*-vel egyenlő *AD*: azt mondom, hogy *DB* *A*-nál szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja *BA*.

Mert mivel *DB* *A*-nál szélső és középső arányban van vágva, és a nagyobb darabja *AB*: tehát a mint *DB BA*-hoz, úgy van *BA AD*-hez. *AD* pedig *AC*-vel egyenlő; a mint tehát *DB BA*-hoz, úgy *BA AC*-hez; átfordítva tehát, a mint *BD DA*-hoz, úgy *AB BC*-hez;

Másképpen.

Ha egyenes vonal szélső és középső arányban vágatik: a mint az egész egyenből s nagyobbik darabjából álló öszveg az egészhez, úgy lesz az egész a nagyobbik darabhoz.

Mert AB egyen vágassék szélső és középső arányban C-nél, s a nagyobbik darab legyen AC: azt mondom, hogy a mint BA meg AC öszvesen BA-hoz, úgy van BA AC-hez.

Mert tétessék AD AC-vel egyenlővé: azt mondom, hogy a mint DB BA-hoz, úgy van BA AC-hez. Mert minthogy AB C-nél szélső és középső arányban van vágva, és AC a nagyobbik darab, tehát a mint BA AC-hez, úgy AC CB-hez. De AC AD-vel egyenlő; tehát a mint BA AD-hez, úgy van AC CB-hez; visszálva tehát a mint DA AB-hez, úgy BC CA-hoz; öszvetéve tehát a mint DB BA-hoz, úgy BA AC-hez. Már pedig DA AC-vel egyenlő; tehát a mint BA meg AC öszvesen BA-hoz, úgy BA AC-hez. És mivel meg van mutatva, hogy a mint DB BA-hoz, úgy van BA AC-hez; AC pedig AD-vel egyenlő; tehát a mint DB BA-hoz, úgy van BA AD-hez. DB egyen tehát A-nál szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja az eredeti AB egyen: m. b. k.

---

tehát felbontva a mint BA AD-hez, úgy AC CB-hez. Már pedig AD AC-vel egyenlő; a mint tehát BA AC-hez, úgy AC CB-hez. Úgy is van; mert AB C-nél szélső és középső arányban van vágva.

Nyomozás. Már mivel AB C-nél szélső és középső arányban van vágva; tehát a mint BA AC-hez, úgy AC CB-hez. AC pedig AD-vel egyenlő; tehát a mint BA AD-hez, úgy AC CB-hez; öszvetéve tehát a mint BD DA-hoz, úgy AB BC-hez; tehát átfordítva, a mint DB BA-hoz, úgy BA AC-hez. Már pedig AC AD-vel egyenlő; tehát a mint DB BA-hoz, úgy BA AD-hez; DB tehát A-nál szélső és középső arányban van vágva, s AB a nagyobbik darabja: m. b. k.

6. Feladat:

Ha neves egyen szélső és középső arányban vágatik: mindenik darabja oly nevetlen, mely vágacsnak mondatik.

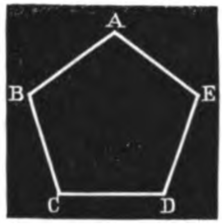
Legyen AB neves egyen, és vágassék szélsö és középső arányban C-nél, és legyen a nagyobbik darab AC: azt mondom, hogy mind AC mind CB oly nevetlen, mely vágacsnak mondatik.

Mert nyujtassék BA D-ig, és tétessék AD a BA felével egyenlővé. Minthogy hát AB egyen C-nél szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darab AC AD-vel, az AB felével, megtoldva: tehát a CD négyszege öt akkora mint a DA-é; a CD négyszege tehát a DA-éhoz abban az arányban van, miben szám számhoz; tehát a CD négyszege a DA-éhoz mérhető. De a DA-é neves, mert DA, mely a neves AB-nek fele, maga is neves; a CD négyszege is tehát neves; tehát CD egyen is neves. És minthogy a CD négyszege a DA-éhoz nincs abban az arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz, tehát CD DA-hoz hoszban szertelen: CD DA tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. AC tehát vágacs. Ismét, minthogy AB szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja AC, tehát az AB BC közti derékszeg egyenlő az AC négyszegével: AC vágacs négyszege tehát AB neves egyenhez szabva BC szélességet csinál. De a vágacs négyszege neves-egyenhez szabva első vágacs-szélességet csinál; BA tehát első vágacs. Megmutattaték pedig hogy AC is vágacs.

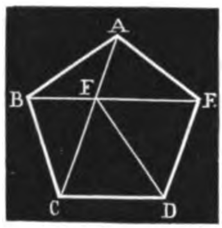
Ha tehát sat.

7. Feladat:

Ha egyenlő oldalu ötszegnek akár sorban akár nem sorban következő három szeglete egyenlő: az ötszeg egyenlő szegletü.

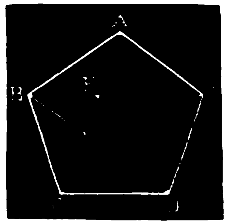


Legyen $ABCDE$ ötszegnek előbb sorban következő három szeglete A-nál B-nél és C-nél egymással egyenlő: azt mondom, hogy $ABCDE$ ötszeg egyenlő szegletü.



Mert vonassanak AC BE FD. Már minthogy CB BA két oldal BA AE két oldallal külön-külön egyenlő, s a CBA alatti szeglet egyenlő a BAE alattival: tehát AC talp egyenlő BE talppal, s ABC háromszeg egyenlő ABE háromszeggel, s a többi szegletek, melyeket egyenlő oldalok fognak át, a többi szegletekkel egyenlők, ú. m. a BCA alatti a BEA alattival, s az ABE alatti a CAB alattival, úgy hogy AF oldal is egyenlő BF oldallal. De megmutattaték, hogy az egész AC is egyenlő az egész BE-vel; tehát a maradék FC is egyenlő a maradék FE-vel. CD is pedig egyenlő DE-vel; e szerint FC CD két oldal FE ED két oldallal egyenlők, s a talpuk FD közös; az FCD alatti szeglet tehát az FED alattival egyenlő. De megmutattaték, hogy a BCA alatti szeglet is egyenlő az AEB alattival; az egész BCD alatti tehát egyenlő az egész AED alattival. De a BCD alatti egyenlőnek van feltéve az A-nál B-nél való szegletekkel; tehát az AED alatti is egyenlő az A-nál B nél való szegletekkel. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy a CDE alatti szeglet is egyenlő az A-nál B-nél valókkal $ABCDE$ ötszeg tehát egyenlő szegletü.

De ne a sorba következő szegletek legyenek egyenlők, hanem legyenek egyenlők az A C D pontoknál levők: azt mondom, hogy $ABCDE$ ötszeg így is egyenlő szegletü.

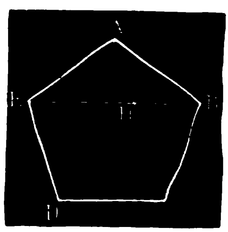


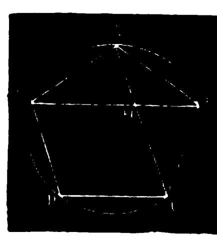
Mert vonassék BD. Már minthogy BA AE két oldal BC CD két oldallal egyenlők, s egyenlő szegleteket fognak be, tehát BE talp egyenlő BD talppal, ABE háromszeg is BCD háromszeggel egyenlő, s a többi szegletek, melyeket az egyenlő oldalak fognak át, a többi szegletekkel egyenlők; az AEB alatti szeglet tehát egyenlő a CDB alattival. A BED alatti szeglet is pedig egyenlö a BDE alattival, mivel BE oldal egyenlö BD oldallal; az egész AED alatti szeglet tehát az egész CDE alattival egyenlö.

De a CDE alatti az A-nál C-nél valókkal egyenlönek van feltéve; az AED alatti szeglet is tehát egyenlö az A-nál C-nél levőkkel. Ugyanazért az ABC alatti szeglet is egyenlö az A C D pontoknál való szegletekkel; $ABCDE$ ötszeg tehát egyenlő szegletü: m. b. k.

8. Feladat:

Ha egyenlő oldalu s egyenlő szegletü ötszegnek két szomszéd szegletét egyenek fogják át: ezek egymást szélső és középső arányban vágják, s a nagyobbik darabjaik az ötszeg oldalával egyenlők.





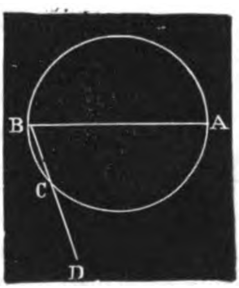
$ABCDE$ egyenlö oldalu s egyenlő szegletü ötszegnek A-nál és B-nél való két szomszéd szegletét fogják át AC BE egymást H pontnál vágó egyenek: azt mondom, hogy mindenikök H pontnál szélső és középsö arányban van vágva, és a nagyobbik darabjaik az ötszeg oldalával egyenlők.

Mert irassék $ABCDE$ ötszegre $ABCDE$ kör. Már minthogy EA AB két egyen AB BC két egyennel egyenlő, s egyenlő szegleteket fognak be, tehát BE talp AC talppal, ABE háromszeg ABC

háromszeggel egyenlők, s a többi szegletek, melyeket az egyenlő oldalak fognak át, külön-külön egyenlők a többi szegletekkel; a *BAC* alatti tehát egyenlő az *ABE* alattival. Az *AHE* alatti szeglet tehát két akkora mint a *BAH* alatti, mert *ABH* háromszegnek külszeglete. De az *EAC* alatti is két akkora mint a *BAC* alatti, minthogy *EDC* kerület is két akkora mint *CB* kerület; a *HAE* alatti szeglet tehát egyenlő az *AHE* alattival; úgy hogy *HE* egyen is *EA*-val, azaz *AB*-vel egyenlő. És minthogy *BA* egyen *AE*-vel egyenlő, az *ABE* alatti szeglet is egyenlő az *AEB* alattival. De az *ABE* alatti a *BAH* alattival egyenlőnek mutattaték meg; tehát a *BEA* alatti szeglet is egyenlő a *BAH* alattival. És az *ABE* alatti szeglet, *ABE* és *ABH* két háromszeg közös szeglete; tehát a hátralevő *BAE* alatti szeglet is egyenlő a hátralevő *AHB* alattival; *ABE* háromszeg tehát *ABH* háromszeggel egyenlő szegletű; egyarányban tehát a mint *EB BA*-hoz, úgy van *AB BH*-hoz. De *BA EH*-val egyenlő; tehát a mint *BE EH*-hoz, úgy *EH HB*-hez. De *BE* nagyobb *EH*-nál; nagyobb tehát *EH* is *HB*-nél; *BE* tehát szélső és középső arányban van vágva *H*-nál, s a nagyobbik darabja *HE* az ötszeg oldalával egyenlő. Hasonlólag mutatjuk meg, hogy *AC* is szélső és középső arányban van vágva *H*-nál, és hogy a nagyobbik darabja *CH* az ötszeg oldalával egyenlő: m. b. k.

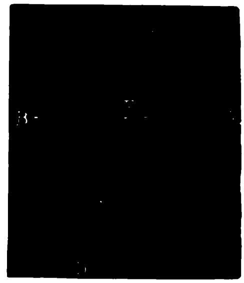
9. Feladat:

Ha azon körbe irt hatszegnek s tízszegnek oldalai öszvetoldatnak: az egész egyen szélső és középső arányban van vágva, s a hatszeg oldala a nagyobbik darab.



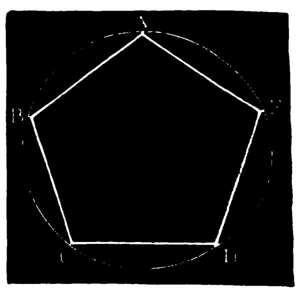
Legyen *ABC* kör, s az *ABC* körbe irt képletek közzül a tízszegnek az oldala legyen *BC*, a hatszegé pedig *CD*, és legyenek egyenesben: azt mondom, hogy az egész *BD* egyen szélső és középső arányban van vágva *C*-nél, s *CD* a nagyobbik darabja.

Mert vétessék a kör középpontja,



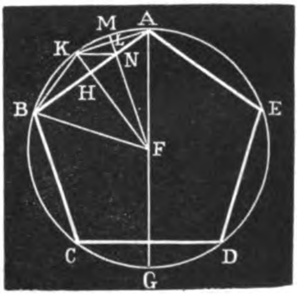
s legyen az *E* pont; vonassanak *EB EC ED*, és *BE* nyujtassék *A*-ig. Már minthogy *BC* az egyenlö oldalu tízszeg oldala, tehát *ACB* kerület öt akkora mint *BC* kerület; tehát *AC* kerület négy akkora mint *CB* kerület. A mint pedig *AC* kerület *CB* kerülethez, úgy van az *AEC* alatti szeglet a *CEB* alattihoz; az *AEC* alatti tehát négy akkora, mint a *CEB* alatti. És mivel az *EBC* alatti szeglet egyenlö az *ECB* alattival; tehát az *AEC* alatti szeglet két akkora, mint az *ECB* alatti. És minthogy *EC* egyen *CD*-vel egyenlö, mert mindenikök egyenlö az *ABC* körbe írható hatszeg oldalával: tehát a *CED* alatti szeglet egyenlö a *CDE* alattival; az *ECB* alatti szeglet tehát két akkora mint az *EDC* alatti. De meg van mutatva, hogy az *ECB* alattinak kettözete az *AEC* alatti; tehát az *AEC* alatti négy akkora mint az *EDC* alatti. Megmutattaték az is, hogy a *BEC* alattinak is négyszerzete az *AEC* alatti; az *EDC* alatti tehát egyenlö a *BEC* alattival. De a két háromszegnek, *BED*-nek és *BEC*-nek, közös szeglete az *EBD* alatti; tehát a maradék *BED* alatti a maradék *ECB* alattival egyenlö; *EBD* háromszeg tehát *EBC* háromszeggel egyenlö szegletü; tehát egyarányban a mint *DB BE*-hez, úgy van *EB BC* hez; *EB* pedig *DC*-vel egyenlö; tehát a mint *BD DC*-hez, úgy van *DC CB*-hez. De *BD* nagyobb *DC*-nél; tehát *DC* is nagyobb *CB*-nél; tehát *BD* egyen szélsö és középsö arányban van vágva *C*-nél, s a nagyobbik darabja *DC*: m. b. k.

10. Feladat:



Ha körbe egyenlö oldalu ötszeg iratik: az ötszegoldal négyszege egyenlö az azon körbe írt hatszeg- meg tízszegoldal négyszegeikkel.

Legyen *ABCDE* kör, s *ABCDE* körbe irassék egyenlö oldalu *ABCDE* ötszeg: azt mondom, *ABCDE* ötszegoldala négyszege egyenlő az $ABCDE$ körbe irt hatszeg meg tízszeg oldalai négyszegeivel.



Mert vétessék a kör középpontja F, és AF vonatván, nyujtassék, G pontig, és vonassék FB, és bocsátassék F-ből AB-re FH függő, nyujtassék K-ig, és vonassanak AK KB, és ismét F-ből AK-ra húzassék FL függő, nyújtassék M-ig, és vonassék KN.

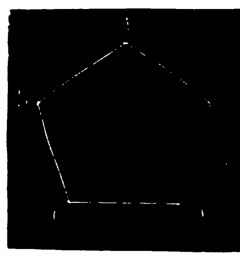
Már minthogy $ABCG$ kerület egyenlő $AEDG$ kerülettel, mikből ABC AED-vel egyenlő: tehát a maradék CG kerület egyenlő a maradék DG-vel. CD az ötszeg oldala, CG tehát a tízszegé. És minthogy AF FB-vel egyenlő, s FH függő; tehát az AFK alatti szeglet egyenlő a KFB alattival; úgy hogy AK kerület is egyenlő KB-vel: AB kerület tehát két akkora mint BK kerület; tehát AK egyen a tízszeg oldala. Ugyanazért AK két akkora mint KM. És minthogy AB kerület két akkora mint BK, CD kerület pedig AB kerülettel egyenlő: tehát CD kerület két akkora mint BK kerület. De CD kerület CG-nek is kettőzete; CG kerület tehát BK kerülettel egyenlő. De BK is két akkora mint KM, minthogy KA is az; CG is tehát két akkora mint KM. De CB kerület is két akkora mint BK kerület, mert CB kerület egyenlő BA kerülettel; az egész GB kerület tehát két akkora mint BM; úgy hogy a GFB alatti szeglet is két akkora, mint a BFM alatti. A GFB alatti pedig az FAB alattinak is kettőzete, mert az FAB alatti egyenlő az ABF alattival; a BFN alatti tehát egyenlő az FAB alattival. De ABF és BFN két háromszegben az ABF alatti szeglet közös; tehát a hátralevő AFB alatti egyenlő a hátralevő BNF alattival; ABF háromszeg tehát BFN háromszeggel egyenlő szegletü; egyarányban tehát a mint AB egyen BF-hez, úgy FB BN-hez; tehát az AB BN közti derékszeg a BF négyszegével egyenlő. Ismét, minthogy AL egyenlő LK-val, LN pedig közös, és derékszegletre van: tehát KN talp egyenlő AN talppal; az LKN alatti szeglet tehát egyenlő az LAN alattival. De az LAN alatti a

KBN alattival egyenlö; az *LKN* alatti is tehát egyenlö a *KBN* alattival. És *AKB AKN* két háromszegben az *NAK* alatti szeglet közös; tehát a maradék *AKB* alatti egyenlö a maradék *KNA* alattival. *KBA* háromszeg tehát *KNA* háromszeggel egyenlö szegletü. Egyarányban tehát a mint *BA* egyen *AK*-hoz, úgy van *KA AN*-hez; a *BA AN* közti derékszeg tehát egyenlö az *AK* négyszegével. Megmutattaték pedig, hogy az *AB BN* közti derékszeg is egyenlö a *BF* négyszegével; tehát az *AB BN* közti a *BA AN* köztivel együtt, mi az *AB* négyszegét teszí, egyenlö a *BF* meg *AK* együvé vett négyszegeikkel. De *AB* az ötszeg oldala, *BF* a hatszegé, *AK* pedig a tízszegé.

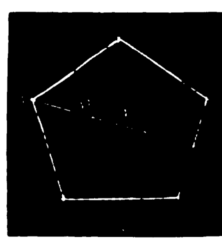
Tehát stb.

11. Feladat:

Ha egy körbe, melynek átmérője neves egyén, egyenlöoldalu ötszeg iratik: az ötszeg oldala oly nevetlen egyen, mely kisebbiknek mondatik.



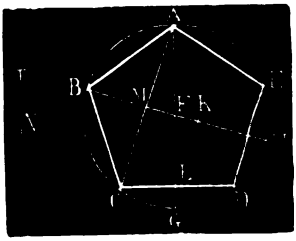
Mert irassék *ABCDE* körbe, melynek átmérője neves egyen, *ABCDE* egyenlö oldalu ötszeg: azt mondom, hogy az ötszeg oldala *AB* oly nevetlen egyen, mely kisebbiknek mondatik.



Mert vétessék a kör középpontja *F*, és *AF FB* vonatván, nyujtassanak *G H* pontokig; vonassék *AC*, és *FK* tétessék az *AF* negyedével egyenlövé. Már *AF* neves, tehát *FK* is az. De *BF* is neves, tehát az egész *BK* neves. És minthogy *ACG* kerület egyenlö *ADG* kerülettel, mikböl *ABC AED*-vel egyenlö: tehát a maradék *CG* egyenlö a maradék *GD*-vel. És ha *AD*-t vonjuk, a következik, hogy az *L*-nél levö szegletek derékek, és *DC* két akkora, mint *CL*. Ugyanazért az *M*-nél való szegletek is derékek, és *AC* két akkora mint *CM*. Minthogy hát az *ALC* alatti szeglet az *AMF* alattival egyenlő, s *ALC AMF* két háromszegben az *LAC* alatti közös: tehát a hátralévő *ACL* alatti a hátralévő *MFA*-alattival egyenlő; *ACL* háromszeg tehát *AMF* háromszeggel egyenlő szegletü; egyarányban tehát a mint *LC CA*-hoz, úgy van *MF FA*-hoz, s úgy vannak az előtagok kettőzetei is; tehát a mint az *LC* kettőzete *CA*-hoz, úgy van az *MF* kettőzete *FA*-hoz. De a mint az *MF* kettőzete *FA*-hoz úgy van *MF* az *FA* feléhez; tehát a mint az *LC* kettőzete *CA*-hoz, úgy van *MF* az *FA* feléhez, és úgy vannak az utótagok hasonfeleihez is;; tehát a mint az *LC* kettőzete a *CA* feléhez, úgy van *MF* az *FA* negyedéhez. Már az *LC* kettőzete *DC*, az *AC* hasonfele *CM*, az *FA* negyedrésze pedig *FK*; tehát a mint *DC CM* hez, úgy van *MF FK*-hoz. Összetéve is a mint az összetoldott *DCM CM*-hez, úgy *MK KF*-hez, tehát a mint az összetoldott *DCM* négyszege a *CM*-éhez, úgy van az *MK*-é a *KF*-éhez. És minthogy az ötszeg két oldalát átfogó egyent, a milyen *AC*, szélső és középső arányban vágván, a nagyobbik darabja egyenlő az ötszeg oldalával, azaz *DC*-vel: a nagyobbik darab pedig megtoldva az egésznek felével ötakkora emeletü, mint az egész egyen hasonfelének négyszege, s az egész *AC*-nek fele *CM*; tehát *DCM*-nek mint *egy* egyennek a négyszege öt akkora mint a *CM*-é. De mivel megmutattaték, hogy a mint *DCM*-nek mint *egy* egyennek a négyszege a *CM*-éhez, úgy van az *MK*-é a *KF*-éhez; tehát az *MK* négyszege öt akkora mint a *KF*-é. A *KF* négyszege pedig neves, mert az átmérő neves; tehát neves az *MK*-é is; neves tehát *MK* egyen is, mert az *MK* négyszege a *MF*-éhez azon arányban van, miben szám számhoz. És minthogy *BF* négyakkora mint *FK*, tehát *BK* ötakkora mint *KF*; a *BK* négyszege tehát huszonöt akkora mint a *KF*-é. Az *MK* négyszege pedig öt akkora mint a *KF*-é, a *BK* négyszege tehát öt akkora mint a *KM*-é; a *BK* négyszege tehát a *KM*-éhez nincs azon arányban, miben négyszegszám négyszegszámhoz; *BK* tehát *KM*-hez hoszban szertelen. És mindeniknök neves; *BK KM* tehát egymáshoz csak emeletben mérhető neves egyenek. Hogyha pedig nevesből az egészhez csak emeletben mérhető neves egyen vétetik el, a maradék oly nevetlen, mely vágacsnak mon-

37*

datik; *MB* tehát vágacs, és *MK* hozzá illesztett egyen. Azt mondom hogy negyedik is. Mert a mekkorával nagyobb a *BK* négyszege a *KM*-énél, azzal legyen egyenlő az *N* négyszege; *BK* tehát az *N* négyszegével nagyobb emeletü *KM*-nél. És minthogy *KF FB*-hez mérhető, öszvetéve is *KB BF*-hez mérhető. De *BF BH*-hoz hoszban mérhető, tehát *KB* is mérhető *BH*-hoz. És mivel a *BK* négyszege öt akkora mint a *KM*-é, tehát a *BK*-é a *KM*-éhez azon arányban van, miben *5 1*-hez; átfordítva tehát a *BK* négyszege az *N*-éhez azon arányban van, miben *5 4*-hez, azaz nem a miben négyszegszám négyszegszámhoz; *BK* tehát *N*-hez hoszban szertelen; tehát *BK* hozzája szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü *KM*-nél. Minthogy hát az egész *BK* hozzája hoszban szertelen egyen négyszegével nagyobb emeletü az oda illesztett *KM*-nél, s az egész *BK* a felvett *BH* neves egyenhez hoszban mérhető, tehát *MB* negyedik vágacs. Már pedig a neves és negyedik vágacs közé fogott derékszeg nevetlen, s az arra emelhető egyen nevetlen és kisebbiknek mondatik. De a *HB BM* közti derékszeg az *AB* négyszegével egyenlő, annál fogva, hogy *AH*-t vonván, *ABH* háromszeg egyenlőszegletü lesz *ABM* háromszeggel, s a mint *HB BA*-hoz, úgy *AB BM*-hez.

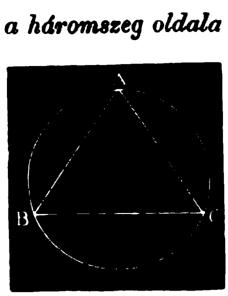


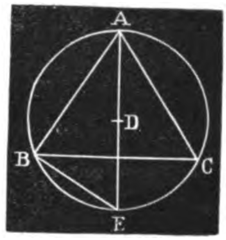
AB az ötszeg oldala tehát oly nevetlen, mely kisebbiknek mondatik: m. b. k.

12. Feladat:

Ha körbe egyenlőoldalu háromszeg iratik: a háromszeg oldala három akkora emeletü, mint a kör középponti egyene.

Legyen *ABC* kör és irassék beléje *ABC* egyenlőoldalu háromszeg: azt mondom, hogy az *ABC* háromszeg oldala *AB* három akkora emeletü mint az *ABC* kör középponti egyene.



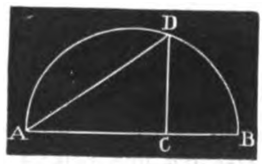


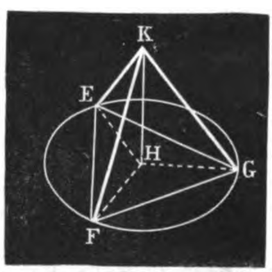
Mert vétessék a kör középpontja D, és AD vonatván nyujtassék E-ig, és vonassék BE. Már minthogy ABC háromszeg egyenlőoldalu: tehát BEC kerület az ABC kör kerületének harmadrésze; BE kerület tehát a kör kerületének hatoda; ennélfogva BE egyen a hatszeg oldala; tehát a középponti egyennel DE-vel egyenlő. És minthogy AE két akkora mint ED, tehát az AE négyszege négyakkora mint a DE-é, azaz a BE-é. De az AE négyszege egyenlő az AB BE négyszegeikkel, az AB BE négyszegeik tehát együtt négy akkorák mint a BE-é; elválasztva tehát, az AB négyszege három akkora, mint a BE-é. BE pedig DE-vel egyenlő; tehát az AB négyszege három akkora mint a DE-é.

A háromszeg oldala tehát három akkora emeletü, mint a kör középponti egyene: m. b. k.

13. F e l a d a t :

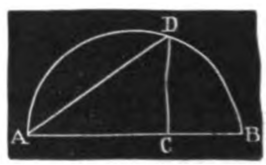
Egyenlőoldalu négy háromszegből gúlát alkotni, és ezt adott tekével körülfogni, s megmutatni hogy a teke átmérője másfél akkora emeletü mint a gúla oldala.

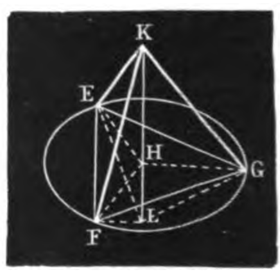




Vétessék az adott teke átmérője AB és vágassék C pontnál úgy, hogy AC kétakkora legyen, mint CB; irassék AB-re ADB félkör, és húzassék C pontból AB-hez derékszegletre CD, és vonassék DA. Vétessék EFG kör, melynek középponti egyene DC-vel egyenlő legyen, és írassék EGF körbe egyenlö oldalu EFG háromszeg, és vétetvén a körnek H középpontja, vonassanak EH HF HG; állíttassék H pontba az EFG kör lapjához derékszegletre HK egyen, és vágassék el HK-ból AC egyennel egyenlö HK, és vonassanak KE KF KG. Már minthogy HK az EFG kör lapjára függő: tehát minden hozzá érő s az *EFG* kör lapjában levő egyennel derékszegletet alkot. Éri pedig *HE HF HG* egyenek mindenike; *HK* tehát *HE HF HG* egyenek mindenikére függő. És minthogy *AC* egyenlő *HK*-val, *CD* pedig *HE*-vel, és derék szegleteket fognak be: tehát *DA* talp *KE* talppal egyenlő. Ugyanazért *KF*-nek *KG*-nek is mindenike egyenlő *DA*-val; *KE KF KG* tehát egymással egyenlők. És minthogy *AC* két akkora mint *CB*, tehát *AB* három akkora mint *BC*. De a mint *AB BC*-hez, úgy van az *AD* négyszege a *DC*-éhez, mivelhogy a mint *BA AC*-hez, úgy van a *DA* négyszege az *AC*-éhez: átfordítva tehát a mint *AB BC*-hez, úgy van az *AD* négyszege a *DC*-éhez. Az *AD* négyszege tehát három akkora mint a *DC*-é. Már pedig az *FE* négyszege is három akkora mint az *EH*-é, és *DC* egyenlő *EH*-val; *DA* tehát egyenlő *EF*-fel. De megmutattaték, hogy *DA KE*-nek *KF*-nek *KG*-nek mindenikével egyenlő; tehát *EF FG GE* egyeneknek is mindenike *KE*-nek *KF*-nek *KG*-nek mindenikével egyenlő; *EFG KEF KFG KGE* négy háromszeg tehát mind egyenlő oldalu; ennélfogva egyenlő oldalu négy háromszegből van összeállítva egy gúla, melynek talpa *EFG* háromszeg, hegye pedig *K* pont.

Körül is kell ezt fogni az adott tekével, és megmutatni hogy a teke átmérője másfél akkora emeletü, mint a gúla oldala.





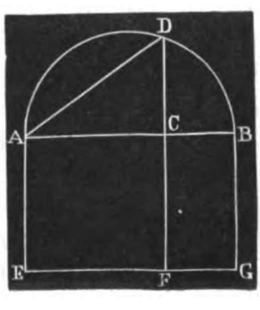
Mert nyujtassék ki *KH*-val egyenesben *HL* egyen, és tétessék *HL BC*-vel egyenlővé. Már mivel a mint *AC CD*-hez, úgy van *CD CB*-hez, *AC* pedig egyenlő *KH*-val, *CD HE*-vel, és *CB HL*-lel: tehát a mint *KH HE*-hez, úgy van *EH HL* hez; a *KH HL* közti derékszeg tehát egyenlő az *EH* négyszegével. És mind a *KHE* mind az *EHL* alatti szeglet derék; a *KL*-re irt félkör tehát *E*-n is átmegy. Mivel hogy ha *EL* egyent vonjuk, az *LEK* alatti derékszeglet származik, annál fogva hogy *ELK* háromszeg egyenlő szegletü lesz mind *ELH*, mind *EHK* háromszeggel. Ha pedig *KL* helyt maradván, a keringetett félkör oda vissza kerül, a honnan elindult, *F G* pontokon is átmegy; minthogy *FL LG* egyenek vonatván, az *F*-nél *G*-nél levő szegletek hasonlókép derékek lesznek, és a gúla az adott tekével körül lesz fogva; mert a teke átmérője *KL* egyenlő az adott teke átmérőjével *AB*-vel, mivelhogy *AC*-vel *KH*, *CB*-vel pedig *HL* egyenlőknek vétettek.

Még azt mondom, hogy a teke átmérője másfél akkora emeletű, mint a gúla oldala.

Mert minthogy *AC* két akkora mint *CB*, tehát *AB* három akkora mint *BC*; átfordítva tehát *BA* másfél akkora, mint *AC*. De a mint *BA AC*-hez, úgy van a *BA* négyszege az *AD*-éhez, mivelhogy *BD*-t vonva, a mint *BA AD*-hez, úgy *DA AC*-hez; a *DAB DAC* háromszegek hasonlóságánál s annálfogva, hogy a mint az első egyen a harmadikhoz, úgy van az első négyszege a másodikéhoz; a *BA* négyszege tehát másfél akkora mint az *AD*-é. Már pedig *BA* az adott teke átmérője, és *AD* a gúla oldaláv al egyenlő.

A teke átmérője tehát emeletben másfél akkora mint a gúla oldala: m. b. k.

Jegyzet: Ebben a bizonyítmányban az *átfordítás*, melyet az arányokhoz tartozó műszónak ismerünk, oly kifejezésekben fordul elé, melyek első tekintetre nem arány- vagy egyarány-alakban jelennek meg. Ennél fogva az utolsó részbeli kifejezést: „*AB* háromakkora, mint *BC*, tehát átfordítva *BA* másfél akkora mint *AC*" világosítás okáért átöltöztetjük a szokott arányidomba. *AB* háromakkora mint *BC*, másképp ezt teszi: *AB* úgy van *BC*-hez, mint három van egyhez; átfordítva tehát *AB* úgy van *AB*-nek ahhoz a felülékéhez, melylyel *BC*-t meghaladja, azaz *AC* hez, mint három van háromnak az egyet meghaladó felülékéhez, kettőhöz; rövidebbre szorítva, *AB* úgy van *AC*-hez, mint három kettőhez; vagy másképp: *AB* másfél akkora mint *AC*. Így a többiek is.

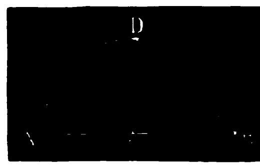


Felvétel: Meg kell mutatni, hogy a mint *AB BC*-hez, úgy van az *AD* négyszege a *DC*-éhez.

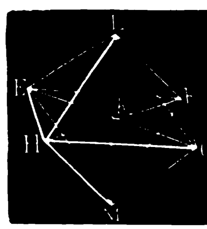
Vétessék a félkör rajza, és vonassék *DB*, és irassék *AC*-re *EC* négyszeg, és egészíttessék ki *FB* egyközény. Már mivel a *DAB* és *DAC* háromszegek egyenlő szegletüségénél fogva, a mint *BA AD*-hez, úgy *DA AC*-hez: tehát a *BA AC* közti derékszeg az *AD* négyszegével egyenlő. És minthogy a mint *AB BC*-hez, úgy *EB BF*-hez, és *EB* a *BA AC* közti derékszeg, mert *EA AC*-vel egyenlő, *BF* pedig az *AC CB* közti derékszeg: tehát a mint *AB BC*-hez, úgy van a *BA AC* közti derékszeg az *AC CB* köztihez. Már a *BA AC* közti az *AD* négyszegével egyenlő, és az *AC CB* közti derékszeg a *DC* négyszegével egyenlö; mert a függö *DC* a talpnak *AC CB* darabjai közt közép egyarányu, derék levén az *ADB* alatti szeglet; a mint tehát *AB BC*-hez, úgy van az *AD* négyszege a *DC*-éhez: m. b. k.

14. Feladat:

Nyolczlapu telyet kell összeállítni, s azon tekével, melylyel imént a gúlát, körülfogni: és megmutatni, hogy a teke átmérője két akkora emeletü, mint a nyolczlapu tely oldala.



Vétessék az adott teke átmérője *AB*, és vágassék ketté *C*-nél; irassék *AB*-re *ADB* félkör, húzassék *C*ből *AB*-hez derékszegletre *CD* egyen, és vonassék *DB*; vétessék *EFGH* négyszeg, melynek mindenik oldala egyenlö legyen *BD*-vel, vonassanak *HF EG*, és állítassék *K* pontba az *EFGH* négyszeg lapjához derékszegletre *KL* egyen, nyujtassék a lapon túl felöl, mint *KM*, vágassanak el mind *KL*-böl mind *KM*-böl *KE KF KG KH* egyenek egyikével egyenlö *KL* és *KM*, és vonassanak *LE LF LG LH ME MF MG MH*. Már minthogy *KE* egyenlö *KH*-val, s az *EKH* alatti szeglet derék: tehát a *HE* négyszege két akkora mint az *EK*-é. Ismét, minthogy *LK* egyenlö *KE*-vel, s az *LKE* alatti szeglet derék: tehát az *EL* négyszege két akkora mint az *EK*-é. Megmutattaték pedig, hogy a *HE* négyszege is két akkora, mint az *EK*-é; az *LE* négyszege tehát egyenlö az *EH*-éval; egyenlö tehát *LE* is *EH*-val. Ugyanazért *LH* is egyenlö *HE*-vel; *LEH* háromszeg tehát egyenlöoldalu. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy a többi



háromszegek is, melyeknek talpai az *EFGH* négyszeg oldalai, hegyei pedig *L M* pontok, mind egyenlőoldaluak; össze van tehát állítva egyenlő oldalu nyolcz háromszegtől kerített nyolczlapu tely.

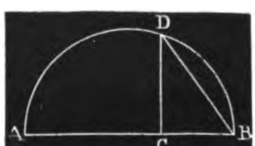
Ezt már körül kell fogni az adott tekével, és megmutatni, hogy a teke átmérője két akkora emeletű mint a nyolczlapu tely oldala.

Mert minthogy *LK KM KE* egymással egyenlők, tehát az *LM*-re irott félkör *E*-n is átmegy. És ugyan azért, ha *LM* helyt maradván, a körül fordított félkör újra visszakerül oda, a honnan elindult, *F G H* pontokon is átmegy, és a nyolczlapu tely tekébe lesz foglalva. Azt mondom, hogy épen az adottba. Mert minthogy *LK* egyenlő *KM*-mel, *KE* pedig közös, és derék szegleteket fognak be, tehát *LE* talp egyenlő *EM* talppal. És minthogy az *LEM* alatti szeglet derék, mert félkörbeli; tehát az *LM* négyszege két akkora mint az *LE*-é. Ismét, minthogy *AC* egyenlő *CB*-vel, tehát *AB* két akkora mint *BC*. A mint pedig *AB BC*-hez, úgy van az *AB* négyszege a *BD*-éhez: az *AB* négyszege tehát két akkora, mint a *BD*-é. De megmutattaték, hogy az *LM*-é is két akkora, mint az *LE*-é. Már pedig a *BD*-é akkora, mint az *LE*-é, mert *EH* egyenlőnek van felvéve *DB*-vel. Egyenlő tehát az *AB* négyszege is az *LM*-ével; *AB* tehát *LM*-mel egyenlő. De *AB* az adott teke átmérője, *LM* tehát egyenlő az adott teke átmérőjével.

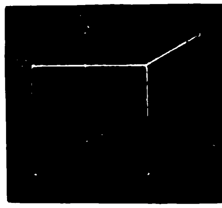
Körül van fogva tehát a nyolczlapu tely az adott tekével és egyszersmind megmutatva, hogy a teke átmérője két akkora emeletű mint a nyolczlapu tely oldala: m. t. k.

15. Feladat:

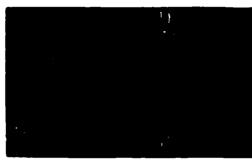
Köböt kell összeállítni, és azon tekével melylyel az előbbieket, körülfogni, és megmutatni, hogy a teke átmérője emeletben három akkora mint a köb oldala.



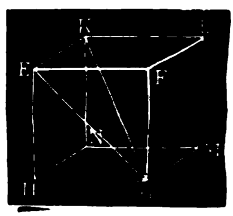
Vétessék az adott teke átmérője *AB*, és vágassék *C*-nél úgy, hogy *AC* két akkora legyen mint *CB*, irassék *AB*-re *ADB* félkör, húzassék *C*-ből



AB-hez derékszegletre *CD*, és vonassék *DB*; vétessék *EFGH* négyszeg, melynek oldala *DB*-vel legyen egyenlő, és *E F G H* pontokból az *EFGH* négyszeglapjához derék szegletre vonassanak *EK FL GM HN* egyenek, *EK FL GM HN* egyenek mindenikéből vágassanak el az *EF FG GH HE* egyenek valamelyikével egyenlő *EK FL GM HN* egyenek, és vonassanak *KL LM MN NK*; tehát össze van állítva hat egyenlő négyszegtől kerített *FN* köb. Ezt már körül kell az adott tekével fogni, és megmutatni, hogy a teke átmérője három akkora emeletü, mint a köb oldala.



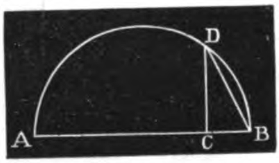
Vonassanak *KG EG*. Már minthogy a *KEG* alatti szeglet derék, azért, hogy *KE* egyen *EG* négyszeghez, következőleg *EG* egyenhez is függő: tehát a *KG*-re irott félkör *E* ponton is átmegy. Ismét, mivel *FG* mind *LF*-re mind *FE*-re függő, tehát *FG* egyen *FK* lapra is függő; úgy hogy ha *FK*-t vonjuk, *GF FK*-ra is függő lesz; és ezért ismét a *GK*-ra irt félkör *F*-en is átmegy. Atmegy hasonlóképp a köb többi pontain is. E szerint, ha *KG* helytmaradván, a körülforduló félkör ismét oda visszakerül, a honnan elindult, a köb körül lesz fogva a tekével. Azt mondom, hogy éppen az adottal. Mert minthogy *GF* egyenlő *FE*-vel, s az *F*-nél való szeglet derék, tehát az *EG* négyszege két akkora mint az *EF*-é. De *EF* egyenlő *EK*-val; az *EG* négyszege tehát két akkora mint az *EK*-é; úgy hogy a *GE EK* négyszegeik, azaz a *GK*-é, három akkora mint az *EK*-é. És minthogy *AB* három akkora mint *BC*, s a mint *AB BC*-hez, úgy van az *AB* négyszege a *BD*-éhez: tehát az *AB*-é három akkora mint a *BD*-é. Megmutattaték pedig, hogy a *GK*-é is három akkora, mint a *KE*-é; és *KE* a feltét szerint *BD*-vel egyenlő; *KG* is tehát egyenlő *AB*-vel. Már pedig *AB* az adott teke átmérője, tehát *KG* is egyenlő az adott teke átmérőjével.



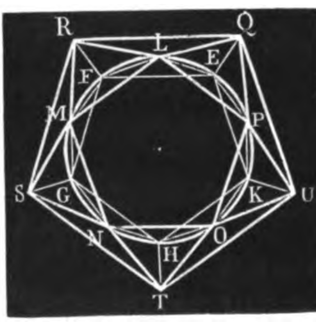
Körül van fogva tehát a köb az adott tekével, s egyszersmind megmutatva, hogy a teke átmérője három akkora emeletü, mint a köb oldala: m. t. k.

16. Feladat:

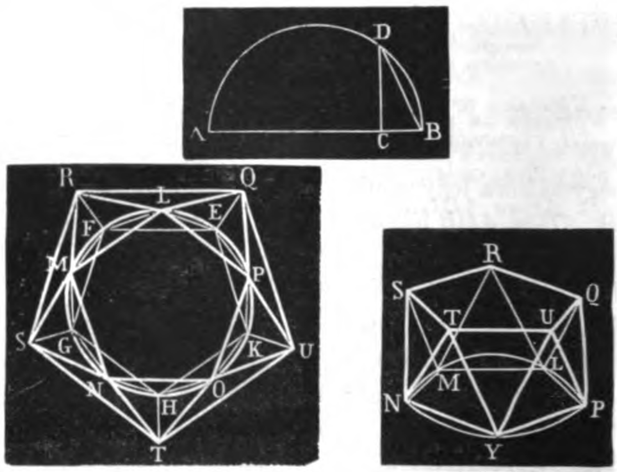
Húszlaput kell összeállítni, és azon tekével körülfogni, melylyel az előbbi képleteket, és megmutatni, hogy a húszlapu oldala oly nevetlen egyen, mely kisebbiknek mondatik.



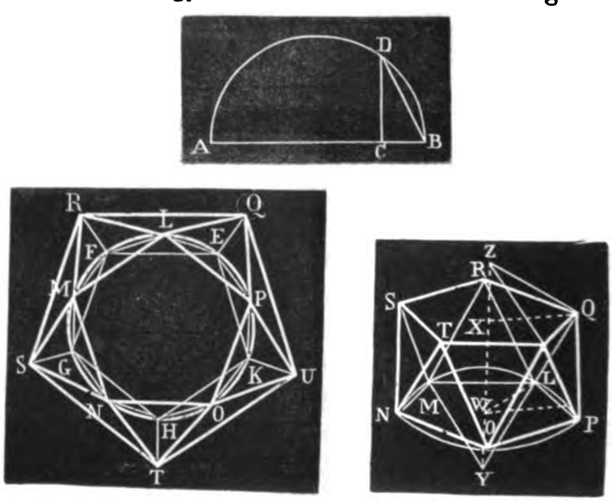
Vétessék az adott teke átmérője AB, vágassék C-nél úgy, hogy AC négy akkora legyen mint CB, és irassék AB-re ADB félkör, és húzassék C pontból AB-hez derék szegletre CD egyenes vonal, és vonassék DB; továbbá vétessék $EFGHK$ kör, melynek középponti egyene DB-vel egyenlő legyen, irassék $EFGHK$ körbe $EFGHK$ egyenlőoldalu és egyenlőszegletü ötszeg, és EF FG GH HK KE kerületek LM N O P pontoknál ketté vágatván, vonassanak EL LF FM MG GN NH HO OK KP PE, nem különben LM MN NO OP PL egyenek; $LMNOP$ ötszeg is tehát egyenlőoldalu, és EP egyen a tízszeg oldala. És állítassanak E F G H K pontokból a kör lapjához derékszegletre az $EFGHK$ kör középponti egyeneivel egyenlő EQ FR GS HT KU egyenek, és vonassanak QR RS ST TU UQ QL LR RM MS SN NT TO OU UP PQ. És minthogy mind EQ mind QU azon lapra függők, tehát EQ KU-hoz egyközü. Egyenlő is vele; már pedig az egyenlő és egyközü egyeneket azon egy felöl összekötö egyenek maguk is egyenlők és egyközüek; QU tehát EK-val egyenlő és egyközü hozzája. De EK az egyenlőoldalu ötszeg oldala; egyenlőoldalu ötszeg oldala tehát QU is, még pedig az $EFGHK$ körbe irotté. Ugyanazért



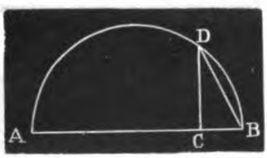
QR RS ST TU egyenek is mind az *EFGHK* körbe irt egyenlöoldalu ötszeg oldalai; *QRSTU* ötszeg tehát egyenlöoldalu. És minthogy *QE* a hatszeg és *EP* a tízszeg oldala, s a *QEP* alatti szeglet derék: tehát a *QP* az ötszeg oldala; mert az ötszeg oldala az azon körbe irt hatszeg meg tízszeg oldalaikkal egyenlő emeletü. Ugyanazért *PU* is az ötszeg

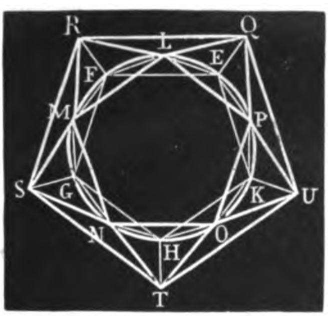


oldala, de *QU* is az ötszegé; tehát *QPU* háromszeg egyenlöoldalu. Ugyanazért *QLR RMS SNT TOU* háromszegek is mind egyenlöoldaluak. És mivel meg van mu-



mutatva, hogy mind QL mind QP az ötszeg oldalai, de LP is az ötszegé, tehát QLP háromszeg egyenlőoldalu. Ugyanazért LRM MSN NTO OUP háromszegek is mind egyenlőoldaluak. Vétessék $EFGHK$ körnek W középpontja, és állítassék W-be a kör lapjához derékszegletre WZ egyen, és nyujtassék ki tul felől WY, és vágassék el az ötszeg oldala WX, és a tízszegéi WY és XZ, és vonassanak QZ QX UZ EW LW LY YM. És mivel mind WX mind QE a kör lapjához függők: tehát WX QE-hez egyközü. Egyenlők is; tehát EW QX egyenlők és egyközüek. És EW a hatszeg oldala, a hatszegé tehát QX is. És minthogy QX a hatszeg oldala, XZ pedig a tízszegé, s a QXZ alatti szeglet derék: tehát QZ az ötszegé. Ugyanazért UZ is az ötszegé, mivel hogy ha WK-t XU-t vonjuk, egyenlők és átelleniek lesznek; WK pedig kö-

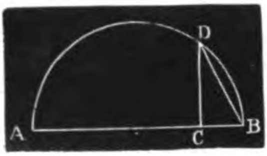


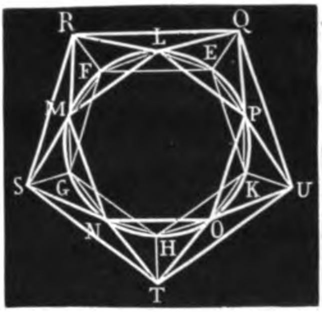


zépponti egyen levén, a hatszeg oldala; a hatszegé tehát XU is. XZ pedig a tízszegé, s az UXZ alatti szeglet derék, tehát UZ az ötszeg oldala. De QU is az ötszegé; QUZ háromszeg tehát egyenlőoldalu. Ugyanazért a többi háromszegek is, melyeknek talpai QR RS ST TU egyenek, hegyök pedig Z pont, mind egyenlőoldaluak. Ismét minthogy WL egyen a hatszeg, WY a tízszeg oldalaik, s az LWY alatti szeglet derék: tehát

LY az ötszeg oldala. Ugyanazért ha *WM*-et, mely a hatszeg oldala, vonjuk, a jön ki, hogy *MY* az ötszegé. De *LM* is az ötszegé; *LMY* háromszeg tehát egyenlőoldalu. Hasonlólag mutattatik meg, hogy a többi háromszegek is, melyeknek talpai *MN NO OP PL*, hegyök pedig *Y* pont, mind egyenlőoldaluak. Össze van állítva tehát húsz egyenlőoldalu háromszegtől kerített húszlapu tely.

Körül is kell ezt fogni az adott tekével, és megmutatni, hogy a húszlapu oldala oly nevetlen, mely kisebbiknek mondatik.





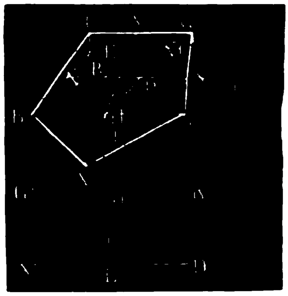
Mert minthogy *WX* a hatszeg, *XZ* a tízszeg oldala, tehát *WZ X*-nél szélső és középső arányban van vágva, és *WX* a nagyobbik darabja: a mint tehát *ZW WX*-hez, úgy van *WX XZ*-hez. De *WX WL*-lel, *XZ WY*-nal egyenlők; tehát a mint *ZW WL*-hez, úgy van *LW WY*-hoz. Már pedig a *ZWL LWY* alatti szegletek derékek, ha tehát *LZ* egyent vonjuk, az *YLZ* alatti szeglet az *YLW WLZ* háromszegek hasonlóságánál fogva derék; az *YZ*-re irott félkör tehát L-en is átmegy. Ugyanazért mivel a mint *ZW WX*-hez, úgy van *WX XZ*-hez, *ZW* pedig *YX*-el, *WX XQ*-val egyenlők: tehát a mint *YX XQ*-hoz, úgy van *QX XZ*-hez. És azért ismét, ha *QY*-t vonjuk, a Q-nál való szeglet derék lesz; az YZ-re irt félkör tehát Q-n is átmegy. És ha az YZ helytmaradtával keringő félkör ismét oda visszakerül, a honnan elindult: L-en és a húszlapu többi pontain is átmegy, s a húszlapu tely tekébe lesz foglalva. Azt mondom: hogy az adottba. Mert vágassék ketté WX a-nál. Már minthogy ZW egyenesvonal X-nél szélső és középső arányban van vágva, s a kisebbik darabja ZX: tehát a ZX a nagyobbik darab felével Xa-val megtoldva öt akkora emeletü, mint a nagyobbik darab fele; a Za négyszege tehát öt akkora mint az aX-é. És aZ-nek a kettőzete ZY, és aX-nek a kettőzete XW; a ZY négyszege tehát öt akkora mint a WX-é. És minthogy AC négy akkora mint CB: tehát AB öt akkora mint BC. De a mint AB BC-hez, úgy van az AB négyszege a BD-éhez; az AB négyszege tehát öt akkora mint a BD-é. Megmutattaték pedig hogy a ZY négyszege is öt akkora mint a WX-é, és DB egyenlő WX-el, mert mindenikök egyenlő az $EFGHK$ kör középponti egyenével; tehát AB YZ-vel egyenlő. Már pedig AB az adott teke átmérője; YZ is tehát egyenlő az adott teke átmérőjével; a húszlapu tely tehát az adott tekével van körül fogva.

Még azt mondom, hogy a húszlapu oly nevetlen egyen, mely kisebbiknek mondatik. Mert minthogy a teke átmérője neves, és ötakkora emeletü, mint az $EFGHK$ kör középponti egyene: tehát az $EFGHK$ kör középponti egyene is neves, úgy hogy ennek átmérője is neves. Már pedig ha neves átmérőü körbe egyenlőoldalu ötszeg iratik, az ötszeg oldala oly nevetlen egyen, mely kisebbiknek mondatik. De az $EFGHK$ ötszeg-oldala a húszlapué is; a húszlapu tely oldala tehát oly nevetlen egyen, mely kisebbiknek mondatik: m. b. kelle.

Tanuság: Ezekből világos, hogy a teke átmérője ötakkora emeletü, mint a középponti egyene annak a körnek melyről a húszlapu iratott, és hogy a teke átmérője az azon körbe irt hatszegnek egy és a tízszegnek két oldalaikból áll.

17. Feladat:

Tizenkétlapu telyet kell összeállítni, és körülfogni azon tekével, melylyel az előbbi képleteket, és megmutatni, hogy a tizenkétlapu oldala oly nevetlen egyen, mely vágacsnak mondatik.



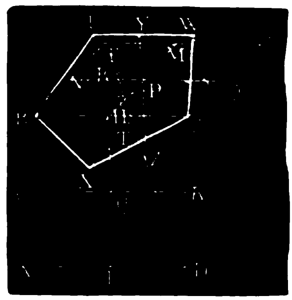
Vétessék a fölebb mondott köbnek két egymásra függő *ABCD CBEF* lapja, és vágassék ketté *AB BC CD DA EF EB FC* oldalak mindenike *G H K L M N O* pontoknál; vonassanak *GK HL MH NO*, vágassék *NP PO HQ* egyenek mindenike *R S T* pontoknál szélső és középső arányban, és legyenek a nagyobbik darabjaik *RP PS TQ*, állítassanak *R S T* pontokba a köb lapjaihoz derékszegletre a köbtől kifelé *RU SW TX*, tétessenek ezek *RP*-vel *PS*-sel *TQ*-val egyenlőkké, és vonassanak *UB BX XC CW WU* egyenek: azt mondom, hogy *UBXCW* ötszeg egyenlőoldalu, és egy lapban van, és hogy egyenlőszegletű is. Mert vonassanak *RB SB WB*. És minthogy *NP* egyen szélső és középső arányban van vágva *R*-nél, s a nagyobbik darabja *PR*: tehát a *PN NR* négyszegeik három akkorák, mint az *RP*-é. De *PN* egyenlő *NB*-vel, *PR* pedig *RU*-val; a *BN NR* négyszegeik tehát három akkorát tesznek mint az *RU*-é. De a *BN NR*-éikkel egyenlő a *BR*-é, tehát a *BR*-é három akkora mint az *RU*-é; úgy hogy a *BR RU* négyszegeik négy akkorát tesznek mint az *RU*-é. De a *BR RU* négyszegeikkel egyenlő a *BU*-é; a *BU*-é tehát négy akkora, mint az *UR*-é; tehát *BU* két akkora, mint *UR*; *WU* is pedig két akkora mint *UR*, mivelhogy *RS* is *RP*-nek azaz *RU*-nak kettőzete; *BU* tehát *UW*-vel egyenlő. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy *BX XC CW* egyeneknek is mindenike mind *BU*-val mind *UW*-vel egyenlő; *BUWCX* ötszeg tehát egyenlőoldalu. Azt mondom, hogy egy lapban is van. Mert állítassék *P*-be a körtől kifelé mind *RU*-hoz mind *SW*-hez egyközü *PY*, és vonassanak YH, HX: azt mondom, hogy YHX egyenes vonal. Mert minthogy HQ szélső és középső arányban van vágva T-nél, s a nagyobbik darabja QT: tehát a mint HQ QT-hez, úgy van QT TH-hoz. De QH HP-vel, QT pedig akár TX-el akár PY-nal egyenlő; tehát a mint HP PY-hoz, úgy van XT TH-hoz. De HP TX-hez egyközü, mert mindenikök függő BD egyenre; TH is egyközü PY-hoz, mert mindenikök BF egyenre függő. Már ha két háromszeg, melyekben két oldal két oldallal egyarányu, mint YPH HTX, egyik-egyik szegletöknél úgy tétetnek össze, hogy a hasonnevü oldalak a hasonnevü oldalakhoz egyközüek is legyenek, a többi egyeneik egyenesben lesznek; YH tehát HX-el egyenesben van. De minden egyen egy lapban van. Tehát $UBXCW$ ötszeg egy lapban van.

Azt mondom hogy egyenlő szegletü is.

Mert mivel NP egyenes vonal R-nél szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja PR: tehát a mint NP meg PR együtt PN-hez, úgy van NP PR-hez. De RP egyenlő PS-sel; tehát a mint SN NP-hez, úgy NP PS-hez; NS tehát P-nél szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja NP; az NS SP négyszegeik tehát három akkorát tesznek, mint a PN-é. Már PN NB-vel, PS SW-vel egyenlők; az NS SW négyszegeik tehát három akkorát tesznek mint az NB-é, úgy hogy a WS SN NB négyszegeik négy-akkorát tesznek mint az NB-é. Az SN NB négyszegeikkel pedig a BS-é egyenlő; a BS SW négyszegeik tehát, azaz a BW-é (mert a WSB alatti szeglet derék), négy akkorát tesznek mint az NB-é. WB tehát két akkora mint BN. De BC is két akkora mint BN; tehát WB egyenlő BC-vel. És minthogy BU UW két oldal BX XC két oldallal egyenlő, és WB talp is egyenlő BC talppal, tehát a BUW alatti szeglet a BXC alattival egyenlő. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy az UWC alatti szeglet is egyenlő a BXC alattival; a BXC BUW UWC alatti három szeglet tehát egymással egyenlő. Már pedig ha egyenlőoldalu ötszegnek három szeglete egyenlő egymással, az ötszeg egyenlőszegletü; $BUWCX$ ötszeg tehát egyenlőszegletü. De megmutattuk, hogy egyenlőoldalu is; $BUWCX$ ötszeg tehát egyenlőoldalu és egyenlőszegletü, és a köb egyik oldalára BC-re van helyezve. Ha tehát a köb tizenkét oldalának mindenikére ugyanazokat készítjük, össze lesz állítva egy tizenkét egyenlőoldalu s egyenlőszegletü ötszegtől kerített telyképlet, mely tizenkétlapunak hivatik.

Körül is kell ezt fogni az adott tekével, és megmutatni hogy a tizenkétlapu tely oldala oly nevetlen egyen, mely vágacsnak mondatik.

Mert nyujtassék ki YP, és legyen az PZ; tehát PZ találkozik a köb átmérőjével, és egymást ketté vágják. Vágják Z-nél; Z tehát a köböt körülfogó teke középpontja, és PZ a köb oldala fele. Vonassék UZ. Minthogy NS egyenes vonal P-nél szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja NP: tehát az NS SP négyszegeik három akkorát tesznek, mint az NP-é. De NS egyenlő YZ-vel, mivelhogy NP PZ-vel, és YP PS-sel egyenlők; de PS is YU-val egyenlő minthogy RP is az; tehát a ZY YU négyszegeik három akkorát tesznek mint az NP-é. A ZY YU négyszegeikkel pedig egyenlő az UZ-é; az UZ négyszege tehát három akkora min az NP-é. Már a köböt körülfogó teke középponti egyene háromakkora emeletü, mint a köb oldala fele, (mert meg van mutatva fölebb a köb összeállítása, s tekével körülfogása, és az, hogy a teke átmérője háromakkora emeletü mint a köb oldala). De a mint az egész az egészhez, úgy a fél is a félhez, és NP a köb oldala fele; UZ tehát a köböt körülfogó teke középponti egyenével egyenlő. Már pedig Z a köböt körülfogó teke középpontja; U pont tehát a teke külszinén van. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy a tizenkétlapu tely többi szegletei is mind a teke felszinén vannak; a tizenkétlapu tehát az adott tekével van körülfogva.



Még azt mondom, hogy a tizenkétlapu oldala oly nevetlen egyen, mely vágacsnak mondatik. Mert minthogy NP szélső és középső arányban levén vágva, a nagyobbik darabja

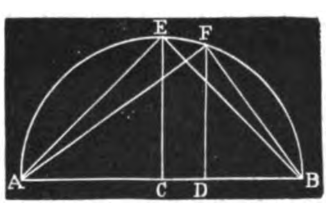
RP; *PO* megint szélső és középső arányban levén vágva, a nagyobbik darabja *PS*: tehát az egész *NO* szélső és középső arányban levén vágva, a nagyobbik darabja *RS*. (T. i. mivel a mint *NP PR*-hez úgy van *PR RN*-hez, s úgy a kettőzeteik is; mert a részek az egyenlő sokasaikkal egyarányuak; tehát a mint *NO RS*-hez, úgy van *RS* az együvé vett *NR* meg *SO*-hoz. De *NO* nagyobb *RS* nél, nagyobb tehát *RS* is az összevett *NR* meg *SO*-nál; tehát *NO* szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja *RS*). Már pedig *RS UW*-vel egyenlő; *NO* tehát szélső és középső arányban levén vágva, a nagyobbik darabja *UW*. És minthogy a teke átmérője neves egyen, és három akkora emeletü mint a köb oldala: tehát *NO*, a köb oldala, neves. Ha pedig neves egyen szélső és középső arányban van vágva, a darabok mindenike oly nevetlen egyen, mely vágacsnak mondatik.

UW tehát, a tizenkétlapu tely oldala, oly nevetlen egyen, mely vágacsnak mondatik: m. b. k.

Tanuság: Ebből világos, hogy a köb oldalát szélső és középső arányban vágván, a nagyobbik darab a tizenkétlapu oldala lesz.

18. Feladat:

Az öt képlet oldalait kimérni, s összehasonlítni.

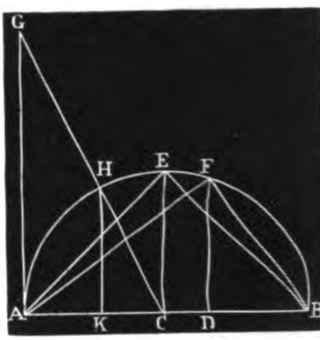


Vétessék az adott teke átmérője *AB*, és vágassék *C*-nél úgy, hogy *AC* egyenlő legyen *CB*-vel, *D*-nél pedig úgy, hogy *AD* két akkora legyen, mint *DB*, irassék *AB*-re *AEB* félkör, bocsátassanak *C*-ből *D*-ből *AB*-hez derékszegletre *CE DF* egyenek, és vynassanak *AF FB AE EB*. Már minthogy *AD* két akkora mint *DB*, tehát *AB* háromakkora mint *BD*; átfordítva tehát *BA* másfél akkora mint *AD*. De a mint *BA AD*-hez, úgy van a *BA* négyszege az

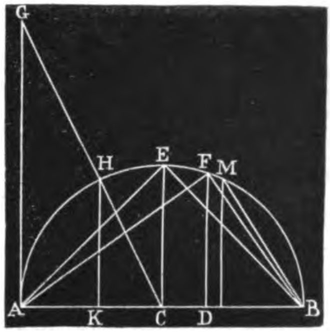
AF-éhez; mert *AFB* háromszeg *AFD* háromszeggel egyenlő szegletű; a *BA* négyszege tehát másfél akkora mint az *AF*-é. Már pedig a teke átmérője másfél akkora emeletű, mint a gúla oldala, és *AB* a teke átmérője; *AF* tehát a gúla oldalával egyenlő.

Ismét, minthogy *AD* két akkora mint *DB*, tehát *AB* három akkora mint *BD*. De a mint *AB BD*-hez, úgy van az *AB* négyszege a *BF*-éhez; tehát az *AB* négyszege három akkora mint a *BF*-é. Már pedig a teke átmérője is három akkora emeletű mint a köb oldala. És *AB* a teke átmérője, *BF* tehát a köb oldala.

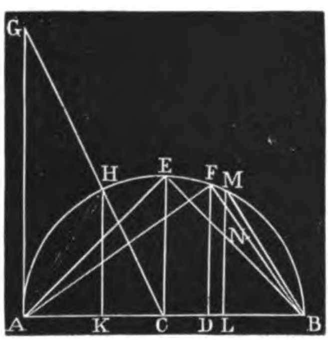
És minthogy *AC* egyenlő *CB*-vel, tehát *AB* két akkora mint *BC*. De a mint *AB BC*-hez, úgy van az *AB* négyszege a *BE*-éhez, az *AB*-é tehát két akkora mint a *BE*-é. Már pedig a teke átmérője is két akkora emeletű mint a nyolczlapu tely oldala, és *AB* az adott teke átmérője; *BE* tehát a nyolczlapu oldala.



Már húzassék *A* pontból *AB* egyenhez derékszegletre *AG*, és tétessék *AG AB*-vel egyenlővé, és vonassék *GC*, és bocsátassék *H*-ból *AB*-re *HK* függő. És minthogy *GA* kétakkora mint *AC*, (mert *GA AB*-vel egyenlő); de a mint *GA AC*-hez, úgy van *HK KC*-hez: tehát *HK* is két akkora mint *KC*; tehát a *HK* négyszege négy akkora mint a *KC*-é; a *HK KC* négyszegeik tehát, azaz a *HC*-é ötakkora mint a *KC*-é. De *HC* egyenlő *CB*-vel; a *BC* négyszege tehát ötakkora mint a *CK*-é. És minthogy *AB* két akkora mint *BC*, miből *AD* két akkora mint *DB*; tehát a maradék *BD* két akkora, mint a maradék *DC*; *BC* tehát három akkora mint *CD*; tehát a *BC* négyszege kilencz akkora, mint a *CD*-é. De a *BC* négyszege öt akkora mint a *CK*-é, tehát a *CK*-é nagyobb a *CD*-énél, nagyobb tehát *CK* is *CD*-nél. Vétessék *CK*-val egyenlő *CL*, és



emeltessék L-ből AB-hez derékszegletre LM egyen, és vonassék MB. És minthogy a BC négyszege öt akkora, mint a CK-é, s BC-nek a kettőzete AB, CK-nak a kettőzete pedig KL, tehát az AB négyszege öt akkora mint a KL-é. De a teke átmérője is ötakkora emeletű mint annak a körnek középponti egyene, melyről a húszlapu tely iratott. Már pedig AB a teke átmérője; KL tehát annak a körnek középponti egyene, melyről a húszlapu iratott; tehát KL a mondott körbeli hatszeg oldala. És minthogy a teke átmérője a mondott körbe irt hatszegnek egy, és a tízszegnek két oldalaiból áll, és AB a teke átmérője, KL pedig a hatszeg oldala, és AK egyenlő LB-vel: tehát mind AK mind LB a tízszeg oldala, még pedig azon körbe irotté, melyről a húszlapu készítetett. És minthogy LB a tízszeg oldala, ML pedig a hatszegé, mert egyenlő KL-lel, mivel HK-val is az, mert egyenlő távulságra vannak a középponttól, és mind HK mind KL két akkorák mint KC: tehát MB az ötszeg oldala. De az ötszeg oldala a húszlapué is MB tehát a húszlapu oldala.



És minthogy FB a köb oldala, vágassék szélső és középső arányban N-nél, s legyen a nagyobbik darab NB, tehát NB a tizenkétlapu oldala.

És mivel meg van mutatva, hogy a teke átmérője másfél akkora emeletű, mint a gúla oldala AF, megint két akkora emeletű mint a nyolczlapu oldala BE, és ugyancsak három akkora emeletű mint a köb oldala FB: tehát a mekkora darabokból a teke átmérője hatból áll, olyanokból a gúla oldala négyet, a nyolczlapué hármat, a köbé kettőt foglal; a gúla oldala tehát egy és egyharmad akkora emeletű mint a nyolczlapué, és két akkora emeletű mint a köbé; a nyolczlapu oldala pedig másfél akkora emeletű, mint a köbé. A mondott képletek oldalai, ú. m. a gúláé, a nyolczlapué, s a köbé, neves arányban vannak egymáshoz; a más kettő pedig, ú. m. a húszlapué és a tizenkétlapué, sem egymáshoz sem az előbb mondottakhoz nincsenek neves arányban, mert nevetlen egyenek, még pedig az *kisebbik*, ez *vágacs*.

Hogy pedig a húszlapu oldala, *MB*, a tizenkétlapu oldalánál, *NB*-nél, nagyobb, így mutatjuk meg:

Mert mivel *FDB* háromszeg *FAB* háromszeggel egyenlő szegletű, tehát egyarányban a mint *DB BF*-hez, úgy van *FB BA*-hoz. És minthogy három egyen egyarányban van, a mint az első a harmadikhoz, úgy van az első négyszege a másodikéhoz; tehát a mint *DB BA*-hoz, úgy van a *DB* négyszege a *BF*-éhez: visszálva tehát a mint *AB BD*-hez, úgy az *FB* négyszege a *BD*-éhez. De *AB* három akkora, mint *BD*; három akkora tehát az *FB* négyszege is, mint a *BD*-é. De az *AD* négyszege négy akkora mint a *BD*-é, mert *AD* két akkora, mint *DB*; az *AD* négyszege tehát nagyobb az *FB*-énél, nagyobb tehát *AD* is *FB*-nél; még annálinkább nagyobb tehát *AL FB*-nél. És *AL* szélső és középső arányban levén vágva, a nagyobbik darabja *KL*, mivelhogy *LK* a hatszeg, és *KA* a tízszeg oldala; *FB* is szélső és középső arányban levén vágva, a nagyobbik darabja *NB*; *KL* tehát nagyobb *NB*-nél. De *KL* egyenlő *LM*-mel; *LM* tehát nagyobb *NB*-nél. *LM*-nél pedig *MB* nagyobb; annálinkább nagyobb tehát *MB*, a húszlapu oldala, *NB*-nél, a tizenkétlapu oldalánál.

Jegyzés.

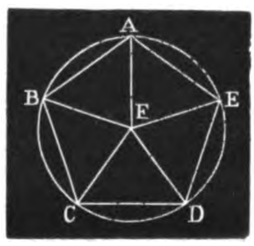
Azt mondom, hogy a mondott öt képleten kivül, nem lehet egyenlőoldalu s egyenlőszegletű, egymással egyenlő lapoktól kerített más képletet alkotni.

Mert két háromszegből, sem más két lapból, nem állíthatni össze tely szegletet. Három háromszegből a gúláé, négyből a nyolczlapué, és ötből a húszlapué áll; egyenlőoldalu s egyenlőszegletü egy ponthoz állitott hat háromszegből pedig nem lesz telyszeglet, mert az egyenlőoldalu háromszeg szeglete egy deréknek két harmada levén, a hat, négy derékkel egyenlő lesz; mi lehetetlen; mert minden telyszegletet négy deréknél kevesebb szegletlap kerít. Ugyanazért nem is állíthatni össze telyszegletet hat szegletlapnál többől. Három négyszegből megint a köb szeglete áll; négyből pedig nem állhat, mert ismét négy derék lenne. Egyenlőoldalu egyenlőszegletü ötszegből pedig, háromból a tizenkétlapué áll; de négyből eh etetlen, mert az egyenlőoldalu ötszeg szeglete egy derékből s egy ötödből állván, a négy szeglet négy deréknél többre menne, mi lehetetlen. Más alaku sokszegek sem keríthetnek telyszegletet, mivel az is képtelen dolog.

A mondott öt képleten kivül tehát egyenlőoldalu s egyenlőszegletü lapoktól kerített más telyképletet nem lehet összeállítni: m. b. k.

F e l v é t e l.

Hogy pedig az egyenlőoldalu s egyenlőszegletü ötszeg szeglete egy derék és egy ötöd, így kell megmutatni:



Mert legyen egyenlőoldalu s egyenlőszegletü *ABCDE* ötszeg, és írassék körüle *ABCDE* kör, és vétessék ennek *F* középpontja, és vonassanak *FA FB FC FD FE*; ezek tehát ketté vágják az ötszeg *A B C D E* pontoknál levő szegleteit. És minthogy az *F*-nél való öt szeglet négy derékkel egyenlő, és (egymással) egyenlők: tehát egyik közzülök, mint az *AFB* alatti, egy deréket teszen egy ötöd hijján; tehát a más kettő, az *FAB* meg *ABF* alatti egy deréket meg egy ötöd részt teszen. De az *FAB* alatti egyenlő az *FBC* alattival; az *ABC* alatti tehát, ú. m. az ötszeg egész szeglete, egy deréket meg egy ötödöt teszen: m. b. k.

ALGEBRAI VILÁGOSÍTÁSOK

Euklides XIII. könyvéhez.

A XIII. könyvbeli feladatok bizonyítmányai a X-dikéin alapulnak. E feladatok ugyanis az öt szabályos tely éleinek egymáshoz és a körülök irható teke átmérőjéhez való számviszonyait tárgyalják. Azon okok hát, melyek a korunkbel tanulóra nézve a X. könyv feladatai s bizonyítmányai algebrai világosítását igénylik, a XIII-dikéinak is hasonló jelmezbe öltöztetését sürgetik. Ennél fogva igyekszünk ennek az igénynek is eleget tenni. Jeleléseink és egész eljárásunk modora természetesen a korábbihoz van szabva.

1. *Feladat.* — Egy egyen algebrai képe: am. Az egyent szélső és középső arányban vágva, s a nagyobbik részt an-nel jelelve, lesz

$$am : an = an : (am - an), \text{ azaz:}$$
$$m : n = n : m - n.$$

Tehát $$n^2 = m^2 - mn.$$

Az egész egyen felével toldott nagyobbik rész képe $an + \frac{am}{2}$. Négyszegéé $a^2\left(n + \frac{m}{2}\right)^2$.

Kibontva: $a^2\left(n^2 + mn + \frac{m^2}{4}\right) = a^2\left(m^2 - mn + mn + \frac{m^2}{4}\right) = a^2\left(m^2 + \frac{m^2}{4}\right) = 5a^2\frac{m^2}{4} = 5\left(\frac{am}{2}\right)^2$. A jelelt négyszeg tehát öt akkora, mint a fél egyen négyszege.

2. *F.* — Ha az egész vonal képe am, s az egyik darabjáé an; a másik darabjáé $a(m-n)$ lesz. A feltét szerint: $(am)^2 = 5(an)^2$, azaz $m^2 = 5n^2$. Az első darab kettőzete: $2an$, melyet szélső és középső arányban vágottnak gondolva, tegyük a na-

gyobbik darabot ax-nek; ennél fogva a kisebbiket $2an-ax$ jeleli. Tehát $a^2x^2=2an(2an-ax)$, azaz: $x^2=4n^2-2nx$. Ebből szokott módon: $(x+n)^2=5n^2=m^2$ (a feltét szerint; tehát $x+$ $+n=m$, vagyis $x=m-n$, és $ax=a(m-n)$. Úgyde ax-el az eredeti egyen egyik darabja kettőzetének középarányu darabját jelelök, mely hát egyenlő $a(m-n)$-el, az eredeti egyen másik darabjával.

3. *F.* — Az egyen és darabjai képét viseljék illetőleg: am, an és $a(m-n)$. E szerint $a^2(m(m-n)) = a^2n^2$, vagyis: $m(m-n)=n^2$. A kisebbik darab és a nagyobbiknak fele együtt algebrai képben: $a\left((m-n)+\frac{n}{2}\right)$. Négyszege a kéttaguak törvényei szerint $a^2\left((m-n)^2+(m-n)n+\frac{n^2}{4}\right)$. Tovább bontva és $m(m-n)$ helyett n^2-t téve lesz:

$$=a^2\left[n^2+\frac{n^2}{4}\right]=5\left(\frac{an}{2}\right)^2.$$

4. *F.* — Megint az iménti módon jelelve, az egész egyen képe: am, kisebbik darabjáé: $a(m-n)$. Négyszegeik öszvege $a^2(m^2+(m-n)^2)=a^2(2m^2-2mn+n^2)=a^2(2m(m-mn)+n^2)$; és mivel $m(m-n)=n^2$, imezt helyettesítve lesz: $a^2(2n^2+n^2)$ $=3(an)^2$.

5. *F.* — Minthogy $am : an = an : a(m-n)$; tehát viszszálva : $an : am = a(m-n) : an$; összetéve $(am+an) : am =$ $[a(m-n)+an] : an$. Úgyde $a(m-n)+am=am$; imezt helyettesítve tehát $(am+an) : am = am : an$; azaz, az eredeti egyen középegyarányu a nagyobbik darabjával megtoldott egyen és az eredeti egyen nagyobb darabja közt.

Jegyzés: Euklides valamikori scholiastája az imént tárgyalt öt feladatra a szöveg alatt (563—571 lapokon) olvasható commentart adá, melynek kelméje geometriai ugyan, de iránya és czélja logikai módszerek ismertetése. Az *analysist* és *synthesist* értelmezi magyarázónk az ó kor felfogása szerint, s az idézett öt feladat mindkét módon szerkesztett bizonyítmányaival világosítja a felvett két fogalmat. Alkalmazása algebrai képekbe öltöztetve, még, ha lehet, derültebb világot vet az ügyre. Legott kimutatjuk, megjegyezvén, hogy rövidség és egyszerüség kedvéért az egyeneket csak egy-egy betüvel jeleljük.

1. *Feladat.* — Legyen $AB=a$, $AC=c$, $BC=a-c$, $AD=\frac{a}{2}$. Az állítás az, hogy ha $a:c=c+a-c$; úgy $\left(c+\frac{a}{2}\right)^2=5\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Analysis. Reáfogjuk hogy igaz a következmény, azaz, hogy $\left(c+\frac{a}{2}\right)^2=5\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Igaz levén ez az egyenlet, igaz kibontva is: $c^2+ac+\frac{a^2}{4}=5\frac{a^2}{4}$. Mind a két részről $\frac{a^2}{4}$-t levonva, lesz $c^2+ac=4\frac{a^2}{4}=a^2$. De a feladat feltéte szerint: $c^2=a^2-ac$, s ezt az értékét téve c^2 helyett az iménti egyenletbe, lesz: $a^2-ac+ac=a^2$, mely is azonos egyenlet és világosan igaz.

A keresett igazságot hát megadottnak véve, hibátlan következtetéseken át, elismert söt kétségtelen igazságra bukkantunk, s a végkövetkezmény erejénél fogva az alapot is, melyre épitettünk, szilárdnak itéljük.

Synthesis. Most már egy szembetünö világos igazságot, egy azonos egyenletet veszünk alapul. Legyen ez: $a=2.\frac{a}{2}$; tehát: $a^2=4.\frac{a^2}{4}$. Ebböl, és egy más azonos egyenletböl: $a^2-ac+ac=a^2$ következik, hogy $a(a-c)+ac=4.\frac{a^2}{4}$. Már a feladat feltéte szerint $a(a-c)=c^2$; és azonosan igaz, hogy $ac=2.\frac{a}{2}c$, s mindkettöt az elöbbi egyenletbe helyettesitvén, meg $\frac{a^2}{4}$.et mind a két felöl hozzáadván, lesz: $c^2+2.\frac{a}{2}.c+\frac{a^2}{4}=5\frac{a^2}{4}$; vagyis $\left(c+\frac{a}{2}\right)^2=5\left(\frac{a}{2}\right)^2$, mely egyenlet a keresett igazság algebrai képe.

2. *F.* — Legyen $CD=a$, $AD=c$, $AC=a-c$, $AB=2c$; tehát BD, azaz $AB+AD=3c$, és $BC=BD-CD=3c-a$. Az állítás az, hogy $2c : a-c=a-c : 3c-a$.

Analysis. Reáfogva, hogy igaz az állítás, következnek egymás után:

$$(a-c)^2=2c(3c-a);$$
$$a^2-2ac+c^2=6c^2-2ac;$$
$$a^2+c^2=5c^2+c^2, \text{ azaz : } a^2=5c^2.$$

És a legutolsó igaz is, mert a feladat alap-feltéte.

Synthesis. A feladat feltéte : $a^2=5c^2$. Minthogy c a-nak egy része, $a=c+(a-c)$. Ezekből következnek :

$$a^2=[c+(a-c)]^2=5c^2;$$
$$c^2+2c(a-c)+(a-c)^2=5c^2;$$
$$2c(a-c)+(a-c)^2=4c^2=(2c)^2;$$
$$(a-c)^2=(2c)^2-2c(a-c)=2c(2c-[a-c]);$$
$$(a-c)^2=2c(3c-a);$$

Miből a fölebbi egyarány egyenesen következik.

3. *F.* — $AB=a$, $AC=c$, $BC=a-c$, $CD=\frac{c}{2}$; tehát $BD=(a-c)+\frac{c}{2}$. Az állítás az, hogy $\left(a-c+\frac{c}{2}\right)^2=5\left(\frac{c}{2}\right)^2$

Analysis. Legyen igaz az állítás, tehát :

$$\left(a-\frac{c}{2}\right)^2=5\left(\frac{c}{2}\right)^2;$$
$$a^2-ac+\frac{c^2}{4}=5.\frac{c^2}{4};$$
$$a^2-ac=4.\frac{c^2}{4}, \text{azaz } c^2=c^2; \text{ mi világos.}$$

Synthesis. Világos igaz, hogy $c=2.\frac{c}{2}$; tehát

$$c^2=4.\frac{c^2}{4}=4\left(\frac{c}{2}\right)^2;$$
$$c^2=a(a-c)=4\left(\frac{c}{2}\right)^2;$$
$$a^2-ac+\frac{c^2}{4}=5.\frac{c^2}{4};$$
$$\left(a-\frac{c}{2}\right)^2=\left(a-c+\frac{c}{2}\right)^2=5\left(\frac{c}{2}\right)^2; \text{ és ez az állítás.}$$

4. *F.* — $AB=a$, $AC=c$, $BC=a-c$. Az állítás az, hogy az egész egyen négyszege a kisebb darabjáéval együtt 3 akkorát tesz, mint a nagyobb darab négyszege.

Analysis. Az állítást igaznak véve fel:

$a^2+(a-c)^2=3c^2$;

$2a^2-2ac+c^2=3c^2$;

$2a(a-c)=3c^2-c^2$;

$2a(a-c)=2c^2$;

$a(a-c)=c^2$; és ez igaz, mert az egyen szélső és középső arányban van vágva.

Synthesis. A feladat feltéténél fogva:

$a(a-c)=c^2$;

$2a(a-c)=2c^2$;

$2a(a-c)+c^2=3c^2$;

$a^2+a^2-2ac+c^2=a^2+(a-c)^2=3c^2$; mi is az állítás.

5 F. — Legyen $AB=a$, $AC=c$, $BC=a-c$. Az állítás az hogy $AB+AC$, mint *egy* vonal, szélső és középső arányban van vágva, s a nagyobbik darabja az eredeti AB.

Analysis. Legyen igaz a feladatbeli állítás, mely szerint:

$a+c : a=a : c$; következnek:

$a+c : (a+c)-a=a : a-c$;

$a+c : c=a : a-c$;

$a+c-c : c=a-(a-c) : a-c$;

$a : c=c : a-c$; igaz, mert AB egyen a feltét szerint szélső s középső arányban van vágva.

Synthesis. A feltét szerint: $a : c=c : a-c$; tehát továbbá:

$a+c : c=c+(a-c) : a-c$;

$a+c : c=a : a-c$;

$a+c : (a+c)-c=a : a-(a-c)$;

$a+c : a=a : c$; és ez az állítás.

Ha nem akartuk volna híven kisérni minden léptét a scholiastának, megejthettük volna egy pár egyenlettel az analysist szintúgy mint a synthesist, imígy: 1. Az állítás az, hogy $a^2=ac+c^2$; tehát $a^2-ac=a(a-c)=c^2$. Úgyde ez a feladat feltéte; tehát elismert igazság. 2. Megfordítva, ha imezt veszszük alapul, ebből: $c^2=a(a-c)=a^2-ac$, legott következik, hogy $c^2+ac=c(a+c)=a^2$, mi is csak úgy lehet, ha az állítás szerint $a+c : a=a : c$.

Most már húzzunk egy pár tanuságot is a tárgyaltakból. A követett eljárást megfontolva, világossá lesz előttünk, hogy az okoskodás, a következtetés módja mind az analysisben, mind a synthesisben azon az, és az egyikben nem fejtegetőbb, nem elemzőbb, de nem is összetevőbb, vagy szerkesztőbb, mint a másikban; ennélfogva a következtetésbeli eljárás a két módszer közt különböztető jegyeket nem nyujtván, nem is jogosít az analysist netalán *bonczolgatás*nak, *fejtegetés*nek vagy *elemzés*nek, a synthesist ellenben *összerakás*nak, *alkotás*nak vagy *építgetés*nek neveznünk. A különbség a kettő közt csupán csak a kiinduló és a végpont helyzetében áll. Minden feladat (propositio) t. i. *feltét*ből és *állítmány*ból, más szókkal: *előzmény*ből és *következmény*ből állván, a syntheticus eljárás az előzményt, vagy ezzel kapcsolatban levő más világos igazságok valamelyikét teszi kiinduló, a következményt végponttá; holott az analyticus tárgyalás a következményből indul ki, s az előzményen, vagy erre vonatkozó valamely elismert igazságon végzi. De mivel analysis szószerint csakugyan *fejtést*, *bontást*, teszen, synthesis pedig *szerkesztést*, *alkotást*: kérdés, hogy hát a kezdő és végpont felcserélése mimódon adhatott okot azokra a nevezetekre? Hinnivaló úgy, hogy midőn a következménynyel, mint feltett igazsággal kezdjük vizsgálatunkat, imennek tárgya és czélja egyéb nem lehet, mint az előzmény és következmény közti kapcsolat kitanulása, mert hiszen azokat már mindkettőjöket tudjuk. De az által hogy a viszonyt köztük kipuhatoljuk, lánczolatuk szemeit megszámláljuk, ismeretünk tára semmi új igazsággal nem gazdagul. Csak azt a kapcsolatot nézte hát a hajdani dialecticus *feloldani*, *felfejteni* való *bog*nak, s az eljárást annál fogva *analysis*nek. De midőn az előzményből, a feladat ismert feltétéből indulunk ki, lehet hogy nem tudjuk, söt a dolog természete szerint nem kell hogy tudjuk a következményt, az állítmányt. Nem csak ez maga hát, hanem olykor minden lépés, melyet az előzménytől indulva okoskodásunk sorába feléje tettünk, nyeremény, új igazság, melylyel ismereteink száma szaporodik, és e szerint ily sikerrel koronázott vizsgálodásunk, nyomozásunk a *synthesis* nevet megérdemli. Látnivaló ezekből, hogy az elnevezések e vonatkozása nem az eljárást magát illeti, hanem csak külviszonyban van vele; holott ma analysisen és synthesisen — kivevén mathesisbeli mai alkalmazásunkat, miről alább, — éppen azt a módszert, azt az eljárást értjük, a mit neveik szószerinti jelentése hoz magával, de a melyeknek bévett vagy veendő magyar kitételeit a scholiasta homonymei tolmácslására éppen azért nem használhattam. A jelen alkalomra felvett *kutatás* (analysis) és *nyomozás* (synthesis), éppen helyesek-é, nem merném állítani; de legalább nem keltenek ferde fogalmakat, s ez műszónak a legelső és legfőbb kelléke.

A scholiasta értelmezéseit s alkalmazásait megfontolva, arra az ötletre jöhetne valaki, hogy a mathesisnek netalán más logikája van, mint más tudományoknak. Az itt tárgyalt analysisben ugyanis a következmény igaz voltából következtetjük az előzmény igaz voltát, mely nemét a következtetésnek nem ismerik el helyesnek a logika tankönyvei. De bizony logika csak *egy* van, s egyaránt érőt ér minden tudományban, mely ezt a nevet megérdemli. Hanem hogy tankönyveiben éppen mindenütt és mindenben logikai volna az eléadás, azt a legjobb akarattal sem állíthatni. Példája mindjárt az érintett szabály, mely szerint a következmény igazságáról nem lehetne következtetni az előzmény igazságára. De igen biz azt, valahányszor a két itélet oly kölcsönös viszonyban áll egymással, hogy akármelyikök lehet előzménye a másiknak mint következménynek: röviden mondhatni, midőn a feltételes itélet megfordítható. Ez a viszony pedig ama példákban mindenütt megvan, nem csak a feladatok illető feltételei s állítmányai, hanem az őket páronkint összekapcsoló itéletek közt is. Innen van, hogy az okoskodás lánczolatát képző itéletek, azaz egyenletek, a feladat analysisében ugyanazok a mik a synthesisében, csak hogy ebben megfordított renddel vannak, mint amabban. Valahányszor ez a viszony áll bé a hypotheticus itélet elő- és utótagja közt, valahányszor hát előzmény s reávonatkozó következmény szerepet cserélhetnek: minden ily esetben akár a mathesisben, akár más tudományokban, sőt a közéletben is, érvényesen és teljes joggal következtethetünk a következmény igaz voltából az előzmény igazságára.

Még ád alkalmat egy tanuságra scholiastánk magyarázó jegyzete. Mihelyt mathematikai tárgyak körül emlegetik a szóban forgó két szót, legott egy sajátságos értelmet váltanak. Synthesisnek nevezik t. i. midőn a geometriai viszonyokat *vonalak* s ezekből szerkesztett *figurák* által tárgyalják; analysisnek ellenben, ha ezt a tárgyalást algebrai symbolumokkal viszik véghez. Látnivaló, hogy ezek az így alkalmazott fogalmak az analysisnek és synthesisnek sem ó sem újkori értelmezésével sehogy sem vágnak össze. Nem is vághatnak; mert a két nevezetnek ez az új alkalmazása csupa félreértés. Egy felől az Euklides elemeibeli bizonyítások mindnyájan az ókori synthesis modorában vannak szerkesztve. Mindenik már azelőtt elismert igazságokon kezdődik, s az illető feladat állítmányán végződik. Az eszmetársulat hatalmas törvényénél fogva a két vonás összeolvadt, s a mai mathesisi nyelven a vonalas, képzeltető geometriai előadás a synthesis nevét annyira elsajátította, hogy a bitorlás a hosszas használatnál fogva már megválthatatlan birtoki joggá vált. Hiába mondjuk, hogy Euklides minden bizonyítmányát át lehet, geometriai jellemét s jelelését a leghübben megtartva, analytikai modoruakká változtatni; a saját szójárásához szokott mathematikus akkor is csak synthesist látna benne, vagy legalább annak nevezné. Másfelől az analysisnek mint módszernek az algebrai jelelésekkel és kezelésekkel való összezavarása, és nevének emezekre ruházása még szerencsétlenebb félreértésen alapul. Azt mondják ugyanis, hogy midőn egyenleti kérdésben a keresett számot x-nek nevezzük, az ismeretlent *meglelt*-nek *teszszük* fel, s azután az adottakhoz való viszonyainál fogva jutunk hozzája mint ismerthez. De egy az, hogy így is fogalomzavar van az állított hasonlóságban. Mert az x egyenletbe téve is ismeretlen marad, egyenletbe pedig nem valami előre reáfogott új viszonyok, hanem a kérdés *feltételei* szerint tettük, tehát a tudvavalókból és elismertekből indulunk ki, mig oly egyenletre jutunk, melynek egyik felét az x, másikát az adott számok vagy ezeket jelelő betük tegyék, s a mely e szerint egészen új, s az egyenlet feltevésekor nem csak nem tudott, de még nem is gyanított viszonyt képez. Ezt az eljárást pedig a mi scholiastánk synthesisnek, nem analysisnek nevezné. Más az, hogy az algebrának (széles értelemben véve, vagyis jobban mondva, symbolicus calculusnak) éppen abban a részében, melyet kiválólag neveznek analysisnek, az alsóbb algebrában ismeretlenek jeléül használt x y stb. már ezt a müködésöket elvesztik, s változók neveit kapják; nincs is itt semmi elöleges reáfogás, vagy következménynek igazság gyanánt vétele, a mi az érintett tudományokat módszer tekintetéből az analysis neve viselésére jogosítaná. Igényeiket hát részint az ellentétben, részint az alsóbb algebrával való rokonságukban keresbetni. Mint mondám, a nevezetek e jogtalan és ferde alkalmazása még is csak megvan, s kiküszöbölni nem lehet. De a homonymek alatt rejlö fogalmakat megkülönböztetni, mind lehet, mind pedig kell. A fogalmak tisztálása első kötelessége a tudománynak.

---

6. *Feladat.* — Legyen az egyen képe (törtek elkerülésc végett) $2ma$, s nevezzük a nagyobbik darabját elölegesen ax-nek; tehát a kisebbiket $2ma—ax$ jeleli. Mivel az egyent szélső és középső arányban vágva gondoljuk, tehát: $a^2x^2=(4m^2—2mx)a^2$; azaz: $x^2=4m^2—2mx$. Ebből az ismeretlent kiszabadítván lesz $x=m\sqrt{5}-m$. A nagyobbik darab képe tehát: $a(m\sqrt{5}—m)$; a kisebbiké: $a(3m—m\sqrt{5})$. A *vágacs* értelmezésével s képeivel (*X. k.* 74. *f.*) összevetve, könnyü látni, hogy vágacs név mind a kettöt megilleti. És minthogy $9m^2a^2-5m^2a^2=4m^2a^2=(2ma)^2$; a kisebbik darabban $a(3m—m\sqrt{5})$ az egész ($3ma$) hozzája hoszban mérhető egyen ($2ma$) négyszegével nagyobb emeletü a hozzája illesztettnél ($m\sqrt{5}$), s ismét az egész ($3ma$) hoszban összemérhető a felvett neves egyennel ($2ma$); tehát a kisebb darab $2ma—ax=a(3m—m\sqrt{5})$ világosan első vágacs.

A 7. és 8. feladat meröben geometriai viszonyokat tárgyal és nem szükölködik algebrai világosítás nélkül.

9. *F.* — A tízszeg oldala a szélső s középső arányban vágott sugár (k) nagyobbik darabja. Algebrai képe $k\,\frac{\sqrt{5}—1}{2}$, mint kiviláglik, ha imez egyarány (k: $kx=kx$: $k—kx$) nyo-

mán, az x-et kiszabadítjuk. Más felől, a szabályos hatszeg oldala a sugárral egyenlő. A hat- és tízszeg oldal öszvege képe tehát: $k+k.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. A fölebbi egyarányból visszálva lesz:

$$kx: k=(k-kx): kx;$$

összetéve, $(k+kx): k=k: kx$, és az x értékét helyébe téve: $k+k.\frac{\sqrt{5}-1}{2}: k=k: k.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. És ez a feladatbeli állítás algebrai képe.

10. *F.* — A bizonyítmányban tiszta geometriai úton meg levén mutatva, hogy a szabályos ötszeg oldala négyszege az azon körbe irt hatszeg- és tízszeg-oldal négyszegeik öszvege, csak ezt az eredményt kell algebrai jelmezbe öltöztetni. Tehát: $k^2+\left(k.\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=k^2\left(1-\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]^2\right)=k^2.\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Az ötszeg oldala négyszegét e szerint $k^2.\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, magát az oldalt $k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ jeleli.

11. *F.* — Az ötszeg oldala, mint látók, bonyolt gyökös mennyiség, melynek hogy két tagját megkülönböztessük, fogjuk reá, hogy $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, mely egyenletből az előttünk már ismeretes módon az ismeretleneket kiszabadítván, nyerjük ezt:

$$k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}=\frac{k}{2}\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right),$$

mit a *X. K.* 77. *F.* beli értelmezéssel s a hozzája adott algebrai világosítással összevetvén, kitünik hogy az egyenlet második fele „kisebbik nevetlen" egyent jelel.

12. *F.* — A geometriai úton megmutatott állítás algebrai képe: $h^2=3k^2$, melyben k a kör sugarát, h a beléje irt szabályos háromszeg oldalát jeleli. Tehát $h=k\sqrt{3}$. A kérdéses oldal hát egyszerü aránytalan egyen, melyet minthogy négy-

szege úgy van a k-éhoz mint szám számhoz, *neves*-nek czímez a szöveg.

13. *F.* A szabályos gúla oldalát (élét v. ormóját) a-val, a körülírt teke sugarát k-val jelelvén, bébizonyítja a szöveg, hogy $(2k)^2 = 4k^2 = \frac{3}{2}a^2$. Ennél fogva:

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.a. \text{ Ellenben } a = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.k.$$

14. *F.* — A szabályos nyolczlapu oldalát (élét stb.) b-vel jelelvén, meg van mutatva, hogy $(2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$. Tehát $k = b\sqrt{\frac{1}{2}}$, és $b = k\sqrt{2}$.

15. *F.* — Jelelje a köb oldalát: c. A szöveg szerint hát: $(2k)^2 = 4k^2 = 3c^2$; miből következik, hogy

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{3c.} \text{ és } c = 2\sqrt{\frac{1}{3}}.k.$$

16. *F.* — Jelelje d a húszlapu oldalát, k, mint előbb a körülirt teke sugarát, és $l = 2k\sqrt{\frac{1}{5}}$. Már a szöveg megmutatja geometriai úton, hogy az l sugaru körbe irt szabályos ötszeg oldala egyenlő a k sugaru tekébe irt szabályos húszlapu tely oldalával (élével). Tehát:

$$d = l\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 2k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Ez pedig, mint a 11. feladat világosításában kimutattuk, „*kisebbik nevetlen*"t jelel.

Tanuságot kettőt von szövegünk a 11. feladatból. Egyet azt, hogy $(2k)^2 = 5l^2$; mi világos abból, hogy $l = 2k\sqrt{\frac{1}{5}}$. Mást azt, hogy az l sugaru körbe irt hatszeg oldala, meg az abba irt tízszeg két oldala együtt teszik a k sugaru teke átmérőjét. Azaz:

$$l+2l\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=2k\sqrt{\frac{1}{5}}+4k\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=$$
$$=2k\left(\sqrt{\frac{1}{5}}+1-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)=2k.$$

17. *F.* — Ismét geometriai modorban megmutatja szövegünk, hogy a k sugaru tekébe irt tizenkétlapu tely oldala (éle) egyenlő annak az ötszegnek az oldalával, melynek átlója az azon tekébe irt köb oldala (éle). Ez az él:

$$c=2\sqrt{\frac{1}{3}}k.$$

Ezt az egyent szélső és középső arányban vágva, a nagyobbik darab $\left(c.\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ a kellő ötszeg oldala lesz. Ha hát a tizenkétlapu tely oldalát (élét) e-vel jelöljük, lesz

$$e=c.\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\sqrt{\frac{1}{3}}.k.\frac{\sqrt{5}-1}{2}=k\left(\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right),\ \text{vagy}$$

$e=\frac{k}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$, és világosan vágacs.

18. *F.* — Ebben a szabályos soklapu telyek oldalainak a 13—17. feladatokban tárgyalt mértékeit szedi össze s hasonlítja egymáshoz szövegünk irója. Az eredmény, számokkal jelelve, ez:

A) Ha a teke sugarát teszszük		1-nek,	négyszege	1.
A négylapu (gúla) éle		$2\sqrt{\frac{2}{3}}$;	„	$\frac{8}{3}$.
A hatlapu (köb)	„	$2\sqrt{\frac{1}{3}}$;	„	$\frac{4}{3}$.
A nyolczlapu	„	$\sqrt{2}$;	„	2.
A tizenkétlapu	„	$\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$;	„	$\frac{6-2\sqrt{5}}{3}$.
A húszlapu	„	$2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$;	„	$\frac{10-2\sqrt{5}}{5}$.

B) Ha mindenik tely éle egyenlő és $=1$;		négyszege	$1.$
A gúla körül irt teke sugara	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$;	„	$\frac{3}{8}.$
A köb „ „ „ „	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	„	$\frac{3}{4}.$
A nyolczlapu „ „	$\sqrt{\frac{1}{2}}$;	„	$\frac{1}{2}.$
A tizenkétlapu „ „	$\frac{1}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$;	„	$\frac{1}{8}(9+3\sqrt{5})$
A húszlapu „ „	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$;	„	$\frac{5+\sqrt{5}}{8}.$

EUKLIDES ELEMEINEK
TIZENNEGYEDIK KÖNYVE.
A TELYEKRŐL,
mint némelyek vélik, negyedik;

mások szerint:

A l e x a n d r i a i H y p s i k l e s

ELSŐ KÖNYVE

A Z Ö T T E L Y R Ő L.

Tyrusi Basilides, — kedves Protarchosom, — Alexandriába jövén, s atyánkkal a mértanhoz viseltető közös szeretetöknél fogva megismerkedvén, ittléte legnagyobb részében vele társalkodott. És egykor Apollonius irományát az azon egy tekébe irott tizenkétlap és húszlap egybehasonlításukról, hogy minő viszonyban vannak egymáshoz, átfutván, úgy tetszett nekik, hogy Apollonius nem helyesen írt. Ők tehát, mint atyám beszélé, a hibákat kijavítva irtak azon tárgyról. Én pedig akadtam későbbre Appolloniustól kiadott más könyvre, mely a felvett tárgy hibátlan megmutatását foglalta magába, és felettébb gyönyörködtem a feladat vizsgálásában. Az Apolloniustól kiadottat ugyan akárki vizsgálhatja, mert köz kézen forog; a mit pedig mí azután úgy tetszik hogy elég gonddal irtunk, veled véltük elsőben közlendőnek, mint a ki az egész mértanban, kivált az űrtanban való jártasságodnál fogva a mondottakat szakértőleg meg fogod itélni, és mind az apám barátságáért, mind hozzánk viseltető jóindulatodnál fogva a dolgot szivesen meghallgatni. De már ideje az előbeszéddel megszűnni, s az értekezést megkezdeni.

1. Feladat:

Némi kör középontjából, az azon körbe irott ötszeg oldalára vont függő, a középponti egyen s az azon körbe irott tízszeg oldala öszvegöknek fele.

Legyen ABC kör, és ABC körben az egyenlő oldalu ötszeg oldala BC, és vétessék a körnek D középpontja, és vonassanak BC-re DE függő, és DE-vel egyenesbe nyujtassék ki AEF egyen; azt mondom, hogy DE az azon körbe irt hatszeg és tízszeg oldalaiknak fele.

Mert vonassanak DC CF, és vétessék EF-fel egyenlő GE, és G-től C-hez vonassék GC.

Minthogy az egész kör kerülete öt akkora, mint BFC kerület, s az egész kör kerületének ACF a fele, BFC-nek pedig FC a fele: tehát ACF kerület is öt akkora, mint FC kerület; AC tehát négy akkora mint FC. De a mint AC FC-hez, úgy van az ADC alatti szeglet az FDC alattihoz; az ADC alatti tehát négy akkora, mint az FDC alatti; már pedig az ADC alatti két akkora mint az EFC alatti; tehát az EFC alatti is két akkora mint a GDC alatti. De az EFC alatti az EGC alattival egyenlő; tehát az EGC alatti két akkora mint a GDC alatti; DG tehát GC-vel egyenlő, GC megint FC-vel egyenlő; tehát DG is egyenlő FC-vel. Már pedig GE is egyenlő EF-fel, tehát DE is egyenlő az EF FC öszvegökkel. Adassék mindenikökhöz DE, tehát a DF FC öszvegök két akkora mint DE. Igen, de DF a hatszeg oldalával egyenlő, FC pedig a tízszegével egyenlő; DE tehát az azon körbe irott hatszeg és tízszeg oldalaiknak fele.

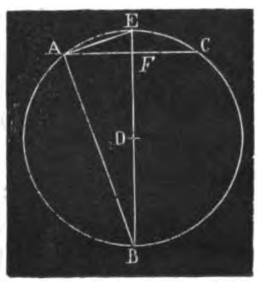
Tanuság: Világos a XIII-dik könyvbeli elméletekből, hogy a kör középpontjából az egyenlőoldalu háromszeg oldalára bocsátott függő a kör középponti egyenének fele.

2. Feladat:

Az azon egy tekébe irott tizenkétlapu ötszegét és húszlapu háromszegét azon egy kör fogja be.

Azt írja Aristaeus „az öt képlet összehasonlítása“ czímü munkájában, Apollonius pedig „a tizenkétlapunak húszlapuhoz hasonlításáról“ írt munkájának második kiadásában: hogy a mint a tizenkétlapu felszine a húszlapu felszinéhez, úgy van maga a tizenkétlapu is a húszlapuhoz. S épen úgy van a teke középpontjából a tizenkétlapu ötszegére vont függő is a húszlapu háromszegére vont függőhöz. Nekünk is meg kell hát irnunk, hogy azon egy kör fogja körül az ugyanazon tekébe irott tizenkétlapu ötszegét és húszlapu háromszegét; előrebocsátván imezt:

Felvétel. Ha körbe egyenlőoldalu ötszeg iratik, az ötszeg oldala négyszege az ötszeg két oldalát átfogó egyen négyszegével együtt öt akkora, mint a kör középponti egyenéé.

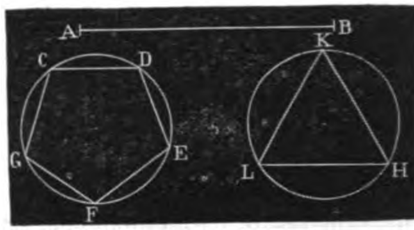


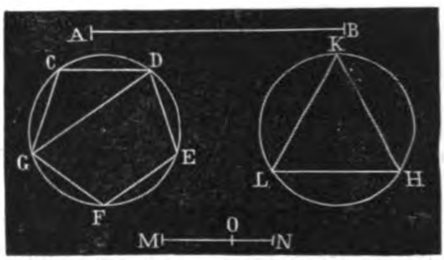
Legyen ABC kör, és legyen ABC körben az ötszeg oldala AC, és vétessék a kör középpontja D, és az AC-re vont föggő DF nyujtassék E-ig B-ig, és vonassék AB: azt mondom, hogy a BA AC négyszegeik öt akkorát tesznek mint a DE négyszege.

Vonassék AE; tehát AE a tízszeg oldala; és minthogy BE két akkora, mint DE, tehát a BE négyszege négy akkora mint a DE-é; mikből a BE-é a BA AE négyszegeikkel egyenlő; tehát a BA AE négyszegeik négy akkorák, mint a DE-é; az AB AE és DE négyszegeik tehát öt akkorák, mint a DE-é. A DE EA négyszegeik pedig az AC-ével egyenlők; tehát a BA AC négyszeik is öt akkorák, mint a DE-é.

Ezeket megmutatva bé kell már bizonyítni: hogy azon kör fogja-e körül az azon egy tekébe irott tizenkétlapu ötszegét, és húszlapu háromszegét.

Vétessék a tekének AB átmérője, és irassék abba a tekébe tizenkétlapu és húszlapu, és legyen a tizenkétlapu ötszege $CDEFG$, a húszlapu háromszege pedig KLH: azt mondom, hogy $CDEFG$ ötszeget és KLH háromszeget azonegy kör fogja körül.





Vonassék DG. DG tehát a köb oldala. Vétessék némi oly MN egyen, hogy az AB négyszege ötakkora legyen, mint az MN-é; már pedig a teke átmérője is öt akkora emeletü mint annak a körnek, melyről a húszlapu iratott, középponti egyene. [MN tehát annak a körnek, melyről a húszlapu iratott, középponti egyenével egyenlő.] Vágassék MN szélső és középső arányban O-nál, és legyen a nagyobbik darabja MO. Tehát MO a tízszeg oldala. Már minthogy az AB négyszege öt akkora mint az MN-é, a BA-é pedig három akkora, mint a DG-é: tehát a DG három négyszege egyenlő az MN öt négyszegével; a mint pedig a GD három négyszege az MN öt négyszegéhez, úgy van a CG három négyszege az MO öt négyszegéhez; miszerint a CG három négyszege az MO öt négyszegével egyenlő. De KL-nek öt négyszege MN-nek öt négyszegével meg MO-nak öt négyszegével egyenlő; KL-nek öt négyszege tehát DG-nek három négyszegével meg CG-nek három négyszegével egyenlő. Már pedig DG-nek három négyszege meg CG-nek három négyszege a $CDEFG$ ötszegre irt kör középponti egyene tizenöt négyszegével egyenlő. Mert meg vala előbb mutatva, hogy a DG négyszege a

CG-ével együtt öt akkora mint a *CDEFG* ötszegre irt kör középponti egyenének négyszege; de *KL*-nek öt négyszege a *KLH* háromszegre irt kör középponti egyenének tizenöt négyszegével egyenlő; megmutattatott az is, hogy a *KL* négyszege három akkora, mint a *KLH* háromszegre irt kör középponti egyene négyszege. A középponti egyennek tehát tizenöt négyszege egyenlő a középponti egyen tizenöt négyszegével; az átmérő tehát az átmérővel egyenlő; azon egy kör fogja körül tehát az azon egy tekébe irott tizenkétlapu ötszegét és húszlapu háromszegét.

3. Feladat:

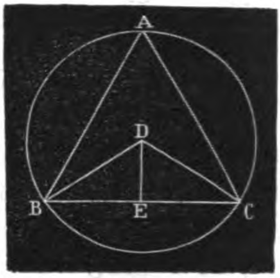
Ha van egyenlőszegletű és egyenlőoldalu ötszeg, s reá kör irva, s a középpontból egyik oldalra függő vonatik: az egyik oldal és a függő közti harminczszor vett derékszeg a tizenkétlapu külszinével egyenlő.

Legyen egyenlőoldalu s egyenlőszegletü *ABCDE* ötszeg, és az ötszegre kör írva; és vétessék *F* középpont, és *F*-ből *CD*-re vonassék *FG* függő: azt mondom, hogy *CD FG* közti harmincz derékszeg egyenlő tizenkét *ABCDE* ötszeggel.

Vonassanak *CF FD*.

Minthogy a *CD GF* közti derékszeg két akkora mint *CDF* háromszeg, tehát a *CD FG* közti öt derékszeg tíz háromszeggel egyenlő. A tíz háromszeg pedig két ötszeget teszen és a hatszorzataik is; a *CD GF* közti harmincz derékszeg tehát tizenkét ötszeggel egyenlő; tizenkét ötszeg pedig a tizenkétlap felszine; tehát a *CD FG* közti harmincz derékszeg egyenlő a tizenkétlapu tely külszinével.

Hasonlókép mutatjuk meg, hogy, ha van egyenlőoldalu háromszeg, minő *ABC*, s reá kör írva, s a kör középpontja *D*, a függő *DE*: a *BC DE* közti harminczszor vett derékszeg egyenlő a húszlapu külszinével. Mert mivel ismét a *DE BC* közti derékszeg két akkora, mint *DBC*; két háromszeg tehát egyenlö a DE BC közti derékszeggel, és a háromszorzataik is. Hat DBC háromszeg tehát egyenlő a DE BC közti három derékszeggel; hat oly háromszeg pedig, minö DBC, egyenlö két ABC háromszeggel, és a tízszerzeteik is. A DE BC közti harminczszori derékszeg tehát húsz ABC háromszeggel, azaz a húszlapu külszinével egyenlö, úgy hogy a mint a tizenkétlapu tely külszine a húszlapu külszinéhez, úgy van a CD FG közti derékszeg a BC DEköztihez.

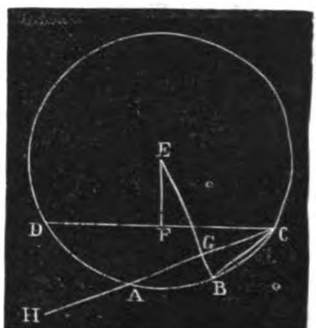


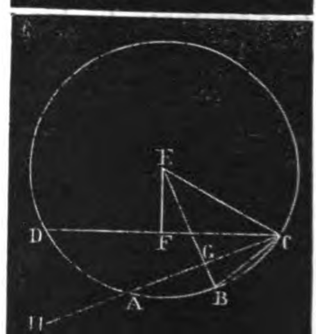
Tanuság: Ebből pedig világos, hogy az azon tekébe írt húszlapuban és tizenkétlapuban, a mint a tizenkétlapu fölszine a húszlapu külszinéhez, úgy van az ötszeg oldala s az ötszegre írt kör középpontjából reá vont függö közti derékszeg, a húszlapu oldala s a háromszegre írt kör középpontjából reá vont függö köztihez.

4. Feladat:

Ez világos levén, meg kell mutatni: hogy a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapuéhoz, úgy van a köb oldala a húszlapu oldalához.

Vétessék az azon tekébe írt tizenkétlap ötszegét s a húszlap háromszegét körülfogó azon egy kör DBC, és irassék DBC körbe az egyenlöoldalu háromszeg CD oldala, s az ötszegnek AC oldala, és vétessék a körnek E középpontja, és E ből DC-re CA-ra bocsátassanak EF GE függök, és nyujtassék EG-vel egyenesbe GB egyen, és vonassék BC, és vétessék a köb oldala CH: azt mondom,



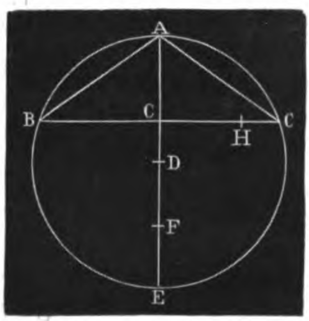


hogy a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapuéhoz, úgy van *CH CD*-hez.

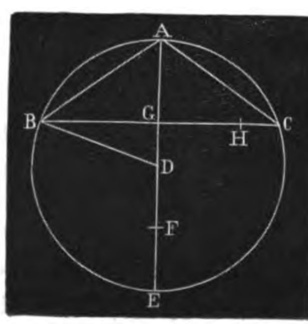
Mert mivel *EBC*-t, mint egy vonalt, szélső és középső arányban vágva, a nagyobbik darabja *BE*, és ugyan az öszves *EBC*-nek hasonfele *EG*, *BE*-nek pedig hasonfele *EF*: tehát *EG* is szélső és középső arányban vágva, a nagyobbik darabja *EF*. De *HAC*-t is szélső és középső arányban vágva, a nagyobbik darab *CA*, mint a tizenkétlapuban meg van mutatva; tehát a mint *HC CA*-hoz, úgy *EG EF*-hez; a *HC FE* közti derékszeg tehát egyenlő a *CA EG* köztivel. És mivel a mint *HC CD*-hez, úgy a *HC EF* közti derékszeg a *CD EF* köztihez; már pedig a *HC EF* közti a *CA GE* köztivel egyenlő: tehát a mint *HC CD*-hez, úgy van a *CA GE* közti derékszeg a *CD FE* köztihez, azaz: a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez, úgy van *HC CD*-hez.

Másképp. Megmutatni, hogy *a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez, úgy van a köb oldala a húszlapu oldalához;* előre bocsátván imezt:

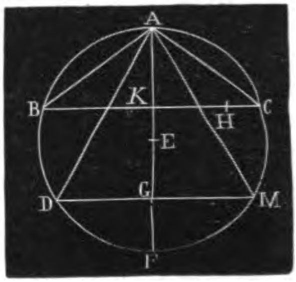
Felvétel:



Legyen *ABC* kör, és irassanak *ABC* körbe az egyenlőoldalu ötszeg *AB AC* oldalai, és vonassék *BC*, és vétessék a körnek *D* középpontja, és *A*-tól *D*-hez vonassék *AD* egyen, és nyujtassék *AD*-vel egyenesben *DE* egyen, és vétessék *AD* egyennek fele *DF*, *GC* pedig legyen három akkora mint *CH*: azt mondom, hogy az *AF BH* közti derékszeg az ötszeggel egyenlő.



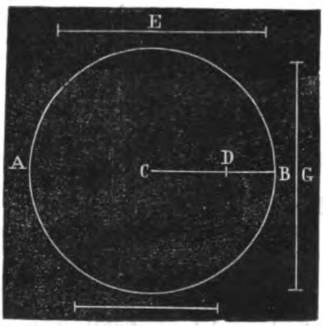
Mert vonassék *B*-től *D*-hez *BD*. Már minthogy *AD* két akkora mint *DF*, tehát *AF* másfél akkora mint *AD*. Ismét, mivel *GC* három akkora mint *CH*: tehát *GH* két akkora mint *HC*; *GC* tehás másfél akkora, mint *HG*; a mint tehát *FA AD*-hez, úgy van *CG GH*-hoz; az *AF HG* közti derékszeg tehát egyenlő a *DA CG* köztivel. *CG* pedig *BG*-vel egyenlő; tehát az *AD BG* közti derékszeg egyenlő az *AF HG* köztivel. Már pedig az *AD BG* közti két oly háromszeget teszen mint *ABD*; az *AF GH* közti is tehát két *ABD*-t tesz; *AF GH* közti öt derékszeg tehát két ötszeggel egyenlők. És mivel *GH* két akkora mint *HC*, az *AF GH* közti derékszeg két akkora, mint az *AF HC* közti; tehát az *AF HC* közti két derékszeg egyenlő az *AF GH* köztivel, és az *AF HC* közti tíz derékszeg egyenlő az *AF GH* közti öttel, azaz két ötszeggel; miszerint *AF HC* közti öt derékszeg az ötszeggel egyenlő. De az *AF HC* közti ötszöri derékszeg az *AF HB* köztivel egyenlő, minthogy *HB* öt akkora, mint *HC*, s *AF* a közös magasságuk. Az *AF BH* közti derékszeg tehát az ötszeggel egyenlő.



Ez világos levén, vétessék az azon tekébe írt tizenkétlapu ötszegét és a húszlapu háromszegét körülfogó kör, és irassanak *ABC* körbe az egyenlőoldalu ötszeg *BA AC* oldalai, és vonassék *BC*, és vétessék a körnek *E* középpontja, és *A*-tól *E*-hez vonassék *AE*, és *AE* nyujtassék *F*-ig, és *AE* legyen két akkora mint *EG*, *KC* pedig három akkora mint *CH*, és *DM AF*-hez derékszegletre; *DM* tehát egyenlőoldalu háromszeg oldala, tehát *ADM* háromszeg egyenlőoldalu. Már minthogy az *AG HB* közti derékszeg az ötszeggel egyenlő; az *AG GD* közti pedig *ADM* háromszeggel: tehát a mint az *AG HB* közti derékszeg az *AG GD* köztihez, úgy van az ötszeg a háromszeghez. Már pedig a mint az *AG BH* közti az *AG GD* köztihez, úgy *BH DG*-hez; a mint tehát tizenkét *HB* húsz *DG*-hez, úgy van tizenkét ötszeg húsz háromszeghez, azaz a tizenkétlapu külszine a húszlapuéhoz. De tizenkét *BH* tíz *BC*-t teszen, mert *BH* öt akkora mint *HC*, *BC* pedig hat akkora mint *HC*; tehát tizenkét *BH* tíz *BC*-vel egyenlő, húsz *DG* megint tíz *DM*-mel egyenlő, mert *DM* két akkora mint *DG*; tehát a mint tiz BC tiz DM-hez, azaz a mint BC DM-hez, úgy van a tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez. Már pedig BC a köb oldala, DM pedig a húszlap oldala; tehát a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez, úgy van BC DM-hez, azaz a köb oldala a húszlapu oldalához.

5. Feladat:

Meg kell mutatni, hogy *akármely egyent szélső és középső arányban vágva, a mi arányban van az egész egyen és nagyobb darabja négyszegeire emelhető egyen az egész és a kisebb darab négyszegeire emelhetőhöz, azon arányban van a köb oldala is a húszlapu oldalához.*



Legyen AB az azon tekébe irott tizenkétlapu ötszegét és húszlapu háromszegét körülfogó kör, és vétessék a körnek C középpontja, és nyujtassék C-ből akármely felé CB egyen, és vágassék szélső és középső arányban D-nél, s a nagyobbik darabja legyen CD; tehát CD a felvett körbe irt tizszeg oldala. Vétessék a húszlapu oldala E, és a tizenkétlapué F, s a köbé G; tehát E az egyenlő oldalu háromszeg oldala, F pedig az azon körbe írt ötszeg oldala, és FG-nek a nagyobbik darabja. Már minthogy E az egyenlőoldalu háromszeg oldala, az egyenlőoldalu háromszeg oldala pedig három akkora emeletü mint BC: tehát az E négyszege három akkora mint a BC-é. De a BC BD négyszegeik is három akkorák mint a CD-é; tehát cserélve, a mint az E négyszege a CB BD négyszegeikhez, úgy van a CB-é a CD-éhez. Már pedig a mint a BC é a CD-éhez, úgy van a G-é az F-éhez, mert F G-nek a nagyobbik darabja; tehát a mint az E-é is a CB BD négyszegeikhez, úgy van a G-é az F-éhez; és cserélve, s visszálva is; tehát a mint a G-é az E-éhez, úgy van az F-é a CB BD-éikhez. Már pedig az F négyszegével a BC DC-éik egyenlők, mert az ötszeg oldala a hatszeg oldalával, meg a tízszeg oldalával egyemeletü; tehát a mint a *G* négyszege az *E*-éhez, úgy a *BC CD* négyszegeik a *CB BD*-éikhez. De a mint a *BC CD* négyszegeik a *CB BD*-éikhez, úgy vannak akármely szélső és középső arányban vágott egyenben az egész egyen s a nagyobb darab négyszegeik az egész és a kisebb darab négyszegeikhez; tehát a mint a *G* négyszege az *E*-éhez, úgy van, akármely egyent szélső és középső arányban vágva, az egészszel meg a nagyobbik darabjával egyemeletü egyen az egészszel meg kisebbik darabjával egyemeletü egyenhez. Már pedig *G* a köb oldala, s *E* a húszlapué.

Ha tehát némi egyen szélső és középső arányban vágatik: a mint az egészszel meg a nagyobb darabjával egyemeletü egyen az egészszel meg kisebb darabjával egyemeletü egyenhez, úgy lesz az azon tekébe írt köb oldala a húszlapuéhoz. m. b. k.

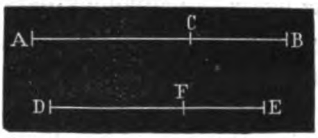
6. Feladat:

Most meg kell mutatni hogy *a mint a köb oldala a húszlapuéhoz, úgy van a tizenkétlapu tely a húszlapu telyhez.*

Mert mivel az azon tekébe írt tizenkétlapu ötszegét s a húszlapu háromszegét egyenlő körök fogják körül, s a tekékben egyenlő körök a középponttól egyenlő távulságra vannak, mert a teke középpontjából a körök lapjaira bocsátott függők a körök középpontjaira esnek, úgy hogy a teke középpontjából a húszlapu háromszegét s a tizenkétlapu ötszegét körülfogó kör középpontjára vont egyenek, azaz függők, egyenlők: tehát azok a gúlák, melyeknek talpai a tizenkétlap ötszegei, egyenlő magasságuak azokkal, melyeknek talpai a húszlap háromszegei. Már pedig az egyenlő magasságu gúlák úgy vannak mint a talpaik; tehát a mint az ötszeg a háromszeghez, úgy van az a gúla, melynek talpa a tizenkétlapu ötszege, teteje a teke középpontja, ahoz a gúlához, melynek talpa a húszlapu háromszege, teteje a teke középpontja; a mint tehát tizenkét ötszeg húsz háromszeghez, úgy van az ötszegtalpu tizenkét gúla a háromszegtalpu húsz gúlához. Már pedig tizenkét ötszeg a tizenkétlapu külszine, húsz háromszeg pedig a húszlapu külszine; tehát a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez, úgy van az ötszegtalpu tizenkét gúla, a háromszegtalpu húsz gúlához. De az ötszegtalpu tizenkét gúla a tizenkétlapu tely, a háromszegtalpu húsz gúla megint a húszlapu tely; tehát a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez, úgy a tizenkétlapu tely a húszlapu telyhez. Megmutattuk pedig, hogy a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez, úgy van a köb oldala a húszlapu oldalához; tehát a mint a köb oldala a húszlapu oldalához, úgy van a tizenkétlapu tely is a húszlapu telyhez.

7. Feladat:

És azután, hogy *ha két egyen szélső és középső arányban vágatik, a felvett egyarányban vannak*, imígy mutatjuk meg:



Ugyanis *AB* egyen vágassék szélsö és középsö arányban *C*-nél, s a nagyobbik darabja legyen *AC*; hasonlóképp *DE* is vágassék szélső és középső arányban *F*-nél, s a nagyobbik darabja legyen *DF:* azt mondom, hogy a mint az egész *AB* a nagyobbik darabjához *AC*-hez, úgy van az egész *DE* a nagyobbik darabjához *DF*-hez.

Mert minthogy az *AB BC* közti derékszeg egyenlö az *AC* négyszegével, s a *DE EF* közti egyenlő a *DF*-ével: tehát a mint az *AB BC* közti derékszeg az *AC* négyszegéhez, úgy van a *DE EF* közti is a *DF*-éhez; tehát amint az *AB BC* közti négyszeri derékszeg az *AC* négyszegéhez, úgy a *DE EF* közti négyszeri derékszeg a *DF* négyszegéhez. És öszszetéve, a mint az *AB BC* közti négyszeri derékszeg az *AC* négyszegével együtt az *AC*-éhez, úgy van a *DE EF* közti a *DF*-ével együtt a *DF*-éhez; miszerint a mint az *AB* meg *BC* öszvegök négyszege az *AC*-éhez, úgy a *DE* meg *EF* öszvegöké a *DF*-éhez; és így hoszban is a mint az *AB* meg *BC AC*-hez, úgy *DF* meg *EF DE*-hez; tehát összetéve is a mint *AB* meg *BC AC*-vel együtt *AC*-hez [azaz két *AB AC*-hez], úgy DE meg EF DF-fel együtt DF-hez, azaz két DE DF-hez; úgy az elötagok hasonfelei is, azaz, a mint AB AC-hez, úgy DE DF-hez.

Tanuság: Meg levén mutatva az, hogy akármely egyent szélső és középső arányban vágva, a mi arányban van az egész és a nagyobbik darabja lapjaikra emelhető egyen az egész és kisebbik darabja lapjaikra emelhető egyenhez, abban van a köb oldala a húszlapu oldalához; meg levén megint mutatva, hogy a mint a köb oldala a húszlapu oldalához, úgy van az azon tekébe írt tizenkétlapu külszine a húszlapu külszinéhez; hozzájárulván még az is, hogy a mint a tizenkétlapu külszine a húszlapu kölszinéhez, úgy van a tizenkétlapu is a húszlapuhoz, azért hogy azon kör fogja körül a tizenkétlapu ötszegét s a húszlapu háromszegét: világos, hogy ha a tizenkétlapu és húszlapu azon egy tekébe íratnak, azon arányban lesznek, a miben, akármely egyent szélső és középső arányban vágva, az egész és nagyobbik darabja négyszegeikre emelhető egyen van az egész és kisebbik darabja négyszegeikre emelhető egyenhez.

(Itt következik még a görög textusban csaknem szóról szóra ugyanaz, a mi a tanuságban, csakhogy elöbb az „*enunciatio*," s azután a „*demonstratio*". Rectius omitti possunt, azt mondja Gregory.)

EUKLIDES ELEMEINEK

(mint némelyek vélik)

TIZENÖTÖDIK KÖNYVE.

S A TELYEKNEK ÖTÖDIKE

mások szerint:

Alexandriai Hypsikles

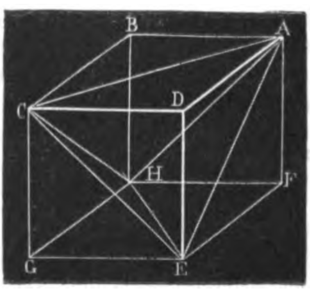
MÁSODIK KÖNYVE

AZ ÖT TESTRŐL.

---

1. Feladat:

Adott köbbe gúlát) irni.*



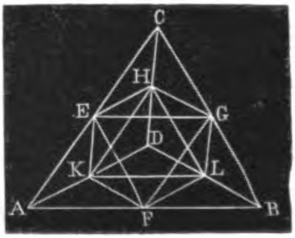
Legyen az adott köb *ABCDEFHG*, melybe gúlát kell irni. Vonassanak *AC AE CE AH EH HC.* Világos, hogy *AEC AHE AHC CHE* egyenlőoldalu háromszegek; mert az oldalaik négyszegek átméröi; *AECH* tehát gúla, s az adott köbbe van irva; m. t. k.

---

*) T. i. egyenlőoldalu, egyenlő háromszeglapoktól kerített háromoldalu gúlát (Tetraëdron).

2. Feladat:

Adott gúlába nyolczlaput irni.



Legyen az adott gúla *ABCD*, s vágassék ketté *E F G H K L* pontoknál, és vonassanak *HK HL EF FG* s a többiek.

Már minthogy *AC* két akkora, mint akár *HK* akár *GF*, tehát *HK* *GF*-el egyenlö s hozzája egyközü. Hasonlóképp *HG* is *FK* val egyenlö és hozzája egyközü; *HKFG* tehát egyenlöoldalu; azt mondom hogy derékszegletü is, mert ha *KL*-töl *EFBG FCEG EFHG HKFG* lapokra függőket vonunk, hasonlóképp mutatjuk meg, hogy egyenlöoldaluak.

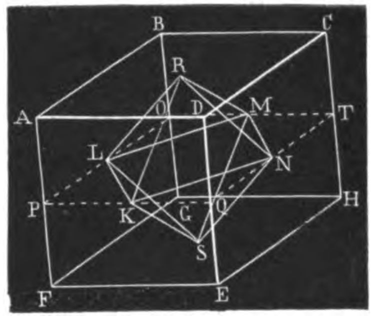
Jegyzet: Ezen egész XV-dik könyv összevissza van rongálva (így szól a Gregory kiadásabeli jegyzegető, igen helyesen); de jóllehet az egész bizonyítási módszer a régiek hibátlan okoskodásától úgy különbözik, mint ég a földtől, a többi feladatokban még csak megy, ahogy megy, de már itt épen elbukik, mielőtt czélt érne. Azért némi igazításul a következőket javasolja:

„Minthogy *DA* és *DC* *K*-nál *H*-nál kettévágvák, világos, hogy *KH* fél akkora mint *AC*; ugyanazért *HL* is fél akkora mint *CB*. Ismét *KE* azaz *LG* fél akkora mint *DC*; hasonlóképp *HE HG EH KL LF FK* illetöleg fél akkorák mint *AD DB AD AB AD DB*. De a négylapunak *AB BD DA AC CB CD* oldalai egymással mind egyenlők, tehát *HK HL KL HG HE FE FK FG FL GL EK EG* is egymással mind egyenlök. *HKL HKE HEG HGL FEG FEK FKL FLG* háromszegek különkülön egyenlöoldaluak és egyenlök; *HKEFGL* tely tehát nyolczlapu, melynek hat telyszegletei stb. stb."

Peyrard bizonyítmánya: Minthogy *AC* két akkora mint akár *HK* akár *GF* s hozzájok egyközü, tehát *HK GF*-fel egyenlö és egyközü hozzája. Ismét, mivel *DB* két akkora mint akár *HG* akár *KF* s hozzájok egyközü, tehát *HG KF*-fel egyenlö s egyközü hozzája. Már pedig *DB AC*-vel egyenlö; *HK KF FG GH* tehát egymással egyenlök. Ugyanazokért *KL EG LH FE KE LG LF HE* is egyenlök egymással, *EH* pedig *KL*-lel egyenlő; miszerint *HK KF FG GH KL EG* s a többiek egyenlök egymással; *LHK LKF LFG LGH EHK EKF EFG EGH* háromszegek tehát egyenlőoldaluak. *LHKFGE* tehát nyolczapu, és az adott egyenlő oldalu gúlába van írva: m. t. k.

3. Feladat:

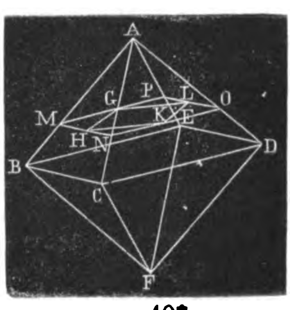
Adott köbbe nyolczlaput irni.



Legyen az adott köb *ABCDEFGH*, és vétessenek az álló négyszegeknek *K L M N* középpontaik, [és vonassanak *KL LM MN NK*]: azt mondom, hogy *KLMN* négyszeg. Mert vonassanak *K L M N* pontokon át *DA AB BC CD*-hez *QP PO OT TQ*. Már minthogy *QP* két akkora mint *PK*, s *OP* mint *PL*: tehát a *KL* négyszege két akkora mint a *PL*-é. Ugyanazért az *ML*-é is két akkora mint az *LO*-é; a *KL*-é tehát *ML*-ével egyenlő, és *KL* is *ML*-lel; *KLMN* tehát egyenlőoldalu. És világos, hogy derékszegletü is. Vétessék *BD EG* két négyszeg is, és ezeknek *R S* középpontai és vonassanak *RK RL RM RN SK SL SM SN*; és világos hogy a nyolczlaput alkotó háromszegek egyenlőoldaluak; mert azon móddal megmutatjuk, stb. m. t. k.

4. Feladat:

Adott nyolczlapuba köböt írni.

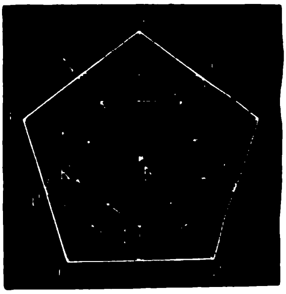


Vétessenek az *ABC ACD ABE ADE* háromszegekre írt köröknek *H L G K* középpontai, és vonassanak *GH GL LK KH*; azt mondom, hogy *GHKL* (képlet) négyszeg. Vonassanak *G*-n *H*-n *K*-n *L*-n át *EB*-hez *BC*-hez *CD*-hez *DE*-hez *MP MN NO OP* egyközüek.

Már mivel *ABC* háromszeg egyenlőoldalu, az *A*-tól az *ABC* háromszegre irt kör középpontára *H*-ra vont egyen az *ABC* háromszeg *A*-nál való szegletét ketté vágja; *NH* tehát *MH*-val egyenlő Ugyanazért *MG* is egyenlő *GP*-vel. Minthogy pedig *MN* is *MP*-vel, és *MP PO*-val egyenlők: tehát *NH* is *MG*-vel, és *HM GP*-vel, megint *MG PL*-lel egyenlők. Már a *HMG* és *GPL* alatti szegletek derékek, miből világos, hogy *GH* egyenlő *GL*-lel. Ugyanazokért a többiek is. Már mivel *GHKL* (képlet)*, egyközény, azonegy lapban van. És minthogy az *MGH PGL* alatti szegletek mindenike egy deréknek fele, tehát a *HGL* alatti (harmadik) maradék szeglet derék. Hasonlóképp a többiek is, *GHKL* tehát négyszeg. És lehetséges, mint kezdetben *G H K L* középpontokat véve és *MN NO OP PM* egyközüeket vonva, *GH HL LK KG* egyeneket húzni, és mondani, hogy *GHKL* négyszeg. Ha pedig a többi háromszegeknek is középpontait veszszük, s azokat is egyenekkel összekapcsoljuk, megmutatjuk a többi négy szegeket, és az adott nyolczlapuba köbünk lesz irva: m. t. k

5. Feladat:

Adott húszlapuba tizenkétlaput írni.



Vétessék a húszlapu ötszege *ABCDE*, és az *AFE AFB BFC CFD DFE* háromszegekre írt körök-nek *G H K L M* középpontai, és vonassanak *GH HK KL LM MG*; és ismét *FG FH FK* vonatván nyújtassanak ki *O*-ig *N*-ig *P*-ig; ez által *EA AB BC* egyenek *O N P* pontoknál ketté vágatnak; s a mint *NO NP*-hez, úgy *GH HK*-hoz; *GH* tehát *HK*-val egyenlő. Hasonlóképp mutatjuk meg, hogy a *GHKLM* ötszegnek többi oldalai is egyenlők. Azt mondom, hogy az ötszeg egyenlőszegletü is. Mert *NO NP* két egyen, melyek *GH*-val *HK*-val egyközüek, ezekével egyenlő szegleteket fognak be, s a többi világos. Képzeltessék egy *F*-ből az *ABCDE* ötszeg lapjára bocsátott függő, mely az ötszegre írt kör középpontára esend. Ha [továbbá] N-től azon ponthoz, melynél az F-ből bocsátott függő [a lappal] találkozik, egyent, és H-n-át ezzel egyközüt vonunk: világos, hogy találkozik az F-ből bocsátott függővel, és a H-n átvont egyközü az F-ből való függővel derékszegletet fog be. Ismét, ha O P pontokból az $ABCDE$-re írt kör középpontához, s azon pontból, melynél a H-ból vont egyen az F-ből vonttal találkozik, G-hez K-hoz egyeneket vonunk: világos, hogy a vont egyenek az [F-ből vont] függővel derékszegleteket alkotnak. Miből világos, hogy $GHKLM$ ötszeg egy lapban van.

6. Feladat:

Az öt tely oldalait s szegleteit meglelni.

Tudnunk kell, hogy ha valaki kérdezi: hány oldala van a húszlapunak, imígy felelünk: Világos, hogy a húszlaput húsz háromszeg fogja körül, és hogy mindenik háromszeget három egyen fogja körül: *e szerint* a húsz háromszeget szorzanunk kell a háromszeg oldalaival, és lesz hatvan, melynek fele harmincz lesz. Hasonlóképp a tizenkétlapuról is. T. i. mivel a tizenkétlaput tizenkét ötszeg fogja körül, és ismét minden ötszegnek öt egyene van: tegyünk tizenkétszer ötöt, és lesz 60; ismét a fele lesz harmincz. Azért teszszük pedig felét, mivel mindenik oldal, akár háromszegé akár ötszegé akár négyszegé, mint a köbön, kétszer vétetik. Hasonlóképp azon módszerrel mind a köbön mind a gúlán mind a nyolczlapun ugyanazt téve, meg fogod lelni az oldalakat.

Ha pedig ismét az öt képlet mindenikének szegleteit akarnád meglelni, ugyanazokat mivelvén, oszd el a telynek egy szegletét béfogó lapok (számával); p. o. minthogy a húszlapu szegletét öt háromszeg fogja bé, a húszlapunak tizenkét szeglete jön ki. És mivel a tizenkétlapu szegletét három ötszeg fogja bé, öszszad hárommal, és kapni fogod a tizenkétlapun a húsz szegletet. Hasonlóképp leled meg a többiek szegleteit is.

7. Feladat:

Az öt tely mindenikét körülfogó lapok dülését meglelni.

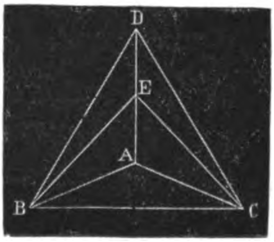
Keresteték, hogy az öt telyképlet mindenikén, a körülfogó lapok akármelyike adatván, miképp leljük meg a dülést, mely szerint a képletek mindenikét körülfogó lapok egymáshoz állanak. Ez a meglelés pedig, miképp Isidorus, nagy mesterünk, magyarázta, következő módon foly: Hogy a *köbön* a körülfogó lapok egymást derékszegletben vágják, világos. A *gúlán* pedig kitétetvén egyik háromszeg, az egyik oldal végeinek középpontaival s a hegyéből a talpára bocsátott függő közzel irott kerületek vágják egymást: és a vágó pontból a középpontokra vont egyenek a gúlát körül fogó lapok dülését fogják bé. A *nyolczlapun* pedig a háromszeg oldalára írt négyszegen, a szegletszelő végeinek középpontaival, s hasonlóképp a háromszegbeli függő közzel irassanak kerületek: és ismét a közös vágó pontból a középpontba vont egyenek a keresett dülést két derékre pótló szegletet fognak bé. A *húszlapun* pedig a háromszeg oldalára ötszeg iratván, vonassék a két oldalát átfogó egyen, és ennek a végei középpontaival s a háromszeg függője közével kerületek iratván, a közös vágó pontokból a középpontokra vont egyenek hasonlókép a húszlapu lapjai dülését két derékre pótló szegletet fognak bé *). A *tizenkétlapun* megint kitétetvén egyik ötszeg, hasonlóképp vonatván a két oldalt átfogó egyen, a végei középpontaival, s a kettévágó pontjából az ötszeg hozzája egyközü oldalára bocsátott függő közzel irassanak kerületek, s azon pontból, hol egymással találkoznak a középpontokhoz vont egyenek, hasonló-

---

*) Mai módon szólva, a kijelelt szeglet egyenesen az illető lapok szeglete. De minthogy a lapnak laphoz dülését Euklides szerint (XI. k. 6. ért.) az egymást 180 fokra egészítö két szeglet közzül mindig a *hegyes* vagy *éles* szeglet *jellemzi*, ehez a kifejezéshez kellett szabni magát a jelen feladat irójának is. A nyolczlapu két lapján közös szeletökre függő két egyen, ugyanis, tompa szegletet fognak bé: ez hát az illető dülést nem jellemezheti, hanem csak kiegészítője (supplementum) az igazán jellemző éles szegletnek.

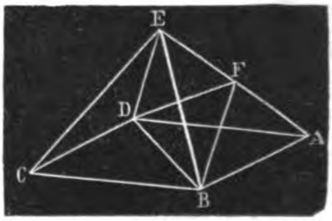
képp a tizenkétlapu lapjai dülését két derékre pótló szegletet fognak bé.

Ily beszédet tartott a mondottakról az említett nagyhirü férfiú, nyilvánosnak látszván elötte mindeniknek bebizonyitása; de hogy szembetünö legyen a bennök foglalt elmélet, mindenikben az okoskodást kimagyarázom: még pedig elsöben a *gúlán:*

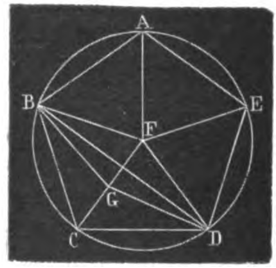


Képzeltessék négy, egyenlöoldalu háromszegtöl körülfogott *ABCD* gúla, *ABC* a talpának, *D* a hegyének képzeltetvén; és *AD* oldal *E*-nél kettévágatván, vonassanak *BE EC;* és minthogy *ADB ADC* háromszegek egyenlöoldaluak, és *AD* kettévágatott, tehát *BE EC AD*-re függök. Azt mondom, hogy a *BEC* alatti szeglet hegyes. Mert, minthogy *AC* két akkora mint *AE*, az *AC* négyszege négy akkora mint az *AE*-é, de az *AC*-é egyenlö az *AE EC* négyszegeikkel, melyek közzül a *CE*-éhez az *AC*-é azon arányban van, miben négy a háromhoz; *CE* pedig *EB*-vel egyenlö: a *BC* négyszege tehát a *BE* meg *EC*-éiknél kisebb; a *BEC* alatti szeglet tehát éles. Már mivel *AD* egyen *ABD ADC* két lapnak közös szelete, és a közös szeletre mind két lapon derékszekletben vonattak *BE EC,* és éles szegletet fognak bé: tehát a *BEC* alatti szeglet a lapok dülése. És adva van; mert *BC* a háromszeg oldala levén, adatott; valamint *EB*-nek *EC*-nek is mindenike, mint az egyenlöoldalu háromszeg függöje; a *B C* középpontokkal, azaz az egyik oldal végeivel s a háromszeg függöje közével irott kerületek vágják egymást *E* pontnál, s az emettöl *B*-hez *C*-hez vont egyenek a lapok dülését fogják bé. Már pedig e vala az állítás. Hogy pedig a *B C* középpontokkal s a háromszeg függöje közével irott körök egymást vágják, világos. Mert *BE*-nek *CE*-nek akármelyike nagyobb mint *BC*-nek a fele; a *B C* középpontokkal s a *BC* felének közével irott körök egymást érintik. Ha pedig kisebb [a köz], sem nem érintik, sem nem vágják; ha nagyobb, éppen vágják; és igy a gúláról való okoskodás nyilvánosnak és a bizonyítmányokkal egyezőnek látszik.

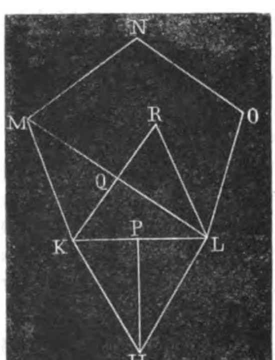
Képzeljük megint *ABCD* négyszegen az *E* hegyü gúlát, s az ezt a talpától kétfelé körülfogó háromszegeket egyenlőoldaluaknak. Vágassék ketté az egyik háromszeg *AE* oldala *F*-nél, és vonassanak *BF DF*; tehát *BF DF* egyenlők, és *AE*-re függők. Azt mondom, hogy a *BFD* alatti szeglet tompa. Mert vonassék *BD*. Már minthogy *AC*, négyszeg, és *BD* az átmérője: a *BD* négyszege két akkora, mint a *DA*-é; a *DA*-é pedig a *DF*-éhez azon arányban van, mint az elöbbiben mondaték, miben négy háromhoz; tehát a *BD* négyszege is a *DF*-éhez azon arányban van, miben nyolcz háromhoz; *DF* pedig *FB*-vel egyenlö; a *BD* négyszege tehát a *BF FD* négyszegeiknél nagyobb; a *BFD* alatti szeglet tehát tompa. És minthogy *ABE ADE* két lap egymást vágja, a közös szeletök *AE*, s a reá mindenik lapon derékszegletben vont egyenek *BF FD* tompa szegletet fognak bé: tehát a *BFD* alatti szeglet az *ABE ADE* lapok dülését két derékre pótolja ki; ha tehát a *BFD* alatti szeglet adatik, adatik a mondott dülés is. Már minthogy a nyolczlapu háromszege adva van, s *AD* egyen a nyolczlapu egyik oldala, s reá iratott *AC* négyszeg: adva van a négyszeg átmérője is *BD*; de igen *BF FD* is a gúla függöi; miszerint a *BFD* alatti szeglet is adva van; a gúla oldalára tehát négyszeg iratván, minö *AC*, és *BD* átmérő vonatván, ha *B D* középpontokkal s a háromszeg függője közével köröket irunk, vágják egymást *F*-nél, s az *F*-töl a középpontokra vont egyenek a *BFD* alatti szegletet fogják bé, mely, a mint megmondtuk, a lapok dülését két derékre pótolja. És innen nyilvánvaló, hogy *BF*-nek *FD*-nek mindenike nagyobb mint *BD*-nek fele. És ezért, a képlet okszerü szerkesztésénél fogva, a köröknek egymást szükségképp vágniok kell. És a megmutatásból világos lön, hogy *BD DF*-hez emeletben azon arányu, a mi nyolcz háromhoz; a *BD* feléhez képest pedig emeletben négy



akkora; miszerint BF-nek FD-nek mindenike nagyobb a BD felénél. És ennyit a nyolczlapuról.



A *húszlapura* nézve pedig képzeltessék $ABCDE$ egyenlőoldalu ötszeg, s ezen F hegyü gúla, a melyet körülfogó háromszegek egyenlőoldaluak legyenek. $ABCDE$ gúla a húszlapu képlet része lesz. Vágassék ketté egy háromszeg FC oldala G-nél, és vonassanak BG GD, melyek egyenlők és FC-re fügők; azt mondom, hogy a BGD alatti szeglet is tompa; s ez innen világos: Ugyanis BD vonatván ez az egyen az ötszeg BCD alatti tompa szegletét fogja bé; emennél pedig a BGD alatti nagyobb; mert BG GD kisebbek mint BC CD. Az előbbiekhez hasonlóképp megint a BGD alatti szeglet a BFC CFD háromszegek dülését két derékre pótolja ki. Ez adva levén, adva lesz a húszlapu lapjainak is a dülése; mert a húszlapu háromszege oldalára ötszeget írva, s az ötszeg két oldalát átfogó egyent vonva, így, mint a rajzban, BD adva levén, valamint BG GD is a háromszegek függői, adva van a BGD alatti szeglet is. Mert ha az ötszeg két oldalát átfogó egyeneknek, minő BD, végeivel mint középpontokkal s a háromszeg függője közével körök iratnak: vágják egymást mint G-nél, s a G-ből B-hez D-hez vont egyenek a lapok dülését két derékre pótló szegletet fognak bé. És innen s a rajzból is világos, hogy BG-nek GD-nek mindenike nagyobb mint BD-nek a fele, mit a képlet okszerü szerkezetéből megmutathatni.

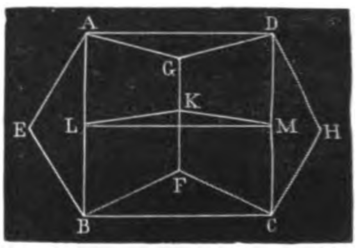


Képzeltessék külön HKL egyenlőoldalu háromszeg, KL-re pedig irassék $KMNOL$ ötszeg, és vonassék ML, és bocsátassék HKL háromszegnek HP függője; azt mondom, hogy HP nagyobb, mint a lapok dülését átfogó ML-nek fele. K-ból ML-re KQ függő bocsátatván, minthogy a

KLQ alatti szeglet nagyobb, mint a derékszeglet harmada, azaz a *KHP* alatti, állítassék a *KHP* alattival egyenlö *QLR* alatti; *QL* tehát egyenlöoldalu háromszegnek, melynek oldala *RL*, függöje; miszerint az *RL* négyszege az *LQ*-éhoz azon arányban van, miben négy háromhoz. De *KL* *LR*-nél nagyobb, a *KL* négyszege is tehát az *LQ* négyszegéhez nagyobb arányban van, mint négy háromhoz. Már pedig a *HP*-éhez azon arányban van, miben négy háromhoz; *KL* tehát *LQ*-hoz nagyobb arányban van, mint *HP*-hez; *HP* tehát *LQ*-nál nagyobb.

A *Tizenkétlapu*ra nézve pedig:

Képzeltessék a köbnek, melyröl a tizenkétlapu iratik, egyik *ABCD* négyszege, és a tizenkétlapu két lapja *AEBFG* *GDHCF*; innen már azt mondom, hogy adva van a két ötszeg düléso. Mert *FG* vágassék ketté *K*-nál, és *K*-tól *FG*-hez derékszegletre mind két lapon vonassanak *KL* *KM*, és vonassék *ML*. Elsöben azt mondom,



hogy az *MKL* alatti szeglet tompa. Mivel meg van az Elemek XIII-dik könyvében, t. i. a tizenkétlapu egybeállításánál, mutatva, hogy a *K*-ból *ABCD* négyszegre bocsátott függö az ötszeg oldalának fele*), miszerint az *ML* félénél kisebb **), s ennélfogva az *MKL* alatti szeglet tompa. Meg van azon elméletben mutatva az is, hogy a *KL* négyszege a köb oldala felének meg az ötszeg oldala felének négyszegeikkel egyenlö ***):

---

*) Mert ez a függö egy a XIII-ik könyv 17. feladatabeli képlet *YP* egyenével, s a képlet alkotásánál fogva *PR*-rel, ú. m. a köb szélsö és középsö arányban vágott féloldala nagyobbik darabjával. De a tanuság szerint, a köb szélsö és középsö arányban vágott oldalának nagyobbik darabja a tizenkétlapu oldala, miszerint a szóban forgó függö a tizenkétlapu oldalának fele.

**) Mert *ML* vagyis *AD* nagyobb mint *GD*.

***) Mert az idézett XIII-ik könyvbeli képletben a *HY* négyszege egyenlö a *HP* és *PY* négyszegeik öszvegével; mivel *HPY* derékszegletü háromszeg.

miszerint azon KL és KM egyenlök levén, nagyobbak az ML felénél; adatván tehát az MKL alatti szeglet, a lapok dülése is, mely azt két derékre pótolja, nyilván adva van. Már minthogy az $ABCD$ négyszeg oldala, az ötszeg két oldalát átfogó egyen, s az ötszeg maga adva van: adva ML is. De MK KL is advák, mert az ötszeg a két oldalt átfogó AB-t kettévágó pontból az ötszeg hozzája egyközü oldalára ú. m. FG-re bocsátott függők; adva van tehát a keresett dülést, mint megmondatott, két derékre pótló LKM alatti szeglet is. Helyesen mondá tehát a képlet okszerü szerkesztésében, hogy az adott ötszegben átfogót kell vonni, mely egyenlö lesz a köb oldalával; és a végei középpontaival, s a kettévágó pontból az ötszegnek hozzája egyközü oldalára bocsátott függö közzel, minök a rajzon KL KM, kerületeket írni, s a kerületek találkozása pontából a középpontokra a lapok dülését két derékre pótló szegletet béfogó egyeneket vonni. Mert hogy KL függö nagyobb mint ML-nek a fele, meg van mondva, mint ez az Elemekben a többivel együtt meg is van mutatva.