PARADIGMAVÁLTÁS AZ INTEGRÁL- ÉS DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS TÖRTÉNETÉBEN

MUNKÁCSY KATALIN DR., PHD., ELTE Matematikai Intézet
E-mail: katalin.munkacsy@gmail.com

DOI: http://doi.org/10.23716/MTTT.5.2022.03

Absztrakt
Mit jelent a paradigmaváltás a matematikában?

Mik azok a valódi, hétköznapi életből fakadó problémák, amelyekre Archimédesz és Newton keresték a választ? Pontosabban melyek voltak azok a régi kérdések, amelyek felmerültek a matematikusok munkáiban?

Hogy változott ez? Hogyan keresték a 18. századtól a matematikusok az elméleti választ? Hogyan lehet kiküszöbölni a számításokból a matematikailag nem definiált fogalmakat?

Természetesen továbbra is voltak megoldandó, gyakorlati problémák, de a matematikában a fő kérdés az analízis axiomatikus megalapozása lett. A dolgozatban felhasználtam dr. Stettner Eleonórával (Kaposvári Egyetem) közös kutatásunk eredményeit is. Ezúton köszönöm az ábrák elkészítését
Kulcsszavak: matematikai analízis, gyakorlati problémák, elméleti megalapozás

I. Bevezetés

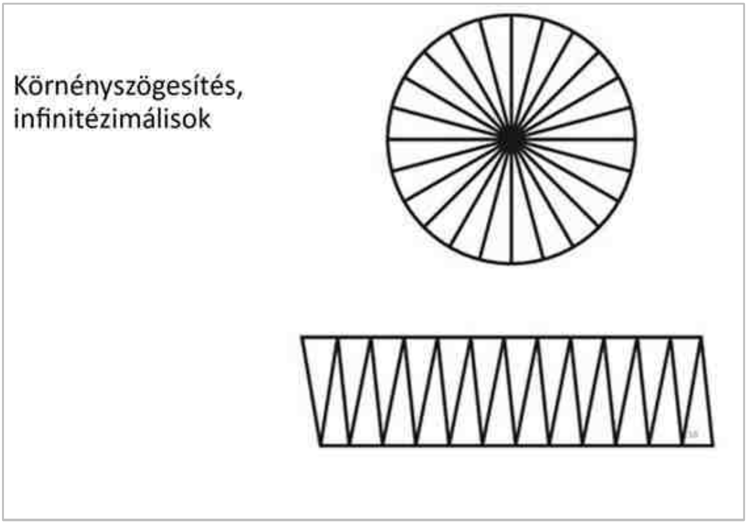
Archimédesz és Newton is tudta kezelni a folytonos változást, kiszámították, pontosabban algoritmust találtak annak a problémának a megoldására, hogy hogyan lehet két mennyiséget összeszorozni, ha az egyik konstans, a másik pedig „szépen" változik. De ezektől a felfedezésektől a matematika jellege nem változott meg, nem változott meg, hogy mit szabad és mit nem megtenni, ha valaki korrekt módon, az adott korszak elvárásai szerint akart matematikus lenni. A paradigmaváltás akkor történt meg, amikor az integrál- és differenciálszámítás a végtelen kicsi mennyiségek bizonytalan fogalma helyett a határérték szilárdan megalapozott fogalmára épült. Ez a folyamat a a XIX. században zárult le, három évszázad matematikusainak munkája nyomán. Hogyan jelent meg ez a paradigmaváltás a felsőoktatásban?

II: Hogyan született az eltitkolt trükkökből tudomány?

Archimédesz

Az integrál és differenciálszámítás előtörténete nagyon régi, eredetének egyik ága a területszámítás. A gyakorlati életben általában szabálytalan alakzatok területére vagyunk kíváncsiak, de kezdetben nagyon nagy egyszerűsítéssel a téglalapok, a háromszögek és más sokszögek területének kiszámolására találtak eljárásokat. Az ókori Egyiptomból maradtak fenn területszámítási példák, általában az írnokok gyakorló füzetében, pontosabban a megmaradt papirusz lapokon. Nagy változást jelentett az antik görög matematikában ezeknek az egyszerű számításoknak a matematikai szigorúsággal történt megalapozása. Archimédesz bonyolultabb alakzatok területének kiszámítására keresett eljárást. Talált is. Azonban eljárása nem illeszkedett abba a szigorú matematikai elméletbe, amelyet Euklidesz foglalt össze Elemek című könyvében. Archimédesz ezért eltitkolta eljárását. A titkolózással az analízis tudományában a későbbiekben is fogunk találkozni. Nézzük, mit titkolt el Archimédesz? Miért? És hogyan derült fény a titokra?

Archimédesz eredménye a parabolaszelet területéről már az ókorban is megjelent (Akkor is volt tudományos „könyvkiadás", bár nyomda még sokáig nem volt). Ő, látszólag kitalálta, megérezte, megsejtette mennyi is a kérdéses területet, majd korrekt módon bebizonyította, hogy valóban annyi. Ez az



1. ábra: A kör területének meghatározása infinitézimálisokkal eljárás mai módszereinkkel ellenőrizhető és valóban pontos. Teljes mértékben megfelel az Elemek szigorú elméleti követelményeinek is. De hogyan sejtette meg Archimédesz a kérdéses értéket? A sejtés nagyon pontos algoritmus eredménye volt, fizikai analógiára, a mérleg egyensúlyi helyzetére épült, és használta a végtelen kicsi mennyiségeket. A végtelen kicsi mennyiségek használata nem fér bele az euklideszi matematikába. Éppen Archimédesz nevéhez fűződik az az axióma, amelyik kizárja ezeket a végtelen kicsiket a matematikából. Nincs legkisebb pozitív szám. Bármilyen kicsi pozitív számhoz található olyan természetes szám, amelynek a reciproka kisebb, mint az adott kicsi számunk, de természetesen nagyobb, mint 0. Pedig milyen jól használhatók ezek a végtelen kicsi mennyiségek: a kör kerületének ismeretéből azonnal megadható lenne a területe is.

De még nem született meg a határérték fogalma, így ennek az érvelésnek sem jött el még az ideje. Archimédesznek a módszere, ahogyan meg lehetett sejteni a görbével határolt alakzat területét, ma úgy mondjuk, hogy a függvény görbéje alatti terület kiszámításának módszere, véletlenül maradt fenn, a módszerét nem akarta az akkori szélesebb nyilvánosság elé tárni. Archimédesz többi munkáját sokat másolták, azok több forrásból is ismerhetők. De van egy tanulmány, amit ritkán másoltak, aminek most egyetlen eredeti példánya létezik és az is csak 1906 óta ismert. A története olyan érdekes, hogy röviden ismertetem. Archimédesz hét tanulmányát, köztük több, más forrásból is ismertet 975-ben Konstantinápolyban lemásolták. 1229-ben egy szerzetes a pergamenről lekapargatta a számukra érdektelen írást, a nyomokat narancslével halványította, majd a lapokat 90 fokkal elfordítva imákat írt rá. Egy német tudós 1840 körül megvizsgálta ezt a kéziratot is, és matematikai szöveget fedezett fel a szent szövegek hátterében. Görög tudósok 1890-ben a matematikai szövegeket Archimédesz műveként azonosították, majd 1906-ban el is tudták azt olvasni. E történet 2008-ban ért véget, amikor a Pentagon tudományos eszközeit is felhasználva, röntgensugárzásos vizsgálattal feltárták a kötet teljes matematikai tartalmát, anélkül, hogy a szintén nagy értékű későbbi szöveg károsodott volna[12].

Archimédesz *Módszer* című műve arról szól, hogyan lehet megkapni azt a formulát, amellyel az adott görbeszelet területe számítható. Ehhez ma a fizikából ismert, és éppen Archimédesz által vizsgált emelőket, ezen belül a kétkarú mérleget, annak egyensúlyi helyzetét alkalmazta, és használta a végtelen kicsi mennyiségeket. Az előbbi ábra segít megérteni ezeket a végtelen kicsi mennyiségeket. A kört gondolatban végtelen sok körcikkre bontjuk fel, így

[12] A teljes történet, remek képekkel illusztrálva olvasható ezen az oldalon: http://collegequarterly.ca/2013-vol16-num02-spring/vallianatos.html

egy-egy körcikk területe végtelen kicsi lesz. Ezekből összerakunk egy körülbelüli téglalapot, amelynek egyik oldala a kör sugara, a másik pedig a kör kerületének a fele. Mindannyian látjuk, az eljárás működik, helyes eredményre vezet. De hol a probléma? Szemléletünk elfogad olyan közelítéseket, amelyeket egyszerű matematikai eszközökkel nem tudunk pontosan leírni. (Euklidész a kör területének kiszámítására ezt az eljárást nem alkalmazta, matematikailag korrekt eljárást adott meg.)

Gyönyörű szép, interaktív ábrák segítik Archimédesz módszerénék megértését egy angol nyelvű honlapon[13].

Newton

Archimédesz munkája nem befolyásolta a nyugat-európai matematika fejlődését. A XVII. században Newton és Leibniz újra felfedezte az integrálszámítást és felfedezték a differenciálszámítást is. (Archimédesz munkája csak évszázadokkal később vált ismertté.) Mindketten használták a végtelen kicsi mennyiségeket.

Leibniz Newtontól függetlenül, vele egyidőben fedezte föl az integrál- és differenciálszámítás összefüggéseit. Leibniz azt mondta, pontosabban egy matematikusnak írta, hogy végtelen kicsi mennyiségek nem léteznek, ő ezt be is tudja bizonyítani, de nagyon jól használhatók, ezért ő a matematikai levezetésében használja is azokat[14]. Ezzel szemben Newton arra törekedett, hogy megmagyarázza fizikai példákon keresztül, hogy mit ért a végtelen kicsi mennyiségen, de azt igyekezett elkerülni, hogy matematikai értekezéseiben használja azokat. Nem akarta nyilvánosságra hozni, hogy van még valami megoldatlan részlet, amit eddig nem sikerült korrekt matematikai módszerekkel megoldania. Talán véletlenül jelent meg a Principia[15]-ban, amely a fizika megalapozása, Newton levezetése.

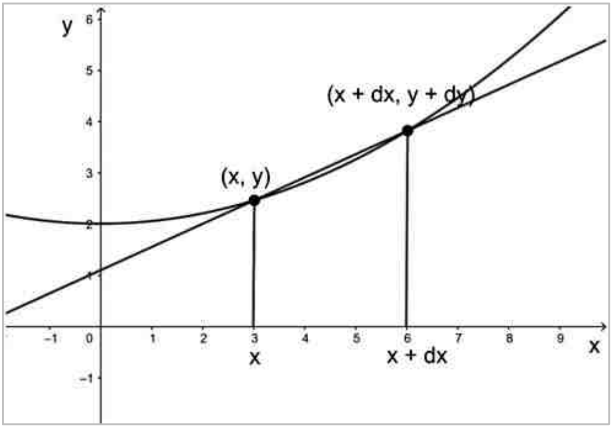
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx - (dx)^2}{dx} = 2x \quad \text{ahol dx elhanyagolható}$$

2. ábra: Newton levezetése a szabadesés pillanatnyi sebességéről, mai átírásban

13 Archimedes Mechanical Method with Indivisibles, The Method, Prop. 1© by Henry Mendell (Cal. State U., L.A.) https://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Archimedes/Archimedes%20Method/Prop1/ArchMethodProp1.html

14 George MacDonald Ross idézi a a Varignonhoz írt levelet művében: ARE THERE REAL INFINITESIMALS IN LEIBNIZ'S METAPHYSICS?

15 Isaac Newton – Philosophiae Naturalis Principia Mathematica



3. ábra: *Az érintő meredekségének kiszámítása, a szelőkre építve*

Az ábra is, a levezetés is Newton gondolatait közvetíti mai átírásban. Newton a szabadon eső test pillanatnyi sebességét az átlagsebességből fejezte ki, úgy, hogy azt feltételezte, hogy a tekintetbe vett idő végtelenül kicsi, de nem 0. Vagyis, amikor osztott az időtartammal, akkor az nem volt 0, tehát lehetett osztani vele, de amikor megkapta a hányadost, akkor az abban szereplő időadatot elhagyta, mivel az végtelenül kicsi. Mai szemmel látjuk, hogy tulajdonképpen határértéket számolt, mielőtt a határértékfogalom megszülethetett volna. Vegyük észre, hogy bár a folyamatban közelítő értékek szerepelnek, a kiszámított eredmény pontos.

A legnagyobb kortársak észrevették, hogy ez az eljárás így, nem helyes matematikai megoldás. Már Newton halála után írta Berkeley püspök, hogy két mennyiség vagy egyenlő, vagy nem az. Harmadik lehetőség nincs. Egyetlen kifejezésen belül nem változtathatom meg a dx értékét. A szemléletes magyarázattal kapcsolatban is nagyon élesen bírálta Newtont. Így írt a végtelen kicsi mennyiségekről[16]:

May we not call them the Ghosts of departed Quantities?" Miért nem nevezzük azokat az eltűnő mennyiségek kísérteteinek?

Bolzano, Euler, Fourier, Cauchy, Weierstrass, Lobachevsky, Dirichlet, Dedekind, Hardy és sokan dolgoztak problémán: Miért hanyagolható el Newton levezetésében a dx? Ma már egyszerűen leríhatjuk a választ: Mert a dx határértékével számolunk, az pedig 0. És az említett tört sem osztás valójában, hanem egy törtkifejezés határértéke

[1616] George Berkeley: The Analyst, első megjelenés 1734.

III. Összegzés

Megtörtént a forradalmi változás a matematikában. És a matematika oktatásában? Látszólag minden rendben. A tudomány általánosan elismert eredményeit közvetítik az elhangzó előadások, a megjelenő tankönyvek. A leendő matematikusoknak izgalmas kaland megismerni ezt a különleges szellemi alkotást, méghozzá párhuzamosan a jelenséget, a folytonos változások világát, és az ide tartozó praxist, a példák megoldását, a bizonyítások megértését, újraalkotását és más feladatokban történő önálló alkalmazását.A többi egyetemi hallgató többsége azonban, akiknek matematika kötelező tantárgy, bár nem a szakjuk, értetlenül figyeli a történéseket. Vagy semmit sem ért az előadásokból, vagy azt nem érti, hogy nyilvánvaló állításokat miért kell bonyolult módon bizonyítani, máskor meg nehéz észrevenni, hogy mi is az állítás. Az analízis oktatásában nem történt meg az a változás, ami például a geometriában igen. Ma már senki sem gondolja, hogy az axiomatikus geometriával kell kezdeni a geometria tanulását. Az analízis oktatásában még paradigmaváltás előtt állunk.

A paradigm shift in the history of integral and differential calculus, the birth of mathematical analysis

A paradigm shift in the history of integral and differential calculus

What does paradigm shift mean in mathematics?

What are the real-life problems that Archimedes and Newton sought to answer? Specifically, what were the old questions that arose in the work of mathematicians?

How has this changed? How did mathematicians from the 18th century seek the theoretical answer? How can mathematically undefined concepts be eliminated from calculations?

Of course, there were still practical problems to be solved, but in mathematics the main issue became the axiomatic foundation of the analysis. In this work I used dr. the results of our joint research with Eleonóra Stettner (University of Kaposvár). Thanks for her making the illustrations

Keywords: mathematical analysis, practical problems, theoretical foundation